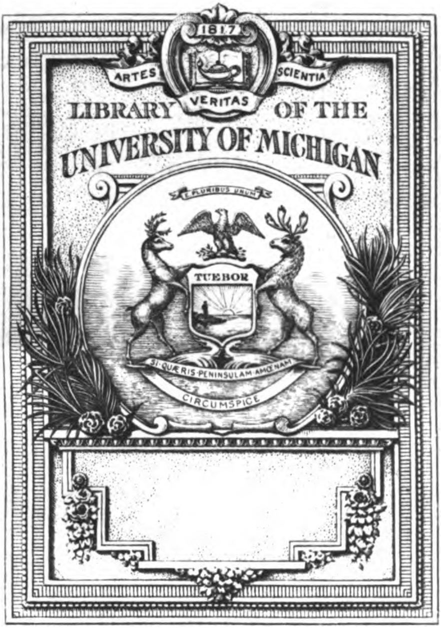
Guardiano —

li 8: Maggio 1747 —

Guardia li 8: Magg


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

ELEMENTI
DI GEOMETRIA PIANA
E DE' SOLIDI
E DI TRIGONOMETRIA
PIANA E SFERICA

Con una Introduzione alla Trigonometria, dove de' Logaritmi si tratta, e del loro uso: e colle Tavole de' Logaritmi, de' Seni, delle Tangenti, e delle Seganti.

A SUA ALTEZZA REALE

PIETRO LEOPOLDO

ARCIDUCA D'AUSTRIA, PRINCIPE REALE
D'UNGHERIA, E DI BOEMIA
GRANDUCA DI TOSCANA ec. ec. ec.

(LUIGI) PANIZZONI
PROFESSORE DI MATEMATICA
NEL REAL COLLEGIO CIGOGNINI
DI PRATO.

[illegible] 1777
[illegible]
[illegible]
1766 - 1784

IN FIRENZE MDCCLXXIV.
PER GAETANO CAMBIAGI STAMPATOR GRANDUCALE

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Si vende da Rinaldo Bonini Libraje nella Condotta.

AL LEGGITORE.

L' Amore al pubblico bene mi ha indotto a rendere comuni a chicchessia colle stampe questi Elementi di Geometria, e di Trigonometria. L' Autore, da cui gli ho ricavati, ch' è il Celebre Matematico Roggero Giuseppe Boscovich, bastevolmente col nome suo già chiaro al Mondo raccomanda questa Opera. La brevità della medesima, e la chiarezza procurata, non solamente trasportandola nella Toscana favella, ma agevolando ancora, e compiendo le dimostrazioni dall' Autore già fatte, o accennate, ed alcun' altra aggiugnendone, o togliendo, secondo che ho giudicato opportuno al preteso fine, possono allettare ciascuno a prevalersi del frutto dell' altrui fatica. In questa Operetta adunque si racchiude distribuita in sedici proposizioni, e varj Corollarj or' alle definizioni, or' alle stesse proposizioni annessi tutta la Geometria, senza che a mio credere nulla del necessario manchi, mentre alcune altre proposizioni da Euclide dimostrate, e quì tralasciate o spontaneamente da queste discendono, o non bisognano per essersi dal medesimo pro-

po-

poste in grazia delle seguenti, che in altra guisa quì vengono dimostrate: anzi de' solidi ragionando si trovano quì comprese ancora le più utili proposizioni da Archimede trattate alla diversa superficie de' corpi appartenenti. Alla Trigonometria premetto una breve, ma necessaria notizia de' Logaritmi. E la Trigonometria, secondo il metodo del soprannominato Autore, in tre parti divido, nella prima delle quali si espongono le Funzioni degli Archi, e loro Tavole: nella seconda la Risoluzione de' triangoli piani; e nella terza la Risoluzione de' triangoli sferici: dopo le quali per maggiore comodità aggiungo le Tavole de' Logaritmi, e quelle de' Seni, delle Tangenti, e delle Seganti. Le quali cose quì basti avere brevemente esposte per dare fin da principio contezza di questa Operetta.

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA
PARTE I.
Della Geometria Piana.

ASSIOMI.

I. LE quantità uguali ad una terza quantità sono fra loro uguali: e la quantità, che è maggiore, o minore di una delle due quantità uguali, è maggiore, o minore dell'altra.

II. Se da due uguali quantità se ne tolgano due altre uguali, il residuo nelle prime sarà uguale: e se a due uguali quantità se ne aggiungano altre due uguali, il risultato è uguale: se poi a due disuguali quantità se ne aggiungano, o tolgano due altre uguali, il risultato o il residuo è disuguale.

III. Le quantità, che o ne contengono un'altra, o sono da questa contenute un'egual numero di volte, sono fra loro uguali: onde due quantità uguali moltiplicate, o divise per una terza quantità, restano uguali.

IV. Se di due quantità la prima sia doppia, o tripla, o quanto si voglia moltiplice dell'altra; e dalla prima si tolga il doppio, il triplo ec. di quel che si toglie dall'altra; il residuo nella prima è doppio, o triplo ec. del residuo dell'altra.

V. Le quantità, che poste una sopra l'altra perfettamente combaciano, sono uguali: e se sono uguali, soprapposte combaciano.

VI. Il tutto è maggiore di qualsivoglia sua parte: ed è uguale a tutte le parti prese insieme.

POSTULATI.

VII. Post. 1. Si domanda di potere da qualunque punto tirare una linea retta a qualunque altro punto.

VIII. Post. 2. Di poter prolungare una retta terminata, sicchè resti sempre retta.

IX. Post. 3. Di potere da qualunque punto, come da centro, ed a qualunque intervallo descrivere un circolo.

X. Post. 4. Di potere da una retta maggiore togliere una parte uguale ad un'altra minore.

DEFINIZIONI.

XI. Def. 1. *Il punto* è quello, che non ha parte veruna.

XII. Def. 2. *La linea* è una lunghezza priva di larghezza.

XIII. Def. 3. *La superficie* ha lunghezza e larghezza, ma non profondità.

XIV. Def. 4. *Il solido* è una estensione in lunghezza, larghezza, e profondità.

ANNOTAZIONI.

XV. Per intelligenza delle suddette definizioni si concepisca una tavola liscia K L (Fig. 1.) la cui parte A sia bianca, B nera, C cerulea, D rossa; E I sia il limite dividente il bianco dal nero. Fig. 1.

1. Or siccome, dove comincia il nero finisce il bianco, così il limite è l'idea d'una linea lunga, non larga. Lo stesso dicasi degli altri limiti I G, I H, I F.

2. Il luogo, dove si uniscono le suddette linee, cioè il punto I, non ha lunghezza, nè larghezza, e però nè meno parti, altrimenti alcuna di quelle linee sarebbe anche larga contro l'ipotesi: e questa è l'idea del punto. Quindi è chiaro quell' assioma = = che una linea sega un'altra in un sol punto = =.

3. La estensione per es. del color bianco A in E I, G I nata da uno di questi limiti, che si concepisca condursi sopra l'altro limite senza inchinarsi mai ad una parte più, che all' altra, ci dà l'idea della superficie lunga, e larga, ma non profonda; altrimenti que' limiti sarebbero anche larghi contro l'ipotesi,

4. Finalmante se le linee E I, I G fossero limiti di due superficie estese per la grossezza della Tavola, ed una di queste si concepisse condursi sopra l'altra senza inchinarsi mai ad una più, che all'al-

tra parte, nascerebbe la idea del solido, la cui lunghezza sarebbe, come una di quelle linee, la larghezza, come l'altra delle stesse linee, e la profondità, come la grossezza della Tavola.

5. Quindi il punto è termine di una linea nata dal flusso di lui: la linea è termine di una superficie nata dal flusso della linea: La superficie è termine di un solido nato dal flusso di quella superficie.

XVI. Def. 5. *Il Circolo* è una figura piana chiusa da una sola linea curva, chiamata *Circonferenza*, o *Periferia*, a cui tutte le rette, che possono tirarsi dal punto di mezzo chiamato *Centro*, sono fra loro uguali, e diconsi *Raggj*, o *Semidiametri*.

XVII. Def. 6. *Il Diametro* è una retta, che vien tirata per il centro, e terminata da una parte, e dall'altra alla periferia, e divide il circolo in due parti uguali.

ANNOTAZIONI.

XVIII. 1. Le curve A D B I, F G L K sono circoli: le rette A B, F L sono loro diametri: le rette uguali C G, C H, C L, ec., ovvero C A, C D, C E ec. sono raggj, o semidiametri di que' circoli (Fig. 2.) Fig. 2.

2. Ogni Circolo dividesi in 360. parti uguali, chiamate *gradi*, e ciascuno di questi in 60. minuti primi, ed ognuno di questi in 60. secondi, e così in infinito. Scrivendo per brevità, i gradi si distinguono da un zero soprapposto al numero, ed i minuti da lineette pur soprapposte; per es. 35°., $25'$., $36'$., $42''$. ec.

3. Se

3. Se due circoli abbiano lo stesso centro, e le rette, A C, H C nel circolo maggiore comprendano l' arco G H di 30°., anche le rette D C, E C nel circolo minore comprendono l' arco D E di 30°., perchè per una parte ogni circolo ha 360°. uguali; e per l' altra, se dall' arco maggiore G H si tirino al punto C tante rette, quanti gradi contiene, quelle dividono ancora l' arco minore in altrettante parti fra loro uguali, che sono suoi gradi, come è manifesto.

XIX. Def. 7. *L' angolo* è una inchinazione di due linee fra loro unite in un punto chiamato *Vertice*, o *Cima*.

ANNOTAZIONI.

XX. 1. Se tutte due le linee siano rette l' angolo è rettilineo; se tutte due siano curve, l' angolo è curvilineo: se una sia retta, e l' altra curva, l' angolo è mistilineo.

2. La idea dell' angolo si ha considerando il circolo. Le rette H K, F L, che si segano in C, fanno gli angoli L C H, H C F, F C K, K C L, che non sono maggiori degli angoli B C E, E C A, A C I, I C B., sebbene i lati di questi siano minori de' primi, perchè gli angoli non dipendono dalla lunghezza de' lati, ma dalla diversa inchinazione, o apertura de' lati.

3. Quindi la misura degli angoli sono i gradi contenuti nell' arco segato da' lati, e descritto dal vertice, come da centro: e perchè l' arco E B contiene per es. 60°., come l' arco H L. (1); però l' angolo L C H è di 60°. come l' angolo B C E: onde è chiaro, qualunque circolo dal centro C descritto a (1) 18. An. 3.

qualunque intervallo essere atto a misurare questo angolo.

Per brevità userò in avvenire i segni seguenti.

= segno di ugualità: per es. A, = B, significa, A, B essere uguali.

+ Significa più, segno di aggiunta: per es. 4 + 8 significa la somma 12.

— Meno, segno di sottrazione: per es. 8 — 3. = 5.

X Segno di moltiplicazione: per es. 3 X 5 = 15.

Δ Significa Triangolo.

COROLLARIO.

XXI Quindi dato il punto M nella retta O N si fa un' angolo uguale al dato angolo E C B (Eucl. lib. I prop. 23.)

Fig. 3.

COSTRUZIONE.

Dal vertice M si descriva l'arco Q P indefinito (2) coll' intervallo M P = C E raggio: indi fatto centro in P coll' intervallo B E si descriva l'arco di un altro circolo, che segherà l'arco P Q in Q, e per il punto Q si tiri la retta Q M: dico essersi fatto l'angolo Q M P = E C B dato.

(2) 9. Post. 3.

DIMOSTRAZIONE.

La misura dell' angolo E C B è l'arco E B (3), e la misura dell' angolo Q M P è l'arco Q P: ma questi archi sono uguali per costruzione, essendo stati descritti cogli intervalli C B = M P; B E = P Q: dunque

(3) 20. An. 3.

que gli angoli misurati sono uguali: dunque su la retta O N si è fatto Q M P = E C B. Ciocchè ec.

XXII. Def. 8. *Linea perpendicolare* dicesi quella, che, cadendo sopra un' altra fa gli angoli uguali da ambe le parti: e questi angoli sono retti, e misurati ciascuno dal quadrante di un circolo; come sono per es. G C L, G C F. Fig. 2. Fig. 2

XXIII. Def. 9. *Angolo ottuso* dicesi quello, che è maggiore di un retto; per es. F C H.

XXIV. Def. 10. *Angolo acuto* è quello, che è minore di un retto per es. H C L.

COROLLARIO I.

XXV. Quindi l' angolo retto è misurato da 90°., l' acuto da meno di 90°., l' ottuso da più di 90°.

COROLLARIO II.

XXVI. Quindi una retta cadendo sopra un' altra fa due angoli retti; o tali, che presi insieme sono uguali a due retti (Eucl. lib. 1. prop. 13.)

DIMOSTRAZIONE.

Il primo caso è chiaro, se una retta cada perpendicolare sopra l' altra, perchè (4) fa gli angoli uguali da ambe le parti, e questi sono retti. (4) 22. Def. 8.

Il secondo caso è parimente chiaro, se una retta cioè cada obliqua sopra l' altra, come la H C sopra la F L, perchè gli goli F C H, H C L presi insieme sono misurati da tutta la semicirconferenza, cioè da 180°., cioè da tanti gradi, quanti vi vogliono a misurare due retti (5). Dunque una retta ec. Ciocchè ec.

(5) 25. Cor. 1.

COROLLARIO III.

XXVII. Quindi infinite rette, che concorrano a segarsi in un punto, non fanno più di quattro angoli retti.

DIMOSTRAZIONE.

Gli angoli K C L, L C H, H C G, G C F, e quanti si vogliano, che concorrano nel punto C, sono tutti compresi, e misurati da tutta la periferia del circolo, cioè da 360°. cioè da tanti, quanti si richieggono a misurare quattro retti angoli (6): Dunque ec. Ciocchè ec.

(6) 25. Cor. 1.

COROLLARIO IV.

XXVIII. Quindi gli angoli alla cima opposti sono uguali (Eucl. lib. 1. prop. 15.)

DIMOSTRAZIONE.

Se da uguali quantità si tolgano parti uguali, o una parte commune, il residuo di quelle è uguale (7): ma la semiperiferia H L K = L K F parimente semiperiferia; e l'arco L K (8) è comune alle dette semiperiferie: dunque tolto l'arco L K commune, rimangono gli archi H L, F K uguali: ma questi archi misurano gli angoli H

(7) Ass. 2.

(8) 17. Def. 6.

C L

G L, F C K, (9) che sono alla cima opposti: (9) 30. Ax. dunque gli angoli H C L, F C K alla cima 3. opposti sono uguali: Ciocchè ec.

XXIX. Def. 11. *Triangolo equilatero* è quello, che ha tutti i lati uguali: per es. A B C. Fig. 4. Fig. 4.

XXX. Def. 12. *Triangolo isocele* è quello, che ha due soli lati uguali: per es. A B, B C. Fig. 5. Fig. 5.

XXXI. Def. 13. *Triangolo scaleno* è quello, che ha tutti i lati disuguali: per es. A B C. Fig. 6. Fig. 6.

XXXII. Def. 14. *Triangolo rettangolo* è quello, che ha un' angolo retto: per es. B A C. Fig 6. Fig. 6.

XXXIII. Def. 15. *Il Quadrato* è una figura composta di quattro lati uguali, e di quattro angoli uguali, cioè retti: come nella Fig. 1. Fig. 1.

XXXIV. Def. 16. *Rettangolo* è una figura quadrilatera, che ha i lati opposti uguali, e tutti quattro gli angoli uguali: cioè retti, come nella figura 7. Onde ogni quadrato è rettangolo, ma non ogni rettangolo è quadrato. Fig. 7.

XXXV. Def. 17. *Linee parallele* sono le rette, che, quanto si voglia, prolungate non mai si uniscono, ma sono fra loro sempre ugualmente distanti: per es. B A, D C. Fig. 8. Fig. 8.

XXXVI. Def. 18. *Linee convergenti* sono le rette, che prolungate si uniscono in un punto, dove fanno un' angolo: per es. B G, I G Fig. 8. Fig. 8.

XXXVII. Def. 19. *Linee divergenti* sono le rette, che prolungate sempre fra loro si sco-

Fig. 8. ſcoſtano: per eſ. dal punto G conſiderate le rette G H, G A, G B, G I Fig. 8.

ANNOTAZIONI.

XXXVIII. Le proprietà delle parallele ſono tre I. ſe due parallele ſiano ſegate da una retta, l' angolo eſterno è uguale all' interno, ed oppoſto: II. Gli angoli alterni ſono fra loro uguali: III. Gli angoli interni poſti alla ſteſſa parte, e preſi inſieme ſono uguali a due retti; (Eucl. lib. 1. prop. 29.)

DIMOSTRAZIONE

Della Parte I.

Se la retta B A è parallela alla retta D C, la inclinazione di amendue ſu la retta E O è uguale: altrimenti le due prime non ſarebbero fra loro parallele (1). Dunque le rette B A, D C. dalla ſteſſa parte fanno lo ſteſſo angolo colla retta E O (2): Dunque l' angolo B G F = D F O. Ma il ſecondo è eſterno, ed il primo è interno, ed oppoſto; dunque ec. Lo ſteſſo dicaſi degli angoli B G E, D F G. ec.

Fig. 8.
(1) 35. Def. 17.
(2) 19. Def. 7.

DIMOSTRAZIONE

Della Parte II.

Eſſendo l' angolo G F C = D F O verticalmente oppoſti (3); e l' angolo B G F = D F O (4); ancora l' angolo B G F = G F C (5). Ma queſti diconſi angoli alterni, Dunque ec.

(3) 28. Cor. 4. Def. 10.
(4) Per la parte I.
(5) Aſs. I.

ec. Lo stesso dicasi degli angoli DFG, FG A, DFO, EGA, BGE, OFC.

DIMOSTRAZIONE
Della Parte III.

Gli angoli DFO, DFG presi insieme sono uguali a due retti (6): ma l' angolo BGF = DFO (7): dunque ancora gli angoli BGF, DFG presi insieme sono uguali a' due retti; perchè a due quantità uguali BGF, DFO si aggiunge la quantità comune DFG, onde il risultato è uguale (8), ma gli angoli BGF, DFG sono interni, e posti alla stessa parte. Dunque ec. Ciocchè ec.

(6) 26. Cor. 2. Def. 10.
(7) Per la parte I.
(8) Ass. 12.

COROLLARIO I.

XXXIX. Quindi se, una retta segando due altre, I. L' angolo esterno è uguale all' interno, ed opposto: II. o gli angoli alterni sono uguali: III. o gli angoli interni posti alla stessa parte, e presi insieme sono uguali a due retti; le due rette segate fra loro sono parallele (Eucl. lib. 1. prop. 28.)

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Se per ipotesi l' angolo esterno DFO = BGF interno, ed opposto, le rette BA, DC hanno dalla stessa parte una medesima inclinazione su la retta EO (9). Dunque le rette DC, BA conservano fra loro una uguale distanza, e però sono parallele (1). Dunque ec.

(9) 19. Def. 7.
(1) 35. Def. 17.

DI-

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Gli angoli alterni B G F, G F C per ipotesi sono uguali: ma ancora l' angolo esterno D F O = G F C alla cima opposto (2): Dunque D F O = B G F interno, ed opposto. (3) Ma se è così, le due rette sono parallele. (4): Dunque ec.

(2) 28. Cor. 4. Def. 10.
(3) Ass. 1.
(4) Per la I. parte.

DIMOSTRAZIONE

Della III. Parte.

Gli angoli interni B G F, D F G posti alla stessa parte, e presi insieme per ipotesi sono uguali a due retti: ma ancora l' angolo esterno D F O preso insieme coll' angolo D F G è uguale a due retti (5). Dunque da queste due uguali quantità togliendosi l' angolo D F G comune, i residui di quelle sono uguali (6), cioè D F O = B G F interno; ed opposto. Ma se è così, le due rette sono parallele (7). Dunque ec. Ciocchè ec.

(5) 26. Cor. 2. Def. 10.
(6) Ass. 2.
(7) Per la I. parte.

COROLLARIO II.

XL. Quindi se due rette sono parallele ad una terza, sono anche fra loro parallele (Eucl. lib. 1. Prop. 30.).

Fig. 9.

DIMOSTRAZIONE.

Se le due rette B A, K H sono parallele alla retta D C, tirata la retta E O, che se-

seghi le suddette in G, F, I, le rette B A, K H, hanno la medesima inclinazione dalla stessa parte su la retta E O, che ha la retta D C (8): e però sì l'angolo K I Q, come l'angolo B G O = D F O: dunque ancora l'angolo K I O = B G O (9): ma il primo è esterno, ed il secondo è interno, ed opposto: e quando questi sono uguali, le due rette sono parallele (1). Dunque ec.

(8) 38 per la 1. parte An: Def. 17

(9) Ass. 1.

(1) 39. Cor. 1. parte I.

COROLLARIO III.

XLI. Quindi da un dato punto, per es. F, si può tirare una retta D C, parallela ad un' altra data; per es. B A. (Eucl. lib. 1. Prop. 31.) Fig. 5.

DIMOSTRAZIONE

Se da qualsivoglia punto, per es. G della retta B A, si tiri una retta, che passi per il dato punto F, per es. la retta G F O; ed in F si faccia l'angolo O F D = O G B (2); l'angolo O F D è esterno, e l'angolo O G B è interno, ed opposto; ma quando questi due angoli sono uguali, le due rette sono parallele (3): Dunque la retta D F C si è fatta parallela alla retta B G A. Dunque ec. Ciocchè ec.

(2) [illegible] Cor. Def. [illegible]

(3) 3[illegible] a [illegible] 1. De[illegible]

XLII. Def. 20. *Il parallelogrammo* è una figura quadrilatera, i cui lati opposti sono paralleli: onde ogni rettangolo è parallelogrammo, ma non ogni parallelogrammo è rettangolo. Fig. 10. e 7.

PROPOSIZIONE I.

XLIII. In ogni triangolo rettilineo, se si pro-

prolunghi un lato, l'angolo esterno è uguale a' due interni, ed opposti: e tutti e tre gli angoli di un triangolo presi insieme sono uguali a due retti. (Eucl. lib. 1. prop. 32.)

SPIEGAZIONE.

Fig. 11.

Nel △ A B C prolungato il lato A C in D, nasce l'angolo esterno B C D; dico 1. questo angolo essere uguale a' due interni, ed opposti A, B presi insieme: 2. Gli angoli A, B, A C B tutti e tre insieme presi essere uguali a due retti.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Dal punto C si tiri la C E parallela al lato A B (4): l'angolo esterno E C D = B A C interno, ed opposto (5); e l'angolo B C E = A B C, essendo alterni (6). Dunque la somma de' due angoli E C B + E C D, cioè tutto l'angolo esterno B C D è uguale a due interni, ed opposti A + B presi insieme. Ciocchè ec.

> (4) 41. Cor. 3. Def. 17.
> (5) 38. I. parte An. Def. 17.
> (6) 38. II. parte An. Def. 17.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

L'angolo B C D = A + B presi insieme (7): dunque se a queste quantità uguali si aggiunga BCA angolo comune, il risultato è uguale (8). Ma l'angolo BCA + BCD è uguale a due retti (9). Dunque ancora l'angolo BCA + A + B, cioè

> (7) Per la I. parte.
> (8) Ass. 2.
> (9) 26. Cor. 2. Def. 9.

cioè tutti presi insieme uguagliano due retti. Dunque ec. Ciocchè ec.

COROLLARIO.

XLIV. Quindi 1. tutti gli angoli di un triangolo presi insieme uguagliano tutti e tre gli angoli insieme di qualsivoglia triangolo. 2. Se in un triangolo si sapranno due angoli, sarà noto ancora il terzo. 3. se in un triangolo vi saranno due angoli, la cui somma sia uguale alla somma di due angoli di un altro triangolo, ancora il terzo angolo, di un triangolo uguaglierà il terzo dell' altro.

DIMOSTRAZIONE

Della Parte I.

Le quantità uguali ad una terza sono fra loro uguali (1): ma tutti gli angoli di qualsivoglia triangolo insieme presi uguagliano due retti. (2). Dunque tutti e tre gli angoli insieme presi di qualsivoglia triangolo sono uguali alla somma di tutti e tre gli angoli di qualsivoglia altro triangolo,

(1) Ass.

(2) 43. parte 1.

DIMOSTRAZIONE

Della Parte II.

La somma di tutti gli angoli di un triangolo è uguale a due retti (2) cioè a 180°. Dunque sottratta da 180°. la somma di due angoli, il residuo sarà uguale al terzo angolo. Dunque se saprò due angoli esser

(2) 43. parte 1.

per

per ess. di 60°. per l'uno saprò il terzo pure essere di 60°. perchè $3 \times 60 = 180$.

DIMOSTRAZIONE

Della Parte III.

Se da due uguali quantità, se ne tolgano due altre uguali, i residui sono uguali (3). Dunque essendo la somma di tutti gli angoli di un triangolo uguale a due retti (2), se da tal somma si tolga la somma di due angoli di un triangolo uguale alla somma di due angoli di un altro triangolo, i residui saranno uguali. Ma questi residui sono uguali al terzo angolo (4) Dunque il terzo angolo di un triangolo sarà uguale al terzo dell'altro. Giocchè ec.

(3) Ass. 2.

(4) Per la II. parte.

PROPOSIZIONE II.

XLV. Se in un triangolo due lati, e l'angolo compreso uguagliano due lati, e l'angolo compreso di un altro triangolo, ancora la base del primo è uguale alla base del secondo, e gli angoli opposti a' lati uguali sono uguali, e tutta l'area dell'uno uguale a tutta l'area dell'altro. (Eucl. lib. 1. prop. 4.)

Fig. 12. 13.

SPIEGAZIONE.

Siano ne' triangoli ABC, DEF i lati AB, BC = DE, EF, e l'angolo compreso B = E; dico la base AC = DF, e gli angoli A, C = D, F e il △ ABC = △ DEF.

DIMOSTBAZIONE.

Essendo por Ipotesi i lati A B, B C = D E, E F, e l'angolo intercetto B = E angolo intercetto, gli uni sopra posti agli altri conbaceranno (5). Dunque cadrà il punto A sopra D., il punto C sopra F, e la base A C sopra la base DF, e però tutto il triangolo A B C sopra il triangolo D E F. Dunque fra loro perfettamente conbaceranno: dunque saranno uguali (5). Dunque ec. Ciocchè ec. (5) Ass. 5.

COROLLARIO I.

XLVI. Quindi le rette, che congiungono due altre rette parallele, ed uguali, sono fra loro uguali, e parallele (Eucl. lib. 1. prop. 34.) Fig. 10.

DIMOSTRAZIONE.

Se la retta B C è parallela, ed uguale alla A D, tirata la retta A C, che seghi le suddette parallele, gli angoli alterni B C A, C A D sono uguali (6). Dunque ne' triangoli B C A, C A D il lato A D = B C per ipotesi, ed il lato A C è commnune, e l' angolo intercetto B C A = C A D. Dunque anche la base A B = C D, e l' angolo B = D, e l' angolo B A C = A C D (7): Ma questi sono angoli alterni riguardo alle rette B A, C D segate dalla retta A C, e quando questi sono uguali, le rette sono parallele (8). Dunque le rette, o basi B A, C D non solo sono uguali, ma ancora parallele: Dunque ec. Ciocchè ec.

(6) 38. II. Parte An. Def. 17.

(7) 45. prop. 4.

(8) 39. II. parte Cor. I. Def. 17.

Fig. 14 e 13.

COROLLARIO II.

XLVII. Quindi in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali. (Eucl. lib. 1. prop. 6.)

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 14. e 15. Siano i triangoli A B C, a b c uguali ed isosceli: essendo in ogni triangolo isoscele due lati uguali (9); tutti quattro i lati A B, B C, a b, b c, sono fra loro uguali. Dunque soprapposti que' due triangoli uguali, sicchè il lato B A cada sopra b c, e il lato B C sopra b a, combaceranno (1); e la base A C cadrà sopra la base c a, e l'angolo A sopra c, e l'angolo C sopra a, onde essendo due lati, e un' angolo intercetto in un triangolo uguale a' due lati, e all' angolo intercetto dell' altro triangolo, perfettamente combaceranno, e però saranno uguali (2). Ma per ipotesi l'angolo A = a. Dunque se l'angolo C è dimostrato uguale ancora all' angolo a, sarà uguale ancora all' angolo A (3). Dunque gli angoli alla base ec, Ciocchè ec.

(9) 30. Def. 12.

(1) Ass. 5.

(2) 45. prop. 2.

(3) Ass. 1.

COROLLARIO III

XLVIII. Quindi ogni triangolo equilatero è ancora equiangolo.

Fig. 4.

DIMOSTRAZIONE.

Sia il triangolo A B C: considerato per base il lato A C, essendo i due lati B A, B C

fra

fra loro uguali, ancora gli angoli A, C alla base sono uguali (4): Ma anche considerato per base il lato C B, per la stessa ragione sono uguali gli angoli C, B alla base; dunque ancora l'angolo A = B. Dunque il triangolo A B C sarà ancora equiangolo, Ciocchè ec.

(4) 47. Cor. 2. prop. 2.

ANNOTAZIONI.

XLIX. 1. Tutti tre gli angoli di un triangolo uguagliano due angoli retti, cioè 180°; (5) ma nel triangolo equilatero gli angoli sono tutti fra loro uguali (6): Dunque ciascun angolo del triangolo equilatero è di 60°., perchè $3 \times 60 = 180$,

2. *Se* il triangolo isoscele abbia un' angolo retto, cioè di 90°., dovendo tutti e tre insieme gli angoli essere uguali a due retti, gli altri due angoli uguali alla base saranno ciascuno di 45°. cioè semiretti (7).

(5) 43 II. parte prop. 1.
(6) 48. Cor. 3. prop. 2.
(7) 47. Cor. 2. prop. 2.

COROLLARIO IV.

L. 1. Quindi si deduce, come sopra una data retta si possa formare un triangolo equilatero (Eucl. lib. 1. prop. 1.)

2 E come dentro un circolo si possa descrivere un'esagono regolare (Eucl. lib. 4. prop. 5.)

Fig. 16.

DIMOSTRAZIONE.
Della I. Parte,

Sia la detta retta CB; fatto centro in C coll' intervallo CB descrivasi il circolo BDEAGF (8): indi fatto centro in B collo stesso intervallo B C descrivasi l' altro circolo F C D, che seghi il

(8) Post. 3.

primo ne' punti D, F, e si tirino le rette D C, D B. Essendo C B semidiametro comune a due circoli, le rette D C, D B raggj de' respettivi circoli sono uguali alla retta C B (9): Dunque ancora D C = D B (1). Dunque il triangolo C D B è equilatero, ed è fatto sopra la data retta C B. Dunque ec. Ciocchè ec.

(9) 16. Def. 5.
(1) Ass. 1.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte,

Il triangolo B C D equilatero è ancora equiangolo (2): Dunque l' angolo D C B è di 60°. (3), cioè la sesta parte del circolo, giacchè 6 X 60 = 360. (4). Dunque se si prolunghi la retta B C in A, onde B A sia diametro del Circolo, e fatto centro in A coll' intervallo A C si seghi il circolo in E, G, come fatto centro in B coll' intervallo B C prima segato si era in D, F, e l' arco D B = E A, e ciascuno è la terza parte della semicirconferenza: Dunque l' arco E D resta, che sia una terza parte anch' esso della semicirconferenza. Dunque le corde di archi uguali A E, E D, D B sono fra loro uguali, ed uguali al semidiametro B C. Se lo stesso facciasi nell' altra semicirconferenza A G F B, si avrà una figura di sei lati uguali descritta dentro il circolo. Ma ancora gli angoli di una tal figura sono fra loro uguali. Perchè se da punti E, D, F, G si tirino de' raggj al centro C, essendo questi uguali (5), si hanno sei triangoli equilateri, e però ancora equiangoli (2) dentro il circolo: dunque ciascun' angolo di questi triangoli è di 60°. Ma gli angoli alla cir-

(2) 48. Cor. 3. prop. 2.
(3) 20. An. 3. Def. 7.
(4) 18. An. 2. Def. 6.
(5) 16. Def. 5.

circonferenza fatti dalle corde del circolo sempre comprendono due angoli de' suddetti triangoli, per es. D B F = D B C + C B F, e l' angolo B D E = B D C + C D E, e così in poi, come è chiaro. Dunque sempre gli angoli alla circonferenza sono di 120°. Dunque sono tutti fra loro uguali: Dunque si ha un' esagono regolare, cioè composto di sei lati, ed angoli uguali descritto dentro il circolo.

PROPOSIZIONE III.

LI. Se due triangoli hanno due angoli uguali, e il lato intercetto uguale, hanno ancora gli altri lati, e tutta l' area uguale (Eucl. lib. 1. prop. 26.) Fig. 12. e 13.

SPIEGAZIONE.

Siano i triangoli A B C, D E F, e gli angoli A, C = D, F; e il lato A C = D F; dico i lati A B, B C = D E, E F e tutto il Δ A B C = Δ D E F.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo per ipotesi gli angoli A, C = D, F e il lato A C = D F, sopprapposti gli uni agli altri combaceranno (6). Dunque ancora il lato DE cadrà sopra il lato AB, e il lato FE sopra CB, e fra loro combaceranno; altrimenti la inclinazione del lato D E al lato D F non sarebbe la stessa, che quella del lato A B al lato A C, nè quella del lato F E al lato F D sarebbe la stessa, che quella del lato C B al lato C A, e però neppure sarebbero gli angoli A, C = D, F (7) contra l' ipotesi. Dunque ancora il punto E ca-

(6) Ass. 5.

(7) 19. Def. 7.

cadrà ſopra B; altrimenti E cadrebbe o den-
Fig. 17. e 18. tro il triangolo A B C per eſ. in P, o ſopra un lato per eſ. in Q, o fuori del triangolo A B C per eſ. in G. Ma ſe E cadeſſe in P, gli angoli P A C, P C A = D, F per ipoteſi, ſarebbero contenuti dagli angoli B A C, B C A, ſe E cadeſſe in Q l'angolo Q A C = D per ipoteſi ſarebbe contenuto dall'angolo B A C: e ſe E cadeſſe in G, l'angolo G C A = F per ipoteſi conterrebbe l'angolo B C A. Dunque
(8) Aſs. 6. queſti angoli non ſarebbero uguali (8). Dunque neppure gli angoli D, F = B A C, B C A: contro l' ipoteſi. Dunque il punto E deve cadere in B: Dunque i lati del triangolo D E F combaceranno tutti co' lati del triangolo A B C, e l'angolo E coll' angolo B, e tutto il triangolo D E F col triangolo A B C:
(9) Aſs. 1. dunque ſaranno uguali (9). Dunque ec. Cioc chè ec. ec.

COROLLARIO I.

Fig. 12. e 13.

LII. Quindi ſe in un triangolo due angoli, e un lato adiacente ad uno di eſſi, ed oppoſto all'altro ſiano uguali a due angoli, e un lato adiacente di un'altro triangolo, que' due triangoli ſono uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Se il lato A C = D F, e l'angolo A = D
(1) 44. Cor. prop. 1. e l'angolo B = E, ancora l'angolo C = F (1). Ma quando il lato A C = D F, e gli angoli A, C = D, F, allora tutto il triangolo A B C = Δ D E F (2). Dunque ancora quan-
(2) 51. prop. 3. do A C = D F, e gli angoli, A, B = D, E, tutto il triangolo A B C = D E F: ma i lati AC, DF

ſono

sono adiacenti agli angoli A, D per ipotesi uguali, e sono opposti agli angoli B, E pure uguali per ipotesi. Dunque ec. Ciocchè ec. ec.

COROLLARIO II.

Fig. 14 e 15.

LIII. Quindi ogni triangolo, che ha gli angoli alla base uguali, ha uguali ancora i lati opposti a questi angoli; onde è isoscele (Eucl. lib. 1. prop. 5.)

DIMOSTRAZIONE.

