[illegible]

[illegible]

QVADRATVRA CIRCVLI ET HYPERBOLÆ SEGMENTORVM

Ex dato eorum centro grauitatis, vnà cùm inuentione proportionis & centri grauitatis in portionibus sphæræ plurimorumque periphericorum, nec non tetragonismo absoluto certæ cuiusdam cylindri partis, & aliorum:

Demonstrata atque ad calculum reducta adiumento libræ Archimedeæ & à materiâ diuulsæ, quam præsenti Opere restaurat atque amplificat

ANTONIVS LALOVERA Societatis IESV.

TOLOSÆ,
Apud PETRVM BOSC.

M. DC. LI.

LVDOVICO XIV. REGI CHRISTIANISSIMO.

QVADRATIONEM *circuli thesaurum esse, REX OPTIME, suadet tot tantorumque virorum iudicium, qui ad illam inueniendam iam bis mille abhinc annis omni studio incubuerunt. Horum ego exemplo adductus, cùm vbi illi scrutari desierant sollicitè quærere, & egestis* *impedimentis altiùs in abdita rerum descendere ante annos aliquot cœpissem, exoptatum tandem effodere mihi visus sum non exiguâ ex parte thesaurum; quem dum tollo, deliberandum mihi non fuit, quò eum asportarem; quò enim nisi ad Te cui multis nominibus deberi sciebam? Tuus namque est non ideo solùm quod in publico loco est repertus; verum ex eo etiam quod illius Repertor singulari quodam iure in tuâ est potestate; quatenus scilicet in eam societatem est adscriptus quæ totam se Tuæ Majestati mancipatam profitetur, quippe quæ in tuo primùm nata sit Regno, in eôque Regijs beneficijs aucta creuerit, quorum il-*

lud præcipuum numerat, quod Henricus cognomento Magnus, & Ludouicus Iustus, ille auus tuus, hic parens, Túque ipse viros ex eâ assumsistis, qui vobis à sacris Confessionibus & à summæ religionis secretis forent. Adest præterea mihi alia huius Operis Tibi offerendi causa, quòd Regijs licet studijs liberales complectaris artes omnes, præcipuo tamen eas fauore prosequeris, quæ ad militares attinent disciplinas; at verò noster hic labor omnia notis definit, præscriptisque mensuris, sine quibus castrorum metatio nulla, nulla fossæ vallíque munitio rectè instituatur; sed quod magis ad rem facit, istud assequitur libræ illius *ope, quâ Philosopho in Mechanicis testante quicquid est in Machinali scientiâ admirabile, & ad bellicas expeditiones pernecessarium, omninò continetur. Quid quòd libra adeo expressa est repræsentatio Iustitiæ, quæ Francorum Regibus singulari quodam præ cæteris priuilegio perpetua comes assidet, vt dubium esse nullum potuerit, quin eius restauratio, amplificatio, & vsus adhuc incompertus Tibi iucunda acciderent. Porrò summam istam, quam modò dixi, repræsentationem exhibet, dum* ἀντιπεπονθὸς *illud (patere Rex benignissime græcam vocem cui vix vlla Latina planè respondet). quod Ethice velut diuinam Re-*

cti normam in Iustitiæ manus tradit, ita pensiculatè obseruat, vt tunc solùm inæqualia duo grauia stare in æquilibrio sinat, quando ponderum isthæc inæqualitas aliâ longitudinum, quibus vtrinque de iugo pendent, compensata planè iuxta Geometricam ἀντιπεπονθότος legem fuerit, prout Archimedis libri de Isorrhopicis editi demonstrant. Hæc omnia effecerunt, vt ausus sit liber iste ad Te accedere exemplum etiam aliorum secutus, qui de hoc argumento scripti Antecessores tuos præsertim Franciscum primum quamuis præmaturè adierunt; quippe istud tuæ Maiestatis æuo reseruabatur, vt Orbis dimetiendi ratio eo tem-

pore illuſtraretur, quo regnare inciperet eius imperio dignisſimus; hoc verò vt diu fœliciterque præſtes opto, & à Deo ſummis precibus flagito in Collegio Toloſano Idib. Dec. An. M.DC.L.

Deuotus ſacræ M. T.

ANTONIVS LALOVERA,
Societatis IESV.

AD LECTOREM.

ROgo te, Beneuole Lector, vt si quam propositionem ex hoc Opere legendam susceperis, priùs inspicias vtrum aliquid, quod ad illam spectet, correxerim vel adiecerim in appendice. Moneo etiam te nullum ex Recentioribus qui de hoc argumento tractet à me lectum fuisse; non quidem ex vllo contemptu (hoc enim longè abest à moribus meis) sed quòd eius copiam habere non potuerim. In Bibliotheca nostri Alegambe tres inueni quos diu frustra quæsiui; Ioannis Caroli de la Faille *Theoremata de centro grauitatis partiũ circuli & ellipsis*; Pauli Guldin *centrobaryca*; & Gregorij à Sancto Vincentio *Theoremata scientiæ staticæ*.

Istius quidem vltimò recensiti nactus sum ante sex menses *quadraturam circuli*; sed in eius quàm amplo sanè Opere, nihil de librâ inueni: gauisus tamen sum quadraturam *cunei primi noti*, quam vnicâ propositione (ea est vigesima quinta libri quarti) ope libræ tradideram & ad calculum exegeram, ab eo sub *vngulæ* nomine aliter pertractatam fuisse longâ doctâque propositionum serie. Quadraturam verò circuli quam exponit examinare nondum mihi licuit; eam tamen omnino absolutam non esse vel ex eo apertum est, quod ad numeros non sit ab Autore deducta, nec monstratum quæ sit lateris quadrati circulo æqualis ratio ad diametrum, vel certè ipsius diametri ad peripheriam. Hoc verò iustè, meo quidem iudicio, exigitur; dum enim ad calculum venitur multa sape deteguntur vel non probata, vel falsa:

aliquando verò calculi methodus tot binomijs apotomiſque & id genus linearum incommenſurabilium nominibus implicatur, vt ad praxim vtilis exitus nullus ſperetur. Ego certè niſi in animo hoc fixum ſtatuiſſem quadraturam circuli nullam pro verâ & planè abſolutâ habendam mihi eſſe, cuius non definirentur ratiocinia, & ad demonſtrationem Archimedeam de circuli dimenſione exigerentur, me ipſum iamdiu multoties fefelliſſem, nec dubito quin plurimis imprudens illuſiſſem. Quid porro in his libris inuenerim ex ipſo Operis titulo (qui nihil exaggerãdo promittit) intelligis, vt puto, ſatis; pleniùs tamen perſpicies ſi attentè quæ in eo ſcripſi, meditatus fueris. Quadratura quam libro tertio demonſtro fœliciùs & ſine tanto apparatu procedit per libram, quam planam appellaui, & cuius vſum ad numeros redactum habes in secundâ & tertiâ libri quinti; in cuius etiam decimâ tertiâ leges quadraturam plane mirabilem (absit verbo iactantia) quorundam periphericorum quorum basis est circulus vel hyperbola, altitudo verò parabola; *ea dicylindracea* nominaui. Neque minùs admirandam existimo inuentionem proportionis quam inter se habent conica, sphærica, conoidea, & sphæroidea; licet enim Archimedes eiusmodi proportionem iam olim excogitarit, suóque in sepulchro monumentum eius extare voluerit, nos tamẽ diuersâ plane viâ idipsum reperimus, aliáque adiũximus adhuc irreperta. Atq; hæc ipsa via eò pluris est facienda quod centra grauitatis in sphæræ, & hyperbolici conoidis portionibus determinet, cum nullus ante nos, quem nouerimus, id demonstrarit; nam Archimedes in parabolico hæsit, prout in quarto libro, vbi ista omnia tractantur, aduertimus. Vno verbo patere, Lector amice, dicam nihil esse alicuius momenti in toto hoc opere quod à me inuentum non sit, & quod non suppressissem si apud alios Scriptores iam demonstratum esse mihi perspectum fuisset.

Facultas R. P. Prouincialis facta Autori.

EGo ANTONIVS SAVIGNACVS Præpositus Prouinciæ Tolosanæ Societatis IESV concedo Antonio Laloveræ Societatis nostræ Presbytero facultatem edendi *Quadraturam circuli & hyperbolæ* à nostris de more recognitam & probatam: in cuius rei fidem has literas manu meâ subscripsi, & sigillo mei officij munitas tradidi. Tolosæ die 7. Maij anni 1648.

Eiusdem facultas facta Librario iuxta Regis Priuilegium.

EGo ANTONIVS SAVIGNACVS Societatis IESV in Prouincia Tolosana Præpositus Prouincialis librum qui inscribitur *Quadratura circuli & hyperbolæ* Autore P. ANTONIO LALOVERA è Societate IESV, iuxta priuilegium eidem Societati à Regibus Christianissimis Henrico III. 10. Maij 1583. Henrico IV. 20. Dec. 1606. Ludouico XIII. 14. Febr. 1611. concessum, quô Bibliopolis omnibus prohibetur, ne libros ab hominibus Societatis nostræ compositos, absque Superiorum eius permissu imprimant, Permitto PETRO BOSC, vt ad 10. annos imprimere, ac libere diuendere possit. Datum Monspelij 17. Nouemb. 1650.

ANTONIVS SAVIGNACVS.

PROLEGOMENA AD CIRCVLI tetragonismum.

§. 1.

Quid hac voce significetur.

QVadrare circulum τὸν κύκλον τετραγωνίζειν nihil est aliud quam vt ait Archimedes initio quadraturæ paraboles κύκλῳ χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον *circulo æquale rectilineum spatium inuenire*; vel vt pressiùs Simplicius, 1. Physicorum τῷ κύκλῳ ἴσον τετράγωνον θέσθαι *circulo æquale quadratum constituere*. Quamuis autem innumeræ sint rectilineæ figuræ à quadratâ diuersæ, Archimedi tamen satis fuit definire quadrationem circuli inuentione rectilinei illi æqualis, quoniam iam ab Euclide tradita fuerat methodus

fol. 12. edit. Aldinæ.

quadrandi quamlibet figuram rectilineã, & viciſſim quodlibet quadratum in diuerſæ rationis cuiuſcunque
Propoſ. 25. ἰσόγραμμον æquale cõuertendi. Libro etenim ſexto datis duabus figuris rectilineis docet methodum inueniendi tertiam rectilineam, quæ alteri ſimilis ſit, alteri æqualis: quòd ſi datæ figuræ non fuerint ambæ eiuſdem generis, ſed vna duntaxat earum rectilinea, altera curuilinea aut mixta; inuenire rectilineam illi ſimilem & æqualem iſti, id erit curuilineam aut mixtam ἰσοευθυγραμμίζειν, vt ita dixerim, hoc eſt in rectilineam ſeruata ſpatij paritate commutare: & ſi quidem curuilinea fuerit circulus aut parabola, rectilinea verò quadratum, id erit circulum quadrare aut parabolam; quod poſtremum iam olim præſtitit Archimedes, noſque eius veſtigijs inſiſtendo ad illud alterũ præſenti opere progredimur.

Cæterò ille libellum hac de re inſcripſit κύκλου μέτρησιν *circuli dimenſionem*, non quòd omnis circuli dimenſio ſit eius tetragoniſmus (menſurâ enim circulari, & quidem facilè eum metiri possumus) sed quia Geometræ in 2. duc- mensuris capiendis communiter adhibent deci. certi cuiusdam modi rectum canonem, vt quot eiusmodi canones (siue pedales, siue alterius rationis fuerint) quadratos aut etiam cubicos res emensa contineat, indagent. Atque hæc mensurandi ratio per lineas rectas ita communi hominum captui accommodata est, vt cùm illâ ipsâ methodo quâ circulus τετραγωνίζεται, quadratũ κυκλίζεσθαι valeat; circuli tetragonismus, potiùs quàm quadrati cyclismus in ore omnium sit.

An circuli tetragonismus sit possibilis.

§. II.

CVm circuli tetragonismus adeo sit abstrusus prima de eo quæstio iure merito instituta olim fuit, vtrum vllatenus esset, an potius inter centauros chimerasque locum haberet: Nam primum quod de vnoquoque

ignoto quæritur Aristoteles assignat
l. 1. poste. c. 1. εἰ ἔστι, *an sit vt an*, inquit *centaurus sit.*
Hæc porro quæstio ita æuo illius
controuersa extitit, vt in Cathegorijs assensum suspendat: postquam
c. de relat. enim affirmauit eiusmodi tetragonismum sublato ἐπιστητῷ hoc est (vt vulgò loquimur in Schola) *scibili*, simul tolli scientiam, quia nisi sit scibile non est scientia: subdit *Si tamen scientia, non sit nihil prohibet scibile esse* οἷον καὶ ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς εἴγε ἐστὶν ἐπιστητόν, ἐπιστήμη μὲν αὐτοῦ οὐκ ἔστιν οὔπω, αὐτὸ δὲ ἐπιστητόν ἐστιν, *vt si circuli tetragonismus cadat sub scientiam, ipsius scientia nondum quidem est, ipse tamen est quidpiam scibile.* Inde autem fortasse euenit vt anceps iudicata tunc fuerit præsens controuersia, quòd ij qui ἐπιστητὸν esse demonstrandum susceperant, non nisi fallacibus rationibus vsi fuerint, sicuti postea dicemus. Illud certè magis mirabile videatur, hocce dubium hæsisse in quorundam animis etiam post Archimedis hac de re inuentum, quo per deductionem εἰς τὸ ἀδύνατον demon-

ſtrat circuli ſpatium eſſe æquale parallelogrammo rectangulo comprehenſo ſub diametro & ſub quartâ parte lineæ rectæ æqualis ipſi perimetro circuli; iſtiuſmodi autem deductio in eo eſt poſita, quod ea eſſe datur ſequi ἀδύνατόν τι ſiue eſſe maius, ſiue minus ponatur: vnde concluditur, cùm neque maius neque minus eſſe poſſit; æquale eſſe debere.

Simplicius in Ariſtotelis primum Phyſicorum teſtatur Ammonium præceptorem ſuum multum propendiſſe in id vt circuli tetragoniſmum ἀδύνατον cenſeret; alioſque eiuſdem ſententiæ fuiſſe innuit Philoponus in ſecundum Poſteriorum. Cauſa verò quæ ad talem opinionem illos impulit, hæc ferme eſt. Sicut ſemicirculi angulo nullus rectilineus eſt æqualis, licet dentur infiniti eo maiores, rectus ſcilicet & omnes obtuſi: & infiniti pariter minores, nimirũ acuti omnes, vt ex Elementis ſatis conſtat: ita nec abſurdus videri debet qui poſtquam

fol. 13. pag. 26. edit. Aldin.

fol. 15. pag. 29. edit. eiuſdẽ.

16. tertij.

admisit dari innumeras figuras rectilineas circulo maiores, innumerasque minores; quæ tamen æqualis ipsi sit, possibilē neget esse; præcipuè cùm sicuti angulus rectilineus & mixtus ille, ita etiā figura rectilinea, & curuilinea sint diuersi generis, & vt Græci loquuntur heterogenea; illudque effatum *vbi est maius & minus, ibi etiam est æquale* non sit verum nisi in homogeneis, & quæ eiusdem sunt generis.

Verùm Archimedis demonstratio nititur tantùm principiis omnium consensu probatis: primum enim illud eius postulatum, *inæqualium spatiorum excessus quo maius superat minus; fieri posse, vt sibi ipsi coaceruatus quodlibet propositum definitumque spatium excedat* assumunt propositiones duodecimi Euclidis omnium
2.duod. 18.duo 10.dno. nobilissimæ & pulcherrimæ quibus ostenditur circulos inter se proportionem habere duplam diametrorū; sphræsque triplam axium; omnem
7.duod. in Coroll. præterea conum tertiam partem esse cylindri eandem ipsi basim habentis

& altitudinem; & omnem pyramidem tertiam partem prismatis, quod eandem basim habeat pyramidi & æqualem altitudinem. Quæ omnia non minùs certa sunt habita, quam si absque eiusmodi principio fuissent demonstrata; vt rectè monet idem Archimedes in libello de quadraturâ parabolæ, vbi in huius confirmationem addit sua etiam scripta quamuis eodem fulta fundamento perinde indubitata omnibus fuisse. Verba eius vt in editione Heruagiana extant egent emendatione, & ita legi debent prout legisse videtur prior interpres Iacobus Cremonensis; posteriorem enim Commandinum in abruptam sententiam induxerunt. ἔγγιαφον συμβαίνει τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδὲν ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτων ἀναγμένων τῶν ἐκδιδομένων; *euenit prædictorum theorematum singula non minùs probata fuisse quàm alia quæ sine eiusmodi postulato demonstrata erant: simili quoque assensione excepta sunt, quæ ex eiusmodi* *lemmate deducta nuper edidimus.*

Insuper Archimedes in eadem demonstratione sumit circuli perimetro posse dari rectam æqualem, hocque ipsum vsurpat in libro de lineis spiralibus huius maximæ tetragonismi gratiâ scripto; postulat verò sibi dari in versione vtrâque paulò superiùs commemoratâ, quamuis id postulatum ex editione græcâ exciderit. Adeo clarum est hocce ἀξίωμα

in libr. de circ. dimés.

vt nullus vnquam teste Eutocio, illud in dubium reuocasset. Auerroes tamen postea l. 1. poster. videtur hac de re dubitare dum asserit nullam esse verè proportionem inter lineam rectam & circularem; aperiùs autē

com- ment. 67.

7. Phys. affirmat, *quòd impossibile est de quantitatibus esse æquales nisi rectas tantùm, scilicet quæ sunt eiusdem speciei, cum istæ sibi superponantur*, idipsum inculcat 10. met. Sed aut falsi

com. ment. 29.

dicendum est istum Authorem; aut reducendus est in legitimum sensum, si cui hæc cura insit cum Tomitano contradict. 64. & Zimara theoremate, 51. Licet curua & recta linea

Com. ment. 10.

non ita possint componi, vt sibi simul congruant, & communem habeant partem, id tamen non obstat quo minus curua possit intelligi coaptari rectę, non solùm quia curua eâdem dimensione seruatâ potest in directum flecti, & recta in curuum; verùm etiam quia dum circulus per planum volui concipitur, rectæ curua successu temporis coextenditur.

Ratio itaque cur peripheriæ circuli alteriue curuæ lineæ possit recta æqualis dari, est, quia mente saltem κυρτότης siue curuatura ita separari potest ab ipsâ, vt magnitudo in longum dumtaxat extensa relinquatur, eaque extensio in ratione longitudinis inuariata maneat. Hoc sibi vult Eutocius dum in primam dimẽsionis circuli propositionem ita scribit ἐπ) τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου παντός, δῆλον οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐστ' ἐνδιαστάτων, ἐστὶ δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφάνη δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως ὑπάρχειν τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς οὐδενός ἐστι ζητούμενον quæ quia ſatis obſcurè conuerſa fuit, ita reddo *circuli peripheria eſt, vt omnibus apertum reor, magnitudo eáque vnam tantùm dimenſionem habens nempe longitudinem ſolam; atqui recta linea eſt catenùs eiuſdem rationis & ſpeciei: licet igitur nondum vllus potuerit tradere methodum comparandi rectam æqualem circuli perimetro attamen aliquam eſſe illi naturâ æqualem iure optimo omnes citra vllum dubium conſenſere.* Quod igitur circulare & rectum dicantur eſſe ab Ariſtotele ſpecie diuerſa, id non obſtat, quominus ſint magnitudines eiuſdem illius ſpeciei eſto non atomę, cui eſt proprium vt quæ ſub ipsâ continentur, æqualia ſint, vel additione aut detractione fieri poſſint. At verò angulus contactus (quẽ κεϱατοειδῆ appellãt,& quo angulus rectus ſuperat angulũ ſemicirculi definiti ab Euclide initio libri primi defin. 18.) & rectilineus ideo non ſunt illius eiuſdem ſpeciei, quòd ſi ab angulo contactus ſeparari intelli-

5. Phyſ. textu 53.

gas lineæ ipsum cõprehendẽtis κυρτό-τητα & loco illius substitui rectitudinem, non relinquitur eadem anguli magnitudo vt demonstratur in Elementorum tertio. Ergo cùm eadem anguli magnitudo non possit remanere si curua angulum comprehendens dirigatur in rectam, sed semper fiat maior; rectè dicitur curuilineum & rectilineum angulos non posse coaptari, neque esse per accidens quãtum ad ipsorum æqualitatem spectat, quòd vnus curuilineus, alter sit rectilineus; sicuti est per accidens, quantum ad æqualitatem curuæ & rectæ attinet, quòd curuæ vel rectæ existant. Illud postulatum *omni curuæ lineæ dari rectam æqualem* quamuis, vt iam diximus, verum contineat; nobis tamen in præsenti conatu necessarium non fuit; sed istud *inæqualium spatiorum excessus quo maius superat minus, fieri potest vt sibi ipsi coacervatus quodlibet propositum difinitumque spatium excedat*, vnà cum Archimedeis libræ principiis, quibus nemo, quod sciã, ad hunc diem contradixit, neque verò ijs probabiliter repugnari potest, vt monstramus in libello quem hac de re conscriptum habemus.

Quòd si quæras cur istud sine probatione sumat, cum similis propositio sit falsa *inæqualiũ angulorũ excessus quo maior superat minorem, fieri potest vt sibi ipsi coacervatus, quemlibet propositum definitumque angulum excedat*: excessus enim quo angulus rectus superat angulum contentũ sub diametro & sub peripheriâ ad contactum conuenientibus quantumuis sibi ipsi accumuletur, nunquam excedet quemuis angulum rectilineum propositum. Respondeo sicut euincitur dari angulum curuilineum minorem quocunque rectilineo, vnde efficitur vt quamuis multoties sibi ipsi adiunctus, nunquam eo vsque excrescat, vt datum rectilineum angulum superet; ita ex terminorum comprehensione euidens esse *nullum dari planum spatium, quibuscunque lineis claudatur, quin intra ipsum contineatur figura plana data similis*, (magna an parua sit, nihil refert) *ac proinde quin toties in vnũ conferri possit, vt cumulus datam figuram excedat.* Clarum etenim est figuram interiùs descriptam, cùm similis sit datæ, posse toties sibi ipsi accumulari, vt aceruus datam superet: ergo si pars potest ita augeri, multò magis id poterit totum ipsum cuius est pars. En quo initio veluti gradu primo ad tã longè posita perueniatur. Quod si principia non concesseris, Mathematicus digitum progredi non potest, vt ait Tullius: sed quænam alia disciplina id potest? Zimara antè laudatus concedit quadrationẽ circuli esse mathematicè possibilem, physicè tamen possibilem negat; quo dicto quid sibi velit non satis percipio; vel si mentem eius assequor, falsum enuntiat.

academ quæst. 1. 2.

Quamuis circuli tetragonismus sit φύσει possibilis, an tamen etiã sit πρὸς ἡμᾶς, hoc est, an post Adæ lapsum homo eius scientiam absque speciali diuinæ gratiæ auxilio possit cõparare iure merito inquirunt Theo-

Suar. tom. 1. de grat. l. 1. c. 1. n. 9.

logi, pronuntiantque hanc veritatē tantâ esse caligine inuolutam, vt illam videre nemo possit nisi ignorantię ex primi parentis præuaricatione propagatas tenebras indebitus diuinæ lucis radius dissipet; quod verissimum esse sentio, quare nec mihi ex isto opere, nisi quid peccatum est, arrogo quicquam memor illius Bernardi sententiæ *quis credat parieti, si se dicat parturire radium quē suscipit per fenestram?*

serm. 13 in cant.

Duplex conficiendi alicuius problematis ratio explicatur Mathematica & Mechanica.

§ III.

PRoblematis à theoremate discrimen in eo positum esse, quòd problema aliquid faciendum proponat; theorema autem in nudâ veritatis contemplatione consistat, norunt omnes. Hinc porro consequens fit vt problematis solutioni propria sit κατασκευὴ *constructio* quædam, qua posita id ostenditur peractum esse quod propositum fuerat, vnde sub finem problematum clausula solennis additur *quod faciendum erat* ὅπερ ἔδει ποιῆσαι vel ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν; *quod erat demonstrandum* ὅπερ ἔδει δεῖξαι vel δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα, aut simili aliâ verborum forma.

Pro duplici genere instrumentorũ quibus eiuscemodi constructio peragi potest, duplex potissimum consurgit ratio conficiendi problematis; vna dicitur mathematica, altera mechanica; illa magni & quidem meritó penditur, ideoque & nomine ipsius disciplinæ nobilissimæ particeps fit; ista longè inferior veluti hoc nomine indigna à machinis quas operosiùs adhibet mechanica dicitur; qua deinde voce illiberales notatæ sunt artes.

Mathematica constructionem totam absoluit solo rectarum & circulorum ductu, id est solâ circini & regulæ ope, quæ expeditissima, necessaria tamen sunt Matheseos arma. Mechanica non ita simplex instrumenti genus adhibet, sed machinulas quasdam prius excogitatas extruit, quarum deinde præsidio constructionem problematis molitur. Ita celebre illud problema quod iubet inuenire duas medias proportionales inter duas datas rectas ex antiquis confecerunt plures ministerio quarundam machinularum quas descriptas cernimus apud Eutocium in secundum Archimedis librum de sphærá & cylindro. Idipsum eodem successu tentatum est, vt conficeretur, notum illud problema quo iniungitur diuisio cuiusuis anguli rectilinei in tres æquales partes, de quo Proclus in nonam propositionem libri prim'i Euclidis, & alij.

Plus differunt isti duo modi quàm primo eorum aspectu iudicetur. Nō enim hoc tantùm præferēdus est ille, quod simpliciori instrumentorum apparatu, ac proinde expeditiùs rem propositam exequatur; verùm etiam quoniam quæ ſolius regulæ & circini adiumento præſtantur, ea ex conſtructionis ipſius ratione per calculos arithmeticos ſupputantur, atque vt Græci Artifices loquuntur ἐπιλογίζονται. Quæ res quanti ſit ad vitæ politicę commoda momenti nō ignorant qui mediocriter in iſtis verſati ſunt. Niſi enim mathematicè diuiſeris angulum quemuis in tres & quinque partes æquales, tabulæ ὑποτεινουσῶν Ptolemaïcæ, (*nos ſinuum tangentium & ſecantium* in meliorem redactas modum appellamus) quibus carére Aſtronomica non poſſunt, imperfectæ reſtabunt quamuis id mechanicè perficias. Niſi etiam inter duas rectas datas mathematicâ ratione duas medias inueneris (quamuis mechanicè id aſſequaris) inter duos tamen numeros datos, duos alios medios inuenire arte epilogiſticâ non poteris, nec proinde numeris definire proportionem quam debet habere diameter vaſis ſphærici ad diametrū alterius vaſis item ſphęrici, ſed duplo aut quouis alio exceſſu propoſito capacioris. Sumpſimus autem exempli cauſâ vas ſphæricum; idem namque dici potuit de duobus ſolidis quacunque aliâ vniuſmodi formâ prædi̇tis. Quæ res ad menſuras liquidorum nec non aridorum rectè cognoſcendas & tractandas perneceſſaria eſt, vt ex Villa pandi inter cæteros apparatu ſatis conſtat; cuius autem ſit vtilitatis in architecturâ ad hoc vt ſeruatâ columnarum aut aliorum id genus eâdem formâ, molis & ponderis diuerſitas ſolo calamo innoteſcat ædificij vniuerſam ſtructuram partiumque ſymmetriam meditanti, ſuperuacaneum eſt dicere.

Huc refero quòd Plutarchus in Marcelli vitâ problema nondum niſi mechanicè ſolutum appellat ἄλογον, quia nimirum nondum rationes numericas exhibet, nec propterea poteſt ἐπιλογίζεσθαι: è contrario autem mathematicam ſolutionem vocat λογικὴν καὶ πραγματικὴν ἀπόδειξιν, quòd epilogiſmum & numerorum ratiocinia ſecum trahat. Vnde intelliges cur Plato adeo infenſus eodem teſte extiterit Eudoxo, & Archytæ machinularum iſtiuſmodi inuentoribus; timuit enim vir ſapiens ne his contenti poſteri altiorem, nobiliorem, longiuſque ſemotam à materiæ fæce ſolutionem inquirere præ laboris tædio deſiſterent.

Hinc prætereà apertum eſt cur Nicomedes apud Eutocium propoſiturus inſtrumenti fabricam quo cōchoidem lineam certo ductu deſcribas, & per eam duas medias inuenire poſſis; Eudoxi inuentis inſultet *ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις*, *tanquam deſtitutis idoneâ ad ſcopum attingendum machinâ, nec non vacuis ſucceſſu geometrico.* Quamuis enim Eudoxus machinam, quam ibidem deſcribit Eutocius, inuenerit; quia tamen nullâ certâ ratione per illam inueniuntur duæ mediæ, ſed ſæpiùs tentando donec res optatis congruat, ideo hæc operatio ne mechanica quidem dici meretur. Quæ enim propriè mechanica eſt, certum machinæ inuentæ vſum præſcribit; & hoc vſu conceſſo, geometricis principijs euincit id eſſe effectum quod quærebatur. Iure quoque merito illæ machinæ reijciuntur vt ſpuriæ, in quibus lineæ quædam curuæ deſcribendæ ſunt, nec tamen vlla eas omnino deſcribēdi traditur methodus; ſed certâ viâ aliquot eius punctis notatis, tota relinquitur oculi iudicio quàm proximè delinianda; quod vitij genus animaduertitur in Nicomedis quadam lineâ quadratrice, quam cum hoc næuo placuiſſe tamen tātopere Clauio noſtro miror; ſed & illud quoque mirū mihi accidit, quòd in Geometriâ practica conchoidem Nicomedis maluerit deſcribere per certa puncta ſolo & fortuito in cæteris oculi regimine, quàm vti inſtrumento ad id ingenioſè excogitato, quo linea illa conchæ veſtigio ſimilis perinde συνεχῶς ducitur, atque circino peripheria circuli. Magni ſine dubio fieri debet machina, præſertim ſi expeditè tractetur; quæ continenti tractu lineas eiuſmodi curuas deſignet,

Geometriæ pract. l. 7. in appendice.

l. 6. propoſit. 15. & l. 8. prop. 25.

quarum interfectione cum alijs lineis aliquod problema perficitur: alioqui enim casu potiùs quàm arte habebitur vera interfectio, veraque problematis exequutio. Hinc vt puto accidit, vt Eutocius expofito Menæchmi modo duas medias inuenientis per interfectionem duarum parabolarum, fubdat parabolam defcribi διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μηχανικῷ Ισιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ operâ diabetæ, *quod inftrumenti genus excogitauit præceptor nofter Ifidorus cognomento Mechanicus.*

Non tamen femper ἀμήχανον in malam partem vertitur; fed aliquando etiam in bonam. Infignis ad iftud confirmandum eft locus Theodoreti orat. 5. de prouidentiâ, quo geometricam apum induftriam in fauis extruendis commendans *id infecti genus*, inquit, ἔμφυτον ἔχον καὶ αὐτοδίδακτον τὴν ἀμήχανον ἐργασίαν ὑφαίνει τε τὰ κηρία καὶ πληροῖ τὰ δοχεῖα οὐ μέτρων οὐ κέντρων, οὐ γωνίων δεόμενον, *cùm habeat operandi artem innatam, fine magiftro edoctam, & nullis egentem inftrumentis conftruit* *fauos, eorumque cellas artificiosè implet; neque (vt homines solent) ne aberret, opus suum exigere cogitur ad mensuras, centra, & angulos.* Summa laus & prope diuina operis est vt sine instrumento non incertâ tamen methodo fiat; proxima vt ope instrumenti sed certò conficiatur; postrema & fermè nulla, vt incerto quodam casu peragatur; horum duo extrema cùm medio quod machinale est opponantur, rectè appellar possunt, ἀμήχανα, ac proinde id nominis laudi vel vitio tribui.

Quo sensu Archimedes parabolæ tetragonismum à se primùm διὰ τῶν μηχανικῶν; deinde etiam διὰ τῶν γεωμετρικῶν demonstratum esse dixerit.

§ IV.

QVamuis plurimi aggressi essent circuli & ellipseos tetragonismum, qui tamen parabolem dimetiri conatus fuisset nullum anteriorum se scire testatur Archimedes in opusculo hac de re edito; vt mirum sit quod in scriptis reliquit Plutarchus χωρίον παραβολῆς *aream parabolæ* inuentorem habere Pythagoram, qui eam ob causam à nonnullis dicatur Dijs bouem sacrificasse, quod an congruat viro qui superstitiosè coleret animantes non immerito dubitari solet; Certè Archimedis quamuis de se testantis, vt pote viri synceri & aliunde inuentorum gloriâ cumulatissimi mihi potior est hac in re fides. Is igitur in commemorato opere duplici viâ se ad parabolæ dimensionem peruenisse narrat, *mechanica* primùm quam primis septẽdecim propositionibus tradit; tùm geometricâ, quæ ad finem vsque libelli tractatur. Quoniam verò *mechanica* est illa ipsa methodus, quam nos in tentando circulo tenuimus, poterit alicui inde suboriri suspicio, quadrationem circuli quam molimur non esse *mathematicam*, sed solummodo *mechanicam*. Hoc obiectũ euanescet, postquam Archimedis dicto veram & menti Autoris consentaneam interpretationem dederimus.

Problematis effectio non potest dici *mechanica* prout ista vox vitium aut defectum paulò superiùs explanatũ designat, nisi quatenus in constructione ipsius adhibetur instrumentum aliud quàm simplex circinus aut regula; cùm igitur segmentum parabolæ vtrobique ostendatur ab Archimede esse tertia pars noti cuiusdam trianguli rectilinei, & cùm tertia pars eiusdem trianguli sumatur per simplicia Matheseos instrumenta, manifestum est constructionem huius problematis immunem esse ab omni imperfectione mechanicâ, quocunque tandem modo constructio monstretur esse legitima.

Cur ergo Archimedes alteram è duabus demonstrationibus *mechanicam* dicit? Quia nimirum hæc appellatio à diuersis principijs diuersarum Matheseos partiũ sumpta fuit. Quoniam verò altera demonstratio perficitur non assumptis nisi solis Geometriæ postulatis appellatur *geometrica* : & quia in altera adhibentur etiam postulata *æquiponderantium* siue ad libram attinentia dicitur *mechanica*; nam Mechanicæ admirabiles effectus demonstrantur per libram vt docet Aristoteles initio quæstionum mechanicarum : & vt Proclus in primum Euclidis ait : ὑπὸ τὴν μηχανικὴν ἐστὶ καὶ ἡ τῶν ἰσοῤῥόπων ὅλως, καὶ τῶν λεγομένων κεντροβαρικῶν διάγνωσις. *sub mechanicâ insuper collocatur illa scientia quæ plenè tractat de æquiponderantibus & de iis quæ centrum grauitatis habent.* Simili prorsus ratione si quis in demonstrando principia inserat Optices, poterit demonstrationem suam nominare *opticam*.

Ex hactenus dictis manifestum est *mechanicum* multis modis dici. Aliquando *Mechanica* nobilissimam scientiam significat, quam Aristoteles, vnà cum Opticâ Geometriæ subiungit veluti cognatas, & vt interpretes loquuntur ὑπαλλήλους, nos vulgò *subalternatas* no- 1. poster. tex. 23.

minamus. Huius est ἀρχιτεκτονικῶς præscribere, & demonstrare effectum qui intenditur, necessariò ex præscriptorum exequutione consequi. Nonnunquam *Mechanicæ* nomen descendit ad famulas artes quæ dominæ subseruiunt, & ita illiberale aliquid sonat. Denique *mechanicam* solemus appellare eam κατασκευὴν problematis, cuius imperfectam rationem paulò superiùs tradidimus. Illud quoque ex hactenus explicatis apertum est, dum parabolæ tetragonismus *mechanicè* inuentus dicitur sumendam esse illam vocē iuxta primam significationem; vt sensus sit inuentum quidem esse eiusmodi tetragonismum per simplicem & mathematicam κατασκευὴν: sed vt monstraretur per eam id effectum esse, quod erat propositum, fuisse adhibita principia nobilissimæ illius scientiæ quæ μηχανικὴ dicitur; *Machinalem* reddit alicubi Plinius.

lib. 7. c. 37.

Cur tantopere laboratum sit ab Antiquioribus in inquirendo isto tetragonismo & quo successu.

§. V.

QVamuis ipsum de veritate inuentâ gaudiū satis amplum sit mentis indagatricis, si ingenua fuerit, operæ pretium; quoties tamen illius necessitas stimulos addit, solent homines indefesso labore eam perquirere. Hæc est germana causa cur peruulgata illa tria de quadrando circulo, de inueniendis duabus medijs inter duas assignatas rectas, & de diuidendo angulo rectilineo in tres portiones inuicem æquales, superiores exercuerit Mathematicos omnes qui alicuius nominis extiterint. Et quidem quamdiu diuisio anguli in tres & quinque partes inexplorata erit, necesse est tabulas illas *sinuum*, quas dixi, & sine quibus vix latum vnguem progredi valet Astro-

nomia, imperfectas maximam partem manere; vt omittam Architectis pernecessariam esse polygonorum descriptionem, quæ tamen sine notitia diuisionis anguli rectilinei fieri nequit. Vnde cùm tetragoni, pen-
4 libro tagoni, & hexagoni describendi ratio tradita esset ab Euclide: heptagoni non traditam tentarunt nonnulli, sed frustra vt rectè demonstrat
libro 8. Clauius; inter illos autem memorat
Geom. Franciscum Flussatem Candallam
pract. quem iure optimo appellat virum
prop. 30. doctissimum & nobilissimum. Duarum autem mediarum inuentio tam amplos habet vsus, vt Delphicum illud hac de re oraculum referre superuacaneum sit, cùm quæ hactenus dicta fuere instituto nostro satis superque sint. Non omittam tamen eiusmodi problema à Plutarcho numerari inter elementa Matheseos; ϛοιχεῖον, inquit ἐπὶ πολλὰ τῶν γραφομένων, ἀναγκαῖον, *Elementum ad multa pro-*
lib. 2. in *blemata necessarium.* Neque enim
Eucl. omnes propositiones ita vocari solent; sed vt Proclus docet, eæ tantùm

ὧν ἡ θεωρία διϊκνεῖται πρὸς τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστήμην, *quorum cognitio ad aliorum scientiam requiritur*; hoc, inquit, nomine desumpto à Grammaticis qui vocũ scriptarum principia prima, simplicissima & indiuisa *elementa* appellant. Circuli postremò tetragonismus nesciri non potest, quin mensura innumerorum, inter quæ ipse orbis mundi principem locum tenet, figurâ sphæricâ vel cylindricâ præditorum ignoretur.

Huius necessitatis publicæ apertum argumentum esto, quòd, quoniam cùm illorum problematum solutiones accuratæ inueniri non poterant, excogitatæ fuere earum loco aliæ quàm minimè ab ipsis aberrantes, vt ijs tanquam veris Artifices vterentur. Istud, vt cætera omittam, de præsenti tetragonismo clarè euincit libellus quem Archimedes inscripsit *de circuli dimensione* tanquam πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον *ad vitæ vsus necessarium*, vt Heraclides in eius vitâ testatum reliquit apud Eutocium. Neque enim ibi scopus illius Autoris est inuenire veram circuli quadrationem, sed vt idem Eutocius ait; σύνεγγυς εὑρεῖν διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας *quàm proximè accedere propter vitæ humanæ commoda.* Putauit numeris ambitum polygonorum duorum, quorum singula constant nonaginta sex lateribus, vnum autem eorum circulo inscribatur, alterum circumscribatur; sumptóque eiusmodi polygonorum ambitu, altero pro paulò maiori peripheriâ, altero pro paulò minori inuenit rectam lineam æqualem perimetro circuli non continere omnino tres diametros & earum vnius vnam septimam partem, complecti tamen plusquam tres diametros & earum vnius decem septuagesimas primas: decem porro septuagesimæ primæ non æquant vnam diametri septimam, sed sunt tantò minores quanta est vna diametri pars quadringentesima nonagesima septima. Aliunde verò firmissimè (quicquid futiliter repugnarit Scaliger) demõstrarat rectangulũ sub diametro & sub quartâ parte rectæ æqualis perimetro circuli, esse æquale circuli ipsius spatio. Opinio nō fefellit Archimedē; vulgò enim artifices quadraturi circulum ponunt eius perimetrum continere tres diametros, & vnam diametri septimam particulam. Neque verò sensûs iudicio errant in paruis circulis; quamuis in magnis possent multum a vero aberrare, si quando nimirum vna diametri quadringentesima nonagesima septima esset notabilis. Si tamen diametri mensura esset pedum vnius & quadraginta cum quinque vnius particulis duodecimis, vna quadringentesima nonagesima septima particula, non foret nisi vnius vnciæ quam *pollicem* vulgus vocat.

Quo euentu à tot viris sudatum olim in hoc negotio sit, superest vt dicam; nam qui ex recentibus hoc ipsum frustra aggressi sunt Cusanus Cardinalis, Orontius Finæus, & Iosephus Scaliger satis noti sunt ex refutationibus eorum, quas vulgarunt insignes Mathematici Ioannes Regiomontanus, Buteo, Petrus Nonius, & Christophorus Clauius Ante Aristotelem Bryso, Antiphon,& HippocratesChius ita celebres extiterunt suis paralogismis, vt cùm exempla sumantur à rebus perspectè cognitis, Aristoteles ipse passim ipsorum fallaces tetragonismos exempli causâ afferat, vbi de syllogismis, vel scientiarum principijs agit. In quodam verò volumine quod *κηρία φαυος* inscriptum voluit, ita accuratè Antiphōtem & Hippocratem impugnat, vt istorum hallucinationes affirmet Eutocius clarè compertas esse tam ex Aristoteleis *κηρίοις*, quàm ex Eudemi geometricâ historiâ cuius hac de re fragmentum insigne visitur apud Simplicium.

Lib. 1. Phys. textu. 11. folio 13.

Archimedes initio quadraturæ paraboles aliquos, quorum nomen reticet, fuisse ait, qui istud conficere sibi visi sunt assumptis ijs postulatis, quę nō facilè cōcedantur & quæ necipsis concedi debere cùm plures compererint, eorum hac de re scripta neglecta fuêre: ita enim interpretor satis intricata verba λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, ὅπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐχ εὑρισκόμενα ταῦτα, κατέγνωσθεν. Ipſe verò acutè vt cætera omnia demonſtrauit quidem, vt iam dictum fuit, rectangulum ſub diametro & quartâ parte rectæ lineæ æqualis perimetro circuli, eſſe æquale ipſius circuli ſpatio; ſed qua ratione eiuſmodi recta linea haberi poſſet nec ipſe nec alius teſte Eutocio docuit. Oſtendit quidem in opere de lineis ſpiralibus illam ipſam perimetrum eſſe æqualem certæ cuidam rectæ; ſed neque tradere potuit methodum inueniendi iſtiuſmodi rectam. prop. 8. & 27.

Simplicius loco ſuperiùs laudato recitat ex Iamblicho quoſdam huius problematis Artifices; ex veteribus quidem Pythagoreos, quorum demonſtrationes extent apud Sextum eius ſectæ ſcriptorem; Ex poſterioribus verò Archimedem διὰ τῆς ἑλικοειδοῦς γραμμῆς per ſpiralem lineam inceſſiſſe ait; Nicomedem διὰ τῆς ἰδίως τετραγωνιζούσης καλουμένης *per eam quæ ſpecialiter quadratrix eſt appellata;*

Apollonium διὰ τῆς κοχλιώδους ἀδελφῆς *per eam quam sororem cochleaceæ nominauit*, & quæ à Nicomedeâ nihil differre dicitur; Carpum διὰ τῆς ἐκ διπλῆς κινήσεως *per eam quam ex duplici motu procreatam appellauit*, aliosque plures alijs vijs ita parum fœliciter progressos fuisse vt nec adhuc ὀργανικὴν κατασκευὴν vllam reliquerint. Quod postremò dictum cùm ad rem præsentem maximè faciat, hunc sensum habet; problema tetragonismi istius non solùm non esse mathematicè, & operâ soliûs regulæ circinique confectum, sed neque mechanicè adiumento nimirum alicuius alterius instrumenti; cùm tamen reliqua duo problemata iam commemorata per organa, perque diuersas à regulâ & circino machinas reperta fuerint studio anteriorum Mathematicorum. Ex quo liquidò constat solutionẽ huius problematis esse trium longè difficillimam, cùm reliquis duobus saltem per organa & machinulas inuentæ sint certæ & determinatæ *constru-*

ctiones, quibus positis euidenter ostenditur veritas solutionis.

Hic statim sese offert dubitatio, cur obuiam obmiserint machinam, qua circulus voluatur per plani lineam rectam, donec idem circuli punctum quod initio motús tangebat planum absolutá reuolutione iterum plano occurrat: portio enim illa lineæ rectæ cui applicata in motu peripheria circuli fuerit videtur esse æqualis ipsi peripheriæ. Alias videre me memini gallicè conscriptum à quodam Ecclesiastico viro, cuius nomen excidit, libellum quo iste tetragonismus traditur; eum autem sibi in mentem venisse narrat inspecto vestigio quod *claui capitati* extimo rotarum limbo infixi, relinquunt dum currus earundem rotarum adminiculo trahitur. Verùm iste homo non legerat vnquam vigesimam quintam Mechanicarum quæstionum Aristotelis; ex illâ enim didicisset posse fieri vt linea illa cui rotæ peripheria successu motus respondet, sit modo maior, modo æqualis, modo minor ipsâ peripheriâ, pro diuersâ proportione duarum motionum quibus rota agi intelligitur. Atque hæc est causa cur illa machina à peritis hominibus sit prætermissa, cùm construi non possit, nisi priùs nota sit linea æqualis perimetro. Simile incommodum in delineatione Nicomedeæ quadratricis, quæ generatur pariter ex dupli-

1. 7. Geom. præct. propos. vult in apped.

ci motione, reprehendit Pappus Alexandrinus apud Clauium. Non dispar quoque est generatio spiralis Archimedeæ, ac proinde perinde est inuentu difficilis machina quæ illam vno ductu delineet. Quanquam licet daretur einsmodi machina, adhuc restaret inuenienda methodus ducendi tangentem quandam rectã, vt per illam daretur recta peripheriæ circuli æqualis.

in præfat. l. 1.

Aristotelicum volumen κηρία inscriptum cum suprà laudarem occurrit mihi Plinij locus Græcorum arrogantian satis apertè carpentis, in hocce librorum quorundam titulo affectando. Quinam ij fuerint nec

exponit, nec ego noui; hoc tamen existimo non cadere in Aristotelem, cuius nullum fastum in aliorum librorum titulis notamus. Egerit itaque, quantum coniicio, eo libro de fauis apum, & cum ad crates fauorum ventum fuisset, occasione formæ cellarum sexangulæ egerit quoque de paralogismis in circulo quadrando; Antiphon enim, vt ipse indicat primo Physicorum, & Interpretes communi consensu narrant, circulum non putabat esse nisi polygonum rectilineum ex lateribus mi-
iimis & propemodum innumeris,
uæ nullo sensu dignosci possent.
'el certè, si totus liber fuit ma-
iematicus, ita inscriptus fuerit,
uod de polygonis ibi præcipuè a-
itur, & occasione illorum de pa-
logismis in circulo quadrando
mmissis. Aliqua certè est proba-
is causa hunc præfigendi titu-
n, cùm Porus Nicænus in libel-
iusdem tituli scripserit de circuli
agonismo, sicuti testatur sæpiùs
datus Eutocius in circuli dimen-

inam fuerint paralogiſmi Bryſonis, Antiphontis & Hippocratis Chij.

§ VI.

Ta noti fuerunt eiuſmodi paralogiſmi ætate Ariſtotelis, vt eos exemplum adducendo tanquam peruacaneum omittat explicare inam ipſi fuerint. Hippocratis idem Chij ψευδογράφημα *falſam deationem*. cognitam habemus ex gmento illo hiſtoriæ Eudemi od apud Simplicium extare diximus. Quadrauit ille, & quidem adrabili ingenij ſubtilitate, quoſdam ίσκυς ſeu figuras duplici circuli rtione contentas, nos vulgari lin-ì *creſcentes* dicimus, eò quod lucreſcentis ſpeciem referant; halinatus verò eſt, cùm quadraſſet aſdam lunulas, non tamen eas quibus quadratio circuli ſequitur; od ex ipſis quaſi iam quadratis cir-i quadrationem intulit. Inuentum hominis eo quòd ingenio plenum sit, refert & clarè more suo explicat Clauius, nos verò propositione 25. primi libri idipsum colligimus, postquam viam ad alias lunulas figurasque conuexo-cauas ex reliquis etiam sectionibus conicis confectas instruximus. Lunularum istarum mentionem facit Aristoteles in Prioribus & Elenchis, atque vt multi Interpretes volunt in Physicis, quamuis hîc non μηνίσκους, sed sed τμήματα circuli appellet.

l. 7. Geometr. pract. cit.

2. Prior. 1. c. 31. Elenc. c. 10. alias 11. 1. Phys. t. 11.

Cæterùm lunularum ista quadratio non leue est argumentum ad ostendendum circulum quoque posse quadrari, eóque vtuntur Philoponus & Simplicius; in illâ tamen (cùm nitatur secundâ duodecimi) non potest esse maior certitudo, quàm sit in principio, quod ab Euclide eo loco vsurparum esse diximus; & quo dato parabola quadratur ab Archimede, atque à nobis circulus ipse atque hyperbola tentantur, assumptis aliunde libræ initiis certissimis. Qui igitur summâ peruicaciâ neget cir-

ulum posse quadrari, is si conse-
uentia velit loqui lunularum para-
oleque tetragonismo, ipsisque Eu-
lidis Elementis quatenus comme-
norato principio incumbunt, fidem
roterue negare debet: Ammonius
erò, cùm lunularum tetragonis-
num admitteret, parum consequen-
er de circulo ratiocinabatur. Hinc
dducor vt credam Aristotelem, qui
erspectum habeter Hippocratis
stud inuentum, non dubitasse quin
irculus quadrari posset; in Catego-
iis tamen de eo nihil pronuntiasse,
quòd ad rem quam ibi tractabat ni-
hil attineret.

Ex illo Physicorum loco habemus Antiphontem in quadrando circulo repugnasse principiis Geometricis, ideóque nec eius tetragonismi refutationem ad Geometram spectare; Ex Elenchis præterea constat eius & Brysonis tetragonismos fuisse *eristicos*; cùm Hyppocratis paralogismi non fuerint eiusmodi, sed mera ψευδογραφήματα, ex principiis veris atque geometricis prauè per incogitantiam adhibitis; contentiosi autem & agonistici fiunt ἐκ φαινομένων ἐνδόξων, μὴ ὄντων δέ *ex ijs principijs quæ videntur probabilia, cùm reuerâ talia non sint,* vt c. 2. eiusdem operis Philosophus dixerat. Hinc porro fit, vt quoniam Eristicus falsis licet, non tamen euidenter falsis nititur principijs, nunquam cogatur acquiescere repugnanti, sed semper contentioni sit locus; contra quàm accidat Pseudographo.

Omnes passim Interpretes sed enucleatiùs Simplicius in 1. Physc. docent Antiphontis sententiam in eo abhorrentem fuisse à Geometriâ quòd circulum assimaret esse polygonum ex lateribus minimis & quæ sensu dignosci nequirent conflatum, ac proinde omnes à centro huius polygoni ad eius ambitum eductas lineas esse inuicem æquales cùm tamen ex secundâ tertij Euclidis manifestum sit ex centro polygoni cuiusuis ad peripheriam ipsius lineas eductas non esse omnes æquales, negauerit igitur principia geo-

edit. Aldinæ pag. 23.

metrica in quibus illa propoſitio fundatur.

Eudemus, vt refert idem Simplicius, narrat initium geometricum ab Antiphonte ſublatum eſſe illud ἐπ' ἄπειρον εἶναι τὰ μεγέθη διαιρετά, *magnitudines poſſe in infinitum diuidi*; quod rectè conſonat hactenus dictis. Si quis enim ponat circuli peripheriam ex punctis Zenonicis numero finitis componi, dicet polygonum æquale circulo eſſe illud quod tot angulos habuerit, quot ſunt in circuli perimetro puncta; menſuramque ſingulorum Polygoni laterum eſſe duo puncta ſeſe ἀμέσως contingentia. Quo poſito nihil prorſus vrget demonſtratio ſecunda tertij Euclidis; illa enim ſumit rectam qua duo quælibet puncta circuli cōnectuntur, poſſe ſecari per aliam à centro ductam inter duas rectas ab eodem centro ad duo illa puncta eductas; quod fieri nequit niſi omnis linea duo puncta coniungens poſſit in infinitum diuidi. Quòd ſi peripheria ponatur non componi ex punctis Zenonicis, ſed eiuſmodi puncta dicantur eſſe *virtualiter* extenſa, & poſſe coëxtendi ſpatio in infinitum *diuiſibili*, (liceat mihi nunc & poſthac abſque vllo diſcrimine vſurpare voces illas quãuis minus latinas, quæ Scholæ Philoſophicæ vel Mathematicæ communi probantur vſu; eæ etenim vt plurimùm ſonant notiones aliquas eiuſmodi artium peritis, quibus tantùm hæc ſcribo, proprias) ſi inquam iſta puncta virtualiter extenſa admittantur perinde vrgebit propoſitio illa ſecunda Euclidis, magiſque peccabitur hoc dicto contra Phyſicam quàm contra Geometriam. Si quis demum contenderet non eſſe poſſibilem circulum aut corpus perfectè circulare, adhuc locum relinqueret problemati, quo videlicet pacto quadraretur circulus ex hypotheſi quòd foret poſſibilis, & quòd per circinum poſſet deſcribi peripheria, perque canonem recta linea; ſicuti ſi ſumas triangulum rectilineum nõ eſſe poſſibile, adhuc quæri poteſt methodus illud quadrandi, ſi ipſum esset possibile; illa enim methodus de facto continetur in 25. sexti Elementorum. Ex his apertum est rectè Philoponum scripsisse figuram illam rectilineam quã Antiphon ęqualem circulo statuebat, esse πολυγώνιον σχῆμα *angulosissimam*; nulla enim illi circulo æqualis potest dari quæ pluribus angulis constet; sed quod eiusmodi πολυγώνιον σχῆμα μικρὰς πάνυ ἔχον τὰς γωνίας dicitur, emendari debet, & pro γωνίας, legi πλευρὰς: nam minima quidem habet latera; ex duobus scilicet punctis conflata; anguli verò esse debent maximi. pag. 13. in primum Phys. edit. Venetæ grecè.

Aristoteles duobus in locis Brysonis tetragonismum commemorat; in Elenchis loco citato eius argumentandi rationem ait esse *cōtentiosam*, vt paulò ante dicebamus; In Posterioribus docet demonstrari unumquodque debere ex propriis eius principiis, non autem ex communibus; hoc enim, inquit, esset demonstrare vti Bryso ostendit tetragonismum. Interpretes omnes Græci, Arabes & Latini dicunt Brysonis 1. Posterior. textu. 23.

paralogismum hunc fuisse. Vbicunque est maius & minus ibi est æquale; sed in rectilineis figuris datur maior circulo nempe quadratum circumscriptum, datur etiam minor nempe quadratum inscriptum, ergo
1. Poster. c. 7. num. 13. datur ęqualis. *Ita* inquit Toletus, *Interpretes declarant Brysonis rationem, cuius nihil dixit Aristoteles. Propterea mihi dubium est an illa fuerit; cùm non solum ex communibus, sed ex falsis procedat; at Aristoteles ex veris & immediatis videtur dicere processisse. Dico ex falsis nã illud principium* quo datur maius & minus datur equale *est falsum vt docet Campanus; nam angulo semicirculi datur rectilineus maior nempe rectus & obtusus, & datur minor scilicet acutus, nunquam tamen datur æqualis.* Ita quidem videtur Aristoteles dixisse, & ita illum interpretantur plurimi in quibus est Philoponus commentarijs in illum locum; at clariùs & apertiùs ipse Aristoteles docet in Elenchis contentiosum fuisse Brysonis syllogismum; contentiosum verò ex ap-

parentibus quidem, sed falsis concludere. Iulius Pacius refert Brysonem ita quadrasse circulum, vt voluerit eum esse quadrato medio, quod æquè sit & minus circumscripto, & maius inscripto: verùm oppositum testatur Philoponus ex Alexandro ipso quem Pacius in huius Brysonici tetragonismi historiá referendâ sequi se alibi profitetur. ἐν τίνι δὲ τόπῳ τῶν μεταξὺ σημείων τὸ ἴσον πίπτει τετράγωνον οὐκ ἀπέδειξεν, *in quodnam punctorum interpositorum cadat quadratum illud æquale non ostendit*; paulò verò post reprehendit illum quòd non designarit, prout debebat, quadratum illud medio loco positum. Pacium fefellit, quantum coniicere valeo, ipsius Philoponi oratio, qui ostendat intermedia spatia esse numero infinita, ideoque vnum ex his à Brysone determinari debuisse, sumit exempli causâ in maiori quadrato esse partes sexdecim, in minori octo, & in circulo duodecim; eo dato, non quoduis medium quadratum erit æquale circulo, sed

in Elěch. c. 11.

in 1. post. c. 9.

illud tantummodo, inquit, quod æquo excessu mediũ fuerit. ἔστω γὰρ, φέρε εἰπεῖν, ὁ μὲν κύκλος ιβʹ· τινῶν ὅλων τὸ μεῖζον τετράγωνον ιϛʹ, τὸ δὲ ἔλασσον τετράγωνον ηʹ. οὐκ ἁπλῶς οὖν, τὸ μεταξὺ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ ἐλάσσονος ἔσται ἴσον τῷ κύκλῳ τῷ τῶν αὐτῶν ιβʹ ὄντι, ἀλλὰ τὸ ἐν ἴσαις ὑπεροχαῖς· τὰ γὰρ θʹ καὶ ιʹ, ιά τε καὶ τὰ λοιπὰ μεταξύ εἰσι τῶν ιϛ, ἀλλ᾽ οὐκ εἰσὶν ἴσα τοῖς ιβʹ· ἔδει γοῦν κἀκεῖνον οἰκείως τῇ γεωμετρικῇ ἐπιστήμῃ παραδοῦναι κατὰ ποῖον σημεῖον τῶν μεταξὺ πίπτει τὸ ἴσον τετράγωνον; καὶ μὴ ἁπλῶς οὕτως, τὸ μεταξὺ ἴσον ἀποφαίνεσθαι. *Constet enim verbi gratiâ circulus 12. mensuris, cuiusmodi maius quadratum continet 16. minus verò quadratum 8. Non igitur simpliciter quodcunque medium inter maius & minus iacet, illud erit æquale circulo qui eiusmodi 12. mensuris constare ponitur: sed illud quod æquali excessu superat & superatur. Nouem enim mensuræ & decem, vndecim quoque atque tredecim & reliquæ iacent inter 8. & 16. sed non sunt æquales ipsis duodecim. Oportuit igitur illum accommodatè ad scientiam geometricam tradere in quodnam ex intermedijs punctis caderet quadratum circulo æquale.*

Meam

Meam igitur de quæstione initio propositâ vt paucis complectar, sententiam & aliquam fortasse lucem verbis Aristotelis afferam, tetragonismum circuli ab ipso duobus sumi modis aduerto iuxta duas de eo quæstiones. Quæsitum primò est vtrum esset possibilis; tum quo pacto is ope regulæ & circini, vel certè alterius instrumenti præstetur; vtrique quæstioni suus respondet tetragonismus, quique alterutri satisfacere nititur, circulum dicitur quadrare vel θεωρητικῶς, ostendendo tetragonismum illum esse aliquid verum; vel προβληματικῶς, tradendo constructionem ex qua ille necessariò sequatur. Hippocratis Chij tetragonismus fuit *practicus* in tradendâ κατασκευῇ illi propriâ; Antiphontis verò Brysonisque nō fuit nisi *speculatiuus* in quæstione εἰ ἔστι *an sit*; vterque iste fuit ἐριστικὸς, id est innixus principijs in speciem verisimilibus, re tamen verâ falsis. His ita constitutis facile explanantur Aristotelis aliorumque dicta.

Primò neque Ariſtoteles neque Interpretes tradunt vllam κατασκευὴν Bryſonis vel Antiphontis; quoniam nec ipſi vllam vnquam propoſuerunt, nec ex hoc capite reprehendi à Philopono vllove alio meruit Bryſo, cùm id non eſſet neceſſarium ad probandum tetragoniſmum circuli eſſe, quod vnum ipſi diſputabant. Certè Antiphontis principia ſatis apertè oſtendunt, ipſum non potuiſſe quadrare circulum in poſteriori ſenſu; Quomodo enim vel probabiliter determinare poſſet numerum punctorum quæ circuli dati peripheriam componunt? quomodo quadrare triangulum iſoſceles cuius baſis ſit linea ex duobus punctis cõſtans, latera verò æqualia duæ rectæ à centro eductæ? illa tamen duo inuenienda ſunt ei qui eiuſmodi ſchema πολυγωνόγωνον quadrare inſtituat.

Secundò rectè Ariſtoteles dixit in Elenchorum citato loco, modum quo Bryſo quadrauit circulum, poſſe trãsferri aduerſus multos, ὅσοι μὴ ἴσασι

τὸ δύνατον ἐν ἑκάστῳ, καὶ τὸ ἀδύνατον, *qui non norunt quid in vnaque re fieri possit, & quid fieri non possit.* Bryso enim vt demonstraret tetragonismum esse *δύνατον* sumpsit propositionem quæ vt ipse Aristoles indicat, in vno magnitudinum genere est vera, indemonstrabilis, & immediata, nimirum istam *vbi datur maius & minus, ibi datur æquale*; & eam verisimilitudine quadam ductus transtulit ad ea quæ sunt alterius generis. Hoc autem pacto eos qui ignorant quid in ingulis sit possibile possis fallere. Vt sumas duas lineas quæ quo magis roducuntur, eò propiùs ad se inicem accedunt, conuenire tandem vnum punctum, ex hoc principio iod in genere linearum rectarum t verum & euidens per se, latiùs men sumptum & ad omnes lineas iadam apparenti probabilitate ductum est falsum, ostendes hy- :bolicæ lineæ occurrere rectam 1. & 12.
m lineam, quæ vt in Conicis proposi
nstratur; propiùs quidem dum lib. 2. Apoll.
ducitur accedit, nunquam ta-

men cùm eâ conuenit, idóque ἀσύμπτωτος *nusquam* in hyperbolam *incurrens* dicitur. Porro eiusmodi principia quæ strictiùs sumpta sunt euidentia, dum ita extenduntur ad aliud genus, non considerando vtrum propriâ istius generis principia tali extensioni repugnent, aut sint accommodata, sunt ea quæ Aristoteles appellat communia, opponitque proprijs.

Hinc colligitur ratio cur Aristoteles dixerit, id quod per commune aliquod principium demonstratur non sciri *nisi per accidens* κατὰ συμβεβηκός; accidere enim potest vt ex eo argumentandi modo fallamur. Colligitur præterea difficile esse cognoscere an scientiam habeamus de aliquo, quia, vt ipse ait, difficile est iudicare an ex aliquo ciusmodi principio communi concludamus, quod verum quidē & primum sit in quodam genere, sed quadam tantùm verisimilitudine translatum sit ad alia ἐ συγγενῆ *non eiusdem generis*, & minimè accommodata eiusmodi principio. Colligitur denique qua ratione illud principium à Brysone sumptum dicatur ab Aristotele modò verum & immediatum, modò falsum; est enim verum in vna vt ipse loquitur συγγενείᾳ, est falsum in aliâ ad quam transfertur, non consideratâ propriâ ipsius naturâ. Cùm enim illud ita commune sit, habet sub se angulum mixtum & rectilineum, in quo genere quantitatum non est verum; habet etiam sub se spatium rectilineum & circulare; & in hoc quidem est verùm, sed id *per accidens*, cùm non demonstretur esse verum per propria isti quantitatum binario principia.

Quid Oliuarius de Serres profecerit dum libræ adminiculo circulum quadrasse sibi visus est; & quàm longè dispari methodo ea tractetur à Mathematico inquirente figurarum tetragonismos.

§ VII.

Istius Autoris, nisi libram in quadrando circulo admouisset, mentionem nullam hoc loco fecissem; neque enim instituti præsentis est, recentiorum omnium Scriptorum in hoc genere peccata emendare vel recensere. Quia tamen inde sumere posset aliquis ansam existimandi vel libram non aliter adhiberi ab Archimede in hoc tetragonismorum negotio; vel accuratam esse Oliuarij experientiam, eamque inauditâ aliquâ inuentione niti; operæ pretium duxi eius hac de re scripta recognoscere, ne libræ mathematicæ officiant. Tria igitur breuiter dicam.

Primò proponam eius methodum; tum quadrationis eius vitium ostendam; aperiam postremò quàm diuerso modo librâ vtantur Mathematicus, & qui mathematicus non est. Ad primum spectat vt ipsa Autoris verba producamus, prout iacent sub finem capitis 3. libri primi *Theatri agriculturæ* gallicè editi. *Quamuis*, inquit, *circularis figura omnes adhuc Geometras antiquos & recentiores vexarit, præfatus me in isto negotio aliquot horas consumpsisse, meum ea de re iudicium velut vnus de turbâ proferam: non quod censeam meam hanc propositionem præferendam esse monumentis eorum qui deditâ operâ istam tractarunt materiam, sed ne celem disciplinæ huius cupidos de nouâ quam ineo methodo, magis promptam & expeditam, siquæ ab vllo offeratur, amplecti paratus. Fateor hanc operationem esse mechanicam, & Geometriæ, vt pote à qua suas demonstrationes non mutuatur, incognitam; sed tantò etiam longiùs à falso abest, quantò faciliùs sensu percipitur.* Ecce iam verba quibus negotium se conficere putat. *In proposito circulo triangulum æquilaterum inscribatur, & super trianguli vno latere quadratum. Dico aream huius quadrati æqualem esse areæ circuli.* Hoc autem ostendit in hunc modum. *Eligatur plana superficies in materiâ quadam vniformi, & rectè cohærente vt in chartâ papyraceâ vel pergamenâ, ligno, aut cerâ & in ea describatur tam circulus quàm quadratum modo dicto, tum appendatur è libræ lance vnâ quadratum, ex altera circulus, æquilibrium quod consequetur monstrabit æqualitatem inter vtramque aream, discrimenque si quod sit, esse insensibile.*

Istam quadrationem nec veram esse nec tam propè accedere ad veram, quin propiùs Archimedea paulò superiùs laudata (quæ & expeditissima & omnium artificum vsu probata est) iampridẽ accesserit, nunc habeo ostendere. Contendo igitur aream circuli ab Oliuario repertam esse verâ minorem, & quæ ab Archimede tradita fuit verâ minor Oliuarianâ tamen multò maiorem esse. Latus trianguli circulo inscripti subtendit arcum graduum 120; cuius medietas est arcus gr. 60. Sinus gr. 60 vero maior est 866,026 posito sinu toto partium 1,000,000; Numeri 866,026 duplus 1,732,052 est latus triãguli inscripti, vt ex doctrinâ *sinuum* notum pono. Numerus 1,732,052 quadretur, vt existat numerus 3,000,004,130,704. Posito igitur sinu toto, hoc est semidiametro circuli partium 1,000,000, & consequenter quadrato eiusmodi semidiametri 1,000,000,000,000; maior vero circulus cõtinebit mensuras quadratas 3,000,004,130,704, cuiusmodi semidiametri quadratũ in se habet 1,000,000,000,000; proportio ergo quadrati quod ex semidiametro fit ad spatiũ illud mai⁹ circulo est numeri 1,000,000,000,000 ad 3,000,004,130,704: spatium ergo quod quadratum semidiametri continebit ter, & insuper quinque particulas cuiusmodi quadratum semidiametri continet decies centenas millenas siue vt vulgò loquimur *vnum millionem*, erit maius circulo quod eſt abſurdum. Ex Archimedis enim demonſtratione certiſſimum eſt ſpatium aliquod circulo minus complecti in ſe quadratum ſemidiametri ter, & inſuper decem partes tales, quales ſeptuaginta & vna complent prædictum ſemidiametri quadratum. Porro diſcrimen inter has duas minutias

$$\frac{10}{71} \quad \& \quad \frac{5}{1,000,000} \quad \text{eſt} \quad \frac{9,999\ 645}{71,000,000.}$$

quæ minutia eſt maior vnâ octauâ parte prædicti quadrati. Eiuſmodi igitur quadrati ex ſemidiametro geniti octauam partem & ampliùs lucrifaceret quiſquis agrum circularem hoc menſurandi genere emeret, tantumque diſpendij pateretur qui eum venderet, ſi ex Theatri agriculturæ Oliueriani præſcripto fundi menſura inſtitueretur; quod ſanè non eſt æquâ lance ſuum cuique tribuere. Sed quæ erroris iſtius cauſa?

Primò facile fieri potuit vt materia quàm Oliuarius ad praxim iſtam assumpsit non esset æquali tenore densa, & crassa. Secundò vt non ad amussim dissecta. Tertiò vt libra ipsa vitio aliquo extraordinario sed occulto laboraret, id enim sæpiùs euenit quàm vulgò creditur, vt in tractatu de libræ principijs explicamus. Quartò denique humanâ arte fieri non potest, prout multiplici experientiâ edocti Scriptores testantur, vt per libram quamuis exactè elaboratam omnimoda diuersitas inter duo pondera vtrinque appensa dignoscatur: neque enim axis circa quem voluitur iugum est aut esse potest linea indiuisibilis, neque punctum suspensionis fit ex medio axe, neque cætera omnia vitia, quæ bene multa interuenire possunt in vsu vel constructione libræ, ita euitari possunt, vt illorum vestigia aliqua non remaneant.

Superest vt declaremus vnde oriatur Mathematicis, dum opera libræ quadrat figuram aliquam, non esse obnoxium eiusmodi incommodis. Vera huius causa est quòd in praxi

non vtatur librâ, sed isolâ regulâ & circino; in demonstrandâ autem praxeos veritate vtatur quidem librâ sed diuulsâ & abstractâ à materiâ, ac proide & à vitijs ex illâ prouenientibus. Porro quid sit libram abstractam à materie assumere, aptiùs explicare non possum quàm ex doctrinâ in Aristotelicis libris passim con-
l. 13. c. 3. summâ. 1. signatâ, præcipuè verò in Metaphysicis, vbi postquam dixit mathematicas disciplinas (ijs nominatim annumerat Mechanicam libræ nostræ contemplatricem) spectare obiectum suum nempe quantitatem vt separatam ab ijs quæ ipsi accidũt, & per quæ sensibilis fit scilicet ab albedine, frigore, duritie &c. subdit ὥστε εἴ τις θέμενος κεχωρισμένα τῶν συμβεβηκότων, σκοπεῖ τι περὶ τούτων ᾗ τοιαῦτα, οὐθὲν διὰ τοῦτο ψεῦδος ψεύσεται, ὥσπερ οὐδ' ὅταν ἐν τῇ γῇ γράφῃ, καὶ τὴν ποδιαίαν φῇ μὴ ποδιαίαν· οὐ γὰρ ἐν ταῖς προτάσεσι τὸ ψεῦδος. *Quapropter si quis ponat hæc ab accidentibus eiusmodi separata, ac de ijs aliquid, quatenus talia sunt, consideret, nullius propterea fallaciæ tenebitur;*

uemadmodum nec si in terrâ figuram escribat, & eam quæ pedalis linea non sit, pedalem esse dicat: neque enim in istis propositionibus mendacium falsũ-ue inest. Vbi per *propositiones* intelligit illas quæ conditionali particulâ afficiuntur, vt *si sol lucet; si superficies sit grauis; si hæc sit libra ab omni vitio immunis*; quãuis enim vitiis scateat, nihil prorsus fallit qui vt demonstret aliquid, ponit eã absque vllo vitio, atque hoc ponens θέμενος, syllogismum ita conficit. Figura omnis cui, si pendeat ex librá mathematicè perfectâ, conueniunt certæ quædam in ordine ad libram ipsam proprietates, est æqualis figuræ *A.* quam ponimus esse quadratam & notam: Sed figura *B.* quam sumimus esse circulũ pedali diametro, affecta est eiusmodi proprietatibus spectatis in ordine ad lineam *C.* quam ponimus esse libram ipsi circulo adaptatam; ergo circulus *B.* est æqualis figuræ *A.* quadratæ & cognitæ. Hîc nullus vt apertum est, interueuit vsus libræ quæ manu attrectetur, quámue faber ex ære vel aliâ materie confecerit. Quicquid in isto negotio examine eget est veritas vtriusque præmissæ, an scilicet eiusmodi proprietates cum respectu ad libram expositæ conueniant isti circulo; & vtrum, si conueniant, consequens sit ipsum circulum esse æqualem quadrato *A*. Hoc autem totum demonstrari potest ab eo qui nunquam vulgares illas quibus trapezitæ & id genus homines vtuntur, lances manu suspenderit.

Quòd verò Oliuarius hunc figuras quadrandi modum suum esse & hactenus incompertum putat, fallitur plurimùm; cognitus equidem est, & vbi commodior via tetragonismi non suppetit vsurpatus, sed magis exactâ accuratâque methodo, scilicet per admirabile illud genus bis librandi eandem magnitudinem primò in aëre, deinde in aquâ, de quo nos in libello iam memorato agimus. Ad istud comprobandum satis puto adducere Iordanum sub finem opusculi *de ponderositate*, vbi

tam in aquâ ponderandi ratio-
em explicaturus præfatur in hæc
erba. *Quoniam propter irregula-* fol. 16.
m quorundam corporum compositio- edit.
em non poteſt eorundem magnitudinis Venetę
r geometriam certa proportio inueniri; ann.
quoniam pretia quorundam quæ 1565.
muntur & venduntur debent magni-
idinibus ipſorum corporum proportio-
iri; neceſſarium fuit per ipſorum pon-
ra corporum, eorum magnitudinum
oportionem reperire, vt ſingulis ma-
itudinibus per proportiones ſuorum
nderum cognitis, valeant certa pretia
ciari. Primò igitur inſtrumenti per
od examinantur ponderum quantita-
s ratio danda eſt. Eſt ergo examinis
nderum virgula recta, in cuius medio
foramen recipiens perpendiculum,
m quo ſuſtinetur virgula, cum ponde-
bus in extremitatibus eius appenſis,
m debet magnitudinis alicuius quanti-
s per menſuras ponderum deprehendi.
æc ille emendatis Typographi er-
tis. Vnde apertè conſtat Mathema-
cum ideo non vti librâ materiali
l habendum quadratum veræ cir-

culi areæ proximè æquale, quòd illud ex Archimedis methodo facillimâ & obuiâ longè accuratiùs obtineatur, quàm per lancium manu tractatarum opem vllâ humanâ industriâ præstari queat.

Vnde oriatur tanta istius tetragonismi difficultas.

§. VIII.

NObis notitias rerum impressas à natura hærere sine quibus neque intelligi quicquam neque quæri neque disputari potest, vox est non tam Aristotelis, quàm Veritatis ipsius, cui omnes facilè assentiuntur. Ex eiusmodi ἐννοίαις ἀδιδάκτοις καὶ ἀναποδείκτοις, quas propterea ἀρχὰς Græci nos *initia* siue *principia* dicimus, *cætera series deinde sequitur maiora nectens*, vt Tullius loquitur: in illâ tamen quasi *catenâ verorum* ab initijs, veluti primis annulis alia longiùs, alia distant propiùs; ideóque hæc
l. 4. quæst. Tuscul.
faciliùs,

faciliùs, illa difficiliùs deprehenduntur connexa. Vt hîc idem nonnunquam contingat, quod in quibuſdam regionibus, vbi fluuij à fonte ſuo profecti, & cæco terræ hiatu abſorpti dū poſt longos tortuoſoſque flexus emergunt inexplicabile incolis ſit, hæc cauda cum quo capite cohæreat.

Iſta eſt vera cauſa cur circuli quadratio ſit adeo abſtruſa, vt tot ſæculis inueniri nō potuerit, tot ingenijs tantiſque ſtudijs quærentibus; proficiſcitur quidem à principio aliquo per ſe noto, ſed ita longè ab eo proceſſit, totque interiecta ſunt quæ obſtant ne connexio eorum appareat; vt dubitatum à viris grauibus fuerit, fictitiumne illud eſſet, cuius cum veri principijs nulla colligatio cerneretur. Atque vt iſtud diſtinctiùs intelligatur percurrere lubet ἀρχὰς præcipuas ex quibus Geometra concludit duarum magnitudinum æqualitatem; illico enim intelligemus obſcurum eſſe quo pacto illa initia circuli tetragoniſmus ſequatur, cùm ijs potius repugnare videatur.

Primò quidem adhibere solet illud quod apud Euclidem in Elementorum limine extat τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐσί. *Quæ sibi mutuo congruunt ea inter se sunt æqualia.* Quod vt pleniùs intelligatur recolendum est illa dici ἐφαρμόζειν quæ in eodem ita collocantur spatio vt nihil vnius sumi possit extra aliud; ad istud verò requiritur vt termini siue limites quibus continentur sibi inuicem aptè quadrent, sicuti futuri operis protypus cohæret adaptatus rei quæ ex illo deformatur; vel sicuti ferus ille tormentorum Artifex mortua corpora iungebat viuis.

componens manibusque manus, atque oribus ora.

Præterea memoriâ tenendum est quasdam ex lineis (à Græcis ὁμοιομερεῖς dicuntur, nos *regulares* appellamus) ex Vitellonis descriptione *vniformes esse in omni sui parte*, istámque inde obtinere proprietatem, vt Proclus rectè exponit, quòd earum quæuis partes quibusuis commissæ

l. 1 prop. 118.

l. 2. in Eucl. pag. 19. edit. Heruag

adaptentur & congruant; ſpecies verò eiuſmodi regularium in plano deſcriptarum non ſunt niſi duæ, recta ſcilicet & circularis; nam ſpiralis illa circa cylindrum ducta quam ex Apollonij demonſtratione adiungit idem Proclus, *quando rectâ motâ circa ſuperficiem cylindri punctum æquè velociter in ipsâ mouetur*, ὅταν εὐθείας κινουμένης περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου σημεῖον ὁμοταχῶς ἐπ' αὐτῆς κινεῖται, eſt quidem regularis ſed non in planâ ſuperficie iacet; vnde Vitello non repugnat, vt quidem exiſtimo, Proclo, dum duas tantum ait eſſe lineas *regulares*, rectam nempe & circularem. Regularibus lineis proximæ ſunt conicæ ellipſis, parabole, & hyperbola; quia quamuis quælibet earum pars cuilibet non congruat καθ' ἐφάρμοσιν *ſecundum conuenientiam illam* partes tamen quæ circa axem ſunt ſibi mutuò quadrant, ſi ſecundùm eundem axem complicatæ fuerint.

Ex his liquidò conſtat, cùm linea recta diſconueniat omni alteri lineæ præterquam ſoli rectæ, figuram con-

tentam lineis rectis, quam rectilineam dicunt, cuiusmodi est quadrata non posse ex isto principio, quod æqualitatem petit ex mutuâ ἐφαρμογῇ, ostendi æqualem esse vlli curuilineæ, qualis est circulus ac proinde ex istâ *notione primâ* non posse quadrari circulum, aut, quod idem est, quadratum rotundari, tanta est oppositio istarum figurarum, ad quam fortasse respexit ille qui disconuenientia sectantem describens ait illum *mutare rotunda quadratis*. Constat insuper segmentum circuli rectè ostendi ex eodem principio apud Euclidem esse
l. 3. prop. 24. æquale alteri segmento, cui iungi καθ' ἐφάρμοσιν potest; eademque de causâ partes segmenti parabolæ vel hyperbolæ vel etiam ellipsis quę axē earum vtrinque ambiunt, esse æquales monstrari potest.

Secundò plurima sunt quorum æqualitas vel proportio licet ostendi non possit per istam ἐφαρμογὴν, demonstratur tamen per *deductionem ad impossibile* monstrando nimirum nisi se habeant vt inscripta notâ quadam ratione rectilinea quorum æquali-tas ostenditur per *principium* illud *conuenientiæ*, sequi ἀδύνατον, partem nimirum esse æqualem toti. Hoc pacto plurima, eaque scitu digna ostēdit Euclides in duodecimo Elementorum libro, quorum mentionem superiùs fecimus; innumera etiam nos hac viâ æquamus istorum Elementorum, tetragonismorum libro, primo; is enim totus est de hoc argumento, quod ab alijs tractatum non vidi, optaui tamen, vt eò breuior forem. Qui enim problematis alicuius solutionem inuestigat, clauem ad reconditiora quædam aperienda quærit; clauem autem mole ipsis valuis propè pari quis commendet?

Hoc æquandi genere quin quadrari possit circulus ex solis principijs geometricis non dubito, sed adeo abstrusum puto vt sicut parabolæ tetragonismus non est inuentus solis geometricis initijs, nisi postquàm Mechanica mira istius æqualitatis venatrix eum prima reperit; ita nec Geometria se huius inuenti laudem

Mechanicæ præreptum ire ſperare vnquam debuerit.

Tertio eſt aliud geometriæ *initium* quo duorum æqualitas probari poteſt. *Si ab aliquâ magnitudine partem demas & ad reſiduum adjcias æqualem ablatæ magnitudinem, compoſita ex reſiduo & ex adiecto erit æqualis integræ magnitudini.* Hoc initio quadrauit *lunulas* Hippocrates Chius, ex triãgulo enim rectilineo aufertur ſegmentum circuli cuius baſis eadem ſit quæ trianguli, & ad reſiduum adduntur duo vnius circuli ſegmenta, quæ reliqua duo trianguli latera habent pro baſibus, æqualiáque ſimul eſſe ablato ſegmento oſtenduntur per methodum ſecundo loco iam à nobis propoſitam, vt videre potes in primi libri laudato corollario. Ex eodem
§ 6. initio oſtenditur angulo recto æqualis angulus quidam μηνοειδὴς *ſpeciem cornu lunaris referens*, cuius meminit
pag. 64. Proclus, quamuis inquit fieri nequeat vt rectæ lineæ peripherijs congruant, ἀδύνατον ἐφαρμόσαι, ταῖς εὐθείαις τὰς περιφερείας. Eiuſce modi angulus eſt ille quẽ continent duo ſemicirculi, quorum

diametri sunt duo in eundem quadrati angulum coeuntia latera, vnus autem est intra quadratum, alter exteriùs describitur. Cæterùm iste modus, si rectè perpendatur, deprehendetur non priùs posse geometricè quadrare circulū, quin ipsa segmenta quæ adduntur, &subducuntur fuerint in quadratam figuram permutata.

Quartò denique ex Mechanicâ habemus istud principium. *Quæ sibi inuicem ex æqualibus interuallis suspensa æquiponderant sunt æqualia*; quod latissimè patet, quia quibuscunque illa terminis claudantur curuis vel rectis; id per accidens est dummodo æquilibrium vtrinque appensa committere probentur. Hac methodo Archimedes parabolam primus quadrauit; nec enim audiendi sunt qui istam, vt diximus, inuentionem Pythagoræ ascribunt. Occnrrit mihi hoc loco vnum quod prætermitti non debet; eos videlicet longè errare qui difficultatem inueniendi rem aliquam, ex ipsâ iam inuentâ metiuntur, sibique persuadent explanato & ostenso iti- iar. in opus. contra ... u.

nere incedentes factæ primùm monstratæque viæ laudem non esse tantam, quin ipsi quoque eam consequi potuissent, si anteriores Archimedi vixissent. Audiant Plutarchum de illius inuentis ita scribentem ζητῶν οὐκ ἄν τις εὕροι δι' αὐτοῦ τὴν ἀπόδειξιν· ἅμα δὲ τῇ μαθήσει περιίσταται δόξα τοῦ κἂν αὐτὸν εὑρεῖν· οὕτω λείαν ὁδὸν ἄγειν καὶ ταχεῖαν ἐπὶ τὸ δεικνύμενον. *Si quis per se solutionem problematum eiusmodi quærit, frustra laborat, inueniendique desperatione occupatur; simul autem atque illam ab Archimede didicerit adducitur vt credat à se quoque inueniri potuisse, ita plena & breuis apparet via quæ ad rem propositam ducit.*

in vita Marcelli.

Archimedes porro ostendit si parabola certo quodam è libra suspendatur modo, sequi inde ipsam esse æqualem designato cuidam spatio rectilineo. Istud demonstrandi genus præcipuè si ad circulum & hyperbolam extendatur, vt à nobis factum est, eget pleniore quodam theorematum ad libram spectantium notitiâ, quapropter secundum librum Elementorum nostrorum illis destinaui, uimus, cùm ea alibi nobis non occurrerent, & pernecessaria esse intelligeremus ad figurarum quarumcunque tetragonismos. Tertio demum Elementorum libro, quod neminem fecisse vidimus, tradimus methodum suspendēdi è librâ circulum, ellipsim, & hyperbolam, quod ab initio huius laboris sibi proposuerat animus veri, vtinam & gloriæ diuinæ vtcunque inde prouenturæ, studio ardens.

Ex hactenus dictis liquet frustra eos esse qui, cùm in limine mathematicarum disciplinarum adhuc versentur, imo necdum illud fortasse attigerint, circumspiciunt qua si, quæ sese cæterorum oculis subduxit, ipsis se visendam vltro oblatura sit quadratio circuli: non enim habitat in ipso aditu, sed in abditissimis palatij istius recessibus. In vestibulo sunt Demonstrationes elementorum quæ Euclides collegit; in penetralibus latent Conica elementa ad quæ proximè peruenit Apollonius anteriorum conatu excitatus; longiùs delitescunt ἰσοῤῥοπικὰ quę

Aequiponderantia vulgò dicuntur, ipſamque *Parabolæ* quadraturam ſtipant, quouſque peruenit indefatigabili labore Archimedes; vlteriùs ſine viæ duce, atque eò periculoſiùs quò minori luce progrediendum eſt ei qui ad irrepertã Circuli quadrationem aſpirat. Quid nos Euclidem, Apollonium & Archimedem ſequuti porro ſoli profecerimus, tuum erit æſtimare, benigne Lector, ſi tuos oculos ipſa cui tuâ causâ ſtuduimus, Operis euoluendi breuitas allexerit. Labores noſtros fatemur fuiſſe diuturnos & incredibiles; ſæpius, vt ſolet per auia & prærupta, ex offendiculorum incurſu lapſi ſumus; non ſemel inanibus ſpectris deluſi fuimus; nobis frequenter venit in mentem vox illa Auguſtinianæ ſimilis NOLI QVAERERE SI NON VIS ERRARE; an verò tandem aliquod tanti tædij pretium nobis conſtet penes te, inquam, eſto iudicium, humane Lector; quod ſi quid veri à nobis repertum eſſe probaueris, id totum in Deum, quem viæ rectorem

tractat. 26. in Ioan.

assiduè implorauimus, vt refundas enixè flagitamus.

ADMONITIO in sequentes libros.

Libro qui ad ἱστορούμενα præsentis tetragonismi pertinebat absoluto reliquum est vt ad eos qui θεωρούμενα tractant, transitum faciamus; prius tamen de paucis quibusdam monitum volo Lectorem.

Pimò. Si quis ad legendos qui sequuntur libros accedet, debet s callere Elementorum Euclidis sex altem priores libros; præterea ignorare non debet Apollonij Elementa Conica, quæ extant; denique versatum eum esse oportet in Archimeeis demonstrationibus ijs minimùm quas scripsit *de æquiponderantibus* libro primo, & de quadratione parabolæ libello singulari; quæ duo opera vel ex hoc probantur esse Archimedea quod paucis multa, & recondita complectantur; videtur enim iste Autor esse specialis præ cæteris osor magnorum voluminum. Qui his instructus nondum fuerit, non est quòd in manus nostros libros sumat; nihil etenim in ijs uideret, & fortasse hoc esse librorum vitium quereretur; vbi apertè constaret non esse istum *obiecti* (vt docendo loquimur) *& luminis defectum, sed potentiæ ipsius visiuæ.*

Secundò causam exponere debeo Tolosatibus, in quorum Prouinciâ & vbre primariâ *Sacram doctrinam qua fides saluberrima gignitur, nutritur, defenditur* iampridem profiteor, cur Theologus Mathematica scribam? Non mentiar si conscius tenuitatis meæ primùm dixero me diuinis scribendis imparem esse; nec si deinde adiecero priùs me Matheseos in hac ipsâ vrbe professorem extitisse quàm Scholasticæ Theologiæ: respondere

August. l. 14. de Trin. c. 1.

tamen lubet velle me hac ſcriptione indicare Theologo Mathematicas diſciplinas imprimis neceſſarias eſſe. Illum egere Sacræ ſcripturæ intelligentiâ non vulgari nullus infitiatur; atqui ea eſſe abſoluta nequit, niſi Chronologiam ſacram, lunarium ſolariumque eclipſium ac cyclorum rationem, niſi vaſorum, ponderum, atque ædificiorum proportiones adiunctas habeat; ad quæ omnia quantum diſciplinæ iſtæ conducant nemo non facile intelligit. Sumo exemplum vnicum ex Apologetico Tertulliani ad Scapulam Africæ Præſidem, quem vt à perſecutione Chriſtianorum deterreat, poſtquam commemorauit imbres immodicos, ſegetum iacturam, ignes ſuper mœnia Carthaginis pendêre viſos, tonitrua frequentia audita, *omnia*, inquit, *hæc ſunt ſigna imminentis iræ Dei, quam neceſſe eſt quomodo poſſumus & annuntiemus, & prædicemus, & deprecemur interim localem eſſe. Nam & ſol ille in conuentu Vticenſi extincto pæne lumine adeo portentum fuit, vt non potuerit ex* quas scripsit *de æquiponderantibus* libro primo, & de quadratione parabolæ libello singulari; quæ duo opera vel ex hoc probantur esse Archimedea quod paucis multa, & recondita complectantur; videtur enim iste Autor esse specialis præ cæteris osor magnorum voluminum. Qui his instructus nondum fuerit, non est quòd in manus nostros libros sumat; nihil etenim in ijs uideret, & fortasse hoc esse librorum vitium quereretur; vbi apertè constaret non esse istum *obiecti* (vt docendo loquimur) *& luminis defectum, sed potentiæ ipsius visiuæ.*

Secundò causam exponere debeo Tolosatibus, in quorum Prouinciâ & vrbe primariâ *Sacram doctrinam qua fides saluberrima gignitur, nutritur, defenditur* iampridem profiteor, cur Theologus Mathematica scribam? Non mentiar si conscius tenuitatis meæ primùm dixero me diuinis scribendis imparem esse; nec si deinde adiecero priùs me Matheseos in hac ipsâ vrbe professorem extitisse quàm Scholasticæ Theologiæ: respondere

August. l. 14. de Trin. c. 1.

amen lubet velle me hac ſcriptione ndicare Theologo Mathematicas liſciplinas imprimis neceſſarias eſſe. llum egere Sacræ ſcripturæ intelligentiâ non vulgari nullus infitiatur; itqui ea eſſe abſoluta nequit, niſi Chronologiam ſacram, lunarium ſoariumque eclipſium ac cyclorum ationem, niſi vaſorum, ponderum, atque ædificiorum proportiones adiunctas habeat; ad quæ omnia quantum diſciplinæ iſtæ conducant nemo non facile intelligit. Sumo exemplum vnicum ex Apologetico Tertulliani ad Scapulam Africæ Præſidem, quem vt à perſecutione Chriſtianorum deterreat, poſtquam commemorauit imbres immodicos, ſegetum iacturam, ignes ſuper mœnia Carthaginis pendere viſos, tonitrua frequentia audita, *omnia*, inquit, *hæc ſunt ſigna imminentis iræ Dei, quam neceſſe eſt quomodo poſſumus & annuntiemus, & prædicemus, & deprecemur interim localem eſſe. Nam & ſol ille in conuentu Vticenſi extincto pæne lumine adeo portentum fuit, vt non potuerit ex*

ORDINARIO *deliquio hoc pati positus in ſuo hypſomate & domicilio; habetis Aſtrologos.* Ita Afer ille Paganis in cauſâ bonâ malo argumento inſultat. Si Aſtronomiæ peritus fuiſſet nunquam pronuntiaſſet homo nimium credulus ſolem in meridiano circulo & ſuo domicilio poſitum non poſſe pati deliquium, cùm contrarium ipsâ luce meridianâ apud Aſtrologos clarius ſit; nunquam iſtud deliquium contra ordinariâs Aſtronomiæ leges eueniſſe iactaſſet. Quamuis Authores qui eclipſes apud antiquiores conſignatas ſcriptores colligunt, iſtius non meminerint, certum tamen eſt anno Chriſti 196. Seueri 4. (ſub quo iſta contigiſſe conſentit Baronius, quamuis quinque annis tardiùs, quod mirum non eſt, cùm præter Mathematicas, quas Cardinalis iſte non adhibuit, aliæ omnes huius præcisè temporis coniecturæ incertæ ſint vt Pamelius admonet) congruere ex iiſdem tabulis eclipſim ſolarem quæ Vticæ contigerit 7. Decembris, Feriâ 3. duraſſe horas duas ſemiſſe ferè; inchoaſſe quinque horariis quadrantibus ante meem, totidemque ferme pòſt deſiiſſeius *digitos* vt loquuntur, *eclipticos* ſte 9. ferè.

Tertiò nec iſtius cauſam reticere beo, cur cùm ante annum amici ſtri iſtá in vrbe palam dixerint iſtud ous nihil expectare præter Typoraphi operam, cohibitum tamen pud nos fuerit, ne foras ad hunc vſue diem prodiret? Dico ſi ſatis caſtigatum fuerit, ſatis citò ipſum prodire in lucem. Maiorum expectanda erat facultas, quorum prudentię ſummæ fuit lento gradu in eo ſcribendi genere procedere; cui tam frequens Scriptorum primæ notæ lapſus hunc ſenarium ex Tragico deſumptum meritò addixit.

Nihil timendum video, ſed timeo tamen.

Facillimum profectò eſt ſicuti in arithmeticis, ita & in geometricis præcipuè abſtruſis hallucinari; quiſquis verò iſtud expertus non eſt, nihil eum vnquam in hoc negotio tentasse ausim affirmare; & quisquis de hoc argumento aliquid emittit in lucem, nec tamen timet, innominato illo φοβίας vitio laborare, quam in Celtis reprehendit Aristoteles, quòd terræ motus, marisque agitati fluctus contemnerent. Porro quemadmodum facile est in istorum inuestigatione erroris fascino teneri, ita in aliorum inuentis reprehendendis procliue admodum est decipi, non aliter quàm duas ex lucernâ flammulas videre, cum oculum torseris.

Lib.3. Ethic. cap.7.

Pag.64. in margine pro *quæst. Tuscul.* lege *quæst. Academ.*

ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM

LIBER I.

Qui est per sola principia geometrica de curuilineorum & mixtorum proportione inuicem, & cum rectilineis.

DEFINITIONES.

1\. Parallelogrammum mixtum voco quadrilaterū cuius duo latera sunt rectæ lineæ æquidistantes inuicem, & æquales, reliqua autem duo latera sunt lineæ curuæ ita descriptæ, vt rectæ omnes inter ipsas poſitæ & æquidiſtantes alijs lateribus, ſint inuicem & cum ipſis lateribus rectis æquales. 2. Trapezium mixtum eſt quadrilaterū, cuius duo latera ſunt rectæ lineæ æquidiſtantes & inæquales, reliqua autem duo latera ſunt lineæ curuæ. 3. Amphicyrtum, ſeu internè cauam appello figuram cōprehenſam lateribus curuis, quorum caua reſpiciunt ad interiora ipſius figuræ. 4. Amphicœlum ſeu internè conuexam, quorum caua reſpiciunt ad exteriora. 5. Menoiden, ſeu internè conuexocauam, quorum vnum ſecundum caua ſui, alterū ſecundum cōuexa complectuntur ipſam figuram. 6. Sectionem conicam appello non ſolum parabolam, hyperbolam, & ellipſim, verùm etiam ipſum circulum. 7. Oxygoniam, ſi fuerit vndecunque clauſa, cuiuſmodi ſunt circulus & ellipſis. 8. Centricam, ſi fuerit centro prædita, cuiuſmodi ſunt circulus, ellipſis, & hyperbola. 9. Segmentum ſectionis conicæ, figuram contentam portione ſectionis conicæ, & rectâ ſubtendente eiuſmodi portionem. 10. Rectam ſtam ſubtendentem nomino cum Archimede baſim. 11. Diametrũ egmẽti, eam quæ bifariam ſecat pſam baſim. 12. Verticẽ ſegmeni, punctũ in quo arcus ſegmenti occurrit diametro eiuſdem. 13. Cum per verticem ſegmenti ducta fuerit parallela baſi recta, & er extrema baſis ductæ æquidiantes diametro, parallelogrãmi omprehenſi ſub baſi & ſub rectis eductis portionem eam quæ t extra ſegmentum appello ciratoiden.

Inuitus planè vsurpaui voces illas amphicyrtum, amphicœlum, menoiden, & diceratoiden: *mirum enim quantum delector sensa animi ijs verbis exprimere quæ vsu sunt notissima, ac proinde quæ instar familiarium & domesticorum insinuant se nullo ostij custode repugnante in penetralia mentis nostræ. Necessitate igitur compulsum me id fecisse scias, Lector velim: quamuis neque ipsas voces ego prorsus excogitaui, aut excogitatas aliunde traduxi, sed ex ipsâ Mathematicorũ officinâ. Ecce verba Pro-*
pag. 35. edit. Heruag. *cli in Euclidẽ* peripheriæ se mutuò secantes aut cõtingentes constituunt angulos trifariam; vel enim ἀμφικύρτους, quando nimirum extrinsecùs fuerint conuexa peripheriarũ; vel ἀμφικοίλους, quos appellant συστροειδεῖς, quando extra ipsos angulos fuerint vtriusque peripheriæ caua; vel mixtos ex cauâ & conuexâ, sicuti cornua μηνίσκων. Præterea sub rectâ & peripheriâ continentur anguli duobus modis, sub rectâ videlicet & sub cauâ peripheriâ, vt in semicirculo; vel sub rectâ & sub cõuexâ, cuiusmodi est angulus qui κερατοειδὴς dicitur. *Quòd igitur figura illa quæ vnà cum segmento complet parallelogrãmum de quo agit definitionum vltima, constituatur ex duobus angulis ceratoidibus & in cornu formam descriptis, qui deinceps sunt ad punctum tactûs, nos illam δικερα-*
pag. 64. *τοειδῆ* diceratoidem *diximus.*

Cæterum vtrum συστροειδὴς, *vel vt alibi scribitur* ξυστροειδὴς, *appelletur à figurâ stri-*

*gilis antiquâ, parum hic refert; vix certè ab
eius specie quam pingi curauit Mercurialis,* Artis .
cum in modum figuræ bicornis non repræsente- gymna.
tur. Fortasse apud Græcos duæ eiusmodi lin- l. 1. c.
gulæ flexæ atque tubulatæ in vnum stringen- 8.
*di cutem bifurcum instrumentum compactæ
fuerint; quam coniecturam forte an firmat
Martialis dum inde Romam missas plurali nu-
mero describit hoc versu.*

Pergamus has misit, curuo distringere ferro.

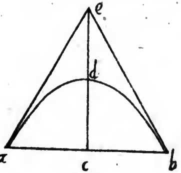
Aliæ ξύστρ *notiones minus aptæ videntur* l. 17,
ad præsentem nominis originem explicandam. biblio-
Apud Diodorum vox ista sonat hastas seu cus- th.pag.
pides quibus muniebantur currus falcati, vt 590.
ex collatione eorum quæ de illis scripsere Liuius edit.
& Curtius apertum est. Quid si mendum ibi Stepha-
est ξύστρον *pro* ζυστῷ *quo in eadem paginâ vtitur?* ni.
Apud Eustathium eadem vox denotat instru- Iliad.
menti genus quo quæ extant in complanando φ pag.
solo raduntur, λίστρα εἰσὶ πλύα σεσιδηρομένα ἤγουν p.1314.
ξυστῆρες. καὶ λιστρῶσαι δὲ ἀπ' αὐτῶν, τὸ ξύσαι καὶ
ὁμαλίσαι. *Lexica interpretantur ventilabrum,
vtrum rectè, ignoro; græcè quidem vox* πλύον Illiad.
genus est ad vtrumque instrumentum, vt ex υ pag.
ipso Eustathio discimus πλύου, ὃ δι' οὗ γῆν ἀνα- 924.
πτύουσιν, ἀλλὰ λικμητικοῦ ἀναβάλλοντος τὰ ἠλοημένα. *Hæc porro voce veluti notiore explicat* Iliad.
[...]omericum illud λίστρον *in Odissea* χ. *& fortaßè* ρ. pag.
[...]λύου nomen illi indidêre, quòd licet officio 1161 &
[...]fferret, non tamen forma. Odiss.
ω.832.

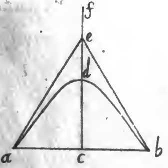
PROPOSITIO I.

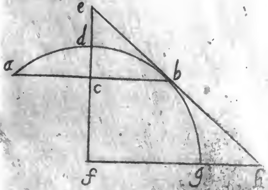
Si duæ rectæ sectionem conicam tangentes conueniant, & à concursu ducatur diameter; portio illius à sectionis vertice ad concursum est in parabolâ æqualis portioni ab eodem vertice ad rectam tactus connectentem; in hyperbolâ est eâ minor; in oxygoniâ, maior.

Sit conica sectio a d b, quam in a & b tangant rectæ a e b e conuenientes in e; & per e ducta sit recta e c, occurrens sectioni in d, & rectam a b tactus connectentem secans bifariam in c; erit ergo d c diameter. Sit primò sectio a d b parabola, vt in
29. Secundi Conic. primâ figurâ; dico rectam e d esse æqualem rectæ d c. Quoniam enim parabolam a d b recta a e contingit in a, conuenitque cum diametro in e; & à tactu ordinatim applicata est ad diametrum recta a c, erit recta d c abscissa ex diametro ad sectionis
35. primi Cō. verticem d, æqualis rectæ d e inter sectionem & contingentem a e interiectæ.

Secundò sectio a d b sit hyperbola, vt in secundâ figurâ, dico rectam e d esse


e
d
a
c
b


f
e
d
a
c
b


e
d
a
b
c
f
g
h

minorem rectâ d c. Quoniam enim hyperbolam a d b recta a e contingit in a, conuenitque cum diametro d e in e, ipsum e iacebit inter verticem d & centrum sectionis, quod sit f. Cùm igitur à tactu a ad diametrum linea a c ordinatim applicata sit, rectangulum c f e erit æquale quadrato rectæ f d: sunt ergo tres rectæ f e f d f c proportionales. Quoniam ergo vt f c ad f d, ita est f d ad f e; erit diuidendo vt f d ad c d, ita f e ad d e; & alternando vt f d ad f e, ita c d ad d e: Sed f d est maior quàm f e (ostensum enim est punctum e cadere inter f & d) ergo recta d c est maior quàm e d.

31. primi Cõ. in coroll.

37. primi Cõ.

16. sexti Euc.

Tertiò sectio a d b sit oxygonia, vt in tertiâ figurâ; dico rectam e d esse maiorem rectâ d c. Quoniam enim rectæ a e b e sectionem oxygoniam contingentes conueniunt in e, recta a b coniungens tactus non transibit per centrum; nam si per centrum transiret, forent a e b e parallelæ. Sit f centrum, atque per f ducatur f g parallela rectæ a b ac proinde & coniugata diametro f d. Cùm ergo in peripheriâ d b g punctum b sit inter d & g, & in illo recta e b occurrens sectioni cadat ex vtraque parte extra sectionem, conueniet cum linea f g productâ. Conueniat in h: ergo in lineâ e b punctũ b est inter e & h: ergo in lineâ e f punctum c est inter e & f, ac proinde f c recta est portio rectæ f e, &

27. secun. Con.

17. definit. primi Con.

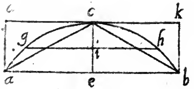
25. primi Cõ.

ipſius etiam fd, cùm d ſit terminus diametri, c autem ſit intra ſectionem. Quoniam igitur rectangulum e f c eſt æquale quadrato rectæ fd, tres e f d f c f ſunt proportionales, ergo diuidendo vt e d ad d f, ita d c ad c f, & alternando vt e d ad d c, ita d f ad c f: ſed c f eſt minor quam d f, ergo d c eſt minor quàm d e, quod erat oſtendendum. 31. primi Cô.

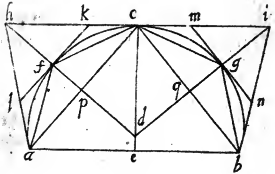
Propositio II.

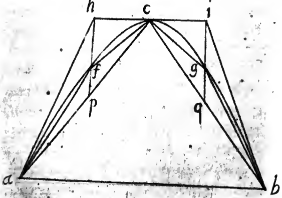
Dato ſegmento ſectionis conicæ & dato ſpatio quouis, poteſt ſectio conica in tot portiones numero pares diuidi, vt ſi per extrema earum ducantur rectæ ipſas ſubtendentes vel tangentes, concludant cum ipſis ſpatia quæ omnia ſimul ſint minora dato.

Sit datum ſectionis conicæ ſegmentum c b comprehenſum rectâ a b & curuâ c b, datum etiam ſit ſpatium o, propoſitumque ſit primò oſtendere ſectionem a c b poſſe in tot portiones numero pares diuidi, vt ſi per extrema earum ducantur rectæ ipſas ſubtendentes conclu-


c
k
g
h
i
a
e
b


o


h
k
c
m
i
f
g
l
p
q
n
d
a
e
b


h
c
i
f
g
p
q
a
b

dant cum ipsis spatia, quæ omnia simul sint minora dato o. Ac primùm ne actum agamus, cùm istud de circulo ex Euclide demonstretur, & de ellipsi ex ijs quæ Commandinus in quintam propositionem libri de conoidibus & Sphæroidibus est commentatus, superest vt idipsum ad parabolam & hyperbolam extendamus. 2. duodec.

Parabolæ igitur vel hyperbolæ segmenti basi a b parallela ducatur g h, & vtraque bifariam secta in punctis e i, iungatur recta e i punctumque in quo sectioni occurrit sit c; erit ergo recta e i diameter. Per c ducatur recta c κ æquidistans rectæ a b; tanget ergo c κ sectionem in c. Iungantur rectæ c a b c, & compleatur parallelogrammum a d k b, ita vt a d k b sint æquidistantes rectæ e c: rectæ ergo d a k b in vno tantum puncto cum sectione conuenient: ergo parallelogrammum a d κ b, erit maius segmento a g c h b intra ipsum parallelogrammum incluso: ergo & triangulum a c b semissis parallelogrammi a d κ b erit maius semisse segmenti a g c h b: nam vt totum ad totum, ita semissis ad semissem. 44. secun. Con. 32. primi Cō. 26. primi Cō. 41. primi Euc.

Quoniam igitur ex segmento a g c h b ablatum est triangulum a c b maius ipsius semisse, ex residuisque duobus segmentis a g c b c h possunt pariter auferri duo quæ singula sint maiora ipsorum singulorum semisse, & sic in infinitum deuenietur tandem ad segnenta numero paria, quæ omnia simul miuora erunt spatio o; id enim fieri posse assumitur apud Euclidem aliosque Geometras vt in prolegomenis dictum est. Datò ergo segmento &c. quod erat primo loco demonstrandum, & quod veluti demonstratum de parabolâ assumit Archimedes in libris de æquiponderantibus.

§. 2.

6. secun. de æquip.

Secundò propositũ sit ostendere sectionem a c b posse in tot portiones numero pares diuidi vt tangentes per earũ extrema ductæ concludant cum ipsis spatia quæ omnia simul sint minora dato o. Istud de circulo monstrat Archimedes propositione prima de circuli dimensione, & propositione sexta libri primi de sphæra & cylindro; ostendi verò potest de omni conica sectione in hunc modum.

Sit primò curua a c b portio oxygoniæ vt in secunda figurâ, cuius centrum d; per d & e ducta sit diameter d e occurrens curuæ in c: iunctæ ergo a c b c non transibunt per centrum d (quòd si puncta d & e sibi congruant, intelligatur diameter c e, quæ sit coniungata diametro a b.) Quoniam centrum d est in recta c e, si per a & c ductæ fuerint tangentes concurrent ad easdem partes centri d, ad quas est recta c a; concurrant in h; & tangentes in c & b (quæ pari ratione ostendentur conuenire) conue-

27. secun. Con.

niant in i. Cùm igitur curua a c b secta sit in duas portiones a c c b, & per extrema a c c b ductæ sint tangentes coëuntes in h & i, spatia h a c i c b comprehensa tangentibus & portionibus curuæ, vel erunt simul minora spatio o, vel non erunt; si sint, ergo in oxigonia sectione hoc est in circulo & ellipsi, ostensum est illud quod erat propositũ. Quòd si non sint minora, ex centro d per h & i ducantur rectæ h d i d, quæ bifariam secabunt rectas a c c b; secent autem oxygoniam in punctis f g, per quæ si ducantur l k m n parallelæ rectis a c c b tangent oxygoniam. Quoniam igitur, iunctis rectis a f f c c g g b, rectæ h f i g sunt maiores rectis f p g q singulæ singulis, & parallelæ sunt inuicem a c l k, itèm c b m n, vt h f ad f p, ita erit h l ad l a, & h k ad k c. Item vt i g ad g q, ita erit i m ad m c, & i n ad n b: rectæ ergo h l h k i m i n sunt maiores rectis l a k c c m n b singulæ singulis. Rursus quoniam triangula h κ f κ c f habent angulum ad idem punctum f constitutum, habebunt eandem ex f perpendicularem demissam ad latus h k κ c oppositum: ergo triangula h k f κ c f se habent vt bases h κ κ c: ergo triangulum h κ f est maius triangulo κ c f. Simili ratione ostendetur triangula h l f m g i n g i esse maiora triangulis l f a m g c n g b singula singu-

30. secun. Con.

32. primi Con.

1. huius

2. sexti Euc.

lis: ergo triangulum h l k compositum ex duobus h f l h f k est maius rectilineis duobus l f a k f c, cúmque triangula mixta l f a k f c sint partes rectilineorum l f a k f c, triangulum h l k erit multò maius quàm duo triangula mixta l f a k f c: ergo ex triangulo mixto h a c composito ex tangentibus & ex oxigonia erit ablata portio h l k maior quàm residuum. Similiter ostendetur ex triangulo mixto i c b ablatam esse portionem i m n maiorem residuo. Cùm igitur eiusmodi subductio possit continuari in infinitum, nimirum per l k m n nouos tangentium concursus ductis diametris, deuenietur ad figuras mixtas ex tangentibus & ex portionibus oxygoniæ a c b numero paribus, quæ omnes simul erunt minores spatio o.

Sit secundò curua a c b portio parabolæ vel hyperbolæ, vt in tertia figura; poterit ergo per primam huius partem segmentum a c b in tot portiones numero pares diuidi vt spatia illis & subtendentibus rectis comprehensa sint simul minora spatio o. Sint eæ portiones a c c b subtensæ rectis a c c b, & vnà cum illis constituentes mixtas figuras a f c c g b quæ simul erunt minores spatio o. Per extrema eiusmodi portionum ductæ intelligantur tangẽtes, quæ coibunt in vnũ punctum; sitque h punctum in quod eductæ ex a & c conueniunt; & i in quod eductæ ex c & b; di-

14. & 25 secud. Con.

co ſpatia figurarum mixtarum a h c c i b eſſe ſimul minora ſpatio o. Quoniam (per p & q biſectiones rectarum a c c b; & per puncta h & i ductis rectis h p i q ſecantibus curuas a c c b in f & g, & iunctis rectis a f f c c g g b) in parabola & hyperbolâ recta f p non eſt minor recta f h, ſed vel maior in hyperbola, vel æqualis in parabola; & quoniam rectilineorum triangulorum h a f, f a p angulus ad idẽ punctum a conſtituitur; erit, prout in ſimili oſtenſum eſt, triangulum f a p vel maius, vel certè æquale triangulo h a f; ſimiliq́ue ratione triangulum f c p oſtendetur non eſſe minus triangulo f h c; & triangula q c g, q g b triangulis g i c g i b ſingula ſingulis. 1. huius

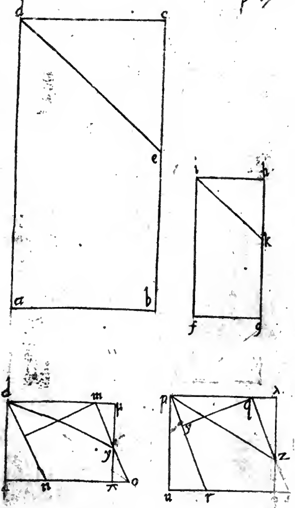
Rurſus quoniam figuræ rectilineæ a f c c g b ſunt vel maiores vel æquales figuris rectilineis h a f c i c g b; figuræ mixtæ h a f c i c g b quæ ſunt pars rectilinearum h a f c i c g b erunt minores ſimul rectilineis a f c c g b ſimul ſumptis: ſed rectilinea a f c c g b ſunt minora mixtis figuris a f c c g b; ergo mixtæ figuræ h a f c i c g b ſunt minores mixtis figuris a f c c g b comprehenſis ſub rectis a c c b, & ſub curuis a c c b. Cùm ergo figuræ mixtæ a f c c g b ſint minores ſpatio o, erunt ipſo ſpatio o multò minores a h c c i b mixtæ. Dato igitur ſegmento &c. quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO III.

Quadrilatera quæ duo habent latera parallela, si fuerint æquiangula, & laterũ parallelorũ eadẽ proportio, inter se rationem habent eam quæ ex lateribus æquales angulos continentibus componitur. Et si non sint æquiangula, eam quæ ex distantijs parallelorũ, & ex analogis lateribus; vel eam quæ ex basibus ad quas incidunt parallelæ & ex perpendicularibus quæ ad bases de terminis laterum analogorum demissæ fuerint.

Sint quadrilateræ figuræ a b c d f g h i, quarum latera d a b c sint parallela inuicem, item f i g h sint quoque mutuò parallela, sitque vt d a ad c b, ita f i ad g h, vel alternando vt d a ad f i ita c b ad g h. Primò habeant angulos ad a & f æquales; dico proportionem quadrilateræ figuræ a b c d ad figuram f g h i esse cõpositam

p·17



positam ex ratione lateris d a ad i f, & lateris a b ad f g. Et quidem si d a c b sint,
23. Sexti Euc. vt in primo schematum pari, æquales, id iam est demonstratum ab Euclide, sint igitur trapezia d a b e i f g k, & vt d a ad i f, ita sit e b ad g k. Quoniã æquales sunt i f g h, item d a b c; & vt d a ad b e; ita i f ad g k; erit vt c b ad b e, ita h g ad g k; & per conuersionem rationis vt b c ad c e, ita g h ad h k; ergo alternando vt c b ad h g, siue vt d a ad i f, ita e c ad h k. Cùm igitur triangula d c e i h k habeant angulos ad c & h æquales, ha-
23. Sexti Eucl. in Scholio bebunt ex demonstratis apud Clauium proportionem ex lateribus d c i h, & c e h k compositam; ergo cùm ratio rectarum c e h k sit eadem, vt ostensum est, quæ rectarum d a i f; ratio trianguli d c e ad triangulum i h k componetur ex iisdem ex quibus componitur ratio parallelogrammi d a b c ad parallelogrammum i f g h: ergo cum sicut totum d a b c ad totum i f g h, ita d c e ablatum ad i h k ablatum; residua d a b e i f g k se habent inuicem vt tota d a b c i f g h; id est habent inter
19. quinti Eucl. se rationem compositam ex lateribus d a i f, & a b f g.

