ELEMENTA EUCLIDEA GEOMETRIÆ,

PLANÆ AC SOLIDÆ;

ET SELECTA

EX ARCHIMEDE THEOREMATA,

QUIBUS ACCEDIT

TRIGONOMETRIA,

AUCTORE

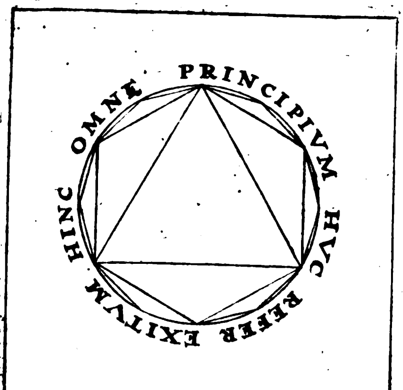
ANDREA TACQUET.

Soc. Jes. Sacerdote, & Matheseos Professore.

Novissimam hanc Editionem adornavit, plurimisque *Corollariis* varios Propositionum usus exhibentibus illustravit, & Schemata XL addidit

GULIELMUS WHISTON. A. M.

Matheseos Professor LUCASIANUS.



AMSTELODAMI,

Apud PETRUM DE COUP.

MDCCXXV.

P. V. MUSSCHENBROEK

SUIS

AUDITORIBUS

S. D.

INter eos, qui Elementa Euclidis Mathematica suis demonstrationibus illustrarunt, haud mediocrem meruit deportavitque laudem Cel: ANDR. TACQUETUS; suffragia approbantia adeo unanimia fuerunt, ut aliquoties in diversis Europæ locis ejus com-mentarii typis mandati sint; nec miror eos quàm plurimum placuisse, eminet enim in omnibus demonstrationibus, tam directis, quàm quæ ad absurdum ducunt, magna perspicuitas & amabilis brevitas, ut fere nihil melius exspectari posse videatur: utramque probandi methodum, directam & indirectam, Auctor sapienter retinuit, ut tyrones assuescerent methodis veterum Geometrarum omnibus; tum ut hæc Elementa inservirent loco Logicæ ad docendum varios ratiocinii & demonstrationis modos. Quæcunque in Euclideis minùs utilia, aut nimis prolixa sunt, omisit; ubi utiliora addi posse judicavit, Corollaria & Scholia egregia adjunxit: hinc si palmam omnibus non eripuisse, saltem cum optimis de eâ certasse censeri potest. Quamobrem digna hæc Elementa censuit Clar. Britanniæ Mathematicus GUIL. WHISTONUS, quæ ornaret suis lucubrationibus & eruditis commentariis; hi, ut & ipsum opus, quamplurimum placuerunt Orbi Mathematico, ut intra angustum temporis spatium typis excusi sint tribus vicibus in Britanniâ, hoc tempore disciplinas Mathematicas ferventissime colente, & meritò de summis in hisce Viris gloriante. Deerant in nostrâ regione exemplaria, sæpiusque dolui VOS hoc præstanti opere destitui; idcirco consului P. Coupio, Bibliopolæ diligenti, ut juxta ultimò editum Brittannicum exemplar hoc opus Tacquetianum typis iterum mandaret; nec defuit, curans ut nitidissime prodiret, correctum satis accurate à sphalmatibus, & ornatum figuris æri incisis melioribus; quàm in omnibus antecedentibus impressionibus. Vestros in usus A. A. elegi hunc Auctorem potissimùm; qui, præter-

quam

quam quòd Doctissimi WHISTONI operâ fulget, non tantùm hæret in sex prioribus Libris Euclidis, quemadmodum Commentatores plurimi, sed ea, quæ fundamenta Planorum & Solidorum spectant, addidit; quæque ab aliis non nisi longis exhibita demonstrationibus, solitâ suâ brevitate ac facilitate explicuit, ut absque tædio legi, absque difficultate res subtiles intelligi possint. Posteriora æque Vobis scitu necessaria quàm priora: omnia enim cùm didiceritis, apti demum estis ad Philosophiam Mathematicam cum fructu intelligendam; quâ alioquin ignaro Matheseos nihil obscurius, perito nihil clarius dici potest. Nolui huic Libro aliquid adjicere ex meo penu desumtum, ne in opus Clavianum excrescat, tum quia me vivâ voce explicantem variis hæc Elementa modis, & plurima inserentem audire soletis. Addita fuit huic editioni TRIGONOMETRIA PLANA nostri Auctoris, brevis quidem, sed clara, sufficiens ad omnia intelligenda, quæ in Geometriâ Practicâ occurrunt: adjecta hæc quoque fuit impressioni Patavinæ, simul cum TRIGONOMETRIA SPHÆRICA ex P. Schotti Encyclopædia deprompta; retinui utramque;

que; PLANAM, quia utilitate suâ & jucundissimis problematibus deleret ex animis vestris, quicquid tædii anteacto labore cepissetis. SPHÆRICAM desiderabam, ut me Astronomica tractantem methodo Mathematica, facile & cum voluptate intelligeretis. Hasce igitur Matheseos partes commendare Vobis volui, quas dum explicuero, vera me stravisse fundamenta ad reliquas, ut & ad Philosophiam hodiernam arbitror; his fruamini, & valete.

Trajecti ad Rhenum
1 Novembris 1724.

PRÆ-

PRÆFATIO.

CUM apud nos decretum esset Elementa Geometriæ Euclideæ juxta V. Cl. Andreæ Tacquet editionem recudere, dedi operam ut quàm emendatissime, nec sine auctariis e novo nostro Typographeo prodirent. Atque equidem Editio hæcce Tacquetiana, quam haud immeritò elegantissimam *vocat nostræ professionis Pater Cl. Barrovius, præ aliis mihi semper visa est, & explicandi facilitate, & demonstrandi perspicuitate reliquis palmam præripuisse. Neque aliam fuisse Doctiorum de eàdem sententiam, publicus Geometrarum usus suadere videtur. Vix aliam enim Elementorum Euclideorum formam sæpius impressam, aut manibus frequentiùs tritam videre licet. Quin & illa quoque ad accurandam hanc præ reliquis editionem, quam integram hic damus, animos addiderunt, quòd & præcipua Archimedis, Geometræ plane summi, de Sphærâ, Cono, atque Cylindro Theoremata, auro contra non cara ad calcem exhiberet; & in reliquis Editoris nostri operibus Mathematicis, eruditissimis sane, & ad usum Tyronum scientias hasce proprio Marte aggredientium optime accommodatis, passim citata extaret. Defuerunt quidem, aut mihi saltem defuisse visa sunt etiam in optimis hisce elementis nonnulla, quæ si haberentur, discentibus essent haud parum emolumenti allatura. Nempe in secundo libro methodum demonstrandi incipientibus paulo difficiliorem: In quinto proportionum doctrinam in se facillimam per ambages nimias expositam; Atque etiam ob corollariorum practicorum de-*

fectum, *Elementa nimis abstracta, gracilia, & tædii plena causabar. Quocirca omnia ad incudem revocare, & quæ desiderari posse videbantur supplere, in animum induxi. Secundi itaque libri demonstrationes plerasque tum rectangulorum constructione, tum exemplis numericis illustravi; Doctrinam de proportione, quam quintus liber complectitur, summatim & brevissime exposui: Et quod in nostro opere, & in universo hoc studiorum genere palmarium reor, varios propositionum* Usus *sive theoreticos, sive practicos, (faciliores nimirum, & quales discentium captui essent accommodi) condimenti instar, atque incitamenti haud raro apposui. Quæ cùm ita sint, fas sit sperare Elementa Geometrica jam tandem, etiam ordine Euclideo non mutato, & facilitate, & usu ita fore comparata, ut Elementis aliis novo ordine atque methodo demonstrandis non sit opus futurum. Minime enim placet eorum ratio, qui prima Geometriæ elementa alibi quàm apud Euclidem, quem solum tanquam unicum Elementorum Conditorem citant ubique Mathematicorum libri, & his mille annorum usus satis commendat, quæsitum eunt. Hisce quidem perlectis, atque in succum & sanguinem versis, pergant ulterius Tyrones quoquo patet Matheseos Campus, quaqua ducit Neotericorum solertia, in plerisque sane longe felicissima: sed Duce, atque Auspice Euclide pergant.* Juvat antiquos exquirere fontes: *& ingens erit mora, operæque pretium calculo analytico, indivisibilium methodo, Infinitorum Arithmetice, & novissima fluxionum doctrina Constructionem Veterum Geometrarum Syntheticam, tanquam Scientiarum Mathematicarum basin inconcussam, præstavisse & prælibasse.*

Sciat autem Lector, me Corollaria ista, quibus usus propositionum continentur, e celeberrimis Elementorum scriptoribus, De Chales, Barrovio, Pardies, Sturmio, *ex ipso etiam Tacqueto alibi, atque a Geometrarum Principe Isaaco Newtono, quem honoris etiam causa nomino, potissimum mutuo accepisse; perpauca enim quæ de penu proprio profero, digna non sunt quæ seorsim memorentur. Quæ vero de Elementis a Cl. Dno. de Chales editis deprompsi, cum haud pauca sint, sine lineolis separatricibus cernuntur; reliqua vero hujusmodi uncinulis [ ] includuntur; ita tamen universa, ut quæ Tacqueto nostro aliunde accedunt, characteris diversitate ubique dignosci possint.*

Cuiquam autem auctor esse nollem, ut librum integrum simul & semel sibi perlegendum imponat: In secundo enim libro, probationibus & illustrationibus nostris contentus esse potest, primâ saltem vice: & in libro quinto, e Monito nostro ad Tyrones, *generalium de proportionalibus ratiocinandi modorum probe memor, ad Librum sextum illico accedat; quem sane si tum nequeat intelligere, causam non dicam quin propositiones libri 5. particulares prius omissas repetat. Quæ etiam circa Paradoxorum de Contactûs Angulo solutionem post prop. 16. lib. 3. afferuntur, cum ad Elementa non pertineant, neque ita solida videantur; tuto omitti poterunt. Reliqua autem omnia (nisi forte nonnullas axiomatum suâ luce clarissimorum demonstrationes minus necessarias exceperis) digna sunt omnino quæ non tantum legantur, sed & firmiter memoriæ atque animis infixa hæreant; tanquam Scientiæ inter humanas longe præstantissimæ & certissimæ principia vere Aurea, & nunquam satis laudanda: quibus quidem ducibus non tantum Geometria, sed & Physica etiam, & Astronomia extra Syderum Solisque vias in immensum creverunt, & etiamnum crescunt; dum scientiæ hujus Parentes* Exæquat Victoria Cælo.

Scribebam Cantabrigiæ III. Calendarum Martii A. D. $170\frac{2}{3}$.

De Editione tertiâ CANTABRIGIENSI Monitum.

EDITIONEM hanc Euclidis Elementorum juxta Cl. Tacquetum, quo Tyronum usibus accommodatior atque instructior prodiret, quantùm fieri posset perspicuam & explicatam dare seriò adlaboratum est. Theoremata bene multa novis demonstrationibus muniuntur: alia, quibus ea penitus deerant, iisdem suppeditantur. Corollariis ac scholiis sparsim insertis, fulciuntur demonstrationes inde subsecutæ, ut iis sua firmitas & evidentiæ vis fortiùs ac meliùs constet. Propositionum complurium, quas usui quasi vix futuras omiserat Tacquetus, non paucæ revocatæ sunt; atque eorum Auctori postliminio restitutæ. Additamenta quibus Vir Cl. Gulielmus Whistonus Editionem primam adornaverat, persæpe ulteriùs transponuntur, ne propositione aliquâ viderentur niti, quæ ante demonstrata non fuisset. Theorematum demonstrationes, ubicunque nimiùm breves visæ sint, aut ad amussim non constructæ, supplementis inditis pleniores, Tyronibusque (ut spero) faciliores redduntur. Nonnulla afferuntur, quæ maximâ ex parte, ab inclytis Geometris, magni nominis Viris decerpta sunt, ut inde instructior evadat hisce studiis prosequendis, quicunque ad veram Philosophiam tendit iter.

Hortandus est Matheseos studiosus; ut Elementis Geometriæ Analyticam adjungat praxin. Hinc ei in disciplinâ tam sublimi feliciùs progredi, & cum illâ familiariùs versari licebit; imo & in ejusdem recessus abditos intimaque penetralia ei tandem introire fas erit.

Dabam XIII. Kal. April.
Anno Dom. 1722.

Ὁ ΘΕΟΣ

Ὁ ΘΕΟΣ Γεωμετρεῖ.

TU autem, DOMINE, quantus es Geometra? Quùm enim hæc ſcientia nullos terminos habeat; cùm in ſempiternum novorum theorematum inventioni locus relinquatur, etiam penes humanum ingenium, TU uno hæc omnia intuitu perſpecta habes, abſque catenâ conſequentiarum, abſque tædio demonſtrationum. Ad cætera pene nihil facere poteſt intellectus noſter; & tanquam brutorum phantaſia videtur non niſi incerta quædam ſomniare, unde in iis quot ſunt homines, tot exiſtunt fere ſententiæ: in his conſpiratur ab omnibus, in his humanum ingenium ſe poſſe aliquid, imo ingens aliquid & mirificum viſum eſt, ut nihil magis mirum; quod enim in cæteris pene ineptum, in hoc efficax, ſedulum, proſperum, &c. TE igitur vel ex hac re amare gaudeo; TE ſuſpicere, atque illum diem deſiderare ſuſpiriis fortibus, in quo purgatâ mente & claro oculo non hæc ſolùm omnia abſque hac ſucceſſivâ & laborioſâ imaginandi curâ, verùm multò plura & majora, ex Tuâ Bonitate & immenſiſſimâ ſanctiſſimâque Benignitate conſpicere & ſcire concedetur, &c.

Cl. Barrovii verba Apollonio ſuo præfixa.

SIG-

SIGNORUM *quorum frequens usus est in additionibus* EXPLICATIO.

$=$ *Signum æqualitatis.* Sic $a = b$ denotat quantitates a & b æquales esse.

$+$ *Signum additionis.* Sic $a + b$ denotat summam quantitatum a & b.

$-$ *Signum subductionis.* Sic $a - b$ denotat excessum quantitatis a supra b.

o *Signum nihili.* Sic $a - b = 0$ denotat a *minus* b (sive excessum ipsius a supra b) æquari nihilo; & proinde quantitates a, b esse inter se æquales.

$\times$ *Signum multiplicationis.* Sic $a \times b$ denotat productum ex quantitatibus a, b in se invicem multiplicatis.

Quandoque etiam quantitates productum efficientes, absque signo interposito conjunguntur. Sic AqE denotat productum ex multiplicatione quantitatis Aq per quantitatem E. [Et sic quoque apud ipsum Tacquetum (*schol.* p. 36. l. 11.) ABC denotat solidum ex rectarum A, B, C *multiplicatione* continuâ productum. Aliquando tamen, Tacquetus quantitates *addendas* absque signo interposito conjungit. Sic in demonstr. p. 24. l. 5. AI denotat summam quantitatum A & I]

Sit quantitas A dividenda per B. Quotiens sic $\left(\frac{A}{B}\right)$ notatur.

Et similiter, $\frac{7}{4}$ est quotiens numeri 7 per 4 divisi, sive $1\frac{3}{4}$. Et cujuslibet fractionis (ut $\frac{1}{3}$) numerator (1) pro dividendo, denominator (3) pro divisore habendus est, & ipsa fractio ($\frac{1}{3}$) pro quoto.

$::$ *Signum rationum æqualium.* Sic $A : B :: \alpha : \beta$, (vel $A . B :: \alpha . \beta$) denotat eandem esse rationem inter A & B, ac inter α & β.

$\div$ *Signum proportionis continuæ.* Sic $A, B, C \div$ denotat A esse ad B, ut B est ad C.

q *Signum quadrati.* Sic CBq denotat quadratum lateris CB.

c *Signum cubi.* Sic Ac est cubus lateris A.

$\surd$ *Signum radicis quadraticæ.* Sic $\surd 5$ est radix quadratica numeri 5; & $\surd A + B$ est radix quadratica summæ quantitatum A & B. Hoc est, si area quadrati sit 5, vel $A + B$; ejusdem latus quodlibet per $\surd 5$, vel $\surd \overline{A + B}$ denotabitur.

$\surd c$ *Signum radicis cubicæ.* Sic $\surd c\,5$ est radix cubica numeri 5: Et $\surd c AqE$ est radix cubica quantitatis AqE; hoc est, si supponatur cubus solido AqE æqualis, erit $\surd c AqE$ linea recta, lateri ejusdem cubi æqualis; quæ nempe in sui ipsius quadratum ducta, ipsum cubum generat.

AMICE

AMICE LECTOR.

CUM multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hisce locis penuriâ laboratum esset, visum denique est ad usum studiosæ juventutis, cujus gratiâ hunc laborem qualemcunque suscepi, novam editionem adornare; in quâ quid præstitum sit, paucis accipe.

1. *Imprimis Geometriæ planæ ac solidæ elementa conjunxi, ne (ut fit plerumque) semper in planis tyrones hæreant; sed ab his transeant ad solida; quorum summe necessaria cognitio est.*

2. *Propositionum hypothesibus & assertionibus literas, parenthesi inclusas, quibus ad figuram referri possint, apposui: quod eo consilio feci, ne ante demonstrationem, iterum explicanda assertio, adeoque idem bis repetendum esset: & tamen literis a reliquo sensu parenthesi separatis, sua assertioni universalitas constaret. Assertionem igitur conveniet legere primùm literis prætermissis; tum si non intelligas, te literæ ad figuram ducent.*

3. *Propositiones aliquas prætermisi, quarum fere vel nullus usus est, aut certe non alius, quàm ut per eas demonstrentur aliæ, quas sine illis faciliori viâ poteram demonstare. Eosdem tamen propositionum retineo numeros, quos Euclides, ordinemque servo, quem bis mille annorum usus probavit.*

4. *Demonstrationes vel novas affero, vel antiquas breviores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem rarò prodest. Ea siquidem tardiores & hebetiores non juvat, subtilibus autem & ingeniosis molesta est.*

5. *Quamvis autem brevis esse studuero, existimavi*

mavi tamen, me a propositio non recedere, si ea adderem, quæ Geometriam discere volentibus futura usui videbantur. Itaque Corollaria & scholia adjunxi non pauca, quæ usu longo didici in elementis desiderari. Geometriæ practicæ fontes indico suis locis. Tum si quid illustre ad rem occurreret, non omisi. Varia deinde in quibus laboratum huc usque fuit, vel explicare vel demonstrare conatus sum.

6. *In libro primo parallelarum theoria demonstratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, sed theorema est, & quidem non nisi difficulter ac longo circuitu demonstrabile.*

7. *Secundum librum, in quo laborare multùm tyrones solent; disposui ad eum fere modum, quo jam analystæ scribunt æquationes suas. Quem si exacte tenere voluissem, fuisset quidem res brevior; sed minùs, ut arbitror, tyronibus accommodata.*

8. *In libro tertio ad prop.* 16. *paradoxa anguli contactûs, quæ hactenus torsere omnes, solvuntur.*

9. *In quinto libro, proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, satis spinosam, efficere planiorem conatus sum. Itaque primùm proportionum elementa faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus libri sextam definitionem, quâ proportionum æqualitas per multiplices explicatur, ostendi non definitionem esse, sed theorema, & quidem difficile & perobscurum; cujus etiam demonstrationem exhibemus, hactenus a nullo datam. Atque ita demonstrationes Euclideas quæ hinc ducuntur omnes, si quis forte illas præ nostris probationibus desideret, stabilivimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum assigno ac demonstro indicium universale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propositiones demonstrare potuissem, si hoc conducere discentibus judicassem. Postremò de proportionibus non pauca scitu ne-*

necessaria subjungo; ac imprimis demonstro axioma illud percelebre seu potius theorema, proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi; id quod hactenus in Geometriâ fuit desideratum.

10. *Librum duodecimum, cujus difficiles ac prolixæ demonstrationes discentibus terrori esse solent, aliâ viâ plus quàm decies breviori demonstravi. Quod ita se habere, qui hæc nostra cum Euclide ejusque commentatoribus contulerit. deprehendet.*

11. *In libris quarto, sexto, undecimo præstantur ea quæ universim supra indicavimus.*

12. *Denique selecta ex Archimede theoremata, aliâ similiter ac breviori viâ demonstrata adjunxi; eximiamque illius de cylindro ac sphærâ doctrinam postremis tredecim propositionibus adjectis, ampliavi; quibus inter cætera demonstro sesquialteram proportionem ab eo in cylindro sphærâque repertam, ab æquilatero cono eidem sphæræ circumscripto, tam in soliditate, quàm in superficie continuari. Euclidi porro Archimedea illa subnexui; non quasi adhuc elementa, sed quia subtilitate pariter atque usu eximia sunt; tum deinde ut Geometriæ candidatus intelligat, cùm maximi Geometræ inventa admiranda assequi sese viderit, nihil in Mathesi futurum tam subtile vel arduum, quod his instructus elementis percipere non possit.*

Tu hæc habe; & , si placuerint, lege ac disce; inventurus in his principia nobilissimæ, & forte omnium antiquissimæ scientiæ; quod ostendit tibi, quam subnecto,

HIS-

HISTORICA NARRATIO

De ortu & progressu Matheseos.

MATHEMATUM elementa tradituro, visum est de illorum origine ac præstantiâ præfari quædam, ut intelligant Matheseos candidati, cujusmodi ea scientia sit, cui se consecraturi sunt; & planum fiat adversùs eos qui, quæ ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis sint hæ disciplinæ, quas omnium ætatum sapientissimi viri incredibili studio sibi putaverint comparandas. Usui porro mihi fuit, in hac relatione concinnandâ, Petri Rami diligentia, qui scholarum toto primo libro bene magno Mathematicam Historiam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliisque accurate copioseque conscripsit.

Prima hominum scientia Mathesis fuit, si Josepho credimus. Is lib. 1. cap. 3. scribit Sethi nepotes Cœlorum ordinem ac Siderum cursus observasse. Ne autem hæc inventa ex hominum notitiâ dilaberentur, cùm Adamus universalem mundi interitum fore prædixisset, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam; & utrique sua inventa inscripserunt, ut si lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea superstes, hominibus discendi copiam faceret, & quæ inscripta continebat, spectanda exhiberet. Aiunt autem lapideam illam ab ipsis dedicatam, quæ & nostris temporibus extat in Syriâ. Hæc ille, penes quem fides esto.

Post

Post diluvium primos mortalium Assyrios & Chaldæos Mathemata coluisse tradunt idem Josephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæâ & Assyriâ ad Ægyptios translatæ sunt Auctore Abrahamo. Is enim cùm Deo jubente ex patrio solo in Palæstinam, ac deinde in Ægyptum profectus esset, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi studio, atque indole ad discendum egregiâ esse, ut apud eundem Josephum est lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Astronomiamque, quam præcedere Geometriam necesse fuit, communicavit. Quibus deinde studiis adeo Ægyptii floruere, ut Aristoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet Mathematicas artes primùm in Ægypto à sacerdotibus publicâ vacatione fretis inventas esse.

Exinde Mathesis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philosophos pervenit: Thales enim Milesius, qui ante Christum floruit annis 584. primus Græcorum cùm in Ægyptum venisset, Geometriam inde in Græciam transtulit. Is sane, præter alia, primi libri propositiones 5. 15. 26. invenit. Eidem debentur 2. 3. 4. 5. l. 4. cujus inventi lætitiâ elatus bovem immolasse dicitur. Idem Æquinoctia & Solstitia observare cœpit, Laertio teste; & Solis eclipsim, ut scribunt Hippias & Aristoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipsim Lunæ Regi Cyro prænunciasse. Quapropter hic primus in Græciâ Mathematicæ scientiæ parens atque Auctor fuit.

Post hunc Pythagoras Samius ille Philosophorum antiquissimus, Mathematicas disciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis prope illi ratio philosophandi ex numeris duceretur. Geometriam verò, ut refert

fert Laertius, à materiâ abstraxit primus; in quâ mentis elatione invenit 32. 44. 47. 48. lib. 1. Sed imprimis ob inventas 32 & 47 lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitiâ tantâ affectus est, ut teste Apollodoro apud Laertium, Hecatombem immolarit. Idem incommensurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Astrologiam & Musicam impense & docuit & exercuit. Neque solùm acute & subtiliter multa invenit, sed etiam ludum primus aperuit, in quo juventus tam honestas tamque nobiles artes addisceret.

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius secuti sunt, quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adolescentes de Anaxagorâ & Oenopide in circulorum descriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagorâ Geometriam quandam scriptam indicat Aristoteles; & ex Laertio accepimus ostensum ab eo Solem Peloponneso majorem (nota Astronomiæ incunabula,) eundemque de habitationibus in Lunâ nonnulla disputasse. Oenopidi adscribit Proclus 12. & 23. l. 1. Hos excepere Briso, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentatâ circuli quadraturâ, ab Aristotele reprehensi pariter & celebrati. Sed hos inter longe clarissimus Hippocrates fuit, ille è mercatore Philosophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam ut singularem & unicam omnis posteritas amplexa est. Illius etiam illa propria & magna laus est, quòd Proclo teste, elementa primus scripserit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philosophiâ solùm, sed etiam in Mathesi admirabilis fuit. Ejus tum Physica, tum forte etiam Mathematica monumenta perierunt invi-

vi-

vidiâ (ut quidam ferunt) Aristotelis, sua unius scripta cupientis legi. Democriti Philosophiam Petrus Gassendus eruditissimo opere nuper edito instauravit. Theodorus Cyrenæus, licèt ejus inventa Mathematica non extant, vel eo nomine magnus est, quòd Platonis Magister fuisse memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius splendorem majorem attulit Mathematicis disciplinis. Ille Geometriam maximis accessionibus amplificavit, studio incredibili in eam collocato. Et inprimis reperta est ab eo Analysis, certissima inveniendi & ratiocinandi via. Philosophiæ suæ libros, Mathematicis rationibus distinxit, ac quicquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philosophiâ esset, excitavit. Academiæ foribus inscriptum legebatur: οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω: *nullus Geometriæ expers accedito*: illustri sane argumento quàm non aliena sed propria, quàmque non inutilis, vel indecora, sed honesta & commoda Mathesis, sanæ certæque Philosophiæ sit. Quantus certe Plato Matheseos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academiâ prope innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares a Proclo commemorantur, quorum studiis Mathematica sit absoluta. Hinc Leodamas Thasius, Archytas Tarentinus, Theætetus Atheniensis; à quibus Mathemata egregie sunt amplificata. Leodamas Analysim à Platone acceptam exercuit, ejusque ope invenisse multa a Laertio dicitur. Theætetum tum inventa sua, inter quæ Elementa ab eo scripta & regularium corporum inscriptio celebrantur, illustrem faciunt, tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inscripsit.

Archytas Elementa scripsit etiam ipse, ejusque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa singularis fuit laus, quòd Mathematicam ad humanos usus traduxerit fere primus; unde & lignea columba ab eo facta volasse legitur apud Gellium. Quem secuti *Dædalus aliique artifices, fabulis poëtarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitûs Imperator, qui nimirum in patriis bellis, copiis civium suorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantùm nomen celebratur, Leonte fortassis discipulo illustrior quàm inventis suis. Leon sane Mathematicæ universæ elementa conscripsit, auxit, & ad usum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores suo merito censeri debet.

Eudoxus Cnidius superiorum æqualis, in Arithmeticis magnus, & (si Scholiastæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus; Elementa item conscripsit; & generaliora effecit, & sectiones a Platone inchoatas auxit; insuper Astronomicarum hypothesium primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, ut supra Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas Heracleotes & Menæchmus, ejusque frater Dinostratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Medmæus, omnes Platonici, Geometriam multò perfectiorem reddiderunt. Et Menæchmus quidem sectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cujus inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius & Hermotimus elementa fecerunt universaliora & auctiora. Atqui hi omnes ex Platonis Academiâ, Mathematicam Philosophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, &

* *Error: multis enim seculis post Dædalum floruit Archytas.*

& Aristotelis magister, ipseque Aristoteles cognitione Mathematum clari fuere. Illius cùm auditor quidam esse vellet Geometriæ imperitus, Abi, inquit, ansas enim Philosophiæ non habes.

De Aristotele verò quid dicam? libri illius omnes locis Mathematicis sunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Aristotelis scholâ duo præcipue celebrantur, Eudemus & Theophrastus. Hic scripsit de numeris libros duos, de Geometriâ quatuor, de lineis individuis unum: ille historiam Mathematicam condidit; ex quo Proclus aliique sua mutuati sunt. Aristæo, Isidoro, Hypsicli, Geometris subtilissimis, solidorum libros maxime debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonstravitque accuratiùs, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juventus instituitur. Obiit anno ante Christum 284. Euclidem secuti sunt centum fere post annis Eratosthenes & Archimedes. Eratosthenis clarum imprimis nomen fuit: sed ejus scripta periere [*quàm plurima, sed non omnia.*] Archimedis habemus multa, multa amisimus.

Sed Archimedem cùm nomino, apicem quendam humanæ subtilitatis, totiusque Mathematicæ disciplinæ absolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidere Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Astronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno sequitur Apollonius Pergæus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor [*imo septem*] Conicorum subtilissimi libri.

Eidem adſcribuntur Euclidis libri 14. & 15. ab Hypſicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo, hic 6. ille 12. libros primi conſcripſere, pro quo invento tam utili & neceſſario non parva utrique laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ utiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum [*Iſidorum, atque Hypſiclem*] excipias, ante Chriſtum vixere omnes.

Anno poſt Chriſtum 70. venit in lucem Claudius Ptolemæus, Aſtronomorum princeps, vir plane mirabilis, ſupraque (inquit * Plinius) naturam mortalium. Is verò non Aſtronomiæ tantùm, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur, tum alia multa ab eo ſcripta, tum in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6. Hipparchi verò 12. ab illo ad 5. theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi extant Mathematica problemata. Jam Eutocii Aſcalonitæ erudita in Archimedem [*& Apollonium*] commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tanquàm excellentium in Mathematicis Magiſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur. Et Heronis quidem tam in Mechanicis quàm in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certe duplicatio ab eo tradita, a Pappo l. 3. p. 7. laudatur præ omnibus. Cteſibii Alexandrini, cui antlias debemus noſtras, admiranda opera à Vitruvio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi Proclus in quibuſdam præpoſuit.

Diophantus, & ipſe Alexandrinus, in Arithmeti-

* *Error: Plinius enim Ptolemæo ætate prior erat.*

meticâ tantus fuit, quantus in Geometriâ Archimedes, Apollonius, Euclides; vere totius numericæ subtilitatis magister; a quo reperta sit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hisce temporibus a Francisco Vieta, & Renato Cartesio multò perfectior & universalior effecta est. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Musicis clarus monimentis; Serenus binis de cylindri [*& coni*] sectione libris, Geometris notissimus; Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus, ex doctissimis ejus in Euclidem commentariis, aliisque scriptis manifestum est. Atque hic, opinor, ille est, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, sub annum Christi 514. Vitaliani classem Constantinopolim obsidentis, optico speculorum artificio combussit*. Theonis laudes vere magnas mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, ut etiam libros; quos Euclidi hactenus adscripsere omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus; neque ullo solido nixus fundamento, hîc audiendus non erit. Ut finis aliquando sit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres [*fere*] postremus, ut qui vixerit circa annum 400. sed nominis claritudine, omnique laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypsiclem, Ctesibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheseos dedit. Scripsit collectionum Mathematicarum

* *Duos ejusdem nominis male confundit Tacquetus. Proclus enim Lycius, quamplurimis in Philosophiâ ac Mathesi scriptis clarus, anno Christi 485. e vitâ decessit, ac proinde diversus est ab illo Proclo, qui Anastasio imperante Vitaliani classem incendit.*

rum libros septem † a quibus duo primi perierunt*; Reliqui quinque § tam multis abundant, tamque variis, ex omni prope genere Mathematum nobilissimis inventis, ut inter prima quæ extant veterum monimenta, ab omnibus censeantur.

Habetis originis ac progressionis Mathematicæ historiam brevem. Ex quâ Matheseos antiquitas, præstantia, ac dignitas apparet. Sane Reip. litterariæ Principes iidem qui Philosophiam, etiam Mathematicam genuere, gemellas sorores partu velut uno, quas qui distrahere ab invicem violente velit, næ ille in nativam illarum concordiam, cum insigni injuriâ crudelis sit; quando, quod fieri in gemellis solet, uno vel loco vel morte sublato, languere, quin & contabescere alterum necesse sit.

† *Octo saltem.* * *Aut in Bibliothecis delitescunt.* §. *Sex.*

Ad Bibliopegum.

Tabulæ Æneæ 1. 2. 3. 4. 5. & 6. adjungantur post Paginam 330.

Bericht aan den Boekbinder.

De 6. Plaaten geteekent Tab. 1. 2. 3. 4. 5. & 6. moeten geplaatst worden na Pag. 330.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMUS.

SCIENTIÆ proprium munus est, ex notionibus quibusdam simplicissimis, rationali naturæ à conditore Deo impressis, elicere aliquid quod prius ignorabatur, atque inde rursum aliud ex alio; ut prior cognitio semper ad ulteriorem sit gradus. Quæ ratio si accurate teneatur, ex minimis & per se notis ad rerum abditissimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemque scientiæ, præ omnibus amplexæ sunt eæ disciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione versantur. Quo fructu id factum sit, sciunt omnes, qui hisce studiis imbuti sunt. Et sane Geometria (ut de aliis Matheseos partibus jam nihil dicam) mirum est, quàm brevi ex apertissimis ad obscurissima trahat, & ex humillimis ad altissima statim assurgat. Statuuntur primo simplicissima quædam facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus dissentire possit. Deinde nihil asseritur, vel admittitur, quod ex iis infallibili ratiocinio non sit deductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano sensu & cognitione remota, incredibili certitudine ac evidentiâ innotescunt.

Principiorum genera ex quibus Geometria omnis derivatur, sunt tria; *Definitiones*, *Postulata*, *Axiomata*.

V*Oluit autem Euclides in* primo *hoc elementorum suorum libro prima* Geometriæ *principia exponere. Quod ut ordine fieret*, Definitiones, *sive vocum usitatissimarum explicationem præmittit: hisce vero* Postulata *superaddit nonnulla, ab omnibus sanæ mentis facile concedenda. Postea* Axiomatis *illis clarissimis quibus, naturâ atque ratione ducibus, non possumus non assentiri omnes, propositis*, Demonstrationes *sive argumenta infallibilia ubique adhibet, ut veritatum Mathematicarum fidem vel à pervicacissimo Adversario, maximeque invito extorqueat. In primis autem de* Lineis, *variisque quos illæ concurrendo formant* Angulis *tractat: & propositionibus primis* 8. *de* Triangulis *planis agit: simulque* Angulorum *planorum naturam explicat. Post propositiones istas*, Angulos Lineasque *bisecandi*, *&* Perpendicula *sive excitandi sive demittendi methodum ostendit. Deinde verò alias* Triangulorum, *quin &* linearum *æquidistantium sive* Parallelarum *affectiones aperit. Hisce verò peractis*, *Quadrilaterorum*, *& speciatim* Parallelogrammorum *proprietates considerat*; *ostenditque qua ratione* Polygona, *sive figuræ multangulæ & irregulares ad rectangula, aut parallelogramma, aut etiam triangula, figuras nimirum magis notas atque regulares, reduci queant. Postremò autem agmen claudit celeberrimum illud Theorema Pythagoricum, ejusque conversum*: In omni Triangulo Rectangulo Quadratum Lateris quod recto angulo opponitur æquale esse duobus simul reliquorum laterum quadratis: Et, si quadratum unius lateris æquetur duobus simul reliquorum laterum quadratis, angulum illi lateri oppositum rectum esse.

DEFINITIONES.

1. PUnctum est signum in magnitudine individuum.

Hoc est, quod dividi ne cogitatione quidem possit.

Punctum omnis magnitudinis quasi principium est, sicut unitas numeri.

2. Linea est magnitudo tantum longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini sunt puncta.

Fig. 1. Tabula 1. 4. Recta linea est, quæ ex æquo suis terminis interjicitur.

Vel ut Archimedes: Recta linea est minima linearum eosdem terminos habentium; sive est omnium brevissima, quæ inter duo puncta duci possunt.

Vel ut Plato: Recta linea est, cujus extrema obumbrant omnia media. [*Oculo nimirùm in ipsa linea producta posito.*]

Unus omnium sensus est.

Instrumentum quo rectæ lineæ describuntur, regula est: quæ utrum recta sit, hoc examine licebit cognoscere.

Juxta regulam describatur linea; tum regulam inversam, sic ut extremitas prius dextra jam sit sinistra, rursum applica lineæ prius descriptæ: si plane cum illa congruat, recta est regula; si non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies est magnitudo tantum longa & lata.

Duas ergo habet dimensiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema sunt lineæ.

7. Planum, sive superficies plana est, quæ ex æquo inter suas extremas lineas jacet.

Vel

Vel ut Hero: Superficies plana est, cujus omnibus partibus recta linea accommodari potest.

Generatur enim superficies plana ex fluxu lineæ rectæ. [*Nimirum ex fluxu directo lineæ rectæ: alias enim fieri potest ut linea recta describat etiam superficiem curvam.*]

Vel, Plana superficies est, cujus extrema obumbrant omnia media. [*Oculo nimirum in ipsa superficie producta posito.*]

Vel, Plana superficies est minima omnium eosdem terminos habentium. Idem sensus est omnium.

Non definivit hic corpus, sive solidum Euclides, quia nondum hîc erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem desideret; Corpus est magnitudo longa, lata & profunda. Tres igitur dimensiones habet corpus, superficies duas, linea unam, punctum nullam.

8. Angulus planus est duarum linearum, in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Angulum igitur efficiunt duæ lineæ BA, CA se mutuò tangentes in A, sic ut non existant sibi mutuò in directum; hoc est, non efficiant unam lineam. *Fig. 2, 4.*

9. Latera seu crura anguli, sunt lineæ quæ angulum efficiunt.

10. Vertex anguli est punctum (A) in quo crura sibi mutuò occurrunt. *Fig. 2, 4.*

Cum angulus est unicus, una littera ad verticem posita designatur: Cum plures ad unum punctum existunt, designatur tribus litteris, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam subinde unica lateribus prope verticem interposita. Sic in figura 5. angulus qui fit à lineis BA, CA designatur vel litteris tribus BAC, vel unica O. *Fig. 5.*

11. Anguli æquales, [vel potius similes] dicuntur; si, cum sibi invicem vertices imponuntur, latera unius congruant lateribus alterius. Ad hoc non requiritur, ut latera sint æque longa. *Fig. 2, 5.*

12. Inæquales, [seu dissimiles] dicuntur anguli, cum vertice & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extra. Sic angulus BAE major est angulo BAC. [*Hanc autem & præcedentem def. de angulis rectilineis intellige. Vide def.* 13.] *Fig. 5.*

Angulus non minuitur vel augetur, licet crura minuas vel augeas.

Porro quia anguli natura in linearum inclinatione consistit, inclinatio autem linearum quantitas non est, neque angulus ullus quantitas erit. Et sane eodem jure curvitas esset quantitas, quo angulus, cum ab invicem non

 magis

magis differant, quàm inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliisque Geometris angulos æquales esse dicemus, nihil aliud, quàm inclinationum similitudo, hoc est, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re plenius dicturi sumus post propositionem 16. l. 3. [*Tacquetus hoc loco minus accurate de angulo disserere videtur. Angulus quidem non est* quantitas, *sed tamen* quantus *est, hoc est*, augeri *potest, vel* minui. *Duæ enim lineæ rectæ in puncto concurrentes*, plures *vel* pauciores *gradus divaricationis à se invicem habere possunt, adeoque & angulum* majorem *vel* minorem *constituere. Unde in definitionib.* 15. *&* 16. *angulus ille* obtusus *appellatur, qui recto* major *est; atque* acutus *qui recto* minor. *Angulus igitur quantitatis capax est, & alteri cuivis angulo propriè æqualis aut inæqualis esse dicetur. Eodem jure etiam curvitas est quantitatis capax, cùm una quavis linea (vel superficies) à linea recta (vel superficie plana) magis aut minus recedere, hoc est, magis aut minus curva possit esse quàm altera.*]

Fig. 2.4. 13. Angulus rectilineus est, quem rectæ lineæ efficiunt; curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva. [*Sed vide quæ ad coroll. post prop.* 16. *lib.* 3. *adjecimus.*]

Fig. 6. 14. Cùm recta (CA) super rectam (BF) consistens, in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrinque facit æquales (CAB & CAF,) rectus est uterque æqualium angulorum: Recta autem (CA) alteri insistens dicitur perpendicularis, seu perpendiculum.

Angulus rectus sic etiam definiri potest.

Fig. 6. Rectus angulus is est (BAC,) cui à parte altera æqualis oritur (CAF,) si unum latus (BA) produxeris.

Duæ regulæ sic compactæ ut angulum rectum contineant, Instrumentum efficiunt, quod Norma appellatur. Illius inventorem Vitruvius c. 2. l. 9. affirmat Pythagoram. Tanta vero anguli recti vis est in rebus omnibus construendis, dimetiendis, formandis & firmandis, ut nihil fere effici sine illo possit. Normæ Examen sic instituitur: In quavis recta BF, sumpto puncto A, Normæ latus AE applica rectæ lineæ AF, & juxta latus alterum describatur recta CA; conversa deinde Norma versus B, si utroque latere congruat rectis CA, AB, scito esse legitimam & exactam. Ratio patet ex ipsa def. 14.

Fig. 7. 15. Obtusus angulus est (BAC,) qui recto (FAC) major est.

Fig. 8. 16. Acutus angulus est (LAI) qui recto (FAI) minor est.

17. Fi

17. Figura plana, est superficies plana, una vel pluribus lineis undique terminata.

18. Circulus est plana superficies, unius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, à qua, ad aliquod punctum intra contentum (A,) omnes quæ duci possunt rectæ lineæ, sunt æquales. Fig. 9.

19. Hoc verò punctum centrum appellatur.

20. Diameter circuli est recta per centrum ducta (BC,) ad circumferentiam utrimque terminata, & circulum bifariam dividens; [*ut ex omnimoda semicirculorum sibi invicem superimpositorum congruentia abundè liquet.*] Fig. 9.

21. Semidiameter, sive radius, est recta (AF,) ex centro ad circumferentiam ducta. Fig. 9.

22. Semicirculus est figura (BLC) comprehensa à diametro (BC) & dimidia circumferentia (BLC.) Fig. 9.

Circulus ita generatur: Si recta linea (AB) uno extremo suo (A) manente fixo, in orbem circumagatur; recta ipsa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. Fig. 9.

Porro mira circuli indoles vel in ipso exortu suo apparet. Ad ejus namque genesim contraria concurrunt, motus & quies, dum linea movetur, & ejus extremum quiescit. Dein lineæ generantis puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodos absolvant, diversa celeritate moventur. Tertio peripheria circulum ambiens, constat quodammodo ex contrariis & extremis sine medio; ex concavo nimirum & convexo, inter quæ rectum ita medium est, ut æquale inter majus & minus; idque eo mirabilius est, quod ea contraria insint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Aristoteli visa sunt admiranda, ex quo illa deprompsimus. At prodigia circuli longe majora aperuimus in dissertatione Physico-Mathematica, quam una cum Cylindricis & Annularibus in lucem emisimus anno 1652. Isthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri solent in 360. æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: semicircumferentiam in 180. quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura, est superficies plana, rectis lineis undique terminata.

24. Triangulum, sive trilaterum, est plana superficies tribus rectis comprehensa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac simplicissima est, in quam cæteræ omnes resolvuntur.

25. Triangulum æquilaterum est, quod tria latera habet æqualia. Fig. 10.

26. Triangulum Isosceles, seu æquicrure, quod duo tantum latera habet æqualia. Fig. 11, 12.

Fig. 13. 27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.

Fig. 13. 28. Rectangulum triangulum est, quod unum angulum habet rectum.

Fig. 12. 29. Obtusangulum triangulum est, quod unum angulum habet obtusum.

Fig. 10, 11. 30. Acutangulum triangulum est, quòd tres habet acutos angulos.

Fig. 14, 15. 31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum est, quod quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales; sive latera æqualia sint, sive non.

Fig. 15. 32. Quadratum est, quod æquilaterum & rectangulum est, ac proinde æquiangulum.

Omne quadratum est rectangulum, sed non contra.

Fig. 16. 33. Rhombus est, qui æquilaterus, sed non æquiangulus est.

Fig. 17. 34. Rhomboides, quæ adversa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula est.

Fig. 14, 15, 16, 17. 35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera (AB, FC, & BF, AC) sunt parallela. Quid vero sint parallelæ, dicetur seq. defin.

Omne rectangulum & quadratum est parallelogrammum, ut suo loco demonstrabitur; sed non contra.

Fig. 18. 36. Rectæ lineæ parallelæ seu æquidistantes sunt, quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum protractæ, æqualibus semper intervallis inter se distant.

Æqualia intervalla desumuntur penes perpendiculares. Quare si omnes ad unam ex duabus parallelam AB perpendiculares QL, æquales fuerint, dicentur rectæ AB, CF parallelæ.

Generantur parallelæ, si recta LQ ad rectam AB perpendicularis, per AB semper perpendiculariter moveatur: tunc enim ejus extremum L describit parallelam CF.

Euclides definit parallelas esse rectas lineas, quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verum quia dantur lineæ quæ simul in infinitum productæ, licet ad se mutuò appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non sint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cujusmodi sunt Hyperbola & recta linea; conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundem axem descriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per se notum esse, duas rectas, licet nunquam concurrant, fore semper æquali intervallo dissitas, hoc est æquidistantes: posset enim quispiam objicere; fieri fortassis posse, ut etiam ipsæ, licet ad se mutuò semper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent.

Quare

Quare Euclidea definitio parallelismi naturam non satis explicat. [*At non necesse est ut definitio Mathematica naturam rei definitæ explicet: est enim definitio nominis, non rei. Cum igitur Euclides eas rectas lineas nominaverit* parallelas, *quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt; & cum semper postea in hoc sensu parallelas usurpaverit; cum denique eas definiverit per proprietatem ejusmodi, quæ nullis rectis nisi verè parallelis seu æquidistantibus convenit, non video quo jure culpari possit.*]

37. Parallelogrammi & cujusvis quadrilateri diameter, [*sive diagonalis,*] est recta (AF) per angulos oppositos ducta. *Fig.* 17.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus quam quatuor comprehensæ, multilateræ, seu multangulæ, seu Græca voce, polygonæ vocantur.

39. Rectilineæ figuræ externus angulus est, qui latere producto extra figuram oritur. Tales sunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura quælibet habet externos angulos, quot latera & angulos internos. *Fig.* 18.

[40. *Quando linea vel angulus vel figura quævis* bisecari *vel* bifariam secari *dicitur; intellige illorum quodvis in duas æquales partes esse divisum: Item* trisecari, *vel* trifariam secari *dicitur id quod in tres partes æquales dividitur; atque ita porro.*]

Postulata.

Postulatum, est quod facile fieri posse per se sit manifestum. Postuletur ergo ut concedatur.

1. A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.
2. Rectam lineam terminatam, in directum & continuum protendere.
3. Quovis centro ad quodvis intervallum circulum describere.

Axiomata.

Axioma est sententia per se manifesta.

1. Quæ eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Et, quod uno quovis æqualium majus aut minus est, majus quoque aut minus est altero æqualium.
2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.
3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ ejusdem [*vel æqualium*] dimidia sunt, inter se sunt æqualia: & quæ ejusdem [*vel æqualium*] sunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter se æqualia sunt. [*Item, inæqualium dimidia; vel dupla, tripla, &c. inæqualia erunt.*]

7. Quæ mutuò sibi congruunt æqualia sunt.

Non rectè Clavius hoc Axioma convertit. Falsum est enim, ea quæ universim inter se æqualia sunt, sibi mutuò congruere: Dissimiles enim magnitudines possunt esse æquales, neque tamen congruunt. Quod si similes & æquales fuerint, valebit conversa. Statuamus igitur axioma.

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, sibi mutuò congruent; & anguli [*rectilinei*] si æquales fuerint, sibi mutuò congruent. [*Et si circuli æquales fuerint, sibi mutuò congruent; & si ejusdem circuli, vel æqualium circulorum arcus fuerint æquales; sibi mutuò congruent arcus isti: Aut si quadrata, vel alia quæcunque figuræ similes æquales fuerint, sibi mutuò congruent.*]

9. Totum sua parte majus est: [*æquale autem est omnibus partibus suis simul sumptis.*]

10. Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

Fig. 20. Euclidis axioma undecimum est: Si in duas rectas (AB, CF) incidens recta (GI) angulos ad eandem partem interiores (BLQ. FQL) fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ si protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam spectant anguli duobus rectis minores. Hoc verò non est clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipse demonstrat: videlicet; si anguli (BLQ, FQL) fuerint duobus rectis æquales, rectæ (AB, CF) nunquam concurrent. Quare axioma illud è principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliisque Geometris rejecimus; est enim non axioma, sed theorema, idque demonstrabimus post Propositionem 31. hujus libri. Ejus loco alia duo sequentia substituo, quorum veritas ex definitione parallelismi statim apparet. Esto igitur axioma. *In defin.* 36.

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur. Hoc est, recta, quæ ad parallelarum unam est perpendicularis, est quoque perpendicularis ad alteram.

Fig. 21. 12. Perpendicula bina (LO, QI) ex parallelis æquales utrimque intercipiunt partes (LI, OQ.)

[*Euclidis axioma undecimum (proprietatibus parallelismi demonstrandis inserviens,) cuilibet perpendenti satis manifestum videtur. Quia vero Tacqueto libuit Euclideam Parallelarum*

larum Definitionem loco movere, eique novam subrogare, æquum erat ut in Axiomatis hujus Euclidei locum, nova etiam axiomata duo, definitioni suæ Parallelarum magis accommoda substitueret.]

13. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Ad hoc siquidem opus est ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere segmentum commune: & omnes rectæ punctualiter se intersecant.

Rectæ AX occurrat recta ZD. ea si producatur non perget per DA, sed in E, sic ut rectam XA non nisi punctualiter intersecet. Axioma ex notione ipsa rectæ lineæ evidentissimum est. [*Imo vero ex ipsa definitione lineæ, quæ magnitudo tantum longa est, absque latitudine, satis patet omnes omnium linearum, sive rectarum, sive curvarum, seu denique recta & curva intersectiones, puncta esse.*] *Fig.* 22.

Tamen quia nonnulli tam subtiliter philosophantur, ut credant rectas lineas, aliqua sui parte commisceri posse, lubet in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, si fieri potest, duæ rectæ AX, AZ partem communem AD. Centro A describatur circulus, secans rectas in B & C. tum accipiatur arcus BF æqualis arcui BC, & intelligatur ducta esse recta FA.

Rectæ igitur CA & FA eundem prorsus situm habent respectu rectæ BA. Sed recta CA cum recta BA habere dicitur commune segmentum DA: ergo etiam recta FA habet cum BA commune segmentum DA.

Tres jam igitur rectæ CA, BA, FA commune DA segmentum habent.

Sumatur rursum arcus FG æqualis prioribus BF, & CB, & intelligatur ducta esse recta GA. Rursum liquet rectas BA, GA, eundem habere situm respectu rectæ FA. Sed jam ostensum est rectam BA habere cum recta FA commune segmentum DA. Ergo etiam recta GA cum FA commune habet segmentum DA.

Jam ergo rectæ quatuor CA, BA, GA, FA commune DA segmentum habent. Eodem prorsus modo ostendam, si per totam circuli circumferentiam sumantur arcus prioribus æquales, omnes simul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemque habituras commune segmentum DA. Hoc tam immane absurdum sequitur ex eo, quod ponerentur binæ rectæ CA, BA habere segmentum commune. Impossibile est igitur ut duæ rectæ segmentum commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in scholis argumenti, quo demonstratur magnitudinem ex punctis om-

omnino indivisibilibus numero finitis componi non posse: & est ejusmodi. Constent, si fieri potest, magnitudines ex punctis. Circa idem centrum descriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima seu maxima componi ex centies mille punctis, à quibus singulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum est, rectas illas nusquam commisceri, nisi in centro solo. Quare dum omnes medias peripherias pertranseunt, in iis æque multa designant puncta, ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æque multis punctis constant, ac proinde omnes inter se æquales erunt. Atque ita circumferentia hac in charta descripta, æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis prope innumeris demonstrationibus hic error obruitur. Sed unam illam hoc loco attuli præ cæteris, quod passim sit decantata, & ex præsenti axiomate immediate pendeat.

[15. *Æqualium circulorum diametri erunt æquales; ut & eorum semidiametri sive radii æquales erunt. Et, si duorum circulorum radii (aut diametri) æquales fuerint, circuli erunt æquales. Idem puta de æqualium quadratorum lateribus & diametris; aut de quarumcunque figurarum similium & æqualium lateribus & diametris* (a) *homologis: & conversim, ex æqualitate homologorum laterum aut diametrorum, concludes figurarum similium æqualitatem.*

(a) *Vide def.* 11. *l.* 5. & *def.* 1. *l.* 6.

16. *Porro etiam, majoris circuli diameter major est, minoris minor: & vicissim. Idem puta de quadratorum inæqualium lateribus aut diametris; nec non de figurarum quarumcunque similium & inæqualium lateribus & diametris homologis: & vicissim.*]

Propositionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in sola contemplatione sistunt, quæ idcirco Theoremata inscribuntur.

PROPOSITIONES.

Citationes requisitæ reperiuntur ad marginem. Cùm citantur propositiones, primus numerus designat propositionem, littera (*l*) cum numero sequenti librum denotat: ut si occurrat (*per* 5. *l.* 3.) ita leges; (per propositionem quintam libri tertii.) Figura quærenda semper est inter figuras ejus libri, in quo tum versamur: citationes reliquæ facile intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propositiones illustriores sunt 32, 35, 37, 41, 44, 45, 47.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Super data recta (AB) triangulum æquilaterum constituere. Fig. 23.

Centro A, intervallo AB (*a*) describatur circulus FCB; & centro B, intervallo eodem BA describatur circulus ACL, priorem secans in puncto C, ex quo ducantur rectæ CA, CB. (a) Per postul. 3.

Dico triangulum ACB factum esse æquilaterum. Nam recta AC est (*b*) æqualis rectæ AB, cum sint ejusdem circuli FCB semidiametri; & recta BC etiam æqualis est eidem rectæ BA, cum ambæ sint semidiametri circuli LCA. Ergo AC, BC (*c*) sunt æquales inter se: ac proinde omnia latera trianguli sunt æqualia. Ergo triangulum ACB & (*d*) æquilaterum est, & super data recta AB constitutum, quod erat faciendum. (b) Per def. 18. (c) Per axio. 1. (d) Per def. 25.

PROPOSITIO II.

Ad datum punctum (A) data recta (EF) æqualem ponere. Fig. 24.

Accipe circino (*e*) intervallum EF, & transfer ex A in D, erit recta AD par datæ EF. (e) Postul. 3.

PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis inæqualibus, de majore (GH) minori (EF) parem auferre (GI.) Fig. 24.

Accipe circino (*f*) intervallum minoris datæ EF, & transfer in majorem ex G in I. (f) Postul. 3.

PROPOSITIO IV.

Si duorum triangulorum (X, Z) latus unum (BA) uni (FL) & alterum (CA) alteri (IL) sit æquale, angulique (A & L) ab illis lateribus facti, etiam sint æquales; æquabuntur etiam & bases (BC, FI,) & tota triangula (X, Z,) & reliqui ad basim anguli (B, F & C, I) qui lateribus æqualibus opponuntur. Fig. 25.

Nam

(a) Per axio. 8.

Nam si intelligamus triangulum Z triangulo X superponi, latera LF, LI perfecte congruent (*a*) sibi æqualibus lateribus AB, AC, sic ut puncta tria L, F, I, cadant supra tria puncta A, B, C. Ergo tum etiam basis FI tota cadet supra totam basim BC. Sed & anguli F, B, itemque I, C, totàque triangula sibi mutuò tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Fig. 25.

SImili fere ratiocinio, theorema sequens, cujus mox erit usus, licebit demonstrare.

Si duorum triangulorum X, Z, latera BC, FI æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B & C ipsis F & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipsa, æqualia erunt.

(b) Per axio. 8.
(c) Per axio. 8.

Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F & I, si latus FI imponas lateri sibi æquali BC, illi (*b*) congruet. Tum vero ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C, etiam (*c*) FL cadet supra BA, & IL supra CA. Ergo etiam punctum L incidet in punctum A; (si enim caderet extra A, latera FL, IL non inciderent in latera BA, CA.) Ergo omnia sunt per axioma 7. æqualia.

PROPOSITIO V.

Fig. 26.

TRianguli Isoscelis seu æquicruris ad basim anguli (A, C) æquales sunt.

(d) Per 4. 1.

Intelligatur triangulum ABC bis positum; sed situ converso *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *c b a*, ex hypothesi æquale est latus AB, lateri *c b*, & latus CB lateri *a b*, & angulus B angulo *b*; etiam (*d*) ad basim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonstrandum. Iidem enim sunt anguli C & *c*.

Corollarium.

ÆQuilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum est.

PRO-

PROPOSITIO VI.

SI *in triangulo* (*ABC*) *duo anguli* (*A & C*) *æquales fuerint, etiam latera* (*AB, BC*) *iis opposita, æqualia erunt.* Fig. 26.

Intelligatur triangulum ABC bis positum; sed situ converso *cba*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *cba* æquatur latus unum AC uni lateri *ca*, & angulus A angulo *c*, & angulus C angulo *a*; etiam reliqua omnia (*a*) erunt æqualia, ac proinde latus AB æquabitur lateri *cb*; quod erat demonstrandum. Eædem enim sunt lineæ CB & *cb*.

(a) Per Schol. prop. 4.

Corollarium.

ÆQuiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum est.

PROPOSITIO VII.

EST *propter* 8. *quæ sine illa seorsim proposita demonstrabitur.*

PROPOSITIO VIII.

SI *duo triangula* (*X, Z*) [vel X, Y] *habuerint omnia latera sibi mutuò æqualia* (*AC ipsi EF; CB ipsi FI; AB ipsi EI;*) *etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppositos habebunt æquales* (*C ipsi F; A ipsi E; B ipsi I.*) Fig. 27.

Ponatur enim latus AB supra sibi æquale EI, [*ita ut punctum A coincidat cum E, ac B cum I, & reliqua latera cadant ad eandem partem rectæ AB vel EI.*] Tum vero punctum C, vel incidet in punctum F vel non. Si incidat in F, tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli (*b*) æquales erunt. *Cadet vero punctum C in punctum F. Nam*

(b) Per ax. 7.

Centro E, semidiametro EF, describatur circulus; & centro I, semidiametro IF, describatur circulus. Punctum C ob latera

tera æqualia erit in circuli utriusque circumferentia; atque adeo in utriusque circumferentiæ communi intersectione F. Q. E. D.

Fig. 28. (a) Per 5. l. 1. (b) Per 5. l. 1.

Si C cadat extra F, ducatur FC. Quoniam per hypothesim latera EF, AC æquantur, erit (*a*) angulus EFC par angulo ECF. Ergo IFC major erit quam ECF. Ergo IFC multò major erit quam ICF. Rursum, quia per hypothesim IF, BC æquantur, erit IFC (*b*) par ICF. Ergo IFC & multò major est quam ICF, & æqualis, quod est impossibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo, &c.

Plures casus, quos hoc theorema admittit, consultò prætermisi, ne tyrones fatigarem. Neque verò difficulter eorum demonstratio ex demonstratione jam posita elicietur.

PROPOSITIO IX.

Fig. 29.

Datum angulum rectilineum (IAL) bifariam secare.

Ex lateribus anguli accipe circino æquales AB, AC; centris B ac C describe duos æquales circulos se secantes in F, ducaturque recta FA. Hæc angulum bisecabit.

(c) Per axio. 15. (d) Per 8. l. 1. (e) Per def. 9.

Ducantur enim BF, CF; triangula FAB, FAC sunt sibi mutuò æquilatera; nam latera AB, AC ex constitutione æqualia sunt, & latera BF, CF, quia (*c*) æqualium circulorum semidiametri, etiam æquantur; & AF utrique triangulo commune est. Ergo anguli BAF, CAF (*d*) æquales sunt. Bisectus (*e*) est ergo datus angulus IAL, quod erat faciendum.

Corollarium.

Hinc patet quomodo angulus secari possit in æquales angulos 4. 8. 16. &c. singulas nimirum partes iterum bisecando.

Scholium.

Methodum secandi angulos in æquales quotcunque, circino & regula hactenus nemo docuit.

Ex Pappo tamen & Archimede habemus curvas quasdam lineas, quadratricem videlicet & spiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli trisectio perficitur à Pappo l. 4. prop. 31. præsidio hyperboles, quod etiam obtineri potest ope parabolæ, vel conchoidis.

Mecha-

Mechanice datum angulum in quotcunque secabis æquales angulos, si ex anguli vertice A tanquam centro intra anguli crura arcum describas, eumque dividas in quot placuerit æquales partes; rectæ enim ex A per divisionum puncta emissæ, angulum secabunt in partes totidem æquales. Fig. 30.

PROPOSITIO X.

Datam rectam finitam (AB) secare bifariam. Fig. 31.

Super data AB fac triangulum æquilaterum (*a*) AGB, [*vel etiam isosceles æqualium crurum AG, BG.*] Angulum ejus G (*b*) biseca per rectam GC. Eadem bisecabit rectam AB datam.

Nam in triangulis X, Z, latus CG est commune, & per constructionem GB, GA æqualia, angulique iis contenti AGC, BGC æquales. Ergo bases AC, BC (*c*) æquantur. Bisecta (*d*) est ergo data AB. Quod erat faciendum.

Pro praxi satis erit centris A & B duos æquales circulos describere, se secantes in G & L, ac ducere rectam GL.

(a) *Per* 1. *l.* 1.
(b) *Per præced.*
(c) *Per* 4. *l.* 1.
(d) *Per def.* 40.

PROPOSITIO XI.

Ex dato puncto (A) in data recta (LI) perpendicularem excitare. Fig. 32.

Circino cape æquales AC, AF. Centris C & F describe duos æquales circulos se secantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducantur enim CB, FB. Triangula X & Z sibi mutuo æquilatera sunt [*propter latus AB commune, latera AC, AF æqualia per constructionem, & latera BC, BF æqualia per axio.* 15.] Ergo anguli CAB, FAB (*e*) æquales sunt. Ergo BA (*f*) perpendicularis est. Ex dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.

Praxis tum hujus quam sequentis expeditur facillime præsidio normæ.

(e) *Per* 8. *l.* 1.
(f) *Per defin.* 14.

PROPOSITIO XII.

Fig. 33. *EX dato extra rectam infinitam (LQ) puncto (A) perpendicularem ducere.*

Centro A describe circulum, qui secet datam LQ in C
(a) Per 10. l. 1. & I. Rectam CI biseca (*a*) recta AB. Ea erit perpendicularis.

Ducantur enim AC, AI. Quoniam per constructionem
(b) Per 8. l. 1. triangula X & Z sunt sibi mutuò æquilatera; erunt anguli (*b*) CBA, IBA æquales. Ergo AB perpendicularis (*c*) est. Ex
(c) Per def. 14. dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 34. *REcta (BA) super rectam (CF) consistens, aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.*

Nam si BA insistat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli BAC, BAF utrimque recti. Si vero BA insistat o-
(d) Per 11. l. 1. blique, excitetur (*d*) perpendicularis AL. Quia tum anguli inæquales CAB, FAB eundem locum occupant, quem duo
(e) Per axio. 7. recti CAL, LAF, ac proinde iis congruunt, erunt (*e*) his illi æquales. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

1. EOdem modo demonstrabitur, si plures rectæ quam una, eidem rectæ ad idem punctum insistant, angulos effici duobus rectis æquales.

Fig. 37. 2. Duæ rectæ se invicem secantes BAC, FAL efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propos.

Fig. 36. 3. Omnes anguli circa unum punctum constituti, conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. sunt enim quatuor recti in plures partes secti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *SI duæ rectæ (XR, ZR) ad idem utrimque punctum rectæ QR faciant angulos (XRQ, ZRQ) duobus*

duobus rectis æquales; (XR, ZR) unam rectam efficient.

Si negas, faciant XR, BR unam rectam. Ergo anguli XRQ, QRB (*a*) conficient duos rectos, quod (*b*) est absurdum, cùm ex hyp. XRQ, QRZ duos rectos efficiant. (a) *Per* 13. *l.* 1. (b) *Contra axio.* 9.

Coroll. *Hinc in Catoptrica colligimus lucis radium, inter reflectendum, per angulum reflexionis angulo incidentiæ æqualem tendentem, per viam omnium brevissimam ferri. Ubi nempe anguli BED, AEF æquantur, linea AE & EB simul sumptæ, lineis quibuscumque, puta AF & FB simul sumptis sunt breviores. A puncto enim B* (c) *demittatur linea perpendicularis BC: & fiant BD & CD æquales: ducantur etiam EC & FC. In triangulis BED & CED, cùm latus DE sit utrique commune, & latus BD lateri DC ex constructione æquale, Angulus etiam BDE angulo CDE* (d) *æqualis;* (e) *æquabuntur reliqua omnia; eritque BE æqualis CE, angulusque BED angulo DEC æqualis. Et, si æqualibus BE, CE addatur EA, erit summa linearum BE & EA æqualis summæ linearum CE & EA. Et cum ex hypothesi æquentur anguli BED, AEF; & angulus BED antea ostensus sit æqualis angulo DEC; ergo & angulus AEF æquatur* (f) *angulo DEC; & addito communi angulo DEA, summa angulorum DEA, DEC æquabitur summæ angulorum DEA, AEF. Sed anguli DEA, AEF conficiunt* (g) *duos rectos. Ergo & anguli DEA, DEC sunt duobus rectis æquales, & proinde (per hanc prop.) lineæ AE, EC unam rectam CA efficiunt, quæ ex ante demonstratis, æquatur summæ rectarum AE & EB.* *Fig.* 37. (c) *Per* 12. *l.* 1. (d) *Per def.* 14. (e) *Per* 4. *l.* 1. (f) *Per axio.* 1. (g) *Per* 13. *l.* 1.

Eodem modo in triangulis BDF, CDF, demonstrabitur æqualitas linearum BF & CF; itemque addito communi AF, ostendetur summam linearum AF & FB, summæ linearum AF & FC æqualem esse. Sed CA, (hoc est, summa linearum AE & EB) minor est quàm summa linearum AF & FC, (hoc est, quàm summa linearum AF & FB) per definitionem rectæ lineæ, quæ minima est omnium quæ inter puncta A & C duci possunt. Ergo lineæ AE & EB simul sumptæ, lineis AF & FB simul sumptis sunt breviores. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

SI duæ rectæ (BC, FL) se secuerint (in A,) erunt anguli ad verticem (A) oppositi, æquales. *Fig.* 38.

Nimis

Nimirum LAB ipsi CAF, & BAF ipsi LAC. Nam quia BA insistit rectæ LF, erunt LAB, FAB (*a*) pares duobus rectis. Et quia FA insistit rectæ BC, erunt (*b*) quoque FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo (*c*) duo simul LAB, FAB æquantur duobus simul CAF, FAB. Ablato igitur communi FAB, remanent (*d*) æquales LAB, CAF. Eodem modo ostendam æquales esse BAF, LAC.

(a) Per 13. l. 1.
(b) Per eand.
(c) Per axio. 1.
(d) Per axio. 3.
Fig. 39.

Coroll. *Hinc illi qui sphærulis eburneis & proinde elasticis ludunt, pilam adversariam repercutiendo amovere discant. Sit sphærularum altera impellenda B, altera qua impellenda est A; Latus verò rectilineare CD: Esto linea BE linea CD* (e) *perpendicularis, & sit DE æqualis BD, & ducatur recta AE secans CD in F, & jungatur BF. Si pila secundum rectam AFE impellatur, ad punctum E ita reflectetur, ut post reflexionem ad B tendat. In triangulis enim BFD, EFD, Latus FD, est utrique commune, & Latus DB lateri DE æquale, & anguli ad D æquales sive recti. Tota itaque triangula* (f) *æquantur: & proinde angulus BFD angulo DFE, sive ad verticem opposito* (g) *AFC æqualis est. Angulus autem AFC est angulus incidentiæ, & Angulus BFD angulus reflectionis: qui cum in omnibus corporum perfecte elasticorum reflectionibus sibi invicem æquentur, liquet pilam A elasticam versus E tendentem, ad pilam B post reflectionem pergere, eamque impellere debere. Q. E. D.*

(e) Per 12. l. 1.
(f) Per 4. l. 1.
(g) Per 15. l. 1.

PROPOSITIO XVI. XVII.

C*Ontinentur in prop.* 32. [Et in ejusdem prop. corollariis demonstrantur.] *Neque ante illam adhibentur.*

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 40.

I*N omni triangulo, angulus (A) major est, qui majori lateri (BO) opponitur: (B) minor, qui minori (AO.)*

Nequit A esse par B, aliàs (*h*) latera BO, AO æquarentur, contra hypothesim. Neque etiam A minor esse quàm B. Nam si A minor est, B major, poterit intra angulum B, per rectam BF, fieri angulus ABF æqualis A. Tum verò per 6. æquales erunt BF, AF, & si addas utrique OF, erunt BF, FO æquales AO. Sed AO per hyp. minor est quàm

(h) Per 6. l. 1.

quàm BO. Ergo etiam BF, FO minores sunt quàm BO, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ est omnium brevissima. Angulus igitur A nec minor est angulo B, nec æqualis. Ergo major; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

In omni triangulo, latus (BO) majus est, quod opponitur majori (A) angulo: (AO) minus, quod minori (B.) Fig. 40.

Est conversa prioris. BO non est minus quàm AO, aliàs, per 18. angulus A esset minor angulo B, contra hyp. Neque etiam BO æquale est AO, aliàs per 5. anguli A, B æquarentur, rursus contra hyp. Ergo BO majus est quàm AO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo quælibet latera reliquo sunt majora.

Est Archimedi instar axiomatis; immediatè siquidem patet ex definitione Archimedeâ lineæ rectæ, quàm vide supra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

Si à terminis unius lateris (AB) intra triangulum duæ rectæ jungantur (AO, BO;) hæ lateribus trianguli (AC, BC) minores sunt, majorem verò angulum (AOB) comprehendunt. Fig. 41.

1. Pars. Produc AO in F. AC, CF sunt (a) majores quàm AF. Additâ ergo communi FB, erunt AC, BC majores quàm AF, FB. Rursum OF, BF sunt (b) majores quàm OB. Additâ ergo communi AO, erunt AF, FB majores quàm AO, OB. Ergo AC, CB sunt multò majores, quàm AO, OB.

(a) Per 20. l. 1.

(b) Per eand.

2. Pars demonstrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Eâ interim non utemur.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 42. *EX datis tribus rectis (BO, LB, LO) quarum duæ qualibet reliquâ sint majores, triangulum constituere.*

Assumatur datarum una BL, atque unâ ejus extremitate B acceptâ pro centro, intervallo alterius datæ BO describatur arcus.

Deinde acceptâ pro centro extremitate alterâ L, intervallo tertiæ LQ describatur arcus priorem secans in O: ducanturque rectæ BO, LO. Dico factum.

Demonstratio patet ex constructione.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 42. *AD datum in rectâ punctum (B) angulum efficere æqualem dato (A.)*

Ducatur utcumque CF secans latera dati anguli A. In datâ rectâ ex B accipe BL parem AF. Centro B intervallo AC describe circulum: item alium centro L intervallo FC qui priorem secet in O. Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus LBO par dato A.

Nam per constr. triangula sibi mutuò sunt æquilatera. Ergo per 8. anguli B & A sunt æquales.

Fig. 43. Cor. 1. *Hinc lineam inaccessam AB metiri licet. A puncto enim quocumque C observetur angulus ACB, & mensurentur lineæ AC, BC: & in plano quocumque accessibili, ad punctum F, super rectâ infinitâ EF, fac angulum angulo C æqualem, & mensurentur lineæ FD, FE, lineis AC & BC respectivè æquales; & jungatur DE: Erit hæc æqualis lineæ inaccessæ AB. Nam in triangulis ACB, DFE, propter latera AC, CB lateribus DF, FE respectivè æqualia, & angulum C angulo F æqualem, erit* (a) *basis AB basi DE æqualis.*

(a) Per 4. l. 1.

Fig. 44. Cor. 2. *Hinc etiam aliâ ratione, Thaletem secuti, lineam inaccessam metiri discimus. Sit linea inaccessa AD cui ad extremum ejus punctum A* (b) *erigatur perpendicularis AC, & capiatur angulus ACD, eique ex alterâ parte lineæ AC,* (c) *æqualis constituatur angulus ACB, &* (d) *producantur*

(b) Per 11. l. 1.
(c) Per hanc pr.
(d) Per postul. 2.

DA,

DA, CB donec concurrant in B. Linea AB accessibilis, erit lineæ inaccessæ AD æqualis. Nam in triangulis ABC, ADC, ob CA ipsi BAD perpendicularem, anguli ad A sunt recti, & proinde æquales; & anguli ad C sunt æquales per constr. & latus AC commune. Ergo (a) *omnia reliqua erunt æqualia, & latus AB lateri AD æquale erit.* (a) Per Schol. post p. 4. l. 1.

Scholium.

IN gratiam tyronum visum est hîc nonnulla ad praxim angulorum necessaria proponere.

Anguli mensura est circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tanquam centro describitur, ut patebit ex prop. ultimâ lib. 6. Fig. 45.

Itaque quot gradus continebit arcus BC inter anguli BAC crura interceptus, tot graduum dicetur esse angulus BAC. Et quoniam rectum angulum BAF metitur quadrans peripheriæ BF, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus esse graduum 90. Similiter quia duos rectos mensurat dimidia circumferentia in 180. gradus secta, & quatuor rectos circumferentia tota secta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis, praxes angulorum sunt,

1. Ad datum in rectâ BL punctum B, angulum statuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice, tanquam centro, inter latera, arcum describe CF. Centro B puncto dato, describe eodem intervallo arcum LZ, ex quo aufer LO parem CF. Per B & O duc rectam: erit LBO par dato A. Fig. 46.

2. Dati anguli OPQ gradus examinare. Fit hoc facillime per semicirculum corneum transparentem, in 180. gradus divisum. Centrum semicirculi pone supra P verticem anguli, & semicirculi radium PL supra anguli latus PQ. Arcus LO, inter anguli crura interceptus, ostendet quot graduum sit datus angulus. Fig. 47.

3. Angulum construere datos continentem gradus 42. duc rectam XQ in quâ signa punctum P. Super P pone semicirculi centrum, ejusque semidiametrum PL supra PQ. Ab L numera gradus 42. usque in O. Per O ex P ducta recta dabit angulum OPL graduum 42. Fig. 47.

Horum omnium demonstratio pendet ex ultima prop. lib. 6.

[Coroll]. *Cognito angulo BAF, cognoscitur unà ejusdem complementum ad duos rectos CAF. Sit e. gr. angulus BAF graduum 70. erit angulus CAF graduum 110. Numeri* Fig. 38.

enim isti simul additi, gradus 180. angulorum rectorum duorum mensuram conficiunt.]

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

Fig. 48. *SI duo triangula (BAC, BAF) duo latera (BA, AC) duobus (BA, AF,) alterum alteri, æqualia habuerint; unum verò triangulum angulum illis lateribus contentum (BAF) majorem habeat altero (BAC;) habebit quoque basim BF majorem basi (BC)*

Et si basim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

[*Si latera BA, AF (seu BA, AC) sint inæqualia; applicentur ad se invicem latera minora BA. Tum*]

Centro A describe per C circulum; is transibit per F, quia AC, AF ponuntur æquales. Ergo BF cadit [*intra* (a) *circulum*] supra C; [*hoc est, inter punctum A & punctum C.*] Junge CF. Angulus BCF est major angulo ACF, hoc est, per 5. angulo AFC, hoc est, multò major angulo BFC. Ergo [*In triangulo BCF,*] (b) BF opposita majori angulo BCF, major est quàm BC opposita minori BFC.

(a) Per def. 4.

(b) Per 19. l. 1.

2. Pars patet ex primâ parte & ex prop. 4.

[*Angulus enim BAF non est minor angulo BAC; nam si ita, basis BF basi BC minor* (c) *esset, contra hypothesim: Sed nec æqualis est angulus BAF angulo BAC; quia si esset, basis BF basi BC* (d) *æquaretur, iterum contra hypothesim. Cùm verò angulus BAF angulo BAC nec minor sit, nec æqualis; necesse est ut sit major. Q.E.D.*]

(c) Per primam partem hujus.

(d) Per 4. l. 1.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 25. *SI duo triangula (X, Z) duos angulos duobus æquales habuerint, alterum alteri, (B ipsi F, & C ipsi I,) & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos existit, (ut BC, FI,) vel quod uni æqualium angulorum opponitur, (ut AC LI:) reliqua omnia erunt æqualia.*

Ponantur

Ponantur primò æqualia esse latera BC, FI, inter æquales angulos posita: tum verò reliqua etiam omnia æqualia esse demonstratum est in scholio prop. 4.

Ponantur deinde latera AC, LI, æqualibus angulis B & F opposita, esse æqualia. Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per coroll. 9. prop. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo per primam partem omnia reliqua sunt æqualia.

[Scholium. *Quædam hoc loco de perpendiculari in triangulo isoscelio, quæ basem & angulum verticalem bisecat, inserere visum est. Sit ABC triangulum isosceles, cujus vertex A, basis BC, crura æqualia AB, AC. Dico,* Fig. 49.

1. *Si ab angulo verticali A ducatur* (a) *recta AD basi perpendicularis; bisecabit ea tum basem, tum angulum verticalem. In triangulis enim ABD, ACD, propter latera AB, AC invicem* (b) *æqualia, & AD utrique commune, & angulos lateribus æqualibus oppositos etiam æquales, nempe* (c) *B = C, & ADB =* (d) *ADC; omnia reliqua erunt* (e) *æqualia, nempe latus BD lateri DC, & angulus BAD angulo DAC. Quare perpendicularis AD bisecat* (f) *tum basem BC, tum angulum verticalem BAC.*

2. *Si recta AD ab angulo verticali ducta bisecet basem, bisecabit etiam angulum verticalem, & basi perpendicularis erit. Cum enim basis BC bisecta sit in D, triangula ABD, ACD erunt sibi mutuò æquilatera, ac* (g) *proinde sibi mutuò æquiangula. Anguli igitur BAD, CAD æquales sunt, atque adeo,* (h) *bisecatur angulus BAC: anguli etiam ad D æquales sunt, ac proinde* (i) *AD est basi perpendicularis.*

3. *Si recta AD angulum verticalem bisecet, illa basem etiam bifariam & perpendiculariter secabit. In triangulis enim BAD, CAD, propter latera BA, AD lateribus CA, AD respectivè æqualia, & angulos BAD, CAD illis lateribus contentos, etiam æquales;* (k) *erit basis BD basi CD, æqualis, & anguli ad D etiam æquales; ergo recta AD basem* (l) *bifariam &* (m) *perpendiculariter secat.*

4. *Si in triangulo isoscelio ABC ducatur recta DE, quæ basem BC bifariam & perpendiculariter secet in D; ea per trianguli verticem A transibit. Si enim super DE tanquam axe moveatur pars sinistra EDB trianguli ABC, donec parti dextræ EDC superimponatur; sibi mutuò* (n) *congruent æquales anguli recti ad D, æqualia latera DB, DC, & æquales anguli B, C. Coincident itaque latera BA, CA, itemque tota triangula BAD, CAD, ac proinde latus DA lateribus BA, CA in uno eodemque puncto A occurrit, hoc est, per verticem A trianguli ABC transit.*

(a) Per 12. l. 1.
(b) Per hypoth.
(c) Per 5. l. 1.
(d) Per def. 14.
(e) Per 26. l. 1.
(f) Per def. 40.
(g) Per 8. l. 1.
(h) Per def. 40.
(i) Per def. 14.
(k) Per 4. l. 1.
(l) Per def. 40.
(m) Per def. 14.
(n) Per axio. 8.

(a) Per def. 26.
(b) Per def. 14.
(c) Per 4. l. 1.

5. Si recta AD a trianguli ABC vertice A in basem BC cadens, eam secet bifariam & perpendiculariter; triangulum ABC erit isosceles, hoc est, crura, AB, AC erunt (a) æqualia. In triangulis enim ADB, ADC, propter latera AD, DB lateribus AD, DC respective æqualia, angulosque ad D illis lateribus contentos rectos, ac proinde (b) æquales, erit etiam latus AB lateri AC (c) æquale.

6. Si recta AD trianguli ABC angulum A bisecans, sit lateri opposito BC perpendicularis; triangulum ABC est isosceles, cujus æqualia latera sunt AB, AC. Nam in triangulis ADB, ADC, propter angulos DAB, DAC æquales, angulos ad D rectos & proinde æquales, ac latus DC inter æquales angulos utrique commune; erit (d) latus AB lateri AC æquale.]

(d) Per 26. l. 1. vel per Schol. p. 4. l. 1.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 50.

SI duas rectas (AB, CF) parallelas secuerit recta (GO:) erunt 1. æquales alterni anguli (RLO, QOL, item BLO, COL.) 2. Externus (GLB) æqualis interno ad eandem partem (LOF,) (item GLR ipsi LOC.) 3 Duo ad eandem partem interni simul (ALO, COL) æquales duobus rectis, (item duo BLO, FOL duobus rectis æquales.)

Fig. 51.
(e) Per axio. 11.
(f) Per axio. 12.
(g) Per 8. l. 1.

1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares OR, LQ. Erunt (e) hæ ad utramque parallelam AB, CF perpendiculares, & per def. 36. inter se æquales. Æquales quoque (f) ex parallelis auferunt partes RL, QO. Ergo triangula X, Z sibi mutuò æquilatera sunt. Ergo (g) anguli RLO, QOL alterni æqualibus lateribus RO, QL oppositi, sunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alternos reliquos BLO, COL æquales esse. Nam quia, tam BLO, ALO quàm COL, FOL æquantur (h) duobus rectis; erunt BLO, ALO æquales ipsis COL, FOL. Ablatis ergo æqualibus RLO, FOL, erunt reliqui BLO, COL etiam æquales.

(h) Per 13. l. 1.

(i) Per 15. l. 1.

2. Pars. GLB æquatur ad verticem (i) opposito RLO. Sed RLO æquatur per 1. partem LOF. Ergo GLB externus æquatur interno LOF; quod erat alterum. [*Eodem modo probatur angulum externum GLR angulo interno ad eandem partem LOC æqualem esse.*].

(k) Per 13. l. 1.

3. Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL. Atqui FOL cùm COL (k) facit duos rectos. Ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos; quod erat tertium. [*Et pari modo, duos angulos BLO, FOL duobus rectis æquales esse patebit.*]

Coroll.

Coroll. *Hinc, Eratosthenem imitati, Telluris ambitum metiri discimus. Ille enim observavit Solem Syene, urbi Ægyptiaca, ipso solstitii æstivi die perpendiculariter impendere: & eodem die gnomonis ope invenit Solem ab Alexandria, urbis etiam Ægyptiaca, sub eodem fere meridiano sita, vertice gradus fere septem cum quintâ gradûs parte distare: atque urbes istas stadia 5000 circiter distare novit. Unde vi præsentis propositionis ambitum terræ hoc modo definivit. Sit A Syene; B Alexandria, ubi gnomon BC erigitur horizonti perpendicularis; Sint DA & EG radii Solares sibi invicem quoad sensum paralleli; DA radius horizonti Syenensi perpendicularis, per F centrum terræ transiens; EG verò radius horizonti Alexandrino obliquus, per gnomonis apicem transiens, & cum gnomone angulum GCF graduum $7\frac{1}{5}$ continens. Cùm verò angulus GCF æqualis sit angulo alterno AFB, cujus mensura est arcus AB graduum $7\frac{1}{5}$; Telluris ambitum hac analogia adinvenit: Ut se habent gradus $7\frac{1}{5}$ ad stadia 5000; Ita integer circulus graduum 360 se habebit ad 250000; ambitum telluris iisdem stadiis definiendum. Q. E. I.* Fig. 52.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duas rectas (AB, CF) secans recta (GO) alternos angulos (ALO, FOL;) æquales fecerit, erunt (AB, CF) parallelæ. Fig. 53.

Si negas, sit ergo alia XLZ per punctum L ad CF parallela.

Ergo (a) angulus XLO par est alterno FOL; quod fieri non potest, cùm per hyp. ALO par sit eidem FOL. (a) Per præc.

PROPOSITIO XXIX.

SI duas rectas (AB, CF) secans recta (GO) fecerit externum angulum (GLB) æqualem opposito interno (LOF,) vel duos ad easdem partes internos ALO, COL) pares duobus rectis erunt (AB, CF) parallelæ. Fig. 53, 54.

Per 15. GLB æquatur ALO opposito ad verticem. Sed per hyp. GLB æquatur LOF. Ergo etiam ALO æquatur sibi alterno LOF. Ergo (b) AB, CF sunt parallelæ. (b) Per præced.

Deinde COL cum FOL facit duos rectos. Sed per hyp. idem COL etiam cum ALO facit duos rectos. Ergo ALO, FOL alterni æquales sunt. Ergo rursum AB, CF (c) sunt parallelæ. (c) Per præced.

Corollarium.

Ex secundâ parte patet omne rectangulum esse parallelogrammum.

[Scholium. *Tacquetus trium propositionum immediatè præcedentium (viz. 27. 28. 29.) ordinem Euclideum immutavit. Quæ enim Euclidi est prop. 29. Tacqueto est 27. quia nempe prima istius propositionis pars (à quâ partes duæ reliquæ dependent, è novâ suâ parallelarum definitione, novisque duobus axiomatis, undecima & duodecima statim sequitur: quinetiam prop. 28. Tacquetiana, Euclidi est 27. quia ex Euclideâ parallelarum definitione, ejusque axiomate undecimo (quæ ambo rejicit Tacquetus) propositio illa demonstratur. Et proinde, prop. 29. Tacqueti, est Euclidis 28. Hæc monenda duxi, ne forte, perlectis Tacqueti elementis Euclideis, Tyrones aliorum libris mathematicis operam dantes, errorem aliquem caussentur, quòd Elementi primi propositiones 27, 28, 29. pro Tacquetianis 28, 29, 27 respectivè, laudari viderint.*]

PROPOSITIO XXX.

Fig. 50. *Si duæ rectæ (AB, CF) sint parallelæ ad eandem rectam (DN,) erunt inter se parallelæ.*

Patet per se, & ex præcedentibus. Nam si omnes secentur à rectâ GO, erit (a) angulus externus GLB par interno LDN: est verò LDN externus respectu DOF, ac proinde (b) æqualis. Ergo etiam GLB par est LOF. Ergo AB, CF sunt (c) parallelæ.

(a) Per 27. l. 1.
(b) Per 27. l. 1.
(c) Per præc. ...

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 51. *Per datum punctum (A) parallelam ducere ad rectam datam (CF.)*

Ex A ducatur utcunque AL, secans datam FC. Ad punctum A fiat (d) angulus LAS par angulo ALF. Erit AS parallela ad CF, ut patet ex 28. cùm alterni anguli SAL, FLA sint æquales.

(d) Per 23. l. 1.

Praxis: ductâ AL, centro L describe arcum IQ, & centro A eodem intervallo arcum OX; ex quo aufer OB parem IQ. Per A & B ducta recta erit parallela.

Demonstratio pendet ex 29. l. 3.

Aliter. Centro quopiam P describe circulum qui transeat per datum punctum A, & secet datam CF in Q & O. Arcui QA accipe æqualem ON. Recta AN erit parallela. *Fig. 55.*

Demonstratio pendet ex 29. lib. 3. & ex 28. hujus, [*& habetur infra, in Lem. ad prop. 16. Theorematum solid. ex Archimede.*]

Scholium.

Demonstrata jam igitur est parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides ejusque interpretes assumunt minus recte; cùm non sit axioma, sed theorema, cujus veritas non magis per se appareat, quàm ipsius 29. propositionis. Quia tamen deinceps sæpius adhibetur, id hoc loco jam facile ex præmissis demonstrabimus.

Theorema.

Si recta (MA) incidens in rectas (BC, AD) faciat angulos internos ad easdem partes (BAD, ABC) duobus rectis minores, rectæ (BC, AD) concurrent versus eam partem, quam spectant anguli duobus rectis minores. *Fig. 56.*

Quoniam per hyp. CBA, DAB duobus rectis sunt minores; fiant CBA, XAB duobus rectis æquales; [*nempe faciendo angulum XAB* (a) *æqualem angulo MBC*;] Eruntque BC, AX (*b*) parallelæ, [*& angulus XAB* (c) *major angulo DAB, excessu XAD.*] Assumo tanquam axioma per se notum, inter rectas AD, AX in infinitum productas duci posse aliquam ad AM parallelam, puta ZX, quæ major sit quàm AB. Accipiatur ipsi ZX æqualis AR, & junge ZR. Quoniam AR, ZX sunt parallelæ, erunt (*d*) alterni XZA, RAZ æquales. Sunt autem & latera XZ, ZA æqualia lateribus RA, AZ per constr. Ergo etiam (*e*) anguli RZA, XAZ æquales sunt. Ergo RZ est (*f*) parallela ad AX. Sed etiam BC est parallela ad AX. Ergo RZ & BC sunt (*g*) parallelæ. Est igitur BC & parallela ad RZ, & inclusa triangulo ARZ. Ergo cùm produci in infinitum possit, necessariò occurret aliquando rectæ AZ. Nam neque evadere potest per sibi parallelam RZ, neque pertingere in A, alias duæ rectæ [*vel spatium comprehenderent, vel*] haberent commune segmentum, [*contra axiomata* 13. *&* 14.] Liquet ergo propositum.

(a) Per 23. *l.* 1.
(b) Per 29. *l.* 1.
(c) Per def. 12.
(*d*) Per 27. *l.* 1.
(*e*) Per 4. *l.* 1.
(f) Per 28. *l.* 1.
(g) Per 30. *l.* 1.

Demonstratio Clavii est a parallelis independens, sed prolixissima & multùm operosa: Procli nititur hoc principio, quòd recta unam parallelam secans, etiam alteram sectura sit, si producatur. Verùm hoc per se notum non est, ob rationem datam def. 36.

Corollaria.

Fig. 56. 1. HInc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AD, [*quas recta BA secet in B & A; & ad illam partem ipsius BA, ubi rectæ non parallelæ BC, AD convergunt ad se invicem, per punctum A,*] duc (a) AX parallelam ad BC. Erunt anguli XAB; CBA duobus rectis (b) æquales. Ergo DAB, CBA sunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonstratum, BC, AD concurrent.

(a) Per 31. l. 1. (b) Per 27. l. 1.

[2. *Recta infinita AZ secans rectam AX, secabit quasvis infinitas BC, RZ ipsi AX parallelas. Cùm enim ponantur AX, BC parallelæ, seu* (c) *æqualibus intervallis ubique distantes, secetque recta AZ, ipsam AX; ergo AZ, BC inæqualibus intervallis distabunt, & proinde non erunt parallelæ. Quare* (d) *AZ, BC concurrent. Et eodem modo demonstrabitur rectam AZ concurrere cum aliâ quavis RZ quæ ipsi AX parallela ducitur.*]

(c) Per def. 36. (d) Per cor. 1.

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig. 57. O*Mnis trianguli externus quivis angulus (FBC) duobus internis oppositis (A & C) æqualis est.*

Per B duc (e) BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC secat FA, erit externus angulus FBL interno A (f) æqualis. Et quia easdem parallelas BL, AC secat etiam recta BC, erit LBC sibi alterno C (g) æqualis. Ergo totus FBC æquatur utrique simul A & C. Quod erat demonstr.

(e) Per 31. l. 1. (f) Per 27. l. 1. (g) Per eand.

Corollaria.

Fig. 57. 1. EXternus angulus (FBC) quolibet internorum oppositorum A vel C, major est. [*Est prop. 16. Euclidis.*]

Fig. 41. 2. Angulorum (C & AOB) eandem basim (AB) habentium, major est (AOB) qui intra cadit. [*Est pars secunda prop. 21. cujus demonstrationem Tacquetus ad hunc locum rejecerat.*]

Producatur enim AO in F. AOB per hanc major est quàm OFB; & OFB per hanc eandem major est quàm C: Ergo AOB multo major est quàm C.

Fig. 58. 3. Si ab uno puncto (A) in unam rectam (BC) incidant duæ rectæ, altera (AO) oblique, perpendiculariter verò altera (AF;) hæc cadet versùs partes acuti anguli AOB. Cadat enim, si fieri potest, ad partes obtusi anguli AOC,

puta

putà in Q. Igitur acutus AOB erit externus respectu recti (*a*) AQB, ac proinde illo major per coroll. 1. quod est absurdum. (a) *Per hypoth.*

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

Omnis trianguli tres simul anguli, duobus rectis sunt aequales. *Fig.* 59.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus AB in F. Externus angulus FBC duobus internis oppositis A & C aequalis (*b*) est. Atqui (*c*) FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonstrandum. (b) *Per* 1. *partem hujus.* (c) *Per* 13. *l.* 1.

Aliter. [*Per angulum* Q] ducatur HM parallela lateri AC. Anguli alterni tam O, A, quam N, C aequales (*d*) sunt. Sed O, Q, N conficiunt (*e*) duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt: quod erat demonstrandum. *Fig.* 60. (d) *Per* 27. *l.* 1. (e) *Per Coroll.* 1. *p.* 13. *l.* 1.

Corollaria.

4. Tres simul anguli cujusvis trianguli [*rectilinei*] aequales sunt tribus simul cujuscunque alterius.

5. Si in triangulo unus rectus [*aut recto major*] est, reliqui sunt acuti. [*& angulus qui lateri non maximo opponitur, semper* (f) *est acutus.*] (f) *Per hoc cor. & pr.* 18. *primi.*

6. Si in triangulo unus est rectus, reliqui duo simul etiam unum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui aequatur duobus reliquis, rectus est.

8. Cum scitur quot graduum sit unus angulus, scitur etiam quot gradus faciant duo reliqui simul. Et cum scitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum summa, scitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul aequales sunt duobus angulis aut singulis aut simul in altero triangulo; etiam tertius tertio aequalis erit. [*Ex hoc corollario, quod à prop. 26. non dependet; demonstratur ejusdem propositionis 26. pars secunda, ut ibi notat Tacquetus. Huc igitur ista propositio referenda est.*]

10. Cum duo triangula unum angulum aequalem habent, etiam reliquorum summae aequantur.

11. Cum

11. Cum in Isoscele angulus æquis cruribus contentus est rectus, reliqui ad basim sunt (*a*) semirecti. Et Isoscelis ad basim anguli semper sunt acuti. [*Et ab Isoscelis vertice, perpendicularis in basim*, (b) *cadit intra triangulum*]

(a) Per cor. 6. hujus, & p. 5. l. 1.
(b) Per Cor 3. hujus.

12. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti. Facit enim tertiam partem (*c*) duorum rectorum. Ergo duas tertias unius. [*Cùm enim duo. recti faciant gradus* 180. *erit tertia pars duorum rectorum*, *sive trianguli æquilateri angulus graduum* 60, *& proinde continebit duas tertias anguli recti*, *sive gradium* 90.]

(c) Per hanc & cor. p. 5. l. 1.

Fig. 61. 13. Hinc anguli recti (BAC) facillima trisectio; si super AC fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cùm FAC sint duæ tertiæ unius recti, erit BAF recti una tertia.

Fig. 58. 14. Perpendicularis (AF) est brevissima omnium quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci possunt. Quoniam enim angulus F rectus est, erit per coroll. 5. AOF acutus. Ergo (*d*) AF minor quàm AO quælibet.

(d) Per 19. l. 1.

15. Ex uno puncto ad unam rectam tantùm una perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Fig. 62. 16. *Hinc etiam ex primâ parte hujus propositionis astrorum* parallaxin *sive loci veri atque visi differentiam definire discimus. Sit A Telluris centrum; B Locus Observatoris in ejusdem superficie. Sit DBC angulus astri C à vertice per observationem notus, sive distantia angularis astri à vertice visa: Est verò Angulus DAC distantia angularis* vera. *Trianguli autem ABC angulus externus observatione datus DBC, angulis duobus internis oppositis* (e) *BAC & BCA æqualis est; Atque adeo angulus BCA est angulorum DBC & DAC differentia. Si itaque angulus A, computatione notus, ex angulo DBC, observatione noto subducatur, differentia angulorum istorum BCA, quam* Parallaxin *dicimus*, *pariter innotescet*: Q. E. I.

(e) Per hanc prop.

[17. *Liquet etiam e secundâ parte hujus prop. Trianguli cujuscumque duos quosvis angulos duobus rectis minores esse; quæ est prop.* 17. *Euclidis à Tacqueto omissa.*

Fig. 19. 18. *In triangulo rectangulo scaleno; ille ex angulis acutis, qui laterum angulum rectum comprehendentium majori opponitur, est semirecto major; & qui opponitur minori est semirecto minor. Acuti enim anguli simul sumpti, per cor.* 6. *hujus, angulum rectum conficiunt: Ergo ille qui majori lateri opponitur est* (f) *semirecto major; qui minori, semirecto minor.*

(f) Per 18. l. 1.

Fi. 63. 19. *Hinc turris aut puncti cujusvi. elevati altitudinem, umbra solaris ope, metiri licet. Ubi enim Sol gradus* 45. *supra horizontem elevatur, erunt turrium umbra in horizontem projecta, earum altitudini exactè æquales. Ob angulum*

enim

enim ABC rectum, & ACB (a) *semirectum; erit angulus BAC semirectus, per cor. 6. hujus. Et cùm anguli ad basim AC sint æquales, latera AB, BC æqualia* (b) *erunt. Datâ itaque mensurando rectâ BC, datur etiam AB turris altitudo supra horizontem.* (a) Per Schol. post p. 23. l. 1. (b) Per 6. l. 1.

20. *Hinc lineam inaccessam AB metiri licet. Triangulum enim æquilaterum quodcunque BDE, puncto suo B ac latere BD, ad lineæ inaccessæ BA punctum B secundùm eandem BA supponatur adjectum: & a puncto B per latus BE, tanquam dioptram, puncta quæcunque in rectâ BC posita observentur. Removeatur demum triangulum BDE secundùm rectam BC hac illac, donec collimando per latus trianguli ED sive CF, punctum A inaccessum, in eadem lineâ CF productâ, positum cernatur; & linea accessibilis BC, lineæ inaccessæ AB æqualis erit. In triangulis enim ABC, DEB, propter angulum B communem, & angulos C, E æquales,* (c) *erunt etiam anguli A, D æquales. Sed triangulum BDE ex hypothesi est æquilaterum, & proinde* (d) *æquiangulum: Ergo etiam triangulum BAC est æquiangulum, & proinde* (e) *æquilaterum. Si itaque lineam accessibilem BC metiamur, lineæ etiam inaccessæ BA mensuram habemus.* Fig. 64. (c) Per cor. 9. hujus. (d) Per cor. p. 5. l. 1. (e) Per cor. p. 6. l. 1.

Scholium.

HUjus pulcherrimi, fœcundissimique theorematis; cujus per Mathesim universam usus prope immensus, inventor est Pythagoras teste Eudemo veteri Geometrâ. Frequentissime ejusdem meminit Aristoteles, qui illud etiam exemplum statuit perfectissimæ demonstrationis. Sed quemadmodum ex hac propositione jam didicimus, quot rectis angulis, figuræ trilateræ anguli æquivaleant, ita ejusdem beneficio cujuslibet figuræ rectilineæ sive interni, sive externi anguli, quot rectos conficiant, præclare innotescet tribus sequentibus theorematibus.

Theorema 1.

OMnis quadranguli quatuor simul anguli efficiunt quatuor rectos. Fig. 65.

Nam si per oppositos angulos ducas rectam BF, hæc quadrangulum in duo triangula secabit, quorum anguli simul conficiunt (*f*) rectos quatuor. (f) Per 32. l. 1.

Theorema 2.

OMnes simul anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot sunt latera figuræ. Fig. 66.

Ex quovis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ secabunt figuram in tot triangula quot habet latera. Quare cùm singula triangula (a) conficiant duos rectos, omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa punctum A, (b) conficiunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

(a) Per 32. l. 1.
(b) Coroll. 3. p. 13. l. 1.

Hinc patet omnes ejusdem speciei rectilineas figuras æquales habere angulorum summas; Quod admiratione dignum est.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: à producto aufer 4. restabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theorema 3.

Fig. 67.

Omnes simul externi anguli cujuscumque figuræ rectilineæ, conficiunt quatuor rectos.

Nam singuli figuræ interni anguli, cum singulis externis, conficiunt duos (c) rectos. Ergo interni simul omnes, cum omnibus simul externis conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Sed (ut in præced. ostendimus) interni simul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur.

(c) Per 13. l. 1.

Mira sane hæc figurarum rectilinearum proprietas est: ex qua illud etiam consequitur, omnes cujuscumque speciei rectilineas figuras, æquales habere externorum angulorum summas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales sunt mille externis angulis figuræ millelateræ: Quæ prorsus admiratione sunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 68.

Si duas rectas æquales & parallelas (AB, CF) jungant duæ aliæ (AC, BF;) erunt etiam illæ æquales & parallelæ.

Parallelas AB, CF secet AF. Erunt in triangulis Q, R alterni anguli BAF, CFA (d) æquales. Ponitur autem latus AB æquale lateri CF; & AF utrique triangulo est commune. Ergo (e) bases BF, AC æquantur; (quod erat primum.) Et anguli ad basim AFB, FAC sunt æquales: ac proinde

(d) Per 27. l. 1.
(e) Per 4. l. 1.

proinde AF incidens in rectas AC, BF facit alternos AFB, FAC æquales. Ergo (a) AC, BF sunt etiam parallelæ. Quod erat alterum. (a) Per 28. l. 1.

[Scholium. *Si duas rectas parallelas & inæquales (AB, OC) jungant duæ aliæ (AO, BC;) concurrent tandem istæ jungentes, si ultra parallelarum minorem (OC) satis producantur. Si enim à parallelarum majori BA, capiatur* (b) *BR minori æqualis, & jungatur RO; erunt RO, BC* (c) *parallelæ, & anguli ad eandem partem interni, B, ORB simul sumpti, duobus rectis* (d) *æquales. Sed trianguli ORA externus angulus ORB, uno internorum oppositorum OAR* (e) *major est, & proinde anguli B, OAB simul sumpti, sunt duobus rectis minores, adeoque rectæ AO, BC ultra OC productæ, tandem* (f) *concurrent. Q. E. D.*] Fig. 70. (b) Per 3. l. 1. (c) Per 33. l. 1. (d) Per 27. l. 1. (e) Per cor. 1. pr. 32. l. 1. (f) Per Schol. post pr. 31. l. 1.

PROPOSITIO XXXIV.

Parallelogrammi opposita latera & anguli æquantur, ipsumque à diametro bisecatur. Fig. 68.

Quoniam AB, CF sunt (*g*) parallelæ, in easque incidit AF, erunt alterni BAF, CFA (*h*) æquales. Item quia AC, BF sunt (*i*) parallelæ, in easque incidit AF, erunt (*k*) alterni CAF, BFA æquales. Ergo totus BAC toti BFC æqualis est. Eodem modo ostendam B & C æquales esse. Quod erat primum. (g) Per def. 35. (h) Per 27. l. 1. (i) Per def. 35. (k) Per 27. l. 1.

Quia verò jam ostendi triangula Q, R, quæ unum latus AF commune habent, etiam angulos lateri AF adjacentes habere æquales, nimirum BAF ipsi CFA, & CAF ipsi BFA, erunt (*l*) etiam latera AB ipsi FC, & BF ipsi CA, æqualia, itemque ipsa triangula. (l) Per 26. l. 1.

[Cor. 1. *Omne parallelogrammum, ut ACEF, quod unum angulum A rectum habet, erit rectangulum, hoc est, habebit omnes angulos rectos. Nam quia rectas parallelas AF, CE secat recta CA, efficiet angulos A, C, internos ad eandem partem, duobus rectis* (m) *æquales: Cùm verò A sit angulus rectus, etiam C rectus erit: Unde per hanc prop. anguli E, F, angulis A, C respectivè oppositi, erunt quoque recti. Eodem modo constabit parallelogramma quæ unum angulum uni æqualem habent, esse æquiangula.*] Fig. 71. (m) Per 27. l. 1.

Cor. 2. *Hinc Montium tam altitudines supra horizontem, quàm lineas horizontales metiri discimus. Sit ABC latus montis, cui applica ingentem normam, aut quod normæ instar est, ADB, eâ ratione, ut latus AD sit horizonti parallelum, & latus DB horizonti perpendiculare; &* (n) *completo parallelogrammo DH, erit (per hanc prop.) latus AD* Fig. 69. (n) Per 31. l. 1.

(a) Per 30. l. 1. *æquale recta HB, ipsi AD & horizonti* (a) *parallela; & DB æquale recta AH, eidem DB, ut & horizonti perpendiculari. Applica deinde inferius à puncto B ad punctum C; & completis parallelogrammis EF, BG, erit itidem recta EB æqualis CF, & EC æqualis BF sive HG, prout & BH sive DA æquatur ipsi FG: atque ita porro. Latera horizonti parallela AD, BE, &c. simul addita, dabunt lineam horizontalem GC: & latera perpendicularia BD, EC, &c. simul addita dabunt altitudinem AG.*

Fig. 69. (b) Per 31 l. 1. (c) Per def. 35. & cor. 1. hujus. (d) Per hanc prop. (e) Per 27. l. 1. (f) Per hypoth. (g) Per cor. 6. pr. 32. l. 1. (h) Per 6. l. 1.

Cor. 3. *Hinc etiam ope quadrantis Astronomici, Turris altitudinem AB invenire licet. Ubi enim elevationis angulus in quadrante est semirectus observatori ad E, fiat DE horizonti perpendicularis, & æqualis oculi observatoris altitudini, & ab oculo D* (b) *ducatur DF ipsi EB parallela, eritque BD parallelogrammum* (c) *rectangulum, & latus FB lateri DE, sive altitudini observatoris oculi* (d) *æquale, latus autem DF æquale lateri EB, sive distantiæ observatoris à turre. Sed in triangulo AFD, propter angulum AFD* (e) *rectum, & angulum elevationis ADF* (f) *semirectum, erit & angulus A* (g) *semirectus, & linea DF, seu distantia observatoris à turre,* (h) *æqualis lineæ FA, seu altitudini turris supra observatoris oculum; cui si adjiciatur FB altitudo oculi, habebitur integra turris altitudo AB.*

Fig. 70. (i) Per 10. l. 1. (k) Per 26. l. 1. (l) Per 27. l. 1. (m) Per 15. l. 1.

Cor. 4. *Hinc denique Geodætæ agri parallelogrammi aream facilius dividunt. Sit enim ABDC ager parallelogrammus; AD ejusdem diameter, sive linea diagonalis; cujus punctum medium signet* (i) *F. Quæcunque linea recta, ut EG, per punctum F transit, agrum in partes æquales EACG, EBDG dividit. Triangulum enim ABD per hanc prop. æquale est triangulo ACD; & Triangulum AEF æquale* (k) *Triangulo GFD (propter æquales* (l) *angulos alternos FAE, FDG; itemque æquales angulos ad verticem* (m) *oppositos AFE, DFG; & latera FA, FD, quæ inter æquales angulos existunt, etiam æqualia.) Si itaque trapezio EBDF, loco trianguli AEF, triangulum eidem æquale GFD addas, areæ quantitatem non mutabis: sed erit trapezium EBDG æquale triangulo ABD, sive dimidio parallelogrammo, & proinde trapezio AEGC æquale. Q. E. D.*

Scholium.

Fig. 71. Partim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittendâ, facile elicitur dimensio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum AF, AC. Sit, ex. gr. AF pedum

dum 8. AC, 4. Duc 8 in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro areâ rectanguli.

Quadrati verò area habetur ex uno latere FI per se ipsum multiplicato: ut si latus FI sit 5. pedum; duc 5. in se, proveniunt 25. pedes quadrati pro areâ quadrati. *Fig.* 72.

Demonstratio ex hac prop. patet, ductis per laterum divisiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Parallelogramma super basi eâdem (A B) vel æquali, & inter easdem parallelas (CQ, AX) constituta, sunt æqualia. *Fig.* 73.

Quia AL, BQ (*a*) sunt parallelæ, easque secat CQ; erit (*b*) externus CLA par interno FQB. Deinde quia tam CF quàm LQ æquantur (*c*) eidem AB, erunt CF, LQ æquales. Adde utrisque FL; erunt totæ CL, FQ æquales. Insuper & AL, BQ (*d*) æquales sunt. Triangula igitur CLA, FQB æqualia (*e*) sunt. Ergo ablato communi FOL, plana FOAC, QBOL remanent æqualia. Quibus utrisque adde planum AOB, fiunt parallelogramma tota ACFB, ALQB æqualia. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per def.* 35. (b) *Per* 27. *l.* 1. (c) *Per* 34. *l.* 1. (d) *Per eand.* (e) *Per* 4. *l.* 1.

Hæc propositio fiet universalis p. 1. lib. 6. Observent hîc tyrones, quamvis parallelogramma inter easdem parallelas sine fine productas, in infinitam longitudinem extendantur ex eâdem basi AB, semper tamen manere æqualia ex vi demonstrationis jam datæ.

[Coroll. *Unde sequitur duas urbes parallelogrammas magnitudine æquales, in circuitu tantùm discrepare posse, ut unius ambitus centies vel millies alterius ambitum exuperet. Si nimirum altera sit quadrata vel rectangula; altera verò super eâdem cum priore basi, & intra easdem cum priore parallelas, parallelogramma quidem, sed admodum obliquangula, & proinde in longum protensa. Sequitur porro isoperimetras figuras, areas immane quantùm diversas continere posse.*]

Scholium.

Ex hoc theoremate habetur dimensio parallelogrammi cujuscunque. Illius igitur area producitur ex altitudine QX seu CA ductâ in basim AB. *Fig.* 73.

Nam area rectanguli CB parallelogrammo BL æqualis (*f*) fit (*g*) ex AC ductâ in AB. Ergo, &c.

(f) *Per prac.* (g) *Per Schol. p.* 34. *l.* 1.

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig. 74. *TRiangula (ACB, AFB) super basi eâdem (AB) vel æquali, & inter easdem parallelas (CI, AZ) constituta, sunt æqualia.*

Lateribus AC, AF duc parallelas BL, BI. Parallelogramma ACLB, AFIB sunt (*a*) æqualia. Sed horum, triangula data (*b*) sunt dimidia. Ergo triangula data (*c*) sunt æqualia.

Hæc propositio fiet universalis p. 1. lib. 6. Idem hîc tyrones notent in triangulis, quod eos notare jussimus prop. præced. de parallelogrammis.

Fig. 75. Coroll. *Hinc etiam Geodetæ agri triangularis aream facillimè dividunt. Sit e. g. ABC ager triangularis, & sit basis BC bisecta* (d) *in D; recta DA agrum bifariam dividet. Triangula enim ABD, ACD quæ bases habent æquales BD, CD, & communem verticem A, ac proinde inter easdem parallelas constituuntur, erunt æqualia per hanc prop.*

(a) *Per præced.* (b) *Per 34. l. 1.* (c) *Per axio. 6.* (d) *Per 10. l. 1.*

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Fig. 76. *TRiangula æqualia (ACB, AFB) super eâdem basi (AB) vel æquali, ad easdem partes constituta, sunt inter easdem parallelas (AB, CF.)*

Si negas, sit CL parallela ad AB, & ducatur BL. Igitur ALB æquatur (*e*) ACB. Sed ex hyp. etiam AFB ipsi ACB æquale est. Ergo ALB & AFB æqualia sunt, pars & totum. Quod fieri non potest. Igitur, &c.

(e) *Per præc.*

PROPOSITIO XLI.

Fig. 77. *SI triangulum (AFB) sit in iisdem parallelis cum parallelogrammo (AL,) & basim eandem habeat (AB) vel æqualem, ipsius dimidium erit.*

Duc CB. Triangula AFB, & ACB (*f*) æquantur. Sed (*g*) ACB est dimidium parallelogrammi AL. Ergo etiam AFB est dimidium AL. Quod erat demonstrandum.

(f) *Per 37. & 38. l. 1.* (g) *Per 34. l. 1.*

Scholium

Scholium.

EX hac & ſcholio prop. 35. diſcimus, aream trianguli (AFB) cujuſcunque produci ex dimidiâ altitudine FI ductâ in baſim (AB) vel ex dimidiâ baſi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, ſive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo oppoſito ducitur, habetur trianguli dimenſio; ut ſi baſis AB ſit pedum 100. altitudo FI, 85. multiplica baſis dimidium 50. per 85. proveniunt 4250. pedes quadrati pro areâ trianguli AFB. Porro altitudo ſive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari poteſt, mechanicè innoteſcit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenitur Geometricè altitudo per 12. & 13. l. 2. ut in ſcholio ibidem docebimus. *Fig.* 77.

In triangulo rectangulo, altitudo eſt eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo ſemiſſis ducta in latus alterum recto adjacens, dabit trianguli aream.

PROPOSITIO XLII.

DAto triangulo (ACB) æquale parallelogrammum facere, habens angulum parem dato. (O.) *Fig.* 78.

Baſim AB biſeca in F. Per C duc (a) CX parallelam AB. Fac (b) angulum BAL parem dato O. Duc (c) FI parallelam AL. Erit ALIF quod quæritur.

Ducatur enim FC. Parallelogrammum AI angulum habet LAF parem dato O; & eſt æquale triangulo dato ACB, cùm tam (d) triangulum ACB, quàm (e) parallelogrammum AI, dupla ſint ejuſdem trianguli ABF.

(a) *Per* 31. *l.* 1.
(b) *Per* 23. *l.* 1.
(c) *Per* 31. *l.* 1.
(d) *Per* 38. *l.* 1.
(e) *Per præc.*

Corollarium.

DAto triangulo ACB habetur æquale rectangulum, ſi per C ducatur parallela lateri AB, & biſecta AB in F, ex B erigatur perpendicularis BQ. Erit enim rectangulum ſub FB & QB par triangulo ACB. *Fig.* 78.

PROPOSITIO XLIII.

IN parallelogrammo (BL,) complementa (BO, OL) eorum quæ circa diametrum exiſtunt (RF & CS) ſunt æqualia. *Fig.* 79.

Si per diametri AQ punctum quodvis O ducatur CF parallela lateri AB, & RS parallela lateri BQ; secatur totum BL in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum sunt RF, CS, duo reliqua BO, OL, sunt horum complementa.

(a) Per 34. l. 1. (b) Per eand.

Ea esse æqualia sic ostenditur. Triangula ABQ, ALQ (*a*) æquantur: similiter ARO, OCQ (*b*) æquantur AFO, OSQ. Ergo si ab æqualibus ABQ, ALQ auferas æqualia, hinc ARO, OCQ, inde AFO, OSQ, æqualia remanent BO & OL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 80.

AD datam rectam (OS) parallelogrammum constituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)

(c) Per 42. l. 1. (d) Per 31. l. 1.