Siano i triangoli A B C, a b c uguali, e gli angoli alla base A, C, a, c tutti quattro uguali: il triangolo A B C soprapposto al triangolo a b c per modo, che l' angolo A cada sopra c, e, l' angolo C sopra a; essendo le basi, e gli angoli loro adiacenti per ipotesi tutti uguale, combaceranno (3). Ma quando due triangoli hanno due angoli, e il lato intercetto uguali, ancora gli altri lati, e tutte le aree sono uguali (4): Dunque ancora il lato A B = c b; e il lato C B = a b. Ma per ipotesi il lato A B = a b: dunque ancora il lato A B = C B (5): Dunque il triangolo A B C è isoscele. Ciocchè ec.

(3) Ass. 5.
(4) 51. prop. 3.
(5) Ass. 1.

COROLLARIO III.

LIV. Quindi, se in un triangolo rettangolo un' angolo sia semiretto, il triangolo è isoscele.

DIMOSTRAZIONE.

In ogni triangolo tutti e tre gli angoli presi insieme sono uguali a due retti (6);

(6) 43. II. parte prop. 1.

onde, se si sapranno due angoli, sarà noto ancora il terzo (7). Dunque se in un triangolo rettangolo siavi un' angolo semiretto, cioè il retto di 90°., e il semiretto di 45.°, ancora l' altro angolo sarà di 45°., cioè semiretto. Dunque i due angoli adiacenti alla base sono uguali. Ma in tal caso ancora i lati opposti a questi angoli sono uguali (8). Dunque il triangolo è isoscele. Ciocchè ec.

(7) 44. II. parte cor. prop. 1.

(8) 53. cor. 2. prop. 3.

COROLLARIO IV.

LV. Quindi 1. ogni parallelogrammo dalla diagonale è diviso in due triangoli uguali, 2. ed in esso i lati, e gli angoli opposti sono uguali. (Eucl. lib. 1. prop. 34.)

DIMOSTRAZIONE
Della I. Parte.

Fig. 15.

Ne' $\Delta\Delta$ ABC, ADC del parallelogrammo BD, oltre la base AC comune, sono ancora gli angoli alterni DCA=CAB, BCA=CAD (9): ma se due triangoli hanno due angoli, e l' angolo intercetto uguali, ancora gli altri lati opposti agli angoli uguali sono uguali, e l' area dell' uno uguale a quella dell' altro (1). Dunque il Δ ABC = Δ ADC. Dunque il parallelogrammo BD dalla diagonale AC è diviso in due triangoli uguali. Dunque ec. Ciocchè ec.

(9) 38. II. part. an. Def. 17.

(1) 51. prop. 3.

DIMOSTRAZIONE
Della II. Parte.

L' angolo B = D (per la I. parte): ma ancora gli angoli alterni DCA=CAB, BCA=CAD,

Dun-

Dunque ancora è la somma DCB = BAD. Ma ancora ne' △△ ABC, ADC i lati opposti agli angoli uguali sono uguali, cioè CD = AB, BC = AD (1). Dunque ancora nel parallelogrammo BD i lati, e gli angoli opposti sono uguali. Ciocchè ec.

PROPOSIZIONE IV.

LVI. Se in due triangoli vi siano tre lati dell'uno uguali a tre lati dell'altro, ancora gli angoli opposti a' lati uguali, e tutti i triangoli sono uguali (Eucl. lib. 1. prop. 8. Fig. 12. e 13.

SPIEGAZIONE

Ne' due △△ ABC, DEF sieno i lati AB = DE, BC = EF, AC = DF; dico esser ancora gli angoli A = D, B = E, C = F opposti a' lati uguali, e il △ ABC = △ DEF.

DIMOSTRAZIONE.

Se la base AC = DF, soprapposte combaceranno (2); e i punti A, C cadranno su' punti D, F. Indi fatto centro in F coll' intervallo CB si descriva l' arco GH; è chiaro, che la cima B cadrà in qualche punto di questo arco. Similmente fatto centro in D coll' intervallo AB si descriva l' arco LI; è chiaro, che la cima B cadrà ancora in qualche punto di questo arco: dunque dovrà cadere nel segamento commune di quei due archi, cioè nel punto E. Ma ancora la cima E per la stessa ragione dovrà essere nel segamento comune di que' due archi, cioè nel punto E: Dunque i △△ ABC, DEF soprapposti

(2) Ass. 4.

posti

posti combaceranno: Dunque saranno uguali (2). Dunque ec. Ciocchè ec.

ALTRA DIMOSTRAZIONE

Fig. 17. e 18. 1. Soprapposto il lato D F al lato AC per ipotesi uguale, il punto E o cadrà sul punto B, o nò: se E cade sopra B, essendo per ipotesi tutti e tre i lati del △ A B C uguali a' tre lati del △ D E F, ancora tutto il △ D E F cadrà sopra il △ A B C, e combacerà. Dunque sarà il △ A B C = △ D E F (2).

2. Ma se negasi, che il punto E cada sopra B, cadrà o fuori del △ A B C, o sopra un lato, o dentro il △ A B C. Se E facciasi cadere fuori del △ A B C, per es. in G, si tiri la retta B G. Cadendo E in G, ed il punto D in A, il lato D E = A G per ipotesi: ma D E = A B per ipotesi. Dunque A G = A B (3): Dunque il △ A B G è isoscele (4). Dunque l'angolo A B G = A G B (5). Ma l'angolo C G B è maggiore del contenuto A G B (6). Dunque C G B è maggiore ancora di A B G = A G B per ipotesi. Parimente cadendo F in C, ed E in G, E F = G C: ma E F = B C per ipotesi. Dunque B C = G C (3). Dunque ancora il △ C B G è isoscele, e l'angolo C G B = C B G (5). Ma l'angolo C G B è maggiore del contenuto A G B (6). Dunque ancora l'angolo C B G per ipotesi uguale a C G B, sarebbe maggiore di A G B. Ma dianzi nel △ A B G per ipotesi isoscele si è dimostrato l'angolo A G B = A B G; e questo maggiore del contenuto C B G; ed ora dimostrasi C B G = C G B, e questo maggiore del contenuto A G B. Dunque gli angoli A G B, A B G sarebbero maggiori, e minori dell'angolo C B G. Ciocchè è impossibile.

(3) Afs. 1.
(4) 30. Def. 12.
(5) 47. Cor. 2. prop. 2.
(6) Afs. 6.

3. Ma

3. Ma neppure può cadere il punto E ſul lato per eſ. B C nel punto Q: perchè allora, cadendo D in A, F in C, ſarebbe il lato A Q = D E: ma D E = A B per ipoteſi: dunque A Q = A B (3). Inoltre ſarebbe Q C = E F: ma E F = B C per ipoteſi: dunque Q C = B C (3) cioè la parte uguale al tutto; il che è impoſſibile.

4. Finalmente neppure può cadere il punto E dentro il Δ A B C, per eſ. nel punto P, perchè, cadendo D in A, F in C, tirata la retta B P, i Δ Δ A B P; C P B ſarebbero iſoſceli, eſſendo D E = A B = A P, ed E F = B C = P C per ipoteſi, e però l' angolo A B P = A P B, e C B P = C P B (4). Ma prolungati i lati A B in O, ed A P in G, l' angolo eſterno O B P = B A P + A P B interni ed oppoſti; e l' angolo eſterno G P B = B A P + A B P interni ed oppoſti (7). Dunque eſſendo comune l' angolo B A P, e l' angolo A P B = ABP per ipoteſi ſarebbe ancora l' angolo OBP = G P B (3). Ma O B P è maggiore del contenuto C B P, che è uguale a C P B per ipoteſi. Dunque ancora G P B ſarà maggiore dell' angolo C B P, e però ancora di C P B (3). Ma C P B è maggiore del contenuto G P B. Dunque G P B ſarà maggiore, e minore dell' angolo C P B. Ma queſto è impoſſibile. Dunque gli angoli alla baſe B P non ſono uguali, nè i lati adiacenti alla baſe ſono uguali, nè que' triangoli ſono iſoſceli. Dunque il punto E non può cadere nè dentro, nè fuori, nè ſopra un lato del Δ A B C, ma ſolo nel punto B. Dunque ec. Ciocchè ec.

(7) 43. I. p. prop. 1.

CO-

COROLLARIO

Fig. 19. LVII. Quindi due circoli segar non si possono, se non in due punti. (Eucl. lib. 3. prop. 12.)

DIMOSTRAZIONE

Si tiri la retta AC, che congiunga i centri de' due circoli, i quali si segano in B, H. Se oltre i due punti B, H que' circoli potessero segarsi in un'altro punto per es. in G dalla parte B, sarebbe il lato AB=AG, ed il lato CB=CG per essere raggj di un
(8) 16. Def. 5. medesimo circolo (8). Dunque, essendo AC lato comune, i due △△ ABC, AGC avrebbero i lati corrispondenti tutti uguali. Dun-
(9) 56. prop. 4. que sarebbero in tutto fra loro uguali (9). Dunque l' uno soprapposto all' altro, devono
(1) Ass. 5. combaciare (1). Dunque ne' suddetti triangoli, essendo il lato AC comune, e però di amendue il punto A cadendo sopra A, e il punto C sopra C, ancora il punto G dovrà cadere sopra B (9). Dunque non può trovarsi un terzo punto, dove due circoli segar si possano. Ciocchè ec. ec.

PROPOSIZIONE V.

LVIII. dividere in due parti uguali un
Fig. 20. rettilineo angolo dato (Eucl. lib. 1. prop. 9.)

COSTRUZIONE

Per dividere in due parti uguali il rettilineo angolo dato HCI, fatto centro in C con

con qualunque intervallo C A descrivasi il circolo E O L, che seghi il lato H C in A, e il lato C I in B: indi fatto centro in A, poi in B con qualunque intervallo, ma in amendue uguale, si osservi il punto K, dove gli archi de' circoli si segano: da K si tirino le rette K A, K B, K C; dico, che la retta K C divide il dato angolo in due parti uguali.

DIMOSTRAZIONE

Ne' $\triangle\triangle$ K C A, B C K il lato A C $=$ B C per essere raggj di uno stesso circolo (2), e il lato K A $=$ K B per essere raggj di circoli uguali (per costruzione); la base K C è comune ad amendue i triangoli. Dunque tutti e tre i lati di un triangolo sono uguali a tre lati dell' altro triangolo. Dunque gli angoli opposti a lati uguali sono uguali (3). Dunque l' angolo A C K $=$ K C B: dunque il dato angolo H C I è diviso ugualmente dalla retta K C: Ciocchè ec. ec.

(2) 16. Def. 5.

(3) 56. prop. 4.

COROLLARIO

LIX. Data una retta terminata dividerla in due parti uguali. (Eucl. lib. 1. prop. 10)

COSTRUZIONE

Per dividere la data retta A B, fatto centro in A, poi in B con qualunque intervallo, ma in amendue uguale, si osservino i punti C, K, dove gli archi si segano; da C si tirino le rette C A, C B, e da K le rette K A, K B; dico K C dividere la data retta A B in due parti uguali.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Ne' △△ A C D, B C D, oltre i lati A C, C B per costruzione uguali, essendo raggj di circoli uguali, ed oltre il lato C D comune, ancora l'angolo A C D = D C B (4): ma se l'angolo intercetto, e due lati di un triangolo sono uguali all' angolo intercetto, e a due lati di un' altro triangolo, anche la base del primo è uguale alla base del secondo triangolo (5). Dunque la base A D è uguale alla base B D. Dunque la retta A B è divisa in due parti uguali.

(4) 58. prop. 5.

(5) 45. prop. 2.

COROLLARIO II.

LX. Data una retta, ed un punto fuori di essa, da questo tirare una perpendicolare alla data retta (Eucl. lib. 1. prop. 12.)

COSTRUZIONE.

Per tirare dal dato punto C la perpendicolare C D su la data retta F G si descriva dal punto C con qualunque intervallo l'arco indeterminato A O B, che seghi la data retta in A, B; indi fatto centro in A, poi in B si prosiegua, come sopra nel cor. 1. n. 59.; dico la retta C K essere perpendicolare alla data F G.

DIMOSTRAZIONE.

Il △ A C D = △ B C D (6). Dunque l'angolo C D A = C D B per essere opposti a lati uguali (7). Ma quando una retta caden-

(6) 59 Cor. prec.

(7) 45. prop. 2.

do sopra un' altra fa da ambe le parti angoli uguali, quella è perpendicolare (8). Dunque cadendo la retta C D su la data F G in modo, che fa l' angolo C D A = C D B, cade perpendicolare, Dunque ec. Ciocchè ec. (8) 22. Def. 8.

COROLLARIO III.

LXI. Data una retta, ed in essa un punto, da questo alzare una perpendicolare alla data retta.

COSTRUZIONE.

Per tirare dal punto D su la data retta F G la perpendicolare D C si prendano ad arbitrio le distanze D A, D B uguali, e fatto centro in A, poi in B collo stesso intervallo A C, B C, si osservi il punto C, dove gli archi tirati si segano: indi tirate le rette C A, C B, C D, dico C D essere la perpendicolare cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Ne' △△ C A D, C B D tutti i lati corrispondenti sono uguali, perchè C A, C B sono raggj di circoli uguali, A D = D B per costruzione, e C D comune. Dunque sono que' due triangoli uguali (9). Dunque l' angolo C D A = C D B, essendo opposti a' lati uguali (1); ma quando una retta cadendo sopra un' altra, fa d' ambe le parti angoli uguali, quella è perpendicolare (2). Dunque la retta C D è perpendicolare alla F G, Dunque ec. Ciocchè ec.

(9) 56. prop. 4.
(1) 45. prop. 2.
(2) 22. Def. 8.

CO-

COROLLARIO IV.

LXII. Quindi 1. se una retta passando pel centro di un circolo sega in due parti uguali una corda del circolo, la sega perpendicolarmente, 2. se la sega perpendicolarmente, la sega in due parti uguali, 3. E se così è, divide ancora in due parti uguali l' arco di sotto. (Eucl. lib. 3. prop. 3.)

DIMOSTRAZIONE.

Della Parte I.

Se la retta C O sega la corda A B in due parti uguali tirate le rette C A, C B, i due △△ C A D, C B D hanno i lati, e però ancora gli angoli corrispondenti uguali. Dunque la retta C O sega perpendicolarmente la corda A B (3). Dunque ec. Ciocchè ec.

(3) 61. Cor. prec.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Tirate le rette C A, C B, come raggi del circolo E O L, dividasi in due parti uguali per la retta C K l' angolo rettilineo A C B (4). Ne' △△ A C D, D C B l' angolo D C B = D C A; essendo per ipotesi diviso ugualmente l' angolo B C A; e l' angolo C D B = C D A, essendo per ipotesi C D perpendicolare alla retta A B segata; ed il lato C D è comune; Ma quando due angoli, e il lato intercetto di un Triangolo è uguale a due angoli, e al lato intercetto di un' altro trian-

(4) 58. prop. 5.

triangolo, tutti i lati, e gli angoli di uno sono uguali ai corrispondenti dell' altro triangolo (5). Dunque il lato A D = D B. Dunque se C D sega perpendicolarmente la retta A B, la divide in due parti uguali.

(5) 51. prop. 3.

DIMOSTRAZIONE

Della III. Parte.

Se la retta K C divide in due parti uguali la corda A B, ed è perpendicolare ad essa, il Δ C D B = Δ C D A, per essere D B = D A, e l' angolo C D B = C D A per ipotesi, e la retta C D comune (6). Dunque ancora l' angolo B C D = D C A: ma gli archi sono misure degli angoli opposti (7). Dunque se gli angoli sono uguali ancora gli archi B O, O A misure degli angoli sono uguali. Dunque la retta K C divide l' arco A O B in O in due parti uguali. Dunque ec. Giocchè ec.

(6) 45. prop. 2.

(7) 20. an. 3. def. 7.

PROPOSIZIONE VI.

LXIII. I Parallelogrammi posti sulla base medesima, o uguale, e dentro le stesse parallele sono fra loro uguali (Eccl. lib. 1. prop. 35., e 36.)

Fig. 21.

SPIEGAZIONE

I. Sulla stessa base A D, e tra le stesse parallele A H, B F sieno i parallelogrammi A B C D, A E F D.

II. Sulle basi uguali A D, E F, e tra le suddette parallele sieno i parallelogrammi A B C D, E F H G; dico sì gli uni; che gli altri esser fra loro uguali.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Ne' △ △ A B E, D C F, il lato AE = DF, e il lato AB = DC per essere lati opposti di parallelogrammi (8). Inoltre, il lato A D = E F = B C (8). Dunque se a' △ △ A B E, D C F aggiungasi C E comune, (9) sarà B E = C F, e però tutti i lati corrispondenti sono uguali. Dunque i due △ △ A B E, D C F sono uguali (1). Tolto adunque il △ C L E comune sarà il quadrilatero B C L A = D L E F quadrilatero (9). Dunque a questi uguali quadrilateri aggiunto il △ A L D comune risulteranno i parallelogrammi A B C D, A E F D uguali. Dunque i parallelogrammi posti sulla stessa base, e fra le stesse parallele sono fra loro uguali. Ciocchè ec.

(8) 46. Cor. 1. prop. 2.

(9) Ass. 2.

(1) 56. prop. 4.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Il parallelogrammo A E F D ha la stessa base E F, che tiene il parallelogrammo EFHG, e sono ambedue fra le stesse parallele B F, A H. Dunque (per la 1. part.) sarà A E F D = E F H G: ma A E F D = A B C D (per la 1. parte): Dunque ancora EFHG = ABCD (2). Dunque ancora i parallelogrammi posti sulle basi uguali, e fra le stesse parallele sono uguali. Ciocchè ec.

(2) Ass. 1.

COROLLARIO I.

LXIV. Quindi i triangoli posti sulla base stessa, o uguale, e fra le stesse parallele sono fra loro uguali (Eucl. lib. I. prop. 37.)

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Le diagonali A C, A F dividono in triangoli uguali i loro parallelogrammi A B C D, A E F D (3). Dunque se questi parallelogrammi sono uguali (4), ancora la metà dell'uno è uguale alla metà dell'altro, cioè il Δ A C D = Δ A F D. Ma questi hanno la stessa base A D, e sono fra le stesse parallele B F, A H. Dunque ec. ec.

(3) 55. I. parte cor. 4. prop. 3.
(4) 63. I. parte prop. 6.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Le diagonali A F, F G dividono in triangoli uguali i loro parallelogrammi A E F D, E F H G (3). Dunque se questi parallelogrammi sono uguali (4), ancora il ΔAEF = ΔEFG (per la prima parte): ma il ΔAEF = ΔAFD (3) = ΔACD (per la prima parte). Dunque ancora i Δ Δ A C D, E F G sono fra loro uguali (5). Dunque ancora i triangoli posti sulle basi uguali, e fra le stesse parallele sono uguali. Ciocchè ec. ec.

(5) Ass. I.

COROLLARIO II.

LXV. Quindi ogni parallelogrammo è doppio del triangolo posto fra le medesime parallele, e sulla base stessa, o uguale (Eucl. lib. 1. prop. 41.)

DIMOSTRAZIONE

I parallelogrammi BD, DE, EH sono uguali (6), e dalla diagonale sono divisi in due triangoli uguali (7): dunque ancora i △△ ACD, AFD, EGF sono uguali (8), e sono la metà de' loro parallelogrammi: dunque ancora il parallelogrammo BD sarà il doppio del △ ACD, o del △ AFD, o del △ EGF. Ma sono tutti fra le stesse parallele BF, AH, e i primi due hanno la stessa base AD del parallelogrammo; ed il terzo l'ha uguale alla suddetta AD. Dunque ec. Ciocchè ec.

(6) 63. prop. 6.
(7) 55. I. parte cor. 4. prop. 3.
(8) 64. Cor. I. prop. 6.

ANNOTAZIONI

LXVI. 1. Si osservi però, che dicendosi uguali due parallelogrammi, l'uno de' quali sia retto, come BD, e l'altro obliquo, come DE, non s'intendono uguali tutti i lati del primo a' lati del secondo, perchè i lati obliqui sono più lunghi de' perpendicolari fra le stesse parallele contenuti; ma s'intendono uguali le aree; il che si vuole dire ancora de' triangoli, che sono la metà de' suddetti parallelogrammi.

2. Siccome l'area di un Parallelogrammo rettangolo si ha moltiplicando un lato per un' altro; per es. AB per AD, giacchè se AB si divida in 4. parti uguali, tre delle quali ne contenga AD, e si tirino tante rette ai lati opposti, avremo contenuti nel parallelogrammo BD 12. quadratini risultati da 3×4 $= 12$,

$= 12$; così per estimare l'area di un Parallelogrammo obliquo si dovrà tirare tra le parallele una retta perpendicolare alla sua base, e questa per quella moltiplicare, non potendosi moltiplicare la base per un lato obliquo, che è sempre variabile, sebbene uguali siano i parallelogrammi.

3. Essendo dalla diagonale divisi in due triangoli uguali i parallelogrammi, l'area di un triangolo si ha moltiplicando la base per la metà del lato ad essa perpendicolare: per es. sia $AD = 3$, $CD = 4$; $3 \times 2 = 6$. mi darà l'area del ΔACD. E se la base non abbia lato perpendicolare per non essere rettangolo, come il ΔAFD; tirando la retta CD perpendicolare fra le dette parallele, saprò la sua area, facendo come sopra.

4. Di qualunque rettilinea irregolare figura si potrà sapere l'area, se dividasi in triangoli rettangoli, come nella fig. 22. ABCDE, moltipliplicando di ciascun triangolo la base per la metà del lato ad essa perpendicolare, e poi facendo la somma de' prodotti dalla moltiplicazione di ciascun triangolo. Fig. 22.

PROPOSIZIONE VII.

LXVII. In ogni triangolo rettangolo, il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale a' quadrati degli altri due lati presi insieme (Eucl. lib. I. prop. 47.)

SPIEGAZIONE

Sia il ΔDCB rettangolo in C, dico il quadrato del lato DB, cioè $ABDG = DCIH + CBLK$, cioè a' quadrati degli altri due lati DC, CB presi insieme. Fig. 23

DIMOSTRAZIONE

Tirata dal punto C la retta CF parallela
(1) 41. Cor. a' lati B A, D G (1), si tirino le rette B H,
3. Def. 17. C G, C A. Ne' $\triangle\triangle$ C D G, H D B, il lato C D = D H, e D G = B D, per esser lati di due quadrati; e gli angoli H D B, C D G intercetti da questi lati uguali sono uguali per essere il primo composto dall' angolo retto HDC, il secondo dal retto B D G, e l' angolo C D B comune ad ambedue: Dunque il $\triangle$ C D G =
(2) 45. prop. 2. $\triangle$ H D B (2). Ma il rettangolo D G F E è doppio del $\triangle$ C D G per essere sulla stessa base
(3) 65. Cor. 2. prop. 6. D G, e fra le stesse parallele DG, CF (3): ed il quadrato D H I C è doppio del $\triangle$ HDB per essere sulla stessa base H D, e fra le stesse parallele H D, I B. (3). Dunque il rettangolo D G E F = D H I C quadrato, perchè le quantità, che sono doppie di due triangoli u-
(4) Ass. 3. guali sono fra se uguali (4). Similmente dimostrasi il quadrato C K L B = E B A F rettangolo. Perchè il $\triangle$ D B L = $\triangle$ A C B (2), per essere il lato B L = C B, e D B = B A, e l' angolo D B L = C B A, siccome composti da un' angolo retto, e dall' angolo comune C B D. Ma il rettangolo B A F E è doppio del $\triangle$ C B A (3), per essere sulla stessa base B A, e fra le stesse parallele B A, C F; ed il quadrato C K L B è doppio del $\triangle$ D B L, per essere sulla stessa base B L e fra le stesse parallele B L, D K. Dunque il rettangolo EBAF = C K L B quadrato. Dunque il quadrato della Ipotenusa, cioè del lato opposto all' angolo retto è uguale ai quadrati degli altri due lati insieme presi. Dunque ec. Ciocchè ec.

CO-

COROLLARIO

LXVIII. Quindi se il quadrato di un lato del triangolo è uguale a' quadrati degli altri due lati insieme presi, l'angolo compreso da questi due lati è retto (Eucl. lib. 1. prop. 48.) Fig. 29

SPIEGAZIONE

Se nel △ ABC i quadrati de' lati AB, BC presi insieme sono uguali al quadrato del lato AC; dico l'angolo ABC esser retto.

DIMOSTRAZIONE

Tirata dal punto B la retta AB, ed alzata la perpendicolare BD = BC, si tiri AD. Nel △ ABD per costruzione rettangolo il quadrato di AD è uguale a' quadrati di AB, BD presi insieme (5). Ma i quadrati di AB, BD sono uguali a' quadrati AB, BC, giacchè BC = BD per costruzione: dunque essendo per ipotesi il quadrato di AC = AD quadrato + BC quadrato, sarà il quadrato di AC = AD quadrato. Dunque i lati AC, AD sono uguali. Dunque ne' △△ABD, ABC tutti i lati sono uguali. Dunque ancora i triangoli, e gli angoli opposti a' lati uguali sono uguali (6). Dunque essendo l'angolo ABD per costruzione retto ed opposto al lato AD = AC, ancora l'angolo ABC sarà retto. Dunque ec. Ciocchè ec.

(5) 67 prop. 7.

(6) 56. prop. 4.

ANNOTAZIONI

LXIX. 1. Per questa proposizione, il cui Autore dicesi essere stato Pittagora, dati in triangolo rettangolo due lati, si trova il terzo. Perchè se per es. nella fig. 6. il minor lato sia di palmi 6.; l'altro di palmi 8., il quadrato del primo sarà 36., ed il secondo 64. Dunque il quadrato della Ipotenusa sarà uguale a $36+64=100$, la cui radice quadrata 10 mi da il lato opposto all'angolo retto. E dato il lato della ipotenusa uguale a 10, ed il minor lato uguale 6; sottratto il quadrato di questo, cioè 36., dal quadrato dell'altro, cioè 100., il residuo 64. sarà il quadrato del lato ignoto, la cui radice 8 mi darà il cercato lato.

Fig. 6.

2. Ma non sempre si può avere esatta la radice quadrata di un quadrato: e quindi procede la notizia delle quantità incommensurabili.

Misura di una quantità dicesi la quantità, che alquante volte presa adegua la quantità misurata, senza che nulla avanzi, o manchi, cioè la *parte aliquota*: per es. il piede è misura del passo composto di 5. piedi: il pollice misura del piede Parigino composto di 12. pollici: la Linea è misura sì del piede Parigino, che ne contiene 144, come del piede Romano, che ne contiene 131., onde la linea è *misura comune* de' detti due piedi.

Quantità commensurabili sono quelle, che hanno qualche misura comune. Quantità incommensurabili sono quelle, che non hanno misura comune. Che si diano le quantità incommensurabili; e l'Aritmetica, e l'Algebra, e la Geometria lo dimostrano per es. nel triangolo rettangolo isoscele i lati uguali siano ciascuno $=1.$, il quadrato sarà pure $=1$, e però il quadrato della Ipotenusa $=1+1=2.$, la cui radice è più di uno, e meno no di due; per modo che niun numero intero, o rotto per se moltiplicato ha per prodotto il 2: onde si potrà avere la sola radice prossima, ma non esatta, cioè = 1. 4142. decime millesime, e per ottenere la radice esatta vi rimangono più di 2., e meno di 3. decime millesime parti di una unità, nè si potrà mai conseguire. Dunque il lato della Ipotenusa nel suddetto triangolo sarà incommensurabile con ciascuno degli altri due lati per non avere una misura comune.

3. Ma siccome in un triangolo rettangolo isocele il quadrato della ipotenusa è il doppio di ciascun quadrato degli altri due lati, così avrà una misura comune cogli altri due quadrati; perchè per es. la metà di ciascun minore quadrato adeguerà esattamente il quadrato della Ipotenusa. Quindi il lato della Ipotenusa in un triangolo rettangolo Isoscele, o la diagonale di un quadrato sarà *incommensurabile in atto* con ciascuno degli altri lati, ma sarà *commensurabile in potenza*, cioè considerati i quadrati.

PROPOSIZIONE VIII.

LXX. In ogni triangolo al maggior lato si oppone l'angolo maggiore, e al minor lato l'angolo minore (Eucl. lib. 1. prop. 18.)

SPIEGAZIONE.

Nel △ A B C sia A B lato maggiore di AC; dico l'angolo A C B esser maggiore dell'angolo A B C. Fig. 25.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Nel lato maggiore AB si prenda il segmento AD = AC: tirata la retta CD, il ΔACD è isoscele: Dunque gli angoli alla base ADC, ACD sono uguali (1). Ma ADC è l' angolo esterno: Dunque è uguale a due interni ed opposti DCB + CBD (2): Dunque ADC è maggiore del solo CBA: dunque ancora ACD, e molto più ACB sarà maggiore di CBA. Dunque al maggior lato AB si oppone il maggior angolo ACB, e il minor angolo CBA al minor lato. Ciocchè ec. ec.

(1) 47. Cor. 2. prop. 2.

(2) 43. I. par. prop. 1.

COROLLARIO I.

LXXI. Quindi in ogni triangolo al maggior angolo si oppone il maggior lato. (Eucl. lib. 1. prop. 19)

DIMOSTRAZIONE.

Sia l' angolo ACB maggiore dell' angolo ABC, il lato AB non è uguale al lato AC, perchè se ciò fosse, il triangolo sarebbe isoscele, e però l' angolo ACB = ABC (3) contro l' ipotesi: Ma il lato AB, neppur è minore di AC; perchè se ciò fosse, l' angolo ABC opposto al lato AC sarebbe maggiore dell' angolo ACB (4, contro l' ipotesi. Dunque resta, che AB opposto all' angolo maggiore ACB sia maggiore del lato AC opposto al minor angolo ABC. La stessa dimostrazione si fa in ipotesi, che l' angolo ACB sia maggiore dell' angolo CAB. Dunque ec. Ciocchè ec.

(3) 47. Cor. 2. prop. 2.

(4) 70. prop. 8.

CO-

COROLLARIO II.

LXXII. Quindi se ne'due △△ A B C, A B D (Fig. 26.) siano i due lati A B, B C = A B, B D; ma gli angoli A B C, A B D compresi da que'lati siano disuguali; la base A D opposta all' angolo maggiore sarà maggiore della base A C opposta all' angolo minore. (Eucl. lib. 1. prop. 24.)

DIMOSTRAZIONE.

Il △ A B D, si sopraponga al △ A B C, come nella figura si suppone fatto: essendo l' angolo A B D per ipotesi maggiore di A B C, il lato B D cadrà fuori del △ A B C, quale dovrà contenersi dal maggior △ A B D. Fatto centro in B coll' intervallo B D descrivasi un' arco, che passerà per C, giacchè B C = B D, e da C si tiri la retta C D. Essendo D B C triangolo isoscele, l' angolo C D B = B C D (5): ma l' angolo ACD è maggiore del contenuto B C D, e però ancora di C D B. Dunque A C D è molto maggiore di A D C contenuto dall' angolo C D B. Ma l' angolo maggiore A C D si oppone al lato A D, e l' angolo minore A D C al lato A C. Dunque A D è maggiore di A C (6). Dunque la base A D opposta all' angolo maggiore A B D è maggiore della base A C opposta all' angolo minore A B C. Ciocchè ec. ec.

(5) 47. cor. 2. prop. 2.

(6) 71. cor. 1. prop. 8

COROLLARIO III.

LXXIII. Al contrario se ne' △△ A B C, A B D siano i lati A B, B C = A B, B D, ma la base

AD

A D maggiore della base A C, l'angolo ABD opposto alla base maggiore sarà maggiore dell' angolo A B C opposto alla base minore.

DIMOSTRAZIONE.

L'angolo A B D non è uguale all' angolo A B C, perchè, se essendo per ipotesi i lati A B, B C = A B, B D, i due triangoli sarebbero uguali in tutto (7) e però ancora la base A D = A C contro l'ipotesi. Ma l'angolo A B D neppure è minore dell' angolo A B C, perchè all' angolo minore si oppone il minor lato (8), onde ancora la base A D sarebbe minore di A C contro l'ipotesi. Dunque resta, che l'angolo A B D opposto alla maggior base A D sia maggiore dell' angolo A B C opposto alla minor base A C. Ciocchè ec. ec.

(7) 45. prop. 2.

(8) 71. cor. 1. prop. 8.

COROLLARIO IV.

Fig. 27.

LXXIV. Di tutte le linee, che da un dato punto possono tirarsi ad una data retta, la più breve è la perpendicolare.

DIMOSTRAZIONE.

Dal dato punto C si tiri alla data retta K L la perpendicolare C B, e poi qualunque altra retta C A. Nel rettangolo △ A B C gli angoli A + C = A B C, cioè ad un retto (9). Dunque A è minore del retto A B C. Ma all' angolo maggiore è opposto il maggior lato (1): Dunque il lato A C opposto al maggior angolo A B C è maggiore del lato C B opposto al minor angolo A. Dunque ec. Ciocchè ec.

(9) 43. II. p. prop. 1.

(1) 71. cor. 1. prop. 8.

AL-

ALTRA DIMOSTRAZIONE.

A C quad. = C B quad. + A B quad. (67, prop. 7.) Dunque A C è maggiore di C B.

COROLLARIO V.

LXXV. Se dalla estremità del diametro di un circolo si tiri una perpendicolare allo stesso diametro questa cade fuori, ed è Tangente del circolo cioè lo tocca in un punto solo (Eucl. part. I. prop, 16. lib. 3.)

DIMOSTRAZIONE.

Fatto centro in C coll' intervallo C B descrivasi un circolo, e dal punto B si ritiri la retta K B perpendicolare alla C B, e da C si tiri qualunque altra retta C A.

Essendo C A maggiore di CB (2), dal circolo è segata in G per modo che G C = C B. Dunque qual si sia punto A della retta K B cade fuori del circolo: Dunque la retta K B nel solo punto B, in cui (per costruzione) è perpendicolare al diametro B C, tocca il circolo. Dunque ec. Ciocchè ec. ec.

(2) cor. p. ...

COROLLARIO VI.

XLXVI. Tra la tangente, e l' arco del circolo non si può tirare al diametro un' altra retta (Eucl. par. II. Prop. 16. lib. 3.). E l' angolo mistilineo fatto dalla Tangente, e dall' arco è minore di qualsivoglia rettilineo angolo. (Eucl. ivi)

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Tirata la retta C A perpendicolare alla retta F B l'angolo retto C E B è maggiore di E B C, essendo nel triangolo rettangolo gli altri due angoli acuti. Dunque il lato CE opposto all' angolo minore E B C è minore del lato C B opposto all' angolo maggiore CEB (3): Ma C B è raggio: dunque C E è minore del raggio: dunque il punto E cade dentro il circolo: dunque la retta E B non è tirata tra la Tangente, e l' arco, ma sega il circolo. Ma ciò vale dovunque si tiri la retta FB, e ad essa perpendicolare la retta C A. Dunque ec. Ciocchè ec.

(3) 71. cor. 1. prop. 8.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Se per la I. parte tra la Tangente K B, e l' arco non può tirarsi altra retta al diametro, già non può aversi altra retta, che colla Tangente formi un' angolo rettilineo al punto B minore del mistilineo K B G; ma neppure può aversi altro angolo uguale al detto mistilineo; perchè (per la I. parte), qualunque retta F B, sega il circolo, e però colla Tangente fa l' angolo E B K, che contiene il mistilineo K B G. Dunque questo è minore di qualunque rettilineo. Ciocchè ec. ec.

CO-

COROLLARIO VII.

Fig. 28.

LXXVII. Tutti i circoli, che hanno i centri in una stessa retta, ed hanno la stessa Tangente, si toccano in uno stesso punto: e se toccansi in uno stesso punto, hanno la stessa Tangente. (Eucl. lib. 3. prop. 13.)

SPIEGAZIONE.