Iam, vt in secundo schematum pari, quadrilateræ figuræ l n o m p r s q non sint æquiangulæ, attamen latera m o l n parallela habeant inuicem eandem rationem, quam latera q s p r. Et primò sint l n m o æquales rectæ; erunt ergo æquales q s p r, ac proinde figuræ l n o m p r s q erunt parallelogrammæ. Cùm igitur sint parallelogrammæ, verum erit id quod intendimus ex demonstratis apud Clauium loco citato.

Sint ergo trapezia p r s z, l n o y nec sint æquiangula inuicem, latus tamen l n ad p r, sit vt latus y o ad z s. Ostendendum est proportionem trapezij l n o y ad p r s z esse compositam ex rationibus basis n o ad basim r s, & perpendicularis l t in n o basim demissæ, ad perpendicularem p u demissam in s r basim; vel (demissis m x q y perpendicularibus ad l n p r) ex ratione perpendicularis m x ad q y, & ex ratiône lateris l n ad p n. 6 Scholii citati.

Quoniam enim triangula p z q l y m habent latera q z m y in ratione laterum p r l n (id enim eodem modo ostenditur, quo paulò ante fuit demonstratum rationem laterum x h e c esse eandem cum ratione laterum f i d a) & habent inter se proportionem compositam ex basibus & altitudinibus; positis basibus l m p q, & demissis perpendicularibus y μ z λ ex y & z ad bases l m p q, proportio trianguli l m y ad triangulum p z q componetur ex proportione basium l m p q, & altitudinum y μ z λ: sed $\varpi\mu$ ad μy, se habet vt o m ad m y; item $\varphi\lambda$ ad λz se habet vt s q ad q z; cùm igitur vt o m ibid. 4. Sexti Euc.

ad m y ita sit s q ad q z, erit $\pi\mu$ ad μy vt $\varphi\lambda$ ad λ z; & alternaando vt $\pi\mu$ seu l t ad $\varphi\lambda$ seu p u, ita μ y ad λ z, ergo altitudines m y l z triangulorum l y m p z q sunt in ratione altitudinum l t p u: ergo go proportio triangulorum l y m, p z q componitur ex ijsdem rationibus basium l m p q & altitudinum l t p v, ex quibus componuntur tota parallelogrãma l n o m p r s q: ergo residua trapezia l n o y p r s z componuntur ex iisdem rationibus basium l m p q seu n o r s, & altitudinum l t pu.

Quinti Euc. 19.

Quòd si m y q z ponantur bases triangulorum l y m p z q, eorum altitudines erunt m x q y: Cùm ergo ratio basium m y q z sit eadem, vt ostensum est, quæ laterum l n p r; triangulorum l y m p z q proportio componetur ex rationibus laterum l n p r, & distantiarum m x q y. Cùm ergo proportio parallelogrammorũ l n o m p r s q sit eodem modo composita, residua trapezia l n o y p r s z habebunt inter se rationem compositam ex lateribus l n p r, & ex distantiis m x q y, Quadrilatera ergo &c. quod erat ostendendum.

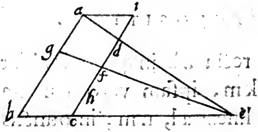
COROLLARIVM.

Hinc fit quando bases sunt æquales prędicta quadrilatera esse inter se vt altitudines. Cum enim habeant rationem compositã ex basibus & altitudinibus, apertũ est ex methodo proportionem componendi ex duabus proportionibus demonſtrato apud Clauium loco citato, quadrilatera ſe habere vt altitudines. Inde etiam liquet, quando diſtantiæ ſunt æquales, ipſa quadrilatera eſſe in ratione laterum analogorum.

PROPOSITIO IV.

Si duæ rectæ inæquales & parallelæ incidant in tertiam aliquam ad eaſdemque partes, atque ſecentur proportionaliter, rectæ ductæ per earum extrema, & per puncta ſectionum analoga concurrent in idem punctum eiuſdem lineæ tertiæ.

pa 2



Duæ rectæ parallelæ a b maior, d c minor incidant in rectam b c, & sectæ sint proportionaliter in punctis g & f; Dico si per a & d recta ducatur, item per g & f, rectas a d g f productas secare rectam b c in eodem puncto.

34. primi. 29. primi. Quoniam enim rectæ b a c d sunt parallelæ; & d c est minor, si per a ducatur a i parallela rectæ b c, erunt b a c i æquales; ergo c d est minor quam c i: ergo cum anguli i a b a b c sint simul æquales duobus rectis erunt anguli c b a d a b

11 pronunt. minores duobus rectis; ergo rectæ a d b c conuenient ad partes d.

Secet igitur recta a d rectam b c in puncto e, & iungatur recta g e secans si fieri potest rectam d c in h: ergo per

4. Sexti. ea quæ demonstrat ex Commandino Clauius, vt a b ad a g, ita est c d ad d h: sed ita etiam ponitur esse c d ad d f: ergo d f d h sunt æquales, pars & totum. Non ergo recta g e secat rectam d c nisi in f.

Propositio V.

Sit recta a k in quam incidat recta k m, ipsam verò k m ita secent lineæ a l, n m, in punctis l & m, vt æquidistantium ipsi k m portiones interceptæ rectâ a k & lineis a l n m, sint proportionales portionibus ipsius k m. Rursus linearum a l n m alterutram a l tangat recta p c, in quouis puncto c, & per c agatur b c d æquidistans rectæ k m, occurrens lineæ n m in d & rectæ a k in b. Per f quoduis aliud punctum lineæ a l ducatur e f g æquidistans rectæ k m, occurrens lineæ n m in g, & rectæ a k in e, tangenti verò p c in i. Si vt e f ad e i ita fiat e g ad e h; & per d atque h ducatur recta d h. Dico rectam d h non occurrere lineæ n g m nisi in puncto d.

Si enim fieri poteſt occurrat recta d h ipsi n g m in puncto q, sitque d h q recta; per q agatur q r æquidistans ipsi k l, occurrens rectæ p c in s, & lineæ a c l in t. Quoniam igitur in rectam a k incidunt rectæ d b h e, & vt b d b c ita sunt e h e i ex constructione si b d, e h sint æquales

tandem ad segnenta numero paria, quæ omnia simul miuora erunt spatio o; id e-
§. 2. nim fieri posse assumitur apud Euclidem aliosque Geometras vt in prolegomenis dictum est. Datô ergo segmento &c. quod erat primo loco demonstrandum, & quod
6. secun. de æquip. veluti demonstratum de parabolâ assumit Archimedes in libris de æquiponderantibus.

Secundò propositũ sit ostendere sectionem a c b posse in tot portiones numero pares diuidi vt tangentes per earũ extrema ductæ concludant cum ipsis spatia quæ omnia simul sint minora dato o. Istud de circulo monstrat Archimedes propositione prima de circuli dimensione, & propositione sexta libri primi de sphæra & cylindro; ostendi verò potest de omni conica sectione in hunc modum.

Sit primò curua a c b portio oxygoniæ vt in secunda figurâ, cuius centrum d; per d & e ducta sit diameter d e occurrens curuæ in c: iunctæ ergo a c b c non transibunt per centrum d (quòd si puncta d & e sibi congruant, intelligatur diameter c e, quæ sit coniungata diametro a b.) Quoniam centrum d est in recta c e, si per a & c ductæ fuerint tangentes concurrent ad easdem partes cen-
27. secun. Con. tri d, ad quas est recta c a; concurrant in h; & tangentes in c & b (quæ pari ratione ostendentur conuenire) conue-

niant in i. Cùm igitur curua a c b secta sit in duas portiones a c c b, & per extrema a c c b ductæ sint tangentes coëuntes in h & i, spatia h a c i c b comprehensa tangentibus & portionibus curuæ, vel erunt simul minora spatio o, vel non erunt; si sint, ergo in oxigonia sectione hoc est in circulo & ellipsi, ostensum est illud quod erat propositũ. Quòd si non sint minora, ex centro d per h & i ducantur rectæ h d i d, quæ bifariam secabunt rectas a c c b; secent autem oxygoniam in punctis f g, per quæ si ducantur l k m n parallelæ rectis a c c b tangent oxygoniam. Quoniam igitur, iunctis rectis a f f c c g g b, rectæ h f i g sunt maiores rectis f p g q singulæ singulis, & parallelæ sunt inuicem a c l k, itèm c b m n, vt h f ad f p, ita erit h l ad l a, & h k ad k c. Item vt i g ad g q, ita erit i m ad m c, & i n ad n b: rectæ ergo h l h k i m i n sunt maiores rectis l a k c c m n b singulæ singulis. Rursus quoniam triangula h κ f κ c f habent angulum ad idem punctum f cõstitutum, habebunt eandem ex f perpendicularem demissam ad latus h k κ c oppositum: ergo triangula h k f κ c f se habent vt bases h κ κ c: ergo triangulum h κ f est maius triangulo κ c f. Simili ratione ostendetur triangula h l f m g i n g i esse maiora triangulis l f a m g c n g b singula singu-

30. secun. Con.
32. primi Con.
1. huius
2. sexti Euc.

lis: ergo triangulum h l κ compositum ex duobus h f l h f k est maius rectilineis duobus l f a κ f c, cúmque triangula mixta l f a κ f c sint partes rectilineorum l f a k f c, triangulum h l k erit multò maius quàm duo triangula mixta l f a k f c: ergo ex triangulo mixto h a c composito ex tangentibus & ex oxigonia erit ablata portio h l k maior quàm residuum. Similiter ostendetur ex triangulo mixto i c b ablatam esse portionem i m n maiorem residuo. Cùm igitur eiusmodi subductio possit continuari in infinitum, nimirum per l k m n nouos tangentium concursus ductis diametris, deuenietur ad figuras mixtas ex tangentibus & ex portionibus oxygoniæ a c b numero paribus, quæ omnes simul erunt minores spatio o.

Sit secundò curua a c b portio parabolæ vel hyperbolæ, vt in tertia figura; poterit ergo per primam huius partem segmentum a c b in tot portiones numero pares diuidi vt spatia illis & subtendentibus rectis comprehensa sint simul minora spatio o. Sint eæ portiones a c c b subtensæ rectis a c c b, & vnà cum illis constituentes mixtas figuras a f c c g b quæ simul erunt minores spatio o. Per extrema eiusmodi portionum ductæ intelligantur tangẽtes, quæ coibunt in vnũ punctum; sitque h punctum in quod eductæ ex a & c conueniunt; & i in quod eductæ ex c & b; di-

24. & 25 secud. Con.

ſpatia figurarum mixtarum a h c c i b ſimul minora ſpatio o. Quoniam (per q biſectiones rectarum a c c b; & per ꝛcta h & i ductis rectis h p i q ſecanti- curuas a c c b in f & g, & iunctis ꝛs a f f c c g g b) in parabola & hy- bolâ recta f p non eſt minor recta f h, vel maior in hyperbola, vel æqualis in abola; & quoniam rectilineorum trian- orum h a f, f a p angulus ad idẽ pun- m a conſtituitur; erit, prout in ſimili enſum eſt, triangulum f a p vel maius, certè æquale triangulo h a f; ſimili- : ratione triangulum f c p oſtendetur ı eſſe minus triangulo f h c; & trian- a q c g, q g b triangulis g i c g i b ſin- a ſingulis. 1. huius

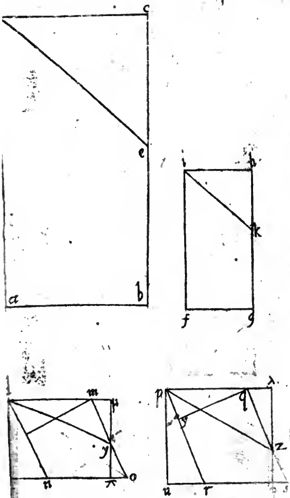
Rurſus quoniam figuræ rectilineæ a f c b ſunt vel maiores vel æquales figuris ılineis h a f c i c g b; figuræ mixtæ f c i c g b quæ ſunt pars rectilinearum f c i c g b erunt minores ſimul recti- ꝛis a f c c g b ſimul ſumptis: ſed re- nea a f c c g b ſunt minora mixtis fi- is a f c c g b; ergo mixtæ figuræ h a f c ꝫ b ſunt minores mixtis figuris a f c b comprehenſis ſub rectis a c c b, & curuis a c c b. Cùm ergo figuræ mix- ı f c c g b ſint minores ſpatio o, erunt ı ſpatio o multò minores a h c c i b tæ. Dato igitur ſegmento &c. quod oſtendendum.

PROPOSITIO III.

Quadrilatera quæ duo habent latera parallela, si fuerint æquiangula, & laterũ parallelorũ eadẽ proportio, inter se rationem habent eam quæ ex lateribus æquales angulos continentibus componitur. Et si non sint æquiangula, eam quæ ex distantijs parallelorũ, & ex analogis lateribus; vel eam quæ ex basibus ad quas incidunt parallelæ & ex perpendicularibus quæ ad bases de terminis laterum analogorum demissæ fuerint.

Sint quadrilateræ figuræ a b c d f g h i, quarum latera d a b c sint parallela inuicem, item f i g h sint quoque mutuò parallela, sitque vt d a ad c b, ita f i ad g h, vel alternando vt d a ad f i ita c b ad g h. Primò habeant angulos ad a & f æquales; dico proportionem quadrilateræ figuræ a b c d ad figuram f g h i esse cõpositam

p·17



positam ex ratione lateris d a ad i f, & lateris a b ad f g. Et quidem si d a c b sint,
23 Sexti Euc. vt in primo schematum pari, æquales, id iam est demonstratum ab Euclide, sint igitur trapezia d a b e i f g k, & vt d a ad i f, ita sit e b ad g k. Quoniã æquales sunt i f g h, item d a b c; & vt d a ad b e; ita i f ad g k; erit vt c b ad b e, ita h g ad g k; & per conuersionem rationis vt b c ad c e, ita g h ad h k; ergo alternando vt c b ad h g, siue vt d a ad i f, ita e c ad h k. Cùm igitur triangula d c e i h k habeant angulos ad c & h æquales, habebunt ex demonstratis apud Clauium proportionem ex lateribus d c i h, & c e h k
23. Sexti Eucl. in Scholio compositam; ergo cùm ratio rectarum c e h k sit eadem, vt ostensum est, quæ rectarum d a i f; ratio trianguli d c e ad triangulum i h k componetur ex iisdem ex quibus componitur ratio parallelogrammi d a b c ad parallelogrammum i f g h: ergo cum sicut totum d a b c ad totum i f g h, ita d c e ablatum ad i h k ablatum; residua d a b e i f g k se habent inuicem vt tota d a b c i f g h; id est habent inter se rationem compositam ex lateribus d a
19. quinti Eucl. i f, & a b f g.

Iam, vt in secundo schematum pari, quadrilateræ figuræ l n o m p r s q non sint æquiangulæ, attamen latera m o l n parallela habeant inuicem eandem rationem, quam latera q s p r. Et primò sint l n m o æquales rectæ; erunt ergo æquales q s p r, ac proinde figuræ l n o m p r s q erunt parallelogrammæ. Cum igitur sint parallelogrammæ, verum erit id quod intendimus ex demonstratis apud Clauium loco citato.

Sint ergo trapezia p r s z, l n o y nec sint æquiangula inuicem, latus tamen l n ad p r, sit vt latus y o ad z s. Ostendendum est proportionem trapezij l n o y ad p r s z esse compositam ex rationibus basis n o ad basim r s, & perpendicularis l t in n o basim demissæ, ad perpendicularem p u demissam in s r basim; vel (demissis m x q y perpendicularibus ad l n p r) ex ratione perpendicularis m x ad q y, & ex ratione lateris l n ad p n. 6 Scholii citati.

Quoniam enim triangula p z q l y m habent latera q z m y in ratione laterum p r l n (id enim eodem modo ostenditur, quo paulò ante fuit demonstratum rationem laterum k h e c esse eandem cum ratione laterum f i d a) & habent inter se proportionem compositam ex basibus & altitudinibus; positis basibus l m p q, & demissis perpendicularibus y μ z λ ex y & z ad bases l m p q, proportio trianguli l m y ad triangulum p z q componetur ex proportione basium l m p q, & altitudinum y μ z λ: sed ϖμ ad μ y, se habet vt o m ad m y; item ϱ λ ad λ z se habet vt s q ad q z; cùm igitur vt o m ibid. 4. Sexti Euc.

ad m y ita sit s q ad q z, erit $\pi\mu$ ad μ y vt $\varphi\lambda$ ad λ z; & alternaando vt $\pi\mu$ seu lt ad $\varphi\lambda$ seu p u, ita μ y ad λ z, ergo altitudines m y l z triangulorum l y m p z q sunt in ratione altitudinum l t p u: ergo go proportio triangulorum l y m, p z q componitur ex iisdem rationibus basium l m p q & altitudinum l t p v, ex quibus componuntur tota parallelogrāma l n o m p r s q: ergo residua trapezia l n o y p r s z componuntur ex iisdem rationibus basium l m p q seu n o r s, & altitudinum l t pu.

Quinti Euc. 19.

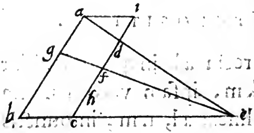
Quòd si m y q z ponantur bases triangulorum l y m p z q, eorum altitudines erunt m x q y: Cùm ergo ratio basium m y q z sit eadem, vt ostensum est, quæ laterum l n p r; triangulorum l y m p z q proportio componetur ex rationibus laterum l n p r, & distantiarum m x q y. Cùm ergo proportio parallelogrammorū l n o m p r s q sit eodem modo composita, residua trapezia l n o y p r s z habebunt inter se rationem compositam ex lateribus l n p r, & ex distantiis m x q y, Quadrilatera ergo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc fit quando bases sunt æquales prędicta quadrilatera esse inter se vt altitudines. Cum enim habeant rationem compositā ex basibus & altitudinibus, apertū est ex methodo proportionem componendi ex duabus proportionibus demonſtrato apud Clauium loco citato, quadrilatera ſe habere vt altitudines. Inde etiam liquet, quando diſtantiæ ſunt æquales, ipſa quadrilatera eſſe in ratione laterum analogorum.

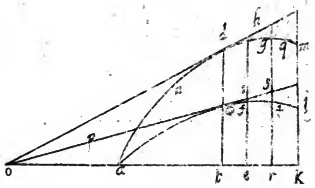
PROPOSITIO IV.

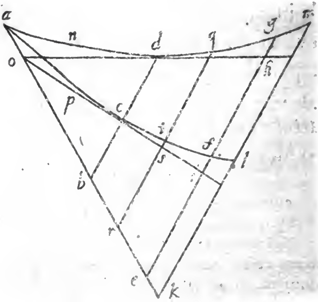
Si duæ rectæ inæquales & parallelæ incidant in tertiam aliquam ad eaſdemque partes, atque ſecentur proportionaliter, rectæ ductæ per earum extrema, & per puncta ſectionum analoga concurrent in idem punctum eiuſdem lineæ tertiæ.



ak & lineis al nm, sint proportionales portionibus ipsius km. Rursus linearum al nm alterutram al tangat recta pc, in quouis puncto c, & per c agatur bcd æquidistans rectæ km, occurrens lineæ nm in d & rectæ ak in b. Per f quoduis aliud punctum lineæ al ducatur efg æquidistans rectæ km, occurrens lineæ nm in g, & rectæ ak in e, tangenti verò pc in i. Si vt ef ad ei ita fiat eg ad eh; & per d atque h ducatur recta dh. Dico rectam dh non occurrere lineæ ngm nisi in puncto d.

Si enim fieri potest occurrat recta dh ipsi ngm in puncto q, sitque dhq recta; per q agatur qr æquidistans ipsi kl, occurrens rectæ pc in s, & lineæ acl in r. Quoniam igitur in rectam ak incidunt rectæ db he, & vt bd bc ita sunt eh ei ex constructione si bd, eh sint æquales


o
a
t
r
K
d
h
g
q
m
n
s
f
l
p


a
n
d
q
g
m
o
h
p
c
i
s
f
l
b
r
e
K

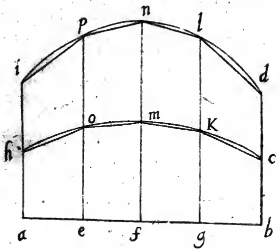
erunt b c i e, b d h e parallelogramma, ac proinde erunt d e, h i æquales; item b c, i e. Si autem sint inæquales conuenient in idem punctum rectæ a k per præcedentem. Sit illud o. Quoniam ergo in rectas d h, c i, b e, incidunt rectæ b c d, r s q, vt b c ad c d ita erit r s ad s q per ea quæ demonstrantur ad 4. sexti, si d h, c i, b e non sint parallelæ, si verò parallelæ fuerint, per 33. primi Euclidis: sed vt b c ad c d ita est r t ad t q, cùm portiones b c, c d & portiones r t, t q intercipiantur recta a b & lineis a l, n m: ergo vt r t ad t q, ita est r s ad s q, & alternando vt r t ad r s, hoc est vt pars ad totum in prima figura, vel vt totum ad partem in secunda figura, ita est t q ad s q hoc est, totum ad partem in prima figura, vel pars ad totum in secunda figura, quod est absurdum. Recta ergo d h non occurrit lineæ n m in alio puncto quàm in d. 33. primi.

Non absimili ratione ostenderetur, si recta p c secet lineam curuam a l, ipsam quoque n m secari à recta d h, & esse curuam.

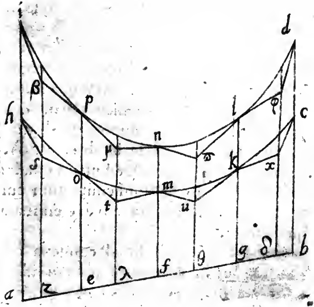
PROPOSITIO VI.

Sint tres lineæ a b h c i d, quarum a b sit recta, reliquarum alterutra h c sit sectio conica (circulo hac voce comprehenso) illis verò ita occurrant parallelæ inuicem b d a i rectæ in punctis b, c, d, a, h, i, vt ipsarum & parallelarum omnium portiones lineis a b, h c, i d interceptę se habeant vt b d, b c. Dico vt se habet recta b d ad b c rectā; ita se habere spatium a i d b ad spatium a h c b.

Vt recta b d ad b c ita sit spatium a i d b ad spatium quod potest recta q. Si quadratum q non est æquale spatio a h c b, sit primùm si fieri potest minus: excessus autem sit spatium quod potest recta r; sitque primò recta a b ad concaua curuæ h c. Diuidatur arcus h c in tot portiones h o, o m, m k, κ c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m κ, k c, spatia segmentorum sint simul minora dato spatio r, hoc enim fieri potest per 2. huius. Per puncta o, m, κ, ducantur p o e, n m f, l κ g parallellæ a i rectam b d, occurentes lineis a b, i d in punctis e, f, g, p, n, l. Iunctis rectis i p, p n, n l, l d, trapezia i a e p, p e f n, n f g l, l g b d se habebunt ad trapezia



n
p
l
i
d
o
m
K
h
c
a
e
f
g
b



i
d
β
p
l
φ
h
c
n
μ
ϖ
k
x
s
o
m
t
u
g
δ
b
θ
f
λ
e
z
a

h a e o, o e f m, m f g k, κ g b c vt recta b d ad rectam b c, per 3. huius, cum habeant latera proportionalia, bases æquales, imo easdem in recta a b & altitudines proportionales lateribus homologis; ergo totum rectilineum i p n l d b a se habet ad totum rectilineum h o m κ c b a vt recta d b ad rectam c b: Sed ita etiam se habet totum sub rectis i a, a b, b d & sub curua i n d contentum ad spatium q: ergo alternando vt totum sub curua i n d & sub rectis i a, a b, b d. contentum ad rectilineum i p n l d b a, ita spatium q ad rectilineum h o m k c b a: ergo cùm totum sub curua i n d & sub rectis i a, a b, b d contentũ sit maius rectilineo i p n l d b a, erit quoque quadratum q maius rectilineo h o m k c b a, quod est absurdum. Nam ex figura contenta sub curua h m c & sub rectis h a, a b, b c si dematur quadratum r, restat quadratum q; & si auferantur segmenta h o, o m, m k, k c q; simul sũt minora quadrato r, restat rectilineum h o m k c b a: ergo rectilineum h o m κ c b a est maius quadrato q. Non ergo spatium contentum curua h m c, & rectis h a, a b b c est maius quadrato q.

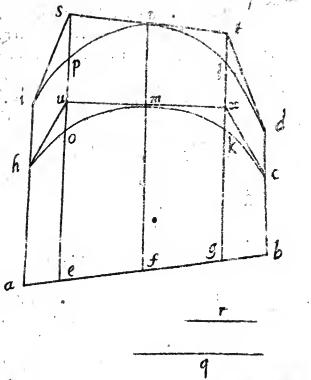
Quòd si recta a b sit ad conuexa curuæ h c; vt in secundâ figurâ; diuidatur arcus h c in tot portiones h o, o m, m κ, κ c numero pares, vt ductis tãgentibus h f, ſo t, t m u, v k x & x c, triangula mixta h ſ o, o t m, m v k, k x c ſint ſimul minora ſpatio r; hoc enim fieri poteſt per 2. huius. Per puncta o, m, κ ducantur rectæ b d æquidiſtantes e o p, ſ m n, g k l occurrentes curuæ i d in p, n, l; & rectæ a b in e, f, g. Similiter per puncta ſ, t, v, x agantur ſ z, t λ, u θ, x δ parallelæ ad rectam b d, & occurrentes rectæ a b in z, λ, θ, δ, atque vt b c ad c d, ita fiat z ſ ad z β, λ t ad λ μ, θ u ad θ π. δ x ad δ φ. Iunctæ rectæ i β, β p, p μ, μ n n π, π l non occurrent curuæ i n d niſi in punctis i, p, n, l, d, vt in præcedenti oſtenſum eſt.

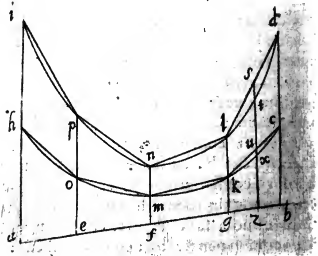
Quoniam ergo trapezia a h ſ z, z ſ o e, e o t λ, λ t m f, f m u θ, θ u k g, κ g x δ, ~~δ x c b~~ habẽt latera proportionalia lateribus trapeziorũ a i β z, z β p e, e p μ λ, λ μ n f, f n π θ, θ π l g, g l φ δ, δ φ d b ſingula ſingulis; habẽt verò baſes æquales imo eaſdẽ in rectâ a b & altitudines proportionales latebus homologis, vt recta b d ad b c, ita erit figura rectilinea i β p μ n π l φ d b a ad rectilineam h ſ o t m u κ x c b a : Sed ita etiam ſe habet totum ſub rectis i a, a b, b d & ſub curuâ i n d contentum ad ſpatium q : ergo alternando vt totum ſub curuâ i n d & ſub rectis i a, a b, b d contentum ad rectilineum i β p μ n π l φ d b a, ita ſpatium q ad rectilineum h ſ o t m u k x c b a: ergo cùm totum ſub curua & 8. huius ſub rectis i a, a b, b d contentum ſit maius rectilineo ι β p &c. Erit quoque quadratum q maius rectilineo h ſ o &c. quod eſt abſurdum. Nam ex figura cõtenta ſub curua h m c, & ſub rectis h a, a b, b c dẽpto quadrato r reſtat quadratum q, & demptis triangulis mixtis h ſ o, o t m, m u k, κ x c, quæ ſimul ſunt minora quadrato r, reſtat rectilineum h ſ o t &c. Ergo rectilineum h ſ o t &c. eſt maius quadrato q. Non ergo ſpatium contentum curua h m c & rectis h a, a b, b c eſt maius quadrato q.

Secundò ſit, ſi fieri poteſt, quadratum q maius ſpatio contento ſub curua h m c & ſub rectis a h a b b c; exceſſus autem ſit ſpatium quod poteſt recta r. ſitque primò recta a b ad concaua curuæ h c. Diuidatur arcus h c in tot portiones h m, m c, vt cum per earum extrema eductæ fuerint tangentes h u, u m x, x c, triangula mixta h u m, m x c ſint ſimul minora ſpatio r. id enim fieri poſſe oſtenſum eſt in 2. huius, per v, m, x puncta ducantur rectæ v e, m ſ, x g parallelæ ad rectam b d, quæ occurrant ſectionibus in o, k, p, n, l, & rectæ a b in e, f, g. Vt e o ad e u, ita fiat e p ad e ſ; & vt g κ ad g x, ita fiat g l ad g t. Iunctæ i ſ, ſ n, n t, t d non occurrent curuæ i n d niſi in punctis i n d.

Quoniam ergo vt e o ad e u, ita ſe

habet ex constructione e p ad e s; ergo alternando vt e o ad e p, siue vt a h ad a i, ita e u ad e s: ergo alternãdo vt a h ad e u, ita a i ad e s: ergo trapezium h a e u habet latera h a, eu proportionalia lateribus a i, e s trapezij i a e s. Idẽ ostendetur de alijs trapezijs similiter sumptis. Quoniam ergo trapezia a i s e, e s n f, f n t g, g t d b habent latera proportionalia lateribus trapeziorum a h u e, e u m f, f m x g, g x c b, habentque bases easdem in recta a b, altitudines autem laterum homologorum se habent vt ipsa latera, totum rectilineum i s n t d b a se habebit ad totum rectilineum h u m x c b a vt recta b d ad b c: sed ita etiam se habet totum sub rectis i a, a b, b d & sub curua i n d contentum ad spatium q; ergo alternando vt totum sub curua i n d & sub rectis i a, a b b d contentum ad rectilineum i s n t d b a, ita spatium q ad rectilineum h u m x c b a: ergò cùm totum sub curua i n d & sub rectis i a, a b, b d contentum sit minus rectilineo i s n t d b a, erit quoque quadratum q minus rectilineo h u m x c b a, quod est absurdum. Nam ad figuram contentam sub curuâ h m c & sub rectis h a, a b, b c adiecto quadrato r, conficitur quadratum q; & adiectis triangulis mixtis h u m, m x c quæ simul minora sunt spatio r, conficitur rectilineum h u m x c b a: ergo rectilineum


s
t
i
p
u
m
x
d
o
k
h
c
e
f
g
b
a
r
q


i
d
s
h
p
l
t
c
n
u
x
o
k
m
e
f
g
z
b

h u m x c b a eſt minus quadrato q. Non ergo ſpatium contentum curua h m c, & rectis h a, a b, b c eſt minus quadrato q.

Quòd ſi recta a b ſit ad cõuexa curuæ h c vt in ſecunda figura; diuidatur arcus h c in tot portiones h o, o m, m k, κ c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m κ, k c, ſpatia ſegmẽtorũ h o, o m, m c, k c ſint ſiſimul minora dato ſpatio r; hoc enim fieri poteſt. Per puncta o, m, k, ducantur p o e, n m f, l κ g parallelæ ad rectam b d, occurrentes lineis a b, i d in punctis e, f, g, p, n, l. Iunctæ rectæ i p, p n, n l, l d non occurrent curuæ i n d niſi in pũctis i, p, n, l, d. Manifeſtũ autem eſt conuexa curuæ i n d eſſe ad partes rectæ a b; ſũpto enim quouis puncto t, & per illud ductâ f t u x z parallelâ ad rectam b d, quoniã rectæ g *k* l, b c d ſunt ſectæ proportionaliter in *k* & c, & per extrema ipſarum, perque puncta *k* & c ductæ ſunt rectæ d l, c *k*, b g, ſi producantur conuenient in idem punctum; ergo vt b c ad b d, ita eſt z u ad z f; ſed ita etiam eſt z x ad z t; ergo alternando vt z u ad z x, ita eſt z f ad z t. Sed z u eſt maior quam z x: ergo z f eſt maior quam z t: ergo punctum t curuæ i t d eſt inter rectas l d, g b: ergo g b eſt ad conuexa curuæ l t d. Simili ratione oſtendetur ſi recta a b fuerit ad concaua curuæ h m c, eſſe quoque ad concaua curuæ i n d; quod in aliis caſibus præter-

2. huius

5. huius

4. huius

5. huius

miſſum videri poterat.

His ita demonſtratis, oſtendetur, ſicuti in primâ figurâ factum eſt, rectilineum i p n l d b a ſe habere ad rectilineũ h o m *k* c b a, vt ſe habet recta d b ad rectam c b; Sed ita etiam ſe habet totum ſub rectis i a, ab, b d & ſub curuâ i n d contentum ad ſpatium q: ergo alternando vt totum ſub curua i n d & ſub rectis i a, a b, b d contentũ ad rectilineum i p n l d b a, ita ſpatiũ q ad rectilineũ h o m *k* c b a: ergo cum totum ſub curua i n d & ſub rectis i a, a b, b d contentũ ſit minus rectilineo i p n l d b a, erit quoque quadratum q minus rectilineo h o m *k* c b a, quod eſt abſurdum. Nam ad figuram contentam ſub curua h m c & rectis h a, a b, b c adiecto quadrato r conficitur quadratum q; & adiectis ſegmentis h o, o m, m *k*, *k* c quæ ſimul ſunt minora quadrato r conficitur rectilineum h o m *k* c b a: ergo rectilineum h o m *k* c b a eſt minus quadrato q. Non ergo ſpatium contentum curua h m c & rectis h a, a b, b c eſt minus quadrato q; Sed neque etiam eſt maius: ergo eſt æquale, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

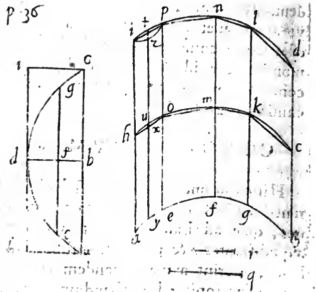
Hinc manifeſtum eſt eandem eſſe demonſtrationis vim, ſi loco extremorum trapeziorum ponantur triangula; habebunt enim ſe vt altidudines, cùm eorum baſes ſint vel eædem, vel æquales. Vis demonſtrationis integra etiam perſtaret, vt apertum eſt, quamuis linea h c non eſſet ſectio conica, dummodo de illa demonſtraretur idipſum quod de ſectione conica oſtenſum fuit in propoſitione ſecunda huius libri.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque intelligitur ſi baſes fuerint diuerſæ & inæquales, rectæ autem omnes, quæ ad baſes incidunt vni certæ æquidiſtantes, & proportionaliter ſecant baſes, fuerint æquales, eandem eſſe vim demonſtrationis ad probandum ipſas figuras eſſe in ratione baſium.

COROLLARIVM III.

Hinc quoque apertum eſt figuras quæ ſectione conica, ordinatim applicata eadem, & diametro vtrinque continentur eſſe æquales. Sit enim ſectio conica a e d g c, cuius diameter ſit d b, & ex quolibet eius puncto b eductæ ſint ordinatim applicatæ b a, b c quæ in directum iacent cùm ſint tangenti in d parallelæ: dico figugam d e a b eſſe æqualem figuræ d g b c.



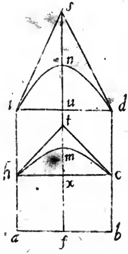
habent enim bafim eandem c b, & perpendiculares ex a & c demiffæ funt æquales; ex quocunque verò puncto f bafis d b ducantur rectæ f e, f g parallelæ rectis ab, b c, ipfæ f e, f g funt æquales; ergo figura d e a b eft æqualis figuræ d g c b. Vnde vlterius efficitur, fi ductis a h, c i rectis figuræ d b a h, d b c i fint æquales, refiduas quoque a e d h, c g d i effe æquales inuicem.

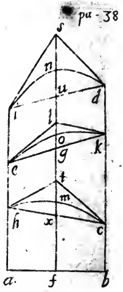
COROLLARIVM IV.

Altera figura in laterculo corollarij proximè fuperioris exhibita inferuit ad id quod quarto loco ex demonstratis colligi volumus; quamuis nimirum linea a b non sit recta, sed sectio conica, propositionem præsentem perinde demonstrari posse. Cùm enim h x o sit recta, si per quodlibet punctum curuæ a e quæ est sectio conica, ducantur ipsi a i parallellæ, & si vt recta a h ad a i, ita earum portiones interceptæ curua a e, & recta h x o fiant ad alias earundem parallelarum portiones eadem curuâ a e terminatas, harũ verò extrema describant curuam i z p; vt recta a i ad a h, ita erit spatium a i z p e ad spatium a h x o e, sicut in præsenti hactenus demonstratum fuit. Ipsa autem curua i z p cadet inter curuas i t p, a e; si recta h x o cadat inter curuas h u o, a e: & si h x o cadat extra, cadet & curua i z p. Ducatur enim per z quodlibet punctum curuæ i z p recta z y parallela rectæ a i secans curuam h o in u, rectam h o in x, & curuam a e in y. Quoniam vt a i ad a h, ita est y t ad y u, & ita est etiam y z ad y x: ergo vt y t, y u, ita y z, y x & alternãdo vt y t, y z, ita y u, y x: ergo si x sit inter u & y, erit quoque z inter t & y; & si x sit vltra u erit quoque z vltra t. Hoc autem ostenso demonstratio nihil differt nisi quod lineæ i z p, p n, &c sunt curuæ, cùm in quatuor propositionis casibus fuerint rectæ; id tamen nõ impedit quominus vt a h recta ad ai, ita ſit figura a h x o e ad figuram a i z p e, quod ſatis eſt ad demonſtrationis robur.

SCHOLIVM.

Si ex figura a h m c b *lateribus* a h, b c *abſcindantur* h i, c d *ipſis* a h, b c *æquales*; *& per puncta* i, d *intelligatur ducta linea* i n d, *ita ut ex quocunque puncto* f *recta* a b *ducatur* f n *ipſi* a i *parallela occurrens ſectioni conicæ* h n c *in* m, *& lineæ* i n d *in n, ſint* f m, m n *æquales*; *connectantur autem recta* h c, i d : *oſtendendum eſt ſegmentum* i n d u *eſſe duplum ſegmenti* h m c x.





Quoniam figura h i n d c m *est aequalis per praesentem rectilineo* h c b a *&* *segmento* h m c x, *hoc est figurae* a h m c b f *quae ex illis duobus spatijs componitur: si aequalibus addatur segmentum* h m c x *erit figura* h i n d c x *aequalis rectilineo* h b, *&* *segmento* h m c x *bis sumpto; ergo si ex istis aequalibus auferatur rectilineum* h c b r a *seu* i d c h *ipsi aequale, erit segmentum* i n d u *aequale segmento* h m c x *bis sumpto quod erat ostendendum.* 3.huius

Similiter ostendetur rectam n u *esse duplam rectae* m x; *quoniam enim recta* m n *est aequalis, ut ponimus, ipsi* m f, *hoc est rectis* f x, x m: *si aequalibus addatur recta* m x, *erit recta* n x *aequalis rectae* f x *semel sumpta, & rectae* m x *bis sumpta: ergo si ex istis aequalibus dematur* f x *seu* x u *ipsi aequalis, residua recta* n u *erit aequalis residuae* m x *bis sumptae.*

Hinc manifestum est lineam i n d *aequiualere sectioni conicae quod ad effectum propositionis secundae huius libri attinet. Ostensum enim est curuas* h m c, i n d *inter parallelas* i a, d b *contentas, & subtensas rectis* i d, h c *ita esse collocatas, ut segmentum* i n d *non sit maius duplo segmenti* h m c: *ergo si arcus* h m c *intelligatur diuidi in tot segmenta quae dati spatij semisse minora sint, arcus* i n d *restabit diuisus in totidem numero segmenta quae minora erunt dato spatio, hoc est semisse dati spatij bis sumpto.* 2.huius

Similiter si h t, c t *tangentes in* h *&* c *eductæ concurrant in* t, *fiatque* n s *dupla ipsius* m t, *iunctis* i f, f d *ostendetur sicut in simili paulò ante demonstrauimus spatium* i f d n *esse duplum spatij* h t c m, *ipsasque rectas* f i, f d *non occurrere lineæ* i f d *nisi in punctis* i, d : *linea ergo* i n d *æquiualet sectioni conicæ etiam quantum ad effectum secundæ propositionis huius libri.*

Quod si vt in secunda figura intra parallelas a h, b c *sint duæ sectiones conicæ* h m c, e o k, *rectisque* a h, b c *æquales abscissæ sint* e i, k d, *itáque duci intelligatur linea* i n d, *vt quæcunque* f n, *ipsi* a i *æquidistans ducatur inter rectas* a i, b d, *occurrens lineæ* i n d *in* n, *sectioni conicæ* e o k *in* o, *sint* f m, o n *æquales; perinde ostendetur iunctis rectis* i d, e k, h c, *rectam* n u *esse æqualem duabus* o g, m x *simul sumptis.*

Quoniam enim recta o n *æqualis ponitur rectæ* f m, *hoc est rectis* f x, x m: *si æqualibus addatur recta* g o, *erit recta* n g *æqualis rectis* f x, x m, g o: *ergo si ex istis æqualibus dematur* f x *seu* g u *ipsi* f x *æqualis, residua recta* n u *erit æqualis rectis* x m, g o *simul sumptis. Vnde per præsentem conficitur segmētum* i n d u *esse æquale duobus simul* e o k g, h m c k.

Manifestum igitur est lineam i n d *æquiualere sectioni conicæ quod ad effectum secundæ propositionis huius libri in subtendentibus: quod verò ad effectum eiusdem in tagentibus* *spectat, non minus est manifestum; si enim sectiones conicas* e o k, h m c *ponantur tangere in* e, k, h, c, *rectæ* e l, k l, h t, c t *coeuntes in* l, t, *fiatque recta* n s *ambabus* l o, t l *æqualis, & iungantur* i s, d s: *spatium* i s d n *erit æquale duobus simul* e l k o, h t c m, *vt ex præsenti conficitur: rectas verò* i s, s d *non occurrere lineæ* i n d *nisi in punctis* i, d *ostendetur sicuti prius.*

Quòd si proportio rectæ a h *ad* e i *non sit æqualitatis, sed alia quæuis; non multò difficiliùs demonstrabitur, cum opus fuerit, lineam* i n d *æquiualere sectioni conicæ quod ad duos prædictos effectus attinet.*

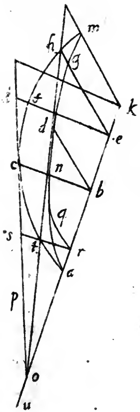
Propositio VII.

Sit recta a k in quam ad idem punctum k incidant rectæ k l, k m; ipsam verò k l ita secet linea a l, ipsamque k m linea n m, in punctis l & m, vt ipsis k l, k m æquidistantium portiones interceptæ rectâ a k, & lineis a l, n m sint proportionales lineis k l, k m. Rursus linearum a l, n m alterutram a l tangat recta p c in quouis puncto c, & per c acta sit c b æquidistans rectæ k l, secans rectam a k in b: per b verò acta sit b d parallela rectæ k m, occurrens lineæ n m in d. Per f quoduis aliud punctum lineæ a l ducatur f e parallela rectæ k l, occurrens rectæ a k in e, & tangenti p c in i; per e verò agatur e g parallela rectæ k m, occurrens lineæ n m in g. Si vt e f ad e i, ita fiat e g ad e h, & per d atque h ducatur recta d h. Dico rectam d h non occurrere lineæ n g m nisi in puncto d.

Si enim fieri potest, occurrat linea d h ipsi n g m in puncto q, sitque d q h recta: per q agatur q r æquidistans ipsi k m, secans rectam a k in r, & per r agatur r t s parallela ipsi k l, occurrens lineæ a c l in t, & rectæ p c in s.

33. primi. Quoniam igitur in rectam a k incidunt

pa. 43



rectæ d b, h e parallelæ, si d b, h e sint æquales, erunt d h, b e parallelæ; si verò sint inæquales, rectæ d h, b e productæ
4.sexti. conuenient; punctum occursûs mutui sit o. Quoniam in triangulo h o e, lateri h e parallela est b d; vt e h, d b, ita erunt o e o b; & diuidendo, vt b d ad excessum quo recta e h ipsam b d superat, ita o b ad b e. Similiter quoniam c b, e i sunt parallelæ, & vt c b ad ei, ita est b d ad e h, quando c b, e i erunt æquales, erunt æquales, erunt c i, a k parallelæ: quando verò non fuerint æquales, recta c i producta conueniet cum rectâ a k in o. Si enim fieri potest conueniat in u: quoniam ergo vt b c, ad e i, hoc est vt b d, ad e h, ita est in triangulo i c u e recta u b ad u e; erit diuidendo vt b d ad excessum quo recta e h ipsam b d superat, ita u b ad b e; sed ita etiam est o b ad b e: ergo u b, a b sunt æquales, totum & pars, quod est absurdum; rectæ ergo c p, d h conueniunt in o, si b d, e h sint inæquales; vel si sint æquales, sunt parallelæ.

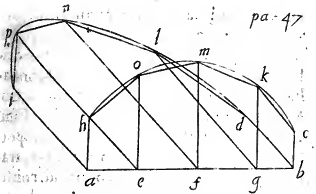
Quoniam ergo parallelæ sunt b d r q, & in triangulo d o b lateri b d parallela est r q; vt o b, o r, ita erunt b d, r q. Similiter in triangulo c o b, vt o b, o r, ita erunt b c, r s: ergo vt b d, r q, ita b c, r s. Quòd si rectæ p i, t d, a k sint parallelæ, ſicut b d erit æqualis rectæ r q, vt pote lateri oppoſito parallelogrãmi r b d q, ita b c erit æqualis lateri oppoſito r ſ parallelogrammi c b r ſ. Quoniam igitur vt b d ad r q, ita eſt b c ad r ſ, ergo alternando vt b c, b c, ita ſunt r q, r ſ: ſed vt b d, b c, ita etiam r q, r t: ergo r t, r ſ ſunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Recta ergo d h non occurrit lineæ n m in alio puncto quàm in d.

Non abſimili ratione oſtendetur, ſi recta p c ſecet lineam curuam a l, ipſam quoque n m ſecari à rectâ d h, & eſſe curuam. Quamuis autem appoſita non ſit figura exhibens caſum quo recta a k ſit ad connexa curuarum a d, c f; demonſtratio tamen ad eam extendi debet, vt manifeſtum eſt.

PROPOSITIO VIII.

Sint tres lineæ a b, h c, i d, quarum a b sit recta, reliquarum alterutra h c sit sectio conica; cum curuâ autem h c ita coëant rectæ inuicem parallelæ b c, a h, & cum curuâ i d parallelæ inuicem b d, a i; vt sicut b c ad b d ita sit h a ad a i, & ita etiam sit quæuis ipsi b c parallela, curuam h c secans ad parallelam ipsi b d ex eodem puncto rectæ a b eductam & curuâ i d interceptam. Dico spatium a i d b se habere ad spatium a k c b, vt perpendicularis ex puncto d, ad perpendicularem ex puncto c in rectam a b demissa se habet.

Vt perpendicularis ex puncto d se habet ad perpendicularem ex c puncto ad rectam a b demissa, ita sit spatium a i d b ad spatiū quod potest recta q. Si quadratū



q non eſt æquale ſpatio a h e b, ſit primùm ſi fieri poteſt minus; exceſſus autem ſit ſpatium quod poteſt recta r; ſitque primò recta a b ad concaua curuæ h c.

Diuidatur arcus h c in tot portiones h o, o m, m k, k c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m κ, κ c ſpatia ſegmentorum ſint ſimul minora dato ſpatio r; hoc enim fieri poteſt per 2. huius. Per puncta o, m, κ ducantur o e, m f, κ g parallelæ ad rectam c b; & per puncta e, f, g, in quibus ſecant rectam a b ducantur e p, f n, g l æquidiſtantes rectæ i d, & occurrentes curuæ i d in p, n, l. Iunctis rectis i p, p n, n l, l d, quoniam ; h a ad i a, ita eſt o e ad e p, & m f ad fn, & κg ad gl: ergo vt trapezij aipe latus ai, ad trapezij ahoe latus ah, ita latus pe ad latus eo: & alternando vt trapezij ipea latus ia ad latus ep, ita trapezij hoea latus ha ad latus eo. Eandem ob causam, similiter proportionalia erunt latera trapeziorum pefn, oefm; & nfgl, mfgκ; & lgbd, κgbc. Cùm ergo trapezia ista habeant latera proportionalia, & bases easdem in rectâ ab, trapezia antecedentia se habebunt ad consequentia, vt perpendicularis ex d ad perpendicularem ex c demissa ad rectam ab: ergo totum rectilineum ipnldba se habet ad totum rectilineum homκcba, vt perpendicularis ex puncto d ad perpendicularem ex puncto e in rectam ab demissa: sed ita etiam se habet totum sub rectis ia, ab, bd & sub curuâ ind contentum ad spatium q: ergo alternando vt totum sub curuâ ind & sub rectis ia, ab, bd cōtentum ad rectilineum ipldba, ita spatium q ad rectilineum homκcba: ergo cum totum sub curuâ ind & sub rectis ia, ab, bd contentum sit maius rectilineo ipnldba, erit quoque quadratum q maius rectilineo homkcba, quod est absurdum, vt satis constat ex ijs quæ propositione 6. huius demonstrata sunt: vnde quoque sumi debent tres qui supersunt casus, nam iisdem fermè verbis huc transcribendi forent, vt manifestum est

3.huius

12. quinti.

cuiuis

cuiuis Lectori harum rerum non omnino imperito.

Hinc pariter manifestum est eandem esse demonstrationis vim, si loco extremorum trapeziorum sint triangula; vt pote quæ se habeant sicuti altitudines, cum eorum fuerit vel eadem basis vel æqualis, vt demonstrat Clauius ad 1. sexti Euclidis.

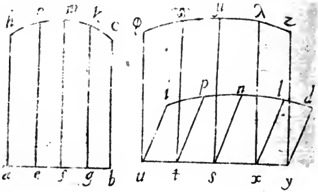
SCHOLIVM.

Hoc loco demonstrandum est vnum quod necessarium nobis erit in progressu huius operis.

Si basis ab non sit eadem vel æqualis in vtrâque figurâ, sed bases ab, uy sint inæquales, reliqua autem eadem permaneant, hoc est, sectis basibus uy, ab proportionaliter in quotcunque punctis t, s, x, & e, f, g, vt dy ad cb, ita sit lx ad kg; & ns ad mf; & pt ad qe; & iu ad ha. Ostendendum est proportionem spatij uindy ad spatium ahmcb esse compositum ex rationibus baſium u y, a b, & perpēdicularium ex d & c, vel ex i & h ad baſes u y, a b demiſſarum

Snper baſi u y intelligantur erectæ rectæ u φ, t π, ſ μ, x λ, y z, ita vt inuicem ſint parallelæ, & cum baſi u y conſtituant angulum æqualem angulo h a b; ipſæ autem φ u, π t, μ ſ, λ x, z y ſint æquales rectis a h, e o, f m, g k, b c; & per puncta φ, π, μ, λ, z & alia omnia quæ ſimili methodo reperiri poſſunt incedat linea φ π μ λ z. Conſtat ergo ex antea demonſtratis figuram a h m c b eſſe ad figurā u φ μ z y vt eſt baſis a b ad baſim u y; conſtat præterea

pa 50



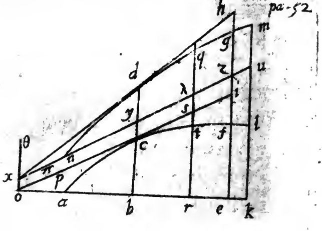
ex præsenti propositione figuram u φ μ z y esse ad figuram u i n d y vt est perpendicularis ex i ad perpendiculare ex φ in rectam u y demissam: ergo cùm perpendicularis ex φ in rectam u y demissa sit æqualis perpendiculari ex h in rectam a b demissæ, proportio figuræ a h m c b ad u i n d y componetur ex rationibus basium a b u y & perpendicularium ex h & i in bases demissarum, quod erat demonstrandum. 6. huius in coroll. 2.

PROPOSITIO IX.

Sint rectæ a k, x u in quas incidat recta k u ad puncta κ & u; ipsam verò κ u ita secent lineæ a l, n m in punctis l & m, vt æquidistantium ipsi k m portio intercepta rectâ a κ & lineâ a l ad portionem interceptam rectâ x u & lineâ n m se habeat vt recta κ l ad u m. Rursus linearum a l n m alterutram a l tangat recta p c in quouis puncto c, & per c agatur b c d æquidistans rectæ k m, occurrens lineæ n m in d,

& rectis a k, x u in b, y. Per f quoduis aliud punctum lineæ a l ducatur f g æquidistãs rectæ k m, occurrens lineæ n m in g, & rectis a k, x u, in e, z, tangenti verò p c in i. Si ut e f ad e i, ita fiat z g ad z h, & per d atque h ducatur recta d h. Dico rectam d h non occurrere lineæ n g m nisi in puncto d.

Si enim fieri potest occurrat recta d h ipsi n g m in puncto q, sitque d h q recta. Per q agatur q r æquidistans ipsi k l, occurrens verò rectis p c, x u in ſ, λ, &



neæ a c l in t. Quoniam in rectam a k
ıcidunt rectæ c b, i e parallelæ, ſi c b,
e ſint æquales, erunt b e, c i parallelæ: 33. pri-
verò ſint æquales, productæ conuenient. mi.
:onueniant primo, & punctum concursus
t o, quoniam in triangulo i o e lateri i e
arallela eſt b c; vt i e ad b c, ita erit o e
d o b, & diuidendo vt b c ad exceſſum 4. ſexti.
uo e i recta ipſam b c ſuperat, ita o b in co-
d b e. roll.

Per o agatur recta o θ parallela rectæ
m, occurrens rectæ u x in puncto quod
t x: quoniam ergo in rectas x u, o k
arallelæ incidunt e i, b c, o x; rectæ o e,
z ſimiliter ſecabuntur in punctis e, b, o 10. ſex-
ε z, y, x, & vt o b, b e, ita x y, y z. ti Eucl.

Rurſus quoniam in rectam n z incidunt
:ctæ d y, h z parallelæ, ſi d y, h z fue-
nt æquales erunt n z, d h parallelæ; ſi
erò ſint inæquales, rectæ n z, d h con-
enient in puncto x. Si enim fieri poteſt
onueniant in π; quoniam ergo vt d y
d z h, ita eſt in triangulo d h π z π y ad
π, cùm lateri z h parallela ſit y d, ergo 2. ſexti.
iuidendo vt y d ad exceſsũ quo recta z h
ıperat ipſam y d, ad ita erit π y ad y z. Et
uoniam vt d y ad z h ita eſſe ponitur
c ad e i: ergo vt d y ad exceſſum quo
:cta z h ipſam d y ſuperat, ita b c ad
xceſſum quo ipſam b c recta e i ſuperat,
:d ita etiam oſtenſum eſt eſſe o b ad b e;
go vt π y ad y z ita eſt o b ad b e; ſed

vt o b, b e, ita x y, y z, vt ostensum fuit; ergo vt π y ad y z, ita est x y ad y z: ergo π y, x y sunt æquales, pars & totum quod est absurdum, rectæ ergo h d, u x, o θ, concurrant in idem punctum x.

9. quinti.

Quoniam ergo parallelæ sunt y d, λ q, & in triangulo q d x λ lateri q λ parallela est d y; vt λ q, d y ita erunt x λ, x y. Similiter in triangulo i o e, vt r s, b c ita erunt o r, o b: sed vt o r, o b ita sunt x λ, x y, vt modo demonstratum fuit: ergo vt d y, λ q, ita sunt b c, r s.

10. sexti Euc.

Quòd si tam c s, b r sint inuicem parallelæ, quam d h, y z, erunt b c s r & y λ q d parallelogramma, ac proinde erunt latera opposita λ q, d y æqualia; item r s, b c: ergo vt d y, λ g, ita erunt b c r s. Quoniam igitur vt d y, λ q ita sunt b c, r s; ergo alternando vt d y, b c ita sunt λ q, r s; sed ita etiam sunt λ q, r t: ergo r s, r t sunt æquales pars & totum, quod est absurdum. Recta ergo d h non occurrit lineæ n g m, nisi in puncto d; quod erat probandum.

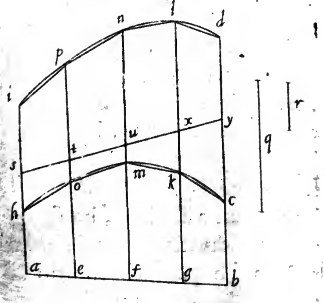
Non absimili ratione ostendetur si recta p c secet lineam curuam a l, ipsam quoque n m secari à rectâ d h, & esse curuam. Quamuis autem apposita non sit figura exhibens casum quo recta a k sit ad conuexa curuarum a d, c f; demonstratio tamen ad eam pertinet, vt manifestum est.

PROPOSITIO X.

Sint rectæ a b, ſ y, in quas ncidant parallelæ inuicem rectæ y b, ſ a in punctis a, b, ſ, y. Secent autem rectæ ſ a, b y curuas h c, i d (quarum alterutra h c ſit ſectio conica) in punctis h, i, c, d, ita vt ſicut a h ad h i, ita ſit b c ad c d; ita etiam ſit cuiuſuis ad rectam d b parallelæ portio intercepta inter rectam a b & curuam h c, ad portionem intercepta inter rectam ſ y & curuam i d. Dico ſpatium ſ i d y ſe habere ad ſpatium a h c b, vt recta ſ i ad rectam h a.

Vt recta ſ i ad rectam ſ a, ita ſit ſpatium ſ i d y ad ſpatium quod poteſt recta q. Si quadratum q nō eſt æquale ſpatio a h c b; ſit primùm ſi fieri poteſt minus; exceſſus autem ſit ſpatiū quod poteſt recta r; ſitque primò recta a b ad concaua curuæ h c.

Diuidatur arcus h c in tot portiones h o, pa 56



o m, m k, k c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m k, k c spatia segmentorũ sint simul minora dato spatio r; hoc enim fieri potest per secundam huius. Per puncta o, m, k ducantur o e, m f, k g parallelæ ad rectam b d, occurrentes lineis h c, i d, in punctis o, m, k, p, n, l, & rectis a b, s y in punctis e, f, g, t, u, x. Iunctis rectis i p, p n, n l, l d, quoniam vt a h ad s i, ita est e o ad t p: ergo alternando vt h a ad e o, ita i s ad p t; ergo duo trapezia i s t p, h a e o habent latera proportionalia, & homologa se habent vt h a ad s i. Similiter ostendetur trapezia p t u n, o e f m, & n u x l, m f g k, & l x y d, k g b c habe re latera proportionalia, & homologa ſe habere vt ſe habet ſi ad ha.

Quoniam igitur trapezia i s t p, h a e o habent ea latera quæ parallela ſunt, proportionalia, eorumque eſt æqualis diſtantia; vt recta i ſ ad rectam h a, ita erit trapezium i s t p ad h a e o; & ita etiam erit p t u n ad o e f m, & n u x l ad m f g k, & l x y d ad k g b c: ergo omnia antecedentia ſimul, hoc eſt rectilineum i p n l d y s ſe habebit ad omnia conſequentia ſimul, hoc eſt ad rectilineum h o m κ c b, vt ſe habet recta ſ i ad h a: Sed ita etiam ſe habet totum ſub rectis i s, ſ y, y d & ſub curuâ i n d contentum ad ſpatium q: ergo vt rectilineum i p n l d y s ad rectilineum h o m κ c b a, ita ſpatium ſub curuâ i n d & ſub rectis i s, ſ y, y d contentum, ad ſpatium q; & alternando vt rectilineum i p n l d y ſ ad ſpatium ſub curuâ i n d, & ſub rectis iſ, ſ y, y d contentũ, ita rectilineũ h o m k c b a ad ſpatium q: ergo cùm ſpatium ſub curuâ i n d & ſub rectis i s, s y, y d contentum ſit maius rectilineo i p n l d y s, erit etiam ſpatium q maius rectilineo h o m κ c b a, quod eſt abſurdum, vt ſatis conſtat ex ijs quæ propoſitione ſextâ huius demonſtrata ſunt. Vnde quoque ſumi debent tres qui ſuperſunt caſus, nam iiſdem ferme verbis, pauculis immutatis, huc tranſcribendi forent, ſicuti & hunc primum tranſcripſimus, vt manifeſtum eſt.

3. huius in coroll.

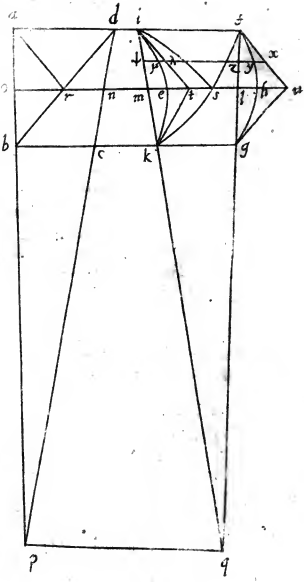
Hinc pariter manifeſtum fit eandem eſſe demonſtrationis vim, ſi loco extremorum trapeziorum ſint triangula; vt pote quæ ſe habeant ſicuti altitudines, cum eorum baſis fuerit eadem, vel æqualis.

PROPOSITIO XI.

Sit adcb quadrilaterum rectilineum cuius latera da, cb ſint parallela, ſiue dc ab ſint parallela, ſiue producta conueniant: ſit aliud quadrilaterum mixtum cuius duo latera if, kg ſint portiones rectarum ad, cb productarum, latera autem oppoſita iek, fhg ſint curuæ lineæ, & earum alterutra iek ſit ſectio conica; ita verò ſe habeant duæ iſtæ figuræ iiſdem parallelis af, bg interceptæ, vt ſicut if ad ad, ita cuiuſuis ad rectam ad parallelæ portio inter curuas intercepta, ſit ad portionem inter rectas ab, dc interceptam. Dico vt recta fi ad rectam da, ita eſſe quadrilaterum mixtum i f g k, ad quadrilaterū rectilineum a d c b.

Iunctis rectis i κ, f g, quoniam rectilinea f i κ g, d a b c habent latera proportionalia,& laterum parallelorum f i, g κ eadem est distantia,quæ laterum parellelorum d a, c b; vt recta f i ad rectam d a, ita erit rectilineum f i κ g ad rectilineum d a b c. 3. huius in Corol.

Rursus per h quoduis punctum curuæ f g si ducatur h l e m parallela rectæ f i, occurrens curuæ i k in e, & rectis f g, i k in l & m, erunt rectæ h l, e m æquales. Si enim producatur h m ad o, recta n o intercepta rectis d c, a b se habebit ad rectam e h interceptam curuis f g, i k, vt recta a d ad i f: sed vt a d ad i f, ita est n o ad m l interceptam rectis f g, i k: ergo rectæ m l, e h sunt æquales: ergo ablato communi e l, (vel addito cōmuni e l, si punctum l cadat inter e & m) rectæ h l, e m sūt æquales. Rectas autem a d, i f esse in ratione rectarum n o, m l ita ostenditur; si d a, c b sint æquales, erunt parallelogrāma a d c b & i f g k; ergo sicut d a erit æqualis rectæ n o, ita f i erit æqualis rectæ m l: ergo alternando vt a d, i f, ita n o, m l. Si autem a d, c b sint inæquales, conuenient productæ; sit igitur occursus punctum p; & per p agatur p q 9. huius æquidistans rectæ a d: erit ergo, vt ostensum est, occursus rectarum f g, i k in pa-


a
d
i
f
x
o
r
n
m
e
t
s
h
u
b
c
k
g
p
q

rallela p q; ille sit q. Quoniam igitur triangula f i q, d a p in eisdem parallelis f a, p q constituta sunt, parallelæque sunt f a, ho; sicut a p ad p o ita erit i q ad q m: quoniam autem vt a p ad p o, ita est d a ad n o; & vt i q ad q m, ita est i f ad m l; erit vt f i ad l m, ita d a ad n o: & alternando vt d a, f i, ita no, m l. 10. sexti Euc. 4. sexti Euc. in coroll.

Quoniam igitur sectioni conicæ i e k ita respondet curua f h g, vt cuiuscunque ad rectam g k parallelæ portiones inter curuam f h g & rectam f l g interceptæ, sint æquales portionibus inter curuam i e k & rectam i m k interceptis; spatium f h g l erit per præcedētem æquale spatio i e k m: ergo addito communi rectilineo f g k i, conflatum ex rectilineo f g k i & ex figurâ i e k m, erit æquale figuræ i m k g h f conflatæ ex rectilineo f g k i & ex segmento f l g h: ergo ablato communi i e k m, residuum i e k g h f erit æquale residuo rectilineo f g k i: Cùm ergo rectilineum f g k i ostensum sit se habere ad rectilineū a d c b, sicut se habet recta f i ad d a: mixtū i e k g h f se habebit ad rectilineū d a c b vt recta f i a d d a, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM. I.

Manifestum est eandem esse demonstrationis vim siue recta i k sit ad conuexa siue ad concaua curuæ i e k quamuis duplex figura non sit expressa.

COROLLARIVM II.

Manifestum quoque est eandem esse demonstrationis vim si d a b c non esset quadrilaterum, sed triangulum cuius latera essent a b, d a, d b; trianguli autem mixti rect f i, curua i *k*, & altera curua f *k*.

COROLLARIVM III.

Hinc etiam patet eandem esse demonstrationis vim si sumatur triangulum rectilineum a r b, per cuius angulum r transeat r o, & si ita sit triangulum tribus curuis i s, f *k*, *k* e i contentum, vt sicut f e ad r o, ita sit cuiusuis ad rectam s o parallelæ portio triangulo curuilineo inclusa, ad portionem triangulo rectilineo clausam. Cæterùm quo minor erit proportio rectæ a b ad r o, magisque falcata erit curua i e *k*, eo similius lunulæ erit triangulum curuilineum i f *k*. Eiusmodi verò menoideos tetragonismus habetur ex præsenti propositione.

COROLLARIVM. IV.

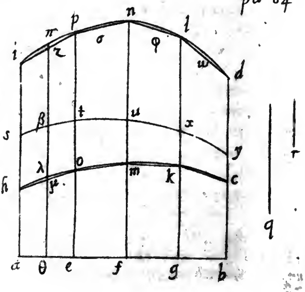
Hinc manifestum est si super sectione conicâ i e *k* construatur parallelogrammum mixtum i f h g *k* e, cum rectæ i *k*, f g, quæ curuas i e *k*, f h g subtendunt, comprehendant vnà cum ipsis curuis æqualia spatia; & cùm in segmento sectionis conicæ possit inscribi figura rectilinea iuxta præscriptum propositionis secundæ, posse quoque & in ipso segmento f h g pariter inscribi. Rursus cùm, si rectæ i t, t k ponãtur tangere sectionem conicam i e k in punctis i & k, concurrere verò in pũcto t, ipsique rectæ e t fiat h u æqualis, iunganturque rectæ f u, g u, manifestum sit vt m e ad e t, ita esse l h ad h u: & ita, ductâ quacunque ⅄ x parallelâ ipsi l u, esse ⅄ μ ad μ λ; item z y ad y x: rectæ f u, u g non occurrent lineæ f h g nisi in punctis f, g: Cùm autem manifestum quoque sit figuræ i t k e æqualem esse figuram f u g h (triangula enim rectilinea f u g, i k t sunt æqualia, & ex æqualibus ablata sunt æqualia nimirũ segmenta f h g l, i e k m; ergo residua f u g h, i t k e sunt æqualia) poterit pariter de lineâ f h g id demonstrari quod de sectione conicâ i e k ex secunda huius demonstraretur, quantum ad tangentes attinet.

Propositio XII.

Sit recta a b, & sectio conica s y in quas incidant parallelæ inuicem y b, s a in punctis a, b, s, y.

Secent autem rectæ ſa, by ſectionem conicam hc, & curuam id in punctis h, i, c, d, ita vt ſicut ah ad hi, ita ſit bc ad cd; ita etiã ſit cuiuſuis ad rectam db parallelæ portio intercepta inter rectam ab & curuam hc, ad portionem interpoſitam inter curuas ſy, id. Dico ſpatium ſidy ſe habere ad ſpatium ahcb, vt recta ſi ad rectam ha.

pa 64



Vt

Vt recta ſ i ad rectam ſ a, ita ſit ſpatium ſ i d y ad ſpatium quod poteſt recta q. Si quadratum q non eſt æquale ſpatio a h c b, ſit primùm, ſi fieri poteſt, minus; exceſſus autem ſit ſpatiũ quod poteſt recta r, ſitque primò a b ad concaua curuæ h c.

Diuidatur arcus h c in tot portiones h o, o m, m k, κ c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m κ, κ c, ſpatia ſegmentorum ſint ſimul minora dato ſpatio r; hoc enim fieri poteſt ex ſecunda huius. Per puncta o, m, κ ducantur o e, m f, κ g parallelæ ad rectam b d, occurrentes curuis lineis h c, ſ y, i d in punctis o, m, k, t, u, x, p, n, l; & rectæ a b in punctis e, f, g.

Intelligatur duci curua i z p ita vt quadrilaterum conſtans lateribus i s, t p, quæ ſunt rectæ; & curuis s t, i z p, ita reſpondeat rectilineo h a e o, vt cuiuſuis ad rectã h a parallelæ portio inter curuas i z p, ſ t ſe habeat ad portionem inter rectas h o, a e, ſicut recta i ſ ad h a. Hoc autem ita peracto, ſi recta h o iaceat inter curuam h λ o, & rectam a e, erit quoque i z p inter curuas ſ β t, i π p; & ſi inter rectas h o, a e iaceat curua h λ o, iacebit quoque curua i π p inter curuas i z p & ſ β t. Sumatur enim λ quoduis punctum curuæ h o, & per illud agatur recta λ θ occurrens rectis h o, a e in punctis μ & θ; &, curuis ſ t, i z p, i π p in punctis β, z, π. Quo-

E

niam vt i ſ ad a h, ita eſt $\theta\lambda$ ad $\beta\pi$; & ita etiã eſt $\theta\mu$ ad β z: ergo vt $\theta\lambda$ ad $\beta\pi$, ita eſt $\theta\mu$ ad β z; & alternando vt $\theta\lambda$, $\theta\mu$, ita $\beta\pi$, β z: ergo ſi $\theta\lambda$ ſit minor quàm $\theta\mu$; hoc eſt, ſi curua h λ o ſit inter rectas h o, a e, erit quoque $\beta\pi$ minor quàm β z, hoc eſt, iacebit curua i π p inter curuas i z p, ſ β t. Et ſi $\theta\lambda$ ſit maior quàm $\theta\mu$, erit quoque $\beta\pi$ maior quàm β z; hoc eſt, ſi inter curuã h λ o & rectã a e iaceat recta h o; curua i z p iacebit quoque inter curuas i π p & ſ β t. Simili prorſus modo oſtendetur reliqua quadrilatera mixta habere eandem proprietatem collata ad quadrilatera rectilinea ſibi reſpondentia.

Quoniam igitur trapeziũ mixtum i ſ t p, cuius duo latera i z p, ſ β t ſunt curua, & trapezium rectilineum h a e o habent, ſicut in huius decimâ propoſitione oſtenſum fuit, ea latera proportionalia, quæ parallela inuicem ſunt: & curua ſ β t eſt ſectio conica; ita verò ſunt conſtituta vt cuiuſuis ad rectam i a parallelæ portio inter curuas i z p, ſ β t interpoſita, ſe habeat ad portionem inter rectas h o, a e interceptam, vt ſe habet recta i ſ ad h a; & ita etiam ſit mixtum p σ n u t ad rectilineũ o e f m; & mixtum n ϕ λ x u ad rectilineum m k g f; & mixtum l ω d y x ad rectilineum k c b g: ergo omnia antecedentia ſimul, hoc eſt mixtum i z p σ n ϕ l ω d y ſ ſe habebit ad omnia conſequentia ſimul, hoc eſt ad rectilineum h o m k c b a, vt ſe habet recta ſ i ad h a; ſed ita etiam ſe habet totum ſub rectis i ſ, d y, & ſub curuis ſ y, i π n d contentum ad ſpatium q: ergo vt mixtum i z p σ n φ l ω d y ſ ad rectilineũ h o m k c b a ita ſpatium ſub curuis i π n d, ſ y, & ſub rectis i ſ, d y contentum, ad ſpatium q: & alternando vt rectilineũ i z p σ n φ l ω d y ſ ad ſpatium ſub curuis ſ y, i π n d, & ſub rectis i ſ, d y contentum, ita rectilineum h o m k c b a, ad ſpatium q. Ergo cùm ſpatium ſub curuis i π n d, ſ y & ſub rectis i ſ, d y ſit maius mixto i z p σ n φ l ω d y ſ, erit etiam ſpatium q maius rectilineo h o m k c b a, quod eſt abſurdum, ex ijs quæ propoſitione decima huius demonſtrata ſunt: eſt enim iſti ſimillima, quapropter tres qui ſuperſunt caſus ex illâ, vel ex ſexta huius peti debent.

COROLLARIVM.

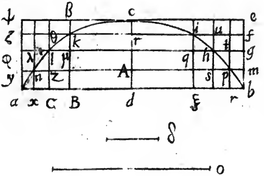
Inde manifeſtum eſt eandem eſſe demonſtrationis vim, ſi loco extremorum trapeziorum ſumantur triangula.

PROPOSITIO XIII.

Datum ſit ſpatium quod poteſt recta o, datum etiam ſit ſectionis conicæ ſegmentum a c b comprehenſum baſi a b, & arcu a c b, quem recta c e baſi a b parallela tangat in c, æquidiſtantes autem diametro c d non ſecent ſectionẽ a c b ad partes c, niſi in vno puncto; id enim fieri poſſe conſtat ex conicis. Dico arcum a c b diuidi poſſe in tot portiones numero pares per rectas baſi a b parallelas, quarum vna ſit c e, vt poſtquam per c ducta fuerit diameter c d, & per reliqua diuiſionum puncta æquidiſtantes ipſi c d, parallelogramma circa arcum conſiſtentia ſint ſimul minora ſpatio o.

Compleatur parallelogrammum a b e ⸸, & ponatur ſpatium, quod recta ♪ poteſt, eſſe pars parallelogrammi a b e ⸸ minor ſpatio o.

pa-69



Vt a b recta, ad rectam δ, ita fiat δ ad b m; & per m agatur m y parallela basi a b; & ad a b rectam in angulo dato ψ a b applicetur parallelogrammum a b m y æquale quadrato δ. Quoniam vt recta e b ad b m, ita est parallelogrammum a b e ψ ad parallelogrammum a b m y: cùm a b m y sit pars parallelogrammi a b e ψ, erit quoque b m pars rectæ b e. Diuidatur b e in reliquas partes m g, g f, f e, & ducantur rectæ g φ, φ ζ: per puncta autem in quibus rectæ m y, g φ, f ζ secant arcum a c b ducantur ad b e parallelæ p t, h u, i q, k β, l θ, n λ. Dico parallelogramma b m p r, p t h s, h u i q, i s c r, k r c β, l m k θ, n z l λ, a x n y esse simul minora quadrato δ.

44 primi Euc. 1. sexti Euc.

Quoniam enim parallelogrammum a b m est minus quadrato ɗ, erunt portiones eius parallelogramma nimirum p b, f r, ξ s, A ξ, A B, z B, n C, n a simul minora spatio ɗ: sed parallelogrammo f r æquale est parallelogrammum h p; & parallelogrammo ξ s parellogrammum h i; & parallelogrammo A ξ parallelogrammum i c; & parallegrammo A B parallelogrammum r β, eademque est ratio de parallelogrammis z B, k l; n C, l n; ergo parallelogramma, quæ circa arcum a c b sunt, omnia simul sunt minora spatio o, quod erat ostendendum.

1. sexti. Euc.

COROLLARIVM I.

Hinc manifestum est primo ad arcum a c b constituta esse triangula mixta numero paria quorum vnum latus sit portio ipsius arcus, reliqua duo sint latera parallelogrammorum circa arcum consisten-stentium, quæ omnia simul (siue interiùs siue exteriùs constituta intelligantur) sint minora spatio o

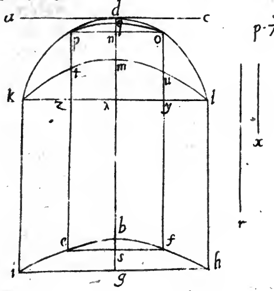
COROLLARIVM II.

Manifestum est secundò nihil referre ad vim demonstrationis, quod arcus a c, c b sint vna continua linea; quamuis enim sint diuersæ & constituant angulum ad c, dummodo ordinatim ad c d vtrinque applicatæ ſint æquales idem ſequitur. Vnde vlterius apertum eſt non eſſe neceſſarium ad demõſtrationis robur, vt lineæ a c, c b ſint ſectiones conicæ; cùm eas eſſe conicas demonſtratio non exigat, dummodo æquidiſtantes rectæ c d non ſecent arcum a c b, niſi in vno puncto; & dummodo rectæ g φ, φ ζ non occurrant arcui a c b niſi in vno puncto ad rectæ c d partes a, & in alio ad eiuſdem rectæ c d partes b.

Propositio XIV.

Sint duæ ſectiones conicæ κ d l, i b h ita conſtitutæ vt earũ diametri coincidant eidem rectæ d g, vertices verò ſint d & b; ad diametros autem quæ ab vtraque ſectione ordinatim applicantur, ſint parallelæ, vel congruant eidem rectæ i h vtrinque ordinatim applicatæ à ſectione conicâ i b h; per puncta verò i & h ductæ ſint i κ, h l æquidiſtantes diametro b g, ita vt quæcunque æquidiſtans inter i k, b d ducetur intercepta sectionibus conicis, sit maior ipsa i k, minor ipsâ b d, & eò maior quo minùs distabit ab ipsâ b d, & sectiones κ d l, i b h non secet nisi in vno puncto iuxta cautionẽ adhibitam in præcedenti. Datum sit præterea spatium quod potest recta r, & ipsum sit primò minus eo spatio quod comprehenditur sectionibus conicis κ d l, i b h, & rectis i k, h l. Dico posse curuam i b h in tot portiones diuidi quæ sint bases parallelogrammorum mixtorum inuicem sibi ad vtrasque diametri partes pari numero, parique interuallo respondentium, ita vt ipsa simul sumpta sint maiora spatio quod potest recta r; ipsorum autem latus curuum basi oppositum interijciatur inter sectionem κ d l & ordinatim ab eo puncto sectionis k d l applicatam in quo eiusmodi parallelogrammi angulus constituitur à curuâ & à recta quæ sit vel diameter, vel ei parallela.

Quadratum quod potest recta x sit excessus quo figura rectis k i, h l, & sectionibus conicis k d l, i b h contenta superat spatium quod potest recta r: arcus verò k d l intelligatur sectus in tot segmenta k p, p d, d o, o l per ordinatim vtrinque applicatas κ l, p o, & per a d c tangentem ipsi k l parallelam, vt triangula mixta k z p, p n d, d n o, o y l interiùs ad curuam l d κ constituta ductis ad diametrum parallelis p z, o y sint simul minora spatio x; id enim fieri potest per præcedentem propositionem.



p·73

Producatur p z donec occurrat sectioni i b h; punctum autem occursûs sit e, per quod agatur ordinatim applicata e f, & producatur donec occurrat sectioni; sit verò occursûs punctum f. Iunctâ rectâ o f, quoniam p o, e f sunt parallelæ, vt pote ordinatim applicatæ vtrinque ad sectiones k d l, i b h; & quoniam e p n f est parallelogrammum, erunt p n, e z æquales; ergo & p o,
34. primi. e f duplæ illarum (secantur enim bifariam in n & f à diametro d g) sunt æquales: cùm ergo p o, e f sint æquales & parallelæ, erunt p e, o f parallelæ & æquales: est ergo e p o f parallelogrammum, sicut & i k l h; eadem
33. primi. enim est demonstratio assumptâ quacunque ordinatim applicatâ, & per eius extrema ductis rectis ad m b parallelis donec occurrant alteri sectioni.

Quoniam ergo parallelogrammum rectilineum est e p o f: si per singula puncta arcûs e b f intelligatur duci rectæ e p parallela & æqualis, & per extrema illarum parallelarum notari curua p q o: erit per vndecimam huius parallelogrammum mixtum contentum rectis e p, f o, & curuis e b f, p q o æquale parallelogrammo rectilineo e p o f. Quoniam autem recta e p est minor quam recta b d, erit b q, cùm sit æqualis ipsi e p, minor quàm b d; ergo punctum q curuæ p q o est inter curuas p d o, e b f; & quoniam f n, b q sunt æquales & b est inter f, n (cùm ad partes n ponantur esse conuexa sectionis i b h) erit ergo b n minor quàm n f, ac consequenter quàm b q : ergo punctum q cadit inter curuam p d o & rectam p o. Simili pacto ostendetur quodlibet aliud punctum curuæ p q o esse inter curuam p d o & rectam po. Simili quoque pacto si ex parallelis per singula puncta arcûs e b f ductis abscindantur æquales lateri i κ parallelogrammi rectilinei i k l h, & extrema illarum parallelarum designet curua κ m l, erit per vndecimam huius parallelogrammum mixtum i k m l h b æquale rectilineo i *k* l h: vt modo ostendebatur de parallelogrammo e p o f; curuáque κ m l similiter ostendetur cadere inter curuam k d l & rectam κ l. Atque eadem est ratio de quotcunque alijs parallelogrãmis, si plures quàm p o, k l ordinatim vtrinque applicatæ fuerint ad diametrũ d b à sectione κ d l, interualla autem *k* z, y l esse æqualia patet: cùm enim λ k, λ l sint æquales, item λ z, λ y seu np, n o, erunt residua k z, y l æqualia.

Secet curua k l m rectas e p, f o in t & u. Quoniam ergo triangulorum mixtorum k z p, p n d, d n o, o y l pars sunt triangula mixta κ t p, p q d, d q o, o u l singula singulorum: cùm triangula k z p, p n d, d n o, o y l sint simul minora spatio x, erunt multò minora eodem spatio x triangula k t p, p q d, d q o, o u l simul sumpta. Cùm ergo si ex figura contenta parallelis

Producatur p z donec occurrat sectioni i b h; punctum autem occursûs sit e, per quod agatur ordinatim applicata e f, & producatur donec occurrat sectioni; sit verò occursûs punctum f. Iunctâ rectâ o f, quoniam p o, e f sunt parallelæ, vt pote ordinatim applicatæ vtrinque ad sectiones k d l, i b h; & quoniam e p n f est parallelogrammum, erunt p n, e z æquales; ergo & p o,
34. primi. e f duplæ illarum (secantur enim bifariam in n & f à diametro d g) sunt æquales: cùm ergo p o, e f sint æquales & parallelæ, erunt p e, o f parallelæ & æquales: est ergo e p o f parallelogrammum, sicut & i k l h; eadem
33. primi. enim est demonstratio assumptâ quacunque ordinatim applicatâ, & per eius extrema ductis rectis ad m b parallelis donec occurrant alteri sectioni.

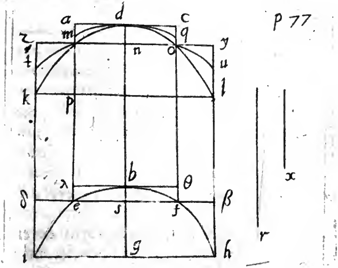
Quoniam ergo parallelogrammum rectilineum est e p o f: si per singula puncta arcus e b f intelligatur duci rectæ e p parallela & æqualis, & per extrema illarum parallelarum notari curua p q o: erit per vndecimam huius parallelogrammum mixtum contentum rectis e p, f o, & curuis e b f, p q o æquale parallelogrammo rectilineo e p o f. Quoniam autem recta e p est minor quam recta b d, erit b q, cùm sit æqualis ipsi e p, minor quàm b d; ergo punctum q curuæ p q o est inter curuas p d o, e b f; & quoniam f n, b q sunt æquales & b est inter f, n (cùm ad partes n ponantur esse conuexa sectionis i b h) erit ergo b n minor quam n s, ac consequenter quàm b q : ergo punctum q cadit inter curuam p d o & rectam p o. Simili pacto ostendetur quodlibet aliud punctum curuæ p q o esse inter curuam p d o & rectam po. Simili quoque pacto si ex parallelis per singula puncta arcûs e b f ductis abscindantur æquales lateri i κ parallelogrammi rectilinei i k l h, & extrema illarum parallelarum designet curua κ m l, erit per vndecimam huius parallelogrammum mixtum i k m l h b æquale rectilineo i k l h: vt modo ostendebatur de parallelogrammo e p o f; curuáque κ m l similiter ostendetur cadere inter curuam k d l & rectam κ l. Atque eadem est ratio de quotcunque alijs parallelogrãmis, si plures quàm p o, k l ordinatim vtrinque applicatæ fuerint ad diametrũ d b à sectione κ d l, interualla autem k z, y l esse æqualia patet: cùm enim λ k, λ l sint æquales, item λ z, λ y seu n p, n o, erunt residua k z, y l æqualia.

Secet curua k l m rectas e p, f o in t & u. Quoniam ergo triangulorum mixtorum k z p, p n d, d n o, o y l pars sunt triangula mixta κ t p, p q d, d q o, o u l singula singulorum : cùm triangula k z p, p n d, d n o, o y l sint simul minora spatio x, erunt multò minora eodem spatio x triangula k t p, p q d, d q o, o u l simul sumpta. Cùm ergo si ex figura contenta parallelis i k, h l, & curuis k d l, i b h auferatur ſpatium x reſtet ſpatium r, & cùm ex eadem figurà ablata ſint triangula k t p, p q d, d q o, o u l quæ ſimul ſunt minora ſpatio x: ergo reſiduum ſpatium r eſt minus quàm reſidua parallelogrãma mixta i k t e, e p q b, b q o f, f u l h ſimul ſumpta. Ergo intra figurám rectis i k, h l, & curuis i b h, k d l contentam deſcripta ſunt parallelogrammà mixta i k t e, e p q b, b q o f, f u l h, quæ ſimul ſunt maiora dato ſpatio r quod erat primo loco oſtendendum.

Secundò ſpatium quod poteſt recta r ſit maius ſpatio contento inter ſectiones conicas k d l, i b h, atque inter rectas i k, h l. Dico poſſe curuam i b h in tot portiones diuidi quæ ſint baſes parallelogrammorum mixtorum inuicem ſibi ad vtraſque diametri partes pari numero parique interuallo reſpondentium, ita vt ipſa ſimul ſumpta ſint minora ſpatio quod poteſt recta r: ipſorum autem latus curuum baſi oppoſitum interijciatur inter ſectionem k d l, & ordinatim ab eo puncto ſectionis k d l applicatam & productam, in quo eiuſmodi parallelogrammi mixti angulus conſtituitur à curua, & à recta quæ ſit vel diameter vel diametro parallela.

Quadratum quod poteſt recta x ſit exceſſus quo figura curuis k d l, i b h, & rectis i k, h l contenta ſuperatur à quadrato r: arcus verò k d l intelligatur ſectus in tot ſegmenta k p, p d, do, ol per ordinatim vtrinque applicatas kl, p o, & per a d c actam per verticem d, ideóque & tangentem in d; vt ductis per p & o ad diametrum d b parallelis a p, c o triangula mixta k z p, p a d, d c o, o y l exteriùs ad curuam k d l conſtituta ſint ſimul minora quadrato x: id enim fieri poteſt per præcedentem propoſitionem.

Producatur p a donec occurrat ſectioni i b h; punctum autem occurſûs ſit e, per quod ag- - ordinatim applicata e s, & produc. .ur donec ſectioni occurrat, ſit verò oc. .rsûs punctum f. Iunctâ rectâ o f, quoniam p o, e f ſunt parallelæ, vt pote ordinatim vtrinque applicatæ ad ſectiones



k d l, i b h, & quoniam e p n s est parallelogrammum; ostendetur, vt in priori casu, rectas p e, o f esse æquales & parallelas, ac proinde figura a e f c erit parallelogramma. Eadem methodo idipsum ostendetur assumpta quacunque ordinatim applicatâ, & per eius extrema ductis ad rectam m p parallelis donec occurrant alteri sectioni. Per verticem b agatur θ b parallela rectæ e f, ideoque tangens, secet autem in λ, θ parallelas e a, c θ.

11. huius.

Quoniam parallelogrammum rectilineũ est λ a c θ, si per singula puncta arcûs e b f intelligatur duci parallela rectæ d b, ipsique æqualis; & per extrema illarum parallelarum notari linea m d q: erit parallelogrammum mixtum e m d q f b æquale parallelogrammo rectilineo λ a c θ: quoniam autem recta d b est maior quam recta e p, recta quoque e m ipsi d b æqualis, erit maior quàm recta e p: ergo punctum m cadit extra mixtam figuram p e b d contentam rectis p e, b d & curuis e b, d p, infra tamen punctum a rectæ a d: quia cùm latera d b, a λ opposita parallelogrãmi rectanguli b d a λ sint æqualia, & cùm ipsi d b sit æqualis e m, erunt e m, λ a æquales: cum ergo λ m sit minor quam e m, erit quoque λ m minor quam λ a: ergo punctum m cadit infra punctum a. Simili pacto ostendetur quodlibet aliud punctum curuæ m d esse inter curuam p d

& rectam d a: quod verò dictum est de curuâ m d ostendetur pariter de curuâ d q, ipsam nimirum iacére inter curuam d o & rectam d c. Simili denique pacto si productâ e f donec parallelis z t, y u, occurrat in punctis δ, β, ex parallelis per singula puncta arcuum i e, f h auferantur æquales ipsi e p lateri parallelogrammi rectilinei e p z δ, vel ipsi f o lateri parallelogrammi rectilinei f o y β, & extrema illarum parallelarum describant lineas curuas p t, o u, erit per vndecimam huius parallelogrammum mixtum t p e i contentum rectis p e, t i & curuis p t, e i æquale rectilineo e p z δ; & mixtum o u h f rectilineo o y β f: curuáque t p cadet inter rectam z p & curuam k p; Item curua o u inter rectam q y & curuam o l, prout modò ostensum fuit de curuis d m, d q. Atque eadem est ratio de quotcunpue aliis parallelogrammis si plures quam p o, k l ordinatim vtrinque applicatæ fuerint ad diametrum d b à sectione κ d l. Esse autem interuallà parallelogrammorũ d m e b, d q f b æqualia patet, cùm rectæ p n, n o sint æquales, vt pote ordinatim vtrinque applicatæ semisses; Cúmque tam p n, n o inuicem, quam z n, n y inuicem sint æquales, erunt residua z p, q y æqualia.

Quoniam ergo triangulorum mixtorum k z p, p a d, d c o, o y l pars sunt mixta triangula κ t p, m i d, d q o, o u l singula singulorum: cùm triangula k z p, p a d, d c o, o y l sint simul minora spatio x, erunt multò minora eodem spatio x triangula mixta k t p, p m d, d q o, o u l simul sumpta: Cùm ergo si ad figuram contentam parallelis i k, h l, & curuis k d l, i b h, addatur spatium x conflet ur spatiū r; & cùm ad eandem figuram addita sint triangula k t p, p m d, d q o, o u l quæ simul sunt minora spatio x, conflatum erit minus spatio r: illud autem conflatum constat parallelogrammls mixtis i t p e, e m d b, b d q f, f q u β: Ergo curua i b h in tot portiones e b, b f, e i, f h diuisa est, quæ sint bases parallelogrā-morum mixtorum i t p e, e m d b, b d q f, f q u β sibi ad vtrasque diametri d b partes, pari numero parique interuallo respondentium, ita vt ipsa simul sumpta sint minora spatio quod potest recta r: ipsorum autem latus curuum basi oppositum interijciatur inter sectionem k d l, ordinatim ab eo puncto sectionis k d l applicatam, in quo eiusmodi parallelogrammi mixti angulus constituitur à curua, & à recta quæ est vel diameter, vt in angulis m d b, q d b, vel diametro parallela, vt in angulis t p e, v o f; quod posse fieri erat ostendendum. Quòd si b d esset omnium minima, reliquæ autem eò maiores quo longius ab ipsa b d distarent,

rent, demonſtratio erit eadem vt attentiùs conſideranti apertum fiet.

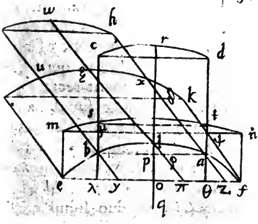
COROLLARIVM.

Ex his apertum eſt eandem eſſe vim demonſtrationis quamuis linea k d l non ſit ſectio conica, ſed linea qualis in corollario propoſitionis præcedentis illi æquiualere dicitur, quantum ad id quod poſſit diuidi in tot portiones &c.

PROPOSITIO XV.

Sit ſectio conica e l f cuius diameter l q, ordinatim ad illam applicata ſit e o, quæ producta occurrat ſectioni in f: ad diametrum ſint quotcunque ordinatim vtrinque applicatæ b a, e f; & per e, b, a, f eductæ ſint parallelæ, ita vt quæ ex b & a educuntur ſint æquales & inter ſe, & ipſi l r. Completa intelligantur parallelogrãma mixta b c r l, l r d a: ſint item b s, t a, e m, n f æquales inuicem, intelliganturque conipleta parallelogramma mixta e m s b, a t n f. Rursus super basibus e b, b l, l a, a f constructa sint parallelogramma mixta e i u b, b g ω l, l ω h a, x a f k, ita vt rectæ i e, b u, l ξ, a x, f k sint parallelæ inuicem, nullaque earum secet curuam e l f quam subtendit maxima ordinatim eductarum, nisi in vno puncto; aut si in alio, illud sit infra maximam eductarum: sint autem rectæ lineæ i e, g b, h a, f κ æquales rectis lineis e m, b c, d a, n f. Dico vt est perpendicularis ex e in rectam b a demissa, ad perpendicularem ex u demissam in eandem b a; ita esse duo simul parallelogramma mixta b c r l, l r d a ad duo simul parallelogramma mixta b g ω l, l ω h a: item duo simul parallelogramma mixta e m s b, a t n f ad duo mixta e i u b, a x k f simul sum-a; & ſic conſequenter ſi plures dinatim applicatæ fuerint; ita duo ſimul quæ numero pari à ametro p q ad vtraſque partes ımerantur, comparentur ad duo is reſpondentia in aliâ laterum clinatione.

Intelligantur compleri parallegramma xta e i k f, m s t n, & iungantur rectæ ı, u x, i k, c d, s t, m n, & producan- : c b, r l, t a, g b, ω l, h a donec oc- rrant rectæ e f in punctis λ, o, θ, γ, π. z.



Quoniam rectilineum parallelogrammum b c d a (est enim parallelogrammum per primi Euclidis trigesimam tertiam; eademque est ratio de alijs) est per vndecimam huius æquale mixto b c d a; & rectilineum b g h a mixto b g h a, & quoniam per tertiam huius vt perpendicularis ex c in rectam b a demissa ad perpendicularem demissam ex g in eandem b a; ita est quadrilaterum rectilineum b c d a ad rectilineum b g h a; ergo ita etiam erit parallegrammum mixtum b c d a, hoc est duo mixta b c r l, l r d a simul sumpta, ad parallelogrammum mixtum b g h a, hoc est ad duo mixta b g ω l, l ω h a simul sumpta.

Rursus quoniam rectilinea λ b a θ, y b a z sunt parallelogramma, erunt λ θ, y z æquales singulæ lateri b a cui opponuntur, ergo & inter se erunt æquales: ergo cùm e λ, θ f sint id quod restat postquam ex e f ablata est λ θ; & cùm e y, z f sint id quod restat postquam ex e f ablata fuerit recta y z æqualis ipsi λ θ, erunt duæ simul e λ, θ f æquales duabus simul e y, z f: ergo vt λ θ ad duas simul e λ, θ f, ita est y z ad duas simul e y, z f: ergo vt rectilineum λ μ ⅃ θ ad duo simul rectilinea e m μ λ, θ ⅃ n f; ita rectilineum y β δ z ad duo simul e i β y, z δ k f. Cùm ergo rectilineis λ μ ⅃ θ, e m μ λ, θ ⅃ n f, y β δ z, e i β y, z δ k f æqualia sint mixta b s t a, e m s b, a t n f, b u x a, e i u b, a x k f: vt mixtum parallelogrammũ b s t a

34. primi Euc.

1. sexti Euc.

11. huius.

duo mixta simul e m f b, a t n f, ita mixtum parallelogrammum b u x a ad duo mixta simul e i u b, a x k f: ergo alternando vt mixtum b f t a ad b u x a, ita sunt duo mixta e m f b, a t n f simul sumpta ad duo mixta e i u b, a x k f simul sumpta. Sed b f t a ad b u x a se habet vt perpendicularis ex f ad perpendicularem ex u in rectam b a demissa, siue vt perpendicularis ex c ad perpendicularem ex g, id verò probatur sicuti de mixtis b g t l, l t h a superiùs ostensum fuit: ergo vt perpendicularis ex c ad perpendicularem ex g in rectam b a demissa, ita duo mixta e m f b, a t n f simul sumpta, ad duo e i u b, a x k f simul pariter sumpta, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex his manifestum est demonstrationem esse eiusdem roboris si arcus e l, f l constituant angulum ad l, dummodo cætera non mutentur.

COROLLARIVM. II.

Manifestum quoque est eandem esse demonstrationis vim siue parallelogramma e i u b, b g ω l &c. constituantur ad sectionis conicæ e l f conuexa, siue ad concaua.

COROLLARIVM. III.

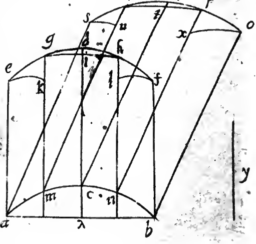
Manifestum denique est ex duobus parallelogrammis mixtis b g ω l, l ω h a, maius esse b g ω l, illud nimirum quod est ad partes rectæ ω l ad quas ipsa ω l cum rectâ b a angulum acutum intrinsecùs constituit. Quoniam enim recta b a diuiditur bifariam in p, erit b φ maior quàm φ a: Sed parallelogramma mixta g ω l b, l ω h a se habent vt rectæ b φ, φ a, cùm sint æqualia parallelogrammis rectilineis φ g, φ h: ergo b g ω l est maius parallelogrammo mixto l ω h a. Simili ratione ostendetur parallelogrammum mixtum e i u b esse maius parallelogrammo mixto a x k f; cùm recta e y sit maior recta z f; sunt enim e λ, θ f æquales; ergo e y maior quàm e λ, erit maior rectâ z f quæ pars est rectæ θ f.

PROPOSITIO XVI.

Sit sectio conica a c b, cuius arcum subtendat recta a b bifariam secta in λ, & per λ acta sit λ c diameter, cui parallela sint latera a e, b f figuræ mixtæ cõprehensæ ectis a c, b f, & sectionibus conicis a c b, e d f, quarum diametri congruant rectæ c λ, & ordinatim ad istas applicatæ vel sibi congruant, vel sint parallelæ; parallelarum autem ad rectam d c portiones sectionibus conicis interceptæ eò sint maiores quò minus distabunt ab earum maximâ c d. Sit præterea alia figura quadrilatera mixta a s o b cuius latera a s, o b sint recta & æqualia lateribus a e, b f singula singulis; alia autem duo sint curuæ lineæ a c b, s q o, ita vt per quodcunque punctum curuæ a c b ductæ fuerint duæ rectæ, vna parallela lateri a e, altera lateri a s, ipsæ sint inuicem æquales: ductarũ verò inter a s, b o linearum nulla secet curuam a c b nisi in vno puncto iuxta cautionem adhibitam in decimâ quintâ huius;

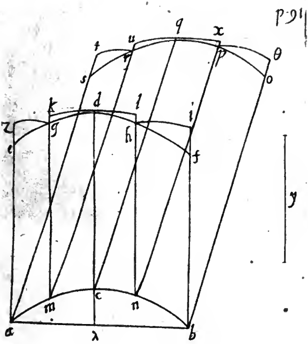
quæ autem parallelæ erunt ipsi c d, conformes sint cautioni traditæ ad decimam quartam huius. Dico figuram quadrilateram mixtam a e f b se habere ad quadrilateram mixtam a s o b, vt se habet perpendicularis ex e ad perpendicularem ex s demissa in rectam a b.

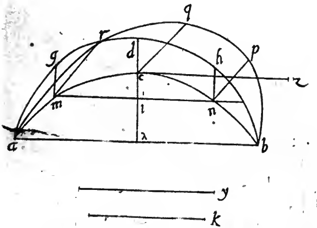
Vt se habet perpendicularis ex s ad perpendicularem ex e, ita sit spatium figuræ mixtæ a s o b ad spatium quod potest recta y.



Si ſpatium figuræ mixtæ a e f b non ſt æquale quadrato rectæ y, ſit primo ſi eri poteſt maius. Poterunt ergo per decimam quartam huius deſcribi tot parallelogrāma mixta intra figuram a e f b, vt pſa ſimul ſint maiora ſpatio y. Sint illa e k m, m g i c, c i h n, n l f b; per m,c,n gantur m r, c q, n p æquidiſtantes ipſi s, intelliganturque compleri parallelogramma mixta a ſ u m, m r t c, n p t c, o x n; ergo per præcedentem vt perpendicularis ex s in rectam a b demiſſa, ad perpendicularem ex e demiſſam in eandē b, ita erunt duo ſimul parallelogramma mixta m r t c, n p t c ad duo ſimul n g i c, c i h n : & ita etiam erunt duo ſimul a ſ u m, n x o b ad duo ſimul e g m, n h f b: ergo ſumptis ſimul antecedentibus ad conſequentia ſimul, vt perpendicularis ex s ad perpendicularem ex , ita parallelogramma mixta a ſ u m, m r t c, c t p n, n x o b ſimul ſumpta ad parallelogramma mixta a e K m, m g i c, c i h n, n l f b ſimul ſumpta : ſed vt perpendicularis ex s ad perpendicularem ex , ita eſt ſpatium mixtum a ſ o b ad quadratum y: ergo vt mixta a ſ u m, m r t c, c t p n, n x o b ſimul ad mixta ſimul a e k m, m g i c, c i h n, n l f b; ita eſt mixtum a ſ o b ad quadratum y : ergo alternando vt mixta ſimul a ſ u m, m r t c, c t p n, n x o b ad mixtum a ſ o b, ita mixta ſimul a e k m, m g i c, c i h n, n l f b ad quadratum y: ſed mixta ſimul a ſ u m, m r t c, c t p n, n x o b ſunt ſimul minora mixto a ſ o b: ergo mixta ſimul a e K m, m g i c, c i h n, n l f b erunt minora quadrato y, quod eſt abſurdum, cùm ponantur eſſe eo maiora.

Secundò ſpatium figuræ mixtæ a e f b, ſit ſi fieri poteſt minus quadrato rectæ y poterunt ergo per decimam quartam huius deſcribi tot parallelogramma mixta quorum latera baſi in curuâ a c b exiſtẽti oppoſita ſint extra figuram a e f b, vt ipſa ſimul ſint minora ſpatio y: ſint illa a z g m, m k d c, c d l n, n h i b. Per m, c, n agantur m r, c q, n p æquidiſtantes ipſi a s, intelliganturque compleri parallelogramma mixta m r t a, c q u m, c q x n, n p θ b: ergo ſicut in præcedenti caſu oſtenſum fuit, vt perpendicularis ex ſ demiſſa ad perpendicularem ex e, ita erunt omnia ſimul parallelogrãma mixta m r t a, c q u m, c q x n, n p θ b ad omnia ſimul mixta a z g m, m k d c, c d l n, n h i b. Sed ita etiam eſt mixtum a ſ o b ad quadratum y, ergo vt omnia mixta ſimul m r t a, c q u m, c q x n, n p θ b ad omnia ſimul a z g m, m k d c, c d l n, n h i b, ita erit mixtum a s o b ad quadratum y: ergo alternando vt omnia ſimul m r t a c q u m, c q x n, n p θ b ad mixtum a ſ o b, ita omnia ſimul a z g m, p.91





m k d c, c d l n, n h i b ad quadratum y: ſed mixtum a ſ o b eſt minus omnibus ſimul parallelogrammis mixtis m r t a, c q u m, c q x n. u p θ b; ergo quadratũ y eſt minus omnibus ſimul a z g m, m k d c, c d l n, n h i b, quod eſt abſurdum, cùm ponatur eſſe maius. Mixtum ergo a e f b eſt æquale quadrato y : ac proinde vt perpendicularis ex s ad perpendicularem ex e demiſſam in rectam a b, ita eſt mixtum a s o b ad mixtum a e f b, quod erat oſtendendum.

Quod ſi ſectiones conicæ conuenirent in a & b vt in ſecunda figura ex binis paulò ſuperiùs adſcriptis, totum ſpatium incluſum ſectionibus conicis a d b, a c b ſe haberet ad totum ſpatium incluſum ſectione conicâ a c b & curuâ a q b, vt perpendicularis ex d demiſſa ad perpendicularem demiſſam ex q in rectam c z tangentem in vertice c.

Vt enim perpendicularis ex q ad perpendicularem ex d, ita ſit ſpatium incluſum curuis a c b, a q b ad quadratum y. Si ſpatium incluſum curuis a c b, a d b non eſt æquale quadrato y, erit vel eo minus, vel eo maius; ſit primò maius. Poterit ergo ita duci ordinatim applicata m i quæ producta ſecet curuam a c b in n, vt ſi per puncta m, n ducantur m g, n h parallelæ ipſi c d, figura ſub rectis g m, h n & ſub curuis g d h, m c n ſit æqualis ſpatio rectæ y. Per m & n agantur m r, n p parallelæ rectæ c q. Vt perpendicularis ex g in m n ad perpendicularem ex r in m n, ita eſt ex iam demonſtratis ſpatium ſub rectis g m, h n, & ſub curuis g d h, m c n ad ſpatium ſub rectis m r, n p, & ſub curuis r q p, m c n: Sed vt perpendiculares ex g & r in rectam m n demiſſæ ſe habent inuicem, ita ſunt inuicem perpendiculares ex d & q in tangentem c z demiſſæ (ponimus enim vt g m, m r ita eſſe d c, c q: item rectas m r, c q eſſe inuicem parallelas; item rectas m g, c d: tangentem autem c z eſſe parallelam ordinatim applicatæ m i conſtat ex quinta ſecundi conicorum) ergo vt perpendicularis ex d ad perpendicularem ex q demiſſam in tangentem c z, ita eſt ſpatium ſub rectis g m, h n & ſub curuis g d h, m c n, ad ſpatium ſub curuis r p q, m c n, & ſub rectis m r, n p; & inuertendo vt perpendicularis ex q ad perpendicularem ex d, ita erit ſpatium ſub curuis r q p, m c n & ſub rectis m r, n p contentum ad ſpatium ſub rectis g m, h n & ſub curuis g d h, m c n, hoc eſt ad quadratum y: ſed ita etiam eſt ſpatium ſub curuis a q b, a c b ad quadratum y: ergo ſpatium ſub curuis a c b, a q b eſt æquale ſpatio ſub curuis r q p, m c n & ſub rectis m r, n p contento: hoc eſt ſui parti; quod eſt abſurdum.

Secundò ſpatium incluſum curuis a c b,

a d b sit minus spatio y : atque vt perpendicularis ex d ad perpendicularem ex q, ita fiat spatium sub curuis a c b, a d b ad spatium quod potest recta. k. Quoniam vt spatium sub curuis a c b, a d b ad spatium k, ita est spatium y ad contentum sub curuis a c b, a q b : ergo alternando vt spatium sub curuis a c b, a d b ad spatium y : ita spatium k, ad contentum sub curuis a c b, a q b : sed spatium sub curuis a c b, a d b est minus spatio y : erit ergo spatium k minus contento sub curuis a c b, a q b. Poterit ergo ita duci aliqua recta m n ordinatim vtrinque ad diametrum d λ à sectione a c b applicata, vt si per puncta m, n ducantur m r, n p parallelæ rectæ c q, figura sub rectis m r, n p & sub curuis m c n r q p sit æqualis spatio k. Hoc ita facto, per m & n agãtur m g, n h parallelæ ad rectã d c. Ergo ex iam demonstratis vt perpendicularis ex d ad perpendicularem demissam ex q in tangentem c z, ita est spatium sub rectis g m, h n & sub curuis g d h, m c n ad spatium sub curuis r q p, m c n & sub rectis m r, n p : hoc est ad quadratum k : sed ita etiam est spatiũ sub curuis a d b, a c b ad quadratum k : ergo spatium sub curuis g d h, m c n & sub rectis g m, h n est æquale spatio sub curuis a d b, a c b, hoc est pars toti, quod est absurdum. Ergo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Quod si recta c d esset omnium minima & reliquæ eò maiores euaderent, quo longiùs ab ipsa c d distarent, idem demonstratur ex ijsdem principijs vt attendenti manifestum est, dummodo cætera non mutentur.

COROLLARIVM II.

Ex his manifestum est eandem esse demonstrationis vim, quamuis arcus e d f non sit sectio conica, dummodo iuxta notata ad decimam tertiam huius possit diuidi in tot portiones &c.

COROLLARIVM III.

Manifestum quoque est eundem esse demonstrationis tenorem siue figura mixta a f o b constituatur ad sectionis conicæ a c b conuexa siue ad concaua: vnde conficitur æquales esse eas figuras quæ super eadem portione sectionis conicæ constituuntur, habentes latera modo dicto æqualia.

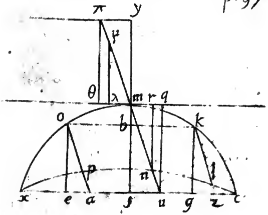
Propositio XVII.

Sit ſectio conica x m c, cuius diameter m f, quam in vertice m ſecet recta m u; ad diametrum ordinatim applicata ſit recta x f ex puncto x, quæ producta occurrat ſectioni in c, ita vt quæuis parallela rectæ m u per quoduis punctum arcûs x m c inter x & c ſumptum educta ſecet rectam x c in aliquo puncto inter x & c poſito. Sumpti ſint à vertice m arcus vtrinque æquales o m, m k, & per quælibet puncta arcûs o m k ductæ intelligantur rectæ ad rectam m u parallelæ, & ex illis abſcindi o p, m n, k l &c. æquales rectis o e, m f, k g &c. parallelis ad diametrum m f, & rectam a c ſecantibus in e, f, g; extrema autem abſciſſarum deſcribant lineam

lineam continuam p n l. Dico primò vt recta m u ad rectam m f, ita esse spatium e o m k g f ad spatium p o m k l n.

Cùm enim triangula e o a, f m u, h κ z &c. sint similia; vt e o, o a ita erunt f m, m u; & g κ, k z &c. Quoniam verò rectæ e o, o p sunt æquales; item m f, f n; item k g, k l, & sic de alijs; vt recta m u ad m n, ita erit a o ad o p, & g k ad k l, & sic de alijs: ergo per diuisionem rationis vt m u, u n, ita erunt o a, a p: & k z, z l, & ita de alijs: ergo per sextam huius spatium a o m k z u se habet ad spatium a p n l z,

p. 97



vt recta m u ad rectam n u: ergo per diuisionem rationis vt recta m u ad m d siue ad m f, ita est spatium a o m k z u ad spatium p o m κ l n: Sed spatium e o m k g f est æquale spatio a o m κ z u (parallelogramma enim o e g k, o a z k cum habeant eandem basim, & in eisdem parallelis constituãtur sunt æqualia ;ergo addito cõmuni o m k b, cõponũtur æqualia a o m κ z u, e o m k g f)ergo vt recta m u ad rectã m f, ita est spatiũ e o m k g f ad spatiũ p o m k l n, quod erat demonstrandum primo loco. Quòd si arcus m x, x c vtrinque sumpti forent : demonstrationis tenor idem foret qui paulò ante in simili casu.

36. primi Euc.

Dico secundò si ex f & n demittantur perpendiculares ad rectam m q per m æquidistanter rectæ x c ductam, spatium e o m k g f esse ad spatium p o m k l n, vt est perpendicularis ex f ad perpendicularem ex n. Ex n & u demissis perpendicularibus n r, u q, quoniam in triangulo u m q lateri u q parallela est n r ; ergo similia sunt triangula m u q, m n r: vt ergo m u, u q, ita m n, n r: & alternando vt m u, m n, ita u q, n r : sed perpendicularis ex f demissa est æqualis perpendiculari u q: ergo vt m u, m n, ita perpendicularis ex f ad perpendicularem ex n : Sed vt recta m u ad m n, ita ostensum est esse e o m κ g f ad p o m κ l n: ergo vt perpendicularis ex f ad perpendicularẽm ex n,

4. sexti Euc.

34. primi Euc.

ita eſt e o m k g f ad p o m k l n, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt ſi rectæ f m, u m producantur, & abſciſſa ex f m quacunque recta m y, ipſi m y abſcindatur μ m æqualis, & ex μ atque y demittantur perpendiculares ad tangentem m q, perpendicularem ex y ſe habere ad perpendicularem ex μ, vt perpendicularis ex f ſe habet ad perpendicularem ex n. Agatur enim per y recta y π parallela rectæ f u, occurrens rectæ m μ in π: ergo cùm triangula π y m, u f m ſint ſimilia, vt m π ad y m ſeu ad m μ; ita erit u m ad f m ſeu ad n m; Cùmque triangula π m θ, u m q ſint ſimilia, eorumque latera homologa π m, m u ſecta ſint ſimiliter in μ & n; perque μ, n, π, u actæ ſint parallelæ $\mu\lambda$, n r, $\pi\theta$, u q, erunt vt m u, m n, hoc eſt, vt π m, μ m, ita q u, n r, & $\pi\theta$, $\mu\lambda$: ergo vt perpendiculares q u, n r, ita perpendiculares $\pi\theta$, $\mu\lambda$: perpendiculari autem ex π æqualis eſt perpendicularis ex y: ergo vt perpendicularis ex f ad perpendicularem ex n, ita perpendicularis ex y ad perpendicularem ex μ.

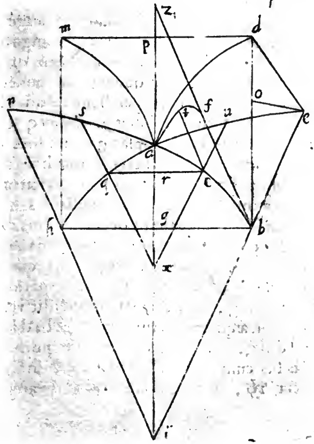
4. ſexti Euc. in coroll.

PROPOSITIO XVIII.

Super eadem basi curuâ a c b sint tres figuræ constitutæ a f b, a d b, a e b, ita vt latera f b, b e figurarum a f b, a e b sint rectæ æquales, & cùm curuæ portione a c b non conueniant nisi in vno puncto, latus autem d b figuræ a d b sit recta bifariam secans angulum f b e. Præterea tres figuræ a f b, a d b, a e b ita inuicem sint dispositæ, vt ex quocunque puncto curuæ a c b educantur tres lineæ tribus f b, d b, e b parallelæ non conueniant cum eadem curuæ portione a c b in alio puncto, & earum portiones tribus figuris interceptæ, sint proportionales trtbus lineis f b, b d, b e. Demõstrandum est, démissâ ex e ad b d perpendiculari e o, duas simul figuras a f b, a e b se habere ad duplum figuræ a d b, vt se habet recta d b ad b o.

