DE

CONTINUITATIS LEGE ET EJUS CONSECTARIIS

PERTINENTIBUS

AD PRIMA MATERIÆ ELEMENTA EORUMQUE VIRES

DISSERTATIO

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO
BOSCOVICH
SOCIETATIS JESU PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE
IN COLLEGIO ROMANO.

ROMÆ MDCCLIV.

EX TYPOGRAPHIA GENEROSI SALOMONI

APUD VENANTIUM MONALDINI BIBLIOPOLAM IN VIA CURSUS.

PRÆSIDUM FACULTATE.

1. JAM ab anno 1745. in dissertatione de Viribus Vivis hoc ipso in loco publice proposita, & propugnata, tum in Commentariis Acad. Bononiensis iterum impressa tomo 2. proposuimus theoriam nostram virium quarumdam, quibus omnia materiæ puncta sint prædita, & ex quibus tam materiæ ipsius constitutio, quam generales omnes, ac præcipuæ quævis e particularibus corporum proprietatibus sponte fluant, & ut mera quædam consectaria necessario deducantur. Eamdem anno 1748. in secunda parte dissertationis de Lumine hic itidem proposita multo uberius exposuimus, & consectaria præcipua Geometriæ ope deduximus demonstrationes persecuti, quarum ope tum alia multa, tum præcipua soliditatis in primis, & fermentationis principia innotescerent.

2. Porro theoriam ipsam nos quidem non ad arbitrium, ut hypothesim quamdam, confinximus, ut quibusdam ex eorum genere, qui parte tantum perlecta de re tota judicare solent, est visum; sed positivis argumentis demonstrare conati sumus, & quidem ejusmodi, ut evidenter patere posset, non illud a nobis esse præstitum, quod sæpe in præceptis animo opinionibus fieri solet, ut argumenta ipsa undecunque conquisita sint ad sententiam synthetico ritu comprobandam utcumque, sed accurate expositam esse analysim eam omnem, quæ nos e simplicissimis naturæ principiis ad ipsam illam theoriam necessario, & spontaneo conclusionum nexu perduxerit. Qua in re illud ingenue fateri possumus, id nobis omnino nec opinantibus contigisse, nec ad theoriam ipsam, cujus uberrimos sane fructus & tum quidem percepimus, & percipimus in dies, ipsorum nos fructuum amor, quos tum omnino ignorabamus, sed naturæ indoles, & vis argumentationis pertraxit.

3. Præcipuum universæ analyseos nostræ fundamentum situm est in celeberrimo illo, quod Philosophi jam passim *Continuitatis principium* appellant, quod quidem jam ab anno 1687. Leibnitius, quamquam nondum hoc usus nomine, protulit, ac contra Cartesianas motus leges adhibuit in iis, quas Baylius nominavit *Nouvelles de la Rep. des lettres*, tum Leibnitiani alii complures illustrarunt, quorum argumenta collegit in Physicis Institutionibus Matrona doctissima *De Chatellet*. Porro tum quidem ex iis, quæ ad ipsum principium vel explicandum, vel comprobandum, vel vindicandum pertinent, vix quidquam persecuti sumus, quanquam habentur sane multa, & per se ipsa scitu dignissima, & non ad ejus principii tantummodo confirmationem, verum etiam ad alias veritates complures deducendas, & præcludendum erroribus multis aditum utilissima, ac necessaria, quorum aliqua vel in privatis epistolis, vel in publicis lectionibus identidem, ubi sese occasio præbuit, exhibuimus, ac eorum multa, quæ ad Geometricorum Locorum continuitatem pertinent in iis, quæ hoc ipso anno edidimus Sectionum Conicarum elementis persecuti sumus, fusiore dissertatione ad calcem adjecta.

4. Id igitur argumentum in hac solemni exercitatione aliquanto ordinatius pertractandum suscipimus, speramusque, explicatis difficultatibus iis omnibus, quæ contra principium ipsum & a pluribus primæ etiam notæ scriptoribus, & a doctissimis viris vel proposita jam olim sunt, vel proponuntur in dies, ipsam illam theoriam nostram, quæ sensim propalari magis jam incipit, ab aliis impugnata, ab aliis in publicis etiam Academiis proposita, & propugnata, ex hac nova præcipui fundamenti sui propugnatione adepturam aliquanto plus auctoritatis, & roboris.

5. Quoniam vero sunt, qui ipsum Continuitatis principium ita impugnant, ut id quidem contradictionem involvere, atque illud, quod maxime excludere nititur, necessario involvere arbitrentur, quemadmodum de summo nostri ævi & Mathematico, & Philosopho Maupertuisio videbimus paulo infra, primo quidem genuinam ejus principii explicationem ita exhibebimus, ut, ea rite percepta, nihil in ipso deprehendi possit, quod vel sibi ipsi, vel rectæ rationi non congruat, unde ipsius possibilitas profluet, qua constituta progrediemur ulterius, & ejus in natura existentiam evincere conabimur.

6. Ut autem ipsius principii Continuitatis notio evadat magis perspicua, continuæ quantitatis naturam persequemur primo loco, & eam Geometriæ ope illustrabimus, tum ad ipsum Continuitatis principium explicandum faciemus gradum. Continuæ quantitatis natura in eo sita est, ipso Aristotele teste, quem Leibnitius laudat in schediasmate memorato num.3., quod eorum partes se excipientes imm-

immediate communem habeant terminum; ubi ipse Aristoteles Continuitate affirmat destitui numeros, eam autem agnoscit in linea, superficie, corpore, ac in spatio, quod appellat locum, & tempore. En ejus locum in *Categoriis cap.6. de quanto* ex editione Parisiensi anni 1619. *Discretum est, ut numerus .... Continuum est, ut linea, superficies, corpus, & praterea locus, ac tempus. Nam partium numeri nullus est communis terminus, quo ea partes conjungantur .... At vero linea est continua; quia communem terminum sumere licet, quo partes ejus conjunguntur, nempe punctum. Et superficiei quoque communem terminum accipere licet lineam, quoniam plani partes communi quopiam termino conjunguntur. Itidemque in corpore potes accipere communem terminum lineam, vel superficiem, qua corporis partes conjungantur. Ejusmodi est etiam tempus, & locus. Nam præsens tempus conjungitur cum præterito, & cum futuro. Rursus locus in continuis est, quia locum aliquem continent partes corporis, quæ communi aliquo termino copulantur. Igitur etiam loci partes, quas continent singulæ corporis partes, communi aliquo termino copulantur.* Hæc Aristoteles, quæ nos paulo fusius, & accuratius persequemur.

7. Concipiatur in fig.1.linea ABCD, quæ sit interrupta in B, C. Ibi continuitas læditur, quia B finis partis AB præcedentis, distat a C principio partis CD, quæ ipsam AB immediate consequitur. Contra vero linea AEB est continua, quia idem punctum E est limes communis partis AE, & partis EB.

8. In quavis continua quantitate distingui debet id, quod est terminus, seu limes, ab eo, cujus est terminus. Illud primum in ea ratione, in qua est terminus, debet esse indivisibile, hoc secundum debet esse divisibile in infinitum. Lineæ terminus est punctum, superficiei terminus est linea, solidi termini est superficies. Linea secundum longitudinem est divisibilis in infinitum, punctum vero indivisibile: superficies est divisibilis secundum & longitudinem, & latitudinem linea autem, quæ ipsam terminat, secundum latitudinem indivisibilis est, licet secundum longitudinem, secundum quam cum ipsa superficie protenditur, divisibilis sit, ac idem in superficie accidit respectu solidi, quæ crassitudine, qua ipsum terminat, omnino caret.

9. Porro terminum, seu limitem esse indivisibilem in ea ratione, qua limes est, evidenter consequitur ex ipsa termini, seu limitis notione. Si enim is divisibilis esset, & partes haberet, jam non totus ad limitem pertineret; sed interior pars pertineret ad id, cujus pars exterior esset limes. Qui discursus cum in ipsa parte exteriore redeat, manifesto consequitur, id, quod est limes, indivisibile esse, ac proinde punctum debet esse penitus indivisibile, linea indivisibilis se-

lis secundum latitudinem, superficies secundum crassitudinem, sive profunditatem.

10. Ex ipsa termini natura consequitur etiam illud, terminum termino contiguum esse non posse. Nam semper haberi debet, illud continuum ipsis interjacens, cujus ii ipsi termini sunt. Neque alter potest esse finis praecedentis, & alter principium sequentis, cum ex natura continui (num.6.) communis esse debeat eorum terminus. Idem autem conficitur adhuc evidentius ex ipsius termini indivisibilitate. Indivisibilia enim vel a se invicem distant, vel, distantia sublata, in unicum coalescunt. Nam quae extensione omnino carent, vel se non contingunt, vel se contingunt secundum se tota. Distant in primo casu; compenetrantur, & in unicum coalescunt in secundo. Sibi ipsi vim inferat oportet, qui punctum puncto contiguum concipiat, & tamen extra ipsum positum, nec compenetratum. Concipiet globulos quosdam extensos, qui globuli ex una parte se contingant, ex alia a se invicem recedant, ubi partes ejusdem puncti admittet, & indivisibilitatis, ac inextensionis ideam destruet. Est id sane vetustissimum argumentum, quo semper Zenonis sententia continuum extensum componentis ex punctis penitus inextensis confutata est, cujus solutionem aptam nemo huc usque exhibere potuit, nemo profecto exhibebit in posterum, cum absolutissimae demonstrationis, atque evidentiae vim habeat.

11. Multa autem horum obscurissima videntur iis, qui in suarum idearum originem altius non penetrarunt, nec ab iis, quas per sensus hauserunt, satis norunt alias per reflexionem efformare rectae rationi, & rerum naturae magis conformes. Non indivisibilia tantummodo, & inextensa, verum etiam divisibiles magnitudines numero infinitae nostros sensus effugiunt, qui, ubi ad quosdam imminutae magnitudinis limites deventum est, nos omnino destituunt. Hinc a prima infantia, tam per visum, quam per tactum, divisibilium, & extensarum quantitatum perceptiones hausimus innumerabiles, quibus ita paullatim assuevimus, ut quotiescumque puncti cujuspiam ideam excitare volumus in nostris mentibus, globuli cujusdam extensi in longum, latum, & profundum excitemus ideam, quem globulum alteri globulo adjungimus, & longissimum etiam ipsorum ordinem globulorum consideramus. Accedat sensuum perceptioni reflexio. Consideretur illud, finitam extensionem quamcumque debere habere suum finem, nec id, quod partes habeat, posse interioribus sui partibus finem esse, & patebit illico finem revera haberi, ac partibus, & extensione carere, nec posse inextensum ab inextenso contingi, quin simul coeant.

12. Verum ut ipsi imaginationis imbecillitati indulgeatur, ostendemus, quo pacto ii etiam, qui communem amplectuntur sententiam de continua extensione materiæ (nam nos materiam ipsam, ut infra patebit, componimus ex punctis prorsus indivisibilibus, & inextensis, a se invicem aliquo semper vacuo penitus intervallo disjunctis) cogantur omnino agnoscere puncta penitus indivisibilia, & inextensa, lineas latitudine, superficies & latitudine, & longitudine destitutas, ubi illam adhibebimus imaginem, qua in primo tomo nostrorum Elementorum, in ipso nimirum Geometriæ vestibulo usi olim sumus, cum in hanc nostram theoriam nondum incidissemus, ad ostendendum superficies, lineas, puncta in ipsa reali continua extensione esse aliquid, non a nostra mente confictum, sed in iis ipsis revera existens, & ad ipsam continuam extensionem inseparabiliter pertinens.

13. Sit tabula ABDC continua, & affabre perpolita, cujus dimidium EFDB concipiatur coloris nigri, alterum autem dimidium AEFC coloris albi. Profecto oculis ipsis subjicietur limes EF inter partem albam, & nigram, de quo verissimè affirmabitur habere tantam longitudinem, quanta est longitudo tabulæ, sed latitudine carere prorsus. Utcumque enim parum declines hinc, vel inde a limite, vel in albo colore eris, vel in nigro. En ideam lineæ habentis longitudinem, & latitudine carentis. Quod si tabula concipiatur crassior, & diaphana, ut e cristallo, ac per totam crassitudinem ejus dimidium nigri, alterum vero dimidium albi coloris sit, oculis ipsis introspicienti apparebit limes inter album, & nigrum tractum in longitudinem, & latitudinem protentus, quanta est tabulæ longitudo, & crassitudo; sed crassitudine carens: Quod si quatuor diversis coloribus tinctæ intelligantur quatuor partes AEIG, GIFC, FIHD, HIEB; binæ habebuntur lineæ GH, EF ita se intersecantes in unico puncto I, ut id ipsum punctum nullam omnino extensionem habeat, nullas partes. Quamobrem & puncti idea habebitur.

14. Novimus sane colores diversos exposcere diversum particularum textum, nec posse continuam tabulam hujus potius, quam alterius coloris esse. Idcirco diximus *intelligatur* ejusmodi tabula iis imbuta coloribus. At id ideæ limitis, & ejus indivisibilitatis efformandæ nihil obest, & facile a sensibili colorum imagine ad sectionem simplicem tabulæ mentis acies transferetur. Secetur igitur ejusmodi continua tabula transversim per EF: tum partes sectione divulsæ iterum admoveantur ad se invicem usque ad contactum. Oculis quidem non apparebit limes inter partem dexteram, & sinistram; erit tamen, & alicubi ab altera ad alteram transitus fiet. Extendetur is limes per totam tabulæ crassitudinem in longum, & latum, & superficiem bina solida dirimentem exhibebit. In ipsa superficie extima sectio longitudinem

dinem habebit EF, & partem alteram superficiei ab altera dirimet, ac lineam reddet. Nova autem sectio GH, ubi priori occurret in I, punctum præbebit indivisibile, & inextensum.

15. Jam vero hic facile admodum intelligi poterit illud, superficiem superficiei secundum crassitudinem, lineam lineæ secundum latitudinem, punctum puncto secundum longitudinem immediatè adhærere non posse, sed vel congruere debere, vel distare. Facta enim illa sectione per EF, evidentissimum est, novam sectionem fieri non posse, quæ vel cum illa priore non congruat, vel inter se, & illam priorem aliquid tabulæ non intercipiat. Si partes tabulæ se contingant, evidentissimum est, novam sectionem fieri non posse priori contiguam, sine ulla intermedia tabulæ particula. Atque id ipsum profluit manifesto ex eo, quod sectio illa sit limes communis utrique parti tabulæ, & prorsus indivisibilis in ea ratione, in qua est limes.

16. Consequitur ex his, in sententia communi de continua materiæ extensione superficiem, lineam, punctum non esse aliquid mente nostra confictum, sed revera existere debere in ipsa illa reali extensione materiæ, cujus extensionis erunt affectiones quædam: erunt termini, inseparabiles ab iis, quorum affectiones sunt, ut nimirum non possit superficies per se solam existere tanquam velum quoddam crassitudine carens, linea ut quædam virgula & longitudine, & latitudine destituta, punctum ut granulum quoddam ab omni extensione immune; sit tamen superficies solidi per se existentis limes realis, linea realis superficiei limes, punctum realis limes lineæ, ac proinde primam Euclidis definitionem, & omnes Geometrarum demonstrationes in ea communis realis continuæ extensionis sententia vim habere suam.

17. Nos quidem, qui continuam materiæ extensionem nequaquam admittimus, puncta realia indivisibilia agnoscimus per se existentia sine ulla linea, & sine superficie ulla, aut solido reali; ac proinde in materia nullam superficiem, nullam lineam, nullum admittimus solidum: adhuc tamen lineam continuam admittimus in motu, quem continuum esse debere patebit infra, ac extensionem continuam in longum, latum, & profundum in spatio, quo nostra continentur puncta, & per quod excurrunt, admittimus omnino, quod quidem ejusmodi trinam dimensionem habere manifestissimum est ex ipsis motibus, quaquaversum directis. Verum quid de ipso spatio sentiamus, & in quo per nos ejus continuitas sita sit, aperiemus inferius. At ejusmodi trina extensione semel in eo admissa, manifesto consequitur, in ipso itidem debere admitti superficies carentes crassitudine, lineas latitudine, puncta dimensione quacumque destituta, quibus admissis, manet itidem omnis Geometricarum demonstrationum vis

in iis

in iis omnibus, quæ pertinent ad ipsam spatii extensionem continuam:

18. Hisce expositis, quæ pertinent ad indivisibilitatem terminorum, seu limitum, progrediendum ad eorum, quæ ipsis limitibus continentur, divisibilitatem in infinitum. In primis id, quod binis indivisibilibus terminis continetur, debet dividi posse, & partes habere. Si enim id indivisibile esset, & partibus careret, non posset limiti utrilibet contiguum esse (num. 10.), sed cum eo compenetrari deberet, ac prorsus congruere. Congruerent igitur bini ipsi limites etiam inter se, nec bini essent a se distantes, sed in unicum coalescerent. Facta autem divisione, jam inter novum limitem, & utrumque e prioribus iterum interjacere debebit divisibile aliquid, & eodem argumento redeunte, divisio continuari poterit in infinitum. Sic quævis linea binis punctis interjecta dividi poterit in infinitum eo ipso, quod semel in binas partes dividi possit. Facta enim ejusmodi divisione in binas partes communi puncto terminatas, ipsæ iterum partes hinc novo puncto, inde altero e præcedentibus terminabuntur, adeoque iterum debebunt divisibiles esse; qui discursus recurrit semper sine ullo fine.

19. Et hoc quidem pacto continui extensi divisibilitas in infinitum, ex ipsa extensionis continuæ natura, & terminorum indivisibilitate conficitur. Eadem in Geometria innumeris sane argumentis ita evincitur, ut nullus dubitationi locus supersit. Illam incommensurabilium quantitatum relatio nullis subjecta numeris, illam anguli contactus a majorum circulorum arcubus perpetuo secti, illam asymptotica curvarum crura indefinite producta oculis fere ipsis objiciunt. Quid illud, quod generaliter solvitur in Elementis ipsis problema, datam rectam in datum partium numerum secare, a data recta imperatam partem abscindere, datis binis rectis quibuscumque tertiam continue proportionalem invenire, quorum problematum priora duo ipsam lineæ cujusvis divisibilitatem exhibent in infinitum, tertium vero illud ostendit, magnitudinem quamcumque ita ultra quoscumque determinatos limites imminui posse, ut potest ultra limites quoscumque determinatos augeri? Si enim e binis datis maneat secunda, ac prima augeatur utcumque, tertia continuè proportionalis minuetur quantum libuerit.

20. Et quidem ipsa ejus problematis solutio fontem aperit ejus præjudicii, quo in ipsa divisibilitate in infinitum, ac imminutione magnitudinis ultra quoscumque limites concipienda laboramus. Assuevimus enim ab ipsa infantia contemplationi magnitudinum illarum, quæ ad nostri corporis magnitudinem haud ita magnam proportionem habent. Vidimus in ejusmodi magnitudinibus numerum partium, quæ nostris sensibus percipi possent non ita magnum contineri.

 Facile

Facile nobis persuasimus, divisione continua cito deveniri debere ad magnitudines, quæ nostros sensus effugiant. Et vero, quæ sub nostros sensus non cadunt, habere vulgo solemus pro nullis, qui præcipuus est præjudiciorum communium fons, numquam satis præclusus, atque obstructus, vel si reflexione aliqua ideas per sensus acquisitas corrigimus, plerumque parum infra ipsum sensuum limitem descendimus, ac velut oppressi deficimus. Pauci acriore mentis acie, atque animi audentiore vi sese altius attollunt, & præjudiciis omnibus sepositis, solam rationem, solam rerum naturam considerant. Proderit autem mentis imbecillitatem imaginibus quibusdam identidem corroborare, quæ ut oculis telescopia solent remotissimos Astrorum globos admovere, ita menti ipsi abstrusissimas, & obdu[illegible]imas veritates, veluti ex fundo quodam erutas, præsentes q[illegible]mmodo sistant, & contemplandas proponant.

21. Ac primo quidem ut amoveatur difficultas illa, quam experimur in concipienda tanta partium multitudine in quacumque perquam exigua quantitate, concipiamus hominem aliquem magnitudinis ita immanis, ut totidem vicibus nos superet, quot vicibus universus Telluris globus superat illam exiguam quantitatem. Ille homo eandem habebit difficultatem in concipienda multitudine partium Telluris totius, quam nos in ea concipienda in illa quantitate perquam exigua. Magnum, & parvum respectiva sunt, & liceret hominum seriem eadem lege majorum augere in immensum supra nos, vel imminuere infra nos, ac quæ aliis essent ad sensum prorsus indivisibilia, aliis contra immensam viderentur extensionem, & partium numerum continere.

22. Verum ut & positivum argumentum divisibilitatis in infinitum communi captui accomodemus, concipiantur in communi sententia materiæ habentis extensionem continuam binæ regulæ crassæ quantum libuerit, sed ex altera saltem parte rectissimæ, ac satis longæ, ut palmorum 100. singulæ. Id in ea sententia omnino fieri potest, nam si quid a rectitudine aberrat hiatu quodam, suppleri poterit implendo, si quid exuberet, poterit demi. Ex natura rectitudinis evidentissimæ sunt binæ hujusmodi propositiones. 1. *Si binæ eæ regulæ se contingunt in fine, ac in vertice distant, distant itidem in medio.* Nam evidentissimum est, si per 50. palmos prorsus congruant, non posse alteram ab altera deinde recedere, nisi altera, vel utraque a rectitudine deflectat. 2. *In eodem casu distant in medio a se invicem minus, quam in vertice.* Nam si per 50. palmos prorsus nihil ad se invicem accedunt, ne post alios quidem 50. accessuras quidquam, evidentissimum sane est, nec ullum unquam invenimus, cui cum hæ veritates primo proponerentur, non eas sibi evidentissimas esse profiteretur.

23. Iis autem positis concipiantur primo die ita collocatæ ejusmodi regulæ, ut se in fundo contingant, & in vertice distent dato quovis intervallo, ut uno digito. Per primam propositionem distabunt etiam in medio, & per secundam in medio minus, quam in vertice. Secundo die poterunt collocari a Deo ita, ut in vertice distent, quantum primo die distabant in medio. Eo die dempta erit digiti pars. Nam pridie minus distabant in medio, quam in vertice, adeoque secundo die in vertice minus distant, quam primo. Eo autem secundo die cum in vertice distent, distabunt pariter in medio, ac in medio quidem minus, quam in vertice. Quare tertio die collocari poterunt ita, ut in vertice distent, quantum secundo distabant in medio, & eodem argumento conficitur, eodem tertio die alteram ex illo digito particulam demptam esse. Porro idem præstari poterit quarto die, & sequentibus omnibus sine ullo fine. Nullus enim advenire poterit dies, in quo eamdem operationem non liceat persequi. Nam si dicatur adventurum tandem aliquem diem, in quo progredi non liceat, fatendum erit, pridie ejus diei adhuc idem illud præstitum fuisse, adeoque ipso pridie regulas in vertice fuisse apertas. Quamobrem apertæ fuerunt etiam in medio, & proinde postridie collocari poterunt ita, ut in vertice apertæ sint, & ea collocatione facta, postridie etiam in medio distare debent. Quotidie igitur auferri poterunt novæ semper partes illius ipsius digiti, atque id sine ullo fine, adeoque ille digitus, & quodvis aliud intervallum, pro quo semper idem argumentum redit, dividi semper potest ulterius in infinitum.

24. Hoc quidem argumentum innititur totum principio Geometrico: *binæ rectæ non habent segmentum commune*, & illi theoremati itidem Geometrico: *in triangulis similibus latera homologa sunt proportionalia*. Nam binæ regulæ cum binis intervallis continent bina triangula isoscelia similia, & proinde intervallum in medio, quod vi ejus principii semper erit aliquod, debet esse dimidium intervalli in vertice. Verum pro iis, qui Geometricis demonstrationibus vel minus assueverunt, vel fidem abrogandam censent, vim habet quandam ex crasso illo 50. palmorum intervallo, per quod regulæ rectæ congruere non possunt, quin totæ congruant, & ex defectu distantiæ in medio a distantia in vertice assumpto indefinite, nulla triangulorum, & proportionum ratione habita. Vis autem omnis in eo sita est, quod assumpto intervallo quovis, inveniri potest intervallum ipso minus, quod ubi semel demonstratum sit, progressus in infinitum necessario consequitur, ut supra in bissectione pariter accidit. Patet autem, qui ejus argumenti vim velit infringere, ipsum omnino negare debere possibiles regulas prorsus rectilineas, vel rectitudinis

 ideam,

ideam, quam habemus clarissimam, confundere, atque corrumpere: quæ effugia quam misera sint, nemo non videt.

25. In nostra sententia de extensione non continua materiæ idem argumentum vim habere eamdem potest, si concipiantur collocata tria puncta in directum, quorum medium distet a summo, & imo palmis 100, tum in vertice in distantia itidem palmorum 100 ab imo, & in distantia unius digiti a summo concipiatur collocatum quartum punctum, tum inter hoc, & imum illud in medio in directum punctum quintum, inter quod, & secundum illud medium priorum trium habebitur necessario ex natura rectitudinis intervallum aliquod, & minus intervallo quarti illius a summo, unde eàdem progressione eadem habebitur divisibilitas in infinitum. Sed ea & ex ipsa continuæ extensionis natura, & ex innumeris Geometricis demonstrationibus, & ex hoc ipso argumento superius allato, & ad communem captum accommodato magis, ita est evidens, & manifesta, ut in dubium a sano homine revocari omnino non possit.

26. Illud tantummodo ante, quam progrediamur, hic notandum omnino est, omnia hujusmodi argumenta evincere divisibilitatem in infinitum intervalli, seu spatii extensi continui, non vero materiæ. Nam in primis sunt nonnulli, qui censent indivisibilem, & simplicissimam materiæ particulam extendi in longum, latum, & profundum, sive extendi per spatium divisibile ita, ut id occupet spatium, quod decem, vel centum ejusmodi simplices particulæ, sed minus extensæ, occupare possent, quam Peripateticorum nonnulli appellarunt extensionem, & divisibilitatem virtualem, quin immo nonnulli ex iis ipsam eandem particulam putarunt jam plus occupare spatii, jam minus, quæ iidem dixerunt *puncta inflata*. Ejusmodi autem extensionis genus explicabant exemplo animæ rationalis, quam simplicem, & prorsus indivisibilem admittebant extensam per totum corpus, vel per certam corporis partem utique divisibilem, & Divinæ immensitatis exemplo, quæ in omnibus spatii punctis utcumque a se remotis semper est præsens. Ea quidem sententia nobis nunquam arridere poterit, cum analogiæ Naturæ, & inductioni desumptæ ab iis, quæ videmus omnino contraria sit, cum nimirum quidquid materiæ cernimus in diversa situm spatii parte, quantum observatione colligere licet, distinctum videamus, ac separabile a se invicem. Adhuc tamen in ea sententia, quæ quidem nullis metaphysicis, vel geometricis argumentis evidenter falsa demonstrari potest, super unica indivisibili particula omne figurarum, & sectionum genus concipi potest, sine ullis realibus ejusdem partibus, in qua eadem dividi possit.

27. Deinde in nostra etiam sententia materiæ constantis punctis prorsus indivisibilibus, & inextensis, ac a se invicem semper disjunctis inter-

intervallo quopiam, potest massa quædam constare punctis tantummodo mille, quæ solum in mille partes ita secari poterit, ut earum quælibet aliquid materiæ contineat, aucto vero partium numero, secabuntur jam vacua intervalla, & partes reliquæ debebunt omnino carere materia, cujus puncta, vel intra mille particulas erunt spatii ab illa mole comprehensi, vel in limitibus inter contiguas particulas.

28. Demonstrata limitum indivisibitate, & divisibilitate eorum, quæ iis limitibus terminantur, deducenda sunt quædam, quæ ad naturam continui cujusvis, & legis continuitatis ipsius probe intelligendam, ac ad evitandos errores quamplurimos, in quos non vulgus tantummodo labitur, verum etiam doctissimi sæpe, ac primæ notæ Auctores a præjudiciis seducti ita alte insidentibus animo, ut necopinanter inter argumentandum sensim irrepant, & se furtim insinuent. Dicemus autem de punctis, & linea, ac quæcumque de iis dicuntur, applicari debent ceteris omnibus terminis, & terminatis continuis quantitatibns, ut lineis, & superficiei, superficiebus, & solido.

29. In primis evidenter consequitur ex iis, quæ demonstrata sunt, puncta non esse partes lineæ, sed terminos ita, ut linea non e punctis, sed e lineolis componatur, & in lineolas resolvatur. Nam divisione in infinitum continuata, semper lineæ cujuspiam partes sunt aliæ lineæ binis singulæ extremis punctis terminatæ. Linea nimirum describitur ductu, vel excursu continuo puncti, non additione, & repetitione ejusdem adnexi.