I circoli PRQT, ISVT abbiano i centri nella retta RT: dico 1., che se la retta FM. è tangente comune, i circoli si toccano nel solo punto T;

2. Che se le loro periferie si toccano nel solo punto T, FM è Tangente comune.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Dal centro C del circolo maggiore si tiri la retta CO, che incontri i circoli in due punti, per es. in I, L, e dal centro D del circolo minore si tiri la retta DI.

Nel $\triangle IDC$ il lato IC è minore de' lati $ID + DC$; perchè è $ID = DT$ per essere raggj del circolo minore. Dunque aggiunta la commune DC sarà $ID + DC = CT$. Ma è $CT = CL$ per essere raggj del circolo maggiore, e CL contiene la CI: Dunque CI è minore tanto di CL quanto di $ID + DC$. Dunque qualunque punto I del circolo minore rimane dentro al circolo maggiore. Dunque i due circoli non si toccano, che nel solo punto T. Ciocchè ec. ec.

DI-

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Se qualunque punto I del circolo minore rimane dentro al circolo maggiore, questi due circoli toccarsi non possono, che nel solo punto T (per la I parte). Ma la retta F M per ipotesi tocca nel punto T il circolo maggiore. Dunque nello stesso punto tocca ancora il circolo minore. Dunque è tangente comune. Ciocchè ec. ec.

PROPOSIZIONE IX.

LXXVIII. Nel circolo l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza, se amendue posano sullo stesso arco. (Eucl. lib. 3. prop. 20.)

SPIEGAZIONE.

Fig. 29.

Sia l'angolo A D B alla circonferenza; e l'angolo A C B al centro: dico questo esser doppio del primo in tutti e tre i casi seguenti, cioè 1. quando il lato A D coincide col lato A C: 2. quando il lato A D rimane sopra al lato A C: 3. quando il lato A D cade sotto A C.

DIMOSTRAZIONE

Del I. Caso.

L'angolo esterno ACB=CDB+CBD interni, ed opposti (4): Ma CDB=CBD per essere an-

(4) 43. I. P. prop. 1.

angolì alla base d' un triangolo isòcele (5). Dunque l' angolo A C B è doppio di C D B. Ma questi posano sullo stesso arco A B. Dunque ec. Ciocchè ec.

(5) 47. cor. 2. prop. 2.

DIMOSTRAZIONE
Del II. Caso.

Tirata la retta D E, che passi per il centro C, l' angolo esterno ACE=CDA+CAD interni, ed opposti (4): ma C D A = C A D per essere alla base di un triangolo isocele (5): Dunque A C E è doppio di C D A. Parimente l' angolo esterno B C E = C B D + C D B interni, ed opposti (4): ma C D B = C B D per essere alla base di un triangolo isoscele (6) Dunque B C E è doppio di C D B. Dunque tutto l' angolo A C B è doppio di tutto l' angolo A D B. Ma questi posano sullo stesso arco A B. Dunque ec. Ciocchè ec. ec.

Fig. 30.

DIMOSTRAZIONE
Del III. Caso.

Fig. 31.

Tirata la retta E D che passi per il centro C, l'angolo esterno E C A=C DA + C A D interni, ed opposti (4): ma C D A = C A D per essere alla base di un triangolo isòcele (5): Dunque E C A è doppio di E D A: Parimente l' angolo esterno ECB=CDB+CBD: interni, ed opposti (4): ma C D B = C B D per essere alla base di un triangolo isocele (5): Dunque E C B è doppio di E D B. Se dunque dall' angolo E C B si tolga l' angolo ECA, e dall' angolo E D B si tolga l' angolo E D A, essendo E C A il doppio di E D A (per il 1. caso), il residuo di ECB, cioè l' angolo ACB

D sarà

ſarà doppio dell' angolo A D B, cioè del reſiduo di E D B (6): ma A C B è al centro, A D B è alla circonferenza, ed amendue poſano ſull' arco A B: Dunque ec. ec. Ciocchè ec.

(6) Aſs. 4.

Fig. 29.

COROLLARIO I.

LXXIX. Quindi eſſendo la miſura dell' angolo al centro tutto l' arco, ſu cui poſa, ſarà la metà dell' arco, ſu cui poſa, la miſura dell' angolo alla circonferenza.

DIMOSTRAZIONE

L' Angolo A C B è doppio dell' angolo A D B (7): ma la miſura dell' angolo A C B è l' arco A B (8): Dunque l' angolo A D B è miſurato dalla metà dell' arco A B. Ciocchè ec. ec.

(7) 78. prop. 9.
(8) 20. an. 3. def. 7.

Fig. 32.

COROLLARIO II.

LXXX. Quindi 1. l' angolo A D B alla circonferenza, che poſa ſul diametro A B, cioè ſul ſemicircolo A F B, è retto.

2. L' angolo E D B alla circonferenza, che poſa ſull' arco E A F B maggiore del ſemicircolo, è maggiore di un retto.

3. L' angolo F D B alla circonferenza, che poſa ſull' arco F B minore del ſemicircolo, è acuto, (Eucl. lib. 3. prop. 31.

DIMOSTRAZIONE
Della I. Parte.

L' Angolo A D B è miſurato dalla metà dell' arco A F B (9): ma ſe per ipoteſi l' arco

(9) 79. cor. prec.

co A F B è un semicircolo, la sua metà sarà un quadrante del circolo, cioè 90°.: Dunque l'angolo A D B è di 90°, cioè retto (1). (1) 25. Cor. 1. def. 10.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

L'angolo E D B è misurato dalla metà dell'arco E A F B (9): Ma se l'arco E A F B è maggiore del semicircolo, la sua metà sarà maggiore di un quadrante del circolo: Dunque l'angolo E D B sarà maggiore di un retto, cioè ottuso (1). Dunque ec.

DIMOSTRAZIONE

Della III. Parte.

L'angolo F D B è misurato dalla metà dell'arco F B (9): ma se l'arco F B è minore del semicircolo, la sua metà sarà minore di 90°. Dunque l'angolo F D B sarà minore di un retto, cioè acuto (1). Dunque ec. Ciocchè ec.

COROLLARIO III.

LXXXI. Dato un circolo, e fuor di esso un punto, tirar da questo una retta, che tocchi il dato circolo. (Eucl. lib. 3. prop. 17.)

COSTRUZIONE. Fig. 33.

Dal dato punto A al centro C del circolo D E si tiri la retta A C, e questa si divida in B in due parti uguali (2): indi dal

 pun-

punto B, come da centro, coll' intervallo BC ſi deſcriva il circolo ADCE, che ne' punti D, E incontri il dato circolo DE; dico, che dal punto A tirate le rette AD, AE al luogo del ſegamento de' due circoli, queſte ſono Tangenti del dato circolo DE.

DIMOSTRAZIONE

Tirate le rette CD, CE, gli angoli CDA CEA, che poſano ſul diametro CA, ſono
(3) 80. I. par. cor. prec. retti (3): Dunque le rette AD, AE ſono
(4) 24. def. 10. perpendicolari a' ſemidiametri CD, CE (4). Dunque le rette AD, AE ſono Tagenti del circolo DE (5). Dunque ec. Ciocchè ec. ec.

(5) 75. cor. 5. prop. 8.

COROLLARIO IV.

LXXXII. In qualunque quadrilineo deſcritto dentro il circolo, gli angoli oppoſti preſi inſieme ſono uguali a due retti. (Eucl. lib. 3 prop. 22.)

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 34. Nel quadrilineo ABCD l' angolo ABC è miſurato dalla metà dell' arco ADC, e l' angolo ADC dalla metà dell' arco ABC (6): Ma l' arco ADC coll' arco ABC, for-
(6) [illegible]. cor. 1. [illegible]. 9. ma tutto il circolo. Dunque le loro metà inſieme preſe ſono uguali al ſemicircolo, cioè 180°. Dunque gli angoli ABC + ADC uguagliano due retti. Similmente dimoſtranſi uguali a due retti gli angoli CAB, DCB. Dunque ec.

CO-

COROLLARIO V.

Fig. 35.

LXXXIII. Se due corde si seghino dentro il circolo, la misura dell' angolo formato dalle corde medesime è la metà della somma degli archi compresi.

SPIEGAZIONE.

Si seghino le corde AE, CD in B: dico la misura dell' angolo ABC essere la metà della somma degli archi AC, DE; e parimente la misura dell' angolo DBE essere la metà della stessa somma.

DIMOSTRAZIONE.

Tirata la retta CE, l' angolo esterno ABC = BEC + BCE interni ed opposti (7): ma l' angolo BEC è misurato dalla metà dell' arco AC, e l' angolo BCE dalla metà dell' arco DE (8): Dunque l' angolo ABC è misurato sì dalla metà dell' arco AC, sì ancora dalla metà dell' arco DE, cioè dalla metà della somma degli archi AC, DE. Ma l' angolo DBE = ABC per essergli alla cima opposto (9). Dunque ancora l' angolo DBE è misurato dalla metà della stessa somma. Ciocchè ec. ec.

(7) 43. 1. p. prop. 1.

(8) 80. Cor. 2. prop. 9.

(9) 28. Cor. 4. def. 10.

COROLLARIO VI.

LXXXIV. Se fuori del circolo si prenda un punto, d' onde si tirino due rette dentro il circolo, la misura dell' angolo formato da esse nel punto dato fuori del circolo, è la metà della differenza degli archi compresi.

SPIEGAZIONE.

Sia F il punto dato fuori del circolo, d'onde si tirino dentro il circolo le rette F A, F C; dico la misura dell'angolo A F C essere la metà della differenza degli archi A C, E G.

DIMOSTRAZIONE.

Tirata la retta C E, l'angolo esterno A E C = E F C + F C E interni, ed opposti (1): dunque se dall'angolo A E C si tolga l'angolo E C G, è il residuo di A E C = E F C. Ma A E C, è misurato dalla metà dell'arco A C, e l'angolo ECG dalla metà dell'arco EG (2): Dunque dalla metà dell'arco A C tolta la metà dell'arco E G, il residuo sarà la misura dell'angolo F. Ma questa è la metà della differenza degli archi A C, E G. Dunque ec. Ciocchè ec.

(1) 43. I. par. prop. 1.

(2) 80. cor. 2. prop. 9.

COROLLARIO VII.

Fig. 36.

LXXXV Due corde parallele comprendono dentro il circolo archi uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Siano le due parallele C D, A B segate dalla retta C B: gli angoli alterni DCB, ABC sono uguali (3): Ma l'angolo D C B è misurato dalla metà dell'arco D B, e l'angolo

(3) 38 an 2. def. 17.

lo A B C dalla metà dell' arco C A (4): Dunque se queste metà degli archi sono uguali, come misure di angoli uguali, ancora tutto l' arco AC=DB. Dunque ec. Ciocchè ec.

(4) 80. cor. 2. prop. 9.

COROLLARIO VIII.

LXXXVI. La misura degli angoli fatti da una Tangente, e da una corda tirata dal punto del contatto a qualunque punto della periferia è la metà degli archi sotto tesi dalla medesima corda (Eucl. lib. 3. prop. 32.)

Fig. 37.

SPIEGAZIONE.

Sia la Tangente E F; e dal punto B del contatto si tiri la corda B A; dico 1. la misura dell' angolo E B A essere la metà dell' arco A B. 2. La misura dell' angolo A B F essere la metà dell' arco A D B.

DIMOSTRAZIONE

Della Parte I.

Dal punto B tirato il diametro B D, e dal punto A la retta A D; l' angolo B A D, che posa sul diametro B D, è retto (5). Dunque gli angoli A B D, A D B, presi insieme uguagliano l' angolo retto E B D. Dunque tolto il comune angolo A B D, il residuo angolo E B A = A D B (6): ma l' angolo A D B alla circonferenza è misurato dalla metà dell' arco A B (5): Dunque ancora l' angolo E B A è misurato dalla metà dell' arco A B: Ciocchè ec.

(5) 80. cor. 2. prop. 9.

(6) Ass. 2.

DIMOSTRAZIONE

Della Parte II.

Gli angoli E B A + A B F uguagliano due
(7) 26.cor.2. def. 10. retti (7). Dunque sono misurati da un semicircolo. Ma l' angolo E B A è misurato dalla metà dell' arco A B (per la I. parte): Dunque resta, che l' angolo A B F sia misurato dalla metà dell' arco B D A, che insieme colla metà dell' arco A B compie il semicircolo. Dunque ec. Ciocchè ec.

ANNOTAZIONI.

LXXXVII. 1. Molte proposizioni da Euclide dimostrate nel 2°., e 3°. lib. più facilmente si dimostrano, premesse alcune altre tratte dal 6°. lib; che suppongono la dottrina delle proporzioni. Di 25 proposizioni però contenute nel 5°. lib, altre sono puri assiomi, come il Tacquet, ed il Whiston, e molti altri giudicano; e le altre, che hanno uso in Geometria, e nelle altre matematiche scienze, da noi si porranno, premettendo alcune definizioni, ed assiomi.

2 E' necessario esporre il significato di alcuni caratteri, e di altri segni usati nell' algebra, e da usarsi in appresso oltre a quelli esposti al n°. 20. dopo l' annotazione terza.

Le lettere a, b, ec. significano quantità nota. x, y; z ec. quantità ignota.

a^2, b^2, ec. in vece di a a, b b, significano i quadrati di a, di b, ec. a^3 il cubo di a.

V^2 a, V^2 b; V^3 a ec. significano le radici

dici qudrate di a, di b, ec.; e la radice cubica di a.

$\frac{8}{2}$ $\frac{a}{b}$ a : b ſegnì di divisione, significano 8. diviſo per 2.; a diviſa per b.

> Segno di eccesso: per eſ. 10. > 8. significa 10 maggiore di 8.

< Segno di difetto: per eſ. 7. < 9. signignifica 7. minore di 9.

DEFINIZIONI.

LXXXVIII. Def. 21. *Ragione* diceſi la relazione ſcambievole di due quantità circa la loro grandezza.

LXXXIX. Def. 22. *Ragione Geometrica* è la relazione di due quantità conſiderando come una contenga l' altra per eſ. 10. 5.; 8. 6.; cioè dieci a cinque; otto a ſei. Onde può averſi, ſe adequatamente o inadequatamente, cioè con reſiduo una quantità contenga l' altra una, o più volte. Il che ſi intende di qualunque quantità. Quando ſi dice *ragione* ſenza altra aggiunta, s' intende geometrica.

XC. Def. 23. *Ragione aritmetica* è, ſe ſi conſideri l' eccesso di una ſopra l' altra quantità: per eſ. 10. > 5, o 10. 5., cioè l' eccesso di 5. nel primo riſpetto al ſecondo.

XCI. Def. 24. *Antecedente* diceſi la quantità, che all' altra ſi riferiſce, cioè il primo termine della ragione. *Conſeguente* la quantità, a cui la prima ſi riferiſce, cioè il ſecondo termine: per eſ. 8. 2.

XCII. Def. 25. *Ragione doppia, tripla*, ec. ec. è quella, il cui antecedente contiene due

due, o tre volte il conseguente: per es. $4 \cdot 2 ; 6 \cdot 2$.

XCIII. Def. 26. *Ragione sudupla, subtripla* ec. ec. è quella, il cui antecedente è contenuto due, o tre volte ec. nel conseguente: per es. $2 \cdot 4 ; 2 \cdot 6$.

XCIV. Def. 27. *Esponente della ragione geometrica* è il quoto nato dall'antecedente diviso per il conseguente.

ANNOTAZIONI

XCV. Quindi 1. Per avere l'esponente si divide l'antecedente per il conseguente: per esempio $10 \cdot 5.$, si fa $\frac{10}{5} = 2.$, che è l'esponente.

2. Moltiplicato il termine minore per l'esponente si ha il termine maggiore: per es. $5 \times 2 = 10$.

3. Diviso il maggior termine per l'esponente si ha il minore: per es. $\frac{10}{2} = 5$.

4. L'esponente potrà esser maggiore, o minore dell'unità: per es. di $12 \cdot 3.$ è $4.$, di $6 \cdot 9.$ è $\frac{2}{3}$

5. Potrà la ragion geometrica scriversi come frazione: per es. $\frac{6}{9}$; $\frac{a}{b}$; $a : b$ ec. ec.

XCVI. Def. 28. *Esponente della ragione aritmetica* è la differenza, che passa tra l'antecedente, e il conseguente: per es. di $8 . 5.$ è $3.$ Onde la ragione aritmetica si scrive ancora, come la sottrazione: per es. $8 - 5 ; a - b$.

XCVII. Def. 29. *Ragion diretta* è dell'antecedente al conseguente: per es. $4 \cdot 2$.

XCVIII.

XCVIII. Def. 30. *Ragion reciproca*, o *inverſa* è del conſeguente all'antecedente: per eſ. 4 · 2. conſiderando il 2. riſpetto al 4.

XCIX. Def. 31. *Ragioni ſimili* ſono quelle, che hanno lo ſteſſo eſponente $\frac{10}{5} \cdot \frac{12}{6} = 2$.

C. Def. 32. *Proporzione* è la ſomiglianza, o ugualtà fra due ragioni. E diceſi *Geometrica*, o *Aritmetica* ſecondo la qualità delle ragioni, o Aritmetiche, o Geometriche.

ANNOTAZIONI

CI. Quindi 1. La proporzione richiede quattro termini; e la Geometrica ſi ſcrive così 8 · 4 :: 6 · 3; o 10 · 5 = 12 · 6; o $\frac{10}{5} = \frac{12}{6}$; delle quali l'eſponente è il 2. E l'Aritmetica così 8 — 6 = 12 — 10; o 8 · 6 .·. 12 · 10., di cui la differenza è il 2.

2. *Proporzione continua* è, quando il 2°. termine è lo ſteſſo, che il 3°. per eſ. 8 · 12 :: 12 · 18.

3. *Proporzione diſcreta* è, quando tutti i termini ſono diverſi: per eſ. 4 · 12 :: 6 · 18.

CII. Def. 33. *Parte aliquota* è quella, che alcune volte preſa entra eſattamente in una quantità, ſenza che di queſta nulla manchi o avanzi: per eſ. 2 · 8.

CIII. Def. 34. *Parti aliquote ſimili* ſono quelle, che un' ugual numero di volte ſi contengono in altre quantità: per eſ. 2 · 6 :: 3 · 9.

CIV. Def. 35. *Parte aliquanta* è quella, che preſa alcune volte non miſura eſattamente una quantità, ma o ne avanza, o ne manca: per eſ. 2 · 7.

CV. Def. 36. *Parti aliquante ſimili* ſono quel-

quelle, il cui eccesso, o difetto è uguale rispetto alle loro quantità: per es. $3 \cdot 8 :: 6 \cdot 16$; delle quali il difetto è $\frac{2}{8}$, è l' eccesso $\frac{1}{8}$.

ASSIOMI

CVI. Ass. 7. Le quantità uguali hanno la stessa ragione ad una terza medesima quantità: per es. se $a = b$; quanto $a > c$, tanto $b > c$; ed al contrario. (Eucl. lib. 5. prop. 7.)

CVII. Ass. 8. Le quantità, che ad una terza hanno la stessa ragione, sono uguali: per es. se $a . c :: b . c$, sarà $a = b$ (Eucl. lib. 5. prop. 9.)

CVIII. Ass. 9. Le ragioni, che sono simili, o uguali, o le stesse ad una terza ragione, sono fra loro simili, o uguali, o le stesse: ed al contrario se sono tra loro tali, avranno ancora ad una terza la stessa ragione; perchè avranno lo stesso esponente (Def. 31.)

Questo coincide coll' ass. 7. (Eucl. lib. 5. prop. 11.)

CIX. Ass. 10. Se due quantità sono disuguali, la maggiore ha ragione maggiore ad una terza, che non ha la minore: per es. $20 . 5.$ ha ragione quadrupla, e $10 \cdot 5.$ doppia (Eucl. lib. 5. prop. 8.)

CX. Ass. 11. Se l' antecedente, e il conseguente della ragion geometrica si moltiplichino, o si dividano per una stessa quantità, resta la stessa ragione: per es. $6 \cdot 2 = 6 \times 4. 2 \times 4 = \frac{24}{4} . \frac{8}{4}$, delle quali l' esponente è il 3. Così $a . b = ac . bc = \frac{a}{c} . \frac{b}{c}$. E la ragione aritmetica resta la stessa; se per una medesi-

ma

ma quantità si accresca, o si diminuisca l'antecedente, e il conseguente: per es. $8 - 5 = (8 + 4) - (5 + 4) = 12 - 9$; e $8 - 5 = (8 - 2) - (5 - 2) = 6 - 3$; de' quali l'esponente rimane sempre il 3.

PROPOSIZIONE. X.

CXI. Ne' termini geometricamente proporzionali il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj: E se è così, i quattro termini sono geometricamente proporzionali.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte

Sia a, b :: c. d. Se m' esprime come, o quante volte b contengasi in a, cioè se m sia l'esponente, o il quoto di a · b, onde sia $a = m b$ (1); per la somiglianza delle due ragioni richiesta nella proporzione geometrica sarà ancora m il quoto, o l'esponente di c. d, e però $c = m d$. Ma due uguali quantità moltiplicate per una terza restano uguali (2). Dunque $a d = m b d$, e parimente $c b = m d b$: Ma $m d b = m b d$. Dunque $a d = c b$ (3). Ecco in breve tutta la dimostrazione prima in lettere, poi in numeri.

(1) 95. an. 2. Def. 27.

(2) Ass. 3.

(3) Ass. 1.

	Esempio numerico
Sia $a \overset{m}{.} b :: c \overset{m}{.} d$;	$10^2 . 5 :: 8^2 . 4$
sarà $a = m b$; $c = m d$ (1)	$10 = 2 \times 5$; $8 = 2 \times 4$
e (2) $a d = m b d$; $c b = m d b$.	$10 \times 4 = 2 \times 5 \times 4$
ma $m b d = m b d$	$8 \times 5 = 2 \times 5 \times 4$
Dunque $a d = c b$ (3)	$2 \times 5 \times 4 = 2 \times 5 \times 4$
	$10 \times 4 = 8 \times 5$.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Se $a d = c b$; dico essere $a . b :: c . d$. Sia m l' esponente della ragione di $a . b$, onde sia $a = m b$; sarà $a d = m b d$ (2). Ma per ipotesi $a d = c b$: dunque ancora $c b = m b d$ (3). Dunque tolta la comune quantità b, o dividendo l' antecedente, e il conseguente per b, resta $c = m d$. Dunque m è (1) ancora l' esponente della ragione di $c . d$: Dunque (4) $a . b :: c . d$. Dunque ec. Ciocchè ec.

(4) 100. Def. 31. e 32.

Ecco tutta la dimostrazione in breve.

	Esempio numerico
Sia $a d = c b$	$10 \times 4 = 8 \times 5$.
ed $a = m b$; (1)	$10 = 2 \times 5$.
sarà $a d = m b d$, (2)	$10 \times 4 = 2 \times 5 \times 4$.
Ma $a d = c b$.	$10 \times 4 = 8 \times 5$.
Dunque $c b = m b d$, (3)	$8 \times 5 = 2 \times 5 \times 4$
e $c = m d$.	$8 = 2 \times 4$
Dunque $a \overset{m}{.} b :: c \overset{m}{.} d$. (4)	$10^2 . 5 :: 8^2 . 4$.

CO-

COROLLARIO I.

CXII. In ogni proporzione geometrica, dati tre termini, ſi trova il quarto: E datine due ſi trova il terzo proporzionale.

DIMOSTRAZIONE

Se in quattro termini proporzionali geometricamente il prodotto degli eſtremi è uguale al prodotto de' medj (5) qualunque di queſti prodotti diviſo per un fattore termine dell'altro prodotto mi da l' altro termine. Dunque 1. ſe manca uno degli eſtremi, il prodotto de' medj diviſo per il dato eſtremo darà l' altro, che manca. 2. Se manca uno de' medj il prodotto degli eſtremi diviſo per il dato medio mi da l' altro, che manca. 3. E nella proporzione continua, dove il 2°. termine è lo ſteſſo che il 3°., per trovare qualunque degli eſtremi, baſta dividere il quadrato del 2°. termine per il dato eſtremo: e 4. per trovare il medio baſta dal prodotto degli eſtremi eſtrarre la radice quadrata, e queſta ſarà il termine medio.

(5) III. prima parte prop. 10.

Sia per eſ. I. $a . b :: c . x$ ſarà $b\,c = a\,x$ Dunque $x = \frac{b\,c}{a}$	II. ſia $a . x :: c . d .$, ſarà $a\,d = x\,c$ Dunque $x = \frac{a\,d}{c}$
III. ſia $a . a^2 . x$; ſarà $a^2\,a^2 = a^4$., ed $a^4 = a\,x$ Dunque $x = \frac{a^4}{a} = a^3$. Dunque $a . a^2 :: a^2 . a^3$.	IV. $a . x . a^3$ ſarà $a\,a^3$., cioè $a^4 = x^2$ Ma $\sqrt{a^4} = a^2$ Dunque $x = a^2$ Dunque $a . a^2 :: a^2 . a^3$.

Eſem-

Esempio numerico I. $3 . 15 :: 5 . x$ sarà $3x = 15 \times 5 = 75$. Dunque $\frac{75}{3} = 25 = x$ Dunque $3 . 15 :: 5 . 25$.	II. $3 . x :: 5 . 25$. sarà $3 \times 25 = 75$. Dunque $\frac{75}{5} = 15 = x$ Dunque $3 . 15 :: 5 . 25$.

III. $4 . 8 . x$. sarà $4x = 8 \times 8 = 64$ Dunque $\frac{64}{4} = 16 = x$ Dunque $4 . 8 :: 8 . 16$.	IV. $4 . x . 16$ sarà $4 \times 16 = 64$ ma $8 \times 8 = 64$ Dunque $8 = x$ Dunque $4 . 8 :: 8 . 16$.

COROLLARIO II.

CXIII. Dati quattro termini proporzionali, comunque si mutino, resta la stessa proporzione, purchè gli estremi sian sempre estremi, o medj, e i medj siano sempre medj, o estremi.

DIMOSTRAZIONE.

Qualunque volta il prodotto de' medj è uguale al prodotto degli estremi, i termini sono proporzionali (6): ma i prodotti sono sempre i medesimi, comunque si mutino i termini, purchè gli estremi siano sempre estremi, o medj, e i medj sempre medj, o estremi. Dunque ec. ec.

(6) 111. prop. 10.

La

La minore è provata nella Tavola seguente, dove l'ordine de' termini mutasi otto volte, restando sempre a d = c b; e 6 X 5 = 10 X 3.

1	a. b :: c. d.	6. 3 :: 10. 5.	1°. 2°. :: 3°. 4°.
2	a. c :: b. d.	6. 10 :: 3. 5	1°. 3°. :: 2°. 4°.
3	d. b :: c. a.	5. 3 :: 10. 6.	4°. 2°. :: 3°. 1°.
4	d. c :: b. a.	5. 10 :: 3. 6.	4°. 3°. :: 2°. 1°.
5	b. a :: d. c.	3. 6 :: 5. 10.	2°. 1°. :: 4°. 3°.
6	b. d :: a. c.	3. 5 :: 6. 10.	2°. 4°. :: 1°. 3°.
7	c. a :: d. b.	10. 6 :: 5. 3.	3°. 1°. :: 4°. 2°.
8	c. d :: a. b.	10. 5 :: 6. 3.	3°. 4°. :: 1°. 2°.

La seconda maniera dicesi argomentare *alternando*.

La quinta argomentare *invertendo*.

Le altre non hanno proprio vocabolo; ma tutte si dicono maniere di argomentare *permutando*.

COROLLARIO III.

CXIV. Nella geometrica proporzione sta ugualmente 1. la somma, o differenza de' termini di ciascuna ragione al 1°., o 2°, suo termine: 2. E il 1°., e 2°. termine di ciascuna ragione alla somma, o differenza loro: 3. La somma de' termini di ciascuna ragione alla loro differenza: 4. E la differenza di essi alla lor somma.

DIMOSTRAZIONE

Qualunque volta il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj, si ha la

(7) 111. pr. 10.

geometrica proporzione (7): ma in tutti gli esposti casi il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj: dunque in tutti si ha la geometrica proporzione. La minore è provata dalla Tavola seguente, dove supposto a. b :: c. d., ne' primi otto casi, tolte lo parti comuni, resta $ad = bc$. Si osservi, che la seconda proporzione dicesi modo di argomentare *componendo*. La quarta *dividendo*; la settima *per conversione di ragione*: e le altre non hanno vocabolo proprio, ma dalle prime quattro si fanno le altre quattro, siccome ancora l' ultima dalla penultima *invertendo*.

1.	a+b. a :: c+d. c		6+3. 6 :: 10+5. 10=90
2.	a+b. b :: c+d. d		6+3. 3 :: 10+5. 5=45
3.	a—b. a :: c—d. c		6—3. 6 :: 10—5. 10=30
4.	a—b. b :: c—d. d		6—3. 3 :: 10—5. 5=15
5.	a. a+b :: c. c+d	a d = b c	6. 6+3 :: 10. 10+5=90
6.	b. a+b :: d. c+d		3. 6+3 :: 5. 10+5=45
7.	a. a—b :: c. c—d		6. 6—3 :: 10. 10—5=30
8.	b. a—b :: d. c—d		3. 6—3 :: 5. 10—5=15
9.	a+b. a—b :: c+d. c—d		6+3. 6—3 :: 10+5. 10—5=45
10.	a—b. a+b :: c—d. c+d		6—3. 6+3 :: 10—5 10+5=45

1. La somma al 1°. termine.
2. La somma al 2°.
3. La differenza al 1°.
4. La differenza al 2°.
5. Il 1°. termine alla somma.
6. Il 2° alla somma.
7. Il 1°. alla differenza.
8 Il 2°. alla differenza.
9. La somma alla differenza.
10. La differenza alla somma.

COROLLARIO IV.

CXV. La ugualità di ragione rimane, se per una terza quantità si moltiplichi, o si divida il 1°., e il 2°. termine; o il 1°, e 'l 3°.; o il 3°, e 'l 4°.; o il 2°., e il 4°.

DIMOSTRAZIONE.

Qualunque volta i termini sono proporzionali, e però il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj; si ha la ugualità di ragione (8): Ma negli esposti casi il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj, e però i termini sono proporzionali (9): Dunque si ha l' ugualità di ragione. La minore vedesi nella Tavola seguente, dove, supposto a. b :: c. d, ed il moltiplicatore e divisore m, nella moltiplicazione resta sempre m a d = m b c, e nella divisione $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$ essendo per ipotesi a d = b c.

(8) 100. def. 32.

(9) 11. prop. 10.

	Moltiplicando	
1°., e 2°.	a m. b m :: c. d	$8\times2.\ 4\times2 :: 12.\ 6$
1°., e 3°.	a m. b :: c m. d	$8\times2.\ 4 :: 12\times2.\ 6$
3°., e 4°.	a. b :: c m. d m	$8.\ 4 :: 12\times2.\ 6\times2$
2°., e 4°.	a. b m :: c. d m	$8.\ 4\times2 :: 12.\ 6\times2$
	m a d = m b c	96=96
	Dividendo	
1°., e 2°.	$\frac{a}{m}.\ \frac{b}{m} :: c.\ d$	$\frac{8}{2}.\ \frac{4}{2} :: 12.\ 6$
1°., e 3°.	$\frac{a}{m}.\ b :: \frac{c}{m}.\ d$	$\frac{8}{2}.\ 4 :: \frac{12}{2}.\ 6$
3°., e 4°.	$a.\ b :: \frac{c}{m}.\ \frac{d}{m}$	$8.\ 4 :: \frac{12}{2}.\ \frac{6}{2}$
2°., e 4°.	$a.\ \frac{b}{m} :: c.\ \frac{d}{m}$	$8.\ \frac{4}{2} :: 12.\ \frac{6}{2}$
	$\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$	24=24

PROPOSIZIONE XI.

CXVI. **La ragion composta di più ragioni è quella, che passa tra il prodotto di tutti gli antecedenti di quelle ragioni, ed il prodotto di tutti i lor conseguenti.**

DIMOSTRAZIONE

Siano a. b; c. d; e. f. I loro esponenti sono $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$ (1). Ma questi fra loro moltiplicati fanno $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{a\,c\,e}{b\,d\,f}$, ch' è esponente della ragione composta di a c e. b d f, cioè del-

(1) 94. def. 27.

della stessa ragione, che passa tra il prodotto di tutti gli antecedenti delle prime ragioni, e il prodotto de' loro conseguenti. Dunque la ragion composta delle ragioni di a. b; c. d; e. f, sarà la ragione di a c e. b d f, cioè quella, che passa ec. Ciocchè ec.

Esempio numerico.

Sia 4. 2; 9. 3; 20. 5. I loro esponenti sono $\frac{4}{2} = 2$; $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{20}{5} = 4$ Ma $\frac{4 \times 9 \times 20 = 720}{2 \times 3 \times 5 = 30} = 24 = 2 \times 3 \times 4$ Dunque la ragion composta di 4. 2; 9. 3; 20. 5. è la ragione di $4 \times 9 \times 20 = 720$. $2 \times 3 \times 5 = 30$. Dunque ec.

COROLLARIO I.

CXVII. Quindi l' esponente della ragion composta è il prodotto di tutti gli esponenti delle ragioni componenti: per es. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a\,c\,e}{b\,d\,f}$ è l' esponente della ragione composta di a c e. b d f (per la prop. prec.)

COROLLARIO II.

CXVIII. In più proporzioni geometriche moltiplicati fra loro tutti i primi termini, poi i secondi, poi i terzi ec., i loro prodotti rimangono proporzionali.

DIMOSTRAZIONE

In ciascuna geometrica proporzione le ragioni sono uguali (a): ma le ragioni uguali

(a) 100. def. 32.

moltiplicate per altre ragioni uguali, formano prodotti in ragione uguale (3): Perchè, avendo le ragioni uguali uno stesso esponente, già è, come se quantità uguali si moltiplicassero per una terza: dunque in più geometriche proporzioni moltiplicati fra loro tutti i primi termini, poi i secondi, poi i terzi, e i quarti, i loro prodotti rimangono in ragione eguale: dunque rimangono proporzionali. Dunque date le geometriche proporzioni esposte nel primo, e secondo esempio, ancora i loro prodotti sono proporzionali.

(3) Ass. 3.

Esempio I.	Esempio II. numer.
a. b :: m. n	4. 2. :: 6. 3
c. d :: p. q	1. 3. :: 2. 6
e. f :: r. s	4. 6 :: 12. 18.
g. h :: t. u	
aceg.bdfh :: mprt.nqsu	

COROLLARIO IV.

In più ragioni, che abbiano alcuni termini comuni, rimarrà la stessa ragione composta, benchè si tolgano i termini comuni, purchè un' ugual numero se ne tolga dagli antecedenti, e da' conseguenti, e non più.

DIMOSTRAZIONE

Siano le ragioni a. b; c. n; b. c; la loro composta ragione sarà a c b, b n c. (4). Or se l' antecedente, e il conseguente di una stessa ragione si divida per una stessa quantità, rimane la stessa ragione (5): Dunque divi-

(4) 116. pr. 11.

(5) 110. Ass. 11.

videndo la ragion composta di a c b. b n c per b c, togliendo questi termini comuni, rimane a. n nella stessa ragione di a c b. b n c, cioè resta a. n : : a c b. b n c. Dunque ec.

Esempio I.	Es. II. numerico.
a . b.	4 . 2
c . n	9 . 3
b . c	2 . 9
a . n	4 . 3

COROLLARIO IV.

CXX. La ragione di un termine all' altro è uguale alla ragion composta da qualunque numero di ragione di mezzo.

SPIEGAZIONE.

La ragione di a. b dico essere uguale alla ragion composta di a. m ; m. n ; n. p ; p. b.

DIMOSTRAZIONE

La ragione composta delle suddette ragioni è a m n p . m n p b (6). Dunque tolti i termini comuni m n p rimane a. b. nella stessa ragione di a m n p. m n p b. (7) cioè resta a. b : : a m n p. m n p b. Dunque ec.