Per a & b extrema portionis a c b ducantur rectæ a g, g b æquidistantes rectis e o, o b, earumque occursus sit in puncto g; conuenient enim, cùm e o, o b conueniant. Similiter quoniam e b & f b conueniunt cum recta b o, conuenient etiam

p 101



cum rectâ a g ipsi b o æquidistante; concursus sit in i & z. Quoniam recta e o est perpendicularis ex constructione ad rectam b d, erit b g perpendicularis ad rectam a g. Intelligatur planum z i e in quo sunt tres figuræ a f b, a d b, a e b, circa rectam i z immotam circumuolui donec plano z g h congruat ad rectæ a i partes oppositas, ita vt punctum b congruat puncto h; punctum e puncto n; punctum d puncto m; recta i e rectæ i n; recta b d rectæ h n; recta g b rectæ g h; & curua a d curuæ a m; curua a e curuæ a n; & curua a c b curuæ a h. Quoniam angulus i g b congruit angulo i g h, erunt i g b, i g h æquales anguli, ac proinde rectæ h g, g b cadent in directum. Hinc fit, si ex quocunque puncto c educta fuisset e r perpendicularis ad rectam g k, & iuncta fuisset à puncto q cui c congruit recta q r, ipsas q r, r c fore in directum, & æquales: ergo curuæ h a, a b ita sibi respondent, vt quæ ad rectam a g ordinatim applicantur æquidistantes ipsi h b, bifariam secentur in occursu ipsius a g.

Per q & c ducantur rectæ q s, c t parallelæ ad rectam b z, occurrentes curuis n a, a f in punctis s, t. Quoniam parallelæ sunt z g, b d, & in illas incidit recta b z, erũt æquales alterni anguli g z b, d b z, seu d b e, qui ipsi d b z æqualis ponitur. Rursus cùm in parallelas i z, d b incidat recta i b, externus & internus anguli db e, z i b erunt æquales: ergo cùm g z b, k i b sint æquales vni tertio d b e; erunt g z b, z i b æquales: sed h i g, g i b sunt etiam æquales: ergo anguli i z b, h i z sunt æquales: ergo cùm sint alterni, erunt rectæ h n, b z parallelæ; ergo h n, q f, c t, b f sunt parallelæ. 34. primi Euc.

Rursus per c agatur recta c u parallela rectæ b e, occurratque curuæ a e in u, & rectæ a z in x, iungaturque recta q x; erit q x parallela ipsi b z, sicuti ostensum fuit de rectâ i h; ergo rectæ f q, q x iacent in directum; ergo dum in impositione plani super plano recta i e congruit rectæ i n, recta x u cōgruet rectæ x f: ergo punctum u congruet puncto f, rectæque q f, c u sunt æquales; sed c t, c n ponuntur etiam æquales; ergo rectæ q f, c t (quas esse parallelas modo ostendimus) sunt etiam æquales, & eductæ per extrema sunt ordinatim applicatæ ad rectam q c. Igitur super basi h q a c b ita constructæ sunt figuræ h n f a q, b f t a c vt quæcunque ordinatim applicata ducatur ad rectam a g, parallela rectæ h b, si per eius extrema ducantur parallelæ ipsi h n, interceptæ basi h a b & curuis n f a, a c f, eæ sint æquales. 33. primi Euc.

Similiter cùm curuæ a m, a d sibi congruant dum plano planum superimponitur, si à quouis puncto curuæ a d intelligatur d p perpendicularis demissa ad rectam z g, iungaturque recta m p; ostendetur, vt paulò ante, rectas m p, p d, iacére in directum, & esse æquales; cumque d m h b sit parallelogrammum, erunt m h, d b æquales terminatæ ad curuas a m, a d, & eductæ per extrema m, d, erunt ordinatim applicatæ ad rectam a g.

Quoniam igitur super basi h q a c b constructæ sunt duæ figuræ compositæ vna n h q a s, b f t a c, altera h m a q, b d a c, & ita constructæ sunt, vt ab externis ordinatim applicatæ eductæ lineæ æquidistantes rectæ n h sint inuicem æquales in vna, & æquidistantes in altera rectæ h m sint inuicem æquales, per præcedentem propositionem vnius spatium se habebit ad spatium alterius vt recta d b ad b o, (est enim d b perpendicularis ex d demissa ad ordinatim applicatam per b eductam, & b o est perpendicularis ex e demissa) sed figura n s a q h est æqualis figuræ e u a c b cui superimposita congruit, ergo duæ simul figuræ e u a c b, b f t a c, simul sumptæ se habent ad duas h m a q, b d a c (hoc est ad duplam figuræ b d a c; congruunt enim sibi superimpositæ figuræ h m a q, b d a c) vt recta d b ad b o rectam, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus si puncta d & e connectantur rectâ d e, rectaque f b sit æquidistans ipsi d e, ostendendum est duas simul figuras a f b, a e b esse æquales figuræ a d b.

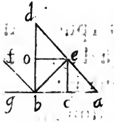
Quoniam enim duæ simul figuræ a f b, a e b se habent ad duplum figuræ a d b vt recta b o ad b d ex præcedenti, cum recta b d sit dupla rectę b o, vt mox ostendemus, erit quoque figura a d b bis sumpta, dupla duarum simul a f b, a e b: ergo figura a d b semel sumpta erit ęqualis duabus simul, quod erat demonstrandum.

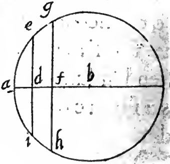
Restat vt ostendamus quoties tres rectæ f b, b d, b e ita concurrunt in vnum punctum b, vt anguli f b d, d b e, sint æquales; si recta per d & e ducta sit parallela rectæ f b, & per e ducatur e o perpendicularis ad d b ipsam d b esse duplam rectæ b o. Per b agatur b a parallela rectæ e o, & rectæ d e productæ occurrat in a; per e verò agatur e c parallela rectæ b d occurratque rectæ b a in c.

Quoniam rectæ d a, f b sunt parallelæ,

p-106

Figura prop Sequentis





internus angulus d a b erit æqualis externo f b g: sed f b g, e b a sunt æquales (nam si ex æqualibus d b g, d b a vt pote rectis, auferantur æquales d b f, d b e, residui f b g, e b a sunt æquales) ergo anguli e b a, e a b sunt æquales: ergo triangulum b e a est isosceles, eiusque latera b e, e a sunt æqualia: ergo cùm ex e demissa sit perpendicularis e c ad basim b a isoscelis b e a, erunt segmenta b c, c a æqualia: sed vt b c, c a in triangulo d b a, ita sunt d e, e a, eò quod lateri d b parallela sit e c: ergo segmenta d e, e a sunt æqualia: sed in eodem triangulo d b a, lateri b a parallela est e o: ergo vt d e, e a, ita d o, o b: ergo segmenta d o, o b sunt æqualia: ergo recta d b est dupla rectæ o b, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XX.

Rectangulorum ſub ſegmentis inæqualibus eiuſdem rectæ, illud eſt maius, cuius minus latus magis accedit ad ſemiſſem rectæ.

Sint rectangula a d c, a f b ſub eiuſdem rectæ a c bifariam in b ſectæ ſegmentis inæqualibus comprehenſa. Dico rectangulum a d c eſſe minus rectangulo a f c.

Ex centro b per a & c deſcribatur circulus, atque ex punctis d & f excitentur ad rectam a c perpendiculares e d i, g f h; ergo cùm ex centro b recta b a extenſa ſecet ad angulos rectos rectas e i, g h, bifariam illas ſecabit in d & f; & cùm diſtantia b f à centro b ſit minor diſtantiâ b d, erit g h maior quàm e i, ac proinde & ſemiſſis g f maior quàm ſemiſſis e d. 3. Tertij Euc. 5. eiuſd.

Rurſus quoniam per corollarium decimæ tertiæ ſexti Euclidis rectangula a d c, a f c ſunt æqualia quadratis rectarum d e, f g; cùm quadratum d e oſtenſum ſit eſſe minus quadrato f g, erit rectangulum a d c minus rectangulo a f c. Maximum autem eſſe rectangulum a b c ex iiſdem conſtat: nam in circulo maxima linea eſt diameter ex eadem decimâ quintâ tertij Euclidis; idipsum etiam constat ex vigesimâ septimâ sexti eiusdem Euclidis.

ALITER.

Quoniam recta a c diuisa est in b in æqualia, & in d in non æqualia, rectangulum a d c vnà cum quadrato d b erit æquale quadrato a b; similique ratione ostendetur rectangulum a f c vnà cum quadrato f b esse æquale quadrato a b: ergo rectangulum a d c vnà cum quadrato d b est æquale rectangulo a f c vnà cum quadrato f b: cùm ergo quadratum f b sit minus quadrato d b, erit rectangulum a f c maius rectangulo a d c; nam ex æqualibus si inæqualia demantur, residuum illud est maius quod fit ex subductione minoris.

COROLLARIUM.

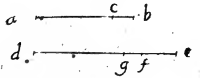
Hinc manifestum est minoris rectanguguli a d c minus latus a d, esse minus quocunque latere maioris rectanguli: Ostēsum enim est esse minus minore, ergo & multò erit minus maiore. Quòd si rectangulum maius sit a b c constans lateribus æqualibus, adhuc latus a d minus, erit minus latere a b: hoc enim ipso quod a d est minus quàm d c, est, etiam minus quàm a b semissis rectæ a c.

Propositio XXI.

Si sint duæ rectæ sectæ proportionaliter ; vt recta ad rectam, ita erit segmentum vnius ad segmentum homologum alterius : rectangula verò sub segmentis earum se habebunt vt quadrata ipsarum. Et si rectangula sub segmentis se habeant vt quadrata ipsarũ, sectæ sunt proportionaliter.

Sint rectæ a b, d e sectæ proportionaliter in c & f, ita vt quemadmodum a c ad c b, ita sit d f ad d e. Dico vt a b ad d e, ita esse a c ad d f, & c b ad f e; item vt quadratum a b ad quadratum d e, ita esse rectangulum a c b ad rectangulum d f e, Et si vt rectangulum a c b ad

p 109



rectangulum d f e, ita sit quadratum a b ad quadratũ d e, rectas a b, d e sectas esse proportionaliter in c & f.

Quoniam enim vt a c ad c b ita ponitur esse d f ad f e; ergo componendo vt a b ad c b, ita erit d e ad f e; & per diuisionem rationis vt a b ad a c, ita erit d e ad d f.

Rursus quoniam rectangula a c b, d f e sunt similia, habent eam inter se rationem quam quadratum lateris c b, ad quadratum lateris homologi f e: sed quadratum c b se habet ad quadratum f e vt quadratum a b ad quadratum d e, prout modo ostendebatur, ergo vt quadratum a b ad quadratum d e, ita est rectangulum a c b ad d f e.

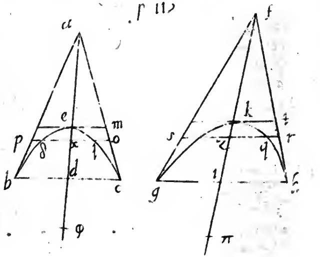
20. Sexti. Iam vt quadratum a b ad quadratum d e, ita sit rectangulũ a c b ad rectangulum d f e. Dico vt recta a c ad c b, ita esse rectam d f ad f e. Si enim fieri potest, vt a c a d c b, ita sit d g ad g e: ergo ex demonstratis rectangulum a b c se habet ad rectangulum a g e, vt quadratum a b ad quadratum d e: sed ita etiam se habet ad rectangulum d f e, ergo rectangula d g e, d f e sunt æqualia, quod est absurdum ex præcedenti; ponimus enim rectam d e ita secari in g vt segmentum d g non sit æquale segmento f e; si enim sit illi æquale, recta d e secta est proportionalirer tam in f quàm in g, vt manifestum est.

Propositio XXII.

Si duæ ſectiones conicæ tangentibus conuenientibus comprehendantur, & diametrorum per puncta concursûs ductarum portiones inter concurſum, ſectionem, & rectam tactus connectentem interceptæ ſint proportionales; & ſi vt tangens vnius ſectionis ad tangentem alterius, ita ſe habeant rectæ in eiſdem tangentibus à concurſu ſumptæ; perque extremum eiuſmodi linearũ duci poſſint parallelæ ad lineas tactus connectentes, quæ ſectionibus occurrant; eiuſmodi parallelarum portiones interceptæ inter ſectionem & tangentes ſe habebunt vt rectæ coniungentes tactus; iſtiuſmodi autem ſegmenta appellentur ſimilia quantùm ad diametri diuisionem; & si æquales fuerint diametri, dicantur æqualia, & similia quantum ad diametri diuisionem.

Sint duæ sectiones conicæ b e c, g k h comprehensæ tangentibus b a c, g f h concurrentibus in a & f; diametrique per a & f ductæ sint a e d, f k i, quæ lineas b c, g h tactus connectentes bifariam secabunt in d & i, ac proinde rectæ b c, g h erunt vtrinque applicatæ ordinatim ad diametros a d, f i: secent autem sectiones in e. & k, atque vt a e ad e d, ita sit f k ad k i.

30. Secundi Conic.



Si in tangentibus a c, f h productis designentur lineæ a o, f r existentes in ratione tangentium a c, f h; & per o & r ducantur, rectæ o p, r s parallelæ rectis b c, g h, occurrentes primùm sectionibus in l & q, rectisque a d, f i in x & z; rectisque a b, f g in p & s. Dico vt b c ad g h; ita esse o l ad r q, & l p ad s q.

Per e & *k* ducantur rectæ e m, *k* t parallelæ rectis b c, g h quæ tangent sectiones in e & *k*. Quoniam rectæ e m, m c tangunt sectionem b e c; vt quadratum e m ad quadratum m c, ita erit rectangulum p l o siue ẟ o l (sunt enim p x, x o æquales, similiter vt b d, d c per corollarium quartæ sexti apud Clauium; sed ordinatim applicatę ẟ x, x l sunt etiam ęquales; ergo rectangula ẟ o l, p l o sunt ęqualia) ad quadratum o c. Eadem de causâ vt quadratum k t ad quadratum t h, ita rectangulum s q r ad quadratum r h: ergo alternando vt quadratum e m ad rectangulum p l o, ita quadratum m c ad quadratum o c: & vt quadratum K t ad rectangulum s q r, ita quadratum t h ad quadratum r h. 32. primi Conic.

Rursus quoniam in triangulis a d c, f i h lateribus d c, i h parallelę sunt e m, *k* t; vt a e ad e d, ita est a m ad m c: & vt f k ad *k* i, ita est f t ad t h: sed vt a e ad e d, ita ponitur esse f *k* ad *k* i; ergo vt a m ad m c, ita est f t ad t h: ergo componendo 2. sexti. Euc.

H

vt a c ad m c, ita a h ad t h; & inuertendo vt m c ad a c, ita t h ad f h. Quoniam verò vt a c ad f h, ita eſt a o ad f r: ergo alternando vt a c ad a o, ita eſt f h ad f r: ergo per conuerſionem rationis vt ac ad o c, ita eſt fh ad r h. Cùm igitur vt m c ad a c, ita oſtenſum ſit eſſe t h ad f h; & vt a c ad o c, ita oſtenſum quoque ſit eſſe f h ad r h: ergo ex ęquo vt m c ad o c, ita erit t h ad r h; & vt quadratum m c, ad quadratum o c, ita erit quadratum t h ad quadratum r h. Sed vt quadratum m c ad quadratum o c, ita oſtenſum eſt eſſe quadratum e m ad rectangulum p l o; & vt quadratum t h ad quadratum r h, ita oſtenſum eſt eſſe quadratum k t ad rectangulum ſ q r, ergo vt quadratum e m ad rectangulum p l o, ita quadratum k t, ad rectangulum ſ q r, & alternando vt quadratum e m ad quadratum k t, ita rectangulum p l o ad rectangulum ſ q r.

Rurſus quoniam vt c m ad m a; ita eſt h t ad t f: ergo componendo vt c a ad m a, ita h f ad f t, cúmque in triangulis a d c, f i h, lateribus d c, i h parallelę ductæ ſint rectę e m, k t: ergo per corollarium quartæ libri ſexti Euclidis, vt a c ad m a, ita eſt d c ad m e: & vt h f ad f t, ita i h ad k t. Simili prorſus modo oſtendetur vt d c ad x o, ita eſſe i h ad z r: & vt b c ad p o, ita g h ad r ſ. Quoniam ergo vt d c ad e m, ita i h ad k t:

ergo alternando vt d c ad i h, ita e m ad k t: & vt quadratum d c ad quadratum i h, ita quadratum e m ad quadratum k t. Sed vt quadratum e m ad k t, ita rectangulum p l o ad ſ q r, vt oſtenſum fuit, ergo vt quadratum d c ad i h, ſeu vt quadratum b c ad g h, ſeu vt quadratum p o ad ſ r, ita eſt rectangulum p l o ad ſ q r. Cùm igitur vt quadratum p o ad quadratum ſ r, ita ſit rectangulum p l o ad ſ q r: ergo vt recta p o ad ſ r ſeu vt recta b c ad g h, ita per præcedentem eſt recta p l ad ſ q, & recta l o ad q r quod erat oſtendendum.

Quòd ſi rectæ a b, a c eſſent aſymptoti, demonſtrari idem poſſet. Nam rectangula p l o, ſ q r forent æqualia quartæ parti figuræ, hoc eſt quadratis e m, k t. Quoniam ergo vt b c ad g h, ita oſtenſum eſt eſſe e m ad k t (quod & hîc habet locum). ergo vt quadratum b c ad quadratum g h, ita erit rectangulum p l o ad rectangulum ſ q r. Cætera quæ ad hanc demonſtrationem attinent, ſunt communia cum figurâ tangentium.

14. Secundi Conici.

1. Secundi Conic.

COROLLARIVM I.

Hinc manifeſtũ eſt ordinatim applicatas x l, z q eam inter ſe rationem habere, quam rectæ tactus coniungentes b c, g h; oſtenſũ enim eſt vt d c ad i h, ita eſſe x o, ad z r &

l o ad q r: & alternando vt x o ad l o, ita z r ad q r. Quoniam ergo vt x o ad l o, ita z r ad r q: ergo per conuersionem rationis vt x o ad z r, seu vt d c ad i h, seu vt b c ad g h, ita est x l ad z q.

COROLLARIVM. II.

37. primi Conici. Hinc quoque apertum est si sectiones b e c, g k h sint centro prædita, centraque earum sint π, φ, tres rectas π i, π k, π f esse proportionales: & tres item φ d, φ e, φ a; ergo cùm vt φ d ad φ e, ita sit φ e ad φ a, erit diuidendo vt φ d ad d e, ita φ e ad e a; & alternando vt φ d ad φ e, ita d e ad e a. Similiter ostendetur vt π i ad π k, ita esse i k ad k f: sed vt d e ad e a, ita ponitur esse i k ad k f: ergo vt φ d ad φ e, ita est π i ad π k: si ergo duo segmenta b e c, e k h sectionum centro pręditarum ita se habeant, vt rectæ φ e, π k similiter secentur occursu ordinatim ad ipsas applicatarum b c, g h; ipsa segmenta erunt similia quantùm ad diametri diuisionem.

COROLLARIVM. III.

Si segmenta b e c, e k h non tantùm sint similia quantum ad diametri diuisionem, verùm etiam quantum ad ipsius diametri ad basim proportionem & inclinationem; ipsa segmenta erunt inter se, vt quadrata diametrorum inter se. Quoniam enim vt b c ad d e, ita est g h ad k i; & vt d e ad perpendicularem ex e in basim b c demissam, ita est perpendicularis ex κ in basim g h demissa, quando inclinatio rectarum e d, κ i est eadem; ergo ex æquo vt basis b c ad perpendicularem ex e, ita basis g h ad perpendicularem ex *k*: ergo rectangulum sub b c & sub perpendiculari ex e demissâ est simile rectangulo sub g h. & sub perpendiculari ex k demissâ: ergo eiusmodi rectangula sunt inter se vt quadrata basium b c, g h: sed vt rectangula eiusmodi, ita per præsentem sunt segmenta: ergo vt quadrata basium b c, g h, aut semidiametrorum φ e, π κ, aut rectarum d e, i k, ita sunt segmenta b e c, e *k* h. 20.sexti. Euc.

COROLLARIVM IV.

Si segmenta b e c, e k h sint similia & quantum ad diametri diuisionem, & quantum ad ipsius diametri ad basim inclinationem, basesque sint reciprocè vt diametri, erunt æqualia. Quoniam enim segmentum b e c est ad segmentū g κ h vt rectangulum sub b c subque perpendiculari ex e, ad rectangulum sub g h subque perpēdiculari ex *k*, cùm ipsæ perpēdiculares sint inter se vt latera d e, i k analoga similium triangulorum comprehensorum sub perpendiculiaribus & sub d e, i k, atque sub portionibus basium b c, g h,

erunt ipsæ perpendiculares vt diametri; sed ita etiam ponuntur esse bases reciprocè; ergo parallelogramma eiusmodi sunt
4. Sexti Eucl. æqualia; ergo & ipsa segmenta b e c, e k h sunt æqualia.

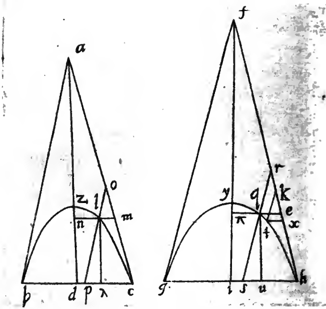
COROLLARIVM. V.

Denique reliquis vt in proximè præcedenti corollario positis, si rectæ d e, k i sint æquales, segmentum b e c ad g k h, erit vt basis b c ad g h; quia rectangulum sub b c & sub perpendiculari ex e, se habet ad rectangulum sub g h & sub perpendiculari ex K, vt recta b c ad g h; cùm eadem sit vtriusque altitudo in isto casu. Eadem de causâ si bases b c, g h forent æquales segmenta se haberent vt rectæ e d, k i.

PROPOSITIO XXIII.

Si duæ sectiones conicæ tangentibus concurrentibus cõprehendantur, & diametrorum per per puncta concursûs ductarum portiones inter concursum, sectionem & rectam tactus connectentem interceptæ sint proportionales: Et ſi vt tangens vnius ſectionis ad tangentem alterius, ita ſe habeant rectæ in eiſdem tangentibus à concuſu ſumptæ, perque extremum eiuſmodi linearum duci poſſint parallelæ ad reliquas tangentes, quæ ſectionibus occurrant; eiuſmodi parallelarum portiones interceptæ inter ſectionem & inter tangentes, atque coniungentes tactus eandem inter ſe rationem habebunt, quam tangentes ipſis æquidiſtantes.

Sint duæ ſectiones conicæ bzc, gyh comprehenſæ tangentibus bac, gfh concurrentibus in a & f, diametrique per a & f ductæ ſint ad, ai, quæ ſecent lineas bc, gh coniungentes tactus in d & i; ſectiones verò in z & y: atque vt az, zd, ita ſint fy, yi. Si in tangentibus ac, fh productis deſignentur lineæ ao, fr exiſtentes in ratione ipſarum tangentium ac, fh; & per o & r ducantur rectæ op, rs parallelæ tangentibus ab pa 120



fg occurrentes primùm sectionibus in l & q, rectisque bc, gh in p & s. Dico vt ab ad fg, ita esse ol ad rq; & lp ad qs. Per l & q ducantur rectæ lm, qe parallelæ rectis bc, gh, occurrentes rectis ac, fh in m & e. Habebunt se am, fe, vt ac, fh; si enim aliter fieri potest, sit vt ac ad fh, ita am ad fx, & per x agatur xt parallela rectæ gh, occurrens sectioni in t. Ergo per præcedentem vt bc ad gh, ita erit lm ad x t, & alternando vt b c ad l m, ita g h ad x t. Ducatur per t recta t k parallela rectæ f g. Quoniam triangula l o m, b a c habent latera parallela erunt æquiangula; eademque de causâ æquiangula sunt g f h, t k x: ergo vt b c ad c a, ita l m ad m o; & alternando vt b c ad l m, ita c a ad m o. Similiter vt g h ad h f, ita t x ad x k, & alternãdo vt g h ad t x, ita h f ad x k: sed eandem esse rationem b c ad l m, quæ g h ad x t ostensum est, ergo vt c a ad m o, ita h f ad x k, & alternando vt c a ad h f, ita m o ad x k: Sed vt c a ad h f, ita ponitur esse a m ad f x: ergo vt a m ad f x, ita o m ad k x, & alternando vt a m ad o m, ita f x ad k x; & per diuisionem rationis vt a m ad a o, ita f x ad f κ; & alternando vt a m ad f x, ita a o ad f κ; sed ita etiã sũt a o, f r: ergo f κ, f r sunt æquales, pars & totum; vt igitur a c ad f h ita est a m ad f e.

Rursus quoniam a c, f h sectæ sunt proportionaliter in m & e, vt b c ad g h, ita per pręcedentem erit l m ad q e; & alternando vt b c ad l m, ita erit g h ad q e. Cùm igitur vt b c ad l m, seu vt g h ad q e, ita sit b a ad l o (sunt enim triangula b c a, l m o æquiangula & similia) eademque de causâ vt g h ad q e, ita sit g f ad q r, erit g f ad q r, vt b a ad l o, & alternando vt g f ad b a, ita q r ad l o:

cúmque in triangulis c b a, h g f lateribus b a, g f parallelæ sint o p, r s: ergo (vt in præcedenti propositione in simili casu ostensum est) vt a b ad f g, ita o p ad r s: Sed vt a b ad f g, ita etiam esse o l ad r q ostensum est: ergo vt p o ad r s, ita est l o ad r q; & alternando vt p o ad l o, ita r s ad r q, & per diuisionem rationis vt p o ad l p, ita r s ad q s; & alternando vt p o, r s, ita p l, q s, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Ex primâ huius apertum est sectiones b z c, g y h esse homogeneas, id est, ambas vel parabolas, vel hyperbolas, vel oxygonias. Si enim a z sit ipsi z d ęqualis, erit quoque f y ipsi y i ęqualis, ac proinde ambę erunt parabolę; si a z sit minor erit f y minor, ambęque erunt hyperbolę; si denique a z sit maior, erit & f y pariter maior, ambęque erunt oxygonię, vt ex illâ primâ propositione planum est. Istud autem locum etiam habet in pręcedenti propositione, vt apertum est.

COROLLARIVM II.

Hinc facile ostenditur si per l & q agantur rectę l λ, q u parallelæ diametris n d, y i, occurrantque rectis b c, g h in λ & u, rectam l λ se habere ad rectam q u, vt est recta z d ad rectam y i. Productę enim rectæ l m, q e occurrant diametris z d, y i in punctis n & π; quoniam vt a c ad f h, ita ostensum est esse a m ad f e, erit alternando a c ad a m, vt f h ad f e; & per diuisionē rationis erit a c ad m c, vt f h ad e h; sed vt a c ad m c, ita est a d ad n d (eò quòd in triãgulo a d c lateri d c parallela sit m n) & vt f h ad e h, ita ob eandem causam est f i ad π i: ergo vt a d ad n d, ita f i ad π i: ergo alternando vt a d ad f i, ita n d ad π i: sed vt a d ad f i, ita z d ad y i; ergo vt z d ad y i, ita n d ad π i: sed rectis n d π i æquales sunt rectæ λ l q u (eo quod figuræ n d λ l, π i u q sint parallelogrammę, & latera eorum opposita sint n d, l λ; π i, q u) ergo vt z d ad y i, ita est l λ ad q u, quod erat ostendendum.

2. Sexti Euc.

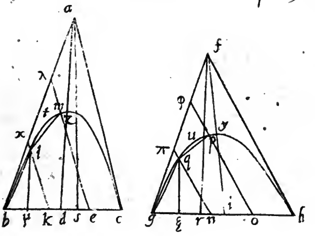
34. primi Euc.

Propositio XXIV.

Iisdem positis ostendendum est segmentum b z c comprehensum sectione conicâ b z c & rectâ b c, esse ad segmentum g y h comprehensum sectione conica g y h & rectâ g h, vt est rectangulum sub b c & sub perpendiculari ex z in b c demissâ, ad rectangulum sub g h & sub perpendiculari ex f in g h demissâ. Item si rectæ b c, g h in quotcunque segmenta proportionaliter secentur, perque intersectiones ducantur parallelæ diametris a d, f i; figuras comprehensas sub portionibus sectionum conicarũ interceptas eiusmodi parallelis, & sub rectâ prædictas portiones subtẽdente esse in ratione eâdem, si portiones conferantur positæ inter parallelas quæ partes rectarum b c, g h analogas continent.

Sint vt in pręcedenti sectiones conicę b z c, g y h ita tangentibus b a c, g f h contentę vt ductis diametris a d, f i occurrentibus rectis b c, g h per tactus ductis, in d & i, & sectiouibus in z & y; sicut a z ad z d, ita sit f y ad y i. Ex a & f demissæ sint perpendiculares a s, f r in re-

p 125



ctas b c, g h; & ipsæ rectæ b c, g h sectæ sint proportionaliter in quotcunque punctis k, e, o, ita vt segmentis b k, k e, e c proportionalia sint segmenta g n, n o, o h; & per extrema duorum k e, n o analogorum ductæ sint k l, e m, n q, o p parallelæ tangentibus a c, f h, iunctæque sint rectæ l m, q p. Dico totum segmentum b z c contentum curuâ b z c & rectâ b c, esse ad totum segmentum g y h contentum curuâ g y h & recta g h, vt rectangulum sub b c, a f ad rectangulum sub g h, f r; & ita etiam esse segmentum l m comprehensum curua l t u & recta l m, ad segmentum q p comprehensum curua k u p & recta q p; & totum segmentum k l t m e ad n q u p o.

Productæ rectæ l k, m e, q n, p o occurrant tangentibus a b, f g in punctis x, λ, π, φ, atque ex punctis l, q demittantur ad b c, g h perpendiculares l μ, q ξ. Quoniam in triangulo a b c lateri a c parallela est λ e; vt b a, λ a, ita erunt b c, ec. Eandem ob causam vt g f, φ f ita erunt g h, o h, sed vt b c, e c ita ponimus esse g h, o h: ergo vt a b, a λ, ita g f, f φ, & alternando vt a b, g f, ita a λ, f φ. Hoc etiam pacto ostendetur vt a b, f g, ita esse a x, f π, & ita de alijs segmentis rectarum a b, f g interceptis inter concursum tangentium & parallelas ipsis a c, f h per quæcunque puncta rectarum b c, g h ductas, in quibus punctis ipsæ b c, g h proportionaliter secentur: ergo per præcedentem vt a c, f h, ita l k, q n, & m e, p o, eademque est demonstratio de alijs parallelis ex tradita methodo ductis: ergo per scholium octauæ propositionis huius libri proportio figuræ b m z c d ad figuram g p y h o, & figuræ k l t m e ad figuram n q u p o componitur ex ratione basium b c, g h (quæ est eadem quæ basium k e, n o) & perpendicularium μ l, q ξ (quæ est eadem quæ perpendicularium a s, f r eò quod triangula c a s, κ l μ sint similia cùm habeant latera parallela, & triangula etiam h f r, n q ξ sint eadem de causa similia) sed rectanguli sub b c, a s ad rectangulum ſub g h, ſi proportio componitur ex rationibus laterum b c, g h, a ſ, f r: ergo vt rectangulum ſub b c, a ſ ad rectangulum ſub g h, f r, ita eſt ſegmentum b z c ad ſegmentum g y h, & ita etiam eſt ſegmentum κ l t m e ad n q u p o.

Rurſus quoniam trapezia *k* l m e, n q p o habẽt latera parallela proportionalia (nam vt k l ad n q, ita m e ad p o) proportio illorum componetur per tertiam huius libri ex rationibus perpendicularium l μ, q ξ, & baſium *k* e, n o: ergo trapezia κ l m e, n q p o ſe habent vt rectangula ſub b c, a ſ, & ſub g h, f r: ſed ita etiam ſe habent ſegmenta k l t m e, n q u p o: ergo reſidua l t m, q u p habent ſe vt tota, hoc eſt, vt ſe habent rectangula ſub b c, a ſ, & ſub g h, f r, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quòd ſi ſegmenta b l, b q ſumpta fuiſſent; ductis rectis b l, g q idem ſequeretur, quia triangula b l k, g q n habent rationem compoſitam ex iiſdem rationibus ex quibus trapezia *k* l m e. n q p o vt demonſtratum extat apud Clauium in ſcholio propoſitionis vigeſimæ tertiæ ſexti Euclidis, prout diximus in tertia propoſitione huius libri.

Propositio XXV.

Si figuræ menoideos arcus ita ſubtendantur lineis rectis, vt ſegmentum vel ſegmenta arcûs interiùs caui ſint æqualia ſimul ſegmento vel ſegmentis arcûs exteriùs caui, & nullam ſpatij partem habeant communem, ipſa figura eſt æqualis rectilineo eiuſmodi ſegmentorum baſibus, & alijs figuræ lateribus, ſi quæ habet, non curuis contento. Si autem vt numerus ſegmentorum vnius arcûs inter ſe æqualium, ad numerum ſegmentorum alterius arcûs inter ſe æqualium; ita ſit reciprocè ſegmentum vnum huius arcûs, ad vnum illius; ſegmenta vnius arcus ſimul ſumpta erunt æqualia ſegmentis alterius ſimul collectis.

Sit

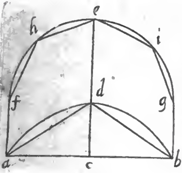
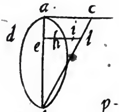
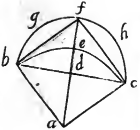
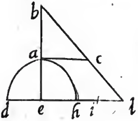


figura-prop-26



p-129





Sit prima appositarum figura menoides, siue conuexo-caua a f e g b d contenta cauo interiùs arcu a e i g, & conuexo interiùs a d b, rectisque a f, g b. In arcu f e g subtensæ sint rectæ f h, h e, e i, i g, & in arcu a d b rectæ a d, d b, sintque segmenta f h, h e, e i, i g simul æqualia segmentis a d, d b. Dico figuram conuexocauam a f e g b d esse æqualem rectilineo a f h e i g b d, si nimirum segmenta superiora sint tota extra inferiora, rectæque f a, g b arcui a d b non occurrant nisi in punctis a, b.

Quoniam enim spatia f h, h e, e i, i g simul æquant spatia a d, d b simul sumpta, ergo addito communi a f h e i g b d contento sub rectis a f, f h, h e, e i, i g, & sub curuâ d ba, erit rectilineũ a f h e i g b d æquale figuræ menoidi a f e g b d.

Rursus vt numerus segmentorũ æqualiũ inuicem f h, h e, e i, i g, ad numerum segmentorum a d, d b æqualium inuicem, ita sit segmentum a d ad segmentum f h. Dico segmenta inferiora simul esse æqualia segmentis superioribus simul sũptis. Sint f h, h e totidẽ numero segmenta quot sunt a d, d b: ergo vt numerus segmentorum superiorum ad numerum segmentorum inferiorum, ita erunt segmenta f h, h e, e i, i g ad segmenta f h, h e. (Sunt enim singula segmenta inter se æqualia, ac proinde rationem habent inter se quam numeri quibus numerantur) sed, vt numerus segmentorum superioris arcûs ad numerum segmentorum inferioris arcûs, ita est segmentum a d ad segmentum f h, & ita segmentũ d b ad segmentũ h e: ac proinde ita sunt simul segmenta a d, d b, ad totidem segmenta f h, h e: ergo vt segmenta f h, h e, e i, i g simul, ad segmenta f h, h e simul; ita sunt segmenta a d, d b simul, ad segmenta eadẽ f h, h e simul; ergo segmenta f h, h e, e i, i g simul, sunt æqualia segmentis a d, d b simul, quod erat ostendendum.

9. quinti Euc.

COROLLARIVM I.

Si segmentum fh sit simile segmento ad quantum ad diametri diuisionem simul & inclinationem, & si vt quadrata diametrorum, ita sint reciprocè numeri segmentorum, segmenta vnius arcûs simul sumpta erunt æqualia segmentis alterius simul sumptis. Quoniam enim quando sunt similia quantum ad diametri sectionem & inclinationem, se habent vt quadrata diametrorum per tertium corollarium vigesimæ secundæ huius; & quoniam si vt quadrata diametrorum ita reciprocè sunt numeri æqualium segmentorum, segmenta vnius arcûs sunt æqualia simul sumpta segmentis alterius simul etiã sumptis per præsentem propositionem: ergo si vt quadrata diametrorum, vel semidiametrorum ita sint reciprocè numeri prædicti, segmenta vnius arcûs simul erunt in isto casu æqualia segmentis alterius simul etiam sumptis.

COROLLARIVM II.

Hinc patet quo pacto Hippocratis Chij celebres illæ lunulæ siue menisci demonstrentur esse æquales rectilineo spatio. Sit enim vt in adiectorum schematum secundo, semicirculus bfc, cuius centrum d, diameter bc. Ex centro d excitata sit

perpendicularis d t ad diametrum b c; semidiametroque d f abscissa sit æqualis d a: iungantur rectæ b a, c a, b f, f c; & centro a interuallo rectæ a b describatur arcus b e, transiens per c; sunt enim b a, a c æquales, eò quòd anguli ad d sint recti, ideoque æquales; Ostendendum est lunulam b g f h c e esse æqualem rectilineo b f c contento rectis b f, f c, c b. Quoniam rectæ f d, d a sunt æquales, erit
31. tertij Euc. f d a diameter circuli cuius centrum d, semidiameter d c; ergo anguli a b f, a c f sunt recti, vt pote in semicirculo existẽtes; ergo rectæ b f, f c tangunt circulum b e c in b & c; ergo segmẽta b g f, f h c nullam
16. eiusdẽ spatij partem habent communem cum segmentis b e, e c. Rursus quoniam anguli b d f, b a c ad centra d & a circulorum b f c, b e d sunt æquales; arcui b g f similis erit arcus b e c: ergo cùm segmenta b g f, b e c sint omnino similia, erunt per corollarium tertium propositionis vigesimæ secundæ huius ipsa segmenta inter se vt quadrata semidiametrorum a c, d f
ex scholio 20. tertij. Euc. sed eiusmodi quadrata sunt in ratione duplâ: ergo segmentum b e c est duplum segmenti b g f: sed segmento b g f est æquale segmentum f h c, cùm super rectis b f, f c æqualibus sint constituta; ergo duo simul segmenta b g f, f h c sunt æqualia segmento b e c; ergo per præsentem,
24 tertij Euc. lunula b f c e contenta arcubus b f c, b e c

eſt æqualis rectilineo bfc contento re-ctis bf, fc, bc.

PROPOSITIO XXVI.

Datâ rectâ, & in eâ productâ dato quouis puncto, in quo recta alia bifariam ſecetur, deſcribere hyperbolã cuius data recta ſit diameter, & alia ſit ordinatim applicata. Item datâ rectâ, & intra ipſius extrema puncto, in quo recta alia bifariam ſecetur, deſcribere ellipſim cuius data recta ſit diameter.

Data ſi recta a b, & extra vel intra illam datum punctum e, in quo recta d h bifariam ſecetur, oporteatque exequi quod proponitur.

Vt rectangulum a e b ad quadratum e h ita fiat recta a b ad rectam a c perpendicularem ad rectam b a; & data diametro b a, lateréque recto a c, deſcribatur hyperbola vel ellipſis cuius ordinatim applicatæ ad diametrum a b ſint parallelæ ad rectam d e. Dico hyperbolam vel elli-

53. vel 54 primi Conic.

21. primi Conic.

pſim tranſire per d & h. Si enim non occurrit rectæ e h in h, occurrat in i: ergo rectangulũ a e b ad quadratũ e i erit vt recta a b ad rectam a c: ſed ita etiam eſt ex conſtructione rectangulum a e b ad quadratum e h: ergo quadratum e h eſt æquale quadrato e i, pars toti quod eſt abſurdum

Quòd ſi a e diameter ſit data, & recta d h in eam incidens, & bifariam in occurſu e ſecta, deſcribique debeat parabola cuius vertex ſit a, latus rectum eiuſmodi parabolæ erit e l, ſi vt a e ad e h, ita fiat e h ad e l, vt ex vigeſima primi conicorum apertum eſt; ac proinde noto latere recto, vertice, diametro, & poſitione ordinatim applicatarum, deſcribetur parabola per quinquageſimam ſecundam eiuſdem libri.

ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM.

LIBER II.

Qui eſt de librâ diuulsâ à materie, quatenus per eam indagatur proportio grauium vtrinque certo quodam modo appenſorum.

DEFINITIONES.

1. Libram ſiue iugum voco cum Archimede lineam horizonti æquidiſtãtem ex vno puncto ſuſpenſam, ex qua grauia vtrinque pendent. 2. Punctum illud à quo ſuſpenditur,

vocatur libræ centrum. 3. Brachium libræ, illam libræ portionem intelligo, quæ à centro producta sustinet ab extremo sui puncto graue aliquod appensum. 4. Linea directionis, siue perpendiculum dicatur recta quæuis ad libram perpendicularis. 5. Graue aliquod de libra pendêre censetur cui vel per se cohæret, vel connectitur per lineam directionis.

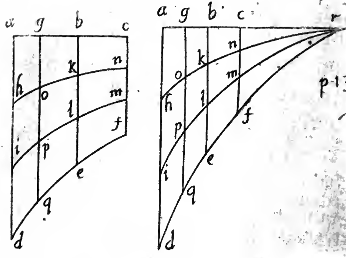
Cætera quæ ab Archimede vel explicantur, vel postulantur in libris de æquiponderantibus hîc sumimus tanquam concessa; & satis nota. Quid sit centrum grauitatis, eius libri prout hodie extant vulgati non explicant; Eutocius tamen centrum grauitatis planæ figuræ dicit ab illo definiri in primo de æquiponderantibus libro *illud punctum per quod vnicum si sustineatur, postquam collocata fuerit in situ horizonti parallelo, manet in eodem situ, nec in vllam vergit partem.* Centrum grauitatis solidi ex Pappo definit Commandinus *punctum quoddam intra corpus positum, à quo si graue appensum mente concipiatur, dum fertur quiescit; & seruat eam, quam*

Initio libri de centro grauit. solid.

in principio habebat positionem: neque in ipsa latione circumuertitur. Hæc satis præsenti instituto erunt; nec putamus necessarium transferre huc quæ de istiusmodi definitionibus centri grauitatis scripsimus in libello de libræ principijs.

PROPOSITIO I.

Sit trapezium mixtum a c f d, cuius latera a d, c f sint rectæ lineæ & parallelæ, d f verò & a c sint curuæ vel rectæ; vel vna earum curua, altera recta; quibus adiunctæ sint quotcunque aliæ i m, h n ita inuicem & ad a c constitutæ, vt quotcunque g q, b e ad rectam a d parallelæ secuerint lineas a c, h n, i m, d f; sicut recta a h ad rectas a i, a d ita sit g o ad g p, g q, & sic de alijs; vt autem recta a h ad a i, a d; ita sit trapezium a o ad trapezia a p, a q; & ita etiam sit trapezium g k ad trapezia g l, g e, & sic de alijs, deque ipſo toto trapezio a c n h ad trapezia a c m i, a c f d. Dico vt recta a h ad h i, ita eſſe trapezium a c n h ad trapezium h n m i; & trapezium g h ad trapezium o i: & trapezium g k ad trapezium o l, & ſic de alijs; Item vt eſt recta h i ad i d; ita eſſe trapeziũ h n m i ad trapezium i m f d; trapezium o i ad p d; o l ad p e, & ſic de alijs.



p. 138

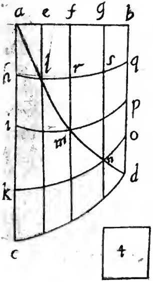
Quoniam enim vt recta a h ad a i, ita est trapezium a c n h ad trapezium a c m i; & trapezium a o ad a p; & trapezium g k ad g l, & sic de alijs; erit diuidendo vt recta a h ad h i, ita trapezium a c n h ad trapezium h n m i; & trapezium g h ad trapezium h p; & sic consequenter. Rursus quoniam vt recta a i ad a d, ita est trapezium a c m i ad a c f d; & trapezium a p ad a q, & g l ad g e &c. erit diuidendo vt recta a i ad i d, ita trapezium a m ad i f, & a p ad p d, & g l ad l q &c. Et quoniam vt spatium i q ad i g, ita recta i d ad i a, & vt spatium i g ad i o, ita recta i a ad h i, erit ex æquo vt spatium i q ad i o, ita recta i d ad i h. Similiter ostendetur esse vt spatium i f ad i n, ita rectam i d ad i h.

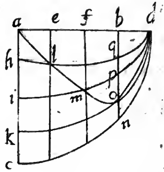
Hoc ipsum patet si lineæ a c, h n, i m, d f concurrant in vnum punctum r, & constituant triangulum mixtum a d r, vt in adscriptarum figurarum alterâ.

Propositio II.

Sit trapezium mixtum a b c d cuius lineæ a c, b d sint rectæ & parallelæ; lineæ verò c d, a b sint vel ambæ curuæ, vel ambæ rectæ, vel vna earum recta, altera curua; & diameter a d curua vel recta indiscriminatim. Sit item linea a c diuisa in quotcunque partes inuicem æquales a h, h i, i k, k c, perque extrema partium ductæ sint curuæ h q, i p, k o lateri a c proportionaliter secantes rectam b d, ipsique parallelas, nec non spatium a b d c in trapezia a q, h p, i o, k d: curuæ autem h q, i p, k o occurrant diametro in vno tantùm singulæ puncto, & per illa puncta ducantur ipsi a c parallelæ e l, f m, g n. Dico trapezia a l, l m, m n, n d circa diametrum a d consistentia se habere simul ad totum trapezium a d, vt se habet recta a h ad totam a c.

Quoniam enim spatia a q, h p, i o, k d se habent vt rectæ a h, h i, i k, k c, & ipsæ rectæ sunt æquales, erunt spatia





p·141·

etiam æqualia. Et quoniam ex anteriore propositione vt recta a h ad h i, ita est spatium e r ad l m, & vt a h ad i k, ita est spatium f s ad n m, & vt a h ad k c, ita est spatium g q ad n d, cùm a h recta sit æqualis rectis h i, i k, k c singulis seorsum, erit trapezium e r æquale trapezio l m, & trapezium f s trapezio m n, & trapezium g q trapezio n d: ergo addito communi a l, trapezia a l, l m, m n, n d erunt simul æqualia trapezijs a l, e r, f s, g q: sed ista sunt æqualia toti a q, totumque a q se habet ad trapezium a d, vt recta a h ad a c: ergo vt recta a h ad a c, ita se habent trapezia circa diametrum a d consistentia ad totum trapezium a d.

Quòd si, vt in secunda figura, sit triangulum a d c mixtum, cuius latus a c sit linea recta & omnes lineæ rectæ diuidentes vt rectam a c & parallelas, ita triangulum a d c, concurrant in punctum d, omnesque quotquot hanc proprietatem habentes duci possunt secent semel curuam a o d, (quod fieri posse etiamsi c d sit curua patebit ex quarta huius) idem ostendetur, nimirum trapezia a l, l m, m o vnà cum triangulo o d n esse simul æqualia trapezijs a l, f l, f q & triangulo b q d, ac proinde figuras circa lineam a o d consistentes se habere ad spatium a d c, vt rectam a h ad rectam a c.

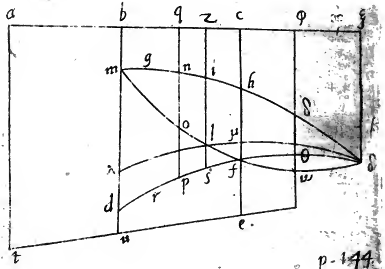
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est dato quo libet spatio metiente vel trapezium a d vt in prima figura, vel vt in secunda figura, triangulum a d c, si vt trapezium vel triangulum ad spatium t, ita fiat recta a c ad a h, quæ metitur rectam a c, abscissisque h i, i k, κ c ipsi a c æqualibus, intelligantur duci per h, i & k lineæ h q, i m &c. occurrẽtes lineæ a m d in vno tantùm puncto, figuras circa lineam a m d consistentes esse simul æquales spatio t.

PROPOSITIO III.

Sit recta a c bifariam in b secta à rectâ d b, cui per c ducta sit parallela c f. Sint item tres lineæ g i, o l, r ſ ita diſpoſitæ vt rectis b u, c f occurrant; & ſi q p parallela rectæ b d ducta vtcunque fuerit, ſicut erit recta a b ad b q portionem rectæ a c, interceptam recta b u & q p, ita ſit n p portio eiuſdem q p intercepta lineis g i; ſr ad portionem n o interceptam lineis g i, o l. Oſtendendum eſt primò lineas o l, r ſ conuenire in aliquod punctum rectæ c f.

Linea g i occurrat rectis b d, c f in punctis m & h, linea verò r ſ in punctis d & f. Si igitur linea o l non occurrit rectæ c f in f, occurrat ſi fieri poteſt in e. Quoniam vt a b ad b c, ita ponitur eſſe h f ad h e: cùm a b, b c ſint æquales,



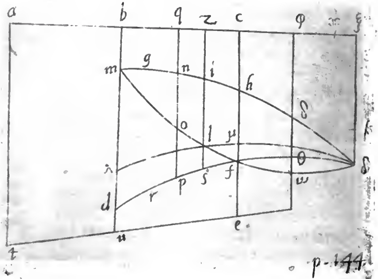
erunt hf, he æquales, pars & totum. Non ergo linea o l occurrit rectæ c f, in alio puncto quam in f, quod erat primo loco ostendendum.

Iisdem positis ostendendum est secundò lineam o l occurrere lineæ g i in puucto m, in quo coire ponuntnr lineæ g i, b d. Quoniam vt recta a b siue b c ipsi a b æqualis ad b q, ita, ducta vtcunque recta q p æquidistante ipsi b d, ponitur esse recta n p ad n o, ergo per diuisionem raionis vt recta b c ad q c, ita erit n p ad o p. Ex b c abscindatur c x ipsi b c seu b a æqualis: quoniam ergo recta x b secta est

est bifariam in c; & per c, b, ductę sunt æquidistantes c f, b d occurrentes lineis m h, d f in punctis h, f, m, d; lineę verò g i, o l, r s ita sunt dispositæ, vt quacunque q p æquidistãte ipsi b d ductâ, sicut recta x c ad c q, ita sit n p intercepta inter lineas r s, m h, ad portionem p o interceptam inter lineas r s, l o; ipsæ l o, g i occurrent sibi in eodem puncto rectæ b d, per ea quæ primo loco ostendimus; cùm ergo g i linea occurrere ponatur rectæ b d in m; linea l o occurret eidem rectæ b d in eodem puncto m, quod erat secundo loco demonstrandum.

Iisdem positis ostendendum est tertiò si lineæ g i, r s conueniant in aliquod aliud punctum extra rectam c f, vt in δ, lineam l o conuenire quoque in idem punctum δ. Per δ agatur δ ξ parallela rectæ c f, occurrens rectæ b c in ξ. Si g i linea non occurrit lineæ ξ δ in puncto δ, occurrat, si fieri potest, in puncto β. Quoniam vt b ξ recta ad b a, ita ponitur esse β δ intercepta inter lineas l o, g i, ad interceptam inter lineas g i, r s; conficitur inter lineas g i, r s aliquam portionem rectæ ξ δ interponi, quod est absurdum; cùm ponantur g i, l o conuenire in punctũ δ: non ergo linea l o occurrit rectæ ξ δ nisi in puncto δ; quod erat tertio loco demonstrandum.

Iisdem positis ostendendũ est quartò quæcũque linea λ μ ducta fuerit secans propor-



erunt hf, hc æquales, pars & totum. Non ergo linea ol occurrit rectæ cf, in alio puncto quam in f, quod erat primo loco ostendendum.

Iisdem positis ostendendum est secundò lineam ol occurrere lineæ gi in puucto m, in quo coire ponuntnr lineæ gi, bd. Quoniam vt recta ab siue bc ipsi ab æqualis ad bq, ita, ducta vtcunque recta qp æquidistante ipsi bd, ponitur esse recta np ad no, ergo per diuisionem rationis vt recta bc ad qc, ita erit np ad op. Ex bc abscindatur cx ipsi bc seu ba æqualis: quoniam ergo recta xb secta

est

eſt bifariam in c; & per c, b, ductę ſunt æquidiſtantes c f, b d occurrentes lineis m h, d f in punctis h, f, m, d; lineę verò g i, o l, r ſ ita ſunt diſpoſitæ; vt quacunque q p æquidiſtãte ipſi b d ductâ, ſicut recta x c ad c q, ita ſit n p intercepta inter lineas r ſ, m h, ad portionem p o interceptam inter lineas r s, l o; ipſæ l o, g i occurrent ſibi in eodem puncto rectæ b d, per ea quæ primo loco oſtendimus; cùm ergo g i linea occurrere ponatur rectæ b d in m; linea l o occurret eidem rectæ b d in eodem puncto m, quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

Iiſdem poſitis oſtendendum eſt tertiò ſi lineæ g i, r s conueniant in aliquod aliud punctum extra rectam c f, vt in δ, lineam l o conuenire quoque in idem punctum δ. Per δ agatur δ ξ parallela rectæ c f, occurrens rectæ b c in ξ. Si g i linea non occurrit lineæ ξ δ in puncto δ, occurrat, ſi fieri poteſt, in puncto β. Quoniam vt b ξ recta ad b a, ita ponitur eſſe β δ intercepta inter lineas l o, g i, ad interceptam inter lineas g i, r ſ; conficitur inter lineas g i, r s aliquam portionem rectæ ξ δ interponi, quod eſt abſurdum; cùm ponantur g i, l o conuenire in punctũ δ: non ergo linea l o occurrit rectæ ξ δ niſi in puncto δ; quod erat tertio loco demonſtrandum.

Iiſdem poſitis oſtendendũ eſt quartò quæcũque linea λ μ ducta fuerit ſecans proportionaliter parallelas ad rectam b d omnes inter g i & r s interceptas, illam incurrere in lineam l o in vnâ tantùm parallelâ ad rectam b d. Vt recta m d ad m λ, ita fiat a b recta ad b z, & per z agatur recta z i l s parallela rectæ b d, occurrens in z, i, l, s, lineis n h, o f, λμ, d f; quoniam vt m d ad m λ, ita est s i ad interceptam lineis g h, m f; & ita etiam est s i ad i l (eo quod linea λ μ proportionaliter secet parallelas m d, i s) ergo intercepta lineis g h, m f est æqualis lineæ i l: ergo lineæ m f, λ μ occurrunt sibi in puncto l.

9 quinti Euc.

Iam ostendendum superest lineam λ μ non occurrere lineæ l o in alio puncto extra parallelam z i sumpto. Occurrat, si fieri potest, in puncto o; & per o acta sit q m o p parallela rectæ b d, secans in q, n, p, lineas a b, m i, d s. Quoniam d m, n p, parallelę, sunt interceptæ lineis d s, λ μ, m i, proportionaliter secantibus omnes parallelas, eisque occurrunt in punctis n, o, p; vt d m ad m λ, hoc est vt a b ad b z, ita erit p n ad n o: & quoniam recta n p intercipitur etiam lineis d s, m l, m i; vt a b ad b q, ita erit p n ad n o: ergo vt p n ad n o, ita est a b ad b z; & ita etiam est a b ad b q: ergo b q, b z sunt æquales pars & totum, quod est absurdum: ergo linea λ μ non conueniet cum l o in alio puncto sumpto extra parallelam z i, quod erat demonstrandum vltimo loco.

COROLLARIVM I.

Ex his manifestum est nihil referre vbicunque sit recta a b, loco enim illius eodem demonstrationis tenore potest sumi quæcunque t e intercepta parallelis a t, b d, c f. Imo nihil etiam refert ad vim demonstrationis si lineæ g i, o l, r s fuerint rectæ vel omnes, vel earum vna aut altera; & tunc officium rectæ a b præstari poterit, quantum ad demonstrationis huius energiam, per quamlibet illarum rectarum.

COROLLARIVM II.

Ex his apertum est lineam o l vltra pùnctum f productam, non cadere ampliùs intea lineas m i, d s; sed inter lineas m i, o l cadere ipsam d s. Sumatur enim vltra c quodlibet punctum φ in linea a c, & per φ agatur recta φ ω parallela rectæ b d, occurrens lineis g n, o l, p s in punctis δ, ω, θ; quoniã vt a b ad b φ maiorẽ, ita est δ θ ad δ ω, erit δ ω maior quã δ θ: ergo cum punctum ω sit in linea l o, punctum θ in lineâ r s, erit linea r s inter lineas g i, o l vt propositum fuit.

COROLLARIVM III.

Ex his quoque manifestum est si recta m d sit asymptotus respectu curuæ r s demonstrationem qua ostendimus lineas g i, o l concurrere ad punctum m non habere locum in dicto casu, in quo linea r s non occurrit lineæ m d, vt ex primâ secundi conicorum constat, & ex ipso asymptoti nomine, quod *incoincidentem* reddit Interpres Eutocij.

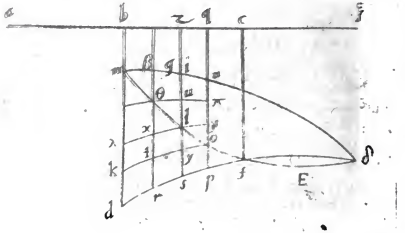
4. secundi de sphæra & cyl.

COROLLARIVM. IV.

Ex demonstratis facile etiam infertur, quæcunque linea $\lambda \mu$ ducta fuerit non transiens per m communem concursum linearum g i, o l, & secans proportionaliter parallelas ad rectam b d omnes inter lineam g i & r s interceptas, & incurrens lineæ m o in puncto o concursu parallelæ q p; ipsam $\lambda \mu$ non occurrere prædictæ parallelæ p q in alio insuper puncto; nisi ipsa q p incurreret in lineam g i in puncto q, & in alio insuper puncto; inque lineam r s in puncto s, & in alio præterea puncto.

PROPOSITIO IV.

Iisdem positis si rectæ m d parallela quæcunque q n o p ad partes ξ sumatur, occurrens lineis g i, m l, r ſ in punctis n, o, p; & vt a b recta ad b q interceptam inter b d, q p; ita fiat m d ad m k, & in lineâ m d inter m & k designetur quoduis punctum λ, perque illud ducta intelligatur linea λ μ secans proportionaliter omnes ad rectam m d parallelas ipsâ interceptas & lineis g i, r ſ. Dico primò lineam λ μ occurrere portioni lineæ d r p illi quæ inter parallelas b d, q p iacet: k y autem ductam per κ, occurrere lineæ m l in puncto o.



Quoniã enim parallelæ ſunt m κ, n o; & vt p n ad n o, ita eſt ab ad b q ex hypotheſi; atque vt a b ad b q, ita etiam eſt m d ad m k; ergo vt p n ad n o, ita eſt m d ad m *k*: ſed linea *k* y ita occurrit parallelis m d, n p, vt ſecet eas proportionaliter; ergo vt m d ad m *k*, ita eſt n p ad ipſius n p portionem interceptam lineis m g, *k* y; ſed ita etiam eſt eadem n p ad portionem n o interceptam lineis m g, k y; ergo linea k y tranſibit per o communem ſectionem rectæ q p & lineæ m l, qnod erat oſtendendum ſecundo loco.

Rurſus vt m d recta ad m λ, ita

fiat recta a b ad b z. Quoniã vt b z ad a b, ita m λ ad m d; & vt a b ad b q, ita m d ad m k; ergo ex æquo vt b z ad b q, ita m λ ad m *k*; Sed m λ est minor quam m *k*, cùm punctum λ sumptum sit inter m & *k*: ergo b z erit minor quàm b q; cadit ergo punctum z inter b & q.

Quoniam ergo punctum z cadit inter b & q; si agatur per z recta z s occurrens lineis g i, l o, d p in punctis i, l, s vt a b ad b z, ita erit i s ad i l: sed vt a b ab b z, ita est m d ad m λ: ergo vt m d ad m λ, ita est i s ad i l: ergo cùm linea λ μ secet parallelas m d, i s proportionaliter modo supra explicato, secabit rectam i s in l: sed l est punctum in linea m o iacens inter parallelas m d, q o: ergo linea λ μ occurrit lineæ m o, in puncto quod iacet inter m & o, quod erat ostendendum primo loco.

Ex his manifestum est si parallela q p transeat per f vel δ, vel per quodcunque aliud punctum in lineâ d r s designatum, vbicunque tandem sit, eandem esse demonstrationis vim. Manifestum quoque est lineam λ μ non occurrere lineę l o nisi in vna tantum parallela ad rectam m d, iuxta demonstrata in pręcedenti propositione: manifestum pariter est, si linea z s transeat per f, puncta k & d sibi congruere; cùm vt a b ad b c ita ponatur esse m d ad m *k*, & a b, b c sint ęquales. Si ergo puncta f & c sibi congruant, & recta z s transeat per f, existet triangulum illud mixtum quod possibile esse diximus sub finem propositionis secundæ huius libri; quodque ibidem descriptum dedimus.

Iisdem permanentibus si inter n & o sumatur quoduis punctum μ, & per illud ducatur linea $\mu\lambda$, proportionaliter secans parallelas modo supra declarato. Dico secundò lineam $\mu\lambda$ occurrere lineæ m o in aliquo puncto inter parallelas m k, n o posito. Quoniam enim vt a b, b q, ita n p, n o; si vt n o ad n μ, ita fiat b q ad b z, erit ex æquo vt a b ad b z, ita n p ad n μ; sed vt n p ad n μ, ita est i f ad i l, eò quòd $\lambda\mu$ proportionaliter secet parallelas n p, i f: ergo punctum l est communis sectio linearum m o, $\lambda\mu$: iacet autem inter parallelas b d, q o; quia vt vt n o ad n μ minorem, ita facta est recta b q ad b z: ergo b z est minor quàm b q: ergo linea z f eiusque punctum l cadit inter parallelas b d, q p, quod verum est etiamsi puncta d & m in vnum conueniant.

Iisdem permanentibus si inter b & q sumatur quoduis punctum ω, & per illud parallela $\omega\beta\theta$ t r ducatur, occurrens in β, θ, t, r, lineis m g, m o, K o, d f, perque θ communem sectionem parallelæ $\omega\beta$ & lineæ m o ducatur linea $\theta\pi$ proportionaliter secans, & occurrens rectæ n p in π: & inter puncta π; o, vel t, θ sumatur quodlibet punctum μ vel x, perque illud ducatur proportionaliter secans μx. Dico tertiò lineam μx occurrere lineæ θo inter parallelas ωr, qp.

Quoniam enim vt ab ad bω, ita est rβ ad βθ; & vt rβ ad βθ, ita est pn ad nπ, eò quòd parallelæ βr, np proportionaliter secentur per lineam πθ; ergo vt ab ad bω, ita est pn ad nπ. Rursus quoniam vt bq, ab, ita no, pn; & vt ab, bω, ita pn, nπ; ergo ex æquo vt bq, bω, ita no, nπ. Iam vt no, nμ ita fiant bq, bz; & per z agatur parallela zf occurrens lineis mg, θπ, xμ, to, df, in punctis i, u, l, y, f. Quoniam vt bω, bq, ita ostensum est esse nπ, no; & bq, bz iussimus fieri vt no, nμ: ergo ex æquo vt bω, bz, ita sunt nπ, nμ: sed nμ est maior quàm nπ (cum μ sumptum sit inter π & o) ergo bz est maior quàm bω; ergo inter b & z cadit punctum ω. Rursus quoniam vt no ad nμ, ita facta est bq ad bz; cùm no sit maior quàm nμ erit bg maior quàm bz: ergo punctum z cadit inter ω & q; ergo & parallela zf iacet inter parallelas ωr, qp: ergo punctum l cadit inter parallelas βr, np.

11. quinti Euc.

Rursus quoniã vt ab, bq, ita np, no; & bq, bz fieri iussimus vt no, nμ: ergo ex æquo vt ab, bz ita np, nμ: sed vt np, nμ ita sũt fi, il (eò quod lineæ gn, xμ, rp proportionaliter secent parallelas n p, i ſ) ergo vt a b , b z, ita i ſ , i l : ſed vt a b,b z, ita eſt i ſ intercepta lineis β g n, r ſ p ad interceptam lineis β g n, m θ o: ergo recta i l eſt æqualis portioni rectæ i ſ terminatæ lineis m i, m θ o : ergo punctum l eſt in lineâ m θ o : ergo linea μ x ſecat lineam θ o intra parallelas θ t, π o, quod erat tertio loco demonſtrandum. Demonſtratio ſimili modo procederet ſi poneremus inter θ & t ſumptum eſſe quoduis punctum x.

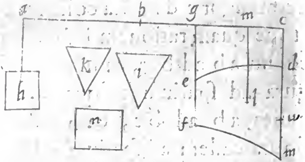
Conſectaria ſub finem aſſertionis primæ adiuncta, quæ ſecundæ & tertiæ aſſertioni conueniunt, hîc non repetimus; quoniam res eſt ſatis clara percipienti hactenus dicta.

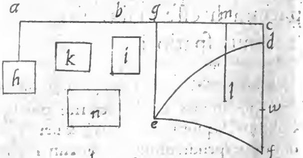
Propositio V.

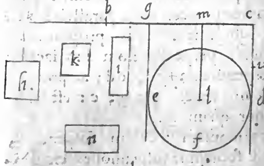
Sit libra a c ſuſpenſa ex b, & ex quibuſcunque rectæ b c punctis g, c demiſſæ ſint ad b c directionis lineæ g e, c d, ex quibus pendeat quæuis figura d f e, ita collocata intra perpendicula, vt ipſam vel tangant vel alicui eius lateri congruant: ſpatium autem h ſuſpendatur ex a, & æquiponderet figuræ d f e ita collocatæ; atque quam rationem habet brachium a b ad b g, eam habeat figura ad ſpatium k; quam verò habet a b ad b c, eam habeat figura eadem ad ſpatium i. Dico ſpatium h eſſe maius ſpatio k, & minus ſpatio i.

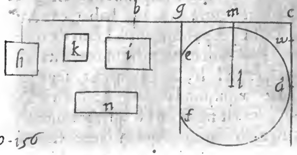
Sit enim l centrum grauitatis figuræ d f e (quæ multis modis deſcribi poteſt, ex quibus aliquot ſubiecimus) & per l agatur l m perpendiculum. Quoniam l centrum grauitatis iacet intra parallelas g e, c d, vt ſub finem huius propoſitionis oſtendemus, perpendiculum l m iacebit inter perpendicula g e, c d; ac proinde punctum m cadet inter g, c: eſt ergo g m minor quàm g c.

Rurſus quoniam ſi ex m ſuſpendatur figura, & ſoluantur ſuſpenſiones ex g & c, manebit figura vt nunc habet ex Archimede in propoſitionem ſextam de quadraturâ parabolæ; vt a b ad b m, ita erit figura d f e ad h, ex ſextâ aut ſeptimâ primi de æquiponderantibus: ſed vt a b ad b g, ita eſt figura d f e ad ſpatium k; eſt autem b g minor quàm b m: ergo k eſt minus quàm h. Item vt a b ad b c, ita


a
b
g
m
c
d
e
l
f
w
m
h
k
i
n


a
b
g
m
c
d
h
k
i
l
n
w
e
f


b
g
m
c
w
k
i
h
e
l
d
f
n


b
g
m
c
w
h
k
i
e
l
d
n
f

p-156

figura d f e ad i; est autem b c maior quàm b m: ergo & spatium i est maius spatio h, quod erat ostendendum.

Quòd si libra suspensa intelligatur ex g iisdẽ manentibus, atque vt a g ad g c, ita fiat figura d f e ad spatium n: manifestum est spatium h esse minus spatio n: nam vt a g ad g m, ita esse figuram d fe ad h ostensum est: sed eadem figura ponitur esse ad n, vt est recta a g ad g c: ergo cùm g c sit maior quàm g m, erit n maius quã h.

Restat vt ostendamus l centrum grauitatis iacêre inter perpendicula g e, c d, siue sit intra figuram e f d, siue extra ipsam. Si enim non est intra parallelas g e, c d erit vel in alterâ earum, vel extra vtramque. Sit itaque, si fieri potest, ω in alterâ earum centrum grauitatis figuræ f d e. Quoniam centrum grauitatis figuræ planæ ex Archimede (vt ait Eutocius in primam propositionem libri primi de æquiponderantibus) est *id ex quo suspensa manet æquidistans horizonti*, si intelligamus figuram e f d fieri parallelam horizonti, & suspensam ex vnico puncto ω liberè pendere, manebit in eodem situ per dictam definitionem, quod est euidenter falsum, cùm si per centrum grauitatis ducatur quælibet recta, figuram diuidat in duas partes hinc & inde sibi inuicem æquiponderantes: atqui linea c d per ω centrum grauitatis ducta ex vnâ parte habet integram figuram, ex alia nihil, quod ipsi æquiponderare possit : ergo figura f d e inclinabitur ad partes e, nec manebit parallela horizonti. Multo minùs maneret eidem horizonti parallela si punctum ω esset extra parallelas g e, c d, vt apertum est: cadet ergo centrum grauitatis inter parallelas g e, c d.

COROLLARIVM.

Ista propositio, vt patet, habet locum in solidis spatijs, si nimirum spatium e d m f intelligatur esse solidum inter plana per g f, c m ducta & parallela constitutum modo prædicto : & spatia h, k, i, ponantur esse solida.

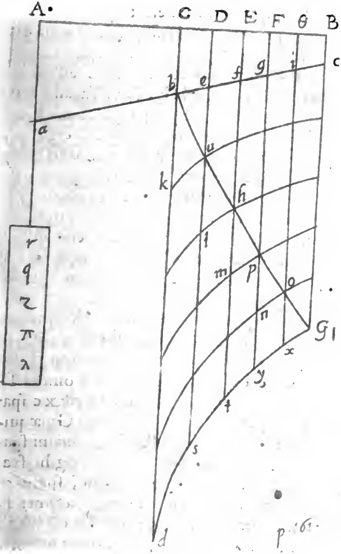
PROPOSITIO VI.

Sit libra A B suspensa ex C, ad quam ex A, C, B incidant perpendicula a A, b C, B c, quorũ b C, B c sustineant quamcunque figuram b d G c coaptatam intra ipsas iuxta præscriptum propositionis præcedentis ; latera b C, d G sint lineæ rectæ vel curuæ ;

linea b o ita ſit educta ex puncto b, vt quęcunque ad b d rectam parallela in ipſam incidat, ſicut erit recta A C ad interceptam inter C & parallelam, ita ſit portio eiuſdem parallelæ intercepta inter lineas b c & d G, ad eiuſdem portionem inter b c & b o clauſam: poſſit autem ſpatium b d G c ita diuidi per alias lineas, vt ſicut ipſæ parallelæ, ita ſint trapezia mixta comprehenſa parallelis, lineâ b c & lineis proportionaliter ſecantibus. His poſitis, ſęcetur b c in partes quotcunque b e, e f, f g, g i, i c, & per extrema partium ducantur ad rectam b d æquidiſtantes e ſ, f t, g y, i x, à punctis autem in quibus iſtę ſecant lineam b o ductę intelligantur lineę u k, h l, p m, o n proportionaliter ſecantes vt dictum eſt. Si ex puncto A per perpendiculum a A suspendatur r æquiponderans trapezio d e; & q, trapezio f s; & z, trapezio t g; & π, trapezio i y; & λ, figuræ x c. Dico figuras e κ, f l, g m, i n & x c spatiis r, q, z, π, λ esse maiores, & figuras f u, g h, i p, i o c esse minores spatijs q, z, π, λ, multóque minores spatijs r, q, z, π, λ toti b d G c æquiponderantibus.

Rectæ e f, f t, g y, i x productæ occurrant libræ A B in punctis D, E, F, θ. Quoniam vt recta A c ad C D, ita est recta e s ad e u, & vt e s ad e u ita est spatium e d ad e κ; ergo vt A C ad C D, ita est spatium e d ad e k; ergo per propositionis præcedentis secundam partem spatium e k est maius spatio r æquiponderante ipsi d e. Similiter quoniam vt recta A C ad C D, ita est recta e s ad e u, & vt e s ad e u, ita est spatium f s ad f u; ergo vt A C ad C D, lta est spatium f s ad f u ergo per præcedentem spatium f u minus est spatio q, æquiponderante ipsi f s.

Rursus quoniam vt A C ad C E, ta est



p. 161

est recta ft ad th, & vt ft ad fh, ita est spatium seu trapezium fs ad fl: ergo vt AC ad CE, ita est trapeziū fs ad fl, ergo per præcedentem spatium fl est maius spatio q æquiponderante ipsi fs. Similiter quoniam vt recta AC ad CE, ita est recta ft ad fh, & vt ft ad fh, ita est spatium gt ad gh; ergo vt AC ad CE ita est spatium gt ad gh; ergo per præcedentem spatium gh minus est spatio z æquiponderante ipsi gt.

Eadem prorsus ratione ostendetur spatium gm esse maius spatio z æquiponderante ipsi gt; & spatium ip esse minus spatio π, quod æquiponderat trapezio iy; & spatium ioc esse minus spatio λ quod æquiponderat figuræ xc.

Itaque quoniam spatium ek spatio maius est; & fl spatium spatio q; & gm spatium spatio z; & in spatium spatio π; & xc spatium ipso λ: erunt omnes simul figuræ ek, fl, gm, in, & xc spatijs r, q, z, π, λ quæ toti bdcG æquiponderant, maiores. Rursus quoniam spatium fu spatio q minus est; & gh spatium spatio z; & ip spatium, spatio π; & ioc spatium, ipso λ; erunt omnes simul figuræ fu, gh, ip, ioc spatijs q, z, π, λ minores, multóque minores spatijs r, q, z, π, λ toti bdcG æquiponderantibus, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Ex propositione sexta prioris libri, & secunda huius manifestum est si linea d y G sit sectio conica, spatium b d G c posse ita diuidi per alias lineas, vt sicut ipsæ parallelæ ita sint trapezia comprehensa parallelis, recta b c, & lineis proportionaliter secantibus. Imò si vt recta A C ad C D, ita sit e a ad e u &c: quamuis linea b c esset etiam sectio conica, spatium b d G c posset perinde diuidi, atque quando b c est recta; vt ex ijs quæ ad sextam prioris libri adiecta sunt manifestum est.

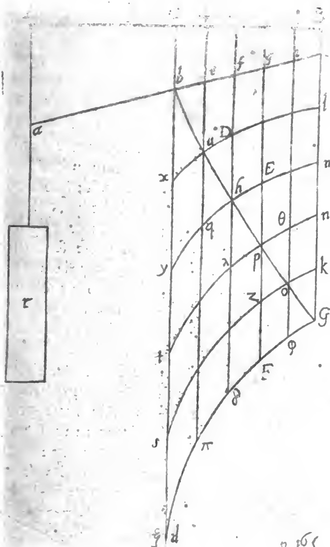
COROLLARIVM II.

Manifestum quoque est hanc ipsam propositionem posse cum proportione transferri ad solida, sicuti in præcedenti monuimus, & hic monemus de subsequenti, aliisque eiusmodi, in quibus id inculcare prætermittemus breuitatis causâ, quæ etiam facit vt superfluum putemus istud longiùs explanare, præcipuè cùm solidarum figuram descripto in planâ chartâ, quando eæ vario multiplicique sectionum ductu distiguendæ sunt, vix vnquam fiat sine Lectoris magno & sæpe inutili labore. Monêre præterea hîc occasione data debeo proposiotionem sextam libri prioris plurimasque alias cum eâ connexas posse non multùm absimili methodo applicari ipsis solidis, idque ita esse in nonnullis manifestum homini non penitus ignaro istarum disciplinarum, vt aliâ pobatione non egeat; eam tamen, si quis flagitet, exhibere parati sumus. Adeatur propositio vigesima quarta libri quarti horum Elementorum. Cæterum quæ in planis demonstrantur ad solida posse nonnunquam referri habes exemplum inter alia insigne in Elementis Euclidis libri vndecimi propositione vigesimâ nonâ quæ persimilis est trigesimæ quintæ libri primi.

Propositio VII.

Iisdem positis, ostendendum est, si libra A B ex C suspendatur, & spatium æquale figuræ b G c ex A pendeat, ipsum æquiponderare figuræ b d G c permanenti vt iacet.

Vt ab, bc, ita iuxta præscriptum quartæ huius libri fiant bd, b ξ, vt habeatur recta b ξ per cuius quoduis punctum ducta linea proportionaliter secans parallelas rectæ bd interceptas lineis b c



p 165

d G, incidat in lineæ bG portionē inter parallelas b d, c G positā, siue punctū ξ cadat in d (vt in hac figurâ) siue extra ipsū d.

Iam, si fieri potest vt non æquiponderet, sit spatium r æquiponderans figuræ b d G c positæ vt iacet: figura ergo b c G erit vel maior spatio r, vel minor; primo quidem sit maior. Quoniam potest sumi aliquod spatium minus excessu quo figura b c G est maior, quod sit pars figuræ b d G c, siue quod metiatur figuram b d G c: istud enim fieri posse sequitur euidenter ex illo lemmate omnium Geometrarum consensu probato vt diximus in huius operis nostri prologomenis, *inæqualium spatiorum excessus quo maius superat minus, fieri potest vt sibi ipsi coacernatus quodlibet propositum definitumque spatium excedat.* Quoties illud spatium metitur figuram b d G c, toties recta l x metiatur rectam b ξ, quæ diuidatur in suas partes b x, x y, y t, t s, s ξ; atque per extrema partium ductæ intelligantur lineæ x l, y m, t n, s k, ξ G, quæ occurrant lineæ b o in punctis u, h, p, o, & per eiusmodi puncta eductæ sint e q, f λ, g z, i φ parallelæ ad rectam b d. Cùm ergo istæ parallelæ proportionaliter secari ponātur occursu linearum b c, x l, y m, t n, s k, ξ G, quæ occurrant lineæ b o in punctis u, h, p, o, & per eiusmodi puncta eductæ sint e q, f λ, g z, i φ, parallelæ ad rectam b d. Cùm ergo istæ parallelæ proportionaliter secari ponantur occursu linearum b c, x l, y m, t n, ſ κ, ξ G, & trapezia ab ipsis effecta esse proportionalia ipsis parallelis, erunt per primam huius libri spatia b l, x m, y n, t k, ſ G æqualia, & vnumquodque se habebit ad totum spatium b d G c, vt recta b x ad b ξ: sed ita etiam se habet pars figuræ b ξ G c minor excessu ad figuram b ξ G c; ergo vnumquodque est minus excessu dicto: ergo cùm per huius libri secundam figuræ b e u x, u D h q, h E p λ, p θ o z, o k G φ circa lineã b G cõsistentes sint simul æquales figuræ b l; erunt simul minores excessu quo figura b c G ponitur superare spatium r æquiponderans figuræ b d G c. Porrò apertum est illas figuras consistentes circa lineam b G secundum aliquam sui spatij portionem esse intra figuram b c G nimirum secundum figuras triangulares b e u, u D h, h E p, p θ o, o k G; & secundum aliam sui portionem esse extra figuram b c G, nimirum secundum figuras triangulares b x u, u q h, h λ p, p z o, o φ G.

Cùm ergo figura b c G ponatur esse maior spatio r, & ex eâ ablatæ sint b e u, u D h, h E p, p θ o, o k G, quæ omnes sunt simul minores excessu quo ipsa superat spatium r: quæ relinquuntur figuræ erunt omnes adhuc maiores spatio r, quod est absurdum; cùm quæ relinquuntur sint f u, g h, i p, i o c, quæ omnes sunt per præcedentem minores spatio r.

Sed neque etiam figura b c G est minor spatio r: si enim spatium r est maius, poterit dari spatium quod metiatur figuram b d G c, & quod sit minus excessu quo r superat figuram b c G. Vt pars illa metiens figuram b d G c ad figuram ipsam, ita intelligatur esse recta b x ad b ξ inuentam iuxta præscriptum quartæ huius, vt paulò ante diximus; sitque diuisa b ξ in suas partes: ergo vti modo ostendebatur circa lineam b G consistent figuræ quæ omnes erunt minores excessu: ergo cum illarum aliqua portio sit intra figuram b c G, alia portio addita ad figuram b c G erit minor excessu (cùm omnes sint minores excessu) ergo spatium compositum ex figurâ b c G, & ex illa portione figurarum prædictarum quæ extra figuram b c G iacet, erit minus spatio r, quod est absurdum; Cùm spatium illud compositum conflatum sit ex spatijs e y, f q, g λ, i z, c φ quæ per præcedentem sunt maiora spatio r. Non ergo est minor spatio r, neque maior vt ostensum est; quare relinquitur eidem esse æqualem: ergo spatinm illi æquale ex A pendens æquiponderat figuræ b d G c vt iacet manenti librâ A B ex centro C suspensa, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Ex his manifestum est figuram triangularem b u c æquiponderare trapezio b e ϖ d : quoniam enim trapezium b e u x maius eſt per præcedentem ſpatio æquiponderante ipſi b e ϖ d, poterit dari ſpatium minus eo, quo figura b u e & æquiponderans trapezio b e ϖ d differre ponentur & figuram b e u x metiens; ac proinde, vt ex huius quarta confici poteſt, & paulo ante confectum fuit in ſimili caſu, circa lineam b u conſiſtent figuræ quæ omnes æquales erunt prædictæ differentiæ; dabiturque locus demonſtrationi qua in hac propoſitione vſi ſumus.

COROLLARIVM. II.

Manifeſtum quoque eſt trapezium e f h u æquiponderare trapezio e f δ π. Nam figura quadrilatera u D h q, quæ eſt portio trapezij f q, vel minor vel maior dicetur eo ſpatio, quo figura e f h u & ſpatium æquiponderans trapezio e f δ π differre ponentur: Si minor dicatur demonſtrationi priori datur locus. Sin maior eſſe aſſeratur, poterit dari ſpatium prædictâ differentia minus, & trapezium u D h q metiens, atque ita procedet demonſtratio eadem. Simili prorſus ratione oſtendetur trapezio f g F δ æquiponderare trapezium f g p h: nam figura quadrilatera h E p λ vel minor vel maior dicetur &c. Atque hoc ipſo demonſtrationis tenore idem euincitur de alijs, nimirum g i φ F trapezio æquiponderare trapezium g i o p; & i c G φ trapezio, trapezium i c G o.

COROLLARIVM III.

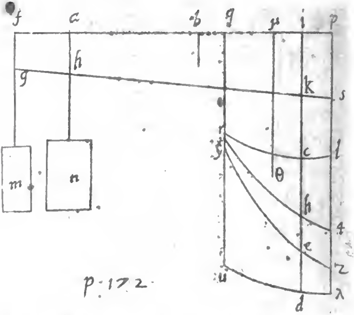
Ex demonſtratis in iſta propoſitione & ex corollario præcedentis manifeſtum pariter eſt ſi linea d G ſit ſectio conica, figuram b c G ex A ſuſpenſam æquiponderare figuræ b d G c permanenti vt iacet; & figuram b d π e ex eadem A ſuſpenſam figuræ b u e permanenti vt iacet; & figuram e π δ f indidem ſuſpenſam figuræ e u h f &c. Atque hîc etiam illud animaduerſione dignum eſt demonſtrationem eandem permanere ſi b c ſit etiam ſectio conica, dummodo (ſicuti in præcedentis propoſitionis corollario adnotatum eſt) vt A C ad C ψ, ita ſit e π ad e u; & vt A C ad C ω, ita ſit f δ ad f h, & ſic de quacunque alia parallela interiecta lineis b c, d G, ad eiuſdem portionem inter lineas b c, b G poſitam.

PROPOSITIO VIII.

Sit a b libra ſuſpenſa ex b, ex cuius punctis q, p pendeat figura r u d λ l c contenta perpendiculis r u, l λ, lineiſque r l, u λ quæ vel ſint rectæ, vel ſectiones conicæ: ipſi autem figuræ vt iacet permanenti ex a pendulum æquiponderet rectilineum n; & ex f pendens rectilineum m. Sint & aliæ quæuis duæ lineæ x h t, y e z ita positæ, vt si inter q & p quodlibet punctum i designetur, & per illud ducatur recta i d parallela ipsi r u, occurrens verò lineis r l, x h, y e, u d in pūctis c, h, e, d, sicut a b ad b i, ita sit c q ad e c: & sicut b f ad b i, ita sit c d ad c h. Ostendendum est vt recta b a ad b f, ita esse rectam c h ad e c, ipsumque spatium r x h t l c ad r y e z l c.

Quoniam enim vt recta f b ad b i, ita ponitur esse c d recta ad c h; & vt b i recta ad b a ita ponitur esse e c ad c d; trium linearū f b, b i, b a & trium e c, c d, c h proportio erit perturbata: ergo ex æquo vt f b ad b a, ita erit e c ad c h quod erat primo loco ostendendum.

Rursus quoniam r c l, v d λ sunt vel sectiones conicæ vel rectilineæ; & quoniā sumpto quouis puncto i inter q & p, &



per illud ducta i d parallela rectæ q r, sicut a b, b i, ita c d, e c; & sicut f b, b i, ita c d, c h, erit per septimam huius rectilineum n æquale figuræ r y e z l c; & rectilineum m figuræ r x h t l c.

Præterea recta $\mu\,\theta$ parallela ipsi q r transeat per grauitatis centrum figuræ r u λ l ergo per ea quæ Archimedes demonstrat ad sextam quadraturæ paraboles vt a b, b i, ita reciprocè est figuræ spatium r u λ l ad spatium n; & vt f b, b i ita est figuræ eiusdem r u λ l spatium ad spatium m: trium ergo rectarum f b, b i, a b, & triũ spatiorum n, r u λ l, m proportio est perturbata: ergo ex æquo vt recta f b ad a b, ita reciprocè est spatium n ad m: sed spatio n ostensum est figuram ryezlc esse æqualem; & spatio m figuram rxhtlc: ergo vt recta fb ad ab ita est figura ryezlc ad rxhtlc, quod erat secundo loco ostendendum.

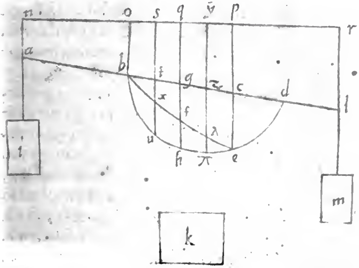
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est si figuræ cuipiam ex duobus libræ punctis suspensæ æquiponderet spatium aliquod ex vno tantùm eiusdem libræ puncto pendens; & aliquod aliud ex alio; ita esse reciprocè rectas quæ inter punctum à quo libra suspenditur & inter puncta à quibus dicta spatia pendent, vt sunt ipsa spatia pendentia: Ostensum enim est vt est recta bf ad ba; ita esse spatium n quod ex a pendet, ad spatium m quod ex f pendet. Istud autem verum quoque esse apertum est, etiamsi figura ex solo puncto μ penderet.

PROPOSITIO IX.

Sit spatium k & libra np suspensa primùm ex o, cuius portio op sit ipsi no æqualis. Per duo puncta in linea op sumpta actæ ſint duæ parallelæ intra quas coaptatá ſit iuxta præſcriptum propoſitionis quintæ huius libri figura rectis, vel ſectionibus conicis vel vtriſque mixtim comprehenſa; iſti verò figuræ ita poſitæ & ex parallelis pendenti ſpatium i ex n per lineam directionis n a pendens ita æquiponderet, vt ipſum i vnà cum k ſint ſimul æqualia ſpatio figuræ intra parallelas collocatæ, & ab eis pendenti. Abſciſſâ p r ipſi o p æquali, & actâ per r ipſi p c parallelâ r l, per quam pēdeat ſpatium m æquiponderans (libra ex p ſecundò ſuſpenſa, poſtquám ſoluta fuerit prior ſuſpenſio ex o) figuræ in eodem ſitu permanenti. His ita poſitis oſtendendum eſt ſpatium k eſſe æquale ſpatio m.

Duo in linea o p puncta ſumpta ſint ſ & y (ſiue congruant ipſis o & p ſingu-



p 175

la ſingulis, ſiue vnum vni congruat alterum non congruat, ſiue denique neutrum congruat) & per illa actæ ſint rectæ ſ t, y z perpendiculares ad libram n p, inter quas coaptata pendeat figura t u h π z cuius linea u h π ſit ſectio conica, t z ſit recta vel ſectio conica. Sumatur quodlibet punctum q in linea s y, atque vt n o ad ſ q, ita per q ducta q h linea directionis, fiat g h intercepta lineis u h π, t z, ad g f, noteturque punctum f; atque idem intelligatur factum de omni alio puncto in linea ſ y exiſtente: notata verò puncta deſcribant continuam lineam x f l quæ *quadratrix* vocetur:

Quoniam ergo libra ex o suspensa spatium i æquiponderat figuræ t u h π z permanenti vt iacet; & vt n o ad o s, ita est t u ad t x; & vt n o ad o q ita similiter est g h ad g f, & sic in alijs quibusuis parallelis proportione euenit, cùm linea u h π sit sectio conica, linea verò t z vel sectio conica vel recta; erit per præcedentem spatium figuræ t x f λ z æquale spatio i: ergo spatium t x f λ z vnà cùm spatio κ est æquale spatio figuræ t u h π z, sed spatium t x f λ z vnà cum spatio x u h π λ est æquale spatio figuræ t u h π z ergo spatium k est æquale spatio x u h π λ.

Quoniam verò n o, o p sunt æquales ex constructione: ergo vt o p, o q, ita g h, g f; & per cõuersionem rationis vt o p, seu r p ipsi ex constructione æqualis, ad q p, ita g h ad f h: eadem ratione idipsum ostendetur de aliis omnibus parallelis inter parallelas f t, y z ductis. Si igitur libra suspendatur ex p cessetque suspendi ex o; quoniam vt r p, p y, ita sunt z π, π λ; & idem in aliis parallelis inter f t, y z ductis euenit; cùm spatium m ponatur æquiponderare figuræ t u h π z vt iacet permanenti, erit per præcedentem spatium m æquale spatio x u h π λ, hoc est spatio k, quod ipsi x u h π λ, æquale esse ostensum modò fuit. Ergo &c. quod erat ostendendum.

Assumpsimus spatium t x f λ z vnà cum spatio

ſpatio x u h π λ eſſe æquale ſpatio figuræ t u h π z, quod ita oſtenditur. Cùm, ſumpto in lineâ ſ y quouis puncto ſ, vt n o ad o ſ, ita ſit t u ad t x: ſitque n o ipſi o p æqualis ex conſtructione, punctumque ſ ponatur eſſe in linea o p; ſicuti linea n o non eſt minor linea o ſ, ita linea t u non eſt minor lineâ t x: ergo linea x f l tota erit intra figuram t u π z: ergo ſpatium t u π z adæquatur duobus t x f λ z, x u h π λ. Ex quo manifeſtum eſt adiunctâ demonſtratione quartæ propoſitionis, ſi punctum ſ congruat puncto o, punctum quoque x congruere puncto b: & ſi punctum y congruat puncto π, punctum quoque λ congruere puncto e: & ſi ſectio u h π concurrat in b & d cum linea b c, punctumque z congruat puncto d, puncta etiam λ, π congruere eidem puncto d.

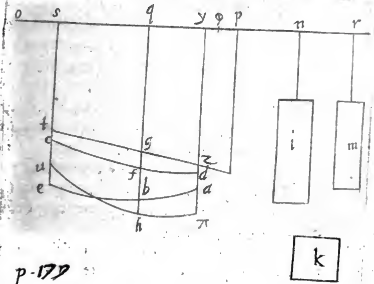
COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt duo ſpatia quæ per duas librationes æquiponderant figuræ t u h π z eſſe ſimul æqualia ipſi figuræ; ac proinde ſpatium quod æquiponderat ſuſpenſum ex n eſſe ipſam figuram imminutam ſpatio, quod æquiponderat ſuſpenſum ex r; & viciſſim ſpatium quod ex r ſuſpenſum æquiponderat figuræ, eſſe ipſam figuram imminutam ſpatio quod ſuſpenſum ex n æquiponderat figuræ.

PROPOSITIO X.

Sit libra o p suspensa ex p, & ab eâ pendeat figura t u h π z inter parallelas s u; y π constituta, ita vt inter puncta s & p iaceat punctum y, & linea u h p sit sectio conica, t z recta. Vltra p in recta p y sumatur quodlibet punctum φ (siue ipsum φ congruat puncto y, siue iaceat inter y & p) & vt p r brachium quodcunque libræ ad p φ, ita sit figura t u h π z ad κ spatium. Spatium m pendens ex r libra ex p suspensâ æquiponderet figuræ; fiantque φ n, p r æquales. Ostendendum est spatium quod libra ex φ suspensa, priore suspensione cessante, pendens ex n, æquiponderat figuræ permanenti vt iacet, esse æquale spatio m quod librâ ex p ſuſpenſâ, ceſſante ſuſpenſione ex φ, æquiponderat ex r pendens eidem figuræ; ſpatio inquam, m non integro, ſed imminuto eâ figurâ quæ ad totam t u h π z ſe habeat vt ſe habet recta φ p ad p r; eiuſmodi autem eſt ſpatium κ.

Oſtendendum igitur eſt ex ſpatio in poſſe demi ſpatium k, & reſiduum ex n pendens, libra ex φ ſuſpenſa, æquiponderare figuræ vt iacet permanenti. Sit ſpa-



p-179

tium i quod pendens ex n, libra ex φ suspensa, æquiponderet figuræ t u h π z; & intelligatur descripta linea a b e ita vt quocunque puncto g sumpto in linea t z, & per illud ducta g h æquidistante ipsi y z l, occurrente curuæ π h u in h; & lineæ a b e, in b; & rectæ ſ y, in q: sicut r p ad p q, ita sit g h ad g b: spatium ergo t e b a z erit æquale spatio m per septimam huius.

Rursus intelligatur descripta linea d f c, ita vt sumpto in recta z t quouis puncto g, & ducta per illud g f æquidistante ipsi y z, occurrente rectæ y ſ in q, & lineæ d f c in f; vt r p ad p φ, ita sit g h ad g f. Quoniam vt p q ad p r, ita g b ad g h, & vt p r ad p φ, ita g h ad g f; ergo ex æquo vt p q ad p φ, ita g b ad g f; ergo per conuersionem rationis vt p q ad φ q, ita g b ad f b. Quoniam ergo vt p r ad p q, ita g h ad g b; & vt p q ad q φ, ita g b ad f b: ergo ex æquo vt p r, seu φ n, ad φ q, ita est g h ad f b: ergo per octauam huius figura d f c e b a contenta lineis d f c, a b e curuis, & rectis e c, d a pendens ex n, libra ex φ suspensa, æquiponderat figuræ t u h π z vt iacet permanenti; ergo est æqualis spatio i.

Rursus quoniam linea d f c in figura t u h π z omnes æquidistantes lateri d a diuidit proportionaliter, ita vt quemadmodum se habet recta r p ad p φ, ita sit quælibet æquidiſtans intercepta curuis d f c π h u ad ſui portionem interceptam curua d f c & recta t z; ergo vt recta r p ad p φ, ita eſt figura t u h π z ad figuram t c f d z, ſed vt recta r p ad p φ, ita ex conſtructione ponitur eſſe eadē figura t u h π z ad ſpatium *k*: ergo figura t c f d z eſt æqualis ſpatio κ.

Rurſus quoniam, vt ſupra oſtendimus, ſicut p q ad p φ, ita eſt g b ad g f, cùm p q non ſit minor quam p φ (ponimus enim φ iacere inter y & p, vel congruere puncto y, & punctum q vel eſſe inter puncta f & y, vel alteri illorum congruere) erit g b vel maior, vel non minor quàm g f; ergo linea d f c tota cadit inter rectam t z & curuam a b c; & ſummùm puncta d & a ſibi congruunt, ſi nimirum puncta φ & y ſibi congruant; ergo tota figura t c b a z diuiditur in duo ſpatia t c f d z, c e b a d f, quorum illud probatum eſt eſſe æquale ſpatio *k*, iſtud ſpatio i; totam autem figuram oſtendimus eſſe æqualem ſpatio m: ergo ſpatium m eſt æquale duobus ſimul ſpatijs k & i: ergo ex ſpatio m demi poteſt ſpatium κ, & eo dempto relinquitur ſpatium i, quod ex n pendens, libra ex φ tantùm ſuſpenſa, æquiponderat figuræ t u h π z vt iacet permanenti, quod erat demonſtrandum.

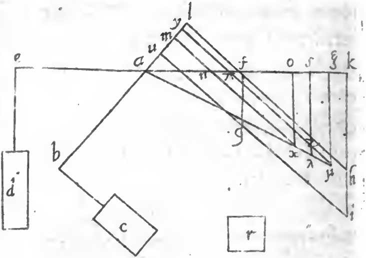
COROLLARIVM.

Quòd si reliquis iisdem manentibus libra intelligatur suspendi ex φ: & ex n extremo brachij eius cuiuscunque φ n pendere spatium i æquiponderans figuræ t u h π z; & vltra φ versus n, sumi quoduis punctum p: ipsique φ n fieri æqualem p r; Ex demonstratione huius propositionis apertum est; libra ex p tantùm suspensa, spatium m pendens ex r & æquiponderans figuræ t u h π z esse æquale spatio i, & insuper spatio k quod se habeat ad spatium t u h π z vt recta φ p ad rectam φ n.

PROPOSITIO XI.

Sit libra a κ suspensa ex a sustinens figuram f g i h pendentem ex punctis f, κ per lineas directionis f g, k i; figuræ verò pendens ex e spatium d æquiponderet. In eodem figuræ plano sit alia libra a l mutata positione suspensa ex eodem puncto a, & sustinens eandem figuram f g i h pendentē ex punctis u, l per perpendicula u σ, l f; fig æ verò pendens ex æquiponderet spatium c, librarumque brachia a e, a b sint æqualia. Vt a l latus trianguli a l f ad latus a f, ita sit spatium c ad spatium r: ex recta autem a κ abscissa sit quæuis a n; & vt spatium r ad spatium d, ita sit recta a n ad a o. Per n & o ductæ sint rectæ m n, o x perpendiculares ad libras a l, a k, concurrentes in x, & per concursum x punctumque suspensionis a ducta sit recta a x. Ostendendum est centrum grauitatis figuræ f g i h esse in recta a x.

Sit enim, si fieri potest, in puncto z extra lineam a x posito, & per z agantur z ſ, z y perpendiculares ad libras a κ, a l; quarum y z occurrat libræ a l in y; libræ a k in π & lineæ a x in μ, linea vero ſ z occurrat libræ a *k* in ſ, & lineæ a x in λ. Quoniam librâ a l suspensâ ex a, recta



p 184

y z transit per centrum grauitatis z, & spatium c pendens ex b æquiponderat figuræ f g i h vt iacet permanenti; vt figura f g i h ad spatium c, ita erit recta b a ad a y, vt in octaua huius diximus. Similiter quoniam libra a k suspensa ex a, spatium d æquiponderat figuræ f g i h vt iacet permanenti, & recta f z transit per centrum grauitatis z; vt figura f g i h ad spatium d, ita erit recta e a seu b a ipsi æqualis ad rectam a f, & conuertendo vt recta a f ad b a, ita spatium d ad figuram f g i h. Quoniam igitur ostensum est vt spatium d ad spatium f g i h, ita esse rectam a f ad b a; & vt spatium f g i h ad spatium c, ita esse rectam b a ad a y: & vt spatium c ad spatium r, ita esse rectam a y ad a π (sunt enim triangula a l f, y a π similia, & vt a l ad a f, siue vt spatium c ad r, ita a y recta ad a π) ergo ex æquo vt spatium d ad spatium c, ita est recta a ſ ad a y: Item ex æquo vt spatiũ d ad spatiũ r, ita erit recta a ſ ad a π; sed ita etiã est recta a o ad a n, ergo vt recta a ſ ad a π, ita recta a o ad a n, & alternando vt recta a ſ ad a o, ita recta a π ad a n, & diuidendo vt recta a o ad o ſ, ita a n ad n π.

Quoniam igitur in triangulo a π μ lateri π μ parallela est n x; vt a n, n π, ita erũt a x, x μ; & quoniam in triangulo a ſ λ lateri ſ λ parallela est o x, vt a o ad a ſ, ita erit recta a x ad x λ: ergo cùm ratio rectarum a o, o ſ, sit eadem quæ rectarum a n, n π, eadem quoque erit ratio rectæ n x ad x λ, & eiusdem rectę n x ad x μ; ergo x λ, x μ sunt ęquales, pars & totum quod est absurdum. Non ergo centrum grauitatis figurę f g i h est extra lineam a x, quod erat ostendendum. 2. sexti Euc.

COROLLARIVM I.

Sit libra a k suspensa ex a sustinens figuram f g i h pendentem ex punctis f, k per perpendicula f g, k i, cui pendens ex e spatium d ęquiponderet; centrum verò grauitatis eiusdem figurę sit in recta a x per punctum suspensionis ducta. Sit mutata positione alia libra a l suspensa ex eodem puncto a, sustinensque eandem figuram f g i h pendentem ex punctis u, l per perpendiculares u g, l f, cui pendens ex b spatium c ęquiponderet; sint autem brachia a e, a b ęqualia. Ostendi potest ex dictis spatium d ad spatium c esse vt sinum complementi anguli κ a x, ad sinum complementi anguli l a x. Ponatur enim punctum μ in recta a x esse centrum grauitatis, &, ex μ demissæ sint ad libras a k, a l perpendiculares μ ξ, μ y. Quoniam ostensum est ex eò quòd ex centro z demissæ sint ad libras rectę z s, z y perpendiculares; vt spatium d ad c, ita esse rectam a s ad a y, demissę verò ponuntur ex centro μ perpendiculares μ ξ, μ y; vt igitur spatium d ad c; ita erit recta a ξ ad a y. Sed posito sinu toto a μ, sinus complemēti anguli ξ a μ est recta a ξ; & sinus complementi anguli y a μ est a y; ergo vt d spatium ad c, ita est sinus complementi anguli k a x seu ξ a μ, ad sinum complementi anguli l a x seu y a μ, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM II.

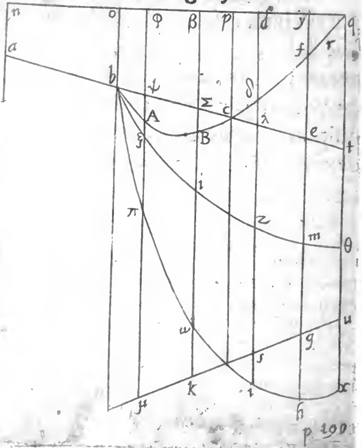
Ex priori corollàrio sequitur portiones librę vtriusque interceptas inter punctum suspensionis & inter perpendiculares ex centro grauitatis demissas esse inęquales, habent enim inter se rationem, quam sinus complementi angulorum k a x, l a x inęqualium, ac proinde habentium sinus complementi inęquales, puncta ergo n & o in priori figura non possunt sibi congruere; vnde rectè posuimus rectas n m, o x conuenire extra lineam n o ad partes figurę f g i h.

PROPOSITIO XII.

Sint libræ n q partes æquales n o, o p, p q; descriptę insuper sint lineæ b t, $\xi\theta$, π x, μ u quarũ b t sit recta, & $\xi\theta$, μ u sint rectæ vel sectiones conicæ, ita verò sint dispositæ vt $\xi\theta$ iaceat inter b t, μ u, & sumpto in recta b t producta quocunque puncto e, & per e ductâ e y perpendiculari ad librã n o, occurrente prędictis lineis in m, h, g, sicut n o ad o y, siue (ductis per o, p perpendicularibus o b, p c) sicut a b ad b e ita sit g m ad m h, sintque g m, m h ad easdem partes lineæ $\xi\theta$. Ostendendum est spatium quod ex q pendens libra ex p suspensa æquipõderat figuræ ex duobus punctis rectæ p o suspensæ, interque duas perpendiculares ex illis punctis excitatas contentæ, & inter portiones linearum b t, $\xi\theta$, esse æquale spatio quo figura quæ ex ijsdem punctis suspensa & comprehensa ijsdem parallelis, & portionibus linearum b t, π x superat spatium quod, libra ex o tantùm suspensâ, pendens ex n æquiponderat figuræ comprehẽsæ ijsdem parallelis, & portionibus linearum b t, μ u. Ostendendum præterea est spatium quod ex o pendens, libra ex p suspensâ, æquiponderat figuræ ex duobus punctis rectæ p q productæ, interque duas perpendiculares ex illis punctis excitatas contentæ, & inter portiones linearũ b t, $\xi\theta$, esse æquale spatio quo figuram inter easdem parallelas & lineas b t, π x comprehensam superat spatium quod librâ ex o tantùm suspensa pendens ex n æquiponderat figuræ contentæ iisdem parallelis & lineis b t, μ u.

Puncta in recta o p sumpta sint φ, β, & per illa ductę sint perpendiculares $\varphi\,\mu$, β k, occurrentes lineis b t, $\xi\,\theta$, $\pi\,\omega$, μ u in punctis ψ, ξ, π, μ, Σ, l, ω, k. Puncta autem sumpta in p q producta sint d, p, & perpendiculares per illa actæ occurrant iisdem lineis in λ, z, i, f, t, θ, x, u. Dico spatium quod ex q pendens, libra ex p suspensa, æquiponderat figuræ $\psi\,\xi$ l Σ esse æquale spatio quo figura $\psi\,\pi\,\omega\,\Sigma$ superat spatium quod ex n pendens, libra ex o tantùm suspensa, æquiponderat figuræ $\psi\,\mu\,\kappa\,\Sigma$ vt iacet permanenti, & spatium quod ex o pendens, libra ex p tantùm suspensa æquiponderat figuræ λ z θ t vt iacet permanenti, esse æquale spatio quo figura λ i x t superatur à spatio quod ex n pendens, libra ex o tantum suspensa, æquiponderat figuræ λ f u t vt iacet permanenti.

Intelligatur ducta linea A B δ f r ita vt sumpto quocunque puncto ψ in linea $\psi\,\Sigma$, vel e in linea λ t, & ductis ad libram per-



pendicularibus $\varphi\mu$, y h occurrentibus lineæ $\theta\mu$ z in punctis ξ & m, lineæ vero A B δ f r in punctis A, f, sicut n o ad oφ, vel a b ad bψ, ita sit $\psi\xi$ ad ξA, & sicut n o ad o y, seu a b ad b e, ita sit e m ad m f.

Quoniam vt n o ad o φ quoduis segmentum libræ ex puncto o sumptum, ita $\psi\xi$ ad A ξ, erit per septimam huius figura ξ A B l æqualis spatio quod ex n pendens, libra ex o suspensa, æquiponderat figuræ $\psi \xi l \Sigma$ vt iacet permanenti. Similiter quoniam vt n o ad o ϕ quoduis segmentum libræ ex puncto o sumptum, ita $\xi \mu$ ad $\xi \varpi$, erit per septimam huius figura $\xi \pi \omega$ l æqualis spatio quod ex n pendens, libra ex o suspensa, æquiponderat figuræ $\xi \mu k$ l vt iacet permanenti. Eadem de causa figura z i x θ erit æqualis spatio quod ex n pendens libra ex o suspensa, æquiponderat figuræ z f g u θ m.

Quoniã igitur duæ figuræ $\psi \xi l \Sigma$, $\xi \mu$ k l simul constant totam figuram $\psi \mu k \Sigma$, spatia quæ libra ex o suspensa, æquiponderant duabus figuris $\psi \xi l \Sigma$, $\xi \mu \kappa$ l vt iacent permanentibus, æquiponderabunt &. toti figuræ $\psi \mu k \Sigma$ vt iacet permanenti. Cùm igitur ostensum sit duas figuras A ξ l B, $\xi \pi \omega$ l æquiponderare duabus $\psi \xi \Sigma$ l, $\xi \mu \kappa$ l, duæ figuaæ A ξ l B, $\xi \pi \omega$ l hoc est tota A $\pi \omega$ B æquiponderabit toti $\psi \mu k \Sigma$: ergo si ex tota figura $\psi \pi \omega \Sigma$ dematur, figura A $\pi \omega$ B, hoc est spatium quod toti $\psi \mu \kappa \Sigma$ æquiponderat pendens ex n, libra ex o tantùm suspensa, restabit figura ψ A B Σ: nam portionem lineæ A r interceptam parallelis o b, p c non cadere vltra b c ad partes o probatum est sub finem propositionis nouæ: sed figura ψ A B Σ, libra ex p tantùm suspensa, pendens ex q æquiponderat figuræ $\psi \xi l \Sigma$ vt iacet manenti, prout in illa eadem nona propositione demonstrauimus: ergo si ex figura

$\psi \pi \omega \Sigma$ detrahatur ſpatium quod pendens ex n libra ex o tantùm ſuſpenſa æquiponderat figuræ $\psi \mu k \Sigma$ vt iacet manenti, reſtabit ſpatium quod libra ex p tantùm ſuſpenſa, pendens ex q æquiponderat figuræ $\psi \xi l \Sigma$ vt iacet permanenti, quod erat primo loco demonſtrandum.

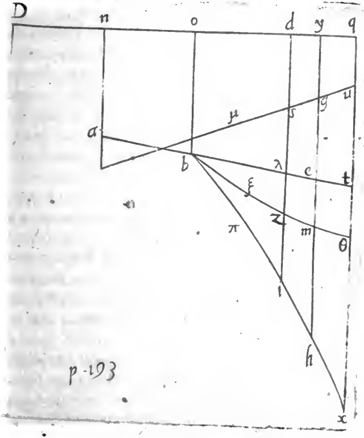
Rurſus ſicuti prius oſtenſum fuit totam figuram $A \pi \omega B$ ęquiponderare toti $\psi \mu k \Sigma$, libra ex o ſuſpenſa, & ipſa figura $A \pi \omega B$ ex n pendente; ita demonſtrabitur totam figuram δ i x q pendentem ex n, libra ex o tantùm ſuſpenſa, ęquiponderare figurę λ ſ u t vt iacet permanenti: ergo ſi ex figura δ i x q, hoc eſt ex ſpatio quod prędicto modo ęquiponderat figuræ λ ſ u t, ſubducatur figura λ i x t reſtabit figura $\lambda \delta$ q t; nam lineam δ q eſſe ſupra lineam c t, ex eadem propoſitionis nonæ demonſtratione apertum eſt.

Quoniam ergo vt n o ſeu o p ad o d, ita eſt z λ ad z δ; erit diuidendo vt o p ſeu n o ad p d, ita z λ ad $\lambda \delta$, & idem quocumque alio pũcto inter d & q ſumpto actaque per illud perpendiculari demonſtratur; figura $\lambda \delta$ q t erit per ſeptimam huius æqualis ſpatio quod pendens ex o, libra ex p ſuſpenſa, æquiponderat figuræ λ z θ t vt iacet permanenti. Ergo ſi ex ſpatio quod ex n pendens libra ex o tãtùm ſuſpenſa, æquiponderat figuræ λ ſ u t dematur ſpatium λ i x t reſtabit ſpatium quod

quod pendens ex o libra ex p tantùm ſuſpenſa æquiponderat figuræ λ z θ t, quod erat ſecuudo loco probandum.

COROLLARIVM I.

Quòd ſi linea ξ θ non iaceat inter lineas b t, μ u, ſed ipſa b t iaceat inter lineas μ u, ξ θ, & lineæ g m, m h ſint ad oppoſitas partes lineæ ξ θ; oſtendi poteſt ſi ex



N

fpatio λ i x t deducatur fpatium quod ex n pendens æquiponderat figuræ λ ſ u t vt iacet manenti, libra ex o fufpenfa; refiduū, factis o n, n D æqualibus, pendens ex D, libra ex n tantùm fufpenfa æquiponderare figuræ λ z θ t vt iacet manenti quomodocunque puncta d & q fumpta fuerint in recta o q in infinitum producta ad partes q.

Quoniam enim figuræ z i x θ fpatium æquale, pendens ex n, libra ex o fufpenfa, æquiponderat figuræ ſ z θ u vt iacet manenti per feptimam huius (vt enim n o ad o y, fumpto quouis puncto y in recta n o, ita g m ad m h) & figuræ ſ z θ u æquales funt duæ ſ λ t u, z λ t θ; idem fpatium æquale figuræ z i x θ æquiponderabit pendens ex n, libraque ex o fufpenfa duabus figuris ſ λ t u, z λ t θ: ergo cùm figura λ i x t conftet duabus λ z θ t, z i x t; conftabit ipfa figurâ λ z θ t, & fpatio æquiponderante figuris ſ λ t u, z λ t θ modo prædicto: ergo fi ex fpatio figuræ λ i x t deducatur æquiponderans figuræ ſ λ t u, reftabit fpatium quod erit æquale duobus fimul nimirum figuræ λ z θ t, & fpatio æquiponderanti dicto modo, eidem figuræ λ z θ t.

Cùm igitur iftud refiduum æquale fit duobus fpatiis quorum vnum æquat figuram λ z θ t, alterum pendens ex n libra ex o fufpenfa, æquiponderat ipfi figuræ λ z θ t vt iacet permanenti; erit per corollarium propositionis decimæ huius ipsum residuum æquale spatio quod libra ex n tantùm suspensa, pēdens ex D æquiponderat figuræ λ z θ t vt iacet manenti, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM II.

Ex his apertè constat libra suspensa ex p in figura prima, quæ ipsi propositioni respondet, assignari posse spatium quod figurę ⅌ ξ l Σ vel λ z θ t æquiponderet suspensum ex extremo brachij ipsi figuræ oppositi, & æqualis rectæ n o; si datum fuerit rectilineum æquale figuræ ⅌ π ω Σ, vel λ i x t; & rectilineum quod, libra ex o suspensa, pendens ex n æquiponderat figuræ ⅌ μ k Σ vel λ ſ u t vt iacent permanentibus. Ostensū est enim excessū quo differunt data rectilinea, esse æqualem eiusmodi spatiō æquipōderanti: Cōstat quoque in figura secunda quæ ad corollariū primum est apposita assignari posse, libra ex n suspensa, spatium quod figuræ λ z θ t æquiponderet suspensum ex extremo brachij ipsi figuræ oppositi, & æqualis rectæ n o; si datum fuerit rectilineum æquale figuræ λ i x t, & rectilineum quod, librâ ex o suspensa, pendens ex n æquiponderat figuræ λ ſ u t vt iacet manenti. Ostēsum est enim excessum quo differunt data rectilinea esse æqualem eiusmodi spatio æquiponderanti.

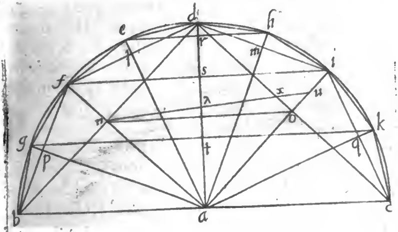
PROPOSITIO XIII.

Segmentum hyperbolæ habet centrum grauitatis in diametro bifariam secante rectam quæ arcum segmenti subtendit; segmentum quoque circuli vel ellipsis quod maius non sit semicirculo vel semiellipsi centrum grauitatis habet in eadem diametro.

Istud de parabolâ ostendit Archimedes propositione quartâ libri secundi de æquiponderantibus; parique prorsus modo extendi potest ad alias sectiones conicas, vt benè aduertit Commandinus libro de centro grauitatis solidorum. Vt tamen de eiusmodi extensione nullus dubitare valeat, ostendendum est aliis sectionibus communem esse illam proprietatem, quam de parabola Archimedes demonstrauit; & ex qua demonstratio centri grauitatis in eiusmodi segmento pendet, ; ea autem proprietas hæc est.