Fac (*c*) parallelogrammum RC dato V æquale, habens angulum ROC parem dato X, & pone latus RO in directum datæ OS. Per S duc SQ (*d*) parallelam OC, cui occurrat BC producta in Q. Per Q & O ducta recta occurrat BR protractæ in A. Per A duc AL parallelam ad OS, cui occurrant CO & QS productæ in F & L. Parallelogrammum OL est quod petitur.

(e) Per præced. (f) Per 15. l. 1.

Nam OL (*e*) æquatur RC, hoc est per constructionem dato triangulo V; & est ad datam OS; habetque angulum (*f*) FOS parem angulo ROC, hoc est per const. parem dato X.

[Coroll. *Hinc liquet, quomodo ad datam rectam OS, parallelogrammo BO æquale & æquiangulum parallelogrammum OL constituere oportet.*]

Fig. 81.

Scholium. *Continet hæc propositio cum corollario annexo, Geometricam quandam divisionem. Sicut enim numerus multiplicatione productus, tamquam rectangulum quoddam jure considerari potest, cujus factores sint duo quævis rectanguli latera contigua, prout in Scholio post prop. 34. declaratum est; Sic etiam eodem jure, numeri dividendi locum, rectangulum occupare censebitur, cujus latera circa angulum quemvis, divisorem & quotum repræsentabunt. Et sicut unus idemque numerus dividendus varios admittit divisores, quibus singulis suus exoritur numerus quotus; sic una eademque area rectangula quantitate data, recta omnis tamquam lateri applicari potest, cui ad rectos angulos aptabitur quædam alia recta, pro altero rectanguli latere. In fig. 81. sit rectangulum AB, duodecim pedes quadratos complexum, cujus*

jus latera sint AC trium, & AE quatuor pedum, & proponatur idem quantitate rectangulum lateri bipedali tamquam divisori ita applicare, ut inde exsurgat latus aliud, quod quotientis instar sit habendum. In rectâ AE productâ, capiatur linea bipedalis EH, ad quam, per coroll præced. constituatur rectangulum EG ipsi AB æquale, & prodibit alterum rectanguli latus EI sex pedes longum, pro quoto quæsito. Cùm verò, (propter parallelogramma BH, AI) recta BD, AF, rectis EH, EI respectivè sint (a) *æquales, pro praxi satis erit, si in CB productâ accipiatur BD pedum duorum, & per puncta D, E ducatur recta DE, quæ producta occurrat* (b) *rectæ CA productæ in F. Recta enim AF ea erit quam quærimus. Hæc quidem divisionis species* Applicatio *dicitur; quoniam spatium rectangulum AB (hoc est, ei æquale EG) linea BD sive EH* applicatur. *Et inde fit quòd Divisio haud rarò* Applicatio *nominatur: scilicet pro antiquorum* Geometrarum *consuetudine; qui* constructionis Geometricæ, *quæ regulâ & circino solis utitur,* quàm computi Arithmetici *per numeros solos perficiendi potiorem rationem semper habuerunt.*

(a) *Per* 34. *l.* 1.
(b) *Per cor.* 1. *Sch. p.* 31. *l.* 1.

PROPOSITIO XLV.

Fig. 82

Dato rectilineo (CBA,) æquale parallelogrammum construere ad datam rectam (IQ) & in dato angulo (H.)

Rectilineum resolve in triangula A, B, C, ducendo rectas FL, FI.

Ad datam IQ in angulo dato H, fac (*c*) parallelogrammum IV æquale triangulo A. Tum producatur IR infinitè versùs P, & ad rectam RV, in angulo VRP fac (*d*) parallelogrammum RZ æquale trigono B. Rursum ad rectam SZ in angulo ZSP fac parallelogrammum SG æquale trigono C. IG est parallelogrammum quæsitum.

Nam (*e*) angulus ZVR par est sibi alterno IRV. Sed (*f*) QVR & IRV sunt æquales duobus rectis. Ergo etiam QVR & ZVR duobus rectis æquantur. Ergo (*g*) QV & ZV sunt in directum. Pari modo ostendam QZ & GZ esse in directum. Ergo tota QVZG est una recta, & quidem parallela ad IX, cùm per const. QV sit ad IP parallela. Est verò etiam (*h*) XG parallela ad IQ, cùm XG sit parallela ad SZ, & SZ ipsi RV, & RV ipsi IQ. Ergo (*i*) IG est parallelogrammum: esse autem quale petitur, patet ex constructione.

(c) *Per* 44. *l.* 1.
(d) *Per eand.*
(e) *Per* 27. *l.* 1.
(f) *Per. eand.*
(g) *Per* 14. *l.* 1.
(h) *Per* 30. *l.* 1.
(i) *Per. def.* 35.

[Scholium. *Porro, ex hac ipsâ propositione haud obscurum est, quomodo parallelogrammum in angulo dato construere oporteat duorum pluriumve rectilineorum summæ æquale.*

Corollarium. *Hinc facile invenitur excessus quo rectilineum aliquod majus superat rectilineum minus: Nimirum si ad eandem rectam IQ in eodem angulo QIP applicentur ad eandem partem parallelogramma duo, rectilineis datis respectivè æqualia. Parallelogrammum enim quo majus excedit minus, dabit rectilineorum differentiam. Q. E. I.*]

Scholium.

ADjungo problema utile futurum ad praxim propositionis 14. lib. 2.

Fig. 83. Dato quadrangulo BF, rectangulum æquale describere.

Resolve in triangula per rectam AC. Ex oppositis angulis demitte perpendiculares BO, FI. Biseca AC in S. Ex S erige perpendicularem SL parem duabus BO, FI. Rectangulum sub LS & SA; æquatur dato BF. Demonstratio patet ex prop. 41. ejusque Scholio; [*& in Coroll. post prop. 1. l. 2. latius deducetur.*]

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 84. *A Datâ rectâ (AB) quadratum describere.*

Erige duas perpendiculares æquales datæ AB, nempe AC, BE, & junge CE. Dico factum.

(a) Per constr. (b) Per 29. l. 1. (c) Per constr. (d) Per 33. l. 1. (e) Per 34. l. 1.

Cùm enim anguli A & B duo sint (*a*) recti, erunt (*b*) AC, BE parallelæ: sunt verò etiam (*c*) æquales. Ergo (*d*) CE, AB sunt parallelæ & æquales. Ergo figura est parallelogramma, & æquilatera: anguli quoque omnes sunt recti: (cùm enim A & B sint recti, etiam recti erunt (*e*) oppositi, E & C.) Ergo figura AE, est quadratum.

Fig. 73. [Scholium. *Eodem fere modo facilè describes rectangulum ACQX quod sub datis duabus rectis BF, AX continetur; si nempe ad puncta A, X super datâ rectâ AX erigantur perpendiculares AC, XQ datæ BF æquales, & ducatur CQ.*]

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

In omni triangulo (ABC) rectangulo, quadratum lateris (AC) quod recto angulo opponitur, æquale est duobus simul reliquorum laterum (AB, CB) quadratis. Fig. 85.

Ducantur IC, BF, & BE parallela AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis BAC, erunt toti IAC, FAB æquales. Sunt verò in triangulis IAC, FAB, etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter se (*a*) æqualia, nempe, IA, CA, ipsis BA, FA, alterum alteri. Ergo triangula IAC, FAB (*b*) æquantur: Quæ, quia cum parallelogrammis ABLI & ZAFE consistunt in iisdem basibus IA, FA, & in iisdem parallelis IA, LBC, & AF, EZB sunt (*c*) eorum dimidia. Ergo parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium dupla, erunt æqualia inter se. Eodem discursu ductis rectis AX, BR ostendam parallelogramma, EC, BX æqualia esse. Totum igitur AR utrisque IB & BX æquale erit. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per def. fin. quadrati.*
(b) *Per 4. l. 1.*
(c) *Per 41. l. 1.*

Assumptum fuit LBC esse parallelam IA, adeoque LB, BC esse unam rectam. Id verò patet ex 14. cùm anguli LBA & CBA ambo recti sint per hypothesim.

[Cor. 1. *Si triangulum rectangulum ABC habeat latera circa angulum rectum B æqualia; erit quadratum lateris AC angulo recto oppositi, duplum quadrati lateris AB vel BC angulo recto adjacentis. Æquale est enim quadratum lateris AC quadratis* (d) *æqualibus ABq, BCq simul* (e) *sumptis, ac proinde erit unius duplum.* Fig. 86.

(d) *Per axio. 15.*
(e) *Per hanc prop.*

Cor. 2. *Si à trianguli cujuscunque ABC angulo A demittatur in basim (si opus productam) perpendicularis AD; erit differentia quadratorum lateris unius AB & segmenti contermini BD, æqualis differentiæ quadratorum lateris alterius AC & segmenti illi lateri contermini DC. Nam propter angulos ad D* (f) *rectos, erit in triangulo ABD,* $ABq = $ (g) $ADq + BDq$, *& sublato utrinque BDq, erit* $ABq - BDq = $ (h) ADq: *& eodem modo in triangulo ADC ostendi potest, quod* $ACq - DCq = ADq$. *Ergo per axio. 1. erit* $ABq - BDq = ACq - DCq$. *Q. E. D.* Fig. 87.

(f) *Per def. 14.*
(g) *Per hanc prop.*
(h) *Per axio. 3.*

Cor. 3. *In triangulo ABC, demissâ eâdem perpendiculari AD, id erit baseos BC segmentum majus, quod lateri majori AC adjacet, atque illud minus, quod minori AB. Nam propter latus AC majus* (i) *quàm AB, erit ACq majus* (k) *quàm ABq,* Fig. 87.

(i) *Ex hypoth.*
(k) *Per axio. 16.*

(a) Per hanc prop. (b) Per axio. 5. (c) Per axio. 16. *Sed ACq* (a) = *ADq* + *DCq*, & *ABq* = *ADq* + *DBq*. *Ergo summa quadratorum ADq, DCq major est quàm summa quadratorum ADq, DBq. Quare ablato communi ADq,* (b) *erit DCq majus quàm DBq, atque adeo segmentum DC segmento BD majus* (c) *erit.*

Fig. 48. (d) Per 11. l. 1. (e) Per hanc prop. (f) Per axio. 15. (g) Per axio. 16. (h) Per 25. l. 1. Cor. 4. *Si in triangulo ABE, quadratum lateris BE majus fuerit quadratis laterum AB, AE simul sumptis, angulus BAE lateri BE oppositus erit recto major. Erigatur* (d) *enim, super rectâ AB, ad punctum A, perpendicularis AF æqualis lateri AE, & ducatur BF. Ob angulum BAF rectum, erit* (e) *quadratum lateris BF æquale quadratis laterum BA, FA simul sumptis; hoc est, propter æquales FA, AE, quadratum BF* (f) *æquabitur quadratis BA, AE simul sumptis. Sed ex hypothesi, quadratum BE majus est quadratis BA, AE simul sumptis: Ergo quadratum BE majus est quadrato BF, & recta BE* (g) *est rectâ BF major; & proinde angulus BAE* (h) *est angulo recto BAF major. Q. E. D.*

(i) Per hanc prop. (k) Per constr. & axio. 15. (l) Per axio. 16. (m) Per 25. l. 1. Cor. 5. *Eodem modo, si in triangulo ABC, quadratum lateris BC angulo BAC oppositi sit minus quadratis laterum BA, AC simul sumptis, demonstrabitur angulum BAC esse angulo recto minorem. Erectâ enim ad latus AB perpendiculari AF ipsi AC æquali, & ductâ BF, erit BFq* = (i) *ABq* + *AFq. Sed AFq* = (k) *ACq. Ergo BFq* = *ABq* + *ACq. Sed per hypothesim, BCq minus est quàm ABq* + *ACq. Ergo BCq minus est quàm BFq, & proinde BC minor* (l) *quàm BF; unde etiam angulus BAC angulo recto BAF minor* (m) *erit.*

Scholium.

HOC theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras similes extendet) Pythagoricum appellatur passim ab inventore Pythagora; qui, ut testantur Proclus, Vitruvius, aliique, Musis victimas immolavit, quòd se in tam præclaro invento ab iis adjutum putaret. Ignorabat videlicet Scientiarum Dominum, verum & unicum omnis sapientiæ auctorem Deum; aut certè si cognovit, non sicut Deum glorificavit. Frequens porro hujus theorematis & eximius per Mathematicam totam usus est; ac viam imprimis ad incommensurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ Philosophiæ, cognoscendas aperit.

Quadrati latus esse diametro incommensurabile, theorema celebratissimum est apud veteres Philosophos, Aristotelem præsertim & Platonem, adeo ut qui hoc nescîret, eum Plato non hominem esse, sed pecudem diceret. Notitia porro hujus

hujus mysterii duxisse videtur originem ex hac prop. 47. Nam cùm in quadrato angulus A rectus sit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC, ac proinde (a) duplum unius. Quare cùm quadratum diametri CB sit 2. & quadratum lateris AB sit unitas, erit diameter CB radix quadratica numeri binarii, & latus AB radix quadratica unitatis, sive ipsa unitas, quarum proportio (ut suo loco demonstrabitur) numeris explicari nequit, ac proinde incommensurabiles sunt. [*Hæc propositio de incommensurabilitate lateris & diametri in Quadrato, est ultima libri decimi apud Euclidem: demonstratur autem à Tacqueto in Elementis suis Arithmet. in Scholio post prop. 11. lib. 2.*] Fig. 84. (a) Per cor. 1. hujus prop.

Atque hoc vel unico argumento, tametsi cætera omnia deficerent, evidentissimè conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non posse: aliàs enim nullæ essent incommensurabiles, omnium quippe mensura communis esset punctum.

His subjungo tria problemata ex eâdem propositione deducta, quorum usus frequentior.

Problema 1.

DAtis quotcunque quadratis, unum omnibus æquale construere. Fig. 88.

Dentur quadrata tria, quorum latera sint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaque transfer BA & BC, & junge AC. Erit AC quadratum æquale (b) quadratis AB, BC. Tum AC transfer ex B in X; & CE tertium latus datum, transfer ex B in E, & junge EX: erit quadratum ex EX æquale (c) quadratis ex EB (seu EC) & ex BX; hoc est, æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE. (b) Per 47. l. 1. (c) Per eand.

Problema 2.

DAtis duabus rectis inæqualibus (AB, BC,) exhibere quadratum, quo quadratum majoris (AB) excedit quadratum minoris (BC.) Fig. 89.

Centro B, intervallo BA describe circulum, [*& in diametro AF, à centro B versùs F, pone BC.*] Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peripheriæ in E. Quadratum ex CE est excessus quæsitus.

Ducatur enim BE. Quadratum BE, hoc est AB, æquatur (d) quadrato BC & quadrato CE. Ergo &c. (d) Per 47. l. 1.

Pro-

Problema 3.

Fig. 90. NOtis duobus quibuſcunque lateribus trigoni rectanguli, reliquum invenire.

Latera rectum angulum ambientia ſint AC, AB, hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat invenire quot pedum ſit CB, angulo recto oppoſitum. Duc 6. & 8. in ſe ipſa; orientur laterum quadrata 36. & 64. quorum ſumma eſt 100. Radix quadratica 100. nempe 10. dat pedes lateris BC quæſiti. Demonſt. patet ex 47. Nam ſumma quadratorum BA & AC æquatur quadrato BC. Ergo horum ſummæ radix eadem eſt cum radice ſeu latere BC.

Nota ſint deinde latera AB, BC, hoc 10. pedum, illud 6. Oporteat invenire AC. Lateris AB quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris BC. Reſiduum 64. erit quadratum lateris AC. Radix ergo 64. (nempe 8.) dat pedes lateris AC.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 91. *SI quadratum ab uno trianguli latere (AB) deſcriptum, ſit æquale duobus reliquorum laterum (AC, BC) quadratis; angulus (ACB) quem reliqua latera continent, rectus erit.*

Si negas, erit angulus ACB recto major aut minor. Ergo (ut demonſtrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum AB non erit æquale quadratis AC, BC, contra hypotheſim.

Vel ſic. Duc FC perpendicularem ad AC, & æqualem CB, & junge AF. Quadratum AF æquale eſt (*a*) quadratis FC, CA; hoc eſt (*b*) quadratis BC, CA; hoc eſt per hyp. quadrato AB. Ergo rectæ AF, AB æquales (*c*) ſunt. Quoniam igitur trigona X, Z, ſunt ſibi mutuò æquilatera, anguli ad C (*d*) ſunt æquales. Ergo (*e*) recti. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 47. *l.* 1.
(b) *Per conſtruct.*
(c) *Per axio.* 15.
(d) *Per* 8. *l.* 1.
(e) *Per def.* 14.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SECUNDUS.

HIC liber mole parvus, at præstantiâ ac utilitate theorematum plane magnus. Tyrones, scio quod dico, nondum capient; sed esse verissimum ulterius provecti, usu ipso certissimè intelligent.

T*Ractat autem hic Liber* secundus *de Rectarum linearum* potentiis; *hoc est* quadratis. *Comparatque Rectangula varia, e rectarum aut bifariam aut utcunque divisarum partibus oriunda cum totarum linearum rectangulis & quadratis. Pars hæc sane elementorum longe utilissima est: speciatim autem Operationum Algebraicarum præcipuarum verè fundamentum. Propositiones tres priores demonstrandæ Multiplicationi, Quarta radicum quadraticarum extractioni inservit. Quæ sequuntur quinta, sexta, septima, octava Operationibus* Algebraicis; *Reliqua verò* Trigonometricis *conferunt plurimùm. Primâ quidem fronte Tyronibus hic liber videtur difficillimus; eo quòd mysterii quiddam in se continere sibi imaginentur. Attamen Demonstrationes in eodem adhibitæ pleraque omnes facillime huic axiomati nituntur,* Totum, *nempe,* omnibus suis partibus simul sumptis æquari. *Ne verò animum despondeant Tyrones, si primâ vice perfectè nequeant comprehendere. Inter relegendum enim se tam clara non intellexisse olim mirabuntur.*

DEFINITIO.

PArallelogrammum rectangulum (AE) (quod rectangulum simpliciter sine ullo addito appellari solet) contineri dicitur sub duabus lineis rectis (AC, AF) rectum angulum comprehendentibus. Fig. 71. L. II.

Nam earum altera AC altitudinem rectanguli, altera AF latitudinem determinat. Deinde si intelligatur latus AC ferri perpendiculariter per totam AF, aut AE per totam

AC,

AC, producetur eo motu area rectanguli. Quare meritò rectangulum fieri dicitur ex ductu, seu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Fig. 2. l. 2. Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum sub (vel ex) AC, CB, vel brevitatis causâ, rectangulum ACB, designatur rectangulum quod continetur sub AC & CB [*vel sub rectis, quæ ipsis AC, CB respectivè sunt æquales*] ad rectum angulum constitutis. Similiter, cùm dicitur rectangulum sub AB, CB, vel rectangulum ABC, designatur rectangulum contentum sub rectis AB & BC [*vel sub rectis quæ ipsis æquales sunt*] rectum angulum comprehendentibus.

Rectangulum porro aliud est oblongum, aliud quadratum. Oblongum est quod latera contigua habet inæqualia, sive quod continetur sub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum est, quod sub duabus æqualibus continetur.

NOTA. *Signum æqualitatis in hoc libro est*, ≐. [nempe in demonstr. Tacquetianis. Alia signa, hîc & alibi in additis adhibita, explicantur in initio, ante Tacqueti præf. ad lectorem.]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. l. 2. *SI fuerint duæ rectæ (AB, AC) quarum altera secta sit in quotcunque partes (AE, EF, FC:) erit rectangulum sub illis duabus (AB, AC) comprehensum, æquale rectangulis, quæ sub insectâ (AB) & singulis sectæ partibus (AE, EF, FC) continentur.*

Statue AB perpendicularem ad AC. Per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. (*a*) Erit BC rectangulum sub AB, & AC: & est æquale rectangulis BE, IF, LC; hoc est (quia tam IE, quàm LF sunt (*b*) æquales AB,) rectangulis (*c*) sub AB, AE, sub AB, EF, sub AB, FC.

(a) Per def. l. 2.
(b) Per 29. & 34. l. 1.
(c) Per def. l. 2.

Fig. 83. l. 1. [Coroll. *Hinc ampliori demonstratione firmari potest problematis quod in Scholio post prop. 45. lib. 1. legitur, solutio ibidem tradita. Si nempe quadrilaterum BF per rectam AC in triangula ABC, AFC resolvatur, bisecta AC in S, ex oppositis angulis B, F, in basim communem AC ductis perpendicularibus BO, FI, ex S erigatur SL earum summæ æqualis: ostendendum est rectangulum sub CS & SL æquari quadrilatero BF. Cùm enim triangula ABC, AFC* (d) *æquantur rectan-*

(d) Per 41. l. 1.

tangulis sub CS & BO, & sub CS & FI respectivè; cùmque recta LS aequatur ipsis BO & FI simul sumptis, & dividatur in partes, SD, DL, ipsis BO, FI respectivè aequales; Ergo triangula ista, seu quadrilaterum BF, rectangulis CD, LE, sub insectâ CS, & singulis sectae LS partibus, hoc est, vi hujus prop. rectangulo LC sub duabus CS & LS aequari necesse est.]

Scholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam vera sunt in numeris, si, ut lineae, dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata verò numerica ex multiplicatione numeri per seipsum.

[*Sit numerus insectus* 9, *& sectus* 12, *qui in partes tres nimirum* 3, 4 *&* 5 *dividatur. Erit rectangulum ex* 9 *in* 12 *ducto* = 108 *aequale rectangulis tribus* 27 *&* 36 *&* 45, *ex* 9 *in* 3 *&* 9 *in* 4 *&* 9 *in* 5 *respectivè ducto compositis.*

Vel sit numerus 432 *tanquam* multiplicandus *sectus in* 400 *&* 30 *&* 2, *atque numerus* 8 *tanquam* multiplicans *insectus; erit* 8 × 432 = 3456 *aequalis* 8 × 400 = 3200, + 8 × 30 = 240, + 8 × 2 = 16. *Unde etiam Multiplicationis demonstratio peti debet.*]

PROPOSITIO II.

SI recta (AB) secta sit utcunque (in C,) duo rectangula sub totâ (AB) & partibus (AC, CB) comprehensa, quadrato totius aequalia sunt. Fig. 2.

Accipiatur F aequalis AB.

Rect. FAB Æ. (*a*) rect. FAC } rect. FCB. } (a) Per 1. l. 2.

hoc est, quia F & AB sunt aequales inter se;

Quad. ex AB Æ. rect. BAC } rect. ABC. }

[Aliter. *Fiat* (b) *ARDB quadratum rectae AB, & ad punctum C erigatur* (c) *recta CH ipsi AB perpendicularis. Anguli itaque ad C recti, angulis A & B aequales sunt, & rectae AR, CH, BD sibi invicem sunt* (d) *parallelae, & AH, BH* (e) *parallelogramma rectangula. Erit praeterea CH recta* (f) *AR sive* (g) *AB aequalis: & proinde AH, BH sunt* (h) *rectangula sub tota AB & partibus AC, CB comprehensa; & simul sumpta aequantur quadrato ipsius AB.* Fig. 3.

(b) Per 46. l. 1.
(c) Per 11. l. 1.
(d) Per 29. l. 1.
(e) Per def. 35. & cor. 1. p. 34. l. 1.
(f) Per 34. l. 1.

Sit

(g) Per construct. (h) Per def. l. 2.

Sit numerus 8 *in* 5 *&* 3 *sectus : quadratum totius* $8 \times 8 = 64$ *æquale est rectangulis* $8 \times 3 = 24$ *&* $8 \times 5 = 40$.]

PROPOSITIO III.

Fig. 4.

SIt recta (AB) utcunque secta (in C:) Erit rectangulum sub totâ (AB) & partium alterutrâ (BC) comprehensum, æquale rectangulo sub partibus (AC, CB) unà cum quadrato prædictæ partis (BC.)

Assume F æqualem CB.

(a) Per 1. l. 2.

Rect. ABF æ. (a) rect. ACF } rect. CBF:

hoc est, quia æquales sunt CB & F;

Rect. ABC æ. rect. ACB } quad. CB.

Fig. 5. (b) Per Schol. post 46. l. 1. (c) Per 11. l. 1. (d) Per 29. & 34. l. 1. (e) Per constr.

[Aliter. *Fiat* (b) *rectangulum AD sub totâ AB & parte CB; &* (c) *erigatur perpendicularis CE: ob rectam CE, recta* (d) *BD sive* (e) *BC æqualem, rectangulum AD sub totâ AB & parte BC comprehensum, æquabitur rectangulo AE sub partibus AC, CB, unà cum quadrato EB prædictæ partis BC.*

Sit numerus 7 *in partes* 3 *&* 4 *sectus. Rectangulum* $7 \times 3 = 21$ *æquale est rectangulo* $3 \times 4 = 12$ *& quadrato* $3 \times 3 = 9$. *Pariter Rectangulum* $7 \times 4 = 28$ *æquale est rectangulo* $3 \times 4 = 12$ *& quadrato* $4 \times 4 = 16$.]

PROPOSITIO IV.

Fig. 6.

SIT recta (FL) utcùnque secta (in O:) erit quadratum totius æquale quadratis partium (FO, OL) & bis rectangulo sub partibus (FO, OL) contento.

(f) Per 2. l. 2. (g) Per 3. l. 2. (h) Per eand.

Quad. FL æ. (f) rect. FLO cum rect. LFO.

Atqui rect. FLO æ. (g) rect. FOL } quad. OL;

& rect. LFO æ. (h) rect. LOF } quad. FO.

Ergo quad. FL æ. rect. FOL } quad. OL } rect. LOF } quad. FO:

Id

$$\text{Id est, quad. FL } \text{æ. rect. FOL bis} \left.\begin{matrix} \\ \text{quad. OL} \\ \text{quad. FO.} \end{matrix}\right\}$$

[Aliter. *Fiat FGDL quadratum recta FL, & ducta diametro GL, in triangulo FGL, ob aqualia latera FG, FL & angulum F rectum, erunt anguli FGL, FLG semirecti* (a) *& aquales. Per punctum O ducatur ipsi FG vel LD parallela OK, qua secet diametrum GL in C; & per punctum C ipsi FL vel GD parallela agatur HI. Propter omnes angulos quadrati FD rectos, erunt etiam omnia parallelogramma FC, OI, HK, CD rectangula* (b); *& ob parallelas OK, FG, erit* (c) *externus ang. LCO aqualis interno & opp. FGL, hoc est, FLG semirecto. Ergo in triangulo LOC, latera OC, OL sunt* (d) *aqualia: Æquantur* (e) *etiam rectanguli OI opposita latera OL, CI; OC, LI; & proinde OI est* (f) *quadratum recta OL: Et eodem modo demonstrabitur HK quadratum esse recta HC, vel* (g) *FO. Et cùm CO, OL aquentur, erit FC rectangulum sub partibus FO, OL data recta FL. Sed rectangula FC, CD sunt* (h) *aqualia, & proinde FC, CD simul sumpta, aquantur bis rectangulo sub partibus FO, OL. Quare FD quadratum totius recta FL, aquatur ipsis HK, OI, partium FO, OL quadratis, unà cum FC, CD bis rectangulo sub partibus. Q.E.D.*

Fig. 7.

(a) Per cor. 11 pr. 32. l. 1.

(b) Per coll. 1. pr. 34. l. 1.

(c) Per 27. l. 1.

(d) Per 6. l. 1.

(e) Per 34. l. 1.

(f) Per def. 32. l. 1.

(g) Per 34. l. 1. & axio. 15.

(h) Per 43. l. 1.

Sit numerus 10 *in partes* 7 *&* 3 *sectus. Quadratum* $10 \times 10 = 100$ *aquale est quadratis partium* $7 \times 7 = 49$ *&* $3 \times 3 = 9$, *& duobus rectangulis* $7 \times 3 = 21$ *&* $7 \times 3 = 21$. *Vel sit numerus* 12 *in partes* 10 *&* 2 *divisus. Quadratum totius* $12 \times 12 = 144$ *aquale est quadratis partium* $10 \times 10 = 100$ *&* $2 \times 2 = 4$, *unà cum bis rectangulo* 10×2, *sive* $2 \times 10 \times 2 = 40$. *Et hinc pendet radicis quadratica extractio.*

Corollarium 1. *Hinc liquet parallelogramma OI, HK circa diametrum quadrati, esse quadrata.* Fig. 7.

2. *Item diametrum cujusvis quadrati ejus angulos bisecare. Est enim FLD ang. rectus, & FLG semirectus.*

3. *Quadratum linea dimidia est quadrati linea integra pars quarta. Promotis enim rectis OK, HI, motu parallelo, usque ad media puncta A & B, M & N laterum quadrati FD; rectangula FC, CD, & quadrata OI, HK in quatuor aqualia quadrata desinent. Et eodem modo constabit rectangulum (sive etiam parallelogrammum quodlibet) sub duabus rectis quibusvis, rectanguli (seu parallelogrammi parallelogrammo dato aquianguli) sub earum dimidiis esse quadruplum.*

4. *Quadratum quodvis FD aquale est bis rectangulo sub quadrati latere FL seu GD, & lateris dimidio LN seu ND. Æquatur enim rectangulis FN, MD simul sumptis. Item, parallelogrammum quodvis, aquale est bis parallelogrammo aquiangulo sub uno quovis latere & alterius dimidio.*]

D PRO-

PROPOSITIO V.

Fig. 8. *SI recta* (*QX*) *secta fuerit æqualiter* (*in R*) *& inæqualiter* (*in S*,) *erit rectangulum sub inæqualibus partibus* (*QS*, *SX*) *contentum, unà cum quadrato partis intermediæ* (*RS*) *æquale quadrato dimidiæ* (*QR*.)

(a) Per 1. l. 2. Rect. QSX (*a*) Æ. rect. QR. SX } rect. RSX.

Rect. QR, SX Æ. rect. RXS; id est,

(b) Per 3. l. 2. Æ. (*b*) rect. RSX } quad. SX.

Ergo rect. QSX Æ. rect. RSX } quad. SX } rect. RSX.

Addatur utrisque quad. RS: habebitur,

{ rect. QSX, quad. RS } Æ. { rect. RSX, quad. SX, rect. RSX, quad. RS; } id est, (*c*) quad. RX seu QR.

(c) Per 4. l. 2.

Fig. 9. [Aliter. *Super recta QX parte dimidiâ RX fiat quadratum RF, & ductâ diametro XE, per S ducatur SG ipsi RE vel XF parallela, quæ secet diametrum in H; & per H, ipsi QX vel EF parallela agatur KI, secans RE in L,* (d) Per cor. 1. præced. *& per Q ipsi RL parallela agatur QK. Propter* (d) *quadratum SI, circa diametrum quadrati RF, erit SX* (e) = *SH;* (e) Per def. 32. l. 1. *& ob parallelogrammum SL, erit etiam RS* (f) = *LH, &* (f) Per 34. l. 1. *RL = SH = SX. Est autem QR* (g) = *RX* (h) = *XF.* (g) Per hypoth. *Unde QL* (i) = *SF. Commune adjiciatur RG, & QX + LG* (h) Per def. 32. l. 1. *= RF. Sed QH est rectangulum sub recta QH partibus inæqualibus QS, SX; & LG est* (k) *quadratum partis intermediæ RS;* (i) Per def l. 2. *& RF est* (l) *quadratum dimidiæ RX. Ergo, si recta QX, fuerit secta æqualiter in R, & inæqualiter in S, erit, &c. Q. E. D.*

(k) Per cor. 1. præc. & prop. 34. l. 1. *Atque hinc & ex prop. sequenti, pendet æquationum quadraticarum adfectarum constructio Geometrica, uti ad prop. 28. & 29. lib. 6. pleniùs explicabitur.*

(l) Per constr. *Sit numerus* 8 *sectus æqualiter in* 4 *&* 4, *atque inæqualiter in* 5 *&* 3. *Erit rectangulum* 5 × 3 = 15 *unà cùm quadrato* 1 × 1 = 1 *æquale quadrato* 4 × 4 = 16.

Cor. 1. *Hinc rectangulum QSX, partium inæqualium, minus est quadrato QR* (*sive dimidiæ QX.*) *Nam per hanc* prop.

prop. Rectangulum QSX, unà cum quadrato RS, æquatur quadrato QR.

Cor. 2. *Quo propiùs accedit punctum S ad medium punctum R, eo majus erit rectangulum QSX, & quo longiùs à medio puncto recedit, eo minus erit idem rectangulum. Punctum enim S accedendo minuit, & recedendo auget partem intermediam RS; unde (a) etiam RS quad. minuetur & augebitur respectivè. Et cùm per hanc prop. sit RS quad. + QSX rect. = QP quad. Ergo, quo minus fuerit RS quad. eo majus erit rectang. QSX, & vice versâ.* (a) Per axio. 16.

Cor. 3. *Quo propiùs accedit punctum S ad medium punctum R, eo minor erit summa quadratorum partium inæqualium QS, SX; & quo longiùs S a medio puncto recedit, eo major erit illa summa. Nam QXq = (b) QSq + SXq + 2 QSX. Sed punctum S propiùs accedendo ad R, rectangulum QSX auget (c), & recedendo minuit. Ergo idem punctum S ad medium R propiùs accedendo minuit QSq + SXq & recedendo auget.* (b) Per 4. l. 2. (c) Per cor. præced.

Cor. 4. *In fig. 7. rectangulum FOL partium inæqualium rectæ FL quater sumptum, quadrato ipsius FL minus est. Nam quadratum dimidiæ FL quater sumptum (d) æquatur quadrato FL: Sed rectang. FOL (e) minus est quadrato dimidiæ FL; & proinde rectang. FOL quater sumptum, minus est quadrato dimidiæ FL quater sumpto, sive minus est quadrato ipsius FL. Q. E. D.* Fig. 7. (d) Per cor. 3. pr. 4. l. 2. (e) Per cor. 1 hujus.

Cor. 5. *Si duæ rectæ æquales AB, CD, ita dividantur in E, F, ut rectangulum AEB sub partibus unius, æquale sit rectangulo CFD sub partibus alterius; erunt unius partes partibus alterius respectivè æquales, major majori, & minor minori, si partes fuerint inæquales. Si enim puncta E, F, bisecant rectas æquales AB, CD, liquet AE esse = CF, & EB = FD; sin aliter, bisecentur AB, CD, in M & N; atque earum semisses MB, ND æquales (f) erunt, & proinde MBq (g) = NDq. Sed per hanc prop. MBq = AEB rect. + MEq, & NDq = CFD rect. + NFq. Ergo (h) AEB rect + MEq = CFD rect. + NFq. Et ablatis rectangulis ex hypothesi æqualibus, (i) erit MEq = NFq, & ME = NF; quæ si æqualibus AM, CN addantur, & ab æqualibus MB, ND subtrahantur, (k) habebitur AE = CF, & EB = FD. Q. E. D.* Fig. 10. (f) Per axio. 6. (g) Per axio. 15. (h) Per axio. 1. (i) Per axio. 3. (k) Per axio. 2. & 3.

Cor. 6. *Rectangulum sub summâ & differentiâ duarum rectarum (QR, RS,) æquatur differentiæ quadratorum ab illis rectis factorum. Nam per hanc prop. rect. QSX + quad. RS = quad. QR. Aufer utrimque quad. RS, & erit rect. QSX = quad. QR − quad. RS. Cùm igitur QS sit rectarum QR, RS summa, & (propter QR = RX) SX sit earum differentia, liquet propositum.]* Fig. 8. 9.

PROPOSITIO VI.

Fig. 11. *SI recta (AB) sit bifariam secta (in C) eique recta quædam adjiciatur (BF;) erit rectangulum sub totâ compositâ (AF) & adjectâ (BF) contentum, unà cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compositæ ex dimidiâ & adjectâ.*

Adde in directum LA, æqualem adjectæ BF. Cùm æqualibus AC, BC, æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF secta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

(a) Per præced.

$$\text{Ergo}\begin{cases}\text{rect. LBF}\\ \text{cum}\\ \text{quad. CB}\end{cases} \text{æ. (a) quad. CF.}$$

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF,

rect. LBF æ. rect. AFB.

$$\begin{cases}\text{Ergo rect. AFB}\\ \text{quad. CB.}\end{cases} \text{æ. quad. CF.}$$

Fig. 12. [Aliter. *Constructâ enim figurâ 12. super datâ rectâ ACBF, eodem prorsus modo quo in prop. præced. super rectâ QRSX figuram 9. construximus, erit AN rectangulum sub totâ compositâ AF & adjectâ BF; & KG quadratum ipsius CB, sive dimidiæ AB; CE verò quadratum ipsius CF, nempe compositæ ex dimidiâ & adjectâ. Et ob rectangulum HE rectangulo AK æquale, (nam AK (b) = KB (c) = HE) & reliquum spatium utrinque commune, liquet propositum.*

(b) Per 36. l. 1.
(c) Per 43. l. 2.

Sit numerus 6 sectus æqualiter in 3 & 3: eique addatur numerus 2. Erunt rectangulum $8 \times 2 = 16$ *& quadratum* $3 \times 3 = 9$ *æqualia quadrato* $5 \times 5 = 25$.

Fig. 11. Cor. 1. *Hinc si tres rectæ, AF, CF, BF fuerint arithmeticè proportionales, (hoc est, si differentia AC inter primam & secundam, differentiæ CB inter secundam & tertiam fuerit æqualis;) erit rectangulum sub extremis AF, BF, unà cum quadrato differentiæ AC vel CB; æquale quadrato mediæ CF.*

Fig. 12. Cor. 2. *Hinc rectangulum AN, minùs est quadrato CE, defectu quadrati KG, quod datâ rectâ AB, semper idem manet, utcunque augeatur recta BF. Ex augmento verò ipsius BF, rectangulum AN ad quadratum CE magis magisque accedit, tam proportione, quàm figurâ; ita ut differentia ista KG, respectu magnitudinis figurarum AN & CE, tandem videatur contemnenda.*]

PRO-

PROPOSITIO VII.

SI recta (AB) fuerit utcunque secta (in C,) erunt quadrata totius (AB) & segmenti alterutrius (AC) æqualia bis rectangulo contento sub totâ (AB) & segmento dicto (AC,) unà cum quadrato segmenti alterius (CB.) Fig. 13.

Quad. AB (*a*) æ. rect. BCA bis, quad. AC, quad. BC. (a) Per 4. l. 2.

Adde utrisque quad. AC: erunt

Quad. AB, quad. AC æ. rect. BCA bis, quad. AC bis, quad. BC.

Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis, æquatur (*b*) rectangulo BAC bis. Quare si pro BCA bis & quad. AC bis substituamus BAC bis; erit. (b) Per 3. l. 2.

Quad. AB, quad. AC æ. rect. BAC bis, quad. BC.

[Aliter. *Constructâ figurâ 14, ita ut AD sit quadratum totius AB, & AL quadratum partis AC, ductâque quadrati AD diametro EB, & productâ LC in F, quæ secet diametrum in G, & per G ductâ HI parallelâ ipsi AB vel ED, erunt rectæ HK, HI toti AB & sibi invicem æquales; (nempe HK = HA + AK, & AK (c) = AC, AH (d) = CG (e) = CB, unde HK = AC + CB = AB (f) = HI;) & HE, HG parti AC & sibi invicem æquales. Unde ob duo æqualia rectangula sub totâ AB & parte AC, nempe HD, HL; & CI quadratum partis alterius, idem spatium cum quadratis AD, AL continentia, liquet propositum.* Fig. 14.

(c) Per constr. & def. 32. l. 1.
(p) Per 34. l. 1.
(e) Per cor. 1. pr. 4. l. 2. & def. 32. l. 1.
(f) Per 34. l. 1.

Sit numerus 13 utcunque sectus in 9 & 4. Erunt quadrata $13 \times 13 = 169$ *&* $9 \times 9 = 81$ *æqualia* $13 \times 9 = 117$ *&* $13 \times 9 = 117$ *& quadrato* $4 \times 4 = 16$.

Propositio quarta nobis exhibet radicis binomiæ quadratum; ex hac autem septimâ elicietur quadratum radicis residuæ, per sequens.

Corollarium. *Si a rectâ BA auferatur pars AC; quadratum residuæ BC, a quadratis totius BA & ablatæ AC simul sumptis exceditur, bis rectangulo BAC quod sub totâ & ablatâ continetur. Nam per hanc prop.* $BAq + ACq = 2$ *rect.* $BAC + BCq$; *& utrinque subducendo 2 rect. BAC, erit* $BAq - 2$ *rect.* $BAC + ACq = BCq$. *Q. E. D.* Fig. 13.

Fig. 14. *Sic sane, in fig.* 14. *CI* = *AD* + *AL* — *HD* — *HL*; *hoc est, BCq* = *BAq* + *ACq* — *rect. BAC bis.*]

PROPOSITIO VIII.

Fig. 15. **S***I recta* (*LF*) *fuerit secta bifariam* (*in I*) *eique quadam recta adjiciatur* (*FO*;) *erit rectangulum* (*LIO*) *quod sub* (*LI*) *dimidiâ, &* (*IO*) *compositâ ex dimidiâ & adjectâ continetur, quater sumptum, unà cum quadrato adjectæ* (*FO*,) *æquale quadrato totius compositæ* (*LO*.)

(a) Per præc.

Quad. IO (*a*) æ. rect. OIF bis
quad. IF quad. FO.

hoc est, quia ex hyp. FI, LI sunt æquales, ac proinde quad. FI est quad. LI, & rect. OIF est rect. OIL, seu LIO,

quad. IO æ. rect. LIO bis
quad. LI quad. FO.

Quare si utrisque æqualibus addas rect. LIO bis; Erit

quad. IO
quad. LI
rect. LIO bis;

id est,

(b) Per 4. l. 2.

(*b*) quad. LO æ. rect. LIO bis
quad. FO
rect. LIO bis:

Id est,

æ. rect. LIO quater
& quad. FO.

Fig. 16. [Aliter. *Fiat OD quadratum totius compositæ LO, & ductâ ejus diametro LA, per I, F puncta, ipsi LD vel OA parallelæ agantur IB, FE, secantes diametrum in R & S; & per R, S puncta, ipsi LO vel DA parallelæ agantur TN, MH. Propter LF bisectam in I,* (c) *erit linea dimidia LI quadratum TI, pars quarta quadrati MF lineæ integræ LF, & quatuor rectangula TI, RF, MR, PQ* (d) *erunt quadrata sibi mutuò æqualia. Deinde, propter FQ, QS æqualium quadratorum latera, & proinde æqualia,* (e) *æquabuntur rectangula FN, QH: Sed FH* (f) = *DS, & QH,* (g) = *BS; ergo & FN* (h) = *BM, & quatuor rectangula FN, QH, BM, BS erunt sibi mutuò æqualia. Porrò propter æquales LI, IR, erit RO,* (*hoc est, quadratum RF unà cum rectangulo FN*) *rectangulum sub dimidiâ LI, & IO compositâ ex dimidiâ & adjectâ:*

(c) Per cor. 3. pr. 4. l. 1.
(d) Per cor. idem.
(e) Per 36. l. 1.
(f) Per 43. l. 1.
(g) Per eandem.
(h) Per axio. 3.

Ergo

Ergo quatuor quadrata, TI, RF, MR, PQ, unà cum quatuor rectangulis FN, QH, BM, BS æquabuntur rectangulo sub dimidiâ LI, & compositâ IO quater sumpto: Est autem EH quadratum adjectæ FO. Ergo, si recta LF fuerit secta bifariam in I, eique quædam recta FO adjiciatur; erit &c. Q. E. D.

Sit numerus 12 sectus æqualiter in 6 & 6; eique addatur numerus 4. Erunt quatuor rectangula $10 \times 6 = 240$ *& quadratum* $4 \times 4 = 16$ *æqualia quadrato* $16 \times 16 = 256$.

Euclides hanc propositionem hoc modo effert.

Si recta IO fuerit utcunque secta in F; erit rectangulum OIF quod sub totâ IO, & unâ parte IF continetur, quater sumptum, unà cum quadrato reliquæ partis FO, æquale quadrato quod ex totâ & dictâ parte OI + IF [*seu sumptâ in OI productâ, rectâ IL = IF, æquale quadrato quod ex OI & IL, nempe LO*] tanquam unâ lineâ describitur. Fig. 16.

Sit numerus 10 divisus in 6 & 4; erit factum ex 6×10 *quater sumptum* $= 240$, *&* $4 \times 4 = 16$; *Et* $240 + 16 = 256 = \overline{10+6} \times \overline{10+6}$.]

PROPOSITIO IX.

SI recta (AC) sit divisa bifariam (in B) & non bifariam (in F;) erunt quadrata partium inæqualium (AF, FC) dupla quadratorum dimidiæ (AB) & partis intermediæ (BF.) Fig. 17.

$$\text{Quad. AF Æ. (a) rect. ABF bis} \left.\begin{array}{l} \\ \text{quad. AB} \\ \text{quad. BF.}\end{array}\right\}$$

(a) Per 4. l. 2.

Addito igitur utrisque quad. FC,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{quad. AF}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right. \text{Æ. rect. ABF bis} \left.\begin{array}{l} \\ \text{quad. AB} \\ \text{quad. BF} \\ \text{quad. FC.}\end{array}\right\}$$

Sed rect. ABF est rect. CBF, quia AB, BC sunt æqualia ex hyp.

$$\text{Ergo} \left\{\begin{array}{l}\text{quad. AF}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right. \text{Æ. rect CBF bis} \left.\begin{array}{l} \\ \text{quad. AB} \\ \text{quad. BF} \\ \text{quad. FC.}\end{array}\right\}$$

Atqui (b) CBF bis cum quad. FC æquantur quadratis BC, BF, seu AB, BF: quare si hæc illis substituas, erunt quad. (b) Per 7. l. 2.

quad. AF } Æ. quad. AB
quad. FC } quad. AB
quad. BF
quad. BF;
Id est,
quad. AB } bis.
quad. BF }

Fig. 18. [Aliter. *Ad punctum B erigatur BE æqualis & perpendicularis ipsi BA vel BC; & ductis AE, EC, per F agatur ipsi BE parallela FQ, & per Q ducatur QG parallela rectæ AC, & ducatur AQ. Propter ang. ABE rectum & lineas AB, BE æquales,* (a) *erunt BAE, BEA semirecti; & ob eandem rationem erunt BCE, BEC semirecti; Unde AEQ est rectus. Et propter* (b) *QFC rectum, & C semirectum, erit & FQC* (c) *semirectus, & rectæ FQ, FC erunt* (d) *æquales. Et quoniam rectas parallelas GQ, AC secat recta EB, erit* (e) *externus ang. EGQ æqualis interno & op. EBC, & proinde rectus; angulus verò GEQ est semirectus, ergo & GQE* (f) *semirectus erit, & rectæ GE, GQ erunt* (g) *æquales; & propter BQ rectangulum,* (h) *æquatur GQ ipsi BF. Unde in triangulo rectangulo ABE, propter æquales rectas AB, BE erit AE quadratum* (i) *duplum quadrati AB partis dimidiæ; & in triangulo rectangulo EGQ, propter æquales EG, GQ, erit EQ* (k) *quadratum duplum quadrati GQ vel BF partis intermediæ. Quadrata verò AE & EQ æqualia sunt* (l) *quadrato AQ; hoc est, quadratis* (m) *AF & FQ sive AF & FC partium inæqualium. Ergo quadrata partium inæqualium AF, FC, dupla sunt quadratorum partis dimidiæ AB, & partis intermediæ BF. Q. E. D.*

(a) Per cor. 1. pr. 32. l. 1.
(b) Per 27. l. 1.
(c) Per cor. 6. pr. 32. l. 1.
(d) Per 6. l. 1.
(e) Per 27. l. 1.
(f) Per cor. 6. pr. 32. l. 1.
(g) Per 6. l. 1.
(h) Per 34. l. 1.
(i) Per cor. 1. pr. 47. l. 1.
(k) Per idem.
(l) Per 47. l. 1.
(m) Per quad.

Sit numerus 32 divisus æqualiter in 16 & 16; & inæqualiter in 20 & 12. Erunt quadrata $20 \times 20 = 400$ & $12 \times 12 = 144$ *dupla quadratorum* $16 \times 16 = 256$ & $4 \times 4 = 16$.]

PROPOSITIO X.

Fig. 19. *SI recta (FI) sit bisecta (in L) eique quædam recta adjiciatur (IO;) erunt quadrata totius compositæ (FO) & adjectæ (IO) dupla quadratorum quæ describuntur super dimidiâ (FL) & super (LO) compositâ ex dimidiâ & adjectâ.*

Adjiciatur in directum QF, æqualis IO. Quia ergo etiam FL, FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO bisecta est in L, & aliter in I. Ergo

$$\left\{\begin{matrix}\text{quad. QI} \\ \text{quad. IO}\end{matrix}\right. \text{æ. (a)} \left.\begin{matrix}\text{quad. QL} \\ \text{quad. LI}\end{matrix}\right\} \text{bis.}$$ (a) Per prac.

Sed quad. QI est quad. FO, & quad. QL est quad. LO, & quad. LI est quad. FL.

$$\text{Ergo} \left\{\begin{matrix}\text{quad. FO} \\ \text{quad. IO}\end{matrix}\right. \text{æ. quad.} \left.\begin{matrix}\text{FL} \\ \text{quad. LO}\end{matrix}\right\} \text{bis.}$$

[Aliter. *Ad L punctum, recta FL vel LI æqualis & perpendicularis agatur LE, & ducantur FE, EI; & per E ducatur EQ parallela ipsi FO; & per O ducatur OQ parallela ipsi LE: & ob rectas parallelas EL, QO, recta EI, QO non parallela, si producantur,* (b) *concurrent alicubi. Producantur donec concurrant in G, & ducatur FG. Propter angulum FLE rectum, & FL, LE æquales,* (c) *erunt LFE, LEF semirecti; & pari ratione LIE, LEI* (d) *erunt semirecti, & proinde FEI rectus. Porro angulus OIG, oppositus ad verticem semirecto LIE,* (e) *est etiam semirectus: & propter parallelas EL, QG, a recta FO sectas in L & O, & angulum ELO rectum, erit etiam ang.* (f) *alternus GOL rectus: quare in triangulo GOI, propter angulum ad O rectum & ad I semirectum, erit & ang. OGI* (g) *semirectus, & proinde latera OG, OI* (h) *erunt æqualia. Et cùm in parallelogrammo LQ, angulus L rectus sit, etiam oppositus Q rectus* (i) *erit. Quare in triangulo EQG, propter Q rectum, & QGE semirectum, erit & QEG* (k) *semirectus, & latera QE, QG* (l) *æqualia: sed in rectang. LQ, est EQ* (m) *= LO: quare LO = EQ = QG. Jam verò, in triangulo rectangulo FLE, propter latera FL, LE æqualia, FE quadratum duplum* (n) *est quadrati FL partis dimidiæ; & in triangulo rectang. EQG, propter latera QE, QG æqualia, erit EG quadratum,* (o) *duplum quadrati EQ vel LO compositæ ex dimidiâ & adjectâ. Quadrata verò FE & EG æqualia sunt* (p) *quadrato FG; hoc est,* (q) *quadratis FO totius compositæ, & OG vel OI partis adjectæ. Ergo* (r) *quadrata totius compositæ FO, & adjectæ OI, dupla sunt quadratorum dimidiæ FL, & LO compositæ ex dimidiâ & adjectâ. Q. E. D.*

Sit numerus 40 sectus æqualiter in 20 & 20, eique addatur numerus 14. Erunt Quadrata 54 × 54 = 2916 & 14 × 14 = 196 dupla quadratorum 20 × 20 = 400, & 34 × 34 = 1156.]

Fig. 20.
(b) Per cor. 1. Sch. p. 31. l. 1.
(c) Per cor. 11. pr. 32. l. 1.
(d) Per idem.
(e) Per 15. l. 1.
(f) Per 27. l. 1.
(g) Per cor. 6. p. 32. l. 1.
(h) Per 6. l. 1.
(i) Per 34. l. 1.
(k) Per cor. 6. pr. 32. l. 1.
(l) Per 6. l. 1.
(m) Per 34. l. 1.
(n) Per cor. 1. pr. 47. l. 1.
(o) Per idem.
(p) Per 47. l. 1.
(q) Per eand.
(r) Per axio. 1.

PROPOSITIO XI.

Fig. 21.

DAtam rectam (AB) ita secare (in C,) ut rectangulum (ABC) sub totâ & unâ parte contentum, æquale sit quadrato partis reliquæ (AC.)

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biseca in X. Duc rectam XB; cui ex FA productâ æqualem abscinde XI. Tum abscinde AC æqualem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ductâ per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA bisecta est in X, eique adjecta est AI; erit

(a) Per. 6. l. 2.

{ rect. FIA
quad. XA } æ. (a) quad. XI;

id est,

(b) Per constr. & axio. 13.

æ. (b) quad. XB;

id est,

(c) Per 47. l. 1.

æ. (c) quad. { BA
quad. XA. }

Auferatur utrimque quad. XA; Erit

rect. FIA seu FL æ. quad. BA; id est AS.

Quare ablato rursum communi AO;

Erit AL æ. CS.

Atqui AL est quadratum AC, cùm AI, AC ex constr. sint æquales: & CS est rect. ABC, cùm BS sit par AB. Ergo rectang. ABC æquatur quadrato AC. Datam igitur rectam secuimus, ut petebatur.

Scholium.

PRopositiones 10. primæ hujus libri veræ sunt, etiam in numeris. Hæc 11. numeris explicari non potest. Neque enim ullus numerus ita secari potest, ut productum ex toto in partem unam, æquale sit quadrato partis reliquæ. [*Et hoc quidem demonstravit Tacquetus noster in Schol. post prop. 29 libri tertii elementorum Arithmet. In numeris surdis autem exhiberi possunt quantitates segmentis AC, CB respondentes. Sit AB = 2: hoc est, proponatur numerus binarius ita dividendus in partes duas, ut quadratum partis majoris æquetur facto sub toto binario in sui partem minorem ducto. Erit AC, sive pars major* $= \sqrt{5} - 1$; *& CB, sive pars minor* $= 3 - \sqrt{5}$. *Sic enim, non solùm istarum partium summa toti binario æqualis erit; verùm etiam, tum quadratum partis majoris,*

tum

tum & factum ex binario & parte minori, æquabitur uni eidemque quantitati, nempe 6—2 √ 5.] Porro mira vis est hujus sectionis, de quâ vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

IN trigono obtusangulo (ACB,) quadratum lateris (AB) obtuso angulo (C) oppositi, quadrata laterum reliquorum (AC, BC) excedit rectangulo (BCF) bis, quod comprehenditur sub (BC) latere alterutro obtusum angulum (ACB) continentium, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis (AF;) & sub (FC) intercepto exterius latere inter perpendicularem & obtusum angulum. Fig. 22.

Quad. AB æ. (*a*) $\left.\begin{array}{l}\text{quad. AF}\\ \text{quad. BF}\end{array}\right\}$ (a) Per 47. l. 1.

Sed quad. BF est (*b*) æquale quadratis FC, CB, & rect. BCF bis. Ergo si hæc substituas pro quad. BF; erit (b) Per 4. l. 2.

Quad. AB æ. $\left.\begin{array}{l}\text{quad. AF}\\ \text{quad. FC}\\ \text{quad. CB}\\ \text{rect. BCF bis.}\end{array}\right\}$

Atqui quadrata AF, FC æquantur quadrato (*c*) AC. Quare hoc pro illis substituto, erit (c) Per 47. l. 1.

Quad. AB æ. $\left.\begin{array}{l}\text{quad. AC}\\ \text{quad. CB}\\ \text{rect. BCF bis.}\end{array}\right\}$

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocumque (ACB,) quadratum lateris (AB) acuto angulo (C) oppositi, a quadratis laterum reliquorum (AC, BC) exceditur rectangulo (BCF) bis, quod continetur sub (BC) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (AF) ab angulo opposito (A;) & sub (CF) interceptâ inter perpendicularem (AF) & acutum angulum (C.) Fig. 23. 24.

Quad.

(a) Per 4. l. 2. Quad. BC. Æ. (a) rect. BFC bis
quad. BF
quad. FC.

(b) Per 47. l. 1. Et Quad. AC (b) Æ. quad. FC
quad. AF.

Quare duo simul { quad. BC / quad. AC } Æ. { rect. BFC bis / quad. BF / quad. FC bis / quad. AF }

(c) Per 3. l. 2. Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur (c) rectangulo BCF bis. Ergo hoc pro illis substituto,

{ Quad. BC / quad. AC. } Æ. { rect. BCF bis / quad. BF / quad. AF. }

(d) Per 47. l. 1. Atqui quadrata AF, BF sunt (d) quad. AB. Ergo hoc pro illis substituto,

{ Quad. BC / quad. AC } Æ. { rect. BCF bis / quad. AB: }

Hoc est, BC, AC quadrata excedunt quad. AB rectangulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 25. (e) Per cor. 3. p. 32. l. 1. VEra est propositio licèt perpendicularis [*AF, propter angulum ABC (e) obtusum,*] cadat extra triangulum. [*In latûs CB productum.*] Demonstratio fere eadem est. [*Vel sic:*

(f) Per. 12. l. 2. *Quad. AC Æ. (f) rect. CBF bis*
quad. CB
quad. AB.

Addito igitur utrisque quadrato CB,

{ *quad. AC* / *quad. CB* } Æ. { *rect. CBF bis* / *quad. CB bis* / *quad. AB.* }

(g) Per 3. l. 2. *Atqui rectang. CBF bis, unà cum quadrato CB bis, æquatur* (g) *rectangulo BCF bis:*

Ergo { *quad. AC* / *quad. BC* } Æ. { *rect. BCF bis* / *quad. AB.* }

Fig. 23. 24. 25. (h) Per 7. l. 2. (i) Per 47. l. 1. (k) Per eand. ALITER & *universaliùs demonstrabitur prop. 13. sive cadat perpendicularis intra triangulum, sive extra.*
$BCq + CFq = $ (h) 2 *rect.* $BCF + BFq$. *Adde utrinque* AFq; $BCq + CFq + AFq = 2$ *rect.* $BCF + BFq + AFq$. *Sed* $CFq + AFq = $ (i) ACq, & $BFq + AFq = $ (k) ABq. *Ergo* $BCq + ACq = 2$ *rect.* $BCF + ABq$. *Q. E. D.*]

Scho-

Scholium (1.)

EX hac & 47. lib 1. habetur dimensio cujuscunque trianguli cujus tria latera sint nota, licèt aream habeat imperviam. Horum quippe theorematum beneficio innotescit perpendicularis, etiamsi eam impedimenta loci non sinant designari. Perpendicularis autem multiplicata per semissem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex scholio propos. 41. l. 1.

Esto trigonum quodcunque ACB nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem AF ex dato angulo A in latus oppositum BC demissam. Fig. 23. vel 24.

Quadratum lateris AB acuto C oppositi, aufer ex summâ quadratum AC, CB. Per 13. residuum erit rectangulum BCF bis. Residui semissem (hoc est, rectangulum BCF) divide per notum latus BC. Proveniet recta CF. Quadratum rectæ CF aufer ex quadrato AC. Residuum dabit quadratum AF, cujus radix quadratica dabit perpendicularem AF.

[*Ex. gr. sit* $AB = 13$, *&* $BC = 14$, *&* $AC = 15$. *Erit* $ABq = 169$, *&* $BCq + ACq = 196 + 225 = 421$. *Unde* $2\ BCF\ (= BCq + ACq - ABq = 421 - 169) = 252$, *& propterea* $BCF = 126$, *&* $CF = 9$. *Ergo* $AFq\ (= ACq - CFq = 225 - 81) = 144$, *&* $AF = 12$. *Et trianguli area erit* $12 \times 7 = 6 \times 14 = 84$. Fig. 24.

Obtinere id ipsum poteris etiam ex p. 12. Verùm 13. sufficit, cùm in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppositum, intra triangulum cadat. Fig. 23. 24.

[*Ne autem Tyronibus desit exemplum, quo etiam ex prop. 12. aream trianguli obtusanguli, (ubi perpendicularis cadit extra triangulum,) datis lateribus, obtinere possint; In triangulo obtusangulo ABC, (fig. 22.) sit* $AB = 20$, $AC = 13$, $BC = 11$. *Erit* $ABq = 400$, $ACq + BCq = 169 + 121 = 290$. *Unde* $ABq - ACq - BCq = 400 - 290 = 110 = 2\ BCF$, $BCF = 55$, $CF = 5$, $CFq = 25$, $ACq - CFq = 169 - 25 = 144 = AFq$. *Unde* $AF = 12$, *&* $\frac{1}{2}\ AF \times BC = 6 \times 11 = 66$ *est area trianguli ABC.*] Fig. 22.

Scholium (2.) *Si a trianguli cujusvis (ACB) vertice (A) in basem (CB) si opus productam, demittatur perpendiculum (AF;) erit differentia quadratorum è lateribus (AC, AB,) æqualis duplo rectangulo sub basi (CB,) & (CF − ½ CB) distantia perpendiculi a medio basis.* Vide Arithmet. Univers. pag. 103. edit. primæ. Fig. 24. 25.

Nam

Nam per hanc prop. $ACq + BCq = ABq + 2\,BCF$.

Et subductis utrinque $ABq + BCq$, *erit* $AC - ABq = 2\,BCF - BCq$.

(a) Per cor. 4. p. 4. l. 2. *Sed* $BCq = $ (a) $2\,BC \times \frac{1}{2}\,BC$. *Ergo* $ACq - ABq = 2\,BC \times \overline{CF - \frac{1}{2}\,BC}$. Q. E. D.

Fig. 26. (b) Per n. 1. Schol. p. 26. l. 1. *Si latera AB, AC sint æqualia, perpendiculum cadet in medium* (b) *basis; adeoque tum differentia quadratorum è lateribus, tum distantia perpendiculi à medio basis simul evanescunt.*

Fig. 27. (c) Per pr. ob. 2. post 47. l. 1. (d) Per cor. 4. pr. 4. l. 2. *Si alteruter angulorum ad basim sit rectus, ut B; perpendiculum AF cum latere AB coincidet; & differentia quadratorum è lateribus* (c) *æquabitur quadrato basis CF. Distantia autem perpendiculi a medio basis æquabitur basis dimidio, & proinde duplum rectang. sub basi & istâ distantiâ, hoc est, sub basi & basis dimidio,* (d) *æquabitur etiam quadrato basis. Quare differentia quadratorum è lateribus æqualis erit duplo rectangulo sub basi & distantiâ perpendiculi a medio basis.*

Fig. 28. (e) Per cor. 3. p. 32. l. 1. (f) Per axio. 15. (g) Per 36. l. 1. (h) Per axio. 9. (i) Per axio. 3. Schol. 3. *Si a trianguli cujusvis ABP vertice A ducatur recta AC basem BP bisecans in C, erunt quadrata laterum AB, AP simul sumpta, dupla quadratorum dimidiæ basis BC, & rectæ AC bisecantis basem, simul sumptorum. A vertice A demittatur AF perpendicularis basi, & cadat inter C & P.* (e) *Erit itaque angulus ACB obtusus, & ACP acutus. Unde per prop.* 12, *erit* $ABq = ACq + CBq + 2\,BCF$ *& per prop.* 13, *erit* $APq = ACq + CPq - 2\,PCF$. *Sed propter* $BC = PC$, *erit* $CBq =$ (f) CPq, *&* $2\,BCF =$ (g) $2\,PCF$. *Unde* $CBq + CPq =$ (h) $2\,CBq$, *&* $2\,BCF - 2\,PCF$ (i) $= 0$. *Ergo æqualibus addendo quantitates æquales, provenient æqualia aggregata,* $ABq + APq = 2\,ACq + 2\,CBq$. Q. E. D.

Coroll. *Iisdem manentibus base BP, & rectâ AC bisecante basem, utcunque ad basem varie inclinatâ, ut aC, idem manebit aggregatum quadratorum crurum; scil.* $ABq + APq = aBq + aPq$. *Et sic ubique.*

Hæc autem propositio ad Curvarum tangentes, diametros & ordinatas applicari potest. Tangant v. gr. recta AB, AP conicam quamlibet sectionem vel sectiones oppositas in B & P; & juncta BP bisecetur recta AC: erit BC vel PC ordinata ad diametrum AC. Unde quadrata tangentium AB, AP dupla erunt quadratorum ordinatæ BC vel PC, & diametri inter ordinatam ac tangentium concursum intercepta AC. Hac etiam propositione utitur Serenus Antissensis in sectione coni à plano per verticem ducto. Verùm hæc extra oleas.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

D*Ato rectilineo (QXZ,) æquale quadratum construere.* *Fig. 29.*

[*Sume rectum quamvis IA; super quâ*] rectilineo QXZ fac æquale (*a*) parallelogrammum rectang. CI, cujus latera IA, CA, si æqualia fuerint, ipsum erit quadratum quod petitur: si inæqualia sint, latus majus IA produc in L, donec AL sit par AC. IL bisseca in Z; quo centro per I & L describe circulum, & producatur CA donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ AB æquale est dato QXZ. (a) *Per 45. l. 1.*

Ducatur enim recta ZB, Quoniam IL secta est bifariam in Z, & aliter in A; erit

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. IAL}\\ \text{quad. ZA}\end{array}\right.$ Æ. (*b*) quad. ZB; hoc est, (b) *Per 5. l. 2.*

Æ. (*c*) quad. ZB; hoc est, (c) *Per constr. & def. circuli.*

Æ. (*d*) $\left.\begin{array}{l}\text{quad. ZA}\\ \text{quad. BA}\end{array}\right\}$ (d) *Per 47. l. 1.*

Ablato igitur utrimque quadrato ZA communi, remanet
rect. IAL Æ. quad. BA:
hoc est, quia AC, AL sunt æquales, erit
rect. CI,
Id est, (*e*) rectil. QXZ Æ. quad. AB. (e) *Per constr.*

Scholium.

COnstructio Euclidea requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cùm satis operosa sit, fortasse expeditiùs problema absolvetur hunc in modum.

Rectilineum datum resolvatur in tot quadrangula (Z, X) quot potest. Tum singulis quadrangulis fac (*f*) rectangula æqualia. Si tunc superfit (ut hic contigit) unum triangulum (Q) illi quoque fac (*g*) æquale rectangulum. Singulis deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis unum æquale (*h*) fiat. Erit hoc æquale dato QXX. (f) *Per sch. 2. p. 45. l. 1.* (g) *Per cor. p. 42. l. 1.* (h) *Per prob. 1. sch. p. 47. l. 1.*

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

PErfectissimæ inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonstrantur. Libri utilitas vel hoc solo innotescit, quòd tractet de circulo, rerum admirabilium per Mathesim universam fonte uberrimo. Theoremata illustriora sunt 16, 20, 21, 22, 31, 32, 35, 36.

C*Ontinet autem liber hic* tertius *circuli proprietates: lineasque plurimas* & intra *ejusdem peripheriam* & extra *ad eandem ductas inter se comparat. Circulorum etiam se mutuò intersecantium, & se mutuò, aut lineas rectas tangentium affectiones explicat. Angulos etiam sive ad centrum sive ad circumferentiam positos inter se componit. Breviter Prima* Geometriæ Practicæ *elementa, circulorum adminiculo potissimum innixa, exponit.*

DEFINITIONES.

1. CIrculi æquales sunt, quorum diametri seu semidiametri sunt æquales.

Fig. 21. l. 3. 2. Recta (FB) circulum tangere dicitur, quæ circulo sic occurrit (in B) ut tamen producta circulum non secet.

Fig. 14. & 15. 3. Circuli tangere se dicuntur, cùm sibi sic occurrunt, ut tamen non secent.

Fig. 19. 4. In circulo æqualiter à centro (A) distare dicuntur rectæ (BC, FL) cùm perpendiculares (AI, AO) quæ ex centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. [*Et si perpendiculares in rectas (XZ, BI) demissa, sint inæquales, magis à centro distare dicitur ea recta (XZ) in quam cadit major perpendicularis.*]

Fig. 20.

Fig. 38. 5. Segmenta, seu portiones circuli sunt partes (CQE, CSE) in quas circulum dividit recta (CE) circulum secans, [*qua segmenti utriusque basis est.*]

Fig. 34. 35. 6. Angulus in segmento est (BQC) qui continetur sub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ punctum (Q) ex segmenti terminis (C, B) ducuntur.

Fig. 34. 7. Angulus (CQB) insistere dicitur peripheriæ (BOC) quæ illi opponitur.

Fig. 12. 8. Sector est pars circuli a duabus semidiametris (AB, AF) & arcu

& arcu (BF vel BCF) quem semidiametri intercipiunt, comprehensa.

[9. *Angulus (BAO) segmenti (ABQO) est, qui basi segmenti (BA) & arcu (QOA) comprehenditur.* Fig. 22.

10. *Recta BC circulo inscripta, vocatur arcuum BAC, BIC, vel anguli ad centrum BDC* chorda *sive* subtensa. *Et, si ab arcûs AB extremo B ducatur diameter AI, & in eam ab altero arcûs extremo B cadat perpendicularis BG; appellatur hæc arcuum BA, BI, sive angulorum ad centrum BDA, BDI* sinus rectus, *vel simpliciter* sinus; *eritque GA, arcûs AB vel anguli ADB (& GI arcûs IB vel anguli IDB)* sinus versus. *Porro, si producatur radius DB donec rectæ EF (circulum tangenti in A) occurrat in E; recta AE nominatur arcuum AB, BI, vel angulorum ADB, BDI* tangens, *& recta DE earundem arcuum vel angulorum* secans. *Præterea, anguli ad centrum recti ADK sinus rectus DK (qui in hoc casu, circuli radius, erit,) peculiari nomine* sinus totus *appellatur. Denique sinus rectus BL anguli BDK (quod complementum est anguli ADB ad rectum) vocatur* cosinus *anguli ADB: item HK tangens, & HD secans ejusdem anguli BDK, est anguli ADB* cotangens *&* cosecans *respectivè.*] Fig. 40.

PROPOSITIO I.

D*Ati circuli centrum invenire.*

Ducatur in circulo recta BC utcunque, quam biseca in Q. Per Q duc perpendicularem LF. Hanc biseca in A. Erit A centrum. Fig. 1. & 2.

Si negas; centrum esto O extra rectam FL, (nam in FL esse non poterit, cùm ubilibet extra A dividatur inæqualiter;) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum esse, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ sibi mutuò æquilatera sunt, cùm etiam ex constr. BQ & QC sint pares, & QO communis. Ergo (a) angulus OQC æquatur angulo OQB. Ergo OQC (b) rectus est, ac proinde angulo LQC per constr. recto æquatur, pars toti. Quod est absurdum.

(a) Per 8. l. 1.
(b) Per def. 14. l. 1.

Corollarium.

EX demonstratis patet, si in circulo recta (LF) aliam (BC) bifariam & perpendiculariter secat, in secante esse centrum.

Facillime per normam invenitur centrum; vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungens puncta Fig. 2.

D & E, quibus normæ latera peripheriam secant, bissecetur in A, erit A centrum. Demonstratio pendet ex 31. hujus.

PROPOSITIO II.

Fig. 2.

Si in circuli ambitu duo puncta sumantur (B, C,) recta quæ per illa ducitur, intra circulum cadit.

Accipiatur in recta BC quodvis punctum O, & ex centro A ducantur AO, AB, AC. Quoniam AB, AC æquantur, etiam (*a*) anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus AOC (*b*) major est interno B, major erit quoque quàm C. In triangulo igitur OAC, latus AC subtendens majorem angulum AOC, majus est (*c*) latere AO subtendente minorem C. Cùm igitur AC tantùm pertingat ex centro ad circumferentiam, AO non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem ostendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo BC cadit intra circulum.

(a) Per 5. l. 1.
(b) Per cor. 1. p. 32. l. 1.
(c) Per 19. l. 1.

Cor. *Hinc sequitur rectam quamvis lineam circulum tangentem, in unico puncto eundem tangere. Si enim circumferentiæ puncta duo tangeret, esset* recta linea per duo circuli puncta ducta, *atque adeo* (d) *intra circulum caderet, contra tangentis definitionem. Et simili ratiocinio (a planis ad solida transeundo) probari posset planum quodvis sphæram in unico puncto tangere.*

(d) Per hanc prop.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

Si in circulo recta per centrum ducta (BE) aliam (CF) non per centrum ductam secet bifariam (in Q,) secabit quoque perpendiculariter. Et si secet perpendiculariter, secabit bifariam.

1. Pars. Ex A centro ducantur AC, AF. Triangula X, Z sibi mutuò æquilatera sunt: Nam CO, FO ex hypothesi, & AC, AF quia ex centro, æquales sunt; AO verò communis est. Ergo (*e*) anguli AOC, AOF æquales. Ergo (*f*) recti. Quod erat primum.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF sunt recti, erit quad. AC. (*g*) æquale quadratis AO, CO; & quad. AF æquale quadratis AO, FO. Cùm igitur quadrata AC, AF æqualia (*h*) sint, etiam duo simul AO, CO duobus simul, AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrimque communi quadrato AO, remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO sunt æquales. Quod erat alterum.

(e) Per 8. l. 1.
(f) Per def. 14. l. 1.
(g) Per 47. l. 1.
(h) Per axio. 15.

Cor.

[Cor. 1. *Dimidium chordæ angulum quemvis ad centrum subtendentis, est semissis anguli istius sinus rectus.* Chorda CF anguli ad centrum CAF, perpendicularis a centro ducatur AO. In triangulis X, Z, erunt CO, FO (a) æquales, AO communis, & anguli ad O recti. Ergo anguli CAO, FAO æquales (b) erunt. Quare angulus CAO semissis erit anguli CAF, & recta CO dimidium chordæ CF. Sed CO est sinus (c) rectus anguli CAO. Ergo dimidium chordæ, angulum quemvis ad centrum subtendentis, est semissis anguli istius sinus rectus. (a) Per hanc prop. (b) Per 4. l. 1. (c) Per def. 10 l. 1.

Cor. 2. *Si trianguli cujusvis æquilateri, aut etiam tantum Isoscelis ACF sumatur vertex A pro circuli centro, & alterum æqualium crurum AC pro radio, circulus transibit* (d) *etiam per F: atque inde, vi hujus prop. si recta AO a vertice trianguli isoscelis bisecet basem, ei quoque perpendicularis erit; & si basi fuerit perpendicularis, eam bisecabit. Et inde etiam deduci possent cætera proprietates quæ in Schol. p. 26. l. 1. aliunde derivantur.* (d) Per def. 18. 19. & 26. l. 1.

Scholium. *Si a vertice trianguli Isoscelis ABC ad quodvis punctum basis recta linea ducatur; erit quadratum ductæ rectæ unà cum rectangulo sub segmentis basis, æquale quadrato lateris AB vel AC.* Nam recta a vertice A ducta, vel erit basi BC perpendicularis, vel non. Sit primò ducta recta AD perpendicularis basi; erit BD = (e) DC, & proinde rectang. BDC = BDq, vel DCq. Sed ADq + BDq = (f) ABq; hoc est ADq + rect. BDC = ABq. Q. E. D. Fig. 4. (e) Per cor. 2. hujus. (f) Per 47. l. 1.

Sed recta ducta sit AE, non perpendicularis basi, & ducatur perpendicularis AD, quæ basim in D (g) bisecabit. Cum igitur recta BC sit bifariam secta in D & non bifariam in E, (h) erit rectang. BEC + EDq = BDq. Adde utrinque DAq, & rect. BEC + EDq + DAq = BDq + DAq. Sed EDq + DAq = (i) AEq, & BDq + DAq = (k) ABq. Ergo rect. BEC + AEq = ABq. Q. E. D. (g) Per cor. 2. hujus. (h) Per 5. l. 2. (i) Per 47. l. 1. (k) Per eand.

PROPOSITIO IV.

SI in circulo duæ rectæ (BC, FL) non ambæ per centrum ductæ, se secent, non secabunt se mutuò bifariam. Fig. 5. & 6.

Nam si una LF transeat per centrum, patet hanc non bisecari ab alterâ BC, quæ ex hyp. per centrum A non transit. Fig. 6.

Si neutra per centrum transit, ex A centro duc. AO. Si jam ambæ BC, FL forent bisectæ in O, anguli quoque AOC AOL essent (l) recti, ac proinde æquales, totum & pars. Quod fieri non potest. Fig. 5. (l) Per præc.

PROPOSITIO V & VI.

Fig. 7. & 8.

Circuli se mutuò secantes, aut interiùs tangentes, non habent idem centrum.

Aliàs enim ductis ex communi centro A rectis AB, ACF, essent AC, AF, (pars & totum) æquales, quia ambæ sunt æquales eidem AB.

PROPOSITIO VII.

Fig. 9.

Si in circulo, quodvis aliud a centro (A) accipiatur punctum (C,) ex quo rectæ plures (CB, CL, CO, CF) in circumferentiam cadant;

1. *Maxima erit (CB) quæ per centrum transit.*

2. *Reliqua diametri pars (CF) minima.*

3. *Aliarum verò major est ea, quæ maximæ (CB) propior.*

4. *Neque plures quàm duæ ex dicto puncto (C,) quod a centro diversum est, ad circumferentiam duci possunt æquales.*

Pars 1. Ducatur ex A centro recta AL. Quoniam AL, AB æquales sunt, additâ communi AC, erunt LA cum AC, & BC æquales. Sed LA, AC sunt majores (a) quàm LC. Ergo etiam BC major est quàm LC. Eodem modo BC ostendetur major quavis aliâ.

(a) Per 20. l. 1.

Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO, (hoc est, AF) est minor (b) quàm AC, CO. Ablatâ igitur communi AC, remanet FC minor quàm CO. Eodem modo erit CF minor quavis aliâ.

(b) Per eand.

Pars 3. In triangulis COA, CLA, latera LA, AC æquantur lateribus OA, AC; angulus verò LAC major est angulo OAC. Ergo (c) basis LC major basi OC.

(c) Per 24. l. 1.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam si tres duci possent æquales, CO, CI, CQ, forent duæ CQ, CI ad eandem partem inter se æquales. Quod repugnat parti 3.

Coroll. *Simili planè ratiocinio cum Theodosio colligimus, Arcuum circulorum maximorum, a puncto quovis a circuli dati polo diverso, in superficie sphæra ad circulum istum ductorum, maximum esse eum qui per circuli polum transit; minimum, qui ad punctum*

punctum oppositum dati circuli ducitur; reliquorum verò eum esse majorem qui maximo est propior: duos verò solùm inter se æquales ab eodem puncto ad circulum duci posse. Neque aliter de plerisque hujus libri propositionibus Lector per se ratiocinabitur. A planis enim ad solida in hisce rebus transire est sane facillimum.

PROPOSITIO VIII.

SI à puncto extra circulum accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (AB, AC, AF, AO, AQ, AR;) Fig. 10 & 11.

1. *Earum quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima est (AB) transiens per centrum (Z.)*

2. *Aliarum major est ea, quæ maximæ (AB) propior.*

3. *Extra circulum minima est (AO) quæ producta per centrum transit.*

4. *Quæ minimæ propior, minor est remotiore.*

5. *Non plures quàm duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci possunt æquales; sive intra circulum, sive extra.*

Pars 1. Ex centro Z duc ZC. Quia æquantur ZC, ZB; additâ communi AZ, erunt AZ, ZC ipsi AB æquales. Sed AZ, ZC majores sunt (a) quàm AC. Ergo etiam AB major AC. Eodem modo erit AB major quavis aliâ. Fig. 10. (a) Per 20. l. 1.

Pars 2. Duc ZF. Latera CZ, ZA æquantur lateribus FZ, ZA. Angulus verò CZA major est angulo FZA. Ergo (b) basis CA major basi FA. (b) Per 24. l. 1.

Pars 3. Duc ZQ. Duæ AQ, QZ majores (c) sunt quàm AZ. Ablatis igitur æqualibus ZQ, ZO, remanet AO minor quàm AQ. Eodem modo AO minor erit quavis aliâ. Fig. 11. (c) Per 20. l. 1.

Pars 4. Duc ZR. Rectæ AQ & QZ minores sunt (d) quàm AR, RZ. Ablatis ergo æqualibus ZQ, ZR, remanet AQ minor quàm AR. (d) Per 21. l. 1.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

SI ab aliquo intra circulum puncto (A) plures quàm duæ æquales ad ambitum duci possint; Id punctum centrum erit. Fig. 12.

Patet ex 4. parte prop. 7.

PROPOSITIO X.

Fig. 13.

Circuli in duobus tantùm punctis se mutuò secant.

Secent enim, si fieri potest, in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli LQ ducantur ad B, C, F, rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum OS puncto A ductæ sunt tres æquales ad ejus peripheriam, AB, AC, AF, erit A (*a*) centrum quoque circuli OS. Ergo circuli LQ & OS se secantes habent idem centrum, quod repugnat propositioni 5.

(a) Per præc.

PROPOSITIO XI.

Fig. 14.

Si duo circuli se intus tangant; recta per eorum centra (A & I) ducta transibit per contactum (B.)

Si negas, habeant, si fieri potest, centra eum situm, ut recta per illa transiens, cadat extra contactum B, secans circulos in O & L, sintque centra ipsa A & C; ac junge AB, CB. Quoniam igitur CB, CO æquantur, addita communi AC, etiam AC, CB æquales erunt AO. Sed (*b*) AC, CB sunt majores quàm AB; Hoc est (*c*) quàm AL. Ergo etiam AO major est quàm AL, pars toto. Quod est absurdum.

(b) Per 20. l. 1.
(c) Per def. circuli.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15.

Si circuli se tangant exteriùs; recta conjungens centra, per contactum transibit.

Si negas, sint, si fieri potest, centra ita posita, puta in A & B, ut recta per ipsa transiens, per contactum S non incedat, sed circulos secet in O & Q, junganturque AS, BS. Erunt igitur (*d*) AS, SB majores quàm AB. Sed AS (*e*) est par AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ sunt majores quàm tota AB, pars toto. Quod fieri non potest.

(d) Per 20. l. 1.
(e) Per def. circuli.

[Coroll. ad duas præced. *Si duo circuli se tangant vel interiùs vel exteriùs; recta a centro unius per contactum ducta, transibit*

transibit per centrum alterius. Ejusmodi enim recta non differet a rectâ per eorum centra ductâ, quæ per hasce propp. 11 & 12. transibit per contactum.]

PROPOSITIO XIII.

Circuli & sese mutuò, & lineam rectam punctualiter tangunt. Fig. 16. & 17.

Tangant enim se intra (si fieri potest) duo circuli in parte circumferentiæ CL. Per centra A & B ducta recta (*a*) transibit per contactum, puta in C. Ducantur insuper AL, BL. Quoniam igitur (*b*) BL, BC æquantur, (sunt enim ex centro B ad peripheriam OLC,) additâ communi AB, erunt AB, BL æquales AC. Sed AC est par AL, (sunt enim ex centro A ad peripheriam QLC. Ergo etiam AB, BL sunt æquales AL, contra 20. l. 1. Fig. 16. (a) Per 11. l. 3. (b) Quia ex centro.

Tangant se deinde exteriùs duo circuli, si fieri potest, in arcu OL. Recta AP centra A & P jungens (*c*) transibit per contactum, puta in O. Ducantur insuper AL, PL. Erunt igitur duo trianguli latera AL, PL æqualia ipsis, AO, PO, seu toti AP. Contra 20. l. 1. Fig. 17. (c) Per 12. l. 3.

Denique recta BF & circulus se tangant, si fieri potest, in parte aliquâ CE. Ducantur ad centrum rectæ CA, EA. Erunt igitur CA, EA æquales, ac proinde triangulum CAE est Isosceles. Quare (*d*) anguli ACE, AEC acuti. Ergo perpendicularis ad BF, ducta ex A centro, cadet inter (*e*) C & E, puta in D. Erunt igitur tam AC, quàm AE æquales perpendiculari AD, quod est absurdum, contra Coroll. 14. p. 32. l. 1. Fig. 17. (d) Per cor. 11. p. 32. l. 1. (e) Per cor. 3. p. 32. l. 1.

Corollarium.

Circuli qui habent centra in unâ rectâ, eamque secant in eodem puncto B, se mutuò in puncto illo B contingunt. Fig. 18.

Cæterùm hæc propositio liquet etiam ex notione ipsâ linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diversæ curvaturæ, aut duæ convexæ, secundùm ullam sui partem possunt congruere. Congruerent autem, si se invicem in totâ parte aliquâ tangerent.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 19.

In circulo æquales rectæ (BC, LF) æqualiter a centro distant: & quæ distant a centro æqualiter, sunt æquales.

Ex centro A ducantur AC, AF; item AO, AI ad angulos rectos ipsis BC, FL. Erunt (a) BC, FL bisectæ in O & I.

(a) Per 3. l. 3.

Cùm ergo totæ BC, FL ponantur æquales, etiam dimidiæ OC, IF, adeoque & (b) quadrata ipsarum æquantur. Jam verò quad. AC (c) æquale est quadratis OC, OA: & quadratum AF æquatur quadratis IF, IA. Cùm igitur quadrata AC, AF (d) æqualia sint, etiam duo quadrata OC, OA, duobus IF, IA æqualia erunt. Ablatis igitur quadratis OC, IF (quæ ante ostensa sunt æqualia,) quæ remanent, quad. OA, IA, æqualia erunt. Ergo etiam perpendiculares OA, IA sunt (e) æquales. Ergo BC, FL, æquales, à centro distant (f) æqualiter. Quod erat primum.

(b) Per axio. 15. (c) Per 47. l. 1. (d) Per def. circuli & axio. 15. (e) Per axio. 15. (f) Per def. 4. l. 3.

E converso, si distantiæ OA, IA ponantur æquales, tunc ablatis quadratis rectarum æqualium OA, IA, eodem discursu ostendetur quadrata reliqua OC, IF fore æqualia, ac proinde & rectas OC, IF æquales esse, quæ cùm sint (g) semisses rectarum BC, FL, etiam illæ æquales erunt. Quod erat alterum.

(g) Per 3. l. 3.

PROPOSITIO XV.

Fig. 20.

Rectarum circulo inscriptarum maxima, est diameter. Cæterarum ea major, quæ centro propior.

Sit quævis RS alia a diametro FL. Ex centro duc AR, AS. Duæ AR, AS æquantur diametro FL; & sunt (h) majores quàm RS. Ergo, &c.

(h) Per 20. l. 1.

Sit deinde BI propior centro quàm XZ. Ex centro ad illas duc perpendiculares AC, AQ. Erit AQ (i) major quàm AC. Accipe ergo AO parem AC, & per O duc RS perpendicularem ad AO, quæ (k) par erit BI; junganturque AR, AS, AX, AZ. Quia igitur A centrum est, erunt latera AR, AS æqualia lateribus AX, AZ. Angulus autem RAS, major est angulo XAZ. Ergo basis RS, hoc est BI major (l) est basi XZ. Quod erat demonstrandum.

(i) Per def 4. l. 3. (k) Per prec. (l) Per 24. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Recta (IF) quæ per (B) extremitatem diametri (CB) perpendicularis est, tota cadit extra circulum, eumque tangit (in B:) Neque inter ipsam & circulum alia recta ad contactum (B) duci potest, quin circulum secet. Fig. 21.

Pars 1. Accipiatur in recta IBF quodvis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB, quoniam angulus ABL rectus est per hyp. erit ALB (a) acutus. Ergo AL opposita majori angulo ABL, major est (b) quàm AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantùm pertingit ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L extra circulum est. [*Idem ostendetur de quovis alio puncto rectæ IF, a B diverso. Quare; cùm recta IF ita circulo occurrat in unico puncto B, ut eum non secet,*] Tota igitur IF extra circulum cadit, [*eumque tangit* (c) *in B.*] Quod erat primum.

(a) Per cor. 5. p. 32. l. 1.
(b) Per 19. l. 1.

Pars 2. Infra BF (si fieri potest) cadat RB tota extra circulum. Quoniam FBA rectus est per hyp. erit RBA acutus, ac proinde AB non est perpendicularis ad BR. Ducatur igitur ex A centro ad BR, perpendicularis AO, quæ cadet (d) versùs R, & secabit circulum in Q. Igitur AB opposita majori angulo, nempe AOB recto, major est quàm AO quæ opponitur minori, nempe acuto OBA. Sed AB par est AQ: Ergo etiam AQ major est quàm AO, pars toto.

(c) Per def. 2. l. 3.
(d) Per cor. 3. p. 32. l. 1.

[*Euclides hanc propositionem sic effert:*

1. Recta IF, diametro circuli CB ad rectos angulos ab extremitate ducta, cadit extra circulum: 2. & in locum qui inter rectam lineam FB, & circumferentiam QB interjicitur, altera recta linea RB non cadet: 3. & semicirculi angulus ABQ major est quovis angulo rectilineo acuto; reliquus autem QBF minor.

Partem primam & secundam jam demonstravit Tacquetus; reliquas duas pro paradoxis male fundatis rejecit, haud rectè quidem, ut mihi videtur. Si enim dari posset angulus quivis rectilineus acutus ABR, (angulo scil. recto ABF minor,) qui tamen major esset angulo semicirculi ABQ; vel si quivis angulus rectilineus FBR dari posset, inter tangentem FB & circulum QB, ad punctum B constitutus; sequeretur rectam inter tangentem & circulum duci posse quæ tamen circulum non secet, contra partem secundam.]

Corollaria.

Fig. 21. Hinc rursum patet contactum rectæ lineæ & circularis esse punctualem.

Fig. 18. 2. Si centris in eâdem lineâ rectâ in infinitum protractâ acceptis, describantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quam majores, omnes tangent rectam IF in eodem uno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quacunque datâ majorem excrescentes, propiùs semper ac propiùs in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei præterquam in unico contactûs puncto conjunguntur: quod quamvis evidentissimum sit, est tamen revera admirabile.

Fig. 18. 4. Ex his manifestum est, lineam quamcunque in infinitum esse divisibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta AQ. Infiniti circuli centra habentes in rectâ BA sine termino productâ, rectam IF per coroll. 1. hîc, & se mutuò per coroll. p. 13. tangunt in uno eodemque puncto B, ac proinde nusquam vel inter se, vel cum rectâ IF conjunguntur præterquam in B. Ergo necesse est ut rectam AQ dirimant in partes infinitas, hoc est, in non tot quin plures.

Fig. 21. 5. Angulum contingentiæ seu contactûs LBQ (eum nempe qui tangente & peripheriâ continetur) nulla recta linea potest dividere.

Fig. 18. 6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes secari potest ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum mysterium asymptoticum, hoc est, lineæ rectæ ad Hyperbolam unà secum in infinitum productam, accedentis ad intervallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis: quod præclare observavit & demonstravit Marius Bettinus noster in Apiariis, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyse Narbonensi, cujus demonstrationem refert Cardanus de subtilitate, lib. 16.

Fig. 18. [*Angulus contactûs (uti vulgò appellatur,) per circumferentias in eodem puncto tangentes non minuitur, utpote qui nullus est, vel non quantus, seu non angulus. (Vide Wallis. de angulo contactûs.) Angulus enim (per def. 8. l. 1.) est duarum linearum in plano se mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram* inclinatio: *recta autem QI circumferentiam unam vel plures in unico puncto B contingens, in ipso contactûs puncto, (illic enim, si quis sit, existit angulus,) non* inclinatur *ad illas circumferentias, sed cum iis prorsus coincidit.*

Hoc

Hoc igitur corollarium sextum, quatenus verum est, non differt à tertio. Hinc autem sequitur

7. Angulum semicirculi ABQ esse angulo recto rectilineo ABF æqualem. Si enim locus iste QBF qui inter circulum & tangentem interjicitur, ad punctum B sit non angulus, seve non-quantus; eo igitur ab ABF ablato, angulus rectus non minuitur; ac proinde angulus semicirculi ABQ adhuc manet rectus. Fig. 22.

Cæterum quæstionem in Scholio subsequente agitatam, longe accuratiùs tractat Celeberr. Wallisius, Operum Mathematicorum volum. 2do, (in suâ de angulo contactûs & semicirculi disquisitione Geometricâ, pag. 605—630, ejusque defensione, pag. 631—664.) quò itaque lector qui hisce oblectatur est remittendus. Tyrones interim, omisso hoc Scholio, ad prop. 17. & seqq. cum aliquo temporis operæque compendio transibunt.]

Scholium.

Demonstratur & solvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactûs deduci solent.

Atque hæc quidem ex 16. prop. hactenus deducta, & mira & certa sunt. Quæ verò deduci ex eâdem solent præterea, omnem capturam humanæ mentis excedunt. Quare suspicari aliquando cœpi latere hîc aliquid, cujus ignoratio subtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus asserendis ansam præberet. Et plane, quod suspicatus sum, ita se habere, mihi tandem videor deprehendisse. Paradoxa quæ ex 16. inferri solent, ex aliis multis, hæc fere præcipua sunt.

1. Angulus contingentiæ (OAC) omni acuto minor est. Acutus esto PAC. Ab hoc auferri potest dimidius, & a residuo iterum dimidius, & sic deinceps sine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor. Quantumvis enim in infinitum minuatur, semper tamen residui anguli, exempli gr. anguli QAC latus unum QA (a) intra circulum cadet, ac proinde angulus contactûs OAC intra acutum continebitur, ejusque pars erit, ideoque illo minor. Fig. 22. (a) Per 16. l. 3.

2. Angulus semicirculi (BAO) licèt recto minor sit, est omni acuto major. Quia ob eandem causam, acutus quantumvis magnus BAQ, intra semicirculi angulum BAO comprehenditur.

Hæc duo in ipso textu propositionis inferuntur. Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis ea sint, an ab aliquo adjecta. Apollonius, certè magnus Geometra, cùm eandem affectio-

nem

nem in ellipsi, hyperbolâ & parabolâ demonstrat; has illationes prætermittit.

3. Angulus rectus CAB (imo acutus quicunque CAQ) continet infinitos æquales angulos contactûs; ac proinde infinities illo est major. Nam angulus CAB dividi potest in acutos infinitos minores semper & minores, quorum nihilominus singuli sunt majores (a) angulo contactûs OAC.

(a) Per paradox. 1.

4. Angulus contactûs CAO est vera pars anguli recti CAB, eundem quippe unà cum semicirculi angulo OAB constituit: nequit tamen ullâ sui multiplicatione suum totum adæquare: ac proinde hic infinita æqualia sibi addita non efficiunt infinitum.

5. Transitur a minori ad majus & per omnia media, neque tamen per æquale: sive datur majus aliquo, & datur eodem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam si recta AB, fixo manente puncto A, moveatur, donec congruat cum tangente, describet acutos angulos BAP, BAQ, & omnes alios possibiles, qui quamvis semper augeantur semper tamen erunt minores (b) semicirculi angulo BAO, quamprimum verò AB congruet tangenti CA, immediate habetur rectus CAB major angulo semicirculi.

(b) Per paradox. 2.

Hæc & plura alia ex hac 16. propositione deduci solent: quæ profecto, si ita, ut proponuntur, sese habeant; meritò incomprehensibilia videri possent. Peletarius, ut his paradoxis se expediat, negat angulum contactûs esse quantum. Rem confecerat, si dixisset nullum angulum esse quantum. Sed is vehementer errat, cùm inde infert omnes semicirculi angulos esse æquales, quod plane non inferret, si intelligeret, quod de contactûs angulo asseverat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio nostro in suâ illâ adversùs Peletarium apologeticâ disputatione assentior. Meâ quidem sententiâ uterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos esse putat quantitatem; ille dum omnes præter angulum contingentiæ. Alii se existimant hac unâ responsione omnes difficultates solvere, si dicant, curvilineos angulos & rectilineos esse incomparabiles. Rogati verò, cur sint incomparabiles, respondent, quia angulus contactûs quantumcunque multiplicatus, nunquam potest æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc est paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, qui nimirum fieri possit, ut angulus contactûs anguli recti pars sit, & tamen quotiescumque multiplicatus eundem superare nequeat. Respondent angulum contactûs non esse partem recti, quia eum non potest adæquare. At paradoxorum assertores replicant, hinc solùm sequi non esse partem recti aliquotam, veram tamen esse

partem,

partem, eo quòd cum semicirculi angulo rectum componat. Unde qui hac viâ difficultates propositas volebant dissolvere, debuerant ostendere angulum contactûs nullo sensu partem esse rectilinei anguli, neque addito sibi semicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos sumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclideâ definitione anguli pendere. Hæc enim, si penitiùs expendatur, manifestè docet nullum angulum esse quantum, quo uno errore sublato, paradoxa omnia evanescunt. Sentio igitur: Def. 8. l. 1.

1. Nullus angulus est quantitas, sed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8. l. 1. Angulus planus est duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non est quantitas, sed modus quantitatis. Cùm enim curvitas non sit quantitas; cur inclinatio sit, quæ ab illâ non magis differt, quàm inflexio & fractio? Deinde; Si angulus esset quantus, foret vel linea, vel superficies, vel corpus. Non esse lineam aut corpus patet. Sed neque superficies est: ea enim, ablatione partium C, B, minuitur; non angulus. Neque potest dici angulum esse superficiem indeterminatam, cùm angulus quilibet determinatus sit. Fig. 23.

2. Quoniam anguli non sunt quantitas, sed modus quanti, eorum inter se comparatorum relatio, non est æqualitas & inæqualitas, sed similitudo & dissimilitudo.

3. Cùm igitur anguli inter se comparati æquales dicantur aut inæquales, non aliud intelligi potest, quàm eos similes esse inter se aut dissimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere, ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.

4. Similes porro anguli sunt, quorum ambo latera superimposita congruunt; dissimiles, quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil est aliud, quàm inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo similes anguli sunt inclinationes linearum similes. Non sunt autem inclinationes linearum similes, nisi ambæ sibi mutuò impositæ congruant. Ergo similes anguli sunt, quorum congruunt latera; dissimiles, quorum non congruunt.

5. Itaque manifestum est, nullum angulum curvilineum, æqualem dari posse ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud est quàm similitudo, per conclus. 2. & 3. Similitudo angulorum est sola laterum congruentia, per conclusion. 4. Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus, dum descriptis æqualibus semicirculis, ita ratioci-

Fig. 24. tiocinatur: æqualium semicirculorum anguli EAD, CAB æquales sunt. Ergo si his addatur communis angulus CAD erit angulus EAC curvilineus æqualis rectilineo DAB. Fallitne ergo axioma, si æqualibus addas vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas solùm pertinet: anguli porro quanti non sunt. Axioma ut in angulis valeat, ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, si apponantur similibus angulis, similiterque positis; qui tum orientur, erunt similes. At Proclus comparat angulos similes quidem: sed communis, qui utrisque additur, cùm ab unâ parte habeat latus rectum, ab alterâ curvum, dissimiliter utrisque additur.

6. Quare cùm tota essentia anguli sit linearum se tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius; una siquidem inclinatio pars alterius inclinationis non est: neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio siquidem una auferri nequit ab alterâ, &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non sunt, sed superficiebus inter latera constitutis conveniunt.

7. Postremò ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant illæ locutionum formæ, quibus Geometræ passim; atque ipse inprimis Euclides, utuntur, cùm angulos secari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque similia asserunt. Hæc sane existimabimus eos non propriè; sed analogicè tantùm angulis tribuere; itaque eos loqui voluisse, quòd id commodius, & expeditius esset, neque tamen obnoxium periculo, modò in angulis rectilineis maneatur.

Fig. 25. Angulum itaque dividi rectâ DA, non aliud erit, quàm inter latera EA, CA aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc est duos novos angulos efficiat. Angulum verò EAC esse duplum anguli EAD, nihil rursum aliud erit, quàm inter lineas rectas EA, CA, aliam interponi, quæ ad utramque similiter inclinetur; unde fiat ut rectæ EA, DA rectis CA, DA; inclinationibus non mu-

Fig. 25. & 26. tatis, impositæ congruant. Quod si ita ratiocinentur: (Angulus EAD est æqualis angulo ILQ, & DAC est æqualis QLR; ergo totus EAC toti ILR æqualis est:) Idem erit, ac si dicatur; Inclinatio rectarum EAD similis, seu eadem, est inclinationi rectarum ILQ; & inclinatio rectarum DAC similis est inclinationi rectarum QLR: Ergo etiam inclinatio rectarum EAC similis erit inclinationi rectarum ILR. Vel certè (quod recidet in idem; ex assertione 4. supra) collectionem illam sic intellige: latera EAD congruunt lateribus ILQ; & latera DAC congruunt lateribus QLR: Ergo latera quoque EAC congruunt lateribus

ribus ILR. Quæ quidem consecutio æque clara est, atque si æqualibus addas æqualia, tota æqualia esse. Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cùm sint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facile, veritate theorematum ubique salvâ, interpretabimur.

His ita constitutis, facile paradoxa angularia dissolvemus; quæ sane non aliunde enata sunt, quàm quòd angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco. Ut igitur simul omnia expediam; Dico paradoxa illa, si in proprio verborum sensu accipiantur, ad unum omnia esse falsa. Sic enim accepta non convenient nisi quanto: anguli autem quanti non sunt, ut jam ostendimus.

Itaque angulus contactûs neque minor est quovis acuto, neque pars est anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imo ne semel quidem; nihil enim horum, linearum inclinationi potest competere, quæ tota anguli essentia est. Si verò non propriè, sed analogicè accipiantur, jam nihil continent, quod a communi sensu ac ratione alienum sit. Sic enim, angulum contactûs OAC esse minorem quovis acuto, & semicirculi angulum OAB acuto omni majorem, non aliud significabit, quàm infra tangentem CA, nullam posse duci rectam ad contactum, quin secet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas est omnino digna, quam homines admirentur, est tamen ejusmodi quam possimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxi tertii, quarti & quinti sensus erit. Atque ita unius Euclideæ definitionis ductu, ritè perspectâ naturâ anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evanescunt. *Fig. 22.*

PROPOSITIO XVII.

A Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum circulum (OQ) tangat. *Fig. 17.*

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta AB, secans peripheriam in O. Centro A describe per B alium circulum, BC, & ex O duc OC perpendicularem ad AB, quæ occurrat circulo BC in C. Duc CA, occurrentem circulo OQ in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum OQ.

Quia latera BA, IA æquantur lateribus CA, OA, angulusque A communis est in trigonis IAB, OAC, etiam (a) anguli AOC, AIB æquales sunt. Sed (b) AOC rectus est. Ergo etiam rectus est AIB. Ergo BI (c) tangit in I.

(a) Per 4. l. 1.
(b) Per constr.
(c) Per 16. l. 3.

Scho-

Scholium.

Fig. 28. EX 31. seq. pulchrè ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (BQ.)

Centrum A & datum punctum O jungens recta bisecetur in P. Tum centro P, per A & O describe circulum occurrentem dato in B. Recta OB tanget.

Nam junctâ AB, angulus ABO in semicirculo rectus est, per 31. ergo per 16. OB tangit circulum BQ.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 29. *SI circulum tangat recta linea (CL,) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis est.*

Si negas, sit ex A centro perpendicularis, alia quædam recta AF: (*a*) secabit ea circulum in O. Quia ergo angulus AFB rectus ponitur, erit (*b*) ABF acutus. Ergo AB, (hoc est AO) major (*c*) quàm AF, pars toto.

(a) Per 1. part. p. 16. l. 1.
(b) Per cor. 5. p. 32. l. 1.
(c) Per 19 l. 1.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 30. *SI recta (BC) circulum tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (AI,) erit in eâ centrum.*

Si negas, sit centrum extra AI in Z, & ab eo ad contactum ducatur ZA. Erit (*d*) angulus ZAC rectus, ac proinde par angulo IAC, per hypoth. recto; hoc est, pars toti.

(d) Per præc.

PROPOSITIO XX.

Fig. 31. 32. 33. *ANgulus ad centrum (BAC) duplus est anguli (BCF) ad peripheriam, cùm idem arcus (BC) est basis angulorum.*

Fig. 31. Triplex est casus. In primo, latera BA, BF coincidunt. Tum verò quia AF, AC ex centro ductæ æquantur, ductâ FC, erunt in triangulo Z anguli F & C (*e*) æquales, Sed

(e) Per 5. l. 1.

Sed BAC (*a*) æqualis est duobus F & C. Ergo BAC duplus est unius F. (a) Per 32. l. 1.

In casu secundo BA, GA cadunt intra BF, CF. Tum verò ducta FAX, per casum primum XAB est duplus XFB, & XAC duplus XFC. (*b*) Ergo totus BAC duplus est totius BFC. Fig. 32. (b) Per 12. l. 5. quæ ab hac non dependet.

[*Sit XAB angulus graduum 6: (c) erit angulus XFB graduum 3: Sit porro ang. XAC gr. 4: (d) erit XFC gr. 2. Ergo XAB + XAC erit gr. 6. + 4 = gr. 10 = BAC; & XFB + XFC gr. 3 + 2 = gr. 5 = BFC. Denarius autem graduum numerus est quinarii duplus: ergo & angulus BAC duplus est anguli BFC.*] (c) Per cas. 1. (d) Per eund.

In tertio casu BF secat AG, & anguli BAC, BFC sunt extra invicem. Ducatur FAL. Per casum 1. totus LAC duplus est totius LFC, & ablatus LAB duplus est ablati LFB. Ergo (*e*) & reliquus BAC duplus est reliqui BFC. Quod erat demonstrandum. Fig. 33. (e) Per 19. l. 5. quæ ab hac non dependet.

[*Sit LAC gr. 12, LAB gr. 2. (f) Erunt LFC gr. 6. LFB gr. 1. Ergo LAC — LAB = gr. 12 — 2 = gr. 10. = BAC; & LFC — LFB = gr. 6. — 1 = gr. 5. = BFC. Ergo angulus BAC duplus est anguli BFC.*] (f) Per cas. 1.

PROPOSITIO XXI.

ANguli (BQC, BFC,) qui in circulo insistunt eidem arcui (BOC,) sive qui in eodem segmento (BQSC) existunt, inter se omnes sunt æquales. Fig. 34.

Sit primò segmentum BQSC majus semicirculo. Ex centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad centrum, duplus est singulorum BQC, BFC. Ergo omnes BQC, BFC sunt (*g*) æquales. Quod erat demonstrandum. Fig. 34. (g) Per axio. 6.

Sit deinde segmentum BQC æquale aut minus semicirculo. In triangulis BQI & CFI, quia anguli ad verticem I oppositi, (*h*) æquales sunt, etiam summa reliquorum Q & R summæ reliquorum F & O (*i*) æqualis erit. Quare si ab his æqualibus summis auferantur anguli R & O qui per primam partem æquales sunt, utpote eidem arcui QF insistentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonstrandum. Fig. 35. (h) Per 15. l. 1. (i) Per cor. 10 p. 32. l. 1.

Coroll. *Hinc colligunt Optici lineam quamvis BC oculo ubivis in circuli, cujus chorda est, circumferentiâ posito ejusdem* Fig. 34. vel 35.

 magnitu-

magnitudinis apparere; quia scilicet sub angulo æquali BQC ubique apparet.

Fig. 34. [Scholium. *Si super arcu BOC insistant duo æquales anguli, quorum alter BFC ad peripheriam arcui BOC oppositam existat: Erit uterque angulus ad eandem peripheriam ipsi BOC oppositam; hoc est, angulus ipsi BFC æqualis, neque citra; neque ultra peripheriam cadet. Cadat enim, si fieri potest, citra peripheriam ad punctum I intra circulum, angulus BIC æqualis angulo BFC ad peripheriam existenti; & producatur IC donec occurrat peripheriæ in Q, & ducatur BQ. Anguli BQC, BFC in eodem segmento existentes, per hanc prop. erunt æquales: Sed & BIC, BFC æquales esse supponuntur; Ergo BIC (externus angulus trianguli BIQ) æqualis est uni internorum oppositorum, nempe angulo BQI, contra cor. 1, pr. 32. l. 1. Non igitur cadit intra circulum vel citra peripheriam angulus angulo BFC æqualis. Sed neque extra circulum, vel ultra peripheriam: si enim extra, ut in E cadere supponatur; a puncto Q ubi recta CE peripheriam secat, ducatur recta QB: erit ut prius, angulus BQC* (a) *angulo BFC, ac proinde* (b) *angulo BEC æqualis, rursum contra idem corollarium, cùm BQC sit angulus externus, & BEQ unus internorum oppositorum trianguli BQE. Cùm igitur angulus ipsi BFC ad peripheriam existenti æqualis, neque cadat ultra peripheriam neque citra, erit angulus ad peripheriam. Q. E. D.*

(a) Per hanc prop.
(b) Per hypoth.

Fig. 35. *Eodem modo, si segmentum BQFC sit semicirculo æquale, vel minus, ostendetur angulum angulo BFC æqualem, neque citra, neque ultra peripheriam BQFC cadere.*]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 36. *Quadrilateri circulo inscripti (ABCF) oppositi anguli duos rectos conficiunt.*

Ducantur BF, CA. Angulus ABC, cum duobus O & X facit (*c*) duos rectos. Sed O est (*d*) æqualis I, quia insistunt eidem arcui BC; & X (*e*) est æqualis Z, quia insistunt eidem arcui AB. Ergo ABC, cum duobus etiam, I, Z, hoc est, cum toto opposito angulo AFC, facit duos rectos. Quod erat demonstrandum. [*Et pari modo ostendetur angulos oppositos BAF, BCF duobus rectis æquales esse.*]

(c) Per 32. l. 1.
(d) Per 21. l. 3.
(e) Per eand.

Coroll. (1.) *Hinc si unum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus æqualis angulo quadrilateri opposito: internus enim utrivis additus duos rectos angulos* (f) *conficit.*

(f) Per hanc, & 13. l. 1.

(2.) *Item*

(2.) *Item circa Rhombum aut Rhomboidem circulus describi nequit; quia adversi ejus anguli vel cedunt duobus rectis, vel eos excedunt.*

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

N*On sunt necessaria: & agitur de segmentis similibus, quæ non possunt sine proportionibus rectè definiri.* [Si quis tamen has propositiones desideret, inter corollaria ad prop. ult. lib. 6. eas inveniet.]

PROPOSITIO XXV.

D*Atum arcum (ABC) perficere.* Fig. 37.

Subtendantur utcunque duæ rectæ AB, CB, quas bisecа in I & L. Ex I & L duc perpendiculares sibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio est arcus ABC.

Nam (a) centrum est & in recta IX, & in recta LZ. Ergo in communi ipsis puncto O. (a) Per cor. p. 1. h. 3.

Praxis. Centro B sumpto in arcu, describe circulum; eodemque intervallo, aliis in arcu centris, describe duos alios circulos quorum singuli priorem bis secent. Per intersectiones ductæ rectæ sibi mutuò occurrentes in O (b) dabunt centrum. Fig. 37. (b) Per prax. pr. 10. l. 1. & cor. pr. 1. h. 3.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

I*N circulis æqualibus,* [vel in uno eodemque circulo,] *rectæ æquales (CE, FI) subtendunt arcus æquales; & si arcus sunt æquales, etiam subtensæ æquales erunt.* Fig. 38.

Pars 1. Ad centra A & B ducantur CA, EA; FB; IB. [*Rectæ illæ erunt sibi mutuò* (c) *æquales, utpote quæ sint ejusdem circuli, vel æqualium circulorum radii.*] Quia triangula CAE; FBI sibi mutuò æquilatera sunt, etiam erunt sibi mutuò (d) æquiangula. Ergo cùm circuli sibi mutuò imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangulo CAE, (c) Per def. 15. l. 1. (d) Per 8. h. 1.

ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I in puncta C, E. Cùm igitur circuli sint æquales, etiam arcus FLI necessariò congruet arcui CQE, & arcus FOI arcui CSE, ac proinde æquales (*a*) erunt etiam ipsi.

(a) Per axio. 7.

Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE ponuntur æquales, sibi mutuò impositi (*b*) congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & subtensa FI congruet subtensæ CE. Ergo FI, CE (*c*) æquales sunt.

(b) Per axio. 8.

(c) Per axio. 7.

[Coroll. *In circulis æqualibus, vel in eodem, rectæ inæquales subtendunt arcus inæquales, major majorem, minor minorem; & si arcus fuerint inæquales, etiam subtensæ inæquales erunt.*]

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig. 39.

SI in circulis æqualibus, [vel in eodem,] *anguli sive ad centra (BAC, FLI) sive ad ambitum (BOC, FSI) sint æquales; etiam arcus (BXC, FZI,) quibus insistunt, sunt æquales: & si arcus sunt æquales, etiam anguli æquales erunt.*

Pars 1. Quoniam latera AB, AC (*d*) æquantur LF, LI (sunt enim æqualium circulorum semidiametri,) & anguli A, L ponuntur æquales; erunt bases (*e*) BC, FI æquales. Ergo arcus BXC, FZI etiam (*f*) æquales sunt.

Ponantur jam anguli BOC, FSI ad ambitum æquales. Quia igitur (*g*) horum dupli sunt BAC, FLI; etiam illi æquales erunt, ac proinde; ut jam ostensum, etiam arcus BXC, FZI sunt æquales.

(d) Per axio. 15.
(e) Per 4. l. 1.
(f) Per 26. l. 3.
(g) Per 20. l. 3.
(h) Per axio. 15.
(i) Per 8. l. 1.
(k) Per 20. l. 3.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum BXC, FZI habetur per 27. æqualitas subtensarum BC, FI. Ergo quia etiam BA, AC (*h*) æquantur ipsis FL, LI, erunt (*i*) anguli A & L ad centrum æquales: & quia (*k*) anguli O & S horum dimidii sunt, erunt etiam ipsi æquales.

Fig. 40.

[Coroll. *Linea recta EF, quæ in A medio puncto peripheriæ alicujus BC circulum tangit, parallela est rectæ lineæ BC quæ peripheriam illam subtendit. Duc enim e centro D ad contactum A rectam DA, & connecte DB, DC. In triangulis BDG, CDG, latus DG commune est, & DB æquale DC, atque angulus BDA æqualis angulo GDA (ob arcus BA, CA æquales.) Ergo anguli* (l) *DGB, DGC æquales, & proinde recti sunt. Sed interni anguli* (m) *GAE, GAF etiam recti sunt. Ergo* (n) *BC, EF sunt parallela.* Q. E. D.]

(l) Per 4. l. 1.
(m) Per 18. l. 3.
(n) Per 29. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

D*Atum arcum* (*ABC*) *bisecare.* Fig. 41.

Duc AC, quam bisseca in O. Ex O perpendicularem duc OB, occurrentem arcui in B. Dico factum.

Jungantur enim AB, CB. Latera AO, OB per constr. æquantur lateribus CO, OB; & anguli ad O sunt æquales, quia recti. Ergo bases AB, BC (*a*) æquales. Ergo etiam (*b*) æquantur arcus AB, CB.

(a) Per 4. l. 1.
(b) Per 26. l. 3.

Praxis. Centris A & C describe pari intervallo arcus se secantes in punctis F & I, per quæ, ducta recta arcum ABC (*c*) bisecabit. Fig. 42.

(c) Per hanc & praxin. pr. 10. l. 1.

[Cor. *Hinc sequitur, dimidium chordæ arcum quemvis subtendentis, esse semissis arcûs istius sinum rectum; & vice versâ, sinum rectum duplicatum, chordam esse dupli arcûs. Huic omnino simile est cor* 1. *p.* 3. *priùs, de chordâ angulum ad centrum subtendente.*]

PROPOSITIO XXXI.

A*Ngulus* (*BCF*) *in semicirculo, rectus est: in segmento majore minor recto; in segmento minore recto major.* [Item angulus mixtilineus segmenti majoris est major recto, & angulus mixtilineus segmenti minoris est minor recto.] Fig. 42. 43.

Pars 1. Ex centro A duc AC. Quia æquales sunt AB, AC, anguli O, B (*d*) æquales erunt. Ob eandem causam æquales erunt I, F. Ergo totus BCF utrique B & F æqualis est. Cùm igitur (*e*) tres simul conficiant duos rectos; semissis trium, angulus BCF, unus rectus est. Fig. 42.