30. Deinde evidenter itidem colligitur, nullam esse dati cujuspiam intervalli partem omnium minimam, cum cujusvis lineæ pars sit itidem linea, & quævis linea in infinitum itidem divisibilis sit. Quamobrem nomen partis in extensione continua necessario in se includit partium plurium conjunctionem, adeoque nulla est pars, quæ tota ita sit prima, vel ultima dati intervalli, ut in ipsa non contineatur aliquid, quod aliud ante se habeat in initio, & post se in fine. Ipsum partis nomen vagum est, & indeterminatum. Si determinetur numerus partium æqualium determinati intervalli, determinabitur singularum magnitudo: si determinetur magnitudo, determinabitur numerus, & in utroque casu aliqua erit prima, & secunda, aliqua ultima, & penultima. Sed nec magnitudine, nec numero definito, nomen partis aliquid indeterminatum significat; nec interroganti, quot partes sint in dato intervallo, determinate responderi potest, nisi determinetur earum magnitudo, qua determinata numerus etiam determinatur; potest autem responderi indeterminata quadam responsione, numerum partium esse finitum in infinitum. Nimirum determinata quavis magnitudine partium esse finitum, sed quoniam ea in infinitum minui potest, posse itidem augeri numerum ipsum in infinitum

ita,

lis, ut ordinum numerus nullus sit, & particularum in quovis ordine numerus sit semper finitus. Ea responsio in sententia communi continuæ extentionis materiæ majorem aliquam difficultatem habet; in nostra, in qua intervallum, seu spatium, ut infra videbimus, nihil continet reale actu existens, & divisibilitas nihil est aliud, nisi, ut ita dicamus, *interseribilitas punctorum realium*, habet omnino nullam.

31. Demum, quod maxime notandum est, in quovis intervallo determinato habetur semper primum punctum, & ultimum, sed nullum est secundum, aut penultimum. Cum enim inter bina puncta semper (num. 10.) linea interjacere debeat, & ipsa linea (num. 18.) sit itidem divisibilis, evidentissime constat, nullum esse punctum ita alteri puncto proximum, ut alia propiora non adsint, adeoque nullum secundum, nullum penultimum. Quod si quis de ipsis punctis quærat, quot sint in dato intervallo in sententia communi continuæ extensionis materiæ, dicendum est ea numerum omnem excedere, seu esse numero infinita. Nam ante quam per æqualem divisionem partes separentur, ipsæ omnino a se invicem distinctæ sunt, & una non est alia, adeoque & terminum suum habent, qui ibi existit. Quare tot puncta existunt actu in ejusmodi linea, quot divisiones fieri possunt, cumque numerus divisionum, quæ fieri possunt, quovis finito major haberi possit, numerus punctorum actu existentium habetur itidem quovis finito major, adeoque est infinitus. At in nostra sententia, in qua numerus punctorum spatii est sola possibilitas punctorum realium interserendorum, respondetur itidem, ut in partibus, eorum numerum esse finitum in infinitum: nimirum punctorum actu existentium numerum semper in se determinatum fore, & finitum, sed eum ipsum semper augeri posse sine ullo fine: non autem posse simul existere ea omnia, quæ seorsum considerata possunt existere seorsum, ne Divina ipsa Omnipotentia exhauriatur, de quo iterum infra.

32. Consequitur ex præcedenti & illud, nulli lineæ posse auferri postremum, aut primum punctum tantummodo, sed vel infinita numero puncta auferri simul, ablata lineolæ parte, vel relinqui debere, etiam illud postremum. Nam ablato ultimo, vel primo puncto, linea adhuc remaneret terminata, adeoque terminum haberet, & proinde ultimum, vel primum punctum, quod proinde ante ultimi illius, vel primi ablationem fuisset penultimum, vel secundum, quod, ut vidimus, est impossibile. Idem in quavis alia continua serie quantitatum obtinebit, ut superiora omnia. Nimirum ultimus terminus tantummodo, vel primus deesse non poterit, existentibus omnibus reliquis, ut linea ultima finitæ superficiei, superficies finiti solidi, & ita porro, cujus in lege continuitatis stabilienda usus iterum occurret inferius.

33. Inter ea autem, quæ continua sunt, tempus quoque numerari debet, ut ex ipso etiam Aristotele vidimus. Tempus enim continuo fluit, & sine ullo intermedio hiatu partes ipsius sibi continuo succedunt aliæ aliis. Hinc in ipso tempore distinguendum erit, ut in linea, tempus continuum, ut hora, a termino, vel limite dirimente bina continua tempora, quod appellabimus momentum. Illud respondebit lineæ, hoc puncto. Momentum erit indivisibile, ut punctum, tempus continuum erit divisibile in infinitum, ut linea. In tempore continuo, ut in linea, nulla erit particula utcumque parva, qua minor haberi non possit, nullum temporis intervallum ita erit magnum, ut majus aliquod haberi non possit. In temporis continui mensura aliqua determinata, nulla erit particula, quæ tota sit prima, vel ultima. Habebitur semper in quovis intervallo finito temporis momentum primum, & ultimum, non habebitur secundum, & penultimum, sed binis momentis quibuscumque, utcumque proximis, quod maxime notandum est, interjacebit tempus continuum, in quo alia momenta erunt utrilibet ex extremis propiora, ut de punctis in linea diximus. Ut fluxu puncti continuo non repetitione, & multiplicatione generatur linea, ita duratione rei continua, quæ singulis momentis existit, tempore continuo durat, generatur tempus.

34. In iis omnibus spatium, & tempus omnino sibi respondent, nec aliud est discrimen inter ipsa, nisi quod spatium, & lineas habet dimensionis unius, & superficies binarum, & solida trium, ac proinde in lineis, & longitudinem, & positionem, sive directionem mutare potest, tempus vero unicam tantummodo dimensionem habet, & sola diuturnitate variatur, nullo directionum discrimine, soli lineæ analogum.

35. Ex lineæ, & temporis continuarum quantitatum relatione, oritur motus continuus, & celeritas, quæ potest considerari tam in ipso actuali motu, quam in determinatione, quam habet mobile ad motum, quarum primam in dissertatione de Viribus Vivis appellavimus satis apto Scholasticorum vocabulo *velocitatem in actu secundo*, secundam *velocitatem in actu primo*. Motus continuus est is, in quo punctum mobile ita locum perpetuo mutat, ut singulis momentis temporis respondeant singula semper alia, atque alia spatii puncta. Si punctum mobile conjungat idem spatii punctum cum finito aliquo momentorum numero a se invicem per intervalla quædam distantium, habebitur regressus puncti mobilis ad idem punctum spatii; si conjungatur idem punctum spatii cum serie continua momentorum omnium finito aliquo tempore continuo contentorum, habebitur quies. Contra si conjungatur idem momentum temporis cum finito numero punctorum spatii a se invicem finito aliquo intervallo distantium,

habe-

habebitur illa, quæ dicitur replicatio: si conjungatur idem momentum temporis cum serie continua punctorum spatii contenta in finito quopiam intervallo continuo, habebitur illa, quam diximus (num. 26.) virtualem extensionem appellari. Hæc virtualis extensio puncti materiæ quieti, replicatio regressui ejusdem puncti materiæ ad idem spatii punctum respondet. Quod si plura considerentur materiæ puncta, tres alii casus habebuntur; si nimirum conjungant idem momentum temporis cum diversis punctis spatii, in quo sita est disjunctorum coexistentia: si conjungant idem punctum spatii cum diversis momentis temporis, quod fieret in successivo appulsu punctorum materiæ ad eundem locum: si conjungant idem punctum spatii cum eodem momento temporis, in quo sita est compenetratio. Hi septem casus exhibent omnes combinationes fluentes ex conjunctione temporis, & spatii, quorum omnes per Divinam Omnipotentiam possibiles esse, unicam autem disjunctorum coexistentiam illam naturaliter esse possibilem ostendemus inferius, ubi ipsam nostram theoriam ex lege Continuitatis deduxerimus.

36. Ut singulis momentis temporis pro puncto mobili quovis respondent singula lineæ puncta, ita singulis partibus temporis continui respondent singulæ partes lineæ, & viceversa, qui motus dicitur æquabilis, vel uniformis, si æqualibus temporis partibus, æquales spatii partes respondeant, inæqualis, & difformis, si inæquales. Celeritas autem in actu secundo est illa relatio spatii ad tempus in motu æquabili, quæ resultat considerando spatium directe, & tempus reciproce; ut nimirum eo sit major ea celeritas, quo majus spatium eidem respondet tempori, vel minus tempus eidem spatio, adeoque ejus mensura est spatium divisum per tempus, quæ mensura non nisi in motu æquabili, in quo celeritas perpetuo durat eadem, habetur accurate, ut etiam in eo solo motu accurata habetur idea celeritatis in actu secundo. Celeritas autem in actu primo est determinatio ad hanc ipsam celeritatem in actu secundo, sive ad percurrendum certum spatium certo sequenti continuo tempore, nisi quid obsit. Ea sola convenit singulis momentis temporis, non velocitas in actu secundo, cum nullus momento competat motus, qui tempus continuum secum trahit. Quare ipsam intelligere debent Mechanici, ubi celeritatem singulis momentis debitam ducunt in tempus ad habendam spatii mensuram in motu etiam difformi.

37. Si linea componeretur e punctis, tempus vero continuum e momentis, quorum alia aliis immediate succederent, omnes motus continui deberent esse æque veloces; singulis nimirum momentis, singula responderent puncta. Velocitas diversa haberi non posset, nisi si vel idem spatii punctum conjungeretur ab altero mobili puncto cum pluri-

pluribus momentis, quod affirmarunt ii, qui discrimen velocitatum per morulas explicabant, vel idem momenti punctum conjungeretur cum pluribus punctis spatii, quod affirmarunt nonnulli ex iis, qui virtualem illam punctorum extensionem propugnabant. At semel intellecta Continuitatis natura, nulla est difficultas in concipienda celeritatum differentia, & quæ in contrarium afferuntur mera sophismata sunt, quæ facile dissolvuntur, si consideretur cuivis tempusculo utcumque parvo respondere suum spatiolum, cuivis contra spatiolo suum tempusculum in quovis motu, nec ullum esse tempusculum, aut spatiolum omnium minimum, nullum secundum, & penultimum momentum, aut punctum.

38. Nimirum in motu continuo magis celeri eidem tempori respondet majus spatium, vel eidem spatio minus tempus. Si consideretur semper in utroque mobili idem tempus, & id tempus dividatur in particulas quotcumque, utcumque exiguas; primum vero mobile moveatur decuplo celerius, quam secundum, cuicumque particulæ utcumque parvæ temporis continui habebitur in primo spatium decuplo majus, quam in secundo. Si spatium semper commune consideretur, & id ipsum dividatur in particulas quotcumque utcumque exiguas, cuicumque particulæ utcumque parvæ spatii continui habebitur in primo tempus decuplo minus, quam in secundo. In eo nihil absurdi continetur. Utcumque parvum sit spatiolum, quod determinato tempusculo percurrit secundum mobile, semper habentur spatiola illo minora, & minora in infinitum, & unum ex iis, nimirum quod decuplo est minus, percurritur a primo mobili eodem illo tempusculo. Utcumque parvum sit tempusculum, quo primum mobile percurrit determinatum spatiolum, semper habentur tempuscula illo minora, ac minora in infinitum, & unum ex iis, nimirum quod decuplo est minus, percurritur a primo mobili. Cum nullum sit spatiolum, quo minus non habeatur, adeoque quod totum sit primum, nullum sit tempusculum, quo minus non adsit aliud, adeoque quod totum sit primum, nullo existente secundo intervalli puncto, nullo secundo momento temporis, difficultas omnis penitus evanescit. Utrumque mobile habet initium motus in quodam determinato puncto spatii, & momento temporis, ut & finem, in quibus momentis non habetur pars motus, quantitatis nimirum continuæ, sed indivisibilis limes. Motus requirit & spatium, & tempus continuum, quæ divisibilia sunt in infinitum, & motus ipsius divisibilitatem inducunt in infinitum. Numerus partium & spatii, & temporis, & motus pendet a singularum partium magnitudine, quæ si non determinetur, etiam ille numerus indeterminatus manet, ut & relatio partium ad partes. Divisionis lege constituta, relatio statim con-

 sequi-

ſequitur inter partes. Eidem autem parti temporis continui major, vel minor utcumque in infinitum reſpondere poteſt pars continui ſpatii; unde conſequitur & celeritatem augeri in infinitum poſſe, vel minui, abſque ulla aut morula, aut extenſione virtuali, nimirum abſque conjunctione ejuſdem momenti temporis cum pluribus punctis ſpatii, vel ejuſdem puncti ſpatii cum pluribus momentis temporis.

39. Porro licebit hæc omnia ipſis quodammodo intueri oculis, ope Geometriæ in continua linearum relatione. Per quodvis punctum D in fig.3. rectæ AB ducatur recta indefinita MN in quovis dato angulo; in qua capiantur ad eamdem partem bina ſegmenta DE, DF in quavis data ratione, ut pro ſuperiore caſu ſubdecupla, ducanturque ex quovis itidem puncto dato C ipſius AB binæ rectæ CG, CH per puncta F, E.

40. Referat jam DC tempus quoddam, DF ſpatium a primo mobili percurſum, DE ſpatium percurſum a ſecundo. Utcumque imminuto tempore CD, ratio inter ſpatia eodem illo tempore deſcripta erit illa eadem DF ad DE, ſive ut 10 ad 1, nec ullum erit tempuſculum CD ita exiguum, ullum momentum D ita proximum momento C, ut pro utroque mobili, jam aliqua ſpatia continua non habeantur, quæ ſint in illa eadem ratione. Quod ſi quæratur, quo tempore primum mobile velocius percurret ſpatium æquale ſpatio DE percurſo a ſecundo mobili tempore CD, ſatis erit ducere rectam ex E parallelam AB, donec occurrat rectæ CG in L, tum rectam LQ parallelam MN, occurrentem CA, CH in Q, K, & C,Q erit tempus illud quæſitum, quo primum mobile habebit motum QL æqualem motui ED. Illo vero minori tempore ipſum ſecundum mobile adhuc minorem motum habebit, nimirum QK. Nulla eſt FD ita parva, ut ei aliqua ED decuplo minor non reſpondeat, nulla CD ita parva, ut ei aliqua CQ non reſpondeat, quæ erit itidem decuplo minor, quam ipſa, cum ſit CQ ad CD, ut QL, vel DE ad DF, ſive ut 1 ad 10. Ratio conſtans ſpatiorum DE, DF rationem exhibet conſtantem motuum eidem tempori debitorum, ratio itidem conſtans CQ, CD exhibet rationem conſtantem temporum eidem ſpatio debitorum. Quovis ſpatio utcumque parvo deſcripto a primo mobili reſpondet ſpatiolum decuplo minus deſcriptum a ſecundo: cuivis tempuſculo utcumque parvo impenſo a primo mobili reſpondet aliud tempuſculum decuplo minus impenſum a ſecundo mobili. Ubicumque fuerit punctum D, modo non congruat cum C, reſpondebunt ipſi binæ DE, DF, quarum prior erit decuplo minor poſteriore, ac inter ipſum, & C, erit punctum Q decuplo minus diſtans ab ipſo C, per quod altera M'N' tranſeat, in qua itidem habeantur ſua ſegmenta QK, QL in ratione ſubdecupla.

41. Ac

41. Ac ope figuræ ejusdem facile etiam dissolvitur præcipua difficultas, quam contra motum continuum Veteres objiciebant, petita a motu Achillis, & testudinis, quorum prior sit decies posteriore velocior, quod argumentum, progressionum geometricarum summis inventis, Noster Gregorius a S. Vincentio felicissime expedivit. Exponemus primo quidem utut notissimam difficultatem, tum eam e sola continuæ quantitatis natura dissolvemus, ac demum Geometria in subsidium vocata, oculis ipsis eamdem subjiciemus solutionem, quæ omnia quamvis, quod ad summum rei pertinet, notissima, adhuc tamen hic prætermittenda non duximus, ut haberetur quidquid ad Continuitatis naturam intelligendam, & amovendam impossibilitatis suspicionem requiritur.

42. Sic igitur ratiocinantur. Distet initio motus per unum milliare Achilles a testudine. Dum is conficit illud milliare, testudo conficiet passus 100; dum is 100 illos passus, testudo alios 10; dum is eos decem, testudo conficiet unum, dum is unum, testudo decimam passus partem, & ita porro in infinitum. Nunquam igitur, & nusquam Achilles assequi testudinem poterit, quod ex alia parte est absurdum. Nam si Achilles quodam dato tempore unum milliare percurrat, testudine percurrente eodem tempore decimam milliaris partem, accedet ad ipsam per novem decimas milliaris partes; adeoque cum æqualibus temporibus debeat ad ipsam æqualiter accedere ob utriusque motum æquabilem, si fiet ut 9 ad 1, ita illud tempus ad aliud, habebitur tempus illud, quo debet evanescere omnis illorum distantia, eritque, ut 9 ad 1, ita illud milliare illo tempore percursum ab Achille, ad spatium, quod ab Achille præterea percurrendum erit ad assequendam testudinem. Falsum igitur est *nunquam*, & *nusquam* ipsos coire posse, cum adjecta illi tempori, & illi milliari nona sui parte, deveniatur ad illud momentum, & punctum, in quo concursus haberi debet. Porro hujus difficultatis apparens vis tota sita est in ambigua significatione illius *nusquam*, vel *nunquam*.

43. Nam in primis ex illa intervalli finiti divisibilitate in infinitum evidenter eruitur, posse seriem quamdam quantitatum minorum, ac minorum continuari in infinitum, quin certam quamdam, & finitam quantitatem omnis ea quantitatum summa transcendat. Quoniam enim digitus quipiam dividi potest bifariam, tum ejus dimidia pars bifariam, & ita porro in infinitum; patet posse assumi dimidium digiti, tum dimidium residui dimidii, ac iterum dimidium alterius residui, & ita porro in infinitum, quibus tamen omnibus assumptis, nunquam ille digitus transcurretur, cujus particula semper remanere ponitur, dimidio tantum rursum assumpto.

44. Inde autem manifesto consequitur, posse totam illam seriem passuum 1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ &c., & ipsi respondentem seriem temporum ab Achille, & testudine inpensam in infinitum continuari, quin tamen omnis earum quantitatum summa finitum quoddam spatium, & tempus transcurrat. Tum vero si illud *nunquam*, & *nusquam* significet momentum, vel punctum quodvis intra eam finitam spatii, vel temporis mensuram contentum, verissimum erit *nunquam*, & *nusquam* Achillem ad testudinem devenire. At si indeterminate significet momentum quodvis, vel punctum utcumque assumptum in toto tempore, vel spatio, quod quidem in usu communi omnino significat, falsissima erit propositio. Assequetur enim Achilles testitudinem in ultimo momento, & puncto illius spatii, & temporis, quo ita illa series in infinitum continuata concluditur, ut ab eo præcise exhauriatur.

45. Nec difficile est ejusmodi finitam temporis, vel spatii mensuram definire. Cum enim quivis præcedens terminus ad consequentem eandem habeat rationem, eandem habebit & omnium præcedentium summa ad summam omnium sequentium, adeoque differentia primi a secundo erit ad primum, ut differentia summæ omnium præcedentium ab omnium consequentium summa erit ad summam præcedentium omnium, sive ad totam seriem. Porro summa omnium præcedentium continet omnes seriei terminos, cum in quovis finito terminornm numero in præcedentibus desit postremus terminus tantummodo, qui serie in infinitum continuata in infinitum minuitur, ac, ea tota simul considerata, evanescit; summa autem omnium consequentium continet omnes præter primum, adeoque differentia prioris summæ a secunda est solus primus terminus. Habetur igitur notissimum illud theorema *est differentia primi termini a secundo ad primum, ut primus ad illam finitam mensuram, qua tota series continetur ita, ut eam exhauriat*. In casu nostro erit ut 9 ad 1, ita unum milliare, vel tempus ab Achille impensum in percurrendo uno milliari ad illam spatii, vel temporis mensuram, in cujus postremo puncto, vel momento coibit cum testudine Achilles, nimirum ubi effluxerit id tempus, quo Achilles unum milliare conficit, & præterea ejus temporis pars nona, Achilles ipse absolvet milliare 1, & nonam milliaris partem, testudo nonam partem milliaris tantummodo, cujus illud unum milliare cum parte nona est decuplum, adeoque simul convenient, quæ est illa eadem superior determinatio facta in argumento contrario num.42.

46. Quod si solutionem eandem libeat oculis ipsis subjicere, satis est in fig.3. ducere itidem ex K rectam KO parallelam AB, donec occur-

occurrat rectæ CG in O, tum per O rectam M''N'' ipsi MN parallelam, ac iterum ex P ducta recta ipsi AB parallela concipere eandem constructionem continuatam in infinitum: ducta vero per C recta *mn* itidem parallela rectæ MN, assumere ejus segmenta C*f*, C*l*, C*o* &c. C*e*, C*k*, C*p* &c. æqualia segmentis DF, QL, RO &c. DE, QK, RP &c. ubi patet puncta *l*, *o* &c. debere congruere cum punctis *e*, *k* &c.

47. Si jam recta AB exprimat tempus, cujus punctum D sit momentum temporis, quo motus incipit, ac sit FE unius milliaris, & ratio FD ad ED eadem ac prius 10 ad 1, concipiaturque recta MN motu continuo delata versus C ita, ut interea per eam excurrant bina mobilia, quorum alterum sit semper in ejus intersectione cum recta CG, alterum in ejus intersectione cum CH, ea bina mobilia referent ipsos illos motus Achillis, atque testudinis. Nam primo quidem patet, tempore DC primum illud mobile debere percurrere in recta MN totum spatium FD, sive *f*C in recta *mn*, & secundum mobile spatium ED in illa, *e*C in hac, adeoque fore ipsorum velocitates, ut 10 ad 1, distantiam vero initio motus fore FE, sive *fe* unius milliaris, quemadmodum in Achille, & testudine supponitur. Deinde patet, ea mobilia concurrere momento C delata recta MN ad *mn*, elapso tempore quodam finito DC, & emenso a primo mobili spatio finito FD vel *f*C, a secundo ED, vel *ed*.

48. Deinde ut illud ipsum tempus, atque illa spatia definiantur, & oculis ipsis subjiciatur tota series terminorum in ratione subdecupla decrescentium in infinitum, erit in primis CD ad CQ, ut DF ad QL, sive ad DE, nimirum ut 10 ad 1. Quare & antecedentium differentia DQ erit ad secundum antecedens CQ, ut consequentium differentia EF, ad secundum consequens ED, nimirum ut 9 ad 1. Est igitur spatium ED a testudine percursum, & percursum ab Achille ultra suum primum milliare pars nona ipsius primi milliaris, & totum tempus CQ ab utroque impensum post illud, quo Achilles unum milliare confecit pars nona illius ipsius, quo confectum est milliare ipsum. Quodsi considerentur præterea binæ series linearum DQ, RQ &c, & FE, LK, OP &c., vel *fe*, *lk*, *op* &c., invenietur, eas esse continuo in ratione FD ad DE, adeoque in casu præsenti decrescere in ratione subdecupla. Nam est CD ad CQ ut DF ad QL, sive DE, nimirum (per notissimum Geometriæ lemma, quo rectæ FP, LQ parallelæ a recta CH transeunte per concursum rectarum FL, DQ secantur in eadem ratione in E, K) ut LQ ad KQ, sive RO, adeoque ut CQ ad CR. Quamobrem sunt in ratione continua 10 ad 1, tam rectæ CD, CQ, CR &c., quam DF, QL, RO &c., quæ iis proportionales sunt, & proinde in eadem ratione continua erunt tam illarum differentiæ DQ, QR &c., quam harum differentiæ FE, LK, OP &c.

49. Por-

49. Porro patet, illam constructionem continuari posse in infinitum citra punctum C, nec unquam, aut usquam ipsum punctum C præteriri, adeoque totam illam tempusculorum, & spatiolorum seriem in infinitum continuatam, tempus finitum DC, & finitum spatium FD nequaquam prætergredi. Facile autem illud etiam demonstratur, ipsa tempora, & spatia CD, FD ab illis seriebus exhauriri, si ipsæ simul totæ concipiantur, cum facile demonstretur ex ipsa progressionum decrescentium natura, & demonstrari soleat in Elementis, earum terminos ita in infinitum imminui, ut infra quamcumque magnitudinem, utcumque ad libitum determinatam descendant. Quamobrem si concipiatur quævis utcumque parva particula temporis CD, vel spatii C*f*, infra eam aliquando descendent termini progressionum CD, CQ, CR &c., & C*e*, C*f*, C*k* &c.; ac proinde nulla erit utcumque exigua earum mensurarum pars, quam intactam relinquant progressiones illæ DQ, QR &c., & FE, LK, OP &c., vel *fe*, *ek*, *kp* &c., quæ idcirco ipsas, si totæ simul considerentur, exhauriunt.

50. En igitur rei totius summam. Quo tempore Achilles est in F, vel *f*, testudo est in E, vel *e*. Tempore continuo DE Achilles percurrit milliare FE, sive *fe*, testudo decimam milliaris partem LK, sive *ek*. Momento ejus temporis ultimo Achilles est in L, vel *l*, sive *e*, testudo in K, vel *k*. Secundo tempore, quod est subdecuplum primi, Achilles percurrit spatium LK, sive *lk*, vel *ek*, testudo spatium OP, vel *op*, sive *kp*. In ultimo momento ejus tempusculi Achilles est in O, vel *o*, sive *k*, testudo in P, vel *p*; & ita porro per seriem tempusculorum decrescentium in ratione subdecupla semper in ultimo momento cujusvis ex iis tempusculis Achilles est in eo puncto spatii, in quo puncto spatii testudo erat in primo momento ejusdem tempusculi, ac tempusculo proxime sequenti percurrit Achilles illud spatiolum, quod testudo percurrit tempusculo proxime præcedenti. Utraque series spatiolorum, & tempusculorum continuari potest in infinitum, & semper spatiolo Achillis descripto quodam tempusculo respondebit spatiolum testudinis eodem tempusculo descriptum, & spatioli Achillis subdecuplum, quod secum trahet novum quoddam tempusculum pro Achille posterius priore, & ejus subdecuplum.

51. Terminorum hoc modo consideratorum nullus erit finis, si nomine finis concipiatur ultimus terminus considerationis factæ eo ordine; erit autem finis, si nomine finis intelligatur tempus, vel spatium, quod tota series simul considerata exhaurit quidem, sed non prætergreditur. Nam tota tempusculorum ejusmodi series continebitur tempore finito CD, quod si tota simul consideretur, exhauriet, tota spatiolorum series continebitur spatio finito DF, vel C*f*, quod, si tota simul consideretur, exhauriet. Achilles in nullo momento as-

sum-

sumpto intra tempus finitum CD, in nullo puncto assumpto intra spatium finitum FD, vel fC assequetur testudinem: at cum ea conveniet in momento, & puncto C, adeoque verum erit, eos nunquam, & nusquam convenire, si illud *nunqam*, & *nusquam* accipiatur pro momentis, & punctis omnibus assumptis intra finitum quoddam tempus CD, & finitum spatium DF, Cf, non vero si indefinite accipiatur pro puncto, vel momento quovis utcumque assumpto, ut includat ipsum etiam illud momentum, vel punctum C.

52. Atque hoc pacto rite cognita continuitatis natura, omnis illa tanta apparens difficultas evanescit. Habeatur semper præ oculis illud, cuivis *momento temporis* respondere, *esse in aliquo puncto* spatii, cuivis *tempori continuo*, *percurrere aliquod spatium continuum*, nimirum lineam, nullum autem esse momentum, aut punctum, quod immediate consequatur aliud momentum, aut punctum, sed inter bina quævis momenta, aut puncta intercedere semper tempus aliquod continuum, aut lineam continuam, in quibus habeantur momenta, & puncta quot libuerit minus remota ab utrolibet ex extremis, quam ipsa inter se remota sint: nullum esse proinde tempusculum, aut spatiolum adeo exiguum, ut alia ipso minora non habeantur, adeoque nullum tempusculum, aut spatiolum esse ita primum, ut in eo ipso partes non adsint, quarum aliæ priores sint aliis. His rite consideratis, & habitis semper ob oculos, omnes, quæ circa continuitatem habentur, difficultates evanescent, & hæc ipsa erit inferius præcipua clavis, qua difficultatem contra legem continuitatis a Maupertuisio propositam contra Bernoullium aperiemus, dissolvemusque.