Sit quoduis ſegmentum a d c ſectionis centricæ iuxta conditiones in propoſitione appoſitas, cuius baſis b c recta, bifariam ſecta in a; diameter ad quam b a eſt ordinatim applicata ſit a d. Iunctis rectis b d, c d, & bifariam ſectis in n, o; per n & o ductæ intelligantur diametri n f, o i, occurrentes ſectioni in f, i. Rurſus iunctæ rectæ b f, f d, d i, i c bifariam ſectæ intelligantur in p, l, m, q, & per eiuſmodi pũcta ductæ diametri p g, l e, m h, q k, occurrentes ſectioni in g, e, h, k; & idem obſeruetur procedendo ad alias quotcunque diuiſiones, iunctis rectis g b, g f, f e, e d, d h, h i, i k, k c. Puncta quæ pari numero ad partes oppoſitas puncti d diſtant iungatur rectis e h, f i, g k, occurrẽtibus diametro in r, ſ, t. Oſtendendũ eſt rectas e h, f i, g k esse parallelas rectæ bc. *Eiusmodi figuram appellat Archimedes inscriptam* γνωρίμως, *quod verto, notâ & conditâ ratione.* Vel quod in idem redit, quantum ad præsens institutum attinet, ostendendum est si iunctis rectis b d, c d, recta d c bifariam secetur in o, & per o ducatur diameter a o, occurrês sectioni in i, & per i agatur i f f ordinatim ad diametrum d a applicata, hoc est parallela rectæ b c, occurens diametro in in f, & sectioni in f, & per f agatur diameter f a, occurrens rectæ b d in n, ipsam b d bifariam secari in n.

Iungatur per puncta n, o recta n o; erit n o parallela rectæ b c, ac proinde in triãgulo b d c, latera b d, c d proportionaliter secabuntur in n & o, & sicut d c secatur bifariam in o, ita & b d secabitur bifariam in n. Non sit enim, si fieri potest, recta n o parallela, & per n agatur p.199



n x u parallela occurens rectæ a i in u & recta d c in x. Quoniã in triãgulo a f i lateri f i parallela ponitur n u occurrens diametro in λ, vt f s ad ſ i ita erit n λ ad λ u; ſunt ergo n λ, λ u æquales, cùm ordinatim applicatæ f s, ſ i ſint æquales. Similiter cùm in triangulo b d c lateri b c parallela ponatur n x, vt b a ad a c, ita erit n λ ad λ x; ergo cùm b a, a c ſint æquales, erunt n λ, λ x æquales: ergo cùm λ x, λ u ſint æquales eidem n λ erunt inter ſe æquales pars & totum. Non ergo recta n o conuenit cum rectâ b c, ſed eſt illi parallela.

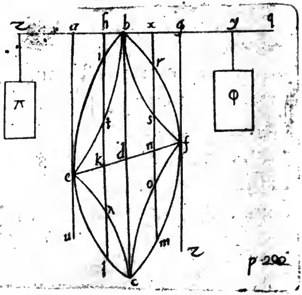
Similiter si rectæ d i, f d iungantur, & d i bifariam secetur in m; per m verò & centrum ducatur diameter m h occurrens sectioni in h, & per h agatur ordinatim ad diametrum d a applicata h r e recta occurrens diametro in r, & sectioni in e; ostendetur si per e ducatur diameter e l occurrens rectæ f d in l, ipsam f d secari bifariam in l, iuncta scilicet recta l m, sicuti priùs iuncta fuit recta n o.

Denique si rectæ i c, f b iungãtur, earumque i c bifariam secetur in q; per q verò & centrum ducatur diameter q k occurrens sectioni in k, & per k agatur ordinatim applicata ad diametrum d a recta k t g occurrens ipsi diametro in t, & sectioni in g, perque g agatur diameter g p occurrens rectæ b f in p, ostendetur ipsam b f bifariam secari in p; si nimirum, vti superiùs, recta p q iungàtur. Cùm enim in trapezio b f i c latera parallela f i, b c bifariam secentur occursu diametri a s ad quam ordinatim sunt applicata; omnes rectæ quæ inter latera f b, i c iacebunt parallelæ lateribus b c, f i, bifariam secabuntur occursu rectæ a s, vt planum est ex iis quæ ad quartam sexti demonstrantur; ergo sicuti ostensum est in primo casu rectam n x, si parallela ponatur rectæ b c & non congruere rectæ n o, bifariam secari occursu rectæ a d, ita hìc ostendetur quamuis aliam rectam non congurentem rectæ p q per p ductam, si parallela ponatur rectę b c, bifariam secari occursu, rectę a d; ac proinde in idem absurdum primi casus fiet reductio; cętera enim eodem prorsus modo in isto & in illo casu se habent, & demonstrantur. Si ergo parallelæ dicta ratione ducantur quotcunque, & per extrema opposita ducantur diametri, ipsæ bifariam secabunt rectas subtendentes arcus oppositos inter easdem parallelas positos, ac proinde descripta erit figura γνωρίμως, & rectæ prædictæ h e, f i, g k erunt parallelæ, eritque locus demonstrationi Archimedis, hoc tantùm exigenti ad hoc vt possit planè transferri in segmentum sectionis centro præditæ.

Propositio XIV.

Si duo segmenta sectionum conicarum super eadem basi ad partes oppositas ita sint constituta vt diametri per mediam basim incedentes iaceant in directum, & ipsa sint similia, & æqualia quantum ad diametri diuisionem, portio lineæ in quâ ſunt diametri connectens centra grauitatis bifariam ſecatur occurſu communis baſis, iſte verò occurſus eſt centrum grauitatis figuræ compoſitæ ex vtroque ſegmento.

Sectionis conicæ ſegmenta ſint b f c, b e c ſuper baſi communi b d c ita conſtituta, vt diametri eorum f d, d e ſecent baſim b c bifariam in d iaceantque in directum; ipſa autem ſegmenta ſint æqualia & ſimilia quantum ad diametri diuiſionem; eorum verò centra grauitatis ſint puncta k & n; ſunt enim per præce-



dentem in diametris d e, d f. Dico rectam k n secari bifariam in d; totiusque b e c f centrum grauitatis esse punctum d.

Per e & f ductæ sint rectæ e u, f z parallelæ basi b c, quæ cùm sint parallelæ ad ordinatim aplicatam b c, & per e, f vertices sectionum ductæ; tangent sectiones. Per b ducatur b q perpendicularis ad basim b c, occurrens tangentibus in a, g. Intelligantur ita ductæ lineæ b f f, f o c, c n e, e t b; vt sumpto quocunque puncto h in rectâ a b, sicut a b ad a h, ita sit (ductâ per h recta h n occurrente lineis b i e, b t e, e d, e n c, e l c in punctis i, t, x, λ, l) i k ad k t, & k l ad k λ, ac proinde tota i l ad totam t λ; similiter sumpto quocunque puncto x in rectæ b g, & per illud ductâ x m æquidistante rectę b c, occurrente lineis b r f, b f f, d f, f o c, f m c in r, f, n, o, m, sicut b g ad g x, ita sit r n ad n f, & n m ad n o, ac proinde tota r m ad totam f o. Rectæ b g fiat g y æqualis & rectæ b a recta a z. 32. secundi Conic.

Si igitur libra b y intelligatur suspendi ex g, & sustinere solum segmentum b c f pendens ex punctis b, g, cui ex puncto y spatium φ pendens æquiponderet, erit spatium φ æquale figuræ b f f o c d. Cùm enim sumpto quouis puncto x in recta g b, vt g y ad g x, ita sit r m ad f o, figura b f f o c d erit æqualis spatio φ per septimam huius. Similiter si libra a b intelligatur ex a suspensa, & sustinere tantùm segmentum b e c ex punctis a, b pendens vt iacet, & ex z appendi spatium π ipsi segmento æquiponderans, figura b t c λ c d erit æqualis spatio π.

Rursus quoniam segmenta b e c, b f c sunt similia & æqualia quantum ad diametri diuisionem, erunt rectæ d e, d f æquales, & quæcunque ipsi e f ducta fuerit parallela secabitur bifariam occursu rectæ b c; & si in rectis d e, d f sumantur à puncto d portiones quæcunque d k, d n æquales, & per k, n applicentur l i, m r rectæ parallelæ basi b c, erũt ipsæ l i, m r æquales per vigesimam secundam & vigesimam tertiam propositiones libri præcedentis; & per vigesimam quartam, ipsa segmenta erunt æqualia, cùm se habeant vt perpendiculares ex punctis e & f ad basim b c demissæ, quæ sunt æquales, cùm rectæ e d, d f sint æquales, & anguli ad verticem d sint etiam æquales.

Rursus quoniam d e, d f sunt æquales, & e u, f z sunt parallelæ, erunt b a, b g æquales, ac proinde quatuor rectæ z a, a b, b g, g y erunt æquales. Præterea quoniam positis d κ, d n æqualibus ac proinde b h, b x, residua a h, x g sunt æqualia; & vt z a ad a h, hoc est g y ad g x, ita est h l ad λ t, & x m ad r o; ergo vt h l ad λ t, ita x m ad r o; & alternando vt h l ad x m, ita λ t ad r o; ergo cùm h l, x m sint ęquales; erunt quoque λ t, r o æquales; ergo per ſextam præcedentis figura b t e λ c d eſt æqualis figuræ b ſ t o c d; ſed prædictis figuris æqualia ſunt ſpatia π, φ ergo ſpatia π, φ ſunt æqualia.

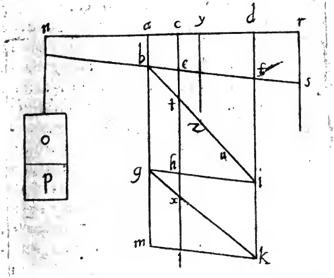
Cùm igitur centra grauitatis ponantur eſſe in k & n, vt brachium z a ad a h, ita erit ſegmentum b e c ad ſpatium π: & vt brachium y g ad g x, ita erit ſegmentum b f c ad ſpatium φ, per ea quæ ad ſextam quadraturæ paraboles ab Archimede demonſtrantur: ergo cùm ſegmentum b f c ſit æquale ſegmento b e c, vt oſtenſum fuit, & ſpatium π ſpatio φ: vt ſegmentum b f c ad ſpatium φ, ita erit z a ad a h, & y g ad g x: ergo vt z a ad a h, ita y g ad g x: & alternando vt z a ad y g, ita a h ad g x: ſed z a, y g ſunt æquales; ergò a h, g x ſunt æquales: ergo reſiduæ h b, b x ſunt æquales, quod erat primo loco oſtendendum. Aliunde cùm ſegmenta b e c, b f c ſint æqualia, & recta k n connectens eorum centra bifariam ſecetur in d vt iam oſtenſum eſt, erit d centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ b e c f per quartam libri primi æquiponderantium.

Propositio XV.

Si cuiuis figuræ contentæ sub rectis vel sectionibus conicis ita adiungatur alia figura vt rectæ omnes, quæ vni assignatæ æquidistantes in figuris duci possunt, sint in eadem ratione; centra grauitatis vtriusque figuræ sunt in eadem illi assignatæ æquidistante.

Sit figura b g i f cui adiuncta sit alia figura g m k i, dataque sit recta r s: ita verò se habeat vna figura ad aliam, vt quæcunque recta e l ducatur æquidistans datæ r s, & secans figuras in e, h, l: vt b g ad g m, ita sit e h ad h l. Dico centra grauitatis vtriusque figuræ b g i f, g m k i esse in eadem rectâ ipsi r s æquidistante.

Ad rectam r s incidat perpendicularis n r, quæ ponatur esse libra sustinens figuras b g i f, g m k i coniunctas per perpendicula a b g m, d f i k. Intelligātur ductæ lineæ b u i, g x k ita vt designato quocunque n a brachio libræ, quouis perpendiculo c l secante figuras & occurren-



p·207

te lineis, nr, bf, bui, ghi, gxk, mk in punctis c, e, t, h, x, l; vt na ad ac, ita sit eh ad et; & hl ad hx libra ex a suspensâ, spatium o ex n pendens æquiponderet figuræ bgif vt iacet manenti, & spatium p indidem pendens figuræ gmki vt iacet manenti. Quoniam vt na ad ac, ita (sumpto quocunque puncto c & per illud ducto perpendiculo cl) eh ad et, & hl ad hx, erit per septimam huius figura befiu æqualis spatio o: & figura igxk æqualis spatio p. Rursus quoniam vt na ad ac, ita est eh ad et, & hl ad hx: ergo vt eh ad et, ita est h l ad h x; & alternando vt e h ad h l, ita est e t ad h x: ergo cùm figuræ f b z i, i g x k ita se habeant vt quocunque perpendiculo sectæ vt b g ad g m, ita sit e t ad h x; erit figura f b z i, ad i g x k vt recta b g ad g m, per sextam primi libri; & eandem ob causam, ita etiam erit figura b g i f ad figuram g m k i. Cùm igitur vt recta b g ad g m, ita sit figura f b z i, ad i g x k, & ipsis æqualia sint spatia o, p, erit spatium o ad spatium p, vt recta b g ad g m: sed ita est etiam figura b g i f ad g m k i; ergo vt spatium o ad spatium p, ita est figura b g i f ad g m k i, & alternando vt o spatium ad b g i f, ita est p spatium ad g m k i

Perpendicularis y z transeat per grauitatis centrum figuræ b g i f, & occurrat libræ in y: ergo per sextam quadraturæ paraboles vt n a recta ad a y, ita est figura b g i f ad spatium o. Si fieri potest, centrum figuræ g m k i non sit in perpendiculo y z, sed in perpendiculo e c occurrente libræ in c: ergo vt n a recta ad a c, ita est spatium g m k i ad spatium p: sed vt spatium g m k i ad spatium p ita ostensum est esse spatium b g i f ad spatium o, & vt spatium b g i f ad spatium o, ita esse rectam n a ad a y; ergo vt n a ad a c, ita est n a ad a y; ergo rectæ a y, a c pars & totum sunt æquales. Non igitur centrum grauitatis

figuræ

figuræ g m k i eſt extra perpendiculum y z, in quo poſitum eſt iacere centrum grauitatis figurę b g i f, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc apertum eſt centrum compoſitę magnitudinis b m k f eſſe in eadem parallelâ, in qua ſunt centra partium duarum componentium; nam centrum compoſitę magnitudinis, eſt in rectâ coniungente centra partium duarum ipſam componentium per quartam primi ęquiponderantium.

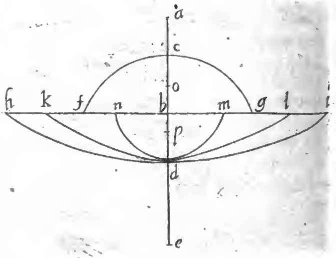
PROPOSITIO XVI.

In quauis rectâ h i ſint baſes ſegmentorum f c g, h d i, & ad oppoſitas rectæ h i partes ſint ſectionum conicarum centra e, a ita vt ad diametrum e c ordinatim vtrinque applicata ſit f g recta, & ad diametrū a d ordinatim vtrinque applicata ſit h i; atque vt quadratum rectæ b d ad quadratum rectæ b c, ita reciprocè ſit baſis f g ad baſim h i, ipſæque ſemi-

O

diametri a d, e c sint similiter diuisæ in b; ac proinde vt b d, b c, ita sint a d, e c. Ostendendum est centrum grauitatis figuræ f c g i d h compositæ ex vtroque segmento f c g, h d i esse in puncto b.

Quoniam enim vt quadratum rectæ b d, ad quadratum rectę c b, ita ponitur esse basis f g ad basim h i, si vt recta b d ad c b, ita fiat f b recta ad b k, seu b l, ac



p. 210

proinde tota f g ad k l; erit ipsa K l ad h i, vt b d ad c b: nam ratio quadrati b d ad c b est duplicata rationis rectæ b d ad c b. Intelligatur segmentum k d l cuius centrum a; quoniam segmenta f c g, k d l sunt similia quantum ad sectionem diametri, & ad inclinationem; & quoniam vt b d recta ad c b, ita reciprocè est f g recta ad K l, segmentum f c g erit æquale segmento k b l, per corollarium quartum propositionis vigesimæ secundæ libri primi. Quoniam verò segmenta K d l, h d i non discrepant nisi in basibus, habebunt se vt bases k l, h i, per quintum corollarium eiusdem propositionis.

Rursus vt c b ad f b g bifariam sectam in b, ita fieri intelligatur b d ad n b m bifariam sectam in b, & per n, d, m intelligatur descriptum segmentum n d m ex centro a; erunt segmenta n d m, f c g omninò & absolutè similia, ac proinde rectæ c b, b d, in quibus sunt centra grauitatis segmentorum f c g, n d m per huius decimam tertiam proportionaliter secabuntur. Sint ea centra o & p: ergo vt c b ad b d, ita erit o b ad b p: sed segmenta h d i, n d m cùm sint similia quantum ad diametri sectionem, & habeant bases in rectâ k l secantur secundum rationem rectarum h i, n m per primum corollarium propositionis vigesimæ secundæ citatæ: ergo per præcedentem habent cen-

26. primi huius.

trum grauitatis in eadem ad basim k l parallela: ergo cùm illud etiam habeant in recta e a per decimam tertiam huius: centrum grauitatis erit in p occursu parallelæ per p ductæ & rectæ e a.

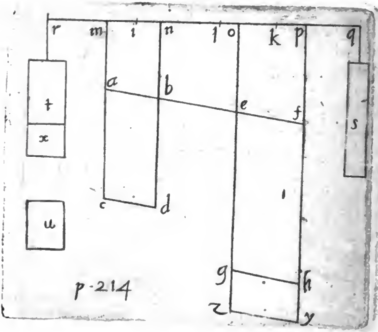
Quoniam ergo vt recta o b ad b p (hoc est vt recta c b ad b d) ita ostensum est
26. primi huius. esse segmentum h d i ad segmentum f c g, recta o p centra o & p connectens secta erit in b secundum rationem reciprocam grauium inde pendentium; ergo punctum b est centrum magnitudinis compositæ ex vtroque segmento h d i, f c g, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVII.

Si duo segmenta pendeant singula à libræ duobus punctis, ipsa verò libra suspendatur à puncto in quod cadit perpendiculum transiens per centrum grauitatis compositæ ex vtrâque figurâ magnitudinis; spatium quod æquiponderabit vni seorsum libratæ, æquiponderabit & alteri seorsum etiam appensæ, positâ vtrobique æqualitate brachij; & si æquiponderent iisdem positis, perpendiculum de centro grauitatis demissum cadet in punctum vnde libra suspensa fuerit.

Sit libra i k sustinens figuras a c d b, e g h f ex punctis m, n, o, p pendentes per perpendicula m a, n b, o e, p f; perpendicula verò per centra grauitatis figurarum dictarum, & compositę ex illis duabus magnitudinis ducta incidant in puncta i, k, l. Abscissis vtrinque equalibus l r, l q quocunque interuallo, dico librâ suspensâ ex l spatium quod pendens ex r ęquiponderat figurę e g h f vt iacet manenti, esse ęquale spatio quod pendens ex q æquiponderat figuræ a c d b vt iacet manenti. Et si sit æquale dico perpendicularem per l ductam transire per centrum magnitudinis compositæ ex duabus a c d b, e g h f.

Quoniam per puncta i, k perpendicula ducta transeunt per centra grauitatis, si figuræ suspendantur ex i & k tantùm, non mutabunt positionem vt dictum est in octauâ huius. Et quoniam perpendicularis per l ducta transit per centrum magnitudinis compositæ ex a c d b, e g h f; libra ex l suspensa, æquiponderabit figura ex k tantùm pendens figuræ ex i tantùm pendenti.



Si ergo vt recta l q ad l k, ita fiat ſpatium e g h f ad ſpatium ſ, quod ex q pendeat, ipſum ſ æquipōderabit eidem figuræ a c d b vt iacet manenti, cui figura e g h f æquiponderat ex *k* pendens, ſicut probatum eſt in octaua huius. Similiter ſi vt eſt l r recta, ſeu l q ipſi æqualis, ad l i ita fiat ſpatium a c d b ad ſpatium t quod ex r pendeat, ipſum t æquiponderabit eidem figuræ e g h f vt iacet manenti, cui figura a c b d æquiponderat ex i pendens.

Vt recta l q ad l i ita fiat ſpatiū e g h f ad ſpatium u. Quoniam vt l *k* recta ad l q, ita eſt ſpatiū ſ ad e g h f; & vt l q recta ad li, ita eſt e g h f ſpatiũ ad u: ergo ex æquo vt l k recta ad l i, ita eſt ſpatium ſ ad ſpatium u, & inuertendo vt recta l i ad l k, ita eſt u ad ſ. Rurſus quoniam vt recta l q ad l i, ita eſt ſpatium e g h f ad ſpatiũ u, & ita etiã eſt ſpatiũ a c d b ad t; ergo vt ſpatium e g h f ad u, ita eſt ſpatium a c d b ad t; & alternando vt ſpatium e g h f ad a c d b, ita eſt ſpatium u ad t: ſed vt ſpatium e g h f ad a c d b, ita eſt recta i l ad l k per ſextam aut ſeptimam æquiponderantium, cùm libra ex l ſuſpenſa ſibi inuicem æquiponderẽt ex i & k pendentia; ergo vt recta i l ad l k, ita eſt u ad t: ſed vt recta i l ad l k, ita oſtenſum eſt eſſe ipſum ſpatium u ad ſ: ergo ſpatia t & ſ ſunt æqualia. 9. quinti Euc.

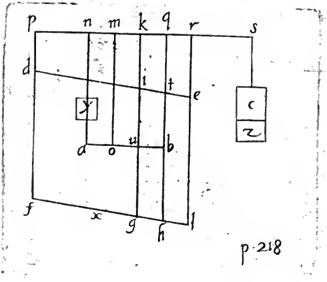
Iam ſpatia t & ſ ſint æqualia. Dico perpendiculum per l ductum tranſire per centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ ex a c d b, e g h f. Si enim fieri poteſt vt partes a c d b, e g h f magnitudinis compoſitæ ex a c d b, e g h f libra ex l ſuſpenſa non inuicẽ æquiponderent, fiet inclinatio libræ ad aliquam partium, fiat ad partes i, & ad partem e g h f addatur ſpatium g z y h quod neceſſarium eſt ad hoc vt æquilibrium fiat. Quoniam ergo, libra ex l ſuſpenſa, perpendicularis per l tranſit per centrum compoſitæ ex magnitudinibus a c d b, e z y f; eadem libra ex l ſuſpenſa, & ſuſtinente tantùm partem e z y f, cui ex r pendens æquiponderabit spatium, id erit æquale spatio s, quod ex q pendens libra suspensa itidem ex l æquiponderat figuræ a c d b; quod est absurdum, cùm spatium ex r pendens sit maius. Addito enim g z y h spatio æquiponderet spatium x; cùm spatium t æquiponderet figuræ e g h f, totum t x æquiponderabit toti e z y f: ergo t x est maius spatio t; atqui t ponitur æquale ipsi s: ergo spatium t x est maius spatio s. Non ergo &c.

PROPOSITIO XVIII.

Sit figura quæcunque d f l e, diuisa in duas d f g i, i g l e, & earum alterutrius l e g i centrum grauitatis sit b. Sit libra p s sustinens figuram eandem d f l e suspensam ex punctis p, r. Ex centro b perpendiculum ad libram incidens sit b q, quod non secet figuram d i g f. Ostendendum est suspensione libræ facta ex puncto q illam inclinatum iri ad partem d f g i: Et si ad partes oppositas ex quolibet puncto f pendeat graue c cohibens inclinationem libræ, retinensque eam in æquilibrio; graue c æquiponderare parti d f g i vt iacet manenti, librâ ex q manente suspensâ: item æquiponderare toti d f l e ex suo grauitatis centro pendenti per perpendiculum.

Partis d f g i centrum grauitatis sit a, iunctaque recta a b ita diuisa sit in o, vt sicut spatium d f g i ad spatium i g l e, ita sit recta b o ad o a, erit igitur o centrum grauitatis totius figuræ d f l e per sextam aut septimam propositionem libri primi Æquiponderantium: ergo libra suspensa ex q inclinatio eius fiet ad partes p, donec punctum o congruat perpendiculari ad horizontem ex q puncto demissæ.

Rursus quoniam in secunda propositionis parte ponitur graue c suspensum ex f cohibere libram, & retinere eam in suo situ ex q suspensam; si recta q b intelligatur produci vltra totam figuram, eamque diuidere in duas partes d f h, t h l e; easque pendere ex punctis p, q, r duæ simul magnitudines t h l e & c manentes vt



iacent æquiponderabunt magnitudini d f h t manenti vt iacet. Quoniam verò recta q b transit per b centrum grauitatis figuræ i g l e, pars i g h t suspensa ex punctis k, q æquiponderabit parti t h l e suspensæ ex punctis q, r. Cùm ergo libra suspensa ex q, magnitudo d f h t æquiponderet magnitudini compositæ ex t h l e & ex c: & ablata i g h t æquiponderet ablatæ t h l e: residua d f g i æquiponderat residuæ c.

Demum ex o centro grauitatis magnitudinis d f l e demissa sit linea directionis o m, solutisque suspensionibus ex p & r, remaneat suspensa tantùm ex m, manebit ex demonstratis ab Archimede in eodem situ. Similiter si ex a centro figuræ d f g i emittatur linea directionis & figurę d f g i suspensio tantùm fiat ex n, ipsa quoque manebit in suo situ; ergo quoniam ligata ex punctis p, k ęquiponderare ostensa est graui c; suspensa ex n æquiponderabit eidem spatio c, cum maneat in eodem situ. Rursus quoniam parallelæ sunt n a, m o, q b; vt recta b o ad o a, ita erit q m ad m n: sed vt recta b o ad o a, ita esse ponimus reciprocè spatium d f g i ad i g l e: ergo vt q m recta ad m n, ita est spatium d f g i ad i g l e; ergo inuertendo vt m n ad q m, ita i g l e ad d f g i : ergo componendo vt n q ad m q, ita d f l e ad d f g i : Quoniam igitur libra ex k suspensa figura d f g i pendens ex n æquiponderat spatio c: & [f] quoniam figura d f g i ad figuram d f l e pendentem ex m se habet vt q m recta ad q n ex iam demonstratis: ergo per octauam huius spatium d f l e pendens ex m ęquiponderat eidem spatio c, cui spatium d f g i pendens ex n æquiponderare demonstratum fuit.

6. de quadr. parab.

COROLLARIVM I.

Ex his consequitur si libra sustineat figuram d f l e, ex punctis p, r, suspendaturque ex q quod respondet centro b; & vt q s recta ad q m, ita fiat spatium d f l e ad spatium c; ipsum c æquiponderare figuræ d f g i vt iacet manenti, & pendenti ex punctis p, κ. Cùm enim figura d f l e ex punctis d, e pendens æquiponderet eidem spatio, cui æquiponderat ex puncto m solo pendês; & cùm ex puncto m pendens æquiponderet eidem spatio cui figura d f g i, ex puncto n pendens, seu quod idem est ex punctis p, κ, pendens; & cùm vt q s longitudo libræ vna ad q m longitudinem oppositam, ita sit spatium d f l e ad spatiũ c; ipsum c æquiponderabit tàm figuræ d f l e vt iacet manenti; quàm soli figuræ d f g i vt iacet manenti.

COROLLARIVM II.

Si quæuis figura d f l e cohæreat libræ p r suspensæ ita ex q, vt perpendicularis q h diuidens figuram non transeat per centrum grauitatis ipsius, sed illud relinquat ad partes p; diuidat autem in duas partes d f h t, t h l e; & sumptis vtrinque brachiis æqualibus q s, n q, suspensione vna figurę d f h t, libra ex q suspensa, vt iacet manenti æquiponderet spatium c z ex s pendens; altera autem libratione figuræ h t e l vt iacet manenti æquiponderet spatium y, libra ex q suspensa; ostendi potest si spatium z fiat æquale spatio y, residuum spatium c æquiponderare toti figuræ d f l e vt iacet manenti. Quoniã enim spatia y & z sunt æqualia, si figura i g h t abscindatur æquiponderans vt iacet spatio z, libra ex q suppensa, recta q h transibit per centrum grauitatis magnitudinis i g l e compositæ ex duabus i g h t, e t h l, vt ex præcedenti propositione apertum est. Quoniam ergo spatium c z ęquiponderat toti d f h t; & spatium z parti g h t i, reliquum c ęquiponderabit parti d f g i. Ergo cùm figura d f l e diuisa sit in duas d f g i, i g l e, & libra ex q suspensa perpendiculum g h transeat per centrum grauitatis figurę i g l e, spatium c æquiponderabit, vt in præsenti ostendimus, toti figuræ d f l e vt iacet manenti libra ex q suspensa.

SCHOLIVM.

Primo aspectu videbimur alicui concludere pugnantia cum illo axiomate Archimedeo, *si grauibus secundum quandam distantiam æquiponderantibus, alteri eorum adijciatur aliquod graue, tunc ea non æqua-*

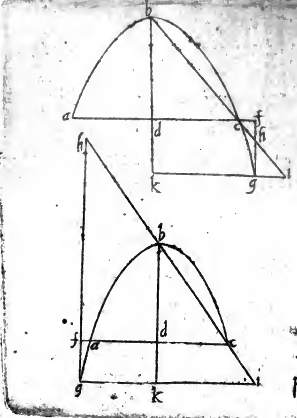
liter ponderant, sed illud deorsum fertur, cui graue fuerit adiunctum: libra etenim ex q suspensa magnitudini d f g i æquiponderat magnitudo c, & eadem magnitudo d f g i accessione nouæ magnitudinis non alleuat pondus c; sed manet pondus c adhuc æque ponderans vti demonstratio præsens contendit. Dubij huius solutio aperta est; quia enim accedit pondus i g l x, cuius centrum grauitatis incidit in præpendiculum ex libræ centro demissum, fit vt magnitudo accedat æque vtrinque ponderans. Non ergo mirum est, quod libra hæreat in æquilibrio, cùm ad partes vtrasque lineæ q h grauia i g h t, t h l e æquiponderantia accesserint.

ELEMENTORVM
TETRAGONISMICORVM
LIBER III.

Qui eſt, librâ ex centro circuli, ellipſeos, aut hyperbolæ ſuſpenſâ, de inuentione rectilinei eorum ſegmento æquiponderantis: vnde exiſtit Quadratura circuli & aliorum, *dato eiuſmodi ſegmentorum centro grauitatis.*

PROPOSITIO I.

SIT parabolæ ſegmentum contentũ rectâ lineâ a c, & curuâ a b c: ipſa autem b d à medio lineæ a c educatur diametro æquidiſtans, aut ipſa diameter: & b c iuncta producatur. Si alia quæuis linea f h ducatur æquidiſtãs ipſi b d, & ſecans vtraſque a c, c b in f & h, ipſam verò parabolam in g; habebit f h ad h g eandem proportionem quam d a ad d f.



p 224

Hæc

Hæc propoſitio eſt quarta quadraturæ paraboles, quia tamen in vulgatis libris, diagramma non exibet caſum qui nobis in præſenti neceſſarius eſt : apponimus eam hîc cum illo. Caſus prętermiſſus eſt quando punctum g eſt infra rectam a c; punctumq; f non cadit inter a & c, ſicut nec puncta h, i inter b, c, & inter k, g.

Ducatur igitur per g linea κ g æquidiſtans ipſi a c; quæ occurrat diametro in *k*, & rectæ b c in i : eſt igitur vt bd ad b *k* longitudine, ita d c ad k g poteſtate per libri primi conicorum vigeſimam. Quoniam vero in triangulo b κ i lateri *k* i parallela eſt d c, vt bd, d *k* ita erunt b c, b i; & componendo vt b d, b *k* ita b c, b i : quoniam igitur vt b d, b κ longitudine, ita oſtenſum eſt eſſe poteſtate d c, *k* g, ergo vt b c, b i longitudine, ita poteſtate d c, κ g : ſed ipſi k g æquale eſt d f oppoſitum latus parallelogrammi κ d f g : ergo vt b c, b i longitudine, ita poteſtate ſunt d c, d f.

2. ſexti Euc.

33. primi Euc.

Rurſus quoniam triangula b c d, h c f ſunt ſimilia. (habent enim angulos ad verticem c æquales, & alternos ad d & f item æquales) vt h c, c f, ita erũt b c, c d, & alternando vt h c, b c, ita c f, c d: & & componendo in prima figura, diuidendo autem in ſecunda, vt b c, b h, ita d c, d f : quoniam ergo vt b c, b i longitudine, ita oſtenſum fuit paulò antè eſſe poteſtate dc, df: & vt dc, df ita iam monstratum est esse bc, bh: ergo vt bc, bi longitudine, ita bc, bh potestate: ergo tres rectæ bc, bh, bi sunt proportionales.

20. sexti Euc.

Rursus quoniam vt bi ad bh, ita est bh ad bc, ergo diuidendo in prima figura, & componendo in secunda, vt bh, hi, ita bc, hc: & alternando vt bh, bc, ita hi, hc, & inuertendo vt bc, bh, ita hc, hi: sed sicut dc ad df, ita ostensum est esse bc ad bh: ergo vt dc ad df ita est hc ad hi: sed vt hc ad hi, ita est fh ad hg (sunt enim triangula fhc, ghi similia ob eandem rationem qua bcd, hcf ostensum fuit esse similia) ergo vt cd, df, ita hf, hg; ipsi autem dc æqualis est da, constat ergo da ad df eandem habere proportionem quam fh ad hg.

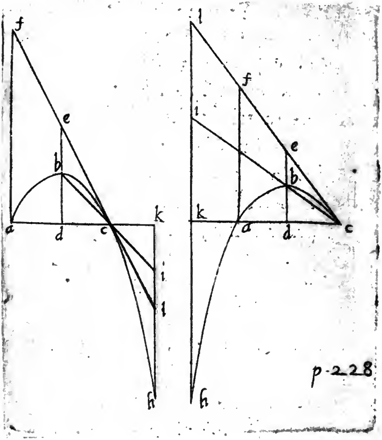
COROLLARIVM.

Ex his inferre licet vt da ad af, ita esse fh ad fg: quoniam enim vt df, da, ita hg, fh: ergo componẽdo in prima figura, & diuidendo in secunda vt af, da, ita fg, fh, & inuertendo vt da, af, ita fh, fg.

PROPOSITIO II.

Sit parabolæ segmentum contentum rectâ lineâ ac, & curuâ abc, ducta verò sit à puncto a linea af æquidistans diametro db, & à c puncto ducta sit tangens parabolam in c, eáque sit cf. Si extra triangulum fac ducatur quædam linea κl æquidistans ipsi af, occurrens verò parabolæ in h, rectis fc, ac in l, κ; vt aκ ad kc, ita erit κh ad hl.

Ducta sit linea kh æquidistans diametro bd, occurratque parabolæ in h, tangenti in l, & rectæ per b, c ductæ in i. Quoniam recta ce tangit parabolam in c, & occurrit diametro in e; erunt db, be æquales: cúmque triangula cde, ckl sint similia, & similiter secta per rectam bci, erunt ki, il, vt db, bc; ac proinde erunt ki, il æquales. Quoniam igitur ki, il sunt æquales; æquales verò etiam sunt ad, dc; vt ac ad da, ita erit kl ad ki: sed vt da ad ak, ita ex corollario præcedentis est ki ad kh: ergo ex æquo vt ac ad ak, ita est kl ad kh; & inurrtendo vt ak, ac, ita kh, kl: ergo per conuersionem rationis in primâ figurâ, & componendo in secunda vt ak, kc, ita kh, 35. primi Conic.



l h, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex demonstrationis progressu manifestum est vt a c, a *k*, ita esse *k* l, k h, quod perinde verum est in casu quo punctum k cadit inter a & c.

SCHOLIVM.

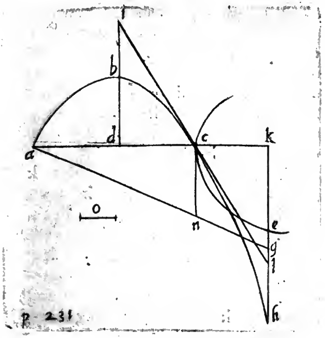
Cæterum iſta quoque propoſitio eſt quinta quadraturæ paraboles, ſed caſus deſcribitur omiſſus in editionibus illius libelli: in vtraque autem nonnulla reſtituimus ſeu vitio temporis intercepta, ſeu ab ipſo Authore omiſſa, vt benè aduertit Commandinus. Quòd ſi ab ipſo Archimede hæc & alia plurima quæ in eius operibus ſubſtituunt Eutocius, Commandinus, aliique, prætermiſſa fuerunt; confitendum eſt cum eodem Eutocio theoremata Archimedis eſſe δυσθεώρητα, atque vt intelligantur neceſſariam eſſe ἐπίστασιν ἀκριβῆ καὶ εὐεπίβολον φαντασίαν. Quare quod Plutarchus in Marcelli vita aſſeruit viam qua ille ad rem demonſtrandam pergit eſſe breuem, in confeſſo eſt apud omnes; at quod addit, eandem quoque eſſe planam & expeditam neſcio vtrum vllus mathematicarum diſciplinarum peritus conceſſerit.

PROPOSITIO III.

Sit parabolæ ſegmentum contentum rectâ a c, & curuâ a b c, cuius diameter b d, tangens verò

in c ſit c l, occurrens diametro in i. Sit præterea ſectionum oppoſitarum alterutra e, earumque diameter trãſuerſa a c, ad quam quæ ordinatim applicantur, ſint ipſi b d parallelæ. Per c acta ſit recta c n æquidiſtans ipſi b d, abſciſſaque ſit c n lateri recto æqualis; ſi vt d i recta ad c d, ita fiat recta c n ad quartam o; & ordinatim applicetur quæcunque recta k e, occurrens tangenti in l, & parabolæ in h: rectangulum ſub o & ſub k h comprehenſum æquale erit quadrato ordinatim
17. ſexti Euc. applicatæ k e; ac proinde tres rectæ o, k e, k h proportionales erunt.

Quoniam enim recta c n eſt æqualis lateri recto ſectionum oppoſitarum, & eſt parallela ordinatim applicatæ k e, erit rectangulum ſub c k, k g æquale quadrato ordinatim applicatæ k e: ſi enim c n ſit perpendicularis ad a c, rectæ a n, c f de-



terminabunt figuram vt Appollonius loquitur in vigesimâ primâ primi conicorum, hoc est rectangulum sub c k, k g, erit æquale quadrato k e: sed quamuis c n non sit perpendicularis ad diametrum a c, dummodo c n, k g sint parallelæ, vt c k ad a c, ita est k g ad c n: ergo siue c n sit perpendicularis ad diametrum a c siue non sit, semper recta k g est eiusdem magnitudinis; ergo cum rectangulum sub c k & sub k g sit tunc æquale quadrato rectæ k e, quando c n est perpendicularis ad diametrum; erit quoque idem rectangulum sub c k & k g eidem quadrato k e æquale 2. sexti Euc.

etiam tunc, cum c n non secabit ad rectos angulos diametrum a c.

Rursus quoniam rectangula sub a k, k l, & sub k g, k l habent eandem altitu-
1. sexti Euc. dinem k l, ita se habent inter se vt bases
4. sexti Euc. a k, k g: sed vt a k, k g, ita sunt a c, c n (eò quod triangula a k g, a c n sint similia) ergo vt a c recta ad c n ita est rectangulum sub a k, k l ad rectangulum sub k g, k l. Rursus vt rectangulum sub k g, k l ad rectangulum sub k g, k c, ita est recta k l ad k c (eò quod eadem sit altitudo k g) sed vt recta k l ad k c, ita est i d ad d c (eò quòd triangula i d c, l k c sint similia) & vt i d ad d c, ita est ex constructione recta c n ad o: ergo vt rectangulum sub k g, k l ad rectangulum sub k g, k c, ita est recta c n ad o. Quoniam igitur vt rectangulum sub a k, k l ad rectangulum sub k g, k l, ita ostensum est esse rectam a c ad c n, & vt rectangulum sub k g, k l ita ostensum est esse rectam c n ad o: ergo ex æquo vt rectangulum sub a k, k l, ad rectangulum sub k g, k c, ita est recta a c ad rectam o.

Quoniam autem vt recta a c ad a k, ita
16. sexti Euc. per corollarium præcedentis est recta k l ad k h; erit rectangulum sub a c, k h æquale rectangulo sub a k, k l: sed rectangulum sub a k, k l se habet ad rectangulum sub k g, k c vt recta a c ad rectam o: ergo rectangulum sub a c, k h se habet ad re-

ctangulum ſub kg, κc, hoc eſt ad quadratum ke (quod rectangulo ſub kg, κc æquale eſſe oſtenſum fuit) vt recta ac ad o. Cùm igitur vt recta ac ad o, ita ſit rectangulum ſub ac, κh ad rectangulum ſub o & kh (eò quod eandem altitudinem kh habeant) & vt ac ad o, ita ſit rectangulum ſub ac, kh ad quadratum κe: erit vt rectangulum ſub ac, kh ad rectangulum ſub o & κh, ita idem rectangulum ſub ac, κh ad quadratum κe: ergo rectangulum ſub o & κh eſt æquale quadrato *k*e per nonam quinti Euclidis; & tres rectæ o, κe, *k*h ſunt proportionales, quod erat demonſtrandum. 17. ſexti Euc.

COROLLARIVM I.

Quòd ſi punctum k cadat inter a & c, & circa diametrum ac, datâ lateris recti magnitudine cn, deſcripta ſit ellipſis ad cuius diametrum ac ordinatim in dato angulo idc applicatæ conueniant; eadem erit demonſtrationis vis, oſtenderturque tres rectas o, ke, kh eſſe proportionales; erit autem punctum e in perimetro ellipſeos.

COROLLARIVM II.

Quoniam tres rectæ o, *k*e, *k*h & rectangulum ſub o & *k*h eſt æquale quadrato

rectæ k c ordinatim applicatæ ad diametrum a c, quadrata ordinatim applicatarum erunt inter se, vt ipsarum portiones inter diametrum k c & parabolam interceptæ, cùm sint æqualia rectangulis contentis sub eadem altitudine o, & sub ipsis
1. sext. Euc. interceptis inter diametrum & parabolam, quæ hoc ipso se habent vt ipsæ interceptæ.

COROLLARIVM III.

Quòd si rectæ a c, d i, c n sint ęquales, & d i sit ad a c perpendicularis, recta o erit ęqualis semidiametro c d, & figura circa diametrum a c descripta erit circulus, vt ex demonstratis apertum est. Quoniam enim vt d i ad c d, ita est c n ipsi d i ęqualis ad o, erit recta o æqualis rectæ d c; & quoniam ordinatim applicatæ ad diametrum a c sunt perpendiculares ad ipsam, & recta c n est ipsi a c æqualis, figura circa diametrum a c descripta erit circulus, vt ex vigesimâ prima primi conicorum apertum est.

PROPOSITIO IV.

Sint sectiones oppositæ a & c, quarum diameter transuersa ac, centrum d, tangens cn, ſitque ipſa cn æqualis lateri recto ſectionum oppoſitarum, & per d acta ſit dg parallela tangenti cn. Diametro ac æquidiſtet pq, quæ occurret vtrique hyperbolę a & c in vno tantùm puncto ex conicorum doctrinâ; illud ſit p & q. Rectę dg ſit df æqualis, ipſaque dg bifariam in o ſecetur, atque per o ducta ſit lom ipſi adc æquidiſtāſ, ſintque lo, ad, om, dc æquales. His poſitis vt fg recta ad cn, ita fiat om ad oi, diuiſaque bifariam oi in b, vt bo recta ad ol, ita fiat ipſa ol ad π, datoque latere recto π, vertice b, diametro bo, ad quam ordinatim applicatæ æquidiſtent ipſi ol, deſcribatur parabola blm; oſtendendũ eſt primò parabolam tranſire per puncta l & m,

26 primi Conic.

52. primi Conic.

Per p & q ducantur p r, q f ipsi d g parallelæ, occurrentes rectæ o l in t & u. Quoniam rectangulum sub rectis π & o b est æquale quadrato ordinatim applicatæ per o ductæ, erit illa æqualis ipsi o l; cùm quadratum rectæ o l sit æquale ex constructione rectangulo sub rectis π & b o contento. Rursus quoniam l b m est parabolæ segmentum contentum recta l m & curuâ l b m, eiusque diameter est o b, ipsique o b abscissa est æqualis b i; si per i & m ducatur recta i m, tanget parabolam in puncto m, ex Conicis. Præterea quoniam a & c sunt sectiones oppositæ quarum diameter transuersa a c, ad quam quæ ordinatim applicantur sunt ipsi o b parallelæ; per c verò acta est recta c n æquidistans ipsi b d, & lateri recto sectionum oppositarum æqualis; & vt o i recta inter basim l m & tangentem m i intercepta ad c d, vel ad o m (est enim d o m c parallelogrammum) ita ponitur esse recta c n a d f g quartam; tres rectæ f g, κ e, z h erunt per præcedentem proportionales, & rectangulum sub f g, z h erit æquale quadrato rectæ z e: tres item rectæ f g, r p, & portio rectæ r t intercepta parabola l b m & recta m l erunt proportionales per eandem propositionem: idemque dicendum est de tribus rectis f g, f q, & portione rectæ f u intercepta inter parabolam l b m & rectam m l. Quo- 33 primi Conic.

niam igitur recta f g ponitur dupla rectæ d g seu r p, ipsa autem d g ponitur dupla rectæ o g seu t p: vt recta f g ad rectam r p, ita erit recta r p ad t p, & recta f q ad u q: sed vt recta f g ad rectam r p seu f q; ita est etiam recta r p ad portionem rectæ r t, vel f u interceptam inter rectam l m & parabolam l b m: ergo vt recta r p seu f q ad t p seu u q, ita est ipsa r p seu f q ad portionem rectæ
9. quinti. Euc. r t vel f u interceptam inter rectam l m & parabolam l b m: ergo rectæ t p seu u q æqualis est portio rectæ t p seu u q intercepta inter rectam t u & parabolam; ergo rectæ r t, f u occurrunt parabolæ in punctis p & q, quæ est prima pars eius quod erat demonstrandum primo loco.

Rursus quoniam quadratum k e est æquale quadratis k x, x e, & bis rectangulo k x e; rectangulum sub f g, z h cùm
4. secūdi Euc. sit æquale quadrato k e, erit æquale quadratis k x, x e, & bis rectangulo k x e: Quoniam verò rectangulum sub f g, z h, est æquale tribus rectangulis sub f g, z x; sub f g x e; sub f g, e h: rectangulum autem sub f g, z x est æquale quadrato
2. secundi. Euc. k x (sunt enim z x, k x, f g proportionales, cùm vt f g ponitur dupla rectæ g d, ita x k dupla rectæ z x ponatur esse) rectangulum autem sub f g, x e est æquale bis rectangulo sub k x, x e (rectangu-
17. sexti. Euc. la enim sub k x, x e, & sub f g, x e

cùm eandem altitudinem x e habeant, sunt inuicem vt bases κ x, f g, est autem f g; dupla rectæ κ x) ergo cùm rectangulum sub f g, z h sit æquale quadrato κ x, bis rectangulo k x e, & quadrato x e; & cùm rectangulum sub f g & sub z e sit æquale vt ostendimus, quadrato k x, & bis rectangulo k x e: rectangulum sub f g & sub z e erit minus rectangulo sub f g & sub z h: est ergo z h recta maior quam z e: ergo cùm ex rectangulo sub f g, z h sit ablatum rectangulum sub f g, z e: hoc est quadratum k x & bis rectangulum k x e: relinquetur rectangulum sub f g, e h quod erit æquale quadrato x e; quæ est altera pars eius quod erat primo loco demonstrandum. 1. sext. Euc.

Dico secundò si rectæ g b fiat b λ æqualis, & iungātur rectæ λ p, λ q; ipsas λ p, λ q tangere parabolam & hyperbolā in punctis p, q.

Quoniam g b, b λ sunt æquales erunt rectæ λ p, λ q tagentes parabolam in p, q. Rursus quoniam ad parabolæ l b m diametrū b g ordinatim applicatæ sunt o m, g q, erunt vt o m, g q, potestate, ita b o, b g longitudine. Præterea quoniam rectæ o b, b i sunt æquales ex hypothe- 33. primi Conic.

21. primi Conic. si, item gb, bλ; ergo, ablatis æqualibus, residua og, iλ erunt æqualia: sed og, od sunt etiam ex hypothesi ęquales: ergo rectæ od, iλ sunt æquales; ergo addita communi id compositæ rectæ dλ, io sunt æquales; ergo si ex recta dλ dematur æqualis rectæ ob, residuum erit æquale rectæ bi; cúmque bi, bo sint æquales, item bg, bλ; vt bo ad bg, ita erit bi ad bλ: ergo vt bo ad bg ita erit oi composita

12. quinti Euc. ex antecedentibus ad gλ compositam ex consequentibus: Sed dλ, oi sunt æquales, ergo vt bo, bg, ita dλ, gλ: sed vt dλ ad gλ, ita est dφ ad gq, eò quod in triangulo λgq lateri gq parallela sit dφ:

4. sexti Euc. ergo vt bo, bg, ita dφ, gq.

Quoniam ergo vt bo ad bg longitudine, ita ostensum est esse om ad gq potestate; & vt recta bo ad bg, ita ostensum est esse rectam dφ ad gq: ergo vt dφ ad gq longitutine, ita om ad gq potestate: ergo tres rectę gq, om, dφ sunt proportionales; sed om, dc sunt æqualia latera parallelogrammi domc: item gq, df sunt ęqualia latera parallelogrammi dgqf: ergo tres rectæ dφ, dc, df sunt proportionales; cùm ergo ex puncto q ordinatim applicata sit qf ad diametrum ck hyperbolæ c, recta qλ tan-

37. primi Conic. get hyperbolam c in puncto q ex conicis. Simili prorsus methodo ostendetur rectam

λp

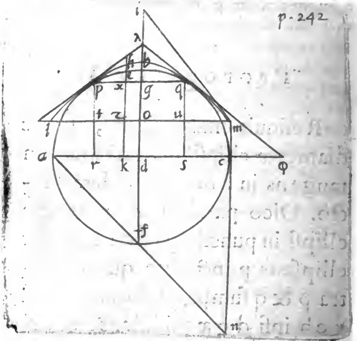
λp tangere in p hyperbolam a, quod erat oſtendendum ſecundo loco.

Propositio V.

Reliquis manentibus, ſit a c diameter ellipſeos, rectaque c n tangens in c ſit æqualis lateri recto. Dico parabolam occurrere ellipſi in punctis p & q: & ſi per ellipſeos punctum e quoduis intra p & q ſumptum ducatur recta κ e h ipſi d g æquidiſtans, & occurrens rectæ p q in x, tres rectas f g, x e, h e eſſe proportionales: & ſi rectæ g b fiat b λ æqualis, iungaturque λ q occurrens diametro a c in ρ, rectam λ q tangere in q parabolam l b m.

Hæc omnia iiſdem prorſus verbis oſtenduntur, quibus vſi ſumus paulò ante idipſum de ſectionibus oppoſitis demonſtrando; eandem verò rectam λ q tangere ellipſim in eodem puncto q, ita oſtendetur paucis immutatis.

p. 242



Quoniam ad parabolæ l b m diametrum b g ordinatim applicatæ sunt g q, o m, erunt per vigesimam primam primi Conicorum vt o m, g q potestate, ita b o, b g longitudine. Præterea quoniam rectę o b, b i sunt ęquales ex hypothesi, item g b, b λ: ergo ablatis æqualibus residua o g, i λ erunt æqualia: sed o d, o g sunt etiam ex hypothesi æquales: ergo rectæ o d, i λ sunt æquales: ergo additâ communi o λ, compositæ d λ, i o sunt æquales: ergo si ex recta d λ dematur recta æqualis rectæ o b, residuum erit æquale rectæ i b; cúmque b i, b o sint ęquales, item b g, b λ; vt b o ad b g ita erit b i ad b λ: ergo vt b o ad b g, ita erit o i composita ex antecedentibus b o, b i, ad g λ compositam ex consequentibus b g, b λ: sed d λ, o i sunt æquales; ergo vt b o, b g, ita d λ, g λ. *Cætera nihil differunt ab ijs quæ in priori, quare nec hîc sunt repetenda vsque ad illud* cùm ergo ex puncto q ordinatim applicata sit q f ad diametrum a c ellipseos, recta q λ tanget ellipsim in puncto q. Simili prorsus methodo ostendetur rectam λ p tangere in p eandem ellipsim. 37. primi Conic.

COROLLARIVM I.

Cùm parabola l b m & ellipsis tangant se in duobus punctis p & q manifestum ex conicis est in alio puncto sibi ipsis non occurrere; eademque de causâ apertum est parabolam l b m & sectiones oppositas non occurrere sibi in alio puncto quam in p & q. 27 quarti conic.

COROLLARIVM II.

Ex his quoque illud manifestum est. Data sit ellipsis cuius centrum d diameter a c, & in ellipsi ita aptata p q vt sit ipsi diametro parallela; atque per puncta p & q eductæ sint tangentes p λ, q λ conuenientes in λ (conueniens enim per vigesimam septimam secundi conicorum) iungaturque λ d occurrens rectæ p q in g,

& eam bifariam secans per trigesimam secundi Conicorum; ipsaque g λ bifariam secetur in b; atque per p, b, q describatur parabola cuius axis b g, & ordinatim vtrinque applicata p g; ellipsis & parabola contingent se in punctis p, q nec in alijs sibi occurrent. Item si a quouis puncto e peripheriæ intra triangulum λ p q descriptæ ducatur recta h e x parallela rectæ λ d, occurrens parabolæ in h, rectæ p q in x, fiantque d g, d f æquales, erunt tres rectæ f g, x e, e h proportionales.

COROLLARIVM III.

Ex his istud insuper manifestum est. Datæ sint sectiones oppositæ a, c, quarum centrum d, diameter transuersa a c, & illi parallela p q occurrens sectionibus in p & q, atque per puncta p & q eductæ sint tangentes p λ, q λ conuenientes in λ (conuenient enim per trigesimam primam
31 secundi Conic. secundi Conicorũ) iungaturque λ d occurrens rectæ p q in g; & eam bifariam secans; ipsaque g λ bifariam secetur in b; atque per p, b, q describatur parabola, sectiones oppositæ & parabola contingent se in punctis p & q, nec in alio sibi occurrent. Item si à quouis puncto e sectionum oppositarum vltra puncta p & q sumpto ducatur recta h e x parallela re-

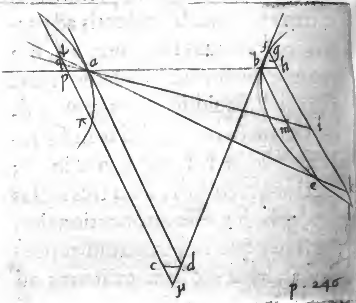
ctæ λ d; occurrens parabolæ in h, & rectæ p q in x, fiantque d g, d f æquales, erunt tres rectæ f g, x e, e h proportionales.

PROPOSITIO VI.

Sint sectiones oppositæ a, b, & per a & b ductæ tagentes a d, b d conueniant in d: per b ducta sit b e æquidistans tangenti a d & occurrens sectioni in e. Iuncta recta a e, per quoduis punctum g portionis hyperbolæ b extra rectam a b existentis ad partes eas ad quas tangentes a d, d b non concurrunt ducatur recta f g h k l æquidistans tangenti a d, & occurrẽs tangenti d b in f; rectæ a b in h; rectæ a e in k; sectioni verò in l; dico tres rectas f g, g h, h k esse proportionales. Et si per quoduis punctum n portionis hyperbolæ a existentis ad easdem partes, ducatur recta n ψ p π μ occurrens rectæ e a in ψ; rectæ a b in p, & tangenti b d in μ; tres rectas n μ, p n, p ψ esse proportionales.

Quoniam enim tangentes a d, b d conueniunt in b, & tangenti a d æquidistat f l, erit vt quadratum a d ad quadratum d b, ita rectangulum l f g ad quadratum f b lineæ inter æquidistantem f l & tactum b interiectæ; sed vt quadratum a d ad quadratum d b, ita est quadratum f h ad f b (eò quòd triangula a d b, h f b sint similia; habent enim angulos ad verticem

18. tertij Codic.



b æquales; & alternos ad a, d, h, f æquales) ergo vt quadratum f h ad quadratum f b; ita rectangulum l f g ad idem quadratum f b: ergo rectangulum l f g est æquale quadrato f h: ergo tres rectæ f g, f h; f l sunt proportionales. 9 quinti Euc. 17. sexti Euc.

Diuidatur b e bifariã in m, & per m & a ducatur recta a m occurrẽs rectæ f l in i; erit a m diameter; ac proinde ordinatim applicatæ f i, i l æquales erunt: sed h i, i k sunt etiam æquales (nam in triangulo a h k lateri h k parallela est b e; ergo vt b m, m e, ita h i, i k) ergo h g, k l sunt æquales. 34. secundi Conic. 4. Sexti Euc.

Rursus quoniam vt f g, f h, ita sunt f h, f l; ergo diuidendo vt f g, ad g h, siue ad l k; ita erit f h ad h l; & alternando vt f g f h, ita l k, l h: ergo diuidendo vt f g, g h, ita l k siue g h ad h k, ergo tres rectæ f g, g l, h k sunt continuè proportionales.

Rursus quoniam a d, b d conueniunt in d, & tãgenti ad æquidistat μ n, erit vt quadratum a d ad quadratum d b, ita rectangulum m μ π ad quadratum μ b lineæ inter æquidistantem n μ & tactum b interiectæ: sed vt quadratum a d ad quadratum d b; ita est quadratum p μ ad quadratum μ b (eò quòd triangula a b d, p b μ sint similia ex corollario quartæ sexti Euclidis) ergo vt quadratum p μ ad quadratum μ b, 18. tertij Conic.

ita est rectangulum in $\mu\pi$ ad idem quadratum μb: ergo quadratum pμ est æquale rectangulo n$\mu\pi$: ac proinde tres rectæ nμ, pμ, $\mu\pi$ sunt proportionales.

9. quinti Euc.

17. sexti Euc.

Producatur diameter a m, donec occurrat rectæ nμ, punctum verò occursûs sit q. Quoniam nπ est tangenti a d æquidistans, & a q est diameter, erit nπ ordinatim ad diametrum vtrinque applicata: ergo n q, qπ sunt æquales: sed p q, qψ sunt etiam equales (eò, quod triangula aψ p, a e b sint similia & similiter secta per rectam q a m) ergo ψn, pπ sunt æquales; ergo tres rectę $\mu\pi$, πp, seu ψn & pψ sunt proportionales, vt in simili paulò superius ostendimus.

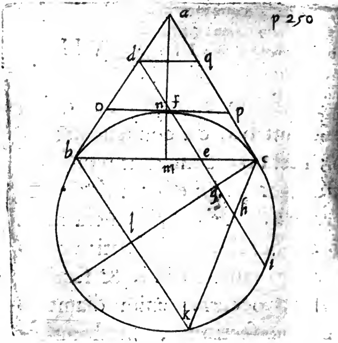
31. primi Conic.

Quoniam igitur tres rectæ pψ, ψn seu πp, & $\mu\pi$ sunt proportionales & vt pψ ad ψn seu ad πp, ita est pπ ad $\pi\mu$: ergo componendo vt pψ ad p n, ita pπ ad pμ: ergo vt pψ ad p n, ita $\psi\pi$ composita ex antecedentibus, ad nμ compositam ex consequentibus: quoniam autem ψn, pπ sunt æquales, vt ostensum est, erunt addita communi ψp, rectę p n, $\psi\pi$ ęquales: cùm ergo vt pψ ad p n, ita sit, vt ostendimus, $\psi\pi$ ipsi p n ęqualis ad nμ, erunt tres rectæ pψ, p n, nμ proportionales, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO VII.

Sit sectio conica b f c quàm tangant b a, c a conuenientes in a; recta b c connectat puncta tactûs, & per c educta sit diameter c l; per b verò ducta recta b k æquidistans tangenti a c occurrat diametro in l, & sectioni in k; occurret enim diametro ipsique sectioni, secabiturque bifariam in l, cùm sit parallela rectæ a c tangenti in c. Si per f quodlibet punctum sectionis b f c ducatur recta d h parallela tangenti a c, secans rectas b c, c l, c k, in e, g, h; dico tres rectas d f, f e, e h esse proportionales.

Quoniam enim tangens a c est parallela ordinatim applicatæ ad diametrum c l, cùm f g sit tagenti parallela erit ad diametrum ordinatim applicata, ac proinde pro- 32 primi Conic.



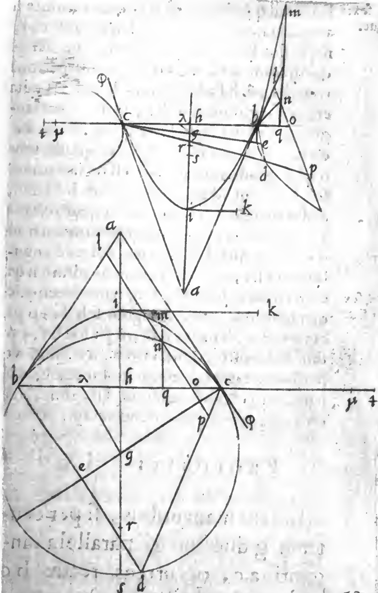
ducta occurret sectioni, & bifariã secabitur in g: occurrat ergo sectioni in puncto i. Quoniã a b, a c contingunt sectionẽ & contingenti a c parallela ducta est d i, rectangulum i d f se habebit per decimam sextam tertij conicorum ad quadratum d b vt quadratũ a c ad quadratum a b; sed vt quadratum a c ad quadratum a b, ita se habet quadratum e d ad quadratum d b (eò quòd similia sint triangula c a b, e d b) ergo vt rectangulum i d f ad quadratum d b, ita est quadratum d e ad quadratum idem d b: ergo rectangulum i d f est æquale quadrato d e: ergo tres rectæ d f, d e, d i sunt proportionales.

Rursus quoniam g f, g i sunt æquales, ergo ablatis æqualibus e g, g h (cùm enim in triangulo c b k lateri b k parallela sit e h, vt b l, l k, ita erũt e g, g h) residuæ f e, h i sunt æquales: quoniã igitur vt d f, d e, ita sunt d e, d i: ergo diuidendo vt d f a d f e siue ad h i; ita erit d e ad e i: & alternando vt d f, d e, ita h i, e i: ergo diuidendo vt d f f e, ita h i ipsi f e æqualis ad h e. Tres ergo rectæ d f, f e, e h sunt continuè proportionales quod erat demonstrandum.

Propositio VIII.

Sit circuli, ellipseos, vel sectionum oppositarum centrum g; rectæ in b & c tangentes conueniant in punctum a; iuncta sit c g, & ad eam ex b ordinatim applicata b e occurrens ex alterâ parte sectioni in d; iunctis c d, a g, b c, sit h intersectio rectarum b c, a g, & portio a h bifariam secetur in i; atque vt i h recta ad h c, ita fiat h c recta ad i k perpendicularem ad rectam i h. Dato latere recto i k, diametro i h, vertice i describatur parabola cuius ordinatim ad diametrum i h applicatæ æquidistent rectæ c b; transibit per b & c vt in quartâ huius ostensum est. Rursus vt quadratũ a h ad quadratum a c, ita fiat h r dupla rectæ h g ad h s, & vt recta b d ad b c, ita fiat recta h s ad c t. Si per o quodlibet punctũ rectæ b c ducatur ad rectam a c parallela l n o p occurrens sectioni in n, & rectis a b, d c in l & p: & per n ad diametrum i h parallela agatur m n q, secans parabolam in m, & rectam b c in q: Dico vt est recta c t ad c o, ita esse rectam l n ad n m.

Quoniam enim rectangulum sub p o, n l est æquale quadrato n o per sextam & septimam huius; & rectangulum sub h r duplâ rectę h g, subque n m est æquale quadrato rectę q n, per quartam & quintam huius; & quoniam quadratum q n se



p. 253

ipsa ad b c, & h a ad a c, & a c ad a φ; autem proportio c t ad c μ est ex constructione eadem quæ rectæ a φ ad a c: proportio rectæ h r ad c μ componetur ex rationibus rectarum b d ad b c, & h a ad a c: Sed proportio rectæ h r ad λ c componitur, vt ostensum est, ex rationibus earundem rectarum b d ad b c, & h a ad a c: ergo rectæ c μ, c λ sunt æquales: sed recta c t se habet ad c μ ex constructione vt c a recta ad a h: ergo c t se habet ad c λ, vt c a recta ad a h, quod erat demonstrandum.

DEFINITIONES.

I. Systema notâ methodo descriptum, vel absolutè systema appello figuram in superiori propositione exhibitam, in qua parabola circulum, vel ellipsim, vel sectiones oppositas tangit in duobus punctis iuxta modum ibidem & in præcedentibus traditum & demonstratum.

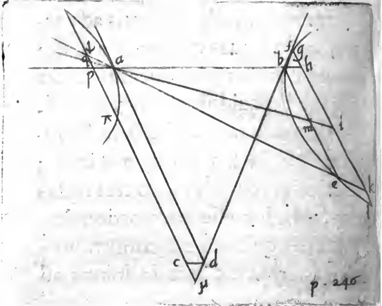
II. Lunulam parabolicam systematis, vel absolutè lunulam parabolicam

rabolicam appello figuram parabolâ & circulo, vel ellipsi comprehensam: aut etiam figuram parabolæ & circuli vel ellipseos portionibus, & rectâ insuper vel rectis diametro rectæ æquidistantibus contentam; curuas verò quibus continetur appello arcus superiorem & inferiorem: superioris autem nomine intelligo parabolam.

III. Cuspides xystroides appello figuras conuexis parabolæ & sectionum oppositarum, rectâque diametro directæ æquidistante contẽtas: curuas verò quibus continẽtur appello falces superiorem & inferiorem: superioris autem nomine intelligo parabolam.

IV. Tactus systematis appello puncta c & b; rectam c b voco connectentem tactus; punctum g, centrum systematis; lineam easdem partes, ducatur recta $n \psi p \pi \mu$ occurrens rectæ e a in ψ; rectæ a b in p, & tangenti b d in μ; tres rectas $n\mu$, p n, $p\psi$ esse proportionales.

18. tertij Codic. Quoniam enim tangentes a d, b d conueniunt in b, & tangenti a d æquidistat f l, erit vt quadratum a d ad quadratum d b, ita rectangulum l f g ad quadratum f b lineæ inter æquidistantem f l & tactum b interiectæ; sed vt quadratum a d ad quadratum d b, ita est quadratum f h ad f b (eò quòd triangula a d b, h f b sint similia; habent enim angulos ad verticem



b æquales; & alternos ad a, d, h, f æquales) ergo vt quadratum fh ad quadratum fb; ita rectangulum lfg ad idem quadratum fb: ergo rectangulum lfg est æquale quadrato fh: ergo tres rectæ fg, fh; fl sunt proportionales. (9 quinti Euc.) (17. sexti Euc.)

Diuidatur bc bifariã in m, & per m & a ducatur recta am occurrẽs rectæ fl in i; erit am diameter; ac proinde ordinatim applicatæ fi, il æquales erunt: sed hi, ik sunt etiam æquales (nam in triangulo ahk lateri hk parallela est bc; ergo vt bm, mc, ita hi, ik) ergo hg, kl sunt æquales. (34. secundi Conic.) (4. Sexti Euc.)

Rursus quoniam vt fg, fh, ita sunt fh, fl; ergo diuidendo vt fg, ad gh, siue ad lk; ita erit fh ad hl; & alternando vt fg fh, ita lk, lh: ergo diuidendo vt fg, gh, ita lk siue gh ad hk, ergo tres rectæ fg, gl, hk sunt continuè proportionales.

Rursus quoniam ad, bd conueniunt in d, & tãgenti ad æquidistat μn, erit vt quadratum ad ad quadratum db, ita rectangulum mμπ ad quadratum μb lineæ inter æquidistantem nμ & tactum b interiectæ: sed vt quadratum ad ad quadratum db; ita est quadratum pμ ad quadratum μb (eò quòd triangula abd, pbμ sint similia ex corollario quartæ sexti Euclidis) ergo vt quadratum pμ ad quadratum μb, (18. tertij Conic.)

ita est rectangulum in $\mu\pi$ ad idem quadratum μb: ergo quadratum pμ est æquale rectangulo n$\mu\pi$: ac proinde tres rectæ nμ, pμ, $\mu\pi$ sunt proportionales.

9. quinti Euc. 17. sexti Euc.

Producatur diameter a m, donec occurrat rectæ nμ, punctum verò occursûs sit q. Quoniam nπ est tangenti a d æquidistans, & a q est diameter, erit nπ ordinatim ad diametrum vtrinque applicata: ergo n q, qπ sunt æquales: sed p q, qψ sunt etiam equales (eò quod triangula aψ p, a e b sint similia & similiter secta per rectam q a m) ergo ψn, pπ sunt æquales; ergo tres rectę $\mu\pi$, πp, seu ψn & pψ sunt proportionales, vt in simili paulò superiùs ostendimus.

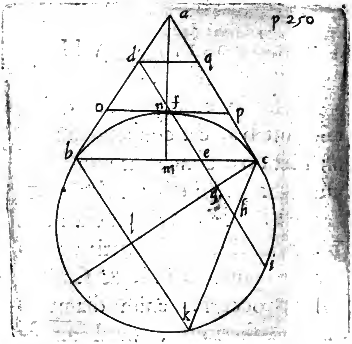
31. primi Conic.

Quoniam igitur tres rectæ pψ, ψn seu πp, & $\mu\pi$ sunt proportionales & vt pψ ad ψn seu ad πp, ita est pπ ad $\pi\mu$: ergo componendo vt pψ ad p n, ita pπ ad pμ: ergo vt pψ ad p n, ita $\psi\pi$ composita ex antecedentibus, ad nμ compositam ex consequentibus: quoniam autem ψn, pπ sunt æquales, vt ostensum est, erunt addita communi ψp, rectę p n, $\psi\pi$ ęquales: cùm ergo vt pψ ad p n, ita sit, vt ostendimus, $\psi\pi$ ipsi p n equalis ad nμ, erunt tres rectæ pψ, p n, nμ proportionales, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO VII.

Sit sectio conica b f c quàm tangant b a, c a conuenientes in a; recta b c connectat puncta tactûs, & per c educta sit diameter c l; per b verò ducta recta b k æquidistans tangenti a c occurrat diametro in l, & sectioni in k; occurret enim diametro ipsique sectioni, secabiturque bifariam in l, cùm sit parallela rectæ a c tangenti in c. Si per f quodlibet punctum sectionis b f c ducatur recta d h parallela tangenti a c, secans rectas b c, c l, c k, in e, g, h; dico tres rectas d f, f e, e h esse proportionales.

Quoniam enim tangens a c est parallela ordinatim applicatæ ad diametrum c l, cùm f g sit tagenti parallela erit ad diametrum ordinatim applicata; ac proinde pro- 32 primi Conic.



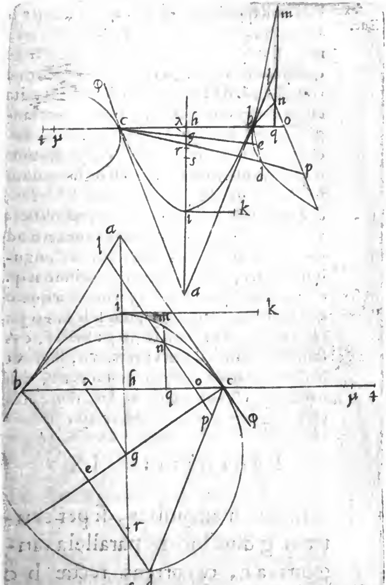
ducta occurret sectioni, & bifariã secabitur in g: occurrat ergo sectioni in puncto i. Quoniã a b, a c contingunt sectionẽ & contingenti a c parallela ducta est d i, rectangulum i d f se habebit per decimam sextam tertij conicorum ad quadratum d b vt quadratũ a c ad quadratum a b; sed vt quadratum a c ad quadratum a b, ita se habet quadratum e d ad quadratum d b (eò quòd similia sint triangula c a b, e d b) ergo vt rectangulum i d f ad quadratum d b, ita est quadratum d e ad quadratum idem d b: ergo rectangulum i d f est æquale quadrato d e: ergo tres rectæ d f, d e, di sunt proportionales.

; Rursus quoniam g f, g i sunt æquales, ergo ablatis æqualibus e g, g h (cùm enim in triangulo c b k lateri b k parallela fit e h, vt b l, l k, ita erūt e g, g h) residuæ f e, h i sunt æquales: quoniā igitur vt d f, d e, ita sunt d e, d i: ergo diuidendo vt d f a d f e siue ad h i; ita erit d e ad e i: & alternando vt d f, d e, ita h i, e i: ergo diuidendo vt d f f e, ita h i ipsi f e æqualis ad h e. Tres ergo rectæ d f, f e, e h sunt continuè proportionales quod erat demonstrandum.

Propositio VIII.

Sit circuli, ellipseos, vel sectionum oppositarum centrum g; rectæ in b & c tangentes conueniant in punctum a; iuncta sit c g, & ad eam ex b ordinatim applicata b e occurrens ex alterâ parte sectioni in d; iunctis c d, a g, b c, sit h intersectio rectarum b c, a g, & portio a h bifariam secetur in i; atque vt i h recta ad h c, ita fiat h c recta ad i k perpendicularem ad rectam i h. Dato latere recto i K, diametro i h, vertice i describatur parabola cuius ordinatim ad diametrum i h applicatæ æquidistent rectæ c b; transibit per b & c vt in quartâ huius ostensum est. Rursus vt quadratū a h ad quadratum a c, ita fiat h r dupla rectæ h g ad h s, & vt recta b d ad b c, ita fiat recta h s ad c t. Si per o quodlibet punctū rectæ b c ducatur ad rectam a c parallela l n o p occurrens sectioni in n, & rectis a b, d c in l & p: & per n ad diametrum i h parallela agatur m n q, secans parabolam in m, & rectam b c in q: Dico vt est recta c t ad c o, ita esse rectam l n ad n m.

Quoniam enim rectangulum sub p o, n l est æquale quadrato n o per sextam & septimam huius; & rectangulum sub h r duplâ rectę h g, subque n m est æquale quadrato rectę q n, per quartam & quintam huius; & quoniam quadratum q n so



p. 253

5. sexti Euc. habet ad quadratum n o vt quadratum a h ad quadratum a c (eò quòd triangula a h c, n q o sint similia) & vt quadratum a h ad quadratum a c, ita est ex constructione recta h r ad h s; & vt recta h r ad h s, ita est rectangulum sub h r, n m ad rectangulum sub h s, n m, (eò quòd eorum eadem sit altitudo m n) ergo vt quadratum n q ad quadratum n o, ita est rectangulum sub h r, n m ad rectangulum sub h s, n m; & alternando vt quadratum n q ad rectangulum sub h r, n m; ita quadratum n o ad rectangulum sub h s, n m: sed rectangulum sub h r, n m est æquale quadrato n q: 16. sexti Euc ergo rectangulum sub h s, n m est æquale quadrato n o, seu rectangulo sub l n, o p: ergo vt l n, h s, ita n m, o p: sed h s, c t, sunt ex constructione vt o p, o c, siue vt b d, b c: ergo ex æquo vt l n, c t, ita n m, o c: & alternando vt l n, n m, ita c t, o c, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO IX.

Iisdem manentibus, si per centrum g ducatur g λ parallela tangenti a c, occurrens rectæ b c in λ, ostendendum est rectam c t se habere ad c λ, vt recta a c se habet ad a h.

Vt recta ac ad ah, ita fiat ct ad c μ; & vt h a ad a c ita fiat a c ad a φ. Quoniam rectæ g λ, a c sunt parallelę, & in illas incidit recta a g, anguli alterni c a h, h g λ sunt æquales; triangula ergo c a h, h g λ sunt similia, vtque c a, a h, ita λ g, g h. Similiter quoniam parallelę sunt b e, g λ, triangula c λ g, c b e sunt similia; ac proinde vt e b, b c, ita g λ; λ c.

Rursus quoniam tres rectæ h a, a c, a φ sunt proportionales vt recta h a ad rectam a φ, ita erit quadratum rectæ h a ad quadratum a c: Cum igitur proportio quam habet recta h r ad c t componatur ex rationibus rectę b d ad b c, & quadrati a h ad quadratum a c; componetur quoque ex rationibus rectarum b d ad b c, & h a ad φ a; & cùm proportio rectæ h a ad a φ componatur ex rationibus rectarum h a ad a c, & a c ad a φ, proportio rectæ h r ad c t componetur ex rationibus rectarum b d ad b c, & h a ad a c, & a c ad a φ.

20. sexti Euc. in coroll.

Rursus quoniam proportio quam habet h g recta ad λ c componitur ex rationibus rectarum h g ad g λ, & g λ ad λ c, componetur quoque ex rationibus rectarum e b ad b c, & h a ad a c; & ratio quam h r dupla rectæ h g habet ad λ c componetur ex rationibus rectarum d b quæ est rectæ b e dupla, ad b c, & h a ad a c.

Quoniam igitur proportio rectæ h r ad c t componitur ex rationibus rectarum b d ad b c, & h a ad a c, & a c ad a φ; ipsa autem proportio c t ad c μ est ex constructione eadem quæ rectæ a φ ad a c: proportio rectæ h r ad c μ componetur ex rationibus rectarum b d ad b c, & h a ad a c: Sed proportio rectæ h r ad λ c componitur, vt ostensum est, ex rationibus earundem rectarum b d ad b c, & h a ad a c: ergo rectæ c μ, c λ sunt æquales: sed recta c t se habet ad c μ ex constructione vt c a recta ad a h: ergo c t se habet ad c λ, vt c a recta ad a h, quod erat demonstrandum.

DEFINITIONES.

I. Systema notâ methodo descriptum, vel absolutè systema appello figuram in superiori propositione exhibitam, in qua parabola circulum, vel ellipsim, vel sectiones oppositas tangit in duobus punctis iuxta modum ibidem & in præcedentibus traditum & demonstratum.

II. Lunulam parabolicam systematis, vel absolutè lunulam parabolicam appello figuram parabolâ & circulo, vel ellipsi comprehensam: aut etiam figuram parabolæ & circuli vel ellipseos portionibus, & rectâ insuper vel rectis diametro rectæ æquidistantibus contentam; curuas verò quibus continetur appello arcus superiorem & inferiorem: superioris autem nomine intelligo parabolam.

III. Cuspides xystroides appello figuras conuexis parabolæ & sectionum oppositarum, rectâque diametro directæ æquidistante contētas: curuas verò quibus continētur appello falces superiorem & inferiorem: superioris autem nomine intelligo parabolam.

IV. Tactus systematis appello puncta c & b; rectam c b voco connectentem tactus; punctum g, centrum systematis; lineam a h , diametrum rectam systematis; eam quæ per g ducitur parallela tactus connectenti, nomino diametrum transuersam systematis; rectas a c, a b, tangentes systematis; & lineam c a cui parallelæ ducuntur reliquæ appello tangentem notam.

v. Rectam c λ interceptam tangente c a & ei parallelâ g λ appello brachium libræ systematicum.

vi. In systemate si rectarum diametro rectæ æquidistantium portiones contentæ lunula vel cuspide intelligantur à puncto in quo occurrunt arcui vel falci inferiori eò vsque inclinari dum fiât diametro transuersæ æquidistantes; curua per earum extrema incedens appelletur exparabola, figura autem contenta arcu vel falce inferiori, ipsa exparabolâ,

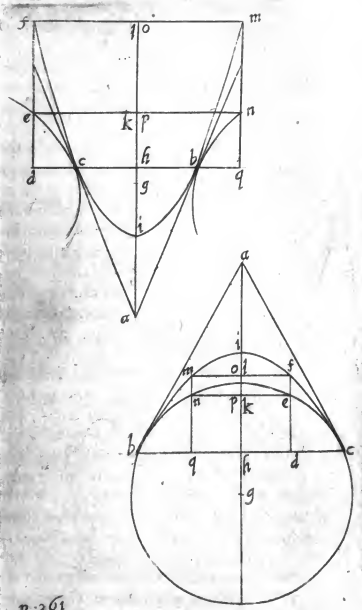
& rectâ vel rectis æquidistantibus diametro transuersæ, appelletur cuspis vel lunula exparabolica.

VII. Si in systemate à quouis puncto inferioris arcûs vel falcis ducantur rectæ cuidã alteri quàm systematis diametris æquidistantes, &.ex eis à pũcto arcus vel falcis inferioris versus superiorem abscindantur portiones, quæ se habeant ad æquidistantem diametro rectæ per idem arcûs vel falcis punctum ductam & lunulâ vel cuspide interceptam, vt portiones earundem ab eodem puncto ad lineam tactus connectentem extensæ; curua per earum extrema incedens appelletur quadratrix genita ex positione illius rectæ, figura autem contenta arcu vel falce inferiori, ipsa quadratrice, & recta vel rectis æquidistantibus lineæ illi ex cuius positione quadratrix genita fuerit, dicatur lunula vel cuſpis media.

Propositio X.

Si in recta tactus ſyſtematis cōnectente deſignentur duo puncta ab eius cum diametro rectâ occurſu æqualiter remota, & per ea ductæ æquidiſtantes rectæ diametro, interſecent lunulam vel cuſpides; ipſarum æquidiſtantium portiones interceptæ lineâ tactus coniungente & arcubus lunularum vel cuſpidum falcibus erunt æquales.

Sit ſyſtema cuius centrum g; tangentes b a, a c; tactus c, b; recta tactus connectens b c, diameter recta g a; parabola b i c; ſitque circulus vel ellipſis vel ſectiones oppoſitæ per b & c ex centro g notâ methodo deſcriptæ; interſectio diametri rectæ & tactus connectentis ſit h; atque vtrinque ita ſumptæ ſint æquales h q, h d; vt rectæ per q & d æquidiſtantes diametro



p·261

g a ductæ secent arcus lunulę, vel falçes cuspidum in punctis n, m, e, f. Dico rectam q m esse æqualem rectæ d f, & rectam q n rectę d e; ac proinde & rectam n m rectæ f e.

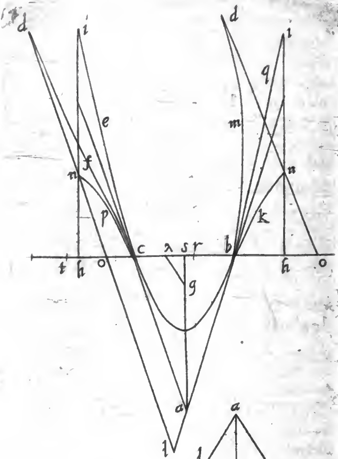
Per n, m, e, f ducantur æquidistantes n p, m o, e k, f l; erunt q o, d l parallelogramma ac proinde latera opposita q h, m o erunt æqualia; item h d, l f: sed q h, h d sunt ex constructione rectæ ęquales; ergo m o, l f, m p, k e sunt æquales. Cùm igitur recta a h sit diameter communis parabolæ, & circulo vel ellipsi vel sectionibus oppositis systematis; & cùm b c sit ad illam diametrum ordinatim aplicata, erunt pariter ordinatim ad illam applicatæ rectæ m o, l f, n p, e k. Quoniam ergo m o, l f sunt æquales & ordinatim applicatę ad diametrum h a, iacebunt in directum; ergo figura q m f d est parallelogramma, ac proinde latera opposita q m, d f sunt æqualia; similiter ostendetur rectas n p, e k iacere in directum, & figuram q n e d esse parallęlogrammam, ac proinde latera opposita q n, ę d esse æqualia: si ergo ex æqualibus q m, d f auferantur æquales q n, d e residuæ n m, e f erunt æquales, quod erat demonstrandum.

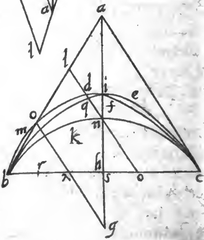
34 primi Eucl.

PROPOSITIO XI.

Vt brachium libræ ſyſtematicum ad lineæ tactus coniungentis portionem interceptam tangente notâ & illi parallelâ ſecante lunulam vel cuſpidum alteram; ita eiuſdem parallelæ portio intercepta lunulâ vel cuſpide, ad portionem interceptam arcu vel falce inferiore, & quadratrice genita ex poſitione tangentis notæ.

Sit ſyſtematis centrum g; tangentes c a, b a, earumque nota tangens ſit c a; connectens tactus c b; concurſus diametri g a & rectæ c b ſit f; parabola e c b q; circulus, vel ellipſis, vel ſectiones oppoſitæ b k p c; brachium libræ ſyſtematicum c λ; quadratrix genita ex poſitione tangentis notæ c a ſit m b c f. In rectâ c b ſumptum ita ſit quoduis punctum o, vt recta per o ducta æquidiſtans tangenti notæ c a ſecet lunulam b q e c p k, vel aliquam cuſpidum ad puncta b & c per falces q b, k b & e c, p c conſtitutarum; ſecet autem





p-264

in puncto n inferiorem arcum vel falcem, tangentem a b in l, quadratricem in d. Dico vt eſt c λ recta ad c o, ita eſſe l n rectam ad d n.

Per n agatur h n i parallela diametro g a, occurrens tactus connectenti in h, & parabolę in i. Vt ſ a recta ad a c, ita fiat λ c ad r c. Ergo per octauam huius vt r c recta ad c o, ita eſt recta n l ad n i: ſed ex generatione quadratricis vt n h recta ad n o, hoc eſt vt ſ a recta ad a c, ita eſt n i recta ad n d: ergo tres rectæ n l, n i, n d ita ſe habent ad tres λ c, r c, c o, vt ſicut n l ad n i, ita ſit r c ad c o; & ſicut n i ad n d, ita ſit λ c ad r c: ergo cùm earum ratio ſit perturbata, erit ex æquo vt n l recta ad n d, ita λ c recta ad c o, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ex his manifeſtum eſt in ſyſtemate ſectionum oppoſitarum rectam d n terminatam ad hyperbolam b eſſe maiorem rectâ n l; terminatam verò ad ſectionem c factis c λ, c t æqualibus eſſe minorem rectâ n l ſibi reſpondente; ſi punctum o iaceat inter c & t; maiorem ſi cadat vltra t; æqualem ſi congruat ipſi t. Similiter in circuli vel ellipſis ſyſtemate, ſi punctum o cadat inter λ & c eſſe minorem; ſi vltra λ eſſe maiorem; ſi ipſi λ congruat eſſe æqualē. Quoniam enim rectæ c a, g λ ſunt ex conſtructione ſyſtematis parallelæ, erit in ſyſtemate ſectionum oppoſitarum recta c λ minor rectâ c ſ; cùm ſe habeat ad c ſ, vt a g pars ad a ſ totum: erit ergo, quando o eſt intra hyperbolam b, recta c o cõpoſita ex c ſ & ſ o multò maior quàm c λ: ſed vt c λ ad c o, ita eſt l n ad n d: ergo l n eſt minor quam n d. Quando autem recta d n terminatur ad hyperbolam c; ſi punctum o cadat inter t & c, erit c λ maior quàm c o; ſed vt c λ ad c o, ita eſt n l ad n d: ergo n l eſt maior quàm n d. Eâdem ratione oſtendetur eſſe æqualis ſi punctum o congruat puncto t; & eſſe maior, ſi vltra punctum t iaceat; quod ipſum pariter ad ſyſtema ellipſeos transferri poſſe apertum eſt.

COROLLARIVM II.

Præterea facile oſtendi poteſt lunulæ ſyſtematis eſſe æqualem lunulam contentam arcu inferiore & quadratrice: cuſpidibus autem duabus ſimul b i n, c n i terminatis rectâ n i, quando rectæ b h, c h ſunt vtrinque ęquales, eſſe ęquales duas alias cuſpides contentas falce inferiore, quadratrice, & lineâ n d. Quoniam enim recta d n ad n i ſe habet vt recta n o ad n h, erit per oſtenſa in primo libro lunulæ b q i e c p *k* ęqualis alia lunula b o d e c p *k*. Et quoniam per decimam

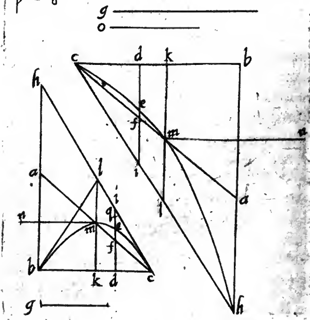
17. primi huius.

huius quando rectæ b h, c h sunt æquales, rectæ etiam n i vtrinque sunt inuicem æquales, ac proinde & rectæ d n sunt etiam vtrinque æquales, erunt per allegatam propositionem eiusdem libri primi duæ simul cuspides i n k h q, i e c p n æquales duabus simul d n k b m, d f c p n, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

In primi schematis triangulo a b c, lateri b a intelligatur recta d f parallela & vt recta quæpiam g ad rectæ b c segmentum b d quod est inter parallelam ductam & latus b a, ita intelligatur fieri recta f d ad d e: & quod in rectâ f d factum est, intelligatur similiter fieri in parallelis cæteris per quodlibet punctũ rectæ b c inter b & c ductis. Ostendendum est quartam eiusmodi proportionalem terminari parabola per b, e, c descripta cuius diameter sit rectę b a parallela.

p-268



Vt recta g ad b c, ita fiat recta b a ad b h, iunctâque rectâ h c, diuidatur bifariam b c in k, & per k agatur ad rectam b h parallela κ l: eritque h c secta bifariam in l, cùm l k sit parallela lateri b h trianguli b h c. Diuisâ κ l bifariam in m, & excitata ad l k perpendiculari m n, vt recta m K ad k c, ita fiat k c ad m n; datoque latere recto m n, & diametro m k describatur parabola b m c quæ per b c & m transibit cùm rectæ m n, m k, k c sint proportionales; recta autem c l tanget in c parabolam

2. sexti Euc.

ipſaque b l in b per trigeſimam tertiam primi conicorum, cùm k l' ſecta ſit bifariam in m.

Si ergo parabola non ſecat rectam d i in puncto e, ſecet, ſi fieri poteſt in puncto q: quoniam ſicut recta g ad b c, ita eſt b a ad b h: & vt b a ad b h, ita eſt d f ad d i, vt oſtenditur ad quartam ſexti Euclidis: ergo vt g ab b c, ita eſt d f ad d i: ſed vt b c ad b d, ita eſt i d ad d q (nam vt b d, c b: ita d q, q i per huius ſecundã: ergo inuertẽdo & componendo vt b c, b d, ita d i, d q) ergo ex æquo vt g recta ad b d, ita f d recta ad d q: ſed ita etiam ponitur eſſe ipſa f d ad d e: ergo d e, d q ſunt æquales, pars & totum quod eſt abſurdum. Non ergo &c.

Oſtendendum præterea eſt in eodem triangulo a b c ſecundi ſchematis ſi vt g ad aliud rectæ b c ſegmentum d c, ita intelligatur fieri recta f d ad d e, & idẽ in alijs parallelis fiat, quartam proportionalem terminari parabolâ quam linea b c in puncto c tangat.

Vt recta g ad b c; ita permaneat recta b a ad b h; diuisâ bifariam b c in K, & iuncta recta h c, per K agatur l K parallela lateri h b; erit ergo sicuti priùs ostensum est recta h c secta bifariam in l. Recta l k bifariam secetur in m: vtque recta m l ad l h, ita fiat l h ad m n perpendicularem ad rectam l k. Datâ diametro m l, & latere recto m n describatur vt priùs, parabola transiens per h, m, c, cuius vertex sit m. Vt recta h b ad h a, ita fiat recta h c ad o: erit ergo cõuertendo vt o recta ad h c, ita ha ad hb. Cùm igitur h c secta sit bifariam in l, per l ducta sit l k ipsi h b parallela, per bisectionem m perque puncta h, c descripta sit parabola h m c, & cùm vt recta o ad h c, ita sit recta h a ad h b, si ducta d i quacunque ad rectam h b parallela secante rectam h c in i, vt o recta ad h i, ita f i intercepta lateribus h t, a c trianguli h c a fiat ad i e, punctum e erit in parabola h m c, & recta c b, tanget eandem parabolam in c, ex priori huius propositionis, parte.

52. primi Conic.

4. sexti Euc. Rursus quoniam in triangulo h b c lateri h b parallela est i d, ergo (prout demonstratur apud Clauiũ) vt h b ad h a, ita erit i d ad i f; & quia h c ad o est ex constructione vt h b ad h a; ergo vt h c ad o, ita est i d ad i f. Quoniam igitur vt h c ad o, ita ostensum est esse i d ad

if; & vt o ad h i, ita if ad i e: ergo ex æquo vt h c ad h i, ita erit i d ad i e: sed vt h c ad h i, ita b c ad b d (eo quod in triangulo h b c latera h c, b c proportionaliter secentur per rectam d i lateri b h parallelam) ergo vt b c, b d, ita i d, i e: ergo per conuersionem rationis vt b c, d c, ita i d, d e. Rursus quoniam vt g ad b c, ita est b a ad b h ex constructione; & vt b a ad b h, ita est f d ad i d (nam in triangulo h b c lateri b h parallela est d i; ergo ex demonstratis apud Clauium vt b a, b h ita f d, i d) ergo vt g ad b c, ita est f d ad i d; sed vt b c ad d c, ita ostensum est esse i d ad d e: ergo ex æquo vt g ad d c, ita est f d ad d e, quod erat demonstrandum. 4. sexti Euc.

COROLLARIVM.

Ex his patet cum ex demonstratis ab Archimede figura h m c, quæ comprehenditur curua h e c & & recta h c sit tertia pars trianguli rectilinei h b c: figuram c b h e, quæ curua h e c, & rectis h b, b c continetur, æqualem esse duabus tertijs partibus rectilinei trianguli h b c. 15. & 16 quadr. parab.

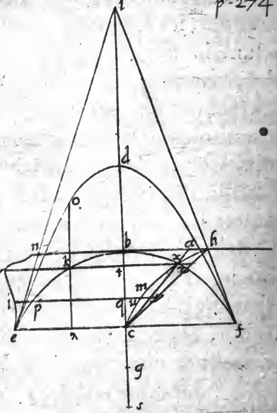
FROPOSITIO XIII.

Sit systema cuius centrum g, recta semediameter g b, tangentes rectæ l e, l f; & rectam e f tactus coniungentem recta b g secet in c; parabola sit e d f continens cum aliâ sectione lunulam e d f b. Per b ducatur b h parallela rectæ e f ipsique b d æqualis, iunctâque c h describatur, vt in præcedenti, parabola c m h, quam in triangulo c b h tangat recta b c in c, diameter autem sit parallela lateri b h. Rursus ex recta b h abscindatur n b ipsi b d æqualis, similiter per k quodlibet punctum inferioris arcûs vel cuspidis b k e duci intelligãtur duæ rectæ κ o, k t parallelæ rectis c l, e f, & ex recta t κ abscindi recta k r æqualis

lis ipsi k o interceptæ circulo & parabola, ita verò si intelligatur factum in singulis punctis arcûs b k e, extrema puncta abscissarum designabunt curuam e i r n quam exparabolam esse constat ex eius definitione tradita in nonâ huius propositione. Ostendendum est spatium b k e r n inter circuli arcum b k e, rectam b n, & exparabolam e r n clausum, esse æquale spatio c b h m contento rectis c b, b h, & parabola c m h. Et si per quælibet duo puncta p, k arcûs b k e ducantur rectæ κ x, p u parallelæ ipsi e f, occurrentes curuæ n r e, rectæ b c, & parabolæ c m a in punctis r, i, t, q, z, u, spatium r i p k contentum rectis r k, i p, & curuis r i, p k esse æquale spatio t q u x contento rectis t q, q u, t z, & curua u z.

S

p. 274

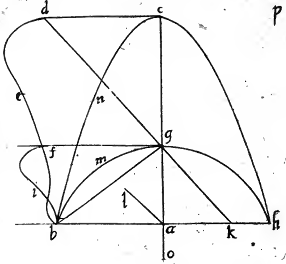


Rectæ b c æqualis b a abscindatur
rectâ b h, & iungatur recta c a: item r
ctæ c g abscindatur g f æqualis. Quoniam
per quartam & quintam huius vt rec
c f ad c b, ita est c b seu b a ipsi ęqu
lis ad b d seu b h ipsi æqualem; & int
b & c quodlibet punctum t sumptu
fuit, perque illud ducta est t x paral
la lateri b h, occurrens rectæ c a in
& parabolæ in z, erit recta t x ad t

vt recta f c ad c t, sicuti in precedenti ostensum est: sed, producta recta o k donec rectæ e f occurrat in λ, vt c f ad c t seu ad κλ ipsi t c æqualem (est enim t κ λ c parallelogrammum cuius κ λ, t c sunt latera opposita) ita per quartam & quintam huius est k λ ad k o seu ad k r ipsi κ o æqualem. Cùm ergo recta t x sit æqualis rectæ t c (sunt enim similia triangula c b a, c t x, ergo cùm c b, b a sint ex constructione æquales, erunt c t, t x æquales) erit vt c f ad c t, ita c t seu t x ad k r; sed ita etiam ostensum est esse ipsam t x ad t z: ergo rectæ t z, k r sunt æquales. Simili prorsus ratione ostendetur rectas p i, q u esse æquales, & quæcunque inter parallelas n b, e f ducatur ipsis parallela, eius segmentum interceptum arcu b k e & curua n r e esse æquale segmento eiusdem inter rectam b c & parabolam posito.

Quoniam ergo quæcunque ipsi n h parallelæ incidant in rectam c b, in sectiones conicas c m h, b k e, & in curuam n r e ipsarum incidentium portio intercepta recta c b & parabola e m h, est æqualis earundem portioni interceptæ circulo & curua n r e, erit per duodecimam primi libri spatium a b c m æquale spatio b n r e k, & spatium t x u q spatio k r i p, quod erat ostendendum.

p. 278



In fyftemate fit centrum o, diameter recta o c; recta connectens tactus b h æquidiftans diametro tranfuerfæ; parabola c n b; exparabola f i b; quadratrix fit d e b genita ex pofitione rectę a l bifariam fecantis angulum c a b quem duæ diametri recta & tranfuerfa, vel eis parallelæ conftituunt ad b partes diametri o c directæ. Ad eafdem partes fumpta fit falcis vel arcûs inferioris portio g m b, & per eius duo extrema, vel per vnicum g (fi nimirum ad aliud extremum conueniant parabola, exparabola, atque quadratrix) ducatur parallela rectæ a l, eaque fit g d per extremum g tranfiens, & occurrens quadratrici in d; ducatur item parallela rectæ b a; eaque sit g f occurrens exparabolæ in f; ducatur denique g c parallela rectę a g (nisi sit eius portio vt in isto casu) occurrens parabolæ in c. Dico cuspidem vel lunulam mediam g d c b m esse æqualem cuspidi vel lunulæ parabolicæ g c n b m l, & exparabolicæ g f i b m.

Connectatur recta d c, & producta recta d g occurrat rectæ b h in *k*. Quoniam ex definitione quadratricis vt g a ad a *k*, ita est g c ad g d, triangula g a *k*, c g d, habentia angulos ad verticem g æquales, & circa illos latera proportionalia, erunt æquiangula; ergo anguli c d *k*, a k d alterni sunt æquales; ergo rectæ d c, a k sunt æquales, & parallelæ. 6 sexti Euc.

Rursus quoniam super eadem basi curua b m g sunt tres figuræ constitutæ sicut propositio decima octaua & decima nona libri primi requirunt, figura g d c b m erit per eandem decimam nonam æqualis duabus simul g c n b m, g f i b m, quod erat demonstrandum.

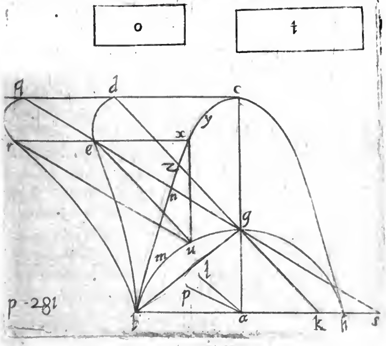
COROLLARIVM

Hinc apertum est segmentum quadratricis contentum rectis b g, g d & quadratice b c d esse æquale spatio b g c n contento rectis b g, g c & parabola c n b, quod ex demonstratis ab Archimede quadrari poteſt; & ſimul figuræ g f i b m, quod ex præcedenti quadrari etiam poteſt. Cùm enim oſtenſum ſit figuram g d e b m eſſe æqualem duabus g c n b m, g f i b m; addito vtrinque communi b m g: duæ ſimul g d e b m, b m g, hoc eſt tota b g d e cõtenta rectis b g, g d & quadratrice b e d eſt æqualis tribus ſimul g c n b m; g f i b m, b m g, hoc eſt prædictis duabus b g c n, b g f i: nota eſt ergo ratio quadrandi ſegmentum quadratricis prædictum.

Propositio XV.

Iiſdem permanentibus ſi intelligatur angulus g a b ſecari per rectam a p in partes inæquales, & deſcribatur quadratrix q r b ex poſitione rectæ a p genita; ducatur autē per g recta g ſ parallela ad rectā a p, occurrens rectæ b h in ſ, & quadratrici q r b in q. Oſtendendum eſt lunulam vel cuſpidem mediam cuius quadratrix ſit q r b, & latus u m g portio arcûs vel falcis inferioris terminata tactu b, esse æqualem lunulæ vel cuspidi parabolicæ g c n b m & insuper spatio quod sit ad lunulã vel cuspidem exparabolicam vt est recta a s ad a k.

Iungatur q c recta, quæ ostendetur esse parallela ipsi a h, sicuti in priori propositione recta d c ostensa est esse ęquidistans eidem a h: rectæ ergo c d, c q sibi mutuò congruunt, & vt a s ad a k, ita est



oq ad c d; cùm triangulo g a k simile sit triangulum g c d, & triangulo g a s triangulum g c q. Rursus ex quocunque puncto x parabolę c n b agatur u x parallela ipsi c g, occurrens arcui vel falci inferiori in u; & per u rectæ u e, u r parallelæ rectis l a, p a, occurrentes quadratricibus in e & r; iunganturque rectæ x r, x e. Ostendetur vt priùs rectas ex, r x esse parallelas rectę b h, & congruere sibi inuicem; & præterea vt est recta a s ad a k; ita esse rectam x r ad x e; ostendetur denique ex sexta primi vt est recta a s ad a *k*, ite esse figuram c q r b n ad figuram c d e b n.

Sit o spatium æquale exparabolicæ lunulæ vel cuspidi super latere b m g consistenti vt in precedentis propositionis figurâ repræsentatur. Quoniam sicuti in præcedenti propositione ostendimus, lunulæ vel cuspidi exparabolicæ o, & simul lunulæ vel cuspidi parabolicæ g c n b m æqualis est lunula vel cuspis media g d e b m; cuspis verò vel lunula media g d e b m constat duabus figuris d e b n z, & g m b n z: ergo duæ d e b n z, g m b n z sunt æquales exparabolæ spatio o: & lunulę vel cuspidi parabolicæ g c n b m. Quoniam ergo duæ figuræ d e b n z, g m b n z sunt æquales simul spatio o, & figuræ g c n b m; ergo ablatâ communi g m b n z, residua figura d e b n z erit æqualis spatio o & fimul figuræ z g c y: ergo addita cõmuni figura c d z y, figura c d e b n erit æqualis spatio o & simul rectilineo triangulo c d g.

Rursus vt recta c d ad c q, seu a k ad a f ita fiat spatium o ad t: quoniam igitur triangulum d g c se habet ad triangulum q g c vt basis d c ad c q; spatium autem o se habet ad spatium t, vt eadem recta d c ad c q; vt recta d c ad c q, ita erit conflatum ex spatio o & ex triangulo rectilineo c d g antecedentibus, ad conflatum ex spatio t & ex rectilineo triangulo c q g consequentibus: cum igitur conflatum ex spatio o & ex rectilineo triangulo c d g sit, vt ostensum est, æquale figuræ c d e b n; ipsa figura c d e b n se habebit ad conflatum ex spatio t & ex triangulo c q g, vt se habet d c recta ad c q; sed vt se habet recta d c ad c q, ita ostensum est esse figuram eandẽ c d e b n ad figuram c q r b n: ergo figura c d e b n habet eandem rationem ad figuram c q r b n, quam ad conflatum ex spatio t & ex triangulo c q g: ergo figura c q r n b est æqualis conflato ex spatio t & ex triangulo c q g: ergo figura c q r b m g, cum constet figuris c q r b n, c n b m g, erit æqualis spatio t, triangulo c q g & simul figuræ c n b m g: ergo ablato communi triangulo c q g figura residua g q r b m est æqualis spatio t, & figuræ c n b m g: quod erat demonstrandum.

1. sexti. Euc.

12. quinti. Euc.

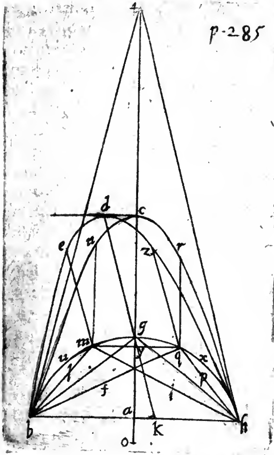
COROLLARIVM.

Sicuti in præcedentis corollario ostensum est quo pacto quadretur segmentum quadratricis contentum rectis b g, g d & quadratrice b e d; ita pari ratione hic tradi potest methodus quadrandi segmentum quadratricis contentum rectis b g, g q, & quadratrice q r b: nimirum si ad rectilineum æquale figuræ g c n b λ (quod cognitum est) addatur spatium t, quod etiam notum est.

PROPOSITIO XVI.

Inuenire rectilineum æquale segmento cuicunque dato quadratricis genitæ ex positione vnius ex tangentibus systematis, vel alicuius alterius rectæ diuidentis angulum quem tangentes comprehendunt in concursu, & quem recta tactus connectens subtendit.

Sit systematis centrum o; tangentes b t, h t; puncta tactus b, h connexa rectâ b h; diameter o t; parabola b n c r h; arcus vel



falx inferior sit b m g; quadratrix ad positionem tangentis h t descripta sit b e d z h, (idem sequeretur si ad positionem cuiusuis rectæ diuidentis angulũ b t h vt dicemus.)

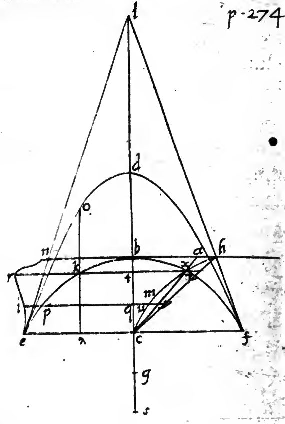
Primo quidem si quadratricis segmentum sumatur contentum ordinatim ad diametrum t o applicatâ totâ, vt in ellipsi vel circulo; vel eius partibus intra sectiones oppositas æquali interuallo excurrenti-

FROPOSITIO XIII.

Sit systema cuius centrum g, recta semediameter g b, tangentes rectæ l e, l f; & rectam e f tactus coniungentem recta b g secet in c; parabola sit e d f continens cum aliâ sectione lunulam e d f b. Per b ducatur b h parallela rectæ e f ipsique b d æqualis, iunctâque c h describatur, vt in præcedenti, parabola c m h, quam in triangulo c b h tangat recta b c in c, diameter autem sit parallela lateri b h. Rursus ex recta b h abscindatur n b ipsi b d æqualis, similiter per k quodlibet punctum inferioris arcûs vel cuspidis b k e duci intelligātur duæ rectæ κ o, k t parallelæ rectis c l, e f, & ex recta t κ abscindi recta k r æqualis

lis ipsi k o interceptæ circulo & parabola, ita verò si intelligatur factum in singulis punctis arcûs b k e, extrema puncta abscissarum designabunt curuam e i r n quam exparabolam esse constat ex eius definitione tradita in nonâ huius propositione. Ostendendum est spatium b k e r n inter circuli arcum b k e, rectam b n, & exparabolam e r n clausum, esse æquale spatio c b h m contento rectis c b, b h, & parabola c m h. Et si per quælibet duo puncta p, k arcûs b k e ducantur rectæ κ x, p u parallelæ ipsi e f, occurrentes curuæ n r e, rectæ b c, & parabolæ c m a in punctis r, i, t, q, z, u, spatium r i p k contentum rectis r k, i p, & curuis r i, p k esse æquale spatio t q u x contento rectis t q, q u, t z, & curua u z.

p-274



Rectæ b c æqualis b a abscindatur ex rectâ b h, & iungatur recta c a: item rectæ c g abscindatur g s æqualis. Quoniam per quartam & quintam huius vt recta c s ad c b, ita est c b seu b a ipsi æqualis ad b d seu b h ipsi æqualem; & inter b & c quodlibet punctum t sumptum fuit, perque illud ducta est t x parallela lateri b h, occurrens rectæ c a in x, & parabolæ in z, erit recta t x ad t z;

vt recta f c ad c t, ſicuti in precedenti oſtenſum eſt: ſed, producta recta o k donec rectæ e f occurrat in λ, vt c ſ ad c t ſeu ad κλ ipſi t c æqualem (eſt enim t κ λ c parallelogrammum cuius κ λ, t c ſunt latera oppoſita) ita per quartam & quintam huius eſt k λ ad k o ſeu ad k r ipſi κ o æqualem. Cùm ergo recta t x ſit æqualis rectæ t c (ſunt enim ſimilia triangula c b a, c t x; ergo cùm c b, b a ſint ex conſtructione æquales, erunt c t, t x æquales) erit vt c f ad c t, ita c t ſeu t x ad k r; ſed ita etiam oſtenſum eſt eſſe ipſam t x ad t z: ergo rectæ t z, k r ſunt æquales. Simili prorſus ratione oſtendetur rectas p i, q u eſſe æquales, & quæcunque inter parallelas n b, e f ducatur ipſis parallela, eius ſegmentum interceptum arcu b k e & curua n r e eſſe æquale ſegmento eiuſdem inter rectam b c & parabolam poſito.

Quoniam ergo quæcunque ipſi n h parallelæ incidant in rectam c b, in ſectiones conicas c m h, b k e, & in curuam n r e ipſarum incidentium portio intercepta recta c b & parabola e m h, e ſt æqualis earundem portioni interceptæ circulo & curua n r e, erit per duodecimam primi libri ſpatium a b c m æquale ſpatio b n r e k, & ſpatium t x u q ſpatio k r i p, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Ex his patet cùm fpatijs a b c m, t x u q fpatia rectilinea æqualia inueniantur prout Archimedes demonftrauit in libello de paraboles quadratura; illa ipfa fpatia rectilinea ita inuenta effe æqualia fpatijs b n r e k, k r i p; ac proinde problema quo fpatia b n r e k, k r i p proponerentur quadranda, ex dictis confectum euadere.

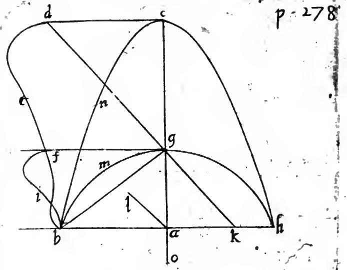
Vt autem res manifeftior appareat fit figura e k r i quadranda: vt recta e f ad λ k, ita fiat λ k feu c t ad t x & iungatur c x recta. Dico duas tertias partes trianguli c t x effe æquales figuræ c t x u. Quoniam enim recta t c tangit parabolam c u x in c, & per x acta eft x t parallela diametro, erit per corollarium præcedentis, & per citati libri Archimedis decimam fextam fegmentum x m c y æquale tertiæ parti trianguli c t x: ergo figura c t x u quæ cum fegmento componit triangulum c t x, eft æqualis duabus tertijs trianguli eiufdem c t x: Si ergo vt e f ad λ k, ita fiat λ k feu c t ad t x, & iungatur recta c x, duę tertiæ trianguli rectanguli c t x erunt ęquales figuræ k r i e p.

COROLLARIVM.

Ex iis quæ in ſcholio propoſitionis ſextæ primi libri oſtendimus, manifeſtum eſt exparabolicam lineam cuius generationem hîc dedimus, æquiualere ſectioni conicę, quantum attinet ad effectum propoſitionis ſecundæ libri primi.

PROPOSITIO XIV.

In ſyſtemate ſi quadratrix generetur ex poſitione rectæ bifariam diuidentis angulum quem diameter recta cum tranſuerſa conſtituit; & ſi arcûs vel cuſpidis inferioris portio deſignetur, ad eaſdem diametri directæ partes ad quas angulus ſecatur; lunula vel cuſpis media, cuius vnum latus ſit eiuſmodi portio deſignata, eſt æqualis lunulæ vel cuſpidi parabolicæ, & ſimul exparabolicæ, quarum commune latus ſit illa ipſa portio deſignata.



In systemate sit centrum o, diameter recta o c; recta connectens tactus b h æquidistans diametro transuersæ; parabola c n b; exparabola f i b; quadratrix sit d e b genita ex positione rectę a l bifariam secantis angulum c a b quem duæ diametri recta & transuersa, vel eis parallelæ constituunt ad b partes diametri o c directæ. Ad easdem partes sumpta sit falcis vel arcûs inferioris portio g m b, & per eius duo extrema, vel per vnicum g (si nimirum ad aliud extremum conueniant parabola, exparabola, atque quadratrix) ducatur parallela rectæ a l, eaque sit g d per extremum g transiens, & occurrens quadratrici in d; ducatur item parallela rectæ b a; eaque ſit g f occurrens exparabolæ in f; ducatur denique g c parallela rectę a g (niſi ſit eius portio vt in iſto caſu) occurrens parabolæ in c. Dico cuſpidem vel lunulam mediam g d e b m eſſe æqualem cuſpidi vel lunulæ parabolicæ g c n b m l, & exparabolicæ g f i b m.

Connectatur recta d c, & producta recta d g occurrat rectæ b h in *k*. Quoniam ex definitione quadratricis vt g a ad a *k*, ita eſt g c ad g d, triangula g a *k*, c g d, habentia angulos ad verticem g æquales, & circa illos latera proportionalia, erunt æquiangula; ergo anguli c d *k*, a k d alterni ſunt æquales; ergo rectæ d c, a k ſunt æquales, & parallelæ. 6 ſexti Euc.

Rurſus quoniam ſuper eadem baſi curua b m g ſunt tres figuræ conſtitutæ ſicut propoſitio decima octaua & decima nona libri primi requirunt, figura g d e b m erit per eandem decimam nonam æqualis duabus ſimul g c n b m, g f i b m, quod erat demonſtrandum.

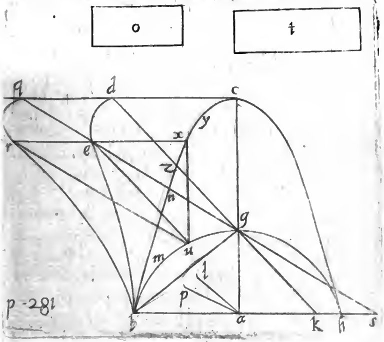
COROLLARIVM

Hinc apertum eſt ſegmentum quadratricis contentum rectis b g, g d & quadratice b e d eſſe æquale ſpatio b g c n contento rectis b g, g c & parabola c n b, quod ex demonſtratis ab Archimede quadrari potest; & simul figuræ g f i b m, quod ex præcedenti quadrari etiam potest. Cùm enim ostensum sit figuram g d e b m esse æqualem duabus g c n b m, g f i b m; addito vtrinqne communi b m g: duæ simul g d e b m, b m g, hoc est tota b g d e cõtenta rectis b g, g d & quadratrice b e d est æqualis tribus simul g c n b m; g f i b m, b m g, hoc est prædictis duabus b g c n, b g f i: nota est ergo ratio quadrandi segmentum quadratricis prædictum.

PROPOSITIO XV.

Iisdem permanentibus si intelligatur angulus g a b secari per rectam a p in partes inæquales, & describatur quadratrix q r b ex positione rectæ a p genita; ducatur autẽ per g recta g s parallela ad rectã a p, occurrens rectæ b h in s, & quadratrici q r b in q. Ostendendum est lunulam vel cuspidem mediam cuius quadratrix sit q r b, & latus u m g portio arcûs vel falcis inferioris terminata tactu b, esse æqualem lunulæ vel cuspidi parabolicæ g c n b m & insuper spatio quod sit ad lunulā vel cuspidem exparabolicam vt est recta a ſ ad a κ.