(d) Per 5. l. 1.
(e) Per 32. l. 1.

Pars 2. Sit segmentum LOBF semicirculo LOB majus, in eoque FOL angulus, & ducatur OB. Angulus FOL minor est angulo BOL, qui per 1. partem rectus est. Ergo &c. Fig. 43.

Pars 3. Esto segmentum LOX semicirculo LOB minus, in eoque angulus XOL. Erit hic major quàm BOL, qui rectus est. Ergo &c. Fig. 43.

Fig. 42. [Pars 4. Sit recta BC communis segmentorum inæqualium basis: Erit angulus mixtilineus segmenti majoris BCF, rectâ BC & arcu CF comprehensus, angulo recto major. Ducatur enim diameter BF, & junctâ FC, erit angulus rectilineus BCF rectus per primam partem, & proinde angulus mixtilineus BCF, rectâ BC & arcu CF comprehensus, erit recto major. Producatur FC ad E, & angulus BCE rectus erit (a), ac proinde angulus mixtilineus BCD segmenti minoris erit recto minor. Q. E. D.

(a) Per def. 14. l. 1.

Quartam hanc propositionis 31. partem, ejusque demonstrationem a Tacqueto omissas, ex Euclide restituendas duximus.

Fig. 3. Corollarium (1.) Hinc Examen Normæ, num exacte rectangula sit instituitur. In circulo enim quocunque, posito ad circumferentiæ punctum quodcunque Q Normæ vertice, si latera per diametri extrema D & E transeunt, angulus est rectus; Sin minùs, haudquaquam.

Fig. 3. (2.) [Si norma latera ad puncta D & E continuò adjuncta teneantur, interea dum angulus utrinque circumagatur, Vertex anguli Q describet circumferentiam circuli cujus diameter est linea DE.]

Fig. 47. (3.) Hinc ab extremâ lineâ perpendicularem excitare discimus. Sit BC linea à cujus puncto C perpendicularem oporteat excitare. A puncto quovis A tanquam centro describatur circulus, per punctum C transiens; & lineam BC intersecans in puncto B. Ductâ diametro BF, & rectâ CF: liquet lineam CF esse lineæ BC normalem. Q. E. F.

[(4.) In Triangulo rectangulo BCF, si hypotenusa BF bisecetur in A, recta AC secabit triangulum in duo triangula æquicrura ACB, ACF: Et circulus centro A per B descriptus transibit per C, anguli recti verticem.

(5.) Cùm angulus mixtilineus segmenti majoris, sit angulo recto rectilineo (b) major, angulus autem mixtilineus segmenti minoris, sit angulo recto rectilineo minor; ergo angulus mixtilineus semicirculi erit angulo recto rectilineo æqualis: id quod etiam antea (c) ex alio principio demonstravimus.]

(b) Per part. 4. hujus.

(c) Vide cor. 7. p. 16. l. 3.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 44. & 45. SI recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eundem secet, erit angulus a tangente & secante factus, par angulo, qui fit in segmento alterno.

Nimi-

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in segmento ALQB; & angulus FAB par angulo O, qui fit in segmento AOB. Fig. 45.

Transeat primò secans AB per centrum. Per 18. CAB rectus est. Et per 31. rectus est L. Ergo CAB & L æquales sunt. Fig. 44.

Transeat deinde secans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in semicirculo rectus est, faciet BQA cum BAQ (a) rectum unum. Sed etiam CAQ rectus (b) est. Ergo BQA cum BAQ æquatur CAQ. Ablato igitur communi BAQ, erit BQA (hoc (c) est L) æqualis CAB. Quod erat primum. Fig. 45. (a) Per cor. 6. p. 32. l. 1. (b) Per 18. l. 3. (c) Per 21. l. 3.

Deinde (d) FAB, CAB faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL, anguli (e) oppositi L & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus simul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB inde L, quos jam ostendi æquales, erunt æquales reliqui FAB & O. Quod erat alterum. (d) Per 13. l. 1. (e) Per 22. l. 3.

PROPOSITIO XXXIII.

Super datâ rectâ (BC) segmentum circuli construere, capiens angulum dato parem. Fig. 46.

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC, fac angulo CBL parem (f) BCI, cujus latus secabit BL in I. Centro I per B describe circulum; hic transibit per C, (quia ob æqualitatem angulorum ad C & B, etiam latera CI, BI (g) æqualia sunt,) capietque segmentum BQC angulum parem dato ABF. (f) Per 23. l. 1. (g) Per 6. l. 1.

Nam quia AB diametro BL perpendicularis est, AB tanget (h) circulum, quem secat BC. Ergo (i) angulus in segmento BQC æquatur angulo ABF. (h) Per 16. l. 3. (i) Per præc.

Quod si detur angulus obtusus RBC, eadem construe, eritque segmentum COB quæsitum.

[Scholium. *Eâdem omnino constructione, circuli circumferentiam ducere licebit, qui datam rectam AR in dato puncto B tangat, & per aliud punctum C, extra rectam AR sumptum transeat. Nempe ductâ BC, & ad datam AR erectâ perpendiculari BL, si fiat angulus BCI, angulo CBL æqualis; rectarum BL, CI intersectio I erit centrum, & IB vel IC radius circuli describendi.*] Fig. 46.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 47.

A Dato circulo segmentum auferre capiens angulum dato parem.

(a) Per 23. l. 1.

Ad circuli diametrum FA duc perpendicularem BAL; ducatur item AC, (a) quæ faciat angulum BAC parem dato. Hæc auferet segmentum AQC capiens angulum parem dato; uti patet ex 32.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 48. 49. 50.

SI in circulo duæ rectæ (CL, BF) se secuerint; rectangulum (COL) sub segmentis unius, æquale est rectangulo (BOF) sub segmentis alterius comprehenso.

Si se intersecant in centro A, res patet.

Fig. 48. (b) Per 3. l. 3. (c) Per 5. l. 2. (d) Per 47. l. 1.

Si una CL transit per centrum A, & reliquam BF secat bifariam; secabit quoque (b) perpendiculariter, ac propter bisectionem quad. FO est rectangulum FOB. Ducatur AF. Quoniam CL bisecta est in A, & aliter in O, erit

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rectang. COL}\\ \text{quad. AO}\end{array}\right. \text{æ. } (c) \text{ quad. AL; hoc est, quad. AF; hoc est, } (d) \left.\begin{array}{l}\text{quad. AO}\\ \text{quad. FO.}\end{array}\right\}$$

Dempto igitur communi quadrato AO, erit rect. COL æ. quad. FO, hoc est, rect. FOB.

Fig. 49. (e) Per 3. l. 3. (f) Per 5. l. 2. (g) Per 47. l. 1.

Si una CL per centrum transit, & reliquam BF secat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta secet ipsam BF in I bifariam. Igitur angulus AIB (e) rectus erit. Jam quia CL bisecta est in A & aliter in O, erit

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rectang. COL}\\ \text{cum}\\ \text{quad. AO}\end{array}\right. \text{æ. } (f) \text{ quad. AL, hoc est, quad. AB; hoc est, } (g) \left.\begin{array}{l}\text{quad. AI}\\ \text{quad. BI.}\end{array}\right\}$$

Sed

Sed quadratum AO æquatur (a) quadratis OI, AI. Ergo (a) Per 47. l. 1.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rectang. COL} \\ \text{quad. OI} \\ \text{quad. AI}\end{array}\right.$ æ. $\left.\begin{array}{l}\text{quad. AI} \\ \text{quad. BI.}\end{array}\right\}$

Dempto igitur communi quadrato AI, remanent

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. COL} \\ \text{quad. OI}\end{array}\right.$ æ. quad. BI.

Atqui etiam quadratum BI æquatur rectangulo (b) FOB cum quadrato OI, quia FB secta est bifariam in & I aliter in O. Ergo (b) Per 5. l. 2.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rectang. COL} \\ \text{quad. OI.}\end{array}\right.$ æ. $\left.\begin{array}{l}\text{rect. FOB} \\ \text{quad. OI.}\end{array}\right\}$

Dempto igitur communi quadrato OI, erit

rect. COL æ. rect. FOB.

Quod si neutra rectarum CL, FB per centrum transeat; per communem earum sectionem O & per centrum A, ducatur recta XZ. Per modò demonstrata tam rectang. COL quàm rectang. FOB æquantur rectangulo ZOX. Ergo etiam COL, FOB æqualia sunt inter se. Fig. 50.

[*Vel sic facilius & universalius. Connecte CF & BL. Atque ob angulos* (c) *COF, BOL ad verticem oppositos, ipsosque* (d) *C & B* (*super eodem arcu FL*) *pares, trigona COF, BOL* (e) *æquiangula sunt. Ergo per prop. 4. lib. 6. quæ ab hac non dependet, CO: OF :: BO: OL; & proinde, per prop. 16. lib. 6. quæ itidem ab hac minime dependet, rect. CO × OL = rect. BO × OF. Q. E. D.*] Fig. 51. (c) Per 15. l. 1. (d) Per 21. l. 3. (e) Per cor. 9. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO XXXVI.

SI a puncto (*B*) *extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens* (*BF,*) *altera secans* (*BC;*) *erit rectangulum* (*CBO*) *sub totâ secante* (*CB*) *& parte* (*BO*) *inter punctum & circulum interjectâ comprehensum, æquale quadrato tangentis* (*BF.*) Fig. 52. 53. 54.

Si secans BC transit per centrum A, junge AF: faciet hæc (f) cum FB angulum rectum. Quoniam CO bisecta est in A, eique adjecta OB, erit Fig. 52. (f) Per 18. l. 3.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. CBO} \\ \text{quad. AO}\end{array}\right.$ (g) æ. quad. AB; hoc est, (h) $\left.\begin{array}{l}\text{quad. BF} \\ \text{quad. AF.}\end{array}\right\}$ (g) Per 6. l. 2. (h) Per 47. l. 1.

 Ablatis

Ablatis ergo quadratis AO, AF æqualibus, remanet
rect. CBO Æ. quad. BF.

Fig. 53. 54. Quod si CB non transit per centrum A, ducantur AB, AF, AO; & AL ex centro ducta bisecet OC in L. Ergo angulus ALO (*a*) rectus erit. Item AFB (*b*) erit rectus. Quoniam verò CO bisecta est in L, eique adjecta est OB, erit

(a) Per 3. l. 3.
(b) Per 18. l. 3.
(c) Per 6. l. 2.

$$\left.\begin{matrix}\text{rect. CBO}\\ \text{quad. LO}\end{matrix}\right\}\ \text{Æ. (c) quad. LB.}$$

Addatur utrimque quadratum AL, erit

$$\left\{\begin{matrix}\text{rect. CBO}\\ \text{quad. LO}\\ \text{quad. AL}\end{matrix}\right.\ \text{Æ.}\ \left.\begin{matrix}\text{quad. LB}\\ \text{quad. AL.}\end{matrix}\right\}$$

(d) Per 47. l. 1.
(e) Per eand.
(f) Per eand.

Sed quadrata LO, AL æquantur quadrato (*d*) AO seu AF; & quadrata LB, AL (*e*) æquantur quadrato AB. Ergo

$$\left\{\begin{matrix}\text{rect. CBO}\\ \text{quad. AF}\end{matrix}\right.\ \text{Æ. quad. AB; hoc est, } (f)\ \left.\begin{matrix}\text{quad. BF}\\ \text{quad. AF.}\end{matrix}\right\}$$

Ablato igitur communi quadrato AF, remanet
rect. CBO Æ. quad. BF.

Fig. 55. [*Vel sic faciliùs & universaliùs. Duc CF & FO: ac ob angulos BFO &* (g) *C pares, & B communem, triangula CBF, FBO* (h) *æquiangula sunt. Ergo per 4. l. 6. quæ ab hac non dependet, CB: BF :: FB: BO. Quare per 17. l. 6. quæ ab hac non dependet, rectangulum CB ✕ BO æquale est quadrato BF.* Q. E. D.

(g) Per 21. l. 3.
(h) Per cor. 6. p. 32. l. 1.

Corollaria.

Fig. 56. 1. SI ab eodem extra circulum puncto B, quotvis ducantur secantes BC, omnia rectangula CBO inter se æqualia sunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis BF.

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, BF, BQ æquales sunt. Eorum quippe quadrata æquantur singula eidem rectangulo CBQ.

[3. *Perspicuum quoque est ab eodem puncto B extra circulum assumpto, duci tantùm posse duas lineas BF, BQ, quæ circulum tangant. Nam si tertia tangere dicatur, erit illa ipsis BF & BQ* (i) *æqualis, & proinde ab unâ istarum non diversa.*

(i) Per cor. 2.

Fig. 57. 4. *Hinc cum Maurolyco ex notâ montis altitudine AD, & lineâ horizontali AB terram tangente in B, ubi montis vertex, ab illo recedentibus apparere desinit, Telluris diametrum DE (in AD productâ sumptam) metiri discimus. Erit enim, per hanc prop. rectang. AE ✕ AD = ABq. Dividatur ergo notum*

tum quadratum AB per notam montis altitudinem AD, & quotiens dabit rectam AE: ex quâ subtrahe notam montis altitudinem AD; reliqua erit DE Telluris diameter. Q. E. I.

5. In omni triangulo rectangulo BFA, rectangulum ex hypotenusâ & lateris unius summâ, ac differentiâ, æquatur quadrato lateris alterius. Si enim centro A, & intervallo AF describatur circulus, secans hypotenusam AB in O; & producatur BA usque dum circulo rursus occurrat in C, Hypotenusæ BA & lateris AF summa erit BC, a puncto B circulum secans; eorumque differentia erit BO ea secantis pars quæ inter punctum & circulum interjicitur; & trianguli latus alterum est BF circulum (a) tangens. Sed per hanc prop. rectangulum CBO æquatur quadrato BF: Ergo, in triangulo rectangulo BFA, &c. Q. E. D. Fig. 57. (a) Per 16. l. 3.

6. Si ab angulo A trianguli ABC, cujus latera AB, AC sunt inæqualia; demittatur in basem (si opus productam) perpendiculum AL, erit rectangulum sub summâ & differentiâ laterum AB, AC, æquale rectangulo sub summâ & differentiâ rectarum LB, LC, inter perpendiculum AL & angulos basis B, C interceptarum. Centro enim A, radio latere minore AC describatur circulus secans latus majus AB in D, & basem (si opus productam) in O; & producatur BA donec circulo iterum occurrat in E. Propter æquales AC, AD, AE, erit EB laterum summa; & BD illorum differentia: & propter æquales (b) LC, LO, erunt BC & BO (vel in Fig. 59. BO & BC) summa & differentia interceptarum LB, LC. Sed (c) rect. EBD = rect. CBO. Ergo, &c. Fig. 58. 59. (b) Per 3. l. 3. (c) Per cor. 1 hujus.

In casu fig. 58. Theorema sic potest efferri. Fig. 58.

Si ab angulo A trianguli ABC demittatur perpendicularis in basem BC, eam dividens in duo segmenta BL, LC; erit rectangulum sub summâ & differentiâ laterum AB, AC, æquale rectangulo sub basi BC, & differentia segmentorum basis BO. Atque hujus theorematis usus est eximius in trigonometriâ planâ.]

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum sub CB & OB sit æquale quadrato BF, hæc circulum tanget in F. Fig. 56.

[Hoc est, si a puncto B extra circulum dato, in circulum cadant duæ rectæ, quarum altera BC circulum secet, altera verò BF incidat, sit autem rectangulum sub totâ secante CB & parte BO inter punctum & circulum interjectâ comprehensum, æquale ei quod ab incidente BF fit quadrato; Incidens linea BF circulum tanget in F.]

Ex B ducatur tangens BQ, & ex E centro ductis ad Q & F rectis EQ, EF, jungatur BE. Quoniam rectangulo CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum BQ per 36. hæc inter se æqualia sunt; adeoque & (a) rectæ BQ, BF æquales. Igitur triangula FEB, QEB sibi mutuò sunt æquilatera. Ergo (b) anguli Q, F æquales erunt. Sed Q (c) rectus est. Ergo etiam F rectus est. Ergo BF (d) tangit.

[Coroll. 1. *Hinc angulus* (e) *EBF æqualis est angulo EBQ.*

2. *Si duæ rectæ æquales BF, BQ ex puncto quopiam B in convexam peripheriam incidant, & earum una BF circulum tangat, altera quoque BQ eundem circulum tanget. Nam cùm BF, BQ sint æquales, earum quadrata erunt* (f) *æqualia. Sed BFq* = (g) *CBO. Ergo BQq* = (h) *CBO. Ergo etiam BQ per hanc prop. tangit circulum.*]

(a) Per ax. 15.
(b) Per 8. l. 1.
(c) Per 18. l. 3.
(d) Per 16. l. 3.
(e) Per 8. l. 1.
(f) Per ax. 15.
(g) Per prac.
(h) Per ax. 1.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER QUARTUS.

HIC liber totus problematicus est: docet, quo artificio figuræ præsertim ordinatæ circulo inscribantur & conscribantur. Amplissimus est illius usus in munitionibus extruendis: & ex illo quasi fonte eximiæ illæ sinuum, tangentium, & secantium tabulæ ingenti bono Matheseos fluxere.

Est verò Quartus *hic Elementorum liber* Trigonometriæ *utilissimus. Circulo enim polygona inscribendo, tabulas Chordarum, Tangentium, & Secantium fabricare discimus: quarum ope, figurarum & corporum magnitudines mensuramur. Neque absque eo stellarum* Aspectus, *quos vocant, Quartilem nempe, Sextilem, &c. rite distinguimus; utpote a polygonorum in circulo inscriptione omnino pendentes. Neque sane Circuli aream sive* quadraturam *quandam aliunde quàm ex polygonorum innumerorum circulo inscriptorum & circumscriptorum areis sive* quadraturis *colligere possumus. Et haud aliter circulorum ad se invicem rationem duplicatam, è duplicatâ polygonorum iisdem inscriptorum aut circumscriptorum ratione colligimus. Architectura verò militaris polygonis circulo inscriptis toties utitur, ut præ aliis omnibus scientiis, huic libro in solidum fere deberi videatur.*

DEFINITIO.

1. Figura rectilinea circulo inscripta est, vel circulus figuræ circumscriptus, cùm singulorum angulorum vertices in circumferentiâ existunt.

2. Figura rectilinea circulo circumscripta est, vel circulus figuræ inscriptus est, cùm singula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata seu regularis est, quæ æquilatera & æquiangula est.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1.L4. *Circulo (BD) rectam datam (A) diametro non majorem; inscribere.*

Accipe in peripheriâ quodvis punctum B. Centro B, intervallo datæ A, describe arcum, circulo occurrentem in C. Duc rectam BC. Dico factum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2. *Circulo triangulum inscribere dato (X) æquiangulum.*

(a) Per 23. l. 1.
(b) Per 32. l. 3.
(c) Per constr.
(d) Per cor. 9. p. 32. l. 1.

Circulum tangat EF in D. Fiat angulus EDG par (a) angulo C, & FDH par B; jungaturque GH. Dico factum. Nam angulus H æquatur (b) angulo EDG, hoc est, (c) angulo C; & G æquatur FDH, hoc est, ipsi B. Ergo etiam GDH (d) æquatur A. Factum est igitur quod petebatur.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. *Circulo circumscribere triangulum æquiangulum dato ILK.*

Latus IK utrimque producatur, ut fiant externi anguli O & N. Fac in centro A (per 23. l. 1.) angulos GAB, BAF pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F, circulum tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum CDE est circulo circumscriptum, & æquiangulum dato ILK.

(e) Per 18. l. 3.
(f) Per theor. 1. schol. post 32. l. 1.
(g) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(h) Per 13. l. 1.

In quadrilatero CGAB, anguli G & B sunt duo (e) recti. Ergo reliqui GAB & C conficiunt simul etiam duos (f) rectos, ac proinde æquantur duobus simul O, I. Ablatis igitur GAB & O æqualibus per constr. remanent æquales, C & I. Eodem modo ostenditur E æqualis esse K. Ergo D & L (g) etiam æquales erunt. Factum est igitur quod petebatur.

Quòd autem tangentes concurrant, sic ostenditur. Anguli O, I, & K, N sunt æquales (h) 4. rectis; & I, K sunt minores duobus (a) rectis. Ergo O, N, (hoc est per construct. GAB & BAF) sunt majores duobus rectis. Ergo GAF est minor duobus (b) rectis. Ergo [*arcus GBF est* (c) *semiperipheriâ major, & arcus oppositus GF, semiperipheriâ minor. Unde*] recta GF cadit [*supra centrum A, hoc est,*] inter A & D. Ergo cùm AGD, AFD sint recti, erunt DGF, DFG duobus rectis minores. Ergo (d) CGD, EFD concurrunt versùs D. Simili ratione demonstrabis concurrere reliquas.

(a) Per cor. 17. p. 32. l. 1.
(b) Per cor. 3. p. 13. l. 1.
(c) Per schol. p. 23. l. 1.
(d) Per schol. p. 31. l. 1.

[Aliter. *Ad centrum A circuli dati, super radio BA ex utrâque parte, fiant ut priùs, anguli BAC, BAF, angulis O, N externis trianguli dati ILK respectivè æquales, & in punctis B, G, F circulum tangant tres rectæ, quæ proinde angulos efficient rectos ABC, AGC; & ABE, AFE. Ducantur rectæ BG, BF, quæ ex utrâque parte radii BA, formabunt triangula BAG, BAF. Si itaque a duobus angulis rectis ABC, AGC, trianguli BAG anguli ad B & G respectivè subducantur, restabunt anguli GBC, BGC duobus rectis minores: ergo tangentes BC, GC, si protrahantur ex parte angulorum duobus rectis minorum, tandem* (e) *concurrent. Eodem modo tangentes BE, FE, si producantur, concurrent. Producantur & concurrant BC, GC in C; & BE, FE in E. Cùm igitur in quadrilatero ABCG anguli ad B & G sunt recti, erunt anguli BAG, BCG duobus rectis* (f) *æquales. Sed anguli O, I sunt duobus rectis* (g) *æquales, quorum O* (h) *æquatur angulo BAG; Ergo angulus BCG æquatur angulo I. Eodem modo ostendetur angulum BEF angulo K æqualem esse. Sed anguli I & K simul sumpti, sunt duobus rectis* (i) *minores: ergo anguli GCE, CEF sunt duobus rectis minores, & proinde recta CG, EF* (k) *concurrent si protrahantur. Concurrant in D. Cùm igitur anguli C & E trianguli CDE, angulis I & K trianguli ILK respectivè æquales sint; angulus D angulo L* (l) *æqualis erit: & singula trianguli CDE latera* (m) *tangunt circulum datum. Circulo igitur BGF circumscribitur triangulum CDE, æquiangulum dato ILK. Q. E. F.*]

Fig. 3.

(e) Per schol. p. 31. l. 1.
(f) Per Theor. 1. post. 32. l. 1.
(g) Per 13. l. 1.
(h) Per constr.
(i) Per cor. 17. p. 32. l. 1.
(k) Per schol. post. 31. l. 1.
(l) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(m) Per constr.

PROPOSITIO IV.

T*Riangulo circulum inscribere.*

Fig. 4.

Duos angulos C & E biseca rectis CA, EA coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares AB, AG, AF. Circulus centro A per B descriptus, transibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In

In triangulis enim CAG & CAB, quia anguli AGC, ABC, itemque GCA, BCA per constr. æquantur, & latus quoque AC est commune, etiam AG, AB (a) æqualia erunt. Pari modo ostendam paria esse AB, AF. Circulus ergo descriptus centro A per B, transit per G, F; & quia anguli ad B, G, F sunt recti, tangit (b) omnia trianguli latera. Fecimus ergo quod petebatur.

(a) Per 26. l. 1.

(b) Per 16. l. 3.

Fig. 3. Cor. 1. *Hinc cognitis lateribus trianguli, inveniuntur eorum segmenta quæ fiunt a contactibus circuli inscripti.* Sit $DC = 12$, $DE = 16$, $CE = 18$. Erit $CD + DE = 28$, *a quo subduc* CE $(= 18) = 10 + EF$, *& restabunt* $GD + DF = 10$. Erg (c) $GD = 5 = DF$; $GC = 7 = CB$; $BE = 11 = EF$.

(c) Per cor. 2. p. 36. l. 3.

Cor. 2. *Datis trianguli lateribus, & radio circuli inscripti, habetur area trianguli. Nam ducta AD, inscripti circuli radius est altitudo communis trium triangulorum ACD, ADE, AEC in quæ dividitur triangulum GDE; & eorum bases sunt trianguli CDE latera: ergo radius in laterum semisummam, dabit* (d) *aream trianguli CDE. Sit radius* $AB = 5$; *& latera* 12, 16, 18; *quorum semisumma est* 23: *Est itaque* $5 \times 23 = 115 =$ *area trianguli.*]

(d) Per schol. p. 41. l. 1. & p. 1. l. 2.

PROPOSITIO V.

Fig. 4. *Triangulo circulum circumscribere; sive per tria data puncta (B, C, D) non ad unam rectam posita, circulum describere.*

Puncta data B, C, D binis rectis BC, CD connecte, quas biseca perpendicularibus OA, EA concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D transeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ AC, AD, AB. Per constr. latera DO, AO æquantur lateribus CO, OA; & anguli ad O sunt recti. Ergo AD (e) æquatur AC. Eodem modo AB æquatur AC. Ergo etiam AD, AB (f) æquales. Ergo circulus centro A descriptus per B, transibit etiam per C & D. Quod petebatur.

(e) Per 4. l. 1.

(f) Per axio. 1.

Ad praxim tantùm opus centris B, C, D describere tres æquales circulos se mutuo intersecantes; & per intersectiones ducere rectas: hæ sibi occurrentes dabunt centrum quæsitum.

Tab. 2. Fig. 36. lib. 3. [Coroll. *Hinc liquet, circulum etiam Quadrilatero ABCF, cujus anguli oppositi ABC, AFC duobus rectis æquales sunt, circumscribi posse. Nam ducta recta AC, circulus per hanc*

prop.

prop. circa triangulum ABC describi potest. Describatur; & in arcu opposito AFC, capiatur punctum quodvis D, & DA, DC ducantur. Ergo est ABCD quadrilaterum circulo inscriptum, ac proinde anguli oppositi ABC, ADC (a) *aquales sunt duobus rectis. Sed in quadrilatero ABCF, anguli ABC, AFC aquales duobus rectis esse ponuntur. Ablato igitur communi ABC, aquales erunt anguli ADC, AFC, eidem arcui ABC insistentes, quorum alter ADC est angulus ad peripheriam ipsi ABC oppositam: Ergo* (b) *uterque angulorum aqualium ad eandem peripheriam existit, & proinde circulus per A, B, C, tres angulos quadrilateri ABCE descriptus, transibit etiam per angulum quartum F. Q.E.D.*

(a) Per 22. l. 3.

(b) Per schol. post pr. 21. l. 3.

Scholium. *Si triangulo circulus circumscribatur, pro variâ trianguli circumscripti specie, centrum circuli varie cadet. Si fuerit acutangulum, centrum cadet intra triangulum. Nam propter angulum acutum BCD* (c) *in segmento majore, centrum A cadet in illo segmento majore cujus basis est BD; atque eodem modo ostendetur centrum esse in illis segmentis majoribus quorum bases sunt BC, CD respectivè, adeoque cadet intra triangulum BCD. In triangulo verò rectangulo, propter angulum in semicirculo* (d) *rectum, centrum cadet in latus angulo recto oppositum. In obtusangulo autem triangulo, propter angulum obtusum in* (e) *segmento minore, centrum erit in segmento opposito, ac proinde extra triangulum cadet. Hinc sequitur,*

Fig. 5. l. 4.

(c) Per 31. & schol. p. 21. l. 3.

Fig. 6.

(d) Per ead.

Fig. 7.

(e) Per ead.

1. *Si a centro A ad singulos angulos B, C, D, trianguli acutanguli ducantur recta AB, AC, AD, illa triangulum in tria aquicrura triangula ABC, ABD, ACD (propter aquales AB, AC, AD) divident. Et ob eandem causam, si recta AC a centro circuli triangulo rectangulo circumscripti, ad angulum rectum ducatur, illud in duo triangula isoscelia, ABC, ACD dividet, quod & priùs* (f) *observatum. Si verò ad singulos trianguli obtusanguli angulos, a centro circuli circumscripti, ducantur recta AB, AC, AD, formabuntur inde tria aquicrura triangula, quorum illud cujus basis est latus BD angulo obtuso BCD oppositum, nempe triangulum BAD, erit extra triangulum obtusangulum, & simul cum eo quadrilaterum ABCD formabit, duobus reliquis triangulis isosceliis ABC, ACD aquale.*

Fig. 5.

Fig. 6.

(f) Vide cor. p. 31. l. 3.

Fig. 7.

2. *Si a centro A in singula latera perpendiculares ducantur radii AEF, AIH, AOG; (vel si in circulo qui triangulo rectangulo circumscribitur, ductis ut priùs AEF, AOG, a centro A erigatur lateri BD perpendicularis AH, quoniam puncta A & I in illo casu coincidunt;) isti radii tum ipsa latera in E, I & O, tum arcus qui a lateribus subtenduntur in F, H & G, tum triangulorum isoscelium angulos verticales ad A,* (g) *bifariam*

Fig. 5. 6. 7.

(g) Per 1. schol. p. 26. l. 1. & p. 30. l. 3.

(a) Per 30. l. 3. *riam secabunt. Et in circulo circa obtusangulum triangulum, completâ diametro HAK, arcus BKD bisecabitur* (a) *in K.*

Fig. 5. 3. *Unde in triangulo acutangulo, BE, BI, CO, &c. semisses laterum BC, BD, CD, erunt* (b) *angulorum BAF, BAH, CAG, &c. sinus recti; & similiter in triang. rectang. vel obtusang. ipsas BE, CO angulorum BAF, CAG sinus rectos esse constat: in triangulo autem rectangulo radium circuli BI anguli recti BAH sinum rectum esse patet ex def. 10. l. 3. Et cum idem* (c) *sit anguli cujusvis, & complementi ejus ad duos rectos, sinus rectus; Ergo in casu trianguli obliquanguli, recta BI tam anguli BAH quàm etiam anguli BAK sinus rectus erit.*

(b) Per cor. 1. p. 3. l. 3. Fig. 6, 7. Fig. 6. Fig. 7. (c) Per def. 10. l. 3.

Fig. 5, 6, 7. 4. *Angulus ad centrum BAF super arcu dimidio BF, æqualis est angulo ad peripheriam BDC super arcu integro BC. Cùm enim angulus BAC tum anguli BAF* (d) *ad centrum, tum anguli BDC ad* (e) *circumferentiam duplus sit; anguli igitur BAF, BDC* (f) *æquales erunt. Et pari modo ostendetur æquales esse angulos CAG, CBD; item æquales esse in triangulo acutangulo angulos BAH, BCD, quos in triangulo rectangulo rectos & proinde æquales esse patet: In circulo autem circa triangulum obtusangulum descripto, angulum BAK ad centrum super arcu dimidio BK, angulo obtuso BCD ad peripheriam super arcu integro BKD æqualem esse sic probatur. Ductis BK, DK, angulum ad centrum BAH super arcu dimidio, æqualem esse angulo ad peripheriam BKD super arcu integro, patet ut supra: sed in quadrilatero BCDK circulo inscripto, anguli oppositi BCD, BKD* (g) *duobus rectis, hoc est, angulis BAH, BAK simul sumptis* (h) *æquantur. Ablatis igitur æqualibus BKD, BAH, remanebunt æquales BCD, BAK.*

(d) Per cor. 2. hujus sch. (e) Per 20. l. 3. (f) Per axio. 6. Fig. 5, 6. Fig. 7. (g) Per 22. l. 3. (h) Per 13. l. 1.

Fig. 5, 6, 7. 5. *Cujuscunque trianguli BCD latera BC, BD, CD sunt inter se, ut sinus angulorum BDC, BCD, CBD lateribus respectivè oppositorum. Nam latera BC, BD, CD sunt inter se invicem ut eorum semisses BE, BI, CO, hoc est, ut* (i) *sinus angulorum BAF, BAH (vel BAK,) CAG. Sed anguli isti angulis* (k) *BDC, BCD, CBD respectivè sunt æquales. Ergo latera BC, BD, CD sunt inter se, ut sinus angulorum lateribus illis respectivè oppositorum. Atque ab hoc unico corollario, magna pars trigonometriæ planæ deducitur: quod diligenter est notandum.*

(i) Per cor. 3. hujus sch. (k) Per cor. 4. huj. schol.

Fig. 62. l. 1. 6. *Hinc Lunæ distantiam metiri discimus. Dato enim per observationes Astronomicas Parallaxeos diurnæ angulo BCA, & angulo DBC, & proinde ejus complemento ad duos rectos CBA, unà cum Telluris semidiametro AB, Lunæ distantiam sequenti analogiâ investigamus. Ut sinus anguli ACB, ad sinum anguli* (l) *CBA; ita BA Telluris semidiameter, ad AC distantiam Lunæ.* Q.E.I.

(l) Per cor. 5. huj. schol.

7. Hinc

9. Hinc Solis etiam distantiam metiri discimus. Datis enim per observationes Astronomicas parallaxews menstrua angulo, ubi scilicet Luna pracise bisecta apparet ZEO; & Luna distantiâ ZO; per analogiam sequentem, distantiam Solis colligimus. Ut Sinus anguli ZEO, ad sinum anguli recti EOZ sive, (a) *radium;* (b) *ita ZO distantia Luna, ad ZE distantiam Solis. Q.E.I.]* Fig. 8. l. 4. (a) Per def. 10. l. 3. (b) Per cor. 1. hujus schol.

PROPOSITIO VI. & VII.

C*Irculo quadratum inscribere, & circumscribere.* Fig. 9.

Ducantur diametri BD, CE se mutuò secantes perpendiculariter. Rectæ quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inscribunt.

Demonstratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. [*Nam in triangulis CAD, DAE, ob angulos aquales ad A, nempe rectos, & latera circa illos respectivè aqualia, bases CD, DE* (c) *aquales erunt; & eodem modo omnia latera EB, BC, CD, DE figura inscripta sibi invicem aquari patebit. Et quia CE circuli diameter est, angulus CDE in semicirculo* (d) *rectus erit; & ob eandem rationem anguli DEB, EBC, BCD recti sunt. Quadrilaterum ergo inscriptum est aquilaterum & rectangulum; &* (e) *proinde quadratum est.* (c) Per 4. l. 1. (d) Per 31. l. 3. (e) Per def. 32. l. 1.

Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C, D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura IFGH quadratum est circulo circumscriptum.

Demonstratio patet ex 18. l. 3. & ex 28. 30. & 34. l. 1.

[*Quia enim recta HI, IF, FG, GH circulum tangunt in extremitatibus diametrorum BD, CE: cum diametris istis* (f) *efficient angulos rectos ad, B, C, D, E. Et propter angulos etiam rectos ad centrum A, aquales erunt alterni anguli CAB, ABH, & recta CE, IH* (g) *erunt parallela; eodem modo constabit rectas CE, FG parallelas esse: Ergo & FG, IH parallela* (h) *sunt. Et pari modo probabitur rectas FI, GH tum recta DB, tum sibi invicem parallelas esse. Parallelogrammum igitur est IFGH, & latera opposita* (i) *aqualia sunt; nempe FI = GH, & FG = IH. Sed ob parallelogramma CFGE, & DGHB, latera FG, GH parallelogrammi FGHI,* (k) *aqualia sunt circuli diametris CE, DB; & proinde omnia latera IF, FG, GH, HI sibi invicem aqualia sunt. Porro, in parallelogrammo FDAC, angulus ad A rectus est: ergo etiam angulus ad F rectus* (l) *erit; & pari modo, anguli ad G, H, I recti erunt.* (f) Per 18. l. 3. (g) Per 28. l. 1. (h) Per 30. l. 1. (i) Per 34. l. 1. (k) Per eand. (l) Per eand.

Ergo IFGH est parallelogrammum æquilaterum & rectangulum, sive quadratum: cujus omnia latera circulum datum tangunt. Est igitur quadratum circulo circumscriptum.]

Scholium.

Fig. 9. (a) *Per* 31. *l.* 3. (b) *Per* 47. *l.* 1. (c) *Per cor.* 1. *p.* 47. *l.* 1.

QUadratum circumscriptum circulo, duplum est inscripti: Nam quia angulus B C D in semicirculo rectus (*a*) est, erit quadratum ex D B (hoc est quadratum F I) æquale (*b*) quadratis D C, B C, ac proinde (*c*) duplum quadrati D C, hoc est quadrati C D E B. [*Item quadratum inscriptum duplum est radii quadrati.*]

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fig. 10.

QUadrato (BEFC) circulum inscribere, & circumscribere.

Ducantur diametri in quadrato se secantes in A. Centro A per B descriptus circulus transibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc A D perpendicularem ad C B. Centro A per B descriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

(d) *Per* 5. *l.* 1. (e) *Per cor.* 11. *p.* 32. *l.* 1. (f) *Per* 6. *l.* 1.

Pars 1. Quia ex hyp. C B, E B latera sunt æqualia, erunt anguli B C E, B E C (*d*) æquales. Angulus autem CBE rectus est per hyp. Ergo B C E, B E C (*e*) sunt semirecti. Eodem modo ostendam C B F & reliquos esse semirectos, adeoque æquales inter se. Ergo in triangulo B A C, cùm duo sint æquales anguli CBA, & BCA, erunt A B & AC (*f*) æquales. Eâdem ratione A B, A E, A F æquales erunt. Circulus igitur centro A per B descriptus, transibit etiam per E, F, C.

(g) *Per* 26. *l.* 1. (h) *Per* 16. *l.* 3.

Pars 2. Ex A sint perpendiculares insuper A G, A H, A I. Quoniam in triangulis G B A & D B A anguli ad D & G, itemque ad B inter se æquales sunt, latusque A B commune, latera (*g*) A D, A G æqualia erunt. Eâdem ratione æqualia sunt AG, AH, AI. Circulus ergo centro A per D transiens, transibit etiam per G, H, I, tangetque latera (*h*) omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I sunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

Fig. 9.

Coroll. 1. *Hinc, cùm angulus CDF a tangente & secante factus sit semirectus, sive gr. 45; & angulus CDG sesquirectus sive gr. 135; ergo latus quadrati circulo inscriptibilis*

(sive

(sive recta abscindens quadrantem totius peripheriæ) ut DC, circulum dividet in duo segmenta, (a) *quorum majus continet angulum semirectum, & minus angulum sesquirectum. Angulus igitur in segmento quadrantali æqualis est angulo recto & semirecto simul sumptis, atque angulus super arcu quadrantali, sive in segmento opposito, æqualis est semirecto.* (a) Per 32. l. 3.

Coroll. 2. *Hinc etiam, si super DC latere quadrati circulo inscripti pro diametro, describatur alius circulus minor, ipsius circumferentia per A centrum circuli majoris transibit. Nam circa quadratum ACFD, cujus angulus A est in centro majoris circuli, circumscribetur* (b) *iste circulus minor.*] (b) Per 9. l. 4.

PROPOSITIO X.

TRiangulum Isosceles construere (BAC) in quo angulus ad basim (ABC vel ACB) sit duplus anguli ad verticem (A.) Fig. 11.

Sumatur quævis recta AB, quam ita seca (*c*) in D, ut rectangulum ABD sit æquale quadrato DA. Tum centro A per B describe circulum, cui inscribe BC (*d*) æqualem DA, & junge AC. Erit triangulum BAC quæsitum. (c) Per 11. l. 2. (d) Per 1. l. 4.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A describe (*e*) circulum. Quoniam rectangulum ABD æquatur quadrato AD, hoc est BC, liquet BC tangere (*f*) circulum DO quem secat CD. Ergo angulus BCD æquatur (*g*) angulo A in segmento alterno: additoque communi DCA, erit BCA æqualis duobus A & DCA. Sed quia latera AB, AC æquantur, ABC æqualis (*h*) est BCA. Ergo etiam ABC æquatur duobus internis A & DCA. Sed etiam externus BDC (*i*) æquatur duobus internis A & DCA. Ergo ABC & BDC æquales sunt. Recta igitur DC æquatur (*k*) BC, hoc est per constr. DA. Ergo anguli A & DCA (*l*) æquantur. Quare angulus ABC, qui duobus ostensus est æqualis, duplus erit unius A. Factum igitur est quod petebatur. (e) Per 5. l. 4. (f) Per 37. l. 3. (g) Per 32. l. 3. (h) Per 5. l. 1. (i) Per 32. l. 1. (k) Per 6. l. 1. (l) Per 5. l. 1.

[Scholium. *Ex hujus propositionis constructione liquet quomodo ex dato AB uno crurum æqualium, conficiatur triangulum quæsitum. Si verò super datâ basi CB, triangulum Isosceles ABC sit ita construendum, ut utervis angulorum ad basem duplus sit anguli ad verticem; primò, super CB tanquam uno crurum æqualium, construatur ejusmodi triangulum CBD, cujus vertex sit C, basis BD: deinde super BC ad punctum C fiat* (m) *angulus BCA æqualis angulo CBD, & producatur BD donec occurrat ipsi CA in A. Erit ABC triangulum quæsitum super datâ basi BC constructum.*] (m) Per 23. l. 1.

Corollaria.

Fig. 11. 1. ANguli ad basim singuli B & C in triangulo Isoscelio jam constructo, sunt duæ quintæ duorum rectorum, seu quatuor quintæ unius recti, & reliquus A est una quinta duorum rectorum seu duæ quintæ unius. Patet ex propositione hac & ex 32, lib. 1.

Sch. ad cor. 1. *Cùm duo anguli recti per semicirculum, sive per gradus 180 mensurentur, erit quinta pars duorum rectorum, nempe angulus A, gr. 36; & duæ quintæ duorum rectorum, nempe B, gr. 36 bis, sive gr. 72. Et cùm unus ang. rectus sit gr. 90, ejus quinta pars erit gr. 18. Ergo angulus A (gr. 36) continet duas quintas unius recti, & ang. B. (gr. 72.) quatuor quintas unius recti, & proinde duæ quintæ duorum rectorum sunt quatuor quintæ unius recti; & una quinta duorum efficit duas quintas unius. Et universaliter, in angulo æstimando per rectorum quorumcunque partes, dimidiatus rectorum numerus inferet partium numerum duplicatum; & vice versâ. Sic, si quivis angulus faciat sex quintas unius recti; ergo tres quintas duorum rectorum efficiet.*

Fig. 11. Cor. 2. *Cùm angulus BAC sit duorum rectorum pars quinta, sive duæ partes decimæ, hoc est gr. 36 erit etiam una decima quatuor rectorum, sive integri circuli, gr. 360; & proinde recta BC est latus decagoni ordinati, circulo inscribendi, cujus radius sit AB vel AC.*

Cor. 3. *Si radius circuli AB ita secetur in D, ut rectangulum ABD sub toto radio & segmento minore, æquale sit quadrato DA segmenti majoris; erit segmentum illud majus AD latus decagoni, circulo cujus radius sit AB inscribendi. Constat enim ex prop. hujus demonstratione, segmentum AD ipsi BC æquale esse.*

Cor. 4. *Si centro C, radio CB vel CD describatur circulus, cùm sit BCD triangulum isosceles triangulo BAC æquiangulum,* (a) *erit basis BD latus decagoni ordinati* (b) *eidem circulo inscribendi. Et cùm circuli radius CB (=* (c) *AD) sit latus hexagoni* (d) *eidem circulo inscribendi: Ergo, si recta quævis AB ita secetur in D, ut rectangulum ABD sub totâ AB & segmento minore BD æquetur quadrato segmenti majoris AD, erit segmentum majus AD latus hexagoni, & minus DB decagoni eidem circulo inscriptibilium. Atque hæc est prop. 9. lib. 13. Euclidis.*

Cor. 6. *Hinc discimus arcum circuli quadrantalem in quinque partes æquales (ac proinde, continuâ* (e) *bisectione, in partes æquales*

(a) Liquet ex hujus prop. 10. demonstr.
(b) Per cor. 2. hujus.
(c) Per constr. hujus p. 10.
(d) Per cor. 1. p. 15. l. 4.
(e) Per 30. l. 3.

æquales 10, 20, 40, &c.) secare; nempe arcum BC bisecando. Cùm enim recta BC sit latus (a) *decagoni ordinati circulo, cujus centrum sit A, radius AB, inscripti; erit arcus BC pars decima totius circumferentiæ, sive pars quinta semicircumferentiæ; atque adeo dimidium ipsius BC erit pars decima semicircumferentiæ, sive pars quinta arcûs quadrantalis.*] (a) *Per cor. 2. hujus.*

PROPOSITIO XI.

Circulo pentagonum ordinatum inscribere. *Fig. 11. & 12.*

Describatur (*b*) triangulum BAC habens angulum ad basim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum CAD (*c*) inscribe circulo. Angulos ad basim ACD, & ADC seca bifariam rectis CE, DB, occurrentibus circulo in E & B. Puncta A, B, C, D, E rectis lineis connexa, dabunt pentagonum ordinatum circulo inscriptum. (b) *Per præc.* (c) *Per. 2. l. 4.*

Nam ex constructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales esse. Quare etiam arcus iis subtensi, AE, ED, DC, CB, BA (*d*) sunt æquales. Itaque rectæ subtensæ arcubus etiam æquales (*e*) erunt. Pentagonum igitur æquilaterum est. Est verò etiam æquiangulum, (*f*) quia ejus anguli BAE, AED, &c. insistunt arcubus æqualibus BCDE, ABCD, &c. Factum est igitur quod petebatur. (d) *Per. 28. l. 3.* (e) *Per 27. l. 3.* (f) *Per. 29. l. 3.*

Corollaria.

1. Angulus Pentagoni ordinati facit sex quintas unius recti, seu (*g*) tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cùm sint æquales, utpote æqualibus arcubus BC, CD, DE, insistentes, & medius per coroll. 1. præced. sit duæ quintæ unius recti, tres simul, hoc est, ipse pentagoni angulus, conficient sex quintas unius recti. *Fig. 12.* (g) *Vide schol. ad cor. 1. præc.*

[Schol. ad. cor. 1. *Cùm anguli recti pars quinta sit gr.* 18, *erit angulus Pentagoni ordinati gr.* 18 *sexies, sive gr.* 108. *Cùm verò partes sex quintas unius recti enumerat author, idem est ac si angulum rectum quintâ sui parte auctum diceret.*

Cor. 2. *Ex hujus propositionis constructione liquet, quomodo super datâ rectâ CD, pentagonum ordinatum construere oportet. Fiat* (h) *enim super illâ tanquam basi, triangulum Isosceles ACD, in quo angulus ad basem duplus sit anguli ad verticem; circa quod,* (i) *circumscribatur circulus, & bisecentur anguli ad basem rectis CE, DB, circulo occurrentibus in E, B. Ducta recta AB. BC, DE, EA perficient ordinatum pentagonum super* *Fig. 12.* (h) *Per schol. post p. 10. l. 4.* (i) *Per 5. l. 4.*

per datâ rectâ CD descriptum, uti ex propositionis demonstratione apparet. Aliam porro methodum idem construendi, docebit problema mox secuturum.

Scholium 1. *Universaliter, figuræ imparium laterum inscribuntur circulo beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basim,* multiplices *sunt eorum qui ad verticem sunt angulorum. Parium verò laterum figuræ in circulo inscribuntur ope Isoscelium triangulorum quorum anguli ad basim* multiplices sesquialteræ *sunt eorum qui ad verticem sunt angulorum.* Fig. 12. *Ut in triangulo Isoscele ACD, si angulus C aut D æqualis sit tribus angulis A, Latus CD erit latus Heptagoni; si quatuor, erit latus Enneagoni, &c. Sin verò C vel D æqualis sit $1\frac{1}{2}$ anguli A, erit CD latus quadrati: Et si C vel D æqualis sit $2\frac{1}{2}$ anguli A, subtendet CD sextam partem circumferentiæ. Pariterque si C vel D æqualis sit $3\frac{1}{2}$ anguli A, erit CD latus octogoni, &c. Nam quâ ratione in Isoscele hujus prop. angulorum ad basem bisectorum partes, unà cum angulo verticali, insistunt arcubus quinque, æqualibus peripheriæ totius partibus; & proinde si ejusmodi triangulum circulo inscribatur, ipsius basis erit latus pentagoni ordinati, eidem circulo inscribendi: eâdem ratione, si Isoscelis angulus alteruter ad basem triplus fuerit anguli ad verticem; angulorum ad basem trisectorum partes, unà cum angulo verticali, insistent arcubus septem, æqualibus itidem totius peripheriæ partibus, ac proinde, si ejusmodi triangulum circulo inscribatur, ipsius basis erit latus heptagoni ordinati, eidem circulo inscribendi. Et pari modo constabit de reliquis. Sit n numerus laterum figuræ ordinatæ circulo inscribendæ: Erit Isoscelis, inscriptioni inservientis, Angulus ad basem, Ad angulum verticalem, Ut $\frac{n-1}{2}$ Ad 1. Unde positâ unitate pro angulo verticali, anguli ad basem Isoscelis, unà cum angulo isto verticali, hisce numeris pro quavis figurâ ordinatâ inscribendâ, erunt exponendi; nempe pro triangulo æquilatero,* $1 + 1 + 1 = 3$; *pro quadrato,* $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1 = 4$; *pro pentagono* $2 + 2 + 1 = 5$; *pro hexagono* $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1 = 6$; *pro heptagono* $3 + 3 + 1 = 7$. *Et eodem modo pro aliis ordinatis inscribendis, procedendum est.*]

Scholium. 2.

Ingeniosa est Euclidea pentagoni inscriptio, sed multo expeditior illa Ptolemæi, quam tradit lib. 1. Almagesti, & est ejusmodi.

Ducantur

Ducantur diametri ED, BF se mutuò perpendiculariter intersecantes in A. Radium AD biseca in C. Centro C per B describe arcum, diametro ED occurrentem in G. Recta GB est latus pentagoni, & AG decagoni. *Fig. 13.*

Demonstratio hic dari nequit, pendet enim a prop. 10. lib. 13. Eucl. Eam vide apud Clavium in scholio post p. 10. l. 13.

[*In illâ prop.* 10. *libri sui* 13. *demonstrat Euclides, pentagoni ordinati circulo inscripti quadratum, æquari quadratis hexagoni & decagoni ordinatorum, eidem circulo inscriptorum, simul sumptis. Jam verò latus hexagoni ordinati circulo inscripti, ejusdem circuli radio æquale esse constabit ex cor.* 1. *p.* 15. *l.* 4. *Et latus decagoni ordinati eidem circulo inscripti, partem esse majorem radii secundùm prop.* 11. *l.* 2 *secti, constat ex cor.* 3. *p.* 10. *l.* 4. *Atque in fig.* 13. *trianguli ABG rectanguli ad A, latus AB est circuli EBDF radius; & latus AG est segmentum majus radii AE secundùm prop.* 11. *l.* 2. *secti, ut propositionis illius constructionem cum Scholii hujus constructione conferenti patebit. Ergo per* 10. *l.* 13. *&* 47. *l.* 1. *BG erit latus pentagoni eidem circulo inscripti. Propositionis autem illius decimæ lib.* 13. *demonstrationem, ad calcem libri sexti apponemus.*]

Problema.

SUper datâ rectâ (AB) pentagonum ordinatum ita construes. Seca (*a*) AB, sic ut rectangulum ABC sit æquale quadrato AC. Ex AB utrimque productâ aufer AD, BE æquales majori segmento AC. Centris A & D, intervallo AB describe arcus duos se secantes in F: Item centris B & E, eodem intervallo se secantes in G. Rursum centris F & G intervallo itidem AB, alios se secantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc est, æquilaterum & æquiangulum) super datâ AB. *Fig. 14.* (a) *Per* 11. *l.* 2.

Æquilaterum esse patet ex constructione: æquiangulum esse sic demonstrabitur. Ducatur DF. Patet ex constructione triangulum AFD esse Isosceles. Et basis AD est majus segmentum lateris DF, extremâ & mediâ ratione (*b*) secti, (est enim DF æqualis AB, & AD æqualis AC.) Ergo angulus (*c*) DAF est duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus FAB est (*d*) tres quintæ duorum rectorum, sive sex quintæ unius recti; ac proinde est (*e*) angulus pentagoni ordinati. Eodem modo ostenditur angulum GBA esse sex quintas unius recti, ac proinde parem FAB. Unde ne-

(b) *Confer p.* 30. *l.* 6. *cum p.* 11. *l.* 2. (c) *Per cor.* 1. *p.* 10. *l.* 4. (d) *Per* 13. *l.* 1. (e) *Per cor.* 1. *p.* 11. *l.* 4.

cesse jam est reliquos F, G, I, his æquales esse, ut patet ex 8. l. 1. si concipiatur subtendi recta FG.

[Ducantur enim recta FG, FB: Propter triangula ADF, EBG super basibus aqualibus AD, EB, aqualia, erunt recta (a) Per 40. l. 1. *FG, DE* (a) *parallela, & proinde alterni anguli DAF, AFG;* (b) Per 27. l. 1. *EBG, BGF* (b) *aquales; & eorum quilibet erit dua quinta duorum rectorum. Porro, cùm in triangulo Isoscele AFB angulus A ad verticem sit tres quinta duorum rectorum,* (c) Per 32. l. 1. (c) *erit alteruter ad basem, una quinta, & proinde BF bisecat angulum AFG, & angulus FBG (ABG—ABF, una nempe quinta ex tribus quintis subducta) continebit duas quintas, FGB duas, BFG unam: Igitur in triangulo BFG, latus FB lateri FG* (d) Per 6. l. 1. (d) *aquale est. Ergo triangula BAF, FIG sunt sibi mutuò aquilatera, &* (e) Per 8. l. 1. *proinde* (e) *aquiangula, & angulus FIG continebit etiam tres quintas duorum rectorum, IFG unam, IGF unam. Ergo anguli IFG, GFA simul additi, efficiunt etiam tres quintas; & eodem modo angulus IGB continebit etiam tres quintas. Ergo pentagonum est aquiangulum. Construitur ergo super datâ rectâ AB pentagonum ordinatum. Q. E. F.*

Alio modo super datâ rectâ AB construetur pentagonum ordinatum, si super AB tanquam basi, ex parte contrariâ, fiat triangulum Isosceles ABX, cujus angulus ad basem BAX vel ABX duplus sit anguli X ad verticem; & productis XA, XB ad F, G, ut sint AF BG ipsi AB respectivè aquales, centris F & G, radiis AF, BG, describantur circuli se secantes in duobus punctis, quorum ab AB remotius sit I, & ducantur FI, GI: Dico factum. Demonstratio fere eadem erit cum priore: Ductâ enim AG, rectarum AB, FG parallelismus triangulorum ABF, (f) Per 4. l. 1. *ABG* (f) *aqualitate etiamnum* (g) Per 40. l. 1. (g) *constabit.]*

PROPOSITIO XII.

Fig. 15. *CIrculo pentagonum ordinatum circumscribere.*

Inscribatur pentagonum ordinatum per præced. GHIKM, ducanturque tangentes in punctis, G, H, I, K, M, quæ concurrant in B, C, D. E, F. Dico factum.

Ex centro duc rectas AG, AB, AH, AC, AI. Quoniam (h) Per cor. 2. p. 36. l. 3. BG, BH ex uno puncto B, tangunt circulum, æquales (*h*) erunt. Trigona igitur GAB, HAB, sibi mutuò æquilatera (i) Per 8. l. 1. sunt. Æquantur ergo (*i*) anguli O, P, item Q, S: ac proinde totus B duplus est ipsius P, & totus GAH duplus est S. Eâdem de causâ anguli C & HAI dupli sunt ipsorum T, (k) Per 26. & 29. l. 3. & N. Sed GAH & HAI æquales (k) sunt, quia insistunt arcubus æqualibus GH, HI, per constr. Ergo etiam eorum

rum dimidii S, N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis BAH, CAH, duo anguli S, N æquantur, itemque duo ad H (*a*) recti, latusque AH est commune, etiam (*b*) BH, CH, itemque anguli P, T æquales erunt. Eodem modo ostendam rectas BG, FG esse æquales. Igitur CB, FB duplæ sunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. Eodem modo ostendam reliqua latera pentagoni circumscripti esse æqualia. Illud igitur æquilaterum erit. Est verò & æquiangulum; quia cùm jam ostensum sit angulos B & C duplos esse æqualium P & T; etiam ipsi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumscripsimus. Quod erat faciendum.

(a) Per 18. l. 3.
(b) Per 26. l. 1.

Scholium. Eodem artificio circulo circumscribitur ordinata figura quæcunque, si priùs illi similis circulo inscribatur: [*nempe ductis tangentibus ad illa circumferentiæ puncta*, G, H, I, K, *&c. ubi figuræ inscriptæ anguli circumferentiam tangunt.*]

PROPOSITIO XIII. & XIV.

Pentagono ordinato circulum inscribere, & circumscribere. Fig. 16.

Duos pentagoni angulos B, C biseca rectis BA, CA concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem AL.

Circulus centro A per L descriptus, tanget omnia pentagoni latera. Circulus verò descriptus centro A per B, transibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. [*Ab angulis D, E, F ad punctum A, ducantur etiam DA, EA, FA.*] In trigonis DCA, BCA, quia latera DC, AC, (*c*) lateribus BC, CA, itemque (*d*) anguli P & O æquantur, etiam G & I æquales (*e*) erunt. Sunt verò (*f*) etiam toti B & D æquales. Quare cùm (*g*) angulus G sit dimidius anguli B, etiam I erit dimidius ipsius D. Igitur D quoque bisectus est rectâ DA. Ob eandem causam, reliqui pentagoni anguli E, F sunt bisecti: ac proinde omnes dimidii anguli inter se æquales erunt. Ducantur insuper perpendiculares AM, AS, AN, AR. Quoniam igitur in trigonis LBA, MBA, anguli G, BLA æquantur angulis Q, BMA, latusque BA commune est, etiam (*h*) AL, AM æquales erunt. Pari modo ostendam reliquas AM, AS, AN, AR inter se æquari. Circulus ergo centro A transiens per L, transibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M, S, N, R recti sunt per constr. tanget (*i*) quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

(c) Per hyp.
(d) Per constr.
(e) Per 4. l. 1.
(f) Per hyp.
(g) Per constr.
(h) Per 26. l. 1.
(i) Per 16. l. 3.

Pars

Pars 2. In trigono CAB, quia anguli O & G jam ostensi sunt æquales, erunt latera AC, AB (*a*) æqualia; eâdemque ratione æquantur etiam AB, AF, AE, AD; ac proinde circulus centro A transiens per B, transibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inscripsimus & circumscripsimus. Quod erat faciendum.

(a) Per 26. l. 1.

Fig. 16. [Scholium. *Eâdem methodo in qualibet figurâ æquilaterâ & æquiangulâ, & circa quamlibet figuram æquilateram & æquiangulam, circulus describetur, si bisecentur duo quivis anguli proximi DCB, CBF rectis CA, BA, & a puncto concursûs A, lateri cuivis BC demittatur perpendicularis AL: Circuli enim centro A radiis AL, AB descripti, erunt figuræ data alter inscriptus, alter circumscriptus.*

Cor. 1. *Hinc, si duo anguli proximi B, C figuræ ordinatæ bisecentur rectis BA, CA, concurrentibus in A, & a puncto concursûs ducantur recta AD, AE, AF ad reliquos figuræ angulos; omnes anguli figuræ erunt bisecti. Unde* (b) *figura illa ordinata dividetur in tot triangula isoscelia æqualia, quot sunt latera figuræ. Et ab A demissis AL, AM, &c. ad figuræ latera perpendicularibus; hæ latera* (c) *bisecabunt, & cum radii sint inscripti circuli, sibi invicem æquales erunt.*

(b) Per def. 3. l. 4. & p. 6. & 26. l. 1.
(c) Per n. 1. schol. p. 26 l. 1.

Cor. 2. *Dato itaque figuræ ordinatæ latere, & radio circuli inscripti, habetur figuræ illius area, si radio in lateris semissem* (d) *ducto, numerus inde proveniens multiplicetur per denominatorem figuræ. Sic area pentagoni BCDEF est AL* $\times$ *LB* $\times$ *5.*]

(d) Per sch. p. 41. l. 1.

PROPOSITIO XV.

Fig. 17. *In dato circulo Hexagonum ordinatum describere.*

Ducatur diameter FAB. Centro B per centrum A describe circulum, qui datum secet in C & D. Item centro F per A describe circulum, qui secet datum in E & G. Sex puncta B, C, E, F, G, D rectis lineis connexa, dabunt quæsitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG, AD. Patet triangula H, I, M, L (*e*) esse æquilatera. Deinde quia anguli CAB, EAF, singuli (*f*) efficiunt unam tertiam rectorum duorum, ac proinde simul duas tertias, patet (*g*) EAC etiam esse unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales sunt. Sunt autem & latera EA, AC æqualia lateribus BA, AC. Ergo (*h*) basis EC basi CB, hoc est (ut jam ostensum,) radio AC æqualis est. Quare etiam N æquilaterum est. Eodem modo ostenditur æquilaterum

(e) Ex 1. l. 1.
(f) Per cor 12. p. 23. l. 1.
(g) Per 13. l. 1.
(h) Per 4. l. 1.

laterum esse K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L, M, N æquilatera sunt, patet latera singula CB, BD, DG, GF, FE, EC æquari radio circuli AC, seu AB, ac proinde inter se. Hexagonum igitur æquilaterum est. Est verò & æquiangulum, cùm singuli ejus anguli E, C, B, D, G, F constent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inscripsimus, est ordinatum.

Corollaria.

1. Latus hexagoni circulo inscripti [*sive chorda graduum* 60.] æquale est radio. [*Ergo sinus* 30. *graduum æquatur radii* (a) *dimidio.*]

(a) *Per cor.* 1. *p.* 3. *l.* 3. & *cor. p.* 30. *l.* 3.

2. Angulus hexagoni ordinati est quatuor tertiæ unius recti; constat enim ex duobus angulis trianguli æquilateri, quorum singuli conficiunt (*b*) duas tertias unius recti. [*Continet igitur angulum rectum cum tertiâ parte recti, hoc est, gr.* 90 + 30. = *gr.* 120.]

(b) *Per cor.* 12. *p.* 32. *l.* 1.

3. Si ducatur insuper diameter PS, perpendicularis alteri FB, & intervallo radii PA, centris P & S, sectiones fiant in O & Q, in R & T; puncta P, E, O, F, R, G, S, D, T, B, Q, C rectis lineis connexa, dabunt duodecangulum ordinatum unâ circini aperturâ circulo inscriptum. Id quod magno est usui in Gnomonicâ. [*Atque hinc etiam discimus arcum quadrantalem PF in tres partes æquales PE, EO, OF (& proinde, continuâ* (c) *bisectione, in partes æquales* 6, 12, 24, 48, *&c.) partiri.*]

Fig. 18.

(c) *Per* 30. *l.* 3.

4. Ex demonstratis elicitur etiam descriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ductâ diametro FB, centro B per A centrum describe arcum CAD. Puncta C, F, D rectis juncta dant æquilaterum quæsitum.

Fig. 18.

5. Æquilateri trianguli latus (CXD) à diametro (BF) ad ipsum perpendiculari, quartam partem (BX) abscindit. Nam anguli ACX, BCX, æqualibus arcubus GD, DB insistentes, æquales (*d*) sunt: & latera AC, CX æquantur lateribus BC, CX. Ergo AX, BX (*e*) æquales sunt. Ergo BX est quarta pars diametri BF.

[Aliter. *Propter ACX, BCX, ut priùs æquales, & angulos ad X* (f) *rectos & proinde æquales, & latus CX commune, erit* (g) *AX = BX.*]

(d) *Per* 29. *l.* 3.
(e) *Per* 4. *l.* 1.
(f) *Per hyp.*
(g) *Per* 26. *l.* 1.

Scholium.

Problema.

Hexagonum ordinatum super datâ rectâ (BC) ita construes. Fac (*h*) triangulum CAB æquilaterum supra datam CB. Centro A per B & C describe circulum. Is capiet

Fig. 17.

(h) *Per* 1. *l.* 1.

capiet hexagonum super datâ rectâ CB. Patet ex propos. & corol. 1.

Theorema.

Fig. 18. QUadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum est quadrati ex semidiametro circuli cui inscriptum est, adeoque ad quadratum diametri est ut 3. ad 4. [*Est p. 12. l. 13. Euclidis.*]

(a) Per 12. l. 2. (b) Per cor. 5. præced. (c) Per 2. l. 2. Ducatur semidiameter AD. Quadratum FD æquatur quadratis (*a*) FA, DA, & rectangulo FAX bis. Sed rectang. FAX bis est par quadrato semidiametri FA, seu DA: (nam quia AX, XB æquales (*b*) sunt, rectangulum FAX bis æquatur duobus rectangulis nempe sub FA, AX, & sub FA, XB, hoc est rectangulo (*c*) FAB; hoc est quadrato FA.) Ergo quadratum FD triplum est quadrati ex semidiametro.

(d) Per cor. 3. p. 4. l. 2. Quia autem quadratum totius diametri FB quadruplum (*d*) est quadrati FA; patet quadratum FD esse ad quadratum diametri, ut 3. ad 4.

Corol. Hinc sequitur latus æquilateri trianguli esse ad diametrum, ut radix quadratica ternarii est ad 2. radicem nempe quadraticam quaternarii; ac proinde esse lineas incommensurabiles.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 19. *IN circulo quindecangulum ordinatum describere.*

(e) Per 11. l. 4. (f) Per cor. 4. p. 15. l. 4. Circulo inscribe (*e*) latus pentagoni AC, & trianguli (*f*) æquilateri latus AD. Arcum CD biseca in E. Ducta recta CE est latus quindecanguli.

Nam si tota peripheria statuatur esse 15. erit arcus AC, 3. & arcus AD, 5. ac proinde arcus CD, 2. ideoque CE unum.

Corollaria.

Fig. 19. 1. HAC methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inscribentur. Nam si duarum ordinatarum latera AC, AD circulo sint inscripta, arcuum differentia CD continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ, quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, si denominatores priorum inter se multiplicentur.

Ut si AD sit latus quadrati, & AC decagoni. Denominatorum

torum differentia est 6. Igitur arcus CD continet 6. latera figuræ novæ. Ea verò est 40. laterum. Denominatores enim 4. & 10. inter se multiplicati faciunt 40.

[Cor. 2. *Hinc discimus arcum quadrantalem in 15. partes æquales dividere, (& proinde, continuâ (a) bisectione, in 30, 60, 120, &c. partes;) Si nempe arcus CE, pars decima quinta totius circumferentiæ, bisectione repetitâ dividatur in partes quatuor æquales. Et universaliter, si detur cujuscunque figuræ ordinatæ circulo inscriptæ latus BX; arcum circuli quadrantalem, repetitâ arcûs BX bisectione, in tot partes æquales, quot sunt latera figuræ, dividere licebit: & continuâ porro bisectione, secabitur arcus quadrantalis in bis, quater, octies, &c. tot partes æquales, quot sunt latera figuræ.* (a) Per 30. l. 3.

Cor. 3. *Cùm arcus circuli quadrantalis gradus 90. contineat, & unusquisque gradus scrupula prima 60; circumferentiæ quadrans igitur scrupula prima* (90×60, *sive*) 5400. *continebit. Si itaque per cor. præced. quadrans in partes 120 dividatur, earum singulæ scrupula prima* 45 $\left(= \frac{5400}{120}\right)$, *nempe tres quartas unius gradûs continebunt. Arcus autem adeò minutus, absque errore sensibili, in partes quotvis æquales ac si esset* (b) *linea recta, dividi potest. Dividatur itaque in tres partes æquales, quarum singulæ 15 scrupula prima, sive gradus quadrantem exhibebunt; unde etiam gradûs semissem* ($= 15 + 15$) *& gradum integrum* ($= 15 + 45$) *obtinebimus. Præterea, trisectione arcûs* $15'$, *habemus arcum* $5'$, *& quinisectione hujus, arcum unius scrupuli primi; unde obscurum esse nequit, quomodo (si circulus datus satis amplus fuerit) divisio in scrupula secunda effici poterit, atque ita porro. Quod si arcus* $45'$ *curvior videatur quàm ut secaretur ad libitum ac si linea recta esset; continuâ tamen bisectione, ad arcum lineæ rectæ satis propinquum tandem perveniemus. Sic* $22'\frac{1}{2}$ *continent tres octantes,* $11'\frac{1}{4}$ *tres partes decimas sextas unius gradûs; & sic porro. Liquet igitur, quomodo circulus in gradus suos, graduumque semisses, quadrantes, octantes, &c. vel, si ita lubeat, in scrupula prima, secunda, tertia, &c. mechanice saltem dividi potest.* (b) Per sch. p. 10. l. 6.

Scholium 1. *Circuli autem peripheria dividi potest Geometrice in partes*

4, 8, 16, *&c. per p.* 6. *l.* 4. *& p.* 9. *l.* 1.
3, 6, 12, *&c. per p.* 15. *l.* 4. *cum cor.* 4. *&* 3.
5, 10, 20, *&c. per p.* 11. *cum cor.* 2. *&* 5. *p.* 10. *l.* 4.
15, 30, 60, *&c. per p.* 16. *l.* 4. *cum cor.* 2.]

Scholium.

Scholium.

NOndum reperta ars est, quâ solo circino & regulâ inscribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9. 11, 13, 14, 17, &c. cùm illa inscripto figurarum dependeat a divisione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum desideratur. Licebit tamen, circuli circumferentiâ in 360. partes divisâ, mechanice figuras quascunque ordinatas circulo inscribere hunc in modum.

Problema 1.

Fig. 19. GRadus 360. (hoc est, totam circumferentiam) divide per denominatorem polygoni inscribendi, (exem. gr. nonanguli.) Quot unitatibus constat quotiens (40.) tot graduum fac in centro angulum AGK. Ducta recta AK erit latus figuræ quæsitæ (nonangulæ) circulo inscribendæ.

Problema 2.

Fig. 19. AT super datâ rectâ quamvis figuram ordinatam describes præsidio tabellæ sequentis:

Angulus rectus est ad angulum figuræ,

					differ.
In Pentagono	ut	5.	ad	6...	1
Hexagono	ut	3.	ad	4...	1
Heptagono	ut	7.	ad	10...	3
Octogono	ut	2.	ad	3...	1
Enneagono	ut	9.	ad	14...	5
Decagono	ut	5.	ad	8...	3
Hendecagono	ut	11.	ad	18...	7
Dodecagono	ut	3.	ad	5...	2

Fig. 19. Oporteat igitur super datâ rectâ XB heptagonum ordinatum describere. Centro X, radio XB describe circulum, a quo abscinde quadrantem BO. Vide in tabulâ quæ sit proportio recti anguli ad angulum heptagoni: reperies, ut 7. ad 10. & differentia est 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipsi adde ex O in N, quot unitates habet differentia. Per tria puncta B, X, N describe (a) circulum: hic capiet heptagonum super datâ rectâ XB.

(a) Per 5. l. 4.

Tabella confecta est ope theorematis 2. in schol. post 32. l. 1. quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt

efficiunt anguli cujuscunque figuræ rectilineæ, qui numerus divisus per denominatorem figuræ, exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam verò de figuris ordinatis multa hactenus sunt proposita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantùm figuræ ordinatæ videlicet 6. triangula æquilatera, 4. quadrata, 3. hexagona, spatium replere possunt: Hoc est unam continuam superficiem constituere. Quod sic demonstratur. Ut aliqua figura ordinata sæpius repetita possit replere spatium, requiritur ut anguli plurium ejus speciei figurarum circa unum punctum compositi, possint conficere quatuor rectos; tot enim circa unum punctum possunt constitui, ut patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. exempli gr. ut triangula æquilatera possint replere spatium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum N, M, L, K, I, H, circa punctum A compositi, efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt 6. anguli trianguli æquilateri; nam unus facit duas tertias (a) unius recti, ac proinde 6. faciunt 12. tertias unius recti, hoc est 4. rectos; item 4. anguli quadrati, ut patet; item 3. anguli hexagoni (unus enim facit 4. tertias (b) unius recti ac proinde 3. faciunt 12. tertias unius recti, hoc est rursum 4. rectos.) Ergo, &c.

Fig. 17.

(a) *Per cor. 12. p. 32. l. 1.*

(b) *Per cor. 2. p. 15. l. 4.*

Quòd autem id nulla alia figura possit, liquidò constabit, si angulum ejus repertum, ut supra, quocunque numero multiplices: semper enim aut deficient a 4. rectis, aut excedent.

H E L E-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER QUINTUS.

QUINTUS hic Elementorum liber demonstrandis libri sexti propositionibus omnino est necessarius. Doctrinam quam continet frequentissime usurpamus. Argumentandi vero ratio e proportione Geometricâ petita, est plane subtilissima, solidissima, brevissima. Cujusmodi ratiocinandi methodo, tanquam Logicâ *quadam*, Mathematica, Geometria, Arithmetica, Musica, Astronomia, Statica, *& reliquæ omnes Matheseos partes maxime utuntur; utpote quæ proportionibus quibusdam inter se connexis fere tota nituntur; modosque de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc quinto mutuari solent.* Geometria *quidem* practica, *quæ linearum, figurarum, atque corporum mensuras complectitur, e proportionum doctrinâ plerumque derivatur.* Regulæ Arithmeticæ *ad unam omnes ex hujusce quinti libri propositionibus, sine septimo, octavo, nono de numeris ex professo tractantibus, demonstrari possunt. Antiquorum* Musicam *proportiones Geometricas Sonorum modulationi applicatas rite dixeris: quod idem fere de* Staticâ, *corporum ponderibus applicatâ, possis asserere. Ut rem totam paucis complectar, si proportionis doctrinam e Mathesi abstuleris, nihil fere præclarum aut egregium relinques.*

QUanti momenti in Geometriâ sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & sexto libro. Sed quamvis illi cæterisque elementorum conditoribus plurimùm debeamus; in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, desiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid sit quatuor magnitudines esse proportionales, sive duas rationes, easdem, similes, æquales esse. Definit igitur duas rationes tum æquales dici seu similes, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata, & consequentibus etiam quocunque numero æqualiter multi-

multiplicatis, semper vel simul æqualia sunt, vel simul majora, vel simul minora (a). Atque ex eâ definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonstrationes mediate vel immediate deducit. Hæc est doctrinæ Euclideæ summa: quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam inprimis certum est eâ definitione non naturam æqualium rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam signum infallibile rationum æqualium, ut quandocumque ea demonstrata fuerit de quibusvis rationibus, inferre certò liceat æquales eas esse; vel is sensus illius est, ut per magnitudines eandem rationem habentes, nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonstrare debuerat, eam affectionem omnibus & solis rationibus æqualibus inesse, ut ex eâ, rationum æqualitas certò posset inferri. Id verò minime vulgare theorema est, quod neque Euclides, neque alius post Euclidem ullus demonstravit. Si secundum; securi quidem erimus de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minime tamen ex vi demonstrationum nobis constare poterit de absolutâ rationum æqualitate. Exemplum esto prima sexti. Certi erimus ex Euclideâ demonstratione, rationem triangulorum ABC, & DEF æqualem esse rationi basium AC, & DF, per rationum æqualitatem solùm intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, basium rationibus vere & absolute æquales esse, cùm demonstratum non sit affectionem illam multiplicium cum absolutâ & verâ rationum æqualitate necessariò esse connexam. Quomodocunque igitur illa definitio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonstrationes vacillant, quamdiu demonstratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum eâ multiplicium proprietate semper esse connexam. Denique ut sibi constarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliisque semper displicuit; & tyronibus plurimum semper facessivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quasi medulla, atque anima Geometriæ, & universæ Matheseos est, ab eâ labe vindicemus, hæc tria præstare conabimur.

(a) Hæc definitio declaratur infra post defin. 6.

Fig. 1. l. 6.

Primò ostendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonstrantur, eo fere loco habenda esse, quo axiomata, ac proinde declaratione potius subinde aliquâ, quàm demonstratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus & perobscuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundò demonstrabimus, quandocumque antecedentium quælibet æque multiplices, consequentium quibuslibet æque multiplicibus vel pariter majores sunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes esse vere æquales, seu similes. Quo stabilito, omnes Euclideæ demonstrationes, totaque illius de proportionibus doctrina subsistet; ut qui nostris probationibus contentus non sit, ad Euclideas quamvis prolixas, jam tamen securas ac solidas se possit convertere. Assignabimus item (ac demonstrabimus) proportionum æqualium aliud indicium clarissimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propositiones deducere poterit qui voluerit.

Tertiò, de proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione, tractatum subjungam, penitioris Geometriæ studiosis plane necessarium, ubi etiam demonstrabimus axioma illud, seu potius theorema hactenus indemonstratum, rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus satis erit definitiones & primam partem perlegere.

Monitum ad Tyrones.

QUanti momenti in Geometriâ sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, *ut recte notat Tacquetus*, qui ignoret. *Est enim ipsa quodammodo scientiarum Mathematicarum medulla; & varii de proportionalibus ratiocinandi modi, utilissimi simul sunt & certissimi; neque absque iis pedem vel bilum promovere licet. Verùm hanc doctrinam animis humanis cum communi ratione quasi congenitam existimo; variosque de proportionalibus ratiocinandi modos, quos integro hoc libro, per ambages quamplurimas, tradit Euclides, non tam* demonstratione *proprie dictâ, quàm* illustratione *nonnullâ, & exemplis indigere censeo. Eos autem qui longo propositionum circuitu doctrinam hanc facillimam tradendam volunt, rem per se clarissimam nube quadam involvere, & longe difficiliorem reddere omnino puto. Rei summam paucis aperiam. Notum est quatuor quantitates tum* proportionales, *sive analogias tum similes aut* æquales *esse, cùm Quantitas prima toties continet secundam, quoties tertia continet quartam: vel cùm prima toties continetur in secundâ, quoties tertia continetur in quartâ. Sic* 16:8::4:2, *atque etiam* 3:9::4:12. *sunt* similes *rationes: quoniam in exemplo priore, consequentia* 8 & 2 *bis in antecedentibus suis* 16 & 4 *respectivè continentur; adeoque*

ratio

ratio dupla *in utrisque observatur. Et in exemplo posteriore rationes sunt etiam* similes, *quoniam consequentia* 9 *&* 12 *ter antecedentia sua respectivè continent; adeoque ratio* subtripla *in utrisque observatur.* (*Neque ulla est quantitatum commensurabilium ratio quæ non possit per numeros certos; neque sane incommensurabilium ulla quæ non possit per numeros ad veram rationem in infinitum approximantes certissime exprimi.*) *Ratio autem duarum quantitatum, antecedentis ad consequentem, rectè per quotum ex antecedente per consequentem divisa ortum exprimitur. Sic ratio* 16 *ad* 8 *æquivalet* $\frac{16}{8}$ *vel* $\frac{2}{1}$, *sive* 2; *ea nempe ratio dupla est. Et ratio* 3 *ad* 9 *est* $\frac{3}{9}$ *sive* $\frac{1}{3}$, *nempe subtripla. Et ratio* 8 *ad* 3 *est* $\frac{8}{3}$ *sive* $2\frac{2}{3}$; *hoc est, ratio dupla bipartiens tertias. Ejusmodi verò quotus,* Rationis Exponens *appellatur. Porro, ex ante dictis liquet similes rationes quascunque non tantùm per numeros diversos, sed etiam per eosdem rectissimè exponi. Sic sane ratio dupla, sive* 2 *ad* 1 *rationem tam* 16 *ad* 8, *quàm* 4 *ad* 2 *plenissimè designat: Ratio subtripla, sive* 1 *ad* 3 *non minùs exprimit rationem* 4 *ad* 12, *quàm rationem* 3 *ad* 9, *uti oppidò est manifestum. Si itaque quatuor quantitates sint proportionales,* $A:B::\alpha:\beta$; *quæritur in hoc quinto libro quot* similibus *modis hæ* similes *rationes mutari, atque inter se componi possint, ita ut rationes emergentes sint etiamnum utrinque* similes? *Responderi verò debet, modis omnino omnibus, quos quisquam imaginari queat. Cùm enim tam ratio A ad B, quàm ratio* α *ad* β *inter se* similes *sint, per eosdem numeros exprimi utraque poterunt hoc modo,* $A:B::9:3::$ *&* $\alpha:\beta::9:3$. *Atque proinde omnes omnino rationes utrinque aut* Alternando, *aut* Invertendo, *aut* Componendo, *aut* Dividendo, *aut* Convertendo, *aut* Miscendo *emergentes, per eosdem plane numeros exprimentur; & eandem proinde rationem utrinque servabunt. Sic e. g.* $A+B:B::\alpha+\beta:\beta$; *quia utramque proportionem exprimit* $9+3:3$; *quæ est rationis* compositio. *Neque aliter de reliquis est censendum. Hoc itaque tantùm observent Tyrones, ut rationes quas tractant ubique* similes, *modo plane* simili *mutentur & ordinentur. Neque exinde locus erit dubitationi, quin ex hujusmodi ordinatione aut mutatione* consimili, *rationes ubique* consimiles *sint oriundæ. Mirari autem subit eorum neminem qui elementa Geometrica hactenus condiderunt, facillimum hoc æqualium rationum indicium illustrando huic libro quinto, & proportionum doctrinæ faciliùs explicandæ adhibuisse. En verò modos primarios de* similibus *rationibus argumentandi, quos adhibet Geometria, in brevem Tabellam conjectos:*

Sit $A : B :: \alpha : \beta :: 9 : 3$.

Erit ergo

Alternando sive permutando, $A : \alpha :: B : \beta :: 9 : 9 :: 3 : 3$.

Invertendo, $B : A :: \beta : \alpha :: 3 : 9$.

Componendo, $A+B : B :: \alpha+\beta : \beta :: 9+3\,(12) : 3$.

Dividendo, $A-B : B :: \alpha-\beta : \beta :: 9-3\,(6) : 3$.

Convertendo, $A : A+B :: \alpha : \alpha+\beta :: 9 : 9+3\,(12)$.

vel $A : A-B :: \alpha : \alpha-\beta :: 9 : 9-3\,(6)$.

Mixtim, $A+B : A-B :: \alpha+\beta : \alpha-\beta :: 9+3\,(12) : 9-3\,(6)$.

Ex æquo sit $A : B :: \alpha : \beta$. & $B : C :: \beta : \gamma$. *Erit* $A : C :: \alpha : \gamma$.
$9 : 3 :: 9 : 9$. & $3 : 1 :: 3 : 1$. *Erit* $9 : 1 :: 9 : 1$. *Ubi ratio* A *ad* C (*seu* 9 *ad* 1) componi *dicitur ex rationibus* A *ad* B, & B *ad* C, (*vel ex* 9 *ad* 3, & 3. *ad* 1.)

Ex æquo perturbate sit $A : B :: \alpha : \beta$. 8. 3 :: 16. 6.
Et $B : C :: \delta : \alpha$. 3. 2 :: 24. 16.
Erit $A : C :: \delta : \beta$. 8. 2 :: 24. 6.

Ubi, sicut ratio A *ad* C (*sive* 8 *ad* 2) *componitur ex rationibus* A *ad* B, & B *ad* C (*vel ex* 8 *ad* 3, & 3 *ad* 2) *directe positis*; *sic ratio* δ *ad* β (*sive* 24 *ad* 6) *componitur ex rationibus* δ *ad* α, & α *ad* β (*sive ex* 24 *ad* 16, & 16 *ad* 6) *sed transpositis*.

Cæterum de compositione rationum vide plura in def. 5. *libri* 6.

Denique si fuerit $A : B :: C : D$ :: 9. 8.
Et $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$ :: 3. 4.
Erit $A \times \alpha : B \times \beta :: C \times \gamma : D \times \delta$ :: 27. 32.
Et $\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\beta} :: \frac{C}{\gamma} : \frac{D}{\delta}$ :: 3. 2.

Qui itaque hosce de proportionalibus ratiocinandi modos probè callet, eosque pro re natâ in usum proferre novit, propositionibus libri quinti particularibus (nisi forte illis quæ mere sunt axiomata suâ luce clarissima,) perrarò indigebit. Unde sane, si mihi esset integrum, rationum doctrinam sine methodo Euclideâ a primordiis tradidissem: sed cùm Tacquetum nostrum, ordinis Euclidei ubique observantissimum, eumque integrum Lectori propinare certum sit, pluribus supersedebo.

Hæc monuit Vir ille Clariss. mihique amicissimus qui editionem primam Cantabrigiensem recensuit. Atqui velim potius ut ipsum Tacquetum hoc loco audiant Tyrones, ac definitionibus, primaque parti hujus libri incumbant: quorum notitia, cùm modico tempore & nullo fere negotio acquiri potest, haud temere omitti debet; maxime, cum ipsæ propositiones Euclideæ passim in aliis libris mathematicis laudentur,

quin

quin & earum nonnulla, haud paucis quæ in hisce elementis postea traduntur, facilius intelligendis, perutiles videantur, si non necessaria. Nolim tamen ut ea quæ in hoc monito continentur, negligant Tyrones: sed potius ut, antequam librum sextum aggrediantur, præcipuos ex analogiâ ratiocinandi modos, perlecto hoc compendio, memoriæ infigant. Porro, reliquas hujus l. 5. partes duas, 2. & 3. monente etiam Tacqueto, tyronibus omittere licebit. Et quidem, ea quæ continent, vera atque accurata esse omnia, polliceri non ausim.]

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

DEFINITIONES.

1. PArs aliquota magnitudinis est, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, sive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis est pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo verò 4. pedum, est pars aliquanta lineæ 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita verò ter excedit. [*Et hujusmodi quidem pars aliquanta est toti commensurabilis: si verò e quadrati cujusvis diametro sumatur recta lateri illius quadrati æqualis; ejusmodi recta erit pars aliquanta quidem diametri, sed toti incommensurabilis. Vide Schol. p. 47. l. 1.*]

2. Magnitudo magnitudinis multiplex est, cùm minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota est; sive cùm major minorem aliquoties continet præcisè.

3. Ratio sive proportio, est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundùm quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportione duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primò nominatur, sive is qui nominandi casu effertur: alter Consequens.

Cùm antecedens & consequens sunt æquales, proportio æqualitatis dicitur; cùm inæquales, dicitur esse proportio inæqualitatis: [*& quidem majoris inæqualitatis, si terminus antecedens sit consequente major; minoris, si minor.*]

4. Ratio seu proportio rationalis est, quæ existit inter magnitudines commensurabiles, & numeris exprimi potest.

Proportio irrationalis est, quæ existit inter magnitudines incommensurabiles, & nullis numeris explicari potest. [*Sic proportio 2 ad 1 rationalis est: Sed √ 2 ad 1 est proportio irrationalis; nam √ 2 nullis numeris explicari potest.*]

Porro commensurabiles quantitates sunt, quas aliqua communis mensura metitur; incommensurabiles, quas nulla metitur mensura communis.

Fig. 1. & 5. 5. Duæ rationes (A ad B, & C ad F) sunt similes, æquales, eædem; cùm unius antecedens (A) æque seu eodem modo (hoc est nec magis, nec minùs) continet suum consequens (B,) quo alterius antecedens (C) continet suum consequens (F.)

Fig. 2. Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in suo consequente (B,) quo (C) antecedens alterius in suo (D.) [*Quantitates autem eandem habentes rationem, proportionales vocantur.*]

Fig. 3. 6. Duæ rationes sunt dissimiles, sive una ratio est major alterâ, quando unius antecedens (I) magis continet suum consequens (L,) quàm alterius antecedens (O) contineat suum consequens (Q;) vel quando antecedens unius, minùs continetur in suo consequente, quàm antecedens alterius Fig. 4. contineatur in consequente suo.

Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur.

Quid porro sit unum antecedens æque, vel magis continere suum consequens, quàm antecedens alterum contineat suum, si proportiones sint rationales, definiri & Fig. 1. explicari ulteriùs potest per numeros; ut si A sit triplum B, & C triplum F; perspicuum erit, quid sit, A æque seu Fig. 3. eodem modo continere B, quo C continet F: vel si I sit triplum L, O verò duplum Q; constabit rursum, quid sit, I magis continere L, quàm O contineat Q. At si proportiones fuerint irrationales, ea res explicari ulteriùs nec Fig. 5. potest, nec debet. Dentur magnitudines incommensurabiles, A, B: perspicuum est A non solùm majus esse B, sed etiam certo quodam modo esse majus; (A quippe aliter continet B, quàm alia quælibet major minorve quàm A:) neque tamen ulteriùs quæri, aut explicari debet, quis sit Fig. 5. certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis est. Itaque quemadmodum datis binis incommensurabilibus quantitatibus, non debet ulteriùs quæri, quid sit unam certo modo continere alteram; ita neque cùm dantur quatuor proportionales incommensurabiles, quæri debet ulteriùs, quid sit, C eodem modo continere D, quo A continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, ulteriùs est inexplicabilis; ita plane etiam identitas modi quo A continet B, cum modo quo C continet D, ulteriùs inexplicabilis est. [*Identitas autem illorum modorum, ex definitione Euclideâ rationum æqualium, de quâ infra, vel ex altero illo, quod sequitur, rationum æqualium indicio Tacquetiano, satis pro rei naturâ, videtur explicari.*]

Quòd verò cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles sint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, majores, minores, diversis terminis constantes, facile poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C, Et auferatur B ex A incommensurabili secum quantitate, quoties potest, puta ter: & supersit EF. Sit deinde O tertia pars ipsius C. Sit insuper quæpiam X ipsi C incommensurabilis, quæ major sit quàm O. Quoniam igitur A continet B plus quàm ter; C verò continet X minùs quàm ter, (nam C continet præcisè ter O minorem quàm X;) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur jam Q, quarta pars C, & quæpiam esto Z, ipsi C incommensurabilis, quæ minor sit quàm Q. Quoniam igitur A continet B minùs quàm quater; C verò continet Z plus quàm quater, (cùm C præcisè quater contineat Q, majorem quàm Z;) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B. *Fig. 5.*

Jam verò, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quàm A ad B; & rursum, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet quàm A ad B; manifestum est etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z, eandem habere rationem quàm A ad B. Quod quidem perinde clarum est lumine naturali, atque istud: dabile est majus quàm P, & dabile est minus quàm P; ergo dabile est æquale aliquod ipsi P.

Quid in proportionum æqualium definitione Euclideâ desideretur.

QUod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales esse dicit, cùm antecedentium quæcunque æque multiplices I, Q, consequentium quibuscumque æque multiplicibus L, R, vel simul majores sunt, vel simul minores, vel simul æquales: hoc est, cùm I superante L, etiam Q semper superat R; & cùm I superatur ab L, etiam Q semper superatur ab R; & cùm I est æqualis L, etiam Q semper est æqualis R. Ubi bene notandum est, Euclidem non assumere æque multiplicium excessus defectusque *Fig. 21.*

proportionales, seu similes, sic enim ineptè idem per idem explicasset; sed excessus & defectus simpliciter. Nihilominus hîc aliquid in summo Geometrâ desiderari jam supra declaravimus. Nam vel cupit hisce verbis rationes æquales definire, & sic rei definitæ proprietatem pro definitione affert; evidens quippe est, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate profluere: Vel adducit tanquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & sic demonstrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita semper esse connexam, ut ex illâ certò possit inferri; quæ quidem connexio & perobscura & demonstratu difficilis est: Vel denique per rationum æqualitatem nihil aliud intelligit, quàm simultaneum illum excessum defectumve multiplicium; Et sic toto 5. ac. 6. libro, cùm quatuor magnitudines proportionales esse demonstrat, nihil sciemus aliud, quàm dictum excessum & defectum illis competere, incerti plane, utrùm magnitudines de quibus agitur, sint verè proportionales.

[*Cùm in definitione rationum æqualium Euclides nihil aliud, quàm quo sensu voces illas acceperit, pro more Mathematicorum ostendere voluerit; non video cur eapropter tantopere culpandus sit: maximè, cùm definitio Euclidea omnibus omnino rationibus æqualibus verè conveniat, sive rationales fuerint, sive irrationales, ut in parte 2. hujus lib. 5. Tacquetus ipse demonstrat, quod etiam cuilibet ipsam definitionem accuratiùs perpendenti, satis manifestum erit. Vide quæ ad def. 36. l. 1. notavimus: ad eundem enim lapidem utrobique offendit noster. Cùm tamen Tacqueti methodum necesse est ut sequamur; videamus tandem, quodnam aliud rationum æqualium indicium universale nobis exhibet.*]

Proportionum æqualium aliud indicium primum & infallibile assignatur.

QUod si rationum æqualium desideretur indicium infallibile, & facile, & primum; nos tale assignabimus, demonstrabimusque theor. 5. & 6. partis 2. [*At verò demonstratione operosâ non videtur indigere hoc rationum æqualium indicium; ex definitionibus enim quintâ & sextâ immediatè fluit; vel potiùs, tanquam definitionum istarum illustratio quædam existimari debet.*] Estque ejusmodi.

Fig. 26. Rationes [majoris inæqualitatis] æquales sunt, (AB ad CF; GM ad NQ;) quando & consequentes ipsæ, & consequentium similes partes aliquotæ quæcunque, in antecedentibus æquali semper numero continentur.

Ut

Ut si una decima ipsius CF contineatur in AB ducenties, una quoque decima NQ contineatur ducenties in GM; & si una centesima CF contineatur millies in AB, etiam una centesima NQ contineatur millies in GM, & sic deinceps in infinitum; erit AB ad CF, ut GM ad NQ. [*Ita enim fiet ut (secundùm def. quintam) prioris rationis antecedens AB æque seu eodem modo (hoc est, nec magis nec minùs) contineat suum consequens CF, quo posterioris antecedens GM continet suum consequens NQ.*

Vel si minoris inæqualitatis rationes, CF ad AB; NQ ad GM ponantur æquales; tum antecedentes ipsa, & antecedentium similes partes aliquota quæcunque, in consequentibus suis æquali semper numero continebuntur. Hoc enim rursum postulat def. quinta, ut scil. antecedens CF eodem modo contineatur in suo consequente AB, quo antecedens NQ in suo GM.]

Inæquales autem rationes sunt, quando aut consequentes ipsæ, aut consequentium aliquæ similes aliquotæ in antecedentibus inæquali numero continentur. Et illa ratio major est, cujus vel consequens, vel consequentis aliquota, sæpius continetur in antecedente.

Ut si una centimillesima CF sæpius contineatur in AB, quàm una centimillesima NQ, in GM, erit ratio AB ad CF major ratione GM ad NQ, quamvis innumeræ aliæ consequentium CF, NQ similes aliquotæ in antecedentibus AB, GM æquali numero continerentur. [*Sequitur ex def.* 6.] *Fig.* 26.

Porro æquali numero contineri dicuntur, cùm ablatæ quoties possunt, æquali numero sunt ablatæ.

Ex hoc indicio, rationum irrationalium æqualitas & inæqualitas continuò elucescit, cùm sic antecedentes consequentibus incommensurabiles, per ablata consequentibus commensurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes sunt, quæ in suis totis æque, seu eodem modo continentur, ut qualis pars sui totius est una, talis pars sui totius sit altera. Quod sane nihil aliud est, quàm partes ad sua tota [*vel etiam tota ad partes suas*] eandem habere rationem, [*sive partes illa totis suis commensurabiles fuerint, seu incommensurabiles.*]

Similes verò partes aliquotæ sunt, quæ sua tota æqualiter metiuntur; ut si utraque sit sui totius una tertia, una decima, &c.

8. Magnitudines (A, B, C, D) continuè proportionales dicuntur, cùm medii termini (B, C) bis sumuntur; hoc est, cùm sunt consequens respectu præcedentis, & antecedens respectu sequentis. *Fig.* 6.

Continuæ

Continuas rationes sic efferimus: A est ad B, ut B ad C; & B est ad C, ut C ad D, & sic deinceps.

9. Magnitudines discretim proportionales sunt, cùm nullus terminus bis accipitur.

Fig. 1. Discretas rationes sic efferimus: A est ad B, ut C ad F.

Cùm plures fuerint proportionales magnitudines quàm tres, si proportionales dicantur, semper intelliguntur discretim.

Fig. 6. 10. Cùm magnitudines (A, B, C, D) fuerint continue proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis, quam eadem prima (A) habet ad secundam (B;) & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam ejus, quam eadem prima habet ad secundam (B:) & sic deinceps.

[*Item, prima (A) ad secundam (B) subduplicatam (sive dimidiatam) rationem habere dicitur ejus rationis quam habet eadem prima (A) ad tertiam (C,) & subtriplicatam ejus rationis quam habet prima (A) ad quartam (D:) & sic deinceps.*

Si verò ratio aliqua triplicata, sit alteri rationi duplicatæ æqualis; erit ratio simplex posterior, rationis simplicis prioris sesquiplicata sive sesquialtera. *Sint A, B, C, D* $\div$; *& α, β, γ* $\div$; *& sit A prima ad D quartam in priore analogiâ, ut α prima ad γ tertiam in secundâ analogiâ, dico quòd α est ad β in ratione sesquialterâ rationis A ad B. Sit enim F inter B & C, sive quod perinde est, inter A & D media proportionalis: Ob æquales rationes A ad D & α ad γ, & medias proportionales utrinque F & β, Erit A : F :: α. β. Sed ratio A ad F componitur ex ratione integrâ A ad B & ex dimidiatâ quoque ejusdem ratione B ad F atque adeo ratio α ad β rationi A ad F æqualis, continet rationem A ad B integram, & etiam rationem ejusdem dimidiatam, nempe rationem B ad F. Ratio verò integra & dimidiata dicitur ratio sesquiplicata sive* sesquialtera. *Est ergo α ad β in ratione sesquiplicatâ sive* sesquialterâ *A ad B. Sic sane in Astronomicis, cùm cubi distantiarum planetarum a Sole eam inter se rationem habeant quam temporum periodicorum quadrata; ita ut* triplicata *distantiarum ratio eadem sit cum ratione temporum periodicorum* duplicatâ; *(Cubi enim sunt in* (a) *triplicatâ, & quadrata sunt* (b) *in duplicatâ ratione laterum suorum, sive radicum, respectivè;) dici solet, tempora ipsa periodica esse inter se in ratione sesquiplicatâ sive* sesquialterâ *distantiarum a Sole.*]

(a) Per 33. l. 11.
(b) Per 20. l. 6.

11. Homologæ, seu similes ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, consequentes consequentibus.

bus. Ut si A est ad B, ut C ad F; homologæ erunt A, C; & B, F. Fig. 1.

Reliquæ definitiones commodiùs ex ipsis propositionibus intelligentur.

Quintus liber propositiones complectitur 25. Ex his 10. non alium usum habent, quàm ut reliquæ earum ope per multiplices demonstrentur. Illis igitur prætermissis, 15. reliquas proponemus solas, Euclidis ordine non mutato. Porro hujus libri theoremata non solis lineis, sed omnibus omnino quantitatibus conveniunt. Lineæ igitur, quibus hîc utimur, omne genus quantitatis repræsentant.

Axioma.

Datis tribus quantitatibus A, B, C, dabilis est quarta Z, ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO I, II, III, IV, V, VI.

In nostrâ methodo sunt superfluæ. [Inter has insignior & usûs frequentioris est prop. 4. cujus demonstratio habetur infra. Est enim Lem. 1. par. 2. hujus libri 5.]

PROPOSITIO VII.

Si quantitates A & B fuerint æquales, & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, ut B est ad Z. Et Z erit ad A, ut eadem Z est ad B. Fig. 7.

Hæc propositio, uti & sequentes quatuor, sunt merissima axiomata, ac proinde nullo modo demonstrari debent.

[Scholium. *Eodem modo, æquales ad æquales eandem habent rationem; hoc est, si detur etiam alia quantitas X, ipsi Z æqualis; erit A ad X, ut B est ad Z; & vice versâ. Sic etiam propositionum 3. sequentium patebit adhuc veritas, si loco unicæ quantitatis Z, ubique ponantur duæ æquales, X & Z.*]

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI quantitates (C & F) fuerint inequales; major C ad tertiam Z majorem habebit rationem, quàm minor F habeat ad eandem Z.* [Item minor F minorem habet rationem ad Z, quàm habet major C ad Z.]

Et Z ad majorem C, minorem habebit rationem, quàm eadem Z habeat ad F; quæ minor est quàm C. [Et Z ad minorem F, majorem habebit rationem, quàm habet eadem Z ad C quæ major est.]

PROPOSITIO IX.

Fig. 7. *SI A & B ad Z eandem habeant rationem, æquales sunt A & B.*

Et si eadem Z ad A & B eandem rationem habeat, rursum A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 8. *SI C ad Z majorem rationem habeat, quàm F ad Z; erit C major quàm F.* [Et proinde, si F minorem habeat rationem ad Z, quàm habet C ad Z; F minor erit quàm C.]

Et si Z ad F majorem rationem habeat, quàm eadem Z ad C; erit F minor quàm C. [Et si Z ad C minorem rationem habeat, quàm habet eadem Z ad F; erit C major quàm F.]

PROPOSITIO XI.

Fig. 9. *RAtiones, quæ eidem rationi sunt æquales, eædem, similes, (idem omnia significant,) sunt æquales, eædem, similes inter se.*

Ut si tam ratio A ad B, quàm ratio C ad F, sint æquales rationi X ad Z, erunt quoque rationes A ad B, & C ad F æqua-

æquales inter se. Sive si A sit ad B, ut X ad Z; & C sit ad F, ut X ad Z; erit quoque A ad B, ut C ad F.

[*Scholium.*] Eodem modo rationes, quæ æqualibus sunt æquales, inter se sunt æquales. [*Et rationes quæ unâ æqualium rationum majores vel minores sunt, etiam alterâ æqualium majores vel minores erunt; aut si æqualium rationum una quævis, ratione tertiâ major fuerit vel minor, etiam altera æqualium eâdem tertiâ major vel minor erit respectivè.*

Ex. gr. *Si A sit ad B ut C ad F; & sit ratio C ad F major ratione X ad A; Erit quoque ratio A ad B major ratione X ad Z; quæ ipsa est prop. 13. a Tacqueto omissa. Eodem modo si fuerit A ad B ut X ad Z; & fuerit ratio X ad Z minor quàm ratio C ad F; erit etiam ratio A ad B minor ratione C ad F.*]

PROPOSITIO XII.

SI singulæ magnitudines quotcunque (A, B, C,) eandem habuerint proportionem ad singulas totidem (F, I, L;) quam proportionem habent singulæ ad singulas, sive una (A) ad unam (F;) eandem habebunt omnes (A, B, C) simul sumptæ, ad omnes (F, I, L) simul sumptas. Fig. 10.

Rem per se manifestam exemplo tantùm aliquo rationali declaro; ut si singulæ A, B, C, singularum F, I, L, sint tripla, (hoc est, si singulæ ad singulas eandem habeant rationem quam 3. ad 1.) etiam A, B, C simul sumptæ, simul sumptarum F, I, L triplæ erunt, (hoc est, etiam A, B, C simul sumptæ ad F, I, L simul sumptas rationem habent eandem, quam 3. ad 1.) In proportione irrationali res æquè clara est.

[*Propositionem 13. in Scholio post pr. 11. supra collocavimus; demonstratione enim vix eget. Sequens autem propositio 14. etsi Tacqueto superflua, usum suum habet, atque adeo illam in locum suum reduxi cum demonstratione suâ.*]

PROPOSITIO XIV.

SI prima (A) sit ad secundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F;) & sit prima (A) major quàm tertia (C,) erit secunda (B) major quàm quarta (F;) Si verò prima sit æqualis tertiæ, erit secunda quartæ æqualis: Et si minor, minor. Fig. 11.

Si

Si data fuerit proportio æqualitatis, ubi antecedentia consequentibus suis æqualia sunt, proportio per se patet. Et (a) cùm, in proportione majoris inæqualitatis, unius antecedens æque seu eodem modo contineat suum consequens quo alterius antecedens continet suum consequens; atque in proportione inæqualitatis minoris, antecedens unius eodem modo contineatur in suo consequente quo antecedens alterius in suo continetur; etiam in proportione inæqualitatis majoris vel minoris, propositio satis patebit attendenti. Si quis tamen ampliorem demonstrationem velit, legat ea quæ sequuntur.

(a) Per def. 5. l. 5.
(b) Per 8. l. 5.
(c) Per hypoth.
(d) Per schol. post p. 11. l. 5.
(e) Per 10. l. 5.
(f) Per 7. l. 5.
(g) Per 11. l. 5.
(h) Per 9. l. 5.
(i) Per 8. l. 5.
(k) Per schol. post p. 11. l. 5.
(l) Per 10. l. 5.

1. Sit A major quàm C, eritque ratio A ad B (b) major ratione C ad B. Sed est (c) A ad B ut C ad F: ergo ratio C ad F major (d) est ratione C ad B: (e) unde F minor est quàm B; & proinde B major quàm F.

2. Sit A æqualis ipsi C; erit ratio A ad B (f) æqualis rationi C ad B: Sed est A ad B ut C ad F: erit (g) igitur C ad B ut C ad F, ac proinde B & F (h) æquales erunt.

3. Sit A minor quàm C; & habebit A ad B minorem (i) rationem quàm habet C ad B. Est autem A ad B ut C ad F: ergo C (k) minorem habet rationem ad F quàm habet eadem C ad B; & proinde F (l) major est quàm B, seu B minor quàm F.

PROPOSITIO XV.

Fig. 10. *ALiquotæ similes (F, I) eandem inter se rationem habent quam tota (A, B.)*

Fig. 11. *Et universim, partes similes (C, F) sunt inter se ut tota (A, B)* [sive partes illæ totis suis fuerint commensurabiles, sive non fuerint.]

Verè instar axiomatis haberi potest, si rectè intelligatur quid sint partes similes. Vide defin. 7.

Fig. 12. [Schol. *Partes similes CB, EI, si à totis suis AB, FI auferantur, relinquunt partes similes AC, FE; quod per se satis manifestum est.*]

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11. vel 1. *SI prima (A) sit ad secundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F,) etiam permutando erit, prima (A) ad tertiam (C,) ut secunda (B) ad quartam (F.)*

Ponantur B & F esse minores quàm A & C; (nam si æquales sint, res patet;) [*Tunc enim, æquales A & B ad æquales C & F eandem rationem* (a) *habebunt, ut sit A : C :: B : F.*] Quoniam A ponitur esse ad B, ut C ad F, erunt per defin. 7. B & F, totorum A & C partes similes, ac proinde per præc. quam proportionem inter se habent tota A, C, eam quoque habent partes similes B, F; hoc est, A est ad C, ut B ad F. [*Eodem modo si antecedentes A & C minores fuerint consequentibus B & F respectivè; cùm sit A : B :: C : F,* (b) *erunt A & C partes similes totorum B & F,* & (c) *proinde A : C :: B : F.*]

(a) *Per simil. post. p. 7. l. 5.*
(b) *Per def. 7. l. 5.*
(c) *Per 15. l. 5.*

Scholium.

SI A est ad B, ut C ad F; etiam *invertendo* erit ut B ad A, sic F ad C. Per se patet.

Apud Euclidem hoc est corollarium prop. 4. quæ cùm in nostrâ methodo tanquam superflua sit omissa, visum est corollarium illud hoc loco ponere.

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens unum (AB) sit ad consequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad consequens alterum (LI,) etiam dividendo *erit (AC) excessus antecedentis primi supra suum consequens, ad idem consequens (CB,) ut (FL) excessus antecedentis secundi supra consequens secundum, ad secundum consequens (LI.)* Fig. 121

Axiomatis instar assumi potest: si tota AB, FI eandem rationem habeant ad X & Z; etiam similibus partibus mulctata, eandem ad X & Z pergent habere rationem: hoc est, adhuc AB sic mulctata erit ad X, ut FI sic mulctata ad Z. Id verò est quod asserit propositio. Nam quia ponitur AB esse ad CB, ut FI ad LI, erunt (*d*) CB, LI similes partes totorum AB, FI; & AC, FL erunt tota similibus partibus mulctata. Cùm ergo tota habuerint ad CB, LI eandem rationem; etiam AC, FL, (hoc est tota similibus partibus mulctata) pergent ad CB, LI eandem inter se habere rationem; hoc est, adhuc erit AC ad CB, ut FL ad LI.

(d) *Per def. 7. l. 5.*

[Aliter *Cùm sit AB : CB :: FI : LI;* (e) *ergo CB, LI sunt similes*

(e) *Per def. 7. l. 5.*

similes partes totorum AB, FI, & proinde si a totis suis auferantur, (a) *relinquunt similes partes AC, FL totorum AB, FI. Unde* (b) *AB : FI :: AC : FL; & ob eandem causam AB : FI :: CB : LI. Ergo* (c) *AC : FL :: CB : LI. Et permutando, AC : CB :: FL : LI. Q. E. D.*

(a) Per schol. p. 15. l. 5. (b) Per 15. l. 5. (c) Per 11. l. 5.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 12.

SI antecedens unum (AC) sit ad consequens unum (CB,) ut antecedens alterum (FL) ad consequens alterum (LI;) etiam componendo *erit (AC cum BC) primum antecedens cum suo consequente, ad idem consequens (CB,) ut (FL cum LI) secundum antecedens cum suo consequente, ad consequens (LI.)*

Rursum enim instar axiomatis assumi poterit: si duæ quantitates AC, FL, eandem ad X & Z habeant rationem; etiam AC, FL similiter, seu proportionaliter auctæ, pergent ad X & Z eandem habere rationem: hoc est, adhuc erit AC sic aucta ad X, ut FL sic aucta ad Z. Id verò est quod propositio asserit. Nam ponitur AC esse ad CB, ut FL ad LI. Quare si ipsis AC, FL addantur CB, LI; erunt AC, FL proportionaliter, seu similiter auctæ. Cùm igitur AC, FL eodem modo se habeant ad CB, LI; etiam cùm similiter fuerint auctæ, (hoc est ipsæ jam AB, FI) pergent ad easdem CB, LI eodem modo se habere; hoc est, adhuc AB erit ad CB, ut FI ad LI.

[Aliter. *Cùm sit AC : CB :: FL : LI; ergo* (d) *permutando, erit AC : FL :: CB : LI. Ergo* (e) *AC + CB : FL + LI :: (hoc est, AB : FI :: CB : LI:) & iterum* (f) *permutando, AB : CB :: FI : LI. Q. E. D.*]

(d) Per 16. l. 5. (e) Per 12. l. 5. (f) Per 16. l. 5.

Corollarium 1.

Fig. 12.

SI antecedens unum (AB) fuerit ad consequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad consequens alterum (LI;) etiam antecedens primum (AB) erit ad (AC) excessum suum supra consequens, ut antecedens alterum (FI) est ad (FL) excessum suum supra consequens alterum (LI.)

Cùm enim AB sit ad CB, ut FI ad LI, erit dividendo (*g*) AC ad CB, ut FL ad LI: & invertendo (*h*) BC ad CA, ut IL ad LF: & componendo (*i*) BA ad CA, ut IF ad LF.

(g) Per 17. l. 5. (h) Per sch. p. 16. l. 5. (i) Per 18. l. 5.

Hæc

Hæc argumentatio vocatur *conversio* rationis.

[*Et præterea, si fuerit unum antecedens (AC) ad consequens suum (CB,) ut alterum antecedens (FL) sit ad suum consequens (LI;) erit etiam, ex alià* convertendi *specie, antecedens primum (AC) ad primum antecedens cum suo consequente (AB) ut antecedens alterum (FL) ad alterum antecedens cum suo consequente (FI.)*

Cùm enim sit AC: CB :: FL: LI; erit (a) *invertendo, BC: CA :: IL: LF; &* (b) *componendo, BA: AC :: IF: FL; & rursum invertendo, AC: AB :: FL: FI.*] (a) Per sch. p. 16. l. 5. (b) Per 18. l. 5.

Corollarium 2.

SI AC est ad AB, ut FL ad FI; erit quoque AC ad CB, ut FL ad LI; & AB ad CB, ut FI ad LI. *Fig.* 12.

Cùm enim sit ut AC ad AB, sic FL ad FI, erit invertendo, BA ad CA, ut IF ad LF: & divid. (*c*) BC ad CA, ut IL ad LF: & rursum invertendo, AC ad CB, ut FL ad LI: & compon. (*d*) AB ad CB. ut FI ad LI. (c) Per 17. l. 5. (d) Per 18. l. 5.

[Aliter. *Cùm sit CA: AB :: LF: FI; erit invertendo, BA: AC :: IF: FL, &* (e) *convertendo, AB: BC :: FI: IL, quod erat unum: &* (f) *dividendo, AC: CB :: FL: LI, quod erat alterum.*] (e) Per cor. 1. hujus. (f) Per 17. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

S*I ut totum (AB) est ad totum (FI,) ita ablatum (CB) sit ad ablatum (LI,) etiam ut totum est ad totum, ita reliquum (AC) erit ad reliquum (FL.)* *Fig.* 12.

Omnino clarum est per se. Potest tamen ex præcedentibus sic ostendi. Quoniam AB est ad FI, ut CB ad LI; erit permutando (*g*) AB ad CB, ut FI ad LI. Ergo per conversionem rationis AB est ad AC, ut (*h*) FI ad FL. Ergo permutando, ut AB ad FI, ita AC ad FL. (g) Per 16. l. 5. (h) Per cor. 1. præc.

[Aliter. *Cùm sit AB: FI :: CB: LI, (sive permutando,* (i) *AB: CB :: FI: LI;)* (k) *erunt CB, LI partes similes totorum AB, FI, & proinde si a totis suis auferantur,* (l) *relinquunt partes similes AC, FL.* (m) *Ergo AB: FI :: AC: FL.*] (i) Per 16. l. 5. (k) Per def. 7. l. 5. (l) Per sch. p. 15. l. 5. (m) Per 15. l. 5.

PROPOSITIONES XX. & XXI.

IN *nostrâ methodo sunt superflue.* [Habentur tamen in coroll. prop. 22. & 23. quæ sequuntur.]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13. *SI fuerit A ad B, ut O ad Q; & B ad C, ut Q ad R, & sic deinceps: erit* ex æquo *ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R.*

Ponantur C, R esse minores quàm B, Q: eadem foret ostensio, si majores ponerentur. Quoniam (*a*) B est ad C, ut Q ad R; erunt C, R totorum B, Q (*b*) partes similes. Cùm igitur A & O ad B & Q eandem habeant rationem; habebunt quoque ad C & R, quæ sunt ipsorum B & Q partes similes, eandem rationem. Instar enim axiomatis est, si duæ quantitates ad alias duas eandem inter se habuerint rationem, etiam ad partes earum similes, eandem inter se habere rationem.

(a) Per hyp. (b) Per def. 7. l. 5.

Si plures fuerint utrimque quantitates quàm tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

[Aliter *Cùm sit A*: *B* :: O: *Q*; *erit* (c) *permutando*, *A*: O :: *B*: *Q*. *Et cùm sit B*: *C* :: *Q*: *R*; *erit permutando*, *B*: *Q* :: *C*: *R*. *Ergo* (d) *A*: O :: *C*: *R*; *& iterum permut. A*: *C* :: O: *R*.

(c) Per 16. l. 5. (d) Per 11. l. 5.