53. Interea ad ipsam continuitatis naturam melius perspiciendam, & ad ea, quæ de lege continuitatis dicturi sumus, proderit plurimum considerare aliquanto diligentius ductum unius generis quantitatis continuæ, nimirum lineæ, quæ consideratio universam secum sublimiorem Geometriam trahit; sed utiliora quædam percurremus per summa capita. In primis in Geometria sunt infinita linearum continuarum genera, quæ etiam locos geometricos appellant, quæ singula suam in se admodum simplicem, licet plerumque nobis compositam plurimum, & implexam, naturam habent, & naturam illam, ac proprietates generales quasdam ex ea fluentes ita habent ubique communes, ut nullus ne exiguus quidem sit arcus, qui illis proprietatibus non gaudeat.

54. Jam vero in quavis ex iis lineis continuis habetur semper ejusmodi continuatio ejusdem ductus, ut nusquam arcus abrumpatur, nusquam desinat, & in quodam puncto sistat. Id inductione amplissima curvarum omnium, quarum naturam Geometræ norunt, abunde patet; verum ex ipsa continuitatis natura necessario fluit, & generaliter

raliter facile deducitur. Punctum enim quodcumque debet esse terminus inter binas partes lineæ, se immediate excipientes, ut in tempore momentum quodlibet est terminus inter tempus præcedens, ac subsequens. Linea spatii in eo differt a linea reali materiæ (si linea ipsa realis materiæ continua est ulla, quæ in theoria nostra nulla omnino est) quod in linea reali punctum quidem intermedium quodcumque est communis limes inter lineæ partem, & aliam partem, at punctum primum, & ultimum est terminus lineæ realis ex una parte, & vacui spatii, vel nihili ex altera; verum in linea spatii nusquam habetur punctum, in quo linea ipsa interrumpatur, & quod ante se lineam non habeat, & lineam itidem post se. Id nimirum ipsa puncti Geometrici natura exposcit, ut binas semper contiguas lineas connectat inter se, & conjungat, vel disjungat, & separet, utrumque enim officium simul præstat, prorsus ut in tempore momentum quodvis & ante se tempus habet aliquod, & post se, ac semper præteritum aliquod a futuro immediate consequenti dirimit, ac disjungit.

55. Inde autem facile intelligitur, cur quævis linea continua vel in orbem circumvoluta redeat in se ipsam, vel crure quodam infinito recedat ultra quoscumque limites in infinitum nusquam ita abrupta, ut ulterius non pergat. Quinimmo & illud necessario accidit, ut si ejus aliquod crus abeat in infinitum ex parte aliqua, semper & aliud aliquod ex parte eadem, vel altera itidem sine ullo fine abeat in infinitum, ne & ipsum alicubi abrumpatur. Mira autem omnino est indoles tam linearum redeuntium in orbem, quam abeuntium crure quopiam in infinitum, & immensus sane hic sese aperit campus, per quem liceret excurrere, atque evagari, non dissertatiuncula tam arctis constricta limitibus, sed immani vastorum mole voluminum nunquam satis peragrandus. Sed cohibendus omnino est impetus, & primi tantummodo fines prætérlegendi.

56. In primis omnes lineæ redeuntes in orbem, nusquam initium habent, nusquam finem, sed infinito quarundam veluti spirarum numero redeunt in se ipsas. Id in circulo, qui unus earum omnium nostræ humanæ menti simplicissimus est, ac maximè perspicuus, Geometris est notissimum, & ea est unica ratio, cur arcus circularis trisectio obtineri per Euclideam Geometriam omnino non possit. Ut enim in nostris etiam Sectionum Conicarum elementis nuperrimis exposuimus elementorum nostrorum tomo tertio a num. 278. si proponatur secandus in tres partes æquales arcus quidam circuli AB, in fig. 4. prima fronte videtur propositus arcus unus trisecandus, sunt autem numero infiniti. Cum nimirum circulus infinitis veluti spiris in se ipsum redeat, ac circumflectatur, punctum illud A, vel B commune est infinito spirarum numero, & arcus numero infiniti incipiunt ab A, & de-

desinunt in B, atque ii utravis directione tam AEB, quam AFB, qui omnes eadem prorsus natura gaudent, ut nimirum omnia eorum puncta eandem a centro distantiam habeant, ac easdem proprietates generales habent, ex: gr: ut æquales eorum partes æqualibus chordis æqualiter ad se invicem inclinatis subtendantur. Sunt autem ii arcus cum priore directione AEB, AEBFAEB, AEBFAEBFAEB, & ita porro; posteriore autem AFB, AFBEAFB, AFBEAFBEAFB; & ita porro. Sit primus arcus AEB graduum 60, erit AFB graduum 300: inter A, & B continebuntur arcus omnes, qui exprimuntur numero graduum composito ex 60, vel 300 & continua additione numeri 360; arcus nimirum 60, 420, 780, 1140 &c., & 300, 660, 1020, 1380 &c.

57. Iam vero ob naturam, & proprietates omnibus communes fieri omnino non potest, ut adhibito loco Geometrico quocumque, sive quavis Geometrica constructione eruta ex sola natura, & proprietatibus arcus incipientis in A, ac desinentis in B, inveniatur pars tertia unius ex iis arcubus, quin eâdem constructione inveniatur simul pars tertia reliquorum omnium, quos diximus esse numero infinitos. Hinc problema illud, quod unicam videbatur solutionem habere jam videtur requirere numero infinitas. Sed commode accidit illud, ut omnes illæ infinitæ numero solutiones reducantur ad tres tantummodo, sive ad inventionem trium punctorum tantummodo. Si enim AD gr.20 sit pars tertia arcus AEB gr:60, addita DD′ gr.120 parte tertia totius peripheriæ gr: 360, erit AD′ gr: 140 pars tertia arcus AEBFAEB gr:420 compositi ex AEB, & una peripheria: addito vero iterum arcu D′D″ gr:120 parte tertia totius peripheriæ, habebitur arcus ADB′DFD″ gr: 260 pars tertia arcus AEBFAEBFAEB gr: 780 compositi ex AEB, & binis peripheriis; cumque sit etiam D″D pars circuli tertia, erit arcus AEBFAD compositus ex arcu AD, & una circumferentia pars tertia arcus incipientis in A, & desinentis in B post tres circuitus integros, ac pariter arcus AEBFAEBD′ erit pars tertia arcus incipientis in A, & desinentis in B post quatuor circuitus; atque ita porro in infinitum, cum additis toti arcui trisecando novis integris peripheriis, accedant tertiæ parti novi trientes peripheriæ ipsius, patet, omnes arcus incipientes in A, & post quemvis numerum integrorum gyrorum desinentes in B ordine AEB trisecari in aliquo ex iis tribus punctis D, D′, D″; ut etiam e contrario cum AD sit triens arcus AED, & DD″ totius peripheriæ, erit AD″ triens arcus AFB, & eodem prorsus argumento AFD′ triens arcus addentis ipsi AFB integrum circuitum arcus compositi ex AFB, AFBED & binis peripheriis, atque ita porro arcus itidem omnes exeuntes ex A, & per F desinentes in B post quemcumque spirarum numerum si trisecari

D de-

debeant, semper trientis abscissio habebitur in uno ex illis iisdem punctis D'', D', D. Quamobrem omnes illæ infinitæ numero solutiones reducuntur ad inventionem horum trium punctorum tantummodo.

58. Porro ad id requiritur locus geometricus, qui eundem illum circulum secet in illis ipsis tribus punctis, vel bina geometrica loca, quæ se invicem secare possint in punctis tribus: quod cum binæ rectæ lineæ inter se, vel recta cum circulo præstare non possint (illarum enim intersectio unica esse potest, harum duplex tantummodo) possint autem binæ Conicæ Sectiones, vel Conica Sectio, aut etiam quævis sublimior curva cum circulo, arcus circularis trisectio nunquam obtineri generaliter poterit per Euclideam Geometriam, quæ solas adhibet rectas lineas, & circulum, poterit autem per Conicas Sectiones, vel etiam sublimiores curvas quascunque, & si per analysim algebraicam tentetur solutio, semper necessario obveniet æquatio gradus tertii habens tres radices omnes reales, quæ exhibeant omnia illa tria puncta radicibus suis ipsis: quod si, satis considerata continuitatis natura, & circuli nusquam incipientis, nusquam desinentis infinita circumvolutione in se ipsum, habitum esset ab oculos, non ita diu tam multi incassum in ejus problematis solutione quærenda insudassent methodis ad eam assequendam ineptis.

59. Et quidem, quod de circulo diximus, in omnibus curvis, quæ in se ipsas utcumque redeunt in orbem, locum habet ubique, quarum curvarum infinita numero genera sunt, quæ omnia persequi omnino non licet. Infinita itidem sunt linearum genera, quæ cruribus quibuspiam in infinitum recedunt sine ullo limite. Omnium nostræ quidem humanæ menti simplicissima est linea recta, quæ cum utrinque natura sua protendatur in infinitum, nusquam enim ita desinit, ut continuari non possit, habet bina quædam veluti crura infinita. Bina itidem crura habet Parabola; at Hyperbola habet quatuor, ut Geometris notissimum est, in quibus contemplandis, ut natura continuitis innotescat immorabimur nonnihil: multo autem plura, quæ huc spectant pertractavimus in fusiore Dissertatione adjecta memoratis Sectionum Conicarum elementis nostris, ubi de locorum Geometricorum transformatione agentes, multa, quæ ad continuitatis Geometricæ naturam pertinent, persecuti sumus diligentissimè.

60. In primis sit in fig: 5 recta quædam AB, quæ concipiatur utrinque producta quantum produci potest. Desumpto intra ipsam quovis puncto H, & extra puncto C, per hoc transeat recta quædam GF pariter producta quantum produci potest, quæ si non congruat cum recta DCE illi parallela, eam secabit alicubi in P. Concipiamus jam rectam illam GE primo quidem congruere cum CG, tum perpetuo converti circa C versus A. Punctum P erit primo quidem in H, tum excur-

excurret motu continuo per totam rectam HA ita, ut nullum sit ejus punctum utcumque remotum ab H, ad quod non appellat antequam congruat cum recta ED parallela ipsi BA. Momento temporis, quo cum ea congruet recta GF, illa intersectio P nusquam jam erit, sed in quodam Infiniti veluti pelago, atque barathro demersa, & obruta delitescet. At quovis e sequentibus momentis, abeunte GF in G'F', jam illa intersectio P' regredietur ex infinito ex parte B ita, ut nullum sit ejus infiniti cruris HB punctum, per quod non transeat, quo crure toto peragrato iterum deveniet ad H. Videre est ibi mirum quendam rectæ infinitæ nexum in se redeuntis quodammodo per infinitum ita, ut bina ejus crura HB, HA in illa infinita distantia opposita copulentur quodammodo, & conjungantur, ut nimirum Infinitum ipsum sit quoddam veluti punctum commune bina illa crura connectens ex parte HB, HA, quemadmodum punctum H connectit eadem, & est communis eorum terminus ex parte BH, AH. Si enim concipiatur motus continuus intersectionis P conjunctus cum motu continuo rectæ GF, posito ∞ pro characteristica Infiniti, apparebit ipsum fieri per H A ∞ B H, atque id ita, ut quovis momento temporis sit illa intersectio in aliquo puncto ejus infiniti veluti circuli, a cujus crure HA ad crus HB transeat per communem terminum ∞, & continuato lineæ gyrantis motu in singulis ejus conversionibus, integram circuitionem ejusmodi bis absolvat, recta vero ipsa utrinque in infinitum producta reducatur quodammodo ad quendam infinitum veluti circulum in se perpetuis, & infinitis orbibus redeuntem.

61. Hanc rectæ cum infinito quodam circulo æquipollentiam videre est etiam in fig. 6, ubi si in ipsa AB assumatur punctum C per quod recta GF perpetuo gyret, ac occurrat semper alicubi in P rectæ QHR perpendiculari ad AB, centro autem P, radio PH concipiatur semper circulus HMIN, & considerentur omnes mutationes, quæ accident arcui MHN in eo continuo motu, facile apparebit, accedente recta GF ad positionem rectæ ECD parallelæ ipsi QR, punctum P recedere ab H, augeri circulum, ac arcum MHN accedere perpetuo ad rectam AHB, quam transgrediatur motu continuo, & abeat ad partes oppositas in M'HN', dum, ipsâ GF positionem ED transgressâ, punctum P, superato infinito ∞, abeat jam ad partes Q. In eo transitu manifestum est, arcum illum per ipsam rectam transire in ipso appulsu rectæ GF ad ED, & puncti P ad infinitum ∞; nam reliquis omnibus momentis temporis respondent semper alii ejus peripheriæ status hinc, vel inde ab ipsa recta AHB, qui status omne spatium illud utralibet ex parte positum ita in illo motu continuo perradunt, ac veluti everrunt, ut nullum ejusdem spatii sit punctum, ad quod in aliqua positione puncti P hinc, vel inde existentis in rectis HQ,

D 2 HR ar-

HR arcus ille circuli non appellat. Quare pro momento illo unico, in quo recta GF congruit cum ED, & punctum P cum Infinito ∞, relinquitur ille status unicus peripheriæ MHN congruentis cum recta infinita AHB, quem proinde statum eo momento temporis habere debet arcus ipse, quo circuli ipsius centrum P, & extremum diametri I nusquam jam est, circulus ipse evasit infinitus, curvatura omnis evanuit, & recta peripheriæ infinitæ successit.

62. Quod si recta CP concipiatur occurrere peripheriæ circuli in *c*, ut circuli HMINH arcus continui incipientes in H, & desinentes in *c* sunt bini arcus H*c*, & HMI*c*, directionibus oppositis, quin immo juxta num. 56. infiniti directione utraque, ita etiam in recta infinita H A∞ B H segmenta, quæ sunt quidam veluti arcus incipientes in H, & desinentes in C, sunt bina utraque directione; nimirum HC, & H A ∞ BC, immo etiam infinita, hoc est, HCB ∞ AHC, HCB ∞AHCB ∞AHC &c. & HA∞ BC-HA∞ BC, HA∞ BCHA∞ BCHA∞ BC &c., quæ consideratio mirum sane quem usum in eadem illa nostra dissertatione habeat in exponenda analogia quadam, quam ad se invicem habent Ellipsis, & Hyperbola, ubi ipsam analogiam turbare maxime viderentur.

63. Nec vero minus elegans simul, ac mysteriosa est arcuum tam Parabolicorum, quam Hyperbolicorum continuatio quædam, & nexus in illa infinita distantia. Sit DVE (fig. 7.) axis, AVB tangens Parabolæ MVN, quæ concipiatur producta quantum licet. Demonstratur in omnibus Sectionum Conicarum elementis, crura VM, VN & a se invicem, & ab axe, & a tangente in infinitum recedere. Nam per quodvis punctum Q tangentis, vel punctum axis R utcumque remotum ab V ducatur recta tangenti, vel axi perpendicularis, debet alicubi illa alteri, hæc utrique cruri hinc, & inde occurrere. Ducta autem quavis FG per V hinc, vel inde ab axe, qui neutri cruri occurrit iterum, demonstratur, eam alteri cruri debere alicubi iterum occurrere in P, nisi sit ipsa tangens, in qua puncta P, V coeunt. Concipiatur igitur recta GVP motu continuo circumvoluta, & defigatur acies in motum continuum puncti P. Ea digressa a positione tangentis BA, punctum P discedet ab V, & peragrabit totum crus VM, in quo semper erit alicubi, utcumque parum distet FG ab axe ED, nec ullum est punctum ipsius cruris VM utcumque semotum ab V, ad quod aliquando non appellat. Eo momento unico, quo ea recta cum axe congruet, punctum P infinito obrutum nusquam erit, sed abeunte FG in F'G' ad partem oppositam, illud ipsum punctum regredietur ex infinito per omnia puncta P' cruris infiniti NP'V, donec abeunte F'G' in BA, redeat ad V. Continuo motu illius rectæ circa V, continuus erit etiam motus puncti P per omnem Parabolam ita, ut in singulis inte-

integris conversionibus ejus rectæ bis eam percurrat totam ab altero crure ad alterum transiens in appulsu ejus rectæ ad tangentem momento temporis per V, ubi ea connecti patet communi termino V, ac in appulsu ipsius rectæ ad axem momento itidem temporis per Infinitum; ubi idcirco connectuntur quodammodo bina illa crura in illis oppositis infinitis distantiis ab axe, tanquam si plaga sinistra, ut vidimus in recta linea, cum dextra connecteretur quodammodo; & punctum P per rectam RP in infinitum recedens ex parte opposita I* ex infinito regrederetur, ac ipsa etiam Parabola in illa infinita distantia quodammodo veluti in se ipsam rediret communi termino copulata in infinito.

64. Et quidem in Parabola conica ex eadem axis parte VE, ex qua crus VM in infinitum recesserat, crus NV ex infinito regreditur, & si considerentur generaliter eæ curvæ, quarum ordinata PR est in quavis ratione directa potentiæ cujusvis integræ, vel fractæ abscissæ VR, quas curvas cum iis, in quibus ea est in quavis ratione reciproca ejusdem abscissæ, diligenter persecuti sumus in eadem illa dissertatione; determinata directione, & continuitate geometrica eorum arcuum, occurrent sublimiores Parabolæ, in quibus crus VN regreditur ex parte opposita, vel ut in fig. 8. in angulo AVD jacente ad latus tangentis, quo casu in V habetur cuspis, quam ibi appellavimus primi generis, & ut communiter etiam Geometræ appellant, punctum regressus, vel ut in fig. 9 in angulo DVB ad verticem opposito, quo casu habetur flexus contrarius in V, ad quos tres casus omnem Parabolarum sublimiorum reduci familiam ibidem demonstravimus.

65. Ac Parabolæ quidem omnes, in quibus ordinata est in aliqua ratione directa abscissæ, bina tantummodo habent crura infinita: at Hyperbolæ, in quibus ratio ejusmodi est reciproca, habent singulæ quatuor, quorum bini sunt rami binorum crurum singuli, ac eorum alter respectu alterius videtur quidem prorsus disjunctus; & tamen bini illi rami in singulis ope quaternorum crurum ita inter se se connectuntur in infinita distantia, ut unicam quandam lineam continuam constituant in ipso infinito plerumque ad partes oppositas conjunctam, ut punctum motu continuo possit per eas excurrere, post recessum in infinitum in uno crure, regrediens ex infinito in altero, inter quæ crura, & Parabolica illa hoc intercedit discriminis, quod illa & ab axe, & a quavis alia recta perpetuo in infinitum recedant, horum singula rectam habeant quamdam, ad quam accedant ultra quoscumque limites, quin cum ea coeant in puncto ullo utcumque remoto, quæ recta idcirco asymptotus appellatur. Rem in communi Conica Hyperbola contemplari licebit.

66. Re-

66. Refert figura 10 binos Hyperbolæ ramos, MVN, M'V'N', constantes quatuor cruribus asymptoticis, VM, VN, V'N', VM' infinitis, quorum asymptoti sint binæ rectæ infinitæ ACB, DCE. Si in altero ramo sumatur punctum V ad arbitrium, & per ipsum transeat tangens QVR, tum recta alia quævis GVF, hæc semper ipsi Hyperbolæ occurret in unico alio puncto P, præter binas rectas F2 G2, & F5 G5 binis asymptotis parallelas, quod in communibus Conicarum Sectionum Elementis demonstrari solet, vel ex iis admodum facile deducitur. Quare si concipiamus rectam ipsam digressam a positione tangentis QR motu continuo converti circa V versus F1 G1, & defigatur mentis acies in motum continuum puncti P, apparebit, punctum ipsum P1 percurrere totum crus infinitum VM, donec F5 G5 abiens in F2 G2 fiat parallela asymptoto BA, quo temporis momento ipsum punctum P in Infinito delitescens nusquam jam erit; & continuato motu per F3 G3, regredietur ex Infinito per P3, ac describet totum crus M'V' rami oppositi, tum per crus V'N' in P4 motu continuo rectæ F4 G4 recedet in infinitum ad partes N', donec ea recta in F5 G5 evadat parallela asymptoto DE, quo momento temporis iterum delitescet ipsum illud punctum P in Infinito: at quovis momento sequentis temporis translata recta in F6 G6 redibit ex infinito in P6 per infinitum crus NV, ac recidente recta ipsa cum tangente QR post absolutam dimidiam conversionem, regredietur ad V, unde fuerat digressum, integra Hyperbola percursa.

67. Patet ex hoc motu continuo utrumque Hyperbolæ ramum constituere unicam curvam geometricam continuam VMM'V'N'NV bis in Infinitum recedentem, bis quodammodo ex parte opposita ex Infinito reducem, cruribus illis infinitis in Infinito ipso, licet ad partes oppositas communi quodam termino bis connexis, quemadmodum in distantia finita in communi unico puncto conjunguntur in V, & V'. Atque hic quidem contemplari etiam licet elegantissimam analogiam Hyperbolæ cum Parabola, & Ellipsi, quam in toties memorata dissertatione tertio nostrorum elementorum tomo adjecta paullo aliter persecuti sumus. Sit in fig. 11 Ellipsis OVO'V', in qua puncta V'V' sint bini vertices axis transversi, vel diametri cujuspiam ipsi proximæ OO' axis conjugati, vel conjugatæ diametri, ac QVR sit tangens ipsius Ellipseos, FV'G sit recta quævis alia ita, ut F2 G2, & F5 G5 transeant illa per O, hæc per O', & quatuor reliquæ secent singulæ singulos e quatuor arcubus VO, OV', VO', O'V, in P1, P3, P4, P6. Si jam illa recta FVG digressa a positione tangentis QVR convertatur circa V motu continuo, ponantur autem hinc & inde ab O binæ litteræ M',M', & ab O' binæ N,N', punctum P motu itidem continuo percurret totam Ellipsim eodem prorsus ordine, quo Hyperbolam

lam totam percurrebat. Bini Hyperbolæ rami MVN, N'V'M' respondent binis semiellipsibus MVN, N'V'M', & quatuor arcubus hujus VM, M'V', V'N', NV, respondent quatuor illius crura VM, M'V', V'N', NV. Illi arcus connectuntur in binis punctis V, V', & in binis aliis itidem punctis O, O'; hæc crura connectuntur in binis itidem punctis V, V', & in binis Infiniti veluti punctis ∞, ∞', quorum illud est in A, & B, hoc in E, & D: in quibus illi nexus eo delati per omnes finitarum distantiarum magnitudines delitescunt. Unicus est continuus orbis Ellipsis rediens in se ipsam VMOM'V'N'O'NV, unicus est continuus geometricus orbis Hyperbola rediens in se ipsam per V M ∞ M' V' N' ∞' N V, neuter abrumpitur neuter terminum habet, qui binis hinc, & inde ab eo jacentibus lineis non sit communis.

68. Et quidem contemplari jam hic licet contir um etiam transitum Ellipseos ad Hyperbolam per Parabolam, & earum nexum quendam admirabilem sane, in quo & ille transitus momentaneus per immensum Parabolæ hiatum ex altera parte ad partem oppositam, quem num.63. contemplati sumus per nexum rectæ in infinitum utrinque recedentis, & in ipso infinito quodammodo redeuntis in sese, iterum se nobis sistet sub alio aspectu totius infiniti hiatus unico puncto æquivalentis, quod tamen ad ea jam infiniti mysteria pertinebit, quæ in vera absurda degenerant, & quæ nobis occasionem præbebunt tam infinitas, quam infinitesimas quantitates absolutas, in se determinatas, & actu existentes tollendi de medio, quod quidem cum nostra ipsa theoria punctorum indivisibilium consentit mirum in modum.

69. Notissimum est ex communissimis Sectionum Conicarum Elementis, sectionem coni parallelam basi efformare circulum, qui, sectionis inclinatione variata degeneret in Ellipsim; Ellipsim vero ipsam motu continuo plani sectionis ita oblongari, ut illo evadente parallelo plano cuipiam per verticem ducto, & contingenti conum, evadat Parabola, tum continuato plani secantis motu, evadat ipsa sectio Hyperbola, cujus forma mutetur continuo, donec plano illo ipso transeunte per verticem, desinat Hyperbola in rectam, in quibus transformationibus Parabola unica est indivisibilis terminus, per quem momento temporis a continuata serie Ellipsium ad seriem continuatam Hyperbolarum fit transitus. Atque hanc ipsam, & plures alias hujusmodi transformationes curvarum harum in se invicem, in circulum, in rectas, ac mutationes continuas, quæ interea accidunt earum punctis, ac lineis fuse, ac diligenter in ea ipsa dissertatione persecuti sumus, quam qui viderit, aliquam saltem non omnino tenuem geometricæ continuitatis cognitionem acquiret. Hic innuemus tantummodo,

do, quæ pertinent ad contemplandum nexum hunc in infinita distantia, & regressum cujusvis Conicæ Sectionis in se ipsam servatum in ipso transitu per singularem Parabolæ casum, & punctorum recessum in infinitum.

70. Dum nimirum motu continuo Ellipsis figuræ 11 ad Parabolam accedit, recedit tota semiellipsis OM'V'N'O ultra quoscumque limites in infinitum, & ipsa etiam puncta O, O' a se invicem in infinitum recedunt, crescente in infinitum axe conjugato Ellipseos. Eo momento temporis, quo Ellipsis jam evasit Parabola, puncta O, O cum omni arcu M'V'N' nusquam jam sunt, sed infinito ipso veluti obruta delitescunt. Remanet autem ad partes V arcus MVN binis cruribus in infinitum productis nusqnam interruptus, & consistens, sed in illa infinita distantia punctorum O, O' in infinito delitescentium adhuc quodammodo continuatus, quæ erat superior illa & rectæ, & Parabolæ idea redeuntis in sese in distantiis oppositis. Continuato autem motu plani secantis, sectio evadit Hyperbola figuræ 10 per regressum ex Infinito ad partes oppositas illius arcus N'V'M', qui in quavis Ellipsi in fig. 11 connectebatur cum arcu MVN in punctis illis determinatis O, O', in Parabola Infinito obrutus nusquam erat, in Hyperbola connectitur cum ipso quodammodo in binis Infiniti punctis altero in B, & A, altero in D, & E.

71. Atque hinc multa consequuntur, quæ ad Sectionum Conicarum naturam, & Geometricam continuitatem intelligendam apprime faciunt, in quibus illud, axi finito Ellipseos VCV', posito C in centro, non respondere in Hyperbola axem finitum VCV', sed axem V ∞ V' ex parte opposita traductum per infinitum, nec centro Ellipseos finito C centrum Hyperbolæ itidem finitum C, sed aliud in infinito delitescens, & viceversa. Cum nimirum juxta num. 60 utrobique ab V ad V' in recta linea considerata per modum infiniti circuli habeatur & finitum segmentum VCV', & aliud V ∞ V' traductum ex parte opposita per infinitum, ac illud secetur bifariam in C, hoc in ipso infinito ∞, utraque curva bina habet centra alterum in C, alterum in ∞, ex quorum altero ad alterum omnes diametri tendunt, & centro C Ellipseos, cui ipsa Ellipsis obvertit cavitatem binis semiellipsibus OVO', OV'O ipsum spectantibus respondet non centrum C Hyperbolæ, cui ea non cavitatem, sed convexitatem obvertit, sed centrum in Infinito delitescens ∞, cui pariter obvertit cavitatem; unde etiam consequitur, axem conjugatum Hyperbolæ non respondere ullo pacto axi conjugato Ellipseos, ut & alia multa, quorum ope plurima in eadem illa nostra dissertatione haud sane feliciter explicantur, & ostenditur in iis omnibus, quæ ad finitas quantitates pertinent, per hosce transitus per infinitum cum perfecta Geometriæ

metriæ

metriæ analogia componi ea omnia, quæ ipsi maxime adversari viderentur, ut illud ostenditur, cur licet summa quadratorum binorum axium, & binarum quarumvis diametrorum conjugatarum in Ellipsi æquetur semper quantitati constanti, & licet quantitatum quarumvis, utcumque e positivis migrantium in negativas, mutata directione, quadrata debeant positiva esse, adhuc tamen in Hyperbola non summa, sed differentia eorumdem quadratorum debeat esse constans. Sed ea ibi luculentius pertractavimus, & præterquamquod prolixiora sunt, quam ut arctissimis, qui nobis hìc constituti sunt, limitibus, coerceri possint, plures requirunt ipsarum Conicarum Sectionum proprietates in earum elementis a nobis demonstratas, & multa, quæ ad positivorum, ac negativorum naturam pertinent, quæ nos hìc nondum attigimus, ac paullo inferius vix attingemus.

72. Interea tamen, quoniam ejusmodi nexus continuarum linearum in Infinito mysteria nobis quædam exhibuit, quæ videntur humanæ mentis captum excedere, sed contradictionem involvere nondum videntur ullam; proderit considerare sublimiora quædam mysteria, quæ ibidem sese nobis objiciunt, & in absurda vera migrare demum videntur: cujus generis multa persecuti sumus uberius in dissertatione illa ipsa, & quæ nobis demum persuaserunt illud; lineam actu existentem in infinitum protensam nullam esse posse, sed infinitum ipsum esse indefinitam potentiam removendi reale punctum a reali puncto ultra quoscumque limites utcumque ad libitum determinatos, quæ distantia quotiescumque existat, finita esse debeat, sed quacumque finita alia major esse possit ita, ut nulla sit possibilium ultima, & maxima: quemadmodum nulla est possibilium prima, ac minima, qua de re paullo inferius; hìc autem ipsa mysteria ejusmodi, ut se nobis objicient sponte sua, persequemur.