(6) 118. cor. 2. prop. 11.
(7) 119. cor. 3. prop. 11.

Esempio numerico.

Sia 2. 3. ; 3. 4 ; 4. 5 ; 5. 6 : sarà
$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.\ 3 \times 4 \times 5 \times 6$
$= 360$: : 2. 6.

COROLLARIO V.

CXXI. Se in due serie di grandezze sia la stessa ragione della prima grandezza alla seconda, della seconda alla terza, ec.; sarà in amendue la stessa ragione della prima grandezza alla ultima.

SPIEGAZIONE.

Siano le due serie di grandezze a, b, c; d, e, f, ec.: dico, che se sarà a. b :: d. e, ed in oltre b. c :: e. f; sarà ancora a. c :: d. f. L' argomento dicesi fatto *per ugualtà ordinata*.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo per ipotesi a. b :: d. e; ed inoltre b. c :: e. f; fatta la ragion composta a b b c :: d e. e f; rimangono proporzionali (8). Dunque, tolti i termini comuni b, e, restano ancora proporzionali (9). Dunque sarà a. c :: d. f. Ciocchè ec.

(8) 118. cor. 2. prop. 11.

(9) 119. cor. 3. prop. 11.

Vedi gli esempi I. e II.

Esempio I.	Es. II. numerico
a. b :: d. e	siano 24, 12, 4; 18, 9, 3 ec.
b. c :: e. f.	24. 12 :: 18. 9.
a b. b c :: d e. e f	12. 4. :: 9. 3.
a. c :: d. f.	24 X 12. 12 X 4 :: 18 X 9. 9 X 3
	24. 4 :: 18. 3.

CO-

COROLLARIO VI.

CXXII Se nella prima ſerie di grandezze ſia la prima grandezza alla ſeconda, come la ſeconda alla terza della ſeconda ſerie; ed inoltre la ſeconda alla terza della prima ſerie ſia, come la prima alla ſeconda della ſeconda ſerie, ſarà in amendue la ſteſſa ragione della prima grandezza alla terza ec. ec.

SPIEGAZIONE.

Siano le due ſerie di grandezze a, b, c, ec., d, e, f ec. dico, che ſe ſarà a. b :: e. f; ed inoltre b. c :: d. e, ſarà ancora a. c :: d. f. L' argomento diceſi fatto *per ugualtà perturbata*.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo per ipoteſi a. b :: e. f; ed inoltre b. c :: d. e, fatta la ragion compoſta a b. b c :: e d. e f, que' termini rimangono proporzionali (8): Dunque, tolti i termini comuni b, e; reſtano ancora proporzionali (9). Dunque ſarà a. c :: d. f. Vedi gli eſempi primo, e ſecondo.

(8) 118. cor. 2. prop. 11.
(9) 119. cor. 3. prop. 11.

Eſempio I.	Eſempio II.
a. b :: e. f	ſiano 24. 12. 4; 18. 6. 3. ec.
b. c :: d. e	24. 12 :: 6. 3.
ab. bc :: ed. ef.	12. 4 :: 18. 6.
a. c :: d. f.	24×12.12×4 :: 6×18.3×6
	24. 4 :: 18. 3.

COROLLARIO VII.

CXXIII. Le frazioni sono fra loro in ragione composta della diretta de' numeratori, e della inversa de' denominatori.

SPIEGAZIONE

Siano le due frazioni $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$: si faccia la ragion composta della diretta de' numeratori a . c, e della inversa de' denominatori d . b; sarà a d . c b; dico essere $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} :: a\,d \cdot c\,b$.

DIMOSTRAZIONE.

Nella suddetta ragione di $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} :: a\,d \cdot c\,b$; il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj, essendo quello degli estremi $\frac{a\,c\,b}{b}$, e quello de' medj $\frac{c\,a\,d}{d}$, perchè divisi questi prodotti per i termini comuni, rimane in ciascuno a c: ma quando il prodotto degli estremi è uguale a quello de' medj, que' termini sono proporzionali (1). Dunque sarà $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} :: a\,d \cdot c\,b$. Ciocchè ec. ec. Vedi gli esempj primo, e secondo.

(1) III. prop. 10.

Es. I. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad . cb$	Es. II. $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{12}$; sarà
Perchè $\frac{acb}{b} = ac$; $\frac{cad}{d} = ac$	$\frac{2}{4} . \frac{3}{12} :: 2 \times 12 . 3 \times 4$;
Dunque $\frac{acb}{b} = \frac{cad}{d}$.	Perchè $\frac{2 \times 3 \times 4}{4} = \frac{24}{4} = 6$
	e $\frac{3 \times 2 \times 12}{12} = \frac{72}{12} = 6$
	Dunque ec.

COROLLARIO VIII.

CXXIV Quindi 1. La ragion duplicata è la composta di due ragioni simili, o uguali, cioè la ragione di un quadrato ad un'altro, perchè il quadrato essendo il prodotto di una quantità per se stessa moltiplicata, è manifesto, che la ragion composta di $\frac{a \cdot b}{a \cdot b}$ sarà $a^2.b^2$.

2. La ragion triplicata è la composta di tre ragioni simili o uguali, cioè la ragione di un cubo ad un'altro, perchè il cubo essendo il prodotto di un quadrato per la sua radice moltiplicato; è manifesto, che la ragion composta di $\frac{a . b}{a^2 b^2}$ sarà $a^3. b^3$; e così dicasi delle altre.

ANNOTAZIONI.

Prima di applicare alla Geometria le esposte ultime proposizioni, conviene premettere due definizioni, che da Euclide al lib. 6. si premettono.

CXXV. Def. 37. Figure rettilinee simili diconsi quelle, che hanno ciascun angolo uguale a ciascun angolo, e i lati, che comprendono gli angoli uguali, proporzionali: per es. il $\triangle ABC$ è simile al $\triangle FGH$, se
Fig. 38. 39. l' angolo $A=F$; $B=G$; $C=H$. e se $AB . FG :: AC . FH :: BC \; GH$

CXXVI. Def. 38. L'altezza di un triangolo è una retta dall'angolo alla base opposta tirata perpendicolarmente sulla base stessa, prolungandola, se bisogni: per es. la retta BD sulla base AC, e la retta CL sulla base pro-
Fig. 40. 41. lungata LP.

PROPOSIZIONE XII.

CXXVII. I triangoli, e i parallelogrammi, che hanno la stessa altezza, e sono dentro le stesse parallele, sono fra loro in ragione delle loro basi. (Eucl. lib. 6. prop. 1.)

SPIEGAZIONE.

Siano i $\triangle\triangle ABC, EFI$ dentro le parallele AI, BF; dico essere il $\triangle ABC . \triangle EIF ::$
Fig. 42. $BC . EF$.

DIMOSTRAZIONE

Le basi BC, EF dividansi in parti uguali Bm, mn; Er, rs: e da ogni punto della divisione si tirino alla cima le rette Am, An ec. Ir, Is ec. Essendo Er, rs = Bm, mn, e i $\triangle\triangle BAm, mAn$ ec. $= \triangle\triangle EIr, rIs$ ec., perchè hanno basi uguali, e sono
(2) 64. Cor. fra le stesse parallele (2); quante volte la ret-
1. prop. 6. ta Bm entra nella base EF, tante volte il

$\triangle$B

ΔBAm entra nel ΔEIF. Dunque quante volte la base BC entra nella base EF, tante volte il ΔBAC entra nel ΔEIF. Dunque il ΔBAC. ΔEIF :: BC.EF. Ciocchè ec. Lo stesso dimostrasi de' parallelogrammi: perchè il parallelogrammo BD è doppio del Δ ABC, ed il parallelogrammo LF è doppio del ΔEIF (3). Dunque se i triangoli, cioè la metà de' parallelogrammi sono fra loro in ragione delle basi, ancora tutti i parallelogrammi fra loro sono nella stessa ragione delle basi. (3) 65. Cor. 2. prop. 6.

COROLLARIO

CXXVIII. Quindi se due triangoli, o parallelogrammi abbiano la base stessa o uguale, ma diversa l'altezza; essi sono fra loro in ragione delle loro altezze.

SPIEGAZIONE

Siano i ΔΔ ABC, FGP sulle basi AC, FP uguali, e le altezze BD, GL siano disuguali; dico esser il ΔABC. ΔFGP :: BD. GL. Fig. 40. 41.

DIMOSTRAZIONE.

Faccianfi le rette ED, LI uguali alle basi AC, FP: Essendo AC = FP per ipotesi, ancora sono ED = IL: si tirino le rette EB, GI. Ne' ΔΔ EBD, ILG si prendano BD, GL per basi, saranno le loro altezze ED, LI uguali per costruzione: Dunque il ΔEDB. ΔGLI :: BD, GL (4): ma ED = AC; LI = FP per costruzione: Dunque i ΔΔ BDE, GLI = ΔΔ ABC, FGP (5). Dunque essendo il ΔEDB. ΔGLI :: BD. GL (4) 127. prop. 12. (5) 64. cor. 2. prop. 6.

GL, sarà ancora il △ABC. △FGP :: BD.
(6) 106. Afs. 7. GL (6), Dunque ec. Ciocchè ec.

Lo stesso dicasi de' parallelogrammi per la ragione sopra già esposta.

PROPOSIZIONE XIII.

CXXIX. Ne' triangoli, che hanno uguali gli angoli, sono proporzionali i lati opposti
Fig. 38. 39. agli angoli uguali. (Eucl. lib. 6. prop. 4.)

SPIEGAZIONE.

I due △ABC, FGH abbiano gli angoli corrispondenti uguali: dico i lati FG, GH essere proporzionali a' lati AB, BC opposti agli angoli uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Facciasi il lato BE = FG, e il lato BD = GH; tirata la retta ED, essendo per ipotesi l'angolo B = G, sarà il △FGH = △EBD, e gli angoli E, D alla base saranno uguali a-
(7) 45. prop. 2. gli angoli F, H (7), cioè per ipotesi uguali agli angoli A, C. Dunque essendo gli angoli esterni E, D uguali agli interni, ed opposti A, C, le rette ED, AC sono paralle-
(8) 39. cor. 1. an. def. 17. le (8). Dunque tirate le rette AD, EC, è
(9) 64. cor. 1. prop. 6. il △EDA = △EDC per essere sulla stessa base ED, e tra le stesse parallele ED, AC (9). Dunque aggiunto il comune △EBD, sarà il
(1) Afs. 2. △ABD = △CBE (1). Ma i triangoli, che hanno la stessa altezza sono fra loro in ragio-
(2) 127. prop. 12. ne delle loro basi (2): Dunque il △CBE. △EBD :: CB. DB; ed il △ABD. △EBD. AB. EB. Ma essendo il △CBE = △ADB, essi

essi hanno la stessa ragione al $\triangle$ E B D (3). (3) 106. Ass. 7.
Dunque ancora la base C B . D B : : A B, EB (4) (4) 108, Ass. 9.
Ma per costruzione D B = H G, ed E B = F G; Dunque C B . H G : : AB. F G (3), ovvero C B. A B : : H G. F G. Ciocchè ec. ec.

COROLLARIO I.

CXXX. Quindi i Triangoli equiangoli sono fra loro in ragione duplicata, o come i quadrati de' lati omologi, o simili. (Eucl. lib. 6. prop. 19.)

DIMOSTRAZIONE.

Il $\triangle$ EDB. $\triangle$ CEB : : DB. CB; ed il $\triangle$ CEB. $\triangle$ CAB : : EB. AB (5): Ma per una parte il $\triangle$ CEB = $\triangle$ADB, perchè agli uguali $\triangle\triangle$ ADE, CED si aggiugne il comune $\triangle$ EDB; e per l'altra il $\triangle$ADB. $\triangle$ CAB : : BD. CB (5). Dunque ancora il $\triangle$ CEB. $\triangle$ CAB : : DB. CB (6). Dunque se il $\triangle$ EDB. $\triangle$ CEB : : DB. CB, e se il $\triangle$ CEB. $\triangle$ CAB : : DB. CB; sarà il $\triangle$ EDB. $\triangle$ CAB : : $DB \times DB . CB \times CB = DB^2 . CB^2$ (7). Dunque i due $\triangle\triangle$EDB, CAB per ipotesi equiangoli sono fra loro in ragione duplicata de' lati omologi, o simili. Ciocchè ec.

(5) 127. prop. 12.

(6) 106. Ass. 7.

(7) 118. cor. 2. prop. 11.

COROLLARIO II.

CXXXI. Se in due triangoli siavi un' angolo uguale, e i lati, che comprendono l'angolo uguale, siano proporzionali, i triangoli sono equiangoli o simili (Eucl. lib. 6. prop. 6.)

DIMOSTRAZIONE.

Ne' △△ FGH, ABC sia l' angolo B = G, ed il lato FG. GH :: AB. BC. Facciasi il lato BE = GF, e si tiri la retta ED parallela ad AC. Essendo l' angolo esterno BED = BAC interno, ed opposto, e parimente l' angolo BDE = BCA (8); i due △△ EBD, ABC sono equiangoli, e però AB. BC :: EB: BD (9): Ma per ipotesi FG. GH :: AB. BC. Dunque ancora EB. BD :: FG. GH; ed alternando EB. FG :: BD. GH (1). Dunque essendo EB = FG, è ancora BD = GH; ed essendo gli angoli B, G uguali, sarà il △ EBD = △ FGH (2). Ma abbiamo veduto i due △△ EBD ABC essere equiangoli. Dunque ancora i △△ FGH, ABC sono equiangoli. Ciocchè ec.

(8) 38. an. def. 17.

(9) 29. prop. 3.

(1) 108. Ass. 9

(2) 45. prop. 2.

COROLLARIO III.

Se in due triangoli siano tre lati dell' uno proporzionali a tre lati dell' altro i due triangoli sono equiangoli (Eucl. lib. 6. prop. 5.)

DIMOSTBAZIONE.

Ne' due △△ FGH, ABC siano tre lati del 1° proporzionali a tre lati del 2°, dico i due triangoli essere equiangoli. Perchè presa la retta EB = FG, e tirata ED parallela ad AC, a cagione degli angoli esterni uguali agli interni, ed opposti i due △△ EBD, ABC sono equiangoli, e però EB. BD. AB. BC (3): ma per ipotesi è AB. BC :: FG. GH dunque ancora EB. BD: FG. GH

(3) 129. pr. 13.

AC

(4), ed alternando EB.FG::BD.GH, cioè in ragione di ugualtà. Ma è ancora AB, AC::EB ED (3 e per ipotesi AB. AC::FG.FH: dunque è ancora EB.ED:: FG.FH (4), e dividendo EB.FG::ED. FH. cioè in ragione di ugualtà. Dunque il △EBD = △FGH (5). Dunque se il ∠ EBD è equiangolo col △ABC ancora i △△FGH, ABC sono equiangoli. Dunque ec. Ciocchè ec. (4) 106. asf. 7. (5) 56. pr. 4

COROLLARIO IV.

Fig. 43.

CXXXIII. Se una retta, che divide in due parti uguali l'angolo di un triangolo, seghi la base, la segha proporzionalmente a' due lati del triangolo (Eucl. lib. 6. prop. 3.)

SPIEGAZIONE.

Se la retta BD divide in due parti uguali l'angolo B del △ABC; dico, che divide la base in proporzione de' lati AB, BC.

DIMOSTRAZIONE

Si prolunghi il lato AB in E, sicchè BE = BC: gli angoli alla base EC nel triangolo isoscele EBC sono uguali (6): Dunque l'angolo esterno ABC è uguale a' due interni, ed opposti (7), ed è doppio dell angolo E. Dunque dalla retta BD per ipotesi diviso in due parti uguali l'angolo ABC, sarà l'angolo ABD = BEC: Dunque essendo nelle rette BD, EC l'esterno angolo ABD = BEC interno, ed opposto, le rette BD, EC sono pa-

(6) 47. cor. 2. prop. 2.

(7) 43. pr. 1.

parallele (8): Dunque essendo ancora l' angolo esterno B D A = E C D interno, ed opposto, e l' angolo A comune, i due △ △ A B D, A E C sono equiangoli; dunque i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali (9); e però A C . A D :: A E . A B, ed alternando A C . A E :: A D . A B; e dividendo (1) A D . D C :: A B . B E. Ma B E = B C per costruzione: Dunque A D . D C :: A B . B C. Dunque ec. Ciocchè ec.

(8) 39. cor. 1. an. def. 17.
(9) 129. pr. 13.
(1) 114. cor. 3. prop. 10.

COROLLARIO V.

Fig. 44.

CXXXIV. Se due o più rette parallele seghino in qualunque modo due rette, le segano in parti proporzionali.

SPIEGAZIONE.

Siano le due rette A B, H R che incontrino comunque le parallele E C, F D, G K; dico, che quelle sono segate dalle parallele in parti proporzionali, onde sarà E F . C D :: F G . D K.

DIMOSTRAZIONE

Tirata la retta C L M parallela ad A B, sono le rette C L, L M = E F, F G (2). Ma essendo i △ △ M C K; L C D equiangoli, per avere gli angoli esterni C L D, C D L = C M K, C K M interni, ed opposti (3), e 'l angolo C comune, i loro lati sono proporzionali (4), e però L C . L M :: D C . D K: dunque essendo L C = F E, L M = F G, sarà ancora F E . F G :: D C . D K; ed alternando F E . D C :: F G . D K. Ciocchè ec. ec.

(2) 55. Cor. 4. prop. 3. γ
(3) 48. an. Def. 17.
(4) 129. pr. 13.

CO-

COROLLARIO VI.

Fig. 43.

CXXXV Date tre rette trovare la quarta proporzionale. (Eucl. lib. 6. prop. 12.)

DIMOSTRAZIONE.

Si prendano le rette A E, A B, A C uguali alle date tre rette, e con esse si formi un qualsivoglia angolo C A B, che abbia un lato uguale alla data prima A E, ed una parte dello stesso lato uguale alla data seconda AB, e l' altro lato uguale alla terza data A C: e tirata la retta E C, dal punto B si tiri la retta BD parallela ad EC. I due ΔΔ AEC, BAD, sono equiangoli per avere gli angoli esterni A B D, A D B = A E C, A C E interni ed opposti (5), e l' angolo A comune. Dunque i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali (6). Dunque A E . A B : : A C . A D. Dunque A D è la quarta proporzionale cercata. Ciocchè ec.

(5) 48. an. def. 17.

(6) 129. pr. 13.

COROLLARIO VII.

CXXXVI. Data una retta, dividerla secondo una data ragione (Eucl. lib. 6. prop. 9.)

DIMOSTRAZIONE.

Sia la retta A C da dividersi nella ragione di A B . B E. Fatta la stessa costruzione come nel cor. prec., essendo i due ΔΔ AEC, A B D equiangoli, sarà A E . A B : : A C . A D, ed alternando A E . A C : : A B . A D. Dunque

an-

(7) 114. cor. 3. pr. 10. ancora dividendo AB . BE . AD : : DC . (7) Dunque ec. Ciocchè ec. èc.

PROPOSIZIONE XIV.

CXXXVII. Se due corde si seghino dentro, o fuori del circolo, il prodotto de' segmenti dell' una uguaglia il prodotto de' segmenti dell' altra, cioè que' segmenti sono proporzionali in guisa, che il rettangolo compreso sotto i segmenti dell' una uguaglia il rettangolo compreso sotto i segmenti dell' altra. (Eucl. lib. 3. prop. 35. e lib. 6. prop. 16.)

SPIEGAZIONE.

Siano le due corde AC, DE, che fra loro si seghino o dentro, o fuori del circolo dico i segmenti essere BA . BD :: BE . BC, e però AB $\times$ CB = DB $\times$ BE.

DIMOSTRAZIONE

Fig. 45.

Del I. Caso.

Tirate le rette AD, CE, ne' due $\Delta\Delta$ ADB, BCE l' angolo ABD = CBE alla cima opposto (8), e l' angolo ADB = BCE, perchè posano sullo stesso arco AE: (9) dunque ancora l' angolo A = E (1). Dunque i due $\Delta\Delta$ ADB, BCE sono equiangoli, e simili, e però i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali (2), cioè BA . BD : : BE . BC. Dunque il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj (3) cioè BA $\times$ BC = BD $\times$ BE Ciocchè ec.

(8) 28. cor. 4. def. 10.
(9) 79. cor. 1. pr. 9.
(1) 44. cor. pr. 1.
(2) 129. pr. 13.
(3) 111. prop. 10.

DI-

DIMOSTRAZIONE

Del II. Caso.

Fig. 46.

Tirate le rette A D, C E, abbiamo un quadrilineo descritto dentro il circolo, i cui angoli opposti A C E + A D E ugualiano due retti (4): ma a due retti sono ancora uguali gli angoli A C E + B C E (5): dunque essendo a questi due uguali quantità comune l'angolo A C E, resta l'angolo A D E = B C E (6): ma l'angolo B è comune sì al △ A B D, come al △ C B E: dunque ancora l'angolo A = BEC (1). Dunque i due △△ A B D, C B E sono equiangoli, e simili; e però i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali (2), cioè BA.BD:: BE.BC. Dunque B A × B C = B D × B E (3). Ciocchè ec.

(4) 81. cor. 2. prop. 9.
(5) 26. cor. 2. def. 10.
(6) Ass. 2.

COROLLARIO I.

CXXXVIII. Date due linee trovar la media proporzionale. (Eucl. lib. 6. prop. 13.)

COSTRUZIONE.

Se tra AB, BC, o tra AC, BC o tra AC, AB, si cerchino le medie proporzionali, si divida in due parti uguali la retta A C in F, e coll' intervallo F A descritto il semicircolo ADC, si alzi in B il perpendicolo B D, e al punto D si tirino le rette A D, C D; dico I. B D essere la media proporzionale tra A B, B C: II. D C la media proporzionale tra A C, B C: III. A D la media tra A C, A B.

Fig. 47.

DIMOSTRAZIONE.

I tre triangoli rettangoli A D C, A D B, D B C sono equiangoli, perchè oltre l' angolo retto, a' due △△ A D C, A B D è comune l' angolo A, e però ancora il terzo ADB = DCB; e a' due △△ A D C, D B C è comune l' ango-
(7) 44. cor. prop. 1. lo C; e però ancora il terzo C D B = A (7); dunque i loro lati opposti agli angoli uguali
(8) 129. pr. 13. sono proporzionali (8); e però A B . B D : : B D . B C; ed inoltre A C . D C : : D C . B C : ed in fine A C . A D : : A D . A B. Ciocchè ec.

COROLLARIO II.

CXXXIX. Data una retta divisa in due parti uguali, e in due altre disuguali, il quadrato della metà della data retta è uguale al rettangolo compreso sotto i disuguali segmenti, ed insieme al quadrato della parte di mezzo (Eucl. lib. 2. prop. 5)

SPIEGAZIONE.

Sia la data retta A C divisa in due parti uguali in F, e in due disuguali in B; dico $FC^2 = AB \times BC + FB^2$.

DIMOSTRAZIONE

Dal punto F coll' intervallo F A descritto il semicircolo A D C, si alzi dal punto B il perpendicolo B D, e da F si tiri la retta F D. Nel triangolo rettangolo F B D sarà
(9) 67 pr. 7. $FD^2 = FB^2 + BD^2$ (9). Ma essendo A B .
(1) cor. prec. (2) 111. pr. 10. B D : : B D . B C (1) sarà $BD^2 = AB \times BC$ (2):
Dun-

Dunque in luogo di BD^2 sostituita la sua uguale quantità sarà $FD^2 = FB^2 + AB \times BC$. Ma $FD = FC$ (3): Dunque $FC^2 = AB \times BC + FB^2$. (3) 16.def. 5.
Ciocchè ec. ec.

COROLLARIO III.

CXL In qualunque luogo sia segata una retta, il quadrato di tutta la retta uguaglierà i due quadrati de' segmenti, ed insieme il rettangolo compreso sotto i segmenti preso due volte (Eucl. lib. 2. prop. 4.)

DIMOSTRAZIONE.

Sia la retta AC segata dovunque in B dalla perpendicolare BD: si tirino le rette AD, DC. Fatto centro nella metà della retta in F, descrivasi il semicircolo ADC: l' angolo ADC è retto (4): dunque $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (5): ma per gli angoli retti in B ne' $\triangle\triangle$ ABD, DBC è $AD^2 = AB^2 + BD^2$ e $DC^2 = BC^2 + BD^2$. Dunque $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BD^2$. Ma essendo BD proporzionale di mezzo tra AB, BC (6), sarà $BD^2 = AB \times BC$ (7): Dunque in vece di $2BD^2$ sostituito $2AB \times BC$, sarà $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC$. Dunque ec. Ciocchè ec.

(4) 79. cor. 1. prop. 9.
(5) 67. pr. 7.
(6) 138. cor. 1. pr. 14.
(7) 111. pr. 10.

COROLLARIO IV.

CXLI. Il quadrato della corda di un circolo è uguale al rettangolo compreso sotto il diametro, e il segmento unito alla detta corda.

DIMOSRAZIONE.

La corda AD è proporzionale di mezzo
(8) 138. cor. 1. prop. 14 tra AC, AB (8). Dunque $AD^2 = AC \times AB$
(9) III. pr. 10. (9). Similmentè la corda DC è proporzionale di mezzo tra AC, BC (8). Dunque $DC^2 = AC \times BC$. Dunque ec. Ciocchè ec.

COROLLAAIO V.

CXLII. Se divisa una retta in due parti uguali, ad una di esse aggiungasi un' altra qualunque retta, il quadrato della retta composta dalla metà, e dal' aggiunta è uguale al quadrato di una delle parti uguali, insieme col rettangolo compreso sotto tutta la retta, e sotto l' aggiunta (Eucl. lib. 2. prop. 6.)

Fig. 48.

SPIEGAZIONE

Sia la retta DE divisa ugualmente in F, e vi si aggiunga EB; dico $FB^2 = FE^2 + EB \times BD$.

DIMOSTRAZIONE

Dal punto B si tiri la Tangente CB, e da C. il perpendicolo CF, e le rette CD, CE. Ne' due $\triangle\triangle$ DCB, ECB l' angolo B è comune, e l' angolo $ECB = CDE$, giac-
(1) 86. cor. 8. pr. 9. chè non meno (1) ECB, che CDE (2)
(2) 79. cor. 1. pr. 9. sono misurati dalla metà dell' arco CE: dunque ancora il terzo $DCB = CEB$ (3). Dun-
(3) 44 cor. pr. 1. que i due $\triangle\triangle$ DCB, CEB sono equiangoli; e però i lati loro opposti agli angoli uguali sono
(4) 129. pr. 13. proporzionali (4), cioè $DB . CB :: CB . EB$.

Dun-

Dunque $CB^2 = DB \times EB$ (5). Ma nel rettangolo $\triangle FCB$ abbiamo $FB^2 = FC^2 + CB^2$ (6). Dunque essendo $FC = FE$, e $CB^2 = DB \times EB$, sarà $FB^2 = FE^2 + DB \times EB$. Ciocchè ec. ec. (5) 111. pr. 10. (6) 67. pr. 7.

PROPOSIZIONE XV.

CXLIII. Tutte le figure simili rettilinee divider si possono in egual numero, ed ordine di triangoli simili (Eucl. lib. 6. prop. 20)

SPIEGAZIONE. Fig. 49. e 50.

Siano le due figure simili rettilinee ABCDE, abcde: tirate le rette BE, CE, be, ce; dico esser simili $\triangle\triangle$ ABE, abe; CED, ced; BEC, bec, in cui sono divise.

DIMOSTRAZIONE

Essendo le suddette figure simili hanno gli angoli uguali, e i lati, che li comprendono, proporzionali (7): Dunque ne' $\triangle\triangle$ ABE; abe, l'angolo A = a, ed il lato AE . ae : : AB . ab. Dunque que' due $\triangle\triangle$ ABE; abe sono equiangoli, e simili (8). Per la stessa ragione i $\triangle\triangle$ CED, ced sono equiangoli. Ma nelle suddette figure simili ancora l'angolo ABC = abc, e l'angolo DCB = dcb (7). Dunque se da questi angoli uguali si tolgano parti uguali, il residuo è uguale (9): Dunque ne' $\triangle\triangle$ simili, tolti gli angoli EBA, eba, ECD, ecd dimostrati uguali, resta l'angolo EBC = ebc, e l'angolo ECB = ecb. Ma nelle suddette figure BA . ba : : BC . bc; e ne' suddetti $\triangle\triangle$ BA . ba : : BE . be: dunque (7) 125. def. 37. (8) 131. cor. 2. pr. 13. (9) Ass. 2.

an-

ancora B E . b e :: B C . b c . Dunque essendo l' angolo E B C = e b c , ancora i due △△ EBC, e b c sono equiangoli, e simili. Dunque ec. Ciocchè ec.

COROLLARIO I.

CXLIV. Simili sono le rettilinee figure divise in un' ugual numero, ed ordine di triangoli simili.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo ne' suddetti △△ simili tutti i lati proporzionali, e gli angoli uguali (1) sono proporzionali ancora tutti i lati delle figure A B C D E, a b c d e, e sono uguali gli angoli A, a, D, d, e gli altri divisi dalle rette C E, c e, B E, b e. Dunque essendo tutte le parti insieme prese uguali al suo tutto (2), ancora tutti gli angoli delle suddette figure A B C DE, a b c d e sono uguali: dunque le suddette figure sono simili. Ciocchè ec. ec.

(1) 125. def. 37.

(2) Ass. 6.

COROLLARIO II.

CXLV. I Perimetri delle figure simili sono fra loro, come due lati omologi delle suddette figure: e l' aree delle figure simili sono fra loro in ragione duplicata, o quadrata de' due lati omologi.

SPIEGAZIONE.

Siano i perimetri delle figure simili A B C D E, a b c d e; dico I. Essi fra loro essere, come il lato A B . a b . II. L' area della pri-

prima figura essere a quella della seconda, come $AB^2 . ab^2$.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Sia per es. il lato AB.ab in ragion doppia: poichè i due Poligoni ABCDE, abcde per ipotesi sono simili, sarà AB. ab :: BC. bc. (3) :: DC, dc :: DE. de :: EA. ea, cioè gli antecedenti in ragione doppia, de conseguenti. Dunque, fatta la somma di tutti i lati; sarà tutto il perimetro ABCDE.abcde :: AB.ab. (3) 125. def. 37.

DIMOSTRAZIONE.

Della Parte II.

Il Δ EAB. Δ eab :: $AB^2 . ab^2$ (4): ed il Δ EBC. Δ ebc :: $EB^2 . eb^2$. Ma $AB^2 . ab^2$ :: $EB^2 . eb^2$. Dunque il Δ EAB. Δ eab :: Δ EBC. Δ ebc (5). Similmente il Δ EBC. Δ ebc :: Δ EDC. Δ edc. Dunque la somma de' triangoli, cioè il poligono maggiore sta al poligono minore, come una parte aliquota simile del poligono ABCDE, ad una parte aliquota simile del poligono abcde, cioè ABCDE. abcde :: Δ EAB. Δ eab. Ma il Δ EAB. Δ eab :: $AB^2 . ab^2$. Dunque ABCDE. abcde :: AB^2 ab^2. Ciocchè ec.

(4) 130. cor. 1. pr. 13.

(5) 108. ass. 9.

COROLLARIO III.

CXLVI. Quindi tutti i poligoni regolari della stessa specie descritti dentro, e fuori ri del circolo, ſono fra loro in ragione quadrata, o duplicata de' loro lati omologi.

DIMOSTRAZIONE.

Tutti i poligoni regolari della ſteſſa ſpecie deſcritti dentro, e fuori del circolo ſono figure rettilinee ſimili. Ma queſte (per il cor. prec.) ſono fra loro in ragione duplicata de' loro lati omologi. Dunque ancor eſſi ſono fra loro in ragione duplicata de' lati omologi. La maggiore, in cui conſiſte la difficoltà, ſi dimoſtra così. Si divida la circonferenza del circolo per il numero de' lati del poligono regolare da farſi dentro il circolo per eſ. $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$; $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$; $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$; $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$; $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$; $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$; $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. ec.

ec., ed il quoto ſempre darà l'arco, la cui corda tirata ſarà il lato cercato del poligono; ed eſſendo tutti i lati uguali, cioè corde di archi uguali, e tutti gli angoli alla circonferenza uguali, perchè poſano ſopra archi uguali (6); i poligoni fatti dentro il circolo ſaranno regolari. Ma i poligoni fatti fuori del circolo ſono ſimili a quelli deſcritti dentro il circolo. Perchè dal centro tirato un raggio perpendicolare alla corda, che la dividerà in parti uguali (7), ed al raggio tirata una tangente indefinita da ambe le parti, per eſſere la corda (7), e la tangente perpendicolari al raggio (8), eſſe ſono fra loro parallele (9). Dunque ſe al concorſo delle tangenti fra loro ſi tirino dal centro delle rette dividenti gli angoli del poligono interno, ne'

(6) 79. cor. 1. prop. 9.

(7) 62. cor. 4. prop. 5.

(8) 75. cor. 2. prop. 8.

(9) 39. cor. 1. an. def. 17.

due

due poligoni si avranno gli angoli esterni uguali agli interni, ed opposti (1). Dunque i triangoli esterni, e interni saranno simili, e però i lati proporzionali (2). Dunque ancora il poligono esterno sarà regolare, cioè composto di angoli e lati uguali. Dunque i poligoni interni, ed esterni saranno figure rettilinee simili (3), e però saranno fra loro in ragione duplicata de' loro lati omologi (4). Ciocchè ec. ec.

(1) 38. an. def. 17.

(2) 129. pr. 13.

(3) 144. cor. 1. prop. 15.

(4) 145. Cor. 2. prop. 15.

ANNOTAZIONI.

CXLVII. Per descrivere un poligono regolare dentro il circolo senza dividere la circonferenza, come sopra, per il numero de' lati del Poligono da farsi, si può usare il seguente metodo.

I. Si può servire della maniera esposta al numero 50. (5), per descrivere un' Esagono. Ivi divisa essendo la circonferenza in sei parti uguali, si può dividerla in tre tirando una retta, che sia corda di due archi dell' Esagono, come è manifesto: e si può dividerla in dodici parti uguali, tirando dal centro una perpendicolare a ciascuna corda dell' Esagono, la quale divida in due parti uguali e la corda, e l' arco soggetto; e resta determinato l' arco, la cui corda è un' lato del Dodecagono regolare.

(5) 50. seconda parte cor. 4. prop. 2.

II. Per descrivere dentro il circolo un quadrato, basta tirare due diametri fra loro perpendicolari, e quindi restando determinati i quadranti del circolo, ad essi tirare le loro corde: queste poi divise in due parti u-

gua-

guali da un raggio ad esse per perpendicolare (6), resta determinato l' arco, la cui corda è un lato dell' Ottogono regolare.

(6) 61. cor. 4. prop. 5.

III. Per descrivere dentro il circolo un Pentagono facciasi sopra la retta F A G un' angolo uguale ad un dato di 36°., indi alla suddetta retta si tiri la perpendicolare C A, e dal punto B coll' intervallo B A, si descriva un circolo, che segherà la linea D A in D. Essendo la misura degli angoli fatti dalla Tangente, e da una corda la metà degli archi sotto tesi (7) dalla medesima corda, l' angolo D A F è misurato dalla metà dell' arco D A: ma l' angolo D A F per costruzione è di 36°. Dunque l' arco D A è il doppio, cioè di 72°., cioè la quinta parte della circonferenza. Dunque la corda D A è un lato del Pentagono regolare. Dunque coll' istesso intervallo D A, dal punto D segato l' arco D C in H, si averà un' altro lato del Pentagono, e così in poi; e gli angoli posando sopra archi uguali saranno fra loro uguali; e però il Pentagono sarà regolare. Ma dalla semicirconferenza sottratti gli archi A D, D H, cioè 144.°, rimane l' arco H C di 36°, cioè la decima parte della semicirconferenza. Dunque la corda di esso sarà un lato del Decagono da farsi dentro il circolo, che per la suddetta ragione sarà regolare.