Iungatur q c recta, quæ ostendetur esse parallela ipsi a h, sicuti in priori propositione recta d c ostensa est esse ęquidistans eidem a h: rectæ ergo c d, c q sibi mutuò congruunt, & vt a ſ ad a *k*, ita est



oq ad cd; cùm triangulo gak simile sit triangulum gcd, & triangulo gas triangulum gcq. Rursus ex quocunque puncto x parabolę cnb agatur ux parallela ipsi cg, occurrens arcui vel falci inferiori in u; & per u rectæ ue, ur parallelæ rectis la, pa, occurrentes quadratricibus in e & r; iunganturque rectæ xr, xe. Ostendetur vt priùs rectas ex, rx esse parallelas rectę bh, & congruere sibi inuicem; & præterea vt est recta af ad ak; ita esse rectam xr ad xe; ostendetur denique ex sexta primi vt est recta af ad ak, ite esse figuram cqrbn ad figuram cdebn.

Sit o spatium æquale exparabolicæ lunulæ vel cuspidi super latere bmg consistenti vt in precedentis propositionis figurâ repræsentatur. Quoniam sicuti in præcedenti propositione ostendimus, lunulæ vel cuspidi exparabolicæ o, & simul lunulæ vel cuspidi parabolicæ gcnbm æqualis est lunula vel cuspis media gdebm; cuspis verò vel lunula media gdebm constat duabus figuris debnz, & gmbnz: ergo duæ debnz, gmbnz sunt æquales exparabolæ spatio o: & lunulę vel cuspidi parabolicæ gcnbm. Quoniam ergo duæ figuræ debnz, gmbnz sunt æquales simul spatio o, & figuræ gcnbm; ergo ablatâ communi gmbnz, residua figura debnz erit æqualis spatio o & fimul figuræ z g c y: ergo addita cõmuni figura c d z y, figura c d e b n erit æqualis ſpatio o & ſimul rectilineo triangulo c d g.

Rurſus vt recta c d ad c q, ſeu a k ad a ſ ita fiat ſpatium o ad t: quoniam igitur triangulum d g c ſe habet ad triangulum q g c vt baſis d c ad c q; ſpatium autem o ſe habet ad ſpatium t, vt eadem recta d c ad c q; vt recta d c ad c q, ita erit conflatum ex ſpatio o & ex triangulo rectilineo c d g antecedentibus, ad conflatum ex ſpatio t & ex rectilineo triangulo c q g conſequentibus: cum igitur conflatum ex ſpatio o & ex rectilineo triangulo c d g ſit, vt oſtenſum eſt, æquale figuræ c d e b n; ipſa figura c d e b n ſe habebit ad conflatum ex ſpatio t & ex triangulo c q g, vt ſe habet d c recta ad c q; ſed vt ſe habet recta d c ad c q, ita oſtenſum eſt eſſe figuram eandẽ c d e b n ad figuram c q r b n: ergo figura c d e b n habet eandem rationem ad figuram c q r b n, quam ad conflatum ex ſpatio t & ex triangulo c q g: ergo figura c q r n b eſt æqualis conflato ex ſpatio t & ex triangulo c q g: ergo figura c q r b m g, cum conſtet figuris c q r b n, c n b m g, erit æqualis ſpatio t, triangulo c q g & ſimul figuræ c n b m g: ergo ablato communi triangulo c q g figura reſidua g q r b m eſt æqualis ſpatio t, & figuræ c n b m g: quod erat demonſtrandum.

1. ſexti. Euc.

12. quinti. Euc.

COROLLARIVM.

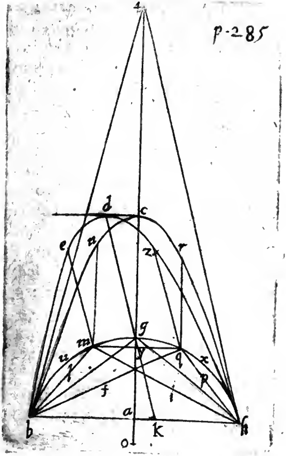
Sicuti in præcedentis corollario ostensum est quo pacto quadretur segmentum quadratricis contentum rectis b g, g d & quadratrice b e d; ita pari ratione hic tradi potest methodus quadrandi segmentum quadratricis contentum rectis b g, g q, & quadratrice q r b: nimirum si ad rectilineum æquale figuræ g c n b λ (quod cognitum est) addatur spatium t, quod etiam notum est.

PROPOSITIO XVI.

Inuenire rectilineum æquale segmento cuicunque dato quadratricis genitæ ex positione vnius ex tangentibus systematis, vel alicuius alterius rectæ diuidentis angulum quem tangentes comprehendunt in concursu, & quem recta tactus connectens subtendit.

Sit systematis centrum o; tangentes b t, h t; puncta tactus b, h connexa rectâ b h; diameter o t; parabola b n c r h; arcus vel

p-285



falx inferior ſit b m g; quadratrix ad poſitionem tangentis h t deſcripta ſit b e d z h, (idem ſequeretur ſi ad poſitionem cuiuſuis rectæ diuidentis angulũ b t h vt dicemus.)

Primo quidem ſi quadratricis ſegmentum ſumatur contentum ordinatim ad diametrum t o applicatâ totâ, vt in ellipſi vel circulo; vel eius partibus intra ſectiones oppoſitas æquali interuallo excurrentibus; quæsita methodus constat ex vndecimæ huius corollario secundo,&coroll. primo sextæ primi libri propositionis.

Sit enim segmentum quadraticis m e d z q contentum in circulari vel elliptico systemate (eadem est ratio in hyperbolico vt apertum est) ordinatim applicata m q, rectis m e, q z ad tangentem h t parallelis; & curua e d z: cùm ostensum sit in illo vndecimæ propositionis corollario secundo figuras e m g q z d, n m g q r c esse æquales, addita communi m g q (vel æqualibus in hyperbolico systemate) erit figura m e d z q y æqualis figuræ m n c r q y; sed m n c r q y nota methodo quadratur: ergo & m e d z q y.

Secundò quadratricis segmentum sumatur contentum recta b m occurrente arcui vel falci inferiori in punctis b & m (quæ puncta b & m sint ad easdem partes diametri t a) recta e m ipsi h t parallela, & quadratricis arcu e b. Ex corollario precedentis constat segmentum eiusmodi esse ęquale parabolę segmento b l m n, & spatio quod ad cuspidem vel lunulam respondentem arcui vel falci inferiori b u m se habeat, vt recta g x se habet ad g a rectam.

Tertiò quadratricis segmentum sumatur contentum recta m g occurrente arcui vel falci inferiori in punctis b & m (quæ puncta non sint ad diuersas partes diametri t a; sed vel ambo sint ad partes b, vel eorum vnum, quando alterum eſt in ipſa diametro; neutrum verò illorum ſit punctum tactûs ſyſtematicum) rectis g d, m e ipſi h t parallelis, & quadratricis arcu e d. Ex priori caſu quadrabitur figura b g d e contenta rectis b g, g d, & quadratricis portione d c b; quadrabitur etiam figura b m e contenta rectis b m, m e, & quadratricis portione e b; & ſi ex prioris figuræ ſpatio dematur ſpatium poſterioris vnà cum triangulo rectilineo b m g; relinquetur ſpatium figuræ m g d e quæſitum; vt apertè conſtat.

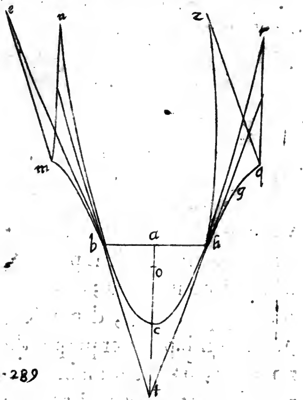
Quartò quadratricis ſegmentum ſumatur contentum recta b q occurrente arcui vel falci inferiori in punctis b, q (quæ ſint ad partes oppoſitas diametri t a; & arcus b m g, g q ſint inæquales; nā ſi ſint æquales redit caſus huius propoſitionis primus; ſit autem arcus b m g, maior arcu g q) rectâ q z ipſi h t parallela, & quadratricis portione z d e b. Per m agatur m e ipſi h t parallela, & iungatur m b. Per primum huius propoſitionis caſum quadrabitur figura m y q z d e; & per ſecundum aut tertiū quadrabitur figura b l m e, & ſi duobus iſtis ſpatijs addatur triangulum rectilineum b m q habebitur, vt patet, ſpatium figuræ b f q z d e quęſitum.

Quintò datum ſit quadratricis ſegmentum cuius baſis portio arcûs vel falcis inferioris ſit tota ad partes k diametri a t, & iaceat inter ordinatim ad diametrum applicatas duas quascunque h b, q m. Inueniatur per primum casum spatium æquale figuræ m y q z d e; inueniatur per eundem casum primum spatium æquale figuræ b e d z h; ex hoc dematur spatium primò inuentum & trapezium b m q h; residuum vt liquet, erit æquale duabus figuris b l m e, h p q r: sed spatium figuræ b l m e habetur ex secundo vel tertio casu, ergo si hoc deducatur de residuo proximo, relinquetur vltimò spatium æquale figuræ h p q r.

Sextò denique vt in quarto casu omnia ponantur, cum hoc discrimine quòd segmenti quadrandi portio quæ est ad partes b sit minor. Sit igitur segmentũ h i m e d z h quadrandum, & eius portio m g sit minor portione g h (minorem voco quæ continetur inter ordinatim applicatas minùs dissitas) per m agatur m q ordinatim applicata, & per q recta q z æquidistans tangenti h t. Quadretur primò segmentum h p q r ex casu præcedenti, tum ex primo quadretur segmentum m y q z d e; vtrique spatio addatur triangulum m q h; spatium compositum erit, vt perspicuè patet, illud quod quæritur.

Hæc omnia locum habent in systemate sectionum conicarum, ijsdemque verbis concipi possunt, paucis admodum mutatis vt ex inspectione ipsius schematis quod subijcimus, liquet.

SCHO-



SCHOLIVM.

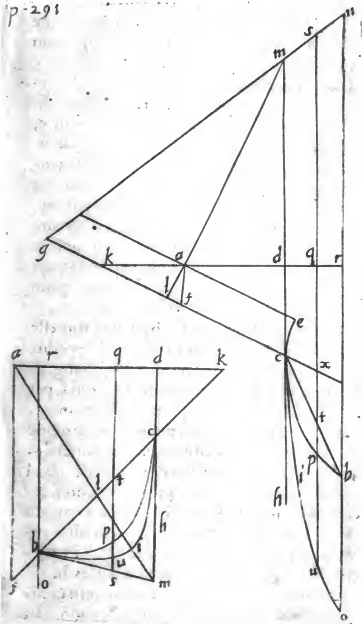
Ratio cur requisiuerimus vt recta ad cuius positionem describitur quadratrix vel sit vna tangentium vel angulum b t h diuidat, est quia parallelæ tangenti vel illi quæ angulum b t h diuidit, non occurrunt inferiori arcui, aut falcibus nisi in vno puncto, quod exigit sexta propositio libri primi ; qua nititur primus huius propositionis casus : hanc autem esse naturam talium rectarum ex conicis satis intelligitur, & facile admittet quisquis perceperit quæ sub finem libri primi demonstrauimus ante duas postremas propositiones.

PROPOSITIO XVII.

Sit b p c segmentum ellipseos, vel hyperbolæ, cuius centrum a; sit a K libra transiens per centum a & ex eo suspensa; ex eius verò duobus punctis r, d pendeat segmentum b p c per perpendicula r b, d c, ita vt totum inter rectas r b, d c contineatur. Propositum sit inuenire rectilineum æquiponderans segmento vt iacet permanenti.

Rectas r b, d c non posse esse ambas tangentes apertum est; quæ enim sunt parallelæ tangentes eæ sunt in eiusdem diametri extremis, & centrum habent in mediâ diametro tactus cõnectente vt cõstat ex conicis, puncta verò r & d sunt ad easdē centri a par-

p. 291



27. & 31. secundi Conic. tes. Præterea in ellipsi recta r b quæ ponitur esse vicinior centro a, non potest esse tangens, quia in ellipsi omnium ordinatim applicatarum occurrentium sectioni conicæ illa est à centro remotissima quæ tangit sectionem: ergo si r b tangeret, cùm d c sit ipsi r b parallela, & occurrat sectioni in c, daretur parallela tangenti, occurrens circulo magis à centro remotà quàm ipsa tangens. In hyperbolâ verò quia centrum a est exterius & contrario modo positum, omnium ordinatim applicatarum occurrentium sectioni illa est centro proxima quæ sectionem tangit; vnde fit vt recta b r quæ ponitur esse à centro remotior quàm d c, non possit tangere sectionem.

Præterea cum tota sectio b p c ponatur esse intra parallelas r b, d c; recta r b producta ad partes o non jacebit inter tangentem in puncto b & rectam b c; quia per trigesimam secundam primi conicorum occurret t sectioni in alio puncto, ac proinde ille arcus quem eiusmodi recta subtenderet, foret extra parallelas r b, d c, quod non ponimus. Eodem prorsus modo si recta d c non tangat, sed secet conicam sectionem, ostendetur tangentem in c cadere inter rectam b c & rectam h c portionem rectæ d c productæ ad partes h.

Iam recta d c vel tangit sectionem conicam, vel eam secat; tangat primò. In ellipsis schemate per b ducta intelligatur tangens b m, quæ concurrat cum tangente d c in m, concurret enim ad easdem sectionis partes per vigesimam septimam secundi Conicorum. Iungatur a m, quæ occurrat connectenti tactus b c in l. In hyperbolâ verò supra c ad partes d sumatur quoduis punctum e, & per centrum ducatur recta e a, cui per c ducatur parallela c l occurrens oppositæ sectioni in g; & per g ducatur tangens quæ per trigesimam primam secundi conicorum concurret ad partes a cum tangente c d; punctum concursûs sit m, & iuncta recta m a occurrat rectæ c g in l.

Ponatur itaque a centrum systematis; tangentes b m, c m in ellipsi; c m, m g in sectionibus oppositis; tactus in ellipsi b, c; in sectionibus oppositis c, g connexi rectis b c, c g; nota tangens c m; brachium ergo libræ systematicum, ductâ a f ipsi notæ tangenti parallelâ, erit c f.

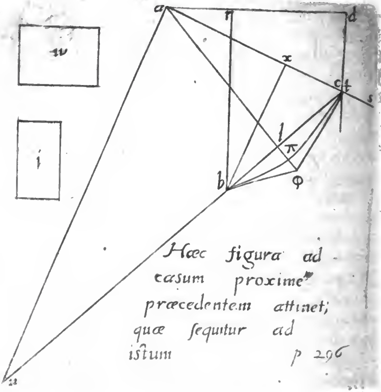
Rursus in ellipsi intelligatur describi quadratrix c i b genita ex positione tangentis notæ c m; in hyberbolâ vero quadratrix c i o genita ex eiusdem tangentis notæ c m positione. Quoniam sumpto in rectâ d r quocunque puncto q, & per illud ductâ q t quæ ad libram pendicularis sit, & occurrat sectioni b p c in p, quadratrici in u & tangenti b m vel g m in s, vt f c brachium systematicum ad c x, hoc est vt a d ad d q, ita per vndecimam huius ſ p ad p u; ſpatium autem quod quadratrice & rectâ c b continetur, habetur per propoſitionem præcedentem: & per librum Archimedis de quadraturâ paraboles habetur ſpatium quod figuræ rectilineæ b m c, vel m c b n æquiponderat libra ex d ſuſpenſa, eiuſmodi ſpatiorum differentia cognita erit, quam æquiponderare ſegmento c b p, libra ex a ſuſpenſa, pendentem ex brachio quod ipſi a d ſit æquale, & oppoſitum ſegmento b p c oſtendimus in corollario ſecundo popoſitionis duodecimæ libri ſecundi.

Secundò recta d c ſecet ſectionem conicam, & ſecta bifariam recta b c in l, recta a l iuncta occurrat ſectioni in π; vt autem a l ad a π, ita fiat a π ad a φ; iungantur b φ, c φ quæ tangent ſectionem per trigeſimam octauam primi Conicorum.

In Schemate igitur ellipſis, rectæ φ c per a ducatur parallela a u, erunt alterni anguli u a φ, c φ a æquales; ac proinde non cadet recta a u intra ſegmentum b π c, ſed erit totum ipſum ſegmentum ad eaſdem partes rectæ a u, cùm recta a u cadat ad u partes rectæ r b oppoſitas eiuſdem rectæ r b partibus l ad quas totum continetur ſegmentum. Ad rectam a u ex a excitetur perpendicularis a ſ; occurrat autem in u recta a u rectæ c b productæ.

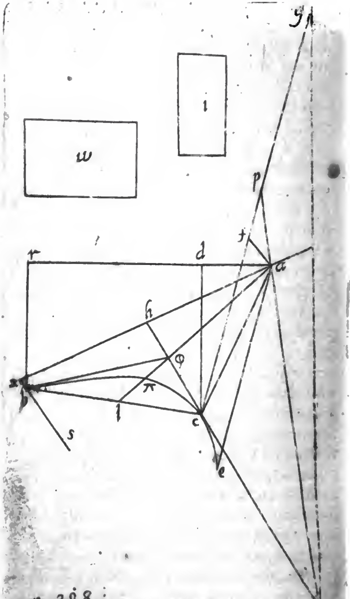
Si ergo a intelligatur centrum ſyſtematis; tactus b, c; tangentes b φ, c φ quarum c φ sit tangens nota; libra per centrum a ducta sit a s occurrens tangenti φ c in t. & parallelæ b x per b ductæ in x: brachium eius systematicum erit c u. His ita constitutis, inuenietur per casum præcedentem spatium quod libra suspensa ex a æquiponderet segmento b π c pendenti per parallelas x b, φ t, quarum φ t tangit brachio eius posito a t, sit eiusmodi spatium ω; atque vt sinus complementi anguli s a l ad sinum complementi anguli d a l, ita fiat spatium ω ad spatium i. Dico spatium i æquiponderare segmento b π c libra ad suspensa ex a & sustinente segmentũ b π c per perpendiculares r b, d c; brachio autem eius posito æquali rectæ a t. Quoniam enim segmentum b π c suspensum ponitur per duas libras suspensione earum facta in communi concursu a, & habentes æquale brachium; pondera æquiponderantia ex extremo brachiorum erunt inter se vt sinus complementi angulorum prædictorum ex corollario primo propositionis vndecimæ libri secundi: recta enim a l transit per centrum grauitatis segmenti b π c ex demonstratis in decima tertia libri secundi.

In schemate vero hyperbolæ sumpto quouis puncto e in hyperbola extra segmentum ad partes c iungatur a e, & per c ipsi parallela c g quæ occurrat sectioni oppositæ in g: per g ducatur tangens g m, quæ vt in primo casu diximus occurret



tangenti c m ad a partes rectæ c g; punctum occursûs sit m; per a ducatur a f parallela tangenti c m, & occurrat rectæ c g in f: ipsa a f cum sit parallela tangenti c m & per centrum a ducta non occurret sectionum vlli, erit quippe diameter directa, eiusque cõiugata trãsuersa erit a c per decimam sextam primi Conicorum, multò minus ergo occurret segmento b π c, proinde totum segmentum b c erit ad easdem partes rectæ af. Rursus per a ducatur ax perpendicularis ad tangentem cm, occurrens ipsi tangenti cm in h, & rectæ ſb in x; ſit autem ſb parallela tangenti cm per b ducta.

Si ergo a intelligatur centrum ſyſtematis; tactus g, c; tangentes gm, cm; quarum cm ſit tangens nota; diameter recta m a occurrens rectæ cg in l; libræ brachium ſyſtematicum erit cf, cùm tangenti cm parallela ſit af per centrum a ducta. Rurſus ſi libra per centrum ducta ſit recta ax, ab ea per perpendicula ſbx, ch pendebit ſegmentum b π c, quod recta cm tangit: ergo per caſum primum inuenietur ſpatium quod libra ax ſuſpenſa ex a æquiponderet ſegmento b π c, brachio eius poſito ah; ſit eiuſmodi ſpatium ω, atque vt ſinus cōplementi anguli xal ad ſinum complementi anguli dal ita fiat ſpatium ω ad ſpatium i. Dico ſpatium i æquiponderare ſegmento b π c libra ad ſuſpenſa ex a, & ſuſtinente ſegmentum b π c per perpendicula dc, rb, brachio autem eius poſito æquali rectæ ah. quod eodem modo oſtenditur, quo in proximo caſu oſtenſum fuit. Quod ſi pro brachio ah ponatur aliud quoduis, vt illud aliud erit ad brachium ah, ita fiat ſpatium i ad aliud ſpatium; nam iſtud aliud æquiponderabit ex illo alio brachio pendens ſicut demonſtratum eſt in ſecundo libro. 8. ſecūdi huius.



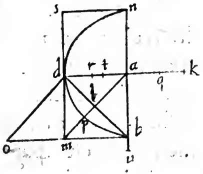
p. 298

PROPOSITIO XVIII.

Sit quadrans circuli d p b, cuius centrum a, ſemidiameter a d, quæ & vicem obtineat libræ ſuſpenſæ ex a, ſintque d a, a k æquales. Oſtendendum eſt ſpatium quod ex k pendens æquiponderat quadranti a d p b vt iacet permanenti eſſe æquale duobus trientibus trianguli rectanguli a d b, ſiue vni trienti quadrati quod poteſt ſemidiameter a d; toti verò ſemicirculo b d n quod ijſdem poſitis æquiponderat eſſe æquale duobus trientibus quadrati eiuſdem.

Si enim ad d a excitetur ex d perpendicularis d m, & per b agatur b m ipſi d a parallela, erit d a m b parallelogrammum, & quia d a, a b ex centro eductæ ſunt æquales, angulusque d a b rectus, erit figura a d m b quadrata; rectæ verò d m, b m tangent circulum in punctis d, b, cùm ſint perpendiculares ad ſemidia-

6 ter-
tij Euc.



p. 300 et 311

metros a d, a b. Ducta recta d b, iunctaque recta a m, quoniam d p b segmentum circuli pendet ex libræ punctis d, & a; & tangentes in d & b conueniunt in punctum m; spatium quadratricis descriptæ ad positionem tangentis d m erit æquale segmento parabolæ cuius basis sit d b, & tangentes d m, m b, diameterque m l.

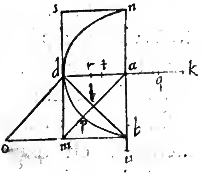
2. corollar. propos. 11. huius.

Cùm ergo eiusmodi segmentum parabolæ sit æquale trietibus duobus trianguli d m b, erit segmentum quadratricis æquale trientibus duobus trianguli rectanguli d m b, hoc est trienti quadrati d a b m.

16. quad. parab.

Rursus quoniam libra ex d suspensa latus d m trianguli d m b est ad ipsam libram perpendiculare, ab eaque idem triangulum d m b, pendet ex punctis d, a, eo planè modo quo superiùs diximus indidem pendêre segmentum d p b : brachio posito æquali ipsi d a, spatium æquiponderans triangulo d m b vt iacet manenti, erit æquale trienti ipsius trianguli. Cùm ergo differentia segmenti quadratricis & huius æquipōderantis spatij sit æqualis spatio quod libra ex a suspensa, & brachio a k æquiponderat, eaque differentia sit triens trianguli d m b, libra ex a suspensa spatium quod ex k pendens æquiponderat segmento d p b erit æquale trienti trianguli d m b. Quoniam verò triangulum d a b ita pendet ex punctis d, a, vt eius latus a b sit perpendiculare ad libram, spatium ex k pendens, æquiponderansque illi, libra ex a suspensa, erit æquale trienti trianguli d a b. Cùm igitur duę figuræ d a b, d p b simul constituant quadrantem circuli a d p b, & segmento d p b æquiponderet triens trianguli d m b, figuræ verò a d b, triens ipsius a d b; triangula autem d a b, d m b sint æqualia; toti quadranti a d p b vt iacet manenti libra ex a centro circuli suspensa spatium ex k æquiponderans erit æquale duobus trientibus trianguli d m b, seu vni trienti quadrati a d m b super diametro a d constructi: ac proinde spatium quod toti semicirculo b d n ijsdem positis æquiponderat æquale erit duobus trientibus quadrati a d m b, quod erat ostendendum.

7. quad. parab.
17. huius.
6. quad. parab.



p. 300 et 311

metros a d, a b. Ducta recta d b, iunctaque recta a m, quoniam d p b segmentum circuli pendet ex libræ punctis d, & a; & tangentes in d & b conueniunt in punctum m; spatium quadratricis descriptæ ad positionem tangentis d m erit æquale segmento parabolæ cuius basis sit d b, & tangentes d m, m b, diameterque m l.
2. corollar. propos. 11. huius. Cùm ergo eiusmodi segmentum parabolæ sit æquale trientibus duobus trianguli d m b, erit segmentum quadratricis æquale trientibus duobus trianguli rectanguli d m b, hoc est trienti quadrati d a b m.

Rursus quoniam libra ex d suspensa latus d m trianguli d m b est ad ipsam libram perpendiculare, ab eaque idem triangu-
16. quad. parab. lum d m b, pendet ex punctis d, a, eo planè modo quo superiùs diximus indidem

pendêre segmentum d p b : brachio posito æquali ipsi d a, spatium æquiponderans triangulo d m b vt iacet manenti, erit æquale trienti ipsius trianguli. Cùm ergo differentia segmenti quadratricis & huius æquipōderantis spatij sit æqualis spatio quod libra ex a suspensa, & brachio a k æquiponderat, eaque differentia sit triens trianguli d m b, libra ex a suspensa spatium quod ex k pendens æquiponderat segmento d p b erit æquale trienti trianguli d m b. Quoniam verò triangulum d a b ita pendet ex punctis d, a, vt eius latus a b sit perpendiculare ad libram, spatium ex k pendens, æquiponderansque illi, libra ex a suspensa, erit æquale trienti trianguli d a b. Cùm igitur duę figuræ d a b, d p b simul constituant quadrantem circuli a d p b, & segmento d p b æquiponderet triens trianguli d m b, figuræ verò a d b, triens ipsius a d b; triangula autem d a b, d m b sint æqualia; toti quadranti a d p b vt iacet manenti libra ex a centro circuli suspensa spatium ex k æquiponderans erit æquale duobus trientibus trianguli d m b, seu vni trienti quadrati a d m b super diametro a d constructi: ac proinde spatium quod toti semicirculo b d n ijsdem positis æquiponderat æquale erit duobus trientibus quadrati a d m b, quod erat ostendendum.

7. quad. parab. 17. huius.

6. quad. parab.

LEMMA.

Sumpsimus segmentum parabolæ cuius basis d b, diameter l m, tangentes d m, b m conuenientes in m, esse æquale duobus trientibus trianguli d m b, citata ad marginem propositione decima sexta quadraturæ paraboles, ex qua id satis apertè sequitur. Ne quis tamen dubitare quicquam possit, per d agatur diametro l m parallela d o occurrens tangenti b m in o: ergo segmentum parabolæ erit æquale tertiæ parti trianguli d o b per decimam sextam quadraturæ parabolæ: sed triangulum d m b est semissis trianguli d o b (quoniam enim lateri d o trianguli d o b parallela est l m, vt d l ad l b, ita erit o m ad m b; sunt ergo o m, m b æquales; ergo triangula d o m, m d b habentia bases o m, m b æquales, & eandem altitudinem ex b demissam, sunt æqualia) ergo segmentum parabolæ se habens ad triangulum o d b vt duo ad sex se habebit ad triangulum d m b semissem trianguli o d b vt duo ad sex.

2. sexti Euc.

1. sexti Euc.

COROLLARIVM I.

Hinc apertum est libra suspensa ex centro a posita quacunque longitudine brachij, æquiponderans circuli se habere ad æquiponderans rectanguli b f continentis semicirculum vt duo ad tria. Si enim longitudo sit a k id modo ostendimus, nimirum semicirculum b n d æquiponderare duobus trientibus quadrati d b; rectangulum autem f b æquiponderare toti quadrato d b apertum est; nam diuisa recta d a bifariam in r, erit r centrum grauitatis rectanguli f b; ergo vt k a longitudo ad a r longitudinem, ita est graue f b, ad graue ex k æquiponderans: ergo cùm a k sit dupla rectæ r a, erit f b duplum æquiponderantis ex *k*: ergo æquiponderans ex k est æquale quadrato a m. Quòd si longitudo quæuis alia à p ponatur idipsum apertum est ex corollario octauæ secundi libri. 10. primi æquip.

COROLLARIVM II.

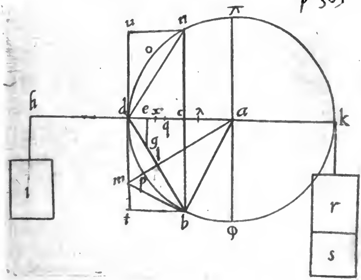
Si sectio d p b sit hyperbola cuius centrum u; axis u b a vertex b; ordinatim applicata a d; sitque b a rectæ b u dupla, ipsique b a sit d a æqualis; inuenietur simili calculi methodo (nisi paralogismus aliquis me fallit) posita libra d *k*, & ex puncto a in quo bifariam secetur, suspensa, spatium quod ex *k* pendens æquiponderat figuræ d a b contentæ rectis d a, a b, & curuâ d b, esse aquale quinque vigesimis quartis quadrati d a, hoc est vni octauæ & vni duodecimæ parti quadrati d a. Cæterùm istud aliâ viâ ostenditur in libri quarti propositione vigesimâ tertiâ sub finem vltimi corollarij.

PROPOSITIO XIX.

Sit n d b ſegmentum circuli cuius centrum a, contentum rectâ n b & arcu n d b graduũ 120. quæ eſt tertia peripheriæ circuli pars, ex centro a in baſim n b cadat perpendicularis a c d, per d extremum ſemidiametri a d ducta ſit d u tangens, & compleatur parallelogrammum u b. Dico poſitâ libra h k ſuſpenſa ex a, ſpatium quod ex k altero diametri d k termino pendens æquiponderat ſegmento n d b vt jacet permanenti eſſe æquale medietati rectanguli u b.

Quoniam enim recta d b eſt hexagoni latus, erit d b ipſi d a æqualis, ac proinde cum d b, b a ſint æquales triangulumque d b a ſit æquilaterum, perpendicularis b c ex b in baſim d a demiſſa ſecabit bifariam rectam d a in c. Similiter quoniam

p·305



quoniam recta a l est perpendicularis ad rectam d b, cùm latera d a a b sint æqualia anguli d a l, b a l erũt æquales; item d b c c b a, & cùm anguli tres trianguli æquilateri d a b sint æquales, eorum semisses erunt æquales, ergo anguli f a b, f b a sunt æquales; ergo angulus m f b externus est æqualis duobus internis f b a, f a b, hoc est toti d b a: Sed angulus m b a est rectus, cùm m b tangat circulum in b, & angulus f b a est vna tertia recti anguli; ergo residuus angulus m b f est duæ tertiæ recti anguli: sed angulus l f b est etiam duæ tertiæ recti, ergo triangulum m f b est æquiangulum & æquilaterum; ergo rectæ

V

m f m b f b sunt æquales; ergo cum b l sit perpendicularis ad basim m f portiones m l l f erunt æquales, & singulæ semisses rectæ b f, seu f a. Rursus quoniam triangula d a l f a c sunt similia, cùm d a sit dupla rectæ d l, erit quoque a f seu f b dupla rectæ c f; ergo c f est semissis rectæ f b & tertia pars totius c b: sed l f est semissis rectæ f b: ergo l f seu m l est tertia pars rectæ c b quæ est sinus graduum 60.

Cum ergò segmentum quadratricis sit æquale, vt in precedenti corollario dictum est, duabus tertiis trianguli d m b, & triangulum d m b sit æquale rectangulo sub sinu toto d b, & sub semisse altitudinis m l, hoc est sub sextâ parte rectæ b c sinûs graduum 60. erit segmentum quadratricis æquale duabus tertiis rectanguli sub sinu toto & sub sextâ parte sinûs graduum 60.

Rursus factis d a d h æqualibus, & abscissa e d tertia parte rectæ d c, hoc est sextâ totius d a seu h d; si per e agatur e g ipsi d m seu c b parallela, sicut d e est tertia pars rectæ d c ita erit d g tertia rectæ d b. Quoniam ergò de libræ h c punctis d, c pendet triangulum d m b, ita
2.sexti. vt eius latus m d sit ad libram perpendiculare, libra suspensa ex d, triangulum d m b ex e tantùm pendens manebit vt iacet, ergo vt recta h d ad d e rectam, ita erit

triangulum d m b ad ſpatium i, quod ex h pendens ipſi d m b æquiponderet; ergo ſpatium i eſt ſexta pars trianguli d m b, hoc eſt rectanguli ſub ſinu toto, & ſub ſexta parte ſinûs graduum 60. Si ergo ex duabus tertiis eiuſmodi rectanguli deducatur vna eiuſdem ſexta pars, relinquentur tres ſextæ, ſiue medietas eiuſdem rectanguli ſub ſinu toto & ſub ſexta ſinus graduum 60. contenti: ergo medietas prædicti rectanguli eſt ſpatium quod libra ſuſpenſa ex a pendens ex k æquiponderat ſegmento circuli d p b vt jacet manenti: ergo totum rectangulum ſub ſinu toto & ſub vna ſexta totius b c, æquiponderat duobus ſegmentis d p b, d o n vt jacent permanentibus. 6. quadrat. parab.

Rurſus fiat c q tertia pars rectæ d c; erit ergo q centrum grauitatis trianguli n d b: ergo ſi ex ſolo puncto q pendere ponatur manebit vt jacet, ergo libra ex a ſuſpenſa ſpatium r quod ex k pendens æquiponderet triangulo d n b, erit ad ipſum triangulum d n b vt q a ad a k: ſed q a continet quatuor partes, cuiuſmodi a k continet ſex, hoc eſt duas, cuiuſmodi a k continet tres; ergo ſpatium r eſt æquale duabus tertiis trianguli d n b. Ergo ſi ex k pendeat ſ æquale rectangulo ſub ſinu toto, & ſub ſexta ſinus graduum 60. totum r ſ æquiponderabit toti ſegmento n o d p b vt jacet manenti: ſed triangulum d n b eſt æquale rectangulo ſub d c & c b contento; 6. quadrat. parab.

siue rectangulo sub d a sinu toto & sub medietate rectæ b c : ergo duæ tertiæ trianguli d n b sunt æquales duabus tertiis rectanguli sub sinu toto & sub semisse rectæ c b : sed rectangulum sub sinu toto & sub
16. sexti. duabus tertiis medietatis rectæ c b est æquale duabus tertiis rectanguli sub sinu toto
1. sexti. & sub semisse rectæ c b : ergo rectangulum sub sinu toto & sub duabus tertiis medietatis rectæ c b, est æquale spatio r : sed duæ tertiæ medietatis sunt vna tertia totius : ergo spatium r est æquale rectangulo sub sinu toto & sub vna tertia rectæ c b. Cum ergo s spatium sit æquale rectangulo sub sinu toto & sub vna sextâ rectæ c b, vt ostensum fuit : si vni tertiæ addatur vna sexta, conficient tres sextæ siue vna medietas : ergo duo spatia r, s sunt simul æqualia rectangulo sub sinu toto & sub medietate rectæ c b. Hoc est sub d c semisinu recto & sub tota c b : sed rectangulum d b est semissis rectanguli u b; ergo spatium r s quod ex *k* pendens æquiponderat segmento n d b est æquale medietati parallelogrammi u b.

COROLLARIVM. I.

Hinc apertum est diceratoidi n u t d b manenti vt iacet librâ ex a suspensâ æquiponderare spatium æquale quadranti rectanguli u b. Quoniam enim diuisa rectâ d c bifariam in x, punctum x est centrum grauitatis rectangui u b, & quoniam recta κ a habet se ad rectam a x vt 4. ad 3. spatium toti rectangulo u b vt iacet manenti æquiponderans erit æquale tribus quadrantibus rectanguli u b: sed æquiponderans segmento n d b est æquale duobus quadrantibus, vt ostensum est, eiusdem rectanguli: ergo diceratoidi n u t d b æquiponderat quadrans rectanguli u b.

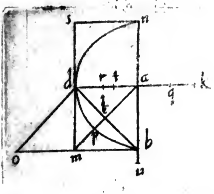
10. primi æquip.
6. pri. æquip.

COROLLARIVM II.

Hinc patet quoniam semicirculi π d φ æquiponderans libra k d suspensa ex a sunt duo trientes quadrati c a, segmenti autem b d n est rectangulum b c d, si ex quadrati d a duobus trientibus auferatur rectangulum b c d restabit æquiponderans figuræ π φ n b vt iacet manentis. Quoniam verò rectangulo b c d æquale est rectangulum sub semisse rectæ c b & sub d a, si ex duobus trientibus rectæ d a auferatur semissis rectæ b c; rectangulum sub residuo & sub rectâ d a erit æquale spatio quod æquiponderat figuræ φ π n b contentæ rectis n b, φ π, & arcubus π n, φ b.

Propositio XX.

Vt se habet recta centrum circuli & centrum grauitatis semicirculi connectens ad semidiametrum; ita tertia pars quadrati, quod potest diameter eiusdem circuli est ad ipsius circuli aream. Vnde datâ rectâ quæ istiusmodi centra connectit, si vt data recta ad diametrum ita fiat triens quadrati quod potest diameter ad aliud spatium, istud spatium erit æquale areæ circuli. Item datâ areâ circuli si vt area circuli ad trientem quadrati quod potest diameter, ita fiat semidiameter ad rectam quandam, ista erit interuallum quo centrum grauitatis semicirculi distat à centro ipsius circuli.



p. 300 et 311

Resumptâ figurâ propositionis decimæ octauæ; quoniam spatium, quod ex k pendens æquiponderat semicirculo b d n, æquale est duobus trientibus quadrati quod potest recta d a; si punctum t ponatur esse centrum grauitatis semicirculi (est enim in rectâ a d, vt probatum est in secundo). vt semidiameter a k ad a t rectam conne- 13. secundi huius.
ctentem centra t & a, ita erit semicirculus pendens ex t ad duos trientes pendentes ex k; [illegible] ita etiam erit circulus ad quatuor trientes quadrati d a; sed quadratum diametri d k cum sit quadruplum quadrati d a, continet quadrati d a trientes duodecim; ergo quatuor trientes quadrati d a sunt vnus triens quadrati d k; ergo vt se-

midiameter a k ad a r iacentem inter t & a, ita est area circuli ad trientem quadrati quod potest diameter d k; & inuertendo, vt recta a t connectens centra a, t ad semidiametrum a k, ita est triens quadrati quod potest diameter d k ad aream circuli: si ergo vt data recta a t ad semidiametrum d a, ita triens quadrati, quod potest diameter d k, fiat ad aliquod spatium rectilineum, istud rectilineum erit æquale areæ circuli; item datâ areâ circuli si &c. quod erat propositum.

COROLLARIVM I.

Eodem pacto ostendetur si d p l sit portio hyperbolæ de quâ in corollario secũdo decimæ octauæ egimus, & si per t transeat perpendiculum ex eius grauitatis centro emissum, vt recta a t ad rectam a κ, ita esse duodecimam & octauam simul partem quadrati quod potest a κ, ad figuram b p d a: ac proinde si vt data a t ad rectam a k, ita fiat octaua simul & duodecima pars quadrati a k ad spatium aliquod rectilineum illud rectilineum esse æquale figur[illegible]p d a.

COROLLARIVM II.

Ex demonstratis hactenus liquido constat quadrationem circuli & hyperbolæ à nobis traditam & inuentam dato duorum centrorum memoratorum interuallo, nihil habere mechanicum in ipſa exequutione, quatenus vox illa denotat in perficiendo aliquo problemate, aliud inſtrumentum vſurpari præter ea quæ Euclides adhibet ad conficienda elementorum ſuorum problemata, hoc eſt nullo alio poſtulato quàm vt à quouis puncto ad quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur, & vt quouis centro & interuallo circulus deſcribatur.

ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM.

LIBER IV.

Qui demonstrat centrum grauitatis periphericorum, & eorum inuicem proportionem.

PRÆFATIO.

EX quo prolegomena huius operis typis cusa sunt, mutaui consilium circa ordinem eorum theorematum, quæ præsenti libro nunc adscribo; cùm enim demonstratis in antecedenti primùm cohærerent, secernenda iudicaui, tùm quia tertius liber præmissorum duorum molem longè superabat,

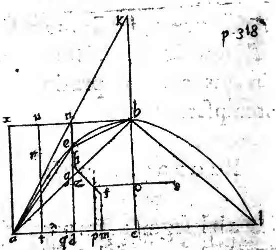
cùm quòd ea quæ isto loco tractantur suapte naturâ satis seiuncta à reliquis mihi visa fuerunt. Cæterùm quantum epilogismorum sit subsidium ad occultiora Matheseos theoremata indaganda, licet satis constet ex Archimedis operibus, Ptolemæi magnâ syntaxi, & ex ijs quæ sub proximè prioris libri finem ad calculum prælucente Zygostaticâ reuocauimus; manifestum tamen ampliùs fiet ex sequentibus, quæ euincunt circuli dimensionem non secus ac vniuersum mundum *numero & pondere*, ἀριθμῷ καὶ σταθμῷ,
Sap. 11. perfici. Porrò in numerorum rationibus computandis (præcipuè quando integris *fractiones*, quas vocant, illigantur) facile fit vt etiam diligentissimo ratiocinatori paralogismus aliquis subrepat; quare eiusmodi erratorum

venia vltro cōceditur ab ęquis huius artis æstimatoribus, nec illam ego respuo, si quid forte tale, vt homo sum, peccauerim. Sæpe diagrammatis ratio stat, sed dum ad numeros reducitur, calculi error interuenit; is exigui momenti est, cùm manente demonstrationis robore, nullo negotio emendari possit: non est tamen calculatoris cuiuscunque hæc ratiocinia examinare, sed Arithmetici imprimis exercitati etiam in *minutiarum* logisticâ, quales sæpius non sunt viri alioqui docti, qui solâ theoriâ in istis contenti praxin ipsam contempserunt.

PROPOSITIO I.

Sit a b l segmentum parabolæ contentum arcu a b l & basi a l, diuisum per rectā b c diametrum aut diametro parallelam in duas portiones; propositumque sit in portionis alterutrius a e b c rectâ a c determinare punctum in quod incidit æquidistans rectæ b c ducta per centrum grauitatis portionis a e b c.

Recta a c diuidatur bifariam in d; & in m ita vt a m sit dupla rectæ c m; producatur per d æquidistans rectæ b c, occurratque sectioni conicæ in e, recta verò a b eidem d e occurrat in g; ita diuidatur d m



in p vt ſicut junctis a c c b rectis, triangulum a c b ad trianguli a e b quatuor trientes, ita ſit recta d p ad p m; per p agatur p i ipſi c b parallela. Dico rectam p i tranſire per centrum grauitatis portionis a e b c.

Quoniam enim recta d e ſecat bifariam baſim a b, & eſt parallela diametro ſegmenti, erit g e diameter ſegmenti a e b g; ergo g e tranſit per centrum grauitatis ſegmenti a e b g, & ipſum ſegmentum eſt æquale quatuor trientibus trianguli a b e. Rurſus quoniam c m eſt tertia pars lateris a c triãguli a c b & recta m f eſt lateri c b æquidiſtãs, tranſibit per centrũ grauitatis trianguli a c b. Cùm igitur portionem a e b c duæ eius partes a e b g a c b g æquẽt, & rectæ g e, m f trãſeant per centra earum, ſi per centrum totius ducatur æquidiſtans diuidet rectam d m in duas portiones quarum ea quæ adiacebit puncto d erit ad aliam ſicut triangulum b c a eſt ad ſegmentum a e b g hoc eſt ad quatuor trientes trianguli a e b g; ſed ita etiam eſt ex conſtructione d p ad p m: ergo punctum p eſt illud quod erat determinandum.

49. primi Cõ. 4. ſecũdi æquip. 17. quad. parab. 6 quad. parab. 6. aut 7. æquip.

COROLLARIVM I.

Hinc facile intelligitur qua methodo inueniri deberet centrum portionis inter duas quascunque parallelas, ed, bc interceptas; ductâ nimirum eb, trapezij debc inuenitur centrum grauitatis & per illud ducitur parallela rectæ ip respondens; cætera se habent eodem prorsus modo, substituto in locum trianguli abc trapezio edcb.

15. primi æquip.

COROLLARIVM II.

Ex his patet si compleatur parallelogrammum xc parallelam ductam per portionis bxae centrum grauitatis inueniri, si ex parallelogrammo xc auferatur portio beac constans triangulo bac & trientibus quatuor trianguli aeb & si vt residuum ad portionem aebc, ita fiat recta pd ad dt. Quoniam enim recta ac bifariam secatur in d, centrum grauitatis parallelogrammi xc erit in rectâ de lateri bc parallelâ. Cum ergo recta pi transeat per centrum grauitatis partis aebc, & vt altera pars axbe ad aebc ita sit dp recta ad dt: recta tu parallela rectæ cb transibit per centrum grauitatis partis bxae.

COROLLARIVM III.

Hinc patet quoniam punctum p cadit inter d & m, rectam ap esse semper maiorem semisse rectæ ac; est enim maior quàm

quàm a d quæ rectæ a c eſt ſemiſſis & ſemper eſſe minorem duobus trientibus rectæ a c; eſt enim minor quàm a m quæ duos trientes rectæ a c continet: proportio ergo rectæ a p ad p c eſt maior proportione æqualitatis, & minor proportione duplâ.

COROLLARIVM IV.

Segmento parabolæ quouis diuiſo in duas partes per diametrum, centrum grauitatis earum cuiuſlibet eſt in recta æquidiſtante eidem diametro & ſemibaſim ſecante in duas portiones quarum quæ diametro adiacet eſt ad aliam vt 3. ad 5. Centrum autem grauitatis ſemi-diceratoidis dictæ portioni reſpondentis eſt in parallela diuidente ſemi-baſim in duas partes quarum quæ adiacet diametro ſe habet ad alteram vt 3. ad 1. Sit a b l quoduis parabolæ ſegmentum, cuius baſis a l, diameter b c, diuidens ipſum ſegmentum in duas partes a b c, l b c. Cuiuſuis illarum a b c centrum grauitatis ſit i, & per i ducta ſit ipſi b c æquidiſtans i p, occurrens baſi a l in p. Dico vt 3. ad 5. ita eſſe rectam p c ad p a.

Ducatur recta a b & trianguli a b c centrum grauitatis ſit f, portionis autem a e b centrum grauitatis ſit h, recta connectens centra h, f tranſibit per i, atque vt triangulum a b c ad ſegmentum a e b, 8. libri primi æquip.

4. secũdi æqu. ita erit recta h i ad i f; per h & f ducantur rectæ h d, f m; erit h d diameter segmenti a e b, ac proinde occurrens basi
2. sexti Eucl. a b in g; eam bifariam secat; cùm igitur lateri b c trianguli a b c parallela sit g d, vt b g ad g a, ita erit c d ad d a; sunt ergo c d, d a æquales. Et quoniam f m est pa-
6. quad. rallela lateri b c & per f centrum grauitatis transit, erit m c tertia pars rectæ a c.
10. sexti Eucl. Denique quoniam rectæ d h, p i, m f sunt parallelæ, vt h i ad i f ita erit recta d p ad p m.

17. qua. par. Quoniam igitur ducta recta b l segmentum a b l continet triangulum a b l semel & eius trientem; segmenti verò a b l portio a e b c est medietas, triangulíque a b l triangulum a b c est etiam medietas,
6. primi huius in 1. coroll. portio a e b c continebit triangulum a b c semel & eius trientẽ, hoc est a e b c se habet ad a b c vt quaternarius ad ternarium: ergo cum ternarius ad excessum quo à quaternario superatur habeat triplam proportionem, triangulum a b c habebit quoque triplam ad portionem a e b, qua superatur à figura a e b c. Cum igitur vt triangulum a b c ad portionem a e b, ita ostensum sit esse rectam h i ad i f, seu d p ad p m, erit d p tripla rectæ p m. Diuisa igitur recta a c in viginti quatuor partes; semissis d c continebit duodecim ex illis; m c verò triens rectæ a c continebit octo; d m ergo habebit quatuor. Et quoniam

d m ita est in p diuisa vt d p ad p m sit vt ternarius ad vnitatem; ex illis quatuor quas d m continet, attribuentur tres ipsi d p: recta ergo a p constabit quindecim partibus, & recta p c residuis nouem: ergo recta a p se habet ad c p vt 15. ad 9. siue vt quinarius ad ternarium quod erat primò loco ostendendum.

Rursus quoniam portio a e b g est tertia pars trianguli a b c; completo parallelogrammo x c, tota figura a e b c continebit quatuor sextantes parallelogrammi x c; ac proinde pars a x b e se habet ad partem b e a c vt vnitas ad binarium. Sit recta u t diametro a b c parallela, transeatque per centrum figuræ b x a c: vt vnitas ad binarium ita erit d p ad d t; sed d p est vna octaua rectæ a c, ergo t d erit duæ octauæ: ergo a t continet duas octauas; & t c sex residuas; ergo recta a t ad t c est vt 2. ad 6. siue vt vnitas ad ternarium, quod erat secundo loco ostendendum. 6. aut 7. quad. parab.

Quòd si alia portio segmenti parabolæ quam semisegmentum sit proposita & in ea determinari per numeros debeat punctum in quod cadit parallela per centrum grauitatis ducta in portione tam segmenti quàm diceratoidis; illud præstari debebit insistendo methodo traditæ, vel alteri faciliori quæ ex principiis ab Archimede traditis fortasse occurret.

COROLLARIVM V.

Si opus sit, ostendi poterit rectam i p continere duas rectæ b c quintas. Sit enim o centrum grauitatis totius parabolæ, &
10. primi æquip. iungatur i o, cui æqualis abscindatur o f;
erit f centrum grauitatis ipsius b c l, cùm
15. secundi huius. partes a b c, b c l sint æquales; sed recta
i f est parallela rectæ a l ex demonstratis,
8. sec. æquip. & recta o c continet duas quintas rectæ
c b: ergo p i ipsi c o æqualis continet duas quintas rectæ c b.

COROLLARIVM. VI.

Ex his apertum est si duo parabolæ segmenta habuerint basim eandem, rectas diametris parallelas & transeuntes per centra grauitatis semisegmentorum ad easdem diametrorum partes iacentium concurrere in idem baseos punctum, & eius segmentum adjacens diametro ad aliud esse vt 3. ad 5. Idem dici debet de parallelis per centra grauitatis semidiceratoidum ductis; Eas nimirum in idem baseos punctum incidere, & partem eius diametro adjacentem esse triplam reliquæ quæ ad easdem diametri partes iacet.

COROLLARIVM VII.

Si fiant c b, b k ęquales, & jungatur a κ, erit a k tãgens in a; & ſicut a c eſt dupla rectæ a d, ita k c erit dupla rectæ d n, ſunt ergo d n, b c ęquales: cùm ergo d e contineat tres quadrantes ſeu dodrantem rectæ b c, erit e n reliquus quadrans; & quia triangula a n e, a e d habent eandem altitudinem a d, erunt vt baſes d e, e n hoc eſt vt nouem ad tria; & quia parabolæ ſegmentum e g eſt tertia pars trianguli a n e; triangulum a e d erit ad ſegmentum e g vt nouem ad vnum. Si ergo recta a d diuidatur in partes ſexaginta quarum q d contineat viginti, a t continebit triginta, & t q decem; Et ſi t q ita diuidatur in λ, vt t λ contineat nouem, & q d reſiduam ex decem, erit a λ ad λ d vt triginta nouem ad viginti & vnum, hoc eſt vt tredecim ad ſeptem. Dico ſi per λ agatur parallela rectæ c k, in illa eſſe centrum grauitatis portionis parabolicæ a e d. Quoniam enim a e d triangulum habet latus a d diuiſum in tres partes, quarum vnam continet q d, ſi per q agatur ęquidiſtans rectæ d e, erit in ęquidiſtante centrum grauitatis trianguli a e d; ſed centrum grauitatis ſegmenti parabolici a e eſt in recta t u biſariam ſecante, vt ponimus, rectam a d; ergo cum triangulum a e d ſit ad ſeg-

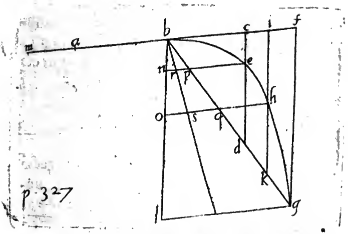
16 quadrat. parab.

mentum a e vt nouem ad vnum, & ita etiam sit t λ ad λ q, erit in parallela per λ centrum grauitatis portionis parabolicæ a e d.

Propositio II.

In triangulo quouis quadrata rectarum æquidistantium vni ex tribus lateribus sunt vt portiones earundem æquidistātium clausæ tangente & parabolâ, cuius vertex sit in angulo subtenso à prædicto latere; diameter sit ipsi parallela, & tangens sit alterum ex trianguli lateribus ad verticem conuenientibus; tertium verò latus subtendat portionem parabolæ intra triangulum inclusam.

Sit triangulum b f g cuius lateri f g parallelæ ductæ sunt i c, c k; per b angulum oppositum lateri f g ducta sit b l ipsi f g parallela; ad b l ex b excitetur b a perpendicularis, vtque f g recta ad b f, ita fiat b f ad tertiam quandam b m ex b a abscissam. Rursus dato latere recto b m,



diametro b l, eiusque vertice b, describatur parabola b e, cuius ad diametrum b l ordinatim applicatæ sint parallelæ rectæ b f: tanget ergo recta b f parabolam in b: completoque parallelogrammo f g l b, quoniam rectangulum m b l est æquale quadrato rectæ l g seu b f ipsi æqualis, parabola transibit per g; ergo recta b g subtendit arcum b e g. Rectæ igitur c d, i k occurrant parabolæ in e & h; dico vt recta c e ad i h rectam, ita esse quadratum c d ad i k quadratum. 51. primi Cõ. 32. eiusdem.

Compleantur parallelogramma c e n b, i h o b: ergo eorum latera opposita erunt æqualia, hoc est rectæ n b, b c, i h, b i rectis c e, n e, b o, o h. Quoniam ergo vt recta b n ad b o, ita est quadratum n e ad o h, erit quoque vt recta c e ad i h, ita quadratum b c ad b i; Cùm igitur tri- 34. primi Euc. 20. primi Cõ.

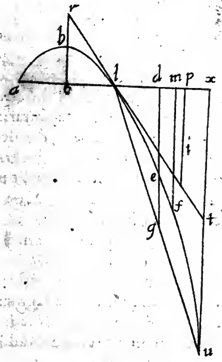
gula b c d, b i k sint similia, erit vt b c ad c d, ita b i ad i k: & alternando vt b c ad b i, ita c d ad i k: ergo cùm b c quadratum ad b i sit vt recta c e ad i h rectam, quadratum quoque c d ad i d erit vt recta c e ad i h; quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Conueniant rectæ n e, o h cum rectâ b g in punctis p, q; apertum est ex demonstratis, quadrata n e, o h esse vt rectas n p, o q: sunt enim vt rectæ b n, b o: sed b n ad b o, est vt n p ad o q, eò quòd triangula b n p, b o q sint similia; ergo
20. primi Cō. vt recta n p ad n q, ita est quadratum n e ad o h quadratum. Quia verò ductâ quacunque ex puncto b recta b f occurrente rectis n e, o h in r & f, vt n p ad o q, ita ob similitudinem triangulorum b n p, b o q, est recta n r ad o f; vt quadratum n e ad o h, ita erit ductâ quacunque recta n f, recta n r ad o f.

PROPOSITIO III.

Sit a b l segmentum parabolæ, & productis extra ipsum basi & parabolâ, ductaque recta x u diametro r b æquidistante, & occurrente in x & u basi atque parabolæ, propositum sit inuenire sectionem quam in recta l x facit æquidistans diametro ducta per centrum grauitatis figuræ l x u contentæ sub rectis l x, x u & sub curua l u.



p 329

Fiant c b, r b æquales, & iungatur r l, quæ vt ostensum fuit in prioribus tanget sectionem in l; recta l x diuidatur bifariam in d, & ita in m, vt l m sit dupla rectæ m x. Vt recta a m ad m x, ita fiat recta d m ad m p. Dico parallelam p i per p ductam transire per centrum grauitatis figuræ propositæ l x u.

Quoniam enim vt recta a x ad a l, ita est x u recta ad x t (est autem t occursus rectæ x u & tangentis r l) erit per conuersionem rationis vt a x ad l x ita x u ad t u. (tertii huius.)

Rursus iuncta recta l u, & per d ducta d g æquidistante ipsi x u; cùm x u sit æquidistans diametro b c, erit & d g æquidistans eidem diametro; & quia recta d g (2. sexti Euc.) parallela lateri x u trianguli x u l bifariam secat latus l x, secabit quoque bifariam (49. primi Cō.) rectam l u: ergo recta g e est diameter (4. secūdi æqu.) segmenti l e u g: ac proinde recta g e transit per centrum grauitatis segmenti l e u g. (6. qua. parab.) Similiter quoniam recta p x est tertia pars (16. qua. parab.) rectæ l x, & est parallela lateri x u trianguli l x u, transibit m f per centrum grauitatis trianguli l x u.

Rursus quoniā segmentū l e u g est triēs trianguli l t u, ipsum l t u erit ad segmentū (5. sexti Euc.) l e u g vt recta l x ad m x, in ratione scilicet tripla; & quoniam vt recta a x ad l x, ita est recta x u ad t u, & vt x u basis ad t u basim ita sunt x u l, t u l triangula; ergo vt recta a x ad l x ita est triangulum l x u ad triangulum l t u : sed vt recta l x ad m x, ita est l t u triangulum ad segmentum l e u g: ergo ex æquo vt recta a x ad m x ita est triangulum x u l ad segmentum l e u g: ergo diuidendo vt recta a m ad m x, ita est figura l x u e ad segmentum l e u g: sed ita etiam est d m interuallum inter parallelas d e, m f transeuntes per partis l e u g & per totius l x u g centra, ad aliam rectæ d m portionem ad partes x sumptam, & iacentem inter m f & aliam parallelam ductam per centrum alterius partis l x u e: ergo cum ita sit d m ad m p, recta p i transibit per centrum grauitatis partis l x u e, quod erat faciendum. 6. aut 7. primi æquip.

COROLLARIVM I.

Ex his apertum est, rectam l p esse maiorem besse rectæ l x, hoc est recta l m : ac proinde proportionem rectæ l p ad p x esse maiorem dupla. Esse autem tripla minorem ita ostenditur. Quoniam proportio rectæ l m ad m x est ex constructione dupla, & recta a m est maior recta l m, proportio rectæ a m ad m x erit maior dupla : sed vt a m recta ad m x, ita est ex constructione d m recta ad m p : ergo proportio rectæ d m ad m p est dupla minor. Rursus si recta l x diuidatur in viginti-quatuor partes æquales, recta l d semissis continebit duodecim ; & recta d m sextans 8. quinti.

continebit quatuor; tota verò l m continebit sexdecim. Quoniam ergo proportio rectæ d m ad m p est duplâ maior, nunquam m p continebit duas, cuiusmodi d m continet quatuor, sed continebit semper pauciores quàm duas: ergo quando l x continet viginti quatuor, & l m sexdecim, nunquam recta l p continet octodecim, sed pauciores quam octodecim. Cùm ergo octodecim ad viginti quatuor proportio sit ternarij ad quaternarium, proportio rectę l p ad p x erit minor proportione ternarij ad quaternarium: ergo quando l x continet quatuor semper l p continet pauciores quàm tres: ergo semper proportio rectæ l p ad p x est minor triplâ; quod erat ostendendum.

8. quinti.

COROLLARIVM II.

Propositum sit numeris designare punctum p posita recta l x æquali rectæ a l. Dico l p ad p x esse vt septenarium ad ternarium.

Quoniam vt a x recta ad l x ita est triangulum l x u ad triangulum l t u, cum a x sit dupla rectæ l x, erit triangulum l x u duplum trianguli l t u, ergo diuiso triangulo l x u in sex partes, l t u continebit tres, & l e u vnam; & l x u e quinque; ergo pars l x u e ad partem l e u est vt quinarius ad vnitatem: ergo recta d m est ad m p vt quinarius ad vnitatem: diuisa ergo recta l x in triginta partes, recta d m continebit quinque ex illis; & recta m p vnã; ergo tota d m continet sex: & tota l p viginti vnam; & p x residuas nouem: ergo recta l p est ad p x vt 21. ad 9. hoc est vt 7. ad 3.

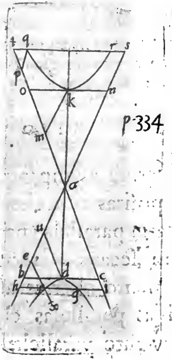
COROLLARIVM III.

Ex his quoque apertum est si duo parabolæ segmenra habuerint basim eandem, eaque extra segmentum in eodem puncto secta fuerit, & per sectionis punctum ducta parallela diametro, figuras contentas sub portionibus baseos, & parabolæ productarum iacentibus extra segmenta & sub parallela, habere centrum grauitatis in eadem parallela ad diametrum.

PROPOSITIO IV.

Si duarum asymptotωn sectiones oppositas cõprehendentium vni ducatur parallela vnam hyperbolarum secans, rectangulum sub segmento alterius asymptot i inter duas parallelas clauso, & sub segmento parallelæ inter se ctionem & asymptotum interce-pto est æquale spatio quod po-test portio asymptoti clausa inter centrum sectionum oppositarum & parallelam alteram per termi-num axis ductam.

Sint sectiones oppositæ d, k compre-hensæ asymptotis t a i, s a h (sunt enim oppositarum sectionum asymptoti commu-nes per 15. secundi Conicorum) axisque

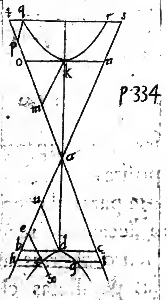


parabolæ d sit a d, si producatur a d donec occurrat sectioni k in puncto k, erunt a d, a k ęquales per 30. libri primi Conicorum, & si per d & K ducantur tangentes b d c, o K n, erunt parallelę per 31. secundi Conicorum: quoniam ergo b d est perpendicularis ad axem a d; erit quoque k o perpendicularis ad diametrum a k; est ergo a k axis parabolæ k: quapropter sectiones oppositæ habent communem axem: & si per k & d ducantur rectę d u, k m parallelę alterutri asymptotorum, erunt a u, a m ęquales, cùm triangula d a u, k m a habeant angulos ad d, a, k ęquales: ergo sunt isosceelia super basibus d a, k a similia: cùm igitur bases sint ęquales erunt quoque & reliqua latera ęqualia. Quòd autem anguli ad d, a, k sint æquales manifestum est, angulus enim b a c cùm diuidatur per rectam a d cadentem perpendiculariter in tangentem b d, & cùm b c diuisa sit bifariam in tactu d per 3. secundi Conicorum, bifariam secabitur per rectam a d; cùm autem u d, a c sint parallelę, item m K, a n erunt anguli alterni ęquales, ac proinde anguli ad d, a, k sunt ęquales. Quæ ergo de hyperbola d demonstrabuntur intelligenda pariter erunt cùm proportione de hyperbola k; cùm rectæ a u, a m sint ęquales vt ostensum fuit. 9.primi.

Rectę igitur a i ducta sit ęquidistans e f

ctionem & asymptotum interce-pto est æquale spatio quod potest portio asymptoti clausa inter centrum sectionum oppositarum & parallelam alteram per terminum axis ductam.

Sint sectiones oppositæ d, k comprehensæ asymptotis t a i, s a h (sunt enim oppositarum sectionum asymptoti communes per 15. secundi Conicorum) axisque



parabolæ d sit a d, si producatur a d donec occurrat sectioni k in puncto k, erunt a d, a k ęquales per 30. libri primi Conicorum, & si per d & K ducantur tangentes b d c, o K n, erunt parallelę per 31. secundi Conicorum: quoniam ergo b d est perpendicularis ad axem a d; erit quoque k o perpendicularis ad diametrum a k; est ergo a k axis parabolæ k: quapropter sectiones oppositæ habent communem axem: & si per k & d ducantur rectę d u, k m parallelę alterutri asymptotorum, erunt a u, a m ęquales, cùm triangula d a u, k m a habeant angulos ad d, a, k ęquales: ergo sunt isoscelia super basibus d a, k a similia: cùm igitur bases sint ęquales erunt quoque & reliqua latera ęqualia. Quòd autem anguli ad d, a, k sint æquales manifestum est, angulus enim b a c cùm diuidatur per rectam a d cadentem perpendiculariter in tangentem b d, & cùm b c diuisa sit bifariam in tactu d per 3. secundi Conicorum, bifariam secabitur per rectam a d; cùm autem u d, a c sint parallelę, item m K, a n erunt anguli alterni ęquales, ac proinde anguli ad d, a, k sunt ęquales. Quæ ergo de hyperbola d demonstrabuntur intelligenda pariter erunt cùm proportione de hyperbola k, cùm rectæ a u, a m sint ęquales vt ostensum fuit. 9.prim.

Rectę igitur a i ducta sit ęquidistans e f

13. secundi Conic. secans hyperbolam d in puncto f: nam in pluribus non secat, secat tamen in vno eò quòd per locum asymptotis h a i terminatum duci ponatur. Dico, rectangulum a e f esse ęquale quadrato rectæ a u. Per f agatur recta h f g i parallela tangenti b d.

Quoniam augulus b a c diuisus est bifariam per axem a d, vt ostensum fuit, & angulus b d a est ęqualis angulo a d c: anguli ergo ad b & c sunt ęquales in triangulo b a c: ergo b a, a c sunt ęquales. Si- 3. primi Euc. mili ratione ostendentur u b, u d; item a h, a i esse æquales.

Rursus quoniã in triangulo a h i basi a i ducta est parallela e f: ergo vt a e ad e h, ita est i f ad f h: ergo rectangulũ a e h seu a e f est ad rectangulum i f h in duplicata ratione homologorum laterum e h, h f, seu b u, b d: sed rectangulum i f h, est per decimam secundi Conicorum æquale quadrato rectę b d: ergo rectangulum 2. sexti Euc. a e f est æquale quadrato rectæ b u: nam 20. sexti Euc. quadrata b d, b u duplicatã habent rationẽ laterum, cùm quadratũ quadrato sit simile vt constat ex prima definitione sexti Euclidis. Quoniam verò in triangulo a b c basi a c parallela ducta est u d; vt b d, d c, ita erunt b u, u a, cúmque b d, d c 2. sexti Euc. sint æquales, erunt b u, u a etiam æquales; ergo rectangulum a e f, cùm ostensum sit esse æquale quadrato rectæ b u, est etiam æquale quadrato rectæ u a quæ ipsi

b u est

bu est æqualis. Quòd si punctum e incidat in punctum u, quoniam ostensum est rectas bu, ua, ud esse æquales, rectangulum aud erit æquale quadrato rectæ au: si igitur duarum &c, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Hinc manifestum est si recta ef sit parallela asymptoto ac, & rectangulum aef sit æquale quadrato au, punctum f esse in hyperbolâ. Si enim recta ef non occurrit hyperbolæ in f, occurrat si fieri potest in x (occurret enim per decimam tertiam secundi Conicorum) ergo rectangulum aex erit æquale quadrato au, cui etiam æquale cùm ponatur esse rectangulum aef, erunt rectangula aef, aex æqualia, quod est absurdum, cùm sub eâdem basi ae altitudines habeant inæquales, ac proinde sint inæqualia. 1. sexti Euc.

Eiusmodi parallelogrammum appelletur *conditum*, Græcè ῥητόν.

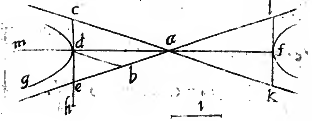
PROPOSITIO V.

Datus sit angulus cab oporteatque describere sectiones oppositas illo & eo, qui ipsi ad verticem a respondet, comprehensas, ita vt rectangulum conditum sit æquale spatio quod potest recta f data.

Rectæ i fiat a b æqualis, diuisóque angulo c a b bifariam per rectam a m, ducatur per b recta b d parallela rectæ a c, occurratque rectæ a m in d. Rectæ d a fiat a f æqualis, & ex puncto d excitetur ad f d perpendicularis d e; vtque f d ad c e, ita fiat c e ad d h. Dato axe f d, & latere recto d h describantur sectiones oppositæ d, f. Dico conditum rectangulum a b d, vel quoduis aliud de quo agitur in præcedenti propositione esse æquale quadrato rectæ a b, & hyperbolas d, f comprehendi asymptotis c a k, e a l.

55. primi Cō.

p 338



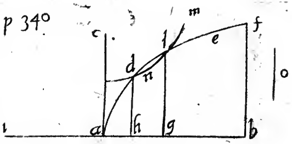
Quoniam enim figura f d h eſt æqualis quadrato rectæ c e, cùm c d, d e ſint æquales (ſunt enim anguli c a d, e a d æquales, & anguli c d a, a d e item æquales) erit quadratum d e quarta pars figuræ: ergo rectę c a e ſunt aſymptoti hyperbolæ d g. Et quoniam per d terminum axis f d acta eſt d b parallela rectæ a c, condictum rectangulum, de quo in præcedenti agitur, erit æquale quadrato rectæ a b, ſiue rectæ i, per eandem propoſitionem præcedentem; quod erat faciendum. 4 ſecūdi Euc. in corollar. 1. ſecundi Conic.

Propositio VI.

Datum ſit ſpatium quod recta o poteſt; datæ item ſint rectæ i a, a b, oporteatque ita diuidere rectam a b in g, vt ſicut recta i a ad a g rectam, ita ſit quadratum rectæ g b ad quadratum rectæ o.

Ex puncto a ad rectam a b excitetur perpendicularis a c æqualis ipſi i a. Dato latere recto a c, vertice a, diametro a b, deſcribatur parabola a e f cuius ordinatim applicata b f ſit parallela rectæ c a, vel cuicunque alteri in rectam a b incidenti. Rurſus intra aſymptotos a b, b f deſcri- 52. primi Cō.

p 340



batur per præcedentem hyperbola m n cuius condictum rectangulum sit æquale rectangulo sub rectis i a & o comprehenso; occurrat autem hyperbola parabolæ in puncto l (si enim non occurrat res quæ proponitur, nequit fieri vt paulò post dicemus) & per l agatur l g parallela rectæ b f. Dico punctum g esse illud quod quæritur.

Quoniam enim rectangulo c a g æquale est quadratum ordinatim applicatæ g l, tres rectæ c a siue a i, g l, a g erunt proportionales, ergo vt recta a i ad rectam a g, ita erit quadratum rectæ a i ad rectæ g l quadratum. Rursus quoniam rectangulum b g l est æquale rectangulo sub rectis i a & o contento, erunt rectæ i a, g l, b g, o proportionales, & vt i a recta ad g l rectam, ita b g recta ad o rectam; & vt i a quadratum ad g l quadratum, ita b g quadratum, ad quadra-

20. primi Cō. 20. sexti in coroll. 16. sexti Euc.

tum o: sed vt i a quadratum ad g l quadratum, ita esse ostendimus i a rectam ad a g: ergo vt i a recta ad a g, ita g b quadratum ad quadratum o: inuentum est ergo punctum g, quod erat faciendum.

Quòd si hyperbola m n non conueniret cum parabolâ a e f, problema solui non posset: si enim fieri potest, non conueniat, & tamen vt i a recta ad a g rectam, ita sit quadratum g b ad quadratum o; quoniam ducta per g recta g l parallelâ rectæ b f occurrente in l parabolæ; rectangulum b g l est æquale rectangulo condicto hyperbolæ m n, punctum l iacebit in hyperbola m n ex demonstratis, conueniet ergo cum parabola & non conueniet quod est absurdum, si ergo non conueniat, fieri nequit quod faciendum proponitur. 4. huius in coroll.

COROLLARIVM.

Hinc apertum est problema solui posse duobus modis quando parabola & hyperbola occurrunt sibi in duobus punctis, vt in presenti diagrammate in l & d. Si enim per d agatur d h æquidistans rectæ b f, ostendetur vt paulò antè, sicut recta i a est ad a h rectam ita esse quadratum h b ad quadratum o.

SCHOLIVM.

Istud problema assumpsit Archimedes vt datam sphæram secaret in data proportione quacunque; Cum autem assumendo pollicerεtur eius demonstrationem sub finem, vel promissis defuit, vel quod æquius est existimare, stetit quidem, sed iniuria temporum periit eius iste labor, quem suppleuit Eutocius alia via quæ & longior apertè est & fortasse videbitur nonnulli obscurior nostra. Quod sequitur isti germanum est problema, & à nullo, quem sciam, traditum, eritque nobis vsui ad diuisionem parabolici conoidis quam prætermisit Commandinus, sub finem Commentariorum in librum de conoidibus & sphæroidibus, licet scribendi ratio postularet vt cùm modum diuidendi coni, sphæroidis, & conoidis parabolici tradidisset, adjungeret parem modum diuidendi conoidis hyperbolici seu amblygonij. Verùm ex principiis ab Archimede traditis eum elicere non potuit. Cæterùm quamuis hæc duo problemata non conficiantur geometricè per solam regulam & circinum, peraguntur tamen ductu sectionum conicarum, quod in rebus necessariis nec facilè parabilibus primarium est supplementum.

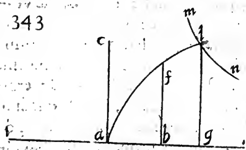
4 secūdi de sphæra & cylindro.

Propositio VII.

Datum ſit ſpatium quod recta o poteſt; datæ item ſint rectæ ia, ab, oporteatque ad rectam ab ita adjungere rectam bg, vt ſicut recta ia ad ag rectam, ita ſit quadratum rectæ gb ad quadratum rectæ o.

Ex puncto a excitetur recta ca ad rectam ab perpendicularis, & ipſi ia æqualis. Dato latere recto ac, vertice a, diametro ab deſcribatur parabola ae cuius ordinatim applicata ſit parallela rectæ ea. 52. primi Cō.

p 343



continebit quatuor; tota verò lm continebit sexdecim. Quoniam ergo proportio rectæ dm ad mp est duplâ maior, nunquam mp continebit duas, cuiusmodi dm continet quatuor, sed continebit semper pauciores quàm duas: ergo quando lx continet viginti quatuor, & lm sexdecim, nunquam recta lp continet octodecim, sed pauciores quam octodecim. Cùm ergo octodecim ad viginti quatuor proportio sit ternarij ad quaternarium, proportio rectę lp ad px erit minor proportione ternarij ad quaternarium: ergo quando lx continet qnatuor semper lp continet pauciores quàm tres: ergo semper proportio rectæ lp ad px est minor triplâ; quod erat ostendendum.

8. quinti.

COROLLARIVM II.

Propositum sit numeris designare punctum p posita recta lx equali rectæ al. Dico lp ad px esse vt septenarium ad ternarium.

Quoniam vt ax recta ad lx ita est triangulum lxu ad triangulum ltu, cum ax sit dupla rectæ lx, erit triangulum lxu duplum trianguli ltu, ergo diuiso triangulo lxu in sex partes, ltu continebit tres, & leu vnam; & lxue quinque; ergo pars lxue ad partem leu est vt quinarius ad vnitatem: ergo recta dm est ad m p vt quinarius ad vnitatem; diuisa ergo recta l x in triginta partes, recta d m continebit quinque ex illis; & recta m p vnā; ergo tota d m continet sex; & tota l p viginti vnam; & p x residuas nouem: ergo recta l p est ad p x vt 21. ad 9. hoc est vt 7. ad 3.

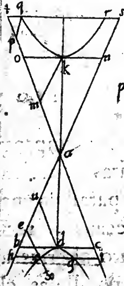
COROLLARIVM III.

Ex his quoque apertum est si duo parabolæ segmenra habuerint basim eandem, eaque extra segmentum in eodem puncto secta fuerit,& per sectionis punctum ducta parallela diametro, figuras contentas sub portionibus baseos, & parabolæ productarum iacentibus extra segmenta & sub parallela, habere centrum grauitatis in eadem parallela ad diametrum.

PROPOSITIO IV.

Si duarum asymptot[illegible]n sectiones oppositas cōprehendentium vni ducatur parallela vnam hyperbolarum secans, rectangulum sub segmento alterius asymptot i inter duas parallelas clauso, & sub segmento parallelæ inter se ctionem & asymptotum interce-pto est æquale spatio quod potest portio asymptoti clausa inter centrum sectionum oppositarum & parallelam alteram per terminum axis ductam.

Sint sectiones oppositæ d, k comprehensæ asymptotis t a i, s a h (sunt enim oppositarum sectionum asymptoti communes per 15. secundi Conicorum) axisque



p 334

parabolæ d sit a d, si producatur a d donec occurrat sectioni k in puncto k, erunt a d, a k ęquales per 30. libri primi Conicorum, & si per d & k ducantur tangentes b d c, o k n, erunt parallelę per 31. secundi Conicorum: quoniam ergo b d est perpendicularis ad axem a d; erit quoque k o perpendicularis ad diametrum a k; est ergo a k axis parabolæ k: quapropter sectiones oppositæ habent communem axem: & si per k & d ducantur rectę d u, k m parallelę alterutri asymptotorum, erunt a u, a m ęquales, cùm triangula d a u, k m a habeant angulos ad d, a, k ęquales: ergo sunt isoscelia super basibus d a, k a similia: cùm igitur bases sint ęquales erunt quoque & reliqua latera ęqualia. Quòd autem anguli ad d, a, k sint æquales manifestum est, angulus enim b a c cùm diuidatur per rectam a d cadentem perpendiculariter in tangentem b d, & cùm b c diuisa sit bifariam in tactu d per 3. secundi Conicorum, bifariam secabitur per rectam a d; cùm autem u d, a c sint parallelę, item m k, a n erunt anguli alterni ęquales, ac proinde anguli ad d, a, k sunt ęquales. Quæ ergo de hyperbola d demonstrabuntur intelligenda pariter erunt cùm proportione de hyperbola k, cùm rectæ a u, a m sint ęquales vt ostensum fuit. 9. primi.

Rectę igitur a i ducta sit ęquidistans e f

13. secundi Conic. secans hyperbolam d in puncto f: nam in pluribus non secat, secat tamen in vno eò quòd per locum asymptotis h a i terminatum duci ponatur. Dico rectangulum a e f esse ęquale quadrato rectæ a u. Per f agatur recta h f g i parallela tangenti b d.

Quoniam augulus b a c diuisus est bifariam per axem a d, vt ostensum fuit, & angulus b d a est ęqualis angulo a d c: anguli ergo ad b & c sunt ęquales in triangulo b a c: ergo b a, a c sunt ęquales. Similiter ratione ostendentur u b, u d; item a h, a i esse æquales.

3. primi Euc.

Rursus quoniã in triangulo a h i basi a i ducta est parallela e f: ergo vt a e ad e h, ita est i f ad f h: ergo rectangulũ a e h seu a e f est ad rectangulum i f h in duplicata ratione homologorum laterum e h, h f, seu b u, b d: sed rectangulum i f h, est per decimam secundi Conicorum æquale quadrato rectę b d: ergo rectangulum a e f est æquale quadrato rectæ b u: nam quadrata b d, b u duplicatã habent rationẽ laterum, cùm quadratũ quadrato sit simile vt constat ex prima definitione sexti Euclidis. Quoniam verò in triangulo a b c basi a c parallela ducta est u d; vt b d, d c, ita erunt b u, u a, cúmque b d, d c sint æquales, erunt b u, u a etiam æquales; ergo rectangulum a e f, cùm ostensum sit esse æquale quadrato rectæ b u, est etiam æquale quadrato rectæ u a quæ ipsi b u est

2. sexti Euc.
20. sexti Euc.
2. sexti Euc.

bu eſt æqualis. Quòd ſi punctum e incidat in punctum u, quoniam oſtenſum eſt rectas bu, ua, ud eſſe æquales, rectangulum aud erit æquale quadrato rectæ au: ſi igitur duarum &c, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM

Hinc manifeſtum eſt ſi recta ef ſit parallela aſymptoto ac, & rectangulum aef ſit æquale quadrato au, punctum f eſſe in hyperbolâ. Si enim recta ef non occurrit hyperbolæ in f, occurrat ſi fieri poteſt in x (occurret enim per decimam tertiam ſecundi Conicorum) ergo rectangulum aex erit æquale quadrato au, cui etiam æquale cùm ponatur eſſe rectangulum aef, erunt rectangula aef, aex æqualia, quod eſt abſurdum, cùm ſub eâdem baſi ae altitudines habeant inæquales, ac proinde ſint inæqualia. 1. ſexti Euc.

Eiuſmodi parallelogrammum appelletur *conditum*, Græcè ῥητόν.

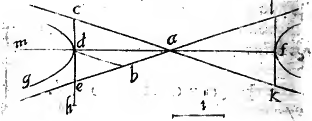
PROPOSITIO V.

Datus ſit angulus cab oporteatque deſcribere ſectiones oppoſitas illo & eo, qui ipſi ad verticem a respondet, comprehensas, ita vt rectangulum condictum sit æquale spatio quod potest recta f data.

Rectæ i fiat a b æqualis, diuisóque angulo c a b bifariam per rectam a m, ducatur per b recta b d parallela rectæ a c, occurratque rectæ a m in d. Rectæ d a fiat a f æqualis, & ex puncto d excitetur ad f d perpendicularis d e; vtque f d ad c e, ita fiat c e ad d h. Dato axe f d, & latere recto d h describantur sectiones oppositæ d, f. Dico condictum rectangulum a b d, vel quoduis aliud de quo agitur in præcedenti propositione esse æquale quadrato rectæ a b, & hyperbolas d, f comprehendi asymptotis c a k, e a l.

55. primi Cō.

p 338



Quoniam enim figura f d h est æqualis quadrato rectæ c e, cùm c d, d e sint æquales (sunt enim anguli c a d, e a d æquales, & anguli c d a, a d e item æquales) erit quadratum d e quarta pars figuræ: ergo rectę c a e sunt asymptoti hyperbolæ d g. Et quoniam per d terminum axis f d acta est d b parallela rectæ a c, condictum rectangulum, de quo in præcedenti agitur, erit æquale quadrato rectæ a b, siue rectæ i, per eandem propositionem præcedentem; quod erat faciendum.

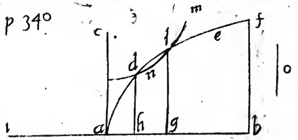
4 secũdi Euc. in corollar. 1. secundi Conic.

Propositio VI.

Datum sit spatium quod recta o potest; datæ item sint rectæ i a, a b, oporteatque ita diuidere rectam a b in g, vt sicut recta i a ad a g rectam, ita sit quadratum rectæ g b ad quadratum rectæ o.

Ex puncto a ad rectam a b excitetur perpendicularis a c æqualis ipsi i a. Dato latere recto a c, vertice a, diametro a b, describatur parabola a e f cuius ordinatim applicata b f sit parallela rectæ c a, vel cuicunque alteri in rectam a b incidenti. Rursus intra asymptotos a b, b f descri-

52. primi Cō.



batur per præcedentem hyperbola m n cuius condictum rectangulum sit æquale rectangulo sub rectis i a & o comprehenso; occurrat autem hyperbola parabolæ in puncto l (si enim non occurrat res quæ proponitur, nequit fieri vt paulò post dicemus) & per l agatur l g parallela rectæ b f. Dico punctum g esse illud quod quæritur.

20. primi Cō. 20. sexti in coroll. 16. sexti Euc.

Quoniam enim rectangulo c a g æquale est quadratum ordinatim applicatæ g l, tres rectæ c a siue a i, g l, a g erunt proportionales, ergo vt recta a i ad rectam a g, ita erit quadratum rectæ a i ad rectæ g l quadratum. Rursus quoniam rectangulum b g l est æquale rectangulo sub rectis i a & o contento, erunt rectæ i a, g l, b g, o proportionales, & vt i a recta ad g l rectam, ita b g recta ad o rectam; & vt i a quadratum ad g l quadratum, ita b g quadratum, ad quadratum o: sed vt i a quadratum ad g l quadratum, ita esse ostendimus i a rectam ad a g: ergo vt i a recta ad a g, ita g b quadratum ad quadratum o: inuentum est ergo punctum g, quod erat faciendum.

Quòd si hyperbola m n non conueniret cum parabolâ a e f, problema solui non posset: si enim fieri potest, non conueniat, & tamen vt i a recta ad a g rectam, ita sit quadratum g b ad quadratum o; quoniam ducta per g recta g l parallelâ rectæ b f occurrente in l parabolæ; rectangulum b g l est æquale rectangulo condicto hyperbolæ m n, punctum l iacebit in hyperbola m n ex demonstratis, conueniet ergo cum parabola & non conueniet quod est absurdum, si ergo non conueniat, fieri nequit quod faciendum proponitur. 4. huius in coroll.

COROLLARIVM.

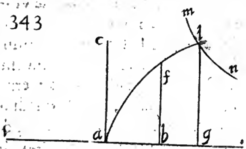
Hinc apertum est problema solui posse duobus modis quando parabola & hyperbola occurrunt sibi in duobus punctis, vt in presenti diagrammate in l & d. Si enim per d agatur d h æquidistans rectæ b f, ostendetur vt paulò antè, sicut recta i a est ad a h rectam ita esse quadratum h b ad quadratum o.

Propositio VII.

Datum ſit ſpatium quod recta o poteſt; datæ item ſint rectæ i a, a b, oporteatque ad rectam a b ita adjungere rectam b g, vt ſicut recta i a ad a g rectam, ita ſit quadratum rectæ g b ad quadratum rectæ o.

Ex puncto a excitetur recta c a ad rectam a b perpendicularis, & ipſi i a æqualis. Dato latere recto a c, vertice a, diametro a b deſcribatur parabola a e cuius ordinatim applicata ſit parallela rectæ e a 52. primi Cō.

p 343



(posset & alteri cuiuis in rectam a b incidenti esse parallela) & per b agatur b f ipsi g l parallela, datisque asymptotis f b, b g concurrentibus in b describatur hyperbola n m angulo f b g comprehensa, cuius condictum rectangulum sit æquale rectangulo sub rectis i a & o contento. Occurrat hyperbola n m parabolæ a e in l (si enim non occurrat fieri res proposita nequit, vt ex præcedentis simili casu apertum est) & per l agatur l g ordinatim ad diametrum a b applicata. Dico punctum g esse illud quod quæritur.

5. huius

Quoniam enim rectangulum sub rectis g b, g l est æquale rectangulo sub rectis i a & o contento, vt recta i a ad g l, ita erit g b recta ad o. Rursus quoniam rectangulum c a g æquale est quadrato ordinatim applicatæ g l, erunt tres rectæ c a, g l, a g proportionales; ac proinde vt recta c a vel i a ad a g, ita erit quadratum i a ad quadratum g l, sed vt quadratum i a ad quadratum g l ita est, vt ostendimus, quadratum g b ad quadratum o: ergo vt recta i a ad a g rectam, ita est quadratum g b ad quadratum o; inuentem ergo est punctum g prout propositum fuerat.

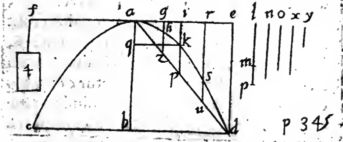
16. sexti Euc.

20. sexti Euc. in corollar.

Propositio VIII.

Sit parabolæ ſegmentum c a d, cuius axis a b, latus rectum f a, & ſemibaſis b d ſint æqualia, tangens ſit a e, & per d acta ſit d e æquidiſtans diametro a b; Figuram a e d voco complementum parabolicum, quod oporteat ſecundum quamcunque proportionem datam diuidere rectâ ad diametrum parallelâ.

Proportio data ſit rectæ l m ad m p, & ſit complementum a e d ita diuidendum



p 345

ductâ rectâ r f æquidistante ipsi a b, vt sicut l m ad m p ita sit portio a r f ad portionem d e r f. Quadrati a e d b duæ tertiæ partes fiant ad spatium quod potest recta n, sicut l p recta se habet ad l m rectam. Rursus vt nouem ad quatuor ita fiat spatium n ad spatium quod potest recta o. Inter datas a b & o inueniantur duæ mediæ proportionales, quarum ipsi o proxima sit a i, ipsiusque a i semissi fiat i r æqualis, & per r ducatur r u æquidistans rectæ e d. Dico sicut est recta l m ad m p rectam, ita esse portionem a i K ad portionem I K d e. Duæ porro mediæ proportionales inueniuntur pluribus modis quos refert Eutocius initio Commentariorum in librum secundum de sphæra & cylindro; & quamuis nullus eorum sit geometricus, vt diximus in prolegomenis, tamen necessitate adigente vsurpantur. Cadet autem punctum r inter puncta i & e vt in fine huius ostendemus.

Iungatur recta a d, quæ rectæ i k productæ occurrat in p, quoniam rectæ a e, e d sunt ex constructione æquales erunt a i, i p æquales, cùm triangula a i p, a e d sint similia. Ex k ad diametrum recta k q ordinatim applicetur; erit k q parallela tangenti a i, ac proinde rectæ a i, q k, erunt æquales; tres ergo rectæ f a, a i, a q seu i k sunt proportionales; ergo vt f a recta ad a i rectam, ita est i p

4. sexti Euc. in coroll. 32. primi Có. 34. primi Euc.

ipsi a i æqualis, ad rectam i k. Idipsum verò ostendetur ducta quacunque alia parallela occurrente parabolæ & lineæ a d.

Quoniam igitur recta e a tangit parabolam in a, ac proinde est perpendicularis ad axem a b, & f a vt pote latus rectum est etiam perpendicularis ad diametrum a b, rectæ f a, a e iacebunt in directum. Recta r u occurrat parabolæ in s, & rectæ a d in puncto u.

Ponatur recta f r esse libra ex a suspensa sustineus triangulum vt iacet rectilineum a r u, & illi ex f pendens æquiponderare spatium t. Quoniam recta a i ad a r est vt duo ad tria, recta i p lateri r u parallela transibit per centrum grauitatis trianguli a r u, & si triangulum idem suspendatur ex solo puncto i, manebit vt iacet ex Archimede; ergo vt recta f a ad rectam a i, ita erit triangulum a r u ad spatium t. Aliunde verò quoniam triangulum a r u & figura a r s k ita iacent, vt quacunque recta i p æquidistante ipsi e d quæ ad libram f r est perpendicularis, vt f a ad a i, ita sit i p ad i k, figura a r s k est æqualis spatio t ex demonstratis à nobis: ergo vt recta f a ad rectam a i, ita est triangulum a r u ad figuram a r s k. 6. quadrat. parab. 6. aut 7. æquip. 7. secundi huius.

Rursus quoniam recta f a ad rectam a i habet duplicatam ex constructione rationem eius quam habet recta a i ad rectam o, vt recta f a ad a i rectam, ita erit

20. sexti in Cor. quadratum rectæ ai ad quadratum rectæ o. Rursus quoniam quadratum ai ad quadratum ar est in duplicata ratione laterum ai, ar cùm ai, ar sint ex constructione vt duo ad tria, quadratum ai erit ad quadratum ar vt quatuor ad nouem.

Quoniam ergo vt recta fa ad ai rectam, ita esse ostendimus quadratum ai ad quadratum o, & ita etiam esse triangulum aru ad figuram arsk; erit vt quadratum ai ad quadratum o, ita triangulum aru ad figuram arsk, & alternando vt quadratum ai ad triangulum aru, ita quadratum o ad figuram arsk: Sed vt semissis quadrati ai ad triangulum aru, hoc est ad semissem quadrati ar, ita ostendimus esse quatuor ad nouem, & vt quatuor ad nouem ita est ex constructione quadratum o ad quadratum n, siue semissis quadrati o ad semissem quadrati n; ergo vt semissis quadrati ai ad triangulum aru, ita semissis quadrati o ad semissem quadrati n; & alternando vt semissis quadrati ai ad semissem quadrati o, ita triangulum aru ad semissem quadrati n: sed vt semissis quadratì ai ad semissem quadrati o, hoc est vt quadratum ai ad quadratum o, ita ostendimus esse rectam fa ad ai rectam; ergo vt recta fa ad ai rectam, ita triangulum aru ad semissem quadrati n; sed ita etiam ostensum est esse triangulum a r u ad figuram a r ſ k; ergo figuræ a r ſ κ est æqualis semissis quadrati n. 9. quinti Euc.

Denique quoniam sicut l p recta se habet ad l m, ita ex constructione sunt duæ tertiæ quadrati a e d b ad quadratum n; vt recta l p ad l m, ita erit vna tertia quadrati a e d b ad semissem quadrati n, hoc est ad figuram a r ſ k. Cùm ergo complementum a e d k sit tertia pars quadrati a e d b, vt ostendimus in hoc libro, complementum a e d k se habebit ad figuram a r ſ k vt recta l p ad l m: ergo diuidendo vt m p recta ad l m rectam, ita portio e d ſ r ad portionem a r ſ, quod erat faciendum. 1. huius in Coroll. 4.

Reliquum est vt ostendamus punctum r cadere inter i & e; id autem ostenditur ex analysi in hunc modum. Quoniam spatium complementi a e d potest diuidi secundum rationem datam, sit id factum; sitque vt l m ad m p, ita portio a r ſ ad portionem e d ſ r: producta r ſ ad u, fiat i r tertia pars rectæ a e, & per punctum i ductâ rectâ i k parallela rectæ e d, occurrente parabolæ in k, rectæ a d in p, erit sicut ostendimus vt f a recta ad a r, ita r u ad r ſ, & sicut f a ad a i, ita i p ad i k, & ita de alia quacunque parallela rectæ e d: ergo, vt ostendimus, triangulo a r ſ vt iacet manenti librâ f a r suspensa ex a, spatium t æquale portioni a r ſ k æquiponderabit; & si triangulum a r f suspendatur ex solo puncto i, manebit vt iacet. Potest ergo fieri vt trianguli a r f, cui portio a r f κ æquiponderat pendens ex f, latus a r sit minus latere a e, ac proinde vt cùm ex a i duæ eius tertiæ abscissæ fuerint, residuum i e sit maius portione i r, punctumque r cadat inter i & e.

COROLLARIVM.

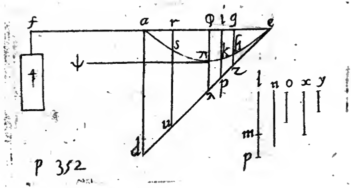
Si quæcunque portio g h d e inter duas parallelas g h, e d vel quamcunque aliam contenta proponatur diuidenda secundum rationem datam, ita vt ductâ rectâ i κ p ipsi e d parallelâ, portio i k g h sit ad portionem i k e d sicut recta l m ad m p, res ex dictis conficietur in hunc modum. Inueniatur spatium rectilineum x æquale figuræ g h d e ex demonstratis ab Archimede in libro de quadraturâ parabolæ; atque vt recta l p ad l m rectam, ita fiat quadratum x ad quadratum y. Inueniatur spatium n quod sit æquale duobus simul spatiis, nimirum quadrato y & spatio figuræ a g h. Rursus vt nouem ad quatuor ita fiat spatium n ad spatium o, *cætera se habent prout in ipsâ propositione iam demonstratâ, vt attendenti planum fiet.*

Istud corollarium, & duo ipsi similia in duabus sequentibus demonstranda, præstabunt modum diuidendi ex datâ ratione frustum coni, sphæræ, sphæroidis, & conoidis hyperbolici; quod ex dicendis liquido constabit.

Propositio IX.

Sit parabolæ segmentum cuius basis a e; axis $\varphi\pi$ ipsius a e quarta pars, & semissis rectæ φ e; latus ergo rectum $\pi\downarrow$ erit æquale ipsi basi; nam rectangulum $\downarrow\pi\varphi$ est æquale quadrato ordinatim applicatæ φ e; ergo sicut φ e est dupla rectæ $\varphi\pi$, ita $\pi\downarrow$ erit dupla rectæ φ e. Oporteat segmentum a π e secundum quamcunque proportionem datam diuidere rectâ ad axem parallelâ.

Proportio data sit rectæ l m ad m p, & sit segmentum a π e ita diuidendum ductâ rectâ r s æquidistante ipsi a b, vt sicut l m ad m p, ita sit portio e r s ad portionem a r s. Duplum parabolæ a s e erit quadrati a e tertia pars: nam abscissa $\pi\lambda$ ipsi $\pi\varphi$ æquali, recta e λ iuncta tanget parabolam in e; & quoniam recta $\varphi\pi$ est semissis rectæ



33. primi Có. φ e, erunt φλ, φe æquales, ac proinde & ad, ae sunt æquales; cùm ergo parabolæ segmentum aπe sit tertia pars trianguli dae, hoc est semiquadrati ae, duplum parabolæ aπe erit tertia pars quadrati ae. Duplũ parabolę aπe fiat ad quadratum n sicut lp recta ad lm. Rursus vt nouem ad quatuor, ita fiat spatium n ad spatium quadrati o. Rectę ae abscindatur æqualis

6. huius af, datisque rectis af, ae, & quadrato rectę o, ita diuidatur ae in i vt sicut recta fa ad ai rectam, ita sit quadratum rectæ ie ad quadratum rectę o; abscindatur ex ia recta ir æqualis semissi rectæ ie, cadet r inter a & i vt ostendetur inferius; per r agatur ru parallela rectæ ad occurrens parabolæ in s, & rectæ ed in u. Dico sicut est recta lm ad mp, ita esse portionem eik ad portionem aik.

Quoniam

Quoniam rectæ a e, a d sunt æquales, quæcunque parallela r u ducatur, erunt triangula e a d, e r u .similia, ac proinde sicut e a, a d sunt æquales, ita e r, r u erunt æquales. Rursus quoniam a f, a e rectæ sunt æquales, sumpto r quocunque puncto in recta a e, & per illud ducta recta r u ipsi a d æquidistante, & occurrente parabolæ in s, tangenti e d in u, erit ex demõstratis vt f a recta ad a r rectam, ita r u recta ad r s rectam: si ergo recta f r ponatur esse libra ex a suspensa sustinens triangulum vt iacet rectilineum e r u, & illi ex f pendens æquiponderare spatium t, ostendetur vt in præcedenti, sicut recta f a ad rectam a i, ita esse triangulum e r u ad figuram e r s *k*.

4. sexti Euc. in Coroll.

2. tertij huius in Coroll.

Rursus quoniam quadratum e i ad quadratum e r est in duplicata ratione laterum e i, e r; cùm e i, e r sint ex constructione vt duo ad tria, quadratum e i erit ad quadratum e r vt quatuor ad nouem.

Quoniam ergo vt recta f a ad a i rectam, ita est ex constructione quadratum e i ad quadratum o, & ita etiam ostendimus esse triangulum e r u ad figuram e r s κ; erit vt quadratum a i ad quadratum o, ita triangulum e r u ad figuram e r s k: sed vt semissis quadrati e i ad triangulum e r u, hoc est ad semissem quadrati e r, ita ostendimus esse quatuor ad nouem, & vt quatuor ad nouem ita est ex constructione quadratū o ad quadratum n, siue semissis quadrati o ad semissem quadrati n; ergo vt semissis quadrati e i ad triangulum e r u, ita semissis quadrati o ad semissem quadrati n; ergo, &c. *Vt in præcedenti* figura e r f κ est æqualis semissi quadrati n.

Denique quoniam sicut l p recta se habet ad l m rectam, ita ex constructione se habet duplum parabolæ a π e ad quadratum n; vt recta l p ad l m rectam, ita erit parabola a π e ad semissem quadrati n, hoc est ad figuram e r f κ: ergo diuidendo vt m p recta ad l m rectam, ita portio a r f ad portionem e r f κ; & inuertendo vt l m recta ad m p, ita portio e r f k ad portionem a r f quod fuit faciendum.

Reliquum est vt ostendamus punctum r cadere inter i & a. Id autem ostenditur ex analysi sicut in præcedenti, vt inutile sit hîc eadem verba reponere. Id tantùm admonitione dignum est, si forte in rectâ a e punctum i inueniretur positione duplex, illud sumendum esse quod est vicinius puncto e, & in eo tantùm habere vim demonstrationis huius analyticæ. Imò si punctum remotiùs sumeretur, punctum r necessariò caderet vltra punctum a; si enim non caderet vltra, consequens foret parabolam a π e posse secundum eandem rationem eodem modo sumptam secari per duas parallelas rectæ a d quod est absurdum. Ponatur enim secari secundum eandem rationem per rectas si fieri potest i k, $\pi \varphi$, esseque vt e i k ad i k a, ita e $\pi \varphi$ ad $\pi \phi$ a. Quoniam e i k est minor quàm e $\varphi \pi$, ratio portionis e i k ad φ a π erit minor ratione e $\varphi \pi$ ad eandem φ a π. Rursus quoniam a i k est maior parte a $\varphi \pi$, ratio quantitatis e i k ad quantitem a i k erit minor quàm ad quantitatem a $\varphi \pi$: ergo ratio quantitatis e i k ad a i k erit multò minor quàm ratio quantitatis e $\varphi \pi$ ad a $\varphi \pi$; cùm tamen ponatur esse æqualis; non ergo a π e quantitas secundum eandem rationem eodem modo sumptam per dictas parallelas secari potest. 10, quinti Euc.

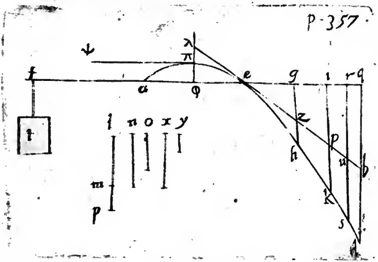
COROLLARIVM.

Si quæcunque portio g h d a, inter duas parallelas g h, a d vel quamcunque aliam contenta ponatur diuidenda secundùm rationem datam, ita vt ductâ rectâ i k p, ipsi a d parallela portio i k g h sit ad aliam portionem sicut recta l m ad m p, perficietur problema ex dictis in corollario antecedentis. Inueniatur spatium rectilineum x æquale figuræ g h a, atque vt recta l p ad l m, ita fiat quadratum x ad quadratum y. Inueniatur spatium n quod sit æquale simul quadrato y & spatio figuræ e g h. Rursus vt nouem ad quatuor ita fiat spatium n ad spatium o &c. vt in ista propositione.

PROPOSITIO X.

Sit vt in præcedenti parabola a π e cuius axis φ π, latus rectum π ψ ipsi basi a e æquale, tangens e λ, rectaque a f vt ibidem. Producta sit basis a e vtcunque ad punctum q, & per q acta sit recta g d parallela axi φ π, occurrens parabolæ productæ in d, tangenti verò λ e etiam productæ in b; figuram e q d voco appendicem segmenti parabolæ. Oporteat eiusmodi figuram iuxta quamcunque proportionem datam diuidere rectâ ad axem parallelâ.

Proportio data sit rectę l m ad m p, & sit appendix e q d ita diuidenda ducta recta r s æquidistante ipsi φ π vt sicut l m ad m p, ita sit portio e r s ad portionem r s d q. Duplum appendicis e q d (quæ nota est ex propositione 3. huius) fiat



ad quadratum n ſicut l p recta ad l m. Rurſus vt nouem ad quatuor, ita fiat quadratum n ad quadratum o. Datis rectis a f, a e, & quadrato rectæ o, ita ad rectam a e adjiciatur recta e i; vt ſicut recta f a ad a i, ita ſit quadratum rectæ e i ad quadratum o, ad rectam e i adiungatur i r æqualis dimidio rectæ e i, cadet r inter i & q (id enim probatur ſicut in præcedenti per analyſim mathematicis familiarem) per r agatur r u parallela rectæ q d occurrens parabolæ in ſ, & rectæ e b in u. Dico ſicut eſt recta l m ad m p, ita eſſe portionem e r ſ ad portionem reliquam r ſ d q. 7. huius.

Iiſdem enim verbis quibus in antecedenti vſi ſumus, oſtendetur ſicut eſt recta f a ad rectam a i, ita eſſe triangulum e r u ad figuram e r ſ k; ipſamque figuram e r s k esse æqualem semissi quadrati n, & denique vt l m recta est ad m p, ita esse e r s K ad r s d q, quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

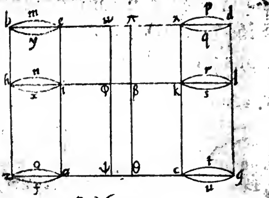
Si quæcunque appendicis portio g h d q inter parallelas g h, q d aut quamcunque aliam contenta, proponatur diuidenda juxta rationem datam, id vt in prioris corollario præstabitur. Inueniatur spatium rectilineum x æquale figuræ g h q d, atque vt recta l p ad l m, ita fiat quadratum x ad quadratum y; præterea inueniatur quadratum n æquale simul quadrato y & spatio figuræ e g h; denique vt nouem ad quatuor ita fiat spatium n ad spatium o, &c. *vt in anterioris corollario monuimus.*

PROPOSITIO XI.

Si duo sint solida super bases æquales in eodemque plano constitutas consistentia, ita vt ipsæ bases sint æquales, & eorum cum plano quocunque basibus parallelo communes sectiones sint quoque æquales; ipsa solida sunt æqualia, & centrum grauitatis habent in vno & eodem eiſdem baſibus parallelo plano.

Sint duo ſolida b a, λ g ſuper baſibus z o a f, c t g u ęqualibus, & in eodem plano iacentibus ita conſiſtentia vt plano quocunque baſibus parallelo ſecante ipſa, ſectiones k f l r, h n i x ſint ęquales inuicem. Peto ipſa ſolida eſſe inuicem ęqualia.

Pręſens propoſitio varios habet caſus omnes quidem veriſſimos, alios tamen aliis probatu difficiliores. Omnes eſſent facillimi ſi continuum componeretur ex finitis indiuiſibilibus Zenonicis, cùm enim ſingulæ partes ſingulis forent æquales, neceſſe eſſet tota ipſa eſſe inuicem ęqualia. Ex iſtâ opinione quamuis abſurdâ & principiis Mathematicis maximè repugnante videtur rectè confici idipſum quoque verum eſſe quamuis continuum ſit ſemper diuiſibile: quia nimirum eiuſmodi ęqualitas non tollitur per hoc quod diuiſibile ponitur; ſi enim per hoc tolleretur, tolleretur etiam ęqualitas duarum planarum figurarum ſuper baſibus ęqualibus in eademque recta conſtitutis ita conſiſtentium, vt ducta vtcunque recta baſibus parallela portiones eius figuris interceptæ ſint quoque ęquales: quod tamen veriſſimum eſſe



P 360

ostendimus propositione sexta libri primi huius operis. Tolleretur pariter æqualitas duorum solidorum quando bases z o a f, c t g u non tantum sunt ęquales verum etiam similes: si enim sint circuli & bases cylindrorum aut conorum id ostenditur à Clauio in Euclidem; si sint parallelepipeda ab ipso Euclide in vndecimo libro; si autem sint prismata etiam cum bases non fuerint similes, nec ęqualium laterum à Clauio ibidem; si sint pyramides, ab eodem Euclide libri duodecimi propositione sexta; & à Clauio in scholio ad eandem propositionem etiam tum cum bases z o a f, c t g u lateribus numero inęqualibus, & quotcunque constiterint.

Cla. 11. duode. Euc. in scholio. 29 vnd. Euc. 7. duod. in scholio 1. Clauius.

Extra prædictos casus si lineæ h i, k l sint communis plani paralleli basibus per i k ducti sectio cum plano solida ipsa ſecante ſecundum altitudinem totam, ipſiuſque plani cum ſolidis communes ſectiones ſint figuræ planæ b e a z, λ d g ç comprehenſæ lineis aut rectis, aut conicis, aut ęquiualentibus iuxta cautionem corollarij tertij ſextæ propoſitionis libri primi, ipſæ verò figuræ k r l ſ, h n i x ſint ſimiles, & lineæ h i, κ l ſint ęquales demonſtratio eſt aperta ex ſexta propoſitione libri primi citata adjecto corollario propoſitionis ſextæ libri ſecundi. Iſtud tamen in vniuerſum & ad omnes caſus extenſum ſi probare velim, obſcurius effecero. Ex primo rei intuitu apertum exiſtimo ſi puteo exempli cauſa b z a e propoſito affirmes eum ad fundum vſque plano horizonti parallelo diſſectum paris & æqualis vbique inueniri amplitudinis; apertum inquam exiſtimo quocunque plano horizonti parallelo h n i x in duas portiones diuidatur, ſuperioris ad inferioris capacitatem eſſe vt eſt altitudo b h ad altitudinem h z. Nec verò animus inquiret vtrum amplitudo illa ſeu capacitas per planum horizontis parallelum dimenſa, non ſolùm ſit vbique æqualis, verùm etiam vbique perimetro & figura ſimili conſtet; id enim *per accidens* eſſe decernet dummodo capacitas b y e m ſit ęqualis capacitati h x i n aliiſque omnibus interiectis quamuis figura b y e m ſit rotunda, & h x i n quadrata, aut alterius cuiuſuis modi. Iſtud itaque inter *petitiones* siue *αἰτήματα* huius scientiæ colloco; sicuti & collocatur illud ab Archimede & ab aliis omnibus, *cuiusuis figuræ grauis siue planæ siue solidæ dari centrum grauitatis*; quod quis probet aliter, quam nuda rei ipsius explanatione, adiuncta aliorum omnium mira conuenientia, sicuti à nobis in hoc negotio factum est, & fiet ampliùs.

Centrum verò grauitatis vtriusque solidi esse in plano vno eodemque ostendi simili methodo potest ex doctrina propositionis decimę quintæ eiusdem secundi libri translata ad solida. Quod si solida b a, λ g fuerint cylindri, aut coni, aut pyramides, aut prismata, aut parallelepipeda, aut sphæræ, aut solida in sphæra descripta, aut conoidis rectanguli portio, demonstratio extat apud Commandinum in libello quem de centro grauitatis solidorum scripsit. His omnibus prætermissis res in vniuersum facile potest in hunc modum demonstrari.

In plano b g secundum altitudinem solidorum b a, λ g ducto ducatur recta quæcunque $\pi\,\theta$, occurrens plano basium in θ, & plano parallelo intra quod & planum basium solida b a, λ g proximè continentur, in π; ducatur & alia isti parallela $\omega\,\psi$ ita vt $\omega\,\theta$ sit parallelogrammum. Præterea intelligatur grauitas solidi b a tota transferri in rectam $\omega\,\psi$. hac lege, vt ductis duobus quibuscunque planis parallelis ad bases, grauitas in lineæ $\omega\psi$ portionem eiusmodi planis interceptam traducta sit illa quæ portioni solidi b a eisdem planis interceptæ competebat; atque pari pacto grauitas solidi l g transferatur in lineam $\pi\theta$. Manifestum his positis est si planum $\beta\lambda$ parallelum basibus transeat per centrum grauitatis solidi λ g, transire quoque per centrum grauitatis $\pi\theta$; grauitas enim portioni $\pi\beta$ attributa est æqualis grauitati portionis λ l, nec tantum est æqualis, sed proportionaliter dispensata, ita vt inter parallela duo quæuis plana ad bases, sit par grauitas in interceptis portionibus lineæ $\pi\beta$ & solidi λ l. Ex his verò apertè conficitur in puncto φ esse centrum grauitatis ponderis in lineam $\omega\psi$ dispensati; ac proinde & in plano per lineam h l ducto parallelωs basibus esse centrum grauitatis solidi b a. Quoniam enim solida λ g, b a sunt ita æqualia vt eorum portiones inter quæcunque parallela ad bases plana interceptæ sint inuicem æquales, & quoniam vt magnitudines solidorum ita ponimus esse grauitates ipsis magnitudinibus insitas, apertum est lineas $\omega\psi$, $\pi\theta$ continere grauitates æquales, & proportionaliter dispensatas: cùm ergo lineæ $\omega\psi$, $\pi\theta$ secentur ita proportionaliter in φ & b occursu rectæ $\varphi\beta$ ipsis $\omega\pi$, $\psi\theta$ parallelæ, vt $\omega\varphi$ recta sit rectæ $\pi\beta$ æqualis, & $\varphi\psi$ recta rectæ $\beta\theta$; grauitas 54. primi huc.

etiam dispensata in lineam $\omega\varphi$ erit ęqualis grauitati proportionaliter dispensatæ in lineam $\pi\beta$: eademque de causa grauitates distributæ in lineas $\varphi\psi$, $\beta\theta$ erunt æquales, & ęqualiter dispensatæ: ergo cùm grauitatis in rectam $\pi\theta$ collectæ centrum sit punctum β, grauitatis in lineam $\omega\psi$ transpositæ centrum quoque erit punctum φ; ita vt si linea $\omega\psi$ superponatur lineæ $\pi\theta$, punctumque ω congruat puncto π, & punctum ψ puncto θ, sicut grauitas par pari semper congruet, ita & centrum centro congruere necesse sit. Solida ergo b a, λ g habent centra grauitatis in vno eodemque plano basibus parallelo, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex presentis propositionis priore membro, quod postulatis adscribimus, apertum est, si sectiones h n i x, r k l f non sint æquales, sed in quadam aliâ inæqualitatis ratione, quæ constanter reperiatur quomodocunque planum h l parallelum basibus ducatur, ipsa solida b a, λ g esse in eadem sectionum ratione; centrum verò grauitatis esse in vno eodemque plano basibus parallelo clarè percipit quisquis secundi membri rationibus assentitur.

SCHOLIVM.

Hîc rogatum te velim, Lector, vt sustineas te tantillum, ne conclusi argumenti vim in presentis propositionis primâ parte improbes, si quæ fortasse ad id te sollicitant. Non peto vt à nobis modo adducta attentiùs contempleris, analogiæque vires attendas, ex ijs quæ jam demonstrata sunt ab alijs, aut à quocunque demonstrarentur si quantitas continua constaret ex indiuisibilibus; id tantum in præsentiâ flagito vt nouem proxime sequentes propositiones quæ ex istâ vt à suo fonte promanant priùs velis perlegere quàm sententiam contra nos feras. Cernes ex eâ inueniri centrum grauitatis coni, & pyramidis cuiuscunque, item conoidis parabolici (quod Archimedes docet circumuolutione parabolæ describi diametro eius manente) centrumque ita inuentum illud ipsum esse quod ab Archimede ipso pronuntiatum fuit de conoide parabolico; quodque tam de illo conoide quàm de cono & pyramide demonstrauit singulari sagacitate Commandinus in libro ad id tantummodo, quod Archimedes sine demonstratione scripserat, confirmandum elaborato. Cernes nos porro progressos inuenire centrum grauitatis hemisphærij seu mediæ sphæræ, necnon conoidis hyperbolici

Lib. de ijs quæ vehuntur in aquâ.

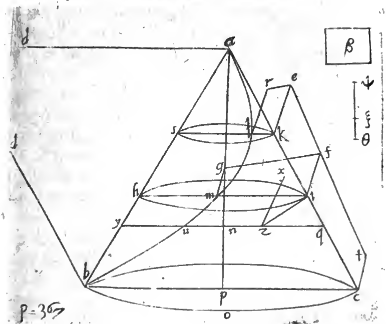
Arch. initio lib. de conoi. & sph.

quod reuolutione hyperbolæ diametro eius manente gignitur; cernes & alia plurima quæ ad proportionem & sectionem corporum attinent, istaque omnia adeo consonare cum ijs quæ ab anterioribus ostensa sunt, vt ipsa consonantia maximi sit momenti ad inclinandum animum in assensionem huius propositionis, etiamsi aliunde nihil stabilita foret; & vel vna sufficiat ad hoc vt non immeritò pręsens theorema inter αἰτήματα reponatur, & ex eo dato ad alia inuestiganda gradus fiat.