73. Dum Ellipsis motu continuo producitur, ac demum in Parabolam migrat, defigatur mentis acies in figura 11 in motum continuum arcus OV'O', & rectarum VF2, VF5. Ille arcus ita recedet in Infinitum, ut puncta quidem O, O' etiam ipsa, ut monuimus, recedant a se invicem, & a centro C in Infinitum; & in casu Parabolæ nusquam jam erunt, Infinito ipso demersa atque obruta, hiatus autem ipsæ Parabolæ in infinitum excrescet; at rectæ VF2, VF5 licet semper transeuntes per illa ipsa puncta O, O' a se invicem, & ab axe VV' recedentia in infinitum, perpetuo accedent ad se invicem, & ad axem, angulo F2VF5 decrescente ultra quoscumque limites, ut in casu Parabolæ coeant inter se, & cum ipso axe VV', & angulus ille F2VF5 penitus evanescat. Concipiatur enim centro V, quovis finito radio semirculus occurrens tangenti QR in K, L, axi VV' in H, ac rectis omnibus VF in I, ducaturque I2I5 occurrens ipsi VV' in S.

74. Quo-

74. Quoniam in Ellipsi est latus rectum principale ad axem conjugatum, ut hic ad axem transversum, & latus rectum finitum remanet, abit enim in latus rectum Parabolæ, axis autem conjugatus Ellipseos in Parabolam desinentis in infinitum excrescit, excrescente hiatu in infinitum, decrescet in infinitum ratio lateris recti principalis ad axem conjugatum, & proinde hujus ad transversum, adeoque, & sumptis dimidiis ratio OC ad CHV, & multo magis ratio CO ad OV, sive I2S ad I2V; nimirum sinus anguli I2VH, sive F2VV' decrescit in infinitum: ac proinde factis VV', OO' absolute infinitis, penitus evanescet sinus ipse, & angulus F2VV', & proinde etiam ejus duplus F2VF5 debet penitus evanescere. Debent igitur puncta I2, I5 cum omnibus intermediis coire in H, evanescente omni arcu intermedio, ac per omne finitum intervallum utcumque magnum rectæ VF2, VF5 coire inter se, & cum axe.

75. Ex hoc congressu eorum punctorum, & anguli F2VF5 evanescentia statim intelligitur, qui fieri possit, ut in fig.7 punctum P motu immediato transeat a crure VM, ad crus NV per axem. Nam in fig.11 a puncto P1 ad punctum P6 transibatur in Ellipsi per appulsum ad rectam VF2, ad omnes intermedias in angulo F2VF5, & ad ipsam VF5 motu continuo. Si arcus KHL referat tempus, omnis arcus VMO percurrebatur tempore continuo KI2, momento temporis I2 appellebat punctum P ad rectam VF2, tum tempore continuo I2HI3 percurrebatur totus arcus OM'V'N'O', & altero momento temporis I5 appellebat punctum P ad O', tum demum tempore continuo I5L per arcum O'NV redibat P ad V. Coeuntibus jam punctis I2, I5, sublatum est totum illud intermedium tempus, & momento temporis; factus est transitus.

76. Pergente motu plani secantis, & Sectione versa in Hyperbolam, puncta O, O' figuræ 11 remanent in fig.10 in infinita distantia, ita tamen, ut illud sit æque in distantia infinita ex parte F2, & B, ac ex parte G2, & A, hoc autem æque in distantia infinita ex partè F5, & D, ac ex parte G5, & E, ubi illud adhuc conjungat quodammodo crus infinitum VM cum crure M'V', hoc vero crus infinitum VN cum crure N'V', conversa idcirco positione ramorum, ut arcus dexter abierit in crus finistrum, finister in dexterum.

77. In casu autem Parabolæ, quid acciderit referet figura 12. Puncta I2, I3, I4, I5, coierunt ibi cum H: In infinito demersa latent puncta omnia O, O', P2, P3, N', V', M': in axem abeunt F2, F3, F4, F5, & quoniam tam Ellipsis, quam Hyperbola potest in eam Parabolam degenerare, prout motus plani secantis in hanc, vel vel in illam plagam dirigitur, oportet, tam ad partes H, quam ad

par-

partes V in Infinito delitescant ex æquo, quæ plagæ in unum ibi quodammodo coeant, & continuitatem servent.

78. At hic jam mysteria eo excrescunt, ut abeant in absurda. Debent enim coeuntibus rectis VF2, VF5, figuræ 11, ita coire puncta O, O' illius in fig. 12, ut intervallum illud, ille hiatus, qui rectis penitus congruentibus nullus esse potest, penitus evanescat, licet idem simul in infinitum excrescat; ac idem accidere debet infinitis punctis P3, P4 circa M', & N'. Rectæ VF2, VF5 per quamvis utcumque magnam finitam distantiam debent congruere penitus, & tamen in infinita distantia ab V debent a se invicem in infinitum distare, quasi omnis distantia finita indefinite accepta in infinitum non abeat, & rectitudini non repugnet immensa accurata præcedens congruentia conjuncta cum immensa posteriori distantia.

79. Nec vero hæ difficultates eludi possunt, dicendo, ubi Ellipsis in Parabolam abit, arcum I2HI5 in fig. 11 nequaquam evanescere omnino, sed evadere infinite parvum, ac proinde angulum F2VF5 esse adhuc infinitesimum, in quo in distantia infinita primi ordinis haberi possit intervallum finitum, ac in distantia infinita ordinum superiorum intervallum etiam infinitum haberi debeat. Nam in primis in illa ipsa toties memorata dissertatione luculenter demonstravimus, terminum, qui post infinitum absolutum, & finitum sit tertius, debere esse prorsus nihil, non quidpiam, quod licet infinitesimum esse dicatur, sit aliquid, & partes habeat. Deinde si adhuc circa punctum H esset aliquis infinitesimus arcus rectis F2V, F5V conclusus, licet ipse infinitesimus dicatur esse, & inassignabilis, haberet tamen in se ipso aliqua puncta, per quæ transirent aliquæ rectæ ductæ ex vertice V in se determinatæ, licet a nobis inassignabiles, quæ ab axe distantiam aliquam haberent, & tamen in crura Parabolæ infinita nequaquam incurrerent. At in Conicis Sectionibus per finitam Geometriam accuratissimè demonstratur, quamvis rectam utcumque parum inclinatam ad axem cruri Parabolæ licet in immensum recedenti ab axe semper alicubi occurrere iterum, adeoque prorsus nullam esse, quæ in hiatum illum sese abdat.

80. Et quidem in Dissertatione de natura, & usu infinitorum, & infinitè parvorum aliquot ab hinc annis edita, infinitesimas quantitates in se determinatas, utcumque a nobis inassignabiles, nullas omnino esse posse, demonstravimus argumento, quod nobis quidem eam evidentiam parit, ut nunquam in animum inducere possimus, ut ejusmodi infinite parvas quantitates admittamus, longe alia ratione præclarissimas infinitesimorum methodos evolventes per indefinite cognita, abstrahendo mentem a magnitudine, quorum uberius exponendorum non est hic locus, exponemus autem in quarto Elemento-

 rum

rum Tomo diligentissimè. Illud nostrum argumentum tantummodo hic perstringemus ad evincendam impossibilitatem infinitesimorum in se determinatorum nobis etiam inferius futuram usui: est antem hujusmodi.

81. Si potest haberi quantitas aliqua, ut lineola, quæ sit infinite parva, ac licet a nobis inassignabilis, sit in se ipsa determinata, ea continebitur infinito numero in quavis quantitate finita, ut in palmo, qui palmus ejusmodi lineolarum continebit numerum infinitum, atque ita continebitur, ut quævis ex iis per se etiam sola possit subsistere, nec a sociis pendeat ullo modo, utpote quæ in se determinata est, & ab earum singulis distincta, licet non actu divisa. Hinc incipiendo a parte sinistra erit aliqua licet a nobis inassignabilis versus dexteram partem prima, secunda, tertia, & ita porro, ac itidem incipiendo a parte dextera versus sinistram erit aliqua secunda, tertia, & ita porro. Jam vero priores illæ, quæ ex parte sinistra jacent, relinquent post se versus partem dexteram numerum earum partium infinitum, cum fere totum palmum relinquant; illæ autem, quæ erant priores ex parte dextera, relinquent versus ipsam dexteram partem numerum non infinitum, nam prima relinquet nihil, secunda relinquet unicam, tertia binas, & ita porro. Nulla autem erit ejusmodi particula in universo illo palmo, de qua alterum ex iis verum non sit, ut relinquat versus dexteram earum numerum infinitum, vel numerum non infinitum, nec ulla ex iis ab alia ita pendebit, ut ea manente destrui non possit, cum unaquæque suum esse habeat in se determinatum, & a quavis, ut diximus actu distincta sit, licet nondum auctu divisa.

82. Binæ igitur ibi habentur classes particularum, licet a nobis inassignabilium, quarum prima continet omnes & solas particulas relinquentes versus partem dexteram numerum partium infinitum, secunda omnes, & solas relinquentes non infinitum. Id sane evidens est ex eo, quod ipsarum nulla utroque ex iis binis caracteribus carere possit, nulla utrumque simul habere, & sint omnino, quæ primum habeant, sint, quæ secundum. Porro omnes illæ quæ secundam classem constituunt numero infinitæ esse debent, aliter enim postrema ex iis, quæ in priore sunt classe, & quæ relinquit omnes illas, & solas, quæ constituunt secundam, non relinqueret numerum infinitum, adeoque non ad eam classem primam pertineret, sed ad secundam. Omnium autem, quæ in secunda classe sunt, præter primam numerus debet esse non infinitus. Si enim & is infinitus esset, prima illa, quæ hasce omnes relinquit, relinqueret numerum infinitum, ac proinde non ad secundam, sed ad primam classem pertinuisset. Quamobrem a numero infinito, ad non infinitum per unitatem fit transitus, quod est

est absurdum. Vis tota argumenti sita est in eo, quod ab infinito ad non infinitum necessario alicubi in unica particula transitus haberetur, quod argumentum majorem habebit vim si concipiamus a Deo destrui omnes, & solas illas, quæ ad primam pertinent classem, quarum quælibet, a quavis ex iis, quæ constituunt secundam, omnino distinguitur in ipsa, licet a nobis non discernatur, nec assignari omnino possit.

83. Sunt, qui ut evincant, quantitates infinitesimas existere etiam independenter a nostro concipiendi modo, adducant angulum contactus, quem arcus circuli cum recta, vel cum circuli alterius arcu tangente, efficit in contactu ipso, quem dicunt esse infinitesimum respectu anguli rectilinei. Liceret, ex Tacqueti doctrina respondere, angulum non esse quantitatem, cum in inclinatione consistat, sed quantitatis modum. Et quidem rectilineum angulum per modum quantitatis tractamus, sumendo arcum circuli ejus cruribus interceptum, qui verè quantitas est, pro ejus mensura, quod in rectilineo, & curvilineis curvarum æqualium, & similium, fieri potest, ubi crura e circulis utcumque magnis vel parvis eundem graduum, ac minutorum uumerum abscindunt, non iis, quorum crura diversæ naturæ sunt, ut varietur cum circuli radio, etiam ratio arcus intercepti ad totam peripheriam; adeoque varietur & mensura ipsa, & relatio, quæ ab ipsa mensura omnino pendet. Id autem ipsum discrimen satis est nobis, ut licet angulum dicamus quantitatem, angulum mixtilineum putemus specie diversum a rectilineo. Porro inter ea, quæ specie differunt, alterum respectu alterius nullam reipsa rationem habet, adeoque nec infinitesimum est, nec infinitum.

84. Alii quantitates incommensurabiles in subsidium vocant, & ajunt, id per quod una linea est alteri incommensurabilis, esse aliquid re ipsa infinitesimum, quod sic conantur evincere. Si dicatur, esse aliquid finitum, secetur illa altera quantitas in tot particulas æquales, ut una ex iis illa quantitate finita sit minor, quod fieri semper posse facile demonstratur. Tum, eâ particulâ translata continuo in primam illam incommensurabilem, devenietur ad residuum ea minus, adeoque minus illa quantitate finita, per quam dicebatur esse incommensurabilis illa prima secundæ. At in eo argumento, si rite continuitatis natura spectetur, fallacia est manifesta, & indeterminatum aliquid pro determinato assumitur. Cum enim dicimus *incommensurabilis*, excludimus mensuram communem. Mensura autem, nisi definiatur ejus quantitas, non est aliquid determinatum, sed indefinitum, & indeterminatum, ut de parte superius diximus, cum eodem recidat mensura, ac pars aliquota. Si quæratur per quid prima linea est secundæ incommensurabilis? respondebimus, relate ad quam

men-

mensuram? Determinetur mensura, determinabitur quantitas, per quam relate ad illam mensuram incommensurabilis est, quæ erit residuum illud, utique finitum, & ipsâ illâ mensurâ minus. Imminuta mensura, illud residuum aliquando minuitur, aliquando augetur, cum ad eam habere possit rationem quamcumque; at ea in infinitum imminuta imminuitur tandem etiam illud in infinitum, cum semper ipsa minus esse debeat. Verum cum nulla sit mensura ultima, & omnium minima, nulla est pars in se determinata, per quam respectu cujusque mensuræ incommensurabilis sit prima illa quantitas quantitati secundæ.

85. Ut res evidentior evadat ipsis oculis ope Geometriæ, subjecta, sit in fig. 13 AB quantitas major incommensurabilis minori AD, Hac translata in AB quoties licet, residuum erigatur perpendiculariter in DF, tum ejus dimidio AG, triente AK, quadrante AN &c. pariter translato erigantur residua singula pariter in GI, KM, NP &c, producanturque omnia ejusmodi perpendicula usque ad rectam AC ductam in angulo semirecto BAC in E, H, L, O, ac concipiatur curva quædam continua per omnia puncta F, I, M, P. Patet omnia perpendicula DE, GH, KL, NO &c. æquari ob angulum ad A semirectum, & alterum rectum, partibus aliquotis, sive mensuris AD, AG, AK, AN, quibus cum residua illa DF, GI, KM, NP minora sint, tota ea curva continebitur angulo BAC. Porro patet imminui posse in infinitum partem aliquotam AN, adeoque NO ita, ut semper NP sit minor. Nullam autem fore minimam omnium NP, ut nulla erit minima AN, adeoque nullam, per quam præcise incommensurabilis sit, sed mensuræ cuilibet suum respondere residuum, per quod relate ad eam mensuram incommensurabilis sit, quod determinatum sit, & indefinitum, ut nomen mensuræ, seu partis aliquotæ est indeterminatum, nisi partium numerus, vel magnitudo determinetur, quibus determinatis, evadit determinatum, & finitum.

86. Constat igitur, infinitesimas quantitates in se ipsis determinatas nullas esse, adeoque ipsas a nostro solum indefinito cognoscendi modo pendere. Quamobrem inane est effugium illud, quo absurda ex Ellipsi in infinitum excrescente, & Parabolæ cruribus actu in infinitum productis omnino profluentia devitentur. Verum demus, infinitesimas ejusmodi quantitates non esse impossibiles, adhuc absurdum ex infinita Parabolæ extensione profluens manifestissimum deprehenditur, quod in illa ipsa toties memorata dissertatione protulimus, & huc ad rem confirmandam transferemus.

87. Concipiatur in fig. 7. centro V circulus quidam absolute infinitus, & tangens AB producta utrinque intelligatur in infinitum, quæ proinde erit ipsius circuli diameter, & erit idcirco major quarta ipsius peripheriæ parte. Cum vero ex quovis tangentis Q, vel Q puncto

puncto ductæ rectæ ipsi normales incurrant in perimetrum ipsius Parabolæ in P, vel P', patet, hiatum Parabolæ ipsius MN æquari toti tangenti infinitæ AB, adeoque debere esse majorem quadrante Peripheriæ illius infinitæ. Ex altera parte, quoniam facto angulo EVF, EVF' utcumque exiguo, semper rectæ VF', VF' occurrunt perimetro in P'P', adeoque exeunt extra ipsum hiatum, hiatus ipse debet intercipere ex infinita illa peripheria partem, quæ ad totam peripheriam habeat rationem minorem quavis determinata. Erit igitur ille hiatus & major quadrante infinitæ peripheriæ, & eodem infinities minor, quod est absurdum manifestissimum.

88. Respondebitur, quoniam imminuto angulo FVE in infinitum, minuitur pariter ratio tangentis ejus anguli ad radium, adeoque ratio RP ad RV, sive ratio VQ ad VR, & totius QQ' duplæ illius ad VR, punctis P'P' abeuntibus in infinitum, infinities majorem esse axem VE infinitum tangente AB. At si concipiamus solas rectas AB, DE in infinitum productas, nemo non videt, utramque æque produci posse, & omnia esse paria. Qui igitur fit, ut adveniente deinde Parabola MVN, axis VE infinities major esse debeat tangente VA? Quid illa Parabolæ appositio ad rectarum mutationem conducit? Quid vero si Parabola alia potius collocaretur, cujus axis esset VA, tangens VE? Jam illa VA, quæ erat infinities minor, contra infinities major evaderet. Id sane jam non mysterium quoddam est, sed absurdum.

89. Absurda autem in Infinito alia etiam plurima nobis occurrunt, quorum aliqua in illa dissertatione protulimus. At unum hic adjicimus, quod simplicissima demonstratione conficitur, & in Dissertatione alia de Natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum pariter supra memorata protulimus. Est autem hujusmodi. Sit in fig. 14. quivis angulus ABC, quem bifariam secet recta BD, & ex quovis puncto E lateris BC ducatur recta EF parallela BA, occurrens BD in F, producaturque duplo magis in FG; tum per B, & G ducatur BM, ac concipiatur alia *efg* ipsi EFG parallela. Constat omnem aream infinitam CBD fore æqualem areæ infinitæ ABD, cui suppositis æqualibus angulis, congrueret. Constat itidem, triangula FBG, FBE, & *f*B*g*, *f*B*e* esse, ut bases, adeoque illa his dupla, & aream FG*gf* duplam areæ EF*fe*. Sed si concipiantur aliæ, atque aliæ ejusmodi parallelæ in infinitum, quævis area iis intercepta conclusa angulo MBE esset dupla areæ sibi respondentis inclusæ angulo DBC. Quare cum areæ omnes his angulis conclusæ sint illarum areolarum omnium aggregata; area infinita contenta angulo DBM esset dupla areæ contentæ angulo DBC, adeoque & areæ conclusæ angulo ABD, sive pars dupla totius, quod est absurdum.

90. Absur-

90. Absurdum ipsum totum oritur ex illa absoluti infiniti suppositione. Si enim centro B fiat circulus occurrens rectis BA, BD, BC in I, H, E; donec habebitur finita magnitudo BE, nihil absurdi erit. Sector EBH, erit æqualis Sectori HBI, & triangulum GBF erit duplum trianguli FBE. Sed nec illud triangulum erit pars illius Sectoris, neque hoc æquale huic. At abeunte E in infinitum ita, ut nusquam jam sit, & assumpta tota longitudine, quæ haberi potest in recta infinita BE, jam nulli habentur limites illi infiniti. Ex alia parte tota infinita area, quanta haberi potest in angulo MBD componitur ex omnibus areolis GF*fg*, & area EBC, quanta haberi potest, componitur ex omnibus FE*f*, quæ quidem æqualis est toti ABD, & ipsius ABD pars est MBD, in quo habetur absurdum illud.

91. Hinc nobis extensum, & infinite parvum, & infinite magnum actu existens, & in se determinatum est prorsus impossibile, & quidquid quovis temporis momento existit, finitum est, ita tamen, ut augeri, & minui possit sine ullo limite in infinitum, ac infiniti extensi impossibilitas unde fluat, ex Metaphysicis etiam principiis quibusdam cum Geometria conjunctis diligenter persecuti sumus in illa dissertatione elementis Sectionum Conicarum adjecta. Binorum punctorum quorumcumque distantia finita est semper, sed semper & aliæ minores haberi possunt, in qua possibilitate minuendi, vel augendi distantiam a nobis indefinite cognita arbitramur ideam quantitatis infinite parvæ, vel infinite magnæ consistere. In Geometria autem, quæ spatium ut actu infinitum considerat, lineæ considerantur tanquam actu in infinitum productæ, ex qua deinde productione omnes illi nexus in ipso infinito, & mysteria, quæ persequi cœpimus, consequuntur, quæ tamen ad intelligendam melius continuæ extensionis naturam, ubi de finitis quantitatibus agitur, adhuc conducunt. Eadem autem post hanc de infinitesimis, & infinitis digressionem non inutilem ad eam rem etiam, de qua agimus, ut constabit inferius, considerare pergemus, infinitorum crurum naturam. & nexum in Infinito, quam brevissime fieri poterit innuentes.

92. In primis quotiescumque crus aliquod sive parabolicum, sive hyperbolicum abit in infinitum, semper, ut diximus, ex infinito etiam regreditur. Illud autem in Hyperbolicis sanctissime observatur, ut quam asyptotum habet crus in infinitum recedens, eamdem habeat etiam crus ex infinito regrediens, licet possit vel ex eadem parte, vel ex opposita regredi ejusdem rectæ infinitæ. Si in fig. 13. arcus VM abit infinitum per M1 ex parte B, potest regredi tam ex parte eadem B citra ipsam asymptotum ACB, ut per M2 V2, & ultra ipsam, ut per M3 V3, quam ex parte opposita A' citra asymptotum eamdem pariter, ut per M4 V4, & ultra, ut per M5 V5. Posteriores tres

casus

casus habentur omnes in Hyperbolis altioribus, in quibus est aliqua potentia ordinatæ in ratione reciproca alicujus potentiæ abscissæ, ut de Parabolicis quoque cruribus vidimus num. 64, prout potentiæ ejusmodi fuerint pares, vel impares, quemadmodum in illa dissertatione adjecta elementis demonstravimus; ubi & primi casus curvas quasdam determinavimus.

93. Id quidem ipsum sanctissime observatur ex eo, quod in omnibus Geometricis curvis, nihil usquam mutatur per saltum, sed mutationes omnes motu continuo fiunt. Id ipsum autem in cæteris omnibus curvarum geometricarum proprietatibus quibuscumque pariter evenit, ut etiam in tangentibus (quo nomine appellatur recta, per curvæ punctum ducta ita proxima ejus arcui inter omnes, quæ inde duci possunt, ut nulla alia in utriusque angulo duci possit per idem punctum, sive iis interseri), ut nimirum ubicumque tangens ducitur per punctum connectens binos arcus se continuo excipientes, & fit communis tangens utriusque partis, in quam desinant motu continuo tangentes omnes reliquæ punctorum ad eosdem arcus pertinentium, & desinentium in illud punctum motu continuo; cumque asymptoti a Geometris considerentur tanquam quædam rectæ crura illa contingentes in infinita distantia, in qua se bina illa crura connectunt, communem etiam ibi tangentem habere debent, adeoque communem asymptotum.

94. Porro eadem illa lex tangentium communium ubique observatur in curvis omnibus ubicumque in iis assumatur punctum quodpiam, ex qua lege per universam Geometriam latissime patente, quatuor habentur casus, quorum bini bina cuspidum, seu regressuum genera exhibent, unus flexum contrarium, & unus frequentissime occurrens progressum curvaturæ in eamdem plagam. Tangat in fig. 16 recta AB arcum MV, & sit DVE ipsi perpendicularis. Ipse arcus ad V delapsus potest vel regredi ex V in angulo eodem BVD, per VN 1, sive in angulo BVE ipsi adjacente ad eamdem tangentis partem B, seu ultra ipsam per VN2, vel progredi in angulo ad verticem opposito AVE, per VN3, vel pariter progredi in reliquo angulo AVD per VN4. Quartus hic casus MVN4 communis est curvis omnibus, & generaliter omnibus arcuum continuorum punctis, præter puncta quædam quarumdam curvarum determinata, quæ aliquem continent ex prioribus tribus, & congruit cum casu figuræ 7. Tertius MVN3 flexum contrarium secum trahit, curvatura obversa prius puncto D, tum puncto E, & congruit cum casu figuræ 9. Secundus MVN2 cuspidem habet, quam primi generis dicimus, cum tangens binis arcubus in contactu conjunctis interjacet, & congruit cum casu figu-

 ræ 8,

ræ 8, ac curvaturam, ut tertius, in contrariam obvertit partem. Atque hi tres habentur in illis Parabolis quarum ordinatæ sunt in aliqua ratione abscissæ, ut monuimus num. 64. Primus demum MVN1 continet cuspidem secundi generis efformatam ab arcubus ad eamdem tangentis partem jacentibus, cujusmodi curvæ exemplum in eadem illa dedimus dissertatione. In horum autem casuum secundo, & tertio tangens ipsa arcum in eodem puncto, in quo contingit, secat etiam, ut patet, in primo, & quarto non secat.

96. Continuitatis legem violari arbitrantur nonnulli in primo, & secundo cuspidum casu, ob regressum illum, & in secundo, ac tertio ob curvaturam in contrarium repente conversam, At neutro in casu detrimentum continuitatis haberi ullum videbimus, ubi ipsam legem explicaverimus paullo inferius. Illud hic cavendum tantummodo, ne confundatur cum puncto regressus, & cuspide, punctum duplex, in quo curva se ipsam secat, quod ubique fit in iis curvis, quæ nondum habent. Ejusmodi est in fig. 17 curva MOVCFIVPN, quæ se intersecat in V, ac nodum efficit in se ipsam regressa, cujusmodi nodus, præter curvas alias innumeras sublimiores, in Concoide etiam citeriore occurrit. Videtur in V haberi cuspis quædam MVN; sed secus accidit, cum arcus MV non continuetur in V cum arcu VN, sed ipsum secet progressus ultra V per VC, & inde iterum ad V regressus per IV. In illo occursu V tangentes AVB, A'VB' inclinantur ad se invicem, & angulum continent. Verum quotiescumque ex mutatis curvæ conditionibus, curva ipsa ita mutatur, ut nodus VCFIV evanescat, quod pariter in Concoide contingit, semper bina crura MV, VN continuantur, & cuspis MVN gignitur figuræ 18, in quo tamen casu semper binæ illæ tangentes in unicam coalescunt, nec unquam accidit in universa Geometria, ut bini arcus contigui, communi termino copulati, binas in eo tangentes habeant, quæ aliquem angulum constituant.

97. Plurima alia superessent dicenda de curvis, quæ vel finitum habent ramorum numerum quemcumque, vel etiam infinitum, cruribus in infinitum productis, quas inter admirabilis maxime, & notatu dignissima logistica communis, quæ licet videatur unicum habere ramum, crure ex altera parte Hyberbolico, ex altera Parabolico, ipsis cruribus ne in illa quidem infinita distantia redeuntibus, & connexis, re vera infinitos habet ex utraque axis parte ad eumdem locum Geometricum pertinentes, communi infinitorum crurum asymptoto, ac plurima de spiralibus curvis, quarum bini, vel quotcumque arcus in infinitum abeant, alii circa datum punctum perpetuo convertantur, quin in ipsum recidant, vel ad datos circulos, aut ad datas ovales in infinitum accedant perpetuo circumducti, nec tamen uspiam in eas inci-

incidant, cujus generis mira admodum, & utilis ſpiralis logarithmica, quam itidem, licet unicum habere videatur arcum ſpiralem hinc in infinitum recedentem a dato puncto, inde accedentem, demonſtrare poſſumus, habere infinitos, ut etiam ſpirales aliæ quamplurimæ ex ea ortæ ſatis miræ; plurima de aliis curvarum generibus, in quibus plures ſunt arcus ſive redeuntes in orbem, ſive abeuntes in infinitum, quarum alii nullam cum aliis licet ad eumdem geometricum locum pertinentibus communicationem habent ita, ut punctum ex altero in alterum commigrare nullo modo poſſit, quæ tamen dum transformantur, mutatis conditionibus, ſe diſcindant quodammodo, & arcus permutent ſuos ita, ut e binis arcubus ad diverſos ramos, vel orbes pertinentibus prius, oriatur novus quipiam continuus, cujuſmodi exempla plurima occurrunt, & elegantiſſima ſane in Concoidibus habentibus circulum pro axe, quarum Concoidum, & ſpecies ſunt plurimæ, & transformationes ſatis miræ. Ea omnia, & alia quamplurima ſupereſſent, quæ brevis diſſertatiunculæ limitibus coerceri non poſſunt, perſequemur autem uberrime in quarto noſtrorum elementorum tomo, quem infiniteſimorum, & infinitorum Geometriæ, ac curvarum proprietatibus deſtinavimus.