Cor. 1. *Hinc prop. 20. a Tacqueto omissa deduci potest. Sint enim tres quantitates A, B, C, tribus* O, *Q*, R *proportionales, bina binis; hoc est, sit A*: *B* :: O: *Q*, *& B* : *C* :: *Q*: R; *Si A fuerit major quàm C, erit ex æquo* O *major quàm* R; *& si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Nam per hanc prop. erit A*: C :: O: R; *& permutando, A*: O :: C: R. *Ergo per* 14. *hujus libri, liquet propositum.*

Cor. 2. *Cùm sit A* : *B* :: O: *Q*; *erit* (e) *componendo*, *A* + *B* : *B* :: O + *Q*: *Q*. *Est autem B* : *C* :: *Q*: *R*. *Ergo per hanc prop. erit A* + *B* : *C* :: O + *Q*: *R*. *Et pari modo, si* (f) *divisionem pro compositione adhibeas, erit A* — *B* : *C* :: O — *Q*: *R*.]

(e) Per 18. l. 5. (f) Per 17. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerit ut A prima ad B secundam, ita O prima ad Q secundam; & ut B secunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O; erit ex æquo [perturbate] *ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q secundam.* Fig. 14.

Ut B est ad C, ita (*a*) potest Q esse ad aliquam quampiam S. Jam quia ut B ad C, sic (*b*) R est ad O, & ut B ad C, sic Q est ad S; (*c*) erit R ad O, (*d*) ut Q ad S. Igitur permutando (*e*) R est ad Q, ut O ad S. Deinde, quia O est ad Q, ut (*f*) A ad B, & Q est ad S, (*g*) ut B ad C; ex æquo erit O ad S, ut (*h*) A est ad C. Sed jam ostendi R esse ad Q, ut O est ad S. Ergo etiam (*i*) R est ad Q, ut A ad C.

Vocatur a Geometris hæc ratio *perturbata.*

[Coroll. *Sint tres quantitates A, B, C, tribus* R, O, *Q proportionales, bina binis, sed perturbate; hoc est, sit A*:*B*::O:*Q; & B*: *C*::R:O; *si A fuerit major quàm B, erit ex æquo R major quàm Q; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Nam per hanc prop. erit A*:*C*::*R*:*Q; & permutando, A*:*R*::*C*:*Q. Ergo per* 14. *hujus libri liquet propositum. Hæc verò est prop.* 21. *priùs omissa.*]

(a) Per ante. ante 1. l. 5.
(b) Per hyp.
(c) Per constr.
(d) Per 11. l. 5.
(e) Per 16. l. 5.
(f) Per hyp.
(g) Per constr.
(h) Per præc.
(i) Per 11. l. 5.

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, ita L ad F: erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F. Fig. 15.

Quoniam I per hyp. est ad B, ut L ad F; erit quoque (*k*) invertendo B ad I, ut F ad L. Cùm igitur A sit ad B, (*l*) ut C ad F, & B ad I, ut F ad L; ex æquo erit (*m*) ut A ad I, sic C ad L. Igitur (*n*) componendo, ut A I est ad I, sic C L est ad L: I verò est ad B, (*o*) ut L ad F. Rursum igitur (*p*) ex æquo AI est ad B, ut CL ad F.

(k) Per sch. p. 16. l. 5.
(l) Per hyp.
(m) Per 22. l. 5.
(n) Per 18. l. 5.
(o) Per hyp.
(p) Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 16.

SI quatuor magnitudines (AB, CF, I, L) fuerint proportionales; maxima (AB) & minima (L) duabus reliquis (CF, I) majores erunt.

Sit AB ad CF, ut I ad L. Ex maximâ AB sumatur AQ æqualis I; & ex CF sumatur CR par minimæ L. Erit igitur AB tota ad totam CF, ut ablata AQ ad ablatam CR. Ergo reliqua QB est ad reliquam (*a*) RF, ut tota AB ad totam CF. Sed AB major (*b*) est quàm CF. Ergo & QB major quàm RF. Jam verò quia AQ ipsi I, & CR ipsi L æquales sunt; etiam AQ cum L, ipsi I cum CR æquales erunt. Quare si ad AQ cum L addatur majus QB, & ad I cum CR addatur minus RF; erit totum AQB cum L majus toto I cum CRF. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 19. l. 5.
(b) Per hyp.

Fig. 6.

[Corol. *Si tres magnitudines, A, B, C, fuerint proportionales, extremarum semisumma mediâ major erit. Cùm enim* (c) *sit A ad B ut B ad C, erit (per hanc pr.) summa extremarum A & C major quàm B bis sumpta, &* (d) *proinde semisumma extremarum major erit quàm B semel sumpta.*]

(c) Per def. 8. l. 5.
(d) Per axio. 6. l. 1.

Quæ sequuntur non sunt propositiones Euclidis, sed ex Pappo Alexandrino, aliisque desumptæ, ob frequentem earum usum Euclideis subjungi solent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 17.

SI prima (A) ad secundam (B) majorem rationem habeat, quàm tertia (C) ad quartam (F;) habebit invertendo *(B) secunda ad (A) primam, minorem rationem, quàm (F) quarta ad (C) tertiam.*

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quàm C ad F: Igitur A ad (*e*) aliquam BX (quæ (*f*) major erit quàm B) eandem habebit rationem, quàm C ad F. Invertendo igitur erit BX ad A, ut F ad C; [*Sed B est ad A in minori* (g) *ratione quàm BX ad A*;] ac proinde (*h*) B ad A in minori ratione erit, quàm F ad C.

[Scholium. *Idem similiter demonstrabitur de proportione minori: hoc est, si B ad A minorem habeat rationem quàm F ad C; habebit invertendo, A ad B majorem rationem quàm C ad F.*]

(e) Per axio. ante 1. l. 5.
(f) Per 10. l. 5.
(g) Per 8. l. 5.
(h) Per sch. p. 11. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

SI *A habet ad B majorem rationem quàm C ad F; etiam* permutando *A ad C majorem rationem habebit, quàm B ad F.* Fig. 17.

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratione C ad F; erit (*a*) ratio A ad aliam BX (quæ necessariò major est quàm (*b*) B) æqualis rationi C ad F. Jam igitur (*c*) permutando A erit ad C, ut BX ad F. Sed BX ad F est in majori ratione, (*d*) quàm B ad F. Ergo (*e*) etiam A est ad C in majori, quàm B ad F.

Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

(a) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
(b) *Per* 10. *l.* 5.
(c) *Per* 16. *l.* 5.
(d) *Per* 8. *l.* 5.
(e) *Per sch. p.* 11. *l.* 5.

PROPOSITIO XXVIII.

SI *AB ad BC majorem rationem habet, quàm FI ad IL; etiam* componendo *AC ad BC majorem rationem habet, quàm FL ad IL.* Fig. 18.

Quoniam ponitur AB ad BC esse in majori ratione, quàm FI ad IL: Ergo (*f*) alia OB (quæ necessariò erit minor (*g*) quàm AB) est ad BC, ut FI ad IL. Ergo (*h*) componendo OC est ad BC, ut FL ad IL. Ergo AC est ad BC in (*i*) majori, quàm FL ad IL.

Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

(f) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
(g) *Patet ex* 10. *l.* 5.
(h) *Per* 18. *l.* 5.
(i) *Per* 8. *l.* 5. *& schol.* 11. *l.* 5.

PROPOSITIO XXIX.

SI *AC ad BC majorem rationem habet, quàm FL ad IL; etiam* dividendo *AB ad BC majorem habet rationem, quàm FI ad IL.* Fig. 18.

Quia ponitur AC ad BC majorem habere rationem, quàm FL ad IL; Ergo (*k*) alia OC (quæ necessariò minor erit (*l*) quàm AC) erit ad BC, ut FL ad IL. Jam igitur erit dividendo (*m*) OB ad BC, ut FI ad IL. Ergo AB est ad BC in (*n*) majori, quàm FI ad IL.

(k) *Per axio ante* 1. *l.* 5.
(l) *Per* 10. *l.* 5.
(m) *Per* 17. *l.* 5.
(n) *Per* 8. *l.* 5. *& sch. p.* 11. *l.* 5.

Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 18.

SI AC ad BC majorem rationem habet, quàm FL, ad IL; convertendo *habebit AC ad AB minorem, quàm FL ad FI.*

Quoniam AC est ad BC in majori, quàm FL ad IL; erit dividendo (*a*) AB ad BC in majori, quàm FI ad IL. Ergo invertendo (*b*) CB ad BA, est in minori, quàm LI ad IF. Ergo componendo (*c*) CA est ad BA in minori, quàm LF ad IF.

(a) Per 29. l. 5.
(b) Per 26. l. 5.
(c) Patet ex 28. l. 5.

[Scholium. *Idem similiter demonstrabitur de proportione minori: hoc est, si AC ad AB minorem rationem habeat quàm FL ad FI; habebit convertendo, AC ad BC majorem rationem quàm FL ad IL.*]

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 19.

SI AB ad C majorem rationem habet, quàm F ad I; & C ad LQ majorem rationem habeat, quam I ad S, & sic deinceps; etiam [ex æquo] *prima AB ad ultimam LQ majorem rationem habebit, quàm prima F ad ultimam S.*

Quoniam AB est ad C in majori, quàm F ad I; Ergo alia (*d*) quæpiam OB (quæ necessariò minor (*e*) erit quàm AB) est ad C, ut F ad I. Et quia C est ad LQ in majori quàm I ad S; Ergo C ad aliam quampiam LR (quæ erit necessariò major quàm LQ) est ut I ad S. Igitur ex æquo (*f*) OB est ad LR ut F ad S. Ergo OB est ad LQ in majori quàm (*g*) F ad S. Ergo AB est ad LQ (*h*) in multo majori, quàm F ad S.

(d) Per. axio. ante 1. l. 5.
(e) Per. 10. l. 5.
(f) Per 22. l. 5.
(g) Per 8 l. 5.
(h) Per. ead.

[Scholium. *Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.*

Corol. *Ex hujus prop. demonstratione liquet, quòd si AB ad C majorem rationem habeat quàm F ad I; & C ad LR eandem habeat rationem quàm I ad S; etiam prima AB ad ultimam LR majorem rationem habebit quàm prima F ad ultimam S. Idemque similiter verum est de proportione minori.*]

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

SI AB ad C majorem rationem habet, quàm I ad S; & C ad LQ majorem quàm F ad I; etiam ex æquo [perturbate] *habebit majorem rationem AB ad LQ, quàm F ad S.* Fig. 19.

Demonstratio eadem quæ præcedentis, sed pro 22. citetur 23.

[Scholium. *Idem similiter demonstrabitur de proportione minori. Et ab hac propositione, corollario illi quod a prop. præcedente deducitur, simile corollarium deducetur.*]

PROPOSITIO XXXIII.

SI tota (AB) ad totam (FI) majorem rationem habuerit, quàm ablata (CB) ad ablatam (LI,) tota ad totam minorem rationem habebit, quàm reliqua (AC) ad reliquam (FL.) Fig. 12.

Quia AB est ad FI in majori, quàm CB ad LI; erit (*a*) permutando etiam AB ad CB in majori, quàm FI ad LI. Ergo convertendo (*b*) AB est ad AC in minori, quàm FI ad FL. Ergo etiam permutando (*c*) AB est ad FI, in minori, quàm AC ad FL.

(a) *Per* 27. *l.* 5. (b) *Per* 30. *l.* 5. (c) *Patet ex* 27. *l.* 5.

[Scholium. *Eodem modo, si tota ad totam minorem rationem habuerit quàm ablata ad ablatam; tota ad totam majorem rationem habebit quàm reliqua ad reliquam.*]

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) sunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ aut triplicatæ & sic deinceps; æquales sunt etiam ipsæ. Fig. 20.

Quia ratio A ad C duplicata est rationis A ad B; erit (*d*) ut A ad B, sic B ad C. Ob eandem causam erit ut E ad F, sic F ad O. Cùm ergo sit ut A ad B, sic per hyp. E ad F: & ut B ad C, sic F ad O, (nam ut B ad C, sic A ad B, hoc est E ad F, hoc est F ad O,) igitur (*e*) ex æquo erit, ut A ad C, sic E ad O.

(d) *Per def.* 10. *l.* 1. (e) *Per* 22. *l.* 5.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 20. *Rationes æquales A ad C & E ad O, sint duplicatæ, aut triplicatæ, & sic deinceps, rationum A ad B, & E ad F: etiam hæ æquales erunt.*

Si negas, sit ut A ad B, sic E ad aliam Z inæqualem ipsi F, & fiat ut E ad Z, sic Z ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ (*a*) sunt rationes A ad C, & E ad X; etiam ratio E ad X æqualis erit (*b*) rationi A ad C, hoc est per hyp. rationi E ad O. Ergo (*c*) æquantur O & X. Ergo patet etiam medias F & Z æquales esse. Ergo A est ad B, ut E ad F seu Z. Quod erat demonstrandum.

(a) Per def. 10. l. 5.
(b) Per præc.
(c) Per 9. l. 5.

Ex contradictorio assertionis, directe illata est assertio.

PARS SECUNDA.

Euclidea per multiplices definitio æqualium rationum demonstratur: exhibeturque ac demonstratur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

PRoportionum elementis, methodo (nisi fallor) commodiori explicatis, reliquum est, ut quod secundo loco supra promiseram, præstare aggrediar. Hoc igitur loco (quod a nullo hactenus factum est) demonstrabimus, nihil assumendo, nisi quod per se lumine naturali sit manifestum, duas rationes inter se æquales esse, quando antecedentium quælibet æque multiplices, consequentium æque multiplicibus, semper sunt vel pariter majores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cujus quidem negotii cùm satis ardua, atque prolixa sit demonstratio, ut jam reipsâ cognoscemus, facile apparebit præpostere egisse Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium sumi voluit ex hoc multiplicium indemonstratâ hactenus proprietate, cujus tam remota & obscura sit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma

Lemma I.

SIT A ad B, ut C ad F; & sint antecedentium A, C, quælibet æque multiplices I, Q, nimirum vel duplæ, vel triplæ & sic deinceps. Sint item consequentium B, F quælibet æque multiplices L. R. *Fig.* 21.

Erit quoque ut I ad L, sic Q ad R. [*Est prop.* 4. *hujus libri, quæ in parte primâ omittitur.*]

Quoniam enim A est ad B, ut C ad F; etiam I dupla ipsius A erit ad B, ut Q dupla ipsius C est ad F: & I tripla A erit ad B, ut Q tripla C, ad F, & sic in infinitum. Quod quidem æque est per se clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I est ad B, ut Q ad F; erit quoque I ad L duplam ipsius B, ut Q ad R duplam ipsius F; & ut I ad L triplam ipsius B, ita Q ad R triplam F: Et sic in infinitum, quod rursus tam clarum est, quàm axioma quodcunque. Liquet ergo propositum.

[Aliter, *ex prop.* 16. 15. & 11. *l.* 5.

Cùm sit $A:B::C:F$; *permutando erit* $A:C::B:F$. *Sed per* 15. *est* $A:C::I:Q$; & $B:F::L:R$. *Ergo per* 11. *est* $I:Q::L:R$; & *permutando*, $I:L::Q:R$.]

Lemma 2.

SI quantitates A, B habeant communem mensuram C; erit A toties sumpta, quoties est C in B, æqualis quantitati B toties sumptæ, quoties C est in A. *Fig.* 22.

Ponatur C contineri in B quater, & in A sexies, ac proinde B esse 4. C, & A esse 6. C. Igitur 6. C. (hoc est A) ducta in 4, (hoc est, toties sumpta quoties C est in B,) efficiunt 24. C. Similiter 4. C (hoc est B) ducta in 6, (hoc est, toties sumpta quoties C est in A) efficiunt etiam 24. C. Ergo A toties sumpta quoties C in B æquatur B toties sumptæ quoties C in A.

Theorema I.

SI ratio AB ad FI major sit ratione L ad R; tales sumi possunt antecedentium (AB & L) æque multiplices, tales item æque multiplices consequentium (FI & R,) ut multiplâ antecedentis (AB) rationis *Fig.* 23.

tionis majoris, excedente multiplam consequentis (FI;) multiplex antecedentis (L) rationis minoris, non excedat multiplicem sui consequentis (R.)

Sit ratio AB ad FI major ratione L ad R, & sint AB & L, majores rationum termini. Quoniam igitur AB ad FI majorem habet rationem quàm L ad R; alia quædam quantitas Z (a) habebit ad FI eandem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad FI æqualis est rationi L ad R, poniturque ratio AB ad FI major ratione L ad R, erit quoque ratio AB ad FI major ratione Z ad FI, ac proinde AB major est quàm Z: quæ omnia per se sunt manifesta. Igitur ex AB sumi poterit AC per Z; eritque etiam AC ad FI, ut L ad R. Auferatur residuum BC ex AC quoties potest, puta ter; tum seca AC in tot æquales partes, exem. gr. in 6. donec earum una possit auferri sæpius ex FI, quàm BC ex AC, puta quater, & residuum esto OI, quod erit minus unâ particulâ. Hoc quoque fieri posse per se est manifestum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ a proportionibus non dependet. Particularum verò illarum quantitas esto Q.

(a) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.

Quoniam igitur Q est mensura communis quantitatum AC, FO, ergo AC toties sumpta, quoties Q est in FO, nempe quater, æquatur FO toties sumptæ, quoties Q est in AC, nempe sexies. Deinde quia residuum OI est minus unâ particulâ, hoc est quàm Q, erit OI toties accepta, quoties Q est in AC, nempe sexies, adhuc minor quàm AC. Ulterius, quia BC minus sæpe auferri potest ex AC, quàm Q ex FI, (positum quippe fuit BC ex AC auferri tantùm posse ter, Q verò quater ex FI;) manifestum est BC toties sumptum, quoties Q in FI, nempe quater, majus fore quàm AC, ac proinde multo majus esse quàm OI sumptum sexies, quod ostendi supra esse minus quàm AC. Atqui ostensum est AC sumptum quater, & FO sumptum sexies esse æqualia. Quare si AC sumpto quater addatur BC quater, & ad FO sexies sumptum addatur OI sexies, erunt 4. AC & 4. BC, hoc est 4. AB majora, quàm 6. FO & 6. OI, hoc est quàm 6. FI. Quia verò 4. AC æqualia erant 6. FO, erunt 4. AC minora quàm 6. FI. Sed ut AC ad FI, ita ponebatur supra L esse ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora sunt quàm 6. R. Acceptæ sunt igitur antecedentium AB & L æque multiplices, nempe quadruplæ, item æque multiplices consequentium FI & R, nempe sextuplæ, & tamen ostensum est multiplam antecedentis AB (nempe 4. AB,) superare multiplicem consequentis

sequentis FI (nempe 6. FI:) multiplicem verò antecedentis L (nempe 4. L,) non excedere multiplicem consequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonstrandum.

Theorema 2.

SI antecedentium (A, C) qualibet æque multiplices, quibuslibet consequentium (B, F) æque multiplicibus, sint vel simul majores, vel simul minores, vel simul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit. Fig. 21.

Si negas, sit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C sumi tales æque multiplices, item tales consequentium B, F æque multiplices, ut multipla antecedentis A excedente multiplam consequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam consequentis F; quod est absurdum, quia evertit hypothesim. Ergo &c.

In hac demonstratione, uti & in sequentibus eæ solum propositiones ex quinto libro adhibentur, quæ per se æque sunt manifestæ, atque ipsa axiomata.

Theorema 3.

SI sumi possint antecedentium (O, R) tales æque multiplices, itemque tales æque multiplices consequentium (Q, S,) ut multipla antecedentis unius (O) superante multiplam consequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam sui consequentis (S;) erit ratio (O ad Q,) cujus antecedentis multiplex superat multiplicem consequentis, major ratione alterâ (R ad S.) Fig. 24.

Rationes illas inæquales esse sic ostendo. Si essent æquales; quæcunque antecedentium æque multiplices (ut patet a fortiori ex lemmate primo) quibuscunque æque multiplicibus consequentium, vel simul majores essent, vel simul minores, vel simul æquales; quod est absurdum, quia evertit hypothesim.

Quòd

Quòd autem ratio O ad Q major sit, cujus antecedentis, multiplex superat, sic ostendo. Si negas, sit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. tales accipi possunt antecedentium R & O æque multiplices, talesque item æque multiplices consequentium S ad Q, ut multiplâ antecedentis R rationis majoris excedente multiplam consequentis S. multipla antecedentis O non excedat multiplam consequentis Q: non autem tales (quod facile ex 1. lem. ostenditur,) ut multiplâ O excedente multiplam Q, multipla R non excedat multiplam S. Quod est absurdum, cùm evertat hypothesim.

Theorema 4.

Fig. 25. *CUM proportio irrationalis est, nulla multiplex antecedentis ulli consequentis multiplici æqualis esse potest. Quare, cùm per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, solummodo multiplicium simultaneus excessus, defectusque spectari debent.*

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties sumpta posset fieri æqualis B aliquoties sumptæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z: singulæ A & B essent eidem Z commensurabiles, ac proinde & commensurabiles inter se, contra hypothesim.

Quia tamen secundùm theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quàm ad irrationales; simultaneo excessui & defectui æqualitatem simultaneam addidimus cum Euclide.

Demonstratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & sexti libri demonstrationes subsistunt: patetque multiplicium illum excessum defectumque simultaneum, infallibile indicium esse æqualitatis rationum, non quidem per se immediate, sed demonstratione, quam modò dedimus, priùs rite intellectâ.

Verùm quia indicium per multiplices, quantumvis jam securum, nihilominus remotum est & implexum, hic aliud clarissimum & proximum, quod promisi supra, demonstrabo.

Theorema 5.

SI consequentes (CF, NQ,) & consequentium qualibet aliquotæ similes, (puta & decima, & centesima, & millesima, & ita deinceps sine termino) in antecedentibus (AB, GM) æquali semper numero contineantur; rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) æquales erunt. Fig. 26.

Nota, æquali numero contineri dicuntur, cùm, si auferantur quoties possunt, æqualis est utrimque numerus ablatarum.

Demonst.. Si negas, erit ratio alterutra, puta AB ad CF, major ratione GM ad NQ. Quoniam igitur AB ponitur ad CF majorem habere rationem quàm GM ad NQ, manifestum est aliquam (puta AD) minorem quàm AB, æqualem habere rationem ad CF, quàm GM ad NQ. Manifestum similiter est, aliquam ipsius CF aliquotam (ex. gr. unam trigesimam) esse minorem differentiâ DB. Sit CE una trigesima ipsius CF, & auferatur ex AB quoties potest exemp. gr. millies, totumque ablatum sit AO. Quoniam igitur AO est 1000. CE, & CF est 30. CE, erit AO ad CF ut 1000. ad 30.

Sumatur jam ex NQ aliquota NP, similis alteri CE, nempe etiam una trigesima. Quoniam ex hyp. CE, NP æquali numero in AB, GM continentur, & CE ablata ex AB quoties potuit, ablata fuit millies, etiam NP ex GM auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum GK est 1000. NP, & NQ est 30. NP, erit GK ad NQ ut 1000. ad 30. hoc est, ut AO ad CF. Quia verò CE ablata ex AB quoties potuit, reliquit OB, erit OB minus quàm CE. Sed CE, nempe una trigesima CF, est minor posita quàm DB. Ergo OB est multò minor quàm DB. Ergo AO est major quàm AD. Ergo AO ad CF, majorem rationem habet quàm AD ad CF. Sed ponebatur esse AD ad CF, ut GM ad NQ. Ergo AO ad CF majorem rationem habet, quàm GM ad NQ: hoc est, multò majorem quàm GK ad NQ. Quod est absurdum, quia ostendi supra AO esse ad CF ut GK ad NQ. Non possunt igitur rationes datæ AB ad CF & GM ad NQ esse inæquales. Æquales igitur sunt. Quod erat demonstrandum.

Theorema

Theorema 6.

Fig. 26. *SI aut consequentes (CF, NQ,) aut consequentium aliqua similes aliquota (ex. gr. decima,) inæquali numero in antecedentibus (AB, GM) contineantur; rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) inæquales erunt, & erit illa major, cujus consequentis aliquota sæpius continetur.*

Contineatur CE decima una ipsius CF, in AB millies, & sit AO, 1000. CE; tum verò residuum OB erit minus quàm una CE. Deinde NP una decima NQ, contineatur in GM, tantùm nongenties nonagies septies, & sit GK, 997. NP; patet residuum KM fore minus unâ NP, ac proinde 1000. NP fore majores quàm GM. Sit ergo GR, 1000. NP. Quoniam igitur AO est 1000. CE, & GR, 1000. NP; CF verò, 10. CE, & NQ, 10. NP, erit AO ad CF, ut GR ad NQ. Ergo AB est ad CF in majori ratione, quàm GR ad NQ; ac proinde in multo majori, quàm GM ad NQ. Quod erat demonstrandum.

Habemus jam igitur indubitatum, facillimumque indicium, ex quo rationes æquales inæqualesque certò liceat discernere. Et possemus ex illo, omnes, quæ quidem axiomata non sint, l. 5. propositiones, quas per multiplices Euclides demonstrat, multo expeditiùs demonstrare, nisi magis ex usu discentium putaremus, illas eâ methodo, quâ in primâ parte usi jam sumus, proponere.

TER-

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione.

I.

Proportionis Divisio.

PRima divisio est in rationalem & irrationalem, ut dictum def. 4. Rationalis dividitur in rationem æqualitatis & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem majoris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus consequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus consequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris dividitur in quinque species, quæ sunt; multiplex, superparticularis, superpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens.

Ratio multiplex est, quando major minorem aliquoties continet, ut bis, ter, quater, &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio superparticularis est, quando major minorem continet simul, & unam ejus partem aliquotam: ut ratio 3. ad 2. vel 6. ad 4. quæ dicitur sesquialtera; quia major minorem continet semel & ejus dimidium: ratio 4. ad 3. sive 16. ad 12. quæ dicitur sesquitertia, quia major minorem continet semel, & tertiam ejus partem, & sic deinceps.

Ratio superpartiens est, cùm major minorem continet semel & plures ejus aliquotas, non conficientes unam aliquotam. Talis est ratio 8. ad 5. vel 14. ad 10. quia 8. continet 5. semel, & insuper 3. hoc est tres quintas ejusdem numeri 5, quæ tamen simul sumptæ non conficiunt unam aliquotam ipsius 5. Similiter 14. continet 10 semel, & bis 2. hoc est, duas quintas numeri 10. quæ tamen simul sumptæ (nempe 4.) non conficiunt unam aliquotam ipsius 10. Additur porro, non conficientes unam aliquotam, quia aliàs esset ratio superparticularis.

Ratio multiplex superparticularis est, cùm major minorem aliquoties continet, & insuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5. ad 2. 10. ad 4. &c.

Ratio multiplex superpartiens est, cùm major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8. ad 3. 16. ad 6. &c.

I I.

De Denominatore Proportionis rationalis.

DEnominator proportionis rationalis est, qui distinctè & clarè exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; sive qui ita se habet ad unitatem, ut major ad minorem; ac proinde ostendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur a majore. Rationis 27. ad 9. denominator est 3. quia 3. ita est ad unitatem, ut 27. ad 9. ac proinde ostendit quoties consequens in antecedente continetur, nempe ter.

Cujuscunque rationis denominator invenitur, si major terminus dividatur per minorem, nam quotiens divisionis erit denominator. Ratio est, quia quotiens ita est ad unitatem, ut dividendus ad divisorem, hoc est ut major ad minorem.

Exempl. Detur ratio 60. ad 6. Divide 60. per 6. quotiens 10. est denominator. Detur rursum ratio 60. ad 16. divisio 60. per 16. fit quotiens $3\frac{3}{4}$. hic est denominator.

I I I.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUM rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune consequens habentes; communis consequentis antecedentia erunt rationum denominatores, & commune consequens munus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, si sola sit, exhiberi potest denominator. At si duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam sensu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum ostendant, quomodo una ratio ad alteram se habeat. Id quod egregie observavit P. Gregorius a S. Vincentio, operis sui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum præclarissimis, & prope innumeris inventis Geometriam auxit; tum imprimis libro 8. ejusdem operis de proportionalitatibus ita scripsit, ut novam de proportionalitatibus scientiam condidisse censeri meritò debeat. Datæ

Fig. 27. sint

sint rationes irrationales A ad B, & C ad D, quæ revocentur ad rationes FH, GH, habentes commune consequens H, sic ut ratio F ad H sit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune consequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc est rationum A ad B, & C ad D,) quia ostendunt quomodo una ratio sese habeat ad alteram. Sicut enim F est ad G, ita ratio FH est ad rationem GH, hoc est ratio AB ad rationem CD.

IV.

Axiomata.

AX. 1. Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes consequens (H,) eam inter se proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) Est prop. 2. P. Gregorii a S. Vinc. l. 8. quadr. *Fig. 28.*

Hoc est, ratio G ad H, tanto major est ratione F ad H, quanto G major est quàm F.

Ax. 2. Rationes (I ad L, & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter se habent consequentium proportionem. Est propos. 7. P. Gregorii a S. Vinc. lib. 8. quadr. *Fig. 29.*

Hoc est, ratio I ad L est ad rationem I ad M, ut reciprocè est M consequens, ad consequens L: sive ratio I ad L tanto major est ratione ejusdem I ad M, quanto L fuerit minor quàm M, ac proinde quanto M fuerit major quàm L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter se rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12. ad 3. & ratio 15. ad 6. quarum denominatores sunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Ex defin. (*a*) denom. ratio 12. ad 3. est eadem cum ratione 4. ad 1. & ratio 15. ad 6. est eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$. ad 1. Sed ratio 4. ad 1. est ad rationem $2\frac{1}{2}$. ad 1. ut (*b*) 4. est ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3. est ad rationem 15. ad 6. ut denominator 4. est ad denominatorem $2\frac{1}{2}$.

(a) *Num.* 2.

(b) *Per axio 1. hic.*

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

ADditio perficitur, si rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum summa ad unitatem, est rationum datarum summa quæsita.

Dentur ratio 12. ad 3. & 15. ad 6. earum denominatores 4. & $2\frac{1}{2}$ additi sibi mutuò, faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$. ad 1. est par rationi 12. ad 3. & rationi 15. ad 6. Patet ex Ax. 1 & 3.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris a majore; nam ratio residui ad unitatem, est ratio quæ remanet post minorem rationem a majori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12. ad 3. & 15. ad 6. Harum denominatores sunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$. a majori 4. remanet $\frac{3}{2}$. Ratio $\frac{3}{2}$ ad 1. est ea quæ remanet, ubi rationem 15. ad 6. seu $2\frac{1}{2}$. ad 1. detraxeris ex ratione 12. ad 3. seu 4. ad 1.

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 30. RAtiones datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H) habentes commune consequens (H:) Antecedentia F & G sibi addita sunt FG. Ratio FG ad H est summa rationum F ad H, & G ad H, hoc est rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, si rationes datæ ad commune consequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur a majori F: ratio enim residui ad H, est ea quæ remanet postquam rationem G ad H, seu C ad D subtraxeris a ratione F ad H, seu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium Multiplicatio & Divisio.

DEnominatores rationum per invicem multiplicati, dabunt denominatorem rationis quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.

Hoc

Hoc est, ratio quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, est ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex Ax. 1. &. 3. Nam multiplicatio rationum est unius ad alteram additio sæpius repetita. Hanc autem perfici repetitâ sæpius antecedentium additione, (hoc est multiplicatione,) patet ex jam citatis axio. 1. & 3.

Sint datæ rationes 9. ad 3. & 20. ad 4. denominatores 3. & 5. multiplicati faciunt 15. Ratio 15. ad 1. est ea, quæ ex multiplicatione rationum 9. ad 3. (seu 3. ad 1.) & 20. ad 4. (seu 5. ad 1.) producitur.

Divisio rationum perficitur, si denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, est ea quæ habetur ex divisione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1. & 3. axiomate; cùm rationis per rationem divisio, sit subtractio unius ab alterâ sæpius repetitâ.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datæ sint rationes A ad B, & C ad D, per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E est ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. *Fig.* 31.

Hæc operatio est Gregorii a S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipse, nec alius quisquam demonstrat.

Hunc igitur in modum demonstrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonstratione numeri 12. ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per const. sunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E est ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erit demonstrandum.

IX.

Divisio rationum irrationalium.

Data sit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, sic C ad D. Ratio D ad E est quotiens, *Fig.* 31.

Nam ratio C ad D (hoc est per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. 12. ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cùm multiplicata in diviſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De compoſitione rationum: Ejus Definitio.

RAtio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates (hoc eſt denominatores) inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Eſt definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quotcunque quarum denominatores ſint 2. 3. $1\frac{1}{4}$. Multiplica denominatorem 2. per 3. denom. fit 6. denominator rationis compoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt ratio 6. ad 1. eſt compoſita ex rationibus 6. ad 3. & 12. ad 4. Quod ſi denominatorem 6. multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$. fit $7\frac{1}{2}$. denominator rationis compoſitæ ex tribus datis rationibus, quarum denominatores ſunt 2. 3. $1\frac{1}{4}$.

X I.

Compoſitio rationum non aliud eſt quàm rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur ex quarum multiplicatione producitur.

NAM ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem ſeu conſequens commune. Ergo ratio ex iiſdem componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Scholium.

Scholium.

UT numeri ſequentis demonſtratio clariùs percipiatur, obſervandum eſt, multiplicari ac dividi magnitudines per invicem, cum analogiâ quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cùm, ut eſt unitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita plane magnitudo per magnitudinem dicitur multiplicari, cùm, ut quæpiam recta pro unitate aſſumpta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus eſt ad alterum, ita unitas fit ad alium, qui quotiens nominatur: ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi; quando aſſumptâ quantitate aliquâ pro unitate, ut una ſe habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicetur quotiens.

XII.

Si fuerint quæcunque & quotcunque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri; ratio prima ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonſtratum eſt a Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inventus eſt. Unde Gregorius a S. Vincentio, magnus Geometra, libro 8. ad principium ſecundum, cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, qua inter theoremata referri poſſit.

Univerſalem igitur hujus rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

DAtæ ſint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, C, D. Oſtendendum eſt rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D. *Fig.* 31.

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B, B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune conſequens B, ac proinde rationum denomi-

(a) Per n. 3. natores sunt A, X: & consequens commune B, (a) munus explet unitatis, quæ est commune consequens respectu omnium denominatorum numericorum.

Itaque si velimus magnitudines A, X. per invicem multiplicare, oportebit (b) facere ut B unitas est ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, seu X per A, plane ac si cupias invicem multiplicare numeros R, S, fit ut unitas ad unum numerum S. ita alter R ad quartum V, qui est productum multiplicationis.

(b) Per sch. præced.

Quoniam igitur quantitas Z est productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio (c) hujus producti Z ad B unitatem, seu commune consequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B; X ad B; prorsus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7. ostendimus evenire, in quâ si denominatores inter se multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea est quæ fit ex rationum multiplicatione.

(c) Per defin. num. 10.

Atqui per constr. ratio X ad B est ratio B ad C. Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Quia verò per constr. ut B est ad X, ita A est ad Z, etiam inversim Z ad A, ut X ad B, hoc est, per constr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z est ad B, ita A est ad C. Sed jam ostensum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad C. Atqui num. XI. ostensum est rationes componi ex iisdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonstrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et sic deinceps in infinitum. Quod erat demonstrandum.

Demon-

Demonstratur in numeris.

8	2	$\frac{8}{3}$
4	1	$\frac{4}{3}$
3	$\frac{3}{4}$	1

EAndem prorsus demonstrationem valere in numeris jam ostendam, unde etiam veritas illius, ac soliditas magis stabilietur.

Dati sint tres numeri quicumque exem. gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4. ad 8. ita 1. ad 2. & ut 4. ad 3. sic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt igitur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1. item rationes 4 ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$. inter se æquales; eritque ex æquo (*a*) etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$.

(a) *Per 22. l. 5.*

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1 ad $\frac{4}{3}$. eruntque rationes 2 ad 1. & 1 ad $\frac{3}{4}$ (hoc est, rationes 8 ad 4 & 4 ad 3,) reductæ ad duas rationes 2 ad 1 & $\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune consequens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt (*b*) rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. denominatores. Multiplicentur jam per invicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$. hoc est, fiat, ut 1 ad $\frac{4}{3}$. ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. inter se multiplicatis. Ergo ratio hujus producti $\frac{8}{3}$. ad 1. est ea, (*c*) quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Jam verò quia per const. ut 1. est ad $\frac{4}{3}$ ita 2. est ad $\frac{8}{3}$. erit etiam inversim $\frac{8}{3}$. ad 2. ut $\frac{4}{3}$ ad 1. Sed rursum per const. $\frac{4}{3}$. sunt ad 1. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo $\frac{8}{3}$. sunt ad 2. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo permutando $\frac{8}{3}$. sunt ad 1. ut 2 ad $\frac{3}{4}$. Sed jam ostendi rationem $\frac{8}{3}$. ad 1. esse eam quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Ergo etiam ratio 2. ad $\frac{3}{4}$. est ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Sed ostensum est supra rationem 2. ad $\frac{3}{4}$. parem esse rationi 8. ad 3. Ergo etiam ratio 8. ad 3. producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Igitur per num. XI. ratio 8 ad 3. ex rationibus 8. ad 4. & 4. ad 3. composita est. Quod erat demonstrandum.

(b) *Patet ex num. 2.*

(c) *Patet ex num. 7.*

8 Eodem modo demonstrabitur si plures dentur nume-
4 ri quàm tres, rationem 8 ad 25 componi ex rationibus
3 8 ad tria, (hoc jam est, ex rationibus 8 ad 4. & 4. ad
25 3) & ex ratione 3 ad 25: & rationem 8 ad 73 compo-
73 ni ex rationibus 8 ad 25 (hoc jam est ex rationibus 8 ad 4; 4 ad 3; 3 ad 25) & ratione 25 ad 73, & sic in infinitum.

XIII.

Si dentur quotcunque rationes, A ad B, C ad D, E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus composita.

Fig. 33. SI fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H; & ut C ad D, ita H ad I; & ut E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit composita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut num. præced. demonstravimus, hoc est per constr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

XIV.

Ratio non est æqualis rationibus ex quibus componitur.

Fig. 33. INter duas quantitates G, K, aliæ quantitates interponantur, sive illæ sint continue proportionales sive non; ratio primæ G ad ultimam K non est æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licèt ex iis sit composita. Nam ex iis componi idem est, quod produci ex earum multiplicatione mutuâ, ut ostensum est num XI. Cùm igitur ratio G ad K sit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter se multiplicatis, ut ex demonstratione num. 12. patet, non possunt rationes G ad H, H ad I, I ad K simul sumptæ æquales esse rationi G ad K, nisi cùm per accidens rationum additio & multiplicatio eandem effecerint rationem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ sibi mutuò addendæ, ut traditur num. 5 & 6. ex quâ additione proveniet ratio illis omnibus æqualis; quæ fere semper, ut dixi, erit diversa ab illâ, quæ ex earundem rationum compositione, hoc est, multiplicatione exsurget.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SEXTUS.

PRoportionum doctrina libro quinto universim exposita, in sexto figuris planis applicatur. Et sunt quæ hoc libro traduntur adeo scitu necessaria, ut sine illis arcana Geometriæ penetrare, fructusque suaves Matheseos percipere nemo possit. Ad propositiones prope singulas oporteret encomium texere: tanta omnium utilitas est.

INcipit autem Liber hic Sextus *egregiam illam de proportione Geometricâ doctrinam nuperrimè expositam, usibus variis, planeque præstantissimis applicare: & a triangulis, figurarum simplicissimis exorsus, eorum latera & areas, prout ad se invicem proportione quadam respondent, investigat. Deinde lineas proportionales & figurarum augmenta aut decrementa proportionalia definit; & quo easdem modo in ratione datâ augeamus aut minuamus, ostendit. Regulam etiam Auream sive proportionalem, totius arithmeticæ palmariam aperit, & in rectangulo triangulo non tantùm quadratum sed pentagonum, hexagonum, & universim polygonum quodcunque ab hypotenusâ descriptum, æquari quadratis, pentagonis, hexagonis vel quibuscunque polygonis similibus a duobus lateribus descriptis, demonstrat. Postremò facillima certissimaque tum lineas tum superficies tum corpora mensurandi principia, in omnibus Mathematicarum scientiarum partibus utilissima proponit.*

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ sunt, quæ & singulos angulos singulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos existunt, vel quæ sunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Fig. 8. l. 6. Ut triangula X, Z dicentur similia, si angulus A sit æqualis angulo F, & angulus B angulo I, & angulus C angulo L, atque insuper si AB sit ad FI, ut BC ad LI; & BC ad LI, ut CA ad LF; & CA ad LF, ut AB ad FI; [*vel si,* (a) *permutando, AB sit ad BC, ut FI ad IL; & BC ad CA, ut IL ad LF; & CA ad AB, ut LF ad FI;*] Comparando semper latera æqualibus angulis opposita [*vel quæ inter æquales angulos, vel quæ circa æquales angulos existunt.*] Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium similitudo explicabitur.

(a) Per 16. 4. 5.

Fig. 39. 2. Reciprocæ figuræ sunt, cùm in utrâque antecedentes & consequentes rationum termini [*reciproce*] fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,
si AC sit ad CB,
ut FC ad CL.

Antecedentia sunt AC & FC, quorum in utrâque figurâ unum est; [*hoc est, AC in X, FC in Z:*] & consequentia sunt CB & CL, quorum similiter in quaque figurâ unum est, [*sed inverso ordine; nempe CB in Z, CL in X:*] parallelogramma proinde X, Z, reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

[*Porro, quatuor quantitates, A, B; C, D, sunt reciprocè proportionales, si fuerit prima ad tertiam ut quarta est ad secundam; vel si prima fuerit ad quartam ut tertia est ad secundam: nempe, si A: C :: D: B, vel si A: D :: C: B, erunt A, B, C, D, reciprocè proportionales.*]

Fig. 1. 3. Altitudo figuræ est perpendicularis AQ, a vertice ad basim deducta. Est Euclidi 4.

Ut trianguli ABC altitudo est perpendicularis AQ, a vertice cadens in basim BC, vel intra triangulum, vel extra in basim protractam. Basis autem & vertex assumuntur ad libitum.

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas suas circumferentias rationem.

Ut si ambo sint suæ circumferentiæ pars tertia vel quarta, &c.

[*Et segmenta circulorum similia sunt, quæ arcus similes habent. Idem intellige de sectoribus similibus.*

5. *Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm harum exponentes in se invicem multiplicati, illius exponentem producunt.* (*Rationis autem exponens invenitur dividendo antecedentem per consequentem.*)

Sic ex rationibus A ad B, & R ad S componitur ratio A × R ad B × S. Nam $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} = \frac{A \times R}{B \times S}$. *Vel si fiat, ut R ad S ita B ad C; ex rationibus A ad B, R ad S componitur ratio A ad C. Tunc enim* $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} =$ (a) $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A \times B}{B \times C}$ (a) Per 36. l. 1.

$=$ (b) $\frac{A}{C}$. (b) Per 15. l. 5.

Sic duplum tripli est sextuplum: sic etiam ratio 4. ad 3. componitur ex rationibus 4 ad numerum quemvis, (v. gr. 7.) & istius numeri (7) ad 3. Nam $\frac{4}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$.

Eodem modo liquet, rationem quamvis ex plurimis rationibus componi posse. Sic ratio A ad E componi potest ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D, & D ad E.]

PROPOSITIO PRIMA.

Triangula (ABC, DEF) & parallelogramma (AOPC, DQRF) quæ eandem habent altitudinem, sive inter easdem existunt parallelas, eam inter se proportionem habent, quam bases (AC, DF.) Fig. 2.

Ab hoc theoremate dependet totus sextus liber, imo quidquid uspiam de figuris sive planis, sive solidis per proportionem demonstratum est.. Demonstrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo statim aditu hujus libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonstrationem dabimus facillimam ex theor 5. partis secundæ lib. 5. [*vel ex altero illo proportionum æqualium indicio primo & infallibili, quod definitionibus lib. 5 interposuit Tacquetus, ante def. 7.*] hunc in modum.

Sumatur baseos DF quævis pars aliquota, ex. gr. DG una tertia, & ducatur recta GE, erit etiam triangulum DEG tertia pars trianguli DEF, ut colligitur ex 38. l. 1. Quare recta DG & triangulum DGE sunt consequentium (*c*) similes aliquotæ. Auferatur deinde DG ex basi AC quoties potest, puta sexies, [*& relinquetur AN ipsa DG minor*,] ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB. Quoniam CH, HI, &c. æquales sunt singulæ ipsi DG, etiam sex triangula CBH, HBI, &c. triangulo DEG æqualia (*d*) erunt singula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC, toties

(c) Per def. 7. l. 5.

(d) Per 38. l. 1.

toties triangulum DEG continentur in antecedente ABC. Eodem discursu ostendam quascunque consequentium (baseos DF & trianguli DEF) similes aliquotas in antecedentibus, (basi AC & triangulo ABC,) æquali numero contineri. Ergo per theor 5. partis secundæ lib. 5. [*hoc est, per alterum illud proportionum æqualium indicium*,] ut basis AC ad basim DF, ita triangulum ABC ad triangulum DEF. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 41. l. 1. Quoniam verò parallelogramma AP, DR sunt dupla (*a*) triangulorum ABC, DEF, etiam illa erunt inter se ut bases.

Corollaria.

Fig. 3. 1. Triangula (ABC, FIL) & parallelogramma, æquales bases (AC, FL) vel eandem habentia, eam inter se rationem habent quam altitudines BO, IQ.)

Fiant enim QS, OR æquales æqualibus basibus FL, AC. Erunt igitur etiam QS, OR inter se æquales. Duc SI, RB. Si in triangulis OBR, QIS accipiantur BO, IQ tanquam bases, erunt OR, QS eorum altitudines: quæ cùm sint æquales, erunt OBR, QIS inter se, ut (*b*) bases BO, IQ. Sed quia ex constr. OR par est AC, & QS par FL, triangula OBR, QIS æquantur (*c*) triangulis ABC, FIL. Ergo etiam triangula ABC, FIL sunt inter se ut BO ad QI.

(b) Per 1. l. 6.
(c) Per 38. l. 1.

Fig. 2. [2. *Triangula (ABC, DEF,) & parallelogramma (AP, DR,) quæ sunt ut bases (AC, DF,) eandem habebunt altitudinem, sive inter easdem parallelas statui possunt. Est conversa propositionis primæ.*

Si enim inter easdem parallelas non constituentur triangula ABC, DEF; BE non erit ipsi AF parallela. Per punctum igitur E ducatur SE ipsi AF parallela, quæ secet CB in S, & jungatur AS. Triangula itaque ASC, DEF, quæ sunt inter easdem parallelas, inter se (d) *erunt ut bases, AC, DF. Sed per hypoth. triangula ABC, DEF sunt etiam ut AC, DF: ergo* (e) *triangulum ASC æquatur triangulo ABC, pars toti; quod est absurdum. Non igitur per punctum E, ad rectam AF parallela, a rectâ BF diversâ duci potest, ac proinde triangula ABC, DEF, quæ sunt ut bases, inter easdem parallelas constituentur.*

(d) Per hanc prop.
(e) Per 11. & 9. l. 5.

Et cùm parallelogramma AP, DR, quæ triangulorum ABC, DEF (f) *dupla sunt, supra easdem cum triangulis bases, & inter easdem parallelas constituantur; liquet parallelogramma quæ* (g) *sunt ut bases, inter easdem parallelas existere.*

(f) Per 41. l. 1.
(g) Per 15. l. 5.

3. Trian-

3. *Triangula (ABC, FIL,) & parallelogramma, quæ inter se sunt ut altitudines (BO, IQ,) bases (AC, FL) habent æquales. Est convers. coroll. 1.* Fig. 3.

Constructis enim triangulis OBR, QIS, ut in corollario primo, demonstrabitur ut supra, tri. ABC = tri. OBR, & tri. FIL = tri. QIS. Sed per hypoth. est ABC : FIL :: BO : IQ; ergo OBR : QIS :: BO : IQ. Si itaque accipiantur BO, IQ pro triangulorum OBR, QIS basibus, erunt OR, QS eorum altitudines; & cùm ista sint ut bases, altitudines OR, QS (a) erunt æquales. Sed per constr. OR = AC, & QS = FL. Ergo AC, FL erunt æquales.] (a) Per cor. 2. hujus.

PROPOSITIO II.

SI ad unum trianguli latus (BC) ducta fuerit (FL) parallela, hæc secabit proportionaliter latera, (hoc est, AF erit ad FB, ut AL ad CL.) Fig. 4.

Et si recta (FL) secuerit latera (BA, CA) proportionaliter, erit ad reliquum latus (BC) parallela.

Pars 1. Ducantur BL, CF. Quoniam FL ponitur parallela BC, erunt triangula FBL, LCF, eandem basim FL habentia, inter (*b*) se æqualia. Ergo triangulum X, ad utrumque eandem (*c*) habet rationem, hoc est, triangulum X est ad triang. FBL, ut triangul. idem X est ad triang. LCF. Sed triangulum X est ad triang. FBL, ut (*d*) AF ad FB: & triangulum X est ad triang. LCF, ut (*e*) AL ad LC. Ergo (*f*) etiam AF est ad FB ut AL ad LC. Quod erat demonstrandum. (b) Per 37. l. 1. (c) Per 7. l. 5. (d) Per præc. (e) Per eand.

Pars 2. Ut AF est ad FB, ita triangulum X (*g*) est ad triangulum FBL; & ut AL est ad LC, ita triangulum X est ad triang. LCF. Sed jam ponitur AF ad FB, ut AL est ad LC. Ergo triang. X est (*h*) ad triang. FBL, ut idem X ad LCF. Ergo (*i*) triangula FBL, LCF, eandem habentia basim, æquantur. Ergo FL, BC (*k*) sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum. (f) Per 11. l. 5. (g) Per præc. (h) Per 11. l. 5. (i) Per 9. l. 5. (k) Per 39. l. 1.

Corollaria.

1. SI ad unum trianguli latus (BC) ductæ fuerint plures parallelæ (IO, FL,) erunt omnia laterum segmenta, proportionalia. Fig. 5.

Ducatur FQ parallela AC. Rectæ FS, SQ æquantur (*l*) LO, OC. Sed BI est ad IF, ut (*m*) QS ad SF. Ergo etiam BI est ad IF, ut CO ad OL. (l) Per 34. l. 1. (m) Per 2. l. 6.

[Cor. 2.

Fig. 6. [Cor. 2. *Si duo circuli se intus tangant, & a tactûs puncto ducatur AB majoris circuli diameter secans circulum minorem*
(a) Per cor. post. 12. l. 3. *in C, & AD quavis alia recta, secans minorem in E;* (a) *erit AC diameter minoris: Et erunt diametri subtensis proportiona-*
(b) Per 31. l. 3. *les, & sic erit etiam differentia diametrorum ad differentiam subtensarum; hoc est, AB: AD :: AC: AE :: BC: DE; vel per-*
(c) Per 29. l. 1. *mutando, AC: CB :: AE: ED, & AB: BC :: AD: DE; & BA:*
(d) Per 18. l. 5. *AC :: DA: AE; Ductis enim rectis BD, CE propter angulos ADB, AEC* (b) *rectos, & proinde æquales, BD, CE parallelæ*
(e) Per cor. 1. p. 18. l. 5. (c) *erunt. Ergo per hanc prop. AC: CB :: AE: ED, quod erat unum; & componendo,* (d) *AB: BC :: AD: DE, quod erat alterum; & convertendo,* (e) *BA: AC :: DA: AE, quod erat tertium.*]

PROPOSITIO III.

Fig. 7. *SI recta (BF) angulum trianguli bifariam secans, etiam secet basim (AC,) habebunt basis segmenta (AF, FC) eandem proportionem quam reliqua latera (AB, CB.)*

Et si baseos partes (AF, FC) eandem rationem habuerint quam reliqua latera (AB, CB;) recta (BF) basim secans, angulum oppositum (ABC) bisecabit.

Pars 1. Produc CB, donec BL sit par BA, & junge AL. Quoniam in triangulo Z, latera LB, AB æquantur; anguli
(f) Per 5. l. 1. (*f*) quoque L & O æquales erunt. Quia igitur externus ABC duobus (*g*) internis L, O æqualis est; angulus I, qui
(g) Per 32. l. 1. per hyp. ipsius ABC dimidius est, æquabitur angulo L.
(h) Per 29. l. 1. Ergo AL, FB sunt (*h*) parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF est ad FC, (*i*) ut LB (hoc est AB) ad BC. Quod erat
(i) Per 2. l. 6. demonstrandum.

Pars 2. Produc iterum CB donec LB sit par AB. Quoniam ponitur ut AF est ad FC, ita AB (hoc est LB) esse ad BC;
(k) Per 2. l. 6. erunt AL, FB (*k*) parallelæ. Ergo externus I, est par (*l*)
(l) Per 27. l. 1. interno L, & alternus Q æqualis alterno O. Sed quia LB, AB æquales sunt, anguli (*m*) L & O sunt æquales. Ergo
(m) Per 5. l. 1. etiam I & Q æquales sunt. Bisectus ergo est ABC. Quod erat demonstrandum.

[Coroll. *Si recta quæ angulum trianguli bifariam secat, bisecet etiam basem, triangulum per hanc prop. erit Isosceles, & bi-*
(n) Per n. 3. schol. post 26. l. 1. *secans recta erit* (n) *perpendicularis basi.*

PRO-

PROPOSITIO IV.

Triangula sibi mutuò æquiangula, sunt similia, hoc est, (a) *etiam latera æqualibus angulis opposita, habent proportionalia.* (a) Def. 1. l. 6.

IN triangulis X, Z, angulus A sit par angulo F, & angulus C angulo L, & angulus B angulo I; Dico AB esse ad FI, ut AC ad FL; & AC esse ad FL, ut CB ad LI; & CB esse ad LI, ut BA ad FI. [*Item AB: AC :: FI: FL; & AC: CB :: FL: LI; & CB: BA: LI: FI.*] Fig. 8.

Dem. Si angulus F ponatur supra sibi æqualem A, latera FI, FL, cadent supra latera AB, AC. Et quia (*b*) angulus externus AIL per hypoth. par est interno B, erunt (*c*) IL, BC parallelæ. Ergo (*d*) BI est ad IA, ut CL ad LA. Ergo (*e*) componendo BA est ad IF ut CA ad LF. Quòd si angulus L imponatur angulo C, eodem modo ostendam AC esse ad FL, ut BC ad IL: & si angulus I, imponatur angulo B, ostendetur pari modo, BC esse ad IL, ut AB ad FI. [*& cùm antecedentes BA, AC, CB ad consequentes IF, FL, LI eandem rationem habeant; erit* (f) *permutando, BA: AC :: IF: FL; & AC: CB :: FL: LI; & CB: BA :: LI : IF.*] Liquet ergo propositum. Fig. 8 & 9. (b) Fig. 9. sola. (c) Per 29. l. 1. (d) Per 2. l. 6. (e) Per 18. l. 5. (f) Per 16. l. 5.

Corollaria.

1. SI in triangulo ducatur uni lateri (BC) parallela (LI,) erit triangulum LFI simile toti CFB; ac proinde CF est ad LF, ut BC ad LI; [*Et permutando FC est ad CB, ut FL ad LI. Item FB ad FC, ut FI ad FL.*] Fig. 9.

Nam quia LI, BC parallelæ sunt, erunt (*g*) externi FIL, FLI, pares internis B & C: F verò utrique triangulo est communis. Ergo sunt æquiangula. Ergo latera CF, LF opposita æqualibus angulis B & FIL, sunt (*h*) proportionalia lateribus BC, LI, quæ opponuntur communi angulo F. [*Item, latera circa communem* (i) *angulum proportionalia erunt; hoc est, FB: FC :: FI: FL.*] (g) Per 27. l. 1. (h) Per hanc. (i) Per def. 1. l. 6.

2. Si in triangulo parallelas AC, LO secet recta BF, ab angulo opposito B ducta, secabit eas proportionaliter. Fig. 10.

Nam per coroll. 1. AF est ad LI, ut FB ad IB; & FC quoque est ad IO, ut FB ad IB. Ergo AF est ad LI ut (*k*) FC ad IO. Igitur permutando AF est ad FC (*l*) ut LI ad IO. (k) Per 11. l. 5. (l) Per 16. l. 5.

Fig. 11. 3. *Si inter parallelas AB, CD, duæ rectæ EF, GH se invicem decussent in I; earum segmenta EI, IF; GI, IH erunt proportionalia. Triangula enim EIG, FIH; propter æquales angulos* (a) *oppositos ad I; atque* (b) *alternos ad E, F; & ad G, H, erunt æquiangula, & proinde similia. Ergo EI: IF :: GI: IH.*

(a) Per 15. l. 1.
(b) Per 27. l. 1.

Fig. 12. 4. *E Corollario primo Turris aut puncti cujusvis elevati altitudmem per solam baculi umbram definire discimus. Baculum FL solo perpendiculariter defige eo loco ubi radius solis XBA umbram Turris BZ definiens, etiam transeat per L. Erit in triangulo AZB linea FL altitudini turris ZB parallela. Unde ut AF distantia baculi ab umbra mucrone, ad FL baculi longitudinem; ita AZ distantia turris ab umbra mucrone, ad ZB altitudinem Turris. Et quia tria prima mensurando facile habeantur, habebitur & quartum, Altitudo quæsita. Q. E. I.*

Fig. 13. 5. *Hinc Tabularum quæ Sinus, Tangentes, atque Secantes continent, originem repetimus. Sit enim e. g. Circuli semidiameter AC partium* 100000: *& Angulus BAD graduum* 30. *Quoniam Chorda sive subtensa graduum* 60 (c) *æqualis est AC semidiametro; BD sinus graduum* 30 *semissi semidiametri sive* $\frac{1}{2}$ *AC* (d) *æqualis erit: & proinde partes* 50000 *continebit. In rectangulo verò triangulo ADB, quadratum AB* (e) *æquale est quadratis AD & BD. Quadretur itaque semidiameter AB* (100000 *in* 100000 *ducendo*) *& ab isto quadrato quadratum BD subtrahe; Reliquum erit Quadratum ipsius AD, aut cosinûs eidem* (f) *æqualis BF: e quo extractâ radice dabitur linea BF, seu AD, quæ a radio AC* (= 100000) *subducta, relinquit sinum versum DC. Deinde per analogiam sequentem* (g) *AD: BD :: AC: CE, habebitur Tangens CE. Et quoniam est* (h) *AD: AB :: AC: AE; habebitur etiam secans AE. Eâdem methodo ex BF sinu recto anguli BAG graduum* 60, *habebitur ejusdem anguli sinus versus, tangens & secans. Porro, quia* (Fig. 9. l. 4.) *quadratum circulo inscriptum est* (i) *duplum quadrati radii; si radius sit* 100000, *erit latus quadrati circulo inscripti* (*hoc est, chorda graduum* 90) *æqualis radici quadraticæ numeri* 100000 × 100000 × 2. *Unde innotescit dimidium latus, seu* (k) *sinus rectus gr.* 45, *ac proinde sinus versus, tangens & secans. Et universaliter, datâ chorda arcûs cujusvis ad radium proportione, invenientur arcûs dimidii sinus rectus, sinus versus, tangens, secans; item cosinus, cotangens & cosecans. Qui plura volet, adeat Clariss. Wallisii Tractatum* de Sectionibus Angularibus, *Operum Vol.* 2. *pag.* 533—601.

(c) Per cor. 1. p. 15. l. 4.
(d) Per cor. 1. p. 3. l. 3.
(e) Per 47. l. 1.
(f) Per 34. l. 1.
(g) Per cor. 1. p. 4. l. 6.
(h) Per id.
(i) Per sch. post prop. 6. & 7. lib. 4.
(k) Per cor. 1. prop. 3. lib. 3.

Fig. 14. l. 6. 6. *Hinc etiam, si ab angulo quovis A trianguli ABC circulo inscripti, demittatur ad basem perpendicularis AE, & ducatur circuli diameter AD; erit ista perpendicularis AE ad ejus-*

dem

dem anguli latus unum AC, ut latus alterum AB est ad circuli diametrum AD. Nam ductâ BD, triangula AEC, ABD sunt æquiangula; anguli C & D æquales, (a) quia eidem arcui BOA insistunt; anguli (b) ABD, (c) AEC recti, & proinde æquales; Ergo etiam BAD, EAC æquales (d) erunt. Ergo triangula per hanc prop. similia sunt, & AE: AC :: AB: AD. Q. E. D.

(a) Per 21 l. 3.
(b) Per 31. l. 3.
(c) Per hyp.
(d) Per cor. 5. pr. 32. l. 1.

7. Circuli diametrum AB (si opus productam) perpendiculariter secet infinita recta EF in C, & in EF sumpto quovis puncto E extra circulum, jungatur AE circulum secans in D: erit subtensa AD ad circuli diametrum AB, ut AC ad AE. Nam ductâ rectâ DB, triangula ADB, ACE sunt æquiangula: angulus enim A est utrique communis, & anguli ad (e) C, D, (f) sunt recti; unde tertius (g) tertio æqualis est. Ergo per hanc prop. triangula sunt similia, & AD: AB :: AC: AE.

Fig. 15.
(e) Per hyp.
(f) Per 31. l. 3.
(g) Per cor. 9. p. 32. l. 1.

Si puncta B, C coincidunt, erit circuli diameter media proportionalis inter AD & AE. Erit enim AD: AB :: AC = AB: AE.]

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera sibi mutuò proportionalia, etiam sibi mutuò æquiangula erunt. Fig. 16.

Hoc est, si AB sit ad RF, ut AC ad RQ; & ut AC ad RQ, sic CB ad QF; & ut CB ad QF, sic AB ad RF; dico angulos antecedentibus oppositos æquari angulis qui opponuntur consequentibus; nimirum C ipsi I; B ipsi F; A ipsi O.

Ang.	Antec.	Conseq.	Ang.
C	AB	RF	I
B	AC	RQ	F
A	CB	QF	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: & latera coeant in N. Etiam igitur (*h*) B & N æquales erunt. Quia ergo triangula P, T sunt æquiangula, erit (*i*) AB ad RN, ut AC ad RQ. Sed ex hyp. etiam est AB ad RF, sicut AC ad RQ. Ergo AB est ad RF, ut eadem AB ad RN. Ergo RN, RF (*k*) æquantur. Pari modo ostendam æquari QN & QF. Triangula igitur T, S, sibi mutuò sunt æquilatera. Igitur anguli I, F, O æquantur (*l*) angulis Z, N, X, hoc est per constr. angulis C, B, A: Quod erat demonstrandum.

(h) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(i) Per præc.
(k) Per 9. l. 5.
(l) Per 8. l. 1.

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. *SI duo triangula (P, S) habeant unum angulum (A) æqualem uni (O,) & latera (AB, AC; RF, RQ) quæ æquales angulos continent, proportionalia, triangula erunt similia.*

Angulis A, C fiant æquales X, Z, & latera coeant in N. Igitur anguli quoque (a) B & N æquales erunt. Ostendam, ut in præcedenti, æquales esse RF, RN. Est verò RQ utrisque triangulis S, T communis. Anguli quoque O & X æquales sunt, quia æquantur ambo eidem A; X per const. O per hyp. Ergo etiam I & F (b) æquantur ipsis Z & N. Triangulum igitur S æquiangulum est triangulo T; hoc est, per const. triangulo P. Ergo S, P (c) similia sunt. Quod erat demonstrandum.

(a) Per cor. 9 p. 32. l. 1.
(b) Per 4. l. 1.
(c) Per 4. l. 6.

PROPOSITIO VII.

Fig. 8. SI duo triangula (ABC, FIL) unum angulum (B) uni (I) æqualem habeant; & circa alios angulos (A, F) latera habeant proportionalia, (ut sit BA: AC :: IF: FL;) & reliquos angulos (C, L) vel simul rectos, vel simul acutos, vel simul obtusos: triangula erunt similia.

Si anguli C, L fuerint recti; ob angulos B, I æquales, triangula erunt (d) *æquiangula, & proinde* (e) *similia.*

Si anguli C, L fuerint obliqui, sed homogenei, (hoc est, vel simul acuti, vel simul obtusi,) & anguli A, F æquales fuerint; ob angulos B, I æquales, triangula adhuc erunt (f) *æquiangula &* (g) *similia. Ponantur autem A, F inæquales; & sit A major, & super rectâ BA ad punctum A, angulo F æqualis fiat BAD, & propter angulos B & I æquales,* (h) *erunt anguli reliqui ADB & L æquales, & triangula ABD, FIL erunt* (i) *similia, & IF: FL :: BA: AD. Sed IF: FL ::* (k) *BA: AC. Ergo AC =* (l) *AD, & in Isoscele ACD, anguli ad basem C & ADC* (m) *sunt acuti. Ergo ADB est* (n) *obtusus, & proinde L est obtusus. Sed L est angulo*

(d) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(e) Per 4. l. 6.
(f) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(g) Per 4. l. 6.
(h) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(i) Per 4. l. 6.
(k) Per hyp.
(l) Per 9. & 11. l. 5.
(m) Per cor. 11. p. 32. l. 1.
(n) Per 13. l. 1.

gulo C homogeneus (a), & proinde acutus: quod fieri non potest; nam eundem angulum L obtusum esse, ostensum est prius. Non igitur angulus B A C, angulo F inæqualis est. Ergo est ei æqualis; & triangula ABC, FIL sunt æquiangula, & proinde similia. Q. E. D. (a) Per hyp.

Hanc propositionem (a Tacqueto male omissam) propter usus multiplices omnino restituendam censui.

Corol. 1. Iisdem positis, erit ang. A = ang. F, & ang. C. = ang. L.

Corol. 2. Si duo triangula S, T, unum angulum F uni N æqualem habeant; & circa alios angulos O, X, latera respectivè æqualia; & reliquos angulos I, Z vel simul rectos, vel simul acutos, vel simul obtusos; triangula erunt æqualia. Sunt enim similia per hanc, & schol. p. 7. l. 5. Ergo angulus X angulo O (b) æqualis est; & proinde ipsa etiam triangula (c) æquantur.] Fig. 16. (b) Per def. 1. l. 6. (c) Per 4. l. 1.

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo (ABF,) perpendicularis (BC) ab angulo recto in basim ducta, secat triangulum in partes toti, & inter se similes. Fig. 17.

In triangulis A B F & L, angulus F communis est, anguli verò A B F, & X per hypothesim sunt recti, adeoque æquales. Ergo reliqui A & O etiam (d) æquales erunt. Ergo (e) triangula A B F & L similia sunt. Eodem modo similia ostendam esse triangula ABF & R; angulumque I parem angulo F. Ex quo jam patet etiam R & L similia esse, cùm æquales sint anguli I & F; A & O; V & X. Quod erat demonstrandum. (d) Per cor. 9 p. 32. l. 1. (e) Per 4. l. 6.

Corollaria.

PRimò, BC est media proportionalis inter AC, CF. Fig. 17.

Cùm enim sint in triangulis R & L,

æqu. ang. I. F.	æqu. ang. A. O.
lat. opp. AC. CB	lat. opp. CB. CF;

Patet (f) AC esse ad CB, ut CB est ad CF. (f) Per 4. l. 6.

2. BF est media proportionalis inter AF & CF. Item AB est media inter FA & CA.

Nam in triangulis ABF & L, sunt

æqu. ang. ABF. X.	æqu. ang. A. O.
lat. opp. AF. BF.	lat. opp. BF. CF;

 Ergo

(a) Per 4. l. 6. Ergo AF est (a) ad BF, ut BF ad CF.
Similiter, quia in triangulis ABF & R, sunt

æqu. ang. ABF. V.	æqu. ang. F. I.
lat. opp. AF. AB.	lat. opp. AB. AC.

Erit rursum AF ad AB, ut AB ad AC.

Fig. 17. (b) Per 4. l. 6. [3. *In tribus his triangulis ABF, R & L, recta æqualibus angulis opposita proportionales (b) erunt. Unde, si prima rationis termini e triangulo ABF, illi secunda rationis e triangulo R, iique tertia rationis ex L sumantur; erit AB: BF:: AC: GB:: BC: CF. Et rursum, BA: AF:: CA: AB:: CB: BF. Denique AF: FB:: AB: BC:: BF: FC. Nam hoc modo ratiocinando, termini homologi æqualibus angulis ubique opponentur.*]

PROPOSITIO IX.

Fig. 18. D*Atam rectam (AB) dividere secundum datam proportionem (FI ad IL.)*

Ducatur infinita AZ; ex quâ sume AQ, QR æquales FI, IL. Ex R duc RB. Huic ex Q duc QC parallelam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

[Cor. 1. *Hinc datam rectam AB ita secabis, ut tota sit ad partem abscissam BC in datâ ratione majoris inæqualitatis, nempe ut FL ad LI, si in rectâ infinitâ AZ, capiatur AR = FL, & in rectâ RA capiatur RQ = LI, & jungatur RB, eique parallela ducatur QC.*

Cor. 2. *Hinc etiam, datam rectam AC sic producere licebit ad B, ut tota producta AB sit ad partem adjectam BC, in ratione datâ majoris inæqualitatis, nempe ut FL ad LI, sumendo in rectâ infinitâ AZ, AR = FL, & in rectâ RA, RQ = LI, ac jungendo QC, eique parallelam ducendo RB, quæ in rectâ AC productâ, punctum B determinabit.*

Cor. 3. *Hinc denique, datam rectam AC sic producere licebit, ut ipsa AC sit ad totam productam in ratione datâ minoris inæqualitatis, nempe ut FI ad FL; sumendo in rectâ infinitâ AZ, rectas AQ, AR, rectis FI, FL respectivè æquales, & jungendo QC, eique ducendo parallelam RB, quæ in rectâ AC producta punctum B determinabit.*]

PRO-

PROPOSITIO X.

D*Atam rectam (AB) similiter secare ut altera data (AI) fuerit secta (in F, C.)* Fig. 19.

Extremitates sectæ & insectæ jungat recta IB. Huic ex punctis F, C duc parallelas, rectæ secandæ AB occurrentes in L & Q. Dico factum.

Patet ex coroll. 1. p. 2. l. 6.

[*Aut etiam, si linea secta IA sit major secandâ BQ, sint tres circuli se mutuò tangentes diametris IF, IC, IA descripti; & aptetur subtensa BQ a puncto I ad circumferentiam circuli maximi: circuli duo minores in punctis L, P lineam BQ secabunt in* (a) *ratione sectionum diametri IA. Si linea IA secta sit in partes quatuor, circuli quatuor adhibendi sunt; si in quinque, circuli etiam quinque; & ita in infinitum.*] Fig. 20. (a) *Per cor. 2. p. 2. l. 6.*

Scholium.

EX hac propositione discemus rectam datam in quotvis æquales partes secare. Cum recta secandâ AB faciat quemvis angulum recta quæpiam infinita; ex quâ circino cape tot æquales partes AC, CF, FI, in quot secare placuerit AB. Duc rectam IB, eique parallelas FL, CQ. Dico factum. Fig. 19.

Aliter idem & faciliùs efficiemus cum Maurolyco hunc in modum. Sit AB trisecanda. Duc ad AB parallelam IX infinitam, supra vel infra. Ex IX, si est infra AB, cape circino tres æquales partes IQ, QR, RS, quæ simul majores sint quàm AB, minores verò si IX est supra. Per I & A, item per S & B duc rectas; quæ (*b*) concurrent in C. Ex C ad Q & R ductæ rectæ datam AB trisecabunt. Demonstratio patet ex coroll. 2. prop. 4. Fig. 21. (b) *Per sch. p. 33. l. 1.*

Rursum cum Maurolyco aliter id ipsum ita obtinebimus. Sit quatrisecanda AB. Duc infinitam AX, eique parallelam BZ etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales AL, LO, OQ, & BV, VS, SR, in singulis nempe unâ pauciores; quàm desiderentur in AB: tum rectæ ducantur LR, OS, QV. Hæ quatrisecabunt datam AB. Fig. 22.

Nam quia per const. LO, RS parallelas & æquales, jungunt LR & OS, etiam hæ erunt (*c*) parallelæ. Pari modo OS, QV sunt parallelæ. Ergo cùm AQ sit secta in tres æquales partes, etiam erit AI secta (*d*) in tres æquales. Similiter (c) *Per 33. l. 1.* (d) *Per cor. 1. p. 2. l. 6.*

militer erit BC secta in tres æquales. Tota igitur AB secta est in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes sunt faciliores Euclideâ, quia pauciores ducendæ sunt parallelæ.

Fig. 23. Coroll. *Hinc Trapezium ABCD, cujus latera AD & BC sunt parallela, in partes quotcunque æquales, partiri discimus: Producatur enim BC ad E: ut fiat CE æqualis AD. Ob angulos alternos DAF, FEC, & ADF, ECF* (a) *æquales, & bases AD, CE per constructionem æquales, triangula ADF & FCE* (b) *æqualia sunt; & proinde triangulum ABE Trapezio ABCD æquale. Divisâ* (c) *itaque basi BE in æquales quotcunque partes, puta tres BG, GR, RE, ductisque AG, AR, erit triangulum ABG, vel AGR, vel ARE, trapezii pars tertia.* Q. E. I.

(a) Per 27. l. 1.
(b) Per 26. l. 1.
(c) Per hoc sch.

PROPOSITIO XI.

Fig. 24. *Datis duabus rectis (AB, BC,) tertiam proportionalem invenire.*

Duc rectam AC. Ex BA productâ accipe AF parem BC. Per F ad AC duc parallelam FX infinitam, cui in L occurrat producta BC. Dico AB esse ad BC ut BC ad CL.

Nam AB est ad AF, (*d*) ut BC ad CL. Sed AF est (*e*) par BC. Ergo AB est ad BC; ut BC ad CL; adeoque CL est tertia proportionalis quæ petebatur.

(d) Per 2. l. 6.
(e) Per constr.

Aliter.

Fig. 25. Statuantur AB, BC ad angulum rectum. Junge AC. Ex C duc infinitam CX perpendicularem ad AC, cui in L occurrat AB producta. Dico AB esse ad BC, ut BC ad BL. Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

Poterit verò proportio data non solùm per tres terminos, sed etiam per infinitos continuari, & tota infinitorum proportionalium terminorum summa exhiberi. Pulcherrimè hanc rem, totumque adeo Geometricæ progressionis negotium Gregorius à S. Vincentio prosecutus est toto libro 2. sui operis. Nos in gratiam studiosorum, succinctam rei propositæ constructionem ac demonstrationem hîc exhibebimus.

Lemma

Lemma 1.

SI ratio minoris inæqualitatis LO ad LR semper continuetur, venietur ad quantitatem quavis datâ majorem. *Fig. 26. secunda.*

Sit LO ad LR, ut LR ad LQ, &c. Igitur (*a*) invertendo, ut QL ad RL, sic RL ad OL. Ergo divid. (*b*) QR ad RL, ut RO ad OL: & permut. (*c*) QR ad RO, ut RL ad OL. Sed RL est major quàm OL. Ergo etiam QR major quàm RO. Pari modo ostendam IQ esse majorem quàm QR, & sic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem LO ad LR, ad primam LO semper accedunt partes OR, RQ, QI, &c. perpetuò crescentes, patet veniri ad quantitatem quavis datâ majorem. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per sch. p. 16. l. 5.*
(b) *Per 17. l. 5.*
(c) *Per 16. l. 5.*

Lemma 2.

SI ratio quæcunque majoris inæqualitatis AB ad CB semper continuetur, ad quantitatem venietur quavis datâ minorem. *Fig. 26. utraque.*

Data sit LO quantumvis parva. Fiat (*d*) ut BC ad BA, sic LO ad LR. Poterit (*e*) ratio LO ad LR toties continuari, ut aliquis terminus habeatur, putà LI major quàm AB. Quoties verò continuata jam est ratio LO ad LR, per totidem terminos CB, EB, FB continuetur ratio AB ad CB. Erit FB minor quàm OL.

Nam ex const. patet IL, QL, RL, OL, esse proportionales ipsis AB, CB, EB, FB. Igitur ex æquo ut (*f*) IL ad OL, sic AB ad FB, & permutando (*g*) ut IL ad AB, sic OL ad FB. Sed IL est major (*h*) quàm AB. Ergo etiam data OL est major quàm FB. Quod erat demonstrandum.

(d) *Per cor. 3. p. 9. l. 6.*
(e) *Per lem. 1.*
(f) *Per 22. l. 5.*
(g) *Per 16. l. 5.*
(h) *Per constr.*

Problema.

DAta sit ratio majoris inæqualitatis AB ad BC. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium summam exhibere. *Fig. 27.*

Erigantur perpendiculares AL, BO, æquales datis AB, BC, & per LO ducatur recta concurrens (*i*) cum ABC productâ, in Z. Dico 1. Si ex C. erigas perpendicularem CQ; erit CQ tertia proportionalis. QC transfer in CE, & ex E erige

(i) *Per sch. p. 33. l. 1.*

ER; erit hæc quarta. ER transfer in EF, & erige FS; erit hæc quinta: atque ita ratio AB ad BC, hoc est AL ad BO, per terminos AL, BO, CQ, ER, FS, &c. sive AB, BC CE, EF, FI, &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (ut FS) poterit auferri ex residuo FZ; cùm enim LA (hoc est AB) sit minor quàm AZ, etiam FS erit (*a*) minor quàm FZ.

(a) *Patet ex cor. 1. p. 4. l. 6. & p. 14. l. 5.*

Dico 2. AZ est æqualis toti summæ infinitarum proportionalium.

1. Pars. AZ est ad BZ, ut (*b*) AL ad BO; hoc est, ut AB ad BC: Igitur permutando & invertendo, (*c*) AB est ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ est ad BZ, (*d*) ut BZ ad CZ. Sed ut AZ est ad BZ, (*e*) sic LA est ad OB; & ut BZ ad CZ, ita OB ad QC. Ergo etiam LA est ad OB, ut OB ad QC. Eodem modo ostendam OB esse ad QC, ut QC ad RE, & sic deinceps in infinitum.

(b) *Per idem coroll.*
(c) *Per 16. l. 5. cum schol.*
(d) *Per cor. 2. p. 18. l. 5.*
(e) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.*

2. Pars. Tota summa infinitorum terminorum, neque minor est quàm AZ, neque major; Ergo æqualis. Non est major, quia, cùm jam ostenderim supra, QC esse minorem quàm CZ, & RE quàm EZ, & SF quàm FZ, & sic deinceps sine termino; poterunt omnes termini QC, RE, SF &c. sine fine constitui juxta invicem in rectâ AZ, sic ut numquam punctum Z [*quolibet finito terminorum numero*] attingatur; [*neque terminorum serie in infinitum continuatâ, excedi posse rectam AZ, exinde patet, quòd tota illa series infinita, in AZ poterit transferri; ac proinde series illa non erit major quàm AZ.*] Non erit etiam minor quàm AZ; quia jàm ostendi supra AZ, BZ, CZ esse continuè proportionales, & eodem modo ostenditur de reliquis EZ, FZ, IZ, &c. Cùm igitur, transferendo proportionales QC, ER, FS, &c. in CE, EF, FI, &c. residua EZ, FZ, IZ, &c. semper sint continuè proportionalia, ut jam ostendimus; venietur tandem ad residuum (*f*) dato minus; ac proinde summa proportionalium superabit quantitatem omnem quæ minor sit quàm AZ: unde ipsa non potest esse minor quàm AZ. Quoniam igitur nec major est, nec minor quàm AZ, eidem æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

(f) *Per lem. 2.*

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium summa, sunt continuè proportionales.

Fig. 27. In superiori figurâ ducatur OX parallela AZ. Igitur LX erit differentia primi termini AL seu AB, & secundi BO, seu

seu BC. Quoniam XO est parallela ad AZ; erit LX ad XO, ut (*a*) LA ad AZ. Sed XO est AB, & LA etiam est AB. Ergo LX differentia, est ad AB primum terminum, ut AB primus terminus ad AZ totam summam. Quod erat demonstrandum. (a) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.*

Idem universaliter & brevissimè demonstrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continuè proportionales quæcunque, (etiam numeri,) AZ, BZ, CZ, &c. quæ transferantur omnes in primam AZ. Erunt igitur AB, BC, CE, EF, &c. proportionalium differentiæ, quæ unà cum postremâ quantitate IZ, æquantur primæ AZ. Quia verò, si proportionales in infinitum continuentur, postrema quantitas per lem. 2. evanescit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ AZ. Deinde, quia est AZ ad BZ, ut BZ ad CZ, & sic deinceps; erit dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & (*b*) convertendo, ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, ita BC secunda differentia ad BZ quantitatem secundam, & sic deinceps; Ergo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, (*c*) ita omnes differentiæ (hoc est, ut jam ostendi, prima quantitas AZ,) ad omnes quantitates, hoc est, ad totam summam infinitarum quantitatum. Quod erat demonstrandum. *Fig. 28.* (b) *Per cor. 1. p. 18. l. 5.* (c) *Per 12. l. 5.*

PROPOSITIO XII.

Fig. 29.

D*Atis tribus rectis (AB, BC, AF,) quartam proportionalem invenire.*

Disponantur datæ rectæ, ut figura monstrat, & duc rectam BF, cui parallela fiat CZ infinita: Ipsi CZ occurrat AF producta in L.

Dico AB esse ad BC, ut AF ad FL, ut patet ex p. 2. hujus. Ergo FL est quarta proportionalis quæsita.

Scholium.

Fig. 30.

PUlchrè Bettinus noster in suo Ærario Mathematicæ Philosophiæ, ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum.

Si tres dentur rectæ; secunda CB & tertia BD ponantur in directum, quas prima BA tangat in B sub quovis angulo.

Per

(a) Per 2. l. 4. Per puncta C, A, D describe (a) circulum, cui AB prima occurrat in Z. BZ est quarta proportionalis.

(b) Per 35. l. 3. Cùm enim rectangula ABZ, CBD (b) æqualia sint, erit AB ad BC, ut BD ad BZ per 14. hujus, quæ ab hac, ut dixi, non dependet.

Fig. 31. Si dentur duæ rectæ AB. BC; secundæ BC apponatur in directum BD æqualis BC. Dein ipsam CD in B tangat prima AB sub quovis angulo. Tum reliqua ut supra. Erit BZ tertia proportionalis quæsita.

Demonstratio similis est: cùm enim rectangula ABZ, CBD sint æqualia, erit AB ad BC, ut BD, hoc est, ut BC ad BZ.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 32. *Datis duabus rectis (AC, CB,) mediam proportionalem invenire.*

Tota composita AB bisecetur in O, & centro O describatur circulus per A & B: ex C erige perpendicularem CF, occurrentem peripheriæ in F.

Dico AC esse ad CF, ut CF ad CB.

(c) Per 31. l. 3. (d) Per cor. 1. p. 8. l. 6. Ducantur enim AF, BF. Triangulum (c) AFB rectangulum est, & a recto angulo ducta est perpendicularis FC in basim. Ergo AC est ad CF, ut (d) CF ad CB.

Corollaria.

1. Hinc patet, si ex quovis peripheriæ puncto (F) ducta sit ad diametrum perpendicularis (FC,) eam esse mediam proportionalem inter diametri segmenta (AC, CB.)

[Cor. 2. *Hinc quoque media proportionalis CE dimidiam extremarum summam AO superare nequit: & si extrema fuerint inaequales, media CF erit illarum dimidio minor. Quod etiam ex pr. 25. supra deductum erat.*

Scholium ad Cor. 2. Problema. *Datâ, e tribus proportionalibus, extremarum summâ AB, & mediâ DE, invenire ipsas extremas. Oportet autem mediam proportionalem DE assignari, dimidiâ AB non majorem, per cor. 2.*

Super diametro AB circulus describatur, quam ad B (utrumlibet diametri extremum) tangat GB data DE æqualis, & per G ducatur GF ipsi AB parallela, quæ, quia DE sive GB radio circuli non est major, circulo occurret in F. A puncto F ad diametrum AB demissa perpendicu-

dicularis FC, ipsam AB dividit in extremas quæsitas AC, CB. Nam FC (per cor. 1. hujus) est media proportionalis inter extremas AC, CB: est autem (per prop. 34. l. 1.) FC = GB, hoc est, per constr. = DE. Factum est igitur quod petebatur. Arithmetice autem invenientur AC, CB ex iisdem datis, si, ductâ OF, ex ejus quadrato = ¼ ABq = Quadr. ½ AB, subducatur FCq = DEq, & relinquetur OCq, cujus radix quadratica OC addita dimidia AB, & ab eâdem dimidiâ subductâ, dabit AC, CB quantitates quæsitas.

Cor. 3. *Hinc etiam tres, vel septem, quindecim &c. media proportionales, facili negotio inveniuntur, talis scil. quivis mediarum numerus, qui ex continuâ proportionalium 1. 2. 4. 8. 16. &c. additione oritur; nempe vel unica = 1, vel tres = 1 + 2, vel septem = 1 + 2 + 4, & sic deinceps.*

Sint quantitates datæ A & E; inter quas media sit M, per hanc pr. inventa: deinde inter A & M fac mediam L, atque inter M & E mediam N: erunt L, M, N, tres mediæ inter A & E. Et si porro mediæ proportionales constituantur inter A & L, L & M, M & N, N & E habebis septem medias inter A & E. Mediæ verò inter harum singulas, unà cum ipsis septem intermediis prioribus, constituent medias quindecim inter A & E. Atque ita porro.]

Scholium.

HIC locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid. In hujus problematis solutionem, Platonis hortatu, omnes Græciæ Geometræ summo studio incubuerunt: Ab Eutocio in comment. in (a) Archim. varii recensentur subtilissimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menæchmi, Eratosthenis, Philonis Byzantii, Heronis, Apollonii Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi: quibus alios deinde addiderunt Vernerus, P Gregorius a S. Vincentio, Renatus Cartesius. Ex omnibus visum est tres adferre reliquis faciliores.

(a) *Comment in theor. 1. L. 2. de Spherâ & Cylindro.*

Modus Platonis.

OPorteat inter datas AB, BC, duas medias invenire. *Fig. 33.*
Ponantur AB, BC ad rectum angulum, & producantur infinitè versùs Z & X. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noster; Plato enim unicâ normâ utitur, sed (b) cujus lateri DE inserta sit regula mobilis per DE, [*ipsi perpendicularis*;]) & unius normæ angulus D applicetur

(b) *Vide Fig. 34.*

plicetur rectæ BX, eâ lege ut & latus unum transeat per A, & ad punctum E, in quo latus alterum secabit rectam BZ, applicatâ normâ secundâ, transeat per C. Dico BD, BE duas esse medias inter datas AB, BC; hoc est, ut AB est ad BD, sic esse BD ad BE, & BE ad BC.

Demonstratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam ADE rectangulum triangulum est, & ab angulo recto in basim perpendicularis cadit DB. Ergo per dictum coroll. ut AB ad BD, sic BD ad BE: Et ob eandem causam, ut BD ad BE, sic BE ad BC. Inter datas igitur AB, BC repertæ sunt duæ mediæ BD, BE. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus est.

Modus Philonis Byzantii.

Fig. 35.

DUæ datæ AB, BC jungantur ad rectum angulum: tum perficiatur rectangulum ABCD, & producantur DA, DC infinitè, ducanturque [*rectanguli ABCD*] diametri BD, AC se secantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quòd ABCD rectangulum sit, transibit (*a*) per A, D & C. [*Cùm enim circulus rectangulo* (b) *circumscribi poterit; puncta A, B, C, D erunt in circuli circumscripti circumferentiâ: & propter angulos rectos ABC, BCD, recta AC, BD erunt* (c) *ejusdem circuli diametri, quarum intersectio E, circuli centrum erit. Circulus igitur, eodem centro E & radio BE descriptus, transibit per A, D & C.*] Tum regula sic applicetur ad punctum B, interceptæ BG, OF sint æquales. Dico AF, GC esse duas medias inter datas AB, BC hoc est, ut AB est ad AF, sic AF esse ad GC, & GC ad CB.

(a) *Patet ex* 31. *l.* 3.
(b) *Per cor. p.* 5. *l.* 4.
(c) *Per* 31. *l.* 3.

Demonst. Quia GB, OF (*d*) æquantur, etiam OG, BF æquales erunt. Ergo æqualia sunt rectangula OGB, BFO, hoc est rectangula (*e*) DGC, DFA. Ergo est ut GD ad DF, (*f*) sic reciprocè AF ad GC. Sed [*in triangulo FGD, propter BA parallelam basi GD,*] GD est ad DF, (*g*) ut BA ad AF. Ergo (*h*) ut BA est ad AF, sic AF est ad GC. Rursum quia jam ostendi AF esse ad GC, ut BA est ad AF; est verò BA ad AF, ut GD ad DF, hoc est [*propter CB parallelam basi DF, in triangulo GDF,*] ut GC ad CB; erit (*i*) quoque AF ad GC, ut GC est ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB, sunt continuè proportionales; ac proinde inter datas AB, BC inventæ sunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

(d) *Per constr.*
(e) *Per cor.* 1. *p.* 36. *l.* 3.
(f) *Per.* 14. *quæ ab hac non pendet.*
(g) *Per cor.* 1. *p.* 4. *l.* 6.
(h) *Per* 11. *l.* 5.
(i) *Per eand.*

Hi duo modi quamvis sint ingeniosi & faciles; tamen, quia debita normæ & regulæ applicatio non nisi tentando fit, Geometrici non sunt.

Modus

Modus Cartesii.

PAretur instrumentum hujusmodi. Duæ regulæ aperiri possint & claudi circa Y. His insertæ sint plures normæ inter se connexæ in B, C, D, E, F, G, eâ lege ut dum regulæ YX, YZ aperiuntur, norma BC impellat normam CD in regulâ YZ, & norma CD impellat normam DE in regulâ YX, & DE impellat EF, & EF impellat FG, & sic deinceps. Dum verò regulæ YX & YZ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in unum idemque punctum A. Hoc instrumento inter duas datas non solum duæ, sed etiam quatuor & sex, imo quotvis mediæ reperiuntur. Quod neque per sectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus supradictis inventos obtineri potest. Fig. 36.

Pro duabus mediis opus est normis tribus, pro mediis 4. normis 5. & sic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam YX, & sit YB, major in regulam alteram YZ, & sit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus transeat per E. Dico YC, YD esse duas medias inter datas YB, YE; hoc est, YB esse ad YC ut YC est ad YD, & YD ad YE.

Demonstratio manifesta est ex cor. 2. p. 8. l. 6. Nam ex naturâ instrumenti, in trigono YCD angulus ad C rectus est, ab eoque cadit CB perpendicularis in basim YD. Ergo per dictum coroll. ut YB est ad YC, sic YC ad YD. Rursum, quia in trigono YDE angulus ad D rectus est, ab eoque cadit perpendicularis DC in basim YE, erit ut YC ad YD, sic YD ad YE. Sunt igitur YB, YC, YD, YE quatuor continuè proportionales. Inter datas igitur YB, YE inventæ sunt duæ mediæ YC, YD. Quod erat faciendum.

Si inter datas YB, YG, petantur 4. mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus FG transeat per G. Erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB, YG. Demonstratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum sit Platonico illo operosius, planè eximius est, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imo quotcunque medias se extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in datâ proportione (a) augentur vel minuuntur, quemadmodum id ipsum in figuris planis efficitur (b) per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam ut singularem & unicam, omnis Geometrarum posteritas amplexa est.

(a) Vide sch. post 18. l. 12.
(b) Vide cor. 4. p. [Corol. 20. l. 6.

Fig. 37. [Corol. *Hinc habetur methodus rationem quamvis minoris inæqualitatis quousque libuerit continuandi. Detur ratio minoris inæqualitatis AO ad AC, quam per plures terminos continuare oportet. Super diametro AC describe semicirculum; cui a puncto A, inscribe AB = AO, & indefinite producantur AB, AC versus P & Q. Junge BC, & erige perpendiculares CD, DE, EF, FG, &c. Propter angulos rectos* (a) *ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, &c. erunt* (b) *AB, AC, AD, AE, AF, AG, &c. continuè proportionales.*

(a) Per 31. l. 3. & def. 14. l. 1.
(b) Per cor. 2. p. 8. l. 6.

Fig. 38. *Idem etiam obtinebitur, quamvis angulus ABC non sit rectus. Occurrant sibi invicem in quovis angulo BAC, recta AB, AC; & producantur ut supra, versùs P, Q; jungaturque BC. Tum angulo ABC fiant æquales anguli ACD, ADE, AEF, &c. Et triangula ABC, AGD, ADE, &c. propter illos angulos, & angulum A communem, erunt æquiangula* (c) *& similia* (d). *Ergo AB : AC :: AC : AD :: AD : AE :: AE : AF, &c.*]

(c) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(d) Per 4. l. 9.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 39, 40. *Parallelogramma æqualia (X, Z) quæ unum angulum (C) uni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc est, AC est ad CB, ut FO ad OL.)*

Et si latera sic habent reciproca, parallelogramma sunt æqualia.

[*Ponantur latera AC, OB ita in directum, ut æquales anguli C, O, jaceant ad partes contrarias rectæ AB: & propter angulos C, & LCB duobus rectis* (e) *æquales, erunt LCB & O duobus rectis æquales, & proinde FO, CL* (f) *sunt in directum.*]

(e) Per 13. l. 1.
(f) Per 14. l. 1.

1. Pars. IL & SB productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X est ad parall. R, ut AC (*g*) ad CB: & Z est ad (*h*) R, ut FO ad OL. Sed quia per hyp. X & Z æqualia sunt, X est (*i*) ad R, ut Z est ad R. Ergo etiam AC est ad CB, ut (*k*) FO ad OL. Quod erat demonstrandum.

(g) Per 1. l. 6.
(h) Per eand.
(i) Per 7. l. 5.
(k) Per 11. l. 5.

Dem. 2. pars. Ut AC ad CB, sic (*l*) X est ad R: & ut FO ad OL, sic (*m*) Z ad R. Sed jam per hyp. AC est ad CB, ut FO ad OL. Ergo X est ad R, (*n*) ut Z est ad R. Ergo X & Z æqualia (*o*) sunt.

(l) Per 1. l. 6.
(m) Per eand.
(n) Per 11. l. 5.
(o) Per 9. l. 5.

[Corollarium. *Hinc pendet regula proportionum inversa, sive reciproca demonstratio, quæ ex datis tribus terminis, quartum*

tum invenit multiplicando in se invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, ut inde habeatur terminus quartus. Sicut enim in regulâ directâ spectatur æqualitas rationum, ut si fuerit $A:B::C:D$, *erit* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ *(ubi quotus termini primi per secundum divisi, quoto tertii per quartum divisi æquatur,) ita in regulâ inversâ spectatur æqualitas rectangulorum, sive factorum, ita ut rectangulum sub primo & secundo, æquale sit rectangulo sub tertio & quarto. Ex. gr. si fuerint* A, B; C, D *reciproce proportionales, (hoc (a) est, si* $A:C:.D:B$,) *erit (per hanc prop.)* $A \times B = C \times D$; *& proinde si facta ista æqualia per terminum tertium* C *dividantur, exorietur quotus* $\frac{A \times B}{C} = D$ *per terminum quartum.* (a) Per def. 2. l. 6.

Sint quantitates AB, BC; LI, IF *reciproce proportionales:* Fig. 44.
Erit $IF = \frac{AB \times BC}{LI}$. *Ex. gr. sit* AB *linea perticarum* 40. BC *pertic.* 4. *Erit* $AB \times BC$, *sive rectang.* X *pertic.* 160, *sive jugerum Anglicum. Proponatur jam jugerum aliud* Z, *perticas* 16. *longum, ut* LI, *& quæratur ejus latitudo* IF. *Ob æqualitatem rectangulorum* X *&* Z, *cùm rectang.* X *majorem habeat longitudinem quàm sibi æquale* Z, *minorem latitudinem habebit; ac proinde* minor *longitudo* LI *jugeri* Z majorem *latitudinem* IF, *pro regula inversa naturâ, postulat. Et æqualibus rectangulis,* $AB \times BC$, $LI \times IF$, *per* LI *divisis, oritur quotus* $\frac{AB \times BC}{LI} \left(= \frac{40 \times 4}{16} = \frac{160}{16} \right) = IF = 10$. *Ergo jugerum* Z *latum est* 10 *perticas. Q. E. I.*]

PROPOSITIO XV.

Æqualia triangula (ACL, FCB) quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc est, AC est ad CB, ut FO ad OL. Fig. 41. 42.

Et si latera sic habent reciproca, triangula sunt æqualia.

[*Ponantur AC, OB in directum, prout in prop. præced. Erunt etiam LC, OF in directum; &*] ducatur recta LB: reliqua demonstratio eadem est quæ præcedentis.

 Coroll-

Corollarium.

TAM parallelogramma, quàm triangula, quæ reciprocant bases & altitudines, sunt æqualia: Et e converso.

Patet ex duabus præcedentibus [*rectangula parallelogramma* (*Fig.* 39.) *vel triangula rectangula* (*Fig.* 42.) *quæ reciprocant bases AC, CB, & altitudines OL, OF; æqualia esse. Et cùm parallelogramma vel triangula obliquangula quæcunque,* (a) *æqualia respectivè sint parallelogrammis vel triangulis rectangulis super eâdem basi vel æquali, & ejusdem altitudinis; æquabuntur etiam parallelogramma vel triangula quæcunque quæ reciprocant bases & altitudines.*

(a) *Per* 35, 36, 37, 38. *l.* 1. *& def.* 3. *l.* 6.

Et e converso, cùm rectangula parallelogramma æqualia, & rectangula triang, æqualia. (*Fig.* 39. 42.) *reciprocent* (b) *bases & altitudines: Et cùm parallelogramma & triangula quæcunque, æqualia* (c) *sint parallelogrammis & triangulis rectangulis super eâdem basi vel æquali, & ejusdem altitudinis; Liquet æqualia quæcunque parallelogramma, & æqualia quæcunque triangula, bases habere altitudinibus suis respectivè reciprocas.*

(b) *Per præced. & hanc.*
(c) *Per* 35, 36, 37, 38. *l.* 1. *& def.* 3. *l.* 6.

Fig. 43.

Scholium. *Sint duo triangula ABC, DBE quorum anguli ad B simul sumpti æquales sint duobus rectis; sintque latera circa angulos ABC, DBE reciproca; Erunt triangula ista æqualia: Si verò triangula fuerint æqualia; latera circa angulos ABC, DBE erunt reciproca. Compleantur enim parallelogramma BF, BG; & propter angulos ad B duobus rectis æquales, rectæ CB, BE in directum* (d) *jacent; & propter parallelas CBE, DF, anguli* (e) *alterni ABC, BDF sunt æquales: Et quoniam* (f) *est AB ad BD, ut EB ad BC; est autem EB ipsi DF* (g) *æqualis; erit etiam AB : BD :: DF : BC; hoc est, latera circa æquales angulos ABC, BDF* (h) *sunt reciproca: ergo parallelogramma* (i) *BG, EF sunt æqualia, & proinde* (k) *eorum dimidia ABC, DBE æqualia erunt,*

Eodem modo, si triangula ABC, DBE æqualia sint, & habeant angulos ABC, DBE duobus rectis æquales; erit AB : BD :: EB : BC. Compleantur enim parallelogramma BF, BG, quæ erunt triangulorum (l) *æqualium dupla, & proinde æqualia; & propter parallelas* (m) *CBE, DF, etiam* (n) *æquiangula: ergo latera circa æquales angulos* (o) *sunt reciproca; hoc est, AB : BD :: DF sive BE : BC. Q. E. D.*]

(d) *Per* 14. *l.* 1.
(e) *Per* 27. *l.* 1.
(f) *Per hyp.*
(g) *Per* 34. *l.* 1.
(h) *Per def.* 2. *l.* 6.
(i) *Per* 14. *l.* 6.
(k) *Per* 34. *l.* 1.
(l) *Per eand.*
(m) *Per* 14. *l.* 1.
(n) *Per* 27. *l.* 1.
(o) *Per* 14. *l.* 6.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor rectæ (AB, FI; IL, BC) fuerint proportionales; (hoc est, si AB sit ad FI, ut IL ad BC;) Rectangulum (X) sub extremis (AB, BC) æquale est rectangulo (Z) sub mediis, (FI, IL.) Fig. 44.

Et si rectang. sub extremis æquetur rectangulo sub mediis, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z, circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I, per hyp. est AB ad FI, ut reciproce IL ad BC. Ergo (a) X & Z æqualia sunt. Quod erat demonstrandum. (a) Per 14. l. 6.

2. Pars. Quoniam X & Z jam ponuntur æqualia; Ergo circa æquales angulos B & I, est AB ad FI, (b) ut reciproce IL ad BC. Quod erat demonstrandum. (d) Per eand.

[Coroll. 1. *Hinc ad datam rectam lineam AB facile est datum rectangulum Z applicare: faciendo* (c) *nimirum AB : FI :: IL : BC, & rectangulum X sub AB, BC* (d) *construendo. Est enim X dato Z* (e) *æquale rectangulum ad datam rectam AB applicatum. Idem aliter efficies per cor. & schol. p. 44 l. 1.* (c) Per 12. l. 6. (d) Per sch. p. 46. l. 1. (e) Per hanc prop.

Cor. 2. *Hinc pendet regula proportionum directæ demonstratio, quæ ex datis tribus terminis, quartum proportionalem invenit, multiplicando secundum & tertium in se invicem, & factum dividendo per terminum primum. Nam per hanc prop. si AB : FI :: IL : BC, erit* $AB \times BC = FI \times IL$, *& dividendo æqualia facta per AB, erit* $BC = \frac{FI \times IL}{AB}$. *Sic si proponatur numeris 5, 3, 10. quartum proportionalem invenire, jubet regula proportionum directa, numeros 3 ac 10. in se invicem ducere, ac productum 30 dividere per 5, ut inde oriatur numerus quæsitus 6.*

Coroll. 3. *Hinc etiam, demonstratur regula practica, quâ fenestrarii, aliique ejusmodi artifices quibus opus est areas rectangulas minores dimetiri, rectanguli aream ex unius lineæ rectæ dimensione, absque ullâ operatione Arithmeticâ colligere solent. Si quæratur v. gr. quot pedes quadratos contineat rectangulum ABCD; ab angulo B, lateri BC applicetur mensura pedis unius BE, & ab angulo A, altero lateris AB termino, per mensuræ pedalis extremum punctum E tendatur filum, quod occurrat lateri DC (producto si opus) in F. Quot pedes longitudine, vel partes pedis quasvis contineat recta DF, tot pedes* Fig. 45. & 46.

quadratos, vel pedis quadrati similes partes continebit rectangulum ABCD. Nam propter angulos B & D rectos, & angulos BAE, DFA alternos inter parallelas AB, DF, itemque angulos BEA, DAF alternos inter parallelas FE, AD, triangula EBA, ADF (a) erunt similia, & proinde EB : BA :: AD : DF. Quare, per hanc prop. erit rectang. BA ✕ AD = rectang. EB ✕ DF. Sed BA ✕ AD est rectangulum cujus mensura proponitur investiganda. Cum aequale rectangulum EB ✕ DF, pro altitudine habens rectam EB mensuræ pedali æqualem, tot pedes quadratos, vel pedis quadrati partes quasvis continebit, quot pedes longitudine, vel pedis partes similes continet (b) basis DF. Quot igitur pedes continebit recta DF longitudine, tot pedes quadratos continebit rectangulum ABCD. Q. E. D.

(a) Per 4. l. 6.

(b) Sequitur ex 1. l. 6.

Si BE fuerit mensura bipedalis, vel tripedalis, &c. area rectanguli in pedibus quadratis habebitur, multiplicando DF per 4. vel 9. &c. respective, hoc est, per quadratum ipsius numeri pedum ex quo mensura constat.

Fig. 44. *Cor. 4. Si quatuor rectæ AB, FI, IL, BC fuerint proportionales: Erit triangulum ABC sub primâ pro basi & sub quartâ pro altitudine, æquale triangulo FIL sub secundâ pro basi & sub tertiâ pro altitudine. Sunt enim rectangulorum X, Z, per hanc pr. æqualium, (c) dimidia.*

(c) Per 34. l. 1.

Fig. 41, 42. *Cor. 5. Si duo triangula ACL, FOB, angulos C & O æquales habeant; & sit rectangulum AC ✕ CL sub lateribus anguli C, æquale rectangulo FO ✕ OB sub lateribus anguli O; triangula ACL, FOB erunt æqualia: & e converso, si triangula ACL, FOB, quæ angulos ad C & O æquales habeant fuerint æqualia, rectangula AC ✕ CL, FO ✕ OB erunt æqualia. Idem etiam æquiangulis parallelogrammis accidit. Nam propter æqualia rectang. AC ✕ CL, FO ✕ OB; erit per hanc prop. AC : FO :: OB : CL; & proinde, cùm in triangulis ACL, FOB æquiangulis ad C & O, latera circa æquales angulos sint reciproca; triangula ACL, FOB erunt (d) æqualia: quod erat primum.*

(d) Per 15. l. 6.

Deinde habeant triangula æqualia ACL, FOB angulos C & O æquales; (e) erunt igitur latera circum æquales illos angulos reciproce proportionalia hoc est, AC : FO :: OB : CL; & proinde per hanc prop. erit rect. AC ✕ CL = rect. FO ✕ OB; quod erat alterum.

(e) Per eand.

Fig. 39, 40. *Denique eadem eodem modo de parallelogrammis æquiangulis similiter se habentibus demonstrabuntur, si loco prop. 15. citetur prop. 14.*

Cor. 6. Si A fuerit ad B in majori ratione quàm C est ad D; erit rectangulum sub extremis majus rectangulo sub mediis. Et si in minori; minus.

1. *Quia enim A majorem habet rationem ad B quàm C ad D; erit alia quadam quantitas E (qua minor est quàm A) ad B, ut C ad D; ac proinde per hanc prop. E $\times$ D = B $\times$ C. Sed E minor est quàm A: ergo A $\times$ D majus est quàm B $\times$ C.*

2. *Si verò A fuerit ad B in minori ratione quàm C est ad D; erit alia quadam F, (quâ ipsâ A major est) ad B, ut C ad D. Ergo F $\times$ D = B $\times$ C; ac proinde A $\times$ D minus est quàm B $\times$ C.*

Cor. 7. *Hinc, si rectangulorum inaqualium latera ita disponantur, ut rectanguli majoris latera in partibus extremis, & minoris latera in mediis constituantur; habebit primus terminus ad secundum majorem rationem quàm tertius ad quartum. Si verò rectanguli minoris latera statuantur in partibus extremis, & majoris latera in mediis; erit primus terminus minor respectu secundi, quàm tertius est respectu quarti.*

Scholium. *Cùm celebre illud Ptolemai theorema, scilicet,* In omni quadrilatero circulo inscripto, Rectangulum ex diagoniis AC in BD, æquale esse duobus rectangulis ex lateribus oppositis, AB in CD, & AD in BC, *tum ex hac, tum ex propositionibus passim ante demonstratis dependeat, illud jam demonstrandum proponamus. Fiat enim angulus BAE aqualis angulo CAD. Ob angulos BAE, CAD aquales per constructionem, & angulos ABE, ACD eidem arcui AD insistentes* (a) *aquales;* (b) *Erunt triangula ABE, ACD similia, & AB : BE :: AC : CD; & proinde* (c) *rectangulum extremorum AB $\times$ CD aquabitur rectangulo mediorum AC $\times$ BE. Pariter, ob angulum BAE angulo CAD aqualem per constructionem, addito communi CAE, erit angulus BAC angulo EAD aqualis, & ob angulos ADE, ACB, eidem arcui AB insistentes,* (d) *aquales;* (e) *erunt triangula ADE, ACB similia, & AD : DE :: AC : CB, & proinde* (f) *rectangulum extremorum AD $\times$ CB, aquale erit rectangulo mediorum AC $\times$ DE. Sed rectangula AC $\times$ BE & AC $\times$ DE* (g) *aquantur rectangulo AC $\times$ BD. Ergo rectangulum AC $\times$ BD sub diagoniis aquatur rectangulis AB $\times$ CD & AD $\times$ BC sub lateribus oppositis. Q. E. D.*

Fig. 47.

(a) Per 21. l. 3.
(b) Per cor. 9. p. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.
(c) Per hanc prop.
(d) Per 21. l. 3.
(e) Per cor. 9. pr. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.
(f) Per hanc prop.
(g) Per 1. l. 2.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 48. *Si tres rectæ (AB, FL, BC) fuerint proportionales, rectangulum sub extremis (AB; BC) æquale erit quadrato mediæ (FL.)*

Et si rectangulum sub extremis æquetur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1. Pars. Mediæ FL accipiatur par O. Quoniam igitur per hyp. AB est ad FL, ut FL ad BC; estque O par FL; Erit quoque AB ad FL, ut O ad BC. Ergo (a) rectang. sub extremis AB, BC æquatur rectangulo sub mediis FL & O, hoc est quadrato FL.

(a) Per præc.

2. Pars Demonstratur similiter ex secundâ parte præcedentis.

Corollaria.

Fig. 32. 1. Ex hac & ex 13. patet, si in circulo sit FC perpendicularis diametro, rectangulum ACB æquale esse quadrato FC.

Fig. 48. Cor. 2. *Hinc ad datam rectam AB, datâ rectæ FL quadratum FO facile est applicare, inveniendo rectis AB, FL* (b) *tertiam proportionalem BC, & rectang. ABC* (c) *construendo. Est enim dato quadrato FO* (d) *æquale rectangulum ABC ad rectam AB applicatum.*

(b) Per 11. l. 6.
(c) Per sch. p. 46. l. 1.
(d) Per hanc pr.

Cor. 3. *Hic etiam liquet methodus rationem quamvis AB ad FL continuandi, sive duabus datis AB, FL tertiam proportionalem inveniendi; si nempe, consequentis FL quadratum ad antecedentem AB applicetur, habebitur tertia proportionalis BC. Si verò in numeris detur ratio quævis, invenietur tertius proportionalis, multiplicando consequentem per seipsum, & productum dividendo per antecedentem: quotus enim* (e) *erit tertius proportionalis quæsitus.*

(e) Patet ex 17. l. 6. cum cor. 2. p. 16. l. 6.

Fig. 17. Cor. 4. *Hinc lineam inaccessam, cujus terminus alter est accessibilis, metiri discimus. Sit linea inaccessa CF, & producatur FC indefinite versus A. Erigatur a puncto C linea perpendicularis CB: & ad quodvis istius perpendicularis punctum B applicetur Norma, aut angulus quivis rectus ABF, ita ut per latus BF respiciendo, punctum F, per latus BA punctum A in rectâ ACF observentur. Mensuretur linea AC accessibilis, & ex analogiâ sequenti innotescet* (f) *inaccessa CF. AC:CB :: CB:CF. Quadratum itaque lineæ CB dividatur per lineam AC, & Quotiens* (g) *dabit lineam quæsitam CF. Q. E. I.*

(f) Per cor. 1. p. 8. l. 6.
(g) Per cor. 3. hujus.

Cor.

Cor. 5. *Hinc si detur rectangulum sub AC, CB segmentis rectæ datæ AB, æquale scil. quadrato datæ rectæ CF, dimidio ipsius AB non majoris, in proclivi erit invenire rectanguli latera AC, CB; sive, datam rectam AB ita dividere licebit in C, ut rectangulum sub ipsius segmentis AC, CB æquetur quadrato rectæ datæ CF, quæ dimidium ipsius AB non superat. Cùm enim data CF sit per hanc prop. media proportionalis inter AC & CB segmenta rectæ datæ AB, idem erit hoc problema cum illo, cujus solutio in Schol. ad cor. 2. pr. 13. hujus libri jam supra traditur.* Fig. 32.

Scholium 1. Si (a) trianguli cujuscunque ABC angulus verticalis BAC bisecetur rectâ DA, quæ basem BC dividat in duo segmenta BD, DC; Erit differentia rectangulorum a lateribus AB, AC, & a segmentis basis BD, DC, æqualis quadrato rectæ AD bisecantis angulum BAC. [*Hoc est*, rect. BAC — rect. BDC = ADq.] *Triangulo enim ABC circumscribatur circulus, & producatur AD donec iterum occurrat circulo in E, & connexa EC, in triangulo AEC per punctum D ducatur basi EC parallela DF; eruntque triangula ADF, AEC* (b) *similia: sed & propter angulos BAD, EAC* (c) *æquales, & angulos ABD, AEC in eodem segmento ABEC, & proinde* (d) *æquales, triangula ABD, AEC similia* (e) *erunt: triangula igitur ABD, ADF similia sunt; & AB : AD :: AD : AF; unde per hanc prop. rectangulum BAF æquatur ADq. Sed AD : AF ::* (f) *DE : FC. Ergo AB : AD :: DE : FC; & rect. BA × FC* (g) = *rect. ADE* = (h) *rect. BDC. Et utrumque rectang. BAF, & BA × FC, hoc est,* (i) *BAC æquabitur ADq × rect. BDC, & utrinque auferendo rectang. BDC, erit BAC rect — BDC rect. = ADq.* Q. E. D.

Fig. 49. (a) *Vide Arithmet. Univers. pag. 103 edit. prima.* (b) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.* (c) *Ex hyp.* (d) *Per 21. l. 3.* (e) *Per cor. 9. pr. 32. l. 1. & pr. 4. l. 6.* (f) *Per 2. l. 6.* (g) *Per 16. l. 6.* (h) *Per 35. l. 3.* (i) *Per 1. l. 2.*

Cor. ad Schol. 1. *Si trianguli ABC circulo inscripti angulus verticalis A bisecetur rectâ AE eidem circulo inscriptâ, quæ secet basim in D; erit BA : AD :: EA : AC. Triangula enim BAD, EAC similia sunt, uti e scholio præcedente constat.* Fig. 49.

Scholium 2. *Sequentis etiam problematis, quod usui erit in Sphæricis, ex ante demonstratis, jam tradi potest inveniendi ratio.* Per duo puncta B, C in circulo dato FDM, circumferentiam circuli ducere, quæ dati circuli circumferentiam dividat bifariam. *Per centrum A & unum e punctis datis B, ducatur recta BAME infinita; ad quam e centro erigatur perpendicularis AD, & ducatur BD; & in triangulo ABD, propter angulum BAD rectum, erit* (k) *ABD acutus. Ad BD fiat normalis DE, quæ propter angulos ABD, BDE duobus rectis minores,* (l) *intersecabit lineam infinitam BAME, ut in puncto E. Denique circulus BRE ducatur per* (m) *tria puncta B, C, E. Dico factum. Ducatur enim circuli jam descripti BRE* Fig. 50.

(k) *Per cor. 5. p. 32. l. 1.* (l) *Per sch. p. 31. l. 1.* (m) *Per p. 5. l. 4.*

chorda, per circuli dati centrum A, & alterutram peripheriarum intersectionem G, nimirum GAΦ. Ducatur etiam circuli dati FDM, diameter GAF, per eandem peripheriarum intersectionem G.

Quoniam ab angulo recto trianguli BDE, demittitur DA perpendicularis basi BE, (a) *erunt AB, AD, AE* ∺, *& proinde per hanc prop. rectang. BAE* = *ADq; id est, ob circuli dati FDM æquales radios AD, AG, AF, erit rect. BAE* = *rect. GAF. Cùm verò in circulo BRE, recta BE, GΦ se mutuò secent in A,* (b) *erit rect. BAE* = *rect. GAΦ. Unde GAF rect.* = *GAΦ rect. Ergo* (c) *AF* = *AΦ: & puncta F, Φ coincident: atque arcus FDG* = (d) *arcui FMG. Q. E. I.*

(a) Per cor. 1. p. 8. l. 6. (b) Per p. 35. l. 3. (c) Per 1 l. 6. (d) Per def. 20. l. 1.