Fig. 64. Tav. 4.

(7) 86. cor. 8. prop. 9.

IV. Collo stesso metodo si può descrivere dentro il circolo qualunque altro poligono, facendo cioè sopra una Tangente un' angolo uguale a un dato, che sia tale, onde misurato dalla metà dell' arco sottoteso, la corda dell' arco sia il lato cercato del poligono, per es. se l' angolo D A F fosse di 25.°,

sa-

ſarebbe l' arco D A $=40.^{\circ}$ (7), e però la nona parte della circonferenza: Dunque la corda D A, ſarebbe un lato dell' Enneagono regolare.

V. Per fare poi i poligoni regolari fuori del circolo ſimili agli interni, ſi oſſervi il metodo di ſopra deſcritto nel cor. prec. (Eucl. di ciò tratta nel 4. lib.)

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA
PARTE II.
DE' SOLIDI

Si premettono alcune verità come per se note, ed assiomi per essere facilissime a capirsi senza ulteriori dimostrazioni.

ASSIOMI.

CXLVIII. Ass. 12. Ogni linea retta rispetto ad un piano o tutta combacia con esso; o è ad esso parallela, cioè tutta sempre ugualmente distante; o per una parte si allontana, e per l'altra si accosta ad esso, onde prolungata lo sega in un solo punto.

COROLLARIO I.

CXLIX. Quindi se due punti di una retta combaciano con un piano, tutta la retta combacia con esso; onde non può parte di una stes-

ſteſſa retta eſſere in un piano, e parte fuori di eſſo (Eucl. lib. 11 prop. 1.), Queſto diſcende dall' aſſioma precedente.

COROLLARIO II.

CL. Quindi il ſegamento comune di due piani è una linea retta (Eucl lib. 11. prop. 3.)

DIMOSTRAZIONE

Se per due qualſivogliano punti del ſegamento comune di due piani ſi tiri una retta, queſta deve giacere in tutti due que' piani, e combaciar con eſſi (1): Dunque tutta la retta combacerà con ambedue i piani: Dunque ec. Ciocchè ec.

(1) Cor. prec.

CLI. Aſſ 13. Per quanti ſi vogliano punti direttamente poſti ſecondo una lunghezza, o per qualſivoglia linea retta poſſono tirarſi de' piani di numero indefiniti.

CLII. Aſs. 14. Per due rette, che o concorrano in un punto, o ſiano fra loro parallele; e per tre punti non poſti direttamente ſecondo una lunghezza, o per tre lati di qualſivoglia triangolo ſi può tirare un ſolo piano, appartenendo ad una medeſima piana ſuperficie. (Eucl. lib 11. prop. 2., e 7.)

CLIII. Aſs. 15. Due piani o ſono fra loro paralleli, cioè ſempre ugualmente diſtanti, o da una parte ſi allontanano, e dall' altra ſi accoſtano fra loro, ed in tal caſo prolungati devono ſegarſi in una linea retta.

COROLLARIO I.

CLIV. Se due piani fra loro paralleli segano un terzo medesimo piano, i segamenti comuni sono fra loro paralleli. (Eucl. lib. 11.
Fig. 51. prop. 16.)

DIMOSTRAZIONE

Siano i piani paralleli A C B, O F E, e seghino il piano A E. I segamenti comuni de' due piani esser devono in una linea retta, e questa deve giacere in tutti due i piani fra
(2) 152. Cor. loro segati (2), cioè A B nel piano A C B, e
2. Ass. 12. nel piano A E; ed O E nel piano O F E e nel piano A E: dunque se i due piani A C B, O F E fra essi paralleli segano il terzo piano A E, i segamenti A B, O E esser devono ancora nè piani fra essi paralleli. Ma questi piani A C B, O F E sempre sono fra essi paralleli (3): dunque ancora i segamenti A B,
(3) 153. Ass. 15. O E in essi giacenti sempre sono paralleli. Ciocchè ec.

COROLLARIO II.

CLV Se più piani paralleli seghino in qualunque maniera due rette, le segano in parti
Fig. 52. proporzionali (Eucl. lib. 11. prop. 17.)

DIMOSTRAZIONE.

Siano i piani paralleli P Q, R S, T V, che seghino comunque le rette B D, H G: ne' suddetti piani si tirino le rette B H, G D; indi si tiri la retta B G, che incontri il piano R S

RS in F, e si tirino le rette FC, FI. Il piano del △ BGD, che sega i piani paralleli, fa i segamenti CF, DG paralleli (4): dunque a cagione degli angoli esterni uguali agl' interni ed opposti e dell' angolo B comune, essendo i △△ DBG, CBF equiangoli, i loro lati sono proporzionali (5): dunque BC. CD:: BF. FG. Parimente il piano del △ BHG, segando i piani paralleli, fa i segamenti BH, FI paralleli (4): dunque per la suddetta ragione i lati de' triangoli equiangoli BGH, FGI sono proporzionali (5): dunque HI. IG :: BF. FG: ma abbiam veduto ancora BC. CD:: BF. FG: dunque ancora BC. CD:: HI. IG (6): dunque ec. Ciocchè ec.

(4) Cor. prec.

(5) 129. prop. 13.

(6) 108. Ass. 9.

CLVI. Def. 39. La linea retta dicesi perpendicolare ad un piano, quando è perpendicolare a tutte le rette, che la toccano, e sono nel soggetto piano.

COROLLARIO

CLVII. Se due piani siano perpendicolari ad una retta, sono fra loro paralleli. E se ad uno de' due piani paralleli una retta sia perpendicolare, è perpendicolare ancora all' altro (Eucl. lib. 11. prop. 14.) Fig. 51.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Siano i due piani ACB, OFE perpendicolari alla retta AO. Essendo per ipotesi la retta AO perpendicolare sì al piano ACB, come al piano OFE, essa è perpendicolare

 a tut-

a tutte le rette, che la toccano, e sono in
(7) 156. def. que' piani (7): dunque gli angoli CAO, BAO
39. = FOA, EOA, cioè tutti retti: dunque gli angoli interni CAO, FOA, e BAO, EOA uguagliano due retti; dunque le rette
(8) 39. Cor. AC, AB sono parallele alle rette OF, OE (8).
1. an. def. Ma le rette AC, AB sono in un medesimo
17. piano colla retta CB, e le rette OF, OE
(9) 152. Ass. in un medesimo piano colla retta FE (9):
14. dunque i due piani ACB, OFE sono paralleli. Dunque ec. Ciocchè ec.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Se il piano ACB per ipotesi è parallelo al piano OFE, gli angoli interni fatti da questi piani colla retta AO, cioè CAO, FOA, e BAO, EOA uguagliano due ret-
(1) 38. An. ti (1): ma essendo per ipotesi AO perpendi-
def. 17. colare al piano ACB, gli angoli CAO, BAO sono retti: dunque ancora gli angoli FOA, EOA sono retti: dunque AO è perpendicolare ancora alle rette OF, OE: dunque è ancora perpendicolare al piano OFE (7). Ciocchè ec.

PROPOSIZIONE XVI.

CLVIII. Se una retta sia a due rette, che
Fig. 53. fra loro si segano, perpendicolare nel comune segamento, essa è perpendicolare ancora al piano, che passa per le stesse rette. (Eucl. lib. 11. prop. 4.)

COSTRUZIONE

Sia la retta A C perpendicolare alle rette B D, E F nel comun segamento C: si tiri nello stesso piano un'altra qualunque retta G C H; indi la retta B G E, che incontri le suddette rette ne' punti B,G,E, e prese le rette CD, CF=CE, CB, si tiri la retta FD, che incontri la G H in H: poi dai punti B, G, E, D, H, F si tirino altrettante rette al punto A.

DIMOSTRAZIONE

Si considerino nella descritta figura sette paja di triangoli uguali.

1. Ne' triangoli B C E, D C F essendo gli angoli opposti alla cima C uguali, ed i lati C F, C D = C B, C E per costruzione; sarà il △ B C E = △ D C F (2). (2) 45. prop. 2.

2. Ne' △ △ B C A, D C A essendo gli angoli al punto C per ipotesi retti, ed il lato C B = C D per costruzione, ed A C comune, sarà il △ B C A = △ D C A (2).

3. Ne' △ △ E C A, FCA essendo parimente retti gli angoli al punto C, ed il lato C E = C F per costruzioge; ed A C comune, sarà il △ E C A = △ F C A. (2)

4. Ne' triangoli B A E, D A F tutti i lati corrispondenti sono uguali, perchè si dimostrò il lato B E = D F num. 1., il lato B A = D A num. 2., ed il lato E A = F A num. 3.: dunque ancora il △ B A E = △ D A F (3) (3) 56. prop. 4.

5. Ne' △ △ B C G D C H essendo gli angoli opposti alla cima C uguali, e l'angolo C B G = C D H num. 1., dove si dimostrò il

$\triangle$ BCE = $\triangle$ DCF, ed essendo il lato CB = CD per costruzione; sarà ancora il $\triangle$ BCG = $\triangle$ DCH (4).

(4) 51. prop. 3.

6. Ne' $\triangle\triangle$ ABG, ADH essendo il lato AB = AD num. 2., ed il lato BG = DH num. 5., e l'angolo ABG = ADH num. 4. sarà ancora il $\triangle$ ABG = ADH (2).

7. Ne' $\triangle\triangle$ ACG, ACH essendo il lato CG = CH num. 5., ed il lato AG = AH num 6., ed AC comune; sarà ancora il $\triangle$ ACG = $\triangle$ ACH (3). Dunque è l'angolo ACG = ACH: dunque la retta AC è perpendicolare a qualunque retta GH tirata nel piano, che passa per le date rette, che si segano: dunque AC è perpendicolare ancora a tutto il piano (5). Ciocchè ec.

(5) 156. def. 39.

COROLLARIO I.

CLIX. Se da un punto di una data retta escano tre rette perpendicolari alla data, quelle sono in un medesimo piano (Eucl. lib. 11 prop. 5.)

Fig. 54.

DIMOSTRAZIONE

Sia il punto A della data retta RA, d'onde escano le tre rette AB, AC, AF per ipotesi perpendicolari alla data RA. Se negasi, che le rette AB, AC, AF siano nel medesimo piano QF, sia per ipotesi AB in un'altro piano RO, che seghi il piano QF nella retta AO. Essendo la retta RA per ipotesi perpendicolare alle rette AC, AF, è perpendicolare ancora al piano QF (6), e però altresì al segamento comune AO. Ma per ipotesi RA era perpendicolare ancora alla

(6) 158 prop. 16.

la retta AB: dunque sarà l'angolo RAB = RAO, cioè la parte al tutto; ma questo è un assurdo: dunque non AB, ma AO insieme con AC, ed AF sono in un medesimo piano, e tutte e tre perpendicolari alla data RA. Ciocchè ec.

COROLLARIO II.

CLX. Se una retta giri intorno ad un' altra immobile, e perpendicolare ad essa, produrrà un piano perpendicolare alla medesima.

DIMOSTAZIONE

Sia la retta MN immobile, e perpendicolare alla retta CA, che concepiscasi girare intorno alla prima, e col suo giro produrre un piano. Dal punto C tirando due altre rette perpendicolari alla data MN, queste saranno in un medesimo piano (7) colla retta CA: dunque se MN è perpendicolare ad esse, è perpendicolare ancora al piano dal giro della retta CA generato (8). Ciocchè ec. Fig. 55.

(7) 159. Cor. prec.

(8) 58. prop. 16.

COROLLARIO III.

CLXI. Per qualunque punto dato dentro, o fuori di una data retta si può tirare un piano perpendicolare alla data retta.

DIMOSTRAZIONE

Del I. Caso.

Sia la data retta FC, ed in essa il dato punto C; tirati due piani, che passino per Fig. 51.

la retta F C, ed in essa si seghino, in que' piani si tirino le rette C A, C B perpendicolari alla data F C. Essendo F C perpendicolare per costruzione alle rette C A, C B, se per queste si tiri il piano A C B, essa è per-
(9)158.prop. 16. pendicolare ancora al piano A C B (9): dunque dal punto C si può tirare un piano perpendicolare alla data retta F C. Ciocchè ec.

DIMOSTRAZIONE
Del II. Caso.

Sia il dato punto A fuori della data retta F C, e da A si tiri A C perpendicolare alla F C; indi in qualunque altro piano F B, che passi per la F C, ma non per il punto A, si tiri C B perpendicolare ancor essa alla data F C. Essendo F C per costruzione perpendicolare alle rette C A, C B, se per esse si tiri il piano A C B, sarà perpendicolare ancora allo stesso piano (9): dunque dal punto A si può tirare un piano perpendicolare alla data retta. Ciocchè ec.

COROLLARIO IV.

Fig. 54. CLXII. Se di due rette parallele una sia perpendicolare ad un piano, ancora l'altra sarà ad esso perpendicolare. E se ambedue siano perpendicolari ad un piano, saranno fra loro parallele. (Eucl. lib 11. prop. 6., e 8.)

DIMOSTRAZIONE
Della I. Parte.

Sia la retta R A perpendicolare al piano Q F, e parallela alla retta D O, e per queste pa-

parallele passi il piano RO, che seghi il piano QF nella retta AO: dal punto O della retta DO si tiri OF perpendicolare alla DO; e dal punto F si tiri FA perpendicolare alla RA. Essendo RA per ipotesi parallela alla DO, i due angoli interni RAO + DOA fatti dalle parallele col comun segamento AO sono uguali a due retti (1): ma l'angolo RAO per ipotesi è retto; dunque ancora DOA è retto: ma ancora l'angolo DOF è retto per costruzione; dunque se per OAF si tiri un piano, la retta DO è ad esso perpendicolare (2): ma ancora la retta RA sì per ipotesi, come per costruzione è perpendicolare allo stesso piano: dunque le parallele RA, DO sono perpendicolari allo stesso piano. Ciocchè ec.

(1) 38. an. def. 17.

(2) 158. prop. 16.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Se RA, e DO sono per ipotesi al piano QF perpendicolari, per esse si tiri il piano RO, che seghi il piano QF nella retta AO. Essendo AO nel piano QF, quelle rette formano gli angoli RAO, DOA retti: ma questi sono angoli interni posti alla medesima parte, e presi insieme uguagliano due retti: dunque RA, DO sono parallele (3). Ciocchè ec.

(3) 39. Cor. 1. annot. def. 17.

COROLLARIO V.

CLXIII. Se due rette siano parallele ad una terza, benchè non siano tutte e tre nel medesimo piano, sono fra loro parallele (Eucl. lib. 11. prop. 9.)

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 51. Siano le rette A O , B E parallele a C F. Se per il punto C della retta C F si tiri il piano A C B perpendicolare a C F (4), quel
(4) 161. cor. 3. prop. 16. piano è perpendicolare ancora sì alla retta A O, come alla B E (5). Ma quando due ret-
(5) 162. cor. 4. prop. 16. te sono perpendicolari ad un piano; sono fra loro parallele (5); dunque A O , B E sono ancora fra loro parallele. Dunque ec. Ciocchè ec.

COROLLARIO VI.

CLXIV. Se due rette siano parallele a due altre rette, benchè non siano in un medesimo piano, formano angoli uguali. (Eucl. lib. 11. prop. 10.)

DIMOSTRAZIONE.

Siano le rette A B , A C parallele alle rette O E ; O F , e le prime si facciano uguali alle seconde: indi si tirino le rette A O, B E ; C F. Essendo A B ; O E ; parallele ;
(6) 152. Ass. 14. sono in uno stesso piano (6); ed essendo A B =OE, ancora le rette A O. BE , che le congiun-
(7) 46. cor. 1. prop. 2. gono, sono fra loro uguali, e parallele (7); e per la stessa ragione le rette C F, A O sono parallele, ed uguali: dunque ancora le rette
(8) Ass. 1. C F , B E sono parallele , ed uguali (8): dunque ancora le rette C B ; F E, che le congiungono, sono parallele, ed uguali (7): dunque ne' △△ A C B , O F E tutti i lati fra loro paralleli sono uguali. Dunque sarà il △ A C B

=OFE

= O F E (9): dunque farà l'angolo BAC=EOF. Ciocchè ec. (9) 56. prop. 4.

COROLLARIO VII.

CLXV. Da un dato punto posto o fuori o dentro di un dato piano, si può tirare una sola perpendicolare allo stesso piano (Eucl. lib. 11. prop. 11. 12 13.

DIMOSTRAZIONE.

Della I. Parte.

Sia il punto D fuori del piano QF, e da D si tiri DO perpendicolare al suddetto piano. Se da D può tirarsi allo stesso piano un' altra perpendicolare, questa sia per ipotesi la retta DA; e dal punto A si tiri la retta AR parallela a DO. Essendo DO perpendicolare al piano QF, ancora la sua parallela RA è perpendicolare allo stesso piano QF (1): dunque l'angolo RAO, DOA sono retti. Ma per ipotesi ancora la retta DA è perpendicolare al piano QF: dunque gli angoli RAO, DAO, DOA sono retti, e però uguali: ma questo è impossibile, perchè RAO contiene DAO, e però la parte sarebbe uguale al tutto (2), e perchè nel Δ DAO vi sarebbero più di due retti (3): dunque da un dato punto fuori del piano ec. Fig. 54. (1) 162. cor. 4. prop. 16. (2) Ass. 6. (3) 43. prop 1.

DIMOSTRAZIONE
Della Parte II.

Sia il dato punto A nel piano QF, d'onde si tiri al piano la perpendicolare RA.

Se

Se dal punto A un' altra perpendicolare al piano tirar si possa, sia questa per ipotesi la retta A D, e dal punto D si tiri D O parallela alla R A: ora segue la dimostrazione già fatta degli assurdi impossibili, che ne verrebbero. Dunque ancora da un punto di un dato piano una perpendicolare sola al piano tirar si può. Ciocchè ec.

COROLLARIO VIII.

CLXVI. Se due rette concorrenti in un' punto siano parallele a due altre rette concorrenti in un'altro punto, ancora i piani tirati per le stesse rette sono paralleli. (Eucl. lib. 11. prop. 15.)

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 51. Siano le rette A C, B C concorrenti nel punto C parallele alle rette O F, E F concorrenti nel punto F: da C si tiri C F perpendicolare alle due O F, E F: essendo per ipotesi A C, B C parallele alle rette O F, E F, i due angoli interni B C F + E F C, e i due A C F + C F C uguagliano due retti (4): ma C F per costruzione perpendicolare alle rette O F, E F, gli angoli E F C, O F C sono retti: dunque ancora sono retti gli angoli B C F, A C F: dunque alla C F sono perpendicolari ancora ambedue i piani A C B, O F E (5): dunque questi due piani sono fra loro paralleli (6). Ciocchè ec.

(4) 38 ann. def. 17.

(5) 158. prop. 16.

(6) 157. cor. def. 39.

CLXVII. Def. 40. La inclinazione di una retta, ad un piano, o di un piano ad un altro è l'angolo formato dalla data retta, o dal piano inclinato, e dalle perpendicolari tirate al comun segamento: per es. ne' piani A F, A E dal punto A del comun segamento A O,

Fig. 51.

tirate

tirate le rette A C, A B perpendicolari alla A O, l'angolo rettilineo C A B è la misura dell' inclinazione della retta C A, o del piano A F al piano A E; il quale angolo se sia retto un piano è perpendicolare all' altro.

COROLLARIO I.

CLXVIII. Se una retta sia perpendicolare ad un piano, ancora i piani, che passano per la data retta sono perpendicolari all' altro (Eucl. lib. 11. prop. 18.)

DIMOSTRAZIONE.

Sia la retta R A perpendicolare al piano Q F, e però a tutte le rette A O, A C, A F tirate in quel piano, e concorrenti colla data retta nel punto A (7): da' punti O, C, F, si possono tirare altrettante parallele alla retta A R, ciascuna delle quali colla stessa A R. formi un piano (8): ma se di due rette parallele per es. R A, D O, una, cioè R A sia perpendicolare al piano Q F, ancora l'altra D O, è perpendicolare allo stesso piano (9): dunque ancora il piano R O che passa per quelle parallele R A, D O, è perpendicolare al piano Q F: dunque per la stessa ragione tutti i piani R O, R C, R F, e quanti altri si vogliono formati dalle parallele colla retta R A sono perpendicolari al piano Q F. Ciocchè ec.

Fig. 54.

(7) 156. def. 39.

(8) 152. Ass. 14.

(9) 162. cor. 4. prop. 10.

COROLLARIO II.

CLXIX. Il segamento comune di due piani perpendicolari ad un terzo piano è perpen-

Fig. 51.

pen-

pendicolare allo stesso piano. Eucl. lib. 11. prop. 19.)

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 51. Siano i due piani A F, B F, che si seghino nella retta C F, e seghino il terzo soggetto piano O F E perpendicolarmente; dico il segamento comune CF esser perpendicolare al piano OFE. Perchè il segamento comune CF deve giacere in tutti due i piani A F, F B, che si segano; se dal punto sublime C del segamento si tirino ne' due piani le rette CA, CB parallele, ed uguali alle rette F O, F E, e se dal punto A si tiri il perpendicolo A O sul soggetto piano O F E, abbiamo le rette A O, C F, che congiungono le parallele, ed uguali C A, F O essere ancor esse parallele, ed uguali (1): ma una di queste cioè A O è per costruzione perpendicolare al soggetto piano: dunque ancora l'altra, cioè C F segamento comune, è perpendicolare al terzo soggetto piano (2). Ciocchè ec.

(1) 46. cor. 1. prop. 12.

(2) 162. cor. 4. prop. 16.

ANNOTAZIONI

CLXX. Molte altre cose dimostrar si possono appartenenti agli angoli formati da' piani nel comun loro segamento: cioè

1. Che un piano segandone un altro fa due angoli, che presi insieme uguagliano due retti.

2. Che indefiniti piani, i quali scambievolmente si seghino in una retta, non formano più di quattro angoli retti.

3. Che gli angoli alla cima opposti for-

mati da' piani, che si segano, sono sempre uguali.

4. Che se due piani paralleli siano segati da un terzo piano, l' angolo esterno è uguale all' interno, ed opposto; gli angoli alterni sono sempre uguali; e gli angoli interni posti alla stessa parte uguagliano due retti: ed altre simili. Ma siccome tutto ciò si è dimostrato nella Geometria piana a proposito delle linee rette, ed a quelle stesse dimostrazioni questo ridur si può facilmente, se a' segamenti comuni de' piani si tirino delle rette perpendicolari ne' piani stessi, e si osservino gli angoli da queste rette fatti co' segamenti comuni de' piani, i quali angoli non sono diversi da quelli dimostrati trattandosi delle pure linee; così imitando la maggior parte de' Geometri, per brevità ancor io tralascio di trattarle più a lungo.

CLXXI. Def. 41. L'angolo rettilineo solido è compreso da più, che da due superficie, o angoli piani, che non siano in un medesimo piano, ma terminino in un medesimo punto.

Facilmente si concepisce l' angolo solido, se da tutti gli angoli di un poligono rettilineo; per es. da punti B, E, D, F ad un qualunque punto A fuori del piano del poligono si tirino altrettante rette AB, AE, AD, AF perchè al dato punto A si formerà un angolo solido composto di tanti angoli piani, o di tante superficie, quanti sono i lati del poligono, cioè dagli angoli BAE, EAD, DAF, FAB. Fig. 53.

COROLLARIO I.

CLXXII. Se l' angolo solido sia formato

da

da triangoli piani, due di loro in qualunque maniera presi sono maggiori del terzo (Eucl. lib. 11. prop. 20.)

DIMOSTRAZIONE.

Se i tre angoli piani siano fra loro uguali, è manifesto due di essi esser maggiori del terzo. Ma se siano disuguali, sia l'angolo B A C = C A D, e l'angolo B A D maggiore d'uno di essi; da cui si prenda l'angolo B A E = B A C = C A D, facendo il lato A E = A C = A D. Essendo l'angolo B A E = B A C, ed i lati B A, A E = B A, A C, sarà ancora la base B E = B C (3). Ma essendo B E, B C, C D uguali, ed i lati B C + C D maggiori del solo B D (4); resta C D maggiore di E D: dunque essendo i lati E A, A D = C A, A D per costruzione, ed il lato C D maggiore di E D; l'angolo C A D opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo E A D opposto al lato minore (5). Ma essendosi dimostrato l'angolo B A E = B A C = C A D, gli angoli B A C + C A D sono maggiori del solo B A D: dunque se l'angolo solido A è formato da tre angoli piani, due di essi sono maggiori del terzo. Ciocchè ec.

Fig. 56.

(3) 45. prop. 2.

(4) 77. cor. 7. prop. 8.

(5) 70. prop. 8.

COROLLARIO II.

CLXXIII. Gli angoli piani, che compongono qualunque angolo solido, sono minori di quattro retti (Eucl. lib. 11. prop. 21.)

Sia l'angolo solido A composto dagli angoli piani B A E, E A D, D A F. F A B. Si consideri come solido l'angolo E alla base composto da tre angoli piani B E A, D E A

Fig. 63.

BED

BED, e suppongasi il parallelagrammo BEDF alla base essere rettangolo.

Gli angoli BEA + DEA sono maggiori del solo BED (6); e per la stessa ragione gli angoli EDA + FDA maggiori del solo EDF; gli angoli DFA + BFA maggiori del solo DFB; e gli angoli FBA + EBA maggiori del solo FBE. Ma gli angoli del rettangolo BED, EDF, DFB, FBE sono per ipotesi quattro retti. Dunque gli altri otto presi insieme sono maggiori di quattre retti. Ma quegli otto insieme presi co' quattro angoli alla cima A, che compongono l' angolo solido A, devono uguagliare otto angoli retti, per esser tutti gli angoli di quattro triangoli (7): dunque se quegli otto angoli sono maggiori di quattro retti, rimane, che i quattro angoli componenti l'angolo solido A siano minori di quattro retti. Ciocchè ec.

(6) cor. prec.

(7) 43. prop. 1.

ANNOTAZIONE

CLXXIV. Facilmente si concepisce da' principianti il Corollario precedente, se formino un'angolo solido A di carta composto di tre angoli piani per es. EAB, BAC, CAE, dove il lato EA cada sopra il lato DA. Se deprimasi la cima dell'angolo A per appianare l' angolo solido A sarà necessario, che si apra un lato, per es. BE; sicchè il lato EA più non cada sopra il lato DA, ma a tre suddetti angoli piani si aggiunga il quarto EAD; ed allora al appunto A concorrendo tutte le rette EA, BA, CA, DA giacenti in una stessa piana superficie si formeranno quattro angoli, che presi insieme ugua-

Fig. 56.

glieranno quattro retti: dunque i tre soli angoli piani E A B, B A C, C A E componenti l'angolo solido A, dove il lato A E s'intenda cadere sul lato D A, sono minori di quattro retti.

COROLLARIO III.

CLXXV. Quindi cinque sole sono le specie degli angoli solidi formati ne' corpi ordinati, e regolari.

DIMOSTRAZIONE.

Il corpo ordinato, e regolare è quello, che ha tutte le piane superficie uguali, ed ordinate. Ora dunque a procedere con buon' ordine.

1. Da triangoli equilateri non può formarsi un' angolo solido, ma se ne richieggono almeno tre; perchè non meno tre piane superficie son necessarie per contenere un'angolo solido (8), che tre rette vi vogliono per formare un triangolo.

(8) 156. def. 29.

2. Essendo ciascun angolo del triangolo equilatero di 60°, e del quadrato di 90°, e del Pentagono di 108°., e dell'Esagono di 120°., e di tutti gli altri molto maggiore, ne segue, che sei angoli di triangoli equilateri, quattro angoli di quadrati, e tre angoli di un' esagono fanno la somma di 360°, e quattro angoli di un pentagono la somma di 432°: dunque dovendo essere l'angolo solido minore di quattro retti (9), non potrà esser formato dal numero de' suddetti angoli piani, e molto meno dagli angoli di poligoni, che abbiano più lati di un' esagono. Dunque rimane

(9) cor. prec.

mane, che l'angolo solido possa esser composto da tre angoli di un pentagono, che fanno la somma di 324°; da tre angoli di un quadrato, che fanno la somma di 270°; da tre, o da quattro, o da cinque angoli di triangoli equilateri; che presi insieme sono minori di quattro retti. Dunque cinque sole sono le specie degli angoli solidi formati ne' corpi regolari, cioè quelli, che sono composti da tre angoli di pentagoni, da tre di quadrati, da tre, o da quattro, o da cinque triangoli equilateri. Ciocchè ec.

ANNOTAZIONE.

CLXXVI. Gli antichi Geometri dimostrano, ed Euclide ancora ne tratta nel suo 13. libro; che i cinque corpi regolari, i quali contengono le suddette specie di angoli solidi sono composti 1. di dodici pentagoni. 2. di sei quadrati, che formano un cubo; 3. di quattro triangoli, che formano una piramide, il cui angolo solido alla cima è fatto da tre angoli piani; 4. di otto triangoli, quattro de' quali concorrono alla cima dell'angolo solido; 5. di venti triangoli, cinque de' quali concorrono alla cima dell'angolo solido. Inoltre dimostrano, che in ciascuno di questi corpi si può descrivere dentro di essi una sfera, che tocchi tutte le loro superficie, o intorno fuori di essi descrivere una sfera, che passi per tutti gli angoli de' medesimi corpi: Ma essendo ciò di pochissimo uso, basta a noi l'averlo accennato.

COROLLARIO IV.

CLXXVII. Da quanti si vogliano angoli piani può sempre formarsi un'angolo solido, purchè e tutti insieme siano minori di quattro retti, e ciascuno di essi minore degli altri presi insieme (Eucl. lib. 11. prop. 21., 22., 23.)

Che tutti insieme gli angoli piani componenti un' angolo solido siano minori di quattro retti, l' abbiamo dimostrato nel Cor. 2. Def. 41.

Che se l' angolo solido sia formato da tre angoli piani, uno di essi, qualunque sia, è minore degli altri due presi insieme, l' abbiamo dimostrato nel Corollario 1. Def. 41.

Che colle stesse condizioni possa un' angolo solido esser formato da quanti si vogliano angoli piani, mi contento di dichiararlo a' principianti senza rigore geometrico, che richiederebbe troppo prolissa dimostrazione.

Dal punto A dell' angolo solido si tiri sulla soggetta base la perpendicolare A C, e si
Fig. 53. concepisca l' angolo piano B A E insieme cogli altri E A D, D A F, F A B muoversi, e girare intorno al perpendicolo A C, finchè ritornino al luogo, dove sono: gli angoli piani al punto A nel loro giro non si mutano di grandezza, ma solo si muta continuamente la loro situazione, e le inclinazioni de' piani nelle rette A B, A E, A D, A F; dunque nel loro giro restano al punto A, come sono, tutti insieme minori di quattro retti, e ciascuno di essi minore degli altri presi insieme, e componendo sempre lo stesso angolo A, e variando la loro situazione mostrano potersi l' angolo A formare da quanti si vo-

glia-

gliano angoli piani. La qual cosa a' principianti può ancora rappresentarsi sensibilmente per mezzo di qualche angolo solido formato di carta.

COROLLARIO V.

Ad un dato punto di una data retta si può formare un angolo solido uguale ad un'altro dato (Eucl. lib 11. prop. 26.)

DIMOSTRAZIONE

Per formare un'angolo solido uguale ad un dato ABCD, si prenda la retta da = DA, ed al punto a si congiunga ac = AC, e si faccia l'angolo cad = CAD (1); sarà ancora cd = CD; e tutto il triangolo cad = △CAD. Similmente presa ab = AB, e fatto l'angolo cab = CAB, sarà ancora cb = CB, ed il △cab = △CAB (2) Finalmente avendo dimostrato l'angolo acd = ACD, ed acb = ACB, ed il lato cd = CD, e cb = CB, sarà l'angolo bcd = BCD, e però ancora il △bcd = △BCD (2): Dunque sarà ancora il △bad = △BAD per avere i lati corrispondenti uguali (3): dunque se soprappongasi l'angolo solido abcd all'angolo solido ABCD, combaceranno, per essere gli angoli piani componenti il primo uguali agli angoli piani componenti il secondo: dunque i due solidi angoli saranno uguali (4). Ciocchè ec.

Fig. 56. e 57.

(1) 21. cor. def. 7.

(2) 45. prop. 2.

(3) 56. prop. 4.

(4) Ass. 5.

CLXXIX. Def. 42. La figura solida, che ha per base una figura rettilinea, dagli angoli della quale si tirino fuori del suo piano altrettante rette uguali, e parallele, che formano un' altra superficie uguale, e parallela alla base, quella figura dicesi *Prisma*, e vedesi nella figura 51., e 58. Se la sua base sia un parallelogrammo, il Prisma dicesi *Parallelepipedo*, e vedesi nella figura 60. Se tutte le superficie siano quadrate, chiamasi *Cubo*. Se finalmente quelle rette terminino in un punto fuori della base, dicesi *Piramide*, e vedesi nella fig. 59.

CLXXX Def. 43. Le figure solide, che sono comprese da' piani simili, ed uguali di numero, sono simili. Se poi siano piani simili, ed uguali di numero, e di grandezza, le figure sono simili, ed uguali.

COROLLARIO I.

CLXXXI. Qualunque segamento di un prisma, o di una piramide fatto in un piano parallelo alla base forma una figura affatto simile alla base, che nel prisma sarà ancora uguale alla base, e nella piramide avrà i lati omologi minori in ragion della distanza del segamento dalla cima della piramide alla distanza della base dalla medesima cima (Eucl. lib. 11. prop. 24.)

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Fig. 58. Sia L P O N M il segamento del prisma fatto parallelo alla base: abbiamo per ipotesi due piani paralleli, i quali con ciascuno de' loro lati segano un terzo medesimo piano, cioè co' lati L P, A B segano il piano L A B P; e così degli altri si dica: ma in tal caso

i sei segamenti comuni L P, A B ec. sono fra loro paralleli (5): dunque ciascun lato del segamento L P O N M è parallelo a ciascun lato della base A B C D E. Ma essendo così, comprendono gli angoli L P O, P O N ec. = A B C, B C D ec. (6): dunque ancora ciascun' angolo del segamento L P O N M è uguale a ciascun' angolo della base A B C D E. Inoltre le rette L A, P B, O C, N D, M E sono fra loro parallele (7): dunque essendo ancora ciascun lato del piano L P O N M parallelo a ciascun lato della base A B C D E, i lati opposti sono paralleli; dunque le faccie L A P B, P B C O ec. sono parallelogrammi: dunque i lati L P, P O ec. sono ancora uguali a' lati A B, B C ec (8): dunque tutto il segamento L P O N M è affatto simile, ed uguale alla base A B C D E.

(5) 154. cor. 1. Ass. 15.

(6) 164. cor. 6. prop. 16.

(7) 179. def. 42.

(8) 55. cor. 4. prop. 5.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Sia L P O N M il segamento della piramide parallelo alla base; e però ciascun lato di esso parallelo a ciascun lato opposto della base A B C D E a cagione degli angoli esterni uguali agl' interni, ed opposti, e dell' angolo F comune sono simili i △△ L F P, A F B; P F O, B F C, e così dicasi degli altri: dunque sarà (9) L P . A B :: L F . A F ed ancora L P . A B :: P F : B F : dunque L F . A F = P F . B F (1): ma per la stessa ragione i lati P O, O N, N M, M L sono a' lati B C, C D, D E, E A, come P F, O F, N F, M F a' lati B F, C F, D F, E F, cioè come L F . A F (1); dunque e tutto il segamento L P O N M è simile alla

Fig. 59.

(9) 199. prop. 13.

(1) 108. Ass. 9.

base A B C D E, ed i lati simili del primo sono minori de' lati della base in ragione di L F . A F, cioè della distanza del segamento dalla cima della piramide alla distanza della base dalla medesima cima. Ciocchè ec.