97. In hiſce omnibus curvarum generibus illud ubique ſervatur ſanctiſſime, ut nuſquam in unico quodam puncto curva ſiſtat, ac ibi veluti abrumpatur, ſed ſemper punctum quodcumque, ad quod curva quæpiam deveniat, licet id punctum ſit etiam in Infinito deliteſcens, conjungat binos arcus hinc & inde, quorum id communis terminus ſit. Et id quidem pro curvis omnibus, vel ex natura ipſa termini erui poteſt, ut num. 54. præſtitimus, vel inductioni ampliſſimæ curvarum omnium, quæ Geometris notæ ſunt comprobari. Verum pro curva quadam, cujus maximus nobis uſus erit inferius in lege Continuitatis demonſtranda, geometrico etiam rigore demonſtratur. Propoſitio eſt hujuſmodi. *Nullus locus Geometricus poteſt uſpiam abrumpi, qui relatus ad axem quemdam per ordinatas ipſi utcumque inclinatas in eodem angulo, nuſquam habet aut impoſſibilem ordinatam reſpondentem axis puncto cuicumque, aut plures ordinatas pariter eidem puncto reſpondentes.*

98. Sic facile demonſtratur. Sit in fig. 19, 20, 21 ejus loci pars altera DC, altera EF, ipſo loco abrupto in C, E. Ducantur ordinatæ CG, EH ad axem AB. Vel punctum H cadit poſt G, ut in fig. 19, vel cum ipſo congruit, ut in fig. 20, vel ipſum præcedit, ut in fig. 21. In primo caſu pro punctis omnibus intermediis inter puncta G, & H, quæ contigua eſſe non poſſunt juxta num. 10, ſed aliquam lineolam terminare debent continentem puncta infinita, nulla eſſet impoſſibilis ordinata, in ſecundo caſu haberentur binæ GC, GE pro eodem pun-

 cto G,

cto G, vel H, in tertio haberentur pro utroque puncto G, H, & pro infinitis intermediis binæ ordinatæ, quæ omnia sunt contra Hypothesim. Non potest igitur ejusmodi locus geometricus usquam abrumpi Q. E. D.

99. Tota argumenti vis sita est in eo, quod bina puncta non possint esse contigua: quod si fieri posset, in casu primo posset punctum H jacere immediate post punctum G, & ordinata post ordinatam, qua unica via vis argumenti eluderetur. Diximus autem ordinatam impossibiliem, ut includeremus etiam casum, quo ordinata sit nulla. Si enim in primo casu quis dicat, posse locum abrumpi compositum ex tribus lineis DC, GH, EF, binas tantum consideraremus DC, GH, & casus primus reduceretur ad secundum, deberet nimirum in G haberi simul ordinata GC, & ordinata zero, ultima nimirum pertinentium ad arcum DC, & prima pertinentium ad rectam GH.

100. Hisce præmissis deveniamus jam ad ipsam continuitatis legem explicandam. Leibnitius illam sine eo nomine in memorato schediasmate sic proposuit latine redditus. *Cum differentia duorum casuum potest diminui infra quamcumque quantitatem datam in datis, vel in eo, quod positum est, oportet ipsa possit inveniri imminuta infra quamcumque magnitudinem datam in quæsitis, vel in eo quod resultat.* Tum idem sic. *Cum casus (vel id, quod datur) accedunt ad se invicem continuo, ac desinit tandem unus in alium, oportet consectaria, vel eventa, (vel id, quod postulatur) idem præstent.* Demum idem generalius: *Datis ordinatis, etiam quæsita sunt ordinata.*

101. Eos enunciandi modos, priores binos potissimum, aptavit Leibnitius Cartesianis legibus motus, quas hujus ipsius principii applicatione impugnabat. Statuit Cartesius in prima lege, si bina corpora æqualia sibi invicem occurrant, debere retro regredi utrumque cum velocitate opposita, & æquali illi, quam prius habuerat, in secunda vero lege, si inæqualia sint, debere majus quidem progredi cum sua velocitate priore, minus vero regredi cum velocitate contraria, & æquali illi, quam prius habuerat. Binorum corporum magnitudines sunt id, quod Leibnitius appellat *data*, vel *posita*, velocitates post conflictum, *quæsita*, *resultantia*, *consectaria*, *eventa*, *postulata*. Bini datorum casus sunt æqualitas corporum, & inæqualitas. Eorum differentia imminui potest in infinitum ita, ut ab inæqualitate ad æqualitatem demum deveniatur. Consideretur velocitas corporis alterius, quod prius erat majus, quæ in eo habetur post concursum, ut quæsitum quoddam, vel resultans. Ipsa velocitas imminuta utcumque inæqualitate, manebit semper illæsa per secundam Cartesii legem. Ea sublata, & mutata in æqualitatem, velocitas ipsa statim saltu quodam extinguitur tota per primam legem ipsius Cartesii, & ipsi

ipsi substituitur opposita. Id legi Leibnitianæ repugnat, vi cujus si ordinatim mutentur, quæ dantur, ordinatim mutari debent ea etiam, quæ quæruntur, postulantur, resultant.

102. Generaliter autem sine relatione ad data, & quæsita sic enunciari potest principium ipsum. Quotiescumque binæ quantitates variabiles, quæ nimirum magnitudinem mutare possunt, ita inter se connexæ sunt, ut determinata magnitudine alterius, alterius etiam magnitudo determinetur; si concipiantur binæ magnitudines prioris, & binæ posterioris respondentes iisdem binis, ac prima quantitas mutatione continua abeat a prima magnitudine ad secundam transeundo per omnes magnitudines intermedias; idem præstabit etiam secunda. Prima illa magnitudo ea est, quam Leibnitius nominat *datum*, vel *positum*; secunda, quam appellat *quæsitum*, *resultans*, *consectarium*, *eventum*, *postulatum*. Transitus autem per omnes intermedias magnitudines omnium optime exprimit *ordinationem* illam, *continuitatem*, *imminutionem differentiæ* infra limites quoscumque datos.

103. Id ipsum Jo. Bernoullius omnino intellexit in illo *Discursu de motu*, qui habetur in tomo 3. ipsius operum, ubi latine itidem redditus sic habet. *Illum dico ordinem immutabilem, ac perpetuum constitutum a creatione Mundi, quem appellare licet continuitatis legem, ac vi cujus quidquid fit, fit per gradus infinite parvos ... Natura non operatur per saltum: nihil potest ab uno extremo transire ad aliud nisi transeat per omnes intermedios geadus*. Fieri enim non potest, quemadmodum paullo infra explicabimus, ac demonstrabimus, ut habeatur transitus per omnes intermedios gradus, nisi fiat itidem transitus per omnes intermedios status, sive intermedias magnitudines. Quamquam illa ipsa vox gradus & aliis multis, & ipsi, ut arbitramur, Maupertuisio æquivocationis cujusdam occasionem præbuit, qua in ipsa continuitatis lege impugnanda sunt usi, tanquam si impossibile omnino esset saltum excludere, qui dum excludi dicitur ope transitus per intermedios gradus, ibi maixme necessario includatur.

104. Maupertuisius quidem ipse in primo e suis opusculis simul impressis Dresdæ anno 1732, cui titulus *Essay de Cosmologie* pag.20, postea quam præcedenti pagina exposuerat eorum sententiam, qui corpora dura nulla esse in natura contendunt ob Legem Continuitatis, & Bernoullium ipsum, atque hunc eundem ejus discursum indigitaverat initio paginæ 20, ut ex notula adjecta patet, hæc addit, quæ nos sic latine reddidimus. *Fateor, me hujus argumenti vim non sentire. Haud scio, an satis nota sit ratio, qua motus generatur, vel extinguitur, ut affirmare liceat, ibi legem continuitatis violari. Ego sane nec illud satis novi, quid sit ejusmodi lex. Quando suppo-*

nere-

neretur velocitatem augeri, vel diminui per gradus, an non haberentur semper transitus ab uno gradu ad alium? Et transitus omnium maxime imperceptibilis an non tantundem continuitatem violat, quantum eam violaret destructio subita Universi? Duo hìc a doctissimo viro innuuntur: alterum, ignorari a nobis modum, quo gignitur velocitas, & an ibi continuitas violetur; alterum legem ipsam involvere contradictionem incluso saltu in ipsis gradibus, per quos excludi debeat, qui saltus in quovis gradu utcumque exiguo continuitati officiat, quantum officeret saltus in tanta re, quantus est universus Mundus. Porro dum huic ejus impugnationi hìc respondemus, ac ejus vim omnem conamur eludere, ut nobis quidem videmur, cum evidenti successu, non solum nihil detractum volumus de doctissimi viri fama, cujus ingenii vim, ac præclarissima in universam litterariam remp: promerita, & Europa omnis admiratur, ac suscipit, & nos inprimis veneramur, verum etiam ipsa ejus tanta & apud cæteros, & apud nos ipsos existimatio nos impulit ad responsionem adornandam, & in hac dissertatione ipsa inprimis evulgandam, quod verebamur, ne recens exortæ, & crebrescenti jam theoriæ nostræ ipsa tanti viri auctoritas officeret.

105. Et quidem quod ad modum pertinet, quo velocitas generatur, ostendemus inferius, eam juxta continuitatis legem generari semper, ac destrui: nunc quod pertinet ad saltum ex illa ipsa continuitatis, & graduum suppositione violatum, quod ipsam continuitatem inintelligibilem redderet, impossibilem, & absurdam, re aliquanto altius repetita expediemus, ac Leibnitianam, Bernoullianam, & nostram definitionem eodem redeuntes, quod ad rerum summam pertinet, exponemus.

106. In primis binas quantitates variabiles posse a se invicem pendere, & connecti inter se ita, ut altera mutata mutari possit, & vero etiam mutetur & altera, innumeris exemplis constat, & ipso quotidiano usu compertum est: sic a mensura, vel pondere rerum, quas emimus, pretium pendet, & ea aucta augetur, imminuta minuitur: contra vero a tempore, quod in dato intervallo percurrendo conficitur, cursorum celeritatem æstimamus, quam eo majorem censemus, quo tempus est brevius. Potest autem utraque quantitas variabilis esse simplex, vel altera ex iis componi e pluribus, inter se nullo nexu copulatis, a quorum omnium determinatione pendeat. Sic in superiore casu a sola mensura, vel pondere ejusdem rei pretium pendet, & a solo tempore celeritas. At generaliter celeritas mobilis cujusvis, quod diversis feratur temporibus, & per diversa spatia, pendet a spatio & tempore, proportionalis illi directè, huic reciprocè.

cè. Quantitas autem motus generaliter pendet a massa, celeritate, & tempore, vel a mole, densitate, celeritate, & tempore, quorum singulis variatis variantur; adeo ut possit a quocumque quantitatum numero unica quantitas pendere, & illis variatis variari.

107. Porro si ea, a quibus aliqua quantitas pendet, mutentur mutatione continua, & ab una magnitudine ad aliam abeant transeundo per omnes intermedias, etiam illa ipsa quantitas per omnes intermedias transibit. Id quidem multo facilius exponitur, & intelligitur, ubi binæ tantummodo quantitates inter se connectantur, quarum, utraque sit simplex, vel consideretur, ut simplex. Earum nexus in eo casu exponi semper potest per lineas assumendo axem ad arbitrium, & in eo repræsentando alteram quantitatem per abscissas a dato puncto computatas, alteram per ordinatas ipsi in dato angulo inclinatas, quarum vertex in earum continuo excursu per illum axem describat lineam continuam ejusmodi nexum referentem. Nam ubi una quantitas connectatur cum binis variabilibus, ut spatium descriptum cum celeritate, & tempore, nexus ille requirit superficiem continuam, & de locis ad superficiem tres variabiles quantitates connectentem profundissimum, & elegantissimum opusculum edidit jam olim Doctissimus Clerautius adhuc puer. Si connectatur cum pluribus, omnes is nexus excedit vires Geometriæ tribus tantummodo dimensionibus præditæ. Ad eos nexus in quocumque quantitatum variabilium numero Algebra extenditur, quæ in eo Geometriæ præstat, quamquam ipsi præstat contra Geometria in eo, quod nexus plurimos, in quibus non ipsæ quantitates, sed earum decrementa, ac incrementa certam habent relationem ad se invicem, quod in transcendentibus curvis fit, exhibeat, ad quæ Algebra finita non pertingit, sed infinitesimalis requiritur calculus, & sunt fortasse ejusmodi nexus per lineas, & superficies expressi, ad quos exprimendos nec finita Algebra finitas quantitates, & earum finitas potentias contemplata, nec infinitesimalis calculus infinitesimales earum differentias ordinum quorumcumque, & earum potentias quasvis considerans omnino sufficiat, sed aliud quodpiam expressionum genus requiratur, cujus ideam habemus nullam. Hæc omnia persequi infinitum esset, & vastis etiam voluminibus implendis materiam præberent: in iis autem omnibus continuitas quidem semper omnino servatur, multi vero casus anomali considerandi obveniunt, ad ipsam continuitatis legem, & connexionis in ea conservanda industriam contemplandam, illustrandamque per quam idonei.

108. Dicemus igitur pauca quædam, quæ pertinent ad nexum quantitatum binarum, qui habetur, ut diximus, per lineas, quod ad rem præsentem erit abunde, cum factum quodcumque ex quotcum-

cumque variabilibus quantitatibus, a quibus altera pendet, possit connecti cum tempore, considerando quantitatum illarum omnium, dum variantur, status determinatos pro quovis momento temporis expressos linea quadam continua, ut axe, & erigendo e puncto respondente illi ipsi momento ordinatam exprimentem magnitudinem quantitatis cum iis connexæ, quo pacto nexus etiam ille includitur, qui unus pro quantitatibus variabilibus in natura existit, in qua singulis momentis quantitates singulæ singulas tantummodo magnitudines habere possunt, expressus per lineam a vertice illarum ordinatarum descriptam. Et, quidem ipsa Maupertusii difficultas tempus respicit, & quantitatem perpetuo variatam, ac momentaneum saltum conatur inducere, ut necessarium, dum quantitas per omnes magnitudinis gradus variatur.

109. Porro ubi per lineam exprimitur nexus binarum quantitatum, quarum primam exprimat abscissa, secundam ordinata, fieri potest, ut singulis magnitudinibus primæ quantitatis non nisi unica respondere possit magnitudo secundæ, vel ut respondeat quicumque finitus ejus magnitudinum numerus, vel etiam infinitus, atque id ita, ut cuivis magnitudini primæ quantitatis respondeat unica secundæ magnitudinis quantitas, & tamen eadem aliqua magnitudo secundæ respondeat pluribus quocunque finito numero magnitudinibus primæ, vel etiam numero infinitis, vel ut viceversa cuivis secundæ respondeat unica primæ, & tamen cuivis primæ respondeat quivis finitus, vel infinitus numerus magnitudinum secundæ, vel demum cuicumque numero finito, vel infinito magnitudinum quantitatis cujuslibet respondeat quivis numerus magnitudinum secundæ finitus pariter, vel infinitus. Facile admodum esset exemplis illustrare singula, propositis etiam notissimis curvarum generibus. Res autem omnis pendet ex eo, quod quædam curvarum genera recta linea datam positionem habens axi, vel ordinatis parallelam in unico puncto secare potest tantummodo, alia in binis, vel ternis, vel quocumque finito numero, vel infinito etiam, ut evidenter patet in spiralibus abeuntibus in infinitum, ac potest altera occurrere in unico, vel in quotcumque, dum altera itidem in punctis quotcumque occurrit; ubi vero curvæ substituitur recta, ipsam quævis alia recta vel parallela ordinatis, vel parallela axi in unico tantummodo puncto secat. Sed hæc itidem investigatio in immensum abit, & nos in simplicissimis tantummodo casibus quibusdam consistere cogimur.

110. In primis in ejusmodi quantitatum geometrico nexu fieri potest, ut altera perpetuo crescente, altera crescat perpetuo, vel decrescat, vel illa perpetuo decrescente, hæc perpetuo crescat, vel decrescat, vel illa aut crescente, aut decrescente, hæc a crescendo tran-

transeat ad decrescendum, quo casu habetur maximum quodpiam, vel viceversa a decrescendo transeat ad crescendum, quo casu habetur minimum. Ejusmodi exempla admodum facile desumi possunt a solo etiam circulo ad axem relato positum extra ipsum. Si enim in fig. 22 diameter circuli HI producta occurrat ad angulos rectos in C rectæ AB, & recta ex R ipsi AB pariter perpendicularis occurrat circulo in P, & P', crescente abscissa AR, vel decrescente AR2 evadit RP minima, RP' maxima, ubi R appulerit ad C, quod quidem in circulo & communiter in curvis accidit continuata in I, & H curvatura arcus progredientis: quandoque autem fit etiam per regressum arcus efficientis in I, vel H cuspidem, quæ singula persequi, & illustrare non vacat,

111. Fieri autem etiam potest, ut variata altera, decrescat etiam altera per omnes magnitudines utcumque parvas, & evanescat, vel augeatur per omnes magnitudines utcumque magnas, & evadat absolutè infinita. Si recta F'G in fig. 16 moveatur motu continuo versus ED, rectæ VR, vel BR cum quavis RP nexum exhibeat MV, vel quævis NV, appellente R ad V, evanescit secunda quantitas RP, atque id vel evanescente prima, ut VR, vel manente adhuc, ut BR, ubi etiam si VR contra crescat in infinitum, infinitum itidem crescit quævis RP. At in fig. 15, abeunte pariter R in C, quævis RP evadit infinita, atque id pariter vel evanescente prima, ut CR, vel manente finita, ut BR, ubi contra facta CR infinita, RP in infinitum decrescit, & concipitur, ut evanescens.

112. Porro ubi alterius magnitudo ad nihilum devenit, vel ad infinitum, fieri potest, ut alterius continuata mutatione directionem mutet, quo casu dicitur abire in negativam, vel ut cum eadem directione regrediatur e nihilo, ac pariter, ubi in infinitum abiit, fieri potest, ut vel in negativam abeat, præcedenti directione mutata, vel, directione manente, maneat itidem positiva. In fig. 16, si nexus exprimatur per MVN3 abeunte R in R' per V, abscissa BV, quæ remanserat finita, pergit crescere, AV decrescere, & VR, quæ evanuerat mutat directionem in R'P3; si vero nexus exprimatur per MVN4 mutat directionem, ac evadit negativa VR in VR', sed RP' remanet positiva in R'P4. In fig. 15 abeunte R in R' per C, pergit crescere BR, in BR', decrescere AR in AR', mutat directionem CR in CR' post evanescentiam, & transitum per nihilum; si autem nexus exprimatur per M1 N1 N4 M4, remanet RP1 post appulsum ad infinitum directionis ejusdem in R'P4, qui nexus si exprimatur per M1 N1 N5 M5, illa RP1 post abscessum in infinitum mutat directionem in RP5, nisi forte ipsi RP1 in eo casu respondeat, non R'P5 negativa, quam communiter Geometræ, & semper Analyticæ assumunt pro analoga illi R'P1,

fed alia positiva per infinitum traducta juxta num. 62, nimirum R'G' ∞ FP5, qua de re, ut & de omnibus hisce appulsibus ad nihilum, & ad infinitum, ac transitu e positivo in negativum multo pluribus egimus in toties memorata dissertatione nostra Conicorum Elementis adjecta. Illud unum hic notandum interea, ubi e positivo transitur ad negativum, licet magnitudo post decrementum ex parte positiva incipiat ex parte negativa iterum crescere, revera in Geometrica, & analytica consideratione pergere decrementum ipsius, cum negativa quantitas eo censeatur minor, quo, si positive consideretur, sit major; nam negativa, ut debitum, continua detractione, ut novis impensis factis, ob id ipsum quod decrescant, & infra nihilum deprimi pergant, videntur quodammodo augeri.

113. Quandoque dum altera quantitas perpetuo variatur, altera etiam alicubi abrumpitur, & abit in impossibilem. Sic in fig. 22 abeunte R2 in R3, ubi RO contingit arcum in E, tum transgresso illo abit in R4, jam recta RO' nusquam occurrit circulo, & ordinata ad abscissam AR4, vel BR4 pertinens jam impossibilis evasit, quo casu ea appellari solet quantitas imaginaria. Sed is casus nusquam in Geometria potest accidere, nisi binæ fuerint ordinatæ, & binæ simul impossibiles evadant. Id & in Algebra dudum notatum est, ac demonstratum; radices nimirum imaginarias æquationum non nisi numero pari haberi posse; in Geometria autem manifesto evincitur ex ipsa natura linearum continuarum, & nusquam abruptarum. Neque enim potest ordinata quæpiam R2P2 delata ad R3E abire in imaginariam, nisi binæ R2P2, R2P'2 simul in imaginarias abeant. Cum enim non possit arcus P2E abrumpi in E juxta num. 55, sed continuari debeat, nec ut habeatur imaginarietas continuari possit ultra R3E, si posteriores R4O in eam curvam non incurrunt, debet post appulsum ad E progredi, vel regredi per aliquem alium arcum EP2 jacentem citra R3, in quem pariter recta R2P2, antequam deveniat ad R3E, necessario incurret alicubi in P'2, & bina puncta P2 P'2 coire debebunt in E, binis ordinatis simul imaginariis evadentibus, quod itidem accidet si E lateat in Infinito, cum etiam ex ipso Infinito arcus redire debeat. Sic in fig. 16 motu continuo puncti R per V in VR' si nexus exprimatur per curvam MVN1, vel MVN2, abeunt in imaginarias binæ simul RP', RP1, vel RP', RP2 in ipso earum appulsu ad nihilum: at in fig. 15 si nexus exprimatur per N1M1M2V2, vel N1M1M3N3, evadunt imaginariæ binæ simul ordinatæ RP1, RP2, vel RP1, RP3 in ipso earum appulsu ad Infinitum, quæ in fig. 22 abierant in imaginarias ipso appulsu ad finitam quantitatem R3E.

114. De iis etiam, quæ ad hunc velut interitum quantitatis abeuntis in imaginariam diximus in illa ipsa dissertatione, & iterum dicemus

mus infra, hic illud unum monebimus, id omnino contingere non posse, ubi singulis abscissis singulæ tantummodo ordinatæ respondent, ut accidit in recta linea, in Hyperbolis, & Parabolis omnibus, in quibus est aliqua potentia ordinatæ impar, directè, vel reciprocè, ut quævis potentia impar abscissæ, ac in infinitis aliis curvarum generibus, quæ definiuntur per æquationes quascunque, in quibus ordinata ad unicam cujusvis imparis gradus potentiam assurgit, utcumque commixta sit cum potentiis abscissæ quibuscunque. In eo autem curvarum genere, quæ plures ordinatas eidem abscissæ respondentes habere non possunt, hunc transitum e statu reali in imaginarium haberi non posse monuimus idcirco, quod ubi quantitates variabiles referuntur ad tempus, ille casus obtinet, in quo singulis momentis temporis, singulæ respondent magnitudines quantitatis, non binæ simul, nimirum singulis abscissis singulæ ordinatæ, non plures.

115. Hisce omnibus aliquanto fusius expositis, exponemus jam, quid sint illæ intermediæ quantitates, per quas transire debeat. Plurimi autem sunt casus orti ex eo, quod binæ magnitudines extremæ possunt esse vel directionis ejusdem, vel contrariæ, ac in utroque ex iis casibus potest deveniri in Geometria a prima ad secundam vel sine recessu in infinitum, vel cum eo, ipse autem recessus potest fieri ad partem utramlibet, & ad utramvis partem fiat, fieri potest vel cum regressu ex eadem Infiniti parte, vel cum transitu ad partes oppositas. Rursus haberi idem potest tam secundum directionem, quam habent ordinatæ, quam secundum eam, quam habent abscissæ, & secundum aliam quamcumque, atque id tam per crura Parabolica, quam per Hyperbolica, vel etiam spiralia, vel serpentia, & flexuosa. Plurimæ sunt eorum casuum classes, quæ variant acceptionem magnitudinum intermediarum inter binas extremas datas.

116. Simplicissimus casus est, in quo non fiat recessus in Infinitum, & is habet locum in Natura, in qua nihil actu infinitum esse potest: reliqui ad Geometricam contemplationem pertinent tantummodo; ac in eo casu si ambæ extremæ sint ejusdem directionis, intermediæ omnes sunt eæ, quæ eandem directionem habent, & sunt minores majore ex iis, majores minore; si vero extremæ habeant directiones oppositas, intermediæ sunt omnes minores utravis in sua directione, quo casu debet etiam haberi transitus per nihilum: reliqui casus alii aliam intermediarum, per quas in motu continuo transiri necesse est, acceptionem habent. Sint in fig. 23 binæ ordinatæ ejusdem directionis CD, QE, relatæ ad abscissas AC, AQ, vel directionis contrariæ C'D, Q'E relatæ ad A'C', A'Q'. Linea continua, quæ nexum exhibet inter quantitates iis abscissis, & ordinatis expressas, debet a puncto D abire ad punctum E, idque vel sine recessu in

infinitum per aliquam viam formæ cujuscumque DTT'E, vel cum recessu in infinitum, qui si fiat in directione eadem, quam habent ordinatæ, & per crura asympototica, haberi potest vel per DME, vel per D M ∞ M'E, vel per DM'E, vel per D M'∞ M E, ut alios aliarum directionum, & aliorum crurum casus omittamus. Per puncta D, & E concipiantur rectæ NO, KL parallelæ axi AB, vel A'B, quarum prior ordinatæ QE occurrat in S. Tum in ipsa EQ utrinque in infinitum producta, sumatur punctum H utcumque, vel extra binas KL, NO ad partes E in H1, vel inter KL, & A'B' in H2, vel inter A'B', & NO in H3, vel iterum extra illas binas, sed inter NO, & AB in H4, vel etiam ultra AB in H5, ac per quodvis punctum H sit sua recta FG parallela ipsi axi, & illis binis rectis. Patet omnino, in casu, in quo linea DTT'E in infinitum recedit, quoscumque faciat gyros, vel flexus, eam alicubi debere saltem semel transcurrere quamcumque rectam inclusam binis illis KL, NO, ut quamcumque F2G2 in P2, vel F3 G3 in P3. Ducta autem ex ipso P, ut ex P2 recta PR perpendiculari ad axem, abscissæ AR respondebit ordinata RP2, sive QH2. Porro si axis sit AB, & binæ ordinatæ ejusdem directionis, patet inde alicubi debere haberi ordinatam æqualem cuicumque QH2, vel QH3 minorem majore e binis illis extremis nimirum QE, & majorem minore CD, vel QH3. Quod si axis sit A'B' interiacens binis NO, KL, ut binæ extremæ Q'E, C'D' sive Q'S oppositas directiones habeant, debebunt haberi omnes QH2 minores Q'E, & omnes QH3 minores itidem Q'S, sive CD, ac puncto H abeunte in Q', patet debere ordinatam evanescere, & per nihilum motu continuo transire e positiva ad negativam.

117. Si vero linea continua nexum exhibens abeat per D M'∞ - ME, quod in Hyperbola conica accideret, possent, immo in ea debent, remanere immunes omnes illæ F2G2, F3G3 inclusæ binis KL, NO, adeoque nulla haberi ex intermediis in præcedente sensu acceptis, sed necessario debent secari omnes jacentes utrinque extra illos limites, ut F1G1, F4G4, F5G5: adeoque haberi reliquæ omnes utriuslibet directionis, quæ in præcedenti casu non includebantur. In reliquis autem tam hisce casibus, quam aliis hic non expressis, recessuum in infinitum, ac regressuum, ex ipsius figuræ contemplatione patebit facile, quæ pro singulis intermediæ illæ sint, per quas transiri debet.

118. Omissis hisce casibus, quæ Infinitum includunt, adeoque ad Naturam pertinere non possunt, patet, in priore casu posse abscissam ipsam AR initio & recedere ab abscissa AH, ut figura exhibet, & accedere, quod accideret, si linea nexum exhibens non recederet a recta QE, & vel ipsa recedat, vel accedat, posse ordinatam RP initio vel recedere ab ordinata QE, vel ad eam accedere, cum linea illa possit

vel

vel accedere ad axem, vel ab eo recedere, & iidem casus haberi possunt in fine, iidem respectu & axis A'B', & abscissæ A'R', ac ordinatæ R'C'; sed in omnibus ejusmodi casibus patet, salva continuitate lineæ nexum exhibentis, non posse in toto ejus lineæ excursu non haberi quamcumque ex illis ordinatis intermediis in sensu exposito, nec fieri posse, ut ubi ex D exit illa linea, vel in E desinit, punctum H per omnes distantias SH3 utcumque parvas non recedat a puncto S, vel punctum H2 non accedat ad punctum E per distantias H2E utcumque parvas. Quare patet ordinatam, dum ad utramlibet e binis datis QE, CD accedit, motu facto ex D ad E, vel ex E ad D, non posse non accedere ad illas per quascumque magnitudines utcumque proximas ipsis, atque id generale esse magnitudinibus quibuscumque utcumque inter se proximis, vel remotis quantitatum, quarum nexus per lineam continuam exprimitur, in quo sita est continuitatis lex, quam etiam clarius explicabimus exemplo quantitatum, quæ referuntur ad tempus, quod motu continuo fluit, nunquam retro regrediens, & quod binas ejusdem quantitatis magnitudines pro eodem momento non admittit. Ac ut Maupertuisii difficultatem dissolvamus tandem, & ostendamus, quo pacto saltus omnis a continuitatis lege excludatur utcumque exiguus, considerabimus casum simplicissimum, in quo a positiva quantitate ad aliam positivam majorem continuo incremento ascenditur, vel minorem continuo decremento descenditur.