Fig. 51. Schol. 3. *In circulo quovis cujus diameter est AB, & arcuum AC, AD sinus recti sunt CE, DF; sinus versi AE, AF; subtensæ AC, AD: Erit AE : AF :: ACq : ADq; hoc est, sinus versi erunt ut quadrata subtensarum. Ductis enim BC, BD,* (e) *erunt BA, AC, AE* ∺; (f) *itemque BA, AD, AF* ∺. (g) *Ergo BA × AE* = *ACq, & BA × AF* = *ADq. Sed AE : AF ::* (h) *BA × AE : BA × AF. Ergo AE : AF :: ACq : ADq.*]

(e) Per cor. 2. p. 8. l. 6. (f) Per idem. (g) Per hanc prop. (h) Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 52. *Super datâ rectâ (RS) dato polygono (BQ) simile similiterque positum describere.*

Polygonum datum BQ resolve in triangula. Super datâ rectâ RS fac (*i*) angulos R, O æquales angulis B, A. Coibunt (*k*) latera in X. Super XS fac angulos V, I æquales angulis T, C. Coibunt latera in Z. Dico factum.

Nam quia anguli R, O æquantur angulis B, A, etiam E, K (*l*) æquales erunt: & quia etiam (*m*) V æquatur T, totus EV toti KT æqualis erit. Similiter quia singuli O, I æquantur singulis A & C, toti OI, AC æquales erunt. Et quia V & I æquantur T & C, etiam Z & Q æquales (*n*) sunt. Polygona igitur RZ, BQ sibi mutuò æquiangula sunt. Reliquum est ut ostendatur etiam latera esse proportionalia. RS est ad SX, (*o*) ut BF ad FL: & rursum SX est ad SZ, (*p*) ut FL ad FQ. Ergo ex æquo (*q*) RS est ad SZ, ut BF ad FQ, &c.

Corollarium. *Hinc Mappas sive Chartas Geographicas, Chorographicas, vel Geodæticas; aut agrorum, ædificiorum, regionumque delineationes Ichnographicas construendi methodus derivatur. Nihil enim aliud sibi volunt hujusmodi delineatores, quàm figurarum ingentium ad similes figuras exiguas reductionem, quam præsens propositio exhibet.* PRO-

(i) Per 23. l. 1. (k) Per cor. 17. p. 32. l. 1. & sch. p. 31. l. 1. (l) Per cor. 9. p. 32 l. 1. (m) Per constr. (n) Per cor. 9. p. 32. l. 1. (o) Per 4. l. 6. (p) Per eand. (q) Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

Triangulorum (X, Z) similium proportio est duplicata proportionis laterum (AC, FI) aequalibus angulis subtensorum. Fig. 53. 54.

Hoc est si (*a*) fiat ut AC ad FI, sic FI ad tertiam AQ; triang. X est ad triang. Z. ut AC prima ad tertiam proportionalem AQ. Vide defin 10. l. 5. (a) *Per* 11. *l.* 6.

Quoniam triangula X, Z sunt similia, erit BA ad LI, (*b*) ut AC ad IF. Sed per constr. ut AC ad IF, sic IF ad AQ. Ergo etiam BA est ad LI, (*c*) ut IF ad AQ. Ergo [*junctâ B Q*,] in triangulis QBA & Z, latera circa angulos A, I, qui per defin. triangulorum similium aequales existunt, sunt reciproca. Æquantur igitur (*d*) QAB & Z. Atqui triangulum X ad QBA est ut (*e*) basis AC ad basim AQ. Ergo etiam X est ad Z, ut AC ad AQ. Quod erat demonstrandum. (b) *Per* 4. *l.* 6. (c) *Per* 11. *l.* 5. (d) *Per* 15. *l.* 6. (e) *Per.* 1. *l.* 6.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona (ABCDE, FGHIK) dividuntur (1.) in similia triangula (P; S; & Q, T, & R, V,) numero aequalia; (2.) & totis proportionalia: (3) & polygonorum proportio duplicata est proportionis laterum (AB, FG) inter aequales angulos (B, G & BAE, GFK) existentium. Fig. 55.

1. Pars. Quoniam polygona sunt similia, erunt (*f*) sibi mutuò aequiangula, eruntque bini binis aequales anguli BAE, GFK, & B, G, & BCD, GHI, & CDE, HIK, & E, K. Quia igitur AB est ad BC, (*g*) ut FG ad GH, angulique B & G aequales sunt, similia (*h*) sunt triangula P, S. Similiter demonstrabitur similia esse R & V. Deinde quia anguli toti BCD, GHI, & ablati BCA, GHF aequales sunt, etiam reliqui ACD, FHI aequales erunt. Eodem modo ostendam aequari angulos ADC, FIH. Ergo (*i*) tertius CAD tertio HFI aequalis est. Quare (*k*) etiam Q & T triangula similia sunt. Liquet ergo 1. pars. (f) *Per def.* 1. *l.* 6. (g) *Per eand.* (h) *Per* 6. *l.* 6. (i) *Per cor.* 9. *p.* 32. *l.* 1. (k) *Per* 4. *l.* 6.

2. Pars. Quoniam similia sunt P & S, ratio P ad S duplicata est (*l*) rationis CA ad HF. Sed ob eandem causum (l) *Per prac.*

 etiam

etiam ratio Q ad T duplicata est rationis C A ad HF. Ergo P est ad S ut (a) Q ad T. Eodem modo ostendam ut Q est ad T, ita R esse ad V. Ergo ut (b) unum antecedens P est ad unum consequens S. ita omnia antecedentia P, Q, R, simul sumpta, ad omnia consequentia S, T, V simul sumpta, hoc est, ita polygonum ad polygonum. Quod erat alterum.

(a) Per 24. l. 5.
(b) Per 12. l. 5.

3. Pars. Ratio P ad S est (c) duplicata rationis AB ad FG. Sed ratio polygoni ad polygonum est eadem cum ratione P ad S, ut jam ostendi Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum est duplicata rationis A B ad GF. Quod erat tertium.

(c) Per prac.

Corollaria.

1. Omnes figuræ ordinatæ seu regulares, ut æquilatera triangula, quadrata, pentagona, &c. sunt inter se in ratione duplicatâ laterum. Omnes enim ordinatæ sunt similes inter se, ut patet ex def. 1. l. 6.

[2. *Si tres rectæ fuerint proportionales; erit prima ad tertiam, ut figura quavis plana (sive sit triangulum, sive quadrilaterum, seu polygonum quodcunque) super primâ, ad figuram similem, similiterque descriptam super secundâ, vel erit rectarum proportionalium prima ad tertiam, ut figura quævis plana super secundâ, ad figuram similem, similiterque descriptam super tertiâ. Nam per def. 10. l. 5. trium proportionalium prima est ad tertiam in duplicatâ ratione primæ ad secundam, vel secundæ ad tertiam. Unde per prop. 19. vel hanc 20. liquet propositum.*]

Fig. 55. 3. Si figurarum quarumvis similium latera AB, FG inter æquales angulos posita, sint nota, etiam proportio figurarum innotescet. Sit, ex. gr. AB 2. ped. & FG 6. pedum. Fiat ut 2. ad 6. ita 6. ad alium numerum, nempe 18. Figura minor est ad (d) majorem, ut 2. ad 18. seu ut 1. ad 9. Invenitur autem tertius proportionalis numerus, si (e) secundus datorum multiplicetur per seipsum, & productus per primum dividatur.

(d) Per cor. 2. hujus
(e) Per cor. 3. p. 17. l. 6.

Fig. 56. 4. Ex eâdem propositione elicitur methodus præclara, figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione datâ. Ut si velis pentagoni, cujus latus est AB, aliud facere quintuplum [*quod sit dato simile:*] Inter terminos rationis datæ AB, BC, inveni (f) mediam proportionalem BX. Super hac construe (g) pentagonum simile dato. Hoc erit quintuplum dati.

(f) Per 13. l. 6.
(g) Per 18. l. 6.

Nam per cor. 2. hujus, pentagonum super AB est ad sibi simile super BX, ut AB prima ad BC tertiam.

Porro,

Porro, cùm etiam circulorum proportio sit duplicata proportionis diametrorum, ut ostendetur p. 2. l. 12. Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

[Cor. 5. *Si figurarum quarumvis similium proportio sit nota; innotescet etiam proportio laterum inter æquales angulos existentium, utpote quæ subduplicata sit proportionis figurarum. Sit, ex. gr. figura PQR ad figuram STV, ut 4 ad 9. Inter 4 & 9 inveniatur medius proportionalis 6, (nempe (a) extractione radicis quadraticæ numeri 36 = 4 × 9,) & cùm sint 4, 6, 9 ∺ sintque figuræ PQR, STV ad se invicem ut 4 ad 9, erunt illarum latera homologa ut (b) 4 ad 6, sive ut 2 ad 3.* Fig. 55. (a) Patet ex 17. l. 6. (b) Per cor. 2. hujus

Cor. 6. *Hinc corrigendus est eorum error, qui figurarum similium eandem atque laterum rationem esse opinantur. Si enim duorum, non tantùm triangulorum similium, sed & quadratorum, pentagonorum, hexagonorum, &c. (aut etiam circulorum) latera (sive diametri) sint inter se ut 2 ad 1; Ipsæ figuræ sive areæ erunt 4 ad 1: si latera sint inter se ut 3 ad 1, erunt figuræ ipsæ sive areæ ut 9 ad 1; in duplicatâ scilicet laterum (vel diametrorum) ratione. Sunt enim 4, 2, 1 ∺; Item 9, 3, 1 ∺.*

Schol. *Cùm quadratorum E, K proportio duplicata sit proportionis laterum OR, SV; inde ratio duplicata laterum OR, SV, per rationem ORq ad SVq sæpissime designari solet: v. gr. si super lateribus OR, SV fiant aliæ quævis figuræ similes & similiter positæ; cùm sint eæ in ratione duplicatâ laterum OR, SV, erunt ad se invicem ut quadratum E ad quadratum K, sive ut ORq ad SVq.*] Fig. 57.

PROPOSITIO XXI.

F*iguræ rectilineæ (A, B) quæ eidem (C) similes sunt, etiam sibi mutuò similes sunt.* Fig. 57.

Patet ex defin. 1. l. 6. axiom. 1. l. 1. & propos. 11. l. 5.

[*Quia enim tam figura A quàm B, figuræ C similis est; erit illarum utraque ipsi C æquiangula, & circa æquales angulos latera ipsius C lateribus habebit proportionalia. Ergo A ipsi B æquiangula erit, & latera circa ipsarum A & B æquales angulos erunt proportionalia; & proinde figuræ A & B similes erunt.*]

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 57. *SI quatuor aut plures rectæ (FI, LQ, & OR, SV) proportionales fuerint; figuræ rectilineæ similes, similiterque ab iis descriptæ (A, B, & E, K) proportionales erunt.*

Et e converso, [Si proportionales fuerint figuræ rectilineæ (A, B, & E, K,) similes, & similiter descriptæ super rectis (FI, LQ, & OR, SV;) erunt etiam ipsæ lineæ rectæ proportionales.]

Demonstratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam enim rationes A ad B, & E ad K sunt (*a*) duplicatæ rationum FI ad LQ, & OR ad SV, ex hypothesi æqualium; etiam ipsæ æquales erunt.

(a) Per 19. & 20. l. 6.

Pars 2. patet ex 35. l. 5. [*Quia enim rationes æquales A ad B, & E ad K,* (b) *duplicatæ sunt rationum FI ad LQ, & OR ad SV; etiam hæ æquales erunt.*

(b) Per easd.

Cor. 1. *Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices quadraticas. Si enim multiplicentur inter se quantitates signis radicalibus affixæ, & producto præfigatur ejusdem radicis signum; habebitur radicum datarum productum. Ex. gr. sit $\sqrt{5}$ multiplicanda in $\sqrt{3}$: dico provenire $\sqrt{15}$. Nam ex multiplicationis definitione debet esse unitas ad multiplicantem (sive $\sqrt{3}$) ut multiplicandus (seu $\sqrt{5}$) est ad productum. Ergo per hanc prop. erit quadratum unitatis ad quadratum multiplicantis, ut quadratum multiplicandi ad quadratum producti; hoc est, si pro numero producto ponatur P, erit 1.3 :: 5 Pq. Sed 1 3 :: 5. 15. Ergo Pq = 15, & P = $\sqrt{15}$.*

Rursum, si proponatur $\sqrt{15}$ dividenda per $\sqrt{5}$; quotiens erit $\sqrt{3}$. Nimirum dividendo 15. per 5. & quoto 3, signum radicale præfigendo. Cùm enim, ex definitione divisionis, sit numerus dividens ad dividendum, ut unitas ad quotum; ergo per hanc prop. erit quadratum dividentis ad quadratum dividendi, ut quadratum unitatis ad quadratum quoti; hoc est, si pro quoto ponatur Q. erit 5. 15 :: 1. Qq. Sed 5. 15 :: 1. 3. Ergo Qq = 3, & Q = $\sqrt{3}$.

Fig. 32. Cor. 2. *Si recta linea AB secta sit utcunque in C; rectangulum sub partibus AC, CB contentum, est medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum sub totâ AB & unâ parte AC vel CB, est medium proportionale inter quadratum totius AB, & quadratum dictæ partis AC vel CB. Nam super diametro AB descripto semicirculo*

AFB,

AFB, & erectâ ad diametrum perpendiculari CF; si compleatur triangulum rectangulum AFB, liquet esse (a) *AC : CF :: CF : CB, Ergo per hanc prop. erit ACq : CFq :: CFq : CBq; hoc est,* (b) *ACq : ACB rectang :: ACB rectang : CBq.* (a) Per cor. 1. p. 8. l. 6. (b) Per cor. 1. p. 17. l. 6.

Porro (c) *BA : AF :: AF : AC. Ergo BAq : AFq :: AFq : ACq. Hoc est,* (d) *BAq : BAC rectang :: BAC rectang : ACq. Eodem modo ABq : ABG :: ABC : BCq.*] (c) Per cor. 2. p. 8. l. 6. (d) Per 17. l. 6.

PROPOSITIO XXIII.

Æquiangula parallelogramma (*X, Z*) *inter se rationem habent compositam ex rationibus laterum* (*AC ad CB, & LC ad CF.* Fig. 58. (quam quære ante fig. 47.)

Hoc est, si fiat CB ad O, ut LC ad CF; X est ad Z, (e) ut AC ad O. Vide quæ demonstravimus l. 5. parte 3. num. 13. [*Vel respice sis ad instantias, quibus definitionem quintam hujus libri* (*quam ex Euclide restituimus*) *jam supra illustravimus.* (e) Per def. 5. l. 6.

Ponantur AC, CB ita in directum, ut anguli æquales ACL, BCF sint ad partes contrarias rectæ AB; (f) *eruntque LC, CF in directum.*] (f) Per 13. & 14. l. 1.

Concurrant IL, SB, in Q. Parallelogrammum X est (*g*) ad parallelogrammum R, ut AC ad CB: & R est ad Z, (*h*) ut LC ad CF, (hoc est, ut CB ad O.) Ergo (*i*) ex æquo X est ad Z, ut AC ad O. Quod erat demonstrandum. (g) Per 1. l. 6. (h) Per eand. (i) Per 22. l. 5.

Corollaria.

Hinc & ex 34. l. 1. patet primò, Triangula quæ unum angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere compositam ex rationibus rectarum AC ad CB, & LC ad CF æqualem angulum continentium. Fig. 58.

Patet 2. Rectangula, ac proinde (*k*) & parallelogramma quæcunque, rationem inter se habere compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis [*rectangulis, & inde* (l) *de triangulis quibuscunque*] ratiocinaberis. (k) Per 35. 36. l. 1. & def. 3. l. 6. (l) Per def. 3. l. 6. & pr. 37, 38. l. 1.

Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammorum proportio exhiberi possit. Sunto parallelogramma, X & Z, & eorum bases AC, CB, altitudines CL, CF. Fiat (*m*) ut CL altitudo ad altitudinem CF, ita basium altera CB ad O. Parallelogrammum X est ad parallelogram. Z, ut AC est ad O. Fig. 58. (m) Per 12. l. 6.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 59. *IN omni parallelogrammo (SF,) quæ circa (AB) diametrum sunt parallelogramma (CL, OI,) & toti & inter se similia sunt*, [& similiter posita; hoc est, latera homologa vel in eâdem rectâ jacent, vel sunt sibi invicem parallela.]

Per 27. 1. æquales sunt anguli BCE, BSA, & BLE, BFA. Per eandem CEL est par CIF, hoc est per eandem ipsi SAF; B verò & toti SF, & parti CL communis est. Igitur totum SF & pars CL æquiangula sunt. Reliquum est, ut etiam latera æqualibus angulis opposita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis BCE, BSA, est CE parallela ad SA, erit (*a*) BC ad CE, ut BS ad SA; & CE est ad EB, ut (*b*) SA ad AB. Quia verò in triangulis quoque ELB, AFB, EL est parallela ad AF, erit EB ad EL, ut (*c*) AB ad AF. Ergo ex æquo (*d*) CE est ad EL, ut SA ad AF. Igitur (*e*) CL & totum SF similia sunt. Eodem modo ostendam OI esse simile toti SF. Ergo (*f*) CL & OI sunt etiam similia inter se. [*Quoniam verò latera homologa vel in eâdem rectâ jacent, ut BC & BS; BL & BF; vel sunt sibi invicem parallela, ut CE & SA; EL & AF; liquet parallelogramma CL & SF esse similiter posita: & eodem modo constabit parallelogramma OI & SF, (ac proinde CL & OI) esse similiter posita*] Quæ erant demonstranda.

(a) Per cor. 1. p. 4. l. 6
(b) Per idem cor.
(c) Per idem cor.
(d) Per 22. l. 5.
(e) Per def. 1. l. 6.
(f) Per 21. l. 6.

[Scholium. *Huic propositioni problemata duo, quæ in conicis usui sunt futura, liceat adjungere. Prius ad ellipsim spectat, posterius ad hyperbolam.*

Fig. 60. 1. *Datis tribus rectis A, B, C, quarum tertia C minor sit quàm prima A, & constituto rectangulo DEFK sub primâ A vel DE, & secundâ B vel EF; ad secundam aliud rectangulum applicare, latitudinem habens tertiæ C æqualem, & deficiens rectangulo simili & similiter posito, ei quod sub primâ & secundâ constituitur.*

Ductâ rectanguli EK diametro DF, e latere DE primæ A æquali, abscindatur EG tertiæ C æqualis; & per G ducatur GH lateri EF parallela, diametro occurrens in H; & per H ducatur HI lateri DE parallela, ipsi EF occurrens in I. Dico factum: rectangulum enim GEIH est id quod petebatur. Productis enim GH, IH, perficiantur rectangula IL, GM. Et

cùm

cùm rectangula EK, IL circa eandem diametrum sint, (a) *erunt similia & similiter posita. Constructo itaque rectangulo EK sub datarum primâ A & secundâ B, sive sub DE & EF, ad secundam EF aliud rectangulum, nempe GI, applicatur, latitudinem habens GE tertia C æqualem, & deficiens rectangulo IL simili & similiter posito ipsi EK quod sub primâ & secundâ constituitur. Q. E. F.* (a) Per hanc prop.

2. *Datis tribus rectis A, B, C, & constituto rectangulo DEFK sub primâ A vel DE, & secundâ B vel EF; ad secundam aliud rectangulum applicare, latitudinem habens tertia C æqualem, & excedens rectangulo simili & similiter posito ei quod sub primâ & secundâ constituitur.* Fig. 61.

Ductâ rectanguli EK diametro DF, producatur DE ad G, ut sit adjecta EG tertia data C æqualis, & per G ducatur GH lateri EF parallela, & occurrens diametro DF productæ in H; compleaturque rectangulum EGHI. Dico factum. Productis enim HI, DK, KF, perficiantur rectangula GM, LI. Et cùm rectangula EK, LI circa eandem diametrum sint, erunt (b) *similia & similiter posita. Constructo itaque rectangulo EK sub datarum primâ & secundâ, DE, EF, ad secundam EF aliud rectangulum GI applicatur, latitudinem habens EG tertia C æqualem, & excedens rectangulo LI simili & similiter posito ipsi EK quod sub primâ & secundâ constituitur. Q. E. F.*] (b) Per eand.

PROPOSITIO XXV.

Polygonum datum A in aliud dato B simile transmutare. Fig. 62.

Sive polygonum constituere æquale dato A, & simile alteri dato B.

Super CF latere polygoni B, cui simile petitur, fac rectangulum Q (*c*) æquale B. Deinde super FS fac (*d*) rectangulum R æquale A. Manifestum (*e*) est CF & FI esse in directum. Inter CF, FI inveni (*f*) mediam proportionalem FL. Super hac fac (*g*) polygonum simile dato B: erit hoc etiam æquale dato A.

Nam cùm per constr. sint tres proportionales CF, FL, FI, polygonum B est ad simile sibi polygonum super FL factum, (*h*) ut CF ad FI; hoc est (*i*) ut Q ad R. Igitur permutando, ut polygonum B est ad Q, ita polygonum super FL ad R. Sed per constr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum super FL, simile ipsi B, æquatur R, hoc est, per construct. dato A. Factum est igitur quod petebatur.

(c) Per 45. l. 1. (d) Per eand. (e) Per 14. l. 1. (f) Per 13. l. 6. (g) Per 18. l. 6. (h) Per cor. 2. p. 20. l. 6. (i) Per 1. l. 6.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 63. *Parallelogramma similia & similiter posita (BD, FN,) habentia angulum communem (A,) circa eandem diametrum existunt.*

Duc rectas AE, CE. Si negas AEC, esse diametrum communem parallelogrammorum BD & FN; ipsius BD diameter esto recta alia AGC secans FE in G, & duc rectæ AF parallelam GH. Parallelogramma igitur FH, BD existent circa communem diametrum AGC, ac proinde (a) erunt similia [*& similiter posita.*] Ergo ut BA ad AD, (b) sic FA ad AH. Sed etiam ut BA ad AD, sic AF ad AN, cùm BD, FN similia sint per hyp. Ergo FA est ad AH, ut FA ad AN. Quod est absurdum.

(a) Per 24. l. 6.
(b) Per def. 1. l. 6.

Fig. 59. [Cor. 1. *Hinc motuum compositionem æstimare discimus. Impellatur eodem temporis momento, corpus ad A positum, vi AF secundùm directionem recta AF, & vi AS secundùm directionem recta AS, (ita nempe, ut corpus solâ vi AF rectam AF, & solâ vi AS rectam AS in dato tempore describeret;) & compleatur parallelogrammum ASBF: ex conjunctione virium, corpus A diagonalem AB eodem dato tempore describet. Idem enim erit motus corporis A, ac si, dum illud feratur in motu uniformi ab A ad S in rectâ AS, ipsa recta AS motu itidem uniformi, & situ sibi ipsi semper parallelo, puncto suo A rectam AF eodem tempore describeret; nam eo pacto conservabuntur utraque motuum directiones versus plagas SB atque FB respectivè. Unde fiet, ut dum corpus A aliquâ quavis temporis dati parte, (v. gr. tertiâ) perveniens ad O, eandem (tertiam) partem recta AS describat; ipsa AS in situm IC transferetur, & ipsius punctum A eandem itidem (tertiam) partem recta AF eâdem (tertiâ) dati temporis parte describet; ita ut sit SA ad AF,*(c) *ut OA ad AD ac proinde ducta OL ipsi AF parallela, qua secet rectam IC in E, parallelogramma SF, OI erunt* (d) *similia, & similiter posita, & corpus A ex utroque motu, in fine ejusdem (tertia) dati temporis partis, invenietur in puncto E. Et cùm parallelogramma ista habeant etiam angulum communem A, per hanc prop. circa eandem diametrum AB existunt, & corpus ad E erit in ipsâ diametro seu diagonali AB. Et eodem modo, corpus in quovis alio dati temporis momento reperietur alicubi in rectâ AB, & in fine temporis dati, in puncto B. Ergo describet ipsam diagonalem AB viribus conjunctis, eodem tempore quo vi AS rectam AS, vel vi AF rectam AF separatim describeret.*

(c) Per 15. l. 5.
(d) Per def. 1. l. 6.

Cor. 2.

Cor. 2. *Describat igitur corpus quodvis in dato quovis tempore rectam DA vi insitâ ut DA: Idem corpus æquali tempore rectam AO rectæ DA æqualem, & secundùm eandem directionem describeret, si nullâ vi aliâ impediretur. Si itaque corpus ad A, a motu secundùm AO deflectens, in eodem tempore rectam AE describat; tum ductâ OE, compleatur parallelogrammum OI, & manifestum* (a) *est, corpus secundùm rectam AE ferri, vi compositâ ex vi priori insitâ DA, vel AO, & ex novâ vi AI ad punctum A corpori impressâ secundùm directionem rectæ AI.* (a) Per cor. 1. hujus.

Cor. 3. *Hinc e converso, si corpus vi AB describat rectam AB, idem erit motus, ac si rectam eandem AB eodem tempore describeret vi compositâ ex viribus, quæ lateribus AF, AS parallelogrammi cujuscunque SF, cujus diameter sit recta AB, proportionales fuerint, & quæ etiam secundùm latera ista AF, AS dirigantur.*

Cor. 4. *Hinc insuper cum Illustriss. Newtono colligimus, areas quas corpora quæcunque in gyros acta circa immobile centrum virium describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales. Dividatur tempus in partes æquales, & primâ temporis parte describat corpus vi insitâ rectam lineam AB. Idem corpus secundâ temporis parte, si nihil impediret, rectà ad* x *pergeret; describens lineam* B x *æqualem ipsi AB, ita ut radiis ad centrum ductis confecta forent* (b) *æquales areæ ASB, BS*x. *Verùm ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatque corpus a rectâ B*x *deflectere, & in rectâ BC pergere: hoc est, si vis centripeta in eo loco sit ad vim insitam, ut B*y *ad B*x, *& perficiatur parallelogrammum B*y*C*x; *Corpus lineam* (c) *diagonalem BC describet, & completâ secundâ temporis parte reperietur in C, in eodem plano cum triangulo primo SAB. Junge SC. Area radio ad centrum ducto descripta, hoc est triangulum SBC* (d) *æquale erit triangulo SB*x; *atque adeo* (e) *triangulo primo SAB. Simili argumento tertiâ temporis parte corpus a C ad* δ *vi insitâ pertingeret, ita ut linea C*δ *æqualis esset lineæ CB: sed si vis centripeta, sive major priore sive minor, iterum agat ad punctum C; in fine tertii temporis reperietur corpus alicubi in lineâ D*δ, *lineæ SC parallelâ: ideoque ut priùs, diagonalem CD describet: & radio DS ad centrum ducto, erit triangulum SDC in eodem plano cum quadrilatero SABC; & triangulo* (f) *S*δ*C, atque adeo reliquis SCB, SAB inter se æqualibus, erit æquale. Pari modo si vis centripeta successivè agat in D, E, F, faciens ut corpus singulis temporibus partibus diagonales DE, EF, &c. describat; Erunt hæ in eodem plano, & triangula triangulis pri-*

Fig. 64.

(b) Per 38. l. 1.

(c) Per cor. 1. huj. prop.

(d) Per 37. l. 1.

(e) Per axio. 1. l. 1.

(f) Per 37. l. 1.

oribus æqualia describentur. Æqualibus itaque temporibus æquales area in plano immoto describuntur : atque adeo arearum summa quævis S A DS , S A FS sunt inter se ut descriptionum tempora. Augeatur jam numerus , & minuatur latitudo triangulorum in infinitum ; & eorum ultima perimeter ABCDEF, &c. erit linea curva , & area hoc in casu in plano immobili descripta , erunt etiamnum temporibus proportionales. Q. E. D.

Fig. 64. Cor. 5. *Hinc etiam , cum CL. Newtono , colligimus corpora omnia quæ in curva aliqua moventur , & areas circa centrum aliquod S temporibus proportionales describunt , à vi centripetâ ad centrum illud tendente perpetuò urgeri. Cùm enim corpus vi insitâ æquales rectas A B , Bx æqualibus temporibus describeret , ductis SA , SB , Sx* (a) *æquabuntur triangula BSA , SBx. Cùm verò corpus ex hypothesi æquales areas SAB , SCB æqualibus temporibus describat , æquabuntur etiam triangula S B A, SBC. Quare & triangula SBx , SBC æqualia erunt. Et quoniam super eâdem basi S B consistunt , puncta C & x* (b) *erunt in lineâ Cx basi parallelâ : atque adeo ductâ Cy rectâ x B parallelâ , erunt Bx , By parallelogrammi xy latera , & BC diagonalis. Corpus itaque a rectâ ABx deflectens ad punctum B ; & diagonalem B C describens eodem tempore quo latus Bx absque novâ vi ad B impressâ describeret ,* (c) *urgetur etiam in puncto B , vi By tendente ad S centrum virium. Atque ita in punctis omnibus C , D , E , F , &c.* Q. E. D.

(a) Per 38. l. 1.
(b) Per 39. l. 1.
(c) Per cor. 2. huj. prop.

Cor. 6. *Cùm itaque in Planetarum primariorum Systemate , Areæ radiis ad Solem ductis sint semper temporibus proportionales , uti Astronomis est notissimum ; Urgentur Planetæ vi perpetuâ ad Solem tendente. Neque aliter de secundariis circa primarios suos est ratiocinandum.*

Fig. 59. Cor. 7. *Sit parallelogrammi BCEL diameter BE , & productis CE , LE fiat parallelogrammum AOEI parallelogrammo BLEC simile , similiterque positum , diametrum habens AE : dico quòd parallelogrammorum CL , OI diametri BE , AE in directum jacent. Nam productis BC , AO , & BL , AI perficiatur parallelogrammum SF ; & propter CE : EI ::* (d) *LE : EO , erit CI : IE ::* (e) *LO : OE ; &* (f) *alternatim , CI : LO :: IE : OE , hoc* (g) *est , SA : AF :: OA : AI. Parallelogramma igitur SF , OI* (h) *similia , similiter posita , & communem angulum ad A habentia , per hanc prop. circa eandem diametrum existunt. Atque eodem modo demonstrabitur parallelogramma SF , CL circa eandem diametrum existere. Liquet igitur diametros AE , EB partes esse diametri AB , & proinde in directum jacere.*

(d) Per hyp.
(e) Per 18. l. 5.
(f) Per 16. l. 5.
(g) Per 34. l. 1.
(h) Per def. 1. l. 6.

Cor. 8. *Si duo triangula AOE , ECB , quæ latera duo AO , OE duobus EC , CB proportionalia habent , (ut sit AO : OE ::*

EC :

EC : CB,) secundum unum angulum OEC ita componantur, ut latera homologa sint parallela, nempe AO ipsi EC, & OE ipsi CB; erunt reliqua latera AE, EB in directum. Productis enim OE, CE, ductisque ad illas parallelis AI, BL, perficiantur parallelogramma OI, CL; quæ propter parallelas OA, CI, BL, & AI, OL, CB, erunt (a) *æquiangula, & similiter posita; & propter AO: OE :: EC: CB, erunt etiam similia* (b) *ac proinde per cor. præcedens, eorum diagonales AE, EB in directum jacent. Q. E. D.* (a) Per 27. l. 1. (b) Per def. 1. l. 6.

Hoc autem corollarium propositionem 32. hujus l. 6. nobis exhibet; quam quoniam omiserat Tacquetus, ex hac. prop. 26. mediante corollario septimo deducendam censuimus.

PROPOSITIO XXVII.

OMnium parallelogrammorum (AD, AF) secundùm eandem rectam (AB) applicatorum, & deficientium parallelogrammis (CE, IH) similibus & similiter positis, ei parallelogrammo (AD) quod super dimidiâ AB describitur; maximum est illud (AD) quod ad dimidiam applicatum est, simile existens defectui (CE.) *Fig. 65, 66.*

Applicentur ad rectam AB bisectam in C, parallelogrammum ACDL, & quodvis aliud AIFG, deficientia parallelogrammis CBED, & IBHF, similibus & similiter positis ipsi AD parallelogrammo quod a dimidiâ recta AB describitur: Dico parallelogrammum AD parallelogrammo AF majus esse.

Hujus autem propositionis casus sunt duo: vel enim parallelogrammi AF basis AI est ipsâ AC major, vel minor.

1. *Sit primò major, ut in Fig. 65. Et quoniam parallelogramma CE, IH communem angulum CBE vel IBH habentia, similia & similiter posita sunt* (c); *circa diametrum eandem DFB* (d) *erunt; & producta IF ad K, erit CF ipsi FE* (e) *æquale. Commune apponatur IH, eritque CH = IE. Sed propter AB bisectam in C,* (f) *erit GC = CH: Ergo & GC = IE. Commune adjiciatur CF, & erit AF = CF + IE. Sed CE, (hoc est,* (g) *AD, propter æquales bases AC, CB) majus est quàm CF + IE: AD igitur est ipso AF majus.* *Fig. 65.* (c) Per hyp. (d) Per præc. (e) Per 43. l. 1. (f) Per 36. l. 1. (g) Per eand.

2. *Deinde sit AI minor quàm AC, ut in Fig. 66. Et quoniam parallelogramma CE, IH communem angulum CBE vel IBH habentia, similia sunt & similiter posita* (h); *circa eandem dia-* *Fig. 66.* (h) Per hyp.

(a) Per præc. *diametrum* (a) *BDF erunt. Ducatur diameter, & describatur figura. Et propter æquales AC, CB,* (b) *æquabuntur LD, DE: unde & parallelogramma GD, DH æqualia* (c) *erunt. Parallelogrammum igitur DH est parallelogrammo GK majus. Sed DH* (d) = *DI: ergo DI majus est quàm GK. Commune apponatur AK, & parallelogrammum AD parallelogrammo AF majus erit.*

(b) Per 34. l. 1. (c) Per 36. l. 1. (d) Per 43. l. 1.

Omnium itaque parallelogrammorum secundùm eandem rectam applicatorum; & deficientium parallelogrammis similibus & similiter positis ei quod a dimidiâ describitur, maximum illud est quod ad dimidiam applicatur. Q. E. D.

Fig. 67. Cor. 1. *Si ad eandem rectam AB applicentur parallelogramma AF, AΦ deficientia parallelogrammis IH, ιn similibus & similiter positis ipsi AD (vel CE) parallelogrammo quod a rectâ AB dimidiâ describitur, ita tamen ut sit summa rectarum IB + ιB = AB, (hoc est, Aι = IB, & CI = Cι;) Parallelogramma AF, AΦ erunt æqualia. Nam propter æquales AC, CB, & ιC, CI,* (e) *æquantur etiam GN, NH, & ON, NF: & in triangulo FOΦ, propter rectas ND, Dn lateribus ΦO, OF respectivè parallelas, erit* (f) *etiam FD = DΦ, & On = nΦ. Unde propter bases æquales,* (g) *erit NL = NE, & Nn = NK: ergo OL (= FE =* (h) *FC) =* (i) *OC, & 2OL sive Oγ = 2OC sive OI. Commune apponatur AO, eritque AΦ = AF.* Q. E. D.

(e) Per 34. l. 1. (f) Per 2. l. 6. (g) Per 36. l. 1. (h) Per 43. l. 1. (i) Per 36. l. 1.

Cor. 2. *Si ad rectam AB applicentur parallelogramma æqualia AF, AΦ, deficientia parallelogrammis IH, ιn similibus & similiter positis parallelogrammo AD (vel CE) quod super dimidiâ ipsius AB describitur, punctis I & ι in rectâ AB jacentibus; Erit IB + ιB = AB, hoc est, Aι = IB. Nam productâ rectâ IK ad M, propter* (k) *AΦ = AF, ablato communi AO, erit GΦ = ιF =* (l) *HM. Ergo & GO* (m) *= FH, ac proinde* (n) *Aι = IB.*

(k) Per hyp. (l) Per 43. l. 1. (m) Per 1. l. 6. (n) Per 34. l. 1.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 68. AD datam rectam (AB,) dato rectilineo (C.) æquale parallelogrammum (AI) applicare, deficiens parallelogrammo (ON) quod simile sit alteri dato (D.) Oportet autem datum rectilineum (C) cui æquale applicandum est, non (o) majus esse parallelogrammo (AG) quod ad dimidiam datæ (AB) applicatur; similibus existentibus,

(o) Per præc.

bus, & eo (AG) quod ad dimidiam applicatur, & (EF) defectu ejus, illi parallelogrammo (D) cui simile (ON) deficere debet.

Bisecetur AB in E; & super rectâ AE, (a) describatur, parallelogrammo dato D, simile parallelogrammum AG, & compleatur parallelogrammum AF. Erit quoque EF ipsi AG, ac proinde dato D simile. Erit etiam EF ipsi AG similiter positum, & aquale. Et cùm per determinationem, AG non sit minus rectilineo C, erit vel ei aquale, vel eo majus. Si sit AG = C, factum est quod petebatur: Ad datam enim rectam AB dato rectilineo C aquale parallelogrammum AG applicatur, deficiens parallelogrammo EF, dato D simili. (a) Per 18. l. 6.

Si verò parallelogrammum AG sit rectilineo C majus; (b) inveniatur excessus ipsius AG vel EF, supra rectilineum C; & illi excessui aquale, ipsi verò EF simile & similiter positum fiat (c) parallelogrammum KL, cum ipso EF communem angulum habens G. Parallelogramma igitur EF, KL, circa eandem diametrum GIB (d) existunt. Producatur KI ad M, N; & LI ad O; & erunt parallelogramma ON, EF, circa eandem diametrum GB, & (e) proinde similia. Ergo (f) etiam ON simile est dato D. Et quoniam KL est excessus parallelogrammi EF supra datum rectilineum C; si itaque e parallelogrammo EF auferatur KL, quod reliquum est aquale erit ipsi C; adeoque erit rectilineum C aquale parallelogrammis EN, IF simul sumptis, hoc est, (propter EN (g) = AK, & (h) IF = EI) aquale parallelogrammo AI. Ergo ad datam rectam AB, dato rectilineo C aquale parallelogrammum AI applicatur, deficiens parallelogrammo ON, quod simile est dato D. Q. E. F. (b) Per cor. p. 45. l. 1. (c) Per 25. l. 6. (d) Per 26. l. 6. (e) Per 24. l. 6. (f) Per 21. l. 6. (g) Per 36. l. 1. (h) Per 43. l. 1.

Scholium. *Ex casu 2. & cor. 1. prop. praced. emergit alia methodus hoc problema construendi, si nempe, super datâ AB constitutis ut priùs AG, EF dato D similibus, producantur ipsius EF latus EG & diameter BG, & circa hanc, in angulo ipsi EGF ad verticem opposito, fiat (i) parallelogrammum SGTQ, aquale excessui ipsius AG vel EF supra rectilineum C, ipsique EGFB simile, similiterque positum. Unde ST erit simile, similiter positum & (k) aquale ipsi KL in constructione priori. Productis AH, BF, QS, QT, compleantur parallelogramma AQ, PR: Erit (l) PR simile ipsi EF, ac proinde dato D. Et propter ST, KL similia, similiter posita & aqualia, erit SG = GL, hoc est, (m) PE = EO. Unde (n) AP = OB, & (o) AQ = AI = C. Ad datam igitur rectam AB, dato rectilineo C aquale parallelogrammum AQ applicatur, deficiens parallelogrammo PR, quod simile est dato D.* Fig. 69. (i) Per 25. l. 6. (k) Per axio. 1. l. 1. (l) Per 24. l. 6. (m) Per 34. l. 1. (n) Per axio. 3. l. 1. (o) Per cor. 1. prae.

 Cor. 1.

Fig. 70. Cor. 1. *Si parallelogrammum datum D quadratum sit; problema sic efferetur:* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicare, deficiens quadrato. *Et data recta applicabitur rectangulum AI deficiens quadrato ON, vel rectangulum AQ deficiens quadrato PR. Unde, cùm per hujus prop. (vel scholii) constructionem, rectangulum AI unà cum quadrato KL, (vel rectangulum AQ unà cum quadrato ST) æquale sit quadrato AG vel EF; patet prop. 5. lib. 2. ex hac prop. 28. l. 6. immediate deduci. Sic enim exprimitur prop. illa 5. l. 2.* Si recta AB secta fuerit in partes æquales, AE, EB, & in partes inæquales AO, OB (vel AP, PB;) Erit rectangulum AI (vel AQ) sub partibus inæqualibus, unà cum KL (vel ST) quadrato partis intermediæ EO (vel EP,) æquale quadrato dimidiæ AE vel EB. *Quæ nihil aliud est, quàm prop. hujus 28. casus ille particularis, qui in hoc corollario describitur.*

Fig. 70. Cor. 2. *Datâ rectâ AB & rectilineo C, per hanc pr. 28. ejusque scholium, habebitur OB vel PB, latus quadrati quo deficit rectangulum AI vel AQ, rectilineo C æquale, & ad datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognitâ OB ponatur Y; unde* $AN = AB \times Y$, *&* $ON = Yq$; *ergo* $AI\ (= AN - ON) = AB \times Y - Yq = C$. *Atque idem omnino colligitur si ponatur* $Y = PB$: *erit enim* $AQ = AR - PR = AB \times Y - Yq = C$. *Atque hæc est prima* (a) *æquationum affectarum quadraticarum species sive forma, quam ex hac prop. 28. solverunt Geometræ veteres, inveniendo quantitatem incognitam OB vel PB, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB, & deficientis quadrato. Manifestum autem est, primam hanc formam, duplicem solutionem admittere: Y enim vel per OB vel per PB explicari potest; quarum illa (OB) per propositionis, hæc (PB) per scholii constructionem invenietur. Patet etiam ex cor. 2. pr. 27. duas illas quantitates simul sumptas* (OP + PB) *datæ rectæ AB æquales esse; unde ut utraque inveniatur, duplici constructione opus non est: inventâ enim unâ quavis OB, altera AO vel PB simul innotescit.*

(a) *Vide Oughtredi Clav. Mathematica, cap. 16. §. 9.*

Fig. 70. Cor. 3. *Ipsa etiam regula quâ ad hujus formæ æquationes solvendum utuntur recentiores, ex hujus prop. 28. constructione deducitur. Cùm enim Y sit vel* $(PB =)\ AO$, *vel* OB, *sitque* $AO = \frac{1}{2}AB + EO$, *&* $OB = \frac{1}{2}AB - EO$: *Et cùm sit* $EO = KI$; *& per constr. pr. 28.* $KIq = EBq - C =$ (b) $\frac{1}{4}ABq - C$, *erit KI vel* $EO = \sqrt{\frac{1}{4}ABq - C}$. *Ergo Y erit*

vel $AO = \frac{1}{2}AB + \sqrt{\frac{1}{4}ABq - C}$,

vel $OB = \frac{1}{2}AB - \sqrt{\frac{1}{4}ABq - C}$.

(b) *Per cor. 2. p. 4. l. 2.*

Atqui, pro æquatione $AB \times Y - Yq = C$, *regula est* $\frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C} = Y$. *Vide Oughtredum loco supra citato.*

Cor. 4. *Hinc in æquatione* $AB \times Y - Yq = C$, *datâ rectâ AB & rectilineo C, expeditiùs invenietur Y, si rectilineo C æquale* (a) *quadratum construatur, cujus latus ex illâ constructione inventum sit V, cui ex E medio puncto data recta AB, perpendiculum æquale EX erigatur: tum centro X, radio* $XO = \frac{1}{2} AB$ *arcum circuli describe, secantem AB in O: recta AO, OB erunt valores ipsius Y: Nam* $Y =$ (b) $\frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. *Sed per constr. est* $XOq = \frac{1}{4} ABq$, & $XEq = C$. *Ergo EOq sive* (c) $XOq - XEq = \frac{1}{4} ABq - C$. *Ergo* $EO = \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, & $AO = \frac{1}{2} AB + EO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, *sicut &* $OB = \frac{1}{2} AB - EO = \frac{1}{2} AB - \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$.

Fig. 71. (a) *Per* 14. *l.* 2. (b) *Per cor.* 3. *hujus.* (c) *Per* 47. *l.* 1.

PROPOSITIO XXIX.

AD datam rectam (AB) dato rectilineo (C) æquale parallelogrammum (AI) applicare, excedens parallelogrammo (ML) quod simile sit alteri dato (D.)

Fig. 72.

Bisecetur AB in E, & super rectâ EB (d) *describatur parallelogrammo dato D simile parallelogrammum BEFG; atque ipsis C, EG simul sumptis æquale, ipsi verò FEBG simile, similiterque positum fiat* (e) *parallelogrammum FKIH communem cum illo habens angulum ad F. Erunt* (f) *igitur parallelogramma EG, HK circa eandem diametrum FBI. Producantur AB, GB, ad L, M; Et cùm simile sit EG ipsi D per constructionem, atque* (g) *ipsi ML quia circa eandem diametrum sunt EG, ML; inde colligitur* (h) *ML ipsi D simile esse. Productâ MK, compleatur parallelogrammum AM; eritque AK =* (i) *KB =* (k) *BH. Quare si æqualibus AK, BH commune adjiciatur KL; erit AI parallelogrammum æquale parallelogrammis KL, BH simul sumptis. Parallelogrammum autem KH (hoc est, EG + KL + BH) æquale est ipsis EG + C per constructionem: adeoque sublato communi EG, erit C = KL + BH = AI. Ad datam igitur rectam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum AI applicatur, excedens parallelogrammo ML, quod dato D simile est.* Q. E. F.

(d) *Per* 18. *l.* 6. (e) *Per* 25. *l.* 6. (f) *Per* 26. *l.* 6. (g) *Per* 24. *l.* 6. (h) *Per* 21. *l.* 6. (i) *Per* 36. *l.* 1. (k) *Per* 43. *l.* 1.

Fig. 73. Cor. 1. *Si parallelogrammum D sit quadratum, problema postulat ut* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicetur, excedens quadrato. *Et cùm per constructionem, rectangulum AI unà cum quadrato EG æquale sit quadrato KH; patet prop. 6. lib. 2. ex hac pr. 29. l. 6. immediatè deduci posse: nempe,* Si recta AB bisecta fuerit in E, eique recta quædam BL adjiciatur; Erit (AI) rectangulum sub totâ compositâ AL & adjectâ BL sive LI, unà cum (EG) quadrato dimidiæ, æquale quadrato (KH) rectæ KI vel EL compositæ ex dimidiâ & adjectâ. *Nihil enim aliud est hæc prop. 6. l. 2. quàm propositionis 29. l. 6. casus ille particularis, qui in hoc corollario describitur.*

Fig. 73. Cor. 2. *Datâ rectâ AB & rectilineo C, per hanc prop. invenerunt veteres Geometræ latera AL, LI rectanguli AI rectilineo C æqualis, quod ad datam AB ita applicari debet, ut excedat quadrato: quæ latera apud recentiores Analystas,* (a) *per æquationum quadraticarum affectarum secundæ ac tertiæ speciei resolutionem inveniuntur. Etenim si pro latere LI ponatur E, erit* $ML = Eq.$ & $AM = E \times AB$: *ergo AI sive* $C = Eq + E \times AB$: *quæ est tertia æquationum quadraticarum species, in quâ per hanc prop. invenitur E sive BL vel LI, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB, & excedentis quadrato. Invento autem latere LI sive E, simul habetur latus alterum* $AL = AB + E$, *quod inveniunt recentiores, per resolutionem æquationis quadraticæ, secundæ speciei.*

(a) Vide Oughtredi Clav. cap. 16. n. 9.

Fig. 73. Cor. 3. *Hæc etiam secunda æquationum affectarum quadraticarum species, inventis per corollarium præcedens rectanguli AI (rectilineo C æqualis, ad datam rectam AB applicati, & excedentis quadrato) lateribus AL, LI, sic construi potest. Describatur* (b) *recta AL sive IP quadratum IPQR, cujus pars sit rectangulum AI. Et quoniam* $AL = IR$, & $BL = LI$, *erit* (c) $LR = AB$. *Jam si pro AL ponatur A, erit* $PR = Aq$, & $AR = A \times AB$; *unde AI sive* $C = (PR - AR =)\ Aq - A \times AB$; *quæ est æquationum quadraticarum secunda species, per hoc corollarium construenda.*

(b) Per 46. l. 1.
(c) Per axio. 3. l. 1.

Cor. 4. Recentiorum (d) *etiam regulæ, (sc.* $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} + \frac{1}{2} AB = A$, & $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB = E$,) *quarum ope, ex æquatione* $Aq - A \times AB = C$, *invenitur A, & ex æquatione* $Eq + E \times AB = C$, *invenitur E, Ex hujus prop. constructione deduci possunt. Cùm enim sit* $EB = \frac{1}{2} AB$, *erit* $EG =$ (e) $\frac{1}{4} ABq$: *Et per constr. hujus,* $KH = EG + C = \frac{1}{4} ABq + C$, *cujus itaque latus KI sive* $EL = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$, *cui si AE vel* $\frac{1}{2}$ *AB adjiciatur, erit AL sive* $A =$

(d) Vide Oughtredum loco citato.
(e) Per cor. 3. p. 4. l. 2.

$A = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} + \frac{1}{2} AB$. *Porro, si ab* $EI = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$ *auferatur EB, sive* $\frac{1}{2}$ *AB, relinquetur BL sive E* $= \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB$.

Cor. 5. *Ex his autem regulis, in utralibet æquatione, sive* $Aq - A \times AB = C$, *seu* $Eq + E \times AB = C$, *datâ rectâ AB, & rectilineo C, expeditiùs invenientur A & E, si rectilineo C æquale quadratum* (a) *construatur, cujus latus inde inventum sit N, cui ex medio puncto recta data AB, æquale perpendiculum EO erigatur, & jungatur OB, cui æqualis in EB producta, capiatur EL, eritque AL = A, & BL = E. Cùm enim sit* $EOq =$ (b) C, *erit* $EBq + EOq = \frac{1}{4} ABq + C =$ (c) $OBq = ELq$. *Ergo EL* (d) $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$, *& AL* $=$ (e) $\frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} = A$; *atque BL* $=$ (f) $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB = E$.]

Fig. 74. (a) Per 14. l. 2. (b) Per construct. (c) Per 47 l. 1. (d) Per axio. 15. (e) Per axio. 2. (f) Per axio. 3.

PROPOSITIO XXX.

Datam rectam (AB) ita secare, ut tota (AB) sit ad unum segmentum (AC) sicut idem segmentum est ad reliquum (CB.) Fig. 75.

Hoc est, (ut loquuntur Geometræ,) lineam extremâ ac mediâ ratione secare.

[*Super datâ rectâ AB fiat quadratum AFSB, & ad rectam FA, quadrato FB æquale* (g) *applicetur rectangulum FOLI, excedens figurâ AL ipsi FB simili. AL itaque quadratum est. Et quoniam FL æquale est ipsi FB; ablato communi FC, erit AL = OB. Et propter angulos rectos, ac proinde æquales, OCB, ACL,* (h) *erit OC : CL :: AC : CB. Sed OC =* (i) *AF = AB, & CL = AC: Ergo AB : AC :: AC : CB. Factum est igitur quod petebatur.*

Fig. 21. l. 2. (g) Per 29. l. 6. (h) Per 14. l. 6. (i) Per 34. l. 1.

Aliter.] Per 11. 2. ita seca AB in C, ut rectangulum sub AB, CB, sit æquale quadrato AC. Dico factum. Fig. 75. l. 6.

Erit enim per 17. ut AB ad AC, sic AC ad CB.

Hujus sectionis vis admirabilis est in corporum regularium inscriptione & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 76.

SI a lateribus trianguli rectanguli (ACB) figuræ similes quæcunque describantur, erit (F) ea quæ opponitur recto angulo, duabus simul reliquis (R, L) æqualis.

Propositio igitur 47. l. 1. hic redditur universalis.

Ab angulo recto C dimittatur perpendicularis CO. Quoniam AB, BC, BO sunt (*a*) tres proportionales, erit F ad sibi similem R, (*b*) ut AB prima ad BO tertiam. Rursum quoniam (*c*) BA, AC, AO sunt proportionales, erit F ad sibi similem L, ut (*d*) BA prima ad AO tertiam. Quia igitur est F ad R, ut AB ad BO, & F ad L, ut AB ad AO, erit quoque F ad R & L simul sumptas, ut (*e*) AB ad BO, AO simul sumptas. Sed AB duabus BO, AO æqualis est. Ergo etiam F duabus R & L æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per cor. 2. p. 8. l. 6.* (b) *Per cor. 2. p. 20. l. 6.* (c) *Per cor. 2. p. 8. l. 6.* (d) *Per cor. 2. p. 20. l. 6.* (e) *Per 24. l. 5.*

Corollarium.

EX hac propositione facile dabitur quotcunque figuris similibus rectilineis quibuscunque una omnibus æqualis & similis, eâdem prorsus methodo, quâ probl. 1. scholii post 47. l. 1. exhibetur datis quotlibet quadratis unum æquale. In demonstratione tantùm pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6. [*Et pari ratione, per prob. 2. scholii ejusdem, dabitur figurarum similium differentia similis: hoc est, non tantùm addi possunt, verùm etiam subtrahi figuræ quævis similes, minor a majore, eâdem methodo quâ quadrata adduntur vel subtrahuntur in scholio citato.*]

PROPOSITIO XXXII.

VIX habet usum, nec quidquam habet notabile. [Est autem cor. 8. p. 26. priùs, ne quis eam desideraret.]

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

IN æqualibus circulis vel eodem, anguli sive ad centra (ut ABC, FOD) sive ad peripheriam (ut ARC, FSD) eam inter se rationem habent, quam arcus (AKC, FGD) quibus insistunt. Idem intellige de sectoribus. Fig. 77.

Quod attinet ad angulos centri & sectores, demonstrabitur eodem prorsus modo, quo propositione 1. hujus libri demonstratum est triangula æque alta esse ut bases. Tantùm ubi istic citatur prop. 38. l. 1, hîc citetur 29. lib. 3. [*Item pro E isthic, vertice trianguli DEF, hîc ponitur O vertex anguli & sectoris DOF; pro triangulis verò isthic, substitue hîc angulos ad centra B, O, itemque sectores; & pro basibus arcus.*

Quoties enim pars quævis aliquota ex. gr. pars tertia DG, arcûs DF, continetur in arcu AC; toties eadem pars aliquota DOG, anguli DOF, continebitur in angulo ABC. Et manifestum est quamlibet aliam partem aliquotam arcûs DF & anguli DOF, in arcu AC & angulo ABC, æquali semper numero respectivè contineri. Ergo, per rationem æqualium indicium illud Tacquetianum, pag. 122. 123. erit angulus ABC ad angulum DOF, ut arcus AC ad arcum DF: Et eodem prorsus modo probabitur sectorem ABC esse sectorem DOF, ut arcus AC est ad arcum DF.]

Quoniam verò ad peripheriam anguli R & S dimidii (a) sunt angulorum ad centrum ABC, FOD, quod de his ostensum est, liquebit etiam de illis. (a) Per 20. l. 3.

Corollaria.

1. ANgulus centri (BAC) est ad quatuor rectos, ut arcus BC cui insistit, ad totam circumferentiam. Fig. 78.

Nam [*cùm quatuor rectos, hoc est, (b) omnes angulos circa centrum A constitutos, metiatur tota circuli circumferentia, unum igitur angulum rectum BAF metietur totius circumferentiæ quadrans BF. Sed*] ut [*angulus*] BAC est ad rectum BAF, ita per hanc 33. arcus BC est ad quadrantem BF, Ergo (c) angulus BAC est ad 4. rectos, ut arcus BC est ad 4. quadrantes, hoc est ad totam peripheriam.

(b) Per cor. 3. pr. 13. l. 1. cum sch. p. 23. l. 1.

(c) Per 24. l. 5.

2. Inæqualium circulorum arcus IL, BC, qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra ut IAL, & BAC, sive ad peripheriam, sunt similes. [*Et conversim.*]

Nam

Nam [*primò, ponentur anguli æquales ad centra; &*] arcus IL est ad suam peripheriam, ut (a) angulus IAL, hoc est ut BAC, ad 4. rectos; & arcus BC est ad suam peripheriam (b) ut idem angulus BAC ad 4. rectos. Ergo IL (c) est ad suam peripheriam, ut BC ad suam. Ergo (d) sunt similes arcus IL & BC.

(a) *Per cor.* 1. (b) *Per idem cor.* (c) *Per* 11 *l.* 5. (d) *Per def.* 4. *l.* 6. (e) *Per* 20. *l.* 3. *& axio.* 6. *l.* 1.

[*Si verò anguli æquales O, K fuerint ad circumferentias; fiant super iisdem arcubus anguli ad centra IAL, BAC,* (e) *eruntque hi etiam æquales: unde per primam partem arcus IL, BC similes erunt.*

Et e converso, inæqualium circulorum similes arcus BC, IL subtendunt angulos æquales, sive anguli isti sint ad centrum seu ad circumferentiam, uti ex ipsâ figurâ & prop. 20. *l.* 3. *satis patet,*].

3. Duæ semidiametri (AB, AC) a concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL, BC. Patet ex coroll. 2.

4. [*Ductis rectis BC, IL,*] Segmenta (BKC, IOL) quæ angulos capiunt æquales (K, O,) similia sunt. [*Et conversim.*]

Nam per coroll. 2. arcus BC, IL, ac proinde etiam arcus BKC, IOL similes sunt. [*Ergo* (f) *& segmenta BKC, IOL similia sunt.*

(f) *Per def.* 4. *l.* 6.

Item segmenta opposita similia sunt, propter arcus BC, IL similes.

Et e converso, segmenta similia BKC, IOL capiunt angulos æquales K, O. Nam (g) *propter similes arcus BKC, IOL, arcus oppositi BC, IL similes erunt, & anguli K, O, super ipsis* (h) *æquales.*

Item, anguli in segmentis BC, IL sunt æqualium angulorum K, O (i) *complementa ad duos rectos, atque inde æquales erunt.*

(g) *Per def.* 4. *l.* 6. (h) *Per cor.* 2. *hujus.* (i) *Per* 22. *l.* 3.

5. *Similia segmenta super eâdem rectâ, vel æquali, sunt æqualia. Patet ex cor. præced. & schol. p.* 21. *l.* 3. *& axio.* 7. *l.* 1. *Continet autem hoc corollarium propositiones* 23. *&* 24. *l.* 3. *a Tacqueto omissas. Prop. enim* 23. *ita effertur:* Super eâdem rectâ lineâ, duo circulorum segmenta similia & inæqualia, ex eâdem parte non constituentur. *Et prop.* 24. *ita:* Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

6. *Ex hac etiam prop. ejusque corollariis deducitur angulorum conficiendorum & mensurandorum praxis facillima, prout in scholio post prop.* 23. *lib.* 1. *latiùs explicatur.*

Scholium.

Scholium. *Postulat hic locus, ut fidem libro quarto præstitam jam liberem, Elementi 13. propositionem 10. demonstrando, quæ ita se habet*: Quadratum lateris AB pentagoni ordinati ABCDE circulo inscripti, æquatur quadratis e latere hexagoni & e latere decagoni eidem circulo inscriptorum, simul sumptis. *Ductâ enim diametro AG, & ratio FB; a centro F lateri AB perpendicularis demittatur FH, quæ producta circulo occurrat in K: Illa arcum AKB, (hoc est* (a) *quintam partem totius circumferentiæ) bifariam dividet* (b) *in K. Junge BK, KA; & cùm sit arcus AK pars decima totius circumferentiæ, erit AK recta,* (c) *latus decagoni ordinati huic circulo inscripti. A centro F, ipsi AK perpendicularis demittatur FN, quæ producta circulo occurrat in M; hæc arcum AMK bifariam dividet in M, & latus pentagoni BA secabit in L. Junge KL. Ob semiperipherias ABG, AEG æquales, & arcus ABC, AED æquales; erit arcus CG ipsius CGD, vel AKB dimidius: unde arc. CG = arc. AK = 2 arc. KM. Item, arc. CB = arc. AB = 2 arc. BK. Ergo arc. CG + arc. CB = 2 arc. MK + 2 arc. KB, hoc est, arc. BCG = 2 arc. BKM, & ang. BFG =* (d) *2 ang. BFM. Sed in triangulo ABF, ang. externus BFG =* (e) *ABF + BAF, hoc est, (ob æquales AF, BF)* (f) *= 2 ang. ABF = 2 ang. BAF = (priùs) 2 ang. BFM vel LFB. In triangulis igitur LFB, FAB, ob angulos BFL, BAF æquales, & angulum ad B communem,* (g) *etiam ang. BLF = ang. BFA, &* (h) *AB : BF :: FB : BL. Unde* (i) *rect. ABL = BFq. Porro, in triangulis ALN, KLN, ob angulos ad N rectos, & latera AN, NK* (k) *æqualia, & LN commune,* (l) *erit AL = LK, & ang. LAK = ang. AKL. Sed & ang. KBA =* (m) *ang. KAB vel LAK sive AKL: ergo in triangulis BAK, KAL, propter angulum ad A communem, & angulos ABK, AKL æquales, erit ang. AKB =* (n) *ang. ALK, & triangula BAK, KAL erunt similia: unde BA : AK :: KA : AL, & rect. BAL = AKq. Sed rect. ABL + rect. BAL =* (o) *ABq. Ergo ABq = BFq + AKq. Sed BF est circuli radius, & proinde* (p) *latus hexagoni ordinati circuli inscripti; & AK est latus decagoni ordinati eidem circulo inscripti. Ergo quadratum ex latere pentagoni ordinati æquatur quadratis e latere hexagoni ordinati & e latere decagoni ordinati, eidem circulo inscriptorum, simul sumptis. Q. E. D.]*

Fig. 79.

(a) Per 26. l. 3.
(b) Per 30. l. 3.
(c) Per 27. l. 3.
(d) Per 33. l. 6.
(e) Per 32. l. 1.
(f) Per 5. l. 1.
(g) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(h) Per 4. l. 6.
(i) Per 17. l. 6.
(k) Per 3. l. 3.
(l) Per 4. l. 1.
(m) Per 29. l. 3.
(n) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(o) Per 2. l. 2.
(p) Per cor. 1. p. 15. l. 4.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER UNDECIMUS.

NOBIS SEPTIMUS.

SEX libris primis subjungit Euclides elementa numerorum tribus sequentibus septimo, octavo & nono comprehensa, quibus etiam decimum de quantitatibus incommensurabilibus adjungit. Nos a planis immediate transimus ad solida; de numeris seorsim tractaturi. Id opinor, discentibus commodius erit, si elementa Geometriæ nullâ aliâ tractatione interruptâ, simul omnia habeantur. Nihilominus cùm citabimus propositiones hujus & sequentis libri, eos non septimum & octavum, sed undecimum & duodecimum appellabimus, ne, si ab ordine Euclideo ubique recepto discedamus, propositionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In primâ jaciuntur fundamenta, quibus solidorum, hoc est, corporum doctrina universa nititur. Alterâ parallelepipedorum affectiones proponuntur.

P*Rima solidorum Principia* Undecimus *hicce Elementorum Liber proponit. Neque sane Corporum proprietates sine eo cognosci queunt: & si Mathematum partes plerasque omnes sine solidorum scientiâ aggrediamur, frustra erimus. Doctrina enim Theodosii Spherica, Trigonometria etiam Spherica, pars magna Geometriæ Practicæ, Statica, atque Geographia eidem innituntur; & quæ occurrent paulo difficiliora in Gnomonicâ, Sectionibus Conicis, Astronomiâ, Perspectivâ, atque Opticâ universâ, intellectis ritè Solidorum principiis, faciliora redduntur. Adeo ut qui Geometriæ Elementa, omissis fere & posthabitis hoc & sequenti libro, tradiderunt, eadem manca admodum, atque plane imperfecta tradidisse sint censendi.*

DEFI-

DEFINITIONES.

1. SOlidum sive corpus est, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.

2. Solidi extremum est superficies.

3. Linea recta (AB) est ad planum (CC) recta sive perpendicularis, cùm ad rectas omnes lineas (CA) in plano (CC) ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit (BAC, BAC.) Fig. 1. l. 11.

4. Planum ad planum rectum sive perpendiculare est, cùm omnes rectæ lineæ (LQ,) quæ communi planorum sectioni (XR) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ sunt alteri plano (ABCO.) Fig. 2.

5. Si recta linea (OL) plano insistat non ad rectos angulos, & a sublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur perpendicularis LP, jungaturque PO; angulus LOP dicitur inclinatio lineæ OL ad planum. Fig. 3.

6. Si planum (RE) plano (OQ) non insistat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio est acutus angulus (ABC) qui continetur a rectis lineis (AB & BC) quæ in utroque plano ad communem sectionem (OE) ducuntur perpendiculares. Fig. 4.

7. Planum ad planum similiter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli sunt æquales.

[*Et eodem modo, recta linea ad planum similiter inclinatur, ac alia recta ad idem vel aliud planum, si inclinationum anguli def. quintâ descripti, fuerint æquales.*]

8. Parallela plana sunt, quæ in omnem partem producta, æqualibus semper intervallis distant.

9. Similes figuræ solidæ rectilineæ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

10. Angulus solidus rectilineus est; qui pluribus quàm duobus planis angulis (BAC, CAO, OAB) non in eodem existentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur. Fig. 5.

11. Æquales solidi anguli sunt, qui intra invicem positi congruunt.

Quemadmodum angulus planus est inclinatio linearum, ita solidus angulus est inclinatio superficierum. De utroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Consule scholium post prop. 16. l. 3.

12. Prisma est figura solida, planis comprehensa, quorum adversa duo (OFE, ACB) sunt parallela, æqualia & similia. Fig. 6, 7, 8.

13. Pa-

Fig. 8. 13. Parallelepipedum est solidum ex quadrilateris ex adverso parallelis comprehensum.

14. Si sex plana ex adverso parallela sint quadrata, solidum iis comprehensum cubus erit.

[15. *Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.*

Hanc definitionem (Euclidi decimam) perperam omittit noster; atque inde propositionum 25. & 28. demonstrationes Tacquetianæ videntur esse minus accuratæ.]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 9. *Recta linea pars una (AC) nequit esse in subjecto plano (OE,) altera (CB) extra planum.*

Per se clarum est ex definitione plani & lineæ rectæ. Vide defin. 7. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

Fig. 10. *Omne triangulum in uno est plano. Et duæ rectæ se mutuò secantes in eodem plano sunt.*

Prima pars per se clara est, cùm triangulum nihil sit aliud quàm plana superficies tribus rectis comprehensa. Ex quo etiam [*& ex prop. præced.*] patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Fig. 11. *Si duo plana (AB, CD) se mutuò secant; (EF) communis eorum sectio est recta linea.*

Patet ex definitione plani. Licebit tamen sic demonstrare. Si EF sectio communis non est recta linea; ducatur in plano CD recta EOF, & in plano AB recta EQF. Duæ igitur rectæ EOF, EQF claudent spatium. Quod est absurdum.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI recta (BA) duabus rectis (CAX, FAS) se mutuò secantibus perpendicularis existat; etiam plano per ipsas ducto perpendicularis erit. Fig. 12.

Si negas, alia recta BQ plano rectarum AC, AF sit perpendicularis. Junge AQ, & huic in plano FAC duc perpendicularem QO. Hæc producta, necessariò secabit aliquam rectarum CAX, FAS, vel utramque, ubicunque tandem fuerit punctum Q. [*Si enim recta QO, rectarum alterutri FAS parallela sit; QO secabit* (a) *alteram CAX: si verò neutri illarum sit parallela, secabit* (b) *utramque.*] Secet ergo CAX in O, jungaturque BO. Quoniam ergo angulus BAO per hyp. rectus est; (a) *Per cor. 2. sch. post p. 31. l. 1.* (b) *Per cor. 1. sch. post p. 31. l. 1.*

erit quad. BO Æ. (*c*) quad. BA
quad. AO. (c) *Per 47. l. 1.*

Sed quia BQ ponitur recta plano FAC, ac proinde (*d*) rectum facit cum AQ angulum BQA; est (d) *Per def. 3. l. 11.*

quad. BA (*e*) Æ. quad. BQ
quad. AQ. (e) *Per 47. l. 1.*

Et quia angulus AQO per const. rectus est;

quad. AO Æ. (*f*) quad. OQ
quad. AQ. (f) *Per eand.*

Ergo quad. BO Æ quad. BQ
quad. OQ
quad. AQ bis.

Ergo quad. BO majus est [*quadratis*] BQ & OQ; ac proinde (*g*) angulus BQO rectus non est. Ergo BQ non est recta (*h*) plano CAF. Liquet ergo quæsitum. (g) *Per cor. 4. p. 47. l. 1.* (h) *Patet ex def. 3. l. 11.*

Scholium.

EX eo quod ponebatur BQ esse recta plano FAC; directe est demonstratum BQ non esse rectam plano FAC: ac proinde ex eo quod negaretur assertio theorematis, eadem assertio directè probata est. Hæc demonstratio quoad substantiam est Joannis Ciermans.

PROPOSITIO V.

Fig. 13. *SI tres rectæ (BA, CA, FA) eidem rectæ (AR) ad idem punctum (A) sint perpendiculares; tres illæ erunt in uno plano.*

Sit enim, si fieri potest, earum una BA in alio plano RO, quod secet LQ planum duarum reliquarum CA, FA, recta AO. Quoniam RA per hyp. perpendiculariter insistit duabus CA, FA, plano LQ recta (a) erit. Ergo cum AO rectum facit (b) angulum RAO. Sed etiam ex hyp. angulus RAB rectus est. Ergo anguli RAB & RAO æquales sunt. Quod est absurdum.

(a) Per præ.
(b) Per def. 1. l. 11.

PROPOSITIO VI.

Fig. 14. *LInea recta (AB, CD) quæ eidem plano (EF) sunt perpendiculares, inter se sunt parallelæ.*

Postulari poterat ut per se notum; licebit tamen sic demonstrare.

Junctâ BD, fac in plano FE, lineam DG normalem ad BD & parem BA, junganturque DA, GA, GB. Rectæ BD, DG æquantur BD, (c) BA; & anguli BDG, (d) DBA sunt recti. Ergo AD, BG (e) sunt æquales. Igitur triangula ABG, GDA sibi mutuò æquilatera sunt, ac proinde anguli ABG, ADG (f) æquales. Sed ABG (g) rectus est. Quare & ADG rectus. Sunt verò & BDG ex constr. & CDG per definit. 3. recti. Ergo GD ad tres CD, AD, BD, recta est. Ergo CD cum AD, BD est in uno (h) plano. Sed etiam AB cum AD, BD (i) in uno plano est. Ergo AB, CD sunt in uno plano. Ergo cùm anguli ABD, CDB sint (k) recti, erunt AB, CD (l) parallelæ. Quod erat demonstrandum.

(c) Per constr.
(d) Per def. 3. l. 11.
(e) Per 4. l. 1.
(f) Per 8. l. 1.
(g) Per def. 3. l. 11.
(h) Per præ.
(i) Per 2. l. 11.
(k) Per def. 3. l. 11.
(l) Per 29. l. 1. & defin. 36. l. 1.

PROPOSITIO VII.

Fig. 15. *REcta (EF) secans rectas (AB, CD) positas in eodem plano, in uno est cum ipsis plano.*

Postulari poterat. Qui volet sic demonstret.

[*Si recta EF non est in plano rectarum AB, CD; per puncta E, F in illo plano* (a) *ducatur recta EGF. Duæ igitur rectæ EF, EGF spatium includunt; quod est* (b) *absurdum.* (a) *Per postulat.* 1.

Aliter.] Planum rectarum AB, CD secet aliud planum per puncta E, F. Si jam EF non est in plano AB, CD, non erit EF communis sectio. Sit ergo EGF. Ergo EGF (*c*) est linea recta. Duæ igitur rectæ EF, EGF concludunt spatium. Quod absurdum. (b) *Per axio.* 13. (c) *Per* 3. *l.* 11.

Corollarium.

HInc sequitur, si EF secat parallelas AB, CD, in eodem esse cum ipsis plano; omnes enim parallelæ, [*hoc est, duæ quavis*] (*d*) sunt in uno plano. (d) *Per def.* 36. *l.* 1.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 14.

SI *parallelarum* (*AB*, *CD*) *una* (*AB*) *plano* (*EF*) *sit recta; etiam altera* (*CD*) *eidem plano erit recta.*

Poterat postulari. Si demonstratio quæritur, fere similis ea est demonstrationi propositionis 6.

[*Ductis BD, AD, in plano EF, fac GD normalem ad BD, & parem ipsi BA; junctisque GA, GB, ostendetur ut in demonstr. prop. 6. rectam GD etiam ad AD normalem esse. Ergo GD* (e) *recta erit plano ABD, hoc* (f) *est, plano CDBA. Quare angulus CDG* (g) *rectus est. Sed angulus CDB est etiam rectus,* (*utpote cum angulo ABD recto, duos rectos* (h) *conficiens.*) *Ergo CD* (i) *perpendicularis est plano GDB, seu EF. Quod erat demonstrandum.*]

(e) *Per* 4. *l.* 11. (f) *Per cor. præc.* (g) *Per def.* 3. *l.* 11. (h) *Per* 27. *l.* 1. (i) *Per* 4. *l.* 11.

PROPOSITIO IX.

Fig. 16.

R*Ectæ* (*AB*, *EF*) *quæ sunt eidem rectæ* (*CD*) *parallelæ; licet non in eodem cum illâ plano, etiam sunt inter se parallelæ.*

Quamvis postulari posset, licebit tamen sic demonstrare.

In plano parallelarum AB, CD, duc GK normalem ad CD. Item in plano parallelarum EF, CD, duc HK normalem ad CD, [*& junge GH.*] Ergo (*k*) CK recta est plano (k) *Per* 4. *l.* 11.

GKH. Ergo cùm AG, EH sint parallelæ ad GK, erunt AG, EH (*a*) rectæ plano GKH. Ergo AG, EH, (*b*) sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 8. *l.* 11.
(b) Per 6. *l.* 11.

PROPOSITIO X.

Fig. 17.

SI duæ rectæ (AC, BC) sint parallelæ duabus rectis DF, EF, licèt non sint in eodem plano, æquales angulos (C & F) comprehendunt.

Fiant CA, CB æquales FD, FE, & ducantur DE, AB, DA, FC, EB. Cùm AC, FD sint parallelæ & æquales, etiam AD, CF (*c*) parallelæ sunt & æquales. Similiter ostendam BE, CF esse parallelas & æquales. Ergo etiam AD, BE sunt (*d*) parallelæ & (*e*) æquales. Æquantur (*f*) ergo AB, DE. Cùm igitur triangula BAC, EDF sibi mutuò sint æquilatera, anguli C & F (*g*) æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

(c) Per 33. *l.* 1.
(d) Per præc.
(e) Per axio. 1.
(f) Per 38. *l.* 1.
(g) Per 8. *l.* 1.

PROPOSITIO XI.

Fig. 18.

AD planum [infinitum] datum (AB,) a dato extra illud puncto (C) perpendicularem ducere.

Constr. In plano AB duc [*infinitam*] quamvis DF, ad quam ex C perpendicularem (*h*) describe CE. Ad eandem per E, in plano AB, perpendicularem (*i*) duc AEM. Tum ad AM ex C perpendicularem (*k*) demitte CG. Dico CG plano AB rectam esse.

Per G ponatur HG parallela ad DF.

Per const. DE recta est ad CE & EM. Ergo DE recta (*l*) est plano CEM: adeoque & (*m*) HG. Ergo (*n*) CG recta est ad HG. Sed & CG ex const. recta est ad EM. Ergo CG (*o*) recta est plano AB. Quod erat propositum.

[Corollarium. *Perpendicularis CG a puncto C ad planum AB ducta, brevissima est omnium rectarum quæ ab illo puncto ad planum duci possunt. Ducatur enim ab eodem puncto ad planum quavis alia recta CE, & jungatur EG: in triangulo CEG, angulus EGC* (p) *rectus est; ergo angulus CEG est* (q) *acutus, ac proinde latus CE latere CG* (r) *majus est: & eodem modo demonstrabitur aliam quamvis rectam a puncto C ad planum ductam, perpendiculari CG majorem esse. Ergo CG est omnium brevissima.*]

(h) Per 12. *l.* 1.
(i) Per 11. *l.* 1.
(k) Per 12. *l.* 1.
(l) Per 4. *l.* 11.
(m) Per 8. *l.* 11.
(n) Per def. 3. *l.* 11.
(o) Per 4. *l.* 11.
(p) Per def. 3. *l.* 11.
(q) Per cor. 5. p. 32. *l.* 1.
(r) Per 19. *l.* 1.

PRO-

PROPOSITIO XII.

E*X dato plani (EF) puncto (A,) rectam ad datum planum erigere.* *Fig.* 19.

A quovis extra planum EF puncto D, fac DB ad planum (*a*) EF rectam. Junctâque BA, duc AC parallelam DB. Dico factum. Demonstratio patet ex 8. (a) *Per prac.*

Scholium.

PRactice per datum punctum [*K in plano dato EF*] perpendicularis ducitur dato plano, si norma OKN [*angulo suo recto* K] ad datum punctum, [*& latere* O K *ad datum planum ita*] applicetur, [*ut super plano dato, latus* OK *circa latus alterum immobile* KN, *circumrotari queat: recta enim secundùm* KN *ducta*, (b) *erit ad planum datum, ex dato puncto* K, *erecta perpendicularis.*] (b) *Per* 4. *l.* 11.

PROPOSITIO XIII.

L*Ineæ rectæ ex eodem puncto (C) ductæ (DC, EC,) nequeunt ambæ ad idem planum (AB) esse rectæ.* *Fig.* 20.

Alias enim per 6. forent parallelæ. Quod fieri non potest.

[Scholium. *Ex hac prop. demonstrari potest prop.* 38. *hujus l.* 11. *a Tacqueto omissa, quæ ita se habet:* Si planum FR ad planum BO rectum fuerit, & ab aliquo puncto L in planorum alterutro FR ad alterum planum BO perpendicularis ducatur; ea in communem planorum sectionem XR cadet. *Ducatur enim a puncto* L, *communi sectioni* XR *perpendicularis* LQ; (c) *erit ea plano* BO *recta. Sed per hanc pr. ex eodem puncto* L *duæ lineæ rectæ nequeunt ad idem planum* OB *esse rectæ; adeoque linea recta* LQ, *quæ sola a puncto* L *ad planum* OB *perpendicularis duci potest, cadet* (d) *in sectionem communem* XR.] *Fig.* 2. (c) *Per def.* 4. *l.* 6. (d) *Per construct.*

PROPOSITIO XIV.

S*I eadem recta (AB) ad duo plana (FG, LQ) perpendicularis est; plana erunt parallela.* *Fig.* 21.

(a) Per 8. l. 11. (b) Per def. 3. l. 11. (c) Per 29 l. 1. (d) Per 34. l. 1. (e) Per def. 8. l. 11.

Sumatur in planorum alterutro FG quodvis punctum C, ex quo ducatur CE parallela ad AB, occurrens plano LQ in E. Erit CE etiam (*a*) recta plano utrique FG, LQ. Quare si jungantur rectæ AC, BE, erunt anguli A, B (*b*) recti. Ergo AC, BE sunt (*c*) parallelæ. Ergo ACEB parallelogrammum est, ac proinde CE, quam jam ostendi utrique plano esse perpendicularem, æquatur (*d*) AB. Eodem modo ostendam omnes utrique plano perpendiculares esse æquales. Ergo plana (*e*) sunt parallela. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 22.

SI rectæ duæ se mutuò tangentes (BA, CA) ad duas alias se mutuò tangentes (ED, FD) sint parallelæ; etiam plana per ipsas ducta erunt parallela.

(f) Per 9 l. 11. (g) Per def. 3. l. 11. (h) Per 27. l. 1. (i) Per 4. l. 11. (k) Per præc.

Ex A ducatur AG recta ad planum EF, ponanturque GH, GI, parallelæ ad DE, DF. Erunt hæ (*f*) parallelæ etiam ad AB, AC. Cùm igitur anguli IGA, HGA, sint (*g*) recti, erunt etiam (*h*) CAG, BAG recti. Ergo GA, quæ ad planum EF est recta, etiam recta (*i*) est plano BC. Ergo plana (*k*) BC, EF sunt parallela. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 23.

PLanum (EHFG) secans parallela plana (AB, CD,) in iis facit sectiones (EH, GF) parallelas.

(l) Per cor. 1. post 31. l. 1. (m) Per 1 l. 11. Fig. 17. (n) Per hanc prop. (o) Per 10. l. 1. (p) Per 34. l. 1. (q) Per 26. l. 1.

Si non, cùm sint in eodem plano secante, convenient (*l*) alicubi in I. Quare cùm totæ HEI, FGI sint (*m*) in planis AB, CD productis, etiam hæc convenient in I. Quod est absurdum, contra definitionem 8. hujus.

[Schol. *Si duorum planorum AF, BF cum plano tertio AE intersectiones AD, BE sint parallelæ; erit etiam mutua ipsorum AF, BF intersectio CF, ipsis AD, BE parallela. Secentur enim hæc tria plana planis parallelis ABC, DEF; eruntque* (n) *AB, BC, CA, ipsis DE, EF, FD respectivè parallelæ. Ergo* (o) *ang. ABC = DEF, & ang. BAC = ang. EDF. Sed & (propter parallelogrammum AE) erunt* (p) *AB, DE æquales, Ergo* (q) *& BC = EF, & CA = FD. Parallelas*

lelas autem esse BC ipsi EF, & CA ipsi FD, ostensum prius. Ergo (a) *CF ipsis AD, BE parallela est.*] (a) *Per* 33. *l.* 1.

PROPOSITIO XVII.

Parallela plana rectas lineas (BD & GH) proportionaliter secant. *Fig.* 24.

Ducantur in planis PQ, TV rectæ BH, GD: [*ducatur*] item BG occurrens plano RS in F, junganturque FC, FI. Planum trianguli BGD secans parallela plana, facit sectiones CF, DG (*b*) parallelas. Ergo est BC ad CD, ut (*c*) BF ad FG. Rursum, triangulum BHG secans parallela plana, facit sectiones (*d*) BH, FI parallelas. Ergo est HI ad IG, ut (*e*) BF ad FG; hoc est, (quod jam ostendi,) ut BC ad CD. Quod erat demonstrandum. (b) *Per pr.* (c) *Per* 2. *l.* 6. (d) *Per prac.* (e) *Per* 2. *l.* 6.

PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea (FE) sit ad planum (AB) recta, omnia, quæ per ipsam ducuntur plana, sunt eidem plano (AB) recta. *Fig.* 25.

Ductum sit per FE planum aliquod GC faciens cum AB sectionem CD. In hoc ducantur HK normales ad CD sectionem communem. Cùm igitur etiam (*f*) FE recta sit ad CD; erunt KH (*g*) parallelæ ad FE. Sed FE ponitur recta plano AB. Ergo & HK rectæ (*h*) sunt plano AB. Ergo GC planum (*i*) plano AB rectum est. (f) *Per hyp. & defin.* 3. *l.* 11. (g) *Per* 29. *l.* 1. (h) *Per* 8. *l.* 11. (i) *Per def.* 4. *l.* 11.

PROPOSITIO XIX.

Si duo plana (MF, GD) se secantia, sint ambo recta eidem plano (AB;) erit etiam communis illorum sectio (KL) recta plano (AB.) *Fig.* 26.

Quoniam planum MF ponitur rectum plano AB; ex def. 4. patet ex puncto L posse in plano MF duci rectam perpendicularem plano AB, eam nempe quæ ex L esset in plano MF perpendicularis ad communem sectionem EF. Similiter, quia planum GD ponitur perpendiculare ad AB, ex def. 4. patet in plano GD posse duci ex puncto L per-

(a) Per 13. l. 11. pendicularem plano. Sed ex puncto L tantùm (a) una potest duci perpendicularis plano AB. Ergo necesse est ut recta quæ ex L perpendicularis est plano AB, existat in utroque plano MF & GD, ac proinde sit ipsa planorum MF & GD communis sectio LK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Fig. 27.

SI angulus solidus (A) tribus planis angulis (BAC, CAD, DAB) continetur; horum duo quilibet reliquo sunt majores.

Si tres plani sunt æquales; patet assertio: Si inæquales, maximus esto BAD. Hic nihilominus minor est duobus reliquis. Ex maximo enim BAD abscinde BAE parem BAC, fiantque æquales AC, AE. Per E ducatur recta occurrens ipsis AB, AD in B & D; junganturque BC, DC. Quoniam anguli (b) BAE, BAC æquales sunt, & latera BA, AE æqualia lateribus BA, AC, etiam bases BE, BC æquales (c) erunt. Quoniam verò BC, CD (d) majores sunt quàm BD, ablatis æqualibus BE, BC, remanet CD major quàm ED. Sed latera EA, AD æquantur lateribus (e) CA, AD. Ergo angulus (f) CAD major est quàm EAD. Cùm igitur BAC par sit ostensus BAE. Erunt duo simul BAC, CAD majores toto BAD. Quod erat demonstrandum.

(b) Per constr.
(c) Per 4. l. 1.
(d) Per 20. l. 1.
(e) Per constr.
(f) Per 25. l. 1.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28.

PLani anguli, solidum angulum quemcunque componentes, quatuor rectis sunt minores.

Esto solidus angulus A. Planis angulis illum componentibus subtendantur rectæ BC, CD, DE, EF, FB in uno plano existentes. Quo facto constituitur (g) pyramis, cujus basis est polygonum BCDEF, vertex A, totque cincta triangulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt solidum A. Jam verò quia duo anguli ABF, ABC (h) majores sunt uno FBC, & duo ACB, ACD majores uno BCD, & sic deinceps; erunt triangulorum G, H, I, K, L circa basim anguli simul sumpti, omnibus simul angulis baseos B, C, D, E, F majores. Sed anguli baseos unà cum quatuor rectis, faciunt bis tot rectos (i) quot sunt latera, sive quot triangula.

(g) Vide def. 1. l. 12.
(h) Per præc.
(i) Per theor. 2. sch. post 32. l. 1.

gula. Ergo omnes triangulorum circa basim anguli, unà cum quatuor rectis, conficiunt amplius quàm bis tot rectos quot sunt triangula. Sed iidem anguli circa basim, unà cum angulis qui componunt solidum, conficiunt bis (*a*) tot rectos quot sunt triangula. Liquet ergo angulos solidum angulum A componentes, quatuor rectis esse minores. Quod erat demonstrandum.

(a) *Patet ex* 32. *l.* 1.

Corollarium.

Ex hac & præcedenti satis colligitur, ex tribus angulis planis, rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo sint majores, solidum angulum constitui posse.

Scholium.

Ex hac eâdem propositione demonstratur celebre theorema, tres tantùm figuras planas ordinatas, & æquales, corpus ordinatum continere posse, nimirum æquilatera triangula vel 4. vel 8. vel 20. Quadrata 6. Pentagona 12. Ac proinde quinque tantùm sunt ordinata, seu regularia corpora: Pyramis, quæ 4. Octaedrum quod 8. Icosaedrum quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6. quadratis, Dodecaedrum quod 12. æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicitur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.

Demonstr. Ex duobus æquilateris triangulis non potest constitui angulus solidus: ad hoc enim saltem (*b*) requiruntur tres.

(b) *Per def.* 10. *l.* 11.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus, potest constitui angulus solidus pyramidis; ex quatuor, angulus solidus octaedri; ex quinque, angulus solidus Icosaedri; cùm æquilateri trianguli anguli tum 3. tum 4. tum 5. sint 4 rectis minores, ut colligitur ex coroll. 12. p. 32. l. 1.

Quoniam verò tres anguli pentagonici (*c*) sunt 4. rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia constituere solidum angulum, nempe Dodecaedri.

(c) *Colligitur ex cor.* 1. *p.* 11. *l.* 4.

A tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici solidum angulum cubi, per se patet. Atque ita quinque exsurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla esse alia sic ostenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. rectos. Unus

(a) *Per cor. 12. p. 32. l. 1.* enim facit duas (*a*) tertias recti, ac proinde sex tales efficient 12. tertias recti, hoc est rectos 4. Ergo, a sex æquilateris triangulis non poterit effici solidus angulus, multò minùs a pluribus.

A quatuor quadratis, non posse constitui solidum angulum, ac multò minùs a pluribus, per se patet.

Anguli pentagonici 4. sunt 4. rectis majores: Singuli enim efficiunt 6. quintas (*b*) recti. Ergo a quatuor pentagonis nequit fieri angulus solidus, multò minùs a pluribus.

(b) *Per cor. 1. pr. 11. l. 4.*

Nec sane ex aliis figuris quibuslibet ordinatis constitui poterit solidus angulus. Tres anguli hexagonici sunt 4. rectis æquales. Unus enim (*c*) facit 4. tertias recti, ac proinde tres faciunt 12. tertias recti, hoc est 4. rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit constitui solidus angulus, multò minùs a pluribus.

(c) *Per cor. 2. p. 15. l. 4.*

Cùm verò tres anguli hexagonici sint 4. rectis æquales; tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut heptagoni, octogoni, &c. 4. rectis majores erunt. Quare manifestum est reliquas figuras ordinatas omnes, esse ineptas ut solidum angulum constituant; adeoque præter jam dicta 5. nulla ordinata corpora dari posse.

[PROPOSITIO XXII.

Fig. 29.

SI fuerint tres anguli (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo sint majores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales (AD = AE = BF = BG = CH = CI;) fieri potest ut ex rectis DE, FG, HI) æquales illas jungentibus; triangulum constituatur.

Si recta jungentes fuerint æquales, patet ex iis triangulum constitui posse. Sint autem inæquales, & maxima sit DE: si tamen DE minor fuerit duabus reliquis FG + HI; triangulum ex illis construi (d) *potest. Est autem minor. Nam super rectâ CH fiat angulus HCK ipsi B æqualis, sitque CK = CH, & jungantur KH, KI. Et propter rectas KC, CH rectis FB, BG respectivè æquales, & ang. KCH = ang. B, erit* (e) *KH = FG. Et cùm ang. B + ang. HCI, hoc est,* (f) *ang. KCI major* (g) *sit angulo A, latera autem KC, CI lateribus DA, AE æquentur respectivè; ergo basis KI basi DE major* (h) *est. Sed summa laterum KH + HI (hoc est, FG + HI) major est* (i) *quàm KI; & proinde multò major quàm DE. Ergo, &c.*

(d) *Per 22. l. 1.*
(e) *Per 4. l. 1.*
(f) *Per constr.*
(g) *Per hyp.*
(h) *Per 24. l. 1.*
(i) *Per 20. l. 1.*

Scholium.

Scholium. *Sint tria triangula isoscelia ADE, BFG, CHI, quorum crura AD, AE, BF, BG, CH, CI sint inter se æqualia, & anguli verticales A, B, C simul sumpti sint quatuor rectis minores, ita tamen ut duo quilibet reliquo sint majores: a basibus autem DE, FG, HI constituatur* (a) *triangulum LMN, ita ut sit LM = DE, MN = FG, NL = HI; super quibus concipiantur triangulorum isoscelium latera bina quævis contigua in unam rectam coalescere, nempe CI & AD in PL, AE & BF in PM, BG & CH in PN; & ab angulis planis A, B, C, formabitur angulus solidus P; & æquabuntur rectæ PL, PM, PN. His præmissis, si triangulo LMN* (b) *circumscribatur circulus; perpendicularis PO ab angulo solido ad planum circuli demissa, in centrum cadet.* Fig. 29, 30. (a) Per hanc prop. & 22. l. 1. (b) Per 5. l. 4.

Ductis enim OL, OM, ON; in triangulis rectangulis OPL, OPM, OPN, erit (c) *PLq = POq + OLq, PMq = POq + OMq, PNq = POq + ONq. Si igitur a quadratorum* (d) *æqualium singulis PLq, PMq, PNq, auferatur POq, restabunt æqualia OLq, OMq, ONq; atque inde æquales erunt OL, OM, ON. Ergo circulus transiens per L, M, N, centrum* (e) *habet in O.* (c) Per 47. l. 1. (d) Per ax. 15. l. 1. (e) Per 9. l. 3.

Porro, manifesta est propositionis veritas, sive triangulum LMN fuerit acutangulum, seu rectangulum, seu denique obtusangulum. Vide schol. p. 5. l. 4. & confer fig. 5, 6, 7. ejusdem libri cum fig. 30. hujus.

Corol. ad Schol. præced. *Positis hujusmodi triangulis isosceliis ADE, BFG, CHI; si ex eorum basibus constituatur triangulum LMN; erit crurum æqualium quodvis AD (vel AE, vel BF, &c.) majus radio circuli circa triangulum LMN conscripti. Nam AD =* (f) *PL; & in triangulo rectangulo OPL, latus PL angulo recto oppositum, majus* (g) *est quàm OL quod opponitur* (h) *acuto.* (f) Per constr. (g) Per 19. l. 1. (h) Per cor. 5. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO XXIII

Ex tribus angulis planis (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo sunt (*i*) majores, angulum solidum (P) constituere. Oportet autem (*k*) tres illos angulos quatuor rectis minores esse. Fig. 29, 30. (i) Ex p. 20. l. 11. (k) Per 21. l. 11.

Fac omnia angulorum latera (nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI) æqualia inter se. Junctis DE, FG, HI, constitue (l) *triangulum LMN (cujus latera LM, MN, NL, ipsis DE, FG, HI æquentur respectivè,) circa quod circulum* (m) *describe, cujus radius sit OL. Et cùm angulorum A, B, C latera singula radio OL* (n) *sint majora; erit etiam ADq majus* (l) Per 22. l. 11. & 22. l. 1. (m) Per 5. l. 4. (n) Per cor. ad schol. præced.

quàm

(a) Per prob. 2. schol. p. 4. l. 1. quàm OLq. *Inveniatur* (a) *OP latus quadrati quo ADq excedit OLq, & a centro O erigatur* (b) *OP circuli plano recta, junganturque PL, PM, PN. Dico factum. Cùm enim angulus O in triangulo OPL rectus sit; erit PLq* = (c) *POq* + *OLq* = (d) *ADq. & PL* = *AD. Eodem modo demonstrabitur rectam PM ipsi AE æqualem esse: Et cùm sit LM* = *DE, erit* (e) *ang. LPM* = *ang. A. Et similiter ostendetur esse ang. MPN* = *ang. B, & ang. NPL* = *ang. C. Factum est igitur quod petebatur.*]

(b) Per 12. l. 11. (c) Per 47. l. 1. (d) Per constr. (e) Per 8. l. 1.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 31.

PLana parallelepidum continentia (1.) *sunt parallelogramma,* (2.) *quæ ex adverso sunt similia, &* (3.) *æqualia.*

1. Pars. Planum AF secans plana BD, FH ex defin. 13. parallela, facit (*f*) sectiones BA, FE parallelas. Rursum planum AF secans plana AH, BG per defin. 13. parallela, facit (*g*) sectiones AE, BF parallelas. Ergo BAEF parallelogrammum est. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana sunt parallelogramma.

(f) Per 16. l. 11. (g) Per eand.

2. Pars. Quoniam ex primâ parte patet AB, BC parallelas esse EF, FG, erunt (*h*) anguli ABC, EFG pares. [*Ergo parallelogramma BD, FH sunt* (i) *æquiangula.*] Quare cùm & latera alternis sunt (*k*) paria, [*hoc est, AB* = *EF, BC* = *FG, CD* = *GH, & DA* = *HE;*] similia (*l*) sunt parallelogramma adversa BD, FH. Eodem modo probatur de cæteris oppositis.

(h) Per 10. l. 11. (i) Per 27. & 34. l. 1. (k) Per 34. l. 1. (l) Per sch. p. 7. l. 5. & def. 1. l. 6.

3. Pars patet ex primâ parte, & 4. vel 8. 1.

[*Junge AC, EG; & cum in triangulis ABC, EFG, latera AB, BC lateribus EF, FG respectivè* (m) *æqualia sint, & angulus ABC sit angulo EFG* (n) *æqualis;* (o) *erit basis AC basi EG æqualis, & triangulum ABC triangulo EFG æquale. Cùm verò parallelogramma opposita BD, FH* (p) *sint triangulorum illorum æqualium dupla, erunt etiam ista æqualia. Et eodem modo probabitur duo quævis alia opposita parallelogramma æqualia esse.*]

(m) Per 34. l. 1. (n) Per 10. l. 11. (o) Per 4. l. 1. (p) Per 34. l. 1.

Fig. 32.

Cor. [1. *Parallelepipedum* (*AB,*) *aut quodvis*] prisma sectum plano (CD) adversis planis (*AS, RB*) parallelo, sectionem habet similem & æqualem planis adversis. [*Demonstrabitur eodem modo quo pars secunda ac tertia hujus prop.*

Cor. 2. *Eâdem sectione parallelogramma lateralia* (*AF, SF, &c.*) *dividentur in partes* (q) *parallelogrammas* (*AN & CF, SN & DE, &c.*) (r) *similes partibus* (*SD, DB*) *in quas recta quævis lateralis* (*SB*) *eâdem sectione dividitur.*]

(q) Patet ex parte 1. hujus prop. (r) Per 1. l. 6. & def. 7. l. 5.

Cor.

Cor. 3. *Et præterea, si solidum plano adversis planis parallelo sectum, fuerit parallelepipedum; partes parallelogramma sibi invicem opposita, in quas dividuntur adversa plana lateralia, erunt* (a) *similes & æquales.*] (a) *Patet ex par. 2 & 3. hujus prop.*

PROPOSITIO XXV.

SI parallelepipedum (AB,) aut quodvis prisma, plano (CD) secetur adversis planis parallelo; erit ut basis (ED) ad basim (DF,) ita solidum (AD) ad solidum (CB.) Fig. 32.

Demonstrabitur eodem modo quo 1. 6.

[*Dividatur recta DB in æquales quotcunque partes, v. gr. quatuor, DG, GH, HI, IB; & in basi DF, per divisionum puncta G, H, I, ducantur rectæ GK, HL, IM, baseos DF lateribus oppositis DN, BF parallelæ, & basis in quatuor* (b) *similia &* (c) *æqualia parallelogramma dividetur, nempe DK, GL, HM, IF; per quorum latera GK, HL, IM, transeant plana GO, HP, IQ, solidi CB adversis planis CD, RB parallela, & dividetur illud in quatuor solida DO, GP, HQ, IR, singula* (d) *similibus & æqualibus numero & magnitudine planis comprehensa, ac proinde* (e) *æqualia. Quare planum DK & solidum DO sunt consequentium DF & CB similes* (f) *partes aliquotæ. Auferatur jam recta DG ex DS quoties poterit, puta bis, & relinquetur ST, ipsâ DG minor; & a divisionum punctis V, T ducantur rectæ, baseos ED lateribus oppositis ES, ND parallelæ, & per illas ducantur plana, adversis solidi AD planis AS, CD parallela. Quoniam singulæ DV, VT ipsi DG æquales sunt; erunt* (g) *etiam parallelogramma singula NV, VX parallelogrammo DK similia & æqualia, & singula solida CV, VY solido DO (utpote quæ* (h) *similibus & æqualibus multitudine & magnitudine planis cum illo continentur) etiam* (i) *æqualia. Sed propter rectam ST ipsâ DG minorem, erit basis ET basi DK minor* (k), *& solidum AT solido DO minus; (si enim utraque illorum solidorum super æqualibus planis AS, CD, intra invicem collocari supponantur, propter ST minorem quàm DG, solidum AT parti solummodo solidi DO exæquabitur.) Quoties igitur planum DK continetur in antecedente DE, toties etiam solidum DO in antecedente DA continebitur. Et eodem modo ostendi potest, quascunque consequentium (baseos DF, & solidi CB) similes partes aliquotas, in antecedentibus (basi ED, & solido AD) æquali numero contineri.* (l) *Ergo basis ED erit ad basem DF, ut solidum AD est ad solidum CB. Q. E. D.*

(b) *Per 27. l. 1. & sch. p. 7. l. 5. cum def. 1. l. 6.*
(c) *Per 36. l. 1.*
(d) *Per 24. l. 11. cum corollariis.*
(e) *Per def. 15. l. 11.*
(f) *Per def. 7. l. 5.*
(g) *V. demonstratas (b, c,) supra.*
(h) *Per præc. cum corollariis.*
(i) *Per def. 15. l. 11.*
(k) *Per 1. l. 6.*
(l) *Per rationum æqualium indicium apud deff. l. 5.*

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 33. AD datam rectam lineam (AB,) & ad datum in ipso punctum (A,) constituere angulum solidum (AHIL,) æqualem solido angulo dato (CDEF.)

Nota, literarum quæ designant angulum solidum, primam esse ad punctum in quo est angulus. Sic angulus solidus AHIL est ad punctum A, & CDEF ad punctum C.

(a) Per 11. l. 11. *A puncto quovis F in rectâ CF, demitte* (a) *FC plano DCE rectam, ducanturque rectæ DF, FE, EG, GD, GC. Fac AH = CD, & ang. HAI = ang. DCE, & AI = CE; atque in plano HAI, fac ang. HAK = ang. DCG, & AK = CG. Tum* (b) Per 12. l. 11. *erige* (b) *KL rectam plano HAI, & sit KL = GF, ducaturque AL. Erit angulus solidus AHIL par dato CDEF. Nam junctis HK, IK, HL, IL, propter HA, AK ipsis DC, CG respectivè* (c) Per 4. l. 1. *æquales, & ang. HAK = ang. DCG, erit* (c) *HK = DG. Et eodem modo, conferendo triangula IAK, ECG, ostendetur* (d) *KI* (d) Per ax. 3. & p. 4. l. 1. *= GE; & in triang. HKL, DGF,* (e) *HL = DF; & in triang. IKL, EGF, IL = EF; & in triang. AKL, CGF, AL = CF.* (e) Per def. 3. l. 11. & p. 4. l. 1. *Triangula igitur AHL, CDF sunt sibi mutuò æquilatera, & proinde* (f) *æquiangula. Unde ang. HAL = ang. DCF. Et ob eandem causam in triangulis sibi mutuò æquilateris AIL, CEF,* (f) Per 8. l. 1. *est ang. LAI = ang. FCE. Sed & ang. HAI = ang. DCE per constr. Factum est igitur quod petebatur.*

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 34. ADatâ rectâ lineâ (AB,) dato solido parallelepipedo (CD) simile & similiter positum parallelepipedum (AK) describere.

Ex angulis planis BAH, HAI, BAI, qui æquales sint ipsis (g) Per prac. *FCE, ECG, FCG, fac* (g) *angulum solidum A angulo solido C parem. Item, sit* (h) *FC : CE :: BA : AH, & CE : CG :: AH : AI,* (h) Per 12. l. 6. *(& erit ex æquo* (i) *FC : CG :: BA : AI;) & perficiatur parallelepipedum AK. Erit hoc simile dato.* (i) Per 22. l. 5.

Nam per constr. parallelogramma BH, FE; & HI, EG; & BI, FG similia sunt; & horum ideo opposita (k) *illorum oppositis. Ergo sex plana solidi AK similia sunt sex planis solidi CD;* (k) Per 24. l. 11. *ac proinde* (l) *AK, CD sunt solida similia.* (l) Per def. 9. l. 11.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Planum per adversorum planorum diametros (AC, EG) transiens, parallelepipedum secat in duo æqualia prismata. Fig. 31.

Quoniam (*a*) BG, BE sunt parallelogramma; CG, AE æquidistant [*hoc est parallelæ sunt*] eidem BF. Ergo & (*b*) inter se sunt parallelæ, ac proinde in uno sunt plano. Ergo rectæ AC, EG (*c*) in uno sunt plano. Jam verò planum per illas ductum secare parallelepipedum in duo prismata æqualia sic ostendo. (a) Per 24. l. 11. (b) Per 9. l. 11. (c) Per 7. l. 11.

Intelligatur prisma AEGCDH supra planum suum EACG ita constitui, ut anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifestum est tum adhuc fore inter parallela plana BADC, FEHG. Tum verò necesse est ut D cadat in B, H in F. Cadat enim D extra B si fieri potest, in N. Angulus BAC æquatur (*d*) angulo DCA. Sed DCA æquatur NAC, (est enim unus idemque angulus.) Ergo BAC & NAC æquales sunt: quod est absurdum. Ergo D incidit in B; & pari de causâ H in F. Ergo prisma AEGCDH congruit prismati ACGEFB, ac proinde (*e*) æqualia sunt. (d) Per 27. l. 1. (e) Per axio. 7.

[*Tacqueti demonstratio parallelepipedis quidem rectis convenit, quorum scil. plana lateralia sunt basibus recta; & forte etiam ad unius aut alterius speciei obliqua accommodari potest. Cùm verò in propp. seqq. hujus & proximi libri, supponatur hac demonstratio parallelepipeda quomodocumque obliqua extendere: ad accuratius Euclidis ipsius ratiocinium hic necessariò recurrendum est, quo ostenditur omnia omnino parallelepipeda quæ secantur a plano AG, per adversorum planorum diametros parallelas AC, EG transeunte, in duo æqualia (addo, & similia) prismata secari.*

Est enim triangulum ABC triangulo ADC (f) *æquale, & (ob angulos æquales B* (g) *& D, BAC* (h) *& DCA, BCA & DAC) etiam* (i) *simile; & ob eandem causam triangula EFG, EHG sunt æqualia & similia. Æqualia etiam & similia sunt* (k) *parallelogramma sibi invicem opposita AE & CH, itemque BG & AH; atque est AG utrique prismati commune. Prismata igitur ABCGEF, ADCGEH, continentur a similibus & æqualibus multitudine & magnitudine planis, & proinde sunt* (l) *similia & æqualia. Q. E. D.*] (f) Per 34. l. 1. (g) Per eand. (h) Per 27. l. 1. (i) Per 4. l. 6. (k) Per 24. l. 11. (l) Per def. 15. l. 11.

PRO-

PROPOSITIO XXIX. & XXX.

Fig. 35. & 36. *Parallelepipeda (FEAGKIMC & FEBHLOMI) quæ eandem habent basim (EFIM) & altitudinem eandem, ac proinde existunt inter parallela plana (EFIM, GAOL,) æqualia sunt.*

Vel enim existunt inter lateralia parallela plana EAOM, & FGLI, vel non. Esto primum. Ex. 24. hujus, & 8. l. 1. patet triangula AEB, CMO, item GFH, KIL sibi mutuò æquilatera & æquiangula esse. Quare ut in præcedenti, ostendam prismata CMOLIK, AEBHFG sibi mutuò imposita congruere, ac proinde (a) æqualia esse. Quare addito communi solido FEBHKCMI, tota parallelepipeda FEAGKIMC, FEBHLOMI æqualia erunt. Quod erat demonstrandum.

Fig. 35.

(a) Per axio. 7.

[Aliter. *In parallelogrammis AEMC, BEMO, latera opposita sunt* (b) *æqualia, hoc est, AE = CM, BE = OM, AC = EM = BO; & ablatâ communi rectâ BC, AB = CO. Ergo triangula ABE, COM sunt sibi mutuò æquilatera, & proinde* (c) *æqualia, & eodem modo ostendetur triangula FGH, IKL æqualia esse. Opposita autem parallelepipedorum plana sunt* (d) *æqualia, nempe AF = CI, & BF = OI; & AK = EI = BL: unde ablato communi BK, erit AH = CL. Quare prismata AEBHFG, CMOLIK a similibus planis numero & magnitudine æqualibus continentur, & proinde* (e) *æqualia sunt. Commune apponatur solidum cujus basis est FM & planum oppositum BK, & tota parallelepipeda FEAGKIMC, FEBHLOMI æqualia erunt. Q. E. D.*]

(b) Per 34. l. 1.

(c) Per 8. l. 1.

(d) Per 24. l. 11.

(e) Per def. 15. l. 11.

Fig. 36. Sit deinde parallelepipedum FXQEMIPR non inter eadem lateralia plana parallela existens cum parallelepipedo FEAGKCMI. Quoniam ex hypothesi GK, AC, RP, QX sunt in uno plano ad basim EFIM parallelo; RP, QX secent GK in L & H, AC verò in O & B; junganturque EB, MO, FH, IL. Facile ostensu est plana solidum FEBHLOMI continentia, parallelogramma esse ex adverso æquidistantia. [*Nam adversa plana quadrilatera solidi istius sunt in iisdem planis cum oppositis parallelepipedorum AFIC, QFIR planis, & proinde* (f) *parallela sunt. Solidi enim BFIO quadrilatera opposita BEMO, HFIL sunt respectivè in iisdem planis cum oppositis ACME, GKIF planis parallelepipedi AFIC; & ejusdem solidi BFIO quadrilatera opposita BEFH, MOLI sunt in iisdem planis respectivè cum oppositis*

(f) Per 24. l. 11.

oppositis planis QEFX, MIPR parallelepipedi QFIR: est verò parallelogrammum EI, solido cum parallelepipedis commune, & quadrilaterum BOLH est in plano ipsi EI parallelo per hypothesin. Patet igitur solidum BFIO comprehendi a planis quadrilateris ex adverso parallelis,] adeoque solidum illud (*a*) esse parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipeda FXQEMIPR, & FEAGKCMI, sunt æqualia. Ergo etiam sunt æqualia inter se. Quod erat dem. (a) *Per def.* 13. *l.* 11.

Scholium.

HÆC propositio similis est propositioni 35. lib. 1. affirmat enim de solidis, quod illa de planis. Quare similis etiam erit reliquorum casuum demonstratio.

PROPOSITIO XXXI.

PArallelepipeda super æqualibus basibus (AO & EG) & in eadem altitudine (S) sunt æqualia. Fig. 37.

Habeant parallelepipeda primo latera ad bases normalia. Ad latus FG productum, fiat parallelogrammum GMKH æquale ac simile parallelogrammo AO: perfectoque parallelogrammo GMPR, rectæ PM, RG occurrant ipsi KH in Q & L. Jam verò intelligantur super GK, GQ, GP constitui parallelepipeda, quorum latera sint ad bases recta, altitudo autem omnium communis sit S. Solidum EGS est ad solidum GPS, ut EG (*b*) ad GP; hoc est, (quia EG, AO per hyp. æquantur,) ut AO ad GP; hoc est, per constr. ut GK ad GP; hoc est, ut (*c*) GQ ad GP; hoc est, (*d*) ut solidum GQS est ad idem solidum GPS. Quoniam igitur solida EGS & GQS eandem habent rationem ad solidum GPS, erit solidum EGS (*e*) æquale GQS; hoc est, solido (*f*) GKS; hoc est, (quia bases GK, AO sunt (*g*) æquales & similes,) solido (*h*) AOS. Quod erat propositum. Per totum discursum solida accipiuntur recta.

(b) *Per* 25. *l.* 11.
(c) *Per* 35. *l.* 1.
(d) *Per* 25. *l.* 11.
(e) *Per* 9. *l.* 5.
(f) *Per* 29. *l.* 11.
(g) *Per constr.*
(h) *Per def.* 15. *l.* 11.

Habeant deinde parallelepipeda data EGS, AOS latera ad bases EG & AO obliqua. Fiant super EG, AO parallelepipeda, quorum latera sint ad bases recta in altitudine S. Hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cùm parallelepipeda recta per primam partem sint paria inter se, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 38. *Parallelepipeda quævis æque alta, sunt inter se ut bases.*

Bases sint GO & A, [*& altitudo communis sit K.*] Super CO fac (*a*) parallelogrammum OE par ipsi A, [*in angulo OCE æquali dato G.*]

(a) Per 44. l. 1.

Super BC, OE intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæc igitur partes erunt unius parallelepipedi BEK. Ergo (*b*) parallelepipedum OEK est ad parallelepipedum BCK, ut basis OE ad basim BC; hoc (*c*) est, ut basis A ad basim BC. Sed quia bases OE & A sunt æquales, parallelepipeda OEK & AK (*d*) æqualia sunt. Ergo etiam parallelepipedum AK est ad parallelepipedum BCK, ut basis A ad basim BC. Quod erat demonstrandum.

(b) Per 25. l. 11. (c) Per construct. (d) Per præc.

Scholium.

Quod hîc de parallelepipedis ostensum est, demonstrabitur in libro 12. de pyramidibus prop. 6. de quibuslibet prismatibus in corollario 1. post prop. 9. de conis & cylindris prop. 11.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 39. *Similia parallelepipeda (HA & CM) sunt in triplicatâ ratione laterum homologorum (AB, BC.)*

Sint parallelepipeda AH, CM similia. Ergo omnia ipsorum plana similia (*e*) sunt; adeoque AB ad BC (*f*) est ut EB ad BO; & ut FB ad BG, sic EB ad BO. Insuper & anguli (*g*) planorum æquales sunt. Collocentur sic igitur solida AH, CM, ut æquales anguli CBO, ABE sint oppositi [*in eodem plano*] & latera AB, CB in directum; tum verò etiam (*h*) EB, OB [*itemque FB, BG.*] in directum erunt. Cogitentur jam super planis EC & CO facta solida, sic ut solida KB, HA sint unum parallelepipedum, & KB, PO faciant unum similiter parallelepipedum, & PO, CM unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA est ad solidum KB (*i*) ut AE ad EC; hoc est, ut (*k*) AB ad BC; hoc est, (ut per hyp. ostendi supra,) ut EB ad BO; hoc (*l*) est, ut EC

(e) Per def. 9. l. 11. (f) Per def. 1. l. 6. (g) Per eand. (h) Patet ex 13. & 14. l. 1. (i) Per 25. l. 11. (k) Per 1. l. 6. (l) Per eand.

EC ad CO; hoc est, ut solidum (*a*) idem KB ad solidum PO. Continuant ergo eandem rationem tria solida HA, KB, PO. Jam verò solidum KB est ad solidum PO, ut basis EC ad basim CO; hoc est, ut EB ad BO; hoc est, ut (*b*) FB ad BG; hoc est, ut planum FC ad planum CG; hoc est, ut idem rursus solidum PO ad CM solidum. Quatuor ergo solida HA, KB, PO, CM, sunt continuè proportionalia. Ergo ratio primi HA ad quartum CM est (*c*) triplicata rationis primi HA ad KB secundum; hoc est, rationis (*d*) AE ad EC; hoc est, (*e*) rationis homologorum laterum AB ad BC. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per* 25. *l.* 11. (b) *Ostendi supra ex hyp.* (c) *Per def.* 10. *l.* 5. (d) *Per* 25. *l.* 11. (e) *Per* 1. *l.* 6.

[Aliter. *Similium parallelepipedorum HA, QS, sint latera homologa AB & RS, EB & TS, FB & VS. Dico solidum HA esse ad solidum QS in triplicatâ ratione AB ad RS.* Fig. 39. & 40.