COROLLARIO II.

CLXXXII. La superficie laterale di un prisma, i cui lati rettilinei siano alla base perpendicolari, è uguale al prodotto nato dalla moltiplicazione del perimetro della base per uno de' lati perpendicolari alla base. E la superficie laterale di una piramide, che abbia tutti i lati rettilinei uguali, ed i lati della base parimente uguali, è uguale alla metà del prodotto nato dalla moltiplicazione del perimetro della base per una perpendicolare tirata dalla cima a qualsivoglia lato della base.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Fig. 58. Essendo nel prisma tutti i lati EG, DH, CI ec. fra loro paralleli, ed uguali (2), e per ipotesi perpendicolari alla base; sono ancora le rette, che le congiungono, cioè E D, D C ec. G H, H I ec. parallele ed uguali fra loro (3); dunque E D H G, e così le altre faccie sono parallelogrammi rettangoli. Dunque moltiplicando un lato per l' altro, cioè E D $\times$ E G si ha l' area E D H G; e così le aree delle altre faccie (4). Ma E G è la costante medesima altezza di tutti que' rettangoli: dunque moltiplicando tutti i lati, cioè il perimetro della base per E G si ha la somma

(2) 179. def. 42.
(3) 46. cor. 1. prop. 2.
(4) 66. ann. 2.

ma

ma di tutte le aree de' rettangoli componenti la superficie laterale del prisma.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Dalla cima F della piramide si tiri F Z perpendicolare al lato A E della base. Essendo per ipotesi tutti i lati della base fra loro uguali, ed i lati dalla cima F agli angoli della base tirati parimente uguali, tutte le faccie della piramide sono triangoli isosceli fra loro uguali. Mà l'area del Δ A F E $= \frac{1}{2}$ A E $\times$ F Z (5): dunque essendo l'altezza di que' triangoli uguali costantemente la medesima F Z, la somma di tutti que' triangoli sarà uguale alla metà del prodotto nato dalla moltiplicazione di tutti i lati; cioè del perimetro della base per F Z. Ciocchè ec. Fig. 59

(5) 66. ann. 3.

COROLLARIO III.

CLXXXIII. Se una piramide sia troncata da un piano parallelo alla base, la superficie contenuta tra il segamento, e la base è uguale al prodotto nato dalla moltiplicazione della semisomma de' perimetri della base, e del segamento per la distanza perpendicolare de' lati paralleli della base, e del segamento.

DIMOSTRAZIONE

Sia L P O N M il segamento parallelo alla base A B C D E, e la perpendicolare F Z incontri il lato L M in Y; indi si tiri la retta Fig. 59.

ta

ta AM. Il trapezio ALME si risolve ne' due triangoli ALM, MAE, le cui basi sono ML, AE, e l' altezza YZ perpendicolare alle basi parallele, e comune a' due triangoli, ed al trapezio: dunque le aree de' due triangoli, cioè del trapezio, sono uguali alla metà, o semisomma delle basi ML, AE
(6) 66. ann. 3. e 4. moltiplicate per l' altezza YZ (6): ma l' altezza di que' trapezj componenti la troncata superficie della piramide è sempre la medesima YZ, per essere il segamento parallelo alla base: dunque la somma di tutte quelle aree di trapezj, cioè la detta superficie della piramide è uguale alla metà, o semisomma di tutti i lati della base, e del segamento moltiplicata per YZ, che è la distanza perpendicolare de' lati della base, e del segamento. Ciocchè ec.

COROLLARIO IV.

CLXXXIV. Le piramidi, che hanno basi uguali, ed una medesima altezza, sono uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Se le basi sono uguali, risolver si possono in poligoni simili, ed uguali, e dagli angoli delle basi tirar si possono alla cima, che si suppone in tutte le piramidi alla medesima altezza, altrettanti lati rettilinei, i quali co' lati delle basi formino altrettanti triangoli, che in ciascuna piramide saranno uguali di numero: ma i triangoli di ugual base,
(7) 64 cor. 1. prop. 6. ed altezza sono fra loro uguali (7): dunque tutti i triangoli di una piramide saranno uguali di numero, e di grandezza a' triangoli dell'

dell' altra. Dunque essendo ancora per ipotesi le basi uguali, queste piramidi saranno composte di piani simili, ed uguali di numero, e di grandezza: dunque saranno fra loro uguali (8). Ciocchè ec. (8) 180. def. 43.

COROLLARIO V.

CLXXXV. La piramide è la terza parte del prisma, che abbia con essa ugual base, ed altezza. (Eucl. lib. 12. prop. 7.)

Sia il prisma triangolare A B C D E F, e concepiscasi segato dal piano triangolare B C D; il prisma rimane diviso in due piramidi, che hanno la cima in D, la prima delle quali ha la base A B C, e l' altezza A D comuni al prisma, e i tre piani triangolari B D C, A D C, B D A; e l' altra piramide ha per base il rettangolo B C F E. Se questa si concepisca segata dal piano triangolare D E C, rimane divisa in due piramidi, che hanno la cima in D, una delle quali ha per base il Δ C F E, e l' altra il Δ E C B: ma questi due triangoli sono uguali per essere ciascuno la metà del rettangolo B C F E (9): dunque queste due piramidi hanno base uguale, e la medesima altezza in D, e però sono uguali (1). Ma la prima di queste due piramidi può concepirsi aver la base D E F = A B C, e la cima in C dell' altezza F C = A D: dunque le due piramidi A B C D, D E F C di ugual base, ed altezza sono uguali (1). Ma si è dimostrata la piramide D E F C uguale alla piramide E B C D: dunque tutte e tre le piramidi sono fra loro uguali (2), e però il prisma è diviso in tre piramidi uguali: dun-

Fig. 61.

(9) 55. cor. 4. prop. 3.

(1) cor. prec.

(2) Ass. 4.

dunque la piramide è la terza parte del prisma ec. Ciocchè ec.

COROLLARIO VI.

CLXXXVI. La misura del prisma è il prodotto della moltiplicazione della base per l'altezza. E la misura della piramide è la terza parte di un tal prodotto.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 60. Sia il prisma parallelepipedo AG, e la sua base ABCD, e la sua altezza DF: si concepiscano divisi i lati AD, DC della base, e l'altezza DF in quante si vogliano parti fra loro tutte uguali; per es AD in 4; DC in 2; DF in 3; e per i punti delle divisioni passino de' piani paralleli alle faccie dello stesso parallelepipedo, cioè per il lato AD quattro piani paralleli al rettangolo DG, per il lato DC due piani paralleli al rettangolo AF, e per l'altezza DF tre piani paralleli alla base BD. Siccome la base BD sarà composta di $4 \times 2 = 8$ quadrati (3); così essendo l'altezza DF divisa in tre parti uguali alle prime, in essa si avranno tre piani, ciascun de' quali conterrà otto cubi. Dunque tutto il prisma conterrà $8 \times 3 = 24$ cubi. Dunque moltiplicando la base per l' altezza si ha un prodotto uguale alla misura del prisma. Dunque essendo la piramide la terza parte del prisma (4); la misura sarà la terza parte di un tal prodotto Ciocchè ec.

(3) 66. ann. 2.

(4) cor. prec.

CO-

COROLLARIO VII.

CLXXXVII. I prismi fra loro, e le piramidi parimente fra loro sono

1. Come i prodotti delle moltiplicazioni delle basi per le altezze.

2. Se le basi siano uguali, sono fra loro in ragione delle sole altezze.

3. Se le altezze siano uguali, sono fra loro in ragione delle sole basi.

4. Se i prismi, e le piramidi sono uguali, le loro altezze sono in ragione reciproca delle basi.

5. E se le basi sono in ragione reciproca delle altezze, i prismi, e le piramidi sono uguali.

6. Se le basi sono simili, e le altezze proporzionali a' lati omologi delle basi, sono fra loro in ragion triplicata de' lati omologi, o delle altezze. (Eucl. lib. 11. prop. 25., e 28., e seguenti; e lib. 12. prop. 5., 6., 8., 9.)

DIMOSTRAZIONE

1. Essendo ogni prisma uguale al prodotto della moltiplicazione della base per l'altezza (5); se due prismi abbiano la base $= 8$; ed uno l'altezza $= 3$; l'altro $= 2$; la misura del primo sarà $= 3 \times 8 = 24$; e la misura dell'altro $= 2 \times 8 = 16$. Dunque l'un prisma sarà all'altro come 24 . 16. Ed essendo ogni piramide la terza parte del prisma (6): la piramide contenuta nel primo prisma sarà alla piramide contenuta nel secondo come $\frac{24}{3} = 8 . \frac{16}{3} = 5 . \frac{1}{3}$. Dunque ec.

(5) 186. cor. 6. def. 42.

(6) 185. cor. 5.

2. Ma è 24. 16 :: 3. 2. Dunque essendo-

co-

come nel fatto caso, le basi uguali, l'un prisma è all'altro come 3. 2., cioè in ragione delle sole altezze. E quindi ancora le terze parti di que' prismi saranno fra loro come 3. 2., oppure come 1. $\frac{2}{3}$.

3. Se in due prismi le altezze siano = 3, e la base di uno = 8, e quella dell'altro = 6, i prismi sono fra loro come 3 × 8 = 24. 3 × 6 = 18 (5): ma è 24. 18. :: 8. 6, cioè in ragione delle basi: dunque se le altezze sono uguali, i prismi sono in ragion delle basi: dunque ancora le loro terze parti, cioè le piramidi, saranno come $\frac{24}{3} = 8$, $\frac{18}{3} = 6$, cioè in ragion delle basi.

4. Siano due prismi, la cui misura sia uguale a 24: ma l'altezza di uno = 3, e la sua base = 8; e l'altezza dell'altro = 6; e la sua base = 4; sarà l'altezza del 1°. all'altezza del 2°., come la base del 2°. alla base del 1°., cioè 3. 6 :: 4. 8. E le piramidi, che sono la terza parte de' loro prismi, siano uguali a 8.; ma l'altezza di una = 1; e la base = 8., e l'altezza dell'altra = 2.; e la base = 4, sarà 1. 2 :: 4 8. Dunque se i prismi, e le piramidi siano uguali, le loro altezze sono in ragion reciproca delle basi.

5. Ma se è 3. 6 :: 4. 8., sarà ancora invertendo 4. 8 :: 3. 6., cioè la base del 1° alla base del 2°., come l'altezza del 2°. all'altezza del 1°. E lo stesso sarà delle piramidi, cioè 4. 8 :: 1. 2. Ma ancora in tal caso il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj (7): dunque ancora quando le basi sono in ragion reciproca delle altezze, i prismi, e le piramidi sono uguali.

(7) 113. cor. 2. prop. 10.

6. Le

6. Le basi simili sono perimetri di figure, che comprendono aree simili; ma queste sono fra loro in ragion duplicata de' lati omologi (8): dunque ancora le basi simili sono in questa ragione. Ma per ipotesi le altezze sono proporzionali, cioè in ragione de' lati omologi delle basi: dunque alla ragion duplicata aggiungendo un' altra ragion semplice de' lati omologi, si avrà la ragion triplicata de' lati omologi. Ma questi esser possono o lati delle basi, o le altezze, giacchè sono tutti simili, e proporzionali. Dunque i prodotti di basi simili per simili altezze, cioè i prismi, e le piramidi simili sono fra loro in ragion triplicata. Ciocchè ec.

(8) 14. cor. 2. prop. 15

COROLLARIO VIII.

CLXXXVIII. Le superficie de' corpi solidi simili sono fra loro in ragion duplicata de' loro lati omologi. E i corpi solidi simili sono in ragion triplicata.

DIMOSTRAZIONE.

Le superficie de' corpi solidi simili sono perimetri di figure simili, che comprendono aree simili: ma queste sono fra loro in ragion duplicata de' lati omologi (9): dunque ancora tali superficie sono nella stessa ragione. Ma per ipotesi essendo i corpi solidi simili, ancora le loro altezze sono in ragione de' lati omologi: dunque alla ragion duplicata aggiugnendo un' altra ragione semplice de' lati omologi, i corpi simili saranno fra loro in ragion triplicata de' loro lati omologi.

(9) 145. cor. 2. prop. 15.

CLXXXIX. Def. 44. La figura solida compre-

presa da una superficie, che sia generata dal moto parallelo di una retta radente con una sua estremità la base circolare, e coll' altra estremità posta fuori della base, quella figura dicesi *Cilindro*: e vedesi nella Figura
Fig. 62. 62. Se poi la superficie sia generata dal moto di una retta, che con una sua estremità vada radendo la base circolare, ma coll' altra estremità passi per qualche punto posto fuori della base; la figura dicesi *Cono*; e
Fig. 63. vedesi nella figura 63. Le loro basi sono il circolo A a E: l' asse è la retta F C, che passa per il centro del circolo: il lato B A nel Cilindro, F A nel Cono è la retta, che rade il circolo: la cima nel Cono è il punto F immobile, per cui passa il lato F A radente il circolo. Se l' Asse è perpendicolare alla base, il Cilindro, e il Cono chiamasi retto; ed al contrario dicesi obliquo, se l' asse è obliquo. Se finalmente la base non è un circolo, ma qualunque altra curva, la figura dicesi Cilindrica, o Conoidica.

CXC. Def. 45. I Coni, e i Cilindri simili sono quelli, de' quali gli assi, e i diametri delle basi hanno fra loro la stessa proporzione, e formano fra loro un' angolo uguale.

CXCI. Def. 46. Le grandezze descritte dentro, o fuori di una qualche figura si concepiscono, e si dicono terminare nella figura stessa, quando le loro differenze da essa siano minori di qualunque assegnata quantità.

COROLLARIO I.

CXCII. Le periferie de' Circoli sono come i loro diametri, o raggj. E le áree de' circoli sono in ragion duplicata de' loro diametri, o raggj (Eucl. lib. 12. prop. 1., e 2.)

DI-

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

I perimetri delle figure poligone simili sono fra loro come due lati omologi delle medesime, per es. DA. LI (1): ma è DA. LI : : CA . IZ; perchè tirati i diametri AC, IZ, e le corde CD, ZL, i △△ ADC, ILZ sono equiangoli, essendo gli angoli ADC, ILZ retti, e gli angoli ACD, DAC = IZL, LIZ, mentre posano sopra archi simili: dunque i lati di que' triangoli sono proporzionali (2): cioè DA . LI : : AC . IZ. dunque i perimetri delle figure poligone simili descritte dentro un circolo sono fra loro come i diametri di que' circoli, o come i semidiametri. Lo stesso dicasi per la stessa ragione de' perimetri delle figure simili descritte fuori del circolo. Ma se in questi perimetri il numero de' lati si moltiplichi indefinitamente, scemando la loro grandezza, sicchè le loro differenze dal circolo siano minori di qualunque assegnata quantità, gli stessi perimetri si concepiscono terminare nella periferia del loro circolo (3): Dunque ancora le periferie di que' circoli sono fra loro come AC . IZ, o come AB . IX.

Fig. 64. e 65.

(1) 145. cor. 2. prop. 15.

(2) 129. prop. 13.

(3) 191. def. 46.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Le aree delle figure poligone simili descritte dentro, o fuori del circolo sono in ragion duplicata di due lati omologi delle

(4) 145. cor. medesime (4); per es. come $DA^2 . LI^2$. Ma
2. e 3. prop. abbiam veduto $DA . LI :: AC . IZ$ (1. par-
35. te). Dunque le loro aree sono ancora come $AC^2 . IZ^2$, cioè in ragion duplicata de' diametri, o de' raggj de' loro circoli. Ma le suddette figure si concepiscono terminare nelle periferie de' loro circoli, se indefinitamente si moltiplichino i loro lati scemando la loro grandezza (3): dunque ancora le aree di que' circoli sono fra loro in ragion duplicata de' loro diametri, o raggj. Ciocchè ec.

COROLLARIO II.

CXCIII. Se la base di un prisma, o di una piramide termini in una curva continua; il prisma terminerà in una figura solida cilindrica, o in un cilindro; e la piramide in una figura solida conoidica, o in un cono.

DIMOSTRAZIONE.

Se la base di un prisma, o di una piramide si concepisca descritta dentro, o fuori di una qualunque curva continua, e moltiplicando indefinitamente il numero de' lati, e scemando la loro grandezza si concepisca
(5) 191. def. terminare in quella curva continua (5), qua-
46. lunque lato del prisma, o della piramide, radendo la base curvilinea con una sua estremità, e coll' altra estremità essendo fuori della base descriverà la superficie laterale. Ma questa superficie se sia generata dal moto parallelo di quel lato, sarà una figura solida cilindrica, e se sia generata dal moto di quel lato, che con una sua estremità passi per un punto immobile posto fuori della base, sarà

una

una figura solida conoidica (6): Dunque ec. (6) → 44.

Se poi la base A B C D E del prisma, o della piramide si concepisca descritta dentro, Fig. 58. e 59.
o fuori di un circolo, e per la indefinita moltiplicazione de' lati, e diminuzione della loro grandezza si concepisca terminata nella periferia circolare, per la suddetta ragione il prisma in cilindro, e la piramide in cono terminerà (6). E se il prisma abbia i lati AF, BK ec. perpendicolari alla base, come nella figura 58; dovendo essi essere paralleli all' Fig. 62.
asse del cilindro, come vedesi nella figura 62; questo asse ancora sarà perpendicolare alla base (7): dunque il prisma terminerà in (7) 162. cor. 4. prop. 16.
un cilindro retto (6). E se la piramide abbia i lati AB, AE ec. della base uguali, e le distanze A F, E F ec. dalla cima F tutte uguali; com' è nella figura 59., è manifesto, che dalla cima F tirando l' asse al centro della base, questo asse sarà perpendicolare alla base: dunque la piramide terminerà in un cono retto (6), il cui lato rettilineo A F sarà perpendicolare al perimetro della base, come Z F. Ciocchè ec.

COROLLARIO III.

CXCIV. Le proprietà de' prismi, e delle piramidi sono comuni a' Cilindri, ed a' Coni. (Eucl. lib. 12. prop. 10., 11., 12., 13., 14., 15.)

DIMOSTRAZIONE.

Se i prismi, e le piramidi per la indefinita moltiplicazione del numero de' lati della base, e diminuzione della loro grandezza si concepiscono terminare in Cilindri, e in Coni (8), ne segue, che le loro proprietà dimostrate ne' Corollarj I., II., III., IV., V., VI., VII. delle def. 42., e 43. possano agli uni, e all' altre applicarsi ancora, quando siano divenuti cilindri, e coni: dunque le loro proprietà sono comuni a' Cilindri, ed a' Coni. Si osservi però nel cit. Cor. I., che il Cono troncato da un piano parallelo alla base avrà la periferia del segamento simile alla base, e minore di essa in ragion della distanza dalla cima alla distanza della base dalla stessa cima del Cono. E nel cit. Cor. VII. al num. 6., che se le basi sono simili, e le altezze proporzionali a' diametri delle basi, i Cilindri, e i Coni sono in ragion triplicata de' diametri delle basi, o delle altezze. Perchè essendo i lati omologi delle simili basi poligone in ragione de' diametri de' circoli descritti dentro o fuori delle stesse basi (9), la ragione de' lati omologi delle basi, che ne' prismi, e nelle piramidi si usa, devesi ne' Cilindri, e ne' Coni trasferire a' diametri delle lor basi circolari.

(8) 197. cor. prec.

(9) 192. cor. e def. 46.

Finalmente ciò, che ne' cit. Corollarj II., e III. dicesi della misura della superficie laterale de' prismi, e delle piramidi, ha luogo soltanto ne' Cilindri, e ne' Coni retti; cioè che la superficie laterale di un Cilindro retto è uguale al prodotto nato dalla moltiplicazione della periferia della base per l' altezza del Cilindro: E la superficie di un Cono retto è uguale alla metà del prodotto nato dalla moltiplicazione della periferia della base per un lato dalla cima tirato perpendicolare alla stessa periferia: E che il Cono retto troncato da un piano parallelo alla base ha la superficie contenuta

tra

tra il segamento, e la base, uguale al prodotto nato dalla moltiplicazione della semisomma di ambedue le periferie per la loro distanza.

COROLLARIO IV.

CXCV. Nel Cono obliquo la superficie è varia, cioè maggiore da una parte, e minore dall' altra.

DIMOSTRAZIONE.

Nel Cono obliquo A E F, se dalla cima F si tiri la retta F D perpendicolare alla base circolare, e per il punto D si tiri il diametro A C E; l' asse F C col raggio C A fa un' angolo ottuso: perchè, dovendo essere la somma degli angoli del Δ A C F uguale alla somma degli angoli del Δ A D F, ed essendo l' angolo A comune, ne segue, che quanto l' angolo A F C è minore dell' angolo A F D, tanto l' angolo A C F debba esser maggiore di A D F: ma A D F è retto per costruzione: dunque A C F è maggiore di un retto: dunque E C F è minore di un retto (1): dunque essendo i raggi A C, E C, a C sempre uguali, e F C sempre costante, quanto il raggio a C più si allontana dal raggio A C, e più si accosta al raggio E C, ancora gli angoli a C F diventano maggiori, sicchè in ugual distanza da' punti A, E l' angolo a C F sia retto. E siccome da ambe le parti può il raggio a C ugualmente allontanarsi dal raggio A C I; ed accostarsi al raggio E C; così a C coll' asse F C due soli angoli uguali, uno per parte, può formare. Ma essendo i raggi ugua-

Fig. 63.

(1) 26. cor. 2. def. 10.

li, e F C costante, il lato F A opposto all' angolo maggiore di tutti sarà maggiore di ogni lato F a, ed il lato F E opposto all' angolo minore di tutti sarà minore di ogni altro (2), ed il lato F a anderà scemando a proporzione, che allontanasi dal lato F A, ed accostasi al lato F E, e due soli lati F a, uno per parte, potranno essere uguali: dunque nel cono obliquo la superficie è varia.

(2) 73. cor. 3. prop. 8.

ANNOTAZIONE.

CXCVI. Quindi variando la perpendicolare, che dalla cima del cono obliquo si può tirare alla periferia della base, non si può, per essa dovunque presa moltiplicando la periferia della base, avere un costante prodotto, la cui metà sia uguale alla superficie del cono obliquo.

CXCVII. Def. 47. La *Sfera* è una figura solida compresa da una sola superficie, a cui tutte le rette dal centro tirate sono uguali, e chamansi *Raggj*. E se queste rette passando per il centro terminano da ambe le parti alla superficie, diconsi *Diametri*, che parimente sono uguali, perchè contengono due raggj. Si concepisce generarsi dal giro di un semicircolo sopra il suo immobile diametro, finchè ritorni al luogo, d'onde erasi mosso.

COROLLARIO I.

CXCVIII. La superficie di un segmento sferico è uguale alla superficie laterale di un cilindro retto, che ha per asse l'altezza del segmento sferico, e per base un circolo mas-

massimo della sfera. E la superficie di una sfera è uguale alla superficie laterale di un cilindro, che ha per base un circolo massimo e per altezza il diametro della Sfera medesima.

DIMOSTRAZIONE.

Concepiscasi il cilindro retto K Q L M descritto fuori della Sfera A H B F, che ha per asse, ed altezza il diametro A B, e per base un circolo massimo, il cui diametro sia M B L: Il cilindro, e la sfera siano perpendicolarmente segati dal piano R E N; dico primieramente, che la superficie del segmento sferico H A F è uguale alla superficie laterale del cilindro K R N Q, e lo dimostro così. Concepiscasi nella periferia del circolo generante la sfera una particella F f sì tenue, che indefinitamente si accosti ad una retta, e si continui la retta F f fino in G, dove incontri il diametro B A prolungato. La retta F f G girando dentro la sfera intorno al piano R E N del segmento genererà la superficie di un cono (3), che avrà per base il circolo descritto da E F, come raggio; e la particella F f genererà la superficie di un cono retto troncato, la cui misura sarà il prodotto dalla retta F f moltiplicata per la semisomma delle periferie generate da raggj E F, e f (4): ma tirato il raggio C O, che seghi in due parti uguali, e perpendicolarmente la corda F f in O (5), e da O tirata la retta O P perpendicolare al diametro A B, la circonferenza descritta dal raggio O P sarà uguale alla semisomma delle corconferenze descritte da' raggj E F, e f. Perchè a cagione delle paral-

Fig. 60.

(3) 189. def. 44.

(4) 149. cor. 3. def. 44.

(5) 62. cor. 4. prop. 5.

lele E F, P O, e f, i $\Delta\Delta$ E G F, e G f, P G O sono equiangoli, ed i $\Delta\Delta$PGO, C P O, GOC sono altresì equiangoli, per avere oltre l'angolo retto, un' angolo comune, e però sono tutti equiangoli, e simili: dunque sarà

(6) 129. prop. 13. E F . e f : : F G . f G (6); e componendo E F + e f . e f : : F G + f G . f G . Ma O F = O f (5); e però 2 O G = F G + f G: dunque $\frac{EF+ef}{2}$. e f : : O G . f G . Ma O G : f G : : P O . e f: dunque se O G è la semisomma di F G + f G, ancora O P = $\frac{EF+ef}{2}$, cioè sarà uguale alla semisomma di E F + e f. Ma le periferie

(7) 192. cor. 1. def. 44. fra loro sono come i loro raggj (7). Dunque la periferia descritta dal raggio O P è uguale alla semisomma delle periferie descritte da' raggi E F, e f Ma per i simili rettangoli $\Delta\Delta$ E G F, e G f, P G O, P C O sarà (6) E e = N n . F f : : E G . F G : : P G . O G : : P O . CO = E N, per esser questi due uguali ad un raggio della sfera; e però sarà ancora N n .

(8) 108. ass. 9. F f : : P O . E N (8): dunque N n $\times$ E N = F f $\times$ P O (9). Dunque il prodotto da N n per

(9) 111. prop. 10. la periferia descritta col raggio E N, cioè la superficie laterale del cilindro troncato generata dal lato N n nel suo giro sulla periferia descritta col raggio E N (4), è uguale al prodotto da F f per la periferia descritta col raggio P O, cioè alla superficie generata dalla linea F f nel suo giro tra le periferie descritte co' raggi E F, e f Dunque per ugualtà di ragione tutta la superficie generata dall' arco A f F nel suo giro sulla periferia descritta col raggio E F sarà uguale alla superficie laterale del cilindro retto troncato generata dal lato Q N nel suo giro sul-

la

la periferia descritta col raggio E N. Dunque per ugualtà di ragione tutta la superficie sferica generata dal semicircolo AFB nel suo giro intorno al diametro A B sarà uguale alla superficie laterale di tutto il cilindro retto QLMK generata dal lato Q L nel suo giro intorno alla base circolare descritta dal raggio B L = C F. Dunque ec. Ciocchè ec.

COROLLARIO II.

CXCIX. La superficie di un segmento sferico è uguale all' area di un circolo, che ha per raggio la corda della metà dell' arco dello stesso segmento. E la superficie di tutta la sfera è uguale all' area di un circolo, che ha per raggio il diametro della stessa sfera, la quale area sarà quadrupla dell' area di un circolo massimo della sfera medesima.

DIMOSTRAZIONE.

Sia la superficie del segmento sferico H A F. Per cagion de' simili rettangoli ΔΔ A F B, A E F, sono A E = Q N . A F :: A F. A B (1), cioè come la semicirconferenza descritta col raggio A F alla semicirconferenza descritta col raggio A B, oppure, ch'è lo stesso, alla circonferenza descritta col raggio C B = E N (2). Dunque sarà Q N × E N = AF^2 (3). Dunque il prodotto da Q N per la circonferenza descritta col raggio E N, cioè la cilindrica superficie laterale generata dal lato Q N nel suo giro sulla circonferenza descritta dal raggio E N (4) è uguale al prodotto da A F per la semicirconferenza descritta dal-

Fig. 66.

(1) 129. prop. 13.

(2) 192. cor. 1. def. 44.

(3) 111. prop. 10.

(4) 194. cor. 3. def. 44.

dallo stesso raggio A F, cioè all'area del circolo descritto dal raggio A F (3). Ma la cilindrica laterale superficie QNRK abbiam veduto (5) essere uguale alla superficie del segmento sferico H A F: dunque questa è uguale all'area del circolo descritto col raggio A F.

(5) cor. prec.

Ma così è l'arco A O F alla sua corda A F, come il semicircolo A F B al diametro A B. Dunque così la superficie del segmento sferico H A F generato dal giro dell'arco A O F intorno ad A E è all'area del circolo descritto dal raggio A F, come la superficie della sfera generata dal giro del semicircolo A F B intorno al diametro A B è all'area del circolo descritto dal raggio A B: ma la prima ragione è di ugualtà: dunque ancora tutta la superficie della sfera è uguale all'area di un circolo descritto dal raggio A B.

Ma quest' area è quadrupla dell' area di un circolo massimo descritto da C A; perchè se sia C A $=$ 1; sarà A B $=$ 2: dunque le aree de' loro circoli, dovendo essere in ragion duplicata (2) de' loro raggj, saranno come 1 . 4: dunque la superficie di tutta la sfera è quadrupla dell' area di un suo circolo massimo. Ciocchè ec.

COROLLARIO III.

CC. Il segmento della sfera C H A F C è uguale al cono, che ha per base un circolo descritto dal raggio A F, e per altezza la retta C A raggio della sfera. E la solidità di tutta la sfera è uguale al cono, che ha per base un circolo quadruplo di un circolo massimo, e per altezza lo stesso raggio della sfera. E la misura del Cono, e però ancora della solidità della sfera è il prodotto dell'area di un circolo massimo moltiplicata per due terze parti del diametro della sfera.

DIMOSTRAZIONE.

Se concepiscasi la superficie sferica H A F ridotta in particelle sì tenui, che indefinitamente si accostino alla superficie piana, e se da ciascun punto, o angolo del loro perimetro si tirino delle rette al centro C della sfera, nasceranno altrettante piramidi, che avranno per base quelle particelle della superficie sferica, e per altezza il raggio comune della sfera: dunque ancora la somma di tutte quelle piramidi, cioè il segmento della sfera C H A F C, sarà uguale alla piramide, o al cono, che abbia la base uguale a tutta quella sferica superficie H A F, e per altezza il raggio C A della sfera. Ma la superficie sferica H A F è uguale all'area del circolo descritto dal raggio A F (6). Dunque la somma di tutte quelle piramidi, cioè il segmento della sfera C H A F C è uguale al cono, che abbia per base l'area del circolo descritto dal raggio A F, e per altezza il raggio C A della stessa sfera. Ma tutta la superficie della sfera è quadrupla dell'area del suo circolo massimo (6): dunque per ugualtà di ragione la solidità di tutta la sfera è uguale al cono, che ha la base quadrupla di un circolo massimo, e la stessa altezza del raggio della sfera Ma il cono è uguale alla terza parte del prodotto dalla base

(6) cor. prec.

se

(7) 194. cor. se moltiplicata per l'altezza (7): dunque la
3. def. 44. solidità di tutta la sfera è uguale alla terza parte del prodotto dalla base quadrupla d'un suo circolo massimo moltiplicata per l'altezza del raggio della sfera, cioè alla terza parte del prodotto dalla base doppia d'un circolo massimo moltiplicata per il diametro della sfera, cioè a due terze parti del prodotto dalla base di un circolo massimo moltiplicata per il diametro della medesima sfera. Ciocchè ec.

COROLLARIO IV.

CCI. Se concepiscasi un cono, ed un cilindro, che abbiano per base un circolo massimo, e per altezza un diametro della sfera, saranno il cono, la sfera, il cilindro fra loro, come i numeri 1., 2., 3. E la superficie della sfera alla superficie del cilindro comprese le basi parimente sarà come 2. 3.

DIMOSTRAZIONE

Sia il dato cono MAL, ed il dato cilindro QLMK. Il cilindro è uguale al prodotto dalla base moltiplicata per l' altezza, cioè al prodotto dall'area di un circolo mas-
(8) 194. cor. 3. def. 44. simo moltiplicata per il diametro AB (8). La sfera è uguale a due terze parti del prodotto dalla base di un circolo massimo mol-
(9) cor. prec. tiplicata per lo stesso diametro (9). Il cono è uguale ad una terza parte del prodotto dalla base moltiplicata per l' altezza, cioè dall' area di un circolo massimo moltiplicata per AB (8): dunque il cono, la sfera, il cilin-

dro

dro fra loro sono come $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. 1; cioè come 1. 2. 3. Dunque ancora le superficie della sfera, e del cilindro, comprese le basi di questo, sono nella stessa ragione di 2. 3. Ciocchè ec.

COROLLARIO V.

CCII. Le superficie sferiche fra loro sono in duplicata ragione de' loro raggj, o diametri. E le solidità delle sfere sono fra loro in triplicata ragione de' loro raggj, o diametri (Eucl. lib. 12. prop. 18.)

DIMOSTRAZIONE.

Le aree de' circoli B, X sono fra loro come $AB^2 . IX^2$, o come $AC^2 . IZ^2$, cioè in duplicata ragione de' loro raggj, o diametri (1). Ma le superficie sferiche sono uguali alle aree de' circoli quadruple di un circolo massimo delle stesse sfere (2); cioè alle aree descritte dal diametro di un circolo massimo, come da raggio: dunque ancora le superficie sferiche fra loro sono in ragione duplicata de' loro diametri, oppure de' loro raggj, giacchè è la stessa. Fig. 64. e 65.

(1) 192. cor. 1. def. 44.

(2) 199. cor. 2. def. 47.

Le aree de' circoli massimi di diverse sfere per es. B, X, sono fra loro in duplicata ragione de' loro raggj, o diametri (1): ma per avere la solidità delle sfere si moltiplica l' area di un loro circolo massimo per un loro raggio, o diametro, cioè per la loro altezza, onde si genera dal giro d' un loro semicircolo, o circolo massimo intorno all' immobile diametro (3): dunque alla suddetta

(3) 197 def. 47.

ta duplicata ragione aggiungendo un' altra ſemplice ragione de' loro raggj, o diametri, le ſolidità delle sfere fra loro ſaranno in triplicata ragione de' loro raggj, o diametri.

ANNOTAZIONE.

CCIII. Alcune propoſizioni di Euclide ſi ſono tralaſciate, che ſpontaneamente diſcendono ſenza difficoltà dalle dimoſtrate, ed altre ancora, che da lui ſi dimoſtrano in grazia delle ſeguenti. Altre poi ne abbiamo dimoſtrate, che ſono utiliſſime, ed in eſſo ſi deſiderano, ma ſi dimoſtrano da Archimede.

Le altre proprietà della sfera, che quì forſe ſembreranno deſiderarſi, da noi ſi aggiungono più opportunamente nella Trigonometria sferica.

INTRODUZIONE

ALLA TRIGONOMETRIA.

I. DOvendosi fare nella Trigonometria la risoluzione de' triangoli per la regola delle proporzioni, in cui la moltiplicazione, e divisione per i numeri composti di sette, o otto cifre, ove trattasi de' seni, delle Seganti, e delle Tangenti, riesce molto faticosa; per diminuire questa fatica Gio. Nepero Scozzese inventò altri numeri, e nell' anno 1620. li promulgò, per mezzo de' quali la sola aggiunta, e sottrazione ottiene ciò, che la moltiplicazione, e divisione conseguiva, Questi numeri chiamansi *Logaritmi*, la cui natura, proprietà, ed uso quì brevemente spieghiamo per introduzione, o disposizione alla Trigonometria.

De' Logaritmi, e della loro natura, ed uso.

LEMMA I.

Nell' aritmetica progressione di quattro termini la somma degli estremi è uguale alla somma de' medj.

II. Sia $1 . 2 \therefore 3 . 4.$; sarà $1 + 4 = 2 + 3$. Ciocchè ec.

COROLLARIO

III. Quindi per avere il quarto numero aritmetico proporzionale, dalla somma del 2°., e del 3°. si sottrae il primo termine, e il residuo sarà il numero cercato: per es. $2 + 3 - 1 = 4$.