119. Sint igitur in fig.24 binæ magnitudines quantitatis ejusdem CD PE, respondentes binis momentis C, Q, & ambæ directionis ejusdem, a quarum prima minore ad secundam majorem ea quantitas transire debeat tempore continuo CQ, servata Continuitatis lege. Debet eo tempore habere omnes magnitudines majores, quam sit CD, sive QS, & minores quam QE ita, ut non solum dato quovis momento R habeatur magnitudo RP ipsi respondens, sed etiam data quacumque magnitudine, ut QH, in illo sensu intermedia inter QS, & QE, habeatur momentum ipsi respondens. Id autem momentum, data linea DE, sive recta, sive curva, quæ exhibeat ejus magnitudinis crescentis legem, semper invenietur saltem unum. Ducta enim per H recta FG indefinite parallela AB, ea necessario incurret in illam lineam DE alicubi in P saltem semel, ut figura exhibet; posset autem etiam in plurimis punctis ipsi occurrere, si nimirum illa linea sinuaretur hinc, & inde circa rectam ipsam FG, quod fieri non poterit, si quantitas, ut supposuimus continuo crescat. Ducta PR parallela DC, vel EQ, habebitur momentum R, cui illa magnitudo respondebit.

120. Hoc ubi generaliter habeatur, habebitur transitus per omnes magnitudines intermedias, & incrementum per omnes gradus infini-

finite parvos sine ullo saltu utcumque exiguo. Id facile intelligetur, si rite concipiatur, quid sit gradus adveniens, & quo pacto adveniat. Singulis momentis temporis R, T, O respondent singulæ magnitudines, ut RP, TV, OL. Utcumque igitur desumantur bina momenta determinata, semper habebuntur binæ magnitudines iis respondentes, quæ inter se different, ut illa momenta inter se distant: Distantia momentorum determinate assumptorum determinata semper erit, & finita, ac pariter differentia magnitudinum iis respondentium. Ea differentia, & gradus, qui accedit magnitudini illo tempore continuo, debetur intervallo quod inter illa bina momenta intercedit. Si rectæ parallelæ AB ductæ ex D, P, V, L occurrant rectis RP, TV, OL, QE in I, K, M, N, gradus advenientes magnitudini CD temporibus CR, RT, TO, OQ erunt IP, KV, ML, NE. Si ea tempora determinata sint, & proinde finita, ii etiam gradus determinati erunt, & finiti. Quoniam autem temporis particulæ decrescere possunt in infinitum, si eæ sumantur minores perpetuo, ac minores, etiam differentiæ illæ, seu gradus minores itidem, & minores evadent, ac si illa tempuscula considerentur indefinita, ut decrescentia ultra quoscumque limites in infinitum, in quo stat per nos, quod sint infinite, seu indefinite parva, etiam illæ differentiæ, illi gradus decrescent indefinite ultra quoscumcumque limites, eruntque in eodem sensu infinite, vel indefinite parvi, ac demum evanescent.

121. En autem, in quo stet exclusio saltus. Ille gradus quicumque, utcumque parvus, ubi servatur continuitas, non advenit momento aliquo temporis totus simul, sed advenit tempore quodam continuo ita, ut ejus partes minores sensim, ac minores respondeant partibus temporis minoribus sensim, ac minoribus, nec ulla sit utcumque exigua pars illius gradus, quæ aliquo itidem exiguo tempore non adveniat. Illa ipsa pars potest dici gradus, & si transitus fiat per omnes gradus infinitesimos, nimirum, qui assumi possint utcumque indefinite, patet, cujuscumque magnitudinis a zero ad magnitudinem quamvis finitam, jam haberi transitum per omnes intermedias magnitudines, & Bernoullii definitio conveniet cum nostra. Quæ de incrementis diximus facile ad decrementa transferuntur, in quibus Continuitatis lex habetur, si decrementorum gradus non momentis temporis habeantur, sed tempusculis continuis ita, ut partes decrementi quæcumque, utcumque parvæ, suas habeant temporum partes itidem exiguas.

122. Saltus haberetur, si tota differentia inter binas magnitudines, utcumquque exigua, adveniret non tempore continuo, sed momento temporis. Si nimirum toto tempore CR duraret semper magnitudo æqualis CD, vel RI, tum momento R adveniret totus simul

gradus

gradus IP, ac per totum tempus RT daretur magnitudo RP, vel TK & momento T adveniret totus gradus KV, & ita porro. Eo casu non linea continua DPVLE, sed scala quædam DIPKVMLNE legem mutationis exhiberet, quin immo eam exhiberent solæ rectæ DI, PK, VM, LN abruptæ, & saltus haberetur, qui Continuitati æque officeret, ac si totus Mundus momento temporis interiret: nam magna, & parva respectiva sunt juxta ea, quæ diximus num. 21, non absoluta, & si res eo pacto fieret, vim haberet Maupertuisii difficultas. Verum incrementum illud IP non advenit momento R totum, sed pars I'P' ipsius IP utcumque parva advenit parte CR' tempusculi CR itidem parvi, quo pacto nullus uspiam habetur saltus, qui secum trahit momentaneum transitum ab una magnitudine ad aliam, quæ ab ea differat differentia aliqua in se determinata, utcumque parva.

123. Quare patet ex iisdem prorsus principiis a continui natura derivatis hanc Maupertuisii difficultatem evidenter solvi, ex quibus illa de motu Achillis, & testudinis soluta est superius. Ut nimirum ex eo, quod nullum momentum, aut punctum est contiguum alteri momento, sed inter bina quævis momenta, aut puncta, quæ non congruant, tempus continuum, vel lineola interjacet, quæ dividi potest in infinitum, aut minui accessu momenti ad momentum, vel puncti ad punctum, soluta est difficultas illa de motu continuo; ita hæc solvitur ex eo, quod singulis momentis singulæ magnitudines respondeant, at nulla magnitudo alteri magnitudini ita proxima esse possit, ut differentia non intercedat, quæ tempori illi non respondeat, & imminui non possit in infinitum, interjacentibus aliis magnitudinibus intermediis ultra quoscumque limites propioribus, quæ respondeant intermediis momentis, & habeatur quidem prima, & ultima, a qua, & ad quam motu illo continuo fiat transitus, quin secunda, & penultima habeantur; in tota autem magnitudinum serie continua semper, ut in quovis continuo, unicus terminus communis ea, quæ præcedunt, cum iis, quæ consequuntur conjungat; unde, ni fallimur, evidenter constat, legem Continuitatis nullam contradictionem involvere, nec inducere saltum, dum maxime ipsum saltum per intermedios gradus conatur excludere.

124. Explicata hoc pacto, & vindicata ipsa continui natura, & Continuitatis lege, ac suspicione omni impossibilitatis amota, transeundum jam nobis est ad ipsam in Natura stabiliendam, quod multo brevius præstandum erit, producta jam ultra præfinitos limites dissertatione, plurimis, quæ dignissima commemoratu essent, ægerrimo sane animo, prætermissis, aliis, quæ prætermitti nullo modo possunt, vix indicatis.

125. Le-

125. Legem Continuitatis in natura Leibnitiani conantur evincere ex Principio illo, quod *Rationis sufficientis* appellant, quod nimirum nulla esset ratio sufficiens, cur semel admisso saltu, tantus determinate saltus fieri deberet, non major, nec minor. *Oporteret*, inquit Bernoullius in discursu adducto num. 103, primum statum destrui, quin sciret *natura, ad quem aliam statum determinari deberet*, ac eodem fere pacto cæteri Leibnitianorum. Nobis sane id argumentum, nequaquam arridet, & id principium, ut a Leibnitio, & præcipuis Leibnitianis admittitur, falsum omnino esse, ac etiam perniciosum arbitramur, ac præterea, ut olim etiam in Dissertatione de Maris Æstu affirmavimus, censemus, *nunquam posse ulli esse usui ad quidpiam utcunque determinandum, & multo minus ad demonstrandum*.

126. Haud hic quidem est locus longiorem contra hoc ipsum principium dissertationem instituendi; indicabimus tamen ea, quæ nos ad ita sentiendum impellunt. In primis si etiam libera, vel humana, vel Divina voluntas debeat omnino rationem habere, cur id potius velit, quam nolit, vel viceversa, actum esse censemus de libertate. Posita enim earum rationum, quæ nobis objiciuntur, & quarum omnium cognitio a nostro arbitrio omnino non pendet, præponderantia, jam fieri non potest, ut ad illud, quod præponderet, voluntas nostra non inclinetur. In Deo autem in primis libertatem adimi necesse est, & induci absolutam necessitatem singularum rerum, quæ existunt, & impossibilitatem eorum, quæ non existunt. Fieri enim omnino non potuit, ut Deus rationes omnes, quæ adesse poterant, pro hoc individuo rerum ordine creando non videret; fieri non potuit, ut eæ, quæ aderant non adessent; fieri non potuit, ut eæ, quæ præponderarunt, non præponderarent: sua... . am mutare non possunt; fieri non potuit, ut Deus præponderantiam non sequeretur. Igitur etiam ex contradictionis principio innixo Divinæ naturæ præditæ sapientia, & determinatione ad optimum eligendum, & naturæ rationum, quas videre potuit, eruitur, fieri non potuisse, ut hic ipse ordo solus non existeret, qui idcirco omnino necessarius fuit, & ridicula est sane eorum possibilitas, quæ existere non poterant, nisi crearentur, creari non poterant, nisi ratio sufficiens Deum ad creationem moveret, nec ipsa ratio sufficiens ulla esse poterat, præter illas, quas ipse Deus ob oculos habuit, cum Mundum crearet.

127. Accedit ad admittendam liberam Dei voluntatem & illud, quod ubi de possibilibus agitur, nulla bonitas creata est possibilis, qua major aliqua possibilis non sit, ut in distantiis, ac in aliis ejusmodi accidit, sed quavis perfectione finita alia major haberi potest. Nulla autem creata perfectio infinita absolute esse potest, ut de quantitate demonstravimus supra. Quare Deus, ubi aliquid condendum decre-

vit

vit necessario debuit creare aliquid, quo alia perfectiora increata relinqueret, nec omnino potuit ab optimi electione moveri ad ea condenda, quæ condidit. Præterea quævis utcumque magna creaturarum naturalis perfectio, ita est exigua, immo ita nihil respectu Divinæ immensitatis, ut exercitium libertatis ipsius infinities majoris pretii sit, quam ejusmodi bonitas quæcumque, & respectu ipsius omnia pro æqualibus habenda sint. Debet igitur haberi ratio, cur aliquid potius sit, quam non sit, sed ratio physica in creatis habebitur semper, nimirum caussa aliqua, ratio moralis non semper aderit, & poterit haberi illud, *stat pro ratione voluntas*.

128. Hæc de falsitate principii, prout a Leibnitio admittititur, & prout ab ipsis Leibnitianis ad usum traducitur, qui ipso in contingentibus potissimum sunt usi ab humana, vel Divina electione pendentibus. Nemo negat omnium effectuum suas debere esse caussas, omnium conclusionum suas præmissas, quibus evidentes reddantur, quas cum videris, effectum inferas, conclusioni assentiaris, quas investigare debeas, ut iis semel agnitis, alia etiam inde necessario consequentia inferre possis. At negativi Leibnitianorum principii usus non in eo est positus; sed tota ejus vis, quam quotidie ipsi Leibnitiani obtrudunt, in eo sita est, ut ex rationis defectu, rem, inferas, nequaquam existere. Porro quam habere ad aliquid *determinandum*, vel *demonstrandum* vim potest rationis defectus, si nobis compertum non sit, nullam rationem haberi reipsa? At si libera Conditoris determinatio potest esse ratio, cur aliquid potius sit, quam non sit; nobis omnes rationes innotescere omnino non possunt, cum libera determinatio Conditoris non alio pacto nobis innotescat, nisi quadam veluti attentatione per inductionem eorum, quæ constanter fiunt, & quorum constantem quandam legem ab eo esse latam censemus, quæ inductio, quam manca semper sit, & quantum ea illatio a demonstrationis evidentia distet, nemo non videt.

129. At eo etiam prætermisso, an non Leibnitius ipse profitetur, multa mala, ut illud Tarquinii flagitium, in Mundo etiam perfectissimo reperiri, cum omnes possibiles aliquid mali admixtum habeant, & id in optimo illo tolerari debeat ad tot alia habenda bona? At ubi in aliqua disquisitione invenerimus etiam, si fieri potest, quid ibi eo solo considerato optimum, quid simplicissimum sit, & minimi dispendii esset; unde nobis constabit, eam non esse Mundi particulam, quæ licet imperfectior, in aliorum gratiam, ut permissio Tarquiniani flagitii, selecta sit? Quod si ita esset, quid ex ratione sufficienti etiam pro singulis casibus cognita inferri unquam poterit, cum visa etiam prefectione majore, admissa necessitate ad optimum, adhuc in tanta nostrarum cognitionum tenuitate, nihil inde determinate consequatur.

130. Quid vero etiam, ubi de necessariis agitur rerum caussis? Licet semper cognita necessaria caussa effectum tuto inferre possis, quo te erroris periculo exponas, si a defectu caussæ, quarum tam paucas nosti, defectum ipsius effectus audacter deducas? Obtruditur quotidie a Leibnitiaris exemplum Archimedis, qui a defectu rationis sufficientis æquilibrium in æquiponderantibus deduxit, siletur ipsius error ortus ex eodem prorsus principio, cum ex eodem rationis defectu, stabilito æquilibrio, intulit sphæricam Telluris formam, quam a sphærica forma abludere nobis constat, atque id ipsum ob rationes sero detectas, quas Archimedes cum non videret, habuit pro nullis. Quamquam æquilibrium illud ipsum non a negativo principio, sed argumento, quod ad positivam formam, & vim facile reducitur, Archimedi profluxit, ut facile ostenderemus, si per tempus liceret. Illud unum addimus: inter alia plurima, in quibus argumentum a ratione *sufficiente petitum omni robore destituitur,* hanc ipsam esse exclusionem saltus e Natura. Quid enim vetat esse rationes aliquas, ob quas determinatæ magnitudinis saltus utilissimus præ ceteris omnibus esse possit, ut hominibus superiora tabulata scandentibus determinatæ cujusdam altitudinis gradus omnium maxime utiles sint?

131. Ea igitur ratione omissa, binas proferemus alteram ex metaphysicis principiis, alteram ex inductione, quæ in Physicis potissimum summi ubique usus esse debet, cum caussas saltem primas, vel semper, vel fere semper ignorari a nobis necesse sit Naturam sola, fatis illa quidem tenui, nostrorum sensuum ope investigantibus. Prima ratio est hujusmodi. In quantitatibus, quæ variari possunt, & continuo tempore durant, nec unico momento plures magnitudines habere possunt, saltus, sive momentaneus transitus ab una magnitudine ad aliam, prætermissis omnibus intermediis, omnino haberi non potest. Hæc propositio si evincatur, evincetur saltum in natura haberi non posse. Nam quævis quantitas singulis momentis unicam tantummodo magnitudinem juxta Naturæ leges habere potest. Sic corpus licet densitatem, & velocitatem (*intelligimus autem illam semper,* quæ ex omnibus componitur, & motum ipsum, qui fit, determinat) mutare possit, singulis tamen momentis singulas tantummodo habere potest. Posset quidem duas habere densitates, si replicaretur ita, ut ejus puncta in una spatii parte unam a se invicem distantiam haberent, aliam in alia. Posset duas velocitates habere in eodem momento, si haberet determinationem percurrendi dato tempore & majus, & minus spatium, adeoque replicandi se omnibus sequentibus momentis, quæ Naturæ legibus repugnant, & per solam Divinam omnipotentiam præstari possunt.

132. At

132. At ea propositio nostro quidem judicio manifesto evincitur ex iis, quæ supra exposuimus. Si enim aliquo momento temporis haberetur saltus, eodem illa quantitas binas magnitudines habere deberet, nimirum postremam seriei continuæ pertinentis ad tempus præcedens, & primam seriei pertinentis ad tempus consequens. Ut enim illud idem momentum & est postremum temporis præcedentis, & primum sequentis,ita magnitudo, quæ habetur illo momento debet esse & postremus terminus seriei respondentis tempori præcedenti, & primus seriei consequenti tempori respondentis. Series enim continua præcedens, debet habere suum postremum terminum, & series consequens primum, qui solus ab ea auferri non potest, quemadmodum solum ultimum punctum a linea, sola ultima linea a superficie auferri omnino non potest. Si toto tempore CR in fig.24. habetur magnitudo æqualis RI, & toto tempore RT magnitudo æqualis RP, momento R debet haberi utraque, cum fieri non possit, ut areæ RIDC desit sola linea ultima RI, vel rectangulo RPKT sola prima RP. Id ipsum manifesto evincitur ex iis, quæ diximus num.97 de loco geometrico, qui plures ordinatas habere non possit uni abscissæ respondentes, qui continuitatem omnino servare debet. Lineæ DC, EF in fig.19, si abrumpuntur, hiatum debent relinquere in GH, in quo ordinata non solum nulla, sed impossibilis sit, vel in H ordinatas habere binas in fig.20, vel binas habere toto tractu HG in fig.21, nec ullus alius est casus præter illos tres, cum, ut num.99 monuimus, ad secundum reducatur casus etiam is, in quo post G dicatur ordinata evanescere, congruente EF cum axe GB, in quo casu momento G haberetur magnituuo GC, & magnitudo nulla, ut distantia ex. gr. GC, & distantia nulla, puncto altero replicato, & existente tam in distantia GC, quam in eodem spatii puncto cum altero puncto.

133. Eodem argumento excluditur etiam saltus in motu locali. A puncto quovis ad aliud quodvis punctum spatii potest ire mobile quodpiam viis admodum diversis, utcumque sinuatis, & incurvatis; sed linea, per quam abibit, continuo ductu describenda erit semper sine hiatu ullo. Cur id? Quia nimirum si alicubi abrumperetur, ut in fig.1, & via esset ABCD interrupta in BC, vel momentum, quo inciperet describere CD, esset idem, ac momentum, quo desineret esse in AB, vel ipsum præcederet, vel sequeretur. In utroque ex his postremis casibus inter illa bina momenta necessario interjacere debet tempus continuum, in quo infinita momenta sunt. Porro in primo ex tribus propositis casibus esset eodem momento temporis, tam in B, quam in C: adeoque replicaretur, in secundo per tempus continuum esset in binis lineis, & proinde replicaretur infinitis momentis, in tertio per tempus continuum nusquam esset. Tota vis ar-

gumenti sita est semper in exclusione momenti momento proximi, puncti proximi puncto, lineæ aliam habentis lineam proximam, adeoque, & termini cujuscumque seriei tempore durantis continuo, vel per lineam continuam traductæ, proximi termino.

134. Sed jam hoc ipso argumento viam nobis stravimus ad inductionem, ad quam, & Leibnitius ipse, & Leibnitiani provocarunt, & quam habere possumus satis amplam, cum hæc ipsa exclusio saltus in motu locali ad inductionem etiam pertineat. Sed pauca quædam de inductione ipsa præmittemus. In primis ubi generales Naturæ leges investigantur, inductio vim habet maximam, & ad earum inventionem vix alia ulla superest via. Ejus ope extensionem, figurabilitatem, mobilitatem, impenetrabilitatem corporibus omnibus tribuerunt semper Philosophi etiam Veteres, quibus eodem argumento inertiam, & Generalem gravitatem plerique e Recentioribus addunt. Inductio, ut demonstrationis vim habeat, debet omnes singulares casus, quicumque haberi possunt percurrere. Ea in Naturæ legibus stabiliendis locum habere non potest. Habet locum laxior quædam inductio, quæ, ut adhiberi possit, debet esse ejusmodi, ut in primis in omnibus iis casibus, qui ad trutinam ita revocari possunt, ut deprehendi debeat, an ea lex observetur, eadem in iis omnibus inveniatur, & ii non exiguo numero sint; in reliquis vero si quid prima fronte contrarium videatur, re accuratius perspecta, cum illa lege possint omnia conciliari, licet, an eo potissimum pacto concilientur, immediate innotescere nequaquam possit. Si eæ conditiones habeantur, inductio ad legem stabiliendam censeri debet idonea. Sic quia videmus corpora tam multa, quæ habemus præ manibus, aliis corporibus resistere, ne in eorum locum adveniant, & loco cedere si resistendo sint imparia, potius, quam eodem perstare simul, impenetrabilitatem corporum admittimus, nec obest, quod quædam corpora videamus intra alia licet durissima insinuari, ut oleum in marmora, lumen in chrystalla, & gemmas. Videmus enim hoc phœnomenum facile conciliari cum ipsa impenetrabilitate, dicendo per vacuos corporum poros ea corpora permeare.

135. Præterea, quæcumque proprietates absolutæ, nimirum, quæ relationem non habeant ad nostros sensus, deteguntur generaliter in massis sensibilibus corporum, easdem ad quascumque utcumque exiguas particulas debemus transferre nisi positiva aliqua ratio obstet, & nisi sint ejusmodi, quæ pendeant a ratione totius, seu multitudinis, contradistincta a ratione partis. Primum evincitur ex eo, quod magna, & parva sunt respectiva, & a nobis parva, ac insensibilia dicuntur ea, quæ respectu nostræ molis, & nostrorum sensuum sunt exigua. Quare ubi agitur de proprietatibus absolutis non respectivis,

quæ-

quæcumque communia videmus in iis, quæ intra limites continentur nobis sensibiles, ea debemus censere communia etiam infra eos limites: nam ii limites respectu rerum, ut sunt in se, sunt accidentales, adeoque siqua fuisset analogiæ læsio, poterat illa multo facilius cadera intra limites nobis sensibiles, qui tanto laxiores sunt, quam infra eos, adeo nimirum propinquos nihilo. Quod nulla ceciderit, indicio est, nullam esse. Id indicium non est evidens, sed ad investigationis principia pertinet, quæ si juxta quasdam prudentes regulas fiat, successum habere solet. Cum id indicium fallere possit, fieri potest, ut committatur error, sed contra ipsum errorem habebitur præsumptio, ut etiam in jure appellant, donec positiva ratione evincatur oppositum. Hinc addendum fuit, *nisi ratio positiva obstet*. Sic contra hasce regulas peccaret, qui diceret, corpora quidem magna compenetrari, ac replicari, & inertia carere non posse, compenetrari tamen posse, vel replicari, vel sine inertia esse exiguas eorum partes. At si proprietas sit respectiva respectu nostrorum sensuum, ex eo, quod habeatur in majoribus massis, non debemus inferre, eam haberi in particulis minoribus, ut est hoc ipsum, esse sensibile, ut est, esse coloratas, quod ipsis majoribus massis competit, minoribus non competit, cum ejusmodi magnitudinis discrimen accidentale respectu materiæ, non sit accidentale respectu ejus denominationis *sensibile*, *coloratum*, Sic etiam siqua proprietas ita pendet a ratione aggregati, vel totius, ut ab ea separari non possit, nec ea, ob rationem nimirum eandem, a toto, vel aggregato debet transferri ad partes. Est de ratione totius, ut partes habeat, nec totum sine partibus haberi potest. Est de ratione figurabilis, & extensi, ut habeat aliquid, quod ab alio distet, adeoque, ut habeat partes; hinc eæ proprietates licet in quovis aggregato particularum materiæ, sive in quavis sensibili massa inveniantur, non debent inductionis vi transferri ad particulas quascumque.

136. Exposita hoc pacto vi principii inductionis, quo in naturam fere uno possumus cum spe successus inquirere, & ex quo uno pendent, quæcumque facultates observationibus innituntur, Medicina, Anatomia, Optica, Astronomia, ac aliæ plurimæ, ad ipsam inductionem pro lege continuitatis demonstrandam faciemus gradum. Plurima sane afferri possent exempla manifestissima; sed quædam pauca tantummodo attingemus, illud addendo, quod multo magis vim ipsam inductionis ostendet, nihil uspiam in quantitatum variabilium mutationibus reperiri, licet tam multa quantitatum variabilium genera quoti die obversentur oculis, quod vel continuitatis legem non per sese, sponte, ac evidenter exhibeat, vel cum ipsa continuitatis lege diligentius considerata optimè componi non possit.

137. In

137. In primis amplissima est, inductio spatii, ac temporis, in quibus, motu continuo, & sine ullo saltu, perpetuo pergitur, tum eorum, quæ in spatio sunt, ut linearum omnium, ac superficierum in Geometria, quæ si eandem naturam servent, omnes affectiones suas ita continuo mutant, ut Geometris est notissimum, ut ab una magnitudine ad aliam per omnes intermedias omnino transeant. Ab una ordinata ad aliam, ab una areæ, vel arcus magnitudine ad aliam, ab una directione ad aliam, transitur semper per intermedias omnes, etiam a curvatura, quæ habetur in quovis puncto, ad curvaturam, quæ habetur in alio, quæ quidem curvaturæ pendent a radiis circulorum osculatorum, quibus censentur reciproce proportionales, & a quavis affectione ad aliam ita semper transitur, ut mutationes continuæ fiant per intermedias magnitudines quascumque; ac si a positivis ad negativas fiat transitus, semper vel per nihilum transitur, vel per infinitum. Idem in Locorum Geometricorum transformationibus, ortis ex mutatione conditionis cujuspiam ita ubique observatur sanctissime, ut ad infiniti mysteria, ubi opus, est Geometria recurrat potius, quam certum saltum admittat, quemadmodum in hac ipsa dissertatione vidimus in tam multis exemplis, ac multo plura habentur in dissertatione illa tomi tertii, & multo adhuc plura quarto nostrorum Elementorum tomo reservamus. Illud sane in universa Geometria, quin immo illud & in indefinitis Algebræ formulis simplices Geometricos exprimentibus locos ubique sanctissime observatur, in quibus nusquam, ubi de finitis quantitatibus agitur, saltus habetur ullus, nusquam ne infinitis quidem, qui per quædam Infiniti mysteria utcumque non evitetur. Nec in solis imaginariis lineis, quæ in spatio sunt habetur ejusmodi continuitas, verum etiam in realibus corporum motibus, qui a spatio pendent, & tempore. In iis omnibus videre est in primis illud, nunquam, ut diximus num. 133, ab uno puncto spatii ad aliud deveniri, nisi transeundo per lineam continuam, licet ejusmodi continuæ lineæ tam multæ esse possint, & tam variæ inter se. Inde autem consequitur in distantiis itidem mutandis continuitatem servari, nullo transitu unquam facto ab una ad aliam distantiam sine transitu per intermedias, & hinc nullam densitatem, quæ a distantia punctorum pendet, mutari unquam per saltum; hinc vero pariter nullam arborem, aut aliam ejusmodi rem quamcumque, quæ crescit per recessum verticis a fundo, unquam ab una altitudine ad aliam devenire sine transitu per intermedias.