PROPOSITIO XII.

Axis cuiuslibet pyramidis vel coni à centro grauitatis ita diuiditur, vt pars quæ terminatur ad verticem reliquæ partis quæ ad basim tripla sit.

Hæc propositio demonstratur à Commandino in libro de centro grauitatis solidorum, & est vigesima secunda; nos hic eam aliter probamus vt nostrorum principiorum cum veritate concordia pateat. Hîc autem cum eodem Commandino definimus axem *lineam quæ à vertice ad centrum grauitatis basis perducitur*; prismatis



p-367

autem & cylindri, *rectam lineam quæ oppositorum planorum centra grauitatis conjungit*; in conoidibus verò & sphæroidibus axem definimus cum ipso Archimede initio libri de istis solidis ab eo scripti, *diametrum illam quæ manet, dum circumductu circuli, ellipsis, parabolæ, hyperbolæ, figuræ istæ solidæ describuntur*, quarum nomina, qui Mathematicus non est, licet ignoret, res ipsas tamen tenet; cùm in ædificiorum partibus, in ipsisque vasis quibus ad potum aliáue eiusmodi commoda vitæ vtimur, passim visantur. Quod obiter dico, ne quis putet ista esse longè ab vsu hominum

vide scholiũ præsentis propositionis.

remota, nec nisi in speculatione Mathematicorum posita. Cæterùm centrum grauitatis istorum omnium esse in axe ponimus hîc vt pote demonstratum apud Commandinum libro laudato.

Sit conus a b c cuius basis b o c, vertex a, triangulum b a c sit plani per verticem a ducti & ipsius coni sectio communis; axis sit a p ita sectus in n, vt
3. primi Cō. portio a n sit tripla portionis n p. Dico punctum n esse centrum grauitatis coni a b c.

Completo parallelogrammo a c b d, describi intelligatur juxta methodum tra-
2. huius ditam per puncta a, b parabola a l b cuius vertex sit a, tangens a c, diameter a d: erunt per secundam huius quadrata rectarum k f, h i in triangulo a b c ipsi b c parallelarum, vt sunt rectæ l k, m i interceptæ inter parabolam a l b & rectam a c. Super rectâ l k constructum intelligatur in plano f k basi parallelo
4. primi Conic. rectangulum l k e r æquale figuræ k f; & super rectâ m i rectangulum m i f g æqua-
2. duod. Eucl. le figuræ h i & in eodem cum ipsa plano. Quoniam ipsæ figuræ k f, h i sunt circuli, quorum diametri sunt rectæ k f, h i, erunt ipsorum circulorum spatia, vt quadrata diametrorum k f, h i; sed vt quadrata diametrorum k f, h i ita esse ostendimus rectas l k, m i; ergo vt rectæ l k, m i, ita sunt circuli k f, h i; sed ipsis circulis

circulis *k* l, h i æqualia sunt rectangula l k e r, m i f g; ergo rectangula l k e r, m i f g sunt in ratione basium l *k*, m i: ergo rectæ *k* e, i f sunt æquales per conuersam secundæ sexti Euclidis apud Clauium: ergo cùm rectæ r e, f g sint parallelæ rectis m i, l *k* & ipsa plana m i f g, l *k* e r sint parallela, planum per rectas r e, g f erit parallelum plano trianguli a b c. Si ergo per parabolam a l b intelligatur ferri linea perpendicularis ad planum a b c æqualis lineæ l r describet superficiem, cui incumbet planum r e f; solidum ergo inclusum plano b g a c, superficie illâ, rectangulo comprehenso sub a c & sub κ e, alio item rectangulo comprehenso rectâ b c & c t ex c ad planum b a c excitatâ parallelωs ipsi i f vel κ e, & denique sub planâ figurâ in plano r e t aliarum superficierum ipsi non parallelarum, occursu terminata, illud inquam solidum continebitur inter extrema parallela similia & æqualia, quorum vnum est figura b m a c contenta curua b m a, & rectis a c, b c, alterum est in plano r e t omninò alteri b m a c æquale, simile, similiterque positum: demonstratio enim quàm Serenus adhibet in libro de sectione cylindri vt ostendat sectionem cylindri cum plano basi parallelo esse ipsi basi similem, & centrum in axe habere perinde locum hîc habet; & quo pacto Commandinus libro de centro gra-

prop. 5.

prop. 5.

uitatis solidorum ostendit *si prisma secetur plano oppositis planis æquidistante sectionem esse figuram æqualem & similem ei quæ est oppositorum planorum, centrum grauitatis in axe habentem*; ostenditur in nostro casu prædictam figuram esse similem similiterque positam figuræ b m a c, ac proinde & axem siue lineam per vtriusque figuræ centrum grauitatis ductam, esse lineæ i f

prop.8. parallelam. Denique demonstratio qua idem Commandinus vtitur vt probet *cuiuslibet prismatis & cuiuslibet cylindri vel cylindri portionis grauitatis centrum in medio ipsius consistere*, euincit in nostro casu centrum grauitatis eiusmodi solidi, quod *prismatoides* appello, esse in medio axis, siue rectæ connectentis centra grauitatis prædictarum figuram parallelωs oppositarum.

His ita constitutis, quoniam prismatoidis prædicti vnum ex parallelis extremis est figura semidiceratoidis b m a c, ergo centrum grauitatis habet in rectâ u q per n ductâ parallelωs rectæ b c, vt initio huius libri ostendimus; eiusmodi centrum sit punctum z, iunctâque rectâ z i, in plano f i z per z agatur z x parallela rectæ i f. Quoniam rectæ n z, z x conuenientes in z parallelæ sunt rectis m i, i f conuenientibus in i, planum m i f erit parallelum plano u z x; cùm ergo planum m i f sit parallelum basi b c o, planum u z x erit etiam parallelum basi b c o, &

1.huius corol.4.

15. vnd. Euc.

cùm z x ſit recta parallela rectæ i f, axiſque priſmatoidis per z tranſiens ſit parallelus, vt oſtendimus, eidem rectæ i f, erit z x axis priſmatoidis in plano per rectam u q parallelo baſi, cúmque centrum grauitatis priſmatoidis ſit, vt diximus, in axe, idem centrum erit in plano per rectam u q parallelo baſi b c o.

Quoniam igitur priſmatoides & conus a b c ita ſunt inter ſe vt ſectiones eorum cum plano baſi b o c parallelo ſint æquales; priſmatoides & conus erunt æquales, & habebunt centrum grauitatis in eodem plano baſi parallelo, vt in præcedenti oſtendimus; ergo cùm centrum grauitatis priſmatoidis ſit in plano per u q baſi parallelo, erit quoque centrum grauitatis coni in eodem plano per u q ducto; ergo cùm planum per u q parallelum baſi ſecet coni axem a p in n; & cùm centrum grauitatis ſit in axe coni (vt de cono & pyramide demonſtrat Commandinus libro ſæpiùs laudàto) neceſſe eſt ipſum centrum eſſe in puncto n, quod vnicum eſt axi & plano u z x commune: ergo, &c. quod erat demonſtrandum. propoſ. 14.

COROLLARIVM I.

Quod ſi in pyramidis fruſto quouis inter plana baſi parallela intercepto inueniendum ſit centrum grauitatis, præſtabitur id simili modo. Sit enim frustum inter plana per rectas y q, b c contentum; inuenienda est recta æquidistans rectæ b c in plano b a c, in qua sit centrum figuræ planæ b u q c contentæ rectis u q, q c, c b & curuâ b u, nam in communi eiusmodi rectæ & axis n p concursu esse centrum grauitatis quæsitum cõstat ex demonstratione pręsentis propositionis, huic casui applicatâ; recta autem per centrum grauitatis figuræ u q c b ducta inuenitur ex prima huius.

COROLLARIVM II.

Eadem prorsus est demonstratio cuiuscunque figuræ sit basis b o c, dummodo quæ fient à plano basi parallelo sectiones sint ipsi basi similes, & se habeant vt quadrata rectarum b c, h i, f k &c. interceptarum lateribus a b, a c trianguli a b c, & parallelarum lateri b c eiusdem trianguli; eiusmodi solidum appelletur *homœoconicum*.

COROLLARIVM III.

Ex his apertum est, si ducto plano quocunque m i f g parallelo basi b o c prismatoides diuidatur in duas portiones, cùm singulæ earum sint æquales portionibus coni inter eadem plana parallela basi b o c interceptis, vt erunt portiones prismatoidis, ita esse partes coni, aut homœoconici. Partes autem prismatoidis esse inter se vt partes figuræ b m a c p semi-diceratoidis, eodem modo ostendi potest quo de alijs eiusmodi ostenditur à Clauio scholio primo septimæ duodecimi Elementorum; & in scholio vndecimæ eiusdem libri, & ab ipso Euclide eodem libro in propositione sexrâ: ergò partes coni aut homœoconici sunt inuicem vt partes semidiceratoidis b m a c p.

COROLLARIVM IV.

Vnde vlteriùs consequitur methodus diuidendi datum conum aut homœoconum iuxta datam proportionem. Sit enim proportio data rectæ ↓ ξ ad ξ θ, oporteatque ita diuidere conum per planum basi b a c parallelum, vt sicut ξ θ recta ad ↓ ξ ita sit portio basi adiacens ad aliam; id conficietur si semidiceratoides b a c diuidatur in datâ proportione. Vt igitur compositâ ↓ θ ad ξ θ, ita fiat rectilineum æquale semidiceratoidi b a c ad spatium β. Ductâ rectâ m i ipsi b c æquidistante, fiat figura a m i æqualis spatio β ex huius octauâ; liquet spatium a m i esse ad spatium b m i, vt est recta ξ θ ad rectam ↓ ξ.

COROLLARIVM V.

Quoniam ex eadem octaua constat methodus diuidendi in data ratione quodcunque segmentum semidiceratoidis seu complementi; constat quoque modus diuidendi in data ratione quodcunque frustum coni inter plana basi parallela contentum. Atque hæc omnia corollaria habent suo modo locum in tribus sequentibus propositionibus prout ibi indicabimus.

SCHOLIVM.

Archimedes initio libri de conoidibus & sphæroidibus sectionem conicam vult circumduci circa diametrum, vt describantur conoidea & sphæroidea de quibus acturus est in eo libro. Non dixit autem (vt reor) *circa axem*, quia ita definitionē restringeret, cùm ea quæ demonstrat eo loci habeant vim etiam si circumducatur circa diametrum quæ non sit axis, dummodo ita circumducatur, vt omnes ordinatim applicatæ ad diametrum ita moueantur vt maneant semper parallelæ vni certę rectæ immotæ; vnde fit vt diameter eiusmodi sectionis in circumductu aliam & aliam inclinationem habeat ad ordinatim applicatam eandem, quando ipsa diameter non est axis sectionis.

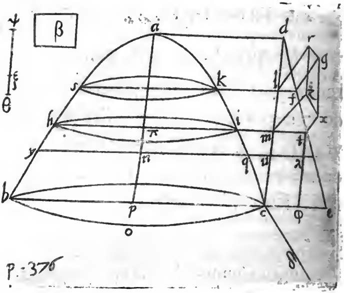
Propositio XIII.

Cuiuslibet portionis conoidis rectanguli, hoc est parabolici, à centro grauitatis ita axis diuiditur vt pars quæ terminatur ad verticem, reliquæ partis, quæ ad basim, sit dupla.

Istud iisdem verbis proponitur demonstrandum à Commandino libro citato, nec vlteriùs pergit ad centra inquirenda sphæroideωn & conoideωn hyperbolicorum, siue vt loquitur Archimedes amblygoniorum. prop. 29.

Sit segmentum parabolæ b a c cuius basis b c, diameter a p bifariam ipsam secans, circa quam manentem circumuolui intelligatur segmentum b a c & ita describi parabolicum conoides a b c o, cuius basis sit circulus b o c. Diuidatur axis a p ita in n vt portio a n sit dupla portionis n p. Dico punctum n esse centrum grauitatis solidi b a c o. de conoid & sphæroid. initio.

Per a ducatur in parabolæ plano b a c recta a d parallela rectæ b c, & completo parallelogrammo a p c d, per d ducatur vtcunque recta d e occurens rectæ



b c in e. Quotcunque plana basi b o c parallela ſ k, h i ſecent conoidem b a c o, eorumque ſectiones ſint figuræ ſ k, h i quæ circulares erunt ex Archimede, centrum habentes in axe a p; eiuſmodi autem plana ſecent triangulum d c e juxta rectas l f, m t; atque in eodem plano ſ k ſuper recta l f intelligatur constructum rectangulum l f g r ęquale ſpatio circuli ſ k, & ſuper recta m t rectangulum m t x z ęquale circulo h i. Quoniam circuli ſ k, h i habent ſe vt quadrata rectarum ſ k, h i, ipſa autem quadrata rectarum ſ k, h i habent ſe, vt oſten-

12. de conoid. & ſphæroi.

dimus, ſicut rectæ l f, m t; ex demonſtratis in precedenti apertum eſt rectas t x, f g eſſe æquales, & planum r g x z eſſe parallelum plano d c a, figuramque contentam plano baſeos b o c producto per rectam c e, planis item d l r, d f g, & r g x eſſe priſma, quod ęquale ſit conoidi b a c o; habeatque centrum grauitatis in eodem plano baſi parallelo; centrum autem priſmatis cuius latus ex oppoſitis parallelum eſt triangulum d c e habere centrum grauitatis in plano baſi parallelo tranſeunte per centrum grauitatis trianguli d c e. 2. huius in cor.

Quoniam igitur recta d u ſiue a n eſt ex conſtructione dupla rectæ u c ſiue n p, & per u ducta eſt recta n u λ parallela baſi c e trianguli d c e, erit ex demonſtratis ab Archimede centrum grauitatis trianguli d c e in recta u λ, ergo centrum grauitatis priſmatis dicti erit in plano baſi parallelo per rectam n u λ ducto; ergo ex demonſtratis centrum grauitatis conoidis b a c o erit in plano parallelo baſi per rectam y n q ducto; ſed eſt etiam in axe a p vt Commandinus demonſtrat libro citato, ergo centrum eiuſmodi eſt in puncto n quod ſolum commune eſt plano per y n parallelo, & axi a p: ergo, &c. quod erat demonſtrandum. 6. quad. parab. 11. huius. propoſ. 15.

COROLLARIVM I.

Quòd si in conoidis frusto contento inter quæuis plana h i, b c parallela basi inueniendum sit centrum grauitatis. Ipsius trapezij u c e λ inter eadem plana intercepti centrum grauitatis inueniatur per vltimam libri primi æquiponderantium; per illud ducatur recta rectæ c e parallela; centrum grauitatis erit in communi sectione eiusmodi rectæ, & axis n p; demonstratio enim est eadem. Frusti autem istius centrum grauitatis longè expeditiùs designatur quàm ex methodo Commandini in propositione quæ citati jam libri vltima est; neque enim, vti diximus, progreditur ad centrum grauitatis inueniendum in sphæræ, vel sphæroideωn, vel conoideωn hyperbolicorū portionibus. In quo etiam hæsisse Antiquiores omnes argumento est quòd Archimedes in libris de ijs quæ vehuntur super aqua formam scaphæ parabolicæ vniformiter grauis determinet, quæ cùm in vndis certo quodam situ inclinata fuerit, non tamen eò vsque vt labro excipiat aquas, consistat suis ponderibus librata, ad quam determinationem necessaria est cognitio centri grauitatis; de scapha autem quæ formam habeat aut ellipticam, aut hyperbolicam nihil simile examinat quia nimirum notum ipsi non erat centrum grauitatis in eiusmodi solidis. Quoniam autem in scapha quæ figuram portionis sphæræ habeat, euenire non posse eiusmodi inclinationem ostendi potest sine cognitione centri grauitatis; id quoque demonstrat propositione vltima primi libri.

COROLLARIVM II.

Eadem prorsus est vis præsentis demonstrationis, cuiuscunque figuræ sit basis b o c dummodo quæ fiunt à plano basi parallelo sectiones cum solida figura sint ipsi basi similes, & se habeant vt quadrata rectarum b c, h i, f k &c. interceptarum parabola b a c, & parallelarum basi b c segmenti parabolę b a c. Eiusmodi solidum appelletur *parabolicoides*.

COROLLARIVM III.

Hinc patet quoniam si prisma, cuius basis d c e, plano m z x t basi b o c parallelo secetur vtcunque, portiones eius se habent vt portiones basium, portionesque ipsæ sunt æquales portionibus conoidis parabolici diuisi ab eodem plano m z x t; ipsas conoidis parabolici portiones esse inter se vt portiones d m t, c m t e trianguli d c e; vnde si vt d m ad m c rectam, ita fiat m c ad tertiam c ſ;

Clau. 7. duodec. Euc. Schol. 1.

vt recta d m ad compositam ex recta c δ & ex dupla rectæ d m, ita erit pars conoidis inter parallelas a d, h i iacens ad reliquam. In plano enim trianguli d c e si compleatur parallelogrammum m t c φ, triangula d m t, t φ e erunt similia, ideoque vt quadratum d m ad quadratum t φ seu m c, hoc est vt recta d m ad c δ rectam, ita erit triangulum d m t ad triangulum t φ e: sed ita etiam est triangulum idem d m t ad triangulum cuius basis sit c δ, & altitudo eadem; ergo triangulum, cuius basis c δ & altitudo eadem quæ trianguli d m t ex t ad basim d m demissa, est æquale triangulo t φ e. Rursus quoniam parallelogrammum m t φ c est æquale ttiangulo cuius basis sit dupla rectæ m c, & altitudo eadem cum perpendiculari ex t in basim d m demissa, ergo triangulum sub composita ex dupla rectæ m c & ex c δ habens altitudinem prædictam est æquale trapezio m t e c: ergo cùm triangulum trapezio prædicto æquale, habeat eandem altitudinem quam triangulum d m t, erit ad triangulum d m t vt basis scilicet composita ex dupla rectæ m c, & ex recta c δ, ad basim d m.

COROLLARIVM IV.

Ex dictis conficitur partem conoidis quæ est ad verticem a esse ad totum conoides b a c o, vt quadratum rectæ a ϖ seu d m ad quadratum rectæ a p seu d c; est enim sicut triangulum d m t ad triangulum d c e; ipsa autem triangula sunt inter se vt quadrata rectarum d m, d c. Atque istud est quod Archimedes demonstrat propositione 26. libri de Conoidibus & Sphæroidibus.

COROLLARIVM V.

Aperta etiam ex demonstratis est methodus diuidendi datum conoides parabolicum in data quacunque ratione; nota enim est methodus triangulum d c e iuxta quamcunque datam rationem diuidendi per parallelam basi c e. Sit proportio data rectæ $\psi \xi$ ad $\xi \theta$, oporteatque ita diuidere triangulum d c e vt portio adjacens angulo d sit ad reliquam sicut recta $\xi \theta$ ad $\psi \xi$. Vt composita $\psi \theta$ ad $\xi \theta$ rectam, ita fiat spatium trianguli d c e ad spatium β. Dato rectilineo d c e, simile d m t similiterque positum describatur quod sit æquale spatio β. Istud est quod Commandinus propositione decima sub finem commentariorum in librum Archimedis citatum demonstrat ex principijs ab eodem Archimede ibidem traditis. 25. sexti Euc.

COROLLARIVM VI.

Denique quæcunque possunt perfici circa diuisionem trianguli d c e per parallelam basi c e vnam vel plures, vel circa diuisionem trapezij cuiuscunque m r e c, applicari possunt ad diuisionem parabolici, aut parabolicoidis b a c o, quæ res est amplissima, & notatu, nisi fallor, digna.

SCHOLIVM.

Occasione centri grauitatis solidorum, scaphæ in corollario primo commemoratæ, & eorum quæ vehuntur in aquis breuiter dicam quàm iucunda & vtilis sit eiusmodi cognitio, quámque apta ad difficilia multa explananda. In ijs libris Archimedes tradit principia ex quibus demonstratur admirabilis ille modus librandi bis eandem rem in aqua & extra illam, & ex discrimine ponderum inuestigandi cum stupore eorum qui ista ignorant, quantum argenti admixtum sit in corona quæ tota aurea fraudulenter venditatur; quod olim præstitit ipse Archimedes, & quod hodie præstatur à quibusdam vt explorent in numis qui cuduntur quantum alieni metalli commixtum lateat. Ex eodem librandi modo inuestigatur quanta sint quæuis corpora quacunque prædita figura vt in prolegomenis retulimus ex Iordano. Ex ijſdem principijs Archimedes ſoluit quæſtionem illam phyſicam nec inutilem nauium conſtructioni, cur portio ſphæræ ex materia vniformiter denſa, ſi ſecundum faciem planam imperatur vndis ita vt conuexa ipſius ſint ſuperiora & extent, conſiſtat quidem: at ſi tantillum moueatur, non redeat ad ſitum priorem, ſed alium quo conuexa deorſum tendunt, ſuo ſibi motu comparet; & ſi ab eo iam parto deturbetur vi aliqua, ad eundem ſemper reuertatur.

Occurrit animo & quidē lubenti alcyonum nidi figura à tot ſcriptoribus celebrata, eam Plutarchus ait eſſe σχημάτων πολλῶν μόνον ἀπερίτρεπτον καὶ ἀβάπτιστον, *ſolam ex omnibus quæ nec mergi nec inuerti queat*, quod non mergatur id habet à capacitate & ſymmetria cùm onere auium quibus prebere debet domicilium; ad id autem ex Archimede in dicto opere neceſſe eſt vt tota moles aquę cuius locum occupaturus eſt nidus etiam cùm maximè oneratus fuerit, ſit grauior ipſo nido ita onuſto; ad quod non parum conducunt duo quorum vnum eſt ipſa materia ex qua nidus conficitur, eſt enim vt teſtatur Ariſtoteles ſpongioſa, ita tamen vt foramina non ſint ampla, ſed crebro tùm foramine tùm ſolido conſtet; alterum vt oſtium qua ingreſſura eſt mater occluſum ſit ne ſuperfuſa caſu aliquo vnda nidus impleatur, & ita expulſo aëre ipſe

Ariſt. l. 9. hiſt. anim. c. 14. Plinius l. 10. c. 32. Plutar. de ſolertia animalium & de amore prolis. Ælianus de animal. l. 9. c. 17.

cum eo quod continet fiat grauior quàm aqua cuius locum implet, ac proinde mergatur. Istud autem ostium ita se habet eò quod vt Albertus apud Gesnerum ait sit compactum ex materia per aquam intumescente instar spongiæ, & tumore suo claudente viam, quam tamen rostro longo & tenui mater ingressura diducit, ipsam etiam aquam si opus fuerit exugendo. Vnde rectè dicitur à Plutarcho στόμα τυφλὸν καὶ κρύπτιον, *cæcum & occultum.*

Gesn. tom. de auibus pag 87

Quia verò si nidus, quamuis non mergeretur, in omnem partem conuersus quiesceret, id magno pullorum incommodo fieret, prouidenda fuit ea nidi figura quæ vnum semper situm natiui ponderis libratione retineret nec in hanc aut illam partem incumbere sine vllo discrimine apta esset; Illa porro non est sphærica, quam non reluctantem in omnem partem inuertas; neque Aristoteles sphæricam esse dixit vt eum dixisse vult Iulius Scaliger, & Plinius videtur interpretari; quamuis enim nidum pilæ marinæ (globus est è sordibus marinarum spumarum vt aliqui volunt crassescentibus, alcyonium aliter, vel spuma arida maris, vel halosachna appellatus) similem dixerit, apertum est similitudinem illam esse in materiâ, quæ tanta est vt aliqui teste Plinio alcyonium ex nidis alcyonum confici velint, vel alij apud Gesnerum nidos ex ipso. Ipsis quod dixi

dixi verbis Aristotelicis planum fit, postquam enim nidum sphæræ illi marinæ similem esse docuit, subdit *figuram verò eius esse instar earum quibus collum longius est cucurbitarum*, ἡ νεοττία παρόμοια ταῖς σφαίραις ταῖς θαλαττίαις ἐστὶ, καὶ ταῖς καλουμέναις ἁλοσάχναις... τὸ δὲ σχῆμα παραπλήσιον ταῖς σικύαις ταῖς ἐχούσαις τοὺς τραχήλους μάκρους. Vt rectè eum assimilarit Albertus apud Gesnerum *figuræ pineali, aut ventosæ quæ habet collum longum.* Pro eodem iste Autor habet *figuram pinealem*, & *ventosam cucurbitam quæ collum longum habet*; figura enim pineæ nucis est conoides, at σικύας κωνοειδεῖς dari, earumque mentionem fieri apud Hippocratem testatur Galenus in lexico vocum illius. Ficus fructus formam habet etiam conoidem, vnde fortasse σικύα per metathesin literarum ι & υ, quam agnoscit Eustathius in librum δ. Iliadis, & in librum ρ. Odyss. vbi addit pap. 332 vers. 21.
istam permutationem elementorum ideo pag. 634
esse factam ἵνα μὴ καὶ τῷ σικύῳ σύκου ἐμφαίνεται, vers. 24
ne quid ficûs in cucumere appareret; certè si nihil in σικύῳ, in cucurbitis tamen nonnullis σικύαις appellatis σύκου σχῆμα ἐμφαίνεσθαι negari nequit. Hinc inferre licet ἁλιευτικὸν κύρτον cui Plutarchus nidi istius formam confert, esse rete illud quod ex filo, vel iunco contextum adminiculo circellorum subinde insertorum nucem pineam propè refert. Cæterum inter figuras quibus prædita esse possunt ea quæ super aquas vehuntur an

vlla sit quæ magis reluctetur se inclinanti, sicut nullam esse affirmat Plutarchus, quæstio est quæ suo loco reseruari debet. Prætermittere tamen non debeo huius nidi, quem à se sæpius visum testatur idemmet scriptor, tam admirabile artificium, tamque aptam ad semper extandum aquis conformationem mihi prorsus persuadere quod grauissimi ex Antiquioribus scripsêre, in eo, non vt Gesnerus & Aldrouandus suspicantur priùs ad saxum aliquod proxime aquas agglutinato, sed fluctuante pullos excludi & educari. Hæc autem omnia eò dixi vt constet centri grauitatis scientiam adhuc fore expetendam quamuis non inseruiret tetragonismis; sed & quantos vsus præstet Architectis & statuarijs abunde constat ex Villalpandi apparatu.

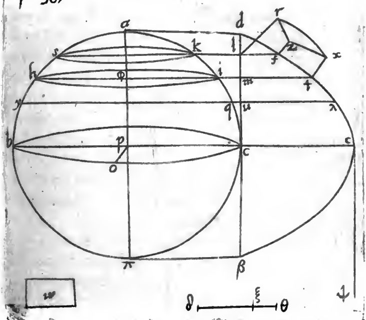
Aldrou. tom. 3. de auib. p g 195

pag. 319 & sequentibus.

PROPOSITIO XIV.

Hemisphærij & hemisphæroidis centrum grauitatis ita axem diuidit vt pars quæ terminatur ad verticem sit ad reliquam vt quinarius ad ternarium.

Sit circulus, vel ellipsis b a c cuius centrum c, diameter a p π, ei coniugata b p c; circa a p π manentē circũvolvi intelligatur p - 387



circulus vel ellipsis b a c, & ita describi vel sphæra, vel figura sphæroides b a c o diuisa bifariam circulo b o c, cuius diameter est b p c. Diuidatur a p ita in n vt portio a n sit ad n p sicut quinarius ad ternarium; hoc est tota a p diuidatur in octo, quarum quinque contineat recta a n, & tres residuas recta n p. Dico punctum n esse centrum grauitatis hemisphærij vel hemisphæroidis b a c o.

Per a ducatur in semicirculi vel semiellipsis plano recta a d parallela rectæ b c, quæ sectionem conicam b a c tanget in a. 32. primi Cō.
Completo parallelogrammo a p c d, completoque circulo vel ellipsi b a c π, per π

terminum diametri a π ducatur π β parallela rectæ a d, rectáque d c ipsi π β occurrat in β; rectæ p c æqualis c e abscindatur ex diametro b c productâ, datáque basi d β, diametro c e per d, e, β describatur parabola d e β cuius latus rectum sit e ⅃ tertia
52. primi cō. proportionalis post c e, c d, siue post c p, p a, hoc est cuius latus rectum sit æquale lateri recto circuli vel ellipseos a b π c respectu diametri c b ad quam ordinatim applicatæ possint rectangulum sub latere recto, & sub portione diametri inter c & ordinatim applicatas contentâ.

Quotcunque plana basi b o c parallela f k, h i secent hemisphærium vel hemisphæroides b a c o, eorumque sectiones sint figuræ f k, h i, quæ circulares erunt ex
12. de conoid. & sphæroid. Archimede, centrum habentes in axe a p; eiusmodi autem plana secent parabolam d c e juxta rectas l f, m t; atque in eodem plano f k super recta l f intelligatur constructum rectangulum l f g r æquale spatio circuli f k, & super recta m t rectangulum m t x z æquale circulo h i. Quoniam circuli f k, h i habent se vt quadrata rectarum f k, h i, ipsa autem quadrata rectarum f k, h i habent se, vt ostendi-
3. tertij huius in corollario 2. mus, sicut rectæ l f, m t; ex demonstratis in duodecima huius apertum est rectas t x, f g esse æquales, & planum r g x z esse parallelum plano d c e, figuramque contentam plano baseos b o c producto per

rectam c e, planis item d l r, & r g x z, & superficie quam recta per parabolam d f e mota parallelas rectæ f g describit, esse prismatoides, quod æquale sit hemisphærio vel hemisphæroidi b a c o, habeatque centrum grauitatis in eodem plano basi parallelo; centrum autem prismatoidis cuius latus ex oppositis parallelis est parabolæ semisegmentum d c e, habere centrum grauitatis in plano basi parallelo transeunte per centrum grauitatis semisegmenti d c e.

Quoniam igitur recta d u siue a n habet se ex constructione ad rectam u c siue n p vt quinarius ad ternarium, & per u ducta est recta n u λ parallela diametro c e parabolæ d e β, erit ex demonstratis à nobis centrum grauitatis semisegmenti d e c in recta u λ, ergo centrum grauitatis prismatoidis dicti erit in plano basi parallelo per rectam n u λ ducto; ergo per vndecimam huius centrum grauitatis hemisphærij vel hemisphæroidis b a c o erit in plano parallelo basi per rectam y n q ducto; sed est etiam in a x e a p vt Commandinus demonstrat libro de centro grauitatis solidorum; ergo centrum eiusmodi est in puncto n, quod solum commune est plano per y n parallelo, & axi a p. Hemisphærij ergo, &c. quod erat demonstrandum.

1. huius in co-roll. 4.

propos. 15.

COROLLARIVM I.

Quod si recta b c non transiret per centrum, eadem esset demonstratio, nisi quod punctum u non secaret rectam d c in dictâ proportione, sed in alia quæ determinanda foret juxta propositionis primæ præscriptum. Quæ de frustis dicta sunt in corollario duarum priorum hîc possunt applicari pauculis & perfacilibus mutatis.

COROLLARIVM II.

Ex corollario septimo primæ huius, & ex præsenti propositione manifestum est si semidiameter p a bifariam secetur in n, & ita diuidatur a n in φ, vt a φ ad φ n sit vt tredecim ad septem, punctum φ esse centrum grauitatis portionis sphæræ y a q.

COROLLARIVM III.

Demonstratiò præsentis propositionis eodem penitus pacto procedit si basis b o c sit cuiuscunque alterius figuræ, dummodo quæ fiunt à planis basi parallelis sectiones cum solida figura sint ipsi basi similes, & se habeant vt quadrata rectarum b c, h i, f k, &c. interceptarum semicirculo b a c, & parallelarum diametro b c, eiusmodi solidum appelletur *homæosphæricum*.

COROLLARIVM IV.

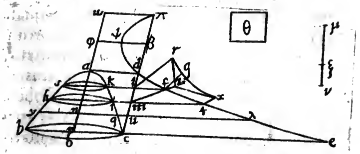
Hinc etiam apertum eſt methodum diuidendi ſphęram vel ſphęroides, vel homœoſphęricum pendere à methodo diuidendi ſegmenti parabolæ d e β ſecundum datam rationem, quod ita perficitur. Sit proportio data rectæ $\delta\xi$ ad $\xi\theta$, vt compoſita $\theta\delta$ ad $\xi\theta$, ita fiat ſpatium parabolæ d e β notum (vt non ſemel diximus) ad ſpatium ω. Dato ſpatio ω inueniatur ducta recta m t ad diametrum c e parallela portio d m t quæ ſit ęqualis prędicto ſpatio ω; qua autem id ratione præſtetur demonſtratum eſt propoſitione ſexta.

PROPOSITIO XV.

Conoidis hyperbolici habentis axem æqualem diametro tranſuerſæ hyperbolæ ex cuius circumductu generatur, centrum grauitatis ita diuidit axem vt pars quæ terminatur ad verticem ſe habeat ad aliam ſicut ſeptenarius ad ternarium.

Sit hyperbola b a c cuius centrum φ, & per centrum ducta sit φ a, cui $\varphi\,\omega$ æqualis abscissa sit; erit ergo ω a diameter transuersa inter sectiones oppositas iacens. Rectæ ω a abscissa sit a p æqualis, & per p ordinatim applicata ad ipsam diametrum a p sit recta p c occurrens vtrinque sectioni in punctis b, c. Segmentum parabolæ b a c intelligatur circa rectam a p manentem volui, & ita describere hyperbolicum conoides b a c o, cuius basis circulus b o c à recta b p descriptus; axis a p. Diuidatur recta a p in decem partes æquales quarum septem sint in recta a n, tres in rectâ n p, vt sicut septenarius ad ternarium ita sit recta a n ad n p. Dico punctum n esse centrum grauitatis conoidis b a c o.

Per a ducatur in hyperbolæ plano b a c recta a d parallela rectæ b c, quæ tanget
32. primi conic. in a, & completo parallelogrammo $\omega\,\pi$ c p, ductâque per φ recta $\varphi\beta$ ipsi a d parallelâ, ducta intelligatur quæcunque parabola
52. primi cô. $\pi\psi$ d e cuius basis data sit d π, vertex sit punctum ψ in recta $\beta\varphi$ vtcunque sumptum, & $\psi\beta$ diameter, latus autem rectum sit recta quæ vnà cum $\psi\beta$ comprehendat rectangulum æquale rectæ $\pi\beta$ seu βd; con-
26. primi cô. ueniat autem cùm rectâ b c æquidistante diametro $\psi\beta$, in puncto e; conueniet enim vt ex conicis elementis constat. Quotcunque plana basi b o c parallela f k,



p 393

h i secent conoidem b a c o, eorumque sectiones sint figuræ f k, h i, quæ circuli erunt ex Archimede, centrum habentes in axe a p; eiusmodi verò plana secent figuram d c e contentam rectis d c, c e & curua d e, iuxta rectas l f, m t. Rursus in eodem plano f k super recta l f intelligatur constructum rectangulum l f g r æquale spatio circuli f k; & super rectã m t rectãgulũ m t x z æquale circulo h i, quoniã circuli f k, h i habẽt se vt quadrata rectarũ f κ, h i ipsa autẽ quadrata rectarũ f k, h i habent se, vt ostendimus, sicut rectæ l f, m t; ex demonstratis in duodecima huius apertum est rectas t x, f g esse equales, & planum r g x z esse parallelum plano d c e,

12. de conoi. & sphæroid.

3. tertij huius in corollario 2.

figuramque contentam plano baseos b o c producto per rectam c e, planis item d l r, r g x z & superficie quam recta per parabolam d f e mota parallelos rectæ f g describit, esse prismatoides, quod æquale sit conoidi b a c o, habeatque centrum grauitatis in eodem plano basi parallelo; centrum autem prismatoidis cuius latus ex oppositis parallelis est figura d c e t habere centrum grauitatis in plano basi b o c parallelo, transeunte per centrum grauitatis figuræ d c e t planæ.

Quoniam igitur recta d u siue a n habet se ex constructione ad rectam u c siue n p vt septenarius ad ternarium, & per u ducta est recta n u λ parallela diametro ψ β parabolæ π ψ β, erit ex demonstratis à nobis, centrum grauitatis figuræ d c e t, in recta u λ; ergo centrum grauitatis prismatoidis dicti erit in plano basi parallelo per rectam n u λ ducto; ergo per vndecimam huius centrum grauitatis conoidis b a c o erit in plano parallelo basi per rectam y n q ducto; sed est etiam in axe a p ex Commandino; ergo centrum eiusmodi est in puncto n, quod solum commune est plano per y n parallelo, & axi a p. Conoidis ergo hyperbolici, &c. quod erat ostendendum.

3. huius in corollario 2.

15. libri de centro sol.

COROLLARIVM I.

Quòd si recta a p aliam quamuis proportionem haberet ad a o diametrum, eadem esset demonstratio nisi quod u non secaret rectam d c in dicta proportione, sed in alia quæ determinari deberet juxta propositionis tertiæ præscriptum. Quæ de frustis dicta sunt in corollariis trium præcedentium possunt hîc accommodari nullo negotio.

COROLLARIVM II.

Demonstratio eadem erit si basis b o c quamcunque aliam figuram obtineat, dummodo quæ fiunt à planis basi eidem parallelis sectiones cum eiusmodi figura solida sint ipsi basi similes, & se habeant vt quadrata rectarum b c, h i, f k, &c. interceptarum hyperbolæ b a c, & parallelarum basi b c segmenti hyperbolæ b a c, eiusmodi solidum appelletur *hyperbolicoides.*

COROLLARIVM III.

Hinc apertum est methodum diuidendi conoides hyperbolicum vel hyperbolicoides, nondum ab vllo mihi cognito traditam, pendere à methodo diuidendæ figuræ d c e secundum rationem datam, quod ita perficitur. Sit proportio data rectæ $\mu \xi$ ad rectam $\xi \nu$. Vt composita $\mu \nu$ ad $\xi \nu$, ita fiat spatium figuræ d c e notum ad spatium θ. Dato spatio θ inueniatur ducta recta m t ad diametrum a e parallela, portio d m t quæ sit prædicto spatio θ æqualis; qua autem id ratione prestetur demonstratum est in septima huius.

SCHOLIVM.

In quinque corporibus cylindro, portione sphæræ vel sphęroidis, conoide parabolico, conoide hyperbolico, & cono ordinem quantum ad collocationem centri grauitatis spectat, mirum animaduertas velim, Lector. Cylindrus centrum grauitatis habet in medio axe vt demonstrat Commmandinus. Conus illi oppositus & maximè omnium acutus habet centrum grauitatis in puncto diuidente axem ita vt portio ad verticem sit tripla alterius. Conoides parabolicum quod medio est loco obtusior cono, acutior cylindro, habet in puncto ita diuidente axem vt portio ad verticem alterius sit dupla. Portio sphærici vel sphæroidis, acutior cylindro, obtusior conoide parabolico habet centrum in puncto ita diuidente axem (prout ex primâ huius apertum est) vt proportio partis vertici adiacentis ad aliam sit maior proportione æqualitatis, quæ eſt in partibus axis cylindri, & ſit minor proportione dupla quæ eſt inter partes axis conoidis parabolici. Conoides denique hyperbolicum obtuſius cono, & acutius conoide parabolico ita habet centrum collocatum vt portio verticis ad portionem reliquam habeat proportionem maiorem quidem dupla, quæ conoidis parabolici eſt propria, minorem verò tripla, (vt ex corollario primo propoſitionis tertiæ planum fit) quæ eſt propria coni. Hinc vlteriùs apparet proportionem hyperbolici conoidis eſſe maiorem proportione parabolici; proportionem verò partis ſphæræ vel ſphæroidis eſſe minorem, atque ita illam recedere à parabolica per exceſſum ſiue ὑπερβολὴν, iſtam per defectum ſiue ἔλλειψιν; vt hinc quoque nominum *ellipſeos* & *hyperboles* cauſa ſumi poſſit. Non minorem admirationem habet quod ex iſta centrorum deſignatione demonſtrari nullo negotio poteſt, ipſorum corporum, quam inter ſe habent, proportio, ſicuti tradita fuit methodus ea diuidendi ſecundum datam proportionem. Hæc verò duo ſunt propter quæ Archimedes libros de ſphęra & cylindro, de conoidibus & ſphęroidibus conſcripſit, & quorum inuentionem tanti fecit, vt ex illis ſe poſteritati æſtimandum optarit dum in ſuo tumulo cylindrum, qui ſphæram complecteretur, poni voluit, & inſcribi proportionem eorum prout à ſe inuenta fuerat. Eiuſmodi ſepulchrum cùm multis poſt annis ſeptum vndique & veſtitum vepribus & dumetis ignoraretur, à ſe indagatum indicio columellæ non multùm è Tuſc. quæſt. l. 5. dumis extantis, in qua inerat ſphæræ figura & cylindri, gloriatur alicubi Cicero.

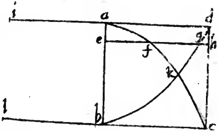
Modus inueniendi proportionem quæ eſt inter partes prædictorum ſolidorum in mentem nobis reuocat problema quoddam ſympoſiacum quod à Sapientibus viris proponi non ſemel audiuimus. *Cur poſita forma ſcyphorum qui ad menſam in vſu nunc ſunt, temperantia & valetudinis leges praſcribant vt primum infundatur in craterem vinum, tùm ſuperfuſá aquâ miſceatur.* Huius cauſam Phyſicus aſſignabit, quòd cùm aqua grauior, vinumque leuius ſit, facilius mutuo incurſu permiſcentur, dum illud ſuaptè natura locum ſuperiorem petit; inferiorem iſta; magis ergo diluitur hoc pacto & attemperatur vinum, magiſque proinde iuuat & ſtomacum, & hominem. Mathematicus aliam longè maioris momenti dabit huius rationem. Cùm ſcyphi maximam partem nunc ſint in modum coni, aut pyramidis, aut hemiſphęrij, aut parabolici, aut hyperbolici in fundo acutiores, latioreſque in ſupremo labro, multò minus capaces ſunt in inferiore quàm in ſuperiore ſui parte, illáque inæqualitas tanta eſt vt non pueros ſolum, ſed etiam adultos & cordatos viros fallat. Si exempli causa ad dimidiam scyphi altitudinem vinum fundi iubeas, paria fermè facere vinum & aquam existimas, nec tibi persuades quàm modica tuæ potionis pars sit vinum te arbitro mixtum. Diuisa capacitate scyphi in octoginta portiones inuicem ęquales, si scyphus conum, aut pyramidem referat, ex hactenus tradita doctrinâ constat decem tantùm ex illis contineri dimidio altitudinis inferiore; si hyperbolicum conoidem imitetur de quo agit propositio prę̨sens sexdecim dumtaxat; si parabolicum, viginti & non ampliùs; si hemisphærium aut hemisphæroidem, omnino quinque & viginti. Ex quo conficitur in primo calicum genere misceri octauam solummodo partem vini; in secundo quintam; in tertio, quartam; in postremo decimam sextam supra quadrantem, siue quadrātem totius, & ipsius insuper quadrātis quadrātē. En vt omnia etiam non cogitantes nos trahunt ad temperatum potum. Primùm necessitas id genus scyphorū excogitauit, ex forma enim habent vt dum exhauriuntur superior oræ pars non impingat in nasum aut frontem; deinde dignitas vini eiusque præcipua vtilitas obtinuit vt ipsum priùs in calicem de more fundatur; aqua postea castigandum: denique animi facultas quam *æstimatiuam* vocant, hac forma calicum delusa, merum vltra veritatem auget, odiúmque dilutioris vini hoc iudicio cohibet. Quis autem non fufpiciat iftam Mathefeos reconditæ & fagacis partem quæ rationes iftiufmodi crafeos, vtcunque tandem fiat, ad vnguem planè definit?

PROPOSITIO XVI.

Sit parallelogrammum quodcunque a b c d, fintque tres rectæ a b, b c, a i proportionales quarum a i fit ad a b perpendicularis. Dato latere a i defcripta fit parabola a k, cuius vertex a, diameter a b, ordinatim applicatæ fint parallelæ lateri a d, quoniam i a, b c, a b funt proportio-
52. primi Cō. nales punctum c erit in parabola a k. Rurfus per b agatur b l parallela & æqualis rectæ b i, & dato vertice b, diametro b a, latere recto b l defcribatur parabola b k, cuius ordinatim applicatæ fint rectæ a d parallelæ;

punctum

punctum d erit in parabolâ b k. Ostendendum est si in parallelogrammo a c ducatur rectâ e h ipsi a d parallela occurrens parabolis in f, g quadrata duarum rectarum e f, e g esse simul æqualia quadrato rectæ a d.

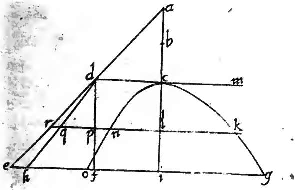


Quoniam enim quadratum e f est æquale rectangulo i a e; & quadratum e g est æquale rectangulo l b e, duo simul quadrata erunt æqualia duobus rectangulis i a e, l b e, sed duo simul i a e, l b e sunt æqualia rectangulo l b a, latera enim i a, l b sunt æqualia, & duæ b e, e a componunt totam b a; rectangulum autem l b a est æquale quadrato rectæ a d ordinatim applicatæ; ergo duo quadrata e f, e g æquant simul quadratum a d, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVII.

Sit hyperbola c k g cuius centrum b vertex c; diameter transuersa a c, tangens c m, ordinatim applicata i g; ex productâ rectâ c m abscindatur c d æqualis lateri recto, & iungatur recta a d occurrens rectæ i g productæ in e; per d acta sit d f complens parallelogrammum d i; atque ex f e rectâ abscissa sit f h potens rectangulum d f e, siue h congruat puncto e, siue non congruat, & iungatur recta d h. Dato vertice c diametro c i describatur parabola c n o cuius latus rectum sit æquale ipsi d c, ita vt d c, o i, c i sint proportionales. Si per l quodcunque punctum inter puncta c & i sumptum in recta c l, ducatur recta κ r occurrens lineis annotatis in k, l, n, p, q, r; dico quadratum rectæ l n vnà cùm quadrato rectæ p g, esse æquale quadrato rectæ l k; & vt quadratum rectæ i o ad quadratum rectæ f h, ita esse rectam a c ad rectam c i; vt autem quadratum rectæ i g ad quadratum rectæ i o, ita esse rectam a i ad a c rectam; & vt idem quadratum rectæ i o ad c i, ita esse rectam a i ad c i rectam.

Quoniam enim i g est ordinatim applicata ad hyperbolam quadratum i g erit



æquale rectangulo c i e; sed rectangulum c i e æquale est duobus rectangulis c i f, d f e, quorum illud equale est quadrato i o, istud quadrato f h, ergo quadratum g i est æquale quadratis i o, f h. Simili ratione ostendetur quadratum l k cùm sit æquale rectangulo c l r, ipsum autem c l r sit æquale & rectangulo c l p quod est equale quadrato l n, & simul rectangulo u p r quod est æquale quadrato p q (vt ostendi facile potest ex demonstratis à Clauio in scholio quartæ propositionis sexti Euclidis) ergo quadratum l k est eqnale duobus quadratis simul l n, p g.

r. sexti Euc. 4. sexti Euc. in coroll.

Rursus quoniam quadratis i g, i o, f h, æqualia sunt rectangula c i e, c i f, d f e, cùm eandem altitudinem c i habeant, erunt inter se vt bases i e, i f, f e: quoniam verò triangula a i e, d f e sunt similia, vt a i ad i e, ita erit d f seu c i ad e f, & alternando vt a i ad c i, ita erit i e ad i f, & diuidendo vt a c ad c i, ita erit i f ad f e. Cùm ergo quadrata i g, i o, f h sint in ratione rectarum i e, i f, f e, erunt quoque in ratione rectarum a i, a c, c i, quod erat ostendendum. Eiusmodi autem parabola c n o & triangulum d f h vocentur *partes hyperbolam constituentes*.

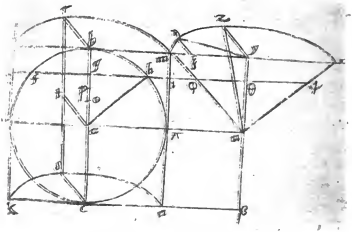
Propositio XVIII.

Cylindrus qui baſim habeat maximum in ſphærâ circulum, & altitudinem diametrum eiuſdem ſphęræ, ad ipſam ſpæram eſt in ſeſquialtera proportione.

Sit b a c axis cylindri rectanguli bifariam ſectus in a; eundem cylindrum bifariam ſecet planum per axem, eiuſque cum cylindro ſectio communis ſit quadratum l m n k; ſemicylindri inſiſtentis quadrato l m n κ; baſes ſint ſemicirculi l r m, k ſ n; in quibus ex punctis b, c excitentur perpendiculares b r, t ſ ad diametros l b m, k c n; per rectas r b, ſ c intelligatur planum duci cuius ſectio cum cylindro ſit parallelogrammum r b c ſ. Rurſus in parallelogrammo rectangulo r b c ſ per a acta ſit a t lateri c ſ parallela, & circulus b d c in dato quadrato l k n m deſcribatur; intelligaturque axe t a immoto reuolutione circuli b d c deſcribi hemiſphærium, quod erit ſemiſſis ſphęræ intra cylindrum ita contentæ vt ipſius cylindri altitudo b c ſit diameter ſphæræ, baſis autem ſit circulus cuius diameter l m, quæ cùm ſit æqualis rectæ b c; ipſa baſis erit

2. ſereni de ſect. cylind.

8. quarti Euc.



circulus æqualis circulo maximo sphæræ; cuius hemisphærium circulo b d c incumbit; alter autem semicylindrus & alterum hemisphęrium intelligatur esse infra planum l κ n m. Dico cylindrum prædictum esse sesquialterum sphæræ in ipso contentæ; & sextuplum coni cuius basis sit circulus l r m, altitudo b a semidiameter sphæræ.

Ex recta l m productâ abscindatur m x æqualis ipsi l m, bifariam in y diuisa; & per y in plano l n acta sit y u æquidistans rectæ m n, & rectæ d a ad normam secanti diametrum b c occurrens in u. In plano l b r per rectam m x producto ex centro y interuallo rectæ y z ipsi y m æqualis describatur circulus m z x, iunctâque rectâ u z, iuncto u manente intelligatur circumuolutione rectæ y z per circulum m z x deſcribi conus, cuius baſis erit circulus m z x, & axis y u, triangulum vero per axem m u y. Intra rectas l m, d u ducatur quæcunque e ↓ ipſis parallela occurrens circulo b d c in f, h; quadrato l n in e, i; triangulo m u x in φ ↓; axibus b a, i u in g, θ; iungantur rectæ a f, a h.

Quoniam rectæ m x eſt dupla rectæ u y, erunt m y, y u, y x æquales, & quia parallela eſt φ ↓ ad rectam m x, ſicut u y eſt æqualis rectæ m y, ita u θ erit æqualis rectæ φ θ ſeu θ ↓; eſt ergo recta φ ↓ dupla rectæ θ u ſeu g a ipſi θ u æqualis.

Rurſus quoniam circulus cuius diameter g i ſe habet ad circulum cuius diameter g h, vt quadratum g i ad quadratum g h; ergo diuidendo vt quadratum a g, hoc eſt exceſſus quo quadratum g i ſeu a h ſuperat quadratum g h, ad ipſum quadratum g h, ita eſt exceſſus quo circulus cuius diameter g i, ſuperat circulum ex diametro g h, ad ipſum circulum ex diametro g h: ſed vt quadratum a g ad quadratum g h, ita eſt circulus ex a g diametro, ad circulum ex g h diametro; ergo vt circulus ex a g ad circulum ex g h, ita eſt exceſſus quo circulus ex g i ſuperat circulum ex g h, ad ipſum circulum ex g h: ergo circulus ex a g æqualis eſt exceſſui quo circulus ex g i ſuperat

2. duodec. Euc.

47. primi Euc.

circulum ex g h. Cum igitur circulus
9.quinti Euc. ex e i sit quadruplus circuli ex g i (habent enim se vt quadrata rectarum i e, i g quæ sunt in ratione quadrupla per corollarium vigesimæ sexti elementorum Euclidis) & circulus ex f h quadruplus circuli ex g h; & circulus ex φ ↓ sit quadruplus circuli ex a g (est enim a g ipsi θ u & θ u ipsi φ θ æqualis) ob eandem causam;
4.primi fereni Theodosij sphær. excessus circuli cuius diameter i e supra circulum ex diametro f h erit æqualis circulo ex φ ↓ diametro. Si ergo per rectam e ↓ agatur planum parallelum basibus
4.primi Conic. l r m m z x, cum sectiones eiusmodi plani cum cylindro, sphæra, & cono sint circuli quorum diametri e i, f h, φ ↓; sectio eiusmodi plani cum cylindro superabit sectionem eiusdem cum sphæra, eo excessu qui sit æqualis sectioni eiusdem plani cum cylindro.

Quoniam ergo hemisphærij, cuius axis b a, complementum ad cylindrum cuius idem axis b a, ita se habet ad conum, cuius axis u y, vt quocunque plano parallelo ad bases l r m, m z x secentur, sectiones eorum sint inuicem æquales;
11. huius. complementum ad cylindrum erit æquale cono, & ambo habebunt centrum grauitatis in eodem plano basibus parallelo, ac proinde & in eadem recta in plano l n ducta æquidistante rectæ l m, cum ostenderimus centrum grauitatis cylindri & coni

esse in axe; complementi autem centrum grauitatis esse in axe sequitur ex eo quod hemisphærij centrum grauitatis esse in axe demonstrauerimus; nam ex duocecima primi æquiponderantium constat centrum residui esse in recta transeunte per centrum totius & vnius ex partibus.

Diuidatur recta b a in octo partes, quarum duæ sint in recta b g; tres in recta a o; & quatuor in recta a p; recta ergo g p continebit duas, & recta p o vnam. Per g ducatur recta g θ parallela rectæ l m, & occurrens axi y u in θ, erit y θ quarta pars rectæ y u, ergo θ est centrum grauitatis coni; ergo g est centrum grauitatis complementi ad cylindrum; sed o est centrum grauitatis hemisphærij ex demonstratis; p verò est centrum grauitatis totius cylindri; ergo vt recta g p ad p o rectam, ita est hemisphærium ad complementum hemisphærij ipsius ad cylindrum cuius axis a b. Cùm igitur recta g p sit dupla rectæ p o, erit hemisphærium duplum complementi siue coni cuius basis m z x. Cylindrus igitur cuius axis a b si diuidatur in tres partes, duas ex illis continebit hemisphærium, & tertiam complementum hemisphærij, siue conus cuius basis m z x, axis y u. Cylindrus igitur cuius axis a c si diuidatur in tres partes, duas ex illis continebit sphæra cuius diameter b c, & tertiam complementum sphæræ ad hemis-

12. huius.
14. huius.

phærium; ergo cylindrus se habet ad sphæram vt ternarius ad binarium, quod est cylindrum esse sphæræ sesquialterum.

Posset etiam sine grauitatis centris demonstrari in hunc modum. Quoniam conus m u x & cylindrus cuius axis b a habent bases l r m, m z x æquales, & altitudines b a, y u æquales, erit conus cylindri tertia pars; ergo cum complementum hemisphærij cuius axis b a sit ostensum æquale cono m u x, ipsum complementum erit tertia pars cylindri &c.

10. duodec. Euc.

COROLLARIVM. I.

Ex his apertum est hemisphærium esse duplum coni habentis basim circulum sphæræ maximum, & altitudinem æqualem semidiametro.

COROLLARIVM II.

Ex his quoque demonstrari potest cylindrum esse sesquialterum sphæroidis in ipso contenti, id est quod tangat bases cylindri, & sectio plani per centrum ducti parallelos basibus, sit circulus communis sphæroidi & cylindro; demonstratio enim eadem est si posito arcu d b π semiellipsi, quadratum rectæ $\varphi\theta$ sit æquale excessui quo quadratum g ı superat quadratum g h. Hoc autem ita esse ostenditur. Quoniam in triangulo m y u lateri m y parallela est $\varphi\theta$, vt recta y u ad θ u, ita erit m y ad $\varphi\theta$: fiat y ξ æqualis rectæ $\varphi\theta$; & per ξ agatur $\xi\lambda$ parallela rectæ y z ordinatim applicatæ ad diametrum m x circuli m z x. Apertum est duo quadrata rectarum $\xi\lambda$, ξ y esse simul æqualia quadrato semidiametri y λ, siue y m, siue g i.; ac proinde cùm ξ y æqualis sit rectæ $\varphi\theta$; si $\xi\lambda$ probetur esse æqualis rectæ g h, quadratum rectæ $\varphi\theta$ ostensum fuerit æquale excessui quo quadratum rectæ g i superat quadratum rectæ g h. Ostendo igitur quadratum rectæ $\xi\lambda$ esse æquale quadrato g h. Quoniam vt rectangulum b a c ad rectangulum b g c, ita est quadratum a π ad quadratum g h; & vt rectangulum m y x ad rectangulum m ξ x, ita est quadratum y z seu a π ad quadratum $\xi\lambda$, cùm ratio rectanguli b a c ad b g c sit eadem quæ rectanguli m y z ad m ξ x; vt quadratum a π ad quadratum g h, ita erit quadratum y z siue a π ad quadratum $\xi\lambda$: ergo quadratum $\xi\lambda$ est æquale quadrato g h; quod erat ostendendum. Rectangulum autem l a c ad l g c esse vt rectangulum m y x ad m ξ x probatur in hunc modum. Quoniam vt y u ad θ u, ita esse m y ad y ξ seu $\varphi\theta$ ostendimus, ergo per conuersionem rationis vt y u ad y θ, ita erit m y ad m ξ, & inuertendo vt y θ ad y u, ita erit m ξ ad m y: sed vt y u

4. sexti in corollar.

47. primi Euc.

21. primi Cō.

ad y β, ita est m y ad m x, ergo ex æquo vt y θ ad y β, ita m ξ ad m x; & diuidendo vt y θ ad θ β, siue vt b g ad g c, ita m ξ ad ξ x: ergo rectangulum b g c est simile rectangulo m ξ x; ergo rectangula ipsa se habent vt quadrata rectarum b g, m ξ. Rursus quoniam ut b g ad b c, ita ostensum est esse m ξ ad m x, & vt b g ad b a semissem, ita est m x ad m y semissem, erit ex æquo vt b g ad b a, ita m ξ ad m y, & alternando vt b g ad m ξ, ita b a ad m y: cùm igitur rectangula b a c, m y ξ se habeant vt quadrata rectarum b a, m y: & vt quadrata b a, m y, ita sint quadrata b g, m ξ; & vt quadrata b g, m ξ ita sint rectangula b g c, m ξ x; erit vt rectangulum b g c ad rectangulum m ξ x, ita rectangulum b a c ad rectangulum m y x, & alternando vt rectangulum b g c ad b a c, ita m ξ x ad m y x quod erat ostendendum.

COROLLARIVM III.

Ex his apertum est semiconoides cuius axis b a esse duplum coni habentis basim æqualem circulo cuius diameter d π, altitudo vero sit æqualis ipsi b a. Atque hoc pacto demonstrata manent quæ Archimedes ostendit in libro primo de sphera & cylindro propositione trigesima secunda &

libro de sphæroidibus & conoidibus propositione vigesima nona.

COROLLARIVM. IV.

Præterea ex corollario secundo propositionis decimæ quartæ huius apertum est, si solidum inclusum non sit sphæra sed homœosphæricum, sectioque facta à plano d a t non sit circulus, sed quæuis alia figura, cui æqualis & similiter posita sit basis b r m solidi continentis, quod *cylindroides* appelletur, eandem esse vim præsentis demonstrationis.

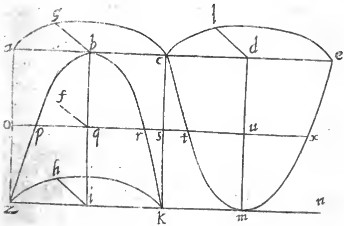
COROLLARIVM V.

Denique ex præsentis demonstrationis progressu liquidò constat omnem conum vel homœoconum esse tertiam partem cylindri aut cylindracei, habentis cum illo eandem basim & altitudinem Ostendimus enim cylindrum vel cylindraceũ, cuius axis sit a b, si diuidatur in tres partes, duas ex illis contineri hemisphærio vel homœosphærio, & tertiam cono vel homœocono cuius basis m z x, axis y u.

PROPOSITIO XIX.

Cylindrus est duplus conoidis parabolici eandem cum ipso basim eundemque axem habentis.

32. primi cō. Sit parabolæ segmentum z b k, cuius tangens a c, basis ipsi a c parallela sit z k; cōpleto parallelogrāmo a c k z, cuius latera a z, c k sint diametro b i parallela super recta z k statuatur planum h i k erectum ad planum a k, & in eodem plano h i k, centro i, interuallo i z vel i k, describatur circulus z h k, in cuius plano ex i excitetur i h perpendicularis ad diametrum z k. Manente b i intelligatur circumuolui parabolæ z b k segmentum, & describi parabolicum conoides cuius basis erit basis z h k, axis b i ex definitione tradita ab Archimede initio libri de conoidibus & sphęroidibus; intelligatur pariter circa eandem lineam b i manentem circumvolvi parallelogrammum a c k z; describetur cylindrus cuius axis erit b i, bases oppositæ z h k, a g c ex definitione cylindri à sereno explicata; hunc cylindrus igitur a k continebit conoides parabolicum z b k. Dico cylindrum a k esse duplum conoidis z b k.



Productis rectis a c, z k, abſcindantur ęquales c e, k n diametro a c, diuidanturque bifariam per rectam d m ipſi c k parallelam. Intelligatur contrariâ poſitione deſcripta parabola c m e, cuius baſis c e, vertex m, diameter d m; erunt vt apertum eſt parabolæ z b k, c m e æquales, cùm ita aptari poſſint vt ſibi congruant. Inter b & i ſumatur quodcunque punctum q, & per illud ducatur recta o x parallela rectæ a c, occurrens in p, q, r, ſ, t, u, x lineis adnotatis; & per o x rectam ducatur planum o q f parallelum baſibus. Quoniam exceſſus quo quadratum o ſ ſuperat quadratum p r, eſt quadratum t x, oſtendetur vt in præcedenti, circulum ex diametro t x eſſe æqua- *16. huius.*

lem excessui quo circulus ex diametro o f superat circulum ex diametro p r. Quoniam ergo complementum conoidis ad cylindrum, & conoides cuius basis c l e axis d e, ita se habent, vt secta quocunque plano o q f basibus parallelo, sectiones sint æquales, conoides cui⁹ basis c l e erit æquale cōplemento; sed conoides cuius basis c l e est æquale conoidi cuius basis z h k: ergo complementum conoidis cuius basis z h k, axis b i, est æquale ipsi conoidi, ergo cylindrus est duplus conoidis cuius axis b i basis z h k; quod erat ostendendum.

11. huius.

COROLLARIVM I.

10. Euc. duod.

Quoniam cylindrus a k est triplus coni cuius basis z h k, altitudo i b, habet se ad illum vt sex ad duo; & quoniam est duplus conoidis parabolici inclusi, habet se ad illud vt sex ad tria: ergo cùm vt tria ad sex, ita sit conoides parabolicum ad cylindrum; & vt sex ad duo ita sit cylindrus ad conum, erit ex æquo vt tria ad duo, ita conoides parabolicum ad conum; ergo conoides parabolicum est coni sesquialterum; hoc autem demonstrat Archimedes propositione vigesimâ tertiâ libri citati.

Licebit quoque ex huc vsque ostensis demonstrare parabolicum ad hemisphærium eadem basi & altitutine præditum esse vt tria ad quatuor. Parabolicum enim

præditum

ad cylindrum eadem basi & altitudine præditum est vt tria ad sex, sed cylindrus idem est ad hemisphæriũ vt sex ad quatuor; ergo vt tria ad quatuor; ita ex æquo est parabolicum ad hemisphærium eadem basi & altitudine constans.

COROLLARIVM II.

Ex Corollario propositionis decimæ tertiæ huius liquet eandem esse vim demonstrationis si solidum inclusum non sit conoides parabolicum, sed parabolicoides, basisque h k, non sit circulus sed quæuis alia figura cui æqualis & similiter posita sit basis a g c cylindroidis continentis figuram parabolicoidem.

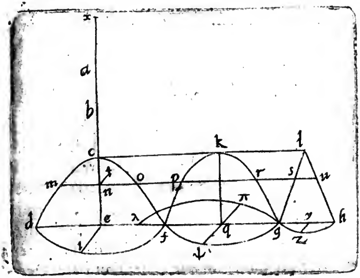
COROLLARIVM III.

Hinc apertum est complementum z o a g b p ad semicylindrum a g b i h z esse æquale quartæ parti cylindri, vel semissi ipsius semicylindri: ostensum enim est totum complementum esse æquale semicylindro, ergo semissis erit æqualis quartę parti cylindri. Et similiter si b i h sit rectangulum, & non parabola, eiusmodi verò rectangulum ponatur esse sectio solidi, sectio ista erit ad parabolam vt tria ad duo, sicut ex primâ huius satis constat; ergo eiusmodi solidum erit ad parabolicum vt tria ad duo, sed parabolicum se habet ad cylindrũ vt duo ad quatuor; ergo ex æquo eiusmodi solidum, cuius sectio sit rectangulum b i h, est ad cylindrum, cuius axis b i, vt tria ad quatuor; ergo complementum eiusmodi solidi parabolicoidis est quarta pars ipsius cylindri, & semissis z o a g b p est quarta pars semicylindri cuius altitudo b i.

Propositio XX.

Sit hyperbolæ segmentum c d, cuius basis d f recta ordinatim ad diametrũ c e applicata, ac proinde parallela tangenti c k; eius centrum sit b; c b, b a, a x sint æquales. Intelligatur manente c e, circumuolui hyperbola d c f, & describi conoides hyperbolicum iuxta definitionem traditam ab Archimede initio libri de conoidibus & sphæroidibus, cuius basis sit circulus d i f; intelligatur præterea describi conus cuius basis sit idem circulus d i f, idemque qui conoidis vertex c. Ostendēdū est vt recta x e est ad rectam a e, ita esse conoides descriptum ad conum inclusum.

Istud demonstrat Archimedes propositione vigesima septimâ libri citati; nos in hunc modum ostendimus. Ex rectâ d f productâ abscindantur f g, g h quarum illa æquet basim parabolæ, ista dupla sit basis trianguli, quas *partes hyperbolæ* appellauimus in decimâ septimâ huius; parabola verò ipsa sit f κ g cuius diameter k q, vertex *k*; triangulum autem sit l g h. In plano basis d i f per rectam d h ducto, ex centro



q per f & g, describatur circulus f ↓ g; & ex centro y per g & h circulus g z h. Manente diametro κ q intelligatur circumagi parabola f k g & describi conoides parabolicum cuius basis f ↓ g, vertex k, axis k q. Similiter intelligatur describi conus cuius vertex l basis g z h. Præterea sumpto quocumque puncto n inter c & e, atque per illud ductâ rectâ m u æquidistãte rectæ d h, intelligantur secari tria solida per planum m n t æquidistans plano basium d i f, f ↓ g, g z h. Quoniam duo quadrata rectarum
17. huius. p r, f u sunt ex demonstratis æqualia simul quadrato rectæ m o; duo etiam circuli ex diametris p r, f u erunt æquales simul circulo ex diametro m o (id enim perinde ostendetur ac in decimâ quintâ huius) cùm
11. de conid. & sphæroid. igitur circuli ex diametris m o, p r, f u sint sectiones plano m n t & solidis communes, erunt duo simul solida videlicet parabolicum & conus quorum bases f ↓ g, g z h æqualia conoidi hyperbolico cuius basis d i f, vertex c.
4 primi Conic. 23. huius. 17. huius.

Rursus ex rectâ g f productâ abscindatur recta g λ ita vt quadratum g λ se habeat ad quadratum g f vt tria ad duo; circulus ergo ex g λ erit ad circulum f ↓ g vt tria ad duo, hoc est vt recta x c ad rectam a c, & quia coni quorum bases sunt circuli ex diametris g λ, g f descripti in plano d e i, vertex
11. duodec. Euc. verò est punctum κ se habent vt bases, conus cuius basis est circulus λ π g ex diame-

tro λg erit ad conum cuius basis f ψ g vt tria ad duo, siue in proportione sesquialtera; sed in eadem proportione est conoides parabolicum cuius basis f ψ g, axis k q, ad conum cuius basis f ψ g, vertex κ ex corollario primo præcedentis, ergo conoides parabolicum est æquale cono cuius basis est circulus λ π g. Cùm ergo coni quorum bases λ π g, g z h habeant eundem verticem k, erunt inter se vt bases. Quoniã ergo vt basis λ π g ad basim f ψ g, ita ostensum est esse rectam x c ad rectam a c, & vt basis f ψ g ad basim g z h, ita est recta a c ad c e rectam; ergo ex æquo vt basis λ π g ad basim g z h, ita recta x c ad rectam c e: & componendo vt duæ simul bases λ π g, g z h ad basim g z h, ita recta x e ad c e. Rursus vt basis f ψ g ad g z h, ita recta c a, ad c e; ergo cõponendo vt duæ simul f ψ g, g z h bases, ad basim g z h, ita a e recta ad c e; & inuertendo vt basis g z h ad duas simul f ψ g, g z h, ita recta c e ad a e rectam. Quoniam ergo vt duæ simul λ π g, g z h ad basim g z h ita esse ostendimus rectam x e ad c e, & vt basis g z h ad duas simul f ψ g, g z h, ita est c e recta ad a e rectam; ergo ex æquo vt duæ simul λ π g, g z h ad duas simul f ψ g, g z h, ita est recta x e ad a e: sed basis d i f est æqualis duabus simul f ψ g, g z h, vt ostendimus; ergo vt duæ simul λ π g, g z h ad basim d i f ita est recta x e ad a e. Quoniam ergo vt bases prædictæ ita

17. huius.

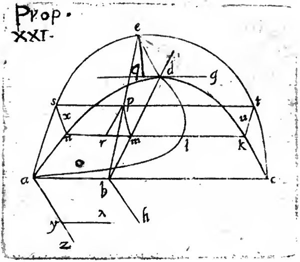
11. duodec. Euc.

& coni prædicti illis insistentes, erit vt recta x e ad a e rectam, ita duo simul coni insistentes basibus λ π g, g z h, ad conum insistentem basi d i f: sed duo simul coni insistentes basibus λ π g, g z h sunt simul æquales hyperbolico conoidi cuius basis sit d i f, & vertex c, centrúmque b (nam conus, cuius basis λ π g, est æqualis parabolico conoidi cuius basis f x g, vt ostendimus, cùm ergo ostensum sit parabolicum conoides vnà cum cono cuius basis est g z h esse æquale hyperbolico conoidi dicto cuius basis est d i f; duo simul coni quorum bases λ π g, g z h erunt æquales dicto hyperbolico) ergo vt recta x e ad a e rectam, ita est dictum hyperbolicum conoides ad conum habentem eandem basim d i f communem cum ipso, eundemque verticem c; quod erat probandum.

COROLLARIVM.

Ex corollario secundo decimæ quintæ huius constat eandem esse vim modo allatæ demonstrationis, si solidum cuius basis d i f, & vertex c non sit hyperbolicum conoides, sed hyperbolicoides, basisque d i f non sit circulus, sed quęuis alia figura, quæ etiam sit basis homoeoconici habentis verticem c.

Prop. XXI.



Propositio XXI.

Plana adc, aec secent se secundum lineam ac; in quorum vno adc sit quæuis figura adc, cuius vnum latus sit recta ac; eam verò figuram contineant totam rectæ ac, dg inuicem æquidistantes. Per lineam ab actum sit planum abh rectum ad planũ adc, & per b quodcunque punctum lineæ ac in eodem plano abh acta sit linea bh incidens vtcunque in rectam a c; per d verò acta intelligatur recta d e in infinitum producta, & æquidistans rectæ b h, intelligatur autem ipsa d e circumferri per ambitum figuræ retinendo in motu positionem parallelam positioni rectæ b h. Eiusmodi superficiei motu rectæ d e descriptæ, & plani a e c communis sectio sit linea a e c. Solidum contentum planis a d c, a e c & superficie motu rectæ d e descriptâ appello *cuneatum*; portionem superficiei latione rectæ d e descriptæ appello basim cuneati solidi; figuras a d c, a e c voco eius latera; rectam a c eius aciem. Ducto verò per rectam d e & per b quodlibet punctum rectæ a c plano e d b secante latera cuneati secundum rectas e b, d b; triangulum e d b appelletur triangulum notum cuius basis e d; & in plano e d g ex e demissa sit in rectam d g perpēdicularis e q, quam voco altitudinem *notam*. Parallelas tangenti d g, vel aciei a c nomino ordinatim applicatas. Rursus intelligatur descripta quadratrix d l o a ita vt ductâ quacunque n k ordinatim applicatâ secante in m latus b d trianguli noti & quadratricem in l, sicut b d latus noti triãguli ad b m, ita sit ordinatim applicata n k, ad l k. Quadratarium spatium appelletur illud quod intercipitur quadratrice d l o, rectâ a c & ambitu d k c figuræ a d c. *his ita positis sequitur theorema, quod demonstrandum suscipimus.*

Solidum cuneatum est æquale parallelepipedo cuius basis ęqualis spatio quadratario, & altitudo sit æqualis altitudini notæ.

Per m in triangulo b e d agatur m p parallela basi e d; erit ergo vt b d ad b m, ita e d ad m p; sed vt b d ad b m, ita ex gene- 4. sexti in coroll.

ratione quadratricis est n k ad k l; ergo vt e d ad m p, ita est n k ad l k, ergo rectangulũ sub extremis e d, l k est æquale rectangulo sub mediis m p, n k. Rursus quoniam duæ rectæ n m, m p tangunt se in m, & sunt parallelæ duabus, a b, b h, tangẽtibus se in
15. vndec. Euc. b, erunt plana n m p, a b h parallela. Planũ n m p faciat in plano a e c sectionem f t
3. Eiusdem. quæ erit recta linea, & si per n & k agantur rectę n x, k u parallelæ ad rectam m p seu d e, erunt rectæ n x, k u in basi cuneatę figuræ, vt ex generatione ipsius basis apertum est; ergo erunt sectiones ipsius plani n m p & basis solidi cuneati: ergo rectæ n x, k u concurrent cum rectâ f t in punctis f, t. Rursus quoniam plana a b h, n m p parallela secantur plano a e c faciente sectiones f t, a c, erunt rectæ f t, a c parallelæ: similiter quoniam plana eadem a b h, n m p
16. vndec. Euc. secantur plano a d c faciente sectiones n k, a c, erunt rectæ n k, a c parallelæ; ergo cùm
9. eiusdem. rectæ f t, n k sint parallelæ eidem a c, erunt inter se parallelæ: figura ergo n k t f est parallelogramma, cùm eius opposita latera sint parallela ut ostensum est.

Rursus in parallelogrammo n k t s ex puncto p demittatur in rectam m n perpendicularis p r: quoniam anguli p m r, e d q sunt æquales, item anguli e q d, p r m erit triangulum d e q simile triãgulo m p r: ergo vt d e ad e q, ita m p ad p r. Quoniam ergo restangulum sub l k basi & altitudine e d se habet ad rectangulum sub eadem basi l κ, & altitudine e q, vt recta e d ad e q; & vt recta e d ad e q, hoc est vt recta m p ad p r, ita est rectangulum sub basi n k & altitudine m p ad rectangulum sub eadem basi n *k* & altitudine p r: vt rectangulum sub l *k*, e d ad rectangulum sub l *k*, e q, ita erit rectangulum sub n *k*, m p, ad rectangulum sub n k, p r: ergo alternando vt rectãgulum sub l k, e d ad rectangulum sub n κ, m p, cui est æquale ex demonstratis, ita erit rectangulum sub l *k*, e q ad rectangulum sub n k, p r: ergo rectangulo sub l k, e q æquale est rectangulum sub n κ, p r.

Ex a ad planum a d c excitetur perpendicularis a z, & in situ perpendiculari semper permanens intelligatur moueri per ambitũ spatij quadratarij, scilicet per lineas a l d c a donec ad idem punctũ a reuoluatur. Rectæ e q abscindatur ex a z recta a y æqualis, & per y agatur planum parallelũ plano a d c, sectio istius plani cum superficie illâ cylindraceâ modo descriptâ erit parallela & similis similiterque posita figuræ quadratariç a l d c; id enim eodem pacto ostenditur quo in cylindro sectiones plani paralleli basi ostenduntur similes ipsi basi. Seren. de sect. cyl. propos. 5.

Quoniam ergo istud solidum cylindraceum, & cunearum ita se habent vt quocunque plano n m p secentur sectiones eorum sint çquales (sectio enim cylindracei est æqualis rectangulo sub a y vel e q & sub l k contento; sectio autem cuneati est parallelogrammum s n k t, quod esse æquale rectangulo sub a y vel e q & sub l k contento ostendimus) erunt ipsa solida æqualia per vndecimam huius; sed per eandem cylindraceum cuius altitudo a y, & basis a l d c est æquale parallelepipedo cuius altitudo eadem a y, basis autem sit quadratum æquale basi a l d c: ergo solidum cuneatum est æquale parallelepipedo cuius basis sit æqualis quadratario spatio, & altitudo sit æqualis altitudini notæ; quod erat demonstrandum.

11. huius.

COROLLARIVM I.

Quòd si planum a b h non sit rectum ad planum a d c, pauculis mutatis ostendi poterit solidum cuneatum esse æquale parallelepipedo cuius basis æqualis sit spatio quadratario, & altitudo, sit æqualis altitudini ex puncto e ad planum a d c demissæ, quæ *nota* perinde dicatur.

COROLLARIVM II.

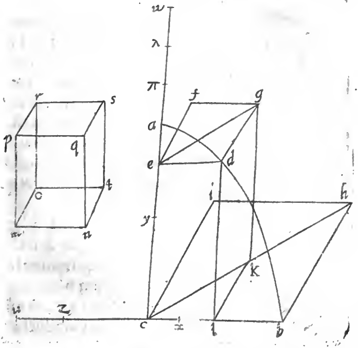
Si brachium quadratarij spatij non ponatur æquale rectæ b d, sed cuiuis b m ex ipsâ productâ abscissæ, siue ipsa b m sit maior, siue minor, tunc altitudo nota erit aut m p recta intercepta inter rectas b e, b d productas, & æquidistans rectæ e d, aut perpendicularis ex puncto p in rectam b d demissa; demonstrationis enim vis est eadem prorsus in isto casu vt patebit rem perspicienti.

COROLLARIVM III.

Si datum sit parallelepipedum æquale cuneo proposito, & ex trianguli noti latere auferatur recta b m quæ sit ad altitudinem datam parallelepipedi vt est datum latus b d ad datam perpendicularem quæ ex e in lineam b d cadit, apertum quoque est quadratarium spatium respondens brachio æquanti rectam b m esse æquale basi parallelepipedi dati.

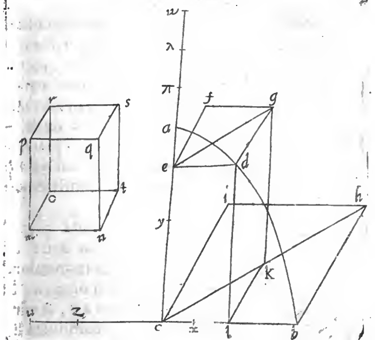
PROPOSITIO XXII.

Super quacunque rectâ c b constructâ qualibet planâ figura c a d b, intelligatur planum c b h erectum ad planum c a b, illudque secans secundum rectam c b; in eo verò concipiatur quoduis parallelogrammum c b h i, cuius vnum latus sit recta c b, & ita super quacunque aliâ e d ipsi c b æquidistante, constructum intelligatur parallelogrammum e d g f simile, similiter positum, & parallelum parallelogrammo c b h i. Intelligatur denique solidum super basi c a d b cuius omnes sectiones cum plano sectioni c b h i ęquidistante sint similes parallelogrammo c b h i, similiterque illi positæ. Ostendendum est iunctâ c h rectâ, planum a c h transire per diametros eiusmodi parallelogrammorum, & diuidere solidum in duas portiones, æquales quarum vna est cuneata habens latus figuram c a d b, & triangulum notum c h b.



Per d agatur d l parallela rectæ e c; & per rectas g d, d l agatur planum cuius cum triangulo c h b communis sectio sit recta l κ. Quoniam in plana parallela e d g, c b h incidit planum g d l, sectiones d g, l κ erũt parallelæ. Rursus quoniam rectæ e d, d g tãgentes se in d sunt parallelæ rectis c l, l *k* tãgentibus se in l, anguli e d g, c l *k* erunt æquales. Cùm ergo triangula e d g, c l k habeant angulos ad e, d, c, l æquales, erũt similia, atque vt e d ad d g, ita c l ad l *k*; cùm ergo d e, c l sint æquales, erunt d g, l κ æquales; quoniam ergo rectæ d g, l k 16. vndec. Euc. 10. vndec. Euc.

cunque aliâ e d ipsi c b æqu
stante, constructum intellig
parallelogrammum e d g f sim
similiter positum, & paralle
patallelogrammo c b h i. Int
gatur denique solidum super
c a d b cuius omnes sectiones e
plano sectioni c b h i ęquidista
sint similes parallelogram
c b h i, similiterque illi posi
Ostendendum est iunctâ c h
ctâ, planum a c h transire
diametros eiusmodi paralle
grammorum, & diuidere solid
in duas portiones, æquales q
rum vna est cuneata habens l
figuram c a d b, & triangulum
tum c h b.



Per d agatur d l parallela rectæ e c; & per rectas g d, d l agatur planum cuius cum triangulo c h b communis sectio sit recta l κ. Quoniam in plana parallela e d g, c b h incidit planum g d l, sectiones d g, l κ erũt parallelæ. Rursus quoniam rectæ e d, d g tãgentes se in d sunt parallelæ rectis c l, l *k* tãgentibus se in l, anguli e d g, c l *k* erunt æquales. Cùm ergo triangula e d g, c l *k* habeant angulos ad e, d, c, l æquales, erũt similia, atque vt e d ad d g, ita c l ad l *k*; cùm ergo d e, c l sint æquales, erunt d g, l κ æquales; quoniam ergo rectæ d g, l k

16. vndec. Euc.

10. vndec. Euc.

sunt parallelæ & æquales, erit d l k g pa
lelogrammum, lateraque g k, d l erunt
rallela; sed latera e c, d l parallelogram
33 primi Euc. e c l d sunt etiam parallela, ergo rectę
9. vndec. Euc. g k sunt parallelæ eidem d l; ergo sunt
ter se parallelæ; ergo ex definitione pa
lelarum sunt in eodem plano; planum er
per c e rectam, & per rectam c k duct
transit etiam per rectam e g: ergo planu
a c h transit per diametros eiusmodi pa
lelogrammorum similium similiterq
positorum.

Quod autem portio contenta plan
a c h, a c b sit cuneata, eiusque acies
recta a c, latus figura c a d b, & triangulu
notum c h b; apertum est cùm plana a c
a c h secent se secundũ rectam a c, & cùi
per ambitum figuræ c a b circumducta l
nea b h eundem semper situm parallelur
retinens, descripsisse ponatur superficiem
quam secat planum a c h, ergo figura con
tenta figurâ a c b, plano a c h, & superfici
prædictâ est cuneata quam descripsimus i
præcedenti propositione, eiusque acies e
recta a c, latus figura c a b, & triangulun
notum c b h.

Denique alteram portionem eiusmod
solidi esse æqualem portioni cuneatæ it
ostenditur. Quoniam duæ istæ portione
34. primi Euc. ita secantur per plana, quæ sint parallel
plano c b h, vt ipsæ sectiones sint æquale
(sunt enim singulæ dimidium parallelo-
grammi

grammi bifariam diuisi à diametro per quã planum a c b incedit) ergo ipsæ portiones sunt æquales ; quod erat demonstrandum. 11. huius.

Propositio XXIII.

Iisdem manentibus sint c b , b h æquales, sit item a c recta, & perpendicularis ad planum c b h, qua manente circumuoluatur figura a c b donec redeat eò vnde incipit moueri ; descriptum erit solidum cuius basis circulus ex semidiametro c b ; recta a c vocetur axis eiusmodi solidi quod periphericum dicatur. Ponatur recta c b esse maxima parallelarum in figurâ a c b ductarum & esse libra sustinens figuram c b a. Sit quadratum m n t o æquale octuplo spatii quod libra ex c suspẽsâ brachio c u ipsi c b æquali, pendens ex u æquiponderat figuræ c b a vt iacet manenti; & ipsum m n t o sit basis parallelepipedi cuius alti do sit æqualis ipsi c b. Ostende dum est vt quadratum rectæ u ad quadratum m n t o ita esse c lindrum contentum intra cubu cuius latus sit quadratum ex rec u b genitum ad duplum periph rici descripti; vel ita esse dim dium cylindri eiusmodi ad de criptum periphericum.

Quoniam ex centro c manente, linea c circũuoluta ponitur in plano ad quod rec a c est perpẽdicularis, illud autem est plan c b h i, descriptus circulus transibit per b i, & similiter descriptus circulus à lineâ e puncto e manente transibit per d. & f, ea demque est ratio de quacunque aliâ paral lelâ rectæ c b, describente circulum e centro posito in axe a c; quoniam ver angulus i c b est rectus, arcus i b, d f & ali omnes conclusi planis a c b, a c i erun quadrantes circuli. Præterea quoniam qua drantes eiusmodi continentur intra quadra ta c h, e g, & quadrata c h, e g, sunt quar ta pars quadratorum continentium circu los quorum semidiametri sunt c b, e d : s intelligatur solidum cuius sectiones sin eiusmodi quadrata, solidum istud à quo pe ripphericum continebitur, erit ad solidum periphericum contentum, vt quadratum ad circulum ex diametro quæ sit lateri quadrati æqualis: eiusmodi autem solidũ continens constabit octo solidis quorum singula erunt ęqualia cuneatæ figuræ cuius acies a c, triangulum notum c h b, latus a d b c. Nam ex præcedenti solidum, cuius basis sit quadratum c b h i, æquale est duobus solidis quorum vnumquodque ęquale est cuneatæ figuræ prædictæ: ergo solidũ cuius basis sit quadratum diuisum in quatuor quadrantes quorum vnus sit quadratũ c b h i, æquale erit octo eiusmodi cuneatis figuris. 11. huius.

Quoniam ergo parallelepipedi m s basis m o t n est ex constructione æqualis octuplo quadratarij spatij cuneatæ figurę prædictę, & altitudo est æqualis ipsi c b, erit prędictum parallelepipedum ęquale octo cuneatis figuris eiusmodi ex demonstratis; ergo erit ęquale solido continenti periphericum.

Rursus quoniam cubus ex rectâ u b genitus est ad cylindrum ipso cubo contentũ, vt quadratum ad circulum inscriptum, & ita etiam est solidum continens ad contentum periphericum; cùm continens sit æquale parallelepipedo m s; vt cubus ex recta u b ad cylindrum contentum, ita erit solidum a h ad periphericum; & alternando vt cubus ex rectâ u b ad solidum a h,

ita erit cylindrus cubo contentus ad pe-
phericum cuius basis sit circulus æqua
21. huius. basi cylindri.

Quoniam ergo parallelepipedum m
habet altitudinem æqualem rectæ c b, p
rallelepipedum ipsius duplum retentâ e
dem basi m o t n, habebit altitudinem a
qualem rectæ u b; ergo habebit altitudir
parem altitudini cubi ex rectâ u b; erg
cùm duplum parallelepipedi m f & cubu
ex rectâ u b habeant æquales altitudines
32. vndec. Euc. erunt in ratione basium, videlicet quadra
torum ex rectis u b, m n: ergo cylindru
cubo genito ex recta u b contentus est ad
duplum peripherici cuius axis a c, basis ve
rò circulus ex semidiametro c b, vt est qua-
dratum ex u b ad quadratum m n; siue in
duplicatâ vel (vt alij loquuntur eodem
sensu) in duplâ ratione rectarum u b, m n,
quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Quamuis c b quæ ponitur esse parallelarum maxima non terminaret figuram, sed esset intra ipsam, eadem esset vis demonstrationis, dummodo quadratum m n t o ponatur octuplum eius spatij quod librâ u b suspensâ ex c & sustinente totam figuram quam secare ponitur, æquiponderat toti figuræ, & non tantùm vni eius parti.

COROLLARIVM I.

Eadem esset demonstratio si periphericum descriptum esset circa axem a c, quamuis c b recta non esset perpendicularis ad axem a c, dummodo recta c b & omnes ei parallelæ intra figuram c a d b ductæ ita intelligantur moueri dum periphericum describitur, vt in motu vni eidem rectæ immotæ maneant parallelæ, iuxta dicta in Scholio propositionis libri huius duodecimæ.

COROLLARIVM II.

Præsens theorema planam viam facit ad plurima problemata abstrusa pariter & vtilia. Cernere istud licet si linea a d b sit sectio conica, & a c diamerer; si semi vel triangulum per a c axem coni sit figura a d b c. Primò quidem demonstratur proportio continentis cylindri ad contentum conicum, parabolicum, hyperbolicum & sphæricum. Quoniam enim si figura a c b d sit semi-triangulum per axem coni, librâ u b ex c suspensâ spatium quod ex u pendens æquiponderat triangulo a c d b vt iacet manenti est tertia pars trianguli a c b, 6. quadrat. parab. octuplum illius æquiponderantis, erit octo tertiæ partes trianguli a c b; vt ergo octo trientes trianguli a c b ad quadratum rectæ

c b, ita est duplum coni ad cubum ex re&
u b; quod omnino conforme est demo
10. duo dec. Euc. stratis ab Euclide. Nam si a c b sit triangu
rectangulum cuius duo latera a c , c b cor
tinentia angulum rectum sint æqualia ; æ
quiponderans erit vna sexta pars quadra
quod potest c b, cum sit vna tertia triangu
li a c b quod est dimidium eiusmodi qua
drati ; octuplum æquiponderantis contine
bit octo sextas quadrati c b, hoc est quatuo
tertias; sed quadratum u b, cùm sit quadruplum quadrati c b, continet duodecim tertias ipsius quadrati c b; ergo duplum istius coni se habet ad cylindrum cubo ex u b contentum, id est cuius basis sit ex diametro u b, & altitudo sit ipsi u b æqualis, vt quatuor tertiæ quadrati c b, ad duodecim tertias eiusdem quadrati, hoc est vt quatuor ad duodecim; vel vt vnum ad tria; ergo iste conus est ad cylindrum, cuius basis sit circulus ex diametro u b, altitudo a c ipsius u b semissis, vt vnum ad tria, quod consonat Euclideæ demonstrationi. Quamuis triangulum a c b non haberet latera circa angulum rectum æqualia ostenderetur tamen par cōsonantia cum Euclideâ demonstratione; sed longum magis id foret quàm necessarium.

Rursus figura a c b d sit quadrans circuli. Quoniam illi vt iacet manenti æquiponderat vna tertia quadrati ex e b geniti; octuplum æquipenderantis erunt octo trientes eiusdem quadrati c b; sed quadratum ex u b continet duodecim trientes eiusdem quadrati; ergo cylindrus cubo ex u b coutentus se habet ad duplum sphærici cuius basis sit circulus maximus ex diametro u b genitus, vt octo trientes ad duodecim trientes, siue vt octo ad duodecim, aut vt duo ad tria. Ergo eum cylindrus cuius eadem basis ex diametro u b genita, & altitudo a c vel c b semissis altitudinis cylindri cubo inclusi, sit semissis cylindri cubo inclusi; vt est cylindrus cubo inclusus ad duplum sphærici, ita erit semissis eiusdem cylindri; hoc est cylindrus cuius altitudo c a, ad sphæricum cuius semidiameter c a: ergo eiusmodi cylindrus cuius altitudo c a est ad sphæricum eadem basi & altitudine præditum vt tria ad duo; quod ad amussim congruit ijs quæ demonstrauit Archimedes, sicuti diximus in hoc libro.

19 tertii huius.

18. huius.

Præterea figura a c b d sit portio parabolæ cuius axis a c, æqualis ipsi ordinatim ad ipsam applicatæ c b, vertex a. Quoniam illius centrum grauitatis est in parallelâ per x ductâ (si nimirum vt octo ad tria, ita fiat c b recta ad c x) & quoniam a c b parabolæ portio est duæ tertiæ rectanguli a c b; vt octo ad tria, ita erit portio a c b, hoc est duo trientes siue octo duodecimæ rectanguli a c b, quod est quadratum in præsenti hypothesi, ad spatium ex u æquiponderans ipsi portioni librâ u b ex c suspenâs, hoc est

1. huius in coroll quarto.

ad tres duodecimas siue ad quadrantei quadrati eiusdem c b. Octuplum ergo eiu modi æquiponderantis constat octo qua drantibus quadrati c b, siue duobus qua dratis c b; sed quadratum ex u b consta quatuor quadratis ex c b, ergo vt duo qua drata c b, ad quatuor eiusmodi quadrata ita est duplum parabolici ad cylindrui contentum cubo genito ex u b: sed cylin drus habens basim eandem cum contentc & altitudinem a c est semissis (vt mod ostendimus) cylindri contenti cubo; erg cylindrus cuius basis sit circulus ex u genitus, altitudo c a, est ad parabolicui eadem altitudine & basi præditum vt qua tuor ad duo; hoc est in ratione duplâ quo

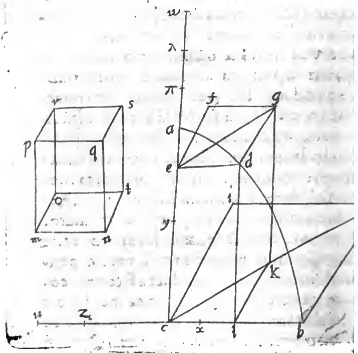
13. huius. aptissimè quadrat ad demonstrata in hc libro, & aliàs ab Archimede.

Eadem concordia posset ostendi si figui a c d b poneretur esse hyperbola cuius dia meter a c, ordinatim ad ipsam applica c b, vertex a; si nimirum ex method prioris libri inueniretur spatium rectil neum, quod libra u b ex c suspensâ æqu ponderet hyperbolæ a c d b vt iacet m

19 terii huius. nenti; sed istud fusiùs persequi non e operæ pretium.

COROLLARIVM III.

Prætermittere tamen nolim ex i Theoremate posse determinari proporti nem quam habent peripherica quorum a d b sit sectio conicâ dato spatio ex u æquiponderante; quamuis recta a c non sit diameter vel axis, & quamuis c b non sit ordinatim applicata ad ipsam diametrum; sed rectæ a c, b c vtcunque ductæ conueniant in c. Quod sane aliâ viâ est difficillimum, nec adhuc, quantum recordor, ab vllo inuentum. Neque verò existimandum est traditam fuisse proportionem istorum solidorum omnium in libris quos Archimedes scripsit de Sphærâ & cylindro, de conoidibus & sphæroidibus; ibi enim non assignatur proportio nisi eorum periphericorum quæ circumductu sectionis conicæ ita describuntur, vt linea manens a c sit diameter, & linea c b sit ordinatim ad diametrum eandem a c applicata. Quòd si a c non sit diameter (& quidem transuersa in hyperbola) vel si sit diameter, c b tamen non sit ordinatim ad ipsam applicata (prout contingit in casibus innumeris) Archimedei isti libri non tradunt eiusmodi proportionem, quæ longè remotissima est à principijs & inuentis ipsius. Ex quibus liquidò constat quantæ viilitatis sit libra commodè tractata, quantumque iuuet inuenisse spatia æquiponderantia istis sectionibus conicis, cùm solida eiusmodi plurima occurrant vel in vasis, vel in concamerationibus, alijsque partibus vel ornamentis ædificiorum.



Atque vt hactenus demonstratis vtamu
tantùm, cùm ostenderimus spatium quod
si diameter transuersa hyperbolę ponatur
esse libra suspensa ex centro æquiponderat
portioni datæ sectionis istiusmodi; inde
determinare licebit proportionem cylindri,
cum solido peripherico cuius recta
manens, dum motu hyperbolæ describitur,
sit diameter recta, siue directa transuersæ
coniugata; linea autem describens
circulum sit ordinatim applicata ad eiusmodi
diametrum, vel quæuis alia non ordinatim
applicata ad ipsam. Eiusmodi
porro solidum habet figuram salini vulga-

ris xystroidem, idest eius caua foris spectant, conuexa internè vergunt: vnde non malè vocetur hyperbolicum xystroides. Si igitur (vt istud in exemplo determinem) π sit centrum hyperbolæ c a b, sintque $\alpha\pi$, $\pi\lambda$, $\lambda\omega$ æquales; ipsi autem $\alpha\chi$ sit æqualis recta a c, cylindrus cuius basis sit circulus ex semidiametro π c descriptus, & altitudo eadem quæ perpendicularis ex b in a c rectam demissa, inuenietur ad parabolicum xystroides motu hyperbolæ a d b præscripta iam ratione descriptum, esse vt viginti septem ad nouemdecim; ego certè rem ita conclusi epilogismo bis aut ter repetito, quamuis non diffiteor potuisse me in tam lubrica computandi via incautum nec aduertentem labi.

Præterea quoniam ibidem ostendimus spatium æquiponderans figuræ a c b d quando a c est diameter circuli vel ellipseos, quamuis recta c b non sit ordinatim applicata ad diametrum a c, determinari etiam poterit proportio eiusmodi solidorum periphericorum, descriptorum linea a c manente, & recta c b describente circulum.

Denique quoniam si a d b sit parabola quomodocumque se habeant rectæ a c, c b, siue punctum c sit ad caua lineæ a d b siue ad conuexa, inuenitur ex quadratura paraboles Archimedea rectilineum quod ex u pendens ipsi figuræ a d b c vt iacet manenti æquiponderat, assignari poterit proportio innumerorum eiusmodi periphericorum ex parabolæ circumuolutione natorum, ad quam si clauso isto tramite tentes ire, mirum est si aliud inueneris, præter dumeta & sentes densissimas quæ te cœco inextricabilique errore impediant.

Lubet exempli causa determinare proportionem peripherici quod alterum parabolicum rectè appelles. Recta ac immota manens in discriptione istius parabolici sit ordinatim applicata ad diametrum b c ipsi a c æqualem parabolæ a d b, cuius vertex sit b. Vt quinque ad duo ita fiat recta b c ad c x; in recta per x ducta parallelcos rectæ c a erit centrum grauitatis figuræ planæ c a d b. Quoniam libra u b ex c suspensa & sustinente figuram c a b, spatium quod ex u pendens æquiponderat ipsi figuræ vt iacet manenti, se habet ad spatium figuræ vt recta c x ad c u, hoc est vt duo ad quinque; plana verò figura a c b d est duæ tertiæ rectanguli a c b (vt antea diximus, & constat ex primæ huius libri corollario quarto) & vt quinque ad duo ita sunt duo trientes siue decem decimæ quintæ ad quatuor decimas; æquiponderans ergo erit quatuor decimæ quintæ; & octuplum illius triginta duæ decimæ quintæ quadrati c b seu rectanguli a c b: sed quadratum ex u b, cùm sit quadruplum quadrati c b continet sexaginta decimas quintas eiusdem quadrati

8. secũdi æquip.

6. quadrat. parab.

c b: ergo vt triginta duæ decimæ quintæ quadrati b c ad sexaginta decimas quintas eiusdem quadrati, ita est duplum parabolici alterius ad cylindrum contentum cubo: ergo cum cylindri eiusmodi semissis sit cylindrus cuius basis est circulus ex diametro u b & altitudo a c seu c b; erit parabolicum alterum habens eandem basim & altitudinem ad cylindrum ipsum vt sexdecim ad triginta. Quoniam verò vt ostendimus, in corollario præcedenti parabolicum vulgare, quod conoides rectangulum nominat Archimedes, eadem basi eademque altitudine præditum se habet ad eundem cylindrum vt vnum ad duo; hoc est vt quindecim ad triginta; erit vt quindecim ad triginta; ita parabolicum vulgare ad cylindrum, & vt triginta ad sexdecim ita cylindrus ad parabolicum alterum; ergo ex æquo vt quindecim ad sexdecim, ita parabolicum primum siue vulgare ad parabolicum alterum, quorum singula constant eadem basi eademque altitudine. Quod fortasse mirum videbitur alicui, eandem nimirum figuram planam circumuolui aliquando posse circa diuersas rectas quibus terminatur, ita vt modo maius modo minus spatium figura circumuolutione eiusmodi descripta complectatur.

Quòd si (vt hoc etiam quod propè excidebat non taceam) figura a c d esset tota rectilinea, spatium æquiponderans facilè obtinebitur, quia quadratrix vel tota erit parabolica, si nimirum in ambitu a d b nullum sit latus rectæ c b parallelum vt ex præcedenti libro constat: tota autem quadratrix erit recta si c a b sit figura parallelogramma, & congruet ipsi diametro: erit denique mixta ex parabolicâ & rectâ, prout ambitus a d b fuerit mixtus ex parallelis & ex non parallelis rectæ c a.

COROLLARIVM IV.

Vicissim spatium æquiponderans figuræ c a b librâ u b suspensâ ex c, & sustinente ipsam figuram c a b vt iacet, obtinebitur dato parallelepipedo quod æquale sit solido continenti periphericum cuius axis a c descriptum circumuolutione notâ figuræ planæ c a d b. Sit enim basis parallelepipedi dati ea quæ fit ex quadrato z b, & altitudo eius sit recta c y. Vt c b altitudo quadrati c b h i (quæ eadem est cum altitudine parallelepipedi m s cuius basis m t quæritur) ad altitudinem c y, ita fiat quadratum ex z b latere basis, ad quadratum m t basim parallelepipedi quæsiti. Dico quadrati m t octauam partem esse spatium quadratarium quod figuræ c a b ex u pendens librâ ex c suspensa æquiponderat. Quoniam enim parallelepipeda quorum bases sunt quadrata ex z b & ex m n, & altitudines sunt c y, m p seu c b talia sunt vt eorum bases & altitudines reciprocentur, ipsa erunt æqualia: quoniam ergo parallelepipedum m s est æquale solido continenti periphericum prædictum, & eius altitudo m p est æqualis lateri quadrati c b h i, octaua pars parallelepipedi m s erit æqualis cuneatę figuræ cuius acies c a, latus c a b, triangulum notum c h b. Ergo per vigesimam primam huius octaua pars quadrati m t est spatium quod ex u pendens librâ u b suspensa ex c ęquiponderat figuræ c a b vt iacet manenti.

Istud corollarium mirabiles habet vsus. Si enim figura plana c a b sit triangulum, quadratarium spatium continebitur parabolâ, ac proinde hinc quadratur parabola. Sit enim linea a b recta: quadratrix ergo lineaerit parabola, & quoniam u c, c b sunt æquales, recta a b tanget parabolam quadratricem transeuntem per c & b. Quoniam ergo pyramis cuius basis sit quadratum ex u b est tertia pars parallelepipedi cuius eadem basis & altitudo, si c y ponatur tertia pars rectæ c a, parallelepipedum cuius basis sit ex latere u b, altitudo sit c y erit æquale pyramidi dictæ; ergo vt c b recta ad c y, ita est quadratum ex u b ad quadratum ex m n: ergo sicut c b recta est tripla rectæ c y (ponimus enim rectas c b, c a esse æquales) ita quadratum ex u b est triplum quadrati ex m n: ergo octaua pars quadrati ex m n, quæ est æqualis quadratario spatio, est vna vigesima quarta pars

12. tertij huius.

quadrati ex u b; & vna sexta pars quadrati ex c b, quod est quarta pars quadrati ex u b: sed vna sexta pars quadrati ex c b, est vna tertia pars trianguli a c b quod est media pars quadrati ex c b; ergo quadratarium spatium quod ex u pendens librâ ex c suspensâ ęquiponderat triangulo a c b vt iacet manenti est tertia ipsius trianguli pars; quod in libello de quadraturâ parabolę demonstrandum suscepit Archimedes.

Si autem c a b sit quadrans circuli cuius centrum c, ostendetur quadratarium spatiũ quadrantis istiusmodi pendens ex u libra ex c suspensâ esse ęquale vni trienti quadrati ex c b. Sit enim c y ad c a vel c b vt duo ad tria; parallelepipedum ergo cuius basis sit quadratum ex u b altitudo c y, erit æquale solido cõtinenti periphericum ex circumuolutione quadrantis a c b descriptum, vt constat ex corollario quarto decimę octauæ huius libri; Ergo vt c b recta ad c y, ita est quadratum ex u b ad quadratum ex m n; ergo sicut c b est ad c y vt tria ad duo, ita quadratum ex u b est ad quadratum ex m n vt tria ad duo: ergo octaua pars quadrati ex m n, quæ est ęqualis quadratario spatio, est vna duodecima quadrati ex u b, & vna tertia pars quadrati ex c b, quod est quarta quadrati ex u b. Hoc ad vnguem quadrat iis quę demonstrauimus in tertio libro.

Si autem c a b sit parabola cuius diameter

ter a c, ordinatim applicata c b, eadem occurret quadratarij ſpatij conuenientia cum eo quod ex decimaoctaua tertij libri inuentum fuerit: quadratarium autem iſtud ſpatium inuenietur vi præſentis methodi ſi adhibeatur corollarium vigeſimæ huius. Exemplo vno iſtud declaremus. Sit vt in tertio corollario poſuimus π centrum hyperbolæ, ſintque a π, π λ, λ ω æquales; ipſi autem a λ ſit æqualis recta a c. Erit ergo recta ω c ad rectam c λ vt quinque ad quatuor; ac proinde ex memorato corollario ſolidum quo continetur periphericũ iſtud, erit ad pyramidem eadem baſi & altitudine præditam vt quinque ad quatuor; ſed pyramis iſta eſt ad parallelepipedum eiuſdem baſis & altitudinis vt quatuor ad duodecim; ergo ex æquo vt quinque ad duodecim, ita ſolidum continens, ad parallelepipedum eandem baſim, eandemque altitudinem obtinens. Sit c b ad c a perpendicularis, & ipſi a c æqualis (id enim fieri poteſt ſi recta per l & b ducta figuram determinet) Si ergo recta c b ſeu c a altitudo ſe habeat ad c y altitudinem vt duodecim ad quinque, parallelepipedum ſub altitudine c y & ſub baſi ex u b erit æquale ſolido continenti periphericum; ergo vt c b recta ad c y, ita eſt quadratum ex u b ad quadratum ex m n; hoc eſt vt duodecim ad quinque; ergo octaua pars quadrati ex m n quæ eſt æqualis qua-

20 huius in coroll.

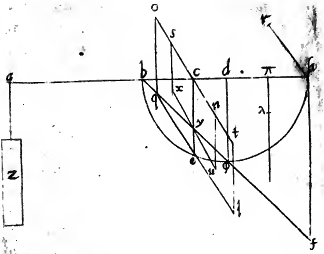
21. Primi Conic.

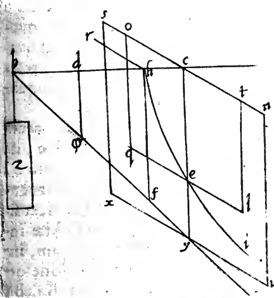
dratario spatio, est quinque vigesimæ quartæ quadrati ex c b: vt facile intelligunt arithmetices periti. Nam c b quadratum est quadrans quadrati u b, ac proinde eius nonagesimas sextas complectitur quatuor supra viginti; quadratum verò m t continet quadraginta, & quadratarium quinque; ergo cuiusmodi quadratum c b complectitur vicenas quaternas, eiusmodi quinas continet quadratarium. In posterum semisegmentum istud hyperbolæ appellabo *notum*. Simili methodo inuenietur ex xystroidis consideratione quadratarium esse æquale duobus trientibus quadrati λ a libra suspensa ex centro π, directáque diametro versa in perpendiculum, & brachio ipsam diametrum λ a æquante; si autem brachium ponatur semidiametro a π æquale, duplicandum erit eiusmodi quadratarium ex octaua secundi libri; & istud iterum duplicandum vt habeatur æquiponderans siue quadratarium totius segmenti ex duplici semisegmento conflati.

Propositio XXIV.

Sit Sectio centrica h e, cuius centrum d; diameter b h terminata punctis b & h; linea b f figuram determinet, sitque angulus h b f semirectus; recta verò f h tangat sectionem in h; illi ergo æquidistantes erunt ordinatim ad diametrum b h applicatæ. Ducatur vtcunque ordinatim applicata c e, quæ determinanti b f occurrat in y; & ductis per rectas b h, f h planis rectis ad planum h e i secantibus se secundum rectam h r perpendicularem ad planum h e, super rectâ c e intelligatur in plano e c o parallelo ad planum f h r, constructum quadratum o l ita vt latus o n bifariam secetur in puncto c, & latus q l in puncto e. Similiter super rectâ c y intelligatur in eodem plano e c o constructum quadratum f u, ita vt latera s n, x u bifariam secentur in punctis c, y. Denique intelligatur quadratum o l esse communis sectio solidi cuiusdam & plani, e c s; quadratum verò f u esse sectio alterius cu- 32. Primi Conic.

iusdam solidi & eiusdem plani e c s. Ostendendũ est si b e h sit oxygonia sectio, vt in primo schemate in quo rectæ h b, b a sunt æquales, & eiusmodi solida sustententur vt iacent à librâ a c, cuius centrum sit b, & ex a pendeat solidum z æquiponderans ambobus simul solidis; solidũ z esse ęquale solido, cuius sectio est quadratum s u. Item si h e i sit hyperbola, siue vt loquitur Archimedes amblygonia sectio, & eiusmodi solidorum differentia sustineatur vt iacet à librâ a c, cuius centrum sit h, solidum z pendens ex b & æquiponderans prædictæ differentiæ vt iacet manenti esse æquale solido cuius sectio est quadratum o l.


o
s
r
a
b
c
d
π
x
q
n
λ
y
t
e
u
φ
l
f
z


s
o
r
b
d
h
c
t
n
φ
q
e
f
x
l
y
i
u
z

Quoniam quadrata, sunt figuræ similes, tres verò rectę y c, e c, c h sunt proportionales, erit vt prima y c, ad tertiam c h, ita quadratum s u ad quadratum o l: sed recta y c est æqualis ipsi b c (eò quòd b f cui y c est parallela sit æqualis ipsi b h) ergo vt recta b c ad rectam c h, ita est quadratum s u ad quadratum o l; & inuertendo vt recta c h ad b c, ita quadratum o l ad s u: ergo componendo si sectio b i h sit oxygonia, vt in primâ figurâ, vt b h vel a b recta ad b c, ita sunt duo simul quadrata o l, s u, ad quadratum s u. Quòd si b i h sit amblygonia vt in secundâ figurâ, quoniam vt recta b c ad rectam c h, ita est quadratum s u ad o l; ergo diuidendo vt recta b h ad rectam h c, ita est differentia quadratorum s u, o l, ad quadratum o l.

21 primi conic.
20 sexti in coroll.
4. sexti in coroll.

Quoniam ergo in figurâ oxygoniarum vt brachium a b ad longitudinum b c, ita est quadratum s u vnà cum quadrato o l ad quadratum s u, & ita euenit in quacunque aliâ ordinatim applicatâ, vt scilicet sicut brachium a b, ad portionem libræ inter centrum b & ordinatim applicatam, interiectâ, ita sit quadratum ex portione ordinatim applicatæ interceptâ rectis b d, b f vnà cum quadrato ex portione eiusdem ordinatim applicatæ interceptâ diametro b d, & oxygonia h e b, ad quadratum ex portione interceptâ rectis b d, b f, ergo ex propositione septimâ secundi libri adiuncto corollario ſecundo propoſitionis ſextæ libri eiuſdem ſolidum z eſt æquale ſolido cuius ſectio eſt quadratum ſ u.

Similiter in figurâ amblygoniarum quoniam vt brachium b h ad longitudinem h c, ita eſt differentia quadratorum ſ u, o l ad quadratum o l, & idem contingit in quacunque aliâ ordinatim applicatâ, vt ſcilicet ſicut brachium b h ad portionem libræ inter centrum h & ordinatim applicatam interpoſitæ, ita ſit differentia quadratorum ex portionibus ordinatim applicatarum quas diameter b d intercipit vnà cum rectâ b f, & cum hyperbolâ h e i; ergo ex ſeptimâ citatâ, ſolidum z eſt æquale ſolido cuius ſectio eſt quadratum o l , quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Si ſuper rectis c e, c y conſtruerentur quæuis aliæ figuræ dummodo ſimiles forent, & ſimiliter ſecarentur ab iiſdem rectis c e, c y vis demonſtrationis eadem foret, vt apertum eſt.

COROLLARIVM II.

Manifeſtum quoque eſt præſentem propoſitionem potuiſſe, ſi opus fuiſſet, extendi ad ipſam parabolam. Si enim in figurâ primâ ponas rectam a b eſſe æqualem lateri recto parabolæ cuius vertex b, diameter b c, ordinatim ad ipsam applicata c e; tres rectæ a b, c e, c y siue c b erunt proportionales, ergo si super c e, c y construantur figuræ similes, vt recta a b prima, ad b c tertiam, ita erit figura super c e constructa ad figuram super c y constructam, vt ex dictis planum est.

COROLLARIVM III.

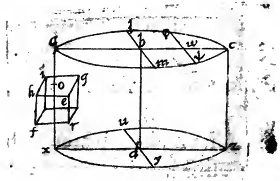
Hinc etiam patet mira consonantia principij quo nostrum istud theorema nititur, cum hactenus demonstratis. Quoniam enim in primâ figurâ centrum grauitatis solidi, cuius sectio est quadratum o l (posset etiam poni circulus, vel semicirculus o l) iacet in plano per d acto, & recto ad planum h b f; eò quod solidum cuius b e h est sectio sit quadrans sphæræ si l o sit quadrans circuli, vel quadrans homœosphærici si l o sit quadratum; & quoniam solidum cuius basis est quadratū, vel quadrans circuli s u, est quadrans coni, vel homœoconici; si b h diuidatur in π ita vt portio b π sit tripla portionis π h, in plano per ordinatim applicatam $\pi\lambda$ recto ad planum h b f, erit centrum grauitatis eiusmodi solidi, vt in duodecimâ huius demonstrauimus, & ante nos demonstrarat aliâ viâ Commandinus. Quoniam ergo solidum z ex a pendens æquiponderat duobus solidis vt iacent manentibus, ipsum solidum z diuidi poterit in duas portiones quarum vna ęquiponderabit solido cuius sectio b e h, altera solido cuius sectio est triangulum b f h: ergo cum spatium quod ex a pendens ęquiponderat solido cuius sectio b e h se habeat ad ipsum vt recta b d ad b a, hoc est vt vnum ad duo, est enim b a æqualis ipsi b h ac proinde dupla semidiametri b c, erit illa portio semissis solidi cuius sectio b e h. Alia verò portio quæ æquiponderat solido cuius sectio b f h, erit ad ipsum solidum vt b π ad b a, hoc est vt tria ad quatuor. Rursus quoniam conus cuius basis est circulus ex diametro f h, vel quadrans coni cuius basis est circulus ex semidiametro h f productus, ad conum vel quadrantem coni cuius basim metitur eodem modo recta d φ per d parallela rectæ h f, habet rationem compositam ex lateribus & basibus; cùm basis quam metitur h f, sit quadrupla baseos cuius dimetiens est d φ, & cùm altitudo b h sit dupla altitudinis b d, tres isti numeri octonarius, binarius & vnitas repræsentabunt eiusmodi rationes, nam ratio octonarii ad binarium est quadrupla, ratio autem binarij ad vnitatẽ est dupla: ergo conicum solidum cuius basim metitur h f positâ altitudine b h, est octuplum solidi conici cuius basim metitur d φ positâ altitudine d b. Rursus quoniam recta d φ est æqualis rectæ b c, conus quem metitur recta d φ habens altitudinem b c, est ad sphæricum eadem basi eademque altitudine pæditum, vt duo ad quatuor vt diximus in corollario primo propositionis decimæ octauæ huius libri, quod aliunde certum est ex demonstratis ab Archimede; cùm ergo solidum conicum cuius sectio est b h f sit octuplum, vt ostensum est, coni, quem modo ostēdimus esse semissem sphærici cuius basis habeat dimetientem d φ, eiusmodi solidum erit quadruplum sphærici prædicti. Cùm ergo portio æquiponderans sphærico cuius sectio b e h sit æquale, vt ostensum est, sphærico cuius basis habeat dimetientem rectam d φ (est enim semissis totius) & cùm altera portio habeat se ad solidum cuius sectio b f h vt tria ad quatuor, sicut ostendimus, illa portio continebit tres quadrantes solidi cuius sectio b f h; sed prior portio continet vnum quadrantem eiusmodi solidi, vt modo ostendimus, ergo totum z, hoc est ambæ simul portiones continent quatuor quadrantes solidi cuius sectio b f h; ergo spatium z quod æquiponderat duobus simul sphærico & conico solidis vt iacent manentibus, est æquale solido conico; atqui hoc ipsum demonstratio præsens euicit; ergo est omnimoda conuenientia præsentis theorematis cum principiis aliunde certissimis. Porro istud adnotare libuit, vt sit demonstrationis loco, quàm fortasse aliquis non ita versatus in

32. primi de Cyl. & sphæ.

corollariis eliciendis exigat ad fidem citati corollarij secundi propositionis sextæ libri secundi.