LEMMA II.

Nell'arimetica progressione di tre termini la somma de' due estremi è uguale al doppio del termine di mezzo.

IV. Sia 2 . 5 ∴ 5 . 8., sarà $2 + 8 = 5 + 5$. Ciocchè ec.

COROLLARIO I.

V. Quindi per avere il terzo termine proporzionale dal doppio del secondo si sottrae il primo, ed il residuo sarà il numero cercato: per es. $10 - 2 = 8$.

COROLLARIO II.

VI. Fra due dati numeri trovasi il medio proporzionale, se prendasi la metà della lor somma: per es. $2 + 8 = \frac{10}{2} = 5$; che sarà il medio.

DE-

DEFINIZIONE

Della natura, e invenzione de' Logaritmi.

VII. I Logaritmi sono una serie di numeri aritmetici proporzionali, che corrispondono ad una serie di numeri geometricamente proporzionali. E sebbene tali serie possano prenderli ad arbitrio; pure la più comoda è quella, che per Logaritmo dell' 1. adopera il zero; e l' uno con sette, o otto cifre per logaritmo del 10; ed il 2. con altrettante cifre per logaritmo del 100; e così in ragion decupla procede. Si aggiungono que' tanti zeri per avere i logaritmi più esatti, come dirassi nella Trigonometria. Veggasi la tavola seguente; dove se l' 1. ha per logaritmo il zero; il numero proporzionale minore dell' 1. avrà per logaritmo meno del zero. Si osservi, che le prime cifre de' logaritmi, cioè —2, —1, 0, 1, 2 ec. chiamansi *caratteristiche*; e di queste le prime minori del zero diconsi *logaritmi defettivi*.

A.	B.	G.	L.
1	1	$\frac{1}{100}$	—2.0000000
2	2	$\frac{1}{10}$	—1.0000000
3	4	1	0.0000000
4	8	10	1.0000000
5	16	100	2.0000000
6	32	1000	3.0000000
7	64	10000	4.0000000
8	128	100000	5.0000000
9	256		
10	512		
11	624		

COROLLARIO I.

Sia il logaritmo dell' 1=0; farà il Logaritmo del prodotto uguale alla fomma de' Logaritmi de' due fattori.

VIII. Sia 4×6=24; farà in geometrica proporzione 1.4::6.24. E perchè nell' aritmetica proporzione la fomma de' medj è uguale alla fomma degli eftremi (1); fe il Logaritmo dell'
1=0; farà il Logaritmo del 4=0. 6020600.
e il Logaritmo del 6=0. 7781512.

E il Logaritmo del prodotto uguale alla fomma de' due fattori, cioè al Logaritmo del 24=1. 3802112.

(1) 2. lem. 1.

COROLLARIO II.

IX. Quindi il Logaritmo del quadrato è doppio di quello della radice, ed il Logaritmo del cubo è triplo; perchè fono in geometrica proporzione 1. 4::4. 16::16. 64; onde ficcome la fomma de' Logaritmi de' fattori è uguale al Logaritmo del prodotto; così il Logaritmo del 16. è doppio di quello del 4; e il Logaritmo del 64. è doppio di quello del 16., e però triplo di quello del 4.

COROLLARIO III.

Sia il Logaritmo dell' 1=0; farà la differenza de' Logaritmi di due numeri uguale al Logaritmo del quoto degl' ifteffi numeri.

X. Sia 6. 24::1.4; farà (2) il Logaritmo

(2) 8. cor. 1.

ritmo del 6 + il Logaritmo del 4 = al Logaritmo del 24: dunque sottratto il Logaritmo del 6. dal Logaritmo del 24; il residuo sarà uguale al Logaritmo del 4: ma il 4. è il quoto del $\frac{24}{6}$. Dunque ec. Ciocchè ec.

PROBLEMA I.

Trovare il Logaritmo d' un qualunque numero.

XI. Risoluzione. Sia da trovarsi il Logaritmo del 7. Tra l' 1., e il 10. accresciuti di sei zeri si cerchi il termine di mezzo geometrico proporzionale, finchè questo riesca il 7. con sei cifre; e quando nasce per termine di mezzo un numero maggiore del 7. con sei zeri, si cerchi il termine di mezzo tra l' antecedente, e l' ultimo trovato. Nel caso nostro vent' una proporzione si dovrà fare, perchè venga termine medio il 7. 000000. Indi si trovi il termine di mezzo aritmetico proporzionale tra i Logaritmi noti corrispondenti, che sarà sempre la metà della somma degli estremi (3); e così si troverà il Logaritmo del 7. In tal modo si trovano i Logaritmi de' primi numeri. Inoltre trovato per es. il Logaritmo del 6, e del 2; questo sottratto da quello si avrà il Logaritmo del 3. (4). E il Logaritmo del 2. raddoppiato, triplicato ec., sarà uguale al Logaritmo del 4.; dell' 8. ec. E il Logaritmo del 3. raddoppiato, triplicato ec. uguale al Logaritmo del 9; del 27. ec. (5). E quindi tutti i numeri in ragion decupla hanno lo stesso numero per Logaritmo fuori della caratteristica. Ma già

(3) 4. lem. 2.

(4) 10. cor. 3.

(5) 9. cor. 2.

le tavole de' Logaritmi sono fatte per mezzo di queste regole: onde basta sapere, in qual modo sono state fatte, Ciocchè ec.

PROBLEMA II.

Moltiplicare due numeri interi per i loro Logaritmi, che siano nelle tavole.

XII. Ris. Il Logaritmo del prodotto è uguale alla somma de' Logaritmi de' fattori (6). Dunque sia 144 X 64; si cerca

(6) 8. cor. 1.

il Logaritmo del 144; che è 2 . 1583625.
poi il Logaritmo del 64; che è 1 . 8061800.

Somma . 3 . 9645425.

Questa somma è il Logaritmo del numero 9216 = 144 X 64: dunque cercato nelle tavole il Logaritmo della somma, trovasi il numero corrispondente al prodotto de' fattori.

PROBLEMA III.

Dividere un' intero per i Logaritmi, che siano nelle tavole.

XIII. Ris. Sia il dividendo 9216; il cui Logaritmo = 3 . 9645425.
Sia il divisore 64; il cui Logaritmo = 1 . 8061800.

per sottrazione nasce il quoto, o la differenza = 2 . 1583625.
che è Logaritmo del 144; onde nelle Tavole si trova il quoto, cercando il Logaritmo uguale alla differenza.

PRO-

PROBLEMA IV.

Dati tre numeri trovare il quarto proporzionale per i Logaritmi, che siano nelle Tavole.

XIV. Rif. Siano i numeri 4. 68 ∴ 3. (51); I cui logaritmi siano 0.6020600. 1.8325089 ∴ 0.4771213. x. Aggiunto il secondo Logaritmo al terzo, e dalla somma sottratto il primo, il residuo sarà il Logaritmo quarto aritmetico proporzionale (8); a cui nelle tavole si trova corrispondere il 51: onde questo sarà il quarto geometrico proporzionale de' primi tre numeri dati. In fatti $4 \times 51 = 3 \times 68 = 204$. Veggasi l'Esempio I.

Esempio I.

	1.8325089.
	0.4771213.
Somma.	2.3096302.
Sottr.	0.6020600.
Residuo.	1.7075702.

(8) 3. cor. lem. 1.

PROBLEMA V.

Trovare il Logaritmo di un numero maggiore di quelli, che si abbiano presso di se nelle tavole; ma non maggiore di 10000000.

XV. Rif. Sia il dato numero 923754.; il cui Logaritmo si cerchi. 1° si cerchi il Logaritmo del 9237., e del residuo si faccia $\frac{54}{100}$. 2°. Il Logaritmo trovato sottraggasi dal Logaritmo prossimo seguente, cioè del nu-

Esempio II.

Logarit del 9238	=	3.9655779.
Logarit. del 9237	=	3.9655309.
Differenza	=	470.

numero 9238., e si avrà la differenza 470., come vedesi nell' Esempio II. 3°. si faccia, come 100. 54 :: 470. 253. $\frac{80}{100}$ 4°. trascurato il rotto, si aggiunga 253. al primo Logaritmo, e si avrà 3. 9655562. 5°. si accresca la caratteristisca di due unità, giacchè sono due le cifre del divisore 100., e si avrà il Logaritmo cercato 5. 9655562. La dimostrazione è chiara: perchè 923800. 923754 :: 100. 54: giacchè adunque la differenza sopra trovata è l' eccesso del Logaritmo del 9238. sopra il Logaritmo del 9237, così sarà 100 54 :: 470. 253., che sarà quel residuo di Logaritmo che corrisponde al 54. tolto al primo numero. Dunque al Logaritmo del 9237. aggiunto 253., e in grazia delle due cifre, cioè 100., del divisore 54. accresciuta di due unità la caratteristica, si avrà il cercato Logaritmo.

ANNOTAZIONI.

XVI. 1° Se siavi un numero maggiore di 10000000, la suddetta regola non basta, perchè crescendo i numeri assoluti scemano le differenze de' Logaritmi, sicchè svaniscano; onde de' numeri per es. 2656885774, e 75, il Logaritmo è lo stesso, cioè 9. 42422911; come si vede nelle tavole del Brigio.

2°. Quindi de' numeri di 15; o 20. figure fra loro poco differenti basta prendere il Logaritmo delle prime dieci figure.

3°. Sia il numero 12456; questo dividasi per 3; il quoto è 4152: si aggiungano insieme i Logaritmi del 3; e del 4152; e si avrà il Logaritmo del 12456; cioè 0. 4771212.+3. 6182573.=4. 0953785; perchè

co-

così sta 1 . 3 : : 4152 . 12456. (9) Dunque i Logaritmi de' fattori , e del quoto , e del Divisore presi insieme sono uguali al Logaritmo del prodotto , che si cercava . (9) 8. cor. 8

PROBLEMA VI.

Trovare il Logaritmo di una data Frazione .

XVII. Ris. Siano tre casi ; nel primo il numeratore minore del denominatore ; nel secondo il numeratore maggiore del denominatore ; e nel terzo un' intero con una frazione .

I. Sia $\frac{2}{5}$.	Logaritmo del 5. $=$ 0.6989700 .
	Logaritmo del 2. $=$ 0.3010300 .
	Logarit. del $\frac{2}{5}$. $= -$ 0.3979400 .

II. Sia $\frac{9}{5}$	Logaritmo del 9. $=$ 0.9542425 .
	Logaritmo del 5. $=$ 0.6989700 .
	Logaritmo del $\frac{9}{5}$ $=$ 0.2552725 .

III. Sia $3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$	Logaritmo del 23 $=$ 1.3617278.
	Logaritmo del 7 $=$ 0.8450980.
	Logaritmo del $\frac{23}{7}$ $=$ 0.5166298.

DIMOSTRAZIONE.

La frazione essendo il quoto nato dalla divisione del numeratore per il denominatore; ed il Logaritmo del quoto essendo uguale alla differenza dei Logaritmi del divisore, e del dividendo; siegue, che sottratto il Logaritmo del denominatore, o divisore dal Logaritmo del dividendo, o del numeratore, si avrà la differenza per Logaritmo del quoto, o sia della frazione. Quindi se il numeratore è minore del denominatore, e non può dividersi, dal Logaritmo del denominatore si sottrae il Logaritmo del numeratore, ma per l'ordine inverso usato la differenza riuscirà negativa; come è nel primo caso. Ma nel secondo caso al contrario sarà positiva. E nel terzo poi, moltiplicato l'intero per il denominatore, si farà la frazione, che avrà il numeratore sempre maggiore del denominatore, e però allora si opera come nel secondo caso.

PROBLEMA VII.

Dato un Logaritmo nelle Tavole non accurato, trovare il numero ad esso corrispondente.

XVIII. Ris. Sia la caratteristica del Logaritmo dato 0; oppure 1; oppure 2: si muti questa in 3; e si cerchi tra il 1000, e 10000 il Logaritmo prossimo minore del Logaritmo dato, e si avrà il numero cercato con tante frazioni decimali, quante unità furono aggiunte alla caratteristica: per es. sia il dato Lo-

Logaritmo 1.9201662; che non trovasi accurato nelle tavole: la unità si multi in 3; sarà il Logaritmo 3.9201662: questo si cerchi tra il 1000, e 10000; e si troverà 8320 corrispondente al Logaritmo prossimo minore del Logaritmo dato: dunque il numero cercato sarà $83\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$; a cagione delle due unità aggiunte alla caratteristica.

PROBLEMA VIII.

Dato un Logaritmo defettivo, trovare il numero corrispondente.

XIX. Sia il dato Logaritmo —0.2218488; e si cerchi la frazione corrispondente. 1°. prendasi il denominatore 100; oppure 1000 ec. dal cui Logaritmo sottraggasi il Logaritmo dato. 2°. Si cerchi nelle tavole il numero corrispondente al Logaritmo residuo, e pongasi per numeratore, e si avrà la frazione cercata: per es. Logarit. del 1000=3.0000000.

Logaritmo defettivo—0.2218488.

Residuo=2.7781512.

a cui corrisponde il n°. 600; dunque è $\frac{600}{1000}=\frac{3}{5}$.

La dimostrazione è chiara per il Problema VII.

PROBLEMA IX.

Dato un Logaritmo maggiore del 4.0000000, trovare il numero prossimo corrispondente.

XX. Ris. Sia il dato Logaritmo 7.8372413,

e non

e non più, acciocchè il residuo sia minore del suddetto Logaritmo 4.0000000; che è Logaritmo del numero 10000, sottratto questo sarà il residuo 3.8373413; a cui corrisponde il numero $6874 \frac{5032}{10000}$. (1). Si moltiplichi il numero trovato per il numero del Logaritmo sottratto, cioè per 10000; e si avrà il numero cercato 68745032. Ciocchè ec.

(1) 18. Probl. 7.

TRIGONOMETRIA.

Definizioni Generali.

I. Def. 1. *Trigonometria* chiam si l'arte di risolvere i triangoli, ed insegna il modo di trovare tre parti di un triangolo, quando tre siano le parti date, o note.

II. Def. 2. Quella, che considera i triangoli fatti in un piano da tre rette, e ne insegna la risoluzione de' medesimi, dicesi *Trigonometria piana*: e quella, che considera i triangoli fatti in una sferica superficie dagli archi de' circoli massimi della medesima sfera, dicesi *Trigonometria sferica*. E ciò si fa per mezzo di certe *funzioni* degli archi del circolo, o degli angoli, che hanno per misura gl'istessi archi.

III. Quindi divideremo questo trattato in tre parti. Nella prima esporrassi le Funzioni degli archi, e le Tavole loro; nella seconda la Risoluzione de' triangoli piani; e nella terza de' triangoli sferici.

PAR-

PARTE I.

Delle Funzioni degli Archi, e loro Tavole.

PARAGRAFO I.

Della natura, e delle proprietà delle Funzioni.

DEFINIZIONI.

IV. DEf. 3. Per nome di *Funzione* di qualsivoglia arco s' intende quì il Seno retto, il Seno verso, la Tangente, la Segante, il Co-seno, la Co-tangente, la Co-segante; ciascuna delle quali cose devesi dichiarare.

V. Def. 4. Il *Seno retto* di un' arco, e di un' angolo misurato dallo stesso arco è la retta perpendicolare tirata da una delle due estremità di quell' arco sopra il diametro, che passa per l' altra estremità: per es. DE è seno retto dell' arco AD, e dell' angolo ACD. Fig. 1.

VI. Def. 5. Il *Seno verso* di un' arco è la porzione del diametro, che trovasi fra l' arco, e il suo seno retto: per es. AE è il seno verso dell' arco AD.

VII. Def. 6. Il *Seno tutto* è il seno retto della quarta parte del circolo, e però il raggio del circolo: per es AC GC, BC.

VIII. Def. 7. Il *Complemento* di un' arco è ciò, che manca allo stesso arco per essere di 90°, e questo dicesi assolutamente complemento

mento: per es. D G è complemento dell' arco A D. Quello poi, che manca per compire il semicircolo, o per arrivare a 180°, dicesi complemento al semicircolo, o supplemento: per es. D B rispetto all' arco A D.

IX. Def 8. Il *Co-seno* di un arco è il seno retto del complemento dello stesso arco per es. D H rispetto all' arco A D; d H rispetto all' arco A d

X. Def 9. La *Tangente* di un arco è una retta, che tocca l' arco in una estremità, e che è prolungata, finchè incontri un' altra retta, che passa per l' altra estremità dell' arco dato, e per il centro: per es. A I è la tangente dell' arco A D, ed A f dell' arco A d.

XI. Def. 10 La *Segante* di un' arco è la retta tirata per il centro, e per una estremità dell' arco, e sta tra il centro, e la tangente tirata per l' altra estremità dell' arco per es. C I è segante dell' arco A D, C f dell' arco A d.

XII Def: 11. La *Co-tangente*, e la *Cosegante* di un' arco sono la tangente, e la segante del complemento dello stesso arco: per es. G I è la Cotangente dell' arco A D, G i dell' arco A d: C I la Co-segante dell' arco A D; C i dell' arco A d, essendo tangenti, e seganti de' complementi G D, G d.

COROLLARIO I.

XIII. Due archi, che insieme presi formano un semicircolo, hanno tutte le Funzioni uguali.

DIMOSTRAZIONE

Siano gli archi A D + A d uguali al semimicircolo AdB; sarà 1°. l'arco AD=dB (1) 2°. e però il GD=Gd; 3°. e quindi l'angolo DCd diviso per metà dalla retta CG (2); 4°. onde ancora la corda Dd divisa per metà, ad angoli retti in H (3). Dunque ancora 1°. il Co-seno DH, = dH Co-seno; 2°. e i seni DE, de = HC, e però uguali fra loro. Ma ancora l'angolo ACf = dCB opposto alla cima; e l'angolo dCB = DCA per avere gli archi misuratori AD, dB uguali, e però DCA=ACf. (4); ed inoltre ne' triangoli ICA, ACf vi è il lato comune AC, e gli angoli retti al punto A: dunque 3° ne' suddetti triangoli ancora la tangente AI = Af tangente (5): per essere l'angolo GCI = GCi, 4°. ancora la Co-tangente GI = Gi Cotangente, e 5°. la Co-segante CI = Ci Co-segante; giacchè ne' △△ GCI, GCi ancora v'è il lato comune GC, e gli angoli retti in H (5): dunque tutte le Funzioni degli archi corrispondenti sono uguali. Ciocchè ec.

(1) Ass. 2.

(2) 58 prop. 5.

(3) 62. cor. 4. prop. 5.

(4) Ass. 1.

(5) 51. prop. 3.

COROLLARIO II.

XIV. La Corda di un doppio arco è doppia del seno della metà dell'arco.

DIMOSTRAZIONE.

L'arco DGd è doppio dell'arco DG: ma la corda Dd dell'arco DGd è divisa per metà in H, e contiene i seni DH, Hd fra se uguali: dunque la corda Dd è doppia del seno DH dell'arco DG. (tutto discende dal Cor. prec.) Ciocchè ec.

COROLLARIO III.

XV. Il quadrato del raggio 1°. è uguale alla somma de' quadrati del seno, e del Co-seno di qualsivoglia arco; 2°. è uguale alla differenza de' quadrati della segante, e della tangente: 3°. il quadrato della segante è uguale alla somma de' quadrati della tangente, e del raggio.

DIMOSTRAZIONE.

(6) 67. prop. 7. Nel triangolo rettangolo CHD (6) abbiamo $CD^2 = CH^2 + HD^2$ Ma è $CH = DE$. Dunque $CD^2 = DE^2 + HD^2$. Dunque è vera la prima parte. 2°. Nel triangolo rettangolo CAI abbiamo $CI^2 = CA^2 + IA^2$, (6). Dunque $CA^2 = CI^2 - IA^2$. 3°. ma nel suddetto Δ' CAI è $CI^2 = CA^2 + IA^2$. (6). Dunque ec. Ciocchè ec.

COROLLARIO IV.

XVI. Il quadrato del raggio è uguale 1°. al rettangolo fatto dal Co-seno, e dalla segante: 2°. è uguale al rettangolo fatto dalla tangente, e dalla Co-tangente.

DIMOSTRAZIONE

Ne' $\Delta\Delta$ simili CED, CAI abbiamo CE.
(7) 129. prop. 13. CD :: CA. CI (7): dunque $CE \times CI = CA \times CD$ (8) cioè $= CA^2$. Dunque ec.
(8) 111. prop. 10. 2°. i $\Delta\Delta$ rettangoli CAI, ICG sono simili,
(9) 38. ann. def. 17. per essere l'angolo ICG = CIA alterno (9): dun-

dunque è AI. AC :: CG. GI (3): dunque $AI \times GI = AC \times CG$, cioè $= CA^2$. (4).

COROLLARIO V.

XVII. Le tangenti di due archi sono in ragion reciproca delle Co-tangenti.

DIMOSTRAZIONE.

Il quadrato del raggio è sempre uguale al rettangolo sotto la tangente, e la Co-tangente (1): dunque il rettangolo sotto la tangente, e Cotangente del primo arco è uguale al rettangolo sotto la tangente, e Co-tangente del secondo arco (2) per essere ciascun rettangolo uguale al quadrato del raggio. Dunque (3) sarà la tangente del primo alla tangente del secondo, come la Co-tangente del secondo alla cotangente del primo. Ciocchè ec.

(1) 16. cor. prec.

(2) 108. Ass. 9.

(3) 111. prop. 10.

Ecco in breve tutta la dimostrazione. Se $AI \times GI = AC \times CG = AC^2$, e se $Af \times Gi = AC \times CG = AC^2$ (1); sarà (3) AI. AC :: CG. GI: ed Af. AC :: CG. Gi: dunque (2) $Ai \times GI = Af \times GI$ (3): dunque AI. Af :: Gi. GI.

COROLLARIO VI.

XVIII. In qualsivoglia arco 1°. il Co-seno è al seno, come il raggio alla tangente: 2°. e il seno è al raggio, come la tangente alla segante.

DIMOSTRAZIONE.

Ne' ΔΔ CED, CAI simili i lati corri-

spon-

(4) 129. prop. 13. spondenti sono proporzionali (4). Dunque 1°. CE, ovvero DH. DE :: CA. AI : 2°. DE. DC :: IA. IC. Ciocchè ec.

COROLLARIO VII.

XIX. Il seno verso di un arco 1°. minore di un quadrante è uguale alla differenza del raggio dal Co-seno. 2°. e il seno verso di un' arco maggiore di un quadrante è uguale alla somma del raggio, e del Co-seno.

DIMOSTRAZIONE

(5) 6. def. 5. AE (5) è il seno verso dell' arco AD: ma $AE = AC - CE$; e $CE = DH$: dunque $AE = AC - DH$. 2°. Ae (5) è il seno verso dell' arco Ad. Ma $Ae = AC + Ce$; e $Ce = Hd$. Dunque $Ae = AC + Hd$; Ciocchè ec.

COROLLARIO VIII.

XX. Mutato comunque il raggio, tutte le Funzioni degli archi simili, o degli angoli uguali si mutano nella medesima ragione, onde conservano fra loro costante la stessa ragione.

DIMOSTRAZIONE

Accresciuto, o diminuito comunque il raggio AC nella Fig. 1, sarà sempre simile a se stesso, cioè raggio di circolo, e tutti i triangoli avranno i medesimi angoli, che aveano prima, e saranno misurati da archi simili, e però saranno triangoli simili a' pri-

mi

mi. Dunque la ragione del raggio C A a tutte le altre rette, e la ragione di queste fra loro sarà la medesima, che era prima. Ciocchè ec.

COROLLARIO IX.

XXI. In ogni triangolo rettangolo 1°. se prendasi il raggio per base, cioè per l'ipotenusa, gli altri due lati saranno i seni degli angoli opposti; e i Coseni degli angoli adiacenti. 2°. Se il raggio sia uno de' due lati, l'altro lato sarà la tangente dell'angolo opposto, e la base sarà la segante dello stesso angolo, ed insieme quella sarà la Co-tangente, e questa la Co-segante dell'angolo adiacente.

DIMOSTRAZIONE

Nel triangolo rettangolo 1°. DCE il raggio CD è base. Ma il lato DE è seno dell' angolo opposto DCE, ed insieme Co-seno dell'angolo DCH adiacente al primo, ed uguale all'angolo alterno CDE: e l'altro lato EC = DH, che è seno dell'angolo opposto DCH, ed insieme Co-seno dell' angolo DCE adiacente all'altro angolo, ed uguale all'angolo alterno CDH. Dunque ec.

2°. Nel triangolo rettangolo CAI il raggio CA è un lato del triangolo. Ma la tangente AI dell' opposto angolo ACI, che è insieme Co-tangente dell' angolo DCH adiacente al primo, è l' altro lato di quel triangolo: e la base CI è segante dell'angolo ACI, ed insieme Co-segante dell' angolo ICG adiacente al primo, ed uguale all'alterno angolo CIA. Dunque ec. Ciocchè ec.

LEMMA GENERALE.

XXII Di due quantità 1° la semidifferenza aggiunta alla semisomma fa una maggior quantità, e sottratta lascia una quantità minore. 2°. Ma se la semidifferenza sia maggiore della semisomma, quella, s'è negativa, aggiunta, e se è positiva, sottratta, lascia una quantità negativa, e però minore ancora del nulla.

DIMOSTRAZIONE

Fig. 7. Siano 1°. le due quantità A D, D B. Si seghi A B per metà in C, e prendasi C E = C D; resterà A E = D B (6); ed A C, o C B sarà la semisomma, ed E D la differenza, e C D la semidifferenza. Ma AC + CD = AD; A C, o C B — C D = D B; ed A D è maggiore di D B, come è chiaro, essendo D B = A E per costruzione. Dunque ec.

(6) Ass. 2.

2°. Siano le due quantità A B positiva, e d differenza, sarà A C semisomma, C d semidifferenza maggiore della semisomma. Ma A C + C d = A d. Dunque se la semidifferenza è positiva, anche quando è maggiore della semisomma, aggiunta fa una quantità maggiore. Ma se la semidifferenza sia negativa, aggiunta mi darà A C, o C B — C d = — B d; come mi darebbe, se fosse positiva, e sottratta: al contrario la semidifferenza negativa sottratta, dovendosi nella sottrazione mutare i segni, mi darà A C + C d = A d; come mi dava nell'aggiunta, quando facevasi positiva. Dunque ec. Ciocchè ec.

TEO-

TEOREMA GENERALE.

XXIII. In due archi 1°. la somma de' seni è alla lor differenza, come la tangente della semisomma degli stessi archi è alla tangente della semidifferenza. 2°. La somma de' coseni è alla differenza, come la co-tangente della semisomma alla tangente della differenza.

COSTRUZIONE.

Della I. Parte.

Fig. 3.

Siano i due archi A D, D B, ed A B si seghi per metà in E; dal punto E verso A si prenda E D, ed altrettanto s' intenda preso verso B (7); sarà A B la somma di quegli archi, A E la semisomma, D E la semidifferenza. Indi tirata la corda A B, e i raggi C D, C E, che incontrino la corda in G, I, e la seghi ad angoli retti in I; sarà la corda A B la somma, A I la semisomma, G I la semidifferenza delle rette A G, G B. Finalmente si tirino le perpendicolari A P, B Q alla retta C D; (8) quelle saranno seni retti degli archi A D, D B.

(7) 22. lem.

(8) 5. def. 4.

DIMOSTRAZIONE.

I △△ A G P, B G Q sono simili, per avere gli angoli retti in P, Q, e gli angoli alla cima G opposti uguali, e però ancora l' angolo A = B. Dunque i lati corrispondenti sono proporzionali (9): e però A G . A P : : B G . B Q: dunque la somma de' seni A P + B Q è alla lor differenza; come A G + G B,

(9) 129. prop. 13.

che è corda della somma degli archi A D + D B, è alla differenza, che è 2 G I. Dunque ancora la semisomma de' seni è alla loro semidifferenza, come la semisomma B I, o A I è alla semidifferenza G I. Ma la semisomma A I è alla semidifferenza G I, come la tangente della semisomma A E è alla tangente della semidifferenza D E; e si dimostra così.

Prendendo C I per raggio, ne' ΔΔ rettangoli C I G, C I A, sono I G, I A tangenti degli angoli I C G, I C A (1): dunque ancora le tangenti, che misurano quegli angoli, sono come le stesse rette I G, I A.

(1) 21.2. parte cor. 9.

Ma si è veduto, che la semisomma de' seni è alla loro semidifferenza, come A I. I G: dunque la semisomma de' seni è alla loro semidifferenza, come la tangente della semisomma degli stessi archi. o angoli da essi misurati è alla tangente della semidifferenza de' medesimi. Dunque ancora la semisomma de' seni degli archi A D, D B è alla loro semidifferenza; e pero anche la somma de' seni è alla lor differenza, come la tangente a E della semisomma degli stessi archi è alla tangente d E della lor semidifferenza.

COSTRUZIONE
Della II. Parte.

Si compia il diametro A C K: l'arco K B si seghi per metà in M, come l'arco A B fu segato in E; e si prenda N M = E D verso la stessa parte: sarà E M un quadrante: dunque ancora D N sarà un quadrante, e però ancora gli archi A D + N K uguali a un quadrante (2): dunque l'arco D B sarà complemento dell' arco B N; e l'arco A D comple-

(2) Ass. 2.

plemento dell' arco N K, e B M sarà la semisomma degli archi B N + N K: dunque B E, ovvero A E sarà il complemento della semisomma B M; e l' arco N M = E D sarà la semidifferenza.

DIMOSTRAZIONE

Essendo l' arco A D = B N; e D B = N K; e però la somma A D + D B = B N + N K; i seni degli archi B N, N K saranno uguali a' seni A P, B Q degli archi A D, D B. Ma i seni A P, B Q sono come A G, G B (per la 1. parte): ovvero come A I, G I, ovvero come a E, d E; cioè la somma de' seni degli archi A D, D B è alla lor differenza come la tangente a E della lor semisomma alla tangente d E della lor semidifferenza. Dunque nella stessa ragione sarà ancora la somma de' seni degli archi N K, B N alla lor differenza. Ma i seni A P, B Q rispetto a' seni degli archi B N, N K considerar si possono come co-seni, essendo ad essi uguali; e le tangenti a E, d E rispetto alle tangenti degli archi B M, N M come co-tangenti (3): dunque la somma de' co-seni degli archi K N, N B sta alla lor differenza, come la co-tangente della lor semisomma, cioè a E, sta alla tangente della lor semidifferenza, cioè d E uguale alla tangente dell' arco N M.

(3) 13. cor. 1.

ANNOTAZIONE

XXIV. Questi Teoremi sono i più comuni nella Trigonometria. Ma per ridurli alla pratica, dimostrar si deve, come, diviso il raggio in qualsivoglia numero di parti, trovar si possa, quante di quelle parti contenga qualunque funzione di qualsivoglia arco, per poterne formar le Tavole.

Il raggio divider si può in quante parti si vuole, ma comunemente si prende la unità con cinque, o sei, o sette zeri: e se trovate le funzioni degli archi sulla supposizione del raggio diviso per es. in 10000000; trovar si vogliano le medesime funzioni sotto il raggio = 100000; basterà dalle ritrovate funzioni rigettare le ultime due note, e prenderle per decimali, e saranno proporzionali.

Paragrafo II.

Della Costruzione delle Tavole.

XXV. Non potendosi meccanicamente trovare le misure de' seni, delle tangenti, e seganti, supposto il raggio = 10000000, e quindi formare le loro Tavole; si dovranno calcolare queste funzioni coll'ajuto della Geometria, e dell' Aritmetica, e dove il calcolo non può aversi esatto a cagione delle quantità radicali, dovremo contentarci di averlo prossimo quanto si voglia al vero. Giacchè però le tavole sono fatte, sarà sufficiente cosa il dare un metodo facile a capirsi, onde i principianti imparino in qual maniera siano state le Tavole formate.

PROBLEMA I.

Fig. 1. XXVI. Data la tangente trovare la segante, e il seno.

(4) 15. 2. parte cor. 3. Ris. 1°. Abbiamo (4), che il quadrato della segante è uguale alla somma de' quadrati del-

della Tangente, e del raggio, cioè $CI^2 = IA^2 + CA^2$. Dunque dalla somma de' quadrati del raggio, e della data tangente estratta la radice, si averà la segante. Ciocchè ec.

2°. Abbiamo (5) che il seno è al raggio, come la tangente alla segante; cioè essendo IAC, DEC triangoli simili, è $ED . DC :: AI . IC$ (6): dunque per trovare il seno invertendo l'ordine, si faccia, come la segante alla tangente, così il raggio al seno cercato, cioè $IC . IA :: DC . DE$: e sarà fatto. Ciocchè ec.

(5) 18. 1. parte cor. 6.

(6) 129. prop. 13.

PROBLEMA II.

XXVII. Date le tangenti di due archi non maggiori di un quadrante, trovar la tangente di un'arco medio aritmetico proporzionale. Fig. 4.

Rif. Dalle date tangenti si trovino le seganti (7); indi si faccia, come la somma delle seganti è alla segante minore, così la differenza delle tangenti è alla quantità, la quale aggiunta alla tangente minore darà la cercata tangente.

(7) 26. probl. prec.

Siano gli archi dati AB, AE, e l'arco medio aritmeticamente proporzionale AD. Siano le date tangenti AF, AH, delle quali la differenza sarà FH: e le seganti trovate siano CF; CH, dico, che la tangente cercata sarà AG. Perchè essendo per ipotesi gli archi $AB . AD .\because AD . AE$; l'angolo BCE è diviso per metà dalla retta CG; giacchè l'arco $BD = DE$. (8) Ma una retta, la qual divida per metà l'angolo di un triangolo, divide ancora la base in parti proporzionali. Dunque sarà $CH . CF :: GH . GF$. Dunque componendo sarà $CH + CF . CF ::$

(8) 133. cor. 4. prop. 13.

HF GF. Dunque GF + AF = AG sarà la tangente dell' arco AD. Ciocchè ec.

COROLLARIO I.

XXVIII. Se uno de' due archi fosse uguale a zero, passando il punto B in A, allora la tangente AF svanirebbe, e la segante CF sarebbe uguale al raggio AC, e l' angolo ACE sarebbe diviso per metà dalla segante CD, e quindi due sole sarebbero le tangenti, cioè AG. AH. Onde il problema si muterebbe così: = Data la tangente di un' arco trovar la tangente della metà di quell' arco =. E la soluzione sarebbe la seguente: = Trovata (9) la segante CH del dato arco AE, si faccia come la somma del raggio (che è la segante minore) e della trovata segante è al raggio, così la data tangente alla tangente cerçata: cioè AC + CH. CA : : AH. AG.

(9) 26. probl. prec.

COROLLARIO II.

XXIX. Se uno de' due archi fosse uguale a zero, passando il punto B in A, come si disse di sopra, e l' altro arco fosse di 90°. passando E in I; allora la tangente AF svanirebbe, e la segante CF sarebbe uguale al raggio, come si disse. Dunque si avrebbe un quadrante da dividersi per metà dalla segante CG. Dunque l' arco AD sarebbe di 45°., e misura dell' angolo GCA, che sarebbe semiretto. Ma l' angolo formato dalla tangente AG, e dal raggio CA in A sarebbe retto. Dunque ancora l' altro angolo alla base CGA sarebbe semiretto. Dunque il triangolo sarebbe isoscele; e però la tangente AG ugua-

le

le al raggio C A. Dunque la soluzione del problema sarebbe, che la tangente di un arco di 45°. è uguale al raggio.

PROBLEMA III.

XXX. Date la funzioni di due archi fra loro assai poco differenti, trovar la funzione di qualsivoglia dato arco di mezzo prossimo alla vera funzione.

Ris. Facciasi, come è la differenza dell' arco minore dal maggiore alla differenza dell' arco minore a quello di mezzo, così la differenza delle date funzioni al quarto, che dovrà o aggiugnersi alla funzione dell' arco minore, se l' arco cresca, o togliersi dalla funzione dell' arco maggiore, se l' arco scemi.