138. Quin immo in motibus ipsis continuitas servatur etiam in eo, quod motus omnes in lineis continuis fiunt nusquam abruptis. Plurimos ejusmodi motus videmus. Planetæ omnes, & Cometæ in lineis

con-

continuis cursum peragunt suum, & omnes retrogradationes fiunt paullatim, ac in stationibus semper exiguus quidem motus, sed tamen habetur semper, atque hinc etiam dies paullatim per Auroram venit, per vespertinum crepusculum abit, Solis diameter non per saltum sed continuo motu supra horizontem ascendit, vel descendit. Gravia itidem oblique projecta in lineis itidem pariter continuis motus exercent suos, nimirum in Parabolis seclusa aeris resistentia, vel ea considerata in orbibus ad Hyperbolas potius accedentibus, & quidem semper cum aliqua exigua obliquitate projiciuntur, cum infinities infinitam improbabilitatem habeat motus accuratè verticalis inter infinities infinitas inclinationes licet exiguas, & sub sensum non cadentes, fortuito obveniens, qui quidem motus in Hypothesi Telluris motæ a Parabolicis plurimum distant, & curvam continuam exhibent etiam pro casu projectionis accuratè verticalis, quo quiescente penitus Tellure, & nulla ventorum vi deflectente motum, haberetur ascensus rectilineus, vel descensus. Immo omnes alii motus a gravitate pendentes, omnes ab elasticitate, a vi magnetica, continuitatem itidem servant, cnm eam servent vires illæ ipsæ, quibus gignuntur. Nam gravitas cum decrescat in ratione reciproca duplicata distantiarum, & distantiæ per saltum mutari non possint, mutatur per omnes intermedias maguitudines. Videmus pariter vim magneticam a distautiis pendere lege continua, vim elasticam ab inflexione, ut in laminis, vel a distantia, ut in particulis aeris compressi. In iis, & omnibus ejusmodi viribus & in motibus, quos gignunt, continuitas habetur semper tam in lineis, quæ describuntur, quam in velocitatibus, quæ pariter per omnes intermedias magnitudines mutantur, ut videre est in pendulis, in ascensu corporum gravium, & in aliis mille ejusmodi, in quibus mutationes velocitatis fiunt gradatim, nec retro cursus reflectitur, nisi imminuta velocitate per omnes gradus. Ea diligentissimè continuitatem servant omnia. Hinc nec ulli in naturalibus motibus habentur anguli, sed semper mutatio directionis fit paullatim, nec vero anguli exacti habentur in corporibus ipsis, in quibus utcumque videatur tenuis acies, vel cuspis, microscopii saltem ope videri solet curvatura, quam etiam habent alvei fluviorum semper, habent arborum folia, & frondes, ac rami, habent lapides quicumque, nisi forte alicubi cuspides continuæ occurrant vel primi generis, quas natura videtur affectare in spinis, vel secundi generis, quas videtur affectare in avium unguibus, & rostro, in quibus tamen manente in ipsa cuspide unica tangente continuitatem servari videbimus infra. Infinitum esset singula persequi, in quibus continuitas in Natura observatur. Satius est generaliter provocare ad exhi-

exhibendum casum in Natura, in quo continuitas non servetur, qui omnino exhiberi non poterit.

139. In iis quæ ad Geometriam pertinent, objicere solent has ipsas, quas postremo loco nominavimus, cuspides, seu puncta regressuum tanquam si continuitas in iis læderetur, cum curva posteaquam ad certum punctum devenerit, retro cursum reflectat. Leibnitiani respondere solent, ibi nullum commiti saltum, quia cuspis oritur e nodo servante continuitatem, ac ipsius cuspidis verticem considerandum esse affirmant, non ut punctum quoddam indivisibile, sed ut nodum quemdam infinite parvum, qui curvaturam infinitam habeat, & cum omnibus directionibus in se ipsum redeat. In fig. 17 nodus excurrit directione semper in eamdem plagam continuata per MOVCPIVPN. In omnibus iis intermediis punctis excurrit & tangens excursu continuo per QOR, AVB, DCE, GFH, LIK, B'VA', SPT. Evanescente nodo, abit fig. 17 in 18, & habetur cuspis MVN, in qua dicunt, punctum V non esse punctum mathematicum, sed nodum quendam infinitè parvum, habentem adhuc easdem illas tangentes.

140. At nobis id nullo pacto probari potest. Nam punctum illud cuspidis est unicum indivisibile punctum, & arcus MOF in unico puncto cum arcu FPN conjungitur; quod per finitam geometriam facile demonstratur. Et quidem licet cuspis oriatur ex nodo, mutata conditione loci Geometrici, ut in Concoide, ubi, si distantia poli ab axe citra & ultra quem recta assumi debet æqualis datæ ad partes poli ipsius, vel ad oppositas, ut ejus vertex motu continuo eam curvam describat (quæ ipsius natura ipsa est), fuerit minor, quam ipsa recta data, habetur citra axem nodus, si æqualis, habetur cuspis, si major, habentur bini flexus contrarii; adhuc tamen illa curva, quæ nodum habet, suam habet naturam peculiarem diversam a reliquarum natura, & suas proprietates per finitam Geometriam accurate determinatas, ut Parabola inter Ellipses, & Hyperbolas media, suam speciem constituit, & suas proprietates habet, amissis eorum plurimis, quæ ad Ellipsim, & Hyperbolam pertinent, eo quod abierint in infinitum, vel evanuerint. Inter has proprietates est illa, quod nodus penitus evanescit, & ipsi non nodus quipiam infinitesimus succedit, sed indivisibile punctum. Adhuc tamen continuitatem omnino non lædi arbitramur. Nam si cuspis consideretur seorsum independenter a nodo, a quo est genita, in fig. 18; tangens in vertice V erit unica AB, & puncto per ipsam curvam excurrente motu continuo per OVP, tangens QOR mutatione directionis continua abibit in AVB, tum si cuspis sit primi generis, ut exhibet figura, mutatione itidem continua directionis ipsa tangens perget a positione AVB ad positionem TPS; nam si cuspis esset secundi generis, directio illa a tangente per cuspidem

duct a

ducta retro regrederetur. Semper tamen ab una directione tangentis ad aliam per omnes intermedias directiones transibitur.

141. Nec obest, quod directio motus puncti, quæ prius in OV spectabat plagam B, deinde in VP incipiat spectare oppositam. Iccirco enim nulla omnino est vera cuspis, in qua tangens non sit communis tam arcui advenienti ad cuspidem, quam inde redeunti, ut nimirum plaga B, quæ prius spectabatur, mutetur in plagam A oppositam in eadem recta, quas plagas vidimus num. 60. connecti quodammodo inter sese in ipso Infinito tanquam termino quodam communi. Hinc nimirum, & in Mechanica nihil turbat continuitatem descensus gravium per eandem rectam, per quam ascenderant, qui eum omnino læderet, si per aliam rectam descenderent, quod pariter accidit in oscillationibus per curvas quascumque. Directio immutari potest immediate in oppositam e diametro, cum ∞ ex una plaga positum, quod respiciebatur, cum ∞ posito ex plaga opposita, quod deinde respicitur, sit unicum punctum quodammodo, in quo crus rectæ infinitum cum alio crure opposito infinito conjungitur. Si directio mutari debeat utcunque, id in Mechanica, id hic in Geometria semper fiet per curvam continuam quandam, non per regressum saltu facto ab una directione ad alias sine intermediis.

142. Idem accidit etiam in fig.6 curvaturæ arcus MHN, quæ mutatur motu continuo, dum punctum P excurrit per rectam continuam in se quodammodo redeuntem per H R ∞ Q H, quod exemplum rem, quam diximus, etiam evidentius declarat. Respicit ea curvatura semper centrum suum P, quod continua rectæ FG conversione excurrit motu itidem continuo per eam rectam, & ubi ipsum P superato Infinito ex parte HR redit per QH, convertitur ad partes oppositas; in ipso autem casu rectæ AC utrumque ∞, tam versus R, quam versus Q æque respicit. Sic etiam ubi P per H transit, & circulus posteaquam evanuit, abit ad partes oppositas, directio plagæ ab hiatu spectatæ transit per eandem semper rectam ad partes oppositas. Et idcirco etiam, ubi curvæ flexum contrarium habent, mutatio non fit nisi radius circuli osculatoris vel evanuerit, vel in infinitum excreverit, nec centrum ipsius ullo uspiam saltu mutabit locum, nec plagam mutabit, nisi vel per punctum ipsum curvæ, ver per Infinitum traducatur, quod mille exemplis in Geometria illustrari potest. Hinc in puncto cuspidis V in fig.28 habetur tangens cum utraque directione AVB, B'VA'. Quin immo etiam ubique utraque directio indifferenter considerari potest tum plagis oppositis congruentibus, tum fluxu lineæ in ipso puncto O indifferentis per sese tam ad directionem OQ, quam ad directionem OR. Nullus in iis omnibus saltus deprehenditur, nullus nimirum transitus a magnitudine ad magnitudinem sine intermediis.

143. Sed

143. Sed nec habetur ullus saltus, ubi concipitur mutatio nodi figuræ 17 in cuspidem fiugura 18. In illa dum nodus minuitur ultra quoscumque limites, binæ tangentes AVB, A'VB' ad se invicem accedunt pariter ultra quoscumque limites, & illo evanescente penitus congruunt, ac arcus MV, qui cum arcu VN conectebatur per nodum, jam connectitur immmediate per sese in unico puncto, & continuatur. Rectæ illæ, KL, HG, ED eas habebant tendentias, ut nulla per V transiret in angulo MVN, sed quævis ex iis relinqueret ad eandem plagam aliquem arcum VM, VN. Idem præstant in fig. 18 eadem directione manente. At ibi tangebant aliquem arcum, hic nullum tangunt, destructo nimirum arcu, quem deberent contingere. Idem accidit, ubi circulus in punctum desinit, evanescente radio. Rectæ quæ fuerant tangentes, remanent, & jam per illud punctum transeunt; sed nullius arcus tangentes sunt, cum is arcus esse desierit.

144. Ubi consideretur curva genita evolutione nodi abeuntis in cuspidem, videtur lædi continuitas, quæ tamen tum etiam servatur omnino. Si nodus figuræ 17 evolvatur incipiendo a P, ad determinanda puncta genitæ assumi debent in tangentibus VA', IK, FH, CE, VB, OR segmenta æqualia arcubus VP, IVP, FIVP, CFIVP, VCFIVP, OVCFIVP. Nodo evanescente, & abeunte in cuspidem figuræ 18, segmenta tangentium VA, IK, FH, CE, VB, quæ differebant a se invicem per arcus nodi, jam evadunt æqualia, & succedit illi curvæ continuæ curva genita evolutione arcus VP cæpta in P figuræ 18, semicirculus, & curva genita evolutione arcus FV, adjecta ipsi recta æquali arcui VP, quæ quidem curvæ diversæ a circulo naturæ sunt, & continuitatem non servant. At si assumpto arcu VO æquali VP concipiatur curva genita evolutione incipiente in O per OVCFIVP, & in singulis genitis concipiantur terni arcus, in illa, intercepti puncto P, & tangente VA', tangente VA', & tangente VB, tangente VB, & tangente OR, in hac puncto O, & tangente VA, tangente VA, & tangente VB', tangente VB' & tangente VS, momento, quo cuspis efformatur, & coeunt tangentes VA, VA', ac tangentes VB, VB', continuantur inter se priores bini, bini medii inter se, postremi bini inter se, & primi illi duo efformant curvam continuam genitam filo evoluto in fig. 18 ex VP, & advoluto VP, ut in cycloide fieri solet, quæ ita generat se ipsam, secundi integrum circulum, tertii curvam continuam genitam opposita evolutione, & advolutione arcuum VP, VO, facta cum additione in V rectæ ipsis æquali. Ante eam transformationem arcus illi binarum curvarum continuarum accedunt ad arcus continuos trium, in quas illæ desinunt, & ad se ultra quoscumque limites, ac ne curvatura mutetur per saltum, circulus ille remanet utriusque novæ curvæ osculator, quæ omnia admodum facile demonstrantur. In omnibus hujus generis casibus transformatione continuata, dum permutantur arcus locorum

Geo-

Geometricorum,& alii cum aliis, a quibus distabant, conjunguntur, vel alium unicum locum geometricum efformant, continuitate ab aliis translata ad alia, quæ prius cum aliis continuabantur, vel etiam desinunt in bina loca Geometrica a se invicem prorsus distincta, & nulla jam communicatione continuitatis conjuncta, quædam etiam abrumpuntur, sed ita, ut eo momento, quo abruptio fit, uniantur, & continuentur lineæ continuæ cum aliis, ac puncta, in quibus connexiones novæ fiunt, tangentes per ea ductæ, radii osculatorum circulorum, & alia omnia ejusmodi ad se invicem prius accedant ultra quoscunque limites, donec penitus coeant.

145. Ubique in ejusmodi casibus, incredibilis quædam elucet Geometriæ industria in continuitate servanda, mysteriis etiam quibusdam, ubi opus est, in subsidium vocatis, quibus evolvendis in quarto elementorum tomo operam iterum dabimus; sed ad rem pro dignitate tractandam integra volumina nequaquam sufficerent. Diximus autem Geometriæ industriam elucere. Nam figuræ, quas e frustis locorum simplicium, nobis nos efformamus, continuitatem non servant. Sed ea frusta ita terminata Geometria, non agnoscit; unde fit, ut proprietates generales, quæ ejusmodi multilateris figuris conveniunt, semper traduci possint ad multilateras alias, in quibus uni intersectioni, inter bina loca Geometrica alia quævis substituitur, & ubi latus ab una ad aliam tendit, vel una directione ex parte finita, vel opposita etiam transgresso Infinito, si crura infinita occurant. Sed hic iterum immensa se offerret seges nunquam satis resecanda, &demetenda.

146. Simile quid accidit, ubi nos ipsi Geometriæ vim inferimus, & contra ejus naturam imus, continuatione, quam ipsa requirit, turbata, & interrupta, quo casu pereunt interemptæ Geometricæ quantitates, violata illarum natura. Sic in fig.22, ubi recta perpendicularis ad AB motu continuo excurrit per R2, R3, R4, ordinatæ R2 P2, R3 P3 delatæ ad finitam magnitudinem R3E intereunt, & abeunt in imaginarias, reclamante Geometria, quæ requirit progressum puncti P2 ab arcu IE, ad EH, & P3 ab HE ad EI, & rectam perpendicularem frustra revocat, ut oscillet ab una tangente ad aliam, cujus progressu in desperationem acta quantitatem abruptam quodammodo velut interimit. Idcirco transitus a statu reali ad imaginarium fit semper binarum quantitatum simul, (binæ enim sunt revera etiam P2 P2', & P2' P2, quarum altera succederet alteri in punctorum PP' progressu), ut sint quæ sibi mutuo servata Continuitate possint succedere. Et quidem is velut interitus, quod etiam in illa dissertatione tertii tomi nostri notavimus, semper fit ita, ut accessus illarum binarum quantitatum ad se invicem ante coitum fiat, vel aucta velocitate respectiva in infinitum, vel imminuta, ut animantium etiam mors jam fervore nimio in febribus, accidit, jam languore quodam in senili resolutione.

 147. Sal-

147. Saltum etiam in angulo diametri cum peripheria inevniunt aliqui, cum angulus acutus eo minor ad rectum majorem transeat, nec tamen unquam æqualis fiat. Sed hæc difficultas evanescit, ex iis, quæ diximus num.83, cum anguli mixtilinei specie differant a rectilineis, & continuitas haberi debeat inter ea, quæ specie non differunt. Sunt & in Mechanica saltus quidam, qui oriuntur e suppositionibus saltum involventibus, quas nos quidem idcirco impossibiles arbitramur. Ejusmodi saltum quemdam in puncto extra sphæricam superficiem sito, & attracto in omnia ejus puncta in ratione reciproca duplicata distantiarum, vel ita attracto in centrum quoddam, & primo quidem transversim projecto, tum libere demisso projectione evanescente, notavimus contra Eulerum in Dissertatione de motu corporis attracti in centrum virium ea lege, & alius similis saltus obnit Eulero notante in Mechanica, ubi vi decrescente in ratione reciproca triplicata distantiarum punctum describit spiralem logaritmicam, in quo casu post finitum tempus deberet illud punctum advenire ad centrum, & deinde aut nullibi esse, ut ipse censet, aut in infinitis punctis simul, ut nos ex natura ejus spiralis videmur nobis probare posse, atque alia pariter, & saltuum genera, & absurda habentur plurima, ubi vires imminutis distantiis excrescant in infinitum, & attractivæ sint; quas nos, ut jam innuemus, in Natura nequaquam admittimus, qui vires in minimis distantiis volumus repulsivas, ut nihil usquam in Natura infinitum evadat. Iis omnibus illustrandis vix integra volumina satis essent. Verum in iis ipsis casibus, ubicumque de finitis quantitatibus agitur, Geometria, Mechanica, Facultates omnes legem Continuitatis ubique nobis objiciunt.

148 Sunt quidem nonnulla, quæ in finitis etiam magnitudinibus videntur saltum requirere, & inductionem turbare, quæ ad binas classes generaliter reducuntur. Primi generis sunt ea, in quibus nos per saltum assumimus magnitudines quasdam, intermediis omissis, non, quod non adsint; sed quod in usu vulgari non eodem nomine appellari soleant, vel quod ad nomina pertineant. Secundi generis sunt ea, in quibus mutatio fit tempusculo perquam exiguo, quod sub sensum vix, aut ne vix quidem cadat.

149. Ad primum genus reducuntur ipsæ etiam discretæ quantitates, nimirum numeri. Numeros dicimus unitatum aggregata, & fere alios numeros vulgus nequaquam considerat, nec aliis numeris dedimus nomen, nisi iis, qui ex continua unitatis additione fiunt. Ii saltu quodam procedunt, quia nos intermedias quantitates omittimus, nimirum omnes numeros surdos, & fractos, qui hiatum inter binos numeros quoscumque proximos supplent omnem, neque enim ulla est distantia utcumque parva in se determinata ejusdem numeri fracti, vel surdi a quovis numero integro, qua minor in aliquo alio fracto,

vel

vel surdo non habeatur. Si concipiantur omnia, quæ haberi possunt numerorum nomina, sive per fractiones spurias fiant, sive per radicalium expressiones, sive per alia signa in trascendentaliter irrationalibus, series in iis etiam continua habebitur; & quidem quidquid in Geometria fit per lineas nobis cognitas idem in Algebra finita, vel infinitesimali præstatur per symbola, & signa.

150. Eodem pertinent quædam, in quibus quantitas considerationi supposita habet principium, & finem, ac assumimus binas magnitudines, quarum initia a se invicem, & fines a se invicem certo intervallo distant intermediis omissis, quo in genere facilius erramus, si finis primæ cum posterioris initio communis sit. Sit in fig. 25 curva quævis MN axe AB. Assumptis binis axis partibus CQ, QE, & erectis ordinatis CD, QP, EF, area PQEF videtur immediate succedere areæ DCQP, a qua tamen differt per differentiam aliquam finitam, quæ inveniretur abscissis ex QP, EF rectis æqualibus CD, QP, & applicato ad earum vertices arcu DP. Mutatur igitur illa magnitu- per saltum. Ea difficultas facile solvitur notando, continuam seriem haberi debere inter ea, quorum initia, & fines motu continuo excurrunt, non inter ea quorum initia inter se, & fines inter se aliqua determinata distantia distant. Si hæc accipimus, nos accipimus binos seriei continuæ terminos omissis intermediis: intermedii autem ipsi facile habentur, dividendo certa quadam lege distantiam inter bina initia, & binos fines. In casu exposito si concipiatur, rectam *cq* motu continuo cum suis ordinatis *cd*, *qp* progredi a positione CQ ad positionem QE, area *dcqp* a magnitudine DCQP ad magnitudinem PQEF transibit per omnes intermedias sine ullo saltu, quod idem contingeret, si deberet devenire ad aliquam, cujus principium distaret etiam utcumque a fine prioris QP, & interea ipsa *cq* continua quavis mutatione mutaretur, dummodo abeunte *cd* in illius posterioris initium, abiret *qp* in ejus finem. Data curva MN, datis extremis binis areis, quæ semper per determinatam aliquam differentiam a se invicem different, data magnitudine cujusvis intermediæ, semper Geometræ invenire poterunt locum illius *cq*, qui ejus magnitudinis aream exhibeat.

151. Bina ejusmodi exempla proferemus ex Physica. Dies tam a Solis occasu ad Solis occasum, quam a Meridie ad Meridiem computata non est semper ejusdem magnitudinis, sed aliis anni temporibus, alia, licet inæqualitas prior posteriore sit minor, atque inde fit, ut horologia, quæ Astronomis, & universæ fere Europæ communia sunt, cum Italicis Horologiis, & quævis horologia cum Sole accurate cohærere non possint, si motum æquabilem habeant. Concipiantur bini dies contigui, qui differant a se invicem per 10 minuta secunda. Videtur fieri saltus; transitur enim a primo ad secundum, sine transi-

tu

tu per intermedios. Responsio ad difficultatem patet, ex iis, quæ dicta sunt. Initium secundæ diei distat ab initio diei primæ, & finis a fine per determinatam distantiam. Invenientur intermedia, si illa intervalla dividantur in aliqua ratione, ut initia continuo excurrant, & fines itidem continuo. Id fiet si considerentur dies omnes, qui pertinent ad loca posita sub eodem parallelo versus Occidentem, donec ad nostrum locum, Orbe terrarum perlustrato, redeatur. Singula illa loca suos dies habent, qui seriem continuam constituunt incipientem in primo nostro die, desinentem in secundo. In his intermediis diebus omnes magnitudines intermedias inveniemus, sine ullo saltu, qui quidem itidem appellantur dies. Nos tamen eos, qui ad nos non pertinent, considerare non solemus. Sunt & alii intermedii termini, qui ad nos pertinent, sed qui aduuc considerari non solent. Diviso utroque die in horas, & minuta, intervalla temporum a quavis hora primæ diei ad quamvis secundæ constituunt itidem seriem intervallorum continuam, ut ab hora prima primæ diei, ad horam primam secundæ, a primo quadrante primæ horæ illius ad primum primæ hujus, & ita porro. Hæc intervalla mutatione continua tendunt a primo die ad secundum. In usu communi non solent appellari dies, appellantur tamen aliquando; nam diceretur, integros decem dies insumpsisse, qui insumeret tempus a sexta hora primæ ad sextam diei undecimæ.

152. Alterum exemplum huic admodum simile in oscillationibus pendulorum haberi potest. Secunda oscillatio a prima differt aliquando per plures digitos. At si prima, & secunda in eumdem quemvis partium numerum secetur, & assumantur arcus incercepti inter similes sectiones, constituent seriem continuam magnitudinum, quarum initia, & fines motu continuo excurrent ab initio, & fine prioris oscillationis ad initium, & finem secundæ. In utroque casu, & in aliis ejusmodi eodem pacto se res habet, ac in illa area *dcqp* figuræ 25.

153. Secunda classis est quantitatum, in quibus tempore perquam exiguo, & insensibili fiunt mutationes ingentes. Hujusmodi est explosio tormenti bellici, quæ videtur fieri momento temporis vix admoto igne. Et tamen certum est, deberè accendi particulas alias post alias, dilatari aerem, quod motum localem, adeoque tempus continuum postulat, ac globum per omnes velocitatum gradus a quiete accelerari. Pariter emissio luminis delati ad nostros oculos a corpore lucido, videtur fieri momento temporis, at phœnomena Satellitum Jovis, & annuæ Fixarum aberrationes ostendunt fieri propagationem tempore successivo, quo nimirum lux a Sole ad nos fere centum milliariorum millia semiquadrante horæ percurrat. Pariter si lamina elastica vi ingenti prædita, & nonnihil compressa globum ha-

habeat contiguum, ubi ea libera sibi relinquitur, momento temporis videtur globo celeritatem determinatam quandam, & ingentem tribuere, & tamen in eo etiam casu, certissimum est apud omnes Mechanicos globum brevissimo quidem tempore, sed tamen aliquo, per omnes gradus accelerari. Ejusmodi pariter sunt sexcenta alia, inter quæ bina, quæ in contrarium adduci solent, & tamen optimè cum continuitatis lege componuntur, vel eam etiam confirmant seligemus.

154. Eorum primum sit reflexio, & refractio luminis, quam dicunt fieri in unico puncto, in appulsu radii ad novam superficiem, ubi in reflexione tota celeritas perpendicularis superficiei momento temporis extinguatur in primo casu, producta æquali opposita, in secundo mutetur per saltum. Verum inflexionem illam non fieri per saltum in puncto, sed per curvaturam quandam continuam, patet ex actione mutua inter lumen, & corpora, quæ constat ex diffractione a nostro P. Grimaldo detecta, qua fit, ut radius in quadam distantia ab ea superficie intorqueri incipiat, mutata ab ea actione velocitate perpendiculari per omnes intermedios gradus. Et quidem lumen non reflecti ob impactum in superficiem constat, tum ex aliis multis, quæ Newtonus in Optica congessit, tum ex eo, quod quævis superficies, ut vitri, quæ nobis quidem videtur levissima, asperitates habet, & sulcos inductos ab illo ipso pulvisculo, quo poliuntur vitra, quæ asperitates respectu particularum luminis ingentes turbarent reflexionem ortam ab impactu, & lucem quaquaversum diffunderent. Eæ autem asperitates nihil prorsus obsunt reflexioni ortæ a vi repulsiva agente in aliqua distantia.

155. Si enim P sit particula luminis in fig. 26, IEKF sphæra, ad quam sensibilis actio corporum in lumen extenditur, AB superficies bina media dirimens; donec illa sphæra est tota in priore medio, radius ex omnibus partibus æqualiter attractus, vel repulsus, recta pergit. Ubi ea sphæra jam novum medium subire cepit, intra quod sit ejus segmentum CKD, actionum inæqualitas incipit. Si enim GH distet a centro æque, ac CD, segmenta GEPFH, CEPFD, æqualia, & ejusdem medii æqualiter agent in particulam P, segmenta GIH, CKD diversorum mediorum inæqualiter. Hinc habebitur vis quædam accedendi ad planum AB, vel recedendi, & ea vi incurvabitur semita, quæ ubi ob vim repulsivam obvenerit parallela superficiei AB, cursum reflectet, & describet arcum prorsus similem præcedenti, & desinentem ad sensum in rectam ad partes N similem illi, per quam advenerat ex parte M. Si superficies CD, fuerit inæqualis, & aspera, sed inæqualitates fuerint perquam exiguæ respectu totius illius sphæræ, & ejus segmenti CKD, nulla sensibilis turbatio fiet orbitæ MPN, cum vis pendeat ab omnibus particulis sitis intra segmentum CKD, non

a sola prima superficie. Turbatio autem maxima, & luminis dispersio habetur, ubi asperitates majores sint. Idem ibi accidit, quod in Tellure montibus, & vallibus aspera. Gravia libere projecta Parabolas describunt, seclusa aeris resistentia, quæ nullam sensibilem turbationem patiuntur ab asperitate idcirco, quod gravitas pendet a tota Telluris massa, respectu cujus montes sunt insensibiles, non a sola superficie. At si globorum copia in Terram simul incurreret, & omnis abesset gravitas, ac Terræ ipsius superficies esset elastica, reflecterentur omnes ii globi diversissimis directionibus determinatis a planis, in quæ singuli incurrerent, ac dispergerentur.

156. Secundum exemplum sumatur ab aqua, quæ effluit ex aliquo vase, quam dicunt, si foramen fiat sub altitudine aliqua, statim egredi cum velocitate illa, quam acquireret in descensu per altitudinem ipsam; ac proinde contendunt evincere illud, totam illam velocitatem momento temporis generari. At in eo casu quamplurimi melioris notæ Mechanici diserte affirmant se putare, illam ipsam velocitatem acquiri paullatim non totam momento temporis, quo posito, omnis difficultas evanescit. Verum eam difficultatem nulla esse vi præditam pro demonstranda læsione continuitatis, & saltu, nobis quidem evidentissimum est, atque id ipsum duplici via evincimus. Primo quidem evidens est, aquam non posse egredi cum velocitate majore ea, cum qua aufertur obstaculum illud, quo foramen obstruebatur. Hujus remotio pendet a velocitate, quam ipsi manus removens imprimit, quam velocitatem, videbimus paullo infra imprimi per omnes gradus: & qui contendat illam ipsam remotionem fieri, genita in illo obstaculo velocitate finita momento temporis, omnino principium petit, nec ullam peculiarem difficultatem affert ex aquæ velocitate, quæ velocitatem recedentis obstaculi superare non potest.

157. At dices, quid si Deus momento temporis obstaculum ipsum destruat, & foramen aperiat? In primis respondebimus, nos hic inductionem efformare ex iis, quæ in Natura contingunt, non ex iis, quæ contingerent, si Deus Naturæ leges violaret. Deinde in eo etiam casu putamus manifesto constare, velocitatem acquiri brevissimo quidem tempore, sed tamen aliquo, & per omnes gradus, prorsus ut accideret in globo ingenti vi laminæ elasticæ excusso. Nam vis, qua aqua premitur æquivalet toti ponderi columnæ, quæ eamdem basim, & altitudinem habeat, cum quo pondere æquilibratur, in vase æque lato, & cui æquivalet, ut facile demonstratur in cæteris vasorum figuris. Compressionem illam censemus admovere ad se invicem particulas aquæ per spatium insensibile quidem, sed tale, ut vis repulsiva æquatur illi ponderi, cui, & omnino proportionalis invenitur, cum inveniatur proportionalis altitudini aquæ superioris. Eam vim sustinet, vis repulsiva lateris vasis. Latere momento temporis aperto,

vis

vis ea primas particulas accelerat, donec a consequentibus recedant per omne spatium, in quo vis repulsiva agit. Porro idcirco acquiritur velocitas, quæ sit ut radix quadrata altitudinis, quia ubi vires in aliqua ratione constanti inter se agunt per spatia æqualia, acquiruntur velocitates subduplicatæ virium ob id ipsum, quod vires tempusculis æqualibus acquirunt velocitates proportionales sibi, & tempori, tempuscula autem, ubi majore vi jam velocitas major acquiritur, in singulis spatiolis breviora sunt, unde fit, ut celeritas minus augeatur, quam vis. Ea œconomia tempus supponit, & omnes magnitudinum gradus intermedios. Quare ex ipso illo effectu habetur maxima præsumptio pro succesiva ejusmodi generatione. Saltem illud nobis est evidens, nullo pacto demonstrari posse, non hoc potissimum pacto rem accidere, & ipsa inductio, si nihil aliud haberemus, cogeret hoc pacto conciliare secum hoc phænomenum, juxta ea quæ diximus num. 134.