PROPOSITIO XXV.

Sit semicylindrus b z cuius bases oppositæ hemicyclia circulorum a l c m, x u z y sint horizonti æquidistantia; axis ad bases perpendicularis b d; planum per axē faciat in basibus sectiones a c, x z; ex a pēdeat spatium semicylindro l m c z y u vt iacet manenti æquiponderās, librâ ex b suspensâ. Ostendendū est spatium ita pendēs esse æquale parallelepipedo cuius basis sit quadratum æquale duabus tertijs quadrati quod potest recta b c, altitudo verò sit b d eadem quæ cylindri.



Sit i g e h quadratum horizonti parallelum æqnale bessi quadrati quod potest a b, & de puncto a pendeat ex o centro grauitatis sustentatum; super basi i g e h constructum sit parallelepipedum rectangulum g f, cuius altitudo sit eadem quæ b d, totumque vt iacet sustineatur ex puncto o suspensum, manebit enim vt iacet cum perpendiculum per o transeat per centrum
prop.8. grauitatis parallelepipedi vt demonstrat Com nandinus in libro de centro grauitatis solidorum. Quoniam ergo quadratum i e vt iacet manens æquiponderat semicir-
11. huius. culo l c m vt iacet manenti, & vt quadratum i e ad semicirculum l c m, ita est parallelepipedum g f ad semicylindrum b z; si ponatur ω centrum grauitatis semicirculi l c m, vt a b recta ad b ω ita erit semicir-

culus l c m, ad quadratum g h ſibi æqui- ponderans; ſed vt ſemicirculus ad quadratum, ita eſt ſemicylindrus ad parallelepipedum; ergo ſemicylindrus & parallelepipedum ſibi æquiponderãt retinentia ſitum quem habent, quod erat oſtendendum. 6. Aut 7. primi æquip.

COROLLARIVM I.

Si quadratum h i g e ſit æquale ſpatio quod æquiponderat circuli ſegmento cuilibet φ c ⍖, cuius ſubtenſa φ ⍖ æquidiſtet diametro l m; demonſtratio, vt apertum eſt, erit eadem: eiuſmodi autem æquiponderans habebitur ex tertij libri decimâ ſeptimâ; vel certè faciliùs ex tradendis de librâ planâ. Imo quãuis ſectio φ c ⍖ foret portio hyperbolæ, cuius diameter a c, centrum b, dummodo ex b fieret ſuſpenſio, robur demonſtrationis vigeret idem prorſus, vt manifeſtum eſt.

COROLLARIVM II.

Quamuis cylindri axis non eſſet perpendicularis ad baſim, modo tamen ipſe axis fiat perpendiculum libræ, eadem eſt demonſtratio niſi quod tunc baſis non eſt parallela horizonti, ſed planum illud per b ductum, ad quod axis eſt perpendicularis, & ex quo debet intelligi pendere ſemicylindrus: altitudo autem non eſt d b, ſed

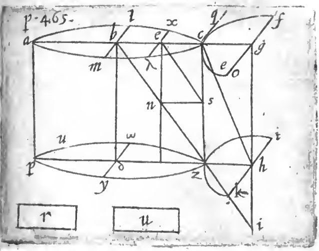
Propositio XXVI.

Sit planum l c m in quo ex centro b, diametro a c, descripta sit ellipsis a l c m, & hyperbola f c e, quarum diameter secunda sit l m. In plano a b d ad planum a l c recto ducta sit ex centro b quæuis linea b d ipsam a c secans; ipsi verò recta quædam parallela incedendo per limbum figurarũ l c m, f c e descripserit superficiem cylindraceam, quam planum transuersum z b l secet; rectæ autem b z planorum a b d, z b l communi sectioni occurrat in z recta c z communis plani a b d & cylindraceæ superficiei; eidemque rectæ b z productæ g i æquidistans rectæ c z occurrat in i. Per z & i intelligatur ductum z u y planum faciens cum cylindraceis superfi-

ciebus sectiones u z y, z t h para
lelas basibus l c m, f c e. Ellipti
cylindracei b z, cuius bases sur
semiellipses ω z y, l c m, porti
intercepta planis l c m, l b z voc
tur *cuneus notus*; planum d b l,
quodcunque ei æquidistans ap
pelletur *parallelum condictum*; l
nea c z si perpendicularis sit ad r
ctam a c, vel recta ex puncto z a
ipsam a c perpendicularis nom
netur altitudo cunei noti ta
elliptici, quàm hyperbolici.

His ita constitutis propositu
sit quadrare cunei noti tam ell
ptici quàm hyperbolici parte
interceptam quibuscunque duo
bus planis condictis parallelis.

Da



Data ſit portio iam dicti cunei intercepta quibuſcunque duobus planis parallelis condictis z c q, i g f, oporteatque illam quadrare. Figuræ f c e planæ interceptæ planis z c q, i g f, ex decimâ ſeptimâ tertij libri, inueniatur æquiponderãs rectilineum r, poſito perpendiculo b d quod per libræ centrum tranſeat, brachium autem libræ æquet b a. Dico parallelepipedum cuius baſis ſit r, altitudo æquet perpendicularem ex puncto z in plano a g i exiſtente demiſſam ad rectam a g, eſſe æquale prædictæ cunei noti portioni. Nam in vigeſimæ primæ huius libri corollario ſecũdo oſtendimus ſolidum cuneatum eſſe æquale parallelepipedo cuius baſis ſit æqualis ſpatio quadratario, quod hîc eſt r ; & altitudo ſit æqualis altitudini notę, quæ in præſenti deſcriptione eſt perpendicularis ex i in rectam a g cadens: quadratus est ergo cuneu notus, prout fuerat propositum.

ALITER.

Ducta quæcunq; recta g i ipsi b
æquidistans in plano a b d, secet rectam b
in i. Quoniam in triangulo b g i basi g
parallela est c z, vt recta b c siue a b ad lo
gitudinem b g, ita erit c z siue g h ad h
ergo per huius vigesimam quartam spati
quod ex a pendens libra ex b suspensa
perpendiculo b d, æquiponderat cylindr
ceo c h contento basibus f c e, t z κ, e
æquale figuræ c z i g contentæ figura f c
planis i g f, i b l: sed cylindraceo c h sp
tium quod ex a pendens libra ex b suspe
sa inuentum est in præcedenti propositi
ne; ergo si ex præcedenti propositione in
ueniatur spatium r quod ex à pendens, l
bra ex centro b suspensa, & perpendicu
b d æquiponderet cylindraceo c h, spatiu
r erit æquale cuneo noto quadrando.

COROLLARIVM

Quoniam ex præcedenti æquipondera
ex à semicylindraceo b z est parallelepip
dum cuius basis æquet duos trientes qu
drati b c, altitudo sit eadem quæ cylindr
cuneus notus b c z erit eidem parallele
pedo æqualis. Item quoniam ex corollar
tertio si recta x λ bifariam secet semidiam
trum b c, æquiponderans cylindraceo
est æquale parallelepipedo cuius basis

æqualis rectangulo ſub x e & ſub e c comprehenſo, altitudo ſit eadem quæ cylindri; cuneus e n z c erit eidem parallelepipedo æqualis. Demum quoniam ex corollario quarto æquiponderans ex a cylindraceo c h cuius baſis f c o ſit ſegmentum hyperbolæ notum, eſt parallelepipedum habens eandem cum cylindraceo altitudinem, baſim autem æqualem octo trientibus quadrati quod poteſt axis (oſtendimus enim brachio æquante axem totum a c, baſim eſſe æqualem quatuor trientibus; ergo ſi brachium ſit a b dimidium axis, baſis erit dupla prioris ex octaua ſecundi libri) cuneus c z i g erit eidem parallelepipedo æqualis.

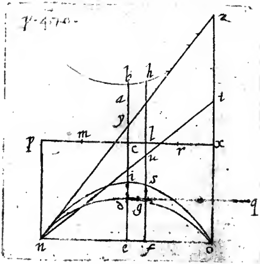
SCHOLIVM.

Non eſt dubium quin quadratio cylindri aut cylindracei apertè exhibeat Tetragoniſmum ipſius baſeos quæ eſt ellipſis (hac voce circulum comprehendi à nobis diximus initio operis huius) vel hyperbola, aut earum portiones conditis planis interceptæ. Cylindrus enim aut cylindracea portio habet baſim æqualem baſi quadratæ parallelepipedi habentis altitudinem eandem cum cylindro, & æqualis ipſi cylindro aut cylindraceæ portioni, vt ſatis conſtat ex vndecimâ huius, aliaque viâ oſtendi poſſet, niſi citra vllam animi dubietatem res eſſet poſita. Certum eſt etiam ex demonſtratis in libro iſto *à nobis, vel ab Archimede in suis de sphæra cylindro déque Conoidibus & sphæroidibus, quadratione cylindri apertè resultare quad tionem coni, sphæræ, conoideon, & sphær deon. Quapropter non existimandum est propositi nostri immemores aliò diuertisse d ad ista solida gradum præsenti libro fecim neque verò exiguum profecisse nos putam dum ad cunei noti præsentem quadratur Deo dante peruenimus; hoc enim est veluti midium facti iam habere. Cùm enim inuene mus parallelepipedum æquale cuneo c z i g, bemus spatium æquale cylindraceo e h, & super portioni z h i quæ iunctâ c h est ad ip cylindracei portionem h g c per planum h abscissæ, vt recta h i ad h g, vel vt recta c g c b. Similiter cùm habeamus portionem e n quadratam, nota est (ductâ per n rectâ n s b c æquidistante) cylindri portio e s insist basi x c λ, terminata plano basi per n s par lelo; & insuper spatium n s z quod ductâ est ad portionem e c s, vt est recta z s ad vel c e ad e b; hanc enim esse eorum proport nem apertum est ex sextâ primi libri si ad s datraducatur.*

PROPOSITIO XXVII.

Sint sectiones oppositæ b, quarum transuersa diameter b punctis b & d terminata; secun autem m r punctis m & r definita; rectum figuræ latus sit d q; abscissâ vtcunque d e, ordinatim applicatæ vtrinque sint ductæ n e o, completáque parallelogramma c e o x, c e n p. Vt recta d q ad d b, ita sit o n recta ad o t: vt autem e c recta ad n o ita sit o t recta ad o z iuncta n z occurrat rectæ a e in y, diuisáque bifariam rectâ i e in i, per puncta n, i, o descripta sit parabola n i o iuxta præscriptum vltimæ primi, cuius diameter si i e.

Ostendendum est quæcunque f l æquidistans transuersæ diametro b d ducatur occurrens rectæ m r diametro in l, parabolæ in f, hyperbolæ d n in g inter puncta n & o; tres rectas c e, l g, f l esse proportionales.



Ductâ n t, quoniam vt c e ad n o, ita o t ad o z, ductâque n z defcripta eft pa bola n i o, methodo iam præfcriptâ, e per duodecimam tertij, (quæcunque f l quidiftans rectæ l n ducatur, occurrens ctæ n t in u, parabolæ in f, bafi n o in f) recta c e ad o f, ita u f ad f f: rectanguli ergo fub extremis c e, f f erit æquale

16. fexti Euc. ctangulo fub medijs o f, u f.

Rurfus quoniam trianguli n o t lateri æquidiftat f u, vt n o, ot fiue vt d q, d ita erunt n f, f u; ergo pofitâ eadem bafi rectangulum o f n erit ad rectâgulum o f vt recta n f ad f u hoc eft vt recta d q d b: fed rectangulo o f u oftenfum eft quale rectangulum fub c e, f f: ergo recta d q ad d b, ita eft rectangulum o ad rectangulum fub c e, f f rectis: fed i rum vt recta d q ad d b ita est rectangulum h f g ad o f n per vigesimam secundam tertij conicorum; ergo rectangulo h f g æquale est rectangulum sub c e, f f rectis comprehensum. 9. quinti Euc.

Rursus quoniam h l, g l ordinatim ad diametrum m r ex eodem puncto l applicatæ sunt æquales, vt ex earum definitione apertum est, rectæ h g bifariam in l sectæ adiectæ erit linea g f: ergo rectangulum h f g vnà cum quadrato l g æquat quadratum l f: ergo cùm rectangulo h f g æquale sit rectangulum sub c e vel l f & sub f f; rectangulum sub l f & sub f f vnà cum quadrato rectæ g l erit æquale quadrato rectæ f l: sed duo rectangula l f f, f l f simul sunt æqualia eidem quadrato f l: ergo duo simul rectangula l f f, f l f æquant duo spatia videlicet rectangulum l f f & quadratũ l g: ergo ablato eodem l f f, residua sunt æqualia quadratum scilicet l g & rectangulũ f l f: ergo tres rectæ f l (hoc est c e) l g, l f sunt proportionales, prout erat ostendendum. 6 secũdi Euc. 1. secũdi Euc.

SCHOLIVM.

Solidum illud quod manente diametro directâ m l hyperbolæ d g o ita describitur circũductu ipsius hyperbolæ, vt in eo motu recta g l & aliæ omnes ad m r ordinatim applicatæ maneant in eodem plano, prout in Scholio duo-

decimæ præscripsimus, non tractauimus hacte nus præsenti in libro, quamuis methodi conse quutio exigeret vt sicut in ellipsi, duplex sol dum genitum ex duplici motu ellipseos circa im motam duplicem diametrum, minorem, nemp & maiorem, consideratur; ita in hyperbolâ du plex quoque solidum generatum ex duplici mo tu hyperbolæ ipsius circa duplicem immota diametrum, transuersam & directam, contem plaremur, atque in isto etiam cẽtrum grauitati & diuisionem iuxta datam rationem occurs plani basi paralleli demonstraremus. Verùm cù ista penderent à præsenti theoremate quod à no bis inuentum non est nisi postquam iamdiu cu sus erat præsens liber quartus, necessariò ad ca cem ipsius adiiciendum fuit, ne imperfecta ma neret tam mirabilis, tamque facilis, cùm sem excogitata fuerit, doctrina soluendi difficillim pariter & iucundissima problemata. Perficiun tur autem hæc problemata illâ eadem viâ, qu processimus in propositione decimâ tertiâ & sequentibus; inuenitur quippe prismatoides so lidum cuius basis sit portio figuræ c i x o s in tercepta parallelis ad diametrum i c rectis, i se habens ad solidum istud genitum ex quiete di rectæ diametri quod xystroides appellaui in co rollario tertio propositionis vigesimæ tertiæ, vtriusque centrum grauitatis sit in vno eodẽm que plano, cuius sectio sit recta c e parallela; & qua ratione diuiditur vnum, alterum quoq eadem diuidi necesse sit, vt satis intelligit qui quis librum istum paulò diligentiùs legeri

Cæterū quod in Scholio laudatæ duodecimæ definientes istiusmodi peripherica solida scripsimus, id quidem etiam nunc probamus veluti doctrinæ nostræ methodo inprimis accommodatam; quod autem adeo vniuersè prolatam definitionem congruere iis omnibus quæ Archimedes de Conoidibus & Sphæroidibus demonstrauit, dubitando diximus, id nunc re maturiùs deliberatâ indictum volumus.

Calculi ratiocinijs (si ego supputando non erro) inuenies ex methodo non semel traditâ centrum grauitatis xystroidis hyperbolici descripti motu semisegmenti hyperbolæ noti de quo in citato & subsequenti corollario egimus, ita diuidere axem vt pars centro hyperbolæ adiacens sit ad aliam ut viginti & vnum ad septemdecim.

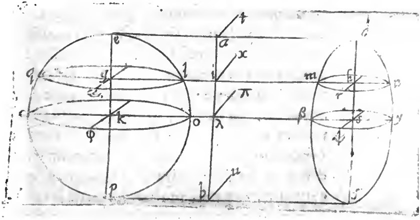
PROPOSITIO XXVIII.

Intelligatur in plano p d horizonti parallelo, quod libræ vices gerat, linea a b immota, ex qua ipsum planum ita suspendatur, vt circa illam aptum sit in hanc vel illam partem eleuari aut deprimi trutinæ instar, prout pondera vtrinque imposita grauiora vel le-

uiora fuerint. Eiusmodi aute
planum ita aptatum appelletur
bra plana, & linea a b linea suspe
sionis, vel axis libræ planæ: cor
munem autem libram qua hact
nus vsi sumus voco distinctio
causâ, *libram grammicam*.

Libræ planæ p d imposita s
vtrinque solida e p, d f haben
centrum grauitatis in ipsa lib
planâ & ita sese respicientia vt i
tra plana e a t, p b u parallela co
tineantur proximè, & si plan
q i x ipsis parallelum vtcunque
terponatur secans solida e p,
secundum sectiones q z l, m r n,
libram planam secundum line
q n, axemque a b in puncto i, i
sectiones seu figuræ q z l, m r
bi æquiponderent vt iacent
manentes librâ grammicâ q r
stinente illas, & suspensâ ex p
cto i. Peto ipsa solida e p, d

iacent permanentia ſibi æquiponderare in librâ planâ p d; ac proinde ſi deſignatis eorum grauitatis centris k, ſ iungatur recta k ſ ſecans axem in λ & per puncta k ſ ſola cõnectantur cum librâ grammicâ k ſ ex λ ſuſpensâ, ipſa etiam reſpectu huius libræ ſibi ęquiponderare inuicem; Idem verò in planis figuris cum proportione intelligi volo.



Hæc eſt altera propoſitio quam cum præsẽtis libri Vndecimæ parte primâ dari mihi poſtulo; dari inquã neq; enim ingenuũ Vllũ ſcriptorem

*decet nedum Mathematicum ὡς τύραννον ἐπιτά-
lib. 1. meth. med. part. 4. edit. Basil. 1538. pag. 39. τειν, ἀξιοῦντα πιστεύεσθαι χωρὶς ἀποδείξεως quod Thessalo, νομοθετοῦντι μᾶλλον ἢ ἀποδεικνύ- reprehendit Galenus. Illam tamen probabile efficere mihi videor, ex eo quòd si continuu componeretur ex indiuisibilibus res esset aperi aliunde verò in plurimis casibus id ita esse leg timis demonstrationibus euincatur positâ co tinui* diuisibilitate *in infinitum, quod arg mento est eiusmodi* diuisibilitatem *esse* per a cidens *in præsenti negotio, præsertim cùm nullo casu quem sciam, falsum esse id quod timus ostendi possit; imò datâ illius verit. omnia mirè consonent, vt ex sequentibus quidum fiet.*

Reliquum igitur est vt in nonnullis c sibus ostendamus petitionem nostram v ris demonstrationibus congruere. Sint so da e p, d f vel ambo sphæroidea, vel eoru vnum, alterum verò sphæricum, vel ce ambo sphærica; planum autem p d trans per eorum axes e p, d f parallelos rectæ a atque in punctis e, d, p, f sit contactus p norum e a t, p b u; puncta ergo k & s er centra ipsarum figurarum solidarum e d f, nam ex demonstratis à Command centrum grauitatis in istis figuris est id cum centro figurarum; axes ergo e p,
26. de centro solid. bifariam secantur in k & s: ergo rectæ k f f sunt æquales; ergo cùm k p, s f sint
33. primi Euc. rallelæ & æquales, erunt k s, p f, e d pa lelæ & æquales. Rursus vt recta λ s ad 1

diā inter ipsam λ ſ & k λ ita recta ſit K o ad ſ β, ſiue ſ y (figuræ enim planæ e c p o, d β f y ſunt ellipſes aut circuli, quorū centra k, ſ, ex Archimede vel ex Sphæricis Theodoſij) & quoniam rectæ e d, p f tangunt ipſas in e,d,p,f & k o β ſ ſunt tangentibus in vertice parallelæ, erunt ipſæ diametri c k o, β ſ y ipſis axibus coniugatæ. 12. de conoid. & ſphæroid. 32. primi Cō.

Rurſus quoniam ſphæroidea e p,d f ſecantur plano k λ π ad axem erecto, hoc eſt parallelo planis e a t,p b u,ſectiones c o φ, β y ✢ erunt circuli (eademque de causâ ſectiones q z l, m r n ſunt quoque circuli) ergo circuli c o φ, β y ✢ habent inter ſe duplicatam rationem diametrorum c o, β y ſeu ſemidiametrorum κ o, β ſ, ſed recta λ ſ ad rectam λ k habet ex conſtructione duplicatam rationem rectarum c o, β y : ergo vt recta λ ſ ad k λ, ita eſt circulus c o φ ad circulum β y ✢. 12. de conoid. & ſphæroid. 2. duodec. & 20ſexti Euc.

Rurſus quoniam ex Archimede dimidium ſphæræ vel ſphæroidis c e o, β d y eſt duplum coni cuius baſis ſit circulus c o φ & β y ✢, & altitudo e k & d ſ; duo ſolida e p, d f erunt inter ſe vt coni prædicti; ſed coni prædicti habentes æquales altitudines e k, d ſ ſunt inter ſe in ratione baſium; ergo ſolida e p, d f ſunt inter ſe vt baſes c o φ, β y ✢ : ſed baſes iſtæ ſunt inter ſe, vt oſtenſum fuit, ſicut rectæ λ ſ, λ K : ergo ſolidum e p eſt ad ſolidum d f, vt recta λ ſ ad rectam l k: ergo librâ grammicâ k ſ ſuſpenſâ ex λ 29. de conoid. & ſphæroid. 32. de ſphær. & cyl. 14. duodec. Eucl.

6. aut 7. primi æquip. & sustinente grauia e p, d f alligata ex c
tris κ; f committetur æquilibrium; ipsa
tem grauia e p, d f non mutabunt sit
quem priùs habebant.

Ostendendum iam est quocunque pl
interiecto parallelo; inter plana e a t, p
ista solida secentur, sectiones eorum c
planis, sibi inuicem æquiponderare m
prædicto. Et quidem circulum c o φ æc
ponderare circulo β y ψ, sequitur ex dic
4. de centro solidorum citato. ostensum enim est circulum c o φ ad cir
lum β y ψ esse vt rectam λ f ad λ κ, e
cùm puncta f & k sint cētra grauitatis ip
rum circulorum, ipsi circuli æquiponde
bunt sibi vt iacent manentes positâ li
6. quadrat. parab. grammicâ k f suspensâ ex λ, & sustine
circulos per sola centra k & f sibi col
rentes.

Ostendamus idipsum quocunque
plano q i x non per centra, k, f ducto. Q
niam vt ostendimus sectiones q z l, m
sunt circuli, ipsi circuli erunt inter s
quadrata rectarum g l, h n. Præterea quc
ordinatim applicatæ ad diametrum e p
rectæ l g, o k, vt rectangulum p g e ad
21. primi con. ctangulum p k e, ita ex Apollonio
quadratum g l ad k o quadratum, hoc
circulus q z l ad circulum c o φ: atque
dem de causâ vt rectangulum f h d
p g e ad rectangulum f f d siue p k e,
erit quadratum rectæ h n ad quadrat
rectæ f y; ergo vt circulus q z l ad circ

c o φ, ita est circulus m r n ad circulum β γ ψ, ergo alternãdo circulus q z l ad circulum m r n est vt circulus c o φ ad circulum ϛ y ψ: sed circulus c o φ est ad ϛ y ψ vt recta s λ seu h i ad rectam λ κ seu i g: ergo vt recta h i ad rectam i g, ita viciſſim eſt circulus q z l ad circulum m r n; ergo poſitâ librâ grammicâ g h ſuſtinente circulos cohærentes in g, h, & ſuſpenſâ c x i, omnia manebunt vt iacent; quod erat probandũ.

COROLLARIVM.

Si ſolida e p, d f ambo ponerentur cylindri, aut coni, aut priſmata, aut pyramides, aut conoidea eiuſdem generis, non multùm diuersâ methodo poſſet formari caſus in quo iſtud ipſum demonſtraretur, prout ſtatim clarè iudicabit, qui vim eorum quæ in caſu proximo ſcripſimus, perceperit.

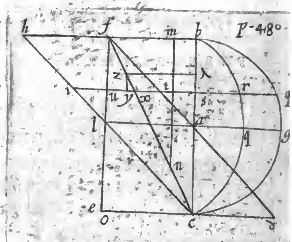
PROPOSITIONIS
PARS ALTERA.

Non in ſolidis modò ſed in planis etiam figuris theorema præſens intelligendum eſſe.

Si enim vt longitudo g i ad longitudinem i h, ita ſit recta m n aptata rectæ d f

(hoc est bifariam secta occursu lineæ ac proinde habens centrum grauitatis i nea d f) ad rectam q l aptatam lineæ & ita eueniat in alijs omnibus paralle figura plana e c p o æquiponderabit fig planæ d c f y, posito axe a b.

Huius verò mirabilis consonantia c demonstratis in tertio libro innumeri stendi potest exemplis, sed vnum hîc alterum pono. Sit semicirculus m g c ius diameter b c, quam ad norm secet g a ; tangentes in b & c sint b f, sitque b f æqualis semic metro a g, & c e semidiametro b a ; ctis c e, c d æqualibus, iungantur re c f, f d, f e, compleaturque paralle grammum f o c b. Diuisa a g bifariam p, per b, p, c intelligatur describi semi lipsis b p c, cuius diameter b c, & semia a p ; ergo quæuis parallela rectæ a g se circulo contenta secabitur bifariam occ



ſu ſemiellipſis b p c, vt ponit Archimedes in quintâ de conoidibus & ſphæroidibus, ibidemque demonſtrat Commandinus ex vigeſimâ primâ primi conicorum; ſemicirculus ergo b g c erit aptatus ellipſi b p c: aptari enim figuram planam lineæ definio, lineas eius omnes vni cuidam rectæ parallelas bifariam ſecari occurſu eiuſmodi lineæ. Erit triangulum f e d aptatum lineæ f c, cùm omnes parallelæ baſi e d trianguli f e d occurſu rectæ f c ſecentur ſicuti baſis ipſa e d, quæ bifariam in c ſecta ponitur; a c proinde & omnes baſi e d parallelæ rectæ erunt ipſi f c aptatæ. 4. ſexti Euc.

Quoniam ergo ductâ quacunque ſ q æquidiſtaute axi a g, & occurrente lineis iam deſcriptis in r, ſ, t, x, u, rectæ ſ q, t u ſunt aptatæ lineis b p c, f c; & ut x ſ ſemiſſis rectæ c ſ (ſicuti enim f b eſt ſemiſſis rectæ b c, ita eſt x ſ ſemiſſis rectæ ſ c) ad ſ r ſemiſſem rectæ ſ q, ita eſt ipſa ſ q ad t u ipſi b ſ æqualem (veluti enim e d æquat rectam b c, ita t u æquat rectam b ſ) recta v t ſicut iacet manens, æquiponderabit rectæ q ſ vt iacet manenti, librâ grammicâ u q ſuspensâ ex ſ (oportet autem mente ponere in omnibus libræ demonſtrationibus ipſam librã prorſus carere grauitate) ergo per præſentem totum triangulum f d o vt iacet manens æquiponderabit toti ſemicirculo b c g vt iacet manenti poſito axe b c. Porrò vt recta c ſ ad ſ q rectam, ita eſſe ſ q ad t u, vel

b f ipsi æqualem prout modo sumebat
apertum est ex decima tertia sexti Eucl
vel si b c g foret segmentum ellipseo
vigesima prima primi conicorum, ex
etiam idipsum ostendetur si b c por
esse diameter hyperbolę, & puncta c, b
mini eius.

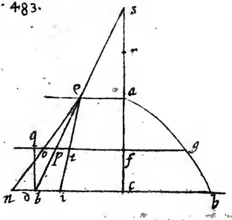
6. qua dr. t. parab. 2. sexti Euc.

Quoniam ergo triangulum f d o equi
derat semicirculo b g c posito librę p
axe b c, & (diuisâ rectâ f c ita in n vt
sit triens totius f c) punctum n est ce
grauitatis trianguli f d o, totum trian
ex n pendens æquiponderabit semicir
b g c. Per n agatur n m æquidistans axi
ergo cùm in triangulo f b c basi b c pa
lela sit n m, sicut f n ad n c, ita erit f
m b: ergo m b est triens totius f b.
ergo triangulum f d o contineat duo p
lelogramma b a g, in nostro autem casu
rallelogrammum b a g sit quadratum
potest semidiameter b a, æquipond
semicirculo vt iacet manenti pende
parallela m n, erit æquale duobus qu
tis rectæ b a : ergo si suspensio ex pa
lâ m n transferatur in parallelam f o,
est b f recta ad m b, hoc est vt ternariu
vnitatem, ita erit æquiponderans ex
ad æquiponderans ex f o; ergo æqui
derans ex f o continet trientem du
quadratorum ex b a latere descripto
siue duos trientes quadrati quod pote
ergo si ex puncto l in quod f o & g

ueniunt, per f o perpendiculum pendeant duo trientes quadrati b a, æquiponderabunt ſemicirculo b g c vt iacet manenti: ſed ſi circa rectam a g immotam intelligatur circumuolui ſemicirculus b g c donec recta b c ſit horizonti perpendicularis, centrum grauitatis ſemicirculi, quod eſt in rectâ a g, manet immotum: ergo poſitâ librâ grammicâ a g, ſuſpensâ ex a, ſemicirculo vt modo conſtitutus eſt manenti æquiponderant ex l duo trientes quadrati b a: atqui hoc ipſum demonſtratum fuit in decimâ octaua tertij libri; ergo præſens propoſitio quatenus de planis figuris intelligitur, ad amuſſim quadrat demonſtratis in tertio libro; quibus ſimilia quæ demonſtrentur, præbent propoſitiones aliquot libri modo citati. ſed præcipuè tertia, ſeptima, & octaua.

Eandem concordiam oſtendamus in hy-

p. 483.



perbolæ semi-segmento noto cuius æ
ponderans inuestigauimus sub finem q
ti corollarij in propositione vigesimâ
tiâ. Sit ergo sa hyperbolæ a g b axis
quo abscissa sit a c ipsi s a æqualis, si
21. primi conic. ordinatim applicata c b ipsi a c vel dia
tro s a æqualis; quod erit, si factis c b
æqualibus, recta s d per s & d transiens
terminet figuram, rectangulum enim a
erit æquale quadrato c b; sed rectangu
a c d est æquale quadrato a c; ergo recta
a c, c b sunt æquales. Posito igitur l
planæ a c b axe a c, inueniendum sit æ
ponderans aptatum rectæ d q per d d
parallelo ad axem a c. Fiant n d, d i i
le, & cum quadrante rectæ d c æquales
que iungantur rectæ e n, e i. Quon
ductâ quacunque o g ipsi d l æquidist
tres rectæ a f, f g, f p sunt proportionale
p f ad f g ita erit f g ad f a; ergo vt p
semissem rectæ f g, ita erit f g ad semi
rectæ f a, hoc est ad rectam o l: nam
n i ad o l parallelam in triangulo n e i
recta e d ad e p, vel vt recta a c ad a f;
alternando vt recta n i ad a c hoc est se
sis ad totum, ita est o l recta ad f a; e
go o l semissis rectæ f a. Quoniam erg
ad semissem rectæ f g, ita est ipsa f g ad
& ita euenit quæcunque alia æquidi
rectæ c b ducatur: triangulum e n i æ
ponderabit semisegmento a g b c vt
manenti, axe a c posito libræ planæ a

Venio ad calculum. Diuidatur a c ita in f vt f c sit triens rectæ a c, & per f ducatur f p æquidistans rectæ c b; erit p centrum grauitatis trianguli n e i: & quia f a æqualis est rectæ a c, erit recta f c ad f f vt senarius ad quinarium; cúmque in triangulo f d c basi d c parallela sit p f, erit d c seu q f ad p f, vt senarius ad quinarium. Rursus triangulum n i e, cùm habeat basim n i semissem rectæ c a, & altitudinem a c, erit æquale quartæ parti quadrati a c, siue sex vigesimis quartis: quoniam ergo quarta pars quadrati a c pendens ex solo puncto p æquiponderat semisegmento a c b, libræ planæ a c b axe a c posito; si vt brachium f q ad brachium f p hoc est vt senarius ad quinarium, ita fiat æquiponderans ex p ad quartum spatium, istud continebit quinque vigesimas quartas quadrati a c; istud autem ex q pendens æquiponderat semisegmento a c b ex octauâ secundi; ergo præsenti methodo eædem quinque vigesimæ quartæ quadrati a c inueniuntur, quæ repertæ fuêre loco paulò superius citato.

6. quadrat. parab.

COROLLARIVM I.

Ex his patet libram planam conuerti in grammicam & vulgarem si ad axem b a figuræ casûs primi secundæ partis perpendicularis a g excitetur, & circa rectam a g

manentem & parallelam horizonti ci
uolui intelligatur planum b g c, donec
b c sit perpendiculum : ostensum enim
in simili circumuolutione centrum s
circuli b h c manere immotum cum, si
rectâ a g : sed etsi foret extra rectam a
semper maneret in eadem distantiâ à
b c ; ergo cùm n à quo æquiponderan
opposito pendet in situ priori, retinea
dem parallelarum b c, m n distantia
perpendiculo ipso b c, libræ longitud
in posteriori situ erunt viciſsim vt gr
illis sustentata ; ergo grauia sibi inui
æquiponderant.

COROLLARIVM II.

Sicuti in librâ grammicâ suspensio
vno punĉto in aliud transfertur certâ
quam præscribunt secundi libri pro
tiones decima & sequentes duæ ; ita i
brâ planâ eædem leges vigent dum ex
axe in alium axem fit translatio , qu
inter axes duos parallelarum, linea
quæ vicem grammicę libræ gerunt ,
tiones interceptæ, sunt brachia earun
grammicarum librarum. Ex quo fit
axes esse inuicem parallelos quoties
chia grammicarum librarum sunt inu
æqualia ; non esse autem parallelos
ties brachia non sunt æqualia ; sed co
nire cum primario axe in illo ipso pu

in quo linea quæ brachia librarum grammicarum terminat. In proposito igitur schemate primi casûs secundæ partis axes assumpti concurrent in punctum c, & si ex productâ b f abscindatur f h ipsi b f æqualis iungaturque h c; & ex axe b c suspensio transferatur in axem c f; in rectam verò c h transferatur triangulum f d o per parallelas basi d o, & illi aptetur; semicirculus quoque b g c similiter transferatur & aptetur eidem rectæ h c; triangulum & semicirculus ita aptata rectæ c h, librâ planâ suspensâ ex axe f c, æquiponderabunt semicirculo b g c vt iacet manenti. Si enim q u producatur occurratque rectæ c g in i, erunt x i, x s æquales sicuti f h, f b ponuntur æquales; quoniam ergo librâ grammicâ x r suspensâ ex s, sustinentéque ex r graue s r q, & ex x graue u x t, si suspensio ex s mutetur in x, retineaturque brachiũ x i æquale brachio x s, duo simul grauia u x t, s r q e x i pendentia, siue habentia centrum grauitatis in puncto i æquiponderabunt graui s r q vt iacet manenti, ex decimâ libri secundi: ergo cùm dictum æquilibrium contingat in singulis parallelis, figuræ duæ prædicto modo aptatæ ad lineã h c, posito axe f c, æquiponderabunt per præsentem semicirculo b g c vt iacet manenti.

COROLLARIVM. III.

Eiusmodi porro figuras traditâ metho lineæ rectæ aptatas habere centrum grau tatis in illa ipsâ lineâ cui aptantur, assum mus ex vndecimæ huius parte secund nec contradicet vllus qui meditatus fue quo pacto Archimedes demonstret in bro æquiponderantium centrum triangı esse in rectâ quæ bifariam secat basim,or nesque ipsi parallelas;quod & in parallel grammo demonstrat ; nosque in sectionu conicarum segmentis ostendimus in dec mâ tertiâ secundi, centrum nimirum gı uitatis esse in diametro quæ bifariam sec omnes parallelas basi,

COROLLARIVM. IV.

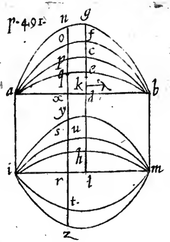
Si in primâ figurâ secundæ partis b a c uisa sit bifariam in f; portioni b f q iisde positis æquiponderabit triangulum f u : vt iacet manens,& si recta f x ita diuidat in z vt x z sit triens ipsius f x, & per z d cantur z y, z λ æquidistantes rectis b a,a cùm z sit cẽtrum grauitatis trianguli f u spatium aptatum rectæ z y & æquiponc rans figuræ b q f,axe b c,erit æquale tria gulo f u t,quod est decima sexta pars tria guli f o d, cùm basis eius u t sit quadra basis o d,sicuti latus f u est quadrans la ris f o:ergo cùm triangula sint similia f u t, f o d habebunt duplicatam rationem laterum, qualem habent vnitas & sexdecim, respectu laterum existentium in ratione vnius ad quatuor, Cum ergo triangulum fd o æquet duo quadrata rectæ b a; triangulum f u t æquabit vnam octauam quadrati f a. Rursus quoniam triangula c b f, c λ z sunt similia, sicut c f ad c z, ita erit f b ad z λ: sed c f ad c z est vt duodecim ad decem, vel vt sex ad quinque: ergo recta f u ad rectam f y est vt sex ad quinque: quoniam ergo vt brachium u f vel f b ad brachium y f vel λ z, ita est æquiponderans aptatum rectæ z y ad aptatum rectæ f u: cùm aptatum rectæ z y sit octaua siue sex quadragesimæ octauæ quadrati b a; aptatum rectæ f u, erit quinque quadragesimæ octauæ quadrati b a.

COROLLARIVM V.

Eadem figurâ secundæ partis retentâ apertum est ea quæ hactenus proposuimus de tota ellipsi b q c, perinde esse vera in singulis eius partibus conclusis intra quascunque ordinatim ad diametrum a c applicatas si conferantur cum portione trianguli f d o intra easdem ordinatim applicatas contentâ.

PROPOSITIO XXIX.

Sit parabolæ segmentum a c cuius basis a b, diameter c d; aliud quoduis segmentum par bolæ i h m cuius basis i m term netur occursu duarum a i, b diametro c d æquidistãtium, ei que diameter l h sit portio reć c d. Sit præterea alia parabc a g b cuius basis sit a b, diame d e g ipsius d e dupla: segmentı verò i h m intelligatur aptatı curuæ a c b, secũdum positioni lineæ a i. His positis pro positũ inuenire centrum grauitatis segmenti ita aptati portione q uis interceptâ duabus ipsi a i rallelis. Ostendi præterea del portionẽ eiusmodi habere id centrum grauitatis cum p: segmenti a g b contentâ iisd parallelis.



Abſcindantur ex g d rectæ c f, c e inuicem æquales, & ſingulæ dimidio rectæ h l, vt tota f e ſit toti h l æqualis; atque per e & f intelligantur ex primi vltimâ deſcriptæ parabolæ a e b, a f b, quarum diametri ſint d e, d f. Inueniatur ex doctrinâ quadraturæ parabolæ centrum grauitatis portionis intra eaſdem parallelas & curuas a f b, a e b interceptæ. Dico eiuſmodi centrum eſſe illud quod quærendum proponitur; & non differre à cẽtro grauitatis ſegmenti a g b d intra eaſdem parallelas clauſi. 35. primi conic.

Quoniam enim à tangentibus in i & a ſimiliter ſecãtur ſegmẽta i h m, a e b, a c b, a f b, a g b; ſi ſecentur quacunque n r æquidiſtante ipſi g l, eius portiones illis interceptæ r u, x q, x p, x o, x n ſunt in ratione diametrorum l h, d e, d c, d f, d g; ergo ſicut 22. primi huius.

l h ęquat rectam e f, ita r u æquat recta q o;& ſicut e f bifariam ſecatur in c,ita q bifariam quoque ſecatur in p; ergo ſegm tum i h m aptatum curuæ a c b circur ſcribitur limbo a o f b e q parabolico:er figuræ a o f b e q centrum grauitatis no fiet ex demonſtratis ab Archimede in bello de quadratura circuli.

Relinquitur vt oſtendamus centr grauitis iſtud non differre à centro graui tis quod competit parti ſegmenti a g b c tentæ iiſdem parallelis. Intra rectas a i, b ducta ſit vtcunque i m æquidiſtans ipſi a & intelligatur deſcripta figura i ſ m t vt,quæcunque ſ t ipſi i a æquidiſtans duc tur ſecās rectā i m in r,portiones ſ r,r t ſi æquales;& vt x p recta ad ſ r, ita recipro ſit ſ r ad x q,ac proinde ita etiam ſit ſ t c pla rectæ ſ r ad compoſitam ex x q, n o c plam rectæ x q. Quoniam librā gramı cā r p ſuſpenſa ex puncto x, & ſuſtinens vnā parte graue t u aptatum puncto r, graue x q n o aptatum puncto p per lín x n grauitate carentem cui adhærēre i grauia intelliguntur,æquiponderabunt mutuò ergo cùm idipſum pariter euer
8.aut 7 primi æquip. in alijs æquidiſtantibus tota figura i ſ manens vt iacet,poſito a b axe librę pla æquipōderabit toti compoſitæ ex a q e & ex a n g b f o ; & pars parti prout intra eaſdem parallelas iam memoratas pondent, vt conſtat ex prioris prop

tionis parte altera.

Similiter intelligatur figura i y m z ita descripta vt iisdem positus æquiponderet toti a g b d, & qualibet æquidistante n z ductâ vt r x ad x p ita sit x n ad y z. Quoniã vt r x ad x p ita est x n ad y z, & ita etiam est composita x q o n ad s t; vt x n ad y z, ita erit composita x q o n ad s t: ergo alternando vt x n ad compositam x q o n, ita y z ad s t; sed vt recta x q o n ad x n, ita est composita ex portionibus cuiuscunque alterius æquidistantis interceptis inter easdem lineas quibus x q o n clauditur, ad interceptam inter easdem quibus x n continetur, vt ostensum fuit; ergo ex sextâ primi libri, vt composita x q o n ad rectam x n ita est compositum spatium ex a q e b d x, a n g b f o ad spatium a n g b d; eademque est ratio de eorum partibus intra easdem parallelas ad diametrum g d interceptis: ergo vt compositum spatium ex a q e b d x, a n g b f o ad spatium a n g b d ita spatium vnius æquidonderans i u h m t, ad alterius æquiponderans i y m z; & alternando vt compositum spatium ex a q e b d x, a n g b f o ad æquiponderans suum i u h m t, ita spatium a n g b d ad suum item æquiponderans i y m z.

Portio segmenti a g b d intra parallelas memoratas conclusa habeat centrum grauitatis in rectâ k λ conueniente in k cum rectâ d g; ergo vt brachium l d ad longitu-

dinem d k, ita per sextam aut septim
primi æquiponderantium est spatium
b d totum vel pars dictò modo sum
pendens ex k l, ad æquiponderans i y
vel ad partem: sed vt spatium a g b d
i y m z vel pars ad partem, ita ostendit
esse compositum ex a q e b d x, a n g b
vel eius partem ad spatium i u m t ve
partem pariter sumptam: ergo vt brac
l d ad longitudinem d k ita est spati
compositum vel eius pars pendens, ad
quiponderans ipsi: ergo centrum graui
tis compositi spatij est in rectâ κ λ.

Idem verò centrum granitatis esse
eodem puncto lineæ k λ constat ex deci
quinta secundi libri ex illa enim osten
tur vtriusque suspensi centrum esse in v
eademque parallelâ ad diametrum d g, e
ergo in communi sectione istius paralle
& rectæ k λ prout ostendendum fuit.

COROLLARIVM I.

Hinc patet si lineæ a b, i m non sint b
ses parabolarum a c b, i h m, sed sint qu
cunq; aliæ rectæ ad ipsarum parabolaru
caua vel conuexa positæ, idem prorsus co
fici dummodo portiones p x, u r cuit
cunque æquidistantis diametro sint in r
tione rectarum d c, x o.

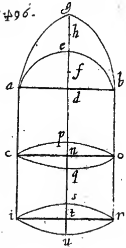
COROLLARIVM II.

Si cuicunque lineæ a p c aptata sit figura quæuis a g b d secundum positionem rectæ a i, & ex singulis conductis n x, g d occursu linearum a q e, a o f abscindantur vtrinque n o, x q inuicem æquales; item g f, e d inuicem etiam ęquales; sicut autem g f, ad f c, ita sit n o ad o p, & ita etiam sit cuiuscunque alterius condictæ portio lineis a n g, a o f intercepta ad portionem lineis a o f, a p e inclusam: liquet ex demonstratione qua pars altera præsentis propositionis demonstratur centrum grauitatis totius a g b x esse idem cum centro grauitatis partis a f b e.

PROPOSITIO XXX.

Si duæ figuræ planæ super eadem basi sint constitutæ ita vt omnes rectæ æquidistantes certæ cuidam designatę secundum eandem rationem secentur, centra grauitatis earum erunt in eadem parallelâ, & eorum à basi distantiæ erunt in eadem ratione.

p496.



Sint figurę a e b, a g b super basi constitutæ ita vt singulę ad rectam a i rallelæ occurrentes figuris secentur ir tione rectarum g d, d e. Sit f centrum uitatis figuræ a e b in rectâ d e ęquidi te rectæ a i, & h centrum grauitatis fi a g b. Dico vt g d recta ad g e, ita est stantiam puncti h à basi, ad distan puncti f ab eadem basi a b.

Quoniàm enim vt g d ad d e, ita singulę aliæ æquidistantes rectę g d, clusæ figurâ a g b ad portionem si clusam figurâ a e b, erit centrum grau vtriusque figuræ in eadem rectâ æq stante rectę a i ex decimâ quintâ seci vt in præcedenti diximus; ergo cum f trum grauitatis figuræ a e b ponatur i ctâ d e, in eadem quoque rectâ d e productâ erit h centrum grauitatis figuræ a g b.

Vt d g recta ad d e, ita sit a i cuiuscunque longitudinis ad a c, completisque parallelogrammis a i r b, a c o b, intelligantur figuræ c p o q, i s r u ita aptatæ rectis c o, i r, vt quacunque q u æquidistante rectæ a i secentur in p, n, q, s, t, u, & figuræ a f b, a g b in d, e, g vt n d recta ad dimidium rectæ d e, ita sit tota d e ad totam p q bifariam in n sectam: & vt p t recta ad dimidium rectæ d g, ita sit tota d g ad s u bifariam in t sectam. Posito ergo a b axe libræ planæ b a i tota figura c p o q vt iacet manens æquiponderabit ex vigesimâ octauâ toti a e b, & pars parti, prout inter easdem ad a i rectam æquidistantes continebuntur; similiter tota figura i s r u vt iacet manens æquiponderabit toti a g b & pars parti, prout dicto iam modo sibi respondebunt.

Quoniam ergo vt d n, d u, ita d e, d g, erunt alternando vt d n, d e, ita d u, d g: sed vt d e ad sui dimidium ita d g ad sui dimidium: ergo ex æquo vt d n, ad dimidium rectæ d e, ita d u ad dimidium rectæ d g. Rursus quoniam vt d n ad dimidium rectæ d e, ita est tota d e ad p q; & vt d u ad dimidium rectæ d g, ita est tota d g ad s u; erunt d n, dimidium rectæ d e, ipsa d e, & p q proportionales rectis d u, dimidio rectæ d g, ipsi d g & s u: ergo ex æquo

vt d n recta ad p q, ita d u recta ad ſ u;
alternando vt d n ad d u, vel vt d e ad d
ita p q ad ſ u : ergo cum idipſum euen
in ſingulis æquidiſtantibus rectæ ai, erit
ſextâ ſecundi figura a p o q ad figur
i ſ r u, & pars ad partem dicto iam mc
ſumptas, vt eſt recta d e ad e g ; ipsá
figura a e b propter eandem cauſam eri
figuram a g b vt recta d e ad d g : ergc
figura a e b d ad figuram a g b d, ita c p c
figura ad i ſ r u figuram ; & alternandc
figura a e b d ad ſibi æquiponderant
c p o q, ita figura a g b d ad ſibi æquip
derantem i ſ r u.

Cùm igitur n d brachium ad longitu
nem d f ſit vt a e b d ad æquiponder
c p o q ex ſextâ quadraturæ paraboles
eadem de causâ t d brachium ad d h, ſi
figura a g b d ad æquiponderans i ſ r u;
n d brachium ad longitudinem d f ; vt
brachium ad longitudinem d h : ergo
ternando vt n d ad t d, vel vt d e ad
ita d f ad d h, quod erat demonſtrandu

SCHOLIVM.

*Propoſitionem vigeſimam octauam cum
quentibus duabus nonnullum eius vſum o
dentibus adiunximus huic libro quarto ,
quod neceſſaria noſtro ſit tetragoniſmo
quod apprimè ei vtilis cùm ſit, & aliund
rabiles ad alia plurima aperiat vias, nolu*

nostram istam inuentionem in tenebris diutius latêre. Cæterùm postulatum illud propositionis vndecimæ, istudque vigesimæ octauæ adeò certa existimamus, vt in humanis scientijs (seponimus hac voce diuinitus inspiratas) nihil esse certius putemus.

ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM

LIBER V.

Abſolutam circuli, hyperbolæ & reliquorum inde pendentium quadraturã aſſequens.

PRÆFATIO.

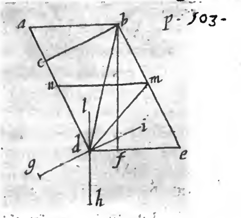
QVÆ in antecedentibus quatuor Libris à nobis inuenta ſunt, ea dum de editione iſtâ ageretur, ſola & per ſe ſufficere putarunt docti ſimul & amici viri, ad hoc vt nonnullo operæ noſtræ pretio & Matheſeos incremento, etiam ſeorſum vulgarentur, quidquid alijs inuentis noſtris, quorum causâ ſemper metuebamus, eueniret. Hac publicæ vtilitatis perſuaſione adducti Typographo lucubrationes iſtas tradidimus; ſed dum diagrammata cupro inciduntur, prælo cuduntur, cæteráque abſoluuntur, biennium eſt, tam ſegnes operarum moras nobis nequicquam culpantibus. Interea verò cùm edenda diligentiùs recognoſceremus, eorum ordinem & diſpoſitionem in quibuſdam immutanda cenſuimus, vt iam auctior, ſi non rerum, certè librorum numerus prodeat, quã in prolegomenis deſtinaueramus. Atque vt ſilentio iſtud non diſſimulemus, nihil ferme abfuit quin librum præſentem tanquam ab ortiuum perpetuæ obliuionis

tumulo conderemus, nisi cu
emortuum efferremus, nouus
vitæ halitus subitò inditus ap
paruisset: quò fit vt tantò cario
nobis sit, quantò castæ matri sua
uior accidit restaurata exanima
summisque propterea doloribu
parti fœtûs vita. Hîc quoque, Le-
ctor, numeros adhibitos inuenies,
planéque agnosces sine illis nihil
in præsenti negotio nisi vago
quodam & ingrato demonstran-
di genere posse definiri.

PROPOSITIO I.

Si ex cuiusuis parallelogram-
mi a b e d angulo quolibet b in
latera opposita a d, d e demittan-
tur perpendiculares b c, b f; dico
vt b c recta ad b f, ita esse b a rectã
ad b e. Et si in diemetro b d etiã
productâ ponatur centrum gra-

uitatis alicuius magnitudinis, ſuſpendaturque per duas ſuſpenſiones quarum perpendicula per centrum libræ incedentia ſint d a, d e. Dico vt eſt a b recta ad b e, ita eſſe poſita, æqualitate brachij, æquiponderans perpendiculi d a ad aliud æquiponderans. Et ſi poſito centro grauitatis intra angulum a d e, vt æquiponderans perpendiculi d a ad æquiponderans alterius, ita viciſſim fiat d e quælibet eius portio ad rectam d a completoque parallelogrãmo a d e b iũgatur diameter d b; dico in ipsâ d b eſſe centrũ grauitatis.



Quoniam anguli oppositi ad a & e s
æquales, & anguli b c a, b f e sunt æqua
vt pote recti, erunt triangula b c a, b f e
34 primi Euc. milia; ergo vt a b, b c, ita b e, b f; & alt
nando vt a b, b e, ita b c, b f, quod erat p
mò ostendendum.

Rursus excitentur ex puncto d rec
d g, d h. æquales inuicem, perpendicular
ad rectas d a, d e. Quoniam b c, g i sunt p
rallelæ, alterni anguli c b d, b d i. erunt a
quales; ergo posito sinu toto d b, recta c
erit sinus anguli c b d; atqui angulus c d
est in triangulo rectangulo b c d comple
mentum anguli c b d, qui est æqualis ips
b d i; ergo posito sinu toto d b, sinus com
plementi anguli b d i est recta b c. Simi
liter ostendetur posito sinu toto d b, sinum
complementi anguli b d l esse rectam
b f. Quoniam ergo æquiponderantia dua-
rum suspensionum per libras g d, d h fa-
ctarum sunt vt complementi sinus b c, b f
ex vndecimâ secundi libri; b c autem &
b f sunt inter se vt b a, b e ex modo de-
monstratis; ergo vt recta b a ad b e vel a d,
ita est æquiponderans libræ g d siue per-
pendiculi d a ad æquiponderans libræ d h
siue perpendiculi d, e quod secundò osten-
dere oportebat.

Demum posito centro grauitatis intra
angulum a d e, vt æquiponderans perpen-
diculi d a ad æquiponderans perpendiculi
d e, ita vicissim sit latus d e ad d a paralle-
logrammi a d e b, centrum verò grauitatis

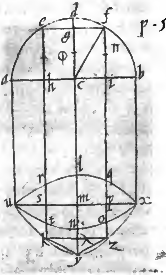
non ſit (ſi fieri poteſt) in rectâ d m ; ergo completo parallelogrammo d e m n, vt æquiponderans perpendiculi d a ad perpendiculi d e, ita viciſſim ex iam demonſtratis erit latus d e ad d n; ſed ita etiam ponitur eſſe latus d e ad d a; ergo rectæ d a, d n pars & totum ſunt æquales; non igitur centrum grauitatis eſt extra diametrum d b, quod tertiò fuit oſtendendum.

COROLLARIVM.

Si commune vtrique perpendiculo brachium fiat ad aliud, quod inſeruiat perpẽ diculo d e, vt ipſum latus a d ad latus d e; manifeſtum eſt ex octauâ ſecundi æquiponderans perpendiculi d e eſſe æquale æquiponderanti perpendiculi d a, poſitâ iſtâ brachiorum inæqualitate.

PROPOSITIO II.

Segmento e d f circuli ex centro c deſcripti, cuius ſubtenſa e f ſit ad diametrum a b vt ternarius ad quinarium, librâ ex c ſuſpensâ, perpendiculo c b, ex m termino diametri d m perpẽdicularis ad e f æquiponderat ſpatium æquale rectangulo cuius basis sit e f, altitudo verò æquet semidiametri d c tres vigesimas quintas.



Super a b constructum sit quadratum a u x b; erit punctum m in rectâ u x; ex d m productâ abscissa sit m y ipsi c d æqualis, & intelligatur per u, y, x descriptũ u y x segmentum parabolæ, cuius basis u x, diameter m y, vertex y. Intelligatur præterea linea u l x n ita se habens ad parabolam u y x, vt quâcunque q z æquidistante diametro m y secentur in q, o, z & linea u x in p, sit q o dimidium rectæ p z, & bifariam secetur in p.

Quoniam d c, m y sunt æquales; quæcunque f z æquidistans rectæ d c ducatur occurrens basi in p, parabolæ in z, circulo in f, diametro a b in i, curuæ u l x n in q & o, erunt tres rectæ d c, f i, q z proportionales; ex demonstratis in tertio libro; ergo vt p i ipsi d c æqualis ad i f, ita i f ad q z: ergo vt i p ad i π semissem rectæ i f, ita tota i f ad q o dimidium rectæ q z aptatum rectæ u x secundum positionem rectæ a u: ergo si π p ponatur libra grammica ex i suspensa, grauia f i, q o vt iacent manentia sibi inuicem quiponderabunt; ergo cùm idipsum eueniat in alijs omnibus æquidistantibus rectæ d c, tota figura v l x n toti a d b c, & pars parti, si sumantur prout intra easdem ordinatim ad diametrum a b applicatas sibi respondent, æquiponderabit.

3. tertij huius in coroll. 3.

6. aut 7 pri. æquip.

28. quarti huius.

Venio iam ad calculũ casûs propositi. Quoniam iunctæ c f quadratum æquat quadrata duarum g f, g c, & g f potest nouem cuiusmodi c f viginti quinque, poterit g c reliquas sexdecim partes quadrati c f; ergo tres rectæ c f, c g, g f sunt longitudine vt quinarius, quaternarius, & ternarius. Per e & f ducantur condictæ e k, f z, occurrentes in h, r, f, t, k, i, q, p, o, z, lineis a b, v l, v n, u y; iunctâ k z occurrat rectæ l y in λ. Quoniam latus rectum parabolæ u y z æquale est diametro m y (sunt enim y m, m u æquales) erunt y λ, k λ, y m proportionales: ergo vt y m ad λ k vel m f, hoc est vt quinarius ad ternarium, vel viginti quinque ad quindecim, ita k λ ad λ y: est ergo λ y nouem, cuiusmodi k λ quindecim,

11. primi Conic.

& y m vigintiquinque.

Rursus quoniam segmentum k l z y
17. quadrat. parab. quale est quatuor trientibus rectang
z λ y, quod triangulo k z y æquale est
k λ diuidatur in quindecim partes, rectæ
quatuor trientes erunt viginti; si ergo
nouem partium ducatur in viginti, cor
cientur centum octoginta: ergo duo trie
tes rectanguli z λ y sunt centum octogi
quadrata decimæ quintæ partis rectę λ
rectangulum autem s p z k, cuius latera s
triginta, & p z vel m λ sexdecim, est qu
dringenta octoginta eiusmodi quadrata, e
go tota figura s K y z p æquat eiusmo
quadrata sexcenta sexaginta; ergo cùm e
sextâ primi figura r t n o q l sit dimidiu
figuræ s k y z p, figura r t n o q l constabi
eiusmodi quadratis trecentis triginta: erg
totidem quadrata librâ ex c suspensâ, pe
pendiculo c b, pendentia ex m æquipon
derant figurę h e d f i c: sed parallelogram
mo e h i f, cuius latus e h est viginti, cuius
modi h i triginta, & ideo continenti qua
drata eiusdem modi sexcenta, æquiponde
rant, (iisdem positis) quadrata ducent
quadraginta (nam vt m c vel d c ad c
dimidium rectę c g, hoc est vt quinque ad
duo, ita e h i f ad suum æquiponderans)
ergo segmento e d f g æquiponderant qua-
drata nonaginta: sed rectangulum sub e f
triginta, & sub tribus complectitur non-
ginta quadrata: ergo æquiponderans seg-

mento e d f est iisdem positis, rectangulum sub e f & sub partibus tribus cuiusmodi e f complectitur triginta, & c d viginti quinque, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Si segmentum e d f iam computatum ponatur basis portionis cylindri iuxta præscriptum vigesimæ quintæ prioris libri, & rectangulum isti basi æquiponderans fiat basis parallelepipedi eadem cum portione cylindri altitudine præditi; istud erit, ex ibidem demonstratis, æquale spatio æquiponderantis portioni cylindri iuxta cautiones ibidem adhibitas.

SCHOLIVM.

Expedita magis visa nobis fuit hæc computandi via, desumpta ex demonstratis per libram planam, ideóque eâ hîc vsi sumus; ne verò dubium vllum de libræ istius cum grammicâ consonantia residuum fiat, placet calculum inire æquiponderantis segmento e d f, posito arcu e d f triente circuli, prout eum posuimus in decimanonâ tertij libri aliam epilogismi methodum sectantes.

Quoniam c d vel m y est ad h c vel k y potestate vt quatuor ad tria, tres autem rectæ m y, K λ, λ y sunt proportionales, vt quatuor ad tria, ita erit m y ad λ y. Cùm 20. sexti Euc. in coroll.

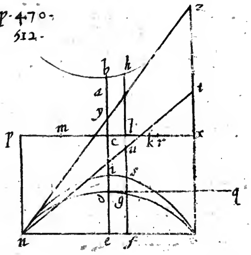
igitur segmentum k y z λ sit æquale quatuor trientibus rectanguli z λ y; erit æquale rectangulo sub z λ & sub quatuor trientibus rectæ λ y, hoc est sub rectis z λ, m y; rectangulum autem s p z k erit æquale rectangulo sub z λ & sub dimidio rectæ m y, hoc est sub duplâ rectæ m λ : ergo tota figura s p z y κ æquat rectangulum sub m p & sub rectæ m y tribus semissibus : ergo dimidium illius æquat rectangulum sub m p & sub tribus quadrantibus rectæ m y vel c d : ergo æquiponderans figuræ e h d f i æquale est rectangulo sub g f & sub tribus quadrantibus semidiametri c d: sed parallelogrammo e h i f æquiponderat quadrans ipsius e h i f, hoc est rectangulum sub g f & sub g φ quadrante rectæ c d; ergo segmento e d f g æquiponderat rectangulum sub e g & sub rectæ c d duobus quadrantibus, hoc est rectangulum e g d, quod prorsus conuenit cum epilogismo propositionis decimænonę tertij libri.

Quod in decimâ octauâ eiusdem libri tertij ostenditur, statim ex hoc diagrammate apparet; nam segmentum u y x est quatuor trientes rectanguli u m y, quod est quadratum, cùm latera u m, m y sint æqualia : ergo duo trientes quadrati u m vel a c æquiponderant ex m semicirculo a d b, librâ ex c suspensâ, perpendiculo c b.

PROPOSITIO III.

Sit, reuocatâ figurâ propositionis vigesimæ septimæ libri præcedentis, n d o segmentum hyperbolæ primò quidem conditum; ostendendum est librâ b d suspensâ ex c centro, perpendiculo c p, spatium ex b segmento vt iacet manenti æquiponderãs esse æquale trientibus octo quadrati b i. Et si iisdem manentibus recta d e æqualis sit diametri d b septimæ parti; ostendendum est secundò, spatium ex b segmento n d o æquiponderans (quod alterum segmentum hyperbolæ notum vocetur) esse æquale rectangulo comprehenso sub basi n o & sub diametri sexdecim centesimis quadragesimis septimis. Recta verò e o erit dupla rectæ d e.

p. 470.
512.



Sit igitur primò n d o segmentum hyperbolæ conditum, & intelligatur c e diuisa in nouem partes; erit ergo n o duodecim earundem partium; latus autem b d transuersum, erit ad d q directum vt binarius ad vnitatem, vt ostendimus in priore
pag. libro. Quoniam ergo vt b d recta ad d q,
484. id est vt binarius ad vnitatem, ita ponitur ex vigesimâ septimâ citatâ o t recta ad n o; erit o t viginti quatuor, cuiusmodi n o duodecim; & quoniam vt c e ad n o hoc est nouem ad duodecim, ita ponitur
2. sexti o t ad o z, erit o z triginta duarum par-
Euc. tium cuiusmodi c e nouem; ergo e y est sexdecim; ergo ei est octo partium: ac proinde c e, c d, c i sunt in ratione numerorum 9. 3. 1.

Rursus

Rursus quoniam segmentum parabolæ n i o æquale est quatuor trientibus rectanguli n e i, vel trianguli n i o; ergo diceratoides figura contenta arcu n i o, rectis n p, o x, & rectâ per i æquidistante basi n o; æqualis est duobus trientibus rectanguli n e i (nam parallelogrammum dictis lineis comprehensum duplum est parallelogrammi n e i) ergo cum e i contineat viginti quatuor partes cuiusmodi e c viginti septem; rectangulum sub n e & sub sexdecim partibus eiusmodi æquabit duos trientes figuræ diceratoidis; & addito duplo rectæ c i, rectangulum sub n e & sub viginti duabus partibus eiusdem modi æquabit totam figuram extrà cauam p c x o i n: rectangulum autem sub n e & sub vndecim eiusmodi æquabit dimidium totius p c x o i n, quod est c i s o x. 17.quadrat. parab.

Rursus quoniam si ponatur axis p x, brachiumque æquet rectam c e, vt c e recta ad dimidium rectæ c d, ita est tota c d ad dimidium rectæ c i, idemque euenit in quacumque aliâ æquidistante rectæ c i, dimidium figuræ extrà cauæ parabolicę aptatum brachio eiusmodi æquiponderabit figuræ exhtrà etiam cauæ hyberbolicæ p x o d n vt iacet manenti ex secundâ parte vigesimæ octauæ prioris libri; ergo rectangulum sub n e & sub vndecim vigesimis septimis rectæ c e æquiponderat figuræ hyperbolicæ p x o d n: sed ijsdem polius toti rectangulo p x o n æquiponderat dimidium ipsius, hoc est rectangulum sub n e & sub e c totâ; ergo rectangulum sub e n & sub sexdecim vigesimis septimis rectæ e c æquiponderat segmento parabolico n d o e. Ergo si brachium longitudinis e c vel viginti septem partium mutetur in brachium longitudinis c d nouem partium, cùm vt nouem ad viginti septem, ita sint sexdecim ad quadraginta octo, æquiponderans segmento hyperbolico n d o, librâ ex c suspensâ, brachio æquante semidiametrum c d, erit æquale rectangulo sub n e & sub quadraginta octo vigesimis septimis rectæ c e: vel sub n e & sub quadraginta octo decimis octauis axis b d; cùm ergo tres rectæ n e, e d, b d sint æquales inuicem; rectangulum sub n e & sub quadraginta octo decimis octauis ipsius n e, erit æquale octo trientibus quadrati n e, quod erat demonstrandum primo loco.

Secundò recta d e sit æqualis septimæ parti rectæ d b; erit ergo octaua pars totius b e; & quia latus directum d q est hîc di-
21. primi Conic. midium transuersi d b, rectangulum b e d erit duplum quadrati e o; ergo rectangulũ sub d e & sub semisse rectæ e b, hoc est sub quadruplâ rectæ d e, æquale est quadrato rectæ e o; ergo tres rectæ e d, e o & quadrupla rectæ e d sunt proportionales; ergo e o recta est dupla rectæ d e.

Rurſus ſicuti in præcedenti caſu oſtendimus tres rectas c e, c d, c i eſſe in ratione numerorum 9. 3. 1. ita in iſto oſtendemus eſſe in ratione numerorum 81. 63. 49. Quoniam ergo ſi c e ponatur octoginta & vnius partium, c i eſt quadraginta nouem, erit i e triginta duarum: & ſi c e ponatur mille ſeptingentarum & vnius erit c i mille viginti nouem, & c d mille trecentarum viginti trium, & i e ſexcentarum ſeptuaginta duarum: duo ergo trientes rectæ e i erunt quadringentæ quadraginta octo, quæ ſi addantur ad duplam rectæ c i, hoc eſt ad bis mille quinquaginta & octo, ſumma ex vtroque numero conflata erit bis mille quingentæ ſex; cuius dimidium eſt mille ducentæ quinquaginta tres; ergo rectangulum ſub n e rectâ & ſub mille ducentis quinquaginta tribus, cuiuſmodi c d continet mille trecentas viginti tres, eſt æquale ſpatio quod librâ ex c ſuſpensâ, perpendiculo c x, brachio æquante rectam c e, ęquiponderat figurę n p x o d; ſed toti p n o x ęquiponderat rectangulum p n e c: ergo differentia eorum videlicet rectangulum ſub n e & ſub quadringentis quadraginta octo, cuiuſmodi c d continet mille trecentas viginti tres, ęquiponderat ſegmento n d c iiſdem poſitis. Si ergo brachium æquans rectam c e mutetur in aliud ęquans rectam c d, hoc eſt ſi vt ſeptem ad nouem ita fiant partes quadringentę quadraginta & octo ad quingentas septuaginta sex; rectangulum sub n e & sub quingentis septuaginta sex partibus, cuiusmodi in c d sunt mille trecentę viginti tres, vel sub n o & sub ducentis octoginta octo, quales in semidiametro c d sunt mille trecentæ viginti tres, vel in diametro bis mille sexcentæ quadraginta sex, vel sub sexdecim cuiusmodi in diametro centum quadraginta septem, æquiponderat segmento n d o, librâ ex c suspensâ, perpendiculo c x, & brachio æquante semidiametrum c b.

COROLLARIVM.

Si segmenta, quorum æquiponderantia computauimus, vel eorum differentia ponantur bases cylindraceorum iuxta præscriptum vigesimæ quintæ prioris libri; & rectangula computatis æquiponderantibus ęqualia fiant bases parallelepipedorũ eadem cum cylindraceis altitudiue præditorum; isthæc parallelepipeda erunt, vt ex ibidem demonstratis patet, æqualia spatio æquiponderantium cylindraceis; iuxta cautiones ibidem adhibitas.

SCHOLIVM PRIMVM.

Occaſione tot epilogiſmorum hic Lectorem monêre inſiſto, lapſum in ijs pertractandis eſſe perfacilem, & vehementer timendum calculatori etiam exercitatiſsimo. Hoc verò diligenter attendi velim, ſi quis fortaſſe error in noſtris numeris (quamuis contrarium ſperem euentum) detegeretur, vtrùm vitium in eorum tractatione ſiſtat, an etiam ad ipſam grammicam demonſtrationem pertingat; ſi enim iſta rectè procedat, ſtat veritas quadraturæ, & inde emendari poterunt numeri, quorum vitium tantum excuſationis habere cenſuerunt legum conditores, vt nunquam in rem iudicatam tranſire voluerint, ſi quid perperam computatum probari poſsit.

SCHOLIVM ALTERVM.

Ad inueniendum ſpatium ſegmentis hyperbolæ propoſitis æquipõderãs vſi ſum⁹ librâ planâ, non quidẽ neceſsitatis, ſed facilitatis maioris causâ; poteramus enim, ſi placuiſſet, calculũ perficere ex ſolis tertij libri principijs in decimâ ſeptimâ eiuſdem libri collectis. Porro ex hoc ſchemate calculum eorum quæ de hyperbolico xyſtroide innuimus in præcedenti libro, explorabimus in hunc modum. Quoniam in primo caſu oſtendimus figuram c i ſ o x eſſe vndecim vigeſimas ſeptimas rectanguli c o x; ſemiſegmentum e i ſ o f erit ſexdecim reliquæ vigeſimæ ſeptimæ; ergo figura c i ſ o x eſt ad figuram e i ſ o f vt vndecim ad ſexdecim. Ponatur c x ita ſecta in l vt c l ſit ſi-

Prop. 13. Coroll. 3. & prop. 27. in Schol.

l x sicut ternarius ad quinarium: ergo primâ quarti si per l agatur l s æquidist recta i e, erit in rectâ l s centrum grauit. semisegmenti e i s o. Recta transiens per cen grauitatis figuræ c x o s i secet rectam e x in & recta c x bisectio (ita vocare cum Commandino ausus sum quam Mathematici Gr dicunt διχοτομίαν) sit k. Erit ergo c l octa

6. primi æquip. pars siue vndecim octogesima octaua totius c & c l ad l k erit vt portio c x o s i ad portionem e o s i, hoc est vt vndecim ad sexdecim ergo k r est sexdecim octogesima octaua toti c x; ergo addito semisse c k, erit c r sexagin octogesima octaua recta c x: ergo vt 88. ad 6 vel vt viginti duo ad quindecim, ita est rec c x ad c r: ergo hyperbolicum alterum conoides, de quo egimus in vigesimâ septimâ citat. habet centrum grauitatis in axis c x puncto ita diuidente ipsum c x, vt c r ad r x sit sicu quindecim ad septem.

Praterea quoniam figura c i s o x æquat rectangulum sub e o & sub vndecim vigesimi septimis recta c e, hoc est, æquat parallelogrammi rectanguli c e o x vndecim vigesimas septimas; parallelogrammum autem c e o x est ad

19 decim. Eue. Lem. 3. quadratum o x, vt recta c x ad o x siue vt binarius ad ternarium; vndecim vigesima septima rectanguli c e o x erunt viginti dua septuagesima prima quadrati x o.

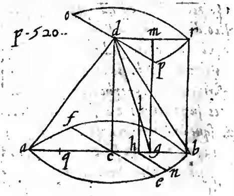
Rursus quoniam vt recta c x ad x o, siue vt binarius ad ternarium, ita sunt viginti dua septuagesima prima ad vndecim vigesimas septimas, parallelepipedum cuius altitudo sit c x & basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati x o, erit æquale parallelepipedo cuius altitudo sit x o, basis vigesimæ duæ septuagesimæ primæ quadrati x o. 4. vndec. Euc.

Quoniam ergo prismatoides cuius basis est c i s o x & altitudo x o æquale est, vt iam ostendimus, parallelepipedo cuius altitudo sit c x, & basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati x o; ipsum autem prismatoides est æquale quartæ parti hyperbolicoidis cuius sectiones sint quadrata rectarum b i, h s aliarumque ordinatim applicatarum ad directam diametrum c x, vt de simili casu ostendimus in quarto libro; erit quarta pars eiusmodi hyperbolicoidis æqualis parallelepipedo cuius altitudo sit c x, basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati o x. propos. 12. & sequét. Rursus quoniam parallelepipedum cuius altitudo sit recta c x, basis quadratum ex duplâ rectæ x o, habet eandem altitudinem cum parallelepipedo cuius altitudo est c x, & basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati x o; ergo quarta pars parallelepipedi cuius basis est quadratum ex duplâ rectæ x o, est ad quartam partem hyperbolicoidis, vt basis ad basim, hoc est, viginti-septem ad vndecim; sed ita etiam est cylindrus cuius altitudo c x, basis circulus ex semidiametro descriptus, ad hyperbolicum xystroides cuius sectiones sunt circuli ex semidiametris x o, l g, c d aliisque ordinatim applicatis descripti, sicut eodem libro ostensum fuit: ergo cylindrus cuius basis sit circulus semidiametro x o descri-

ptus, altitudo c x, est ad xystroides hyperbo cum v, viginti septem ad vndecim.

Propositio IV.

Si conus plano per axem secetur in duos semiconos, atque per grauitatis centrum vnius ex semiconis ducatur planum parallelum plano per axem; semidiameter quæ in basi erit perpendicularis ad sectionem plani per axem, ita secabitur ab eiusmodi plano parallelo, vt portio iacens inter centrum basis & centrum grauitatis semibasis sit quadrupla portionis interceptæ inter idem semi-basis centrum & inter parallelum planum iam memoratum.



Sit conus d a b cuius basis sit circulus a f b e; axis d c; planum per axem d c f faciat in circulo sectionem f c e, ad quam ex c excitata sit in plano semicirculi e b f perpendicularis c b; ipsius autem semicirculi centrum grauitatis sit g in semidiametro c b existens ex decimâ tertiâ secundi libri; semiconi autem d f e b centrum grauitatis sit l, atque per l actum sit planũ l h n plano d c f parallelum, secans rectam c b in h. Dico h ita cadere inter c & g, vt recta c g sit rectæ h g quadrupla; siue c h tripla rectæ h g.

Per g & d agatur recta d g. Quoniam figura solida d f e b describitur motu rectæ d f ex puncto d manente, per ambitum semicirculi f b e, erit homœoconica; ac proinde si plano secetur parallelo basi f b e sectio erit similis ipsi f b e (id enim eodem pacto ostendetur, quo ab Appollonio idipsum ostenditur de toto cono) similiterque posita; cumque similes, similiterque sint positæ, recta d g transibit per centrum grauitatis ipsius ex quinto postulato primi libri Archimedei de Æquiponderantibus; ergo per vndecimam libri præcedentis centrum grauitatis figuræ homœoconicæ d f e b erit in rectâ d g; est ergo punctum l in rectâ d g; ergo per corollarium secundum duodecimæ libri eiusdem punctum l ita diuidit rectam d g, vt ipsius g l recta l d sit tripla.

5. primi Conic.

Rursus quoniam planum trianguli d c secant duo plana inuicem æquidistant per c & l ducta, eorum sectiones d c, h l plano d c g factæ, erunt parallelæ; erg cùm in triangulo d c g lateri d c paralle sit l h; vt d l ad l g, hoc est vt tria ad vnun ita erit c h ad h g: est ergo c h tripla r ctæ h g, quod erat ostendendum.

16. vndec. Euc.
2. sexti Euc.

COROLLARIVM I.

Præsens demonstratio perinde locu suum obtinet, quamuis triangulum d f per verticem d actum non esset per axe d c, sed f e esset quęuis ordinatim applic ta ad diametrum a b: perinde, inqua verum est si per l agatur l h parallela pe pendiculo d c per d verticem coni & p c centrum ellipseos ducto, rectam c esse triplam rectæ h g. Hactenus etiam d monstrata pariter vera sunt: licet d a b f ret homœoconicum habens pro basi ctionem conicam.

COROLLARIVM. II.

Hinc apertum est si recta c d man semper parallela rectæ h l circumfera per ambitum figuræ e c f n b centr grauitatis portionis cylindri conc superficie ita descriptâ esse in rectâ g per g ductâ & æquidistante rectæ c d enim eodem planè modo demonstratur, quo ostensum fuit portionis coni centrum grauitatis esse in rectâ g d, vt patebit penitus inspicienti.

COROLLARIVM. III.

Hinc quoque apertum est quadrantem spatii quod portioni cylindri aut cylindracei iam descripti, cuius basis o p r opposita basi f e b transeat per d verticem, æquiponderat librâ ex c suspensâ, esse æquale spatio quod æquiponderat coni, vel homœoconici portioni habenti verticem d, & eandem basim cum portione cylindri, vel cylindracei.

Semidiameter a c ita diuidatur in q, vt a c ad c q sit vt quaternarius ad ternarium. Quoniam conicum vel homœoconicum cuius centrum grauitatis est l, est tertia pars cylindri vel cylindracei eadem basi f c e & eâdem altitudine præditi; si intelligantur tria eiusmodi conica vel homœoconica habere idem centrum l, æquiponderans tribus ex q erit ad ipsa tria vt recta c h ad c q, siue vt recta c g ad c a; (nam vt c g, c h ita ponuntur c a, c q; ergo alternando vt c g, c a, ita c h, c q) sed sicut c g recta ad c a, ita est cylindri vel cylindracei pars memorata ad æquiponderãs ex a; ergo vt æquiponderans ex q ad magnitudinem compositam ex tribus, ita æ- 5. quarti huius coroll. 5

quiponderans ex a ad cylindri vel cylindracei partem iam dictam; & alternando æquiponderans ex q est ad æquiponderans ex a vt ipsæ suspensæ magnitudines; quæ cùm sint æquales, ipsa æquiponderantia erunt etiam æqualia.

Rursus quoniam æquiponderans ex q compositæ magnitudini æquat æquiponderans ex a cylindri vel cylindracei parti memoratæ, triens istius æquiponderantis ex a æquale erit spatio quod ex q æquiponderat conico vel homœoconico cuius centrum l: ergo si brachium c q mutetur in brachium c a, æquiponderans ex a conico vel homœoconico erit ad æquipon-
a. sec. huius. derās ex q eidem conico vel homœoconico vt est q c ad a c, hoc est ternarius ad quaternarium: ergo cùm æquiponderans ex q conico vel homœoconico sit triens vel quatuor venciæ æquiponderantis ex a cylindri vel cylindracei memoratæ parti, æquiponderās ex a conico vel homœoconico erit tres vnciæ vel quadrans spatij quod ex a æquiponderat cylindri vel cylindracei memoratæ parti.

Propositio V.

Sit a c bifariam in b secta diameter cuiusuis ellipseos vel hy perbolæ l c m: recta a k tangat in a ellipsim, illique proinde æquidistans sit l b m. Plano l c m insistat ad rectos angulos planum d b c secans ipsum planum l c m secundum diametrum a c; in eo inuentum sit punctum d vertex coni cuius cum plano l c m sectio communis sit ellipsis vel hyperbola l c m; id enim inueniri potest ex conicis, cùm latus figuræ rectũ quod ibi inter data ponitur habeatur, si vt a c diameter prima ad secundam quam inter data ponimus, ita fiat ipsa secunda ad tertiam quandam quæ ipsum latus rectum æquat, vt ex definitione secundæ diametri constat. Solidum istâ superficie conicâ inclusum & plano per verticem d acto secante planum l c m secundum ordinatim applicatam diametro a c, voco *condictum hy-*

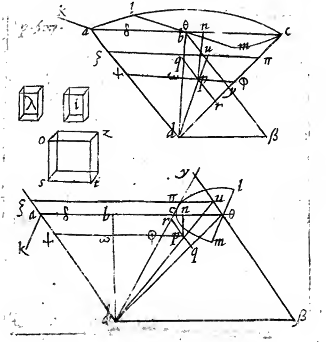
54. & 55. primi conic. 4 defi-nit. se-cund. prim conic.

mœoconicum: hyperbolicum qu
dem si basis eius sit hyperbol
segmentum; ellipticum, si ell
pseos; parabolicum si fuerit pla
plano d a κ paralleli sectio cu
superficie homœoconicâ. His i
definitis, propositum sit.

Inuenire parallelepipedum æ
quale condicto homœoconic
parabolico & eius grauitat
centrum; ac proinde spatiu
quod ex centro b æquiponder
ipsi, posito libræ perpendicul
quod transeat per verticem ho
mœoconici & per cētrum ellip
hyperbolæque commune.

Sit planum l θ y parallelum plano d a
secans diametrum a c in quocunque pu
cto θ citra vel vltra c diametri ipsiús te
minum posito, propositum verò sit inuen
re parallelepipedum æquale solido h
mœoconico comprehenso planis d θ
y θ l & superficie homœoconicâ.

Quoniam recta θ y est parallela lat



d a triãguli d a c per axem, ſectio homœoconici elliptici y θ l m erit parabola cuius diameter θ y ; ordinatim applicata l θ m; omniaque plana plano y θ l parallela facient ſectiones parabolicas quarum diameter erit ſectio in trianguló d a c parallela rectæ θ y, & in parte quidem y θ c conſtitutarum baſes erunt ordinatim vtrinque applicatę ad θ c partem diametri ſectionis l c m, eruntque parallelæ ad l m rectam; in parte verò y θ d conſtitutarum baſes erunt ordinatim applicatæ ad rectam θ d, quæ trianguli d l m baſim l m bifariam ſecat in θ, eruntque parallelæ ad ipſam baſim l m

cùm ipsa l m sit quoque sectio plani d 6
incidentis in plana parabolarum paralle
Porro sectionem eiusmodi esse parabola
ostenditur in vndecimâ primi conicoru
quandoquidem d est vertex coni inu
tus paulò antè. Cæterùm punctum
quando l c m est circulus vbicunque
matur potest esse vertex coni descri
motu rectæ cuius punctum d maneat, i
verò per circuli peripheriam circum
ratur, vt ex definitione coni palàm fit. V
1. defi- rùm etsi l c m foret ellipsis distincta
nit. lib. circulo posset vbiuis sumi punctum d,
prim conic. hiloque minùs parabola foret sectio illa
qua nunc agimus; istud demonstran
nos in libello quem scriptum haben
De communi sectione plani & turbinatæ
perficiei ex puncto quiescente à lineâ rectâ
ellipsim, parabolam, & sectiones oppositas
cumductâ descriptæ; eum tamen quam
paratum nec instituto nostro inutil
in lucem modo non damus, quod theo
mate ita extenso carêre possit præsens t
ctatus.

Recta θ y ita secetur in u vt sicut ter
rius ad binarium ita sit portio y u ad u
Con- ad hoc ex secundi equiponderanti
structio propositione 8. vt punctū u sit centrum
proble- rabolæ cuius diameter b y, & basis l
matis. Iuncta recta d u ita secetur in p, vt d p
tripla rectæ p u, atque per p agatur p n
quidistans rectæ d b, & occurrens dia

tro a c in n. Fiat parallelepipedum s z cuius basis s x sit æqualis segmento parabolæ cuius basis l m, diameter θ y, altitudo autem x z æquans trientem altitudinis homœoconici parabolici: atque vt semidiameter a b ad b n, ita fiat s z parallelepipedum, ad λ parallelepipedum. Dico punctum p esse centrum grauitatis homœoconici parabolici; ipsum esse æquale parallelepipedo s z; & solido λ æquale esse graue quod ex a pendens, librâ ex b suspensa, posito perpendiculo b d, æquiponderat homœoconico parabolico vt iacet manenti.

Per p agatur q r parallela rectæ b y occurrens lateribus trianguli θ d y in q & r; sicut ergo θ y recta & diameter segmenti diuisa est in u, ita q r diameter similis segmenti diuisa erit in p; cùm ergo parallelæ ad θ y rectam intra triangulum θ y d sint (vt ostensum est) diametri segmentorum parabolæ similium, ex sectione homœoconici generatorum, & similiter secentur, recta d u transibit per centra grauitatis omnium sectionum; ergo centrum grauitatis homœoconici est in rectâ d u per vndecimam libri antecedentis; & per corollarium secundum duodecimæ erit p centrum grauitatis homœoconici prædicti; quod erat vnum ex propositis. 4. sexti Euc. in Schol.

Rursus quoniam parallelepipedum s z habet basim s z æqualem basi homœoconici, & trientem altitudinis illius; eius modi parallelepipedum erit triens cylin dracei præditi eadem altitudine & eaden basi, vt ex vndecimâ citati libri apertun est; sed vt constat ex corollario quinto de cimæ octauæ libri eiusdem, homœoconi cum est etiam triens eiusdem cylindracei ergo homœoconicum & parallelepipe dum.s z sunt æqualia, quod erat alterur ex propositis.

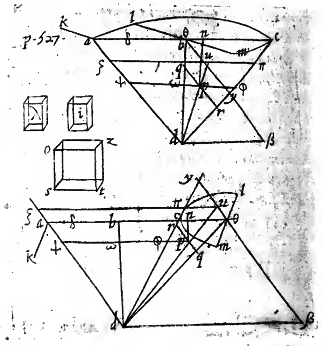
Denique quoniam perpendiculo b parallela est recta p n, transiens per p cer trum grauitatis, ipsum homœoconicui eiusmodi rectâ p n sustentatum maneb vt iacet; ergo vt brachium a b ad longitu
6. quadrat. parab. dinem b n, ita erit homœoconicum pe dens ex n ad graue ex a æquiponderan sed ita est s z ipsi homœoconico æquale λ; ergo parallelepipedum λ æquale est sol do, quod ex a pendens æquiponderat hc mœoconico, posito libræ perpendicu b d; quod erat tertium ex propositis.

SCHOLIVM.

In designandis solidis semel definitis sup fluum & obscuriùs existimaui omnes recen literas quibus illa consignantur; satis e putaui esse eas adscribere quæ in plano d a c currunt. Exemplo rem declaro. Vt solidum mœoconicum denotem comprehensum pl d θ l, l θ y & superficie conicâ ex vertic *manente descriptâ motu lineæ d a per ambitum l c m ellipsis vel hyperbolæ, vtor his verbis* solidum homœoconicum d θ y; *nam hoc ipso quod definitio illius mente tenetur, subauditur basis l c m quam linea θ c inter enuntiatas d θ, d y intercepta indicat, & plana d θ l, y θ λ per rectas d θ, y θ quantum satis est significantur. Atque hunc modum summatim exprimendi solida notaueris in antecedentibus, frequentiúsque aduertes in consequentibus, quod semel declarare tibi debui, Lector beneuole.*

PROPOSITIO VI.

In epilogismum transferre præcedentis propositionis diagramma, positâ l θ m primùm diametro circuli deinde tribus eius quintis.



Sit igitur primò l c m ſemicirculus, ordinatimque applicata l m ſubtendens arcum l c m ſecet diametrum a c in θ puncto congruente in hoc caſu cum centro b: propoſitum verò ſit ratiocinio inuenire parabolicum b d y homœoconicum, & illi æquiponderans librâ ex b centro circuli ſuſpensâ. Per u agatur u π occurrens lateri d c in π, & lateri a d in ξ: per agatur ſimiliter p ω æquidiſtans baſi a c, occurrēs lateribus d a, d c in ↓, & φ, perpendiculo autē d b in ω, quoniā c d recta eſt c y vt denarius ad quinarium, hoc eſt ſicut a c ad θ c, (eſt enim θ y lateri d a par lela in triãgulo a d c)& quoniã in triãgulo θ y c basi θ c paralella est u π, sicut θ y ad u y, ita erit θ c ad u π; ergo cùm θ y sit ad u y vt quinque ad tria, θ c erit ad u π vt quinque ad tria; eandem ob causam c y erit ad y π vt quinque ad tria; erit ergo ex æquo vt denarius ad ternarium ita d c ad y π; & ita etiam erit a c ad u π; ergo tota d π ad d c est vt denarius ad octonarium, siue vt quinarius ad quaternarium.

Quoniam verò recta d u ita secta est in p vt d u sit ad d p sicut quaternarius ad ternarium, erit u π ad p φ sicut quaternarius ad ternarium; cùm ergo tota a c sit ad u π sicut denarius ad ternarium, siue sicut quadraginta ad duodecim; u π autem ad p φ sit sicut duodecim ad nouem; ex æquo tota a c ad p φ erit sicut quadraginta ad nouem.

Præterea quoniam vt recta d c ad π d, ita est a c basis trianguli a d c, ad parallelam ξ π, cùm recta d c ad d π sit vt quinque ad quatuor, erit a c ad ξ π vt quinque ad quatuor: ergo cũ vt octo ad decẽ ita sit ξ π ad a c, & vt decem ad tria ita sit a c ad u π; erit ex æquo ξ π ad u π, vt octonarius ad ternarium, & semissis rectæ ξ π ad u π erit vt ad ternarium quaternarius. Quoniam ergo vt ξ π ad u π ita est ψ φ ad φ π ex scholio quartæ sexti Euc. apud Clauiũ; erit ω φ semissis rectæ ψ φ ad φ p sicut est quaternarius ad ternarium, & per conuersionem rationis sicut quaternarius ad vnitatem, ità erit ω φ ad ω p; ergo ω p est quadrans rectæ ω φ; ergo φ p est ad p ω vt tria ad vnum; siue vt nouem ad tria: sed p φ continet, vt ostensum est, nouem partes cuiusmodi a c continet quadraginta, & semidiameter uiginti; ergo cuiusmodi semidiameter continet viginti partes, eiusmodi tres continet recta ω p vel b n. Quoniam verò vt semidiameter a b ad b n ita est solidum cuius centrum grauitatis est p, ad æquiponderans ipsi ex a suspensum; ipsum homœoconicum parabolicum cuius centrum grauitatis est p, erit ad æquiponderans ex a, vt viginti ad tria.

Rursus completo parallelogrãmo a d b θ, perpendiculares ex d in latera a θ, θ β demissæ erunt in ratione laterum d a, a θ ex primâ huius. Præterea quoniam solidum cuius cẽtrum grauitatis est p, est homœoconicum, & basim habet parabolam θ y l m quæ continet duas tertias rectanguli sub θ y & l m rectis contenti, vt constat ex primâ libri antecedentis; altitudo verò est perpendicularis ex d in rectam θ y (erit enim hoc ipso & perpendicularis in planũ parabolæ, cùm planum y θ l sit rectum ad planum a d c, vt pote incedens per rectam l θ perpendicularem ad planum a d c) solidum, cuius centrum p, erit tertia pars parallelepipedi cuius altitudo sit perpendicularis ex d in rectam θ y demissa, basis quadratum æquale duabus tertiis rectanguli contenti sub rectis y θ, l m.

Vt diameter a c ad θ c portionem sui interceptam ordinatim applicatã l m, & puncto c, ita fiat reliqua a θ portio diametri ad $\theta\,\delta$. Dico parallelepipedum cuius basis sit æqualis duabus nouenis rectanguli contenti sub rectã $\theta\,\delta$ & sub l m, altitudo verò sit æqualis perpendiculari ex d in planum circuli demissæ, esse æquale homœoconico parabolico cuius grauitatis centrum est p. Quoniam enim vt a c ad θ c, ita est a d ad θ y, eo quod in triangulo a c d basi a d parallela sit θ y; & vt a c ad θc, ita ex constructione est a θ ad $\theta\,\delta$; ergo vt a d ad θ y, ita erit a θ ad $\theta\,\delta$, & alternando vt a d ad a θ; ita θ y ad $\theta\,\delta$, ergo vt a d ad a θ, ita erit, 1. sexti positâ eadem altitudine l m, rectangulum Euc. sub θ y, l m contentum, ad rectangulum sub $\theta\,\delta$, l m comprehensum.

Rursus quoniam vt a d recta ad a θ ita est altitudo ex d in basim l c m ad altitudinem ex d in basim y θ l, vti priùs ostendimus; ergo vt altitudo parallelepipedi iam dicti cuius basis est duo trientes rectanguli contenti sub rectis y θ, l m; ad altitudinem ex d in planum l c m, quæ competat alteri parallelepipedo habenti basim 32. vndec. duorum trientum rectanguli sub $\theta\,\delta$, l m Euc. contenti; ita reciprocè erit huius basis ad basim illius; ergo sunt æqualia inuicem; ergo triens istius est æqualis homœoconico iam memorato; atqui trienti istius æquale est parallelepipedum cuius eadem sit altitudo, basis autem triens sit baseos constantis duobus trientibus rectanguli contenti sub θ δ, l m: ergo cùm triens duorum trientum sint duæ nouenæ, parallelepipedum cuius basis æquet duas nouenas rectanguli sub θ δ, l m comprehensi, & altitudo sit perpendicularis ex d in planũ l c m, est æquale homœoconico iam memorato, sicut probandum susceperamus; quæ demonstratio habet locum in vtroque casu, & in quouis alio persimili etiam cum l m foret in hyperbolâ.

In primo igitur casu, quem nunc tractamus, quoniam punctum θ congruit centro b, erit l m diameter, ipsi a c æqualis, ac proinde sicut θ c est semissis rectæ a c, ita θ δ erit semissis rectæ a θ; est ergo θ δ quadrans diametri; ergo rectangulum sub θ δ & sub l m est quadrans quadrati quod potest diameter a c; ergo ex corollario vigesimæ sexti Euclidis, est æquale quadrato semidiametri b c; ergo parallelepipedum cuius basis sint duæ nouenæ quadrati b c, & altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam, æquale est homœoconico parabolico cuius cẽtrũ p.

Prererea quoniam vt semidiameter a b ad longitudinem b n, hoc est vt viginti ad tria, ita librâ a n suspẽsâ ex b, est homœoconicum parabolicum cuius centrum grauitatis p, ad æquiponderans ex a, posito perpendiculo b d; vt autem viginti ad tria siue centum octoginta ad viginti septem, ita sunt duæ nouenæ, siue quadraginta centesimæ octogesimæ ad sex centesimas octogesimas, hoc est ad vnam trigesimam: ergo solidū λ quod homœoconico dicto æquiponderat ex a, æquat parallelepipedū cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planū l c m demissa, basis verò sit vna trigesima quadrati quod potest semidiameter b c; quod primò faciendum erat.

Secundo arcus l c m subtendatur rectâ l m quæ sit tres quintæ diametri a c, prout positum fuit in secundæ huius epilogismo; propositum verò sit numeris definire parabolicum θ d y homœoconicum, & illi æquiponderans ex a, librâ de b centro circuli suspensâ.

Eadem constructio quæ in priori casu cum proportione adhibeatur, eademque calculi methodus, iuxta quam y π continebit tres partes, cuiusmodi y c quinque, & cuiusmodi d c quæ decupla est rectæ y c, complectitur quinquaginta : ergo sicut quinquaginta ad tria, ita est d c ad π y, & ita etiam est a c ad π u : ergo d c ad d π est vt quinquaginta ad quadraginta octo, vel vt viginti quinque ad vigintiquatuor. Quoniam ergo recta d u ita secta est in p, vt d u sit ad d p sicut quaternarius ad ternarium, erit u π ad p φ sicut quaternarius ad ternarium. Cùm ergo tota a c sit ad u π sicut quinquaginta ad tria, vel ducenta ad duodecim; u π autem sit ad p φ sicut quatuor ad tria, vel duodecim ad nouem; erit ex æquo vt ducenta ad nouem, ita a c recta ad p φ.

Præterea quoniam vt d c ad π d, ita est a c basis trianguli a d c ad parallelam ξ π, cùm recta d c ad π d sit vt viginti quinque ad viginti quatuor, erit a c ad ξ π vt vigintiquinque ad vigintiquatuor, vel vt quinquaginta ad quadraginta octo: ergo cùm vt quadraginta octo ad quinquaginta, ita sit ξ π ad a c, & vt quinquaginta ad tria ita sit a c ad u π, erit ex æquo vt quadraginta octo ad tria, ita recta ξ π ad u π. Rursus quoniam vt ξ π ad u π, ita est ψ φ ad p φ ex scholio Clauij, erit (occursu rectarum d b,
4. sexti Euc. ψ φ posito in ω) ω φ semissis rectæ ψ φ ad p φ vt viginti quatuor ad tria, vel vt octo ad vnum: ergo diuidendo vt septem ad vnum, vel sexaginta tria ad nouem, ita ω p ad p φ: sed p φ continet, vt ostensum est, nouem partes cuiusmodi a c ducentas, & semidiameter centenas; ergo ex æquo cuiusmodi semidiameter centenas continet, eiusmodi ω p vel b n complectitur sexaginta tres.

Rursus quoniam recta θ c est decima pars rectæ a c, & vt a c ad θ c ita est a θ ad θ δ, erit θ δ nouem centenæ partes diametri a c; ergo parallelepipedum cuius basis sint duæ nouenæ rectanguli contenti sub l m tribus quintis diametri a c, & sub nouem centesimis diametri eiusdem, altitudo verò æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam æquale est in secundo casu homœoconico cuius centrum p. Cùm ergo duæ nouenæ centesimarum nouem sint vna quinquagesima; basis eiusmodi parallelepipedi erit rectangulum sub l m & sub vnâ quinquagesimâ diametri, vel vnâ vigesimâ quinta semidiametri.

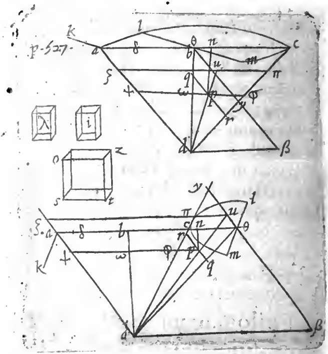
Rursus quoniam vt a b ad b n, hoc est vt centum ad sexaginta tria, ita est vna quinquagesima ad sexaginta tres quinquies-millesimas, & ita etiam est homœoconicũ iam dimensum ad λ suum ex a æquiponderans, perpendiculo b d, librâ ex b suspensâ; eiusmodi æquiponderans erit parallelepipedum cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planum l c m demissa, basis verò rectangulum sub l m & sub sexaginta tribus quinquies - millesimis diametri a c.

Propositio VII.

Epilogismum inire eiusdem propositionis quintæ posito arcu l c m hyperbolæ primùm segmento noto, deinde segmento in quo c θ recta æquet semidiametri

bc duas ſeptimas partes prouτ poſuimus in tertiâ.

Sit igitur l c m ſegmentum hyperbolæ notum, id eſt c θ, θ l, a c ſint inuicem æquales, ſitque condicta l θ perpendicularis ad c θ; propoſitum verò ſit computare parabolicum θ d y homœoconicum, & illi ex a æquiponderans librâ ex b centro hyperbolę ſuſpenſâ, perpendiculo b d.



Eadem constructio, quæ in proximè superioris propositionis duplici casu, cum proportione ponatur. Quoniam c d recta est ad c y, vt a c recta ad θ c, erunt c d, c y æquales, cũ a c, θ c ponantur etiã æquales in isto casu. Prætereà sicut in prioris propositionis duplici casu ostensum est, y π continebit tres partes, cuiusmodi y c quinque complectitur; ergo cùm y c, d c sint æquales, sicut quinque ad tria ita est d c ad π y, & ita etiã est a c ad π u: ergo d c ad d π est vt quinque ad septem: quoniam verò recta d u ita secta est in p vt d u sit ad d p sicut quaternarius ad ternarium, erit u π ad p φ sicut quaternarius ad ternarium, vel duodecim ad nouem. Cùm ergo tota a c sit ad u π sicut quinarius ad ternarium, hoc est sicut viginti ad duodecim; u π autem sit ad π φ sicut quaternarius ad ternarium, hoc est sicut duodecim ad nouem; ex æquo tota a c ad p φ erit sicut viginti ad nouem; vel quadraginta ad octodecim.

Rursus quoniam vt d c ad π d, ita est a c basis trianguli a d c ad parallelam ξ π; cũ recta d c ad π d sit vt quinque ad septem, erit a c ad π ξ vt quinque ad septem: ergo cùm vt septem ad quinque ita sit π ξ ad a c, & vt quinque ad tria ita sit a c ad u π, erit ex æquo π ξ ad u π, vt septem ad tria. Quoniam ergo vt ξ π ad u π, ita est ψ φ ad p φ ex Scholio Clauij; erit (occursu rectarum d b, ψ φ posito in ω) ω φ semissis rectæ 4. sexti Euc.

$\psi\varphi$ ad φ p sicut est septenarius ad senarium: & cõponendo vt tredecim ad sex, vel vt triginta nouẽ ad octodecim ita ω p ad φ p: sed φ p continet, vt ostensum est, octodecim cuiusmodi a c complectitur quadraginta, & semidiameter a b viginti: ergo ex æquo vt triginta nouem ad viginti, ita est ω p vel b n ad a b semidiametrũ. Quoniam verò librâ ex b suspensâ perpendiculo b d, vt semidiameter a b ad b n, ita est solidum cuius centrum grauitatis est p, ad æquiponderans ipsi ex a suspensum; ipsum homœoconicum parabolicum cuius grauitatis centrum est p, erit ad æquiponderans ex a vt viginti ad triginta nouem.

Rursus quoniam rectæ θ c, a c sunt ęquales, & vt a c ad θc, ita est aθ ad $\theta\delta$, erit $\theta\,\delta$ ipsi θ a ęqualis: ergo parallelepipedũ cuius basis sint duæ nouenæ rectanguli contenti sub l m duplâ diametri a c, & sub a θ duplâ quoque eiusdem diametri a c, hoc est, sint duæ nouenę quadrati quod potest dupla rectæ a c, altitudo verò æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam, æquale est homœoconico parabolico cuius centrum p: ergo cùm quadratum a θ sit quadruplum quadrati a c, parallelepipedum cuius basis sint octo nouenæ quadrati a c, altitudo verò sit perpendicularis ex d in planũ l c m demissa æquale est homœoconico parabolico cuius centrum p: ergo cum quadratum a θ ſit quadruplum quadrati a c, parallelepipedum cuius baſis ſint octo nouenæ quadrati a c, altitudo verò ſit perpendicularis ex d in planum l c m demiſſa, æquale eſt homœoconico parabolico cuius centrum p. 20. ſexti Euc. in coroll.

Præterea quoniam vt ſemidiameter a b ad longitudinem b n, hoc eſt vt viginti ad triginta nouem, ita librâ ſuſpensâ ex b, perpendiculo b d, eſt homœoconicum parabolicum centro p affectum, ad æquiponderans ex a: vt autem viginti ad triginta nouem ita ſunt octo nouenæ ad viginti ſex decimas quintas: ergo homœoconico iam dicto ſolidum æquiponderans ex a æquat parallelepipedum cuius altitudo ſit perpendicularis ex d in planum l c m demiſſa, baſis verò ſit viginti ſex decimæ quintę quadrati a c.

Secundò recta c θ ſit ſemidiametri b c duæ ſeptimæ. Cùm iſte caſus non differat à priore niſi ὑλικῶς & vt vulgò dicitur *materialiter*, ſatis eſſe duxi ſummam epilogiſmi referre. Inuenietur ergo recta d c ad π y, item a c ad π u eſſe vt triginta quinque ad tria, & d c ad d π vt triginta quinque ad triginta ſeptem: ſed vt d c ad d π, ita a c ad π ξ: ergo π ξ ad a c eſt vt triginta ſeptem ad triginta quinque: ſed vt triginta quinque ad tria, ita eſt a c ad π u: ergo ex æquo vt triginta ſeptē ad tria, ita eſt ξ π ad π u, &

$\psi \varphi$ ad φ p: ergo vt triginta ſeptem ad ſex, ita $\omega \varphi$ ad φ p, & componendo vt quadragintatria ad ſex, ita ω p, ad φ p.

Rurſus quoniam a c ad π u eſt vt triginta quinque ad tria, vel centum quadraginta ad duodecim: π u autem ad φ p eſt vt duodecim ad nouem, erit ex æquo a c ad p φ vt centum quadraginta ad nouem, & a b ad p φ vt ſeptuaginta ad nouem. Præterea quoniam a b ad p φ eſt vt ſeptuaginta ad nouē vel vt quadringēta viginti ad quinquaginta quatuor: p φ autem ad ω p eſt vt ſex ad quadraginta tria, vel vt quinquaginta quatuor ad trecenta octoginta ſeptem, ergo ex ęquo a b ad ω p vel b n erit vt quadringenta viginti ad trecenta octoginta ſeptem.

Rurſus quoniam a c ad c θ eſt vt ſeptem ad vnum, & vt a c ad c θ, ita eſt θ a ad θ δ, erit θ δ octo, cuiuſmodi a c quadraginta nouem: & duę nouenę rectę θ δ erunt ſexdecim, cuiuſmodi a c quadringenta quadraginta & vnum: ergo parallelepipedum cuius baſis ſit rectangulum ſub l m & ſub ſexdecim quadringenteſimis quadrageſimis vnis diametri a c, altitudo verò perpendicularis ex d in planum l c m eſt æquale homœoconico parabolico cuius centrum p. Quoniam ergo vt a b brachiū ad longitudinem b n, ita eſt homœoconicum cuius centrum p ad ſuum ex a æquiponderans, librâ ex b ſuſpenſâ, poſito per-

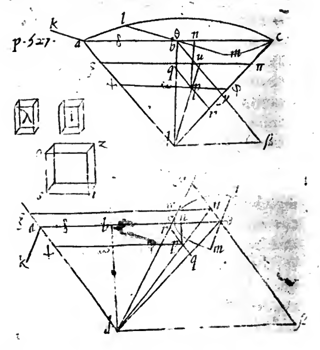
pen-

pendiculo d b; vt autem quadringenta viginti ad trecenta octoginta septem, hoc est vt a b ad b n, ita sunt sexdecim quadringentesimæ quadragesimæ vnæ ad centum septuaginta duas quinquies-millesimas centesimas quadragesimas quintas; solidũ λ æquiponderans iam dimenso homœoconico parabolico erit parallelepipedum cuius altitudo perpendicularis ex d ad planũ l c m, basis rectangulũ sub l m quatuor septimis diametri a c, & sub eiusdẽ diametri a c centum septuaginta duabus quinquies-millesimis centesimis quadragesimis quintis.

PROPOSITIO VIII.

Iisdem manentibus inuenire homœoconico elliptico & hyperbolico æquiponderans, posito libræ perpendiculo quod transeat per verticem homœoconici & per centrum ellipsi hyperbolæque commune.

Inueniatur ex præscripto vigesimæ quintæ libri quarti parallelepipedum s z æquale solido quod ex a pendens æquiponderat



cylindraceo cuius basis eadem sit quæ homœoconici elliptici, vel hyperbolici; linea autem describens superficiem cylindraceã sit parallela libræ perpendiculo d b. Dico quadrãtem eiuscemodi parallelepipedi esse æquale solido quod homœoconico elliptico, vel hyperbolico æquiponderat ex a pendens iisdem positis. *Istud apertum est ex corollario tertio quartæ propositionis.*

COROLLARIVM I.

Quoniam per quintam inuentum est solidum λ quod iisdem positis æquiponderat homœoconico parabolico; & ex præsenti inuenta est quarta pars solidi s z, quæ æquiponderat homœoconico elliptico aut hyperbolico; si sumatur æquiponderantium differentia i, apertum est spatium i æquiponderare differentiæ qua homœoconicum parabolicum d l m θ y contentum planis d θ m, y θ m & superficie homœoconicâ superatur ab elliptico d θ l c m contento superficie homœoconicâ, & planis d θ l, l c m: vel qua hyperbolicum superatur à parabolico. Tradita igitur est methodus inueniendi, posito eodem perpendiculo, spatium i quod ex a pendens æquiponderet differentiæ modo memoratæ, quam *condictam* voco, & quæ continetur superficie homœoconicâ & planis y θ l, l c m.

COROLLARIVM. II.

Cùm ex vigesimâ quintâ prioris libri, in primo casu propositionis sextæ æquiponderans semicylindro sit parallelepipedum cuius altitudo est perpendicularis ex vertice d in planum l c m demissa, & basis duo trientes quadrati quod potest semidiameter; æquiponderans semicono cuius vertex d, erit parallelepipedum eadem altitudine constructum, cuius basis sit quadrans duorum trientum, id est sit sextans quadrati ex semidiametro. Quoniam ergo sextan æquat quinque trigesimas, planè constat deductâ vnâ trigesimâ quæ ex huius sextâ æquiponderat homœoconico parabolico, relinqui quatuor trigesimas vel duas decimas quintas eiusdem quadrati pro basi parallelepipedi eadem altitudine constructi & æquiponderantis differentiæ condictæ in primo casu allegato, quādo nimirum l c m est semicirculus.

At in secundo quando ordinatim applicata l m est tres quintę diametri a c, cùm æquiponderans portioni cylindri eadem basi præditæ sit ex corollario secundæ parallelepipedum cuius altitudo est perpendicularis ex d in planum l c m, basis verò rectangulum comprehensum sub l m & sub tribus vigesimis quintis semidiametri, aut sub tribus quinquagesimis diametri; quadrans trium quinquagenarum erit tres ducentesimę. Quoniam ergo tres ducentesimæ æquant septuaginta quinque quinquies-millesimas, liquet deductis sexaginta tribus eiusdem modi sub quibus & sub eadem l m basis parallelepipedi λ altitudine iam memoratâ præditi, comprehenditur ex huius sextâ, relinqui duodecim quinquies-millesimas, hoc est tres millesimas ducentesimas quinquagesimas diametri a c, sub quibus & sub eadem l m comprehendatur basis parallelepipedi eadem altitudine præditi, & æquiponderantis differentiæ condictæ in secundo casu sextæ propositionis iam laudatæ.

Similiter cùm in primo casu septimæ æquiponderans portioni cylindracei eadem basi præditæ sit ex corollario tertiæ huius libri , vel ex corollario quarto vigesimæ quintæ antecedentis libri, parallelepipedũ cuius altitudo est perpendicularis ex d in planum l c m, basis verò octo trientes quadrati quod potest diameter a c ; quadrans octo trientum erũt duo trientes. Quoniam ergo duo trientes æquant decem decimas quintas, manifestum est si eæ deducantur de parallelepipedo λ, hoc est ex septimâ iam laudatâ de viginti sex decimis quintis eiusdem quadrati a c , relinqui sexdecim decimas quintas eiusdem quadrati a c, quæ æquiponderent differentiæ condictæ.

Demum cùm in secundo casu eiusdem septimæ æquiponderans portioni cylindracei eadem basi l c m , qua homœoconicum hyperbolicum d c l m præditæ, sit ex corollario tertiæ parallelepipedum cuius altitudo est perpendicularis ex d in planum l c m demissa; basis verò rectangulum comprehēsum sub m l & sub diametri a c sexdecim centesimis quadragesimis septimis; quadrans erit quatuor eiusmodi partes, ac proinde parallelepipedum dictâ iam altitudine constructum, & habens basim æqualem rectãgulo sub m l & sub quatuor centesimis quadragesimis septimis diametri a c contento. Quoniam ergo quatuor centeſimæ quadrageſimæ ſeptimæ æquant centum quadraginta quinquies-milleſimas centeſimas quadrageſimas quintas, apertũ eſt ſi eæ deducãtur de parallelepipedi λ baſi, hoc eſt, ex ſeptimâ iam laudatâ, de centum ſeptuaginta duabus eiuſdem menſuræ partibus, relinqui triginta duas quinquies milleſimas centeſimas quadrageſimas quintas diametri a c, ſub quibus & ſub m l comprehenſum rectangulum ſit baſis parallelepipedi dictâ altitudine erecti, & quod differentiæ condictæ æquiponderet.

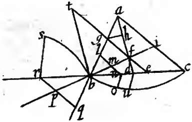
SCHOLIVM.

In corollario primo iuſsimus ſumi differentiam ſolidi λ & quartæ partis s z vt haberetur æquiponderans differentia condictæ; iſtud verò intelligi debet quando brachium libræ ſuſtinentis homœoconicum parabolicum eſt ad eaſdem partes obuerſum ad quas brachium libræ ſuſtinentis homœoconicum ellipticum aut hyperbolicum: ſi enim ad oppoſitas partes brachia forent conuerſa, ſumma ex quartâ parte ſolidi s z & ex ſolido λ exhiberet æquiponderans quæſitum. Prætermiſimus tamen iſtum caſum, quia nobis neceſſarius non eſt ad præſentem tetragoniſmum, vt ex demonſtrandis patebit, aliunde verò tot caſuum multitudine legentis attentio & animi vigor opprimi ſolet.

PROPOSITIO IX.

Sit triangulum quodcunque b a c cuius basim b c bifariam secet a d ex angulo a opposito educta; sit item vt octonarius ad quinarium ita b c ad b e, perque e acta sit e g æquidistans lateri e c, occurrens rectæ a d in f, & lateri b a in g. Ostendendum est vt se habet quaternarius ad vnitatem, ita esse rectam a d ad d f, & vt se habet ternarius ad binarium ita esse g f ad f e.

p.551.