Producantur AB, EB, FB ad C, O, G, ut sint BC, BO, BG rectis RS, TS, VS respectivè æquales; & compleatur parallelogrammum CO, & parallelepipedum CM. Et propter ang. OBC = (f) *ang. ABE* = (g) *ang. RST, & latera BC, OB lateribus RS, TS respectivè* (h) *æqualia, parallelogramma OC, RT erunt similia &* (i) *æqualia. Eodem modo similia & æqualia erunt parallelogramma* CG, *RV; atque etiam* OG, *TV: unde & his opposita parallelogramma, (nempe bina quælibet, planis similibus & æqualibus opposita in utroque solido)* (k) *similia & æqualia erunt. Sunt* (l) *igitur solida QS, CM similia & æqualia; ac proinde* (m) *solida HA, CM similia erunt, & AB: BC :: EB: BO :: FB: BG. Super basibus EC, CO perficiantur parallelepipeda BK, PO ejusdem altitudinis cum AH. Erit itaque AB: BC vel* (n) *RS :: EB: BO vel ST :: FB: BG vel SV; hoc est,* (o) *AE: EC :: EC: CO :: FC: CG; hoc est,* (p) *AH: BK :: BK: PO :: PO: CM vel QS. Ergo* (q) *AH est ad QS in triplicatâ ratione AH ad BK. Sed AH: BK ::* (r) *AE: EC ::* (s) *AB: BC vel RS. Ergo* (t) *solidum AH est ad simile solidum QS in triplicatâ ratione lateris AB ad sibi homologum latus RS. Q. E. D.*

Cor. 1. *Hinc si fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales; ut est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primâ descriptum, ad parallelepipedum simile similiterque descriptum super secundâ; & proinde datis parallelepipedorum similium HA, CM, lateribus homologis AB, BC, invenietur illorum ad invicem proportio, faciendo AB, BC, X, Y* $\div\!\!\div$. *Erit enim HA: CM :: AB: Y. Quare etiam, datis solidis HA, CM, & ipsius HA latere quovis AB; alterius solidi latus homologum BC erit duorum mediorum* (u) *proportionalium prius inter AB & Y.*]

(f) *Per* 15. *l.* 1. (g) *Per hyp. & def.* 1. *l.* 6. (h) *Per constr.* (i) *Per axio.* 7. (k) *Per* 24. *l.* 11. (l) *Per def.* 15. *l.* 11. (m) *Per hyp. & def.* 9. *l.* 11. (n) *Per constr.* (o) *Per* 1. *l.* 6. (p) *Per* 25. *l.* 11. (q) *Per def.* 10. *l.* 5. (r) *Per* 25. *l.* 11. (s) *Per* 1. *l.* 6. (t) *Per* 11. *l.* 5. (u) *Vide p.* 13. *l.* 6.

Cor. 2. *Hinc corrigendus est eorum error, qui solido-*

rum similium eandem ac laterum esse rationem opinantur. Linea enim dupla cubus non est tantùm duplus, sed octuplus cubi alterius. Et linea tripla cubus non est tantùm triplus, sed vigecuplus septuplus cubi alterius. Nam 1, 2, 4, 8 ∹ & 1, 3, 9, 27 ∹. *Et ita de corporibus quibuscunque similibus est censendum; uti deinceps patebit.*

Cor. 3. *Hinc quoque pendet celeberrimum illud de cubo duplicando Problema: de quo infra, ad calcem lib.* 12. *Ubi etiam ostendetur, quâ methodo cubi, vel corpora quævis similia, in datâ ratione augeri vel diminui possunt.*

[Scholium. 1. *Cùm cubi sint similia solida parallelepipeda, & proinde sint in triplicatâ ratione laterum suorum; inde fit ut ratio triplicata quantitatum quarumvis, per rationem cuborum earundem quantitatum sæpissimè designari solet. Sic ex. gr. ratio triplicata rationis A ad B, sæpe denominatur ratio A*cub. *ad B*cub. *vel A*c *ad B*c.]

Scholium. 2.

Quod hîc de parallelepipedis ostensum est, in libro 12. demonstrabitur de pyramidibus propos. 8. de quibuslibet prismatibus coroll. 2. post p. 9. de conis & cylindris p. 12. de sphæris p. 18.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 40. *Si parallelepipeda (QS, CK) æqualia sunt; reciprocant bases & altitudines, (hoc est, basis RT est ad basim FK, ut reciprocè altitudo FC ad altitudinem SV.)*

Et si reciprocant bases & altitudines, æqualia sunt.

1. Pars. Sint primò latera ad bases recta. Si jam solidorum QS, CK altitudines sint pares, res patet. [*Nam propter æquales altitudines,* (a) *erunt parallelepipeda ut bases: atqui ista* (b) *sunt æqualia; ergo & bases erunt æquales, & proinde eadem est ratio æqualitatis inter altitudinem parallelepipedi prioris & altitudinem posterioris, ac inter basem posterioris & basem prioris.*

(a) *Per* 32. *l.* 11.
(b) *Per hyp.*

Si altitudines sint inæquales, a majori FC, abscinde FE parem SV: & per E duc planum EL ad FK parallelum. Basis RT est ad basim FK, ut solidum (*c*) QS ad solidum EK; hoc est, (quod ex hyp. paria sint solida QS, CK,) ut solidum CK ad EK solidum; hoc est, ut (*d*) CG ad EG; hoc est, ut (*e*) CF ad EF; hoc est, ex constr. ut CF reciprocè ad VS. Quod erat demonst.

(c) *Per* 32 *l.* 11.
(d) *Per* 25. *l.* 11.
(e) *Per* 1. *l.* 6.

Sint

Sint deinde latera ad bases obliqua. Erigantur super iisdem basibus in altitudine eâdem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua (*a*) parallelepipeda æqualia. Quare cùm hæc per 1. partem reciprocent bases & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonstrandum. (a) Per 30. l. 11.

2. Pars. [*Sint latera ad bases recta, & altitudines æquales. Cùm igitur bases & altitudines jam ponantur reciprocæ; ob harum æqualitatem, æquabuntur & illæ; ac* (b) *proinde ipsa etiam parallelepipeda.* (b) Per 31. l. 11.

Deinde,] sint altitudines inæquales, lateraque ad bases recta; & ex majori CF, ipsi VS sume parem EF. Solidum QS est ad solidum EK, ut (*c*) RT ad FK; hoc est, ex hyp. ut CF ad VS; hoc est, ex constr. ut CF ad EF; hoc est, ut (*d*) CG ad EG; hoc est, ut solidum (*e*) GK ad solidum idem EK. Ergo solida QS & CK eandem habent rationem ad EK. Ergo sunt paria. Quod erat demonstrandum. (c) Per 32. l. 11. (d) Per 1. l. 6. (e) Per 25. l. 11.

[*Et cùm parallelepipeda obliqua sint rectis æque altis & super iisdem basibus* (f) *æqualia; illa etiam, si reciprocant bases & altitudines, æqualia sunt.*] (f) Per 30. l. 11.

Corollaria.

QUÆ de parallelepipedis demonstrata sunt Prop. 29, 30, 31, 32, 33, 34. etiam conveniunt prismatis triangularibus, quæ sunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur,

1. Prismata triangularia æquè alta sunt ut bases A, B. [*Et proinde, si eandem vel æquales habeant bases, & eandem altitudinem, æqualia sunt.*] Fig. 41.

2. Si similia fuerint, eorum proportio triplicata est proportionis laterum æqualibus angulis oppositorum. [*Et proinde corollaria prop. 33. ad illa applicari possunt.*]

3. Si æqualia sunt, reciprocant bases & altitudines: & si reciprocant bases & altitudines, æqualia sunt.

Scholium.

QUod hic propos. 34. ostensum est de parallelepipedis, demonstrabitur in libro 12. de pyramidibus p. 9. de prismatis quibuscunque coroll. 3. post p. 9. de conis & cylindris p. 15.

PROPOSITIO XXXV.

V*Alde prolixa, servit sequenti, quam sine illâ demonstrabimus.*

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 42. *Parallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A, B, C) factum, æquatur parallelepipedo (IN) facto a mediâ (B) & æquiangulo priori.*

Parallelepipedi DH basis FD habeat latus EF æquale A, & latus alterum ED æquale C: latus verò EG basi insistens, æquale mediæ B. Erit parallelepipedum DH factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedi deinde IN tria latera LX, IX, XM (ac proinde omnia reliqua) sint æqualia mediæ B; & angulus solidus X sit æqualis angulo solido E. Erit parallelepipedum IN factum ex mediâ B, & priori æquiangulum. Dico etiam esse æquale.

(a) Per 14. l. 6.
(b) Per def. 11. l. 11.
(c) Per 31. l. 11.

Cùm enim per hyp. & constr. sit ut FE ad LX: ita reciprocè IX ad DE, erunt (*a*) bases DF, IL æquales. Jam quia anguli solidi ad E & X sunt æquales; si ponantur intra invicem, (*b*) congruent; & ob æqualitatem rectarum EG, XM, puncta M, G coincident. Quare una erit utriusque solidi altitudo perpendicularis, nempe a punctis M, G jam congruentibus, in planum baseos demissa. Solida (*c*) igitur DH, IN æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

(d) Vide sch. 1. p. 40. l. 11.

HIC porro observabimus, id quod magnum habet usum, ex tribus lineis quomodocunque inter se (*d*) ductis, ejusdem magnitudinis solidum [*parallelepipedum rectum, seu planis rectangulis comprehensum*] gigni.

ABC. CAB. BCA.
1 2 3

In schemate hic apposito, duæ primæ literæ designant basim; tertia altitudinem. Comparemus primum cum secundo.

Basis AB est ad basim CA per 1. 6. ut B latus ad C latus: hoc est, reciprocè ut B altitudo ad C altitudinem. Ergo per p. 34.

ABC Æ. CAB.

Eodem modo ostendes primum tertio, & tertium secundo esse æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

Parallelepipeda similia, similiterque a lineis proportionalibus descripta, etiam ipsa sunt proportionalia: & e converso.

Patet

Patet ex 34. l. 5. Rationes enim parallelepipedorum, per 33. hujus, erunt triplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Conversa patet ex. 35. l. 5. [*Rationes enim parallelepipedorum ex hypothesi æquales, (a) triplicatæ sunt rationum homologorum laterum, a quibus parallelepipeda similia similiter describuntur: & proinde horum laterum rationes (b) erunt æquales.*] (a) *Per* 33. *l.* 11. (b) *Per* 35. *l.* 5.

Propositio vera est de quibuscunque similibus corporibus, quæ patebit l. 12. triplicatam habere laterum rationem.

[Corol. *Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices cubicas. Si nempe multiplicentur inter se quantitates quæ sub radicis cubicæ signis sunt, & producto præfigatur ejusdem radicis cubicæ signum; habebitur datarum radicum cubicarum productum. Exempli gr. sit* $\sqrt{}$ c5 *multiplicanda in* $\sqrt{}$ c4: *producetur* $\sqrt{}$ c20. *Nam ex multiplicationis definitione, debet esse unitas ad multiplicantem (sive* $\sqrt{}$ c4.) *ut est multiplicandus (seu* $\sqrt{}$ c5) *ad productum. Ergo per hanc prop. erit cubus unitatis ad cubum multiplicantis, ut cubus multiplicandi est ad cubum producti: hoc est, si pro numero producto ponatur P, erit* 1.4 :: 5.Pc. *Sed* 1.4 :: 5.20. *Ergo* Pc = 20, & P = $\sqrt{}$ c20.

Et similiter, ex divisionis definitione ostendetur, quòd $\sqrt{}$ c20 *divisa* $\sqrt{}$ c5 *exhibebit quotum* = $\sqrt{}$ c4. *Vide cor. 1. p. 22. l. 6.*

Et universaliter, quantitatum radicalium ejusdem cujusvis ordinis sive speciei, facta (vel quoti) habentur, multiplicando (vel dividendo) quantitates quæ sub signis radicalibus sunt, & producto (vel quoto) idem signum radicale præfigendo.

Propositionem 38. *jam supra demonstravimus, in schol. p.* 13. *hujus l.* 11. *Sequitur*

PROPOSITIO XXXIX.

SI solidi parallelepipedi (AB,) eorum quæ ex adverso planorum (AC, DB) latera, (nempe AE, FC, AF, EC; & DH, GB, DG, HB) bifariam secta sint: per sectiones autem plana (ILQO, PKMR) sint extensa; planorum communis sectio (ST,) & solidi parallelepipedi diameter (AB,) bifariam se mutuò secabunt. *Fig.* 43.

Ducantur rectæ SA, SC, TD, TB. Et propter bisectas DG, HB, DH, GB, ac rectam RP ipsis DG, HB, rectamque OQ ipsis

(a) Per 33. l. 1.
(b) Per 27 & 34. l. 1. cum def. 1. l. 6.
(c) Per axio. 7. l. 1.
(d) Per 26. l. 6.
(e) Per def. 37. l. 1.
(f) Per 24. l. 11. & 34. l. 1.
(g) Per 9. l. 11. & axio 1.
(h) Per 33. l. 1.
(i) Per cor. p. 7. l. 11.
(k) Per 15. l. 1.
(l) Per 27. l. 1.
(m) Per 26. l. 1.

ipsis DH, GB (a) *parallelam; dividetur parallelogrammum GH in quatuor æqualia parallelogramma, tum & sibi invicem* (b) *similia & similiter posita. Quare OR, PQ sibi mutuò imposita congruent, & DT = (c) TB. Parallelogramma etiam OR, PQ, angulos ODR, PBQ cum simili sibi ipsis parallelogrammo GH communes habentia, circa eandem diametrum* (d) *existunt, & proinde DTB est* (e) *linea recta. Eodem modo ASC recta linea est, & AS = SC. Porro, AD parallela & æqualis est* (f) *ipsi FG, atque FG parallela & æqualis est ipsi CB: ergo* (g) *AD, CB sunt parallelæ & æquales; unde & AC, DB, quæ eas jungunt, sunt* (h) *parallelæ & æquales, ac proinde earum dimidiæ AS, BT æquales erunt; & præterea AB, ST sunt in* (i) *eodem plano ACBD. In triangulis itaque ASV, BTV, propter angulos AVS, BVT ad verticem oppositos, & proinde* (k) *æquales, & angulos alternos ASV, BTV; & proinde* (l) *æquales; & latera AS, BT æqualia; omnia reliqua erunt* (m) *æqualia, & SV = VT, & AV = VB. Ergo communis sectio ST & diameter AB se mutuò bifariam secant. Q. E. D.*

Corol. *Hinc in omni parallelepipedo, diametri omnes se mutuò bifariam secabunt in uno eodemque puncto V.]*

PROPOSITIO XL.

Fig. 44. & 45.

Si fuerint duo prismata triangularia æqualis altitudinis (ABFGOC & IKLPXQ,) quorum unum basim habeat parallelogrammam (OB) duplam baseos alterius (IKL) quæ triangula sit; prismata erunt æqualia.

(n) Per 31. l. 11.
(o) Per 28. l. 11.

Nam si perficiantur parallelepipeda KR & CH, erunt hæc (*n*) æqualia, ob basium CA, MK, & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam prismata ipsorum (*o*) dimidia æqualia erunt. Quod erat demonstrandum.

[*Sunt nempe hæc duo prismata triangularia, æqualium parallelepipedorum per diagonales sectorum dimidia. Hoc tantùm interest, quòd in posteriore sectio fit per baseos diagonalem, in priori non item.*]

Scholium 1.

Ex hactenus demonstratis habetur dimensio prismatum triangularium, & [*ejusmodi*] quadrangularium [*quorum adversa plana quadrangularia quæcunque sunt parallela,*] seu parallelepipedorum, si nimirum altitudo ducatur in basim. Ut si altitudo sit 10. pedum, basis verò pedum

quæ-quadratorum 100. (mensurabitur autem basis per schol. p. 36. vel 41. l. 1.) multiplica 10. per 100. proveniunt 1000. pedes cubici pro soliditate prismatis dati.

Demonstratio facilis est. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ductâ in basim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in basim ductâ, cùm per 31. æquale sit parallelepipedo recto super eâdem basi ad eandem altitudinem constituto.

Deinde cùm totum parallelepipedum producitur ex altitudine in totam basim; semissis parallelepipedi, (hoc est, prisma triangulare, per 28.) producetur ex altitudine ductâ in dimidiam basim, triangulum nempe ILK. *Fig. 45.*

[Scholium 2. *Cùm prismata polygona in triangularia resolvi possint, vel etiam ad triangularia æqualis baseos & altitudinis* (a) *reduci; quæ igitur de prismatis triangularibus traduntur in corollariis p. 34. & in schol. 1. pr. hujus 40. de quibuscunque prismatis polygonis vera sunt. At cùm Tacqueto visum fuerit illa omnia ex iis quæ in lib. 12. de pyramidibus demonstrantur, derivare; non opus est ut eadem hîc aliunde deducendo, tyronibus moram injiceremus.*]

(a) Per 25. l. 6.

P 5 ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER DUODECIMUS, NOBIS OCTAVUS.

QUOD in libris præcedentibus hactenus præstare conati sumus, ut Mathematum elementa ad faciliorem ac breviorem methodum revocaremus; id imprimis præstandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cùm maximè sit necessaria, demonstrationes adeo sunt prolixæ, ut tyrones in desperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propositum nobis est; ut tamen a rigore Geometricæ demonstrationis non recedamus. Quod utrùm simus assecuti, lector intelliget, si hæc nostra cum Euclidei prolixitate contulerit.

Postquam verò Euclides libro priore solidorum elementa exposuisset, & corporum facillimorum, utpote superficiebus planis terminatorum, mensuras definivisset; in Duodecimo *hoc libro corpora superficiebus curvis terminata, Cylindros nimirum, Conos atque Sphæras considerat: ea inter se comparat: & eorum mensuras definit. Utilissimus sane est hic liber; eo quòd principia illa contineat quibus tot celeberrimas demonstrationes de Cylindro, Cono atque Spharâ Geometrarum Principes, præsertim verò Archimedes, inædificarunt.*

DEFINITIONES.

Fig. 1. Tab. 12. 1. PYramis est solidum (ZL) triangulis (ALC, CLF, FLB, BLA) comprehensum, ab uno plano (Z) ad unum punctum (L) constitutis.

Planum Z basis dicitur, & esse potest vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis alia figura [*rectilinea*;] ex cujus lateribus singulis triangula surgunt, in unum punctum L, quod vertex dicitur, coeuntia.

Ut

Ut triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis [*triangularis, quæ pro basi triangulum habet,*] inter solidas prima & simplicissima est.

2. Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A,) ab eoque ducatur recta infinita (AF) tangens circulum in C; quæ puncto (A) manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (ACF) redeat, unde moveri cœperat; superficies, a rectâ lineâ (ACF) descripta, dicitur conica superficies: corpus verò quod hac superficie & circulo (CL) continetur, conus vocatur. *Fig. 2. & 3.*

Vertex coni est A.

Basis coni est circulus CL.

Axis coni est recta (AB) ex vertice ad baseos centrum ducta.

Latus coni est recta (AC) a vertice ad baseos circumferentiam ducta, quam esse totam in coni superficie, ex ejus genesi est manifestum.

Conus rectus est, cùm axis (AB) est basi rectus. *Fig. 2.*

Conus scalenus, seu obliquus est, cùm axis (AB) non est ad basim rectus. *Fig. 3.*

Fit etiam conus rectus a triangulo rectangulo (CBA) circa unum latus perpendiculare (AB) in orbem ducto. *Fig. 2.*

3. Si circa duos circulos æquales & parallelos (CL, OQ,) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, sic ut mota sibi ipsi [*& rectæ BA circulorum centra jungenti*] semper parallela maneat; superficies a rectâ (COF) descripta, dicitur cylindrica superficies; corpus verò quod hac superficie & binis circulis continetur, cylindrus vocatur. *Fig. 4. & 5.*

Bases cylindri sunt circuli (CL, OQ.)

Axis cylindri est recta (AB) basium centra connectens.

Latus cylindri est recta (OC) in cylindri superficie utramque basim tangens.

Rectus cylindrus est, cùm axis ad bases rectus est. *Fig. 4.*

Scalenus cylindrus dicitur, cùm axis ad bases non est rectus. *Fig. 5.*

Fit etiam cylindrus rectus a rectangulo (OCBA) circa unum latus (BA) in orbem ducto. *Fig. 4.*

4. Similes coni & cylindri sunt, quorum axes (AK, ZO) & basium diametri (BK, QR) sunt proportionales; [*& quorum axes vel sunt basibus recti, vel iisdem similiter inclinati.*] *Fig. 24. & 25.*

5. Sphæra est solidum comprehensum unâ superficie, ad quam omnes rectæ lineæ a quodam puncto intra ipsam posito ductæ, sunt æquales.

Punctum

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter est recta per centrum ducta ad superficiem utrimque pertingens.

Fig. 6. Generatur sphæra, si semicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur.

6. Magnitudines figuræ alicui inscriptæ, aut circumscriptæ, sive figurâ minores vel majores, in figuram desinere dicuntur, cùm ab eâ tandem differre possunt quantitate minori quacunque datâ, seu quantumvis parvâ.

Itaque si ea, quæ figuræ alicui inscribuntur, ab eâ tandem deficiant defectu minori quocunque dato; inscripta dicentur in figuram desinere; Et si ea quæ alicui figuræ circumscribuntur, excedant eam tandem excessu minori quocunque dato; dicentur rursùm circumscripta desinere in figuram.

Fig. 9. [7. *Si fiat triangulum BAC in semicirculo BDLC, & super lateribus BA, AC pro diametris, ducantur semicirculi minores BNA, AMC; figura curvilineæ BDAN, ALCM, semiperipheriâ circuli minoris exteriùs, & arcu circuli majoris interiùs, singulæ terminatæ, ab earum inventore,* Lunulæ conjugatæ Hippocratis Chii *appellantur.*

Fig. 10. *Si arcus BDA, ALC sint æquales, ac proinde quadrantes sint peripheriæ majoris circuli, denominentur ejusmodi lunulæ* quadrantales.

Fig. 11. *Si recta ED arcus lunulæ quadrantalis proportionaliter secet in E, D, ut sit arcus BE ad arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA, vocentur areæ AED, BED* portiones lunulæ quadrantalis.

8. *Lunula, vel ejusdem portio* quadrari *dicitur, si ei æqualis figura rectilinea construi possit.*]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 6. & 7. *Polygonorum similium circulis inscriptorum proportio est duplicata proportionis diametrorum (AF, IC;)* [atque adeò etiam semidiametrorum (AZ; IX.)]

Ducantur AO, FB; IR, LC. Quia polygona ponuntur similia, æquales erunt (*a*) anguli OBA, RLI, & latera OB, BA, proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL, (*b*) anguli O & R æquantur. Ergo etiam BFA & LCI, qui iisdem arcubus BA, LI insistunt, sunt (*c*) æquales. Anguli verò FBA, CLI in semicirculis sunt (*d*) rec-

(a) Per def. 2. l. 6.
(b) Per 6. l. 6.
(c) Per 21. l. 3.

(*a*) recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui BAF; LIC (*b*) æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL sibi mutuò æquiangula sunt, erunt (*c*) similia; eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam quia per hyp. polygona sunt similia, erit proportio eorum duplicata (*d*) proportionis laterum BA, LI; hoc est, ut jam ostendi, duplicata proportionis diametrorum AF, IC, [*ac proinde* (e) *etiam semidiametrorum AZ, IX.*] Quod erat demonstrandum. (a) Per 31 l. 3. (b) Per cor. 9. p. 32. l. 1. (c) Per 4. l. 6. (d) Per 20. l. 6. (e) Per 15. l. 5.

Corollaria.

1. POlygonorum similium circulis inscriptorum ambitus sunt inter se ut diametri. Fig. 6. & 7.

Cùm ostensum jam sit AB esse ad LI, ut AF ad IC; etiam OB erit ad RL, ut AF ad IC: & sic de cæteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia simul latera ad simul omnia, (hoc est ambitus ad ambitum) sunt ut AF ad IC.

[2. *Figurarum rectilinearum similium circulis inscriptarum, latera homologa sunt inter se ut circulorum diametri.*]

Lemma.

POlygona circulo inscripta in circulum desinunt. Fig. 8.

Inscribe quadratum ACBD. Cùm hoc dimidium sit quadrati (*f*) circulo conscripti, erit majus dimidio circuli. Quare si hoc auferatur è circulo, auferetur plus quàm dimidium. Deinde singulis arcubus bisectis in E, K, I, H, inscribe octogonum: & in E tangat FG, cui BC, DA occurrant in G & F: erit CF (*g*) parallelogrammum, cujus cùm dimidium sit triangulum (*h*) CEA, erit hoc plus quàm dimidium segmenti CEA. Eodem modo singula triangula AKD, DIB, &c. singulorum segmentorum plus sunt quàm dimidia. Ergo omnia triangula omnium segmentorum plus quàm dimidia sunt. Hæc ergo [*triangula*] si ex illis [*segmentis*,] hoc est, ex residuo circuli auferas, plus quàm dimidium auferetur. Pari argumento si inscribantur circulo polygona duplo semper plurium laterum, ostendam è residuo circuli semper auferri plus quàm dimidium. Ergo residuum erit tandem (*i*) minus quocunque dato, ac proinde polygona inscripta tandem a circulo deficient quantitate minori datâ quacunque; hoc est, in circulum (*k*) desinent. Q. e. d. (f) Per schol. post 6. & 7. l. 4. (g) Per cor. p. 28. & 29. l. 3. (h) Per 41. l. 1. (i) Patet ex lem. 2. sch. post 11. l. 6. (k) Per defin. 6. l. 12.

[*Haud absimili methodo demonstrari posset, polygona circulo circumscripta in circulum desinere. Verùm cùm hoc inter alia, nec non & ipsum Lemma præcedens, in prop. 3. Theorematum ex Archimede selectorum contineantur, superfluum esset hîc loci plura subjungere*]

PRO-

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7. *Circulorum proportio est duplicata proportionis diametrorum.*

(a) Per 1. l. 12. (b) Per lem. Polygonorum similium circulis sine fine inscriptorum proportio semper duplicata (*a*) est proportionis diametrorum. Atqui polygona circulis in infinitum inscripta, in circulos (*b*) desinunt. Ergo per porisma universale sequens, etiam circulorum proportio duplicata est proportionis diametrorum. Quod erat demonstrandum.

Porisma universale.

Si ea quæ duabus figuris (A, B) inscribuntur, in ipsas desinant; quam proportionem inter se semper habent inscripta, eandem habent & figuræ.

R
A B X Z.
C F

Sit ratio X ad Z, ea quam inscripta semper habent inter se. Si ergo negas rationem figurarum A, B eandem esse cum ratione X ad Z, quam semper habent ea, quæ figuris inscribuntur; sit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quàm figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inscripta per hyp. desinunt in figuras A & B erunt aliqua figuris A & B inscripta, quæ ab
(c) Per def. 6. l. 12. ipsis deficiant (*c*) minori quantitate, quàm R deficiat a figurâ A. Sint ea, C & F. Ergo C erit majus quàm R. Ergo C est
(d) Per 8. l. 5. ad B in (*d*) majori, quàm R ad B; hoc est, (ut ponebatur,) quàm X ad Z; hoc est, per hyp. quàm idem C ad F. Quoniam igitur C est ad B in majori proportione, quàm ad F,
(e) Per 10. l. 1. erit B figura minor (*e*) sibi inscripto F, totum suâ parte. Eodem modo ostendetur rationem B ad A non posse esse majo-
(f) Per 26. l. 5. rem ratione Z ad X, [*hoc* (f) *est*, *rationem A ad B non esse minorem ratione X ad Z.*] Ergo ratio A ad B æqualis est rationi X ad Z. Quod erat demonstrandum.

[*Eâdem methodo demonstrabitur, duas figuras eandem inter se proportionem habere, quam semper habent circumscripta in illas desinentia; hoc modo:*

C F.
A B X Z
R

Sit ratio X ad Z ea quam circumscripta semper habent inter se. Si ergo negas rationem figurarum A, B eandem esse cum ratione X ad Z, quam semper habent ea quæ figuris circumscribuntur; sit ratio A ad B primo major ratione X ad Z.

Ergo

Ergo erit A ad aliam quandam quantitatem R; ipsâ majorem, ut X ad Z. Et quoniam circumscripta per hypothesin desinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B circumscripta, quæ ipsas excedant quantitate (a) *minori quàm R excedat figuram B. Sint ea C & F. Ergo F minus erit quàm R. Ergo* (b) *ratio A ad F major est ratione A ad R; hoc est, ratione X ad Z, sive C ad F. Quoniam igitur ratio A ad F major est ratione C ad F, figura A major* (c) *erit sibi circumscripto C, pars toto, quod est absurdum. Non igitur est ratio A ad B major ratione X ad Z. Eodem modo ostendetur rationem B ad A non esse ratione Z ad X majorem, &* (d) *proinde rationem A ad B non minorem esse ratione X ad Z. Si itaque ratio A ad B neque major neque minor est ratione X ad Z; erit ei æqualis. Q. E. D.*

(a) Per def. 6. l. 12. (b) Per 8. l. 5. (c) Per 10. l. 5. (d) Per 26. l. 5.

Corollaria ad Prop. II.

Cor. 1. *Hinc, ut circulus est ad circulum, ita polygonum in illo descriptum erit ad simile polygonum in hoc descriptum. Utraque enim sunt in duplicatâ ratione diametrorum quæ sunt in circulis.* Fig. 6. & 7.

Cor. 2. *Hinc etiam liquet circulos esse ad se invicem, in ratione radiorum suorum* (e) *duplicatâ; hoc est, ut* (f) *quadrata radiorum.*

Cor. 3. *Hinc etiam, circulorum quorum diametri vel semidiametri sunt nota, proportio innotescit;* (g) *inveniendo nimirum diametris datis tertiam proportionalem, ad quam circuli primi diameter eandem* (h) *habebit rationem, quam habet circulus iste primus ad secundum. Sit circuli primi diameter pedum quatuor, secundi pedum sex; cùm sint 4, 6, 9. continuè* (i) *proportionales, erit circulus primus ad secundum ut 4. ad 9.*

Cor. 4. *Hinc etiam, circulum quemvis in datâ ratione augere vel minuere licet, uti supra* (k) *notatum est. Proponatur circulum describere qui sit alterius dati quintuplus; sitque dati circuli radius AB; inter quem, & rectam BC, ipsius AB quintuplam inveniatur media proportionalis BX. Circulus radio BX descriptus erit circuli dati quintuplus.*

(e) Per 1. & 34. l. 5. (f) Per sch. post 20. l. 6. (g) Per 11. l. 6. (h) Per hanc prop. & def. 10. l. 5. (i) Per cor. 3. pr. 17. l. 6. (k) Vide cor. 4. pr. 20 l. 6.

Cor. 5. *Si quatuor rectæ fuerint proportionales; figuræ similes rectilineæ, similiterque descriptæ super duabus rectis prioribus, proportionales erunt circulis quorum diametri vel semidiametri fuerint duæ posteriores. Nam cùm rectæ datæ sint proportionales, & cùm tam figuræ rectilineæ, quàm circuli* (l) *sint in earumdem rectarum ratione duplicatâ; erunt etiam figuræ circulis* (m) *proportionales.*

(l) Per 20. l. 6. & 2. l. 12. (m) Per 34. l. 5.

Cor.

Cor. 6. *E converso, si duæ figuræ similes rectilineæ duobus circulis proportionales fuerint; erunt homologa rectilinearum latera, circulorum diametris proportionalia. Cùm enim rationes figurarum & circulorum æquales, duplicatæ* (a) *sint rationum homologorum laterum & diametrorum respectivè,* (b) *erunt etiam hæ rationes æquales.*

(a) Per 20. l. 6. & 2. l. 12.
(b) Per 35. l. 5.

Cor. 7. *Hinc si detur circulo dato A æquale quadratum Q; invenietur aliud quadratum X quod alteri cuivis circulo C æquale sit. Nam cùm ex hypothesi sit A ad Q, ut C ad X, erit permutando, A ad C ut Q ad X; & proinde (per cor. 5.) radius circuli A ad radium circuli C, ut latus quadrati Q ad latus quadrati X. Cùm igitur dentur circulorum radii, & latus quadrati Q,* (c) *invenietur latus quadrati X, & proinde* (d) *ipsum X quadratum. Et quod in hoc corollario de quadratis dictum est, idem de figuris rectilineis similibus quibuscunque* (e) *dictum puta.*

(c) Per 12. l. 6.
(d) Per 46. l. 1.
(e) Per 12. & 18. l. 6.

Fig. 76 l. 6.

Cor. 8. *Circulus super hypotenusâ AB trianguli rectanguli ABC, æqualis est duobus circulis qui describuntur super AC, BC lateribus angulum rectum continentibus. Si enim ab angulo recto C demittatur hypotenusæ perpendicularis CO, erunt AB, AC, AO* (f) $\div$; *& itidem AB, CB, OB* (g) $\div$. *Est itaque circulus super AB, ad circulos super AC, CB, respectivè, ut est* (h) *AB ad AO, OB respectivè: & proinde,* (i) *circulus super AB ad circulos reliquos simul sumptos est, ut AB ad AO + OB. Et cùm sit AB = AO + OB, erit etiam circulus super AB duobus reliquis simul sumptis æqualis.*

(f) Per cor. 2. pr. 8. l. 6.
(g) Per idem.
(h) Per hanc prop. & def. 10. l. 5.
(i) Per 24. l. 5.

Cor. 9. *Hinc datis circulorum quorumcunque diametris, facile est illorum summam vel differentiam exhibere, hoc est, circulum invenire, quotcunque & quibuscunque circulis datis æqualem; vel circulum describere, cujus area circulorum quorumvis inæqualium differentiæ æquetur: eâdem scilicet methodo, quâ quadratorum summa vel differentia exhibetur in schol. p. 47. l. 1. quod vide. In demonstratione tantùm pro p. 47. l. 1. citetur cor. 8. p. 2. l. 12.*

Fig. 9. & 10. l. 12.

Cor. 10. *Hinc etiam Lunularum conjugatarum quadraturam, quam primus docuit Hippocrates Chius, possumus derivare. Sit enim ABC triangulum rectangulum, & BAC semicirculus diametro BC, BNA semicirculus diametro AB, AMC semicirculus diametro AC descriptus. Est itaque semicirculus BAC semicirculis BNA & AMC* (k) *æqualis. Si igitur spatium utrinque commune auferas, nimirum segmenta BA, AC, relinquentur duæ lunulæ BNA, AMC, utrimque lineis circularibus terminatæ, triangulo rectilineatî BAC æquales. Quòd si recta BA æqualis sit rectæ AC; hoc est, si lunulæ fuerint quadrantales, demissâ perpendiculari*

(k) Per cor. 8. hujus.

Fig. 10.

AO

AO ad hypotenusam BC, erit triangulum BAO æquale lunulæ BNA, & triangulum COA æquale lunulæ CMA. Q. E. I.

Scholium 1.

Similia circulorum segmenta ABO, ILR sunt in duplicatâ ratione diametrorum AF, IC, vel etiam in duplicatâ ratione rectarum AO, IR, quæ segmentorum arcubus subtenduntur. Bisectis enim arcubus ABO, ILR in B & L, ductisque rectis AB, BO, IL, LR; propter arcus bisectos, subtensæ (a) *æquales erunt, nempe AB = BO, & IL = LR: Sed & ang. ABO =* (b) *ang. ILR. Similia igitur* (c) *sunt triangula ABO, ILR; atque adeo sunt in duplicatâ* (d) *ratione laterum AB, IL, sive* (e) *diametrorum AF, IC quæ sunt in circulis, vel etiam subtensarum AO, IR. Et continuâ arcuum AB, BO, & IL, LR bisectione, figuræ polygonæ similes perpetuò inscribentur iisdem segmentis, & super iisdem basibus AO, IR, in ipsa segmenta tandem desinentes; atque igitur* (f) *ipsa segmenta ABO, ILR erunt in duplicatâ ratione diametrorum AF, IC; vel in duplicatâ ratione subtensarum AO, IR. Q. E. D.*

Fig. 6. & 7. (a) Per 27. l. 3. (b) Per cor. 2. pr. 33. l. 6. (c) Per 6 l. 6. (d) Per 19. l. 6. (e) Per cor. 2. pr. 1. l. 12. (f) Per porisma univ.

Scholium 2.

Cum quadratura lunularum conjugatarum quarumcunque conjunctim, quadrantalium verò seorsim, in coroll. 10. ostensa sit; liceat jam alia quædam de lunulâ quadrantali, de quadraturâ portionis ejusdem, deque methodo eam in datâ ratione secandi, subjungere.

1. *Compleatur Lunulæ quadrantalis circulus minor, &* (g) *transibit ejus circumferentia per circuli majoris centrum O. Si jam* in arcu lunulæ exteriori BNA sumatur quodvis punctum E, juncta OE secabit arcus lunulæ proportionaliter in E & D, & proinde lunulam secabit in portiones (*h*) AED, BED. *Cùm enim angulus BOE sit ad centrum circuli majoris & ad circumferentiam circuli minoris, arcus BE* (i) *erit duplo plurium graduum quàm arcus BD; & proinde semiperipheria BEA est ad quadrantem BDA, ut arcus BE ad arcum BD, sive,* (k) *ut arcus EA ad arcum DA. Et permutando, arcus BE est ad arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA.*

2. *Si arcus EB, EA fuerint æquales, hoc est, si punctum E coincidat cum N, medio puncto semicirculi BNA; ductæ rectæ NB, NA perficient quadratum NAOB circulo minori inscriptum, & circulum majorem tangent in B & A. Cùm enim BNA semiperipheria circuli minoris bisecta sit in N, erunt*

Fig. 11. (g) Per cor. 2. p. 9. l. 4. (h) Per def. 7. l. 12. (i) Sequitur ex cor. 4. scholii p. 5. l. 4. (k) Per 16. & 17. l. 5. Fig. 11. & 12.

(a) Per 6. l. 4. *recta NB, NA arcus quadrantalis chordæ, sive latera (a) quadrati circulo minori inscriptibilis. Et propter æquales majoris circuli radios BO, AO, erunt hi etiam in semicirculo BOA, reliqua duo quadrati, circulo minori inscriptibilis, latera. Quare, cùm omne quadratum sit (b) rectangulum, anguli NBO, NAO erunt recti, & propterea recta NB, NA circulum majorem tangent (c) in B & A.*

(b) Per def. 32. l. 1. (c) Per 16. l. 1.

Fig. 11. 3. *Si verò arcus EB, EA fuerint inæquales, etiam subtensæ EB, EA (d) inæquales erunt; & si EA major sit quàm EB, propter angulum BEA in semicirculo rectum, (e) angulus EBA erit semirecto major, & angulus EAB semirecto minor; ac proinde ang. EAO (sive EAB, semirecto BAO auctus) erit angulo recto minor. Recta igitur EA arcum circuli majoris quadrantalem BDA (f) secabit alicubi, ut in G.*

(d) Per cor. p. 27. l. 3. (e) Per cor. 18. p. 32. l. 1. (f) Per 16. l. 3.

4. *Ductâ rectâ BG, hæc trianguli rectanguli BEG basis, & arcûs BDG subtensa erit, ut satis patet: atque anguli EGB, EBG erunt æquales, nempe semirecti. Nam propter angulos AGB, EGB duobus (g) rectis æquales, atque angulum AGB in segmento quadrantali (h) sesquirectum, erit angulus EGB semirectus, & propter angulum GEB rectum, erit (i) etiam angulus EBG semirectus.*

(g) Per 13. l. 1. (h) Per cor. 1. p. 8. & 9. l. 4. (i) Per cor. 6. p. 32. l. 1.

5. *Basis BG trianguli rectanguli æquicruris EBG, a rectâ EO bifariam & perpendiculariter secatur. Angulus enim BEO super arcu quadrantali BO circuli minoris, (k) est semirectus, & proinde angulus rectus BEG a rectâ EO bisecatur. Sed angulus BEG est trianguli isoscelis angulus verticalis: unde recta illum bisecans, (l) bisecabit etiam basem BG in F, eique perpendicularis erit.*

(k) Per cor. 1. p. 8. & 9. l. 4. (l) Per n. 3. sch. p. 26. l. 1.

6. *Triangula itaque BFE, GFE sunt sibi ipsis, & toti BEG, atque etiam triangulo BOA similia. Singula enim sunt triangula rectangula isoscelia, seu quadratorum dimidia.*

7. *Cùm BF sit ipsi DO (circuli majoris radio) perpendicularis, (m) erit illa sinus rectus arcûs BD; & proinde (n) dupla BF, sive BG, subtensa erit dupli arcûs BD, sive BDG. Supra autem (n. 1.) ostensum est, arcum BE in circulo minore, duplo plurium graduum esse quàm est arcus BD in circulo majore. Ergo arcus BDG (nempe ipsius BD duplus) similis (o) erit arcui BE, & segmentum BG simile segmento BE.*

(m) Per def. 10 l. 3. (n) Per cor. pr. 30. l. 3. (o) Per def. 4. l. 6.

8. Portio lunulæ BED æqualis est triangulo rectilineo BEF. *Segmenta enim similia BE, BG sunt (p) in duplicatâ ratione diametrorum BA, BC, hoc est, (q) ut 1 ad 2; ac proinde semisegmentum BDF est segmento BE æquale. Si itaque e portione BED subtrahatur segmentum BE, & ei æquale semisegmentum BDF addatur, habebitur triangulum rectilineum*

(p) Per sch. 1. hujus. (q) Per sch. p. 20. l. 6. & cor. 1. p. 47. l. 1.

tionem BEF portioni BED æquale, ac (a) *proinde quadratur portio BED lunulæ quadrantalis.* (a) Per def. 8. l. 12.

9. Lunulam quadrantalem ADBN secundùm rationem datam (scil. PQ ad QR) dividere in portiones AED, BED; & utriusque portionis quadraturam exhibere. *Diametrum AB semicirculi minoris AEB divide* (b) *secundùm rationem datam in I, & in eodem semicirculo, a puncto I, erigatur diametro BA perpendicularis IE; atque à puncto E ad O centrum circuli majoris, ducta recta EO lunulam in datâ ratione dividet. Similia* (c) *enim triangula BAO, BEF, sunt in duplicatâ* (d) *ratione laterum homologorum AB, BE: hoc est, (propter AB, BE, BI* ∺ (e),) *ut* (f) *AB ad BI; atque ducta IO, in eâdem ratione* (g) *est triangulum BAO ad triangulum BIO, propter eandem altitudinem ad O. Cùm igitur triangulum BAO ad triangula BEF, BIO eandem* (h) *rationem habeat, erit triang. BIO* = (i) *triang. BEF* = (k) *portioni BED. Sed lunula tota triangulo BAO* (l) *æquatur; atque adeo portio EAD triangulo AIO* (m) *æquabitur. Est autem triangulum AIO ad triangulum BIO,* (n) *ut AI ad BI, sive ut PQ ad QR; & proinde portio lunulæ AED erit ad portionem BED ut PQ ad QR. Lunula itaque quadrantalis in datâ ratione dividitur, & alio modo quadratura portionis BED exhibetur; unde tum eandem portionem triangulo BIO, tum portionem alteram AED triangulo AIO æqualem esse constat. Datur itaque portionis utriusque quadratura.*

(b) Per 9. l. 6. (c) Per n. 6. hujus. (d) Per 19. l. 6. (e) Per cor. 2. p. 8. l. 6. (f) Per def. 10. l. 5. (g) Per 1. l. 6. (h) Per 11. l. 5. (i) Per 9. l. 5. (k) Per n. 8. hujus. (l) Per cor. 10 hujus. (m) Per ax. 3. l. 1. (n) Per 1. l. 6.

10. *Completo utroque circulo ABC, AOBN, ducatur diametro minoris BA parallela majoris diameter EF, eique ad rectos angulos circuli majoris diameter CD, quæ producta, tum lunulam ANB in duas æquales portiones, AND, BND, tum triangulum AOB in duo æqualia triangula AHO, BHO, toti & sibi invicem similia dividet. Dico quòd spatii luniformis AGOIBECFA cornua AGOF, BIOE, triangulis AHO, BHO, (&* (o) *proinde lunulæ quadrantalis portionibus AND, BND) respectivè æqualia sunt. Nam propter ABq* = (p) *AOq + BOq = 2 AOq, erit* (q) *segmentum ADB segmenti AGO duplum, atque semisegmentum ADH segmento AGO æquale; quæ si a circuli majoris octantibus æqualibus AOD, AOF auferantur, remanebunt æqualia AHO, AGOF. Et simili modo ostendetur BHO = BIOE. Quadrantur itaque dicti spatii luniformis cornua AGOF, BIOE.* Fig. 12.

(o) Per n. 9. hujus. (p) Per 47. l. 1. (q) Per sch. 1. hujus, & schol. p. 20. l. 6.

11. *Iisdem positis, in circulo minore compleatur quadratum BNAO, & centro N, radio NB vel NA* = (r) *OB vel OA) describatur arcus quadrantalis BLA, eritque BLAO lunula quadrantalis, lunulæ BNAD similis & æqualis, ac proinde triangulo BNA vel BOA* (s) *æquabitur. Sed cornua*

(r) Per def. 22. l. 1. (s) Per cor. 10. hujus prop.

 BIOE,

(e) Per 10. *BIOE, AGOF simul sumpta eidem triangulo* (a) *æquantur. Ergo spatium mixtilineum BLAFE duplici triangulo BOA, sive quadrato BNAO æquale est.*]

PROPOSITIO III. & IV.

Sunt prolixæ & difficiles tyronibus, nec alium habent usum, quàm ut per eas demonstretur quinta, quam nos sine illis multo faciliùs demonstrabimus.

Lemmata ad P. 5.

I.

Fig. 13. Si duæ pyramides triangulares secentur planis (OSE, RXZ) ad bases (ABC, IQV) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL) proportionaliter (in E & Z:) erunt (OSE, RXZ) inter se ut bases (ACB, IQV.)

Quoniam parallela plana OSE, ABC secantur a planis BFC, AFB, AFC; erunt sectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC (*a*) parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB, bini & bini, æquales (*b*) sunt. Quare sectiones OSE, ABC (*c*) sunt similes. Eodem modo similes esse ostendam sectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio sectionis ABC ad OSE est duplicata (*d*) rationis laterum BC, SE; & ratio sectionis IVQ ad RXZ duplicata est rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ sunt eædem: (est enim BC ad SE, ut (*e*) CF ad EF; hoc est per hyp. ut QL ad ZL; hoc (*f*) est, ut VQ ad XZ.) Ergo ratio ABC ad OSE eadem est (*g*) cum ratione IVQ ad RXZ. Quod erat propositum.

(a) Per 16. l. 11. (b) Per 10. l. 11. (c) Per 4. l. 6. (d) Per 19. l. 6. (e) Per cor. 1. p. 4. l. 6. (f) Per idem cor. (g) Per 11. l. 5.

I I.

Fig. 14. Pyramidi (ZCAF) triangulam habenti basim, prismata in infinitum inscripta, desinunt in ipsam pyramidem.

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF; & per B, G, factis sectionibus BEP & GDN basi ZAC parallelis, inscripta intelligantur pyramidi prismata triangularia BEPMAO, & GDNKBQ. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi esse circumscripta

ſcripta priſmata CIBA, PXGB, NHFG. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta, ſunt ſolida IM, XK, HG, quæ ſimul ſumpta æquantur priſmati CIBA. Nam HG eſt (*a*) æquale DB, ac proinde HG cum XK æquatur PXGB, hoc eſt (*b*) MEBA. Ergo tria HG, XK, IM æquantur toti CIBA. Atqui ſi AF in plures ſine fine partes æquales dividatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur; AB fiet (*c*) quavis datâ minor. Ergo etiam (*d*) priſma CIBA fiet quovis dato minus. Ergo priſmatum circumſcriptorum (multoque magis pyramidis ZCAF, quæ pars eſt priſmatum ſibi circumſcriptorum) exceſſus ſupra inſcripta priſmata, fiet quovis dato minor. Ergo inſcripta priſmata in pyramidem (*e*) tandem deſinunt. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per 25 l. 11.*
(b) *Per eand.*
(c) *Collig. ex lem. 2. ſch. poſt 11. l. 6.*
(d) *Patet ex 25. l. 11.*
(e) *Per def. 6. l. 12.*

PROPOSITIO V.

Fig. 1.

Pyramides triangulares æque altæ, eam inter ſe proportionem habent quam baſes (AQR, ESX.)

Pyramidum altitudines æquales referant latera AP, EZ, quibus in quot placuerit æquales partes, ſed æque multas, utrimque diviſis, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus ad baſes parallelis, intelligantur utrique pyramidi inſcripta eſſe priſmata trigona æque multa & æque alta. Jam verò quia priſmata LA, IE ſunt æque alta, erit priſma LA ad priſma IE, ut (*f*) baſis LOB ad baſim INK; hoc eſt (*g*) ut baſis QRA ad baſim SXE. Eodem modo oſtendam ſingula priſmata pyramidi QPAR inſcripta, eſſe ad ſingula inſcripta pyramidi SZEX, ut baſis QAR ad baſim SEX. Ergo etiam (*h*) ſimul omnia ſunt ad omnia, ut baſis ad baſim. Quare cùm ea tandem deſinant (*i*) in ipſas pyramides, etiam ipſæ erunt (*k*) ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

(f) *Per cor. 1. p. 34. l. 11.*
(g) *Per lem. 1.*
(h) *Per 12. l. 5.*
(i) *Per lem. 2.*
(k) *Per poriſ. univerſ. poſt p. 2. l. 12.*

[*Demonſtratio ſupponit latera AP, EZ pyramidum, æquales earum altitudines exhibere, & proinde eſſe ad baſes QAR, SEX recta. Sed vim ſuam retinebit demonſtratio, quamvis latera illa ſint ad baſes quovis modo obliqua, ſi concipiantur a verticibus P, Z perpendiculares ad baſes demitti, & in æquales quotcunque partes, & æque multas utrinque dividi, & per diviſionum puncta tranſire ſupponantur plana baſibus parallela, quæ itaque rectas PA, ZE divident* (l) *in partes ſimiles, & numero æquales iis in quas dividuntur perpendiculares,*

(l) *Per 17. l. 11.*

lares, eademque plana bases erunt prismatum æque multorum & æque altorum, utrique pyramidi inscriptorum; & proinde eodem modo procedet demonstratio, ac si recta PA, ZE fuissent ipsa basibus QAR, SEX perpendiculares.]

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. & 17.

Pyramides quæcunque æque altæ, eam inter se rationem habent quam bases (AB, CFO.)

Resolvantur bases in triangula A, B, C, F, O; pyramides verò totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX est ad pyramidem OZ, ut (*a*) A ad O; & pyramis (*b*) BX est ad pyramidem OZ ut B ad O. Ergo pyramides simul AX, BX (hoc est tota ABX) sunt ad pyramidem OZ, ut A, B (*c*) simul ad O. Eodem discursu pyramis ABX est ad pyramidem FZ, ut (*d*) A, B est ad F: Et ABX est ad CZ, ut (*e*) A, B est ad C. Ergo ABX (*f*) est ad tres simul OZ, FZ, CZ, hoc est, ad totam pyramidem OFCZ, ut A, B ad O, F, C. Quod erat demonstrandum.

(a) Per præc. (b) Per eand. (c) Per 24. l. 5. (d) Per præc & 24. l. 5. (e) Per easd. (f) Per 24. l. 5.

[Corol. *Hinc sequitur, pyramides quascunque æqualium basium & altitudinum, æquales esse.*]

PROPOSITIO VII.

Omnis pyramis tertia pars est prismatis habentis eandem basim & altitudinem.

Fig. 18.

Sit primò pyramis trigona BGAC, in eâdem basi & altitudine cum prismate BACFEO. Ducantur BF, AO, AF. Triangula BFC, BFO sunt (*g*) paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA (*h*) æqualis est. Ob eandem causam pyramis OEAF par est pyramidi OBAF, hoc est pyramidi BOFA, sunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales sunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, sive BOFA sunt pares. Ergo tres simul unius BFCA triplæ sunt. Atqui tres illæ constituunt prisma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc est (*i*) BGAC, triplum est. Quod erat demonstrandum.

(g) Per 34. l. 1. (h) Per cor. præced. (i) Per cor. præced.

Fig. 19.

Sit deinde pyramis quævis eandem habens basim & altitudinem cum prismate AEFH. Ductis lineis BC, BO, BE, & NI, NG, NH, resolve prisma in triangularia prismata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonstramonstratio ex primâ parte. Nam singulæ partes prismatis [*polygoni,*] triplæ erunt singularum partium pyramidis [*polygonæ; hoc est, singula prismata triangularia singularum pyramidum triangularium tripla erunt.*] Ac proinde totum prisma [*polygonum*] totius pyramidis [*polygonæ*] triplum est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Similium pyramidum (OACB, KHIN) proportio est triplicata ejus, quam habent homologa latera (AB, HN.) Fig. 20.

Sint primò trigonæ. Perfectis parallelogrammis AM & HQ, super his constitue parallelepipeda AG, HL, in altitudine pyramidum; quæ cùm pyramides sint similes, etiam patet similia (*a*) esse. Ducantur jam EF, RP, & per EF, CB, item per RP, IN secabuntur (*b*) parallelepipeda in duo prismata æqualia. Singula horum (*c*) tripla sunt pyramidum OACB, KHIN. Utraque ergo simul, hoc est, tota parallelepipeda AG, HL, sextupla sunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales sunt. Sed horum ratio (*d*) triplicata est rationis laterum AB, HN. Ergo & illarum. Quod erat demonstrandum. (a) *Ex defin.* 9. *l.* 11. (b) *Per* 28. *l.* 11. (c) *Per præc.* (d) *Per* 33. *l.* 11.

Quòd si pyramides similes fuerint polygonæ, resolvantur in triangulares AR, BR, CR, & OK, EK, FK. Facile (*e*) ostendes etiam AR ipsi OK, & BR ipsi EK, & CR ipsi FK esse similes. [*Ob similia enim triangula* (f) *A, O; &* (g) *MIR, ZPK,* (h) *erit DM:MI :: ZV:ZP; & MI:MR :: ZP:ZK. Ergo* (i) *DM:MR :: ZV:ZK; & invertendo* (k) *MR:MD :: ZK:ZV. Eodem modo ostendetur esse MD : RD : ZV: VK. Ergo* (l) *MR:RD :: ZK:VK. Similia* (m) *sunt igitur triangula MRD, ZKV, & proinde etiam pyramides AR, OK, quæ similibus triangulis multitudine æqualibus continentur, similes* (n) *sunt. Eodem modo, ob similia triangula B, E; vel C, F, demonstrabitur triangula DXR, VSK similia esse, atque adeo pyramidem BR ipsi EK, & CR ipsi FK similem esse.*] Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, OK est triplicata rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum BR, EK triplicata est rationis MX ad SZ; hoc est denuo per hyp. rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum CR, FK est triplicata rationis XQ ad ST, hoc est, rursum IM ad PZ. Cùm ergo ratio singularum ad singulas sit triplicata rationis IM ad PZ, etiam ratio (*o*) omnium ad omnes, (hoc est, Fig. 21. (e) *Ex* 20. *&* 5. *l.* 6. *& ex defin.* 9. *l.* 11. (f) *Per* 20. *l.* 6. (g) *Per def.* 9. *l.* 11. (h) *Per def.* 1. *l.* 6. (i) *Per* 22. *l.* 5. (k) *Per schol. post* 16. *l.* 5. (l) *Per* 22. *l.* 5. (m) *Per* 5. *l.* 6. (n) *Per def.* 9. *l.* 11. (o) *Per* 12. *l.* 5.

ratio totius pyramidis ABCR ad totam OEFK) triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonstrandum.

[Corol. *Hinc, si fuerint quatuor rectæ continuè proportionales; erit prima ad quartam, ut est pyramis super primâ, ad pyramidem similem similiterque descriptam super secundâ; &* Fig. 21. *proinde, datis pyramidum similium ABCR, OEFK lateribus homologis MX, ZS; si fiant MX, ZS, G, H continuè proportionales, erit pyramis ABCR ad pyramidem OEFK, ut MX est ad H.*]

PROPOSITIO IX.

Fig. 22. & 23. *ÆQuales pyramides reciprocant bases & altitudines: & quæ reciprocant, sunt æquales.*

1. Pars. Sint primò [*æquales*] pyramides trigonæ BACO, HKNL. Perfectis parallelogrammis BE, HR, super his sint parallelepipeda BF, HP. Erunt (ut ostendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium sextupla, ac proinde æqualia inter se. Sunt verò horum parallelepipedorum altitudines HK, BA eædem quæ pyramidum: bases verò BE, HR duplæ (*a*) sunt basium pyramidalium BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cùm igitur, ob parallelepipedorum æqualitatem, sit ut BE ad HR, ita (*b*) reciprocè HK ad BA; etiam erit ut basis BCO ad basim HNL, ita reciprocè altitudo HK ad altitudinem BA. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 34. l. 11.

(b) Per 34. l. 11.

Quòd si [*æquales*] pyramides habeant bases polygonas, retentis iisdem altitudinibus (*c*) reducantur ad trigonas, eruntque hæ illis æquales per [*cor. p.*] 6. Sed pyramides sic reductæ, per jam demonstrata, reciprocant bases & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant bases & altitudines. Quod erat demonstrandum.

(c) Per 25. l. 6.

2. Pars. [*Si bases sint trigonæ,*] quoniam jam ponitur esse BCO ad HNL, ut HK ad BA; erit quoque BE ad HR, ut HK ad BA. Ergo parallelepipeda BF, HP (*d*) sunt æqualia. Ergo & sextæ eorum partes, nempe pyramides BACO, HKNL. Quod erat demonstrandum.

(d) Per 34. l. 11.

[*Quòd si pyramides habeant bases polygonas altitudinibus reciprocas; reducantur illæ ad* (e) *bases trigonas BCO, HNL, polygonis æquales. Erit igitur BCO ad HNL, ut HK ad BA, atque adeo pyramides hæ trigonæ æquales erunt per jam demonstrata: ergo etiam pyramides polygonæ, quæ trigonis sunt* (f) *æquales, erunt etiam ipsæ æquales.*]

(e) Per 25. l. 6.

(f) Per cor. p. 6. l. 12.

Cor.

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonstrata sunt p. 6. 8. 9. etiam conveniunt quibuscunque prismatis; cùm hæc tripla (a) sint pyramidum eandem basim & altitudinem habentium. Igitur (a) Per 7. l. 12.

1. Prismatum æque altorum eadem est proportio quæ basium. Id enim ostensum est de pyramidibus p. 6.

2. Similium prismatum proportio est triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim ostensum est de pyramid. p. 8. [*& proinde si dentur similium prismatum latera homologa, invenietur prismatum ipsorum ad se invicem ratio, eodem modo quo ex iisdem datis, pyramidum ratio inventa est, in cor. p.* 8.]

3. Æqualia prismata reciprocant bases & altitudines: & quæ reciprocant, sunt æqualia. Id enim de pyramidibus ostenditur p. 9.

Mirum est hæc ab Euclide prætermissa, cùm præcipua sint, quæ de solidis rectilineis tradi possunt.

Scholium 1.

EX hactenus demonstratis elicietur dimensio quorumcunque prismatum ac pyramidum.

Prismatis soliditas producitur ex altitudine in basim ductâ; pyramidis verò ex tertiâ altitudinis parte ductâ in basim.

Ut si prismatis altitudo sit 5. pedum, basis verò 25. pedum quadratorum; multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro soliditate prismatis.

Esto enim prisma polygonum AH. Ejus basi AE intelligatur æquale esse triangulum BAC, superque eo prisma BE æque altum ac AH. Erunt (b) BE, AH æqualia prismata. Sed BE prisma (c) producitur ex altitudine suâ in basim BAC, hoc est (d) AE. Ergo etiam prisma AH fit ex altitudine suâ, quæ altitudini prismatis BE æqualis ponitur, in basim AE. Fig. 19. & 18. (b) Per cor. 1. hujus. (c) Per sch. 1. p. 40. l. 11. (d) Per constr.

Hinc verò & ex 7. patet demonstratio partis secundæ.

[*Scholium* 2.

Dimensio pyramidis truncatæ ABCESO, ex datis altitudine CE, basibus parallelis ABC, OSE, earumque lateribus homologis BC, SE. Fig. 19.

Ut inveniatur EF altitudo partis deficientis ESOF; propter sim. tri. BCF, SEF, erit BC: SE::CF: EF. Et divid. BC — SE: SE::CE:EF. Datis itaque BC, SE & CE, invenietur EF. Atque hæc quidem demonstratio supponit altitudinem perpendicularem cum latere pyramidis coincidere; sed utcunque cadat perpendicularis illa, planum OSE (si opus, continuatum) altitudinem pyramidis & latus ejus FC similiter secabit; & proinde semper erit BC — SE ad SE, ut altitudo pyramidis truncatæ, ad altitudinem partis deficientis. Cujus altitudinis sic inventa pars tertia in basem minorem OSE ducta, dabit partis deficientis ESOF soliditatem. Inventa autem altitudini partis deficientis, addatur altitudo data pyramidis truncatæ, & habetur altitudo pyramidis integræ; cujus altitudinis pars tertia in basem majorem ducta, pyramidis integræ soliditatem dabit: e quâ, deducta pars, deficiens, pyramidem truncatam relinquet.]

Lemma ad P. 10.

PYramides & prismata, quæ conis & cylindris in infinitum inscribuntur, in conos & cylindros desinunt.

Demonstratur ut lemma propositionis 2. adminiculo propositionis 6. & corollarii 1. post. p. 9. si ut istic plana circulo inscripta, ita hic pyramides & prismata, quæ super planis illis tanquam basibus consistunt, a cono & cylindro auferantur.

PROPOSITIO X.

Fig. 24. *OMnis conus tertia pars est cylindri eandem basim & altitudinem habentis.*

Basi CL intelligatur inscribi polygonum regulare quotcunque laterum, & super illo tanquam basi, cono quidem pyramis, cylindro autem prisma inscribi. Erit pyramis (*a*) tertia pars prismatis. Et si rursum inscribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, superque eo inscribatur cono pyramis, & cylindro prisma; iterum erit pyramis tertia pars prismatis. Atque hoc semper eveniet. Quare cùm pyramides in conum, (*b*) prismata in cylindrum desinant, etiam (*c*) conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per* 7. *l.* 12.

(b) *Per lem. præc.*

(c) *Per ris. univ. post.* 2. *l.* 12.

[Scholium. *Notandum verò est, hanc propositionem & sequentes duas, non solùm ad rectos conos & cylindros, verùm etiam*

etiam ad quoscunque obliquos pertinere, quamvis figura rectos tantùm exhibeant. Deducuntur enim a similibus pyramidum & prismatum quorumcunque, *non a* rectorum *solorum proprietatibus.*]

PROPOSITIO XI.

Conorum æque altorum (BAF, QXR) proportio eadem est quæ basium (CL, SE.) Idem accidit cylindris æque altis. Fig. 24. & 25.

Pyramides conis æque altis inscriptæ, sunt (*a*) ut bases. Atqui (*b*) pyramides tandem in conos desinunt. Ergo etiam (*c*) coni sunt ut bases. Cùm verò cylindri conorum eandem cum ipsis basim & altitudinem habentium sint tripli; etiam ipsi erunt ut bases. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per* 6. *l.* 12.
(b) *Per lem. ante* 10.
(c) *Per porism. univ.*

Corollarium.

Eodem modo demonstrabitur etiam prismata & cylindros æque alta esse inter se ut bases, imo quælibet corpora cylindriformia æque alta, hoc est, quæ producuntur ex quibuscunque planis in eandem altitudinem ductis, esse inter se ut bases. Eodem modo de pyramidibus & conis æque altis, & conicis quibuscunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

Conorum similium (BAF & QZR) proportio est triplicata proportionis diametrorum (BF & QR) quæ sunt in basibus. Idem cylindris similibus accidit. Fig. 24. & 25.

Similium conorum basibus inscribe polygona ordinata [*ejusdem denominationis,*] quæ proinde similia erunt. *Si verò similes coni fuerint scaleni, ita eorum basibus inscribantur polygona, ut axium inclinatio eundem habeat situm respectu laterum vel angulorum utriusque polygoni.*] Pyramides super his polygonis inscriptæ conis, etiam similes sunt; quod facilè ostenditur. Ergo earum proportio est triplicata (*d*) proportionis laterum BL, QE; hoc est, (*e*) proportionis diametrorum BF, QR. Quare cùm pyramides (*f*) in conos desinant, etiam conorum proportio (*g*) est triplicata proportionis diametrorum BF, QR. Quod erat demonstrandum.

(d) *Per* 8. *l.* 12.
(e) *Per cor.* 2. *p.* 1. *l.* 12.
(f) *Per lem. ante* 10. *l.* 12.
(g) *Per porism. univ.*

De

De cylindris patet theorema, cùm sint tripli conorum.

[Corol. *Si continuetur ratio diametrorum BF, QR quæ sunt in basibus conorum (vel cylindrorum) similium, per terminos G, H; ut sint BF, QR, G, H* $\div\div$; *Erit* (a) *ut BF ad H, ita conus BAF ad conum QZR, & ita cylindrus BM ad cylindrum RI.*]

(a) *Per def. 10. l. 5.*

PROPOSITIO XIII.

Fig. 26.

SI *cylindrus (BI) secetur plano (RL) basibus (BQ, CI) parallelo; erit pars (BL) ad partem (RI,) ut axis segmentum (AO) ad segmentum axis (OF.)*

Demonstratur ut prima sexti.

Theorema eodem modo verum est de superficie.

[*Dividatur enim axis OF in quotcunque partes æquales, & per singula divisionum puncta ducantur plana basibus RL, CI parallela, & dividetur cylindrus (atque etiam superficies cylindrica) RI in partes numero æquales iis in quas dividitur axis OF; quarum singulæ, æquales ipsius OF partes pro axibus habentes, erunt cylindri ejusdem altitudinis; & proinde cylindri in quos dividitur cylindrus RI erunt* (b) *ut bases, hoc est, æquales: (quòd autem cylindricæ superficies istæ in quas dividitur superficies cylindrica RI, sint etiam æquales, constabit ex eo quòd una quævis intra alteram quamvis posita, illi examussim congruet: & eodem modo parvulorum cylindrorum æqualitas iterum constabit.) Ergo cylindrus (& cylindrica superficies) RI dividitur in partes aliquotas similes iis in quas dividitur axis OF. Si itaque ex axe OA accipiatur una pars aliquota axis OF quoties poterit, & per puncta partes illas ipsius AO connectentia, ducantur plana oppositis planis BQ, RL parallela; manifestum est, toties in antecedente AO axe contineri partem aliquotam consequentis axis OF, quoties in antecedente BL cylindro (vel superficie cylindricâ) continetur pars similis aliquota consequentis cylindri (vel superficiei cylindricæ) RI. Ergo* (c) *axis AO est ad axem OF, ut cylindrus BL ad cylindrum RI; (vel etiam, ut superficies cylindrica BL ad superficiem cylindricam RI.)* Q. E. D.

(b) *Per 11. l. 12.*

(c) *Per rationum æqualium indicium.*

Schol. *Hæc propositio non minùs valet in obliquo cylindro quàm in recto: in eo enim casu, partes aliquotæ axis OF, ad bases suas similiter inclinantur in parvulis istis cylindris, in quas dividi supponitur cylindrus RI a planis ad bases parallelis; unde duo qui-*

quivis intra invicem positi congruent, & proinde tam cylindruli quàm eorum superficies, partes erunt aliquotæ cylindri & superficiei RI, partibus aliquotis axis OF numero æquales; & proinde ex cylindro vel superficie cylindricâ BL toties sumi possunt, quoties partes axis OF ex axe OA. Unde demonstratio omnino eadem erit in cylindro obliquo ac in recto.

Corol. *Hinc, si cylindrus secetur plano basibus parallelo; erunt etiam partes BL, RI ut earum altitudines. Si enim cylindrus sit rectus, res patet; altitudines enim ab axis segmentis AO, OF non sunt diversæ: si verò fuerit obliquus, ducatur recta linea basibus perpendicularis, ac manifestum est illam atque axem a plano basibus parallelo similiter* (a) *secari; & proinde, cùm partes BL, RI sint* (b) *ut axis segmenta, erunt etiam ut segmenta perpendicularis, hoc est, ut sui ipsarum altitudines. Q. E. D.*]

(a) *Per 17. l. 11.*
(b) *Per schol. hujus pr.*

PROPOSITIO XIV.

CYlindri (CI & AR) super basibus (GH, MO) æqualibus, sunt inter se ut altitudines (SF, LZ.) Idem conis accidit. Fig. 27. & 28.

Abscinde ab altiori cylindro AR cylindrum AO, altitudinis LE ejusdem cum SF. Igitur cylindri AO, CI (*c*) æquales sunt. Cùm igitur cylindrus AO sit ad cylindrum AR, ut (*d*) LE ad LZ; etiam CI erit ad AR, ut LE ad LZ; hoc est, (quia LE & SF (*e*) æquantur,) ut SF ad LZ. Quod erat demonstrandum.

[*Porro, cùm sit cylindrus CI ad cylindrum AR, ut SF ad LZ; erit etiam pars tertia cylindri CI ad partem tertiam cylindri AR, hoc est,* (f) *conus CFT ad conum AZB, ut SF ad LZ.*

Observent tyrones, hujus propositionis demonstrationem æquè valere in cylindris & conis obliquis ac in rectis.

(c) *Per 11. l. 12. cum schol. p. 10. l. 12.*
(d) *Per cor. præc.*
(e) *Per constr.*
(f) *Per 10. l. 12. ejusque schol.*

Corollarium.

THeorema etiam verum est de prismatis; itemque de pyramidibus; & demonstratio planè similis. Sed de prismatis ex corol. 1. p. 9. l. 12. & p. 25. cum cor. 1. p. 24. l. 11. De pyramidibus ex hoc & ex 7. l. 12.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Fig. 28. & 29.

ÆQuales cylindri (AR, DF) reciprocant bases & altitudines; & si reciprocant, æquales sunt. Idem conis accidit.

Demonstratur ut P. 34. l. 11. sed pro. 32. & 25. isthic citatis, hîc adhibebitur prop. 11. & 13. [*vel* 14.] lib. 12.

[1. *Pars. Sint primò cylindri recti: si fuerint æquè alti, bases (propter cylindros ex hypothesi æquales) erunt* (a) *æquales; unde in eo casu, res patet.*

(a) Per 11. l. 12.

Si verò altitudines fuerint inæquales, a majori LZ abscinde LE minori QC æqualem, & per E duc planum XO ad MQ parallelum. Basis MQ est ad basem VT, (b) *ut cylindrus AO ad cylindrum FD; hoc est, (quia cylindri AR, FD æquales esse supponuntur,) ut cylindrus AO ad cylindrum AR; hoc est,* (c) *ut altitudo LE ad altitudinem LZ; hoc est, (propter LE, QC æquales) reciprocè ut altitudo QC ad altitudinem LZ. Q. E. D.*

(b) Per eand.

(c) Per 14. l. 12.

Sint autem cylindri quovis modo obliqui, & erigantur super iisdem basibus & in eâdem altitudine cylindri recti; eruntque his æquales (d) *obliqui. Quare cùm æquales cylindri recti reciprocent bases & altitudines; etiam æquales obliqui reciprocabunt. Q. E. D.*

(d) Per 11. l. 12. & sch. post. 10. l. 12.

Cùm verò æquales coni sint (e) *æqualium cylindrorum æquè altorum & super iisdem basibus partes tertiæ; hi etiam bases & altitudines reciprocabunt.*

(e) Per 10. l. 12.

2. *Pars. Sint cylindrorum rectorum altitudines inæquales, & de majori LZ sume minori QC æqualem LE, & per E ducatur planum XO basi parallelum. Cylindrus AO est ad cylindrum FD,* (f) *ut MQ ad VT; hoc est per hypoth. ut QC* (g) *sive LE ad LZ; hoc* (h) *est, ut AO ad AR. Ergo* (i) *cylindri AR, FD sunt æquales. Et cùm cylindri obliqui sint rectis æquè altis & super iisdem basibus* (k) *æquales; hi etiam, si reciprocant bases & altitudines, æquales erunt. Q. E. D.*

Coni autem, cùm sint (l) *tertiæ partes cylindrorum æquè altorum super iisdem basibus, si reciprocant bases & altitudines, erunt & ipsi æquales. Q. E. D.*]

(f) Per 10. l. 12.
(g) Per constr.
(h) Per 14. l. 12.
(i) Per 9. l. 5.
(k) Per 11. l. 12. & sch. post 10. l. 12.
(l) Per 10. l. 12.

Scholium.

CUM nihil attulerit Euclides de ratione compositâ in corporibus, eam breviter hoc loco demonstrabimus.

1. Cy-

1. Cylindrus ad cylindrum, & prisma ad prisma, rationem habent compositam ex rationibus basium & altitudinum.

Sunto cylindri FD & AR: ab altiori AR (nam in æquè altis res per se patet (*a*);) abscinde AO æquè altum ac FD. Sit etiam ut basis VT ad basim MQ, ita FN ad X; & ut altitudo ND seu BO ad altitudinem BR, ita X ad Z. Oportet igitur ostendere, cylindrum FD esse ad cylindrum AR, ut FN est ad Z. Cylindrus FD est ad cylindrum AO, ut (*b*) basis VT ad basim MQ; hoc est, (*c*) ut FN ad X: cylindrus autem AO est ad cylindrum AR, ut (*d*) BO ad BR; hoc est, ut (*e*) X ad Z. Igitur ex (*f*) æquo, cylindrus FD est ad cylindrum AR, ut FN ad Z. *Fig.* 28. & 28. (a) *Per* 11. *l.* 12. (b) *Per* 11. *l.* 12. (c) *Per constr.* (d) *Per* 14. *l.* 12. (e) *Per constr.* (f) *Per* 22. *l.* 5.

De prismatis res eodem modo demonstrabitur, sed ex corollario 1. p. 9. & coroll. p. 14.

2. Etiam conus ad conum, & pyramis ad pyramidem rationem habent compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem.

Sunt enim (*g*) cylindrorum ac prismatum partes tertiæ. (g) *Per* 10. & 7. *l.* 12.

[*Hæc verò omnia in corporibus obliquis æquè obtinent ac in rectis, uti ex antedictis satis patet.*]

PROPOSITIO XVI, XVII.

HÆ propositiones omnium prolixissimæ, non alium usum habent, quàm ut demonstretur P. 18. *quam nos aliâ faciliori viâ demonstrabimus.*

Lemma ad P. 18.

CYlindri hemisphærio inscripti, in hemisphærium desinunt. Sit PZY maximus hemisphærii semicirculus: sitque radius AZ perpendicularis diametro PY. Seca AZ in aliquot æquales partes AM, MN, NZ; ductisque per divisionum puncta M, N, perpendicularibus, &c. Inscribantur semicirculo rectangula OBRK, EDHS, quibus deinde extra circulum continuatis, semicirculo circumscripta intelligantur rectangula FTYP, LVBO, QXDE; eruntque omnia æquè alta. Excessus autem circumscriptorum supra inscripta sunt plana FK, LS, XE, VH, TR, quæ simul sumpta conficiunt rectangulum FTYP. Nam quia XE æquatur DS, erunt LS, VH, XE simul, æqualia rectangulo LB, hoc est OR. Quare si adjicias utrimque plana FK, TR, erunt simul omnia FK, LS, XE, VH, TR æqualia rectangulo FTYP. Si jam intelligatur semicirculus cum rectangulis circa radium immotum *Fig.* 30.

immotum AZ circumagi, inscripta rectangula EH, OR producent cylindros hemisphærio inscriptos; & rectangula circumscripta producent cylindros hemisphærio circumscriptos, sibi mutuò insistentes: & sicut rectangulorum circumscriptorum excessus supra inscripta rectangula erat rectangulum FY, ita etiam cylindrorum circumscriptorum excessus supra inscriptos erit cylindrus a rectangulo FY genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quavis datâ minor; adeoque etiam ipse quovis dato (a) evadet minor, si radio in plures sine fine partes diviso, rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus sine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumscriptorum; multoque magis ipsius hemisphærii, quod cylindrorum circumscriptorum pars est, excessus supra inscriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemisphærio in infinitum inscripti, tandem desinunt (b) in hemisphærium. Quod erat demonstrandum.

(a) Patet ex 14. l. 12.

(b) Per def. 6. l. 12.

Corollarium.

EOdem modo demonstrabitur cylindros cono, conoidi, sphæroidi, &c. inscriptos, in ipsa desinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 31.

Sphærarum proportio est triplicata proportionis diametrorum (BK, RZ.)

Radiis AB, YR in quot placuerit æquales partes, sed æquè multas, divisis, ductisque per divisionum puncta perpendicularibus, &c. Intelligantur maximis sphærarum semicirculis inscripta esse rectangula æquè multa, quæ circa radios immotos AB, YR circumacta, inscribant utrique hemisphærio cylindros æquè multos, sibi invicem insistentes. Quia KC (c) est ad CF, ut CF ad CB. Erit ratio KC ad CB duplicata (d) rationis KC ad CF, hoc est rationis FC ad CB. Similiter erit ratio ZE ad ER, duplicata rationis XE ad ER. Sed per constr. est KC ad CB, ut ZE ad ER. Ergo etiam (e) FC est ad BC, ut XE ad ER. Sed BC est ad CO per constr. ut RE ad ES. Igitur ex æquo (f) FC est ad CO. ut XE ad ES. Cylindri igitur (g) FL, XQ similes sunt, ac proinde eorum proportio est triplicata (h) proportionis diametrorum FI, XV, seu semidiametrorum FC, XE, quæ sunt in basibus. Sed proportio FC ad XE eadem est cum proportione quæ est inter diametros sphæra-

(c) Per cor. 1. p. 13. l. 6.
(d) Per def. 10. l. 5.
(e) Per 35. l. 5.
(f) Per 22. l. 5.
(g) Per def. 4. l. 12.
(h) Per 12. l. 12.

sphærarum BK, RZ; (nam ut jam ostendi, FC est ad XE, ut CO ad ES; hoc est, ut (*a*) BK ad RZ, ipsarum CO, ES per constr. æquè multiplices.) Ergo ratio cylindrorum FL, XQ est triplicata rationis diametrorum BK, RZ. Eodem modo demonstrabimus singulos cylindros hemisphærio uni inscriptos, ad cylindros singulos inscriptos alteri hemisphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum BK, RZ. Ergo etiam ratio simul omnium ad omnes simul, (*b*) triplicata est rationis diametrorum BK, RZ. Quare cùm aggregata cylindrorum tandem in hemisphæria (*c*) desinant, hemisphæriorum quoque, ac proinde & sphærarum ratio triplicata erit (*d*) rationis diametrorum. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per 15. l. 5.*
(b) *Per 12. l. 5.*
(c) *Per lem. præced.*
(d) *Per por. sim. univ.*

Corollarium.

NOtâ igitur proportione diametrorum, etiam sphærarum proportio innotescit. Ut si minoris diameter sit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. Ut est 1. ad 1000, quartum terminum, ita sphæra minor erit ad majorem.

Conorum, Cylindrorum & Sphæræ dimensio dabitur libro seq. ex Archimede.

Scholium.

QUemadmodum similes (*e*) planæ figuræ per mediam proportionalem unam, ita corpora similia non nisi per medias duas, in proportione datâ augentur vel diminuuntur.

(e) *Per cor. 4. p. 20. l. 6.*

Data sit sphæra vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cujus radius sive latus sit A. Data item sit proportio quæcunque A ad B, ut dupla. Oporteat exhibere corpus & duplum dati, & simile.

Fig. 32.

Inter terminos rationis datæ A & B, inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z, ut docuimus in scholio post 13. l. 6. Sphæra cujus radius est X, sive corpus dato simile, factum super latere X, erit duplum dati.

Nam corpora similia quorum radii seu latera sunt A & X, rationem inter se habent triplicatam (*f*) rationis A ad X, hoc est, eandem (*g*) quam A habet ad B.

Atque hoc est celebratissimum illud problema, quod Deliacum a Deliaco Apolline dictum est, quòd is, lue sævissimâ Athenas populante, consultus respondisset, pestem cessaturam

(f) *Per 8. & cor. 2. p. 9. & per 12. ac 18. l. 12.*
(g) *Per def. 10. l. 5.*

si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8. [*cap.* 12.

Atqui Valerius non ista, sed hoc solùm dicit: [Plato] conductores sacræ arcis, [*lege* aræ,] de modo & formâ ejus secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire jussit. *Ubi tamen pro* Euclide, Eudoxum *reponendum esse monet Menagius ad Diog. Laertii lib.* 2. *segm.* 106. *Cæterum accuratiora si velis de hujus problematis occasione, deque methodis idem solvendi, ac præcipuè de variis modis duas medias proportionales inveniendi, quos excogitarunt antiqui Geometræ, consule* (*ut alios mittam*) Eratosthenem de cubi duplicatione, (*inter opera ejus ad calcem Arati Oxon.* 1672. *edita.*) Vitruvium de Architect. *lib.* 9. *cap.* 3. Plutarchum de genio Socratis, (*operum Moral. edit. Françofurt. pag.* 579.) Pappum Collect. Mathemat. *lib.* 3. *prop.* 5. *&* Eutocium (*a Tacqueto laudatum supra, in schol. post* 13. *l.* 6.) Comment. in Archimed. de sphærâ & Cylindro, *ad Theor.* 1. *lib.* 2.

Porro, inter duos numeros datos invenientur duo medii proportionales hoc modo. Quadratum prioris extremi in posteriorem ducatur, & producti radix cubica extrahatur. Erit ea duorum mediorum prior. Deinde quadratum posterioris extremi per extremum priorem multiplicetur, & hujus producti radix cubica exhibebit duorum mediorum posteriorem. Exemp. gr. proponatur invenire duos medios proportionales inter 8. *&* 27. *Multiplica* ($8 \times 8 =$) 64, *per* 27, *& orietur* 1728, *cujus radix cubica* 12, *est duorum mediorum proportionalium prior. Deinde multiplica* ($27 \times 27 =$) 729, *per* 8, *& producetur* 5832, *cujus radix cubica est* 18, *nempe duorum mediorum posterior. Nam* 8, 12, 18, 27 ∺. *Et universaliter, si inter A & E quærantur duæ media proportionales M & N; erit* M = √c AqE, *&* N = √c EqA.

Cùm enim rectangulum sub A & E sit (a) *medium proportionale inter illarum quadrata; erunt Aq, AE, Eq* ∺. *Ducantur hæc tria plana in eandem altitudinem A; & orientur* (b) *solida continuè proportionalia Ac,* (c) *AqE, EqA. Ducantur etiam eadem plana in altitudinem communem E, & fient solida AqE, EqA, Ec* ∺. *Quatuor ergo solida, Ac, AqE, EqA, Ec sunt continuè proportionalia; ac proinde eorum radices cubicæ, A,* √c *AqE,* √c *EqA, E continuè proportionales* (d) *erunt. Ergo, cùm ex hypoth. sint A, M, N, E* ∺, *erit* M = √c *AqE, &* N = √c *EqA.*

(a) *Per cor.* 2. *p.* 22. *l.* 6.
(b) *Per* 32. *l* 11.
(c) *Vide sch. p.* 36. *l.* 11.
(d) *Per sch.* 1. *p.* 33. *l.* 11. *& p.* 33. *l.* 5.

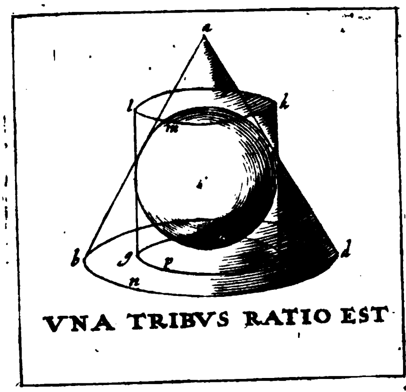
Si verò primus terminus fuerit 1, *extractâ radice cubicâ posterioris extremi, habebitur duorum mediorum prior, cujus medii quadratum erit duorum mediorum posterior. Si enim fuerit*

erit $A = 1$, *erit* $Aq = 1$. *Unde* $AqE = 1 \times E = E$, & $\sqrt{c}\,AqE$ (*sive* M) $= \sqrt{c}\,E$. *Et eodem modo* $\sqrt{c}\,EqA$ (*sive* N) $= \sqrt{c}\,Eq =$ (a) $\sqrt{c}\,E \times \sqrt{C}E$. *Ex. gr. inter* 1. & 125. *medii sunt* 5. & 25. *Est nempe* $\sqrt{c}\,125 = 5$, & $5 \times 5 = 25$. *Sunt autem* 1, 5, 25, 125 $\div\!\!\div$. *Ac proinde, si pro cubi dati latere ponatur unitas, habebitur latus cubi dato dupli, radicem cubicam numeri binarii extrahendo. Quod* (*cùm per se manifestum sit, tum etiam*) *ex eo deducitur, quòd* $\sqrt{c}\,2$ *sit duorum mediorum proportionalium prior inter* 1. & 2.]

(a) *Per cor.* p. 37. l. 11.

ANDREÆ
TACQUET
E SOCIETATE JESU
SELECTA EX
ARCHIMEDE
THEOREMATA

Viâ faciliori ac breviori demonstrata, & novis inventis aucta.



AMSTELODAMI,
Apud PETRUM DE COUP.
M DCC XXV.

LECTORI.

Quamvis in Mathematicis disciplinis complures summi & admirabiles viri extiterunt: prima tamen gloria, communi quodam consensu, Archimedi Syracusano delata est. Sed illum plures laudant, quàm legant; admirantur plures, quàm intelligant. Causæ, opinor, sunt exemplarium moles, & raritas; sermonis ex Græco translati obscuritas nonnulla; demonstrationes prolixæ & arduæ. Putavi igitur ex studiosæ juventutis usu futurum, si elementis jam illustratis, hæc a me selecta ex Archimede theoremata, & viâ multo faciliori ac breviori demonstrata subnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent; viamque in demonstrando eam tenui, ut sperem eum qui elementa perceperit, hæc summi Geometræ præclarissima inventa negotio haud magno assecuturum. Sub finem adjectis tredecim propositionibus, Archimedis de cylindro & sphærâ doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonstro sesquialteram proportionem in tribus corporibus, sphærâ, cylindro, & æquilatero cono, utroque sphæræ circumscripto, continuari. Varia insuper sparsim, inter quæ propositio 12. & corollaria prop. 14. præcipua sunt, & scholia omnia adjeci. Fruere istis, quisquis Geometriæ candidatus es; & quantùm ex Euclide profeceris, in Archimede experire. Cùmque in verita-

tum pulcherrimarum contemplatione defigi te, evehi-que sursum persenseris, mentem ab infimis hisce rebus feliciter jam avulsam attolle etiam altiùs, atque dirige ad Veritatem primam, æternam, immensam, quæ Deus est, cujus ineffabili visione nos futuros aliquando æternùm beatos confido. Vale.

THEO-

THEOREMATA SELECTA
EX ARCHIMEDE.

DEFINITIONES,

Seu vocum nonnullarum explicatio.

Esto circulus BECG, cujus centrum A, diameter BC, quam ad rectos angulos secet recta EG non per centrum, videlicet in D. Ex centro autem educantur radii AE, AG. His positis *Fig 16. tab. ex Archimede.*

1. Sector sphæræ est, qui sectore circulari AECG, seu AEBG, circa diametrum BC in orbem acto, producitur.

2. Segmentum seu portio sphæræ est, quæ a circulari segmento ECG, seu EBG, circa eandem diametrum BC in orbem acto, describitur.

3. Portionis sphæricæ (EBG) vertex est diametri immobilis extremitas B: Basis est circulus a rectâ EG descriptus: Axis est diametri pars BD inter verticem B, & D centrum baseos intercepta.

4. Cùm sphæricæ portionis, aut corporis ei inscripti; aut coni superficiem nomino, semper intelligo absque basi; & cùm cylindri superficiem dico, intelligo similiter absque basibus; nisi adjungatur (*tota*;) tunc enim accipiuntur & bases.

Rursùm cùm de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quàm rectos.

Axiomata.

1. Polygoni circulo inscripti ambitus, minor est circuli peripheriâ. *Fig. 1. & 19.*

2. Polygoni circulo circumscripti ambitus, circuli peripheriâ major est. *Fig. 1.*

3. Quod si polygonum circulo inscriptum, circa diametrum (AE) unà cum circulo circumagatur; erit corporis a polygono geniti superficies, minor sphæræ superficie. Et, si polygonum circulo circumscriptum, circa diametrum *Fig. 19.*

 unà

unà cum circulo circumagatur; erit corporis a polygono geniti major superficies, superficie sphæræ.

Fig. 17. 4. Similiter, ambitus polygoni inscripti segmento circulari (DAF,) minor est peripheriâ segmenti (DAF.) Et si polygonum segmento inscriptum unà cum segmento, circa segmenti axem (AO) circumagatur; erit corporis a polygono geniti superficies, minor superficie portionis sphæricæ (DAF.)

Fig. 6. & 8. 5. Superficies prismatis cylindro inscripti, minor est cylindri superficie; circumscripti verò major.

Fig. 7. & 10. 6. Et superficies pyramidis cono inscriptæ, minor est coni superficie; circumscriptæ autem major.

PROPOSITIO PRIMA.

Datæ sint figuræ quæcunque seu plana seu solida, A, B: Sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ figuras datas A ac B semper minùs ac minùs excedendo, in ipsas (a) *desinant, & tamen semper inter se æquales sint:*

(a) Vide def. 6. l. 12.

Dico etiam figuras A & B æquales esse.

E. F. Si non, alterutra major erit. Sit ergo A. B. X. A major quàm B excessu X. Per hypothesim dantur magnitudines E, F inter se æquales, quæ excedant figuras A, B excessu minori quàm X, quo A ponitur superare B. Ergo F minor est quàm A. Sed F per hypothesim est æqualis E. Ergo etiam E minor est quàm A; quod est absurdum; cùm per hyp. E excedat A. Eodem modo ostendam B non posse esse majorem quàm A. Ergo cùm neutra sit major alterâ, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Datæ sint figuræ A & B; sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ a figuris datis semper minùs ac minùs deficiendo, in ipsas (b) *desinant, & semper inter se æquales sint:*

(b) Vide def. 6. l. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z. Si

A. B. Z. Si non, alterutra minor erit. Esto igi-
O P. tur A minor quàm B defectu Z. Per hypothesim dari possunt magnitudines O, P inter se æquales, quæ deficiant a figuris datis A & B defectu minori quàm Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P major est quàm A. Sed P per hypothesim est æqualis O. Ergo etiam O major est quàm A, quod repugnat hypothesi, quâ statuitur O minor quàm A. Eodem modo ostendam B non esse minorem quàm A. Quare cùm neutra sit minor alterâ, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

[*Hæ verò propositiones duæ, ex porismate universali (post pr. 2. lib. 12.) absque ulteriori demonstratione, immediatè deduci possent.*]

PROPOSITIO III.

Ambitus polygonorum circulo circumscriptorum & inscriptorum, desinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipsa in circulum desinunt.

Si nimirum arcubus sine fine bisectis, plura semper ac plura latera circulo circumscribantur & inscribantur. *Fig. 1. tab. 6. ex Archim.*

1. Pars. Intelligantur circulo inscripta & circumscripta, polygona ordinata [*similia*;] sive ut traditur p. 12. l. 4. sive ut in hac figurâ, perinde erit. Manifestum est (*a*) FI esse ad CE, (hoc est, (*b*) totum ambitum circumscriptum esse ad totum ambitum inscriptum,) ut IA est ad CA. Atqui IC excessus rectæ IA supra CA, fit tandem quacunque datâ minor, si plura semper ac plura in infinitum latera circumscribi & inscribi intelligamus. Ergo etiam excessus ambitûs circumscripti supra ambitum inscriptum, tandem fiet quovis dato minor. Ergo multò (*c*) magis excessus ambitûs circumscripti supra peripheriam fiet quocunque dato minor. Similiter, quia jam ostendi defectum ambitûs inscripti ab ambitu circumscripto fieri quovis dato minorem, multò (*d*) magis defectus inscripti ambitûs a peripheriâ fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tam inscripti quàm conscripti, in peripheriam (*e*) desinunt. Quod erat primum. Hæc ulterius demonstrare operæ pretium non est, cùm satis sint manifesta.

(a) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.*
(b) *Per 12. l. 5.*
(c) *Patet ex axio. 1.*
(d) *Patet ex axio. 2.*
(e) *Per def. 6. l. 12.*

2. Pars

2. Pars. Quia jam ostensum est excessum lateris FI supra latus EC fieri tandem quovis dato minorem; (est enim FI ad EC, ut IA ad CA;) etiam excessus quadrati FI supra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita (*a*) polygonum circumscriptum ad polygonum inscriptum. Ergo etiam excessus polygoni circumscripti supra inscriptum tandem fiet dato minor. Ergo multò magis excessus polygoni circumscripti supra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inscripti defectus a circulo, dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inscripta quàm circumscripta, in circulum (*b*) desinunt. Quod erat alterum.

(a) *Per* 20 *l.* 6. & *sch. ei annexum.*

(b) *Per def.* 6. *l.* 12.

PROPOSITIO IV.

Fig. 1.

(c) *Vide def.* 3. *l.* 4.

Polygonum (c) *ordinatum circulo conscriptum* (*FINTR*) *aequatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius.*

Et polygonum ordinatum circulo inscriptum aequatur triangulo, cujus basis est polygoni inscripti ambitus, altitudo verò perpendicularis (*AO*) *in latus unum ex centro ducta.*

1. Pars. Radius AB ad contactum ductus, (*d*) est perpendicularis ad tangentem IF. Quare si, ductis rectis AF, AI, AN, &c. polygonum resolvatur in triangula; erit radius AB communis omnium altitudo; adeoque triangula ipsa liquet esse aequalia. Ergo triangulum basim habens parem summae laterum FI, IN, NT, &c. altitudinem verò AB, aequabitur illis (*e*) omnibus, hoc est, toti polygono circumscripto.

(d) *Per* 18. *l.* 3.

(e) *Per* 1. *l.* 6.

2. Pars. Simili fere ratiocinio concludetur.

[*Nam propter aequalia inscripti latera, perpendiculares omnes a centro A aequales* (f) *erunt, & proinde omnia triangula in qua resolvitur inscriptum polygonum,* (g) *aequalia sunt. Unde eodem prorsus modo procedet demonstratio ac in parte priori.*

(f) *Per* 14. *l.* 3.

(g) *Per* 38. *l.* 1.

Cor. 1. *Hinc area polygoni ordinati circulo inscripti vel circumscripti invenitur,* (h) *multiplicando perpendiculum a centro ad latus quodvis ductum, in dimidiam polygoni circumferentiam.*

(h) *Per hanc & schol. p.* 41. *l.* 1.

Cor.

Cor. 2. *Et cùm polygona circulo inscripta ac circumscripta, in circulum, & polygonorum ambitus in circuli ambitum tandem* (a) *desinant; etiam area circuli invenietur, multiplicando radium in dimidiam ejusdem peripheriam.* (a) Per prac.

Cor. 3. *Circulus ergo aqualis erit triangulo, cujus basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter. Exurgit* (b) *enim area trianguli ex dimidiâ basi in altitudinem ductâ. Et eodem modo constabit, sectorem circuli aqualem esse triangulo, cujus altitudo est circuli radius, & cujus basis est recta qua arcui sectoris aqualis sit: Hoc autem corol. ex iisdem principiis latiùs demonstratur in prop. seq.* (b) Per schol. p. 41. l. 1.

Cor. 4. *Figurarum isoperimetrarum capacissima est circulus. Esto perimeter polygoni cujuscunque [e. gr. quadrati] EGHI aqualis circumferentia circuli cujus radius sit AF, & cujus centrum F coincidat cum centro circuli qui quadrato EGHI inscribi, vel circumscribi possit. Dico quod circuli area major est quàm area polygoni. Area enim circuli aqualis* (c) *est triangulo cujus basis est circumferentia, altitudo verò semidiameter FA: & Area polygoni aqualis* (d) *triangulo cujus basis est perimeter polygoni, circumferentia circuli ex hypothesi aqualis, & altitudo perpendicularis FO a centro circuli in latus polygoni demissa: qua quidem cùm radio circuli semper sit minor, liquet aream polygoni areâ circuli esse minorem. Q. E. D.* Fig. 2. (k) Per cor. 3. (d) Per hanc prop.

Et similiter inter figuras solidas aqualibus superficiebus contentas, Sphara omnium capacissima demonstrabitur.

PROPOSITIO V.

Circulus est aqualis triangulo, cujus basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter. Fig. 3.

Polygona ordinata circulo circumscripta, & triangula bases habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, semper sunt (*e*) æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum, circumscripta, in circulum (*f*) desinunt: similiterque triangula (ut mox ostendam) quæ pro basi habent ambitum polygoni circumscripti, pro altitudine verò radium AB. tandem desinunt in triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium AB. Ergo (*g*) circulus, & triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium AB, æqualia sunt. (e) Per prac. (f) Per 3. hujus. (g) Per 1. hujus.

Quòd autem triangula sub ambitu polygoni & radio, desinunt in triangulum sub peripheriâ & radio, sic ostendo. Triangula sub ambitu circumscripti polygoni & radio AB

sunt

(a) Per 1. l. 6. sunt ad triangulum sub peripheriâ & radio AB, ut (a) basis ad basim, nempe ut ambitus polygoni ad peripheriam; cum altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in peripheriam (b) desinit. Ergo & triangula desinent in triangulum.

(b) Per 3. hujus.

Corollaria.

1. EX hac & 41. l. 1. [*vel potiùs, ex hac & cor. p. 42. l. 1.*] patet rectangulum sub radio & dimidiâ circumferentiâ; [*sive sub diametro & circumferentiæ quadrante; seu denique, sub quartâ parte diametri & circumferentiâ*] esse æquale circulo: sub radio & totâ circumferentiâ, [*sive sub diametro & dimidiâ circumferentiâ*] esse [*circuli*] duplum: sub totâ diametro & totâ circumferentiâ esse quadruplum circuli.

Fig. 9. l. 4. 2. Circulus est ad quadratum sibi inscriptum, ut circumferentia dimidia (CDE) ad diametrum; ad quadratum verò circumscriptum, ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum, [*sive ut circumferentia dimidia ad diametri duplum; & ad radii quadratum, ut circumferentia ad diametrum.*]

Nam rectangulum sub [*dimidiâ circumferentiâ*] CDE & radio CA seu CF, (hoc (c) est, ipse circulus,) est ad rectangulum GFCE, nimirum sub FG & CF, (hoc (d) est, ad quadratum inscriptum BCDE,) ut (e) CDE dimidia circumferentia est ad FG seu CE diametrum; quod erat primum. Ac proinde circulus est ad duplum rectanguli GFCE, (hoc est, ad FH quadratum circumscriptum,) ut [*circumferentia dimidia*] CDE ad duplam diametrum CE; [*quod erat secundum. Adeoque circulus est ad quartam partem quadrati circumscripti, hoc est, ad radii quadratum, ut dimidia circumferentia ad semidiametrum, sive ut circumferentia ad diametrum; quod erat tertium.*]

(c) Per cor. 1.
(d) Per sch. post pr. 6. & 7. l. 4.
(e) Per 1. l. 6.

3. *Ex corollario primo, quadrantis ope; mechanice habebitur rectangulum vel quadratum æquale circulo ejusdem cum quadrante radii; atque inde, circuli cujusvis quadratura mechanice obtinebitur. Rectangulum enim* (f) *sub quadrantis arcu & duplo radio; adeoque & quadratum* (g) *media proportionalis inter arcum & duplum radium, circulo ejusdem cum quadrante radii exæquabitur. Atque inde, dato cuivis alteri circulo æquale rectangulum vel quadratum invenietur per cor. 7. p. 2. l. 12.*

(f) Per cor. 1.
(g) Per 13. & 17. l. 6.

Mechanice verò habebitur linea recta, dati quadrantis arcui æqualis, filum vel chartam ad arcum illum applicando; vel etiam arcum super plano, secundùm regulæ vel lineæ rectæ directionem volvendo.]

PRO-

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minùs quàm ter & unam septimam (seu $\frac{10}{70}$,) plus verò quàm ter & $\frac{10}{71}$.

Ad hujus theorematis demonstrationem, assumit Archimedes polygona ordinata, alterum circulo circumscriptum, inscriptum alterum, utrumque 96. laterum. Deinde ostendit 96. latera circulo circumscripta continere diametrum minùs quàm ter & $\frac{1}{7}$. ac proinde circumferentiam quæ ipsis minor est, etiam continere diametrum minùs quàm ter & $\frac{1}{7}$. Latera verò 96. circumferentiæ inscripta, (ac proinde & circumferentiam, quæ ipsis major est,) amplius continere diametrum quàm ter & $\frac{10}{71}$. Porro longior est hujus rei demonstratio quàm ut hoc loco adferri debeat.

[At tanti momenti theorema, cui demonstrando Archimedes ipse librum integrum impendit, ut indemonstratum prorsus tyronibus obtrudatur, a meipso impetrare nequeo. En igitur ejusce demonstrationem Archimedeam, quam Magni Barrovii vestigiis præcipue insistendo, hîc descripsi.

Pars prima. Circuli cujuscunque perimeter, diametri AB triplum excedit, quantitate minori quàm $\frac{1}{7}$ parte ejusdem diametri. *Fig. 4.*

Esto C centrum circuli, & AD (radio AC æqualis,) (a) *latus hexagoni circulo inscriptibilis, & juncta CD, erit* (b) *angulus ACD sexta pars rectorum quatuor. Angulus ACD bisecetur rectâ CE, quæ etiam* (c) *bisecabit AD in S, eique perpendicularis erit. Producatur CE donec occurrat rectæ EA tangenti circulum in A; & continuâ angulorum ad C bisectione, ducantur ad tangentem rectæ CF, CG, CH, CK, ut sit ang. ACD = 2 ang. ACE = 4. ang. ACF = 8 ang. ACG = 16 ang. ACH = 32 ang. ACK. Erit itaque angulus ACH, (sive 2 ang. ACK) $\frac{1}{96}$ (pars nonagesima sexta) rectorum quatuor. Et si in tangente productâ capiatur AL = AK, & jungatur CL, erit* (d) *angulus ACL angulo ACK æqualis; & proinde, angulus LCK anguli ACK duplus erit, sive æqualis angulo ACH, seu $\frac{1}{96}$ rectorum quatuor; & LK erit latus figuræ ordinatæ 96 laterum circulo circum-*

(a) Per cor. 1. pr. 15. l. 4.
(b) Per 26. l. 3. & cor. 1. pr. 33. l. 6.
(c) Per n. 3. schol. pr. 26. l. 1.
(d) Per 4. l. 1.

cumscriptibilis, cujus proinde ambitus erit 96 LK, circuli circumferentiâ (a) major. Si itaque ostendatur 96LK minorem esse quàm $3\frac{1}{7}$ diametri AB; Ergo etiam circuli perimeter minor erit quàm $3\frac{1}{7}$ ejusdem diametri.

(a) Per axio. 2. hujus.

Ob triangula similia (b) *CEA, CAS, erit CE : EA :: CA : AS. Sed CA = (c) 2 AS; ergo CE = 2 EA. Et ob angulum ACE bisectum rectâ CF,* (d) *erit EC : CA :: EF : FA; & compon. EC + CA : CA :: EA : FA; & permut. EC + CA : EA :: CA : FA. Et eodem modo ostendetur esse FC + CA : FA :: CA : GA; & GC + CA : GA :: CA : HA; & denique HC + CA : HA :: CA : KA.*

(b) Per 8. l. 6.
(c) Prius.
(d) Per 3. l. 6.

Ponatur EC = 306: erit ECq = 93636, & EA (e) *erit = 153, unde EAq = 23409, & CAq (= ECq* (f) *— EAq = 93636 — 23409) = 70227. Sed* $\sqrt{}$ *70225 = 265. Ergo CA major est quàm 265, & EC + CA major quàm (306 + 265 =) 571. Et cùm sit EC + CA : EA :: CA : FA, sitque ratio EC + CA ad EA* (g) *major ratione 571 ad 153: erit* (h) *etiam ratio CA ad FA major ratione 571 ad 153, hoc est, (utrumque numerum multiplicando per 8,) ratione 4568 ad 1224. Si itaque ponatur FA = 1224, erit* (i) *CA major quàm 4568.*

(e) Prius.
(f) Per prob. 2. post. p. 47. l. 1.
(g) Per 8. l. 5.
(h) Per sch. p. 11. l. 5.
(i) Per 10. l. 5. cum schol. p. 7. l. 5.

Ponatur igitur FA = 1224, eritque FAq = 1498176: Et cùm CA major sit quàm 4568, erit CAq majus quàm 20866624, adeoque CFq (= (k) *FAq + ACq) majus erit quàm 1498176 + 20866624, hoc est, quàm 22364800. Sed* $\sqrt{}$ *22363441 = 4729. Ergo FC major est quàm 4729, & FC + CA major quàm 4729 + 4568, hoc est, quàm 9297. Et cùm sit FC + CA : FA :: CA : GA, sitque ratio FC + CA ad FA, major ratione 9297 ad 1224, erit etiam ratio CA ad GA major ratione 9297 ad 1224. Si itaque ponatur GA = 1224, erit CA major quàm 9297.*

(k) Per 47. l. 1.

Ponatur igitur GA = 1224, eritque GAq = 1498176: Et cùm CA major sit quàm 9297, erit CAq majus quàm 86434209, adeoque CGq = GAq + ACq) majus erit quàm 1498176 + 86434209, hoc est, majus quàm 87932385. Sed $\sqrt{}$ *87928129 = 9377. Ergo CG major est quàm 9377, & GC + CA major est quàm 9377 + 9297, sive major quàm 18674. Et cùm sit GC + CA : GA :: CA : HA, sitque ratio GC + CA ad GA major ratione 18674 ad 1224, sive (utrumque dimidiando) ratione 9337 ad 612; erit etiam ratio CA ad HA major ratione 9337 ad 612. Si itaque ponatur HA = 612, erit CA major quàm 9337.*

Ponatur igitur HA = 612, eritque HAq = 374544. Et cùm CA major sit quàm 9337, erit CAq majus quàm 87179569; adeo-

adeoque CHq ($= HAq + ACq$) *majus quàm* $374544 + 87179569$, *hoc est, majus quàm* 87554113. *Sed* $\sqrt{87553449} = 9357$. *Ergo* CH *major est quàm* 9357, *&* $HC + AC$ *major erit quàm* $9357 + 9337$, *hoc est, major quàm* 18694. *Et cùm sit* $HC + CA : HA :: CA : KA$; *sitque ratio* $HC + CA$ *ad* HA *major ratione* 18694 *ad* 612, *sive* (*utrumque dimidiando*) *ratione* 9347 *ad* 306; *erit etiam ratio* CA *ad* KA *major ratione* 9347 *ad* 306. *Si itaque ponatur* $2AK$ *sive* $LK = 306$, *erit* $2AC$ *sive* AB *major quàm* 9347, *&* *ratio* AB *ad* 9347 *major erit ratione* LK *ad* 306; *&* *proinde, ratio* $3\frac{1}{7}$ AB *ad* ($3\frac{1}{7} \times 9347 =$) $29376\frac{2}{7}$, *major erit* (a) *ratione* $96LK$ *ad* ($96 \times 306 =$) 29376. *Hæc autem ultima est ratio æqualitatis, cùm sit* $96LK = 29376$. *Ergo* $3\frac{1}{7}$ AB *major est quàm* $29376\frac{2}{7}$; *& proinde adhuc major quàm* 29376, *sive quàm* $96LK$. *Ambitus ergò polygoni ordinati 96 laterum circulo circumscripti, & multo magis perimeter circuli cui circumscribitur polygonum illud, minor est quàm* $3\frac{1}{7}$ *diametri ejusdem circuli.* Q.E.D.

(a) Per 15. l. 5.

Pars secunda. Circuli perimeter, diametri AB triplum excedit, quantitate majori quàm $\frac{10}{71}$ partibus ejusdem diametri. *Fig. 5.*

Esto arcus AD *sexta pars totius circumferentiæ circularis, & continuâ bisectione fiat arc.* $AD = 2$. *arc.* $AE = 4$ *arc.* $AF = 8$ *arc.* $AG = 16$ *arc.* AH; *& erit arcus* AH $\frac{1}{96}$ *totius circumferentiæ. Ducantur rectæ* BD, BE, BF, BG, BH; *&* AD, AE, AF, AG, AH; *erit* AH *latus figuræ ordinatæ 96 laterum circulo inscriptibilis, cujus proinde ambitus,* $96AH$, *erit circuli circumferentiâ* (b) *minor. Secent rectæ* AD, BE *se invicem in* K, *& propter angulos* EBA, EAD *æqualibus arcubus insistentes, & proinde* (c) *æquales, & angulum ad* E *communem, triangula* ABE, KAE (d) *erunt similia, & proinde* $AB : AK :: BE : EA$. *Et in triangulo* ABD, *ob angulum* B (e) *bisectum rectâ* BK, *erit* (f) $DB : BA :: DK : KA$; *& compon.* $DB + BA : BA :: DA : KA$; *& permut.* $DB + BA : DA :: BA : AK ::$ (*priùs*) $BE : EA$. *Et pari ratiocinio ostendetur esse* $EB + BA : EA :: BF : FA$; *&* $FB + BA : FA :: BG : GA$; *&* $GB + BA : GA :: BH : HA$.

(b) Per axio. 1. hujus.
(c) Per 29. l. 3.
(d) Per cor. 9. p. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.
(e) Per 29. l. 3.
(f) Per 3. l. 6.

Ponatur jam $BA = 1560$, *eritque* $BAq = 2433600$, *&* DA ($=$ *radio* (g) AC) $= 780$; *unde* $DAq = 608400$, *&* DBq ($= BAq - DAq$) $= 1825200$. *Sed* $\sqrt{1825201} = 1351$.

(g) Per cor. 1. p. 15. l. 4.

Ergo DB *minor est quàm* 1351, *&* $DB + BA$ *minor quàm* $(1351 + 1560 =)$ 2911. *Quare ratio* 2911 *ad* 780, *hoc est*, (*utrumque numerum per* 100 *multiplicando*,) *ratio* 291100 *ad* 78000, *major est ratione* $DB + BA$ *ad* DA, *sive* BE *ad* EA. *Si itaque ponatur* $EA = 78000$, *erit* BE *minor quàm* 291100.

Ponatur igitur $EA = 78000$, *eritque* $EAq = 6084000000$. *Et cùm sit* BE *minor quàm* 291100, *erit* BEq *minus quàm* 84739210000, *&* BAq $(= BEq + EAq)$ *minus quàm* 90823210000. *Sed* $\sqrt{90826890625} = 301375$. *Ergo* BA *minor est quàm* 301375, *&* $EB + BA$ *minor quàm* $(291100 + 301375 =)$ 592475. *Quare ratio* 592475 *ad* 78000, *hoc est*, (*utrumque numerum dividendo per* 325, *& quotos inde ortos per* 11 *multiplicando*,) *ratio* 20053 *ad* 2640, *ratione* $EB + BA$ *ad* EA, *sive* BF *ad* FA *major erit. Si itaque ponatur* $FA = 2640$, *erit* BF *minor quàm* 20053.

Ponatur igitur $FA = 2640$, *eritque* $FAq = 6969600$. *Et cùm* BF *minor sit quàm* 20053, *erit* BFq *minus quàm* 402122809, *&* BAq $(= BFq + FAq)$ *minus quàm* 409092409. *Sed* $\sqrt{409131529} = 20227$. *Ergo* BA *minor est quàm* 20227, *&* $FB + BA$ *minor quàm* 40280. *Quare ratio* 40280 *ad* 2640, *hoc est*, (*utrumque dividendo per* 40, *& quotos inde ortos multiplicando per* 6,) *ratio* 6042 *ad* 396 *major est ratione* $FB + BA$ *ad* FA, *sive* BG *ad* GA. *Si itaque ponatur* $GA = 396$, *erit* BG *minor quàm* 6042.

Ponatur igitur $GA = 396$, *eritque* $GAq = 156816$. *Et cùm* BG *sit minor quàm* 6042, *erit* BGq *minus quàm* 36505764, *&* BAq $(= BGq + GAq)$ *minus quàm* 36662580. *Sed* $\sqrt{36663025} = 6055$. *Ergo* BA *minor est quàm* 6055, *&* $GB + BA$ *minor quàm* 12097. *Quare ratio* 12097 *ad* 396, *hoc est*, (*utrumque duplicando*,) *ratio* 24194 *ad* 792 *major est ratione* $GB + BA$ *ad* GA, *sive ratione* BH *ad* HA. *Si itaque ponatur* $HA = 792$, *erit* BH *minor quàm* 24194.

Ponatur igitur $HA = 792$, *eritque* $HAq = 627264$. *Et cùm* BH *minor sit quàm* 24194, *erit* BHq *minus quàm* 585349636, *&* BAq $(= BHq + HAq)$ *minus quàm* 585976900. *Sed* $\sqrt{585978849} = 24207$. *Ergo* BA *minor est quàm* 24207, *& ratio* AH *ad* AB *major erit ratione* 792 *ad* 24207, *sive* (*utrumque dividendo per* 3,) *major ratione* 264 *ad* 8069; *& proinde ratio* $96\,AH$ *ad* AB *major erit ratione* $(96 \times 264 =)$ 25344 *ad* 8069. *Et quoniam* (25344, *sive*) 25344×1 *superat* ($25343\frac{34}{71}$, *sive*) $8069 \times 3\frac{10}{71}$; *erit*

(a) *ra-*

(a) *ratio* 25344 *ad* 8069 *major ratione* $3\frac{10}{71}$ *ad* 1; *ac* (b) *proinde ratio* 96*AH ad AB major est ratione* $3\frac{10}{71}$ *ad* 1. *Ergo* (c) *factum extremorum majus erit facto mediorum, hoc est,* 96*AH sive ambitus polygoni circulo inscripti, & proinde circuli circumferentia cui inscribitur, major erit quam* $3\frac{10}{71}$ *diametri AB. Q. E. D.*]

(a) Per cor. 7 p. 16 l. 6.
(b) Per sch. p. 11. l. 5.
(c) Per cor. 6. p. 16. l. 6.

Quod si ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites jam statutos arctare poterimus magis magisque sine termino, atque ita propiùs in infinitum ad veram proportionem accedere. Præstitum est hoc a Ludolpho a Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliisque.

[*Cùm autem tangens graduum* 36 *in* 10 *ducta, det pentagoni* circumscripti; *& sinus graduum* 36 *in* 10 *ductus, det pentagoni* inscripti *perimetrum: Cùm etiam consimiliter, tangens gradûs dimidii in* 720 *ducta, polygoni laterum* 360 circumscripti, *& sinus gradûs dimidii in* 720 *ductus, polygoni laterum* 360 inscripti *perimetrum exhibeat; atque ita porro in infinitum; Obscurum esse nequit quo pacto e datis jam sinuum atque tangentium tabulis, numeri sequentes inveniri poterunt.*] Vide Fig. 1.

Proportiones præcipuas hactenus inventas hîc subjicio.

Prima est Archimedis, hujusmodi:

Diameter 7.
Circumf. 22. major verâ.
Diameter 71.
Circumf. 223. minor verâ.

[*Nam* $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. & $\frac{223}{71} = 3\frac{10}{71}$.]

Rationes 22. ad 7., & 223. ad 71., si ad commune consequens reducantur, (quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem;) rationes orientur 1562. ad 497. & 1561. ad 497.

Positâ igitur diametro partium 497.
erit circumferentia major verâ 1562.
& circumferentia minor verâ 1561.

Utraque igitur a verâ differt quantitate minori, quàm sit $\frac{1}{497}$ pars diametri.

Quod si rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune consequens; provenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Positâ igitur circumferentiâ partium 4906.
erit diameter minor verâ 1561.
diameter major verâ 1562.

Utraque igitur a verâ diametro differt quantitate minori, quam sit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiæ.

Proportio tradita a Metio est Archimedeâ multo accuratior. Juxta hanc est

Diameter 113.
Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris constantes, nulla veræ propinquior: ex hac enim, positâ diametro 10,000,000, provenit circumferentia 31,415,929, quæ a verâ solùm penes notam primam 9 differt excessu paulo majore, quàm sint duæ particulæ decimillionesimæ diametri.

Sed utraque multo exactior est gemina illa Ludolphi a Ceulen: prioris termini constant notis 21, posterioris verò notis 36.

Diameter
100,000000,000000,000000.
Circumf. major verâ.
314,159265,358979,323847.
Circumf. minor verâ
314,159265,358979,323846.