158. Exposita, & comprobata Lege Continuitatis, ac solutis iis, quæ contra ipsam obiici solent, aut possunt, reliquum est, ut occasione solvendi oppositionem aliam, quæ fieri solet ex collisione corporum, aperiamus Theoriæ nostræ ortum, & eam ex ipsa Lege Continuitatis demonstremus. Constitueramus quidem initio hujus dissertationis, de eadem Theoria pluribus agere, at excrescente jam nimium dissertatione ipsa, id argumentum alteri dissertationi, vel aliis pluribus reservare cogimur, & quidem multa, quæ ad ipsam pertinent dedimus in dissertatione de Viribus Vivis, multo plura initio secundæ partis dissertationis de lumine; adhuc autem plura per hosce ipsos dies a P. Carolo Benvenuto doctissimo e Nostra Societate viro (qui nostram in hac re mentem optime novit) in dissertatione publicæ disputationi proponenda brevi in Seminario Romano, potissimum quæ pertinent ad ipsam theoriam virium illustrandam, & ejus usum per universam Physicam latissime patentem ab ipso multo diligentius exculta, & perpolita publici juris fiunt. Quamobrem summa tantummodo capita theoriæ ipsius hic attingemus, & ea ex hac ipsa continuitatis lege demonstrabimus, qua semel admissa, videtur nobis tam evidenter deduci theoria omnis, ut nihil præter meras cavillationes, ad infirmandam deductionem produci possit.

159. Sunt autem hæc summa theoriæ nostræ capita. Primo quidem corpora ad immediatum contactum nunquam devenire, sed in minimis distantiis habere determinationem quamdam recedendi a se invicem, quam appellamus vim repulsivam, quæ distantiis in infinitum imminutis, augeatur ultra quoscumque limites ita, ut sit par extinguendæ cuilibet velocitati, utcumque magnæ, auctis distantiis minuatur, donec penitus evanescat, tum transeat in determinationem accedendi, sive vim attractivam, quæ primo augeatur, tum

K decre-

decrescat, & in repulsivam iterum transeat, idque per multas vices in exiguis distantiis, donec demum in majoribus distantiis evadat ad sensum reciproca duplicata distantiarum, atque id juxta constantem legem ordinatarum ad curvam quamdam continuam, & simplicem, quæ in ipsa abscissarum distantias referentium origine asymptotum habeat parallelam ordinatis ipsis, tum axem in plurimis secet punctis hinc, & inde sinuata, ac demum ex parte axis opposita priori asymptotico cruri, crus aliud habeat asymptoticum, existente asymptoto ipso axe, & accedente cruris forma quamproxime ad formam cruris Hyperbolæ habentis ordinatas in ratione reciproca duplicata distantiarum. Inde colligimus materiam constare ex punctis prorsus indivisibilibus, a se invicem aliquo finito intervallo distantibus, & soliditatem, ac cohæsionem repetimus a distantia limitis inter repulsionem in minori ~~distantia~~, attractionem in majori; adeoque soliditatem, & extensionem mathematicè continuam nequaquam admittimus.

160. Hæc nostræ theoriæ summa; en ejus deductionem a lege Continuitatis. Concipiamus bina corpora delata in eamdem plagam, quorum primum habeat velocitatis gradus sex, secundum vero duodecim. Ubi hoc secundum assequitur illud primum, deberet, si utrumque esset omnino durum, in ipso momento temporis, in quo contactus fit, fieri mutatio velocitatis per saltum vel in altero, vel potius in utroque. Id quidem evidentissimum est, si corpora compenetrari non possunt, ut revera non possunt juxta num. 134, nam illud secundum ultra illud primum ferretur, & in ejus locum succederet, si pergeret quovis utcumque exiguo tempusculo moveri cum velocitate majore. Id sane fatentur omnes, sed duplici via occurrunt difficultati. Sunt qui corpora admittunt etiam dura, cujusmodi saltem prima materiæ elementa Newtonus etiam admisit, qui perfecte solida voluit ita, ut eorum partes continuo contactu cohærere possent per attractionem. Hi saltum a Natura excludendum esse non putant, inter quos Mac-Laurinus inprimis, nihil absurdi in ipso saltu agnoscit. At horum sententiam tota hæc dissertatio enervat. Alii, ut Leibnitiani in primis omnes, e Natura rejiciunt omne corporum durorum genus, & idcirco, dicunt, mollia esse omnia corpora, vel elastica, ut nimirum paullatim partes introcedant, & dum figura mutatur, velocitatis discrimen gradatim juxta Continuitatis legem elidatur.

161. At hæc responsio saltum quidem tollit a totis corporum massis, non a primis superficiebus, quæ se contingunt, & in quibus vis impenetrabilitatis exeritur. In primis illud ipsum ab ejusmodi responsione nos removeret, quod si in ipsis elasticis corporibus nullas particulas utcumque exiguas prorsus solidas admittamus, agnoscenda sit divisio actualis materiæ in infinitum sine ullo limite ita, ut nulli parietes ibi sint ultimi, qui vacuo, & configuratione ad elasticitatem ne-

cessa-

ceſſaria omnino careant, quod quam multa Infiniti myſteria, & vere etiam abſurda, ſecum trahat, ex iis, quæ ſupra de Infinito diximus, ſatis patet. Sed eo omiſſo, corpus quodcumque, utcumque habeat particulas in infinitum diviſas, omnino ſuperficies habet extremas, quæ ſi ad contactum devenitur, ſe immediate contingant. Hujuſmodi ſuperficies ſunt reales corporum termini indiviſibiles, juxta num. 16, nec dici poteſt pro ſuperficiebus haberi poſſe ſolida quædam infinite parva craſsitudine prædita, nam & infiniteſimas quantitates in ſe ipſis determinatas nullas eſſe, demonſtravimus num. 80, & ſi ſint, eorum interiores partes ad limitem extremum, adeoque ad ſuperficiem pertinere omnino non poſſunt. Nec aliud eſt compreſsio corporis figuram immutantis, niſi acceſsio extremarum ſuperficierum ad ſe invicem, quod in Diſſertatione de Viribus Vivis ſatis luculenter oſtendimus adjecto etiam ſchemate, quod modum compreſsionis exhiberet, conſiſtentis in eo, quod præcedentis ſuperficiei velocitate minore exiſtente jam, quam conſequentis, earum acceſſus habeatur.

162. Porro ſuperficies illæ, in quibus contactus fieret, deberent velocitatem mutare per ſaltum. Si enim prima ſuperficies ſecundi corporis aliquo tempore diviſibili poſtea, quam ſublata eſt omnis earum diſtantia, cum poſtrema primi corporis ad æqualitatem reducitur, erit aliquod momentum poſterius, quo illa habebit velocitatis gradus 11, hæc minus adhuc quam 11, ut 7, adeoque toto illo pro tempore ſecundi corporis ſuperficies habuiſſet velocitatem majorem, quam ſuperficies primi, & proinde plus ſpatii percurriſſet, quod compenetrationem aliquarum corporis particularum induceret.

163. Evidens igitur eſt ſaltum in ipſis ſuperficiebus, ſalva impenetrabilitate evitari non poſſe, ſi cum illo velocitatum diſcrimine ad contactum devenitur, adeoque debent omnino, ante quam deveniatur ad contactum, mutari paullatim, & per gradus velocitates illæ corporum, retardata altera, altera accelerata. Quare debet haberi cauſa, quæcumque ea ſit, quæ retardationem, & accelerationem inducat, quæ quoniam mutat ſtatum corporum in ordine ad determinationem motus, & quietis, dicenda erit vis, & quoniam tendit ad removendum alterum corpus ab altero, dicenda erit vis repulſiva, quo nomine intelligenda erit determinatio, quam habebit, quævis materiæ particula recedendi ab alia quavis particula, dum ad eam accedere cogitur etiam ante contactum. Ea autem determinatio ſine actione in diſtans, & ſine ullo impulſu, poterit haberi vel in natura ipſa materiæ requirentis receſſum illum ſub conditione illius determinatæ diſtantiæ ab alia materia, vel per liberam legem Dei ſancientis eum receſſum in illa diſtantia, quo utroque modo etiam vis aſtractiva in majoribus diſtantiis ab ipſis diſtantiis pendens æque bene explicari poteſt ſine ulla actione in diſtans, & ſine ullo impulſu. Idea ejuſmodi

determinationis distinctissima est, & clarissima. Miramur autem tantam difficultatem apud nonnullos haberi in admittenda hujusmodi determinatione assumente pro conditione certam distantiam, cum ii omnes admittant similem prorsus determinationem mutandi statum, ubi distantia sit nulla, ortam ex impenetrabilitate, quam censent agere in immediato contactu. Num est captu facilior, præjudiciis sepositis, determinatio sive a materiæ natura profluens, sive a libera Dei vovoluntate, assumens pro conditione potius distantiam zero, quam distantiam determinatam quamcumque?

164. Porro ea vis repulsiva imminutis distantiis in infinitum debet augeri in infinitum ita, ut sit par extinguendæ cuilibet velocitati utcumque magnæ. Si enim in uno casu, ut in allato, extingueretur discrimen velocitatis in ipso contactu; ubi in alio casu corpus secundum majori velocitate præditum esset, deberet pervenire ad contactum, ante, quam totum discrimen velocitatum extingueretur; videmus enim, vires omnes breviori tempore minorem velocitatem gignere, vel extinguere, & majori differentiæ velocitatis responderet tempus brevius usque ad contactum. Quare ne in posteriore casu habeatur in ipso contactu differentia velocitatum, & saltus, debet in priore extingui totum discrimen ante, quam ad contactum immediatum deveniatur, ut nimirum in posteriore casu, per vim repulsivam in ulteriore illo accessu exercitam majus illud discrimen extinguatur totum. Cumque idem discursus redeat pro quavis utcumque magna velocitatum differentia, patet, ejusmodi debere esse vim repulsivam, ut corpora nunquam ad immediatum contactum deveniant, & ipsa sit par extinguendæ velocitati utcumque magnæ, adeoque ut imminutis in infinitum distantiis excrescat ultra quoscumque limites in infinitum, atque ita excrescat, ut recta ipsi proportionalis ducta in rectam exprimentem distantias describat aream infinitam (cum nimirum illi areæ in Mechanica demonstretur proportionale quadratum velocitatis genitæ, vel destructæ) ad quam areæ infinitatem requiritur, ut vis decrescat non minus, quam in simplici ratione distantiæ; nam ea ratio exhibet Hyperbolam Conicam inter asymptotos habentem aream infinitam, & in omni Hyperbolarum familia eæ omnes, quæ ordinatas habent minus crescentes, habent aream finitam, quæ habent magis crescentes, habent ipsam aream itidem infinities magis infinitam.

165. Jam vero hinc eruitur, materiam constare e punctis prorsus indivisibilibus, & inextensis, a se invicem quodam semper intervallo disjunctis. Nam ejusmodi repulsiva vis, cum nec relativa sit relatè ad nostros sensus, nec ab aggregati, & totius natura pendeat, debet per num. 135. tribui omnibus materiæ particulis. Unde fit, ut nulla pars materiæ ex aliis particulis contiguis constet; quæ nimirum

vi ilvi illa repulsiva in infinitum aucta deberent statim a se invicem discedere; ac proinde oportet, primæ particulæ materiæ sint omnes simplices, incompositæ, adeoque indivisibiles, & a se invicem distantes, quæ cum nec illam virtualem extensionem habere possint, juxta num.86, erunt puncta prorsus indivisibia, & inextensa,

166. Quoniam autem in majoribus distantiis habetur determinatio accedendi ad se invicem, quod constat ex generali gravitate a Nevvtono detecta, quæ in immensum protenditur, & sequitur ad sensum rationem reciprocam duplicatam distantiarum, ac ex ipsa cohæsione corporum, cum nimirum anteriorem partem adductam posterior consequatur; patet vim illam repulsivam, quæ minutis in infinitum distantiis crescit in infinitum, adeoque iis auctis decrescit, alicubi ita decrescere, ut evanescat, ac deinde directione mutata, ut curvarum ordinatis sæpe accidere vidimus num.112, in attractivam migret, ubi habebitur necessario limes quidam inter repulsionem, & attractionem, in cujus limitis distantia si ponantur bina puncta materiæ, quiescent, nulla vi attracta, nulla repulsa, at ea distantia utcumque imminuta, agente jam vi repulsiva conabuntur recedere a se invicem, ea aucta, adeoque agente jam vi attractiva, conabuntur accedere ad se invicem; unde fiet, ut in ea distantia constituta, eam tueri conentur, & altero versus alterum promoto, hoc posterius cogatur progredi, illo tracto versus partes oppositas, hoc ipsum cogatur consequi, conanti autem alterum ad alterum adducere, vel alterum ab altero abducere, resistant, in quibus phænomenis consistit tota cohæsionis, & soliditatis notio, quam per sensus acquirere possumus; quamobrem ejusmodi limites dicimus *limites cohæsionis*.

167. Porro ejusmodi limitis, sive transitus a vi repulsiva in minoribus distantiis ad atractivam in majoribus, imaginem sensibilem habemus in elastica forcipe, qua per hyemem carbones accensos tractamus, cujus cuspides si plus æquo admoveantur, determinantur ad mutuum recessum, si plus æquo removeantur ad accessum. Sed & alterius generis limites admitti debent, in quibus ab attractione ad repulsionem, auctis distantiis fiat transitus, cum videamus aquæ particulas cohærentes, adeoque in priore limite positas, abire deinde in vapores, quorum particulæ maxima vi a se invicem conentur recedere, in quibus proinde & repulsioni in minimis distantiis attractio in paullo majoribus, & iterum in aliis majoribus repulsio, ac iterum in maximis, in quibus mutua gravitas agit, attractio succedat. Quin immo plurimos esse hujusmodi transitus, & limites, constat ex eo ipso, quod multa corpora post iteratas compressiones in respectiva quiete perseverent, novos nimirum, & propiores cohæsionis limites assecuta. Hoc autem secundum limitum genus a priore illo plurimum differt, cum bina puncta in ejus limitis distantia constituta quiescant,

sed

sed utcumque parum ea immutata, cogantur ab ea magis recedere; cum nimirum, imminuta distantia, habeatur vis attractiva, quæ ipsam adhuc magis imminuat, eàdem acta agat repulsio, quæ ipsam augeat adhuc magis.

168. Porrò hujusmodi virium alternationes & transitus etiam Nevvtonus admisit in Quæstionibus Opticis sub finem, licet ipse in minimis deinde distantiis attractionem ultimam voluerit, & contactum, non repulsionem. Transitus autem ipsos explicat exemplo quantitatum positivarum, & negativarum in Albegra, cum in Mechanica necesse esse censeat, ubi vis attractiva desinit, incipere vim repulsivam; ut in Algebra ubi quantitates positivæ desinunt, debeant incipere negativæ. Verum ibi notandum illud, quod & in nostra Algebra secundo Elementorum nostrorum tomo demonstravimus, & eruitur ex iis, quæ dicta sunt num. 112: non esse verum, eo ipso, quod aliqua quantitas positiva esse desinit, necessario in negativam migrare debere, & viceversa; cum nimirum aliquando post accessum ad nihilum retro etiam quantitas redeat, nec ipsum transgrediatur. Est autem generalis regula, in iis etiam, quæ in ipsa Algebra nostra demonstravimus, ex qua regula cognosci possit, an per nihilum transire debeat quantitas ipsa, an inde regredi. Nimirum si ubi ad nihilum devenit, ejus magnitudo decrescat in ratione, quæ sit eadem accurate, vel infinities proxime, quam habet aliqua potentia impar distantiæ ab ipso nihilo, transiliet; si in ratione, quam habet aliqua potentia par, regredietur. Mutata enim distantia a nihilo, & abeunte ultra ipsum, ejus potentiæ impares mutantur etiam ipsæ e positivis in negativas, vel viceversa, pares manent; adeoque idem formulæ algebraicæ, vel quantitati cuivis eam rationem habenti debet evenire. quod itidem in Geometria servatur sanctissimè, ut nimirum curva linea ad axem delata debeat ipsum secare, & transgredi mutata directione ordinatarum, vel contingere, & regredi ipsa servata, prout ordinatæ ipsæ fuerint ibi accuratè, vel in infinitum proximè in ratione potentiæ cujuspiam gradus imparis, vel paris suæ distantiæ a puncto illo, in quo ad nihilum deveniunt, & evanescunt.

169. Inde autem consequitur, vim hoc modo traductam per nihilum, & jam abeuntem in attractivam, jam iterum in repulsivam non esse vim quamdam multiplicem &, indigentem pluribus causis, quam si tantummodo attractiva esset. Simplicissima ejus lex erit, sive semper negativa, sive e positiva in negativam migret, & ipsa ejus natura requiret transitus illos, si ejusmodi sit, ut alicubi prope loca, in quibus evanescit, sequatur rationem illam potentiæ imparis potius, quam paris. Poterit ea per simplicissimam etiam Algebraicam formulam exprimi, cujus valor imminuto valore variabilis distantiam referentis in infinitum crescat, & negativus sit, tum eo aucto, jam e nega-

gati-

gativo in positivum migret, jam e positivo in negativum; donec, eodem satis, excrescente sit semper positivus, & accedat quamtumlibet ad rationem reciprocam duplicatam distantiarum. Quamobrem poterit per simplicem curvam etiam Algegraicam exprimi, quæ in initio ordinatarum asymptotum habeat parallelam ordinatis in infinitum crescentibus ex ea parte, ac ex opposita decrescentibus, donec ipsa curva axem secet, ac resecet vicibus quotlibuerit, & in punctis quibuscumque ad arbitrium; desinat autem in crus infinitum habens pro asymptoto ipsum axem, & jacens ad partes ejus oppositas, ac accedens quantumlibet ad formam Hyperbolici cruris habentis ordinatas in ratione reciproca duplicata distantiarum. Atque hæc ipsa est forma curvæ, qua nos nostram virium theoriam exprimimus. Ut vero ejusmodi curva simplicissima in se esse potest, & continuæ, ac constantis naturæ, ita & virium lex non multiplex erit, sed unica, & ab unica vel punctorum materiæ natura, vel Artificis Divinis libera voluntate pendebit.

170. Porro mirum sane, quam ea, licet unica sit, ad omnes generales, & particulares corporum proprietates explicandas conducat. Primus ille ramus asyptoticus impenetrabilitatem, postremus gravitatem, intermedii limites varia cohæsionum genera, & discrimen inter corpora elastica, & mollia, solida, & fluida, ac alia ejusmodi, sinus illi multiplices fermentationem, & inflammationem, emissionem vaporum, & luminis, quamvis constante, & non disrupta massa quæ emittit, atque alia sexcenta ejusmodi mirum in modum expediunt; ubi illud facile perspicitur, cur tanta corporum omnium similitudo sit in iis, quæ pertinent ad impenetrabilitatem agentem in minimis distantiis, & gravitatem in majoribus, tantum autem discrimen in reliquis, e quibus pendent operationes chymicæ, nutritiones, & alia omnia adeo mira, & varia Naturæ opera. Sed de his satis multa in illa ipsa dissertatione de lumine demonstrata protulimus, & multo plura a P. Carolo Benvenuti per hosce ipsos dies, ut innuimus, proferuntur.

171. Illud unum hic addemus, quod ad spatii ideam pertinet in hac nostra sententia realem Mathematice continuam extensionem, a corporibus excludente. Nos præter puncta materiæ realia, admittimus reales existendi modos, per quos ibi sint, ubi sunt, quod admittere omnino debent, qui locum ponunt in ordine coexistentium, vel reale spatium admittunt, ne quotiescumque existant, quæ existunt, eundem ordinem habeant, vel in eadem spatii parte sint. Illi ipsi modi sunt nobis realia, & immobilia punctorum loca, quæ ubi existunt, fundant realem relationem distantiæ inter se, & ipsa materiæ puncta, ad quæ pertinent. Eorum possibilitas indefinite a nobis cognita est nobis spatium imaginarium continuum quidem, & infinitum, quia cum nullum sit punctum loci possibile ita proximum alteri, ut aliud propius,

aut

aut remotius esse non possit, in possibilibus indefinite cognitis nullus habetur hiatus, nullus terminus, qui semper in existentibus adest.

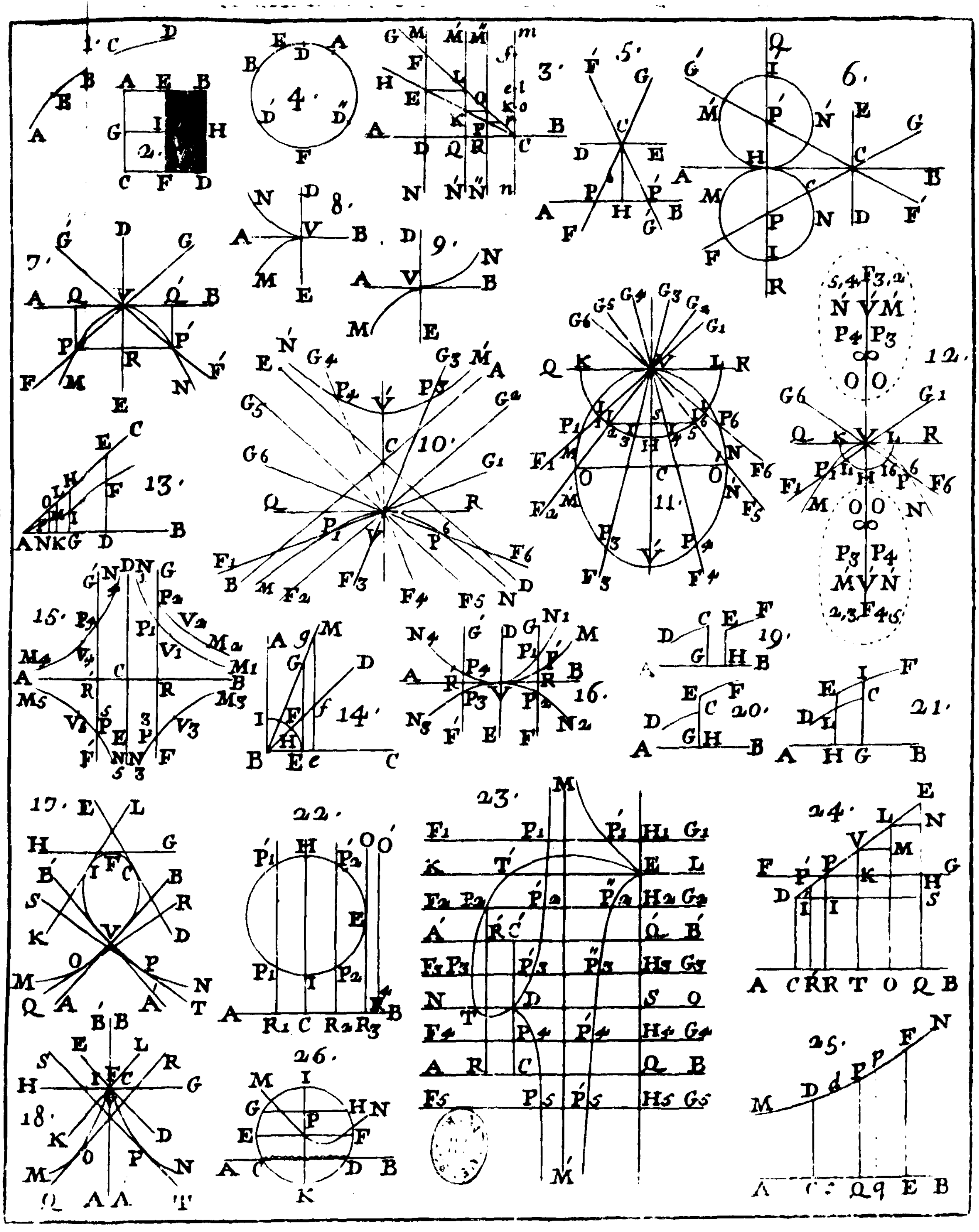
172. Porro cum illi reales existendi modi realem distantiæ relationem inducant, a casu compenetrationis, qui per alios ab iis distinctos existendi modos haberetur, realem etiam, non continuam, sed discretam extensionem constituunt, in quo nihil absurdi est: extensum enim continuum ab inextensis constitui non potest, non vero discretum in exposito sensu, in quo evidentissimum est, phænomena extensionis, quæ supra innuimus, ut a nobis cognoscuntur per sensus, eadem fore.

173. Sunt, qui vereantur, ne in nostra theoria nullum, sit discrimen nostrorum punctorum a spiritibus, quibus si eædem illæ vires tribuantur, extensam in eodem nostro sensu massam efformabunt. At bina habemus discrimina inter materiam, & spiritus nobis utcumque notos. Illa vi cognoscendi censetur carere, & impenetrabilitate, ac extensione prædita est, hi vi cognoscendi pollent, impenetrabilitate, & extensione carent. Idcirco autem his carent, quia illis ipsis viribus carent. Si vires haberent easdem, adhuc per potentiam cognoscendi distinguerentur a materiæ punctis, sed impenetrabilitatem haberent, & massas extensas formarent, quo casu an adhuc spirituales substantiæ dici deberent, lis esset de nomine.

174. Superessent alia quamplurima, sed illud, ut fidem datam numer. 35 liberemus, nequaquam omittendum; in nostra sententia nec quietem punctorum, nec regressum ad eumdem locum, aut appulsum ad locum, in quo fuerit, vel sit aliud punctum, seu conjunctionem unius puncti spatii, cum serie continua momentorum temporis, vel cum momentis a se distantibus pro eodem puncto materiæ vel pro binis haberi posse in Natura. Primum patet ex eo, quod viribus ad immensas etiam distantias pertinentibus, ad motum puncti cujusvis debent mutari vires punctorum omnium, adeoque ipsa in perpetuo esse motu; sed utrumque facile demonstratur ex eo, quod cum punctorum spatii in quavis linea recta, linearum in quovis plano, planorum in toto spatio numerus sit infinitus, numerus autem punctorum materiæ finitus, numerus momentorum ejusdem generis, ac numerus punctorum in quavis recta; infinita tertii ordinis est improbabilitas pro quovis momento pro determinato appulsu cujusvis puncti materiæ ad quodvis punctum loci, in quo ipsum fuerit alias, vel in quo fuerit aliud punctum materiæ, vel tum sit, & infinita secundi ordinis, pro momentis omnibus indefinite sumptis. Ex quibus constant, quæ in eo numero demonstratione indigebant. Sed contrahenda jam vela sunt, & consistendum.

F I N I S.

ERRATA			CORRIGE
Pag. 5	lin. 29	termini	terminus
16	14	quorum	quos
19	9	summum	summam
21	36	FP	FD
22	13	*Ce*, *Cf*	*Cf*, *Ce*
25	27	ADB'D	ADBD'
26	41	GE ... CG	GF ... CH
27	37	FD	ED
28	16	C, H	CH
30	34	V'V'	VV
	36	FV'G	FVG
	41	M'M'	MM'
32	9	O, O	O, O'
	35	OVO'	OV'O'
36	26	auctu	actu
39	5	VF', VF	VF, VF'
	6	P', P'	P, P'
	14	P', P'	P, P'
	37	MBE	MBD
40	11	FE*f*	FE*ef*
	38	fig. 13	fig. 15
42	16	nondum	nodum
48	25	cujuslibet	primæ
49	16	F'G	FG
	32	VR	PR
	42	R'P1	RP1
50	22	R4O	R4O'
52	39	AH	AR
53	3	R'C'	RP
	25	CDPE	CD, QE
56	6	aliam	alium
57	10	*præ*	*pro*
61	4	cadera	cadere
65	37	fig. 28	fig. 18
67	30	R3P3	R2P'2
	32	P3	P'2
68	23	obnit	obvenit
72	41	æquatur	æquetur
75	22	illo pro,	illo
	41	astractiva	attractiva
77	5	pucta indivisibia	puncta indivisibilia
78	3	acta	aucta
	9	Albegra	Algebra
79	4	Algegraicam	Algebraicam
	41	cognita est	cognita, est



1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.