Quoniam in triangulo a d c lateri a c parallela eſt f e, ergo vt c d ad d e, id eſt vt quaternarius ad vnitatem, ita eſt a d, ad d f. Per g agatur g h parallela rectæ b c occurrens in h rectę a d. Quoniam in triangulo a b c lateri a c parallela eſt g e, vt b e ad e c, ideſt vt quinarius ad ternariũ, ita b g, ad g a: ſimiliter quia in triangulo a b d lateri b d parallela eſt g h, vt b g, ad g a, ideſt vt quinarius ad ternarium, ita d h ad h a: ergo cùm diuiſâ d a in octo partes, recta d f contineat duas, recta h a tres, reſidua h f continebit etiam tres; ergo vt ternarius ad binarium, ita h f ad f d: ſed vt h f ad f d, ita g f ad f e (eò quòd triangula g f h, e f d ſint ſimilia) ergo vt ternarius ad binarium, ita g f ad f e: ergo d f eſt quadrans rectæ a d, & g f ad f e eſt vt ternarius ad binarium, quod erat oſtendendum.

2. ſexti Euc.

COROLLARIVM. I.

Hinc patet ſi per b & f ducatur recta b f occurrens lateri a c in i (quæcunque l n rectæ g l parallela ducatur in triãgulo a b c) vt g f ad f e, hoc eſt vt ternarius ad binariũ, ita eſſe rectam l m ad m n; in triãgulo enim a b c, recta b i educta ex triangulo b oppoſito ſicut ſecat baſim a c in i, ita & omnes ipſi baſi parallelas, quarum vna eſt g e; ſed g f ad f e eſt vt ternarius ad binarium: ergo &c.

COROLLARIVM. II.

Si a b c sit triangulum per axem homœoconicæ figuræ, cuius basis sit ellipsis b o c, vel hyperbola b s circa diametrum b c descripta, cuius coniugata sit d u: & si eiusmodi solidum homœoconicum secetur plano quocunque l n o, vel q r s cuius cum triangulo a b c vel r b q sectio sit recta l n vel q r æquidistans lateri a c, & cum basi sit recta n o vel r s æquidistans rectæ d u; manifestum est sectionem plani l n o vel q r s cum homœoconico elliptico vel hyperbolico habere centrum grauitatis in rectâ i b productâ. Ostensum est enim in quintâ sectiones istas esse parabolas, quarū diametri sint l n, q r: ergo cum l n, q r ita sectæ sint in m, p vt portiones l m, q p sint ad portiones m n, p r sicuti ternarius ad binarium, segmenta eiusmodi parabolarum habebunt centrum grauitatis in punctis m & p, ex octauâ secundi Æquiponderantium Archimedis.

COROLLARIVM III.

Inde vlterius efficitur centrum grauitatis differentiæ condictæ de qua agit corollarium primum præcedentis esse in rectâ i b p; cum enim omnes eius sectiones cum plano parallelo ipsi l n o habeant centrum grauitatis in rectâ i b p, tota differentia habebit centrum grauitatis in eadem i b p ex vndecimâ libri quarti.

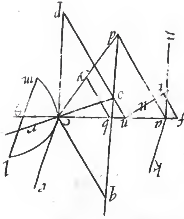
COROLLARIVM. IV.

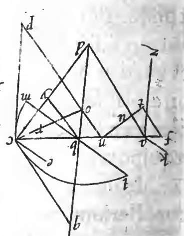
Si per b ducatur recta b t æquidistans rectæ d a, & occurrens rectæ e f in t, ostendi ex dictis potest rectam f t esse lateri a c æqualem, rectam verò b t esse ad d a, vt est quinarius ad quaternarium. Quoniam enim in triangulo t b e basi t b parallela est d f; sicut b d est quintupla rectæ d e, ita b t
4. sexti Euc. in coroll. erit quintupla rectæ d f; sed d f est quadrans rectæ d a; ergo recta b t est ad rectam d a vt quinarius ad quaternarium. Rursus quoniã in triangulo a d c lateri a c parallela est f e; sicut a d ad f d, ita erit a c ad f e; sed a d ad f d est vt quaternarius ad vnitatem; ergo a c ad f e est vt quaternarius ad vnitatem,
2. sexti Euc. siue vt recta b d ad d e: sed vt recta b d ad d e, ita est t f ad f e (eò quòd in triangulo
9. quinti Euc. t b e lateri t b parallela sit f d) ergo recta t f æqualis est lateri a c; ac proinde recta t f ad t b est vt recta a c ad quinque quadrantes rectæ a d.

PROPOSITIO X.

Reuocatâ figurâ propositionis quintæ, ita secta sit c a diameter in n,vt ipsa c a sit ad c n sicuti octonarius ad quinarium; per n (quod voco punctum suspensionis secundæ notum) acta sit n o lateri a d æquidistans & occurrens rectæ b d in o. Propositum sit inuenire, posito n o perpendiculo libræ ex n suspensæ, spatium quod æquiponderet differentiæ *conditæ* de qua agit primum octauæ corollarium, pendens ex brachio ęquante perpendicularem cadentem ex a in rectam b y & ex centro b eductam parallelôs lateri a d.

Vt quatuor ad quinque ita fiat solidum i inuentum in primo iam allegato corollario octauæ propositionis ad solidum s: ad ipso ex n excitetur perpendicularis n t æqualis perpendiculari cadenti ex a in rectã y b. Dico spatium quod, librâ t n suspensâ ex n, pendens ex t æquiponderat differentiæ conditæ vt iacet manenti & sustentatæ à librâ t n esse æquale solido s.





Perpendiculari ex a in rectam d b demiſſæ abſcindatur ex rectâ n t æqualis n u: item vt latus a d ad quinque quadrantes rectæ b d ita fiat ſolidum i ad ſolidum x : præterea per c agatur c p æquidiſtans rectæ b d, cui n o producta occurrat in p, & compleatur p o q c parallelogrammum , iungaturque eius diameter o c. Quoniam ex nonæ corollario tertio differentia condicta habet centrum grauitatis in recta o c r, quæ eſt diameter parallelogrammi p o q c producta; & quoniam poſito perpendiculo o d, brachio libræ æquante rectam n u, æquiponderans differentiæ condictæ eſt ſo-

lidum i: vt latus c q vel o p ad latus c p, ita erit ex primâ huius ęquiponderans i respondens perpendiculo o d, ad ęquiponderans ex u, quod perpendiculo n o respondet: sed o p latus ad c p est vt latus a d ad quinque quadrantes rectę b d ex quarto corollario præcedentis: ergo vt latus a d ad quinque quadrantes rectæ b d, ita est solidum i ad æquiponderans ex u: sed ita etiam est solidum i ad solidum x: 9. quinti Euc.
ergo æquiponderans ex u æquale est solido x.

Rursus quoniam a d, b y sunt parallelæ, perpendicularis ex a in rectam b y cadens æqualis erit perpendiculari ex b in rectam a d cadenti: & quoniam perpendicularis ex b ad rectam a d demissa se habet ad perpendicularem quæ ex a ad rectam b d demissa fuerit, sicuti se habet d b recta ad rectam a d (sunt enim b d, a d sinus toti, & perpendiculares sinus recti eiusdem anguli a d b; ergo vt sinus toti sine radii, ita sinus ipsi recti) brachium libræ interceptum perpendiculis a d, b y ex recta a b portionem semidiametro a b æqualem auferentibus, se habebit ad aliud brachium interceptun perpendiculis b d, a z ex rectâ a b portionem semidiametro a b æqualem auferentibus, vt se habet recta b d ad a d: ergo vt recta b d ad d a, ita est brachium n t ad n u; ergo per octauam secundi libri vt recta b d ad d a ita est x spatium ex u pendens æquiponderansque differentiæ condictæ, ad spatium ex t pendens eidemque æquiponderans differentiæ; illud sit λ.

Præterea quoniam vt solidum i ad solidũ x, ita ponitur recta a d ad quinque quadrantes rectæ d b; & vt solidum x ad solidum λ, ita ostẽsum est esse rectam b d ad d a: est ergo perturbata ratio istarum magnitudinum, atque solidum i ad solidum λ erit vt recta d b ad quinque quadrantes ipsius d b; est ergo solidum λ æquale quinque quadrantibus solidi i; sed solidum s ponitur etiam æquale quinque quadrantibus solidi i; ergo solida λ & s sunt æqualia inuicem: ergo solidum s pendens ex t æquiponderat differentiæ condictę, posito librę perpendiculo n o: ergo inuentum est solidum s prout iussum fuerat.

COROLLARIVM. I.

Si per t agatur t f recta ęquidistans lateri a d, occurrens diametro b a productæ in f, patet rectam n f esse æqualem rectæ a b: cùm enim ponamus rectam n t esse æqualem interuallo rectarum a d, b y; & cùm rectæ f t, n o ęquidistent eodem interuallo,
10. sexti Euc. ergo rectæ b a, n f erunt æquales; ac proinde ablatâ eadem a n, residuæ b n, a f erunt inuicem ęquales; erit etgo f a quadrans semidiametri a b.

COROLLARIVM II.

Quoniam in corollario ſecundo octauæ ſtatuimus quando baſis l c m eſt ſemicirculus, ſolidum i eſſe ęquale parellelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem cadentem ex d in planum l c m, baſis verò conſtet quatuor trigeſimis quadrati b c; ex præſenti apertè ſequitur librâ ex n ſuſpenſâ per n o perpendiculum, ſolidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ condictæ, eſſe æquale parallelepipedo eiuſdem altitudinis, habenti baſim conflatam ex quinque trigeſimis quadrati b c; ſed quinque trigeſimæ æquant ſextantem; ergo parallelepipedi æqualis ſolido s baſis eſt ſextans quadrati b c, & altitudo æquat perpendicularem quæ ex d in planum ellipſeos vel hyperbolæ cadit.

Similiter quoniam in eodem corollario concluſimus quando l m eſt tres quintæ diametri a c in circulo ex centro b deſcripto, ſolidum i eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m, baſis verò rectangulum ſub l m & ſub tribus milleſimis ducenteſimis quinquageſimis diametri a c: ex præſenti ſequitur librâ ex n ſuſpenſâ, perpendiculo n o, ſolidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ condictæ, eſſe æquale parallelepipedo eiuſdem altitudinis habenti baſim rectangulum ſub rectâ l m & ſub tribus milleſimis diametri a c comprehenſum.

Item quia in eodem corollario ſtatuimus quando l c m eſt ſegmentum hyperbolæ notum iuxta primum ſeptimæ caſum, ſolidum i eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem cadentem ex d in planum l c m, baſis verò ſexdecim decimas quintas quadrati a c: ex præſenti colligitur librâ ex n ſuſpenſâ, perpendiculo n o, ſolidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ condictæ, eſſe æquale parallelepipedo eiuſdem altitudinis habenti baſim quatuor trientes quadrati a c.

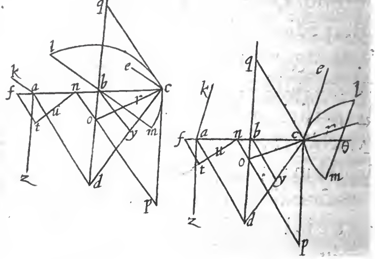
Poſtremò quandoquidem in eodem corollario probauimus, quando l c m eſt alterum hyperbolæ ſegmentum notum iuxta ſecundum ſeptimæ caſum, ſolidum i eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demiſſam, baſis verò ſit rectangulum ſub l m & ſub triginta duabus quinquiesmilleſimis centeſimis quadrageſimis quintis diametri a c; ex præſenti ſequitur librâ ex n ſuſpenſâ, perpendiculo n o, ſolidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ condictæ, eſſe æquale parallelepipedo eiuſdem altitudinis habenti baſim rectangulum ſub rectâ l m & ſub octo milleſimis vigeſimis nonis diametri a c comprehenſum.

PROPOSITIO XI.

Resumptâ figurâ præcedentis propositionis, linea quædam perpēdiculo n o manēti parallela intelligatur moueri per limbnm segmenti l c m, & ita describere superficiem cylindraceam; item ductâ per c tangente c e, ideóque ipsi l m æquidistante, intelligatur eiusmodi cylindraceū secari plano d c e in infinitū producto. Portio cylindracei definita planis d c e, l c m & superficie cylindraceâ vocetur *alter cune⁹ notus*, vt distinguatur à *primo cuneo noto* propositionis vigesimæ sextæ libri quarti.

His ita constitutis, propositum sit inuenire spatium quod ex puncto f pendens, librâ ex n suspensâ, perpendiculo n o, æquiponderet cunei alterius noti portioni inter quæuis condicta plana parallela ſeptæ.

p-556.



i·x·s·
λ·g·

Vt binarius ad ternarium ita fiat ſolidū s inuentum in præcedenti ad ſolidum g. Dico ſpatium g eſſe illud quod quæritur. Quoniam enim cuneus alter ad differentiam condictam ipſo incluſam ita ſe habet, vt ſi quocunque ad planum *k* a d ęquidiſtante plano ſecentur, ſectio cunei ſit, vt mox oſtendetur, ad ſectionem differentiæ condictę vt ternarius ad binarium, ipſum quoque cuneo ęquiponderans erit ad ęquiponderans condictę differentię vt ternarius ad binarium, prout ex vndecimâ anterioris libri constat: ergo spatium g æquiponderat cunei alterius noti designatæ portioni.

Sectionem autem eiusdem cunei esse ad sectionem differentiæ condictæ, vt est ternarius ad binarium ostenditur hoc pacto. Primùm quidem cunei sectionem esse parallelogrammum cuius duo latera parallela sint perpendiculo n o, eadem plane ratione probatur, qua in prioris libri vigesimâ primâ in causâ non multùm discrepãte; sectionem differentiæ condictæ esse parabolam cuius diameter sit parallela lateri a d constat ex quintâ huius; ex primâ verò antecedentis libri modo citati clarum est parabolæ segmentum esse duos trientes parallelogrammi cuius latus vnum sit ipsa segmenti basis, aliud oppositum sit tangens parabolam; & duo alia sint diametro segmenti parabolici parallela; ergo cunei sectio est ad sectionem condictæ differentiæ vt ternarius ad binarium: ergo inuentum est spatium ex præscripto problematis.

COROLLARIVM I.

Ex præcedentis secundo corollario & ex istâ demonstratione consequens fit primò quando arcus l c m est semicirculus, solidum g esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam, basis verò quadrantem quadrati b c: nam vt binarius ad ternarium, ita est sextans siue vnciæ binæ, ad quadrantem siue ad vncias ternas.

Secundò quando l m est tres quintæ diametri a c, ex eodem corollario secundo & ex præsenti sequitur solidum g esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planũ l c m demissã, basis verò rectãgulũ sub l m & sub nouẽ bis-millesimis diametri a c cõprehensum, quod est æquale viginti septem decies millesimis quadrati a c: nam vt binarius ad ternarium ita tres millesimæ ad nouem bis-millesimas; & vt quinarius ad ternarium, hoc est, diameter a c ad l m ita nouem bis-millesimæ ad viginti septem decies-millesimas; ac proinde rectangnlum sub mediis æquale est rectangulo sub extremis.

Tertio quando l c m est primum segmentum hyperbolæ notum indidem conficitur solidum g esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m cadentem, basis verò sex trientes, hoc est duplum quadrati a c: nam vt binarius ad ternarium, ita quatuor trientes quadrati a c ad sex eiusdem trientes, hoc est ad duplum eiusdem.

Quartò quando l c m est alterum hyperbolæ segmentum notum, ex iisdem consequitur solidum g esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam, basis autem rectangulum sub l m & sub duodecim millesimis vigesimis nonis, hoc est sub quatuor trecentesimis quadragesimis tertijs diametri a c; illi autem rectangulo æquales sunt quadrati a c sexdecim bis-millesimæ quadringentesimæ primæ quadrati a c; nam vt septenarius ad quaternarium, hoc est vt a c diameter ad l m, ita quatuor trecentesimæ quadragesimæ tertiæ ad sexdecim bis-millesimas quadringentesimas primas, vt ex logisticâ constat; ergo est æqualitas intememorata rectangula, cùm eorum latera reciproca sint.

COROLLARIVM II.

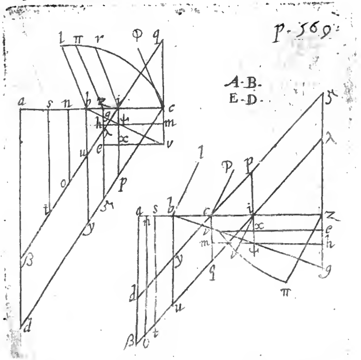
Quoniam ex nonâ punctum o ita diuidit axem coni cuius triangulū per ipsum axem est a d c, vt d o sit tripla rectæ o b ex duodecimâ quarti; & quia coni d a c cylindrique præscripto modo descripti sectiones effectæ occursu plani cuiuslibet conditi sunt ut binarius ad ternarium; in eodem condito plano per n o perpendiculum ducto manebit centrum grauitatis cunei secundi noti a c d; ac proinde si libro ex a perpendiculo a d suspēdatur, brachia æquante distantiam punctotum a, c, vt diameter a c ad a n, hoc est vt octonarius ad ternarium, ita erit cuneus secundus notus a c d ad æquiponderans suum: istud ergo

PROPOSITIO XII.

Sit ellipſis vel hyperbola c r ex centro b deſcripta, cuius diameter a c punctis a & c terminetur, eíque coniugata ſit b l: ad planum ellipſeos vel hyperbolæ c r per a c inſiſtat rectum planū a d c, & in eo ſit n o recta perpendicularis ad a c diametrum, ſemidiametrumque a b ita in b ſecet vt n b ſit quadrans ipſius a b: ellipſis vel hyperbola c r ſit vt in præcedenti propoſitione baſis cylindracei deſcripti motu lineæ æquidiſtantis rectæ n o: vltra centrum b ad partes c ſumptum ſit quoduis punctum i, & per illud ducta i t faciens cum a c angulum acutū a i t ad partes centri, qui vocetur *internus*, & angulum ad verticem i iſti oppoſitum, qui vocetur *exter-*

nus: per i ducta ſit condicta r i, id eſt parallela ſemidiametro b l, & intelligatur planum t i r, eique parallelum d c φ ſecare cylindraceam figuram; erit a c d cuneus alter notus, cuneus autem a i t vel ei ad verticem i oppoſitus vocetur medius: vt b i ad ſemidiametrum b c, ita fiat b n recta ad b s, & agantur per b & s rectæ b u, s t æquidiſtantes rectæ n o. Voco b pũctum primæ ſuſpenſionis; n, ſecundæ; s, tertiæ; & b u, n o, s t, perpendiculum primæ, ſecundæ, tertiæ ſuſpenſionis.

His ita conſtitutis propoſitum ſit inuenire ſpatium quod æquiponderat portioni cunei medij habẽtis ellipſim vel hyperbolam pro baſi, & plano y b l ad partes a finiti, interceptæ quibuſcunque planis condictis, brachio æquante diſtantiam perpendiculorum b y, a d, & positâ libræ suspensione tertiâ ex s.



Condicta plana sumi possunt uel ad partes anguli interni vel ad partes externi, ex illis enim duobus casibus soluitur tertius, quando nimirum plana condicta sunt ad partes angulorum oppositorum.

Pro primo casu designata sint condicta plana λ z π, p i r in ellipsi quidem ad partes interni n i o, puncto i cadente inter b & c; in hyperbolâ verò ad partes externi λ i z puncto c cadente inter b & i, prout in altero appositorum schematum designatur. Primus casus.

Vt b i recta ad b c, ita fiat i ↓ quadrans rectæ i p inter rectas a c, c d clauſæ & æquidiſtantis rectæ b u, ad i x, & completo parallelogrammo i x e z inueniantur per vigeſimam quintam quarti libri ſpatia A, B, librâ ſuſpensâ ex b primo ſuſpenſionis puncto, æquipōderātia cylindraceis i p μ λ, i x e z ſingula ſingulis, brachio æquante rectam b a, ſiue diſtātiam parallelarum a d, b u. Inueniatur ex vndecimâ huius ſpatiū D ex n ſecundo ſuſpenſionis puncto æquiponderans cunei alterius noti portioni μ p i z; ex D demantur A, B, reſtetque E. Dico ſpatium E ſuſpensâ librâ ex s tertio ſuſpenſionis puncto, æquiponderare cunei medii portioni λ i z.

Quoniam vt b i recta ad b c, ita eſt i ↓ ad i x vel (productâ e x donec occurrat rectæ c q in ν) ad c ν; ergo alternendo b c, c ν ſunt vt b i, i ↓: ergo ſi compleātur triangula b c ν, b i ↓ erunt ſimilia, ac proinde angulus c b ν æqualis angulo i b ↓, rectæ ergo b ↓, b ν ſibi inuicem congruunt. Recta b ↓ producta occurrat rectæ z μ in g, & per ↓ agatur ↓ h æquidiſtans rectæ x e.

Rurſus quoniam in triangulo ν e g lateri ν e æquidiſtat ↓ h, & lateri g e æquidiſtat ↓ x, vt n x ad x e, ita erit ν ↓ ad ↓ g, & vt ν ↓ ad ↓ g ita erit e h ad h g; ergo vt ν x ad x e, ſiue vt c i ad i z, ita e h ad h g. Eadem de cauſâ cùm in triangulo c μ z recta ↓ λ æquidiſtet lateri c μ, vt c i ad i z, ita

2. ſexti Euc.

erit λ μ ad z λ ergo vt e h ad h g, ita λ μ ad z λ. Cuneus ergo ✠ h g est ad cuneum i z λ vt recta h g ad z λ, vel vt recta h e, hoc est x ✠, ad λ μ vel ad p i; & in eadem ratione est cylindraceum x e h ✠ ad p i λ μ, vt ex vndecimâ prioris libri, vel ex sextâ primi solidis accommodatâ constat: quocunque enim plano condicto secentur, sectiones sunt vt recta h g ad z λ, quod facilè admittis, qui demonstrationis in vigesimâ primâ libri quarti adductæ meminit.

Rursus quoniam vt b i ad b c, ita ponimus esse b n ad b s, ergo diuidendo, vel per diuisionem rationis, vt b i recta ad c i, ita erit b n recta ad s n: sed vt b i recta ad c i, ita est i ✠ recta ad x ✠ (eo quod in triangulo b i ✠ rectæ c ν, ν ✠ æquidistent lateribus i ✠, i c) ergo vt b n ad s n, ita est i ✠ ad x ✠. Cùm igitur vt a b ad b n sui quadrantem, ita sit i p ad i x, & vt b n ad s n, ita sit i ✠ ad x ✠, erit ex æquo vt a b ad s n, ita i p ad x ✠: sed vt i p ad x ✠, ita ostendimus esse i λ z ad ✠ h g; ergo vt a b ad s n, ita i λ z ad ✠ h g.

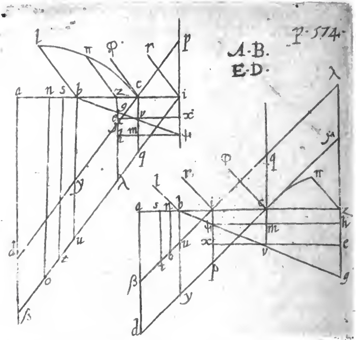
Quoniam ergo ex n secundo puncto suspensionis æquiponderans cylindracei portioni p i λ μ est per decimam secundi spatium primæ suspensionis A vnà cũ ipsius quadrante i ✠ h z: ergo conflatum ex A, B (est enim B æquale portioni i ✠ g z cunei primi neti b c ν ex vigesimâ sextâ libri quarti) æquale est æquipõderanti ex s librâ suspẽsâ cylindraceo p i λ μ, & insuper portioni ✓ h g in hyperbolæ schemate; in elli psis verò diagrãmate cõflatũ ex A B vnà c portione ✓ h g æquat dictum æquiponde rans: ergo si de spatio D, quod indider cuneo i p μ z æquiponderat, deducantu A B relinquetur spatium E quod in hyper bolâ auctũ spatio h ✓ g, vel eo minutum i ellipsi æquiponderabit cuneo i λ z: cùm ig tur vt recta a b ad n s, ita sit i λ z ad ✓ h g si suspensio ex n secundo puncto, transfe ratur iu tertium s, æquiponderans cune medio i λ z erit E, per decimam secundi li bri citatam, quod pro primo casu debui mus demonstrare.

Secundus casus. Secundò condicta plana cadant ad parte anguli interni c i q in hyperbolâ, & exter ni in ellipsi, puncto i manente vt in figur primi casus, quæ isti etiam deseruiunt: e verò sint p i r, q c φ. Rectæ p i sit i ✓ quadrã vt in priori casu, productaque h ✓ occur rat rectæ c ν in m. Inuenta sint A & B li brâ suspensâ ex b primo suspensionis pur cto æquiponderantia cylindraceis q c p c ν x i singula singulis vt in præcedent casu; inuentum quoque sit spatium D e n secundo suspensionis puncto æquipond rans noto cuneo altero c p i, atque ex A deductum D relinquat spatium E. Dic ipsum E librâ suspensâ ex tertio n suspe sionis puncto, æquiponderare cuneo m dio c i q.

Quoniam cylindraceo c ν x i ex b equ

ponderat ſpatium B, erit ipſum B ex vigeſimâ ſextâ libri quarti æquale portioni c ν ✝ i primi cunei noti c b ν: ergo B vnà cum cuneo ν ✝ m æquat quadrantem cylindracei c q i p in hyperbolâ; in ellipſi verò eundem quadrantem excedit eodem ✝ ν m: ergo libra ſi ritè ſuſpendi ponatur ex n ſecundo ſuſpenſionis puncto, æquiponderans ipſi c q i p eſt aggregatum ex A B & ex cuneo ✝ ν m in hyperbolâ, in ellipſi verò eſt idem aggregatum ex A B deducto ✝ ν m: ergo ſi inde deducatur D æquipōderans noti ſecundi cunei c p i, relinquetur æquiponderans cunei medij c i q, videlicet aggregatum ex E & cuneo ✝ ν m in hyperbolâ, in ellipſi vero ipſum E imminutum cuneo ✝ ν m: cùm ergo cuneus c i q ſit ad cuneum ✝ ν m vt recta a b ad n s (iſtud enim eodem pacto oſtenditur quo in priore caſu oſtenſum eſt cuneum λ i z eſſe ad cuneum h ✝ g, vt eſt recta a b ad n s) æquiponderans librâ ſuſpenſâ ex s cuneo medio c i q erit E, quod pro caſu ſecundo demonſtrandum erat.

Tertio in hyperbolâ punctum i cadat inter b & c condictaque plana ſint ad partes anguli externi (nam ad interni partes non pertinet hyperbola c π) q c φ, λ z π: in ellipſi vero punctum c iaceat inter i & b, condictáque plana ſint ad partes interni, cùm ad externi partes non pertingat ellipſis. Tertius caſus.



Sumatur recta i ψ quarta pars rectæ i p vel q c, & inueniatur A æquiponderans cylindraceo q c λ μ librâ ex b suspensâ; item B cylindraceo c ν e z ex eodem b; & D noto cuneo secundo μ c z ex secundo puncto n. Dico conflatum ex tribus A B D librâ suspensâ de tertio suspensionis puncto s ęquiponderare portioni λ q c z cunei medij q i c.

Quoniam vt a b, b n, ita i p, i ψ, & vt b n, s n, ita i ψ, ψ x (vt enim b i, c i, ita b n, s n ex demonstratis superiùs; vt autem b i, c i vel x ν, ita i ψ, x ψ eò quod triãgula b i ψ, ν x ψ sint similia) ergo ex æquo vt a b, s n, ita, i p, x ψ, vel istis æquales q c, m ν. Rursus quoniam triangula λ i z, h ↓ g habent latera b z, ↓ g similirer secta in t, ν, & per c, ν ductæ sunt c μ, ν e æquidistantes lateribus i λ, ↓ h; vt c i ad c z, ita erit μ λ ad z μ, & e h vel ↓ x ad g e: ergo alternando vt μ λ vel q c recta ad e h vel m ν, ita z u ad g e: ergo vt q c recta ad m ν, ita est cylindraceum q e λ μ ad μ ν h e, & cuneus c μ z ad cuneum ν e g: & composita ex antecedentibus magnitudo λ q c z ad compositam ex consequentibus m ν g h: sed vt q c recta ad m ν, ita modo ostendimus esse a b ad s n: ergo vt a b ad s n, ita λ q c z portio cylindracei ad m ν g h.

Cùm ergo sicut in priori casu diximus æquiponderans ex b cylindraceo c ν e z sit c ν g z, erit B ipsi c ν g z æquale: ergo conflatum ex A, B, D, continet æquiponderans partium q c λ μ, c z μ librâ ex n suspensâ, & insuper in hyperbolâ portionem m ν g h; in ellipsi verò conflatum idem ex A, B, D continet æquiponderans partium q c λ m, c z μ imminutū eadē portione m ν g h: ergo cōflatū ex tribus A, B, D æquat æquipōderans librâ appēsâ ex s portioni λ q c z cunei medij, per decimā secundi libri, quod demonstrandum erat ad tertium casum.

COROLLARIVM.

Quoniam b n est quadrans semidiametri b e, rectangulum c b n erit æquale quartæ parti quadrati b c, hoc est quadrato quod potest semissis rectæ b c, siue quadrans diametri a c; & quoniam rectangulo c b n æquale est rectangulum i b s (habent enim ex constructione latera proportionalia) erit ipsum i b s æquale quadrato quod potest quadrans diametri a c, hoc est, tres rectæ i b, quadrans diametri a c, & b s sunt proportionales.

SCHOLIVM.

In istis omnibus casibus quamuis vnum ex condictis planis assumptis non sit p i r, semper tamen in rectâ i p sumi debet i ✠ quarta ipsius pars, atque vt b i ad b c, ita fieri i ✠ ad i x, debentque iungi recta b ✠, b v: demonstratio enim hoc posito recurrit eadem.

Porrò æquiponderans cylindraceorum q c λ m, c v e z esse idem cum æquiponderante cylindraceorum iisdem condictis planis interceptorum, & habentium pro basibus portiones ellipsis vel hyperbolæ iisdem planis interceptas, eandemque altitudinem, apertum est ex vndecimâ prioris libri: Ita enim sunt constituta vt quocunque condicto plano secentur, eorum sectiones sint inuicem æquales, quod satis est ad hoc, vt ex vndecimâ citatâ, vel ex sextâ primi solidis accommodatâ eiusmodi plana sint æqualia, & habeant in eodem condicto plano centrum grauitatis.

Quòd si roges cur nullus casus ponat plana con-

condictæ ultra b ad partes a, responsio constabit ex sequentis corollario primo, inde enim patebit id non fuisse necessarium cum ex iam demonstratis faciliùs pro illo casu obtineatur æquiponderans.

Calculum huius propositionis abundè sufficient tibi quæ isti proximam subsequuntur.

Propositio XIII.

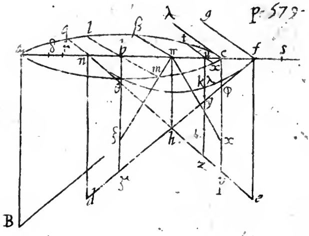
Sit plana figura a l c m habens grauitatis centrum in rectâ a c, cuius occursu l m & omnes ipsi æquidistantes bipartitò secentur. Sit ad planum a c perpendicularis n d, & per ambitum figuræ a l c m linea parallela rectæ d n incedens descripserit superficiem cylindraceam: per n & f quæcunque duo puncta rectæ a c etiam productæ, ductæ sint n q, f g condictæ, idest æquidistantes ipsi l m, & ductis per eadem n & f, n d, f e perpendicularibus ad a c æqualibus, intelligatur cylindraceum

O o

secari planis trāsuersis e n q, d f g; & abscindi cuneos n f d, f n c, qui vocentur *coniugati*, etiam cum perpendiculares n d, f e, fuerint inæquales. His ita positis.

Ostendendum est si planum a l m intelligatur horizonti æquidistans, & recta a c libra sustentās cuneum n f d ponatur suspendi ex n brachio quocunque n r; æquiponderans ex r cunei n f d portioni quibuscunque duobus planis condictis, id est parallelis plano d q n, interceptæ esse æquale spatio quod librâ suspensa ex f, brachio f s æquante ipsum n r, æquiponderat ex s portioni cunei f n e inter eadem condicta plana positæ.

Intelligatur linea n k f ita descripta in plano d n f, vt quæcunque u z æquidistās rectæ n d ducatur, occurrens diametro a c (ita enim vocetur) in u siue inter n & f, siue extra posito; rectis d f, n e in y, z; & lineæ n k f in k; sicut autem r n ad n u, ita



ſit u y ad u *k*; linea n k f ex duodecimâ tertij erit parabola. Præterea quoniam triangula n u z, f u y ſunt ſimilia; vt n u ad u f, ita erit u z ad u y: ergo rectangulum ſub extremis n u, u y eſt æquale rectangulo ſub mediis u f, u z. Quoniam ergo vt r n ad n u, ita ponitur u y ad u *k*, rectangulum ſub mediis n u, u y erit æquale rectangulo ſub extremis n r, u *k*. Vt f s ad f u ita ponatur u z ad u λ; erit ergo rectangulum ſub medijs f u, u z æquale recranguło ſub extremis f s, u λ: ſed rectangula in vtroque caſu ſub mediis ſunt inuicem, vt oſtendimus, æqnalia; ergo rectangula ſub extremis ſunt

16. ſexti Euc.

quoque æqualia; ergo cùm latera n r, f s sint æqualia, bases u k, u λ erunt inuicem æquales; ergo eadem linea n k f etiam vltra puncta n & f producta describetur, si vt f s ad f u quamcunque portionem rectę f n etiam productæ, ita ponatur u z intercepta lineis f n, n e in infinitum eductis, & parallelâ rectæ n d, ad u λ interceptam rectâ f n & parabolâ f λ n.

Quoniam ergo cunei sectiones factæ occursu plani condicti sunt parallelogramma, vt in vigesimâ primâ quarti ostensum est, quorum bases sunt ordinatim applicatæ ad diametrum a c; sectiones factæ occursu condicti z u t erunt parallelogramma; similiterque si per parabolæ n k s perimetrum intelligatur moueri linea recta æquidistans cōdictæ l m, solidi comprehensi basi l c m, & cylindraceâ superficie binâ motu æquidistantium rectis b o, l m descriptâ (eiusmodi solidum vocetur *dicylindraceum*, & si l c m fuerit ellipsis vel hyperbola *dicylindraceum notum*) sectio condicti plani cum dicylindraceo erit parallelogrammum, cuius basis sit eadem condicta, & altitudo sit linea secundum quam condictum planum secat segmentum n K f, parabolæ. Quoniam ergo istæ omnes se-
2. sexti Euc. ctiones sunt parallelogramma rectangula super eadem basi constructa, erunt inter se vt altitudines: quoniam verò vt brachiū r n ad n u, ita est recta n y ad u k, & vt n y

ad u k, ita est rectangulum sub u y, & t x ad rectangulum sub u k, t x: ergo vt r n ad n u ita sectio cunei n f d ad sectionem dicylindracei; quod cùm in omnibus sectionibus occursu condictorum planorum genitis eueniat, totum dicylindraceum æquiponderabit cuneo n f d, & pars parti, prout intra eadem condicta plana sibi respondent, ex septimâ secundi ad solida translatâ, sicut in vigesimâ quartâ prioris libri expofuimus. Eodem planè modo ostendetur idem dicylindraceum æquiponderare cuneo f n e, librâ ex f suspensâ, aliisque iuxta propositionis præscriptum positis; ergo id demonstratum est, quod fuit propositum.

COROLLARIVM I.

Ex modò demonstratis liquidum fit quod in scholio præcedentis in hunc locũ distulimus; si enim l c m sit ellipsis vel hyperbola ex centro b descripta, & n b sit quadrans semidiametri, & c λ sit acies secundi cunei noti, quæratúrque æquiponderans ex r, librâ ex n suspensâ, portioni cunei secundi noti conclusę condictis secantibus semidiametrum a b; punctum suspensionis debet (paritate brachij seruatâ) poni in c, & n q intelligi acies cunei c n p, & ita ex pręcedenti inuenietur portio dicylindracei æquiponderans portioni cunei c n p condictis memoratis interceptæ : istud namque æquiponderans æquale est ex præsenti demonstratione æquiponderanti quæsito. Isthæc methodus in aliis similibus casibus obseruanda pariter erit.

COROLLARIVM. II.

Si vt c n ad c p, ita fiat c a ad a B rectam per a ductam parallelam rectæ n d, librâ ex c suspensâ, brachio æquante semidiametrum, perpendiculo c p, æquiponderans cunei c n p portioni interceptæ planis condictis μ b l, p c λ, est æquale parallelepipedo cuius altitudo a B & basis æquet quadrantem quadrati ex semidiametro b c geniti. Istud apertum est ex præsenti; si enim connectatur recta c B, & intelligatur plano condicto B c λ secari cylindri superficies, abscindetur cuneus secundus notus n c B, eruntque ex præsenti cunei n c B, c n p coniugati; ergo spatium quod æquiponderat cuneo n c B, librâ ex n suspensâ, brachio æquante semidiametrum a b, æquiponderat quoque cuneo c n p librâ ex c suspensâ, positâ paritate brachij, vt in præsenti demonstratum est: atqui ex primo epilogismo corollarij propositionis vndecimæ spatium æquiponderans cuneo noto secundo est illud quod iam assignauimus cuneo c n p; ergo rectè fuit assignatum.

Quòd si, iisdem positis l c m sit segmentum hyperbolæ notum, ac proinde condicta l m sit vltra punctum c ad partes f; librâ ex c suspensâ, brachio æquante semidiametrum, perpendiculo c p æquiponderans cunei c n p portioni interceptæ planis condictis p c λ & μ ξ l m, ostendetur eodē omnino pacto esse æquale parallelepipedo cuius altitudo a B, basis sit dupla quadrati quod potest diameter a c: hoc enim ita computatum fuit in epilogismo tertio corollarij memorati.

COROLLARIVM III.

Ex iisdem occurrit *quadratura* dicylindraceotum notorum numero infinitorum; per præcedentem enim obtinetur æquiponderans innumeris cuneis quorum bases sint portiones ellipseos vel hyperbolæ; ex istâ autem constat eiuscemodi æquiponderans esse æquale dicylindraceo quod inter eadem condicta plana respondet portioni cunei libratæ. Cæterùm istorum dicylindraceorum tetragonismus est quasi aurora aduentantis quadraturæ circuli: nam cuneo secundo noto, cuius acies sit c λ & basis a c m integer semicirculus aut ellipsis, æquiponderāt librâ ex a suspensâ, brachio æquante diametrum a c, tres decimæ sextæ cylindri eadem qua ipse cuneus altitudine præditi: ergo dicylindraceum isti cuneo ita respondens, est tres decimæ sextæ cylindri: ergo quadratura istius dicylindracei docet quadraturam circuli: habet ergo dicylindraceorum quadratura cum tetragonismo circuli & etiam hyperbolæ connexionem tantam, vt quamuis hîc finem inueniendi faceremus, multùm tamen Deo deberemus, quòd ex tam densis tenebris in admirabile istud lumen nos vocarit.

COROLLARIVM. IV.

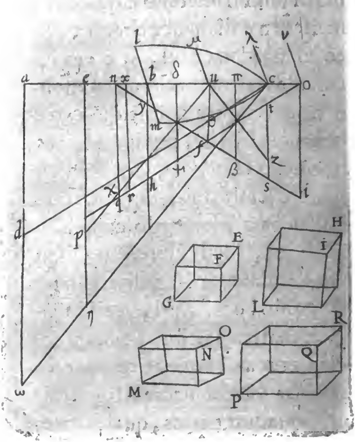
Ex præsenti schemate colligitur etiam cuneos coniugatos e n f, d f n inter condicta plana ξ b l, d ç λ inclusos si ex quocunque puncto n diametri a c seorsum (positâ brachij paritate) suspendantur perpendiculo n d, differentiā æquiponderantium coniugatis esse eandem cum differentiâ æquipōderantium portionibus p h φ, μ h θ, quas voco cuneos primos *laterales*, & ad eorum mutuum respectum significandum, *primos collaterales*. Quoniam enim solidum b θ h φ c habent commune, differentia æquiponderantium ipsis non proueniet ex æquiponderante solidi b θ h φ c (est enim idem ex eodem, iisdemque positis) ergo differentia, si quæ sit, erit æquipōderantium residuis collateralibus p h φ, μ h θ.

Quòd ſi ex rectis b μ, c p abſcindantur b ξ, c ψ æquales rectis $\theta \mu$, φ p, & ducto per h condicto b $\pi \beta$ ſecante diametrum a c in π, iungantur rectæ $\xi \pi$, $\psi \pi$, & intelligantur plana tranſuerſa ξ π β, ψ p β auferentia cuneos ψ b π, ψ π β, cunei iſti ablati ita ſe habebunt ad collaterales, ſinguli ad ſingulos, vel totos, vel ſecundum partes intra eadem condicta plana clauſas ſumptos, vt ipſis ſint æquales, & habeant æqualia æquiponderantia iiſdem poſitis. Iſtud etiam manifeſtum eſt ex præcedente: eſſe enim æquales eodem planè modò oſtenditur, quo id demonſtrauimus in primo caſu, ex eo quòd condicta plana faciant in eis ſectiones æquales: habere autem idem æquiponderans non aliter probatur, quam probatum fuit in ſcholio. Cuneos p h φ μ h θ vocabo *laterales & collaterales ſecundos*, quorum hæc eſt inſignis proprietas vt aciē habeant in eadem condicta $\pi \beta$, & vnus ψ π c ſit ad angulum externum, alter ξ π b ſit ad internū, poſitâ a c diametro ellipſeos vel hyperbolæ ſicut in præcedentis diagrammate; vnde vlterius ex iam citatâ propoſitione efficitur iſtud notandum, ſi vt b π ad quadrantem diametri a c, ita fiat ipſe quadrans ad b δ, librâ ex δ ſuſpensâ tertio videlicet ſuſpenſionis puncto, inueniri ſpatium quod ſingulis collateralibus æquiponderat, iſtorúmque æquiponderantium differentiam eſſe æqualem differentiæ ſpatiorum quæ portionibus memoratis

PROPOSITIO XIV.

Posito ante oculos diagrammate propositionis duodecimæ, quod inseruit tertio ellipseos casui; sit b i partium quinque cuiusmodi semidiameter b c quatuor; sit item a c diameter circuli, & condicta plana u b l, q c φ ex eo auferant trientem circuli. Ostendendum est primò portioni z λ q c cunei medij n i o, æquiponderans librâ ex s suspensâ, brachio æquante semidiametrum, esse æquale parallelepipedo cuius altitudo a d, basis sit rectangulum sub semilatere trianguli æquilateri circulo l c inscripti, & sub viginti septem partibus, cuiusmodi diameter a c continet centum sexaginta: rectam autem b s continere quatuor partes, quales in semidiametro b c sunt viginti; vel vnam quales in semidiametro quinque.

Quoniam enim vt b i ad b c, ita est b n ad b s; b i autem ponitur quinque cuiusmodi b c quatuor; vel b i viginti quinque, quales b c viginti, & b n ipsius b c quadrans quinque; erit b s quatuor eiusmodi: nam vt 25. ad 20. ita 5. ad 4.



Rursus quoniam punctum z in isto casu diuidit bifariam semidiametrum b c; spatiu A æquiponderans cylindraceo q c λ μ librâ ex b suspensâ, brachio b a, erit parallelepipedum cuius altitudo c q, & basis rectangulum sub quartâ parte diametri a c & sub semilatere trianguli æqnicruris inscripti circulo c r, ex corollario tertio vigesimæ quintæ libri quarti.

Rursus quoniam vt b i recta ad b c, ita est i ✠ quadrans rectæ c q ad i x; b i autem ad b c est vt quinarius ad quaternarium, erit i x quatuor, cuiusmodi i ✠ quinque, & cuiusmodi c q ipsius i ✠ quadrupla viginti; ergo reductione ad minimos numeros facta erit i x vel c ν ad c q vt unitas ad quinarium: ergo B spatium cylindraceo c ν e z æquiponderãs librâ suspensâ ex b, brachio b a, est ex vigesimâ quintâ laudatâ parallelepipedum cuius basis eadem quæ parallelepipedi ęquantis spatium A iam putati, & altitudo c ν quinta pars ipsius c q: ergo parallelepipedum cuius basis sit iam memorata, altitudo sex quintæ partes altitudinis c q, æquale est duobus simul A & B. 35. sep-ti Euc.

Præterea quoniam in triangulo a i β lateri i β æquidistat c d; vt a c ad c i, ita erit a d ad d β siue ad c q: sed a c ad c i est vt octo ad vnum: ergo a d recta ad c q est vt octo ad vnum; vel vt quadraginta ad quinque, & ad conflatum ex c q, c ν vt quadraginta ad ſex: ergo parallelepipedum cuius baſis antè memorata, & altitudo ſex quadrageſimæ partes rectæ a d æquale eſt duobus ſimul ſpatiis A & B. Rurſus quia vt 40.ad 6. ita eſt quadrans ſiue quadraginta centeſimæ-ſexageſimæ ad ſex centeſimas-ſexageſimas: parallelepipedum, cuius altitudo ſit recta d a, & baſis diametri a c ſex centeſimæ-ſexageſimæ, æquale eſt parallelepipedo cuius baſis ſit rectangulum ſub quadrante diametri a c & ſemilatere trianguli æquilateri circulo c l inſcripti altitudo verò ſit ſex quadrageſimæ partes altitudinis a d; cùm baſes & altitudines reciprocentur.

Quoniam igitur duo ſimul ſpatia A & B æquant parallelepipedum cuius altitudo ſit d a, & baſis rectangulum ſub ſemilatere trianguli inſcripti ſuperius memorati & ſub ſex centeſimis-ſexageſimis diametri a c comprehenſum; ſpatio autem D æquale eſt ex ſcholio vndecimæ parallelepipedum eiuſdem altitudinis d a, & baſeos æquantis rectangulum ſub ſemilatere memorato & ſub tribus ſexageſimis quartis diametri a c; magnitudo ex tribus A, B, D conflata erit parallelepipedum altitudinis a d, & baſeos æquantis rectangulum ſub ſemilatere memorato & ſub viginti ſeptem partibus, cuiuſmodi in diametro ſunt centum ſexaginta inuicem æquales. Cùm igitur ex citatâ duodecimâ in iſto caſu magnitudo ex tribus A, B, D composita æquet spatiũ quod cunei medii n i o portioni z λ q c æquiponderat; istud esse demonstrauimus, quod propositum fuerat primo loco.

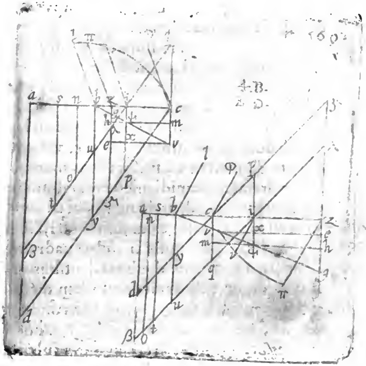
Secundò iisdem manentibus punctum z congruat centro b. Ostendendum est portioni z λ q c (quæ in hoc casu eadem est quæ b u q c) cunei medij n i o æquiponderans librâ ex s suspensâ, brachio æquãte semidiametrum, perpendiculo s t, esse æquale parallelepipedo cuius altitudo d a & basis sit quadrati b c septem vigesimæ partes.

Spatium A æquiponderans cylindraceo q c λ μ librâ ex b suspensâ, brachio b a est ex vigesimâ quintâ libri quarti parallelepipedum altitudinis c q, & baseos ęquantis duos trientes quadrati b c. Similiter B spatium cylindraceo c ν e z æquiponderans est parallelepidedum eiusdem baseos & altitudo c ν quinta pars ipsius c q: ergo parallelepipedum cuius basis sit iam memorati duo trientes, & altitudo sex quintę partes altitudinis c q ęquale est duobus simul A & B : ergo vt in pręcedenti casu parallelepipedum cuius basis sit duo iam dicti trientes & altitudo sex quadragesimę partes rectæ a d, æquale est duobus simul A & B. Præterea quia vt 40. ad 6. ita est bes siue 40. sexagesimæ ad 6. sexagesimas, parallelepipedum, cuius altitudo sit d a, & basis quadrati b c sex sexagesimæ siue vna decima, æquale est parallelepipedo cuius basis sit duo trientes quadrati bc, & altitudo sex quadragesimæ partes rectæ a d, cùm bases & altitudines reciprocentur.

Quoniam igitur duo simul spatia A & B æquant parallelepipedum cuius altitudo a d, basis sex sexagesimæ quadrati b c: spatium autem D ex calculo primo primi corollarii vndecimæ est quadrans quadrati b c, hoc est quindecim sexagesimæ: spatiũ ex tribus A, B, D compositum erit illud quod quærimus, videlicet parallelepipedũ cuius altitudo a d, & basis viginti & vna sexagesimæ, siue septem vigesimæ quadrati b c; quod secundo erat ostendendum.

PROPOSITIO XV.

Duodecimæ propositionis schema, quod inseruit primo & secundo ellipseos casui, reuocetur; in eóque b i, i c ſint æquales; ſit item a c diameter circuli. Propoſitum ſit primò, quando punctum z primi casûs congruit puncto b, definire epilogiſmo lineam b s, & æquiponderans portioni b u i cunei medij n i o, librâ ex s ſuſpensâ, brachio æquante ſemidiametrum.



Quoniam vt b i ad b c, ita est b n ad b s; cùm b i sit semissis rectæ b c, erit b n semissis rectæ b s: sed b n est quadrans semidiametri b c; ergo b s est duo quadrantes, vel dimidium rectæ b t: ergo b s, b i, i c sunt æquales.

Rursus quoniam punctum z in illo casu congruit centro b, & condictum $\lambda z \pi$, condicto u b l, spatium A æquiponderans cylindraceo i p $\mu \lambda$, libra ex b suspensa, perpendiculo b u & brachio b a, erit ex vigesima quinta libri anterioris parallelepipedum cuius altitudo i p eadem quæ cylindracei i p $\mu \lambda$; & basis æquet spatium quod ex a æquiponderat.

Præterea quoniam libra ex b suspensa, perpendiculo b u, brachio b a, æquiponderans semicirculo inter condicta u b l, $v c \varphi$ interposito æquiponderat ex decima octaua tertij rectangulum sub semidiametro b c & sub duobus trientibus ipsius b c, vel vno triente diametri a c; si iste triens mutetur in quadrantem, semidiameter mutabitur in duos trientes eiusdem diametri, vt ex reci-
15. sexti Euc. procatione gignatur æqualitas; ergo ijsdem manentibus rectangulum sub quadrante diametri a c, & sub duobus trientibus ipsius æquiponderat semicirculo iam dicto: sed ijsdem positis segmento inter condicta p i r, $v c \varphi$ æquiponderat, ex decimâ nonâ eiusdem tertij libri, rectangulum sub i c quadrante diametri ac, & sub i r semilatere trianguli æquicruris inscripti: ergo rectan-

gulum sub eodem quadrante, & sub excessu quo duo trientes diametri a c superant semissem dicti lateris æquiponderat portioni circuli interceptæ conditis u b l, p i r (eiusmodi excessus vocetur *apotome nota*: est enim apotome quam definit Euclides) 74 decimi Euc. ergo ex corollario tertiæ spatium A cylindraceo i p μ λ æquiponderans librâ ex b suspensâ, perpendiculo b u, brachióque ba, est parallelepipedum cuius altitudo p i vel c q, basis sit rectangulum contentum sub semisse dicti lateris & sub apotome notâ.

Rursus quoniam vt b i recta ad b c, ita est i ψ quadrans rectæ c q ad i x: b i autem est semissis rectæ b c, erit i ψ semissis rectæ i x; & i p quadrupla rectæ i ψ erit dupla rectæ i x: est ergo B parallelepipedum cuius basis sit rectangulum sub semilatere dicto & sub notâ apotome contentum, altitudo sit semissis rectæ i p. Præterea quoniam in triangulo a c d lateri c d æquidistat i β; vt a c ad c i, ita erit a d ad d β siue ad i p: sed a c ad c i, est vt quaternarius ad vnitatem; ergo a d ad i p est vt quaternarius ad vnitatem; ergo a d ad i x dimidium rectæ i p est vt octonarius ad vnitatem: ergo recta a d est ad compositam ex i x, i p, vt octonarius ad ternarium; ergo duo spatia A & B cum habeant eandem basim, ideóque æquent parallelepipedum eiusdem baseos, & altitudinis compositæ ex altitudinibus i p, i x, æqualia sunt parallelepipedo cuius basis sit rectangulum sub semilatere dicto & sub notâ apotome comprehensum, altitudo sit tres octauæ partes rectæ a d; cui parallelepipedo propter basium & laterum reciprocationem æquale est aliud cuius altitudo sit a d, & basis rectangulum sub notâ apotome & sub tribus decimis sextis lateris trianguli æquilateri circulo inscripti: vel sub semilatere eodem & sub apotemes notæ tribus octauis.

Rursus quoniam cunei noti secundi a c d portioni interceptę condictis q c φ, μ z π quod in isto casu congruit condicto u b l, æquiponderans librâ ex n suspensâ, brachio æquante semidiametrum est ex vndecimæ corollarii primi epilogismo primo parallelepipedum cuius altitudo d a, basis sit quadrans quadrati b c, hoc est rectangulum sub diametri a c, tribus sexagesimis quartis & sub quatuor trientibus eiusdem diametri, ista enim æqualitas ex
15. sext. Euc. laterum reciprocatione sequitur: ex scholio verò eiusdem æquiponderans portioni iacenti inter condicta p i r, q c φ est æquale parallelepipedo cuius altitudo a d & basis rectangulum sub semilatere dicto & sub tribus sexagesimis quartis diametri a c cōprehensum; differentia istorum æquiponderantium eadem altitudine d a præditorū, videlicet parallelepipedum altitudinis d a & baseos æquantis rectangulum sub diametri tribus sexagesimis quartis & sub

exceſſu quo quatuor diametri a c trientes ſuperant ſemilatus trianguli æquilateri inſcripti erit ſpatium D æquiponderans portioni μ p i z cunei ſecundi a c d noti. Dictus porrò exceſsûs compoſitus eſt ex duobus trientibus diametri a c,& ex apotome notâ, vt apertum eſt.

Quoniam ergo ex præſcripto duodecimæ pro primo caſu vt habeatur æquiponderans cunei medii, de ſpatio D deduci debent duo ſimul A & B; cùm D ſit vt oſtendimus parallelepipedum cuius altitudo a d,& baſis rectangulum ſub tribus ſexageſimis quartis diametri a c, ſubque compoſitâ ex duobus diametri trientibus & ex apotôme notâ comprehenſum: ergo exceſſus quo iſtud rectangulum ſuperat rectangulum ſub apotome notâ & ſub tribus decimis ſextis lateris trianguli memorati, eſt baſis parallelepipedi eadem altitudine a d præditi, quod æquiponderet cuneo medio b i u, librâ ex s ſuſpenſâ, brachio æquante ſemidiametrum a b,& perpendiculo s t: ergo definiuimus id quod definiendum fuit primo loco.

Propoſitum ſecundò ſit quando, vt in ſecundo caſu laudatæ propoſitionis duodecimæ, ſuſpenditur portio q i c cunei medij t i s intercepta condictis p i r, q c o determinare calculo æquiponderans dictæ portioni q i c, librâ ex s suspensâ, reliquísque manentibus, quæ in præcedenti casu posita sunt.

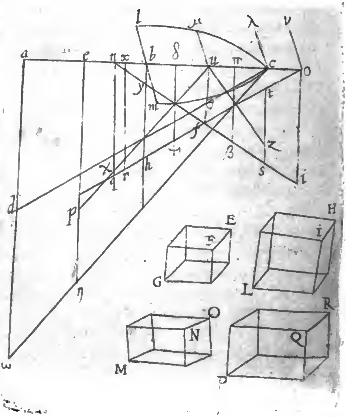
Spatium A æquiponderans cylindraceo q c p i, librâ ex b suspensâ, perpendiculo b u, brachio b a, est parallelepipedum cuius altitudo i p, basis sit rectangulum contentum sub semisse lateris trianguli æquilateri circulo c l inscripti, & sub diametri a c quadrante, ex vigesimæ quintæ libri quarti corollario tertio.

Rursus quoniam, vt in superiore casu ostensum est, i x est dimidium rectæ i p: ergo B spatium cylindraceo c v x i æquiponderans, librâ ex b suspensâ, brachio b a, est ex vigesimâ quintâ laudatâ, parallelepipedum cuius basis sit rectangulum iam memoratum, & altitudo dimidium altitudinis i p: ergo parallelepipedum cuius basis sit rectangulum iam memoratum, & altitudo tres semisses altitudinis i p, æquale est duobus simul A & B. Quoniam verò in præcedenti casu ostendimus, rectam a d esse ad compositam ex i p, i x, vel ad tres semisses ipsius i p, vt est octonarius ad ternarium: ergo parallelepipedum cuius basis sit rectangulum iam memoratum, altitudo tres octauæ partes rectæ a d, æquale est duobus ſpatijs A, B: iſti verò parallelepipedo propter reciprocationem baſium & altitudinum æquale eſt aliud cuius altitudo a d, baſis ſit rectangulum ſub quadrante diametri & ſub tribus decimis ſextis lateris inſcripti iam ſæpe memorati: vel ſub tribus triceſimis ſecundis diametri a c & ſub ſemilatere dicto.

Quoniam igitur ex præſcripto duodecimæ pro ſecundo caſu, vt obtineatur æquiponderans cunei medij, de aggregato ex ſpatiis A, B ſubduci debet ſpatium D, cùm aggregatum illud ſit parallelepipedum cuius altitudo a d, baſis ſit rectangulum ſub dicto ſemilatere & ſub tribus decimis ſextis vel duodecim ſexageſimis quartis diametri a c; ſpatium verò D ſit parallelepipedum eiuſdem altitudinis, cuius baſis ſit rectangulum ſub dicto ſemilatere & ſub tribus ſexageſimis quartis eiuſdem diametri a c; peractâ ſubductione reſiduum fiet parallelepipedum altitudinis a d, & baſeos æquãtis rectangulum ſub dicto ſemilatere & ſub nouem partibus, cuiuſmodi diametrum metiuntur ſexaginta quatuor; quod ſecundò erat faciendum.

Propositio XVI.

Inuenire & calculo colligere æqualitem inter duo quædam ſpatia ſolida multùm inſeruientem ad quadrandum circulum.



Sit vt in decimâ tertiâ semicirculus lcm basis cylindracei descripti motu parallelæ ad rectam n q: ipsa autem n q sit ad diametrum a c perpendicularis; sit item b centrũ circuli,& b u,b e sint singillatim dimidium semidiametri;b n verò & c o quadrans; x b autem quinta eiusdem semidiametri pars. Per a,e,x,b,u,c,o, ductæ sint ad n q parallelæ a d,e p,x r,b h,u f,c s,o i. In rectâ u f sumptum sit quoduis punctum f, & per illud ductæ ex punctis n & o rectę n f, o f occurrẽtes rectis b h,c s,oi,n q, a d in y,h, t,s,i,q,d. Rectis y h,t s abscissæ sint æquales b κ,c z,& iunctę sint u k,u z rectæ.

Erunt igitur ex definitionibus in decimâ tertiâ traditis cunei n o q,o n i, coniugati; collaterales primi erunt y f h, t f s: collaterales secũdi b u κ,c u z: solidi byftc pars byfu vocetur interior, & c u f t exterior,ipsũq;byftc dicaturfastigiatũ,similiter cõiugatorũ cuneorũ interior dicatur o n i, exterior n o q: & collateraliũ interior y f h, exterior t f s. Apertũ est cunei cõiugati interni c n s portionem b y s c interceptam condictis h b l,s c λ esse æqualem fastigiati solidi portioni internæ b y f u, externę c t f u,& collateralium externo t f s: similiter cunei coniugati externi n o q portionẽ c t h b esse æqualem fastigiati solidi portioni internæ b y fu,externæ c t fu, & collateralium interno y f h.

Rursus quoniam vt b u ad b c,ita est b n ad b e: si libra intelligatur suspendi ex e

perpendiculo e p, brachio æquante semidiametrum, obtinebitur æquiponderans primis collateralibus y f h, t f s, vel secundis b u k, c u f ex corollario tertio decimæ tertię; calculus verò vtriusque habetur in
S. proximè antecedenti propositione; vocetur S.

Rursus quoniam b x est quinta pars semidiametri b c, si libra ex x suspendatur, habebitur per duodecimam æquiponde-
A. rans cunei medij x o r portioni b c t h (hoc est tribus b u f y, c u f t, y f h) & eius calculus est in decimę quartæ parte alterâ; vocetur A. Prętereà cùm b x sit quatuor & b e decem, cuiusmodi b c viginti, erit b c ad x e vt viginti ad sex, vel decem ad tria: ergo si perpendiculum x r mutetur in e p, & libræ suspensio transferatur ex puncto x in e, reliquis nihil mutatis, æquiponderans portioni b c t h (hoc est tribus b u f y, c u f t, y f h) erit illud ipsum quod in primâ suspensione auctum tribus decimis partibus portionis b c t h, ex decimâ secundi libri.

Rursus quoniam si per c intelligatur duci recta c ξ parallela rectæ o f, ideóque constituens angulum ξ c n æqualem angulo c n s, cunei c n s, n c ξ sunt coniugati; ergo per decimam quartam quod æquiponderat cuneo b c ξ librâ ex n suspensâ, æquiponderabit quoque cuneo b y f c librâ ex c suspensâ: ergo cùm illud æquiponderans supputatum sit initio corollarii primi vndecimæ, constat quoque calculus istius; vocetur B. Præterea cùm c e sit triginta cuiusmodi b c viginti, si perpendiculum c s mutetur in e p, & suspensio prima ex c in secundam ex e, brachiúmque ad partes a conuertatur, ex nonâ libri secundi apertum fit æquiponderans secundæ suspensionis esse tres semisses portionis b y f c (hoc est trium b u f y, c u f t, t f s) imminutas æquiponderante B iam computato pro primâ suspensione. B.

Rursus quoniam librâ ex e suspensâ spatium æquiponderans duobus simul cuneis coniugatis b y f c, c t h b iam est computatum, videlicet A æquiponderans, cuius calculus est in decimæ quartæ propositionis parte alterâ, auctum quidem sex vigesimis portionis b c t h, siue trium b u f y, c u f t, y f h; & triginta vigesimis portionis b y f c, vel trium b u f y, c u f t, t f s; imminutum verò B æquiponderante, cuius calculus extat initio corollarii primi vndecimæ: si ex isto æquiponderante deducatur spatium S æquiponderans cuneis lateralibus y f h, t f s cuius epilogismus est in decimâ quintâ, relinquetur æquiponderans fastigiatæ figuræ b y f c bis sumptæ, illudq; erit parallelepipedum A, cuius calculus est in decimæ quartæ huius parte alterâ, auctum quidem sex vigesimis triũ b u f y, c u f t, y f h, & triginta vigesimis trium b u f y, c u ft, t f s; imminutum verò parallelepipedo B, cuius calcul' extat initio corollarii primi vndecimæ, & parallelepipedis duobus S quorum calculus est in decimâ quintâ. Istud ęquiponderans ita collectum vocetur *primum fastigiati æquiponderans.*

Ad spatium æquiponderans secundum inuestigandum transeo. Quoniam b x est quinta pars semidiametri, si libra suspendatur ex puncto x, perpendiculo x r, brachio æquante semidiametrum, cognitum erit ęquiponderans C (ita enim appelletur) portioni c t f u exteriori fastigiati solidi b y f t c, cùm eius epilogismus extet in primâ parte decimæ quartæ propositionis: ergo, vt paulò superiùs dictum fuit, si perpendiculum x r mutetur in e p, & libræ suspensio ex x transferatur in e, æquiponderans pro istâ secundâ suspensione erit illud ipsum quod in primâ, auctum tamen sex vigesimis portionis externæ c t f u.

Rursus quoniam, sicut antea ostendimus, quod æquiponderat portioni u θ ξ b secundi b c ξ cunei noti librâ ex n suspensâ, æquipōderat quoq; librâ ex c suspensâ, cunei illi coniugati c n s portioni b y f u, quæ etiā est portio interna solidi fastigiati b y f t c; cùm illud putatum sit sub finem primæ partis in propositione decimâ quintâ, notū quoque & putatum erit æquiponderans portioni b y f u internæ fastigiati b y f t c, librâ ex c ſuſpensâ ; ergo ſi ſuſpenſio ex c transferatur in c, portioni internæ b y f u faſtigiati b y f t c æquiponderabunt triginta vigeſimæ, vel tres ſemiſſes portionis internę b y f u imminutæ parallelepipedo D, ita enim vocetur id cuius epilogiſmus extat ſub finem primæ partis demonſtratæ in decimâ quintâ.

Quoniam ergo faſtigiatum ſolidum b y f t c conſtat duabus b y f u, c t f u partibus ; æquiponderans toti faſtigiato bis vt iacet ſumpto æquiponderabit quoque portioni internæ y b u f bis vt iacet poſitæ, & portioni externæ c t f u bis item vt iacet ſumptæ : ſed iam putauimus æquiponderans vtrique portioni internæ & externæ : ergo librâ ex e ſuſpenſâ; perpendiculo e p, brachio æquante ſemidiametrum, faſtigiato b y f t c bis ſumpto æquiponderat duplum parallelepipedi C putati in primâ parte decimæ quartæ, auctum duodecim vigeſimis portionis externæ c t f u, & ſexaginta vigeſimis portionis internæ b y f u, imminutum verò duplo parallelepipedi D, cuius epilogiſmus habetur ſub finem primæ partis demonſtratæ in propoſitione decimâ quintâ. *Iſtud voco ſecundum faſtigiati æquiponderans.*

Quoniam igitur ęqualia ſunt primum & ſecundum faſtigiati æquiponderans, ſi ad vtrumque addantur B, D, S, & ab vtroque ſubducantur internæ portionis b u f y triginta sex vigesimę, & externæ c u f t portionis duodecim vigesimæ, conficietur vltima æqualitas quęsita inter duas magnitudines quarum

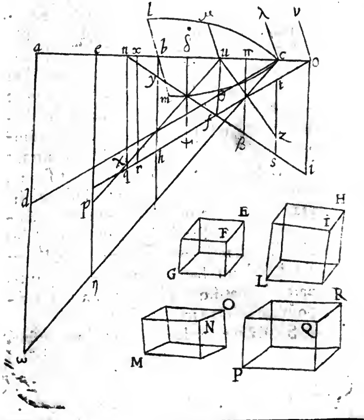
Prima componitur ex parallelepipedo A, ex duplo parallelepipedi D; ex sex quintis (id est viginti quatuor vigesimis) externæ c u f t, ex tribus semissibus (id est triginta vigesimis) externi collateralis t f s, & ex sex vigesimis siue tribus decimis interni collateralis y f h.

Secunda componitur ex duplo parallelepipedi C, ex parallelepipedis B, S, & ex sex quintis internæ portionis b u f y: ergo inuenta est æqualitas proposita.

Quæ quantum conducat ad tetragonismum circuli non multò post patebit. Quod verò dixi ex nonâ libri secundi apertum esse, ostendi potest in hunc modum, ne alicuius erroris hæc latebra putetur. Si librâ suspensâ ex c, perpendiculo c s, brachium semidiametro æquale mutetur in brachium æquale rectæ c e; æquiponderans isti brachio respondens erit ad aliud æquiponderans vt est recta b e ad e c, hoc est vt binarius ad ternarium, ex octauâ secundi: si ergo brachio æquante rectam c e, suspensio ex c transferatur in e, & brachium obuertatur ad partes a, æquiponderans, ex nonâ secundi, erit ipsa portio c b y s imminuta æquiponderante quod brachium longius sibi vindicauit. librâ ex c suspensâ: ergo si brachium mutetur in semidiametrum, æquiponderans isti brachio respondens *erit ex octauâ secundi ad aliud, vt est c e ad b c vel vt ternarius ad binarium; ergo æquiponderans respondens suspensioni ex e, brachio æquante semidiametrum, est tres semisses suspensi c b y s deducto æquiponderante quod libra suspensâ ex c competit brachio æquanti semidiametrum.*

PROPOSITIO XVI.

Inuenire & calculo colligere æqualitatem inter duo quædam ſpatia plana proximè conducentem ad circuli quadraturam.



Retento eodem diagrammate, ex diametro a c abſcindatur n π æqualis ſemidiametro b c, & per π agatur π β æquidiſtans rectæ n q, & occurrens rectæ n i in β. Intelligatur per β duci planum ęquidiſtans plano l c m, cuius cum cylindraceâ ſuperficie communis ſectio ſit baſis cylindracei oppoſita baſi l c m. Si ergo libræ brachium ponatur æquale rectæ n π, & eius ſuſpenſio fiat ex n, perpendiculo n o, ęquiponderans cylindraceo altitudinis π β & baſeos inter condicta h b l, f u μ interceptæ, hoc eſt baſeos quæ portioni internæ b u f y competit, erit per corollarium quintum decimæ tertiæ æquale portioni b y f u cunei coniugati i n o: & ſi eidem portioni internæ b y f u fiat æquale parallelrpipedum G E cuius altitudo F E æquet rectam π β, baſis G F erit ex eodem corollario æqualis ſpatio quod librâ ex n ſuſpensâ, iiſdem poſitis, æquiponderat baſi portionis faſtigiati internæ, quam baſim per ſolã u b partem diametri illi competentẽ deſigno, vt minùs crebræ incurrant lineæ, magiſque perſpicua euadat figura; quod in aliis etiam baſibus deſignandis præſtabo, qua de re volui monitum Lectorem noſtrum. Sex igitur quintæ parallelepipedi G E retinentes eandem alritudinem F E habebunt baſim æqualem ſex quintis partibus ſpatii, quod baſi internæ u b ęquiponderat iiſdem manentibus.

Similiter ex eadem diametro a c auferri intelli-

intellige o δ ſemidiametro æqualem, & per δ agi δ ψ æquidiſtantem rectæ n q, & conuenientem cum recta o f in ψ. Quoniam trianguli n f o baſis n o bifariam ſecatur à perpendiculari f u ex angulo f ad ipſam demiſſâ, erũt triãgula n u f, u o f æquilatera, & æquiangula; ergo anguli ad n & o ſunt æquales; ergo rectæ π β, δ ψ ſunt æquales; ergo planum per β parallelum baſi l c m tranſit per ψ. Sicut igitur in cuneo interno, ita in externo n o d oſtenditur, librâ ex o ſuſpensâ, perpendiculo o i, brachio æquante ſemidiametrum, æquiponderans baſi u c portionis faſtigiati externę c t f u eſſe ęquale parallelepipedi L H baſi L I: ipſum autẽ L H pono eſſe æquale portioni externæ c u f t, & eius altitudinem I H eſſe æqualem altitudini δ ψ vel π β. Sex igitur quintæ parallelepipedi L H conſeruantes eandem altitudinem I H habebunt baſim æqualem ſexquintis partibus ſpatij quod baſi externæ u c æquiponderat librâ ex o ſuſpensâ, & reliquis manentibus.

Præterea recta u κ producta ocurrat rectis n q, e p in χ, p; quoniam trianguli u n χ baſi n χ æquidiſtat b k, ſicut u n ad b u, ita eſt n χ ad b k: eſt ergo n χ ad b κ vt ternarius ad binarium. Rurſus quoniam trianguli c n s lateri c s æquidiſtant b y, u f, tres rectæ c s, u f, b y erunt proportionales tribus n c, n u, n b; ergo tres rectæ c s, u f, b y ſunt vt quinarius, ternarius vnitas: ergo b y

Q q

eſt quinta pars rectæ c s vel b h; ergo cum bh ſiue c s ſit ad u f vt decem ad ſex, y h ſiue b k erit ad u f vt octo ad ſex: quia verò b κ eſt ad n χ vt binarius ad ternarium, ſiue vt octo ad duodecim, erit n χ ad u f vt duodecim ad ſex; eſt ergo n χ dupla rectæ u f: ergo cum triangula n u f, n π β ſint inuicem ſimilia; ſintque item inuicem ſimilia u n χ, u e p, & latera u e, n π ſint æqualia, erit e p dupla rectæ π β: eadem verò de cauſâ ſi per c agatur c ω æquidiſtans rectæ u p, & occurrẽs rectæ a d in ω, cui in d occurrat c ξ; recta a ω erit dupla rectæ a d.

Quoniam ergo recta u n æquat ſemidiametrum, ſi per p ducatur planum baſi l c m parallelũ, cylindraceo cui⁹ baſis ſit b u altitudo p e, æquipõderat, librâ ſuſpensâ ex u, perpẽdiculo uf, brachio ęquãte ſemidiametrũ, ſpatiũ æquale parti b u k cunei n u χ; & ſi illud ſpatium ſit parallelepipedum M O cuius altitudo N O æquet rectam p e, baſis G F, erit vt patet ex iam demonſtratis, ſpatium quod librâ ex c ſuſpensâ, reliquis iiſdem poſitis æquiponderat baſi b u, collateralis & interni cunei b u k: ſex igitur vigeſimæ cunei interni collateralis ſiue parallelepipedi M O retinentes eandem altitudinem N O habebunt baſim æqualem ſex vigeſimis partibus ſpatii, quod baſi u b interni collateralis æquiponderat iiſdem manentibus, librâ ſcilicet ſuſpẽsâ ex u, &c. Quòd ſi parallelepipedum cuius altitudo

N O vel p e, basis sit sex memoratæ uigesimæ mutetur in aliud æquale cuius altitudo sit $\pi \beta$ quæ est, vt ostendimus, dimidium altitudinis p e; basis mutabitur reciproca- 34. vndec. Euc.
tionis lege in duodecim vigesimas spatii quod basi u b, iisdem manentibus, æquiponderat.

Eodem prorsus pacto ostendetur si collaterali externo secundo c u z fiat æquale parallelepipedum P R cuius altitudo Q R æquet altitudinem e p; basi u c externæ, librâ ex u suspensâ, positisque reliquis quæ proxime superiùs, æquiponderare spatium æquale basi P Q: & triginta vigesimas cunei externi collateralis siue parallelepipedi P R retinentes eandem altitudinem Q R habere basim æqualem triginta vigesimis partibus spatii quod basi u c externi collateralis æquiponderat: & denique si parallelepipedum cuius altitudo Q R vel p e, basis sit triginta vigesimæ memoratæ mutetur in aliud æqnale cuius altitudo sit $\pi \beta$, basis mutabitur in sexaginta vigesimas spatii quod basi u c iisdem manentibus æquiponderat.

Rursus quoniam u p, producta occurrit rectæ c ω in η; cùm lateri c η trianguli e η c ęquidistet u p, vt e u ad e c, ita erit e p ad e η, hoc est vt binarius ad ternarium: eademque de causâ cùm in triangulo c a ω lateri a ω æquidistet e η, vt e c ad a c, hoc est, vt ternarius ad quaternarium ita erit e η ad a ω:

ergo ex æquo vt e u ad a c, hoc eſt vt vnitas ad binartum, ita e p ad a ω; ſed ita etiam oſtendimus eſſe rectam a d ad a ω: ergo rectæ a d, e p ſunt æquales.

Præterea quoniam parallelepipeda A, B, C, D, altitudinem æqualem rectæ a d habent, ipſa verò a d, vt pote æqualis rectæ e p, eſt dupla altitudinis π β: ſi parallelepipeda A, B, C, D, mutentur in æquiualentia quorum altitudo ſit π β, baſis erit dupla baſeos ipſorum A, B, C, D.

Item quoniam parallelepipeda S habent altitudinem æqualem rectæ a ω, ipſa verò a ω eſt quadrupla rectæ π β, ſi parallelepipeda S mutentur in æquiualentia, quorum altitudo ſit π β, baſis erit quadrupla baſeos ipſorum S.

Quoniam igitur parallelepipeda quæ inter ſe ſunt æqualia, ſi eadem altitudine ſint prædita, habent baſes inter ſe æquales, ex trigeſimâ vndecimi libri Euclidis conuerſâ apud Clauium; compoſitæ autem magnitudines ſolidæ, quas æquales eſſe oſtendimus in præcedenti; redactæ ſunt in propoſitione præſenti ad eandem altitudinem π β; ergo earum baſes ſunt inuicem æquales: ergo inuentæ ſunt duæ planæ magnitudines inuicem æquales, quarum,

Prima componitur primò ex duplo baſis parallelepipedi A; ſecundò ex quadruplo baſis parallelepipedi D; tertiò ex ſex quintis, vel viginti quatuor vigeſimis ſpatii quod externæ basi u c æquiponderat, librâ ex o suspensâ, perpendiculo o i, brachio æquante semidiametrum; quartò ex sex semissibus, vel sexaginta vigesimis spatii quod externæ eidem basi u c æquiponderat librâ suspensâ ex u, perpendiculo u f, brachióque eodem; quintò ex tribus quintis, vel duodecim vigesimis spatii quod internę basi b u æquiponderat librâ suspensâ ex u, reliquisque, vt iam diximus, positis. *Hæc magnitudo vocetur primus terminus æqualitatis notæ.*

Secunda componitur primò ex quadruplo basis parallelepipedi C; secundò ex duplo basis parallelepipedi B; tertiò ex quadruplo basium parallelepipedorum S; quartò ex sex quintis, vel viginti quatuor vigesimis, spatii quod internæ basi b u æquiponderat librâ suspensâ ex n, perpendiculo n q, brachióque semidiametrum ęquante. *Hæc magnitudo appelletur secundus terminus æqualitatis notæ.*

SCHOLIVM.

Præsentem æquationem diu existimaui non solùm veram esse (istud enim adhuc persuasum habeo) sed etiam reduci ad terminos duos quorum vnus foret spatium rectilineum notum, alter segmentum circuli datum; re tamen per numeros diligentiùs examenatâ comperi vtrumque terminum post sufficientem prosthæ-

phareticam (vt solet in Algebrâ) castigationem reuocari ad purum spatium rectilineum ; ac proinde necdum ita inuentam esse à nobis quadraturam circuli, vt nihil amplius desideretur, & inquirendum restet. Nobis tam auio tamque molesto itinere fatigatis nunc satis esto nihil in fronte Operis promitti, quod cumulatè adiuuante Deo non præstiterimus. Huius libri quinti initio speraui fore vt assequerer fugientem Tetragonismum ; si tamen eum comprehendere & retinere non valui adhuc, nihil dubito quin aliquam nec prorsus contemnendam ex eius apprehensâ veste laciniam in manibus meis remansisse iudicetur ab æquo & beneuolo Lectore.

APPENDIX
AD PROLEGOMENA.

IN *Epistola ad Regem Christianissimum vocem Græcã vsurpaui notissimam Geometris in duorum siue planorum siue solidorum æqualitate demonstrandâ. Euclides libri sexti proposit.* 14. *&* 15. *Æqualium & æquiangulorum parallelogrammorum & triangulorum ait* reciprocari latera, ἀντιπεπόνθασι αἱ πλευραί: *libro* 11. *prop.*34. Æqualium solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, ἀντιπεπόνθασι αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσι; *quæ eadem verba vsurpat lib.* 12. *prop.* 9. Æqualium pyramidum & triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines: *& prop.* 15. Æqualium conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines. *Archimedes libri primi Æquiponderantium propos.* 6. *aliàs* 4. τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσοῤῥοπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότων τῶν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσι *quorum versio antiquior ita habet* magnitudines quæ fuerint in grauitate commensurabiles, æquè ponderabunt, si in distantiis quæ secundum grauitatum proportionem fuerint constitutæ, permutatim suspendantur. *Ex quibus istud liquet duos terminos ἀντιπάσχειν quantum ad aliqua nihil esse aliud quàm quanto primus secundum vincit in vno; tanto vinci in alio à secundo iuxta proportionem geometricam; ex illâ verò quasi ancipiti victoriâ demonstratur æqualitas pugnantium; istiusque pugnæ admirandus effectus in libræ suspensione manifestiùs quàm in alio vllo apparet ipsius etiam iudicio sensûs. Antiqui Philosophi qui nulli non Mathematici erant, cùm in Ethicis Iustitiæ naturam inuestigarent vocem istam ex Mathematicorum disciplinâ eò transtulerunt vt liquet ex Aristotele l. 5. moral. c. 5. vbi statuit etiam in commerciis & rerum permutationibus interuenire debere δίκαιον τὸ ἀντιπεπονθὸς κατ' ἀναλογίαν: tunc enim solùm pactio cõmercantiũ est æqua, quando tantũ vnᵘˢ eorũ sibi acquirit, quantum iuxta analogiæ & proportionis geometricæ leges amittit commutando. Ex his verò planum fit cur nulla latinâ voce satis exprimi illius græcæ significatum dixerim:* talionem *aliqui vertunt, sed nimis angustâ notione; alii in Scholâ significanter quidem sed minùs latinè* contrapassum; *vnde S. Thomas 2.2.q.61. à. 4. quæstionem instituit quàm & rectè suo more soluit,* vtrum iustum sit simpliciter idem quod contrapassum. *Porro quid sit libra à materie diuulsa, quam & Archimedeam appellaui quod ipse eam libris duo-*

lus seorsum tractarit, & ad quadrandam parabolam adhibuerit, explano in istis prolegomenis §.7. *pag*.60.

Pag.4.*ita restitue initium malè emendatum*. ignoto quæritur, Aristoteles assignat εἰ ἔστι *an sit*, vt *an*, *inquit*, centaurus sit.

Hęc porro quæstio ita æuo illius controuersa extitit, vt in Categoriis assensum suspendat: postquam enim affirmauit sublato ἐπιστητῷ, hoc est (vt vulgò loquimur in Scholà) *scibili*, simul tolli scientiam, quia nisi sit scibile non est scientia &c.

Pag. 15.*initium pariter ita lege*. qua posita id ostenditur peractum quod propositum fuerat, vnde sub finem problematum clausula solennis additur *quod faciendum erat* ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, *vel* ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν: sub finem verò theorematū, *quod erat demonstrandum*, ὅπερ ἔδει δεῖξαι, *vel* δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα, aut simili aliâ verborum formâ.

Pag.21. *locum Eutocii in quo Isidorum magistrum suum* Mechanicū *appellat*, *reddidi* cognomento Mechanicum: *si quis vocem illam* cognomento *deletam velit, vel malit ita vertere* qui Mechanicam profitebatur, *per me licet*.

Pag.47.*ita lege*.Iulius Pacius refert Brysonem ita quadrasse circulum, vt voluerit eum esse æqualem quadrato medio.

Pag.78. *Eclipseos solaris epilogismus qui hoc loco apponitur, ante annos fermè duodecim à me initus fuit; non puto quidem mendosum esse*, *si quid tamen in eo peccatum fuerit, ignoscet quisquis nouerit quid sit numeros tractare. Per hypsoma voluisse Tertullianum significare meridianum cardinem interpretatus sum, quòd præsentis deliquii dimidium moræ cadat in ipsũ meridiem, nec viderem quid aliud probabiliter dici posset venisse tunc in mentem istius Autoris eiusmodi vocem vsurpantis: nam significatio illam quam ὑψώματι Ptolomæus in Apotelesmatum libris assignat, nullatenus congruere soli istud deliquium patienti perspiciebam; aliud verò aliquot antè vel post annis nullũ se meo calculo offerebat. Neq; verò existimes minus falsũ esse, solẽ cùm in suo hypsomate fuerit, si istud nomen iuxta Ptolomai & Astrologorũ Iudiciariorum notionem sumatur, deficere non posse: verissimum igitur semper erit quod hoc loco Scriptori isti opponimus, ipsum hac in re peccasse nimiâ credulitate, eiusque peccati occasionem fuisse studii mathematici neglectum.*

Hæc in prolegomena habui annotare; alia enim errata ipsis oculis non ineruditis facile emendantur, quæ quidem crebriora quàm in sequentibus libris irrepserunt, quòd inexercitatũ Emendatorem nacta fuerint.

AD PRIMVM LIBRVM.

ELemẽta inscripsi præsẽtes libros, quòd re verâ habeant naturam elementorum à nobis in prolegomenôn paginâ 28. traditam ex Proclo: tetragonismica verò, quòd ad quadraturam omnium figurarum rectilinearum, curuilinearum, planarum & solidarum præbeant aditum.

In tertia propositionis schemate bis per incuriã adscripta est litera y, sed hoc nullam generat confusionem vt tantillum attendenti patebit. Caterùm in nonnullis huius operis diagrammatis duæ literæ vni & eidem puncto adiunctæ sunt, aliquando quidem vt inde intelligat Lector, posse illa puncta sibi non congruere, & esse à se inuicem dissita: aliquando verò quia cùm Typographus errasset in appellandis literis, existimauimus istam mendi castigationem minùs legenti fore molestam.

Tertia propositio non solùm vera est in sectionibus conicis, sed sine vllo erandi periculo potest sumi pro principio per se noto in quibuslibet aliis lineis. Certè nos in quarti libri vndecimâ eandem propositionem ad solida traductam inter principia retulimus, nec puto illâ esse quicquam in vniuersâ Geometriâ certiùs; vtilitates verò & demonstradorum compendia ea habet, quæ vix credi possint. Eius ope nos paucis propositionibus in illo eodem libro quarto demonstrauimus proportiones, & sectiones sphæræ, sphæroideon, & conoideon; propter quæ duo Archimedes totos libros de Sphæra & cylindro, de conoidibus & sphæroidibus scripsit: neque tantùm illa duo paucioribus peragimus, sed iis etiã rerum nouarum incredibilem accessionem facimus; vt verè basis totius huius operis postulatũ eiusmodi dici debeat: facile autem, vti spero, illi acquiesces si quæ ad eius confirmationem adduco, vel si etiam ipsum per se solum accuratè peapenderis.

AD SECVNDVM LIBRVM.

IN iſto libro, qui quo breuior eò carior mihi eſt, libræ proprietates trado etiam eas quas neſcio an Vllus Anteriorum ſcriptis libris conſignarit; ad huius verò tractatûs cumulum adiungi debet prima libri quinti propoſitio, & Scholiũ decimæ ſextæ quinti: Item quæ de librâ planâ (ita enim illam antè incognitã appellauimus) expoſuimus in tribus ultimis libri quarti, & in ſecundâ atque tertiâ quinti. Porro doctrina huius libelli non ad ſola rectilinea, vel curuilinea ex ſectionibus conicis genita pertinet, ſed ad omnia tam rectilinea quàm curuilinea cuiuſcumque rationis etiam ſolida; cùm non nitatur niſi ſextâ primi, & vndecimâ quarti, quas vniuerſim veras eſſe iam diximus.

In propoſitione tertiâ pag. 114. diuiſionem rationis *appellaui quæ* conuerſio rationis *dicenda fuit: quæ menda ne alibi occurrat timeo; ſed hoc leuis momenti iudicabit benignus Lector.*

AD TERTIVM LIBRVM.

*PRopoſitione decimâ ſeptimâ pag.*292.*adiecta eſt litera* t *mendoſe in illis verbis*: quia per trigeſimam ſecundam primi conicorum occurret t ſectioni in alio puncto: *legi verò ita debet is locus* quia per 32. primi, conicorum occurret ſectioni in alio puncto.

Ex corollario quarto decimæ nonæ habes quadraturam homœoſphærici cuius baſis ſit quadratum deſcriptum circa hemiſphærii baſim: cùm autem eiuſmodi homœoſphærici quadrans pla-

no per diametrum quadratorum de quibus agit vigesima secunda ducto diuidatur in duos cuneos primos notos: manifestũ est cuneũ primũ notum quem per libram quadramus in vigesimâ quintâ, quadrari etiam absque illâ per sola huius libri principia: quod de parabolicoide quoque intelligi debet.

AD QVARTVM LIBRVM.

Duodecima propositionis Scholium intelligi debet iuxta restrictionem in Scholio vigesima septima adhibitam pag. 473.

Quæ in corollario tertio propositionis vigesimæ tertiæ & in Scholio iam citatæ vigesimæ septimæ ad hyperbolici xystroidis (parabolicum pro hyperbolico pag. 443. vitiosè legitur) calculum attinent, ea emendari debent iuxta demonstrationem & epilogismum Scholii secundi propositionis tertiæ libri quinti.

AD QVINTVM LIBRVM.

IN contextu propositionis decimæ quartæ pag. 587. pro ex eo auferant trientem circuli *lege* ex eo auferant trientem peripheriæ circuli,

Pag. 589. sub medium restitue in hunc modum. Rurſus quia vt 40. ad 6, ita eſt quadrans ſiue quadraginta centeſimæ ſexageſimæ: ad ſex centeſimas ſexageſimas, parallelepipedum cuius altitudo ſit recta d a, & baſis rectangulum cuius latera duo ſint ſemilatus dicti inſcripti, & diametri a c ſex centeſimæ ſexageſimæ, æquale eſt, &c,

In decima quinta quæ tota deprauata est, hæc *emenda pag.594. ante* §. præterea *ita lege*, & basis spatium quod ex a æquiponderat basi cylindracei.

Pag.595 proximè ante §. Rursus *lege*. rectangulum contentum sub semisse dictæ semidiametri & sub apotome notâ.

Paginam 596. & sequentem vsque ad alteram propositionis partem hoc pacto restitue basis sit rectangulum sub diametri quadrante, & sub notâ apotome comprehensum, altitudo sit tres octauæ partes rectæ a d, cui parallelepipedo propter basium & laterum reciprocationem æquale est aliud cuius altitudo sit a d, & basis rectangulum sub notâ apotome, & sub tribus trigesimis secundis diametri. Quoniam verò si ad apotomen notam adijciatur dictum semilatus conficiuntur duo trientes diametri: rectangulum sub notâ apotome & sub tribus trigesimis secundis diametri æquale est rectangulo sub tribus trigesimis secundis diametri & sub eiusdem duobus trientibus (hoc est quadranti quadrati quod potest semidiameter) deducto rectangulo sub tribus trigesimis secundis vel sex sexagesimis quartis diametri & sub dicto semilatere.

Rursus quoniam cunei noti secundi a c d portioni interceptæ condictis q c φ, μ z π, quod in isto casu congruit condicto u b l, æquiponderans librâ ex n suspensâ brachio æquante semidiametrum est ex vndecimæ corollarij primi epilogismo primo parallelepipedũ cui⁹altitudo d a, basis sit quadrans quadrati b c ; ex scholio verò eiusdem æquiponderans portioni iacenti inter condicta p i r , q c φ est æquale parellelepipedo cuius altitudo a d & basis rectangulum sub semilatere dicto & sub tribus sexagesimis quartis semidiametri ; spatium D erit differentia istorum æquiponderantium, videlicet quadrans quadrati b c imminutus rectangulo sub semilatere dicto & sub tribus sexagesimis quartis diametri.

Quoniam ergo ex præscripto duodecimæ pro primo casu , vt habeatur æquiponderans cunei medij , de spatio D deduci debent duo simul A & B , cùm D sit , vt ostendimus , parallelepipedum cuius altitudo a d, & basis quadrans quadrati b c imminutus rectangulo sub semilatere trianguli æquilateri inscripti & sub tribus sexagesimis quartis diametri:ergo excessus quo istud rectangulum superat duo simul A & B, parallelepipedum videlicet cuius altitudo a d , basis quadrans quadrati b c imminutus rectangulo sub semilatere dicto & sub sex sexagesimis quartis diametri , est rectangulum sub semilatere dicto, & sub tribus sexagesimis quartis semidiametri : ergo definiuimus id , quod fuit definiendum primo loco.

Pag, 599. proximè ante §. quoniã , *lege in hunc modum* lateris inscripti iam memorati:

vel ſub tribus trigeſimis ſecundis diametri a c, & ſub ſemilatere dicto. *Paulò ante finem ita repone.* Baſis ſit rectangulum ſub dicto ſemilatere, & ſub tribus trigeſimis ſecundis, vel ſex ſexageſimis quartis diametri a c: *& poſt ſex lineas* baſeos æquantis rectangulum ſub dicto ſemilatere, & ſub tribus partibus, cuiuſmodi diametrum metiuntur ſexaginta quatuor; quod erat faciendum.

Vnum aut alterum erratum in deſignandis literis inter recognoſcendum Librum à me deprehenſa annotaram in ſchedula, quæ mihi nunc eam inquirenti non occurrit; illa tamen, ſi bene memini, agnoſci facile poterant & emendari. Iſta & alia quæ ipſe legendo non annotaui ignoſces, Amice Lector, & ſi quid in toto hoc Opere non omnino improbandum iudicaueris, totum id in Deum omnis luminis fontem, vt par eſt, refer.

FINIS.

APPENDIX
SECVNDA.

CVM Librum nostrum Bibliopola iam venum esset daturus, ad nos perlatum est, non deesse doctos in vrbe istâ & amicos viros qui inspectâ eius fronte, & obiter, vt fit, toto opere euoluto timerent ne licet methodus esset nostra, res tamen quas per eam demonstramus, iam ab aliis nostræ ætatis viris Lucâ Valerio, Bonauenturâ Caualerio & Euangelistâ Torricellio reperta extarent. Tunc ego incertus hæsi quid potius facerem; vtrum, si quidem id quod timebatur re uera foret, meam ipse miseriam deplorarem qui tam egregios viros à quibus plurima facilè addiscere poteram, ne nomine quidem adhuc nouissem; an fœlicitatem agnoscerem in eo nõnullã, quod de meo protulissem solus ea in quorum inuentione illi simul tantique viri desudassent. Rem ipsam exploraturus eiusmodi Autorum lucubrationes quas potui per vrbem collegi istas, Lucæ Valerij in Gymnasio Romano Professoris de centro grauitatis solidorum libri tres, Clementi octauo Pontifici maximo dicati. Romæ anno 1604. Opera Mathematica Euangelistæ Torricellii serenissimi Magni Ducis Etruriæ Mathematici, ad eundem magnum Ducem. Florentiæ 1644. Exercitationes Geometricæ sex Autore F. Bonauenturâ Caualerio

Ordinis Iesuatorum,& in Bononiensi Academiâ primario Mathematicarum professore. Ad illustrissimos Senatûs Bononiensis quinquaginta viros, Bononiæ 1647. *Lucam Valerium inspexi magnâ voluptate, & eum iudicaui dignissimum qui à Torricellio* verè nostri sæculi Archimedes *diceretur in proemio ad librum de dimensione parabolæ. Caualerii exercitationem qnintam in qua agit de eodem centro grauitatis nouâ methodo, & nouis etiam inuentis suspexi. Postquam verò istorum theoremata cum iis, quæ in libro quarto nostro monstrantur, contuli, non solùm methodum nostram esse diuersam (an facilior & breuior sit meum non est dicere) sed aliqmid etiam à nobis adiectũ esse, quod illis non occurrerit, comperi.*

Primò nec Lucas Valerius nec vllus alius, quẽ viderim, demonstrat modum diuidendi conoides hyperbolicum iuxta datam rationem. Id à nobis præstatur in corollario tertio decimæ quintæ libri quarti. Ille porro modus prætermissus ob suã difficultatem fuit ab Archimede, vbi simile problema de Spharâ, sphæroide, & conoide parabolico soluit.

Secundò nec Lucas Valerius nec quispiam alius mihi notus ostendit proportionem xystroidis hyperbolici cum cylindro, quamuis eius consideratio connexa sit cum conoide hyperbolico; sed specialem habet difficultatem. Eam proportionem tradimus proposit. 23. lib. 4. coroll. 3. & propos. 27. l. eiusdem; & proposit. 3. libri quinti in Scholio.

Tertiò nec etiam ab Vllo, quem quidem legerim, demonstratur centrum grauitatis eiusdem xystroidis hyperbolici. Illud præscribitur propositione 27. libri quarti in Scholio.

Quartò methodũ diuidendi eiusmodi xystroides in datâ ratione qui tradiderit ignoro; ea tamen non est diuersa à methodo simili quam damus in corollario quarto duodecimæ, quinto decimæ tertiæ, quarto decimæ quartæ; tertio decimæ quintæ. Hæc sunt præcipua quæ nec in Valerio nec in Caualerio Vllóue alio qui mihi ad manum esset, reperire potui. Quod autem iste inuenit & demonstrauit de grauitatis centro magnitudinum quas ipse vniformiter difformiter graues *ingeniosè fingit; id ex nostris principiis facillimè reperias & demonstres, postquam quid per istas Voces significet, intellexeris.*

Præterea cum Torricellius Vir meo iudicio de mathematicis optimè meritus diceretur inuenisse spatium rectilineum quod librâ ex centro circuli, ellipsis, Vel hyperbolæ suspensâ, æquiponderat cuilibet segmento eorum; in laudato illo opere Vbi de solidis sphæralibus, de motu, de dimensione parabolæ, de solido hyperbolico, cum appendicibus de cycloide & cochleâ agit, istud non reperi. Potius suspicarer Guldinum nostrum ista tractasse in centrobarycis suis; si quis Vtrumque nactus librum eos inuicem contulerit, inspicere debet Vtrum circuli & ellipseos cuilibet segmento assignetur rectilineum æquiponderans; nam de semicirculo & semiellipsi id satis colligo ex

[redacted]

Caualerii propositione 33.*pag*. 404. *Vbi Guldinum laudat, eiusque doctrinâ Vtitur ad solutionem huius prrblematis*, in semicirculo vniformiter graui centrum grauitatis indagare. *Deinde Videndum est num etiam ad hyperbolæ qualibet segmenta methodus pertingat; denique attendi debet facilitas qua Vterque demonstrat, sed præcipuè exequitur sua problemata: Hæc si rectè perpendantur, non dubito quin appareat diuersitas inter Vtrúmque istum tractatum non in methodo solùm sed in ipsis etiam inuentis.*

Cunei primi noti tam elliptici quàm hyperbolici, quẽ Gregorius à S. Vincentio Vngulã nominat, conuersio in cubum quam trado propositione 25.& 26. libri quarti Valde diuersa est ab eâ quã ille excogitauit quantum ad modum inueniendi attinet nam ego per spatium æquiponderans rem dèmonstro, ille sine librâ; eadẽ Verò libræ tractatione obtineo cubũ parẽ cuilibet eiusmodi cunei frusto intercepto planis quæ cōdicta *nominaui.*

In quinto libro semicono ex axe suspenso inuenio parallelepipedum æquiponderans, nec tantùm semicono, sed cuiuis ei⁹ frusto abscisso incursu plani per Verticem, idemque consequor etiam si basis eiusmodi frusti fuerit hyperbola; nã si fuerit, parabola illud insuper commuto in parallelepipedum. Ad hæc inuenio parallelepipedum quod æquiponderat cuneo secundo noto, quæ inuentio quam prope ducat ad quadraturam quæsitam liquet ex corollario tertio decimæ tertiæ, Vbi dicylindracea inde nata & in cubum Versa, dixi auroram *quadraturæ optatæ; liquet idipsum amplius ex ijs quæ post decimam tertiam laudatam sequuntur. Fateor hîc calculo me debere* *quod quadraturas penè innumeras, quæ pro veris sese inter contemplandum mihi obtulere, falsas esse deprehenderim. Quisquis verò in hoc genere sese exercet, & Archimedeum examen negligit, fœlix admodum est si non fallitur.*

In secundo libro propositionem septimam quam Archimedes demonstrarat quando suspensum est rectilineum, ego extendo ad suspēsa quæcunque vel mixta ex sectione conicâ & rectâ lineâ; vel etiam solis sectionibus conicis comprehēsa; imo & ad quæcunque in quibus sexta primi libri propositio locum habet; quam paulò post dicemus esse admodũ generalem. Hoc demonstrato trado modum determinandi æquiponderans, si suspensio libræ ex vno puncto transferatur in aliud quodcunq; etiam si grauis suspensi ex duobus libræ pũctis centrũ grauitatis nõ sit cognitũ. Libram planã mirabile ad inueniendum instrumentum his adiungo pluráque alia, quæ à nobis inuenta sunt, nec scimus quemquã qui ante nos illa tradiderit. Propositionē vigesimã tertiã libri 4. prætermiserã, quæ ad periphericorũ mēsurã inueniēdã ita vtilis est, vt vix credi possit: per illã ostēdetur solidi hyperbolici acuti, *de quo agit appendix Torricellii, proportio cũ cylindro; ostēdetur quoq; proportio* cochleæ *vel illi æqualis* annulli *quã altera eiusdem appendix monstrat; addo longè generalius esse nostrũ problema, quia idipsũ ostendit quamuis figura* cochleæ genitrix *nõ sit triangulũ, sed quæuis figura rectilinea, aut mixtâ ex parabolâ; aut certè ex sectione conicâ quæ centrum in axe cylindri habuerit.* Libra *autem* plana, *quam excogitauimus, adeo fœcundum est*

Postquam liber ille è prælo exiit Autor eius inuenit, nisi fallitur, circuli quadraturam independenter à centris grauitatum; per libram tamen.

inuentionis *principium, ut quicquid in tertio libro laboriosè inuenimus ex Veterum methodo, ipsa expeditè primo sui usu exhibeat; in uno tantùm dicta methodo inferior, quod non demonstretur, sed postulati locum teneat, fidem sibi concilians ex eo, quòd nunquam sit deprehensa fallere.*

Redeo ad libra principia ex quibus & ex propositione quartâ libri quarti patet si hyperbolæ spatium quod inter asymptotorum unam & hyperbolam ipsam in infinitum excurrit suspendatur, librâ suspensâ ex centro ad quod confluunt omnes diametri, posito perpendiculo ipsâ eadem asymptoto, determinari posse rectilineam figuram quæ ipsi æquiponderet. Hoc verò plane admirandum est; nam illud spatium in infinitum extensum maius est quacunque datâ figurâ (ut alibi ostendimus) ac proinde est grauitatis infinitæ; pondus tamen æquiponderans est finitæ. Ex quo conficitur spatium illud non habere centrum grauitatis; nam si haberet, æquiponderans foret quoque infinitæ grauitatis; unde etiã patet Archimedẽ sapienter petiisse sibi dari quãcunque figuram præditam esse centro grauitatis, id est quodcunque spatium undique terminis conclusum, non autem spatium sine terminis ex una parte diffusum. Est & aliud mirabile quod ex nostris iisdem principiis sequitur nimirum super eius generis aliquo spatio tanquam basi posse construi solidum cuneatum cuius acies sit dicta asymptotus, & ipsum esse æquale inuento finito spatio, cubo videlicet, insuperque centro *grauitatis posse esse præditum; quod plane admiratione dignum est, solidum videlicet super basi immensâ existens esse finitæ magnitudinis; & solidum, quod figura non sit, id est, quod sit non clausum vndecunque, posse tamen habere centrum grauitatis. Hæc omnia iam pridem à me inuenta & in tractatum de principiis libræ reiecta, commemorare libuit occasione demonstrationis subtilis quam in Torricellio legi de solido hyperbolico acuto.*

Quid porro in primo elementorum nostrorum speciale sit, propter quod illum ediderim, restat vt dicam: planiùs autem id intelligetur si quædam de inuentis Cuualerij præmisero. Is ergo tredecim ab hinc ferme annis vulgauit duas regulas admodum vniuersales ad figurarũ mensurã, quas Torricellius ante propositionem vndecimam de quadraturâ parabolæ certò affirmat mirum esse pro inuentione compendium & innumera quasi imperscrutabilia Theoremata, breuibus, directis, affirmatiuisque demonstrationibus confirmare, quod per doctrinam Antiquorum fieri minimè potest. Hæc enim est in Mathematicis spinetis via verè Regia, quam primus omnium aperuit & ad publicum bonum complanauit mirabilium inuentorum Machinator Caualerius. *Eadem nonnihil concussa à Guldino nostro firmiùs stabilire conatus est anno 1647. in quinq; prioribus Exercitationibus, præcipuè verò in earum tertiâ. Cæterùm earum primam regulam ponit in Exercitatione primâ pag.*

5.*n.*7.*his verbis* Si in duabus quibuscunque figuris planis etiam non in eadem altitudine existentibus omnes lineæ vnius figuræ cuidã signatæ parallelæ mente descriptibiles & collectiuè sumptæ fuerint æquales omnibus lineis alterius figuræ cuicunque signatæ parallelis mente descriptibilibus & collectiuè sumptis, etiã ipsæ figuræ erunt æquales; & contra. *Tum eandem regulam similiter applicat solidis cum omnia scilicet plana vnius fuerint æqualia planis alterius &c. Secundam quam paulò strictiorem esse ait proponit ibidem n.*8.*in hunc modum* si in duabus quibuscunque figuris planis in iisdem parallelis cõstitutis singulæ lineæ istis parallelæ cum singulis lineis in directum existentibus collocatæ, fuerint æquales; etiam ipsæ figuræ erũt æquales. *Eãdem postea regulam applicat solidis, sicuti primam. Distinguit autem duplicem modũ demonstrandi aliquam propositionem vnum quidem Antiquorum, & vt ipse loquitur* stylo Archimedeo, *qui in istis abstrusis & difficilioribus fit per reductionem, vt dicitur, ad impossibile, nullo alio ad probationem assumpto præter ea quæ Archimedes & Euclides postulare solent: alterum autem Recentiorum, qui alijs assumptis fit* ostẽsiuè *vt loquũtur: Ille est certissimus, ideóque certitudo istius per illũ explorari solet ab eodem Autore, quãdo id potest, vt videre est capite vndecimo, Exercitationis* 3. *& c.* 8. *atque* 10. *Exercit.* 5. *& Torricellius istorũ principiorũ defẽsor in appẽdice de cycloide monet* principia ferè omnia quib⁹ aliquid per indiuisibiliũ Geometriã demõstratur, ad solitã Antiquorũ demõstrationẽ indirectã reduci posse.

Vt meam de dictis regulis sententiam proferã, simulque aperiã quid in primo libro præcipuè inquisierim longè antequã mihi nota essent scripta Caualerii & Torricellii; dico secundã regulã ad figuras planas compositas ex sectionibus conicis vel rectis esse verissimã; est enim illa ipsa quã in propositione primâ libri primi probauimus stylo Archimedeo, *hoc est irrefragabili: addo primò methodũ illius demõstrationis videri posse trãsferri iisdem fermè verbis ad figuras ex aliis quibuscunque lineis cõpositas, quarum generatio cognita fuerit: secundò eandem propositionẽ ad solida traductã à nobis assumptã fuisse in vndecimâ quarti libri: nullũ enim esse puto, qui id neget in in solidis, postquam coactus fuerit affirmare in planis. Quare concludo secundã illã regulam Caualerii à me admitti generaliter sumptã, quia, vt modò dixi, tradimus methodum eam applicandi ad figuras cõprehensas sectionibus conicis, & illis omnibus lineis de quibus suo modo ostẽdi possint propositiones similes iis quibus sexta illa innititur. Istud verò diligẽter teneri volo ex explicatione & demonstratione illius sextæ propositionis nullatenus consequi* continuũ cõponi ex indiuisibilibus *meris, ac proinde nec nos admittẽdo secundam illam Caualerii regulam quidquam fauere opinioni philosophicæ Zenonistarũ de indiuisibilibus; neque enim eã regulã approbamus nisi quatenus stylo veteri demõstrata fuit à nobis.*

Prima verò regula accuratius explicari & ad veritatis limites restringi debet, vt sine scrupulo approbetur; de ea tamẽ in vniuersũ pronũtiamus *eatenus tantùm nobis probari, quatenus stylo vetere fulcitur. Neque verò existimandum est quoties inter duas parallelas duæ figuræ ita aptatæ sunt vt totæ sint inter eas, & nulla interijci possit parallela prioribus quæ ambas dictas figuras non secet; si singulis parallelis vnius figuræ respondeat æqualis in aliâ sed non in directum iacens, ipsas figuras esse inuicem æquales. Nã eiusmodi æqualitatem nõ rectè colligi ostendi potest multis modis; quod si legitimè colligeretur, quadratio circuli foret absoluta. Reuocato enim ante oculos schemate propositionis decimæ quartæ libri tertij, exparabola g f i b m ita se habet ad semilunulam c b m g vt ex quocunque puncto g, peripheriæ b m ducantur g c, g f æquidistantes rectis a o, b a, & occurrentes parabolæ b n in c, exparabolæ b i in f, ipsæ rectæ g c, g f sint æquales, quod fieri potest in ellipsi; ergo quando g a, a b rectæ fuerint inuicem æquales, exparabola erit inter parallelas g f, b a: & semilunula inter rectas per a & b ipsi a o æquidistantes, ac proinde exparabola & semilunula erunt in parallelis æquè distantibus (quod est perinde ac esse in ijsdem) & singulis singulæ respondebunt æquales: ergo si propterea exparabola & semilunula sint æquales: cum tradita sit methodus quadrandi exparabolam, notum it rectilineum æquale semilunulæ; sed notum est etiam rectilineum æquale figuræ comprehensæ rectis b o, o c, & parabolâ b n c: ergo differentia istorum rectilineorum esset æqualis segmento ellipseos b m g: quadratâ autem ellipsi,* *nullo negotio circulus quoque quadratur.*

Ergo ut tradamus aliquem certum modum utendi primâ illâ regulâ, ponatur ante oculos primum schema propositionis sextæ primi libri, & in eo cõsiderẽtur duæ figuræ, prima a h o m f e, altera b c k m f g insistentes portionibus æqualibus a f, f b rectæ a b; in earũ verò primâ sũptis quibusuis punctis a & o duct. sint ipsi f m æquidistãtes a h, e o; in alterâ verò ipsis f e, f a abscissæ sint æquales f g, f b, & per g, b ductæ sint g k, b c æquidistantes ipsi f m: sintque duæ simul e o, g k æquales rectæ b d; & duæ simul a h, b c sint æquales eidem b d, & ita contingat in quibuscunque alijs pari modo ductis parallelis. Dico quamuis ipsæ inter se parallelæ singulæ sint inæquales, totam tamen figuram a h o m k c b f esse æqualem figuræ parallelogrammæ comprehensæ lateribus f b, b d, & angulo f b d. Si enim intelligatur maioris perspicuitatis causa f m esse perpendicularis ad a b, & circa f m figura a h m f circumuolui imponique figuræ f m b c, parallela a h congruet parallelæ c b, & parallela e o parallelæ g k, duæ verò e o, g k in eadem parallela g l existentes & ad partes oppositas rectæ a b positæ æquabunt rectam b d; duæ item a h, b c æquabunt rectam eandem b d: ergo ex sextâ illâ eadem primi libri æquales erunt duæ simul figuræ h m f a, m k c b f toti figuræ rectilineæ comprehensæ lateribus f b, b d, quod erat probandum; ergo iste colligendæ æqualitatis modus ex primâ illâ regulâ est probatus, & veterum principiis congruens. Atque hic est modus quo nititur *quadratura cycloidis, nam duæ parallelæ à centro semicirculi æquo distantes internallo interiectæ inter semicirculum & cycloiden sunt æquales peripheriæ semicirculi: ergo spatium inclusum semicirculo & cycloide est æquale rectangulo comprehenso sub semidiametro, & sub rectâ periphericam semicirculi æquante; hoc est toti circulo: ergo addito semicirculo totum spatium inclusum cycloide, diametro & rectâ æquante semiperipheriam circuli est triplum ipsius semicirculi, prout ostendit Torricellius, rectè monens demonstrationem quæ procedit ex regulâ illâ, posse in hoc casu reduci ad indirectam, scilicet Archimedeam.*

Quòd si ambæ duæ a h, b c æquarent rectam b d, & ambæ duæ e o, g k rectam g l, & ita eueniret in aliis omnibus tota figura a h m c b f perinde ostenderetur æqualis figuræ f n l d b g, vt aperitum est.

Demum adest nobis alius casus in quo parallelæ istæ inuicem æquales perturbato quodam ordine iacent: rectè tamen infertur æqualitas figurarum psr reductionem ad impossibile stylo veteri: ac proinde hîc etiam valida erit illa regula prima Caualerii. Ille autem casus expositus & demonstratus à nobis fuit in decimâ sextâ libri eiusdẽ primi; & ex eo in tertij libri propositionẽ decimâ quartâ & sequẽtibus quæuis segmẽta quadrauim⁹ linearũ quas quadratrices diximus.

Ex his igitur satis constat quid in ilo libro primo scripserimus, quod alibi nobis non occurreret, & quo pacto nec cogitantes firmaue-

rimus regulas illas duas Caualerii, nec mirum iam erit fortasse cur nos in inueniendo non adeo infœlices fuerimus: vsi enim sumus miro illo pro inuentione compendio; *incessimus* viâ illa Regiâ, *quam ipsis veterum armis & apparatu nobis ipsi Deo iuuante fecimus: insuper libram amplificatam aptissimum ad inuentionem instrumentum adhibuimus. Cæterum illa primâ regulâ Caualerij vti ego tutum non existimo in vllo casu, quem Archimedis radius non demonstret; quia vt verum fatear alia eius probatio à Caualerio adducta propositionibus prima, secunda & tertia Exercitationis primæ, vel non satis cogit, vel à me non intelligitur. Ita verò sentiendi ipse Caualerius potestatem fecisse videtur dum sub ipsum Exercitationis tertiæ finem, sic alloquitur Lectorem pag.* 241 Hæc ad inueniendum plurimum valere vel ipse Guldinus fassus est l. 4. pap. 331. Tu autem quoque perpende num & ad demonstrandum recipi possint; nempe vel sub eâ formâ qua à me vsurpata fuerunt, vel saltem relatiuè ad methodum Archimedeam iuxta quam confirmata sunt. *Atque hinc intelliges* Caualerium *& alios vsos fuisse secundâ regulâ quæ constanter vera est: vel si primâ, in ijs tantum casibus in quibus stabilitur per reductionem ad* impossibile; *si quidem verum est* (*quod facilè mihi persuadeo*) nihil, *vt ipse testatur pag.* 202. *Exercitat.* 3. *c.* 8. adhuc falsi ex tali methodo oriri animaduersum esse.

Cur suam methodum debuerit appellare Geometriam indiuisibilium *potiùs quàm* diuisibilium *non planè video. Si enim continuum ex meris indiuisibilibus mathematicis conflaretur, regula illius prima generaliter esset vera sine vllâ limitatione: cum ergo restrictè sumi debeat, vt non sit falsa, & ita restricta ostendatur, vt modo dicebamus, per principia Mathematicorum antiquorum, non est cur Zenonicis principiis illæ duæ regulæ adscribantur; præsertim cùm quàm abhorreat antiqua Geometria ab illo continui contextu, qui per pura indiuisibilia fingitur, satis perspectum sit ex prolegomenôn nostrorum paragrapho sexto.*

Hæc habui addere per occasionem timoris initio appendicis narrati; superest vt ad corollariũ secundum vigesimæ octauæ libri quarti explanandum hæc quæ post cusum librum sese mihi obtulerunt adiungam.

Quando primarius axis in secundarium non parallelum eo mutatur modo, quem præscripsimus in corollario secundo libri quarti; si eiusmodi mutatio fiat per accessum ad graue suspensum, necesse est vt quæ singulis sectionibus suspensi factis à plano parallelo respondebunt magnitudines subducendæ, possint subduci ex sectione in æquiponderante factâ occursu eiusdem paralleli; nam si ista sectio sit minor illâ magnitudine, non rectè inferretur, graue cuius sectiones forent æquales dictis magnitudinibus singulæ singulis, esse excessum quo æquiponderans primæ ſuſpenſionis maius foret. Quandò verò axes ſunt paralleli, id non eſt neceſſarium, ſed poteſt eiuſmodi compenſatio fieri ex ſectionibus factis occurſu aliorum parallelorum: iſtæ enim ſectiones cùm in ſuo ſitu æquè omnes diſtēt ab axe, perinde eſt quod magnitudo quæ ſubduci debet, ex hac vel ex illa ſectione ſubducatur: at in axibus alijs, magnitudo ſubducenda ex ſectione huius paralleli ſi ſubducatur ex ſectione alterius, cùm illa non æquiliter diſtet ab axe, inæqualem etiam ῥοπὴν habebit, ac proinde vis deorſum trahens non erit æqualis vtrobique.

Pratérea in Scholio Vndecimæ quinti libri ſub finem pro eiuſmodi plana ſint æqualia, *legendum aduerti* eiuſmodi ſolida ſint æqualia.