Differentia utriusque circumferentiæ est particula una diametri, denominata a numero, qui constat unitate & 20 cifris; ac proinde tam hæc quàm illa a verâ circumferentiâ differt minori quantitate quàm sit diametri particula dicta, videlicet centies millionesies millionesies millionesima.

Diameter
100000,000000,000000,000000,000000,000000.
Circumf. major verâ
314159,265358,979323,846264,338327,950289.
Circumf. minor verâ.
314159,265358,979323,846264,338327,950288.

Differentia utriusque circumferentiæ, inter quam vera existit, est diametri particula una denominata a numero, qui constat unitate & 35. cifris, quæ particula ad diametrum, minorem habet proportionem, quàm arenula una ad orbem terræ. Non enim constat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Frustra igitur sit ulteriùs progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, si ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

[Positâ

[*Positâ verò Circumferentiâ partium*
1,000000,000000,000000,000000,000000,000000,
Diameter erit quamproxime, partium
0,318309,886183,790671,537767,926745,028724.

Corol. 1. *Cùm in numeris minùs accuratis, sit circuli circumferentia ad diametrum ut* 22 *ad* 7; *erit circulus in ejusmodi numeris ad quadratum inscriptum, ut* 11 *ad* 7; *ad quadratum circumscriptum ut* 11 *ad* 14; *& ad radii quadr. ut* 22 *ad* 7. *Sequuntur hæc ex cor.* 2. *prop. præced.*

Cor. 2. *Cùm verò, in numeris accuratioribus, circuli circumferentia sit ad diametrum, ut* 355 *ad* 113; *erit in iisdem numeris, circulus ad quadratum inscriptum ut* 355 *ad* 226; *ad quadratum circumscriptum ut* 355 *ad* 452; *& ad radii quadratum ut* 355 *ad* 113.

Cor. 3. *Si autem pro circumferentiâ ponatur unitas cum quinque cifris annexis; erit circulus ad quadratum inscriptum ut* 100000 *ad* 63662; *ad quadratum circumscriptum ut* 100000 *ad* 127324; *& ad radii quadratum ut* 100000 *ad* 31831 *circiter.*

Cor. 4. *Si denique pro diametro ponatur unitas cum quinque cifris annexis; erit circulus ad quadratum inscriptum ut* 157080 *ad* 100000; *ad quadratum circumscriptum ut* 78540 *ad* 100000; *& ad radii quadratum ut* 314159 *ad* 100000 *fere.*

Scholium.

PRoportionis jam traditæ fructus eximii, sunt hi qui sequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentiâ.

MAjorem terminum unius è proportionibus jam traditis statue primo loco, minorem secundo, circumferentiam tertio; his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæsita diameter.

Ut si detur circumferentia maximi circuli terræ, milliaria continere Belgica unius horæ 8640, & quæratur terræ diameter; sic stabunt termini:

355 : 113 :: 8640 :

multiplica jam secundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica $2750\frac{2}{71}$ pro diametro orbis terræ:

[*Errare videtur noster, circumferentiæ terrestri milliaria Belgica* 8640 *tribuendo. Ex dimensione Snellii, ambitus terræ*

 mil-

milliaria Belgica 6840 continet, uti apud Varenium videre est; pro quibus Tacquetus 8640 milliaria posuit, numerum centenarium & millenarium ex incuriâ transponendo. Ex vero igitur numero Snelliano, tyronibus exercitationis ergo, computum de novo instituendi prabetur occasio.]

Inventio circumferentiæ ex Diametro.

TErminus minor unius e proportionibus supra traditis statuatur primo loco, major secundo, diameter nota tertio: His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæsitam circumferentiam.

Ut si detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ $2750\frac{14}{71}$. & quæratur ambitus; termini ita stabunt.

$$113 \;:\; 355 \;::\; 2750\tfrac{14}{71} \;:$$

Tunc secundum multiplica per tertium, & productum divide per primum: provenient milliaria Belgica 8640. pro ambitu orbis terræ.

Quàm modice hæc circumferentia veram excedat, dictum est supra, excessu videlicet paulo majore, quàm sint diametri terrestris duæ particulæ decimillionesimæ, hoc est, 9 circiter aut 10. pedibus Rhynlandicis, quorum 18000. constituunt milliare horarium. Quod si utamur proportione Ludolphinâ etiam priori, cujus termini constant 21. notis; invenietur circumferentia insensibiliter a verâ differens, non solùm diametro datâ milliariorum Belgicorum 2750. qualis est terræ; verùm etiam, licèt diameter ponatur centum millionum eorundem milliariorum, qualis fortasse est diameter firmamenti. Hac enim positâ, proveniet circumferentia minori quantitate a verâ differens, quàm una centimillionesima particula pedis Rhynlandici. Quòd si, ad investigandam circumferentiam orbis terræ, utamur proportione Archimedis, intervallum circumferentiarum verâ majoris ac minoris excedet 5 milliaria Belgica. Non est igitur adhibenda Archimedea proportio, nisi in quantitate parvâ: imo semper expediet Metianâ uti, quæ & modicis constat terminis, & plus quam millies exactior est.

Circuli dimensio.

SEmidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll. 1. p. 5. hujus.

Ut

Ut si semidiametrum orbis terræ, quæ neglectâ fractione continet milliaria Belgica 1375. multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadrata 5, 940000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventæ circularis areæ a verâ habetur, si differentia inventæ circumferentiæ dimidiæ a dimidiâ verâ, ducatur in semidiametrum datam; aut si differentia semidiametri inventæ a verâ, ducatur in datam semicircumferentiam.

[Dimensio sectoris circularis AEBG (vel AECG,) ex datis radio circuli AE, & arcu sectoris EBG (vel ECG.) *Fig. 26.*

F*Iat, ut 113 ad 355, ita* (a) *semidiameter data ad semicircumferentiam circuli: deinde, ut gradus 360 ad gradus arcûs dati, ita* (b) *semicircumferentia jam inventa, ad arcûs sectoris dimidium EB, (vel EC;) quo in radium datum ducto,* (c) *exorietur area sectoris quæsiti.*

(a) *Per* 15. *l.* 5.
(b) *Per eand.*
(c) *Per cor.* 3. *p.* 4. *hujus, & schol. p.* 41. *l.* 1.

Et, si area trianguli rectilinei AEG, sectori majori AEBG addatur, (vel a minore AECG subducatur;) habebitur circuli segmentum majus EDGB, (vel minus EDGC.) Area verò istius trianguli (d) *est rectang. AD*$\times$*DE. Est autem ED* (e) *sinus, & AD cosinus arcûs EB (vel EC,). Ex datis itaque segmenti arcu EBG (vel ECG) & basi EG; vel ex datis radio EA & basi EG; vel denique ex radio EA & arcu EBG (vel ECG;) invenientur ED & DA, atque adeo area trianguli EAG. Verùm hæc potiùs e trigonometria petenda sunt.*]

(d) *Per def. p.* 41. *l.* 1.
(e) *Per def.* 10. *l.* 3. & *cor.* 1. *p.* 3. *l.* 3.

Dimensio Cylindrorum & Conorum.

EAM hîc appono, quòd a circuli dimensione pendeat. Cylindrus igitur & prisma quodvis producitur ex altitudine multiplicatâ per basim: Conus & pyramis ex tertiâ altitudinis parte in basim ductâ; sunt enim partes tertiæ cylindrorum ac prismatum, eandem cum ipsis basim & altitudinem habentium, per 10. & 7. l. 12.

Sit basis Cylindri aut coni 50. ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100. in 50, proveniunt 5000. pedes cubici pro soliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50, proveniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro soliditate coni.

Fig. 14. [Dimensio Coni truncati N Q R O; ex datis basibus parallelis ZZ, SS, & altitudine V D.

AD hoc problema solvendum, lemma sequens præmittatur: Ut est differentia radiorum qui sunt in basibus, (N V — Q D,) ad radium minorem (Q D;) ita est altitudo coni truncati (V D,) ad altitudinem partis deficientis (D P.) *Ductâ enim in triangulo N V P, rectâ D I ad P N parallelâ, erit* (a) *V I : I N :: V D : D P. Sed propter parallelogrammum N I D Q,* (b) *est I N = Q D, & proinde V I = N V — Q D. Ergo liquet propositum.*

(a) Per 2. l. 6. (b) Per 34. l. 1.

Datis itaque tribus prioribus, invenietur quarta D P, altitudo nempe partis deficientis Q P R, cujus altitudinis pars tertia in basem SS ducta, dabit partem illam deficientem Q P R. Deinde pars tertia rectarum P D + D V, sive altitudinis coni completi, ducta in basem Z Z, dabit conum completum N P O; a quo si subducatur pars deficiens Q P R, relinquetur conus truncatus N Q R O.

Porro notandum est, hanc demonstrationem non minùs in coni truncati scaleni, quàm in recti dimensione valituram, uti ex iis quæ de pyramidis truncatæ dimensione in libro elementorum duodecimo scripsimus, satis patet.]

PROPOSITIO VII.

Fig. 6. & 7. l. 12.

CIrculorum peripheriæ eam inter se proportionem habent, quam diametri, [sive radii.]

Nam polygonorum similium circulo sine fine inscriptibilium ambitus sunt inter se semper ut (*c*) diametri A F & I C. Sed hi (*d*) ambitus in peripherias desinunt. Ergo etiam peripheriæ sunt inter se ut diametri. Quod erat demonstrandum.

(c) Per cor. 1. p. 1. l. 12. (d) Per 9. hujus.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 6. Archimed.

SUperficies prismatis cylindro tam circumscripti quàm inscripti, æquatur rectangulo, cujus altitudo est latus cylindri, basis verò æqualis perimetro basis prismaticæ.

1. Pars

1. Pars. Prismatis conscripti superficies tangit cylindrum secundùm lineas EA, NF, &c. quæ sunt cylindri latera; hæc autem (quòd ex hyp. cylindrus sit rectus) ad planum baseos recta (*a*) sunt, ac proinde etiam (*b*) recta ad lineas CG, GM, &c. Sunt verò & æqualia inter se. Igitur unum cylindri latus communis est omnium rectangulorum CO, OM MH, &c. altitudo. Conscripti igitur prismatis superficies æquatur (*c*) rectangulo sub ambitu basis prismaticæ, & prismatis seu cylindri latere contento.

(a) *Per def.* 3. *l.* 12. & *p.* 8. *l.* 11.
(b) *Per def.* 3. *l.* 11.
(c) *Patet ex* 1. *l.* 6.

Eadem est ratio secundæ partis. Nam latus cylindri [*BD, vel IK, vel QP, &c.*] communis rursum est altitudo rectangulorum BDIK, KIQP, &c. quæ constituunt superficiem prismatis inscripti.

PROPOSITIO IX.

Fig. 7.

Pyramidis ordinatæ cono recto circumscriptæ superficies, æqualis est triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis circumferentia (FHLD,) altitudo autem latus coni (BG.)

Et pyramidis ordinatæ cono recto inscriptæ superficies æquatur triangulo; cujus basis est baseos pyramidalis circumferentia, altitudo verò perpendicularis (BO) a vertice in latus baseos deducta.

1. Pars. Ducantur ad contactus G, K, M rectæ BG, BK, BM. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA (*d*) rectus est basis plano FKD, etiam planum (*e*) GBA plano FKD rectum erit. Atqui HG perpendicularis (*f*) est ad AG communem sectionem planorum FKD & GBA. Ergo HG etiam (*g*) recta est plano GBA, ac proinde perpendicularis quoque est ad (*h*) ipsam BG. Ergo GB latus coni erit altitudo trianguli FBH. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum HBL, LBD, &c. Igitur triangulum circumferentiâ FHLD, & latere coni comprehensum (*i*) æquatur superficiei pyramidis circumscriptæ absque basi. Quod erat primum.

2. Partis similis fere demonstratio est.

(d) *Per hyp.*
(e) *Per* 18. *l.* 11.
(f) *Per* 18. *l.* 3.
(g) *Collig. ex def.* 4. *l.* 11.
(h) *Per def.* 3. *l.* 11.
(i) *Patet ex* 1. *l.* 6.

[*Ponatur latera baseos inscriptæ pyramidis ordinatæ, lateribus circumscriptæ parallela; & secet latus CI planum GBA in O, & jungatur OB, eritque CI ad planum AOB* (k) *recta, & proinde rectis AO, BO, a centro baseos & a vertice coni ductis* (l) *perpendicularis. Sed omnes ejusmodi recta*

(k) *Per* 8. *l.* 11.
(l) *Per def.* 3. *l.* 11.

AO a centro ad quodvis baseos polygona ordinata latus perpendiculares, (a) *sunt aquales, & proinde in omnibus triangulis BAO, propter axem BA communem & ad planum baseos rectum, & omnia latera AO sibi invicem aqualia,* (b) *erunt etiam omnes recta BO aquales. Omnia igitur triangula qua pyramidis inscripta superficiem constituunt, aqualem habent altitudinem, nempe perpendicularem BO, a cujusvis trianguli vertice B ad basem demissa; & simul sumpta* (c) *aquabuntur (hoc est, superficies pyramidis cono recto inscripta aquabitur) triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis inscripta circumferentia, & cujus altitudo est perpendicularis BO. Quod erat alterum.*

(a) Per 14. l. 3.
(b) Per 4. l. 1.
(c) Patet ex 1. l. 6.

Aliter. *Cùm triangula qua pyramidis inscripta superficiem componunt, pro basibus habeant aqualia polygoni ordinati, quod basi coni inscribitur, latera, & pro cruribus aqualia coni recti latera; triangula ista erunt sibi mutuò aquilatera,* (d) *aquiangula, & (cùm sibi mutuò imposita* (e) *congruent,) altitudinis aqualis. Unde ut priùs, triangulum quod continetur sub altitudine communi, & sub basi qua omnibus triangulorum basibus, sive qua perimetro polygoni inscripti aquetur, triangulis istis, sive pyramidis inscripta superficiei* (f) *aquale erit.*]

(d) Per 8. l. 1.
(e) Per ax. 8. l. 1.
(f) Patet ex 1. l. 6.

PROPOSITIO X.

Superficies prismatis ordinati cylindro recto circumscripti desinit (g) *in cylindri superficiem: & pyramidis ordinata cono recto circumscripta superficies in coni superficiem desinit.*

(g) Vide def. 6. l. 12.

Fig. 6. 1. Pars. Prismatum ordinatorum cylindro sine fine conscriptorum & inscriptorum superficies, habebunt tandem inter se differentiam datâ minorem, uti facile patebit ex 8. & 3. hujus. Multo igitur magis superficies circumscripti prismatis a superficie cylindri, inter inscriptam & circumscriptam mediâ, differet differentiâ minori quacunque datâ, hoc est, (h) desinit in cylindricam superficiem, minùs semper ac minus excedendo.

(h) Per def. 6. l. 12.

Fig. 7. 2. Pars. Eodem modo ostenditur ex 9. & 3. hujus.

In figuris tantùm exhibentur cylindri & coni semisses, ne multitudo linearum confusiorem pareret. Cæterum cogitandi sunt cylindrus & conus integri, quos prismata & pyramides circumscriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet planas superficies circumscriptas esse majores ex 2. axiomate.

[Scho-

Scholium. 1. *Cum propositiones 4. sequentes, & quædam e corollariis inde deductis, ratiocinio aliquantum prolixiori demonstrentur, & eo ordine disponantur, ut necessariò per ambages procedendum sit; opus tyronibus haud ingratum me facturum spero, si propositiones illas, unà cum omnibus earum corollariis, methodo naturali & expeditâ, ex hac prop. 10. deduxerim.*

Corollaria ex primâ parte prop. 10.

1 *Hinc sequitur, cylindri recti superficiem CD, æquari rectangulo sub CB latere cylindri, & BN baseos peripheriâ.* Fig. 8. *Superficies enim prismatum cylindro sine fine circumscriptorum, æquales semper* (a) *sunt rectangulis sub latere cylindri & basium prismaticarum perimetris. Sed ejusmodi superficies prismaticæ in* (b) *superficiem cylindricam, & perimetri basium prismaticarum in* (c) *peripheriam baseos cylindri tandem desinunt. Ergo* (d) *superficies cylindri æquatur rectangulo sub latere cylindri, & sub baseos peripheriâ.*

(a) Per 8. hujus. (b) Per hanc prop. (c) Per 3. hujus. (d) Per 1. hujus.

Aliter. *Applicetur ad superficiem cylindricam charta rectangula, altitudinis cylindri altitudini æqualis, & baseos quæ peripheria baseos cylindricæ æquetur; & inter se congruent charta atque superficies cylindrica: ideoque* (e) *æquales sunt.* (*Est cor. 1. pr. seq.*)

(e) Per ax. 7. l. 1.

2. *Hinc rectangulorum proprietates superficiebus cylindricis rectis conveniunt, si pro rectangulorum altitudinibus ponantur latera cylindrorum; & pro basibus, cylindricarum basium peripheriæ, vel etiam quandoque diametri, quæ eandem cum peripheriis proportionem* (f) *habent. Adeoque* 1. *Cylindricæ superficies æque altæ,* (g) *sunt inter se ut basium diametri.* (*Est cor. 2. pr. seq.*) 2. *Quæ bases habent æquales, sunt* (h) *inter se ut cylindrorum latera.* (*Est cor. 3. p. seq.*) 3. *Quæ similes sunt,* (i) *erunt in duplicatâ ratione diametrorum quæ in basibus sunt.* (*Est cor. 4. p. seq.*) 4. *Et qualibet,* (k) *sunt inter se in ratione compositâ ex rationibus laterum, & diametrorum Est cor. 5. p. 11.*) 5. *Si æquales sint,* (l) *reciprocant latera & basium diametros; & si reciprocent, æquales sunt.* (*Est cor. 6. p. 11.*) 6. *Si latus in baseos peripheriam ducatur,* (m) *habebitur superficiei cylindricæ area.* (*Est cor. 7. prop. seq.*)

(f) Per 7. hujus. (g) Per 1. l. 6. & 7. hujus. (h) Per cor. 1. p. 1. l. 6. (i) Per 20. l. 6. & 7. hujus. (k) Per 23. l. 6. (l) Per 14. l. 6. (m) Per sch. p. 34. l. 1.

3. *Cylindri recti superficies CD, est ad basim BN, ut cylindri latus BC est ad BO, quartam partem diametri baseos. Est enim superficies cylindrica* (n) *æqualis rectangulo sub latere BC & peripheriâ baseos. Sed basis cylindri* (o) *æquatur rectangulo sub BO quartâ parte diametri baseos & eâdem peripheriâ. Quare*

(n) Per cor. 1. prius. (o) Per cor. 1. p. 5. hujus.

(a) Per 1. l. 6. Quare (a) superficies cylindrica erit ad basim, ut BC ad BO. (Est p. 12. infra.)

Fig. 27. 4. Hinc superficies cylindri GK, sphæra circumscripti, cujus nempe altitudo NK æquatur diametro baseos NG, erit baseos quadrupla, sive basium ambarum dupla; nam propter NK = NG, erit superficies cylindrica ad basim, ut NK ad $\frac{1}{4}$ NK, sive ut 4 ad 1, sive quadrupla baseos; ac proinde ad utrasque bases ut 4 ad 2, sive basium dupla. Et superficies cylindri EK, hemisphærio circumscripti, erit baseos dupla, sive duabus basibus æqualis. Si verò latus cylindri fuerit quarta pars diametri baseos, superficies cylindri basi æqualis erit. (Est cor. p. 12.)

Fig. 9. & 8. 5. Sit GH media proportionalis inter AB baseos radium, & 2BC, duplum lateris cylindri; eritque circulus radio GH æqualis superficiei cylindricæ CD. Nam propter AB, GH, 2BC $\div\!\div$, erit basis BN ad circulum GPH, (b) ut AB ad 2BC. sive ut $\frac{1}{2}$ AB ad BC, hoc est, ut (c) basis BN ad superficiem cylindricam CD. Ergo (d) circulus GPH superficiei cylindricæ æqualis erit. (Est p. seq.)

(b) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(c) Per cor. 3. prius.
(d) Per 9. l. 5.

Corollaria ex parte secundâ prop. 10.

Fig. 10. 6. Coni recti superficies CBD æquatur triangulo sub BG latere coni pro altitudine, & sub peripheriâ baseos coni CG pro basi. Etenim pyramidum cono sine fine circumscriptarum superficies, semper (e) sunt æquales triangulis, sub latere coni BG pro altitudine, & sub basium pyramidalium perimetris EF pro basibus. Atqui ejusmodi superficies pyramidales in (f) superficiem conicam, & basium pyramidalium perimetri in baseos coni (g) peripheriam tandem desinunt. Adeoque (h) superficies coni æquatur triangulo sub coni latere pro altitudine, & sub peripheriâ baseos pro basi.

(e) Per 9. hujus.
(f) Per hanc prop.
(g) Per 3. hujus.
(h) Per 1. hujus

Aliter. Aptetur ad superficiem conicam charta, quæ illi ex amussim congruat; & habebit charta illa, in planum extensa, formam sectoris circuli, cujus radius coni lateri, & cujus arcus peripheriæ baseos coni (i) æqualis erit. Sed ejusmodi sector (k) æquatur triangulo sub dicto sectoris radio pro altitudine, & sub rectâ quæ arcui æquetur pro basi; hoc est, sub latere coni pro altitudine, & sub peripheriâ baseos coni pro basi. Quare (l) & superficies coni eidem triangulo æquabitur. (Est cor. 1. pr. 13.)

(i) Patet ex def. coni recti, & sectoris circ.
(k) Per cor. 3. p. 4. huj.
(l) Per ax. 7. & 1. l. 1.

7. Hinc triangulorum proprietates superficiebus conicis rectis conveniunt, si pro triangulorum altitudinibus ponantur conorum latera, & pro basibus basium peripheriæ (m) vel diametri. Ergo, 1. Superficies conicæ æqualia latera habentes, (n) sunt ut

(m) Per 7. hujus.
(n) Per 1. l. 6.

ut basium diametri. 2. *Quæ bases habent æquales, sunt* (a) *ut latera.* 3. *Quæ similes sunt, duplicatam* (b) *habent rationem diametrorum quæ sunt in basibus.* 4. *Et qualibet rationem* (c) *habent compositam ex rationibus laterum & diametrorum quæ sunt in basibus.* 5. *Et quæ æquales sunt,* (d) *reciprocant latera & basium diametros; & quæ reciprocant, æquales sunt.* 6. *Habetur* (e) *denique superficies conica, multiplicando latus coni in dimidiam baseos peripheriam.* (*Hæc sunt corollaria* 2, 3, 4, 5, 6, & 7. *pr.* 13. *infra.*)

8. *Coni recti superficies CBD est ad basim, ut coni latus BC ad baseos radium AC. Est enim superficies coni* (f) *æqualis rectangulo sub latere BC & dimidiâ peripheriâ baseos. Sed coni basis* (g) *æquatur rectangulo sub radio AC & eâdem peripheriâ dimidiâ. Ergo* (h) *superficies coni erit ad basim, ut BC ad AC.* (*Est pr.* 14. *infra.*)

9. *Hinc primò,* (*fig.* 30.) *superficies coni recti a triangulo æquilatero circa perpendicularem AK circumacto geniti, baseos QT dupla est. Est enim BK latus coni, semidiametri baseos AB duplum.* 2. (*fig.* 27.) *superficies coni a triangulo rectangulo æquicruri EBD circa perpendicularem AB circumacto producti, est ad basim, ut in quadrato diameter BD ad latus DA.* 3. (*fig.* 27.) *superficies cylindri recti GK, est ad superficiem coni recti GBN, ejusdem baseos & altitudinis, ut cylindri latus NK ad* $\frac{1}{2}$ *BN dimidium latus coni. Est enim superf. GBN ad basim MI,* (i) *ut BN ad NQ sive* $\frac{1}{2}$ *NG; hoc est, ut* $\frac{1}{2}$ *BN ad* $\frac{1}{4}$ *NG. Sed basis MI est ad superf. GK,* (k) *ut* $\frac{1}{4}$ *NG ad NK. Ergo* (l) *superf. GBN est ad superf. GK. ut* $\frac{1}{2}$ *BN ad NK: &* (m) *invertendo, superficies cylindri GK erit ad superficiem coni GBN, ut latus cylindri NK ad dimidium latus coni,* $\frac{1}{2}$ *BN.* (*Hæc sunt corollaria* 1, 2, & 3. *pr.* 14.)

10. *Sint AC, OL, CB* $\div\!\!\div$ *Erit circulus radio OL æqualis superficiei conicæ CBD. Est* (n) *enim basis coni CG ad superficiem conicam CBD, ut AC ad CB, hoc* (o) *est, ut eadem basis coni ad circulum OPL. Itaque* (p) *circulus OPL superficiei conicæ æqualis erit.* (*Est pr.* 13. *infra.*)

Scholium 2.

Hisce adjicimus duas propositiones e Galilæo desumptas.

1. Cylindri quorum superficies æquantur, sunt inter se ut basium diametri directè, vel ut altitudines cylindrorum reciprocè. *Cylindri enim sunt* (q) *ut bases & altitudines; hoc* (r) *est, in duplicatâ ratione diametrorum in basibus, & simplici ratione altitudinum. Sed superficies cylindricæ sunt* (s) *ut diametri*

(a) Per cor. 1. p. 1. l. 6.
(b) Per 19. l. 6.
(c) Per cor. 2. p. 23. l. 6.
6. (d) Per 15. l. 6.
(e) Per schol. p. 41. l. 1.
(f) Per cor. 6. prius, & cor. p. 42. l. 1.
(g) Per cor. 1. p. 5. huj.
(h) Per 1. l. 6.
(i) Per cor. 8. prius.
(k) Per cor. 3. prius.
(l) Per 22. l. 5.
(m) Per sch. p. 15. l. 5.
Fig. 10. 11.
(n) Per cor. 8. prius.
(o) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(p) Per 9. l. 5.
(q) Per not. 1. in schol. p. 15. l. 12.
(r) Per 2. l. 12.
(s) Per n. 4. cor. 2. p. 10. hujus.

diametri basium & altitudines cylindrorum. Cylindri igitur erunt ut diametri basium & superficies: (nam si ratio diametrorum componatur cum ratione ex diametris & altitudinibus composità, exorietur ratio composita ex duplicatâ ratione diametrorum & simplici altitudinum.) Cùm itaque superficies ponantur æquales, cylindri (a) *erunt ut diametri basium directè; vel ut* (b) *altitudines reciprocè.*

Aliter. *Sint altitudines A, α; basium diametri B, β; erunt superficies ut* (c) *AB, & αβ; & bases ut* (d) *BB, & ββ; ac cylindri ut* (e) *ABB, & αββ. Sed per hypoth. cylindrica superficies æquantur, hoc est, AB = αβ. Ergo* (f) *A:α :: β:B. Et ducendo antecedentes in BB, & consequentes in ββ, erit* (g) *ABB:αββ :: BBβ:Bββ ::* (h) *B:β ::* (i) *α:A.*

2. (*Fig.* 29. & 28. *l.* 12.) Æqualium cylindrorum (FD, AR) superficies sunt inter se, in subduplicatâ ratione altitudinum. *Hoc est, si inter altitudines ND, BR, ponatur media proportionalis P; erit* (k) *ND ad P (sive P ad BR) ut superficies cylindri FD ad superficiem cylindri AR.*

Nam propter BR, P, ND ∺, *erit Pq:NDq ::* (l) *BR:ND ::* (m) *VT:MQ :: FNq:ABq; & P:ND ::* (n) *FN:AB ::* (o) *superf. FD:superf. AO. Sed ND (sive BO) :BR ::* (p) *superf. AO:superf. AR. Ergo ex* (q) *æquo, P:BR :: (sive ND:P ::) superf. FD:superf. AR.*

Aliter. *Si inter altitudines A, α sit M media proportionalis, sintque B, β basium diametri, ut supra; erunt bases ut BB, ββ; superficies ut AB, αβ; & cylindri ut ABB, αββ. Et cùm cylindri sint æquales, hoc est, ABB = αββ, erit AB:αβ :: β:B. Et cùm per* 15. *l.* 12. *sit ββ:BB :: A:α;* (r) *erit β:B :: A:M. Ergo AB:αβ :: A:M.* Q. E. D.

Corol. *Hinc ingentem illam particularum corpora naturalia componentium subtilitatem aliquo modo percipere datum est. Sit FD cylindrus argenteus superficiem habens deauratam, sive bracteis aureis obductam; quem opifices in auri filum immanis longitudinis producunt. Est nempe altitudo cylindri FD ad fili longitudinem, ut* 1 *ad* 115600; *inter quas, media proportionalis, sive* $\sqrt{}$ 115600, *est* 340. *Itaque bractea aurea quâ tegitur superficies fili,* 340 *vicibus tenuior erit quàm illa quâ superficies cylindri FD obducitur.* Vide Rohault. Phys. par. 1. cap. 9. sect. 11.]

(a) *Per def.* 3. *l.* 5. & *def.* 5. *l.* 6.
(b) *Per n.* 5. *cor.* 2. *p.* 10. *hujus.*
(c) *Per n.* 4. *cor.* 2. *p.* 10. *hujus.*
(d) *Per* 2. *l.* 12.
(e) *Per n.* 1. *in scho'. p.* 15. *l.* 12.
(f) *Per* 16. *l.* 6.
(g) *Per* 4. *l.* 5. (*sive per lem.* 1. *par.* 2. *l.* 5.)
(h) *Per* 15. *l.* 5.
(i) *Per inv.*
(k) *Per def.* 10. *l.* 5.
(l) *Per sch. p.* 20. *l.* 6.
(m) *Per* 15. *l.* 12.
(n) *Per* 15. *l.* 5.
(o) *Per n.* 1. *cor.* 2. *p.* 10. *hujus.*
(p) *Per n.* 2. *cor.* 2. *p.* 10. *hujus.*
(q) *Per* 22. *l.* 5.
(r) *Per def.* 10. *l.* 5. *cum schol. p.* 20. *l.* 6.

Lemma ad sequent.

Fig. [illegible]

SInt AB, CD, EF proportionales, sitque KB dimidia AB, & EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales erunt.

Recta KB est ad AB, ut (a) EF ad EG. Rectangulum ergo KB, EG æquatur (per 16. l. 6.) rectangulo AB, EF. Sed hoc per 17. l. 6. æquatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB, EG par est quadrato CD. Ergo per 17. l. 6. KB, CD, EG sunt proportionales. (a) Per 15. l. 5.

[Aliter. *KB:AB* :: (b) *EF:EG*. *Sed AB:CD* :: (c) *CD:EF*. *Ergo* (d) *ex æquo perturbatè*, *KB:CD* :: *CD:EG*.] (b) Per 15. l. 5. (c) Ex hyp. (d) Per 23. l. 5.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cujus radius (GH) est medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC) & baseos diametrum (BD,) æqualis est superficiei cylindricæ. Fig. 9 & 2.

Intelligantur circulis ABN, GPH, circumscripta esse [*ejusdem speciei*] ordinata polygona, adeoque similia, NM, RS; & super NM polygono erectum esse prisma, cylindro circumscriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. sunt proportionales, etiam AD (seu AN) GH & dupla BC (e) proportionales erunt. Jam triangulum sub AN & ambitu polygoni MN contentum, (f) æquatur polygono conscripto NM: rectangulum verò sub BC seu EF & eodem ambitu NM, (hoc est, (g) triangulum sub ambitu NM & dupla BC,) æquale est (h) superficiei prismatis cylindro conscripti. Atqui triangulum sub ambitu NM & AN, est ad triangulum sub ambitu NM & dupla BC, (i) ut AN ad duplam BC. Ergo etiam polygonum NM est ad superficiem prismatis cylindro conscripti, ut AN ad duplam BC. Sed quia jam ostendi AN, GH, duplam BC, esse proportionales: ratio AN ad duplam BC est duplicata (k) rationis AN ad GH. Ergo polygonum NM ad superficiem prismatis rationem habet duplicatam rationis AN ad GH. Sed etiam polygonum NM ad simile sibi polygonum GRQS, rationem habet duplicatam rationis AN ad GH, ut facile colligitur ex 1. lib. 12. [*Nam ductâ GQ, triangula ANK, GHQ (propter angulos ANK, GHQ rectos, & AKN, GQH polygonorum similium ordinatorum* (l) *semiangulos) sunt* (m) *æquiangula & similia. Ergo AK:GQ :: AN:GH. Sed per 1. l. 12. polygona sunt in duplicatâ ratione radiorum AK, GQ, circulorum quibus ipsa polygona sunt inscriptibilia: ac proinde erunt* (n) *in duplicatâ ratione radiorum AN, GH, circulorum quibus eadem polygona circumscribuntur.*] Ergo polygonum NM ad super-

(e) Per lem. (f) Per 4. hujus. (g) Patet ex cor. p. 42. l. 1. (h) Per 8. hujus. (i) Per 1. l. 6. (k) Per def. 10. l. 5. (l) Per 12. 7. 4. cum schol. (m) Per cor. 9 p. 32. l. 1. (n) Per 11. l. 5.

superficiem prismatis, & ad polygonum GRQS eandem habet
(a) Per 9. l. 5. rationem; quæ proinde æqualia (a) sunt. Eodem modo ostendam, prismaticas superficies cylindro in infinitum circumscriptibiles, semper æquales esse polygonis, quæ circulo GPH
(b) Per 10. hujus. in infinitum circumscribi possent. Quare cùm & superficies
(c) Per 3. hujus. prismaticæ (b) in cylindri superficiem, & polygona (c) in circulum GPH desinant, etiam cylindri superficies circulo GPH
(d) Per 4. hujus. æqualis (d) erit. Quod erat demonstrandum.

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis superficiei cylindricæ.

Corollaria.

Fig. 8. & 9. *Superficies cylindri recti æqualis est rectangulo sub latere (BC) & baseos peripheriâ contento.*

Dupla BC (ut ostensum supra) est ad GH, ut GH ad
(e) Per 7. hujus. BA, seu AN; Hoc est, ut (e) peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum sub primâ, nempe duplâ BC, &
(f) Per cor. 4. f. 16. l. 6. quartâ, nempe peripheriâ BN, æquatur (f) triangulo sub secundâ GH, & tertiâ, peripheriâ scilicet P. Sed triangulum
(g) Per 5. hujus. sub GH & peripheriâ P, æquale (g) est circulo GPH, hoc
(h) Per hanc. est, (h) superficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum sub duplâ BC & peripheriâ BN, (hoc est, (i) rectangulum sub BC
(i) Per cor. p. 42. l. 1. & peripheriâ BN,) cylindricæ superficiei æquale erit. Quod erat demonstrandum.

Ex hoc corollario manifestum est rectangulorum proprietates superficiebus cylindricis rectis esse communes. Esto igitur corollarium.

Fig. 24. & 25. l. 12. 2. Cylindricæ superficies (BM, QN) æque altæ, sunt inter se ut basium diametri (BF, QR.)

(k) Per cor. 1. Nam rectangula sub peripheriis CL, SE, & rectis æqualibus FM, RN comprehensa, quibus cylindricæ superficies (k)
(l) Per 1. l. 6. sunt æquales, sunt inter se (l) ut bases; peripheriæ videlicet
(m) Per 7. CL, SE: hoc est, (m) ut diametri BF, QR.

Fig. 27. & 28. l. 12. 3. Cylindricæ superficies (CI, AR) quæ bases habent æquales, sunt inter se ut altitudines (TI, BR.)

(n) Per cor. 1. Rectangula enim sub æqualibus per hyp. peripheriis GH, MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus superficies (n) cy-
(o) Per 1. l. 6. lindricæ sunt æquales, sunt inter (o) se ut TI, BR

Fig. 24. & 25. l. 12. 4. Similes cylindricæ superficies (BM, RI) rationem habent duplicatam ejus, quam habent basium diametri (BF, QR.)

Cum

Cùm cylindri ponantur similes, erit MF ad IQ, (a) ut BF ad QR; hoc est, (b) ut peripheria CL ad peripheriam SE. Quare etiam rectangula sub peripheriis CL, SE, & lateribus MF, IQ contenta, similia (c) erunt; ac proinde rationem inter se habebunt (d) duplicatam ejus, quam habet MF ad IQ; hoc est, BF ad QR. Ergo & cylindricæ superficies, &c.

(a) *Per def.* 4. *l.* 12. (b) *Per* 7. *hujus.* (c) *Per def.* 1. *l.* 6. (d) *Per* 20. *l.* 6.

5. Cylindricæ superficies (BM, RI) rationem inter se habent (e) compositam ex rationibus laterum (FM, IQ) & diametrorum (BF, QR) quæ sunt in basibus.

Fig. 24. & 25. *l.* 12. (e) *Per* 23. *l.* 6. & 7. *huj.*

6. Si æquales sunt cylindricæ superficies (AR, FD;) erit ut diameter AB ad diametrum FN, ita (f) reciprocè altitudo FH ad altitudinem RB: & e converso.

Fig. 28. & 29. *l.* 12. (f) *Ex* 14. *l.* 6.

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur cylindricæ superficiei dimensio; si nimirum altitudo ducatur in baseos peripheriam. Ut si altitudo sit pedum 20. peripheria basis pedum 6. multiplica 20 per 6. proveniunt 120. pedes quadrati pro cylindricâ superficie.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti superficies est ad basim (ABN,) ut cylindri latus (CB) ad (BO) quartam partem diametri baseos.

Fig. 8. & 9. *Archim.*

Sit GH media proportionalis inter BC & BD diametrum basis, ac proinde etiam media (g) proportionalis inter BA seu AN, & duplam BC. Circulus GPH radii GH, æquatur curvæ superficiei (h) cylindricæ CD. Sed circulus GPH ad cylindri basim ABN, rationem habet duplicatam (i) rationis GH ad AN; hoc est, (k) eandem quam dupla BC ad BA radium; hoc est, eandem quam BC ad BO quartam diametri partem. Ergo etiam superficies cylindrica est ad basim ABN, ut BC ad BO quartam partem diametri BD. Quod erat demonstrandum.

(g) *Per lem. antè p.* 11. *hujus.* (h) *Per* 11. *hujus.* (i) *Per cor.* 2. *p.* 2. *l.* 12. (k) *Per hyp. & defin.* 10. *l.* 5.

Corollarium.

Superficies cylindri habentis latus diametro basis æquale, baseos quadrupla est. Si verò latus fuerit quarta pars diametri baseos, superficies cylindri basi æqualis erit. Utrumque ex propositione manifestum est.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 11. & 10.

Circulus, cujus radius (OL) est medius proportionalis inter coni recti latus (BC) & basis radium (AC,) æqualis est superficiei conicæ.

Intelligantur circulis ACG, OPL circumscripta esse polygona ordinata [*similia*] EF, IN, & super polygono EF erectam esse pyramidem cono circumscriptam.

Quoniam per hyp. AC seu AG est ad OL, ut OL ad BC, erit ratio AG ad BC duplicata (*a*) rationis AG ad OL. Sed ut AG ad BC, ita triangulum sub AG & ambitu EF est ad triangulum sub BC & eodem ambitu EF. Ergo ratio trianguli sub AG & ambitu EF ad triangulum sub BC & eodem ambitu, est etiam duplicata rationis AG ad OL. Sed triangulum sub AG & ambitu EF æquale est (*b*) polygono EF: & triangulum sub BC & eodem ambitu EF æquale (*c*) est superficiei pyramidis circumscriptæ. Ergo ratio polygoni EF ad superficiem pyramidis etiam est duplicata rationis AG ad OL. Atqui etiam ratio polygoni EF ad polygonum sibi per constr. simile IN, est duplicata (*d*) rationis AG ad OL, [*uti constat ex iis quæ demonstrationi prop. 11. inseruntur.*] Ergo polygonum EF, ad superficiem pyramidis & ad polygonum IN eandem habet rationem, quæ proinde æqualia (*e*) erunt. Eodem modo ostendam superficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magisque polygonæ circumscribi possunt, semper æquales esse polygonis quæ circulo OPL possunt circumscribi etiam in infinitum. Quare, cùm & pyramidum (*f*) superficies in coni superficiem, & polygona in circulum (*g*) OPL tandem desinant, etiam coni (*h*) superficies & circulus OPL erunt æqualia. Quod erat demonstr.

(a) Per def. 10. l. 5.
(b) Per 4. hujus.
(c) Per 9. hujus.
(d) Colligitur ex p. 1. l. 12.
(e) Per 9. l. 5.
(f) Per 10. hujus.
(g) Per 3. hujus.
(h) Per 1. hujus.

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus superficiei conicæ æqualis.

Corollaria.

Fig. 10. & 11.

1. *Recti coni superficies æqualis est triangulo, sub coni latere (BC) & baseos peripheriâ (CG) comprehenso.*

Sit

Sit OL radius media proportionalis inter AC & BC. Quia peripheria CG est ad peripheriam P, ut (a) radius AG ad radium OL; hoc est per hyp. ut OL ad BC: erit triangulum sub primâ, nempe peripheriâ CG, & sub quartâ BC, (b) æquale triangulo sub secundâ, nempe peripheriâ P, & tertiâ OL; hoc est, (c) circulo OPL, hoc est, (d) superficiei conicæ BCD. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 7. hujus. (b) Per cor. 4. & 16. l. 6. (c) Per 5. hujus. (d) Per hanc 13.

Ex hoc corollario liquet superficies conicas triangulorum subire leges. Itaque

2. Superficies conicæ (BAF, QXR) æqualia latera (BA, QX) habentes, sunt inter se ut basium diametri (BF, QR.) Fig. 24. & 25. l. 12.

3. Et (CFT, AZR) quæ bases habent æquales, sunt inter se ut latera (CF, AZ.) Fig. 27. & 28. l. 12.

4. Et quæ similes sunt (BAF, QRZ,) duplicatam habent rationem ejus, quæ est inter basium diametros. Fig. 24. & 25. l. 12.

5. Et quælibet, rationem inter se habent compositam ex rationibus laterum (BA, QZ) & diametrorum BF, QR) quæ sunt in basibus. Fig. ead.

6. Et quæ æquales sunt, reciprocant latera & basium diametros; & quæ reciprocant, sunt æquales.

Quæ omnia demonstrantur ex coroll. 1. ut supra corollaria de cylindricâ superficie deduximus ex corollario isthic primo.

7. Metiemur denique conicam superficiem, si latus FC per baseos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut si latus sit pedum 5, peripheria baseos pedum 20. duc 5. per 10. proveniunt 50. pedes quadrati pro conicâ superficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll. Fig. 29. l. 12.

PROPOSITIO XIV.

Coni recti superficies est ad basim, ut latus (BC) ad basis radium (AC.) Fig. 10. & 11. Archim.

Inter latus BC & basis radium AC, sit media proportionalis OL. Ergo ratio BC ad AC est duplicata (e) rationis OL ad AC. Jam circulus radii OL (f) est æqualis superficiei conicæ CBD. Sed hujus ratio ad coni basim ACG est duplicata (g) rationis OL ad AC; ac proinde eadem cum ratione BC ad AC. Ergo etiam ratio superficiei conicæ CBD est ad basim ACG, ut BC ad AC. Quod erat demonstrandum.

(e) Per def. 10. l. 5. (f) Per 13. hujus. (g) Per 2. l. 12.

Corollaria.

Fig. 30. *Superficies coni recti a triangulo æquilatero circa perpendicularem (KA) circumacto geniti, baseos (QT) dupla est.*

Est enim KB latus æquale BD, adeoque duplum semissis AB, quæ baseos radius est.

Fig. 27. 2. *Superficies coni a rectangulo triangulo æquicruri (EBD) producta, est ad basim, ut in quadrato diameter ad latus.*

(a) Per n. 1. schol. p. 26. l. 1. (b) Per cor. 11. p. 32. l. 1. (c) Per 6. l. 1. (d) Per n. 2. schol. p. 55. l. 1.

Ducta enim perpendiculari BA, (*a*) angulus rectus B bisecatur, adeoque ABD semirectus est. Est autem & ADB (*b*) semirectus. Ergo AD, BA (*c*) æquales sunt; ac proinde BD est diameter quadrati AK, latus verò AD. Est verò eadem AD semidiameter baseos PT, cùm perpendicularis AB secet (*d*) bifariam ED. Ex quibus & hac 14. patet corollarium.

Fig. 27. 3. *Superficies cylindri recti (GK) est ad superficiem coni recti (GBN,) ut cylindri latus ad dimidium latus coni.*

(e) Per 14. hujus. (f) Per 12. hujus.

Nam superficies coni GBN est ad basim MI; ut latus BN ad (*e*) semidiametrum basis QN; hoc est, ut dimidium lateris BN ad quartam partem diametri GN. Est autem basis MI ad superficiem cylindri GK, ut (*f*) quarta pars diametri ad NK cylindri latus. Ex æquo igitur superficies conica GBN est ad superficiem cylindricam GK, ut dimidium latus coni ad cylindri latus NK. Quod erat demonstrandum.

Lemma ad sequen.

Fig. 23. In triangulo NPV ducta sit QD parallela ad NV. Dico rectangulum sub PN & NV, æquari rectangulo sub PQ, QD, unà cum rectangulo sub NQ & duabus simul sumptis NV, QD.

Duc

Ducto lateri NP perpendicularem NA æqualem NV, completoque NO rectangulo, ducatur diameter PA. Tum ex Q parallela QE ad NA secet PA in B. Per B ducatur CF parallela ad NP. Quoniam AN est par NV, [& quoniam (a) AN : QB (:: NP : QP) :: NV : QD,] patet etiam (b) QB esse parem QD. Igitur rectangulum ON est rectang. PNV & FQ est PQD. Restat ut probemus rectangula OB, EC, BN æquari rectangulo sub NQ & duabus NA, QB; hoc est, sub NQ & duabus NV, QD. Id verò est manifestum: rectangulum enim sub NQ & NA, QB, æquatur (c) his tribus rectangulis; sub NQ & CA, (hoc est, spatio EC,) sub NQ & NC, (hoc est, spatio BN,) sub NQ & QB, hoc est rursum, spatio BN, ac proinde spatio OB, quod ipsi BN (d) æquale est. Liquet ergo propositum.

(a) Per cor. 1. p. 4. l. 6.
(b) Per 11. & 9 cum schol. p. 7. l. 5.
(c) Per 1. l. 2.
(d) Per 43. l. 1.

PROPOSITIO XV.

Si conus rectus sectus sit plano QSR basi NZO parallelo; Dico circulum GHM, cujus radius GH est medius proportionalis inter partem lateris NQ, & circulorum QSR, NZO radios QD, NV simul sumptos, æqualem esse superficiei conicæ inter parallelos circulos QSR, NZO interceptæ.

Fig. 14. & 15.

Inter PN & NV media sit GF. Item inter PQ & QD sit media GK; describanturque circuli GFL, GKT. Erit hic (e) æqualis superficiei conicæ QPR, ille superficiei NPO. Rectangulum PNV æquatur (f) rectangulo PQD, unà cum rectangulo sub NQ, & NV, QD simul sumptis. Sed quia (g) GF media est proportionalis inter PN, NV, rectang. PNV est æquale (h) quadrato GF: Et quia GK est (i) media inter PQ, QD, rectang. (k) PQD æquatur quadrato GK: Et quia GH media (l) est inter QN, & QD, NV simul sumptas, rectangulum sub QN, & QD, NV simul sumptis, æquale est (m) quadrato GH. Ergo quad. GF par quoque est quadratis GH, GK. Ergo, cùm circuli sint inter se ut (n) quadrata radiorum, erit quoque circulus GLF æqualis duobus circulis, GKT & GHM. Atqui circulus GLF est æqualis (o) superficiei conicæ NPO. Ergo etiam superficies conica NPO æquatur duobus circulis GKT & GHM. Atqui superficiei NPO pars una QPR (p) æqualis est circulo GKT. Ergo reliqua, inter parallelos circulos

(e) Per 13. hujus.
(f) Per lem.
(g) Per constr.
(h) Per 17. l. 6.
(i) Per constr.
(k) Per 17. l. 6.
(l) Per hyp.
(m) Per 17. l. 6.
(n) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(o) Per 13. hujus.
(p) Per eand.

ZZ, SS comprehensa, æquatur circulo GHM. Quod erat demonstrandum.

[Corol. *Hinc ex datis circulorum parallelorum radiis NV, QD, & superficiei conicæ inter circulos interceptæ latere NQ, habetur superficiei illius dimensio; si radiorum summa NV + QD per latus NQ multiplicetur, & facti radix quadratica extrahatur. Erit enim ut 113 ad 355, ita radix ejus ad terminum quartum. Quo termino in radicem illam ducto, exoritur superficies conica quæsita. Patet ex 17. l. 6. & schol. p. 6. hujus, cum p. 15. l. 15.*]

Lemma ad sequen.

Fig. 16. Rectæ (BH, CG) quæ in circulo æquales arcus (BC, HG) intercipiunt, sunt parallelæ.

Ducatur enim CH. Quoniam arcus BC, HG per hyp. sunt æquales, etiam (a) anguli BHC, GCH alterni æquales erunt: Ergo (b) BH & CG sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 29. l. 3. (b) Per 28. l. 1.

[Scholium. *Hinc oritur methodus facillima ducendi per punctum datum B, rectæ datæ CG parallelam BH, uti supra ad prop. 31. l. 1. notatum est.*]

PROPOSITIO XVI.

Fig. 16. *Inscribatur circulo figura regularis, parilatera & æquilatera,* [cujus latera quaternarius metiatur;] *ducaturque EB ab extremitate diametri ad B terminum lateris diametro proximi; angulos verò æqualiter distantes ab A jungant rectæ BH, CG, DF:*

Dico rectangulum quod diametro AE, & subtensâ EB continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inscriptæ (AB, vel BC, &c.) & ex omnibus jungentibus BH, CG, DF simul sumptis.

(c) Per 26. l. 3. (d) Per lem. præc. (e) Per 27. & 15. cum cor. 9. p. 32. l. 1. (f) Per 4. l. 6.

Duc CH, DG. Quoniam BH, CG, DF intercipiunt arcus (c) æquales, BC, HG; CD, GE; erunt (d) parallelæ. Pari argumento parallelæ sunt BA, CH, DG, EF. Omnia igitur triangula (e) BAK, KHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula sunt. Ergo (f) ut BK ad KA, sic HK ad KL; & ut

& ut HK ad KL, sic CM ad ML; & ut CM ad ML, sic GM
ad MN; & ut GM ad MN, sic DO ad ON; & ut DO ad
ON, sic FO ad OE. Ergo (*a*) ut una antecedentium BK ad (a) Per 12. l. 5.
unam consequentium KA, sic omnes antecedentes BK, KH,
CM, MG, DO, OF, (hoc est, omnes jungentes BH, CG,
DF) sunt ad omnes consequentes AK, KL, LM, MN, NO, OE;
hoc est, ad diametrum AE. Sed ut BK ad (*b*) AK, sic EB (b) Per cor. 3 p. 8. l. 6.
est ad BA. Ergo ut omnes simul BH, CG, DF ad AE, sic
EB est ad BA. Ergo (*c*) rectangulum sub omnibus jungenti- (c) Per 16. l. 6.
bus BH, CG, DF & sub BA, æquatur rectangulo sub AE
& EB. Quod erat demonstrandum.

[Cor. 1. *Omnes jungentes BH, CG, DF, a diametro AE
bifariam & perpendiculariter secantur. Nam in triangulis BAK,
HAK, propter latera BA, AK lateribus HA, AK aequalia, &
angulos ad A* (d) *aequales, erit* (e) *BK = KH, & anguli ad* (d) Per 29. l. 3.
K aequales, & proinde (f) *recti. Eodem modo ad jungentem*
quamvis aliam CG, ductis AC, AG, ostendetur esse CM = (e) Per 4. l. 1.
MG, & angulos ad M rectos.

Cor. 2. *Si jungens CG sit diameter circuli; angulus CGH a* (f) Per def. 14. l. 1.
jungente & latere proximo comprehensus, acutus erit. Ducta (g) Per 31. l 3.
enim CH, angulus CHG in semicirculo rectus (g) *est, & pro-*
inde angulus HGC (h) *acutus.* (h) Per cor. 5. p. 32. l. 1.

*Si verò recta jungens sit diametro minor, ut BH; angulus ABH
ad partem segmenti minoris, a latere figurae inscriptae AB, &
jungente BH comprehensus, etiam* (i) *acutus erit. Est enim an-* (i) Per 31. l. 3.
gulus super arcu AH in segmento majore ABEH.

Cor. 3. *Sit CAG aut semicirculus, aut segmentum semicir-
culo minus, a jungente CG terminatum: latera CB, GH, jun-
genti proxima, ad partem segmenti CAG, si ultra B, H, satis
producantur, concurrent, & concursu formabunt triangulum isos-
celes super basi CG, cujus vertex erit in aliquo diametri EA,
ultra A productae, puncto.*

Nam propter angulos BCG, CGH duobus rectis (k) *minores,* (k) Per cor. 2.
rectae CB, GH ultra B & H productae, (l) *concurrent. Et* (l) Per sch. p. 31. l. 1.
propter arcus BAHG, CBAH aequales, iidem anguli BCG,
CGH erunt (m) *aequales; & proinde latera CB, GH concursu* (m) Per 29. l. 3.
suo formabunt (n) *triangulum isosceles super basi CG. Et quo-* (n) Per 6. l. 1.
niam basis a recta AM bifariam & perpendiculariter (o) (o) Per cor. 1.
secatur; ipsa MA producta, per trianguli verticem (p) *trans-* (p) Per n. 4. schol. p. 26. l. 1.
ibit.]

PROPOSITIO XVII.

Fig. 17. *Segmento circuli DAF, cujus basis DF perpendicularis sit diametro AOE, inscribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturque ut in præcedenti recta EB:*

Dico rectangulum sub EB & parte diametri AO, quæ segmenti axis est, comprehensum, æquari rectangulo sub latere uno figuræ inscriptæ, & omnibus jungentibus BH, CG, unà cum DO dimidio basis DF simul sumptis comprehenso.

Demonstratio eadem quæ præcedentis.

[*Est enim AB : BE :: AK : KB :: LK : KH :: LM : MC :: NM : MG :: NO : OD. Ergo AB : BE :: AK + KL + LM + MN + NO : BK + KH + CM + MG + DO; hoc est, AB : BE :: AO : BH + CG + DO. Ergo EB × AO = AB × BH + CG + DO.*

Fig. 20. Scholium. *Si segmento DAF ejusmodi figuram æquilateram & parilateram DHAGF inscribi contigerit, ut latera duo opposita DH, FG sint axi AO & sibi invicem parallela; manifestum est illa circa eundem axem AO (secundùm lemmata subsequentia) circumacta, superficiem cylindricam (non conicam) generatura. Et quamvis eo etiam in casu valeret hæc propositio, & (ex p. 11. hujus cum p. 15. collata) ad prop. 19. demonstrandam æque accommodari posset; ut tamen eadem ubique conservetur demonstrandi ratio ac forma, & quod in prop. 18, 20, & 22. de superficiebus conicis asseritur, idem de solis conicis (& non de conicis cum cylindrica) affirmari possit in prop. 19, 21, & 23; præstiterit forte, quandocunque latera opposita DH, FG axi AO parallela sunt, arcus omnes DH, HA; &c. bisecando, figuram duplo plurium laterum (ut DCHBA &c.) eidem segmento inscribere, quo latera omnia figuræ, segmento DAF inscriptæ, (cùm ad axem AO inclinentur,) ex circumvolutione segmenti ac figuræ inscriptæ circa eundem axem, superficies conicas generare valeant.*

Lemma 1. *ad sequen.*

Fig. 16. INscripta sit sphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quaternarius metiatur, circa axem AE consistens: Quo manente, circulus cum figurâ circumagatur:

Dico

Dico sphæræ inscriptum iri corpus conicis rectis superficiebus contentum.

Quod BA, HA, item DE, FE describant integras conorum rectorum superficies, manifestum (*a*) est. Deinde quia lineæ CB, GH, & GF, CD concurrunt (*b*) productæ in eodem utrimque puncto diametri AE similiter protractæ, quæ jungentes secat normaliter [*& bifariam*]: etiam liquet has describere partes superficierum rectarum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quorum peripherias in sphæricâ superficie describunt vertices angulorum B, C, D.

(a) *Vide def.* 2. *l.* 12.
(b) *Per cor.* 3. *p.* 16. *huj.*

Lemma 2.

Segmenti sphæræ, cujus axis AO, sectio maxima esto DAF. Huic inscripta sit figura æquilatera [*& parilatera*] demptâ basi, [*ita tamen*, (*c*) *ut nullum figuræ inscriptæ latus sit axi AO parallelum*,] quæ [*cum segmento*] circa axem AO in orbem convertatur:

Dico segmento sphærico inscriptum iri corpus conicis superficiebus contentum.

Probatur ut lemma præced.

Fig. 17.
(c) *Videsis post pr.* 17. *hujus.*

PROPOSITIO XVIII.

Ponantur eadem quæ in primo lemmate; & ducatur recta EB, ab extremitate diametri ad terminum lateris diametro proximi:

Dico omnibus superficiebus conicis sphæræ inscriptis æqualem esse circulum, cujus radius (I) potest rectangulum AEB, comprehensum videlicet, sub diametro AE, & subtensâ EB; [nimirum ut sit Iq = AE + EB.]

Fig. 16.

Hoc est, cujus radius (I) est medius proportionalis inter AE & EB.

Quoniam rectæ BH, CG, DF æquantur rectis (*d*) BK, CM, DO bis sumptis, erit (*e*) rectangulum sub latere uno figuræ inscriptæ maximo circulo, (videlicet sub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & sub omnibus simul jungentibus BH, CG, DF, æquale rectangulo sub AB & BK, sub BC & compositâ ex BK & CM, sub CD & compositâ ex CM & DO, sub DE & DO; sic enim rectæ BK, CM, DO singulæ fuerunt

(d) *Per cor.* 1. *p.* 16 *huj.*
(e) *Per* 1. *l.* 2.

(a) Per 16. hujus. (b) Per hyp. erunt bis acceptæ. Atqui rectangulum sub AB & omnibus jungentibus BH, CG, DF simul sumptis æquatur (a) rectangulo AEB, hoc est (b) quadrato I. Ergo quadratum I æquale est rectangulis sub AB & BK, sub BC & composita ex BK, CM, sub CD & composita ex CM, DO, sub DE & DO. Sint jam inter AB & BK, media proportionalis P; inter BC & compositam ex BK, CM, media Q; inter CD & compositam ex CM, DO, media R; inter DE & DO media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia (c) rectangulis supradictis. Quare cùm quadratum I. jam ostenderim iisdem æquari rectangulis; etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cùm igitur circuli sint inter se (d) ut quadrata radiorum; etiam circulus radio I descriptus, omnibus simul circulis quorum radii P, Q, R, S, æqualis (e) erit. Atqui circuli radiorum P & S, æquantur (f) superficiebus conicis quas produxerunt latera AB, ED, siquidem P est media proportionalis inter AB coni latus, & BK radium baseos; Si verò media est inter ED & DO: & circulus radii Q est æqualis segmento (g) superficiei conicæ quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG, BH, quia Q media est inter BC, & compositam ex BK, CM: & ob eandem causam circulus radii R æquatur segmento superficiei conicæ inter parallelos circulos diametrorum CG, DF interceptæ. Ergo circulus radio I descriptus, æquatur omnibus simul conicis superficiebus sphæræ inscriptis. Quod erat demonstrandum.

(c) Per 17. l. 6.

(d) Per cor. 2. p. 2. l. 12.

(e) Patet ex cor. 2. p. 2. l. 12. & p. 24. l. 5.

(f) Per 13. hujus.

(g) Per 15. hujus.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 17. *Ponantur eadem quæ in 2. lemmate, & ducatur recta EB ab extremitate diametri AE ad terminum lateris AB diametro proximi:*

Dico omnibus superficiebus conicis segmento sphærico DAF inscriptis æqualem esse circulum, cujus radius est medius proportionalis inter EB & segmenti axem AO.

Demonstratio plane eadem quæ præcedentis: sed pro P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Superficies conicæ sphæra inscriptæ, in sphæræ superficiem desinunt. Fig. 18.

Data sit superficies quantumvis parva X. Manifestum est intra sphæricam superficiem ACEG dari aliam posse concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quàm sit X. Amburum plano sectarum per centrum, maximi circuli sint ACEG, DPLM. Ducatur diameter ADE, & in D tangat NQ. Si arcus AE bisecetur in C, & residuum bisecetur rursus, [*sed in fig. 18. arcus quadrantalis AC trisecatur, quod etiam fieri posse patet ex cor. 3. p. 15. l. 4.*] & sic deinceps, relinquetur (*a*) tandem arcus AB minor arcu AN. (a) *Patet ex lem. 2. schol. post 11. l. 6.* Huic si subtendatur recta AB, manifestum est eam non pertingere ad peripheriam PDML, esseque latus figuræ æquilateræ & parilateræ circulo CAGE inscriptæ, [*cujus latera quaternarius metiatur, &*] cujus nullum latus pertingat ad peripheriam PDML. Quare si circa diametrum AE in orbem agantur omnia, patet superficiei sphæricæ exteriori inscribendas esse conicas superficies, quæ includant superficiem sphæricam alteri concentricam, ac proinde illâ sint (*b*) majores. (b) *Per axio. 3. hujus.* Quoniam igitur sphærica superficies DPLM, deficit a superficie sphæricâ ACEG quantitate minori quàm sit data X; multo magis superficies conicæ ab eâdem sphæricâ ACEG, deficient quantitate minori quàm sit data X, ac proinde (*c*) in ACEG superficiem desinent. Quod erat demonstrandum. (c) *Per def. 6. l. 12.*

PROPOSITIO XXI.

Conicæ superficies segmento sphærico DAF inscriptæ, in ipsam segmenti sphæricam superficiem desinunt. Fig. 20.

Demonstrabitur eodem ferè ratiocinio quo præcedens.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 19. DEmonstratum est propos. 18. *circulum cujus radius est medius proportionalis inter diametrum AE, & rectam EB, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris AB diametro proximi, æqualem esse omnibus superficiebus conicis sphæræ inscriptis.*

(a) Vide def. 6. l. 12. *Dico hunc circulum desinere* (a) *tandem in circulum, cujus radius est AE sphæra diameter.*

Nam si plura semper ac plura in infinitum latera circulo maximo inscribantur, (quæ deinde circa AE in orbem acta conicas producant superficies,) patet latus AB fieri tandem quavis datâ rectâ minus, ac proinde subtensam EB ad diametrum AE accedere ad intervallum etiam quovis dato minus; unde fit, ut differentia ipsarum AE, BE etiam fiat quavis datâ minor. Ergo multò magis media proportionalis inter AE & BE, quæ semper major est quàm BE, differet ab AE tandem defectu minor quocunque dato. Ergo etiam circulus cujus semidiameter est media inter AE & BE, a circulo cujus radius est AE, tandem differet defectu minori quocunque dato; hoc est, in (*b*) ipsum desinet. Quod erat demonstrandum.

(b) Per def. 6. l. 12.

Hæc per se satis clara, non est necesse operosiùs demonstrare.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 20. DEmonstratum est propos. 19. *circulum cujus radius est medius proportionalis inter EB & AO segmenti axem, æqualem esse omnibus superficiebus conicis portioni sphæricæ DAF inscriptis.*

Dico hunc circulum desinere in circulum, cujus radius est recta AD, a segmenti vertice ducta ad peripheriam circuli DQFN, qui basis est segmenti.

Nam quia jam ex præced. demonst. liquet EB desinere tandem in AE, patebit quoque mediam proportionalem inter

ter EB & AO, desinere tandem in mediam proportionalem inter AE & AO; hoc (a) est, in ipsam AD. Manifestum est igitur & circulum cujus radius est medius proportionalis inter EB & AO etiam desinere in circulum radii AD. Quod erat demonstrandum. (a) *Per cor. 2. p. 8. l. 6.*

Lemma ad sequen.

SI diameter diametri dupla est, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propos. 2. l. 12. & defin. 10. lib. 5. [*vel ex cor. 3. p. 2. l. 12.*].

PROPOSITIO XXIV.

CUjuscunque sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli ejusdem sphæræ. *Fig. 19.*

Hoc nobilissimum Archimedis theorema ex jam præmissis expeditè demonstrabimus hunc in modum.

Circulo sphæræ maximo circa diametrum AE intelligatur inscripta esse figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur; quæ circa AE in orbem ducta, producat conicas superficies superficiei sphæricæ inscriptas, ducaturque EB. Demonstratum jam supra (*b*) est, omnes conicas superficies sphæræ inscriptas æquales esse circulo, cujus radius potest rectangulum AEB, hoc est, cujus radius est medius proportionalis inter AE & EB. Atque hoc semper eveniet, inscriptionibus in infinitum continuatis. Quare cùm inscriptæ conicæ superficies (*c*) tandem desinant in sphæricam superficiem, circulus verò cujus radius est medius inter AE & EB, desinat (*d*) in circulum cujus radius est AE; ipsa quoque sphærica superficies (*e*) æqualis erit circulo radii AE, hoc est, (*f*) quadruplo maximi circuli ACEG, Quod erat demonstrandum.

(b) *Per 18. hujus.* (c) *Per 20. hujus.* (d) *Per 22. hujus.* (e) *Per 2. hujus.* (f) *Per lem. præc.*

Viam, quâ in theoremate nobilissimo demonstrando hactenus usi sumus, Archimedeâ multo breviorem & clariorem esse sciet, qui Archimædem legerit.

Corollaria.

1. EX hoc præclaro atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras consecutus est, exhibetur circulus æqualis superficiei sphæricæ, is nimirum cujus semidiameter est sphæræ diameter, sive cujus diameter dupla est diametri sphæræ.

[Cor. 2.

[Cor. 2. Hinc etiam, & e p. 2. l. 12. cum p. 35. l. 5. sphaerarum superficies sunt inter se in ratione duplicatâ radiorum qui in sphaeris sunt.]

Scholium.

Expedita jam erit dimensio superficiei sphaericae, principis inter omnes curvas. Duplex est modus.

1. Mensuretur circulus sphaerae maximus, (ut traditur in Scholio post P. 6. hujus,) & multiplicetur per 4. Ut si maximus orbis terrae circulus inventus sit continere quadrata milliaria unius horae sive Belgica 5,940000. hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica 23, 760000. quae in superficie orbis terrae continentur.

2. Diameter sphaerae multiplicatae per circumferentiam maximi circuli, exhibet sphaerae superficiem. Ut si terrae diametro dentur milliaria unius horae 2750$\frac{4}{11}$, atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640; hi duo numeri, omissâ fractione, multiplicati per invicem, dabunt rursum quadrata milliaria unius horae, 23, 760000. totam orbis terrae superficiem constituentia.

Demonstratio patet ex primo coroll. p. 5. hujus: rectangulum enim sub diametro sphaerae, & maximi circuli circumferentiâ, per dictum corol. est quadruplum maximi circuli.

[De numeris in hoc scholio memoratis vide quae monuimus in schol. post p. 6. hujus.]

PROPOSITIO XXV.

Fig. 20. *Cujuscunque portionis sphaericae (DAF) superficies aequalis est circulo, cujus radius est recta (AD) a vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DOFN) qui portionis est basis.*

[1. *Pars.*] Portionis maximae sectioni inscripta cogitetur circa axem AO, figura aequilatera & parilatera basi demptâ, [*cujus nullum latus sit axi* (a) *parallelum*;] quae circa AO in orbem acta, portioni inscribet conicas superficies. Ducatur quoque recta EB, ut (b) supra. Omnes conicae superficies segmento sphaerico jam inscriptae aequantur (c) circulo, cujus radius est medius proportionalis inter EB, & segmenti axem AO. Atque hoc, multiplicatis in infinitum inscriptionibus, semper continget. Quare, cùm & conicae superficies segmento inscriptae, desinant (d) in sphaericam segmenti superficiem

(a) Vide sch. p. 17. hujus.
(b) In 18. & 19. hujus.
(c) Per 19. hujus.
(d) Per 12. hujus.

perficiem, & circulus cujus radius inter EB & AO medius est, desinat (*a*) in circulum radii AD; etiam (*b*) sphæricæ portionis superficies DAF, circulo radii AD æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per 29. hujus.*
(b) *Per 24. hujus.*

[2. *Pars. Sit ED recta a vertice E portionis sphæricæ minoris DEF ad circumferentiam baseos ducta, & jungatur AD. Propter* (c) *angulum ADE rectum*, (d) *erit circulus radio AE æqualis summæ circulorum radiis AD, ED respective descriptorum. Sed circulus radio AE* (e) *æquantur toti superficiei sphæricæ, & circulus radio AD* (f) *æquatur portionis majoris DAF superficiei. Ergo circulus radio ED, portionis minoris DEF superficiei æquabitur.*]

(c) Per 31. *l.* 3.
(d) *Per cor. 8.p.2. l. 12.*
(e) *Patet ex dem. p. 24. hujus.*
(f) *Per 1. partem hujus prop.*

Hoc alterum est ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, vià multò, quàm ipse, breviori ac clariori jam demonstravimus.

[Cor. *Hinc datis sphæræ diametro AE, & portionis sphæricæ DAF axe AO, (vel datis axe AO, & OD basis radio,) habetur AD radius circuli, qui portionis sphæricæ superficiei æquatur, atque inde dabitur superficiei portionis sphæricæ dimensio. Cùm enim sint* (g) *AE, AD AO* $\div$, *erit* (h) $AD = \sqrt{AE \times AO}$; (*vel propter triangulum rectangulum AOD, erit* (i) *etiam* $AD = \sqrt{AOq + DOq}$.) *Si igitur fiat 113 ad 355, ut AD ad terminum quartum; hic terminus per AD multiplicatus, dabit aream, portionis sphæricæ superficiei æqualem. Patet ex hac, & schol. p. 6. hujus, cum p. 15. l. 5.*]

(g) *Per cor. 2.p. 8. l. 6.*
(h) *Patet ex 17. l. 6.*
(i) *Patet ex 47. l. 1.*

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti sphæræ circumscripti (HPSV) superficies, æqualis est superficiei sphæræ. *Fig. 224.*

Et si cylindrus ac sphæra secentur planis ad axem (BG) rectis, erunt singula superficiei cylindricæ segmenta, segmentis singulis superficiei sphæricæ æqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus HP æquale est (*k*) PS diametro basis; erit cylindrica superficies HS, quadrupla (*l*) baseos, hoc est, maximi circuli sphæræ cylindro inscriptæ; cujus cùm etiam (*m*) quadrupla sit sphæræ superficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonstrandum.

(k) *Per hyp.*
(l) *Per cor. p. 12. hujus.*
(m) *Per 24. hujus.*

2. Pars. Ducantur rectæ BO, GO. Quoniam angulus BOG (*n*) rectus est in semicirculo, ab eoque cadit OC perpendicularis ad BG, erit (*o*) BO media proportionalis inter GB &

(n) *Per 31. l. 3.*
(o) *Per cor. 2. p. 8. l. 6.*

GB & BC, hoc est, inter IT & HI. Ergo circulus radii BO (a) æqualis est superficiei cylindricæ HT. Sed idem circulus æqualis (b) est etiam segmento superficiei sphæricæ OBK. Æquales igitur sunt superficies, cylindrica HT, & sphærica OBK.

(a) Per 11. hujus. (b) Per præc.

Deinde, quia eodem modo ostenditur cylindrica HX æquari sphæricæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX, reliquæ sphæricæ QOKR, inter duos parallelos circulos interceptæ, æqualis erit.

Ex his patet de segmentis omnibus.

[Coroll. *Hinc superficies cylindri sphæra circumscripti, est dupla basium.*]

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 21. *Segmenta superficiei sphæricæ parallelis circulis divisa, eam inter se proportionem habent, quam segmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad circulos parallelos recta.*

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim sphæricæ superficiei segmenta OBK, QOKR, MQRN, &c. (c) æqualia cylindricis, HT, IX, LN, &c. Atqui hæc eandem inter se rationem habent, (d) quam axeos segmenta BC, CD, DA, &c. Ergo & illa. Quod erat demonstrandum.

(c) Per præc. (d) Per 13. & 12.

Scholium.

Ex hac innotescit proportio zonarum & climatum inter se. Sunt enim ad invicem ut segmenta axis, quæ nota fiunt ex tabulâ sinuum.

Ex eâdem habetur dimensio segmentorum superficiei sphæricæ. Nam quia & tota sphæræ superficies nota est ex scholio prop. 24. & segmentorum proportio, utpote eadem quæ partium axis, etiam datur; liquet segmenta singula innotescere.

Cæterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia quæ sequuntur, omnia singularia atque admiranda sunt, planeque digna, ad quæ intelligenda, Geometriæ studiosi ardenti studio incumbant.

Lemma ad sequent.

Fig. 21. Si sphæram tangat planum (QN in O,) recta (AO) ex centro ad contactum ducta, est plano tangenti perpendicularis.

Secentur

Secentur planum tangens QN & sphæra, per [*centrum A &*] tactum O, duobus planis [*quorum sectio communis erit AO, &*] quæ in sphærâ quidem producant circulos OG, OD, in plano autem QN rectas CO, IO, quæ circulos contingant (*a*) in O. Igitur per 18. l. 3. AO perpendicularis est ad utrumque IO, CO, ac proinde per 4. l. 11. recta plano QN. Quod erat demonstrandum. (a) *Per def.* 2. *l.* 3.

[Coroll. *Hinc colligimus globum perfectè politum, in plano horizontali perfectè polito QN Tellurem in O tangente positum, quiescere non posse, nisi in puncto contactûs O collocetur. Ex. gr. Globus ad I positus, ob gravitatem suam & plani declivitatem descendet versus O. Nam ductâ AI, in triangulo rectangulo AOI, latus AI angulo recto oppositum, majus est* (b) *quàm AO, adeoque globus ad I magis distat a centro quàm ad O, & proinde globus ad I quiescere nequit, sed versus O descendet: Neque aliter fluidorum descensum, atque in superficiem sphæricam conformationem probamus.* (b) *Per* 19. *& cor.* 5. *p.* 32. *l.* 1.

Lemma ad consect. 3. in schol. seq. *Sint O, P, Q trium circulorum peripheriæ, & R, S, T eorum radii respectivè; sitque R—S = T: Erit O—P = Q.* (c) *Per* 7. *hujus.*

Nam O : *P* :: (c) *R* : *S*; & *P* : *Q* :: *S* : *T*. (d) *Ergo* O — *P* : *Q* :: *R* — *S* : *T*. *Sed R* — *S* (e) = *T*. *Ergo* O — *P* (f) = *Q*. (d) *Per cor.* 2. *p* 22. *l.* 5. (e) *Per hyp.* (f) *Per def.* 5. *l.* 5.

Scholium. *Cùm plana per centrum terræ transeuntia, in quibus omnia ad horizontem recta consistunt, circulos magnos & æquales in terræ superficie generent, lauta nonnulla consectaria ex authore nostro in Astronomiâ suâ* (g) *apponemus, quæ ex circulorum naturâ facillimè possunt intelligi.* (g) *Lib.* 1. *cap.* 2. *num* 6.

1. *Si quâ sui parte superficies terræ esset perfectè plana, non magis possent homines in eâ recti consistere quàm in clivo montis: excepto nimirum contactûs puncto.* *Fig.* 27. *l.* 3.

2. *Caput viatoris plus itineris conficit quàm pedes: item qui eques eandem viam proficiscitur, plus quàm qui pedes. Item in navi, pars suprema mali plus viæ percurrit quàm inferior.*

3. *Si quis totum orbis circumductum peragrasset, iter ejus a capite confectum superaret iter confectum a pedibus peripheriarum differentiâ, quæ* (h) *æqualis est circumductui circuli cujus radius est ipsa hominis statura.* (h) *Per lem ad hoc cons.* 3.

4. *Vas aquâ plenum si ad perpendiculum efferatur in altum, continuò aliquid ex eo effluet, & tamen manebit plenum: quia scilicet, superficies aquæ in partem majoris sphæræ continuò comprimetur. Imò si vas in altum sine termino efferatur, super-*

 ficies

ficies aquæ in eo contentæ ascendet sine termino *versus planum per margines ductum ; neque tamen unquam ad planum istud perveniet.*

5. *Si vas aquâ plenum rectà deorsum feratur, quamvis nihil effluat, tamen desinet esse plenum : quia scilicet aquæ superficies in partem minoris sphæræ continuò tumescet. Ex quo sequitur,*

6. *Unum idemque vas plus aquæ continere in pede montis quàm vertice ; plus etiam in cellâ subterraneâ quàm in cubiculo. Quibus adde,*

Fig. 27. l. 3. 7. *Duos funiculos, de quibus duo globuli ferrei in perpendiculo penduli sint, [& proinde ædificiorum muros juxta perpendicula erectos] non esse inter se parallelos: sed partes radiorum terræ, in centro coeuntium.]*

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 23. 25. & 24. *OMnis sphæra æqualis est cono (ZO) cujus altitudo (KO) par est radio sphæræ, basis verò (Z) superficiei sphæræ æqualis.*

Intelligatur sphæræ circumscriptum esse corpus aliquod polyedrum, cujus solidi anguli novis planis sphæram tangentibus abscindantur. Quo facto, orietur aliud corpus polyedrum sphæram continens, minus priore, & pluribus constans angulis, & superficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangentibus compositam. Si polyedri hujus solidi anguli novis planis tangentibus iterum abscindantur, & tertii polyedri inde nati similiter ; atque ita in infinitum: fiet tandem ut & polyedrum excedat sphæram solido minori quocunque dato, & superficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi, sine termino & minora, & plura erunt) composita, sphæricam superficiem excedat quoque, plano minori, dato quocunque. Quod utrumque, licèt demonstrari posset, tamen quia per se satis clarum, postuletur studio brevitatis. His ita constitutis, quæsitum ita concludemus.

Polyedrum jam expositum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis est centrum sphæræ, bases verò sunt plana tangentia, quæ polyedri superficiem constituunt. Et quia rectæ ex centro A ad singulorum planorum contactus ductæ, ad plana (a) singula perpendiculares sunt; erunt omnium pyramidum, quibus constat polyedrum, æqualis altitudo, ipse nimirum AB radius sphæræ. Si jam igitur planum

(a) Per lem. præc.

hum X ponatur æquale superficiei ipsius polyedri, superque eo recta sit pyramis ad altitudinem MN etiam æqualem sphæræ radio AB, manifestum est (a) omnes pyramides supra dictas, hoc est, totum polyedrum, æquari pyramidi XN. Ad eundem modum reliqua omnia polyedra sphæram includentia, quæ ex truncatione perpetuâ solidorum angulorum, alia atque alia nascentur in infinitum, semper æqualia erunt pyramidibus (per XN repræsentatis) quarum altitudines (MN) sunt radius sphæræ, bases verò (X) æquales superficiebus polyedrorum, sphæram ambientibus. Quare cùm tandem, & polyedra (ut dixi supra) in sphæram; & pyramides XN (ut mox ostendam) in conum ZO desinant; etiam (b) sphæra cono æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

(a) *Patet ex dem. p. 6. l. 12.*

(b) *Per 1. hujus.*

Quod autem pyramides XN (c) desinant in conum, sic ostendo. Polyedrorum superficies desinunt in sphæræ superficiem, ut postulatum supra. Atqui bases X pyramidum XN, semper æquales ponuntur superficiebus polyedrorum; & Z basis coni ZO per hyp. æqualis est superficiei sphæræ: ergo etiam bases X desinent in basim Z; ac proinde, cùm pyramides XN sint ad conum ex hyp. æquè altum, ut (d) basis X ad basim Z, etiam pyramides in conum desinent.

(c) *Vide def. 6. l. 12.*

(d) *Per cor. p. 11. l. 12.*

Demonstratio jam allata hujus propositionis & sequentis, penitus diversa est ab eâ, quâ usus est Archimedes; quæ quidem valde subtilis & ingeniosa est, sed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifesta, & propositiones undecim, præter alias non paucas, a quibus illæ dependent. Ipsum verò theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: Omnis sphæra quadrupla est coni basim habentis æqualem maximo circulo sphæræ, altitudinem verò radium.

[Coroll. *Hinc hemisphærium duplum est coni basim habentis æqualem maximo sphæræ circulo, altitudinem verò ejusdem sphæræ radio æqualem.*

Tacquetus hoc corollarium in prop. 30. exhibet; sed in ejus demonstratione assumit id quod ipsâ propositione vix clarius esse videtur, nempe, hemisphærium æquale esse cono, habenti pro altitudine radium, & pro basi circulum superficiei hemisphærii æqualem. *Quod quidem ex hac prop. 28. facile deducitur: verùm tamen & ipsa prop. 30. ex eâdem hac pr. 28. pari facilitate deduci poterat. Aut igitur oportet prop. 30. huc transferri, & in corollarium prædictum mutari, aut saltem, si propositio memorata locum suum teneat, paulò aliter demonstrari debet.*]

Scholium.

EX hoc prænobili theoremate, figuræ inter corporeas nobilissimæ elicitur dimensio. Nam si diametri sexta pars, sive tertia semidiametri, multiplicetur per sphæræ superficiem jam notam per scholium prop. 24. proveniet sphæræ soliditas.

Inventa sit sphæræ terrestris superficies continere quadrata unius horæ milliaria 23,760000. & semidiameter esto milliarium horariorum 1375. cujus tertia pars est $458\frac{1}{3}$. Multiplica 458. omissâ fractione, per 23,760000. provenient 10882,080000. cubica unius horæ milliaria pro soliditate orbis terræ. [*De hisce verò numeris, vide notata ad schol. p. 6. hujus.*]

(a) *Per hanc 28.* (b) *Per sch. p. 6. hujus.*

Cùm enim sphæra sit æqualis (*a*) cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis verò superficies sphæræ; coni autem soliditas (*b*) producatur ex parte tertiâ altitudinis, (hoc est, radii sphæræ) ductâ in basim, (hoc est, in sphæræ superficiem;) etiam sphæræ soliditas obtinebitur ex tertiâ parte radii ductâ in superficiem.

[*Datis autem diametro & circumferentiâ, habebitur sphæræ soliditas, si pars sexta circumferentiæ ducatur in diametri quadratum: vel aliter, si diviso diametri quadrato per 6, quotiens per circumferentiam multiplicetur. Idem enim his modis orietur factum; ac si diametri sexta pars in sphæræ superficiem duceretur.*]

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 26. *OMnis sector sphæræ, æqualis est cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis verò sectoris sphærica superficies.*

Esto primùm sector (AECG) hemisphærio minor. Intelligatur sectori circumscriptum esse polyedrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum instituatur ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæsitum. Id solum oportebit ostendere, ex quo discursus totus dependet, superficiem polyedri ex planis sphæricam superficiem ECG undequaque tangentibus compositam, esse majorem superficie ECG. Quod ita fiet. Cogitetur superficiei ECG apponi alia æqualis & similis, planis tangentibus eodem

eodem prorsus modo cincta quo prior. Erit jam tota (*a*) superficies ex planis composita, major totâ sphæricâ. Ergo etiam dimidia ex planis composita, dimidiâ sphæricâ ECG major erit. (a) *Patet ex ax.* 3. *hujus.*

Esto deinde sector (AEBG) major hemisphærio. Uterque sector simul sumptus, æqualis (*b*) est cono cujus altitudo est radius sphæræ, basis autem tota superficies; hoc est, (*c*) duobus conis, quorum altitudo eadem, bases verò pares superficiei sphæricæ segmentis ECG, EBG. Atqui sectorum unus AECG hemisphærio minor, per 1. partem æquatur cono cujus altitudo est radius, basis verò superficies ECG. Ergo alter AEBG æquatur cono reliquo, cujus altitudo est radius, basis verò superficies reliqua EBG. Quod erat demonstrandum. (b) *Per præc.* (c) *Patet ex* 11. *l.* 12. *&* 24. *l.* 5.

Corollarium.

CUM superficies ECG sit æqualis (*d*) circulo radii CG, & superficies EBG æqualis circulo radii BG; erunt sectores AECG, & AEBG æquales conis, quorum altitudo est radius sphæræ, bases verò circuli radiorum CG & BG. (d) *Per* 25. *hujus.*

Scholium.

EX his habetur dimensio & sectorum, & segmentorum sphæræ; sectorum quidem, si multiplicetur (*e*) tertia pars radii per sphæricam sectorum superficiem, jam notam ex scholio prop. 27. [*vel ex cor. p.* 25.] sive per circulum radii CG, vel BG: segmentorum verò, si mensuretur conus EAG, & a sectore, si minor est hemisphærio, auferatur; si major, eidem adjiciatur. *Fig.* 26. (e) *Patet ex schol. p.* 6. *hujus.*

Segmentum (MQRN) quod inter duos circulos sive parallelos sive non parallelos interjicitur, mensurabis, si segmenta QBR & MBN jam nota auferantur ab invicem. *Fig.* 21.

PROPOSITIO XXX.

HEmisphærium (EOBD) coni (EBD) eandem secum basim & altitudinem habentis, duplum est. *Fig.* 27.

Conus cujus basis est superficies hemisphærica EOBD, altitudo autem radius AB, est ad conum EBD, (*f*) ut basis ad (f) *Per* 11. *l.* 12.

ad basim, hoc est, ut superficies hemisphærica EOBD ad maximum circulum PT. Ergo cùm superficies hemisphærica EOBD dupla (a) sit maximi circuli, etiam conus pro basi habens superficiem EOBD, pro altitudine radium AB, duplus est coni EBD. Atqui hemisphærium æquatur (b) cono habenti pro altitudine radium, pro basi superficiem hemisphæricam EOBD. Ergo etiam hemisphærium coni EBD duplum est. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 24. hujus
(b) Sequitur ex 28. huj.

[Aliter. *Cùm coni æquè alti inter se (c) sint ut bases, erit conus cujus altitudo est radius sphæræ, & basis æqualis est superficiei sphæræ, ad conum ejusdem altitudinis, super circulo sphæræ maximo pro basi, ut (d) 4 ad 1. Et cùm conus prior sit sphæræ (e) æqualis; erit ergo sphæra ad conum posteriorem, ut 4 ad 1; ac proinde est hemisphærium ad conum posteriorem, ut 2 ad 1. Sed conus posterior eandem habet altitudinem & basim cum dicto hemisphærio.*

(c) Per 11. l. 12.
(d) Per 24. hujus
(e) Per 28. hujus.

Hemisphærium igitur duplum est coni eandem secum basim & altitudinem habentis.

Corol. *Conus EBD, hemisphærium EOBD ac cylindrus EK eandem basim & altitudinem habentia, sunt inter se ut 1. 2. 3. Nam per hanc prop. conus est ad hemisphærium ut 1. ad 2. Et per 10. l. 12. est idem conus ad cylindrum ut 1. ad 3.*]

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 28.

Sphæra sit divisa in duo segmenta ILBG, ISKG, plano IQGT, per centrum A non transeunte: diameter autem plano secanti recta, sit BOK.

Ut altitudo OB segmenti ILBG est ad radium sphæræ AB, ita OK altitudo segmenti ISKG fiat ad aliam KN.

Pari modo, ut OK altitudo segmenti ISKG est ad radium AK seu AB, ita altitudo OB segmenti alterius fiat ad aliam BD.

Dico 1. Coni ING & IDG quorum altitudines sunt ON, OD, basis verò communis IQGT, segmentis sphæricis sunt æquales.

2. Segmentorum eadem est proportio, quæ rectarum DO, NO.

3. Segmentum ISKG est ad maximum sibi inscriptum

scriptum conum IKG, ut NO ad KO; & segmentum ILBG est ad sibi inscriptum conum maximum IBG, ut DO ad BO.

Pars 1. Sphæra & coni secentur plano per diametrum BK. Producentur in sphærâ circulus maximus BLKG, in conis verò triangula BIG, IKG. Et quia BOK diameter (*a*) recta est circulo QT, erit angulus IOB (*b*) rectus. Angulus quoque BIK (*c*) in semicirculo rectus est. Quoniam igitur in triangulo BIK ab angulo recto ducta est IO perpendicularis in basim BK, erit BI ad IO, ut (*d*) BK ad KI. Ergo ratio duplicata BI ad IO æqualis est rationi duplicatæ BK ad KI; hoc est, (quia BK, KI, KO (*e*) sunt tres proportionales,) æqualis rationi BK ad KO.

Deinde quia est ut OK ad radium AB, ita (*f*) OB ad BD; erit quoque invertendo DB ad BO, ut AB ad OK: & permut. DB ad BA, ut BO ad OK: & compon. DA ad BA, ut BK ad OK. Quoniam igitur jam ostendi rationem BK ad OK duplicatam esse rationis BI ad IO, ac proinde æqualem (*g*) rationi circulorum radiis BI, IO descriptorum; erit quoque DA ad BA, ut circulus radii BI ad circulum radii IO. Igitur conus sub altitudine DA, & basi circulo radii IO, hoc est circulo QT, æqualis est (*h*) cono sub altitudine BA, & basi circulo radii BI, hoc est (*i*) sectori sphærico AIBG. Quare si tam sectori AIBG, quàm cono sub DA & circulo QT, addatur idem conus IAG, tota erunt æqualia; videlicet segmentum sphæricum ILBG æquabitur duobus conis, quorum unus est, qui fit sub basi QT & altitudine DA, alter IAG, sub eâdem basi QT, & altitudine OA. Sed hi duo coni (*k*) conficiunt conum IDG. Ergo segmentum ILBG cono IDG æquale erit. Quod erat demonstrandum.

Eodem discursu erit segmentum ISKG æquale cono ING, eo solùm mutato, ut conus IAG qui priùs addebatur, jam auferatur.

[*Quia enim est* (l) *KI: IO :: KB : BI*; (m) *erit KIq: IOq :: KBq: BIq* (n) *:: KB: BO. Sed per hypoth. est NK: (AL =) KA :: KO: OB. Et comp. NA: AK :: KB: BO ::* (o) *KIq: IOq ::* (p) *circ. rad. KI: circ. rad. IO = circ. QT. Ergo conus sub altitud. NA & basi QT,* (q) *æquatur cono sub altit. AK & circ. rad. KI, hoc est,* (r) *sectori sphær. AIKG. Sed conus sub alt. NA & basi QT,* (s) *æqualis est duobus conis simul sumptis, uni quidem sub altit. NO & basi QT, & alteri sub alt. OA & eâdem basi QT, hoc est, conis ING, IAG; Et sector. sph. AIKG æqualis est segm. sphær. ISKG & cono IAG simul sumptis. Auferatur*

(a) Per hyp.
(b) Per def. 3. l. 11.
(c) Per 31. l. 3.
(d) Per cor. 3. p. 8. l. 6.
(e) Per cor. 2. p. 8. l. 6.
(f) Per hyp.
(g) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(h) Per 15. l. 12.
(i) Per cor. p. 29. hujus.
(k) Patet ex 14. l. 12. & 24. l. 5.
(l) Per cor. 3. p. 8. l. 6.
(m) Per 34. l. 5. & sch. p. 20. l. 6.
(n) Per cor. 2. p. 8. l. 6. & def. 10. l. 5.
(o) Prius.
(p) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(q) Per 15. l. 12.
(r) Per cor. p. 29 hujus.
(s) Patet ex 14. l. 12. & 24. l. 5.

feratur utrinque conus IAG, & relinquetur con. ING = *segm. sphær. ISKG. Q. E. D.*]

Pars 2. Patet ex primâ. Nam coni IDG & ING sunt inter se (*a*) ut DO & NO. Ergo & segmenta ILBG, ISKG conis illis æqualia, sunt inter se, ut rectæ DO, NO.

(a) Per 14. l. 12.

Pars 3. Patet similiter ex primâ. Nam conus IDG est ad conum IBG, (*b*) ut DO ad BO. Ergo & segmentum ILBG, cono IDG æquale, est ad conum IBG, ut DO ad BO. [*Eodem modo ostendetur esse segmentum ISKG ad conum IKG, ut NO ad KO.*]

(b) Per eand.

Scholium.

EX primâ parte hujus theorematis, habetur alia, eaque facillima segmentorum sphæricorum dimensio; si nimirum coni IDG, ING mensurentur; quod fiet, si (*c*) tertiæ partes rectarum DO, NO ducantur in circulum QT.

(c) Vide sch. post 6. hujus.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 27.

CYlindrus rectus (GK,) sphæra, cui circumscribitur, & soliditate & superficie totâ sesquialter est.

Communis sphæræ ac cylindri axis esto BQ, conus verò maximus hemisphærio EOBD inscriptus sit EBD. Quia cylindrus EK, (semissis totius GK) triplus (*d*) est coni EBD; hemisphærium verò (*e*) ejusdem coni duplum, patet cylindrum EK esse ad hemisphærium, ut 3 ad 2. Ergo etiam totus cylindrus GK est ad totam sphæram QEBD, ut 3. ad 2. Quod erat primum.

(d) Per 10. l. 12.
(e) Per 30. hujus.

Deinde quia cylindri latus KN est æquale basis diametro GN, erit ejus superficies absque basibus (*f*) quadrupla baseos MI, ac proinde cum basibus, hoc est tota cylindri superficies erit sextupla baseos MI, quæ par est maximo sphæræ circulo. Atqui sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli. Ergo tota cylindri GK superficies est ad sphæræ superficiem, ut 6. ad 4. sive ut 3. ad 2. Quod erat alterum.

(f) Per cor. 1. 12. hujus.

Igitur cylindrus sphæræ sibi inscriptæ & soliditate & totâ superficie sesquialter est. Quod erat demonstrandum.

[Cor. 1. *Cylindrus rectus sphæræ circumscriptus, ipsa sphæra, & conus ejusdem cum cylindro basis & altitudinis, sunt inter se ut 3. 2. 1. Nam per hanc prop. cylindrus est ad sphæram ut 3. ad 2; & per 10. l. 12. est cylindrus ad conum ut 3. ad 1. Ergo, &c. Atque in eadem ratione sunt, superficies cylindri hemisphærio conscripti cum basi hemisphærium tangente, superficies hemisphærii, & basis utrique communis. Cum enim tam cylindrica superficies quam hemisphærica, sit (g) dupla baseos; erit*

(g) Per 26. hujus cum cor.

erit cylindrica cum basi ad basim alteram, ut 3. ad 1. Unde liquet propositum.

Cor. 2. *Hinc cylindrus GK demptâ sphærâ, (sive solidum cylindricum sphæro cavum, superficie totâ cylindri externè, & superficie sphæricâ concavâ internè terminatum,) æquatur cono inscripto GBN. Cùm enim cylindrus sit ad inscriptam sphæram ut 3 ad 2, erit ad solidum cylindricum sphæro-cavum ut 3 ad 1, hoc* (a) *est, ut idem cylindrus ad conum GBN; ac proinde solidum illud cono GBN æquale erit.* (a) *Per 10. l. 12.*

Cor. 3. *Solidum cylindricum hemisphæro-cavum, (hoc est, cylindrus EK dempto hemisphærio inscripto EOBD) æquale est cono inscripto EBD. Etenim tam solidum, quàm conus, pars est* (b) *tertia cylindri EK.* (b) *Patet eodem modo quo cor. 2.*

Fig. 21.

Cor. 4. *Si conus HAV, cylindro NH inscriptus, verticem habeat in centro A hemisphærii MOBN, cylindro etiam inscripti, & basem HV hemisphærii basi parallelam, & hemisphærium in ipsius vertice B tangentem; e cylindro autem eximatur hemisphærium; relinquetur solidum cylindricum hemisphæro-cavum, cono HAV super eâdem cum cylindro basi HV æquale. Patet ex cor. 3.*

Cor. 5. *Si ejusmodi conus & solidum secentur plano quovis LX basi HV parallelo; fient in cono circulus αα, in solido planum annulare QLXR, sibi invicem ubique æqualia. Nam ducto sphæræ radio AR, erit ARq* (c) $=$ *ADq* $+$ *DRq. Sed propter AB, BV æquales,* (d) *erunt AD, Dα æquales:* (e) *æquantur etiam AR, AN, DX inter se. Ergo DXq* $=$ *Dαq* $+$ *DRq; & circulus radio DX* (f) *æquatur circulis qui radiis DR, Dα respectivè describuntur, simul sumptis. Aufer utrinque circulum radio DR descriptum, & restabit planum annulare QLXR æquale circulo habenti radium Dα.* (c) *Per 47. l. 1.* (d) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.* (e) *Per def. 5. l. 12. & p. 34. l. 1.* (f) *Per cor. 2. p. 2. l. 12. & p. 24. l. 5.*

Cor. 6. *Segmenta quævis coni HAV & solidi cylindrici hemisphæro-cavi, planis basi parallelis intercepta, sunt æqualia. Nam conus solido æqualis est; & sectio circularis αα coni, plano annulari QLXR solidi semper æquatur. Si igitur planum LX feratur sursum vel deorsum, motu basi parallelo, generabit ubique coni & solidi cylindrici æqualia segmenta.*

Cor. 7. *Ex mensurâ* (g) *igitur coni HAV habetur dimensio solidi hemisphæro-cavi; & ex mensurâ* (h) *coni truncati OαK, habetur dimensio segmenti annularis QLIORXTK iisdem planis IT, LX intercepti. Atque hinc etiam alia methodus exoritur segmenta quævis sphærica dimetiendi.* (g) *Per sch. p. 6. hujus.* (h) *Per eand.*

Sic si quæratur mensura segmenti QOKR parallelis planis QR, OK intercepti; e cylindro LT deducatur conus truncatus OαK: & si quæratur segmentum MQRN a parallelis planis MN, QR terminatum; e cylindro MX subducatur conus βAα.]

Scholium.

QUanti hoc theorema fecerit Archimedes, argumento est, quòd tumulo suo sphæram cylindro inscriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortasse, inter alia tam multa & præclara inventa sua, hoc illi præ reliquis placuit, quòd & corporum & superficierum corpora ipsa continentium eadem esset atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque superficies demonstravimus lib. 4. Cylindricorum & annularium, prop. 13, 14, 15. sed & ipsa in sphærâ aliud mihi hujus rei exemplum illustre sese obtulit. Deprehendi siquidem, quemadmodum sphæra ad cylindrum rectum se ambientem, (qui necessariò æquilaterus erit,) est tam soliditate quàm superficie, ut 2. ad 3. ita sphæram ad æquilaterum conum se ambientem & soliditate similiter & superficie eam habere proportionem, quam 4 ad 9. Ex quo deinde illud consequitur, sesquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & sphærâ repertam, in tribus solidis, sphærâ, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriusque demonstrationem, pluraque alia theoremata nostra, quibus sphæræ natura mirabilis amplius innotescet, tredecim sequentibus propositionibus comprehensa, subjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 29.

SUperficies sphæræ dupla est superficiei cylindri quadrati sphæræ inscripti.

Quadratum maximo sphæræ circulo inscriptum, a quo in orbem ducto describitur quadratus cylindrus, esto AKLD, ducaturque AL, diameter quadrato & sphæræ communis. Quoniam quadratum AL par (*a*) est quadratis æqualibus AK, KL, erit duplum unius AK. Ergo etiam circulus diametri AL, duplus (*b*) est circuli, cujus diameter AK, circuli nempe CN. Atqui superficies sphæræ quadrupla (*c*) est circuli, cujus diameter AL: is enim est maximus sphæræ circulus, cùm AL sit sphæræ diameter. Ergo sphæræ superficies octupla est circuli CN. Sed quia LK, KA, (*d*) æquales sunt, cylindrica superficies ACL quadrupla (*e*) est circuli CN. Ergo cùm sphæræ superficies ejusdem circuli octupla sit, cylindricæ superficiei dupla erit. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 47. l. 1.
(b) Patet ex cor. 5. p. 2. l. 12.
(c) Per 24. hujus.
(d) Per hyp.
(e) Per cor. p. 12. hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 29.

SPhæræ superficies ad totam cylindri quadrati sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quàm 4. ad 3.

Ponan-

Ponantur eadem quæ demonst. præced. Quoniam cylindri latus LK & basis diameter AK (*a*) æquales sunt, erit superficies cylindrica CL (*b*) quadrupla basis CN, ac proinde tota cylindri superficies ad utramque basim CN & SL est ut 6. ad 2. Atqui sphæræ superficies est ad utramque simul basim CN, SL ut 8. ad 2. cùm in præced. ostensa sit esse ad unam basim, ut 8. ad 1. Ergo sphæræ superficies est ad totam cylindri CL superficiem ut 8. ad 6. sive ut 4. ad 3. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per hyp.*
(b) *Per cor. p.12. hujus.*

Corollaria.

1. TOta cylindri recti sphæræ circumscripti superficies est ad totam superficiem cylindri æquilateri inscripti, ut 2. ad 1. Nam circumscripta est ad sphæricam ut 6. ad 4. per 32. hujus. Sphærica autem est ad inscriptam, ut 4. ad 3. per hanc. Ergo ex æquo circumscripta est ad inscriptam, ut 6. ad 3. sive ut 2. ad 1.

[*Pari modo, sphæræ cylindro quadrato conscriptæ superficies dupla est superficiei sphæræ eidem inscriptæ; sicut & hæc dupla est circuli maximi sphæræ conscriptæ. Sunt enim* (c) *sphærica circumscripta, tota cylindrica, & sphærica inscripta, ad maximum sphæræ circumscriptæ circulum; ut* 4, 3 *&* 2. *ad* 1.

(c) *Per hanc & 32. cum 24. hujus.*

2. *Superficies tota cylindri recti sphæræ circumscripti, superficies sphæræ, & superficies tota cylindri æquilateri sphæræ inscripti, sunt inter se in proportione musicâ, hoc est, ut* (d) 6. 4. 3.

(d) *Per 32. & hanc.*

Tres autem quantitates sunt in proportione musicâ, si fuerit prima ad tertiam, ut est differentia primæ ac secundæ ad differentiam secundæ & tertiæ. Sic quia 6. 3 :: 6 — 4. 4 — 3 (:: 2. 1;) *erunt* 6, 4, 3 *in proportione musicâ.*

Scholium. *Cylindrus sphæræ circumscriptus est ad cylindrum similem* (*nempe æquilaterum*) *eidem sphæræ inscriptum, ut in quadrato diameter ad lateris semissem; sive* (*quod perinde est*) *ut circuli diameter ad sinum graduum* 45. *Atque in eâdem ratione est sphæra cylindro æquilatero circumscripta ad sphæram eidem inscriptam.* Fig. 29.

1. *Nam propter triangulum rectangulum æquicrure AKL, demissis perpendicularibus KQ, QR, triangula AQK, ARQ erunt* (e) *etiam rectangula & æquicrura. Unde* (f) *AL, AK, AQ, AR* $\div\!\!\div$, *&* (g) *AR* $=\frac{1}{2}$ *AK. Sed AL est diameter baseos cylindri circumscripti, & AK diameter baseos inscripti. Ergo, propter cylindrorum similitudinem, erit* (h) *circumscriptus ad inscriptum in triplicatâ ratione AL ad AK, hoc* (i) *est, ut AL ad* (*AR* $=$) $\frac{1}{2}$ *AK. Sed AL est quadrati DK & circuli AGBK*

(e) *Per 8. l. 6.*
(f) *Per cor. 2. p. 8. l. 6.*
(g) *Per n. 1. schol. 26. l. 1.*
(h) *Per 12. l. 12.*
(i) *Per def. 10. l. 5.*

AGBK diameter, & AK est ejusdem quadrati eidem circulo inscripti latus, sive in circulo GK chorda gr. 90; ac proinde (a) $\frac{1}{2}$ *AK est sinus gr. 45. Ergo cylindrus circumscriptus est ad inscriptum, ut in quadrato diameter ad lateris semissem, sive ut circuli diameter ad sinum graduum 45.*

(a) Per cor. 1. p. 3. l. 3.

2. *Et in eâdem ratione est sphara cylindro aquilatero circumscripta ad spharam eidem cylindro inscriptam. Nam sphara GK cylindro aquilatero ADLK circumscripta diameter est AL, & sphara inscripta diameter aqualis est diametro baseos cylindri, nempe ipsi AK. Sphara igitur circumscripta erit* (b) *ad inscriptam, in triplicatâ ratione AL ad AK, hoc est, ut AL ad AR sive* $\frac{1}{2}$ *AK.* Q. E. D.

(b) Per 18. l. 12.

Cor. ad schol. præced. *Sphara est ad cylindrum aquilaterum sibi inscriptum, ut in quadrato quadrupla diameter ad triplum latus; sive, ut quadrupla circuli diameter ad triplum latus quadrati circulo inscripti.*

Nam per schol. praced. est sphara cylindro aquilatero circumscripta ad spharam eidem inscriptam, ut in quadrato dupla diameter ad latus, sive ut quadrupla diameter ad duplum latus. Sed sphara inscripta eidem cylindro est ad cylindrum, (c) *ut 2 ad 3, sive ut duplum latus quadrati ad triplum ejusdem quadrati latus. Ergò* (d) *sphara circumscripta cylindro aquilatero est ad eundem cylindrum, (hoc est, sphara est ad cylindrum aquilaterum sibi inscriptum,) ut in quadrato quadrupla diameter ad triplum latus, sive (quod perinde est) ut quadrupla circuli diameter ad triplum latus quadrati eidem circulo inscripti.*]

(c) Per 32. hujus.
(d) Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 19. vel 28.

CUjuscunque portionis spharica superficies (ILBG) ad superficiem coni maximi inscripti (IBG,) eam rationem habet, quam coni latus (BG) ad basis radium (GO.)

Quoniam portionis ILBG superficies (*e*) æqualis est circulo radii BG, erit proportio ejus ad circulum QT, basim nempe suam & coni, duplicata (*f*) rationis BG ad GO; hoc est, (*g*) rationis superficiei conicæ IBG ad basim eandem QT. Ergo liquet (*h*) superficiem ILBG esse ad superficiem conicam IBG, ut eadem conica IBG est ad basim QT. Quare cùm conica IBG sit ad basim QT, (*i*) ut BG ad GO, etiam portionis superficies erit ad conicam IBG sibi inscriptam ut BG ad GO. Quod erat demonstrandum.

(e) Per 25. hujus.
(f) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(g) Per 14. hujus.
(h) Per def. 11. l. 5.
(i) Per 14. hujus.

[Cor.

[Cor. *Ex hujus prop. demonstratione liquet, superficiem coni maximi segmento sphæræ inscripti, esse mediam proportionalem inter superficiem segmenti, & basim utrique communem.*]

PROPOSITIO XXXVI.

Hemisphærii superficies (EOBD) ad coni maximi sive recti inscripti superficiem (EBD) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad superficiem verò coni similis circumscripti, ut latus in quadrato ad diametrum. Fig. 27. 1

1. Partis demonstratio ex præcedenti est manifesta. Est enim portionis cujuscunque, ac proinde & hemisphærii superficies EOBD ad conicam inscriptam, ut BD ad DA. Est autem BADK quadratum, cujus diameter est BD, latus DA.

2. Pars. Semissis quadrati circulo (cujus centrum A) circumscripti, esto EBC: quâ circa axem AB circumactâ, gignatur conus hemisphærio conscriptus. Quoniam quadratum EC duplum (*a*) est quadrati EB, seu GI, etiam circulus diametri EC duplus (*b*) est circuli cujus diameter GI, hoc est circuli HGDI. Atqui (*c*) superficies hemisphærii cono EBC inclusi, ejusdem circuli dupla est. Ergo circulus diametri EC eidem superficiei hemisphæricæ æqualis est. Quare cùm superficies conica EBC sit ad (*d*) circulum diametri EC, basim nempe suam, ut latus BE ad basis radium EA; erit quoque ad superficiem hemisphæricam sibi inscriptam, ut BE ad EA, hoc est, ut diameter in quadrato ad suum latus; [*ac proinde, superficies hemisphærica erit ad circumscriptam conicam, ut latus in quadrato ad diametrum.*] Quod erat demonstrandum.

Fig. 10. l. 4.
(a) Per cor. 1. p. 47. l. 1.
(b) Per cor. 5. p. 2. l. 12.
(c) Per 24. hujus.
(d) Per 14. hujus.

Corol. *Si hemisphærium cono rectangulo EBC circumscribatur & inscribatur; erit superficies coni media proportionalis inter superficiem hemisphærii circumscripti, & superficiem inscripti. Est enim, tam superficies circumscripta ad conicam, quàm conica ad inscriptam, ut in quadrato diameter ad latus.*] Fig. 10. l. 4.

PROPOSITIO XXXVII.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum sibi circumscriptum, & soliditate & superficie eam proportionem habet quam in quadrato latus ad diametrum. Fig. eadem cum Fig. 13. l. 5.

Maxi-

Maximo sphæræ circulo HGDI circumscriptum esto quadratum EBCF, a quo circa axem BF in orbem acto, rhombus conicus gignatur sphæram ambiens.

Ut EB quadrati latus (inspice Fig. 10. l. 4.) ad diametrum EC, ita fiat S ad R, (inspice Fig. 13. l. 5.) quæ proportio per 4. terminos S, R, Q, O continuetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata (a) rationis S ad R, hoc est, EB ad EC; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q, sive R ad S, hoc est EC ad EB; ac proinde (b) O est ad R, ut quadratum EC ad quadratum EB: unde (c) O est dupla ipsius R. His ita constitutis, intelligatur rhombo conico sphæra circumscribi EBCF. Erit igitur sphæra HGDI ad sphæram EBCF in (d) ratione triplicatâ diametri GI (sive EB) ad diametrum EC; hoc est, (quod jam ostendi,) erit ut S ad O. Sphæra autem EBCF est ad rhombum conicum sibi inscriptum (e) ut 2 ad 1. hoc est, (quod ostendi supra,) ut O ad R. Igitur ex æquo, sphæra HGDI est ad eundem rhombum, qui ei est circumscriptus, ut S est ad R, hoc est, ut in quadrato latus EB ad diametrum EC. Quod erat primum.

(a) Per def. 10. l. 5.
(b) Per sch. p. 20. l. 6.
(c) Ex sch. p. 6. & 7. l. 4.
(d) Per 18. l. 12.
(e) Per 30. hujus.

[*Idem etiam ex unica fig. 16. lib. 4. inspectione demonstrabitur. Nam propter triangula rectangula EGA, EAB, EBC, communem angulum E habentia, erunt* (f) *EG, EA, EB, EC* ∺, *& ratio EG ad EC triplicata* (g) *erit rationis EB ad EC. Sed sphæra rhombo conico inscripta, est ad sphæram eidem circumscriptam, in triplicatâ* (h) *ratione diametrorum EB, EC, hoc est, ut EG ad EC. Et sphæra circumscripta, est* (i) *ad rhombum cui circumscribitur, ut 2 ad 1, sive ut EC ad EA. Ergo ex æquo,* (k) *sphæra inscripta est ad rhombum cui inscribitur, seu, (quod idem est,) sphæra est ad rhombum sibi circumscriptum, ut EG ad EA, hoc est, ut in quadrato HG, latus ad diametrum.*]

(f) Per cor. & sch. p. 13. l. 6.
(g) Per def. 10. l. 5.
(h) Per 18. l. 12.
(i) Per 30. hujus.
(k) Per 22. l. 5.

Deinde ex secundâ parte præcedentis patet hemisphærii superficiem esse ad superficiem coni [*circumscripti*] EBC, ac proinde & totius sphæræ [*HGDI*] superficiem esse ad superficiem totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad diametrum. Ergo sphæra tam soliditate quàm superficie est ad rhombum quadratum [*conicum sibi circumscriptum*] EBCF, ut in quadrato latus ad diametrum. Quod erat demonstrandum.

[Cor. 1. *Superficies sphæræ rhombo conico quadrato circumscriptæ, superficies rhombi, & superficies sphæræ rhombo inscriptæ, eandem rationem continuant, eam nempe quam in quadrato habet diameter ad latus. Patet ex præcedenti & hac.*

Cor. 2.

Cor. 2. *Superficies sphæræ rhombo conico quadrato circumscriptæ, dupla est superficiei sphæræ eidem rhombo inscriptæ. Ac similiter, superficies rhombi conici quadrati sphæræ circumscripti, dupla est superficiei rhombi similis eidem sphæræ inscripti. Cùm enim per cor.* 1. *sint superficies sphæræ rhombo circumscriptæ, superficies rhombi, & sphærica inscripta, ut* EC, EB, EA; & *cùm similiter sint superficies rhombi sphæræ circumscripti, superficies sphæræ, & ea rhombi inscripti, ut* EC, EB, EA; *Liquet in utroque casu, superficiem corpori circumscriptam esse ad eidem inscriptam, ut* EC *ad* EA, *sive ut* 2. *ad* 1. Fig. 10. l. 4.

Cor. 3. *Rhombus conicus quadratus, est duorum mediorum proportionalium prior, inter sphæram inscriptam & circumscriptam, ut in demonstratione primæ partis hujus prop. ostensum est. Nam inscripta, rhombus, & circumscripta, sunt inter se, ut* S, R, & O, *in fig.* 13. *l.* 5. *vel ut* EG, EA, & EC, *in fig.* 10. *l.* 4.

Cor. 4. *Patet quoque ex eâdem demonstratione, (vel etiam ex p.* 30. *hujus,) sphæram rhombi conici quadrati sibi inscripti duplam esse.* Fig. 10. l. 4.

Cor. 5. *Sphæra* EBCF *rhombo conico quadrato circumscripta, est ad sphæram* HGDI *eidem rhombo inscriptam, ut in quadrato diameter* EC *ad lateris* EB *semissem* EG, *uti ex demonstratione memoratâ liquet. Atque in eâdem ratione est rhombus conicus quadratus sphæræ circumscriptus ad similem rhombum conicum eidem sphæræ inscriptum. Nam per hanc* 37. *est rhombus quadratus conicus sphæræ circumscriptus ad ipsam sphæram, ut* EC *ad* EB: & *per cor.* 4. *est sphæra ad ejusmodi rhombum sibi inscriptum, ut* 2. *ad* 1, *sive ut* EB *ad* EG. *Ergo erit ex æquo* (a) *rhombus circumscriptus ad inscriptum, ut* EC *ad* EG. (a) Per 22. l. 5.

Cor. 6. *Eadem itaque proportio est inter rhombum conicum quadratum sphæræ circumscriptum & rhombum similem eidem sphæræ inscriptum, ac inter cylindrum æquilaterum eidem cuivis alteri sphæræ circumscriptum & inscriptum; vel inter sphæram eidem cylindro æquilatero, seu eidem rhombo conico quadrato circumscriptam & inscriptam. Ea nempe ratio, quæ in quadrato est inter diametrum & lateris semissem. Patet ex cor. præced. hujus prop. & ex schol. post p.* 34. *hujus.*]

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 30. *Superficies portionis (BGKD) conum æquilaterum (BKD) capientis, dupla est superficiei ejusdem coni.*

Patet similiter ex 35. Nam superficies portionis BGKD est ad inscriptam conicam, ut (a) BK ad BA. Sed quia conus BKD æquilaterus ponitur, KB est æqualis BD, adeoque dupla BA. Ergo etiam superficies BGKD dupla est inscriptæ conicæ BKD. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 35. hujus.

Cor 1. *Eadem ratio dupla continuatur, inter superficiem portionis sphæricæ conum æquilaterum capientis, superficiem coni, & basim coni. Patet ex hac, & ex cor. p. 35. hujus.*

Cor. 2. *Superficies portionis sphæricæ conum æquilaterum capientis, est ad superficiem totam ejusdem coni, ut 4 ad 3.*

Nam per cor. 1. superficies portionis sphæricæ, superficies coni, & basis coni sunt inter se, ut 4. 2. 1. Unde liquet hoc cor.

Cor. 3, *Sphæræ superficies est ad totam cylindri æquilateri sibi inscripti superficiem, ut superficies portionis sphæricæ conum æquilaterum capientis est ad superficiem totam ejusdem coni. Nempe ut 4 ad 3. Patet ex p. 34. & ex cor. 2. hujus p. 38.*

Atque in eâdem ratione est superficies tota cylindri recti hemisphærio circumscripti, ad superficiem totam hemisphærii. Cùm enim (b) *tam cylindrica superficies, quàm* (c) *hemisphærica, sit dupla baseos; erit tota cylindrica, baseos quadrupla; & hemisphærica cum basi, ejusdem baseos tripla. Quare tota cylindri superficies erit ad totam hemisphærii, ut 4. ad 3.*]

(b) Patet ex cor. p. 26. hujus.
(c) Patet ex 24. hujus.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 30. *Sphæræ superficies ad totam coni æquilateri sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 16. ad 9.*

Esto Z sphæræ centrum, & conus æquilaterus sphæræ inscriptus BKD, axis sphæræ ac cono communis KZAO. Per hunc si secetur sphæra ac conus, producetur in sphærâ circulus maximus OBKD, in cono autem triangulum æquilaterum BKD, cujus unum latus BAD erit diameter baseos conicæ QT. Et quia axis coni KA rectus est basi QT, erit angulus BAK (d) rectus. Igitur quadratum BA æquale est (e) rectangulo KAO. Jam quia latus æquilateri trianguli abscindit (f) quartam axis partem AO, erit rectangulum

(d) Per def. 3. l. 11.
(e) Per cor. 1. p. 17. l. 6.
(f) Per cor. 3. p. 15. l. 4.

KAO,

KAO, hoc est, quadratum BA, triplum quadrati (*a*) AO. Quare cùm quadratum radii ZO (*b*) quadruplum sit quadrati AO, erit quadratum radii ZO ad quadratum radii BA, ut 4. ad 3. Ergo etiam (*c*) circulus OBKD est ad circulum QT ut 4. ad 3. Ergo sunt quatuor circuli OBKD, hoc est (*d*) tota sphæræ DG superficies, ad circulum QT, ut 16 ad 3. Atqui (*e*) superficies coni æquilateri BKD est ad circulum QT, basim nempe suam, ut 2 ad 1. ac proinde coni BKD tota superficies, unà cum basi scilicet, est ad basim, nempe circulum QT, ut 3. ad 1. sive ut 9. ad 3. Ergo cùm ostenderim sphæræ superficiem esse ad eundem circulum ut 16. ad 3. erit sphæræ DG superficies ad totam æquilateri coni superficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per* 1 *l.* 6.
(b) *Per cor.* 3. *p.* 4. *l.* 2.
(c) *Per cor.* 2. *p* 2. *l* 12.
(d) *Per* 24. *hujus.*
(e) *Per cor.* 1. *p.* 38. *hujus.*

[Cor. *Ex hujus demonstratione liquet, coni æquilateri sphæræ inscripti basem QT esse ad maximum sphæræ circulum DG, ut* 3. *ad* 4.]

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus BD, abscindit (*f*) quartam axis partem AO, erit quoque sphærica superficies BOD (*g*) quarta pars, ac proinde superficies BGKD tres quartæ superficiei totius sphæræ. Quare si superficies tota statuatur esse 16; BGKD superficies erit 12. Atqui superficies BGKD (*h*) est dupla superficiei conicæ BKD, ac proinde ad eam est ut 12. ad 6. Ergo tota sphæræ superficies est ad conicam BKD ut 16. ad 6. Deinde quia superficies coni BKD, (utpote æquilateri,) dupla (*i*) est baseos QT, liquet superficiem conicam BKD (nimirum absque basi) esse ad totam coni superficiem, ut 2. ad 3, hoc est, ut 6. ad 9. Igitur ex æquo tota sphæræ superficies est ad totam æquilateri coni inscripti superficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonstrandum.

(f) *Per cor.* 5. *p.* 15. *l.* 4.
(g) *Per* 27. *hujus.*
(h) *Per præc.*
(i) *Per cor.* 1 *p.* 38. *huj.*

PROPOSITIO XL.

Fig. 31.

S*Phæræ superficies ad æquilateri coni sibi circumscripti totam superficiem, eam proportionem habet, quam* 4. *ad* 9.

Circulo sphæræ maximo BPM circumscriptum sit triangulum æquilaterum DOF, a quo circa axem OAB in orbem ducto, productus sit conus æquilaterus sphæræ circumscriptus. Æquilatero autem triangulo DOF circumscriptus

(a) Per sch. p. 13. & 14. l. 4. etiam sit circulus, NDLOF, quem (*a*) patet esse concentricum priori; & axis OAB producatur in N. Quoniam BN est (*b*) quarta pars axis ON, patet ON esse duplam KB. (b) Per cor. 5. p. 15. l. 4. Quare cùm circulorum ratio sit (*c*) duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM ad circulum NDLOF ut 1. ad 4. (c) Per 2. l. 12. Atqui ostensum jam est in demonstratione primâ præcedenti, circulum NDLOF esse ad circulum QT, basim coni æquilateri sphæræ FL inscripti, ut 4. ad 3. Ex (*d*) æquo igitur circulus BPM est ad circulum QT ut 1. ad 3. (d) Per 22. l. 5. Atqui tota coni DOF superficies, circuli QT (*e*) tripla est. (e) Per cor. 1. p. 14. hujus. Ergo tota coni superficies circuli BPM noncupla est. Quare cùm sphæræ TP superficies ejusdem circuli BPM (*f*) quadrupla sit, erit tota coni æquilateri DOF superficies ad superficiem sphæræ cui circumscripta est, ut 9. ad 4. (f) Per 24. hujus. Quod erat demonstrandum.

Coroll. 1. *Ex hac demonstratione patet, coni æquilateri sphæræ conscripti axem BO sesquialterum esse diametri sphæræ BK, seu ut 3. ad 2.*

2. *Ex eâdem demonstratione liquet, coni æquilateri sphæræ circumscripti DOF basim QT esse etiam sesquialteram basium cylindri eidem sphæræ circumscripti. Nam QT est ad BPM, ut 3. ad 1. Ergo QT est ad BPM bis, ut 3. ad 2.*

3. *Superficies coni æquilateri DOF est superficiei cylindri eidem sphæræ circumscripti sesquialtera. Illa enim* (g) *dupla est QT, hac* (h) *quadrupla BPM. Ergo superficies conica erit ad cylindricam, ut bis 3. ad quater 1; hoc est, ut 6. ad 4. seu ut 3. ad 2.* (g) Per cor 1. p. 14. hujus. (h) Per 26. & 24. hujus.

4. *Circulus maximus BPM sphæræ cono æquilatero DOF inscriptæ, superficies ejusdem sphæræ, superficies tota coni DOF, & superficies sphæræ NDLOF cono circumscriptæ, sunt* (i) *inter se, ut 1. 4. 9. 16; hoc est, ut numerorum 1. 2. 3. 4. quadrata.* (i) Patet exp. 24. hac 40. & 39. hujus.

5. *Hinc dato sphæræ inscriptæ radio AB, facili negotio describentur circuli dictis superficiebus æquales. Nam* (k) *ejusmodi circulorum radii erunt 2AB, 3AB, 4AB. Unde & superficierum illarum mensura statim innotescunt.* (k) Per cor. 2. p. 2. l. 12.

6. *Cùm diameter ON sphæræ cono æquilatero circumscriptæ, dupla sit diameter KB sphæræ inscriptæ; erit sphæra circumscripta inscriptæ octupla; nempe in triplicatâ* (l) *ratione diametrorum, sive ut* (m) *cubus numeri binarii ad cubum unitatis.*] (l) Per 18. l. 12. (m) Per sch. p. 33. l. 11.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Æquilateri coni sphæræ circumscripti tota superficies, quadrupla est superficiei totius coni inscripti eidem sphæræ. Fig. 31.

Æquilateri coni DOF circumscripti tota superficies est ad sphæræ superficiem, ut (*a*) 9. ad 4. & sphæræ superficies est ad coni inscripti æquilateri SKT superficiem totam, ut (*b*) 16. ad 9. Ergo ex (*c*) æqualitate perturbatâ, circumscripti æquilateri coni tota superficies est ad totam superficiem æquilateri inscripti, ut 16. ad 4. sive ut 4. ad 1. Quod erat demonstrandum.

(a) *Per præc.* (b) *Per 39. hujus.* (c) *Per 23. l. 5.*

[*Atque eodem modo, sphæræ cono æquilatero circumscriptæ superficies, quadrupla est superficiei sphæræ eidem cono inscriptæ. Patet ex cor. 4. præced.*]

PROPOSITIO XLII.

Sphæra ad inscriptum sibi conum æquilaterum (BKC) *eam rationem habet quam* 32 *ad* 9. Fig. 32.

Sphæra & conus BKC secentur plano per axem communem KO, faciente in sphærâ circulum maximum OFKI, in cono autem triangulum æquilaterum BKC. Ducto deinde plano per centrum A ad OK recto, abscindatur hemisphærium FGKI, cui inscriptus intelligatur conus maximus FKI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abscindit OP (*d*) quartam partem axis OK, erit PK ad AK ut 3. ad 2. hoc est ut 9. ad 6. Basis verò QT est ad circulum OFKI, hoc est, ad basim ND, ut 3. ad 4. hoc est, ut 6. ad 8. uti patet ex demonstratis prop. 39. Quare cùm ratio coni BKC ad conum FKI componatur (*e*) ex ratione altitudinis PK ad altitudinem AK (hoc est ex ratione 9. ad 6.) & ex ratione basis QT ad basim ND (hoc est ex ratione 6 ad 8.) erit conus BKC ad conum FKI ut 9. ad 8. Quare cùm sphæra CG quadrupla (*f*) sit coni FKI, erit conus æquilaterus BKC ad sphæram CG, ut 9. ad 32. Quod erat demonstrandum.

(d) *Per cor. 5. p. 15. l. 4.* (e) *Per n. 2. in schol. p. 15. l. 12.* (f) *Per 30. hujus.*

[Aliter. *PK est ad AK ut 3 ad 2, sive ut 9. ad 6. Et cùm sit* (g) *$\odot$QT ad CG ut 3 ad 4, sive ut 6 ad 8; erit $\odot$QT ad 4CG ut 6 ad 32. Ergo conus altitudinis PK & baseos $\odot$QT; (hoc est, conus BKC) erit ad conum altitudinis AK & baseos 4CG, (hoc* (h) *est, ad sphæram CG) in ratione* (i) *compositâ ex 9 ad 6, & 6 ad 32, sive* (k) *ut 9. ad 32.*

(g) *Per cor. p. 39. hujus.* (h) *Per 28. hujus.* (i) *Per n. 2. in schol. p. 15. l. 12.* (k) *Per def. 5. l. 6.*

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 31?

Conus æquilaterus sphæra circumscriptus, coni æquilateri eidem sphæræ inscripti octuplus est.

Coni æquilateri sphæræ inscripti & circumscripti sint SKT & DOF, & axis communis esto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque quàm sphæra; eruntque sectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur descriptus esse circulus NDOF, & axis OKB producatur in N. Quoniam verò æquilateri trianguli latus DF abscindit axis ON quartam (*a*) partem NB, patet NO esse duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus ST abscindit axis BK (*b*) quartam partem BC, erit NO ad BO, ut BK ad CK: & permutando ut NO ad BK, sic BO ad CK. Sed NO dupla est BK. Ergo etiam BO dupla est CK. Igitur ob similitudinem triangulorum DOF, SKT, etiam (*c*) DF & ST, diametri videlicet basium conicarum, sunt inter se in proportione duplâ. Quare cùm coni DOF, SKT sint (*d*) similes ac proinde eorum proportio (*e*) triplicata sit proportionis diametrorum DF & ST, quæ est 2. ad 1; erit conus DOF ad conum SKT, ut 8 ad 1. Quod erat demonstrandum.

(a) Per cor. 5.p.15.l.4.
(b) Per idem coroll.
(c) Per 4.l.6.
(d) Per def. 4.l.12.
(e) Per 12.l.12.

Aliter. *Ductis rectis DN, SB; ob angulos DOF, SKT* (f) *æquales, æquantur eorum dimidii, DON, SKB; & anguli ODN, KSB sunt* (g) *recti, & proinde* (h) *triangula DON, SKB similia sunt: unde DO: SK :: ON: KB ::* (i) *2: 1. Ergo & DF (= DO) : ST (= SK) :: 2: 1. Et cùm coni æquilateri DOF, SKT similes sint, erunt* (k) *ut 8. ad 1. Sunt enim 8, 4, 2, 1 ÷.*

(f) Per cor. p.5.l.1.
(g) Per 31.l.3.
(h) Per cor. 9.p.32.l.1. & p.4.l.6.
(i) Patet ex dem. pr.40. hujus.
(k) Per 12.l.12.

Corol. *Conus æquilaterus sphæra circumscriptus, est ad conum æquilaterum eidem sphæræ inscriptum, ut sphæra cono æquilatero circumscripta ad sphæram eidem cono inscriptam; nempe ut 8. ad 1. Patet ex hac, & cor. 6. p. 40.*

Et universaliter; cùm corpora quæcunque similia sphæris circumscriptibilia & inscriptibilia, diametros vel latera habeant, sphærarum circumscriptarum diametris proportionalia; sintque corpora similia ad se invicem in triplicatâ (eorumque superficies in duplicatâ) ratione diametrorum vel laterum homologorum: quam (l) *igitur rationem habet sphæra corpori cuicumque circumscripta ad sphæram eidem corpori inscriptam eandem rationem habebit corpus illud sphæra circumscriptum ad corpus simile*

(l) Per 34. & 16.l.5.

simile eidem sphæræ inscriptum ; (quam rationem habet superficies spherica circumscripta corpori cuilibet ad superficiem sphæricam eidem inscriptam, eandem habebit corporis illius sphæra circumscripti superficies ad similis corporis eidem sphæra inscripti superficiem.)]

PROPOSITIO XLIV.

Sphæra ad circumscriptum sibi conum æquilaterum (DOF) & soliditate & superficie totâ, eam proportionem habet, quam 4. ad 9. Fig. 31.

Sphæra TP est ad inscriptum (*a*) sibi conum æquilaterum SKT, ut 32 ad 9. Inscriptus autem SKT conus æquilaterus est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF ut (*b*) 1, ad 8. hoc est: ut 9 ad 72. Igitur ex æquo sphæra TP est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF, ut 32. ad 72. hoc est, [*utrumque numerum dividendo per* 8.] ut 4. ad 9.

(a) Per 42. hujus.
(b) Per præc.

[Aliter. *Sphæra est ad inscriptum conum æquilaterum* (c) *ut* 32. *ad* 9. *Inscriptus verò est ad circumscriptum* (d) *ut* (1. *ad* 8, *hoc est, ut*) 4. *ad* 32. *Ergo ex æquo* (e) *perturbate, sphæra est ad circumscriptum conum æquilaterum ut* 4 *ad* 9.]

(c) Per 42. hujus.
(d) Per 43. hujus.
(e) Per 23. 5. El.

Propositione autem 40. demonstravimus etiam sphæræ superficiem esse ad totam æquilateri coni circumscripti superficiem ut 4. ad 9. Ergo sphæra & soliditate & superficie est ad æquilaterum conum sibi circumscriptum ut 4. ad 9. Quod erat demonstrandum.

Quod igitur in sphærâ & cylindro sphæram ambiente miratus est Archimedes, id ipsum in sphærâ & æquilatero cono ambiente sphæram jam demonstravimus, ut videlicet & soliditatum inter se eadem proportio rationalis, quæ superficierum existat. Quemadmodum enim ille reperit sphæram ad cylindrum esse tam soliditate quàm superficie, ut 2. ad 3. ita nos docuimus sphæram & soliditate & superficie esse ad conum æquilaterum se ambientem, ut 4. ad 9.

Hinc verò illam ipsam proportionem, nempe sesquialteram, quam existere sphæram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumscripto & soliditate etiam ac superficie continuari nullo negotio jam demonstrabimus, atque ita huic pariter opusculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

Vide Fig. quæ huic Tractatui præfixa est.

Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus, & cylindrus rectus sphæræ similiter circumscriptus, & ipsa sphæra, eandem proportionem continuant, nimirum sesquialteram, tam quoad soliditatem, quàm quoad superficiem totam.

Nam per 32. hujus, cylindrus rectus GK sphæram ambiens, tam soliditate quàm totâ superficie est ad sphæram ut 3 ad 2. sive ut 6. ad 4. Per præcedentem verò circumscriptus sphæræ conus æquilaterus B A D, tam soliditate, quàm superficie est ad sphæram ut 9. ad 4. Ergo idem conus est ad cylindrum tam soliditate quàm superficie, ut 9. ad 6. Quare hæc tria corpora, conus, cylindrus, sphæra sunt inter se ut hi numeri 9. 6. 4. ac proinde continuant proportionem sesquialteram. Quod erat demonstrandum.

[*PROPOSITIO XLVI.*

Vide Fig. eandem.

Inter conum æquilaterum & cylindrum eidem sphæræ circumscriptos, eadem obtinet ratio sesquialtera, quoad superficies totas, superficies simplices, soliditates, altitudines & bases.

Hæc propositio patet, quoad superficies totas & soliditates, ex præcedenti; quoad superficies simplices, ex coroll. 3. prop. 40. hujus; quoad altitudines & bases, ex coroll. 1. & 2. ejusdem prop. 40.]

Ad majorem Dei Gloriam.

APPEN-

APPENDIX

Quâ demonstratur ex falso posse directè deduci verum.

IN thesibus Mathematicis, quas Lovanii sesqui abhinc anno Illustris. D. Theodorus D'Imerselle, Comes de Bouchove & S. Imperii, magnâ ingenii commendatione & auditorum plausu publice propugnavit, inter cæteras proposui assertionem hujusmodi: *ex falsis posse verum directè elici, novis exemplis Geometricis confirmamus.* Hanc assertionem sibi oppugnandam suscepit vir Clarissimus Daniel Lipstorpius in Appendice, quam Operi suo pererudito, quod Specimina Philosophiæ Cartesianæ inscripsit, hac de caussâ adjunxit. Id verò eâ modestiâ & humanitate præstitit, ut facile appareat, hoc illi unum fuisse propositum, ut veritatem assequeretur. Ne autem videar doctissimi viri judicium parvi facere, hîc illi breviter respondebo, & Appendici Appendicem reponam.

Conclusionem igitur oppugnatam sic demonstro.

Datur assertio quæ directè ex suâ contradictoriâ inferatur. Talis in prop. 12. l. 9. Eucl. est hæc: *numerus E metitur numerum A*, quæ demonstratione affirmativâ infertur ex suâ contradictoriâ: *E non metitur numerum A.* Quod quidem est æque certum ac demonstrationem illam esse legitimam. Talis in Elementis hisce nostris prop. 4. l. 11. est hæc: **Recta BQ non est perpendicularis plano CAF*, quæ affirmativè deducitur ex suâ contradictoriâ: *recta BQ est perpendicularis plano CAF.* Talis in propositione nostrâ 35. l. 5. est hæc: † *A est ad B, ut E ad F*, quæ directè infertur ex suâ contradictoriâ: *A non est ad B, ut E ad F.* Tales denique reperiuntur apud Cardanum l. 5. de proport. p. 201. apud Theodosium (commentante Clavio) l. 1. sph. p. 12. & nos plures similes possumus exhibere tum Geometricas tum alias.

* *Fig. 12. l. 11.*

† *Fig. 26. l. 5.*

Ecce tibi cosmographicam unam, quam in iisdem thesibus disputandam proposui. *Maris, omnisque adeo humidi superficies eo ipso concluditur esse sphærica, quo id negas.* Ponatur vera esse ejus contradictoria: *Maris superficies sphærica non est.* Quoniam igitur maris superficies sphærica non est; omnes superficiei maritimæ partes non distant æqualiter à centro. Ergo

 una

una est altior alterâ, (altiorem enim esse non aliud est, quàm longiùs à centro recedere.) Ergo eæ quæ altiores sunt, defluunt versùs minùs altas seu decliviores; hanc enim esse humidi naturam experientiâ constat. Ex tali autem defluxu necessariò oritur omnium partium superficiei maritimæ æqualis altitudo, seu distantia a centro. Æqualis verò omnium partium superficiei maritimæ a centro distantia infert sphæricitatem ejus perfectam. *Ergo maris superficies sphærica est.*

Habemus igitur hanc: *Maris superficies sphærica est*, directè & affirmativè deductam ex suâ contradictoriâ, *maris superficies sphærica non est.*

Maneat igitur, extra omnem controversiam esse, dari assertiones, quæ directè ex suis contradictoriis inferantur. Atqui assertio, quæ ex suâ contradictoriâ directè infertur, necessariò vera est, (cùm sit axioma per se clarissimum, id necessariò verum esse, quod suum contradictorium destruit; destruit autem suum contradictorium, quod ex suo contradictorio directè sequitur.) Ergo & assertionis contradictoria, ex quâ videlicet deducta est assertio, falsa est. Ergo ex falso directè & affirmativè deductum est verum. Demonstrata igitur est conclusio in thesibus proposita.

Quòd verò ejusmodi demonstratio, quâ assertio ex suâ contradictoriâ falsâ directè infertur, verè scientiam pariat, sic ut absque ulteriori ullâ deductione ad impossibile, de assertionis veritate securi esse debeamus, ex jam dictis manifestum est, cùm lumine naturæ notissimum sit, id necessariò verum esse, quod suum contradictorium destruit, hoc est, quod ex suo contradictorio sequelâ legitimâ & necessariâ infertur. Quòd si verum deducatur ex falso quopiam sibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio scientiam pariet, neque enim de veritate assertionis sic deductæ securi esse possumus, cùm in eo ratio jam allata deficiat, & proprium falso sciamus esse, ut ex eo falsa deducantur.

His ritè perceptis, facile eruditus Lector perspiciet, nihil opus esse, ut singulis Clarissimi Viri objectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex jam dictis soluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clarissimi Viri, visum est singula breviter attingere.

Primum supponit ex Dialecticâ quædam de consequentiâ directâ; & dicto (ut vocant) de omni & de nullo. Tum sententiam exponit suam nostræ oppositam. Subjungit deinde: *hanc sententiam meam stabilio eversione omnium illorum quæ in contrarium afferri posse videntur.*

Primum

Primum (inquit) *quod ex falsis verum concludere videatur, constituit hujusmodi syllogismus: Omnis leo est lapis: Omnis adamas est leo. Ergo omnis adamas est lapis. In quo* &c. Tali syllogismo ad probandam assertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falso non contradictorio, qui proinde etiam, ut ostendi supra, scientiam non parit. Primum istud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) *constituunt hypotheses Astronomicæ, &c. Quæ licèt fictitia tantùm sint & falsa; tamen juxta eas calculum eclipsibus, & aliis observationibus cœlestibus convenientem Astronomi exhibent.* Deinde postquam multis contendit, hinc non probari verum ex falso directè elici: *Progredior* (inquit) *ad tertiam instantiam, quam ex regulâ falsi depromere licet*, &c. contenditque rursum hic non elici ex falso verum. Quo quidem in utroque, cùm illi ego planè assentiar, neque ullum inde pro assertione meâ argumentum petam: non me magis illa tangunt, quàm primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) *nobis facessunt, modi demonstrandi ab Euclide 9. elem. p. 12. Cardano l. 5. de propor. p. 201. & Theodosio l. 1. sph. p. 12. adhibiti*, quo me digitum intendisse putat, & verè. Ex his siquidem demonstrandi modis, evidenter jam demonstravi supra, ex falso elici directè verum; neque affertur quidquam a Clarissimo Viro, quod demonstrationem nostram infirmet. Verbis Clavii ad p. 12. l. 9. recitatis, subjungit ex eodem Clavio demonstrationem p. 12. l. 1. sph. Theodosii: Tum (inquit) *ut verum fatear, nescio sanè quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare insolitum hunc & mirabilem argumentandi modum esse putaverint: qui tamen Logicis valde familiaris est, & duobus principiis omnium evidentissimis & naturâ notissimis nititur, hisce nempe; quod idem non possit simul esse & non esse; item, quodlibet aut sit aut non sit.* Quid Clavio, Cardano, & cum istis aliisque etiam mihi, in hac argumentandi formâ sit visum mirabile, dicere in promptu est; hoc nimirum, quòd assertio probanda (G est centrum sphæræ,) directè ex suâ contradictoriâ, (G non est centrum sphæræ) consequentiis legitimis ac necessariis deducatur. Quod quidem quotiescunque evenit, admiratione dignum est, Tantum verò abest, ut hæc ratio demonstrandi Logicis valde familiaris sit, ut etiam non defuerint doctissimi viri, quibus ea impossibilis videretur. Ut deinde ostendat vir Clariss. hoc discursu verum ex falso non deduci, repetit demonstrationem propositionis Theodosianæ, sed formâ planè diversâ a Clavianâ illâ, quam priùs recitaverat, in quâ vis argumentationis inter nos controversæ clarissimè cernitur. Subjungit deníque; *neque ego tam lynceus sum ut exinde videre queam, quo pacto ex falso verum directè sequatur. Illud tamen video, quod si G demonstretur non esse centrum sphæræ*, (vult, credo, dicere, *ponatur*, cùm demonstrari nequeat quod falsum est) *necessariò sit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quòd G sit centrum sphæræ*. Ad hæc verba repetam compendio demonstrationem superiùs datam, quâ, opinor, fiet ut V. C. tametsi, quod est maxime, lynceus non esset, clarè perspiciat elici directè ex falso verum.

Quoniam admittit (id quod etiam eo non dante evinceret Claviana demonstratio) si G ponatur non esse centrum, sequi necessitate absolutâ & formali G esse centrum; manifestum est, G esse centrum, directè sequi ex suâ contradictoriâ, G non est centrum. Ergo ex vi deductionis constat verum esse quod G sit centrum, cùm lumine naturali notum sit id esse necessariò verum, quod suum contradictorium destruit, hoc est, quod ex suo contradictorio directè sequitur. Habemus igitur, quod ex hac, (G non est centrum, directè deducta sit hæc vera, (G est centrum.) Atqui hæc (G non est centrum) falsa est, cùm jam ostenderim veram esse hanc (G est centrum.) Ergo verum directè deductum est ex falso.

Hæc sunt, Erudite Lector, quæ super hac quæstione breviter hîc putavi apponenda. Cæterum nihil dubito quin Clarissimus Lipstorpius eâdem animi æquitate responsionem hanc nostram sit accepturus, quâ dedit oppugnationem suam, & ego illam accepi.

P. AN-

P. ANDREÆ TACQUET E SOCIETATE JESU

Trigonometriæ liber unicus.

CAPUT PRIMUM.

SINUUM DEFINITIONES.

Quid Sinus, Tangentes, Secantes, & quomodo inveniantur.

SInus, Tangentes, Secantes sunt rectæ quædam lineæ, quarum in analysi triangulorum in Geometriâ practicâ, in Astronomiâ, aliisque usus est maximus.

Sinuum Definitiones.

ESto quadrans circuli ACE, cujus circumferentia CE divisa sit in partes 90 æquales, quas Gradus vocant, & singuli gradus in partes æquales 60, quæ vocantur Minuta, sic ut totus arcus CE divisus sit in partes æquales, seu minuta 5400. Ex centro A ad singulos gradus, & minuta emittantur rectæ, quarum unam designo litteris AF. Constituentur hoc facto anguli 5400, quibus subtenduntur arcus totidem uno sese invicem minuto excedentes. Ex his unum designo litteris CAF. Primus angulus erit minuti unius, secundus duorum minutorum, & sic porrò; sexagesimus minutorum 60; hoc est gradûs unius, & sic deinceps: postremus EAC est graduum 90, adeoque rectus. Tandem per minuta singula ducantur rectæ ad semidiametrum AC perpendiculares, quæ proinde etiam ipsæ numero erunt 5400 computando radium AE, quarum unam designo litteris FX. Hæ appellantur sinus arcuum, & angulorum uno minuto sese mutuò superantium. Fig. 1.

1. Igi-

1. Igitur arcus ex gr. FC, & anguli FAC ab ipso subtensi sinus est recta FX, quæ ab F termino arcûs perpendicularis est radio AC.

2. Pars radii XC inter arcum, & sinum intercepta est sinus versus ejusdem arcûs FC, & anguli FAC.

3. Sinus complementi, sive sinus secundus arcûs FC, & anguli FAC est FI sinus illius arcûs, nempe FE, qui quadrantem complet, adeoque & sinus illius anguli, nempe FAE, qui cum priore FAC complet rectum CAE.

4. Sinus totus, sive radius est semidiam. AE.

5. Arcus QF quadrante major eundem habet sinum FX, quem arcus minor CF, qui cum eo semicirculum constituit: & angulus recto major FAQ eundem habet sinum FX, quem angulus acutus FAC, qui cum eo efficit duos rectos.

Fig. 2. 6. In omni triangulo rectangulo BAC, latus BC recto angulo oppositum, est sinus totus, sive radius: reliqua verò latera sunt sinus angulorum, quibus opponuntur; latus nimirùm AB est sinus anguli O, latus AC sinus anguli R.

Nam si centro C intervallo CB describatur quadrans FBL, quia latus angulo recto oppositum CB, est jam radius quadrantis, erit CB sinus totus per definit. 4; latus verò AB per defin. 1. erit sinus anguli O, seu FCB. Rursum centro B intervallo BC descripto quadrante QCI patet per eandem defin. 1. AC esse sinum anguli R, sive QBC. Ex quo jam nunc apparet, quantus sinuum futurus in Trigonometria sit usus.

Definitiones Tangentium, & Secantium.

Fig. 3. Esto circulus BXZ, cujus quadrans BX intelligatur, ut supra, divisus in gradus, & minuta. Hunc tangat recta infinita BR, & ex centro A ad contactum B ducatur radius AB, qui (a) cum tangente constituet angulum rectum. Cogitentur deinde per quadrantis gradus singulos, & minuta ex centro A emitti rectæ AF, AL &c. quo facto constituentur anguli FAB, LAB &c. ad 5400, ut supra, quibus subtenduntur totidem arcus BC, BO, &c.

(a) Per 18. 3.

7. Arcûs igitur BC, & anguli BAF tangens est recta BF, secans verò AF, sinus totus AB: similiter arcûs BO, & anguli BAL tangens est BL, secans AL. & sic deinceps.

8. Arcus quadrante minor BO, & arcus quadrante major ZO cum priore BO faciens semicirculum eandem habent tangentem BL, & secantem AOL.

9. In omni triangulo rectangulo FBA respectu acuti anguli FAB tangens est FB ipsi oppositum, latus alterum AB ipsi adjacens

adjacens est sinus totus, seu radius; hypotenusa verò AF, seu latus recto angulo oppositum est secans. Patet ex definit. 6. & propos. 16. lib. 3. si centro A per B describatur circulus.

Pari modò respectu alterius acuti anguli AFB tangens est AB, sinus totus, seu radius est FB, secans FA. Patet ex defin. 8., & prop. 16. lib. 3. si centro F per B circulum descripseris.

Hypotenusa igitur utriusque acuti secans est, ac proinde cùm hi anguli inæquales sunt, diversis numeris in tabulis sinuum hypotenusa exprimitur.

Cæterùm notandæ in primis sunt, ac probè intelligendæ definitiones 6, & 9. ut Sinus, Tangentes, Secantes ad usum deducantur.

Sinuum, Tangentium, Secantium inventio.

INvenire Sinus, Tangentes, Secantes, est earum proportionem ad radium circuli aut veram, aut à verâ insensibiliter aberrantem numeris exprimere. Ad eum finem intelligitur circuli radius in plurimas æquales partes divisus, ut in 100000, aut 1000, 0000. Tum Geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus singuli Sinus, Tangentes, Secantes contineant, quæ inventio, ut postea ostendam, eò accuratior futura est, quò plures in partes radius circuli divisus assumetur. Hoc sinuum artificium primi excogitarunt Hipparchus, & Menelaus, horum inventa deinde contraxit, & expolivit Ptolomæus, & novissimè Joannes Regiomontanus perfecit, qui ad radium 10000000. Sinus omnium graduum, ac minutorum quadrantis supputavit. Denique horum omnium conatus egregios Clavius noster, Pitiscus, Rheticus, aliique complures illustrarunt. Quamvis autem ab iis omnibus præclarè hoc in genere laboratum sit, quia tamen prolixa hujus doctrinæ tractatio est, optandum sanè videtur, ut facilior ea studiosis, atque expeditior, si fieri potest, efficiatur. Quare animus mihi est, artificium, quàm utile, tam pulchrum, & clariùs, quàm cæteri fecerunt, & breviùs exponere. Rem omnem tribus Porismatis, & sex Problematibus absolvam. Sit ergo

Po-

Porisma I.

Fig. 4. **D***Ato sinu (FC,) cujusvis arcûs (FB,) complementi sinum (FO) invenire.*

(a) Per 47. l. 1. Ducto radio AF, quadratum AF (*a*) æquatur quadratis FC, AC. Quare si ex quadrato radii, seu sinûs totius auferas quadratum sinûs dati FC, remanet quadratum AC, hoc est quadratum FO. Igitur radix quadrata inde extracta dabit rectam FO sinum complementi quæsitum.

Porisma II.

Fig. 5. **D***Ato sinu (CF,) cujusdam arcûs (IC,) sinum semisseos ejusdem arcûs invenire.*

(b) Per 3. l. 3. (c) Per 3. l. 3. Arcui IC subtende rectam IC, ad quam e centro perpendicularis sit AL, quæ tam (*b*) rectam IC, quàm arcum (*c*) ILC bissecabit, ac proinde IO est sinus arcûs LI semisseos arcûs ILC.

(d) Per 47. l. 1. Ex sinu dato CF per præcedentem inveniatur sinus complementi CQ, seu FA, quo ablato ex sinu toto AI, nota sit FI. Nota igitur est summa quadratorum IF, CF, hoc est (*d*) quadrati IC. Ex quo eliciatur radix quadrata dabit ea rectam IC, ejusque semissis sinum quæsitum IO.

Porisma III.

Fig. 6. **D***Atis sinibus (LX, FR) duorum arcuum (LB, FB,) quorum differentia non sit major 45 minutis, sinum (IS) arcus cujusdam medii invenire.*

Ducatur perpendicularis FOQ. Erunt LQ, IO differentiæ sinuum LX, IS ad sinum FR. Et quia arcus LF est non major 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF sensibiliter a rectis lineis, ac proinde LFQ, IFO assumi possunt ut rectilinea triangula. Quia ergo IO est parallela LQ erit (*e*)

(e) Per Coroll. 1. prop. 4. l. 6.

ut

ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia LF	ad arcûs medii, & minimi differentiam IF
ita sinuum datorum maximi, & minimi differentia LQ	ad sinûs medii, & minimi differentiam IO

Quare cùm hujus analogiæ tres primi termini sint noti, etiam quartus IO innotescet, quem si addamus sinui dato minori FR, notus erit medius quæsitus IS.

Lemma.

Semissis subtensæ (CB) alicujus arcûs (CFB) est sinus semisseos ejusdem arcûs. Fig. 7.

Ex centro A ducatur radius AGF ad CB perpendicularis. Erit ergo CG per defin. 1. sinus arcûs CF. Atqui per 3. lib. 3. CG est semissis CB, & per 30. lib. 3. CF semissis CFB. Ergo &c.

Problema I.

Sinum arcûs 45 graduum invenire.

Quadrantem CFB subtendat recta CB, ad quam ex centro A sit perpendicularis AGF. Quoniam igitur arcus CB 90 grad. (*a*) bisectus est in F, erit FB arcus graduum 45, cujus sinus est BG. Deinde ergo ob æqualitatem laterum AC, AB anguli (*b*) quoque ACB, ABC æquales sunt, qui verò ad A rectus erit. Ergo (*c*) ABC, seu ABG semirectus. Est autem (*d*) AGB rectus; reliquus ergo BAG (*e*) semirectus est, ideoque par ipsi ABG. Ergo latera BG, AG (*f*) æqualia sunt. Ergo, quia quadratum AB æquatur (*g*) utrique quadrato BG, AG, unius quadrati BG duplum erit. Semissis ergo quadrati sinûs totius AB æquatur quadrato sinûs 45 graduum BG.

Fig. 7. (a) Per 30. l. 3. (b) Per 5. l. 1. (c) Per Coroll. 11. prop. 32. l. 1. (d) Per hyp. (e) Per 32. l. 1. (f) Per 6. l. 6. (g) Per 47. l. 1.

Quare si ex semisse quadrati sinûs totius eliciatur radix quadrata, dabit ea sinum 45 grad. qui, quarum partium sinus totus ponitur 10000000, reperietur earundem esse 7071068 ferè.

Problema II.

Arcuum 60, & 30 graduum sinus invenire.

Fig. 8.

ESto quadrans BC; arcus BF graduum 60, & sinus ejus DF. Erit ergo arcus FC graduum 30, cujus sinus sit FG; ducatur autem BF, & ex centro AF. Quoniam arcus BQF est grad. 60. hoc est sexta pars circumferentiæ circuli, erit BF latus hexagoni, ideoque (*a*) æquale radio AF. Anguli (*b*) igitur ad A, & B in triangulo AFB æquales sunt. Cum igitur in triangulis X, Z æquales sint anguli FBD, FAD; item anguli FDB, FDA utpote recti; latus verò FD commune, erunt (*c*) quoque latera BD, AD æqualia: ac proinde quadratum BD est quarta pars quadrati sinûs totius AB, seu FB; sed quadratum FB æquatur (*d*) quadratis BD, FD. Auferatur ergo quarta pars quadrati sinûs totius, sive quadratum semisseos AD sinûs totius à quadrato sinûs totius FB, remanebit quadratum FD, cujus radix quadrata dabit rectam FD; sinum 60. graduum. Posito igitur sinu toto 10000000 sinus grad. 60. est 8660254.

(a) *Per coroll. 1. p. 15. lib. 4.*
(b) *Per 6. lib. 1.*
(c) *Per 27. lib. 1.*
(d) *Per 47. lib. 1.*

Sinus porrò FG grad. 30. *est semissis sinûs totius*, utpote æqualis ipsi DA. Idem patet ex lemmate. Posito igitur sinu toto 10000000 sinus grad. 30. est 5000000.

Problema III.

Sinum 36 graduum invenire.

Fig. 9.

ESto semicirculus FBG, cujus basi radius AB rectus insistat. Tum radio AG bisecto in D ducatur recta DB, quæ transferatur ex D in C. Recta BC erit (*a*) latus pentagoni circulo inscripti.

Ex summâ quadratorum AB radii, sive sinûs totius, & AD semisseos radii extrahe radicem quadratam, dabit ea (*b*) rectam DB, hoc est DC. Ex DC aufer DA semissem radii fiet nota AC, cujus quadratum adde quadrato radii AB, notum fiet (*c*) quadratum CB, ex quo radix elicienda dabit BC latus pentagoni subtendens gradus 72. Illius ergo semissis (*d*) dabit sinum 36 graduum. Posito sinu toto 10000000, sinus grad. 36, reperietur partium 5877852.

(a) *Ptolom. l. 1. a mag.*
(b) *Per 47. lib. 1.*
(c) *Per 47. lib. 1.*
(d) *Per lem.*

Coroll.

Corollarium.

EX sinu grad. 36. reperietur (*a*) sinus complementi, nempe grad. 54. partium 8090170. (a) Per Porif. 1.

Problema IV.

Sinum graduum 12 invenire,

IN quadrante CB sit arcus BF graduum 30, KB grad. 54, & eorum sinus DF, GK. Igitur erit eorum differentia KF grad. 24. complementa verò erunt FC, grad. 60, KC grad. 36, quorum sinus sint PF, NK. Fig. 10.

Sinus NK grad. 36. inventus per Probl. 3. auferatur ex sinu PF grad. 60. invento per Probl. 2. remanebit OF nota. Tum sinus FD grad. 30. inventus per Problema 2. dematur ex sinu KG grad. 54. invento per Coroll. praeced. remanebit OK nota. Radix summa quadratorum OF, OK dabit (*b*) KF subtensam 24. grad. illius verò semissis dabit (*c*) sinum graduum 12. (b) Per 47. lib. 1. (c) Per lem.

Problema V.

Sinus omnium arcuum quadrantis sese ordinatim uno minuto superantium invenire.

EX quatuor sinibus per praecedentia quatuor Problemata graduum videlicet 45, 60, 36, 12 reliquos sinus omnes adminiculo trium Porismatum praemissorum inveniemus hunc in modum.

Ex sinu graduum 45 inveniuntur sinus septem.

PRoblemate 1. inventus est sinus arcus grad. 45, sumatur graduum 45 semissis grad. 22, 30. & semissis horum grad. 11, 15. quae amplius bissecari nequit, sinus harum semissium reperiuntur per porisma 2, nimirum ex sinu grad. 45. reperitur sinus grad. 22, 30. & ex hoc sinus grad. 11, 15.

ex 45 gradibus
semisses 22, 30. 11, 15.

Accipiantur deinde harum semissium complementa; complementum arcûs totius grad. 45, quia ipsi æquale, tanquam inutile omittitur.

ex semissibus 22, 30. 11, 15.
Complementa 67, 30. 78, 45.

horum complementorum sinus reperiuntur per Porif. Rursum ex his complementis sumantur semisses semissium, quoties possunt; tum complementa semissium, donec complementum occurrerit, quod bisecari nequeat.

Ex compl. 67, 30. 78, 45.
Semiss. 33, 45. nulla.
Compl. 56, 15.
Semiss. nulla.

Complementa postrema erant grad. 67, 30. & grad. 78, 45. Ex posteriori, quia bisecari nequit, nihil ultra eruitur. Prioris, nempe grad. 67, 30. semissis est grad. 33, 45. cujus sinus per Porif. 2. obtinetur. Hujus complementum est grad. 56, 15, cujus sinus reperitur per Porif. 1. Quia verò complementum hoc ultimum non potest bisecari, hic terminus erit inveniendi ex sinu graduum 45. Igitur ex sinu graduum 45. inventi jam sunt sinus septem, quorum inventionis series in tabellâ appositâ exhibetur.

	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
	°	′	°	′	°	′	°	′
	90	0	45	0				
Semiss.					22	30	11	15
Compl.					67	30	78	45
Semiss.					33	45		
Compl.					56	15		

Ex sinu graduum 60 inveniuntur sinus 16.

Arcus 60 graduum bisecetur quoties potest, & accipiantur semissium complementa, quæ iterùm biseca, quoties potes, tum semissium rursùm accipe complementa, quæ denuò biseca, & bisectionis complementum assume. Ex hac alterna acceptione, quæ sexies repetita est, habentur arcus 16, quorum sinus per Porisma 2, & 1 alternatim accepta invenientur.

Sinus

Sinus grad. 60 ejusque semisses		Complementa		Semisses Complementorum.		Compl.		Semiss.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
60	0										
30	0										
15	0	75	0	37 18	30 45	52 71	30 15	26	15	63	45
7	30	82	30	41	15	48	45				
3	45	86	15								

Alternam semissium, & complementorum seriem exhibet tabella hic apposita; atque ita si hactenus inventi sinus ordinentur adnumerato sinu toto grad. 90. habebimus 24. sinus arcuum sese gradib. 3 $\frac{1}{45}$ superantium.

Ex sinu graduum 36 habentur sinus 32.

Si enim arcus grad. 36. accipiatur semissis, & semissis semisseos, & sic deinceps. Deinde ipsius sinus 36, & omnium semissium complementa, ac rursum semisses complementorum; eaque alterna semissium, ac complementorum acceptio octies repetatur, provenient arcus 32. quorum sinus per Porisma 2. & alternatim reperientur. Seriem inventionis horum 36. arcuum exhibet tabella subjecta.

Sinus grad. 36. cum suis semiss.		Complementa.		Semiss. Complementorum.		Complementa.		Semiss.		Complementa.		Semiss.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′
36	0	54	0	27	0	63	0	31	30	58	30	29	15	60	45
								15	45	74	15				
				13	30	76	30	38	15	51	45				
				6	45	83	15								
18	0	72	0												
9	0	81	0	40	30	49	30	24	45	65	15				
				20	15	69	45								
4	30	85	30	42	45	47	15								
2	15	87	45												

Ex

Ex sinu 12. *graduum inveniuntur sinus* 64.

HUnc in modum. Ex sinu 12 accipiatur semissis, & semissis semisseos, & sic porro, tum ipsius 12, & omnium semissium complementa sumantur deni semisses complementorum, ac rursus semissium complementa &c. Hæc alterna semissium, ac complementorum acceptio, si duodecies repetatur, provenient arcus 64, quorum sinus invenientur per Porisma 2, & 1. Seriem inventionis dictorum 64 arcuum exhibet tabella hic adjecta.

Sinus grad. 12 ejusque semiss.		Complementa.		Semiss. Complementorum.		Complementa.		Semiss.		Compl.		Semiss.		Compl.		Semiss.		Compl.		Semiss.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'
12	0	78	0	39	0	51	0	25	30	64	30	32	15	57	45								
								12	45	77	15												
				19	30	70	30	35	15	54	45												
				9	45	80	15																
6	0	84	0	42	0	48	0	24	0	66	0	33	0	57	0	28	30	61	30	30	45	59	15
																14	15	75	45				
												16	30	73	30	36	45	53	15				
												8	15	81	45								
				21	0	69	0	34	30	55	30	27	45	62	15								
								17	15	72	45												
				10	30	79	30	39	45	50	15												
				5	15	84	45																
3	0	87	0	43	30	46	30	23	15	66	45												
				21	45	68	15																
1	30	88	30	44	15	45	45																
0	45	89	15																				

Quòd si sinus omnes hactenus inventos sinu toto adnumerato simul in ordinem redigamus, sinus habebimus 120 arcuum sese mutuò 45 minutis superantium, quorum primus est 45 minutorum, ultimus grad. 90.

G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l
0	0	3	0	6	0	9	0
0	45	3	45	6	45	9	45
1	30	4	30	7	30	&c.	&c.
2	15	5	15	8	15	90	0

Ex his 120 *Sinibus.*

RElíquos omnes intermedios ope tertii Porismatis per regulam proportionum reperiemus hoc ordine.

Primò quæremus inter singulos horum 120 sinuum duos medios duorum arcuum minutis 15 differentium, quibus ad priores 120 adjunctis, habentur sinus arcuum 358, 15 minutis invicem excedentium.

Deinde inter singulos jam inventos duo quærentur medii duorum arcuum minutis 5 differentium, quibus additis ad priores 358 proveniunt sinus arcuum 1076 se minutis 5 superantium.

Denique inter illos singulos quæremus medios quatuor arcuum uno se minuto excedentium, quos si addamus illis 1076, habentur sinus 5400, omnium videlicet arcuum quadrantis uno se minuto superantium.

Problema VI.

Secantes, & Tangentes quascunque invenire.

EX sinibus jam inventis hæ lineæ nullo negotio innotescent. *Fig.* 3.

Arcûs cujuscunque BS ex. gr. 70, 15. secans esto AR, tangens BR, sinus totus AB. Oporteat secantem AR invenire. Duc SK sinum arcus SB, & SN sinum complementi SX. Per prop. 4. lib. 6. ut AK (seu NS) est ad AS, ita AB, (seu AS) est ad AR. Sunt ergo tres proportionales.

NS	AB	AR
Sinus compl. arcûs dati grad. 70, 15.	Sinus totus 10000000.	Secans quæsita

Quare si quadratum sinûs totius dividatur per NS sinum complementi arcûs dati, quotiens dabit secantem quæsitam AR, ut patet ex 18. lib. 9.

Oporteat deinde dati cujuscumque arcûs BS tangentem reperire BR. Per prop. 4. lib. 6. ut Ak (seu NS) est ad kS, ita AB ad BR. Sunt ergo proportionales.

NS	kS	AB	BR
Sinus compl. arcûs dati	Sinus arcûs dati	Sinus totus 10000000	Tangens quæsita

Quare cùm tres primi termini sint noti, per regulam trium innotescet quartus.

Habent igitur studiosi, quod suprà promiseram, Sinuum, Tangentium, & Secantium theoriam tribus porismatis, & problematis sex comprehensam. Scio, plures alias esse sinuum repetiendorum vias, sed ea, quam proposui, cæteris explicatu, ac demonstratu mihi est visa facilior.

Problema VII.

Sinum unius, vel plurium Secundorum Minutorum invenire.

Fig. 4. REpræsentet PB arcus unius minuti, seu 60 secundorum, kB verò arcum 26 secundorum ex. gr. sinus verò istorum arcuum sint PM, kN. Quoniam hi arcus insensibiliter differunt a rectis lineis, assumi possunt triangula PBM, kBN tanquam rectilinea. Igitur per 4. lib. 6.

Ut PB 1 Min. seu 60 secun.	ad kB 26 secun.	ita PM sinus 1 Min.	ad kN sinum 26 secun.

Quare per regulam trium repetietur sinus kN 26 secundorum, multiplicando videlicet secundum 26 per tertium, nempe 2909 sinum 1 minuti, & productum dividendo per primum, nempe 60 secun.

Hoc

Hoc opere reperitur sinus unius minuti secundi 49 $\frac{29}{60}$ posito sinu toto 10000000. licebitque eadem methodo reperire sinum unius tertii, & sic in infinitum.

Problema VIII.

Invenire sinum arcûs, qui præter gradus, & minuta prima, etiam secunda contineat.

INveniendus sit ex. gr. sinus graduum 36. 20′, 16″. Arcum grad. 36. 20′. proximè minorem dato repræsentet FB; arcum verò dato proximè majorem, nempe grad. 36. 21′ referat LB. Arcum datum grad. 36. 20′ 16″, qui inter hos medius est, referat IB. Sinus autem horum trium arcuum sint LX, FR, IS, & ducatur perpendicularis FOQ. Arcus igitur LF est 1′, seu 60″ arcus IF, 16″, LQ differentia Sinuum LX grad. 36, 21′. & FR grad. 36, 20′. Quoniam igitur arcus LF, utpote 1′, insensibiliter differt a rectâ lineâ, & multò adhuc minùs arcus IF, 16″, erit per propos. 4. l. 6. Fig. 6.

Ut LF	ad IF	ita LQ differentia	ad IO diff.
60″	16″	Sinuum &c.	sinûs &c.

Quare cùm tres primi termini sint noti, etiam innotescet quartus, differentia IO, quæ addita FR sinui grad. 36, 20′. dabit sinum quæsitum 15. gra, 36. 20′. 16″.

Problema IX.

Dato Sinui arcum assignare.

SInum datum quære in tabulis. Si eum reperies, arcum illi debitum habes adscriptum, si non reperies, quære eo proximè & majorem, & minorem, quos referat LX, FR, datum verò repræsentet IS. Ductâ perpendiculari FOQ, erit per 4. lib. 6.

LQ excessus.
Ut sinus LX proximè majoris
dato supra minorem FR
ad
IO excessum
sinûs dati IS
supra minorem FR

ita
arcus LF
60. secund.
ad
numerum secundorum,
quæ debentur arcui IF.

Quare cùm tria prima sint nota, etiam quartum innotescet, numerus nempe secundorum debitus arcui IF, qui additus gradibus, ac minutis arcûs noti FB dabit arcum debitum sinui dato IS.

Atqui hæc quidem hactenus de Sinuum, Tangentium, & Secantium inventione. Reliquum est, ut quædam ad plenam hujus rei theoriam facientia sequenti Scholio declaremus.

Scholium.

Quæstio est, cur radius circuli in tot partes divisus assumatur.

UT hujus assumpti causa intelligatur, meminisse debemus, omnes Sinus, Secantes, & Tangentes inventas esse vel per radicis extractionem, vel per Regulam proportionum. Et quidem illi 120 sinus arcuum se invicem 45 minutis superantium per extractionem radicis reperti sunt, ut patet ex Problem. 1, 2, 3, 4, 5. Cæteri verò omnes inter hos medii ex illis 120 per proportionis regulam innotuere, ut ex Problematis 5 postremâ parte constat. Tangentes autem, & Secantes ex sinibus jam notis per regulam eandem reperta sunt, quemadmodum Problem. 6. ostensum est. Jam verò numeri, è quibus radix fuit elicienda, ut plurimùm sunt non quadrati, ex quibus si radicem educas, ea semper a verâ, quæ (ut lib. 3. Arith. cap. 6. demonstravi) impossibilis est, differet excessu, defectuve aliquo, minore tamen, quàm sit unitas. Hæc porro differentia, quæ ob fractionum in supputando molestiam negligitur, eò minoris momenti erit, quò major fuerit numerus ille, e quo radix educta fuit. Erit autem ille numerus eò major, quò radius in partes plures divisus assumetur. Exemplum statuamus in sinu 45 graduum, quem Probl. 1. docuimus obtineri, si ex semisse quadrati sinûs totius radicem extraxeris. Si numerus radii, seu sinûs totius assumatur magnus, qualis hic est 10000000, illius etiam quadratus, adeoque & quadr. semissis 50000000000000 multò erit major. Porro radix integra, quæ elici potest ex 50000000000000, est 7071067, quæ quia ex maximo numero elicita est, etiam ipsa magnus est numerus.

merus. Unde fit, ut ipsius à radice vera impossibili defectus, qui semper unitate minor est, ad ipsam proportionem habeat insensibilem, proindeque tutò, & absque sensibili errore ullo negligatur. Hanc igitur ob causam tantus numerus partium sinûs totius assumi debet. Verùm, ut hujus rei causa manifestior evadat, omnia errorum capita exactiùs erunt colligenda. Primum caput erroris est in sinibus illis primis 120, quos reperire oportuit per eductionem radicis ex numeris non quadratis. In reliquis deinde, qui ex his per regulam prop. eliciuntur, idemque proinde vitium participant, alii duo insunt errores proprii, videlicet quòd in triangulis LFQ, IFO arcus LF 45, & arcus IF 15, aut 5 assumantur tanquam recta linea; atque insuper, cùm regula proportionum exercetur, quòd fractio ex divisione residua negligatur. Quo vitio postremo etiam Tangentes, & Secantes, quæ omnes ex sinibus per prop. reg. obtinentur, laborent necesse est. Denique cùm sinus perpauci tantùm immediatè reperiantur, cæteri verò sinus omnes deducantur ex invicem, ex sinibus autem Tangentes, & Secantes, manifestum est, singulos præter errores sibi propriòs contrahere etiam vitia eorum, e quibus ipsi derivantur; unde fit, ut error, qui in sinu immediatè invento simplex erat, in secundo quasi duplicetur, in tertio triplicetur, & sic deinceps. Unde consequens est, eò sinus esse accuratiores, qui ex paucioribus derivantur; exactissimos verò esse eos, qui immediatè, hoc est ex aliis nullis inventi sunt. Ex his ergo capitibus Sinuum, Tangentium, Secantium defectus oriuntur, qui ne essent notabiles, sed quodammodo evanescerent, radium maximo partium numero divisum assumere oportuit; & quamvis defectus illi sint non unus, sed (ut jam ostendi) plures, tamen quòd singuli nullius ferè momenti sunt, etiam simul juncti errorem vix sensibilem inducunt, si assumatur sinus totus partium admodum multarum; quâ enim proportione augetur numerus radii, eadem crescunt numeri sinuum, ac proinde errores, qui in iis supputandis committi debent, magis evanescunt. Fig. 6.

Deinde istud etiam tyrones intelligant, si Sinus, Tangentes, Secantes accipiantur ad sinum totum 10000000. quales passim in tabulis reperiuntur abjectis duabus primis notis haberi Sinus, Tangentes, Secantes ad radium 100000, totidem videlicet cyfris mulctatum. Ex. gr. posito radio 10000000 Sinus 8 grad. est 1391731, si cupiam minorem ad radium 100000, omissis duabus primis notis, is erit 13917; talis enim Sinûs, Tangentis, Secantis differentia a majori solùm erit fractio, cujus numerator sint notæ abjectæ, denominator verò sinus totus duobus cyfris mulctatus. Itaque sinûs 8. grad. 13917 minoris a majori *ri 1391731, differentia erit* $\frac{31}{100000}$ *diametri. Ratio pendet ex naturâ logisticæ decimalis, quam exposui Arithm. Practicæ lib. 2. cap. 9. & seq. præsertim ex Theor. 1. & 2. c. 10. Postremò hoc imprimis hic observabitur, cùm Sinus, Tangentes, Secantes expetuntur respectu radii ex. gr.* 100000, *exactiores fore eas lineas, si supputentur respectu sinûs* 10000000 *datum excedentis duobus cyfris, & ab iis ita supputatis totidem primæ notæ, ut jam dictum est, abjiciantur. Ratio est, quia errores sinuum multis notis constantium, non versantur nisi in primis notis. Ita Regiomontanus, cùm sinus cuperet ad partes radii* 600000, *assumpsit radium* 600000, 00000, *& a sinibus ad eum radium supputatis primas quatuor notas sustulit. Similiter Rheticus, ut haberet sinus ad radium* 10000000000 *assumpsit radium* 100000, 00000, 00000, *& à sinibus per hunc repertis præscidit quinque notas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ residuæ omnes veræ existant, ac proinde sinus ita reperti a veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, sive canone assumitur. Et tales sunt ii omnes, qui in tabulis passim descripti sunt.*

CAPUT II.

Triangulorum rectilineorum Analysis.

TRiangulum omne, quod per se manifestum est, tria latera habet, & angulos tres, quæ simul juncta senarium numerum efficiunt. Ex his tria semper nota sint oportet, ut tria reliqua, quæ sunt ignota, cognoscantur. Scientia igitur ea, quæ ex tribus datis, sive cognitis docet tria reliqua incognita invenire, *Analysis Triangulorum* ab aliis *Trigonometria* appellatur. Hoc invento vix aliud, seu præstantius, seu utilius. Quod ex nunc tyrones, ut vel eminus perspiciant, non ea solùm triangula contemplari debent, quæ in cartâ, vel tabulâ delineantur; sed ab his cogitationes suas transferre ad ea oportet, quæ in campis, atque in aere, imo & in ipso cœlo per radios visuales, & ipsas rerum distantias, longitudinesque describuntur. Opportunum erit ex iis, quæ posteà erunt uberiùs explananda, exemp. unum, alterumve quasi ad rei totius specimen aliquod afferre. Inter Problemata Trigonometriæ hoc erit inter cætera unum, qui dato uno latere trian-

trianguli rectanguli, & angulo acuto uno, reliqua latera quanta sint, inveniri possint.

Ex hoc Problemate montis, aut turris altitudinem metiri poteris. Turris alicujus altitudinem referat recta QF; distantiam verò oculi ab eadem rectâ AQ horizontalis, cum quâ rectum angulum constituit altitudo FQ; radium visualem extentum a turris apice F ad oculum in A repræsentet recta FA. Habemus triangulum rectangulum intelligibile in aere descriptum, cujus unum latus est AQ distantia oculi à turre, alterum QF ipsa turris altitudo, tertium radius visualis AF. In hoc triangulo angulus QAF (ut suo loco ostendam) fit notus instrumento; latus AQ distantia jam supponatur nota. Ex his duobus cognitis angulo videlicet acuto QAF, & distantia AQ, per universale Problema jam dictum invenietur quanta sit altitudo turris QF. Fig. 11.

Adjungamus & alterum. Inter cætera Problemata Trigonometrica etiam istud occurrit: datis in triangulo quolibet duobus angulis, quæ sit laterum inter se proportio, invenire.

Ex hoc Problemate ad distantiam Lunæ à Terrâ dimetiendam via aperitur. Centrum Lunæ esto C, centrum terræ A, oculus in superficie terræ in B; semidiameter orbis Terræ AB. Cogitentur tam ex terræ centro A, quàm ab oculo B extendi rectæ ad Lunæ centrum C. Quo factò constituitur triangulum à Terrâ ad Lunam pertingens, cujus unum latus est semidiameter Terræ AB, reliqua duo sunt distantiæ tam centri Terræ, quàm ipsius oculi à centro Lunæ. In hoc triangulo angulus ACB astronomico artificio innotescit, angulus verò ABC fit notus per instrumentum. Itaque ex his duobus angulis jam cognitis per universale Problema jam dictum innotescet, quæ sit proportio lateris CB, vel AC ad latus AB; hoc est, quoties distantia lunæ à terrâ semidiametrum terræ contineat: ac proinde cum alio jam artificio, quot milliaria radius terræ contineat, innotuerit, ipsa etiam distantia Lunæ à terrâ in milliaribus innotescit. Ad tantæ rei notitiam nos deduxit problema hujusmodi, quod tyro fortè aliquis nullius esse usûs judicasset. Hæc ergo dicta sint in gratiam eorum, quibus illud in ore semper, cui usui, ut ex his etiam cætera, quorum usum non perspiciunt, æstimare discant. Fig. 12.

Amo-

Annotationes quædam pro Tyronibus.

PRiusquam ultro tendamus, expediet hic in memoriam revocare nonnulla, quæ in Elementis traduntur, in quibus sub hæc initia hærere plerumque tyrones solent. Prætereant ista, qui his non indigent.

1. Datum, & notum idem significant in hac materiâ.

2. Circumferentiam circuli partiri solent Mathematici in partes æquales 360, quas gradus appellant, & harum singulas rursus in 60 æquales, quas minuta vocant.

3. Arcus circuli, seu pars circumferentiæ nota dicitur, cùm scitur, quot gradus contineat, tunc enim arcus ille, quanta sit totius circumferentiæ pars, innotescet.

Fig. 13. 4. Angulorum mensuræ sunt arcus circuli, qui ex vertice anguli tanquam centro inter ejus crura describuntur. Sic anguli C mensura est arcus OQ centro C descriptus inter anguli crura CA, CB. Patet ex ultimâ lib. 6. Hac de causâ angulus C dicitur esse tot graduum, quot graduum est ille arcus OQ, ut si arcus OQ est grad. 32, etiam angulus C erit graduum 32.

5. Angulus ille C dari, seu notus esse dicitur, quando scitur, quot graduum sit, hoc est, quot graduum sit arcus OQ inter ejus crura ex vertice, ut centro descriptus.

6. Angulus rectus dicitur 90 graduum, quia arcus inter ejus latera centro vertice descriptus est 90 grad. seu quarta pars circumferentiæ totius.

Et duo recti dicuntur grad. 180; quia arcus inter eorum crura descriptus, eosque subtendens, est grad. 180, semissis nempe circumferentiæ.

Et quatuor recti dicuntur efficere 360 grad. quia subtenduntur a totâ circumferentiâ.

Fig. 14. 7. Si ex anguli vertice ut centro inter ejus latera plures describantur arcus OQ, SV, minor æquè est mensura anguli, ac major; quia minor æquè magna pars est suæ circumferentiæ totius, ac major suæ, ac proinde si arcus major OQ est ex. gr. 32. graduum, quorum tota circumferentia major OQLH est 360, etiam minor arcus SV est graduum 32, quorum minor circumferentia SVRT est 360. Patet ex Corol. 3. prop. 33. lib. 6.

Fig. 14. 8. Cujuscunque trianguli tres anguli simul sumpti efficiunt grad. 180. Quia per 32. lib. 1. tres illi anguli simul sumpti semper efficiunt duos rectos, ac proinde, si ex angulorum verticibus A, B, C tanquam centris inter trianguli cujusvis crura

crura describantur, eodem intervallo circini, tres arcus FG, XZ, OQ simul sumpti semper conflabunt semicirculum, hoc est arcum 180 graduum. Nam si centro C perficiatur semicirculus OQP, & arcus FG transcribatur ex Q in L; tertius arcus XZ æqualis erit residuo LP, adeoque tres simul arcus OQ, FG, XZ conficiunt integrum semicirculum OQLP.

9. Cùm in triangulo ABC quocunque, noti sint duo anguli A grad. 125, B grad. 34. etiam C tertius innotescit, si utriusque dati gradus 159 subtrahuntur a 180 gradibus. Remanent enim gradus 21 tertii anguli C. Patet ex annotatione 8, & ex 32 lib. 1. Atque hac de causâ datis duobus angulis, etiam tertius dicitur esse datus.

10. Pari ratione, si in quovis triangulo (ABC) notus sit unus angulus (B grad. 39.) innotescit etiam summa reliquorum (C, A) si gradus anguli noti (B grad. 39.) subtrahantur à 180 gradibus; remanent enim gradus (141) summæ duorum reliquorum (C, A.) Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de causâ dato uno angulo, dicitur & summa reliquorum dari. *Fig. 15.*

11. In triangulo rectangulo (BAC) dato acuto uno (C grad. 31.) etiam acutus alter (B) innotescet, si acuti dati (C grad. 31.) subtrahantur à gradibus 90, remanent enim grad. (59.) pro acuto altero B. Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de causâ in triangulo rectangulo, cùm datur acutus unus, dari dicitur etiam alter. *Fig. 16.*

12. Quatuor termini A, B, C, Z dicuntur proportionales, cùm primus A est ad secundum B, ut tertius C ad quartum Z

ut A ad B,
ita C ad Z

13. Termini noti sunt, qui numeris exprimuntur, hoc est, quando scitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

14. Cùm e quatuor proportionalibus tres termini sunt noti, quartus verò incognitus, is semper innotescet, si secundus multiplicetur per tertium, & productus numerus dividatur per primum, quotiens enim divisionis erit quartus, qui latebat.

Atque hæc est regula, quæ vulgò proportionum, sive trium, & ob summam utilitatem Aurea appellatur, demonstrata est prop. 19. lib. 9. de quâ vide plura lib. 4. Arithm. cap. 1.

Dato angulo, datur ex tabulis sinus ejusdem: & dato sinu datur angulus; ut si detur angulus grad. 40, 16. gradus quære in vertice tabulæ, minuta autem 16 in columnâ primâ ad lævam.

His

His adscriptum reperies non solùm sinum illis debitum 6463460, sed etiam tangentem 8470620, & secantem 13105396. Contra si detur sinus ex. gr. 6563460, cujus angulum ignores, quære in columnâ sinuum numerum datum; vel si non reperiatur, ei proximè æqualem, in columnâ primâ ad lævam reperies minuta, & in vertice gradus anguli quæsiti.

Denique hoc observa: in analysi trianguli rectanguli quamvis solùm duo data exprimantur; ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto; tamen datum tertium semper est ipse angulus rectus, qui, quia per se notus est, & triangulo rectangulo nominato satis subintelligitur, ulteriùs exprimi non solet.

ANA-

ANALYSIS
TRIANGULI RECTANGULI.
PROBLEMA PRIMUM.

Datis omnibus angulis laterum proportionem invenire.

BAsi AC adscribe totum sinum, lateri AB sinum oppositi anguli C, lateri CB sinum anguli oppositi A. Eadem erit laterum proportio, quæ sinuum. *Fig.* 15.

Demonstratio patet ex defin. 6. cap. 2. Itaque si cupiam scire, quanto latus unum sit altero majus ex. gr. BC quàm AC; sinum 10000000 divide per sinum 5150381. Quotiens 1 $\frac{4849619}{10000000}$ hoc indicabit; sicut enim quotiens est ad 1, ita AC est ad BC.

Vel alterutri lateri circa rectum, puta BC, cui adscribe sinum totum, lateri BA tangentem acuti C, basi AC secantem ejusdem anguli C. Ita patebit laterum proportio, ut patet ex definit. 9. cap. 2.

Problema II.

DAtis basi (*BC pedum* 100,) *& acuto uno* (*B grad.* 59) *reliqua latera* (*AC, AB*) *invenire.* *Fig.* 16.

IN triangulo rectangulo hypotenusa, sive basis dicitur, quæ recto angulo opponitur, latera verò, quæ rectum angulum continent.

Inventio lateris AC.

Ut data basis BC, prout est sinus totus 10000000	ad latus AC, prout est sinus anguli B grad. 59. 8571673

 in

ita eadem basis BC, prout est pedum 100.	ad	ejusdem lateris AC pedes quæsitos....

In quo analogismo, quia tres primi termini sunt noti, etiam quartus incognitus, numerus nempe pedum lateri AC debitorum innotescet per regulam proportionum multiplicando videlicet secundum 8571673 per tertium 100, & productum 857167300 dividendo per primum 10000000, quotiens enim $\frac{857167300}{10000000}$ ex eâ divisione proveniens, est quartus, qui latebat, numerus pedum scilicet, quos continet latus quæsitum AC.

Non assimilis inventio lateris AB. Nam quia datur acutus B grad. 59. etiam per 32. lib. 1. seu annotat. 11. datur acutus alter C grad. 31; unde etiam utriusque dantur. Jam

Ut basis BC, prout est sinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout est sinus ang. gr. 31. 5150381
ita basis BC, prout est pedum 100.	ad	lateris ignoti AB pedes quæsitos.....

Cùm ergo tria prima sint nota, etiam quartum, numerus videlicet pedum lateri AB debitorum per regulam trium innotescet.

Demonstratio.

HOc unum tum hìc, tum ferè etiam in sequentibus erit demonstrandum, quatuor supradictos terminos esse proportionales. Id verò ex definitione 6. cap. 2. manifestum est. Nam basis BC, latus nempe recto angulo A oppositum est sinus totus, seu radius, latus verò AC est sinus anguli oppositi B ex. gr. 59. grad. qui ex tabulis datur 8571673. Igitur quarum partium sinus totus, nempe basis BC est 10000000. earum sinus anguli B, nempe latus AC est 8571673; ac proinde ut basis BC prout est sinus totus 10000000 est ad AC 8571673 sinum anguli B, ita eadem basis BC ex hyp. 100 pedes ad idem latus AC quæsitum, sive ad numerum pedum in latere AC contentorum. Quod erat demonstrandum.

Pari modo per defin. 6. BC est sinus totus 10000000, & AB sinus anguli C 31 grad. qui ex tabulis datur 5150381.

Ergo

Ergo ut BC sinus totus 10000000 ad BA sinum 5150381, ita eadem BC ex hyp. pedes 100. ad eandem BA incognito pedum numero constantem, Quod erat demonstrandum.

NOTA.

Fundamentum hujus, & omnium sequentium operationum, ac demonstrationum est, quòd quando duæ quantitates A, & Z notæ sunt secundùm quamvis earum mensuram, & una earum A etiam nota est in aliâ mensurâ ex. gr. in pedibus, tum etiam altera Z in pedibus necessariò innotescet per regulam auream, vide cap. 1. lib. 4. Arithmeticæ nostræ, ubi id demonstratum est.

Problema III.

Datis latere uno (AC milliariorum 1000,) & acuto uno, latus reliquum (BA,) & basim (BC) invenire. Fig. 17.

Ex uno acuto dato notus fiat alter: ut si B detur grad. 54. his subductis a 90. erit C gr. 36.

Inventio lateris AB.

Ut latus datum AC, prout est sinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout est anguli C dato lateri adjacentis tangens 7265426
ita latus datum AC, prout est milliariorum 1000	ad	lateris ignoti AB milliaria quæsita.

Inventio basis BC.

Ut latus datum AC, prout est sinus totus 10000000	ad	basim ignotam BC, prout est acuti C dato lateri adjacentis secans 12360680
ita latus datum AC, prout est milliariorum 1000	ad	ignotæ BC baseos milliaria quæsita.

Z 2 Quare

Quare cùm in utroque analogiſmo tria prima ſint cognita, etiam quartum utrobique per regulam proportionum innoteſcet: eritque latus AB milliariorum 726 $\frac{5426}{10000}$ baſis verò BC milliariorum 123 $\frac{6068}{10000}$.

Demonſtratio.

PEr defin. 9. cap. 2. latus AB eſt tangens anguli C grad. 36, quæ ex tabulis datur 7265426, latus verò AC eſt ſinus totus 10000000, hoc eſt, quarum partium latus AC eſt 10000000, earum eſt AB latus 7265426. Ergo ut AC 10000000 eſt ad AB 7265426, ita eadem AC ex hyp. 1000 milliar. ad milliaria quæſiti lateris AB, hoc eſt ad numerum milliariorum in AB contentorum, ergo &c.

Pari modo per defin. 9. cap. 2. reſpectu anguli C grad. 36 AC eſt ſinus totus 10000000 & BC ſecans, quæ ex tabulis datur 12360680. Ergo ut AC ſinus totus 10000000 eſt ad BC ſecantem 12360680, ita eadem AC ex hyp. 100. milliarium ad eandem BC ignotum numerum milliariorum continentem, ergo &c.

Problema IV.

Fig. 18. *B*Aſi (*CB* 1000 *perticarum*) *& uno latere* (*AC* 891 *perticarum*) *datis, invenire acutos angulos, & latus alterum* (*AB.*)

Ut baſis data CB perticarum 1000	ad	latus datum AC perticarum 891
ita baſis eadem CB, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	anguli ignoti B, qui dato lateri AC opponitur, ſinum.

Qui proinde per regulam proportionum reperitur 8610000; huic in tabulâ invenitur proximè æqualis 8910065, cui adſcriptus eſt angulus gr. 63, qui per probl. 9. cap. 2. adhuc reperitur exactiùs 15. ergo eſt angulus B, qui latebat, invento autem acuto B datur etiam acutus alter C grad. 27.

Quoniam verò jam in triangulo rectangulo nota eſt baſis CB cum angulo C, latus quæſitum BA invenietur per probl. 2.

Idem latus independenter ab angulis reperitur per probl. 3. in Scholio prop. 47. lib. 1. elem.

De-

Demonstratio.

Per defin. 6. cap. 2. CB est sinus totus 10000000., & CA est sinus anguli B. ergo ut basis BC 1000 pertic. ad latus AC 891 pertic. ita basis eadem BC prout est sinus totus 10000000 ad idem latus AC prout est sinus ignoti anguli B.

Aliter.

Ut latus CA datum pertic. 891	ad	basim CB pertic. 1000
ita sinus totus 10000000	ad	secantem ignoti ang. C datis CB, CA comprehensi.

Demonstratio eadem, sed est defin. 9. cap. 2.

Problema V.

DUobus lateribus datis (*BA pedum* 79, *CA pedum* 100) *acutos angulos, & basim invenire.* *Fig.* 19.

Inveniendus sit angulus acutus C.

Ut datum latus AC adjacens quæsito ang. C	ad	alterum latus datum AB.
ita sinus totus 10000000	ad	anguli quæsiti C tangentem.

Quæ per regulam prop. reperitur 7900000; huic proximè æqualis invenitur in tabula 6156615, cui adscriptum reperies angulum 38 graduum, qui probl. 9. cap. 2. adhuc reperietur exactiùs. Tantus ergo est acutus C, qui latebat, quo ex grad. 90. subtracto datur & alter B grad. 52. quia verò noti jam sunt acuti anguli, & ex hyp. etiam latera per probl. 2. etiam basis BC fiet nota.

Alia basis inventio ab angulis independens traditur probl. 2. Scholii prop. 47. lib. 1. elem.

Demonstratio.

Per defin. 9. cap. 2. respectu anguli C sinus totus est CA, tangens BA. Ergo ut CA ex hyp. pedum 100 ad BA ex hyp. pedum 70, ita eadem CA, prout est sinus totus 10000000 ad eandem BA, ut est tangens quæsiti anguli C.

ANALYSIS TRIANGULI OBLIQUANGULI.

Triangulum, in quo nullus angulus rectus est, obliquangulum voco.

Problema VI.

Fig. 20. 21. *Datis omnibus lateribus lateris segmenta (BF, CF) facta à perpendiculari (AF) ex opposito angulo ducta, & ipsam perpendicularem invenire.*

Centro A intervallo lateris minoris AB describatur circulus secans reliqua latera in O, & Q, & producatur CA in L: manifestum est LC esse summam laterum AC, AB; & OC differentiam eorundem; item patet ex prop. 3. lib. 3. BQ bisectam esse in F. His ita constitutis rectangula BCQ, & LCO (a) æqualia sunt. Ergo per 14. vel 16. lib. 6.

(a) Coroll. 1. prop. 36. l. 3.

Ut BC latus, in quod perpendicularis cadit.	ad LC summam laterum reliquorum BA, AC
ita OC differentia reliquorum laterum.	ad rectam CQ

Quare cùm tria prima sint nota, etiam quartum nempe CQ innotescet, hæc, si perpendicularis infra triangulum cadit, (ut in fig. 20) ablata à latere noto BC notam relinquet BQ, cujus semissis BF est segmentum quæsitum minus, quo subtracto a latere BC, etiam majus segmentum CF innotescet.

Quòd si perpendicularis cadat extra (ut in Fig. 21) tunc ex quartâ proportionali CQ subtrahe latus BC, ut innotescat residuum BQ, hujus enim semissis BF dabit segmentum minus ad quod adjecto latere BC habetur segmentum majus CF.

Ipsa verò perpendicularis AF fiet nota, si ex quadrato lateris BA adjacentis minori segmento subtrahatur quadratum minoris segmenti BF, & ex residuo extrahatur radix, ea enim erit AF, patet ex p. 47. lib. 1.

Porro ipsa quarta proportionalis CQ indicat quando perpendicularis intra triangulum cadat, quando extra; cùm enim minor est latere dato BC, in quod incidit perpendicularis, ea cadet intra triangulum, cùm major, extra.

Hoc problema, quod sanè proinde pulchrum, atque utile est, expeditur etiam per prop. 13. & 12. lib. 2. ut tradidi in scholio ibidem; sed modus hic traditus aliquantò facilior est.

Problema VII.

Datis omnibus angulis, laterum proportionem invenire. *Fig. 22. 23.*

In quovis triangulo eadem est inter latera proportio, quæ inter sinus angulorum lateribus oppositorum.

Demonstratio.

Esto triangulum obliquangulum ABC latera habens inæqualia (aliàs enim res per se esset manifesta) & ex majori CB abscindatur CI æqualis minori AB, ducanturque IL, BF ad AC perpendiculares, quæ quia sunt inter se parallelæ, erit (a) CI (hoc est AB) ad CB, ut IL ad BF. Sed posito sinu toto CI est IL sinus (b) anguli C, & posito sinu toto AB, (hoc est eodem, quo antè, cùm AB, CI æquales sint) BF est (c) sinus anguli BAC, ergo latus AB est ad latus CB, ut sinus anguli C ad sinum anguli BAC, eadem erit in reliquorum comparatione laterum demonstratio.

Tantùm nota. Cùm perpendicularis BF extra triangulum cadit, eam nihilominus esse sinum anguli BAC, quia (d) sinus est anguli BAF, cum quo (e) eundem habet sinum angulus BAC, ejus complementum ad duos rectos.

(a) *Per cor. 1. p. 4. lib. 6.*
(b) *Per def. cap. 1.*
(c) *Per eand.*
(d) *Per eand.*
(e) *Per def. 5.*

Problema VIII.

Fig. 24. **D***Atis omnibus lateribus, angulos invenire.*

Concipiatur in aliquod latus ex opposito angulo demissa perpendicularis AF, & per probl. 6 nota fiant segmenta BF, CF. Tum, quia in triangulo rectangulo BFA dantur BA, BF, per probl. 4. similiter innotescet angulus B. Rursum, quia in triangulo rectangulo CFA dantur CA, CF, per probl. 4. similiter innotescet angulus C, & per prop. 32. lib. 1. seu annot. 9. etiam tertius BAC.

Problema IX.

Fig. 25. **D***Ato latere (AC,) & duobus angulis, reliqua latera (AB, CB) invenire.*

Per Problema 7.

Ut anguli B, qui dato lateri AC opponitur, sinus 6293204.	ad	anguli C oppositi quæsito lateri AB sinum 2756374.
ita latus datum AC 1000 passuum.	ad	lateris quæsiti AB passus.

Rursus per Problema 7.

Ut anguli B dato lateri AC oppositi sinus 6293204	ad	anguli A oppositi quæsito lateri CB sinum 8195521
ita latus datum AC 1000 passuum	ad	lateris quæsiti CB, passus.

In utroque analogismo tria prima nota sunt, quartum igitur utrobique, nimirum latera AB, CB innotescent per regulam proportionum.

Pro-

Problema X.

Datis duobus lateribus (CA ped. 216, BA ped. 112) & angulo (A gr. 113) iis comprehenso, reliquos angulos (C, B,) & latus reliquum (CB) invenire. Fig. 26.

Quoniam CA, BA latera dantur, etiam datur eorum summa 328. ped. & eorundem differentia ped. 104. Rursum, quia datur angulus A grad. 113, datur & reliquorum ignotorum C, B summa (67 grad.) adeoque & semissis summæ (grad. 33, 30.) cujus proinde tangens 6618856 datur ex tabulis: his positis

Ut lat. datorum CA; BA summa 328. ped.	ad	laterum CA, BA differentiam 104. ped.
ita tang. 6618856 semisseos summæ incognitorum ang.	ad	tangentem..... semisseos differ. ignotorum ang. CB

Cùm ergo tria prima sint nota, per reg. prop. innotescet quartum, nempe tangens semisseos differentiæ angulorum ignotorum C, B.., huic in columnâ tangentium proximè reperitur æqualis..., cui adscripti sunt grad..... pro angulo semisseos differentiæ angulorum C, B, quam si addas ad semissem summæ grad. 33, 30, angulorum C, B, habetur B major quæsitus. Si subtrahas, proveniet minor C: latus reliquum CB reperitur per præced. jam enim præter latus, dantur & anguli.

Demonstratio.

Analogismi supra positi est ejusmodi: fiant anguli HPF, FPG æquales angulis ignotis B, C: centro P descripto circulo, qui latera angulorum secet in H, F, G, ducantur ad FP perpendiculares HR, GL, quæ per defin. 1, & 6, & 5 erunt sinus angulorum HPF, FPG, posito sinu toto, seu radio PH, PG, ducatur deinde recta HOG, & fiat HX par ipsi GO jungaturque PX, erit XO differentia ipsarum HO, HX, hoc est ipsarum HO, OG, denique ex centro Fig. 27. 26.

(a) Per 3. l. 3. P ducatur ad HG perpendicularis PQ, (*a*) quæ bissecabit HG, quoniam igitur æquales sunt HQ, GQ; & HX, GO, etiam XQ, OQ æquales erunt. Unde QO est semissis differentiæ XO rectarum HO, OG, ex quo facilè etiam ostenditur, angulum HPQ esse semissem summæ angulorum HPO, OPG, hoc est (*b*) angulorum B, C: & QPO esse semissem differentiæ angulorum HPO, OPG; hoc est B, C: his positis differentia laterum CA, AB esto Z.

(b) Per constr.

Quia HR est sinus anguli HPF, hoc est B, & GL sinus anguli FPG, hoc est C, erit latus (*c*) CA ad latus BA ut HR sinus anguli B ad GL sinum anguli C, hoc (*d*) est (quia æquiangula sunt triangula HRO, GLO) ut HO ad OG. Ergo CA (*e*) est ad Z differentiam laterum CA, BA, ut HO ad ipsarum HO, OG differentiam XO; & invertendo laterum differentia Z est ad CA, ut differentia XO ad HO: atqui (ut jam ostendi) CA est ad BA, ut HO ad OG, igitur (*f*) ex æquo Z differentia laterum est ad BA, ut XO differentia ad OG. Ergo invertendo BA est ad Z, ut OG ad XO; quoniam ergo (ut ostensum supra) CA est ad AB, ut HO ad OG, ac proinde (*g*) componendo summa CA, AB est ad AB, ut HG ad OG; AB verò (ut jam ostendi) sit ad Z, ut OG ad XO, ex æquo (*h*) erit summa laterum CA, AB ad Z laterum differentiam; ut HG ad XO. Sed ut HG ad XO, sic semissis HG nempe HQ, quæ (*i*) tangens est anguli HPQ, ad semissem XO, nempe QO tangentem (*k*) anguli QPO. Ergo summa laterum CA, AB; est ad Z differentiam laterum, ut HQ tangens anguli HPQ (qui, ut ostendi supra, est semissis summæ angulorum BC) ad QO tangentem anguli QPO, qui est semissis differentiæ angulorum B, C. Quod erat demonstrandum.

(c) Per Probl. 7.
(d) Per 4. l. 6.
(e) Per cor. 2. p. 18. l. 5.
(f) Per 22. l. 5.
(g) Per 18. l. 5.
(h) Per 22. l. 5.
(i) Per Def. 9.
(k) Ibidem.

Alia Problematis solutio.

Fig. 28. 29. Ex alterutro angulo incognito, ex. gr. ex B in latus oppositum ducta concipiatur perpendicularis BF.

In triangulo rectangulo BFA, cùm detur basis BA, & acutus angulus BAF, per prob. 2. invenientur BF, & AF, quæ subtractâ ex datâ CA in Fig. 28. additâ verò ad CA in Fig. 29. nota fiet etiam CF.

Rursum ergo in trigono rectangulo CFB cùm dentur duo

latera

latera BF, CF per probl. 5. innotescet BC latus quæsitum, & angulus C, quem unà cum dato A subtrahe a 180. grad, remanebit B alter quæsitorum.

Problema XI.

Datis duobus lateribus AB, CB, & angulo uno C iis non comprehenso, reliquos angulos, & latus reliquum AC invenire. Fig. 30. 31.

Per Problema VII.

Ut AB latus datum dato angulo C oppositum	ad	alterum latus datum CB.
ita sinus anguli dati C.	ad	sinum ignoti anguli A, qui alteri lateri dato CB opponitur.

Quare cùm tria prima sint nota, etiam quartum, nempe sinus anguli ignoti A, innotescet, & per sinum invenietur in tabulis angulus ipse A, si acutus sit; si verò A obtusus, tunc angulus per sinum inventus subtractus a 180 gradibus relinquet quæsitum A. Ratio patet ex defin. 5.

Necesse igitur hic est ad inventionem anguli, ut ejus species aliundè nota sit.

Inventis angulis; latus ignotum AC innotescet per Probl. 9.

Aliter.

Ex angulo B datis lateribus comprehensa ducta intelligatur BF perpendicularis ad latus ignotum AC. Fig. 32. 33.

In triangulo rectangulo BFC, cùm detur basis BC, & unus acutus C, innotescent per Problema secundum CF, & BF. Rursus in trigono rectangulo BFA cùm dentur basis AB, & latus BF, innotescent per Problema quartum angulus BAF, & latus FA.

Quòd si angulus ignotus BAC, qui datis lateribus AB, CA comprehenditur, sit acutus, ac proinde perpendicularis BF, ut in Fig. 32. intra triangulum cadat, an- Fig. 32.

gulus

gulus BAF jam inventus est ipse BAC quæsitus, & tunc FA jam nota addenda est ad CF ante repertam, ut innotescat totum latus quæsitum AC.

Fig. 33. Si verò BAC sit obtusus, adeoque perpendicularis BF, ut in Fig. 33. extra triangulum cadat, angulus inventus BAF subtrahendus est a' 180 gradibus, ut innotescat quæsitus BAC: & tunc FA jam nota demenda ex notâ FC, ut innotescat latus quæsitum AC.

Rursum igitur ad inventionem anguli BAC, & lateris AC necesse est, ut aliundè anguli BAC nota sit species.

DE

DE DIMENSIONE
TRIANGULORUM SPHÆRICORUM
Ex Encyclopædiâ P. Gasparis Schotti E Societate Jesu.

DE ELEMENTIS SPHÆRICIS.
§. I.

Elementa sphærica appello, quæ necessaria sunt tum ad trigonometriam sphæricam, tum ad universam sphæricam scientiam intelligendam, cujusmodi sunt suppositiones nonnullæ, & definitiones.

Quæ sequuntur, voco suppositiones, non quòd nullâ demonstratione egeant, sed quòd demonstrata sumantur à Theodosio, & aliis.

SUPPOSITIONES.

I.

Sphæra est figura solida comprehensa unicâ superficie convexâ, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram sunt, omnes rectæ lineæ ductæ sunt inter se æquales. *Theod. l. 1. sphær. def. 1. 2. 3. 4.* Centrum sphæræ est prædictum punctum. Axis sphæræ est recta quædam linea per centrum sphæræ ducta, & utrimque terminata in sphæræ superficie, circa quam quiescentem circumvolvitur sphæra. Poli sphæræ sunt extrema puncta ipsius axis. *In appositâ figurâ (quam globosam fingere oportet) centrum est E; axis AC, & BD; poli A, & C, B, & D. Melius intelligentur hæc, & sequentia, si ante oculos habeatur globus materialis.* *Fig. 36.*

II.

Polus circuli in sphærâ descripti est punctum in superficie sphæræ, a quo omnes lineæ ad circuli circumferentiam tendentes *Idem def. 5.*

Fig. 36. dentes rectâ sunt inter se æquales. *Circuli AFCG polus unus est B, alter D; circuli verò BFDG polus unus est A, alter C.*

III.

Circuli sphæræ aut sunt maximi, aut non maximi: Maximi sunt, qui dividunt sphæram in duas æquales partes. Et hi
Theod. p. 6. l. 1. habent idem centrum cum sphærâ. Ex quo sequitur, circulos sphæræ habentes idem cum ipsâ centrum esse maximos. Non maximi sunt, qui non dividunt sphæram in duas partes æquales. Et hi non habent idem centrum cum sphærâ. Unde circuli non habentes idem cum sphærâ centrum, non sunt
Fig. 36. maximi. *In figurâ circulus AFCG est maximus; HIKL verò non maximus. Prioris centrum est E, idem quod sphæra.*

IV.

Theod. l. 1. prop. 11. 12. Fig. 36. In sphærâ maximi circuli se mutuò secant bifariam: & e contrario in sphærâ circuli, qui se mutuò bifariam secant, sunt maximi. *Duo circuli, ABCD, & AFCG secant se bifariam in A, & C.*

V.

Omnes maximi circuli ejusdem sphæræ sunt inter se æquales, quia eorum diametri sunt æquales, cùm omnes per idem
Fig. 36. centrum transeant, *ut patet in diametris AC, BD.*

VI.

Theod. prop. 15. l. 1. Si in sphærâ maximus circulus circulum quempiam ad rectos angulos secet, & bifariam eum secat, & per polos ipsius transit. Ad rectos angulos (scilicet sphæricos) secare se dicuntur, quando unus transit per polos alterius, & consequenter non inclinat magis ad unam ejus partem, quàm ad alteram.
Fig. 36. *Sic AFCG secat circulum ABCD ad angulos rectos in punctis A, & C. Sic etiam BFDG secat circulum ABCD ad angulos rectos in B, & D. Utrobique autem bifariam se mutuò secant.*

VII.

Idem prop. 19. l. 1. Si in sphærâ maximus circulus eorum, qui in sphærâ sunt circulorum, aliquem per polos secet, bifariam, & ad angulos rectos eum secat. *Explicatio patet ex proximè dictis.*

VIII.

VIII.

Si in sphærâ maximus circulus per polos alterius cujuspiam maximi circuli transeat, transibit vicissim hic per polos illius. *Sic circulus maximus ABCD transit per polos B, & D circuli maximi AFCD, & hic vicissim per polos A, & C alterius.* *Vide Theor. 1. additum ad prop. 15. l. 1. Theod. apud Clav. Fig. 36.*

IX.

Si in sphærâ circulus circulum per polos secet, circulus maximus est, & bifariam eum secat, & ad angulos rectos. *Sic quia circulus ABCD secat tam HIKL, quàm AFCG per polos ipsorum B, & D, signum est esse maximum circulum, & utrumque bifariam secat, & ad angulos rectos ad H, & K, item ad A, & C.* *Vide Theor. 2. ibid. Fig. 36.*

X.

Si in sphærâ circulus circulum bifariam, & ad angulos rectos secat, circulus maximus est, & per polos eum secat. *Explicatio patet ex proximè dictis.* *Ibidem Theor. 3.*

XI.

Omnis circulus maximus distat undique per quadrantem maximi circuli à suo polo, ideoque omnis quadrans à polo maximi circuli in ipsum ductus est ei ad angulos rectos. *Sic AFCG distat a suis polis B, & D per quadrantes AB, CB, AD, CD &c.* *Per coroll. prop. 16. l. 1. Theod. Fig. 36.*

XII.

Si duo, aut plures maximi circuli maximum circulum ad rectos secent angulos, concursus ipsorum erit ipsiusmet circuli polus. *Patet ex globo materiali, si in illo describantur plures circuli maximi secantes alium maximum perpendiculariter.*

DEFI-

DEFINITIONES.

Clavius l. de Triang. Sphæricor. defi. 1. Fig. 37.

ANgulus sphæricus est, quem in sphæræ superficie duo arcus circulorum maximorum sese mutuò secantes continent. *Tales sunt anguli AEC, CEB &c*; *Dixi*, arcus circulorum maximorum, *quia anguli ab aliis sphæra circulis effecti in superficie sphæra à Trigonometris non considerantur. Dixi prætereà*, sese mutuò secantes, *quia omnes circuli maximi in sphærá se mutuò secant, & nunquam se mutuò tangunt*, per Supposit. 4.

II.

Idem def. 2.

Angulus sphæricus rectus est, quem in sphæræ superficie duo arcus circulorum maximorum sese ad angulos rectos secantium continent. *Tunc autem duo circuli secant se ad angulos rectos, quando unus ad alterum rectus est, hoc est, quando unus secans alterum non inclinat magis ad unam partem, quàm ad alteram, ut suprà dicebam Supposit. 6.*

III.

Idem def. 3.

Angulus sphæricus obtusus est, qui recto major est; acutus verò, qui minor est recto. *Explicatione non eget.*

Vide Clav. l. de triang. sphærica. prop. 10.

Constituitur angulus sphæricus ad punctum datum in dato arcu circuli maximi in superficie sphæra; si per illud punctum, & per polum dati arcûs describatur circulus maximus; hujus enim circuli circumferentia cum arcu dato angulum rectum constituet, cùm circulus hic ad circulum illius arcus sit rectus per Supposit. 7. & 9. *Sic si arcus ADB sit circuli maximi arcûs, & polus ejus sit E; si ex puncto A per E ducatur circulus maximus AEB &c, erit angulus A rectus. Si per datum punctum describatur arcus circuli maximi non per polos dati arcûs, constituet circumferentia hujus circuli cum dato arcu angulos inæquales, obtusum unum, alterum acutum. Sic circuli maximi arcus FHG cum circuli maximi arcu ADB ad punctum F constituit angulum AFH obtusum, & HFD acutum.*

Fig. 37.

IV.

Æquales sphærales anguli sunt, qui sub arcubus circulorum ad æquales angulos inclinatorum continentur.

V.

V.

Triangulum sphæricum est, quod tribus arcubus circulorum maximorum sphæræ superficie continetur. *Itaque latera trianguli sphærici sunt arcus maximorum circulorum singulatim semicirculo minores. Triangulum sphæricum est vel æquilaterum, si nimirum omnes tres arcus fuerint æquales: vel isosceles, si duo tantùm arcus fuerint æquales: vel scalenum, si omnes inæquales inter se fuerint. Item vel rectangulum est; si nimirum aliquem angulum habuerit rectum: vel obtusangulum, si aliquem obtusum habuerit: vel acutangulum; si omnes acuti fuerint. In rectangulo, & obtusangulo triangulo sphærico, si unus angulus est rectus, vel obtusus, possunt alii duo etiam esse recti, vel obtusi; vel alter saltem, quod in rectilineis non contingit.* Idem def. 5.

VI.

Arcus anguli sphærici est arcus circuli maximi, cujus polus est in ipso angulo inter duos arcus angulum sphæricum comprehendentes interceptus. *Sic arcus anguli AEC est AC &c; non omnis ergo arcus angulo sphærico oppositus est illius anguli arcus. Quia verò polus circuli maximi abest ab eo quadrante circuli maximi, fit ut uterque arcuum angulum comprehendentium inter angulum, & anguli polum sit quadrans. Quare si angulus fuerit rectus, arcus anguli erit quadrans: si acutus, quadrante minor; si obtusus, major quadrante.* Clav. def. 6. Fig. 37.

VII.

Complementum arcûs est excessus, quo quadrans eum superat, si arcus minor est quadrante: vel ab eo superatur; si est quadrante major. Clav. def. 7.

VIII.

Complementum anguli sphærici est excessus, quo quadrans arcum ipsius anguli superat, vel ab eo superatur. Clav. def. 8.

IX.

Sinus, Tangens, & Secans anguli sphærici est sinus; tangens, & secans illius arcûs, qui arcus anguli dicitur. Clav. def. 9.

§. II.

DE PROPRIETATIBUS angulorum, & triangulorum sphæricorum.

I.

Fig. 34. SI anguli sphærici crura, sive latera continuantur, concurrunt, & semicirculos efficiunt. *Sic anguli BAC crura AB, AC continuata concurrunt in D, & efficiunt semicirculos ABD, ACD. Ratio est, quia* per 1. Definit. *duo arcus BA, & CA sunt arcus maximorum circulorum sese mutuò secantes*; per 4 verò suppos*i*t. *in sphærâ maximi circuli se mutuò bifariam secant.*

II.

Clavius l. de triang. sph. prop. 13. Fig. 34. Si anguli sphærici crura continuata concurrunt, & semicirculos efficiunt, fiunt duo anguli oppositi inter se æquales. *Tales sunt anguli BAC, BDC. Ratio est, quia habent eandem mensuram, nempe arcum GH* juxta Definit. 6.

III.

Clav. ibid. prop. 5. Fig. 34. Cùm arcus circuli maximi in sphærâ super arcum circuli maximi consistens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit. *Sic arcus circuli maximi IG consistens super arcum AGD facit duos angulos AGI, DGI. Si igitur circulus arcûs IG transit per polum circuli arcûs AGD, secetur hic ab illo ad angulos rectos* per 11. Suppos*i*t. *si non per polum transit, fit unus angulus obtusus, alter acutus: æquivalentes tamen duobus rectis.*

IV.

Clav. ibid. prop. 8. Isoscelium triangulorum sphæricorum duo anguli supra basim sunt æquales, & productis æqualibus arcubus etiam anguli infra basim fiunt æquales. Hinc sequitur, omne triangulum sphæricum æquiangulum esse etiam æquilaterum.

V.

V.

Si trianguli sphærici duo anguli sunt inter se æquales, etiam latera sub æqualibus angulis subtensa sunt inter se æqualia. Hinc sequitur, omne triangulum sphæricum æquiangulum esse etiam æquilaterum. Clav. prop. 9.

VI.

Æquilateri trianguli sphærici singula latera possunt esse quadrantes maximorum circulorum, & singula quadrantibus vel majora, vel minora. Quando singula sunt quadrantes, omnes anguli sunt recti: quando majora quadrantibus, omnes sunt obtusi: quando minora, acuti. E contrario, quando in triangulo sphærico æquiangulo singuli anguli sunt recti, singula latera sunt quadrantes: quando obtusi, majora sunt quadrante: quando acuti, minora. Clav. in cor. prop. 25.

VII.

Isosceles trianguli sphærici æqualia duo latera possunt esse quadrantes, & majora, aut minora quadrantibus. Quando sunt quadrantes, anguli sunt recti: quando majora, obtusi: quando minora, acuti. E contrario, quando duo anguli æquales supra basim sunt recti, latera æqualia sunt quadrantes: quando obtusi, majora sunt quadrante: quando acuti, minora. Clav. prop. 25.

VIII.

In omni triangulo sphærico isoscele, cujus duo latera æqualia sunt quadrantes, si angulus sub ipsis comprehensus est rectus, basis est quadrans: si acutus, quadrante minor: si obtusus, major. Et vicissim, si basis est quadrans, angulus oppositus est rectus: si major quadrante, obtusus: si minor, acutus. Semper autem polus basis est in angulo sub lateribus comprehenso. Clav prop. 26.

IX.

In omni triangulo sphærico, cujus omnes arcus sunt quadrante majores, vel unus quadrans, & reliqui duo quadrante majores, omnes tres anguli sunt obtusi. Clav prop. 27.

X.

Clav. prop. 28. In omni triangulo sphærico rectangulo, cujus omnes arcus sunt quadrante minores, reliqui duo anguli sunt acuti. Et si reliqui duo sunt acuti, erunt singuli arcus quadrante minores.

XI.

Clav. prop. 29. In omni triangulo sphærico; cujus omnes anguli sunt acuti, arcus singuli sunt quadrante minores.

XII.

Clav. prop. 30. In omni triangulo sphærico, cujus unus quidem arcus quadrante major sit, reliquorum verò uterque quadrante minor, nullus angulorum rectus est.

XIII.

Clav. in cor. pro. 38. Fieri non potest, ut in triangulo sphærico rectangulo unus tantùm arcus sit quadrans. *Quare, qui concedit in triangulo unum quadrantem, concedere debet & alterum, & saltem duos angulos rectos.*

§. III.

§. III.

DE DIMENSIONE, TRIANGULORUM

Sphæricorum rectangulorum, in quibus unus tantùm est rectus.

SI triangulum sphæricum habet tres rectos, datis, seu cognitis illis, data sunt etiam latera ipsorum, utpote quadrantes, & vicissim *per 6. Propriet.* Si habet duos rectos, datis illis, dantur & latera rectis opposita, nempe duo quadrantes *per 6. Propriet.* Si datur etiam latus tertium, dátur angulus tertius; & vicissim, quia tunc latus tertium est mensura anguli *per 6. Defin.* In his igitur casibus nullâ trigonometriâ est opus, sed solùm, quando triangulum habet unicum rectum, & reliquos obliquos, cujusmodi est triangulum appositum rectangulum ad B. Sexdecim variatiónes in hoc casu occurrere possunt, pro quibus sexdecim regulas præscribimus. In omnibus nomine basis intelligimus arcum recto angulo oppositum, ut hìc arcum AC. *Fig. 35.*

Propositio I. Problema.

Angulum ex base, & latere, quod angulo quæsito opponitur, invenire.

IN præcedenti triangulo sit data basis AC 60°. & latus AB 20°, sitque inveniendus angulus C oppositus lateri dato. Fiat, ut sinus totus ad sinum lateris AB dati, ita secans complementi basis AC ad sinum anguli C quæsiti, EXEMPLUM. Sinus totus est 10000000, sinus lateris AB 20° est 3420201; secans complementi basis AC 60°, est 11547005. Ductâ secante prædictâ per sinum lateris AB, fit summa 39493089590010, qua divisa per radium 10000000, provenit quotiens 3949308$\frac{9595}{10000}$ pro sinu anguli C, cui respondent 23°. *Fig. 35.*

23°. 15′. 42″. *Juxta hanc normam etiam reliquæ operationes institui debent. Brevitatis causâ omitto exempla in sequentibus.*

Propositio II. Problema.

Angulum ex base, & latere, quod angulo quæsito adjacet, invenire.

Fig. 35. IN præcedenti triangulo data basis AC sit 60°. 30′, latus BC 30°, sitque inveniendus angulus C lateri dato adjacens. Fiat, ut radius ad tangentem lateris BC dati, ita tangens complementi basis AC, ad sinum complementi anguli C quæsiti.

Propositio III. Problema.

Angulum ex base, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAsis AC sit 60°, 30′, angulus A datus sit 13°. 30′ & quæratur angulus C. Fiat, ut radius ad sinum complementi basis AC, ita tangens anguli A dati ad tangentem complementi anguli C quæsiti.

Propositio IV. Problema.

Angulum ex latere quæsito angulo opposito, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. ANgulus investigandus sit C, latus datum AB, & angulus datus A. Fiat, ut radius ad sinum anguli A dati, ita sinus complementi lateris AB dati ad sinum complementi anguli C quæsiti.

Pro-

Propositio V. Problema.

Angulum ex latere quæsito angulo adjacente, & altero angulo non recto invenire.

D*Ummodò constet, num angulus quæsitus sit major recto, aut minor, vel an basis, aut latus alterum non datum sit quadrante majus, aut minus.* Angulus investigandus sit C, latus datum BC, angulus datus A. Fiat, ut radius ad secantem lateris dati, ita sinus complementi anguli dati ad sinum anguli quæsiti. *Fig. 35.*

Propositio VI. Problema.

Angulum ex utroque latere circa angulum rectum invenire.

ANgulus investigandus sit C, latera data AB, & BC circa angulum rectum. Fiat, ut sinus totus ad sinum lateris BC, cui angulus quæsitus adjacet, ita tangens complementi alterius lateris AB quæsito angulo oppositi ad tangentem complementi anguli C quæsiti. *Fig. 35.*

Propositio VII. Problema.

Latus ex base, & altero latere invenire.

BAsis data sit AC, latus datum BC, latus, quod investigatur, AB. Fiat, ut sinus totus ad secantem dati lateris BC, ita sinus complementi basis AC ad sinum complementi lateris AB quæsiti. *Fig. 35.*

Propositio VIII. Problema.

Latus ex base, & angulo, qui lateri quæsito opponitur, invenire.

Fig. 35. BAsis data sit AC, angulus datus C, latus quod quæritur, AB. Fiat, ut sinus totus ad sinum basis AB, ita sinus anguli dati C ad sinum lateris AB quæsiti.

Propositio IX. Problema.

Latus ex base, & angulo, qui lateri quæsito adjacet, invenire.

Fig. 35. BAsis data sit AC, angulus datus A, latus, quod quæritur, AB. Fiat, ut sinus totus ad sinum complementi anguli A dati, ita tangens basis AC ad tangentem lateris AB quæsiti.

Propositio X. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui quæsito lateri adjacet, invenire.

Fig. 35. D*Ummodò constet, an quæsitum latus sit quadrante majus, aut minus; vel an alter angulus non rectus sit acutus, aut obtusus; vel denique, an basis sit quadrante minor, vel major.* Latus quæsitum sit AB, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut radius ad tangentem complementi anguli A dati, ita tangens lateris BC dati ad sinum lateris AB quæsiti.

Pro-

Propositio XI. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui lateri quæsito opponitur, invenire.

LAtus quæsitum A B, latus datum BC, angulus datus C. Fiat, ut radius ad sinum lateris BC dati, ita tangens anguli C dati ad tangentem lateris AB quæsiti.

Propositio XII. Problema.

Latus ex utroque angulo non recto invenire.

LAtus quæsitum AB, anguli dati A, & C. Fiat, ut sinus totus ad secantem complementi anguli A, ita sinus complementi anguli C ad sinum complementi lateris A B quæsiti. *Fig.* 35.

Propositio XIII. Problema.

Basim ex latere, & angulo ei adjacente invenire.

BAsis quæsita AC, angulus datus A, latus datum AB. Fiat, ut sinus totus ad sinum complementi anguli A dati, ita tangens complementi lateris A B dati ad tangentem complementi basis AC quæsitæ. *Fig.* 35.

Propositio XIV. Problema.

Basim ex latere, & angulo ei opposito invenire.

BAsis quæsita AC, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut sinus totus ad secantem complementi anguli A dati, ita sinus lateris BC dati ad sinum basis AC quæsitæ. *Fig.* 35.

Propositio XV. Problema.

Basim ex utroque latere invenire.

Fig. 31. Basis quæsita AC, latus unum datum AB, alterum BC. Fiat, ut sinus totus ad sinum complementi lateris AB, ita sinus complementi alterius lateris BC ad sinum complementi basis AC quæsitæ.

Propositio XVI. Problema.

Basim ex utroque angulo non recto invenire.

Fig. 31. Basis quæsita AC, anguli dati A, & C. Fiat, ut sinus totus ad tangentem complementi anguli A, ita tangens complementi alterius anguli C ad sinum complementi basis AC quæsitæ.

§. IV.

§. IV.

DE DIMENSIONE TRIANGULORUM Sphæricorum obliquangulorum.

AD quatuordecim casus reduci possunt cum *P. Joanne Baptista Ricciolo* omnia, ad quæ obliquangulorum triangulorum sphæricorum dimensiones pertinent quæ totidem Problematibus cum eodem solvo, ut sequitur.

Propositio XVII. Problema.

Angulum specie præcognitum ex datis duobus lateribus, & angulo uni eorum opposito invenire.

A*Ngulus specie præcognitus dicitur*, *quando scitur utrùm sit acutus*, *vel obtusus*. Fiat, ut sinus lateris oppositi angulo dato ad sinum anguli dati, ita latus reliquum datum ad sinum anguli quæsiti, si acutus est. Si obtusus est, subtrahe angulum prædicto modo inventum à gradibus 180, eritque residuum angulus quæsitus.

Pro-

Propositio XVIII. Problema.

Angulum verticalem ex datis duobus lateribus singulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum opposito, & specie anguli oppositi reliquo lateri invenire.

A*Ngulum verticalem appello, qui a datis lateribus comprehenditur.* Fiat, ut radius ad tangentem anguli dati, ita sinus complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi *anguli primò inventi.* Deinde fiat, ut tangens lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi reliqui lateris dati, ita sinus complementi anguli primò inventi ad sinum complementi *anguli secundò inventi.* Jam, si angulis datis lateribus oppositis sunt ejusdem speciei, summa inventorum angulorum primi, & secundi erit angulus verticalis quæsitus; sin minùs, differentia inventorum angulorum erit quæsitus angulus verticalis.

Propositio XIX. Problema.

Angulum utrumque ad basim ex datis lateribus duobus simul semicirculo minoribus, & angulo verticali invenire.

FIAt, ut sinus complementi semisummæ laterum ad sinum complementi semidifferentiæ eorundem, ita tangens complementi semianguli verticalis ad tangentem semisummæ angulorum quæsitorum. Deinde fiat, ut sinus semisummæ laterum ad sinum semidifferentiæ eorundem, ita tangens complementi semianguli verticali ad tangentem semidifferentiæ, addendæ ipsi semisummæ angulorum, ut fiat angulus major, demendæ, ut fiat angulus minor quæsitorum.

Pro-

Propositio XX. Problema.

Angulum quemvis ad basim ex datis lateribus duobus, quorum alterum saltem sit quadrante minus, & angulo verticali acuto invenire.

Fiat, ut radius ad secantem anguli verticalis, ita tangens complementi lateris oppositi angulo quæsito ad tangentem complementi primi casûs. Deinde fiat, ut tangens complementi anguli verticalis, ad secantem complementi anguli primò inventi, ita sinus differentiæ inter primum casum, ac latus alterum ad tangentem complementi anguli quæsiti.

Propositio XXI. Problema.

Angulum tertium ex datis duobus angulis acutis, & latere opposito uni eorum, ac specie lateris oppositi alteri angulo dato invenire.

Fiat, ut radius ad sinum complementi lateris dati, ita tangens anguli adjacentis eidem lateri ad tangentem complementi primi anguli. Deinde fiat, ut sinus complementi anguli adjacentis dato lateri ad sinum complementi reliqui dati anguli, ita sinus primi anguli ad sinum secundi anguli specie conformis lateri non dato. Jam, si latus datum est minus quadrante, summa primi, & secundi anguli inventi conflabit angulum tertium quæsitum; si verò est majus quadrante, summa facta ex secundo angulo, & primi anguli complemento subtracta ex gradibus 180 eundem dabit.

Propositio XXII. Problema.

Angulum basi oppositum ex datis duobus angulis, quorum unus saltem sit acutus, & ex basi iis adjacente, quæ sit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad sinum anguli datorum minoris, ita sinus reliqui anguli dati ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius

radius ad inventum primum, ita ſinus verſus, baſis ad inventum ſecundum. Tertiò addatur inventus ſecundus ſinui verſo differentiæ inter utrumvis datorum angulorum, & reliqui ſupplementum ad gradus 180, & fiet ſinus verſus anguli verticalis quæſiti.

Propoſitio XXIII. Problema.

Angulum quemlibet tanquam verticalem ex datis tribus lateribus quærere.

Fiat, ut radius ad ſecantem complementi lateris unius continentis angulum quæſitum, ita ſecans complementi lateris alterius eundem continentis ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius ad inventum primum, ita differentia ſinuum verſorum anguli quæſiti.

Propoſitio XXIV. Problema.

Baſim ex duobus datis lateribus ſingulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum oppoſito, at ſpecie anguli oppoſiti reliquo dato lateri invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli dati, ita tangens complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi primi arcûs. Deinde fiat, ut ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato, ad ſinum complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi arcûs primi ad arcum ſecundum addendum arcui primo, ſi anguli lateribus datis oppoſiti ſunt ejuſdem ſpeciei, ut habeatur baſis; alioquin differentia inventorum arcuum dabit baſim.

Propoſitio XXV. Problema.

Baſim ex datis lateribus duobus, quorum ſaltem unum ſit quadrante minus, & ex dato angulo verticali acuto, invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum lateris datorum minoris, ita ſinus reliqui lateris ad aliud; invenietur arcus, qui vocetur primus. Deinde fiat, ut radius ad arcum primum, ita ſinus verſus anguli verticalis ad arcum ſecundum, quem adde ſinui verſo differentiæ laterum, & fiet ſinus verſus baſis quæſitæ.

Pro-

Propositio XXVI. Problema.

Basim adjacentem duobus angulis datis acutis ex iis; & ex latere uni eorum opposito, nec non specie lateris oppositi alteri angulo invenire.

Fiat, ut radius ad secantem anguli adjacentis lateri dato, ita tangens complementi lateris dati ad tangentem primi arcûs. Deinde fiat, ut tangens anguli adjacentis lateri dato ad tangentem complementi reliqui anguli dati; ita sinus primi arcûs ad sinum secundi arcûs specie conformis lateri non dato. Jam si latus datum est minus quadrante, summa primi, & secundi arcûs inventi conflabit basim quæsitam. At si majus est quadrante, summa facta ex secundo arcu, & ex complemento primi arcûs ad semicirculum conflabit illam.

Propositio XXVII. Problema.

Latus dato angulo oppositum, specie tamen præcognitum, ex datis duobus angulis, & latere uni eorum opposito invenire.

Fiat, ut sinus anguli oppositi dato lateri ad sinum dati lateris, ita sinus reliqui anguli dati ad sinum lateris quæsiti quadrante minoris. At, si debeat esse majus quadrante, subtrahatur latus inventum à gradibus 180, & habebis latus quæsitum.

Propositio XXVIII. Problema.

Latus utrumque unico actu ex datis angulis duobus simul duos rectos non excedentibus, & ex basi ipsis adjacente invenire.

I

Fiat, ut sinus complementi semisummæ angulorum datorum ad sinum complementi semidifferentiæ eorundem, ita tangens semibasis ad tangentem semisummæ laterum. Deinde fiat, ut sinus semisummæ angulorum datorum ad sinum semidifferentiæ eorundem, ita tangens semibasis ad tangentem semidifferentiæ laterum addendæ ipsi semisummæ laterum, ut habeatur latus majus; demendæ, ut habeatur minus.

Pro-

Propositio XXIX. Problema.

Latus utrumvis ex datis angulis duobus; quorum saltem unus sit acutus, & ex basi adjacente, quæ sit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad tangentem anguli oppositi lateri quæsito, ita sinus complementi basis ad tangentem complementi primi inventi. Deinde fiat, ut tangens complementi basis ad secantem primi inventi, ita sinus complementi differentiæ inter primum inventum, & secundum datorum angulorum, si quæritur latus oppositum angulo acuto; vel sinus complementi summæ factæ ex invento primo, & altero datorum angulorum, si quæritur latus oppositum angulo obtuso ad tangentem complementi lateris quæsiti, si dicta summa, aut differentia non excedat grad. 90. vel complementi ad gradus 180. si excedat.

Propositio XXX. Problema.

Latus quodvis tanquam basim ex datis tribus angulis invenire.

Fiat, ut radius ad secantem complementi alterutrius angulorum quæsitæ basi adjacentium, ita secans complementi reliqui dictorum angulorum ad arcum, qui vocetur inventum. Deinde fiat, ut radius ad arcum inventum, ita differentia duorum sinuum versorum (de quâ mox) ad sinum versus basis quæsitæ. Unus dictorum sinuum versorum fit sinus versus anguli verticalis; alter autem sinus versus differentiæ, quæ est inter quemvis duorum angulorum adjacentium basi, & inter alterius item basi adjacentis supplementum ad gradus 180.

FINIS.

TRIGONOMETRIA.