Si esprimano nella Figura 5., e 6. da' segmenti della retta A B D C gli archi, e dalle rette B F, D G, C E perpendicolari alla prima le tangenti de' medesimi archi: ovvero si esprimano gli archi A F, A G, A E fra se poco differenti, e dalle rette F B, G D, E C i seni de' medesimi archi. In tutti due i casi i punti F, G, E saranno in una linea continua A N, la qual se sia curva, come nel 2°. caso, i piccoli archi F G, G E prender si possono come linee rette. Si esprimano adunque gli archi fra se prossimi A B, A C; ovvero A F, A E; e l' arco di mezzo sia espresso per A D, o per A G; e le date funzioni siano espresse dalle tangenti, o da' seni B F, C E; e la funzione cercata sia espressa per la D G: siano le rette D G, C E segate in H, ed I dalla retta H I parallela alla retta B C. Preso l' arco piccolo F E per linea retta i △△ E F I, G F H saranno simili, per esser l' an- Fig. 5, e 6.

go-

golo F comune, e gli altri due angoli esterni uguali agli interni ed opposti, essendo le rette G H, E I parallele (1): dunque i lati corrispondenti saranno proporzionali (2); e F I. F H:: E I. G H. Ma F I = B C, e F H = B D: dunque B C. B D:: E I. G H (3). Inoltre ancora F E. F G:: E I. G H; ma B C, e B D sono le differenze degli archi del circolo, a' quali corrispondono le lor tangenti, ed E I, G H sono le differenze delle funzioni, cioè delle tangenti: ed F E, F G sono le differenze degli archi del circolo, a cui corrispondono i loro seni, ed E I, G H sono le differenze delle funzioni, cioè de' seni. Dunque la differenza dell' arco maggiore dal minore, cioè B C, o F E è alla differenza dell' arco minore a quel di mezzo, cioè B D, o F G; come la differenza delle date funzioni, cioè E I, è al quarto, cioè G H; che nella 5. Figura, dove da B in C, o da F in E gli archi crescono, si dovrà aggiugnere alla H D, o F B, e nella 6. Figura, dove da B in C, e da F in E gli archi scemano, si dovrà sottrarre dalla F B per aver la retta D G, funzione dell' arco di mezzo A G, che si cercava. Ciocchè ec.

(1) 38. ann. def. 17.

(2) 129. prop. 13.

(3) 108. Ass. 9.

ANNOTAZIONE

XXXI. Questo metodo, che appartiene al metodo generale chiamato d' interpolazione, serve qualunque volta si prendono due sì prossime quantità, onde le loro piccole differenze siano, o aver si possano come fra loro proporzionali, il che dalle stesse Tavole si conosce, e massimamente in quelle, dove le quantità di un genere hanno fra loro un' eguale

guale

guale eccesso, e differenza, come sono i numeri naturali nella Tavola de' Logaritmi.

PROBLEMA IV.

XXXII. Dato un qualunque arco minore di un quadrante, trovar la sua tangente, la segante, e il seno.

Ris. Il dato arco o sarà tra il zero, e 45°., o tra 45°., e 90°: si trovi (4) adunque la tangente dell' arco medio aritmetico proporzionale tra quegli archi, tra' quali giace l' arco dato: Lo stesso arco dato sarà tra il nuovo medio trovato, e l' uno de' due primi estremi: dunque si prendano il nuovo medio trovato, e l' uno de' due primi estremi, e si trovi tra questi la tangente dell' arco medio aritmetico proporzionale; e così prosieguasi a fare, finchè si arrivi al dato arco, o all' arco quanto si voglia prossimo al dato; giacchè a questo necessariamente si arriverà, riuscendo la differenza sempre il doppio minore, e però diminuendosi questa oltre qualunque limite colla continuazione dell'operazione.

(4) 27. probl. 2. e suoi cor.

Trovata la tangente, si trova facilmente la segante, e il seno dell' arco (5). Ma diamo un' esempio della maniera di trovar la tangente di un dato arco minore di un quadrante: sia l' arco dato di 27°. 43': dodici operazioni far si dovranno, affinchè riesca medio aritmetico proporzionale il suddetto arco colla sua tangente, come vedesi nella Tavola seguente, dove gl' interi sono accurati, e i due decimali meno accurati, e si suppone il raggio = 10000000. La prima operazione si fa per il Corol. 1. del probl. 2. num. 28., le altre per lo stesso Probl. 2. num. 27.

(5) 26. probl. 1.

Archi

Archi.	1. Tangenti.	Archi.	4. Tangenti
45.° 0'.	10000000.00.	28.° 7'. $\frac{1}{2}$.	5345111.35.
22.° 30'.	4142135. 62.	25.° 18'. $\frac{3}{4}$.	4729647.75.
0°. 0'.	0.	22.° 30'.	4142135.62.
	2		5
45.° 0'.	10000000.00.	28.° 7'. $\frac{1}{2}$.	5345111.35.
33.° 45'.	6681786. 37.	26.° 43'. $\frac{1}{8}$.	5033577.98.
22.° 30'.	4142135. 62.	25.° 18'. $\frac{3}{4}$.	4729647.75.
	3		6
33.° 45'.	6681786. 37	28.° 7.' $\frac{1}{2}$.	5345111.35.
28.° 7'. $\frac{1}{2}$	5345111. 35.	27.° 25'. $\frac{5}{16}$.	5188352.84.
22.° 30'.	4142135. 62.	26.° 43'. $\frac{1}{8}$.	5033577.98.

Archi.	7. Tangenti.	Archi.	10. Tangenti.
28.° 7′. $\frac{1}{2}$.	5345111.35.	27.° 46′. $\frac{13}{32}$.	5266478.81.
27.° 46′. $\frac{13}{32}$.	5266478.81.	27.° 43′. $\frac{197}{256}$.	5256685.58.
27.° 25′. $\frac{5}{16}$.	5188352.84.	27.° 41′. $\frac{17}{128}$.	5246900.25.
	8.		11.
27.° 46′. $\frac{13}{32}$.	5266478.81.	27.° 43′. $\frac{197}{256}$.	5256685.58.
27.° 35′. $\frac{155}{64}$.	5227353.18.	27.° 42′. $\frac{231}{512}$.	5251791.92
27.° 25′. $\frac{5}{16}$.	5188352.84.	27.° 41′. $\frac{17}{128}$.	5246900.25.
	9.		12.
27.° 46′. $\frac{13}{32}$.	5266478.81.	27.° 43′. $\frac{197}{256}$.	5256685.58.
27.° 41′. $\frac{17}{128}$.	5246900.25.	27.° 43′.	5253829.13.
27.° 35′. $\frac{55}{64}$.	5227353.18.	27.° 42′. $\frac{231}{512}$.	5251791.92.

ANNOTAZIONI

XXXIII. 1°. Si osservi nell' esempio prec., che quando si arriva a due archi fra se molto prossimi, come è nelle due o tre ultime operazioni, si può abbreviare molto la fatica per mezzo del Problema III. num. 30. trovando la tangente del dato arco di mezzo prese le differenze come proporzionali. Il che si può fare altresì nel trovare i Logaritmi: e ciò con sicurezza si farà, quando le differenze degli estremi dalla differenza ultima trovata verranno ad essere uguali.

2°. Computati i seni, le tangenti, e le seganti, possono computarsi ancora i loro Logaritmi secondo il metodo esposto nell' antecedente trattato de' Logaritmi. Vi sono più metodi di computare i Logaritmi di quelle funzioni immediatamente: ma quì basta indicare qualche maniera, onde trovar si possano. Da quì in poi chiameremo col nome di funzione i Logaritmi stessi delle funzioni precedenti.

PROBLEMA V.

XXXIV. Ordinare le Tavole delle Funzioni già computate.

Ris. La Tavola abbia sei colonne. Nella prima scrivansi gli archi, cioè i gradi, e suoi minuti: nella seconda i seni: nella terza le tangenti: nella quarta le seganti corrispondenti: nella quinta i logaritmi de' seni: nella sesta i Logaritmi delle tangenti: Nella prima faccia gli archi comincino dal zero, e discendendo sempre crescano; e nella se-

con-

conda faccia comincino da 90°., e sempre scemino. Vedi la tavola seconda. In tal modo a qualunque arco esistente in una faccia corrisponderà nell'altra il suo complemento, e però ancora il Co-seno, e la Co-tangente. Perchè sul principio 90°., e o fanno un quadrante, e poi sempre quanto di gradi, e minuti si aggiugne in una faccia, altrettanto nell' altra si toglie. E sarà fatto Ciocchè ec.

ANNOTAZIONI

XXXV. 1°. I Logaritmi nelle Tavole si sogliono adattare al raggio = 10000000000, acciocchè il suo logaritmo, che assai spesso nelle tavole trigonometriche occorre, sia di 10.0000000; e quindi facilmente aggiugnere, o toglier vi si possa.

2°. I Logaritmi delle seganti nelle tavole porre non si sogliono, perchè facilmente si cavano da' Logaritmi de' Co-seni. Conciosiachè essendo (6) il quadrato del raggio uguale al rettangolo composto dal Co-seno, e dalla segante, diviso il quadrato del raggio per il co-seno darà la segante: e però dal doppio del Logaritmo del raggio sottratto il Logaritmo del Co-seno, si avrà la differenza uguale al Logaritmo della segante.

(6) 16. 2. parte cor. 4.

PARAGRAFO III.

Dell' uso delle Tavole.

PROBLEMA VI.

XXXVI. Dato un qualunque arco, ricavare dalle Tavole la funzione corrispondente.

Ris.

Rif. Se il dato arco non sia maggiore di un quadrante, ed abbia soli gradi, senza minuti, questo nella Tavola II. si troverà nella prima colonna della pagina, o da una parte, o dall'altra, secondo che sarà maggiore, o minore di 45°.: ed in faccia ad esso nella stessa pagina corrisponderà nella seconda colonna il seno, nella terza la tangente ec., e nella parte contraria della stessa pagina il complemento del co-seno, la co-tangente ec. Se poi l'arco dato abbia oltre i gradi ancora de' minuti, e nelle Tavole questi non si contengano; allora si trovi la funzione dell'arco prossimo maggiore, e sottratta da esso la funzione dell'arco prossimo minore, si prenda la differenza. La differenza degli archi sarà di 1°, cioè di 60′: e si faccia come 60′ al numero dato de' minuri oltre i gradi; così la differenza delle funzioni ricavate dalle Tavole al quarto, che si aggiugne alla funzione dell'arco minore, se si cerca il seno, la tangente ec. le quali crescono crescendo l'arco; ovvero si toglie, se si cerchi il coseno, la co-tangente ec., le quali scemano crescendo l'arco; e si avrà la cercata funzione (7).

(7) 30. probl. 3.

Sia dato per es. l' arco 27°. 43′., e si cerchi la tangente. Nelle Tavole è la tangente di 28°. = 53171. supposto il raggio = 100000, e la tangente di 27°. = 50953; e la lor differenza è 2218: si faccia dunque come 60′. 43′. : : 2218. 1590; il quale aggiunto a 50953, si avrà la cercata tangente = 52543. Ma nell'esempio del probl. 4. num. 32. supposto il raggio = 10000000, si trovò la tangente del dato arco = 5253829: dunque prescindendo dall' ultime due cifre, la differen-

za

za è $43 - 38 = 5$. Ma la differenza, che conviene a 60′ si trovò essere 2218; cioè 37. ad ogni minuto: dunque il divario non arriverebbe alla settima parte d' un minuto. Questa stessa regola serve per ricavare le funzioni ancora de' minuti secondi. Che se l' arco dato sia maggiore di un quadrante tutto l' arco sottraggasi da 180°., e si trovi la funzione del residuo, la quale sarà la funzione dell' arco dato (8). (8) 13. cor. 1.

PROBLEMA VII.

XXXVII. Data una funzione trovare l' arco, a cui corrisponda.

Ris. Se la data funzione è nelle Tavole, si cerchi in faccia ad essa l' arco corrispondente. Se poi quella nelle tavole non si trovi, in esse prendasi la funzione prossima minore, e la prossima maggiore; e si faccia, come la differenza di queste è alla differenza della prossima minore dalla data funzione; così 60′ è al numero de' minuti da aggiungersi all' arco della funzione minore, se questa sia il seno, la tangente ec, o da togliersi, se la funzione sia il co-seno, la co-tangente, e si avrà l' arco corrispondente alla data funzione (9). (9) 30. probl. 3.

Sia per es. il Logaritmo dato della tangente 9. 87343; e si cerchi l' arco. Nelle tavole il Logaritmo prossimo maggiore della tangente, lasciate le due ultime note, è di $37° = 9.87711$; e il Logaritmo prossimo minore di $36° = 9.86126$; la differenza di questo dall' altro è 1585; la differenza del minore dal dato Logaritmo è 1217: si faccia dunque come. 1585. 1217. : 60′. 46′; trascusate le frazioni appartenenti a' minuti secondi. Dunque l' arco cercato è di $36.^{\circ}\ 46'$. Ciocchè ec.

PARTE II.

Della Risoluzione de' Triangoli piani, o della Trigonometria piana.

PARAGRAFO I.

De' Triangoli Rettangoli.

XXXVIII. PEr la risoluzione de' triangoli rettangoli darò tre canoni, ed un problema, in cui si conterranno tutti i casi degli stessi triangoli: per gli esempj di questi casi ricaveremo le funzioni dagli archi, e gli archi dalle funzioni; ma le funzioni così ricavate non saranno esattissime, sebbene l' errore negli angoli non arriverà ad un minuto primo, e nelle basi ad un' intero.

CANONE I.

XXXIX. Nel triangolo rettangolo l' uno degli angoli obliqui è complemento dell' altro; e però datone uno, si sa ancora l' altro.

DIMOSTRAZIONE

Tutti gli angoli di un triangolo presi insieme equivalgono a due angoli retti (1): dunque essendo un di essi retto, gli altri due presi insieme fanno l' altro angolo retto: dunque l' un'

(1) 43. prop. 1.

l'un di essi è complemento dell'altro, e però datone uno, si sa ancora l'altro (2). (2) 44. cor. prop. 1.

CANONE II.

XL. La base è al lato, 1°. come il raggio è al seno dell'angolo opposto allo stesso lato: 2°. come la segante dell'angolo adiacente allo stesso lato è al raggio: 3°. come la segante dell'angolo opposto allo stesso lato è alla sua tangente.

DIMOSTRAZIONE

Se 1°. nella Figura 1. si consideri il Δ DCE, la base DC è al lato DE, come il raggio DC a DE seno dell'angolo opposto DCE; e la base DC è al lato CE, come il raggio DC a CE = DH seno dell'angolo DCH uguale all'alterno CDE, ed opposto (3) a DCE. 2°. Se si consideri il Δ CIA, la base, CI è al lato CA, come la segante CI dell'angolo ICA è al raggio CA (3). 3°. Inoltre la base CI è al lato IA, come la segante CI dell'angolo ICA è alla tangente IA dello stesso angolo (3). Fig. 1. (3) 21. cor. 9.

CANONE III.

XLI. Un lato è all'altro, 1°. come il raggio è alla tangente dell'angolo adiacente al raggio: 2°. come la tangente dell'angolo ad essa opposto è al raggio: 3°. come il seno dell'angolo ad esso opposto è al seno dell'angolo adiacente.

DIMOSTRAZIONE

1°. Nel △ICA il lato CA è al lato AI, come il raggio CA è alla AI tangente dell' angolo ACI. 2°. Il lato AI è al lato CA, come AI tangente dell' angolo ACI ad essa opposto è al raggio CA 3°. nel △ DEC il lato DE è al lato EC come DE, seno dell' angolo DCE, è ad EC = DH seno dell' angolo DCH = CDE alterno.

PROBLEMA VIII.

Date in un triangolo rettangolo piano, oltre l' angolo retto, due altre cose dello stesso triangolo, trovare il rimanente.

XLII. Caso 1°. Se oltre l' angolo retto si diano due angoli, è, come se diasi un' angolo solo, perchè (4) l' altro angolo è noto come complemento del dato. In tal caso si cerca la ragione, che passa tra la base, e i lati del triangolo. Presa la base per raggio, gli altri due lati saranno i seni degli angoli ad essi opposti: onde (5) sarà AC. BC :: 100000. 00, raggio. 83867. 06, seno dell' angolo dato A per es. di 57°., e sarà AC. AB :: 100000. 00. 54463. 90. seno dell' angolo di 33°., giacchè C = 90° — 57° = 33°., e nella tavola 2. de' seni si trovano i suddetti numeri corrispondenti (6): a' quali numeri possono sostituirsi i Logaritmi nelle tavole espressi, e corrispondenti a que' seni prendendo per Logaritmo del raggio 10 .. 0000000. Se poi prendasi per raggio un lato per es. AB, allora BC sarà tangente dell' angolo A di 57°, ed AC segante dello stesso angolo, onde co' loga-

(4) 39. Can. 1.

Fig. 7.

(5) 40. 1. parte Can. 2.

(6) 36. probl. 6.

garitmi (7) sarà A B . B C :: 10 . 0000000 . 10 . 1874826., e (8) A B . A C :: come il raggio alla segante: ma non essendovi i logaritmi delle seganti, si dovranno ricavare (9) dal doppio del logaritmo del raggio sottraendo il logaritmo del co-seno, considerando lo stesso lato A B come raggio, e poi come co-seno, cioè A C = 20 0000000 — 9 . 7361088. = 10. 2638912. Ciocchè ec

(7) 41. 1. parte Can. 3.
(8) 40. 2. parte Can. 2.
(9) 35. ann. 2.

XLIII. Caso 2°. Sia data la base, ed un' altro angolo, oltre il retto, si trova l' altro angolo (1), come sopra. Si trova inoltre il lato opposto a qualsivoglia angolo acuto, adoperando qualunque delle tre proporzioni del Canone 2. Sia per es. la base A C = 875, l' angolo A di 57°, sarà l' angolo C = 90°—57°. = 33° si faccia (2) come il raggio 100000 83867 seno di A di 57° :: A C base di 875 B C lato, che per geometrica proporzione si trova di 733. 8 ec.. o 734.

(1) 39. Can. 1.
(2) 40. 1. parte Can. 2.

Se poi si usino i logaritmi, si farà, come il raggio 10 . 00000 è a 9. 92359 seno di 57°, così il logaritmo di A C 875. = 2. 94201. è al logaritmo del lato B C, che trovasi sommando i due medj, e dalla somma sottraendo il logaritmo del raggio, ed il residuo sarà il logaritmo del lato B C, che trovato nella prima tavola o esatto, o prossimo darà il suddetto lato B C, cioè B C = 9. 92359. + 2. 94201. — 10 00000 = 2 . 86560., a cui nella prima tavola de' logaritmi corrisponde il numero prossimo 734: così per trovare il lato B A similmente si farà, come il raggio 10 . 00000 è a 9. 73610, seno di 33°., così il logaritmo della base A C 875. = 2. 94201. è al logaritmo del lato B A, che trovasi facendo B A = 9. 73610 + 2. 94201. — 10 . 00000. = 2. 67811.,

 a cui

a cui nella prima Tavola de' logaritmi corrisponde il numero prossimo minore 476. Ciocchè ec.

XLIV. Caso 3. Sia data la base, ed un' altro lato. Si trova un' angolo acuto adoperando una delle due prime proporzioni del Can. 2. per es. così è la base al lato, come il raggio è al seno dell'angolo opposto allo stesso lato, e quindi conosciuto il seno dell' angolo, o la funzione (3) si fa l'angolo opposto. Poi l' altro angolo acuto si conosce (4) per esser complemento del primo. Finalmente l' altro lato si fa manifesto adoperando qualunque delle tre proporzioni, o del Canone 2., o del Canone 3.

(3) 37. probl. 7.

(4) 39. Can. 1.

Sia per es. la base AC = 627. il lato AB = 356., sarà il logaritmo della base AC di 627. al logaritmo del lato AB di 356., come il logaritmo del raggio al logaritmo del seno dell' angolo C, il quale sarà uguale al logaritmo AB + logaritmo del raggio — logaritmo della base AC: ma è il logaritmo della base AC di 627 = 2 79727., e il logaritmo del lato AB di 356. = 2. 55145. Dunque il seno dell' angolo C sarà = 2. 55145 + 10. 00000 — 2. 79727 = 9. 75418., a cui (5) corrispende 34°. 36′. Dunque (6) l' angolo A sarà = 90°. — 34°. 36′. = 55°. 24′.

(5) 37. probl. 7.

(6) 39. Can. 1.

Finalmente per trovare il lato BC, si faccia, come il raggio al seno dell' angolo A di 55°. 24′; così la base AC al lato BC (7), cioè per i Logaritmi trovato (8) il seno dell' angolo A di 55°. 24′. = 9. 91544 si faccia, come 10. 00000. è a 9. 91544; così 2. 79727. Logaritmo di AC di 627. al Logaritmo di BC, il quale sarà = 9. 91544 + 2. 79727. — 10. 00000. = 2. 71271; a cui

(7) 40. 1. parte Can. 2.

(8) 36. probl. 6.

cor-

corrispondè prossimo minore il numero 516. nella 1. tavola de' Logaritmi. Ciocchè ec.

ANNOTAZIONE

XLV. Si osservi, che per la Geometria essendo la differenza de' quadrati di due quantità uguale al prodotto nato dalla loro somma per la lor differenza, si potrà trovare il lato B C ancora senza Trigonometria, moltiplicando fra se la somma della base, e del dato lato per la lor differenza, e dal prodotto estraendo la radice: per es. A C 627. + A B 356. = 983; A C 627 — A B 356. = 271; sarà adunque B C = V 983 X 271 V 266393 = 516: ed usando i Logaritmi, giacchè (9) il Logaritmo della radice è la metà del Logaritmo del prodotto, sarà il Logaritmo di (9) cor. 4. Log.

B C $= \frac{1}{2}$ (Logaritmo del 983 + Logaritmo del 271.) $= \frac{1}{2}$ (2. 99255 + 2. 43297) = $\frac{1}{2} \times 5 . 42552 = 2 . 71276$; a cui corrisponde prossimo minore il numero 516. nella 1. tavola de' Logaritmi.

XLVI. Caso 4°. Siano dati due lati. Adoperando qualunque delle due prime proporzioni del Can. 3°. si farà noto un' angolo acuto: per es. se si faccia, (1) così il lato A B è al lato B C, come il raggio è alla tangente dell' angolo adjacente al raggio, cioè dell' angolo A; quest' angolo A nella 2. tavola si troverà cercando la tangente trovata. Di più l' altro angolo acuto C si trova per il Can. 2° (2). E finalmente la base si trova per qualunque delle tre proporzioni del Canone 2°. (3): per es. così il seno dell' ango

(1) 41. 1. parte Can. 3.

(2) 39. Can. 1.

(3) 40. Can. 3.

li

lo opposto è al raggio, come il lato alla base.

Sia per es. il lato A B = 476; il lato (4) B C = 595: si faccia (4), così il Logaritmo di A B = 476. è al Logaritmo di B C = 595; come il raggio alla tangente dell' angolo A, cioè così 2.67761. è a 2.77452. come 10.00000. alla tangente = 2.77452. + 10.00000. — 2.67761. = 10.09691; la quale (probl. 7) trovasi essere tangente dell' angolo A di 51°. 20'. Dunque (2) l' angolo C = 90° — 51°. 20' = 38° 40'.

(4) 41. 1. parte Can. 3.

Finalmente per trovare la base, si faccia, (3) così il seno dell' angolo di 51°. 20' è al raggio, come il lato B C è alla base AC. E per usare i Logaritmi, si trovi il Logaritmo del seno di 51°. 20'. (5) per la inversa operazione del problema 7, o (6) per il problema 5. de' Logaritmi, in tal guisa; da

(5) 37. probl. 7.
(6) 15 probl. 5. Log.

52° = 9. 89653.
sottraggasi 51°. = 9. 89050.

Diff. 603.

E facciasi 60'. 20' : : 603. 201; che aggiunto al Logaritmo minore mi da 9. 89251. Logaritmo del seno di 51°. 20': indi si faccia, come 9. 89251. è a 10. 00000; così 2. 77452. alla base A C = 10. 00000. + 2. 77452. — 9. 89251. = 2. 88201; a cui corrisponde nella tavola 1. prossimo minore il numero 762. Ciocchè ec.

Paragrafo II.
De' Triangoli Obliquangoli.

XLVII. Tre altri Canoni, ed un Problema daranno la soluzione de' Triangoli obliquangoli.

LEM-

LEMMA

XLVIII. Il ſegmento maggiore è adjacente al maggior lato.

SPIEGAZIONE.

In ogni triangolo obliquangolo A C B preſo qualunque lato per eſ. A B per baſe, dall'angolo C oppoſto alla baſe ſi tiri il perpendicolo C I alla ſteſſa baſe, il quale cadrà dentro la baſe del triangolo, ſe tutti due gli angoli alla baſe ſaranno acuti, come nella Figura 8., ma ſe un'angolo ſarà ottuſo, come l'angolo B nella Figura 9. cadrà fuori della baſe del triangolo. Le due rette A I, B I diconſi ſegmenti della baſe, ancora nel caſo della figura 9, in cui il punto I cade fuor della baſe dalla parte dell'angolo B, ed allora il ſegmento B I ſi conſidera come negativo. Onde ſe prendaſi I D = B I, in tutti due i caſi A B è la ſomma de' ſegmenti, A D è la lor differenza, la quale nel caſo della Figura 9. ſarà maggior della ſomma. Il ſegmento A I è adjacente al lato A C, e all' angolo A, ed oppoſto al lato B C, e all' angolo B; e il ſegmento B I è adjacente al lato B C, e all' angolo B, ed oppoſto al lato A C, e all'angolo A. Fig. 8, e 9.

DIMOSTRAZIONE.

Ne' due triangoli rettangoli A C I, B C I il quadrato del ſegmento + il quadrato del perpendicolo C I è uguale al quadrato del lato adjacente (1): ma il perpendicolo è comu-

(1) 67. prop. 7.

mune a tutti due i triangoli. Dunque in quel triangolo, in cui v' è il segmento maggiore AI, è necessario, che siavi il lato adjacente maggiore. Dunque ec.

CANONE IV.

XLIX. In ogni triangolo i lati sono fra loro, come i seni degli angoli opposti.

DIMOSTRAZIONE.

Nel △ AIC (2) il lato AC è al lato IC, come il raggio al seno dell' angolo A; e nel △ BIC il lato IC è al lato BC, come il seno dell' angolo B, che (3) è lo stesso ancora nella Figura 9, è al raggio. Dunque (4) argomentando per ugualtà perturbata il lato AC è al lato BC, come il seno dell' angolo B opposto al primo lato è al seno dell' angolo A opposto al secondo lato giacchè, se facciasi AC. IC::R. A, cioè come il raggio al seno dell' angolo A: e IC BC::B. R, cioè come il seno dell' angolo B al raggio; resta AC BC::B. A; tolte le quantità comuni. Ciocchè ec.

(2) 40. 1. parte Can. 2.

(3) 13. cor. 1.

(4) 122. cor. 6. prop. 11.

CANONE V.

L. In ogni triangolo la somma de' due lati è alla differenza, come la tangente della semisomma degli angoli alla base è alla tangente della semidifferenza.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i lati fra loro, come i seni degli angoli opposti (5) sarà la somma de' lati alla lor differenza, come la somma de' seni alla lor differenza: ma la somma de' seni alla lor differenza è come la tangente della semisomma de' medesimi archi, o angoli dagli archi misurati alla tangente della semidifferenza (6): dunque ancora la somma de' due lati è alla differenza, come la tangente della semisomma degli angoli alla base è alla tangente della lor semidifferenza. Si osservi, che essendo tutti tre gli angoli d' un triangolo uguali a 180°; la metà di due colla metà del terzo = 90°; e però la semisomma di due angoli è complemento della metà del terzo.

(5) 49. Can. 4.

(6) 23. Teor.

CANONE VI.

LI. In ogni triangolo la somma de' segmenti della base, cioè la base stessa è alla somma de' lati, come la differenza de' lati è alla differenza de' segmenti.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo DI = BI, e CI essendo lato comune a due ΔΔ rettangoli CID, CIB, e gli angoli in I retti, ancora CD = CB Dunque dal centro C coll' intervallo CB descritto un circolo, questo passerà per D, e segherà in E la retta AC verso A, e in F dalla parte opposta prolungandosi la stessa AC fino alla circonferenza; nel qual caso AF = AC +

CB

C B, e però A F sarà la somma de' lati A C + C B; ed A E sarà la differenza de' lati A C, C B, cioè A E = A C — C B. Si tirino le rette F B, E D nella Figura 8; F D, E B nella Figura 9. Abbiamo (7) che in ogni quadrilatero descritto dentro un circolo gli angoli opposti presi insieme sono uguali a due retti. Dunque l'angolo CED + FBD sono uguali a due retti. Ma ancora l' angolo CED + AED sono uguali a due retti (8): dunque tolto il comune angolo C E D, resta l' angolo F B D = A E D: dunque ne' due ΔΔ A E D, A F B, essendovi l' angolo A comune, ancora l' angolo A D E = A F B. Dunque que' due triangoli sono simili: dunque i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali (9): dunque A B . A E : : A F A D. Il che si verifica ancora nella Figura 9. Dunque ec. Ciocche ec.

(7) 82. cor. 4. prop. 9.

(8) 26. cor. 2. def. 10.

(9) 129. prop. 13.

PROBLEMA IX.

In un' triangolo obliquangolo date tre parti, trovare le altre tre.

LII. Caso 1°. Se siano dati tre angoli, è lo stesso, che se ne fossero noti due soli; perchè il terzo ritrovasi sottraendo la somma di due angoli da 180°. In tal caso la ragione de' lati fra loro si trova cercando la ragione de' seni degli angoli opposti, giacchè è la medesima, che quella de' lati (1). Onde se tutti tre gli angoli del triangolo siano acuti, nelle tavole si trovano i loro seni corrispondenti. Se poi un' angolo sia ottuso, (2) allora si trova il seno del suo complemento, e si avrà nella ragione de' seni la ragione de' lati. Sebbene, non essendovi alcun lato determinato, ancorchè generalmente sappiasi, in qual

(1) 49. Can. 4.

(2) 13. cor. 1.

ra-

ragione ſiano que' lati; pure non ſi potranno giammai determinare: il che ſi rende chiaro da ciò, che co' medeſimi angoli ſi può avere un' triangolo compoſto di lati o minori, o maggiori.

LIII. Caſo 2°. Si diano due angoli, ed un lato di un triangolo, trovare il terzo angolo, e gli altri lati.

Riſ. Il terzo angolo ſi trova, come ſopra, ſottraendo la ſomma de' due angoli dati da 180°. Indi ognuno degli altri due lati ſi trova (3), ſe facciaſi, come il ſeno dell' angolo oppoſto al dato lato è al ſeno dell' angolo oppoſto al lato cercato, così il dato lato è al lato cercato. (3) 49. Can. 4.

Sia per eſ. l' angolo A di 10°., l' angolo B di 30°., ſarà l' angolo A C B nella Fig 8. di 180°. — 40°. = 140°. Sia il dato lato B C di 20. piedi. Si faccia, come il logaritmo del ſeno di A di 10°. = 9. 23967 è al logaritmo del ſeno di A C B di 140°., che è il ſeno di 40°. complemento di 140., = 9.80806., così B C di 20 piedi, il cui logaritmo è 1. 30103 al logaritmo della baſe A B, che riſulterà 1. 86942., a cui corriſponde proſſimo minore il 74. nella prima Tavola; onde A B ſarà di 74. piedi Indi ſi faccia, come 9. 23967. logaritmo di A di 10°. è a 9. 69897. logaritmo di B di 30°., così il logaritmo di B C di 20. piedi = 1. 30103. al logaritmo di A C., che riſulterà 1. 76033., a cui corriſponde proſſimo minore il numero 57 nella prima Tavola. Ciocchè ec.

LIV. Caſo 3°. Si diano due lati con un' angolo oppoſto ad un de' due lati, trovare il reſtante.

Riſ. Si trovi (4) il ſeno dell' angolo dato op- (4) 49. Can. 4.

opposto ad uno de' due lati, facendo, come quel primo lato è a questo secondo, così quel seno dell' angolo dato è al seno dell' angolo cercato. Trovato il seno, dalla seconda Tavola si ricava l' angolo corrispondente (5), e dalla somma de' due angoli conosciuti si ricava il terzo angolo, che è complemento a 180°., come nel primo Caso: indi (6) dalla seconda Tavola ricavato il suo seno, si fa, come nel Caso secondo, per trovare il terzo lato.

(5) 37. probl. 7.

(6) 36. probl. 6.

Sia per es. nel △ A C B, Fig. 8, B C di 20. piedi, A C di 30., e l' angolo A di 10°.: si faccia come il logaritmo di B C 20. = 1. 30103 al logaritmo di A C 30. = 1. 47712., così il logaritmo del seno A 10°. = 9. 23967. al quarto, che sarà il logaritmo del seno dell' angolo B, e risulterà 9. 41576, a cui (5) nella seconda Tavola corrisponde prossimo minore 15°. 6'. Ora per trovare l' angolo A C B si fa 180°. — 25°. 6'. = 154°. 54'., il cui complemento è 25°. 6'., ed al cui seno corrisponde il logaritmo 9. 62753, per la inversa operazione del Problema 7, che nel Caso 4°. del Problema 9 vedesi (7). E per trovare il lato A B si faccia, come il logaritmo del seno A di 10° = 9. 23967. al logaritmo del complemento di A C B = 9. 62753., così il logaritmo di B C 20. = 1. 30103. al logaritmo di A B, che risulta 1. 68889., a cui (5) corrisponde prossimo il numero 48. piedi, e pollici 11. Si osservi, che ancora nella Fig. 9. si avrebbero i medesimi dati A C, B C, e l' angolo A uguali a quelli della Fig. 8: onde ricavasi, che prima di sciogliere il caso, è da osservare, se il terzo lato A B sia più corto d' alcuno de' dati lati; e quindi si deduca qual'

(7) 46. Caso 4. probl. 9.

qual' angolo debba prenderſi ottuſo, cioè quello oppoſto al maggior lato.

LV. Caſo 4°. Si diano due lati con un' angolo tra eſſi compreſo, trovare il rimanente.

Riſ. Si trovano gli altri due angoli, facendoſi (8) come la ſomma de' lati è alla lor differenza, così la tangente della ſemiſomma degli angoli alla baſe è al quarto, che ſarà la tangente della ſemidifferenza, la quale aggiunta alla ſemiſomma di quegli angoli alla baſe, darà l' angolo oppoſto al lato maggiore, e ſottratta da queſta ſemiſomma darà l' angolo oppoſto al lato minore. Indi per il Can. 2°. ſi trova il terzo lato (9). Sia per eſ. l' angolo A C B, Fig. 8., di 100°., B C di 20, A C di 30 piedi; ſarà A F ſomma de' due lati = 50 piedi; e la differenza loro = 30. — 20 = 10. piedi Si faccia come il logaritmo della ſomma 50. = 1. 69897 è al logaritmo della differenza 10. = 1.00000., così il logaritmo della tangente della ſemiſomma 40° = 9.92381. è al quarto; che riſulta 9.22484., che è logaritmo della tangente di 9°. 34'., cioè della differenza degli angoli alla baſe, la quale aggiunta a 40°. mi dà l' angolo B = 49°. 34'., e ſottratta da 40°. mi da l' angolo A di 30°. 26'. Ciocchè ec.

(8) 50. Can. 5.

(9) 40. Can. 2.

LVI. Caſo 5°. Siano dati i tre lati, trovare gli angoli.

Riſ. Si trova ciaſcun' angolo prendendo per baſe uno de' due lati, tra quali è compreſo. Si fa 1°. (1) come la baſe alla ſomma de' lati, così la differenza di queſti alla differenza de' ſegmenti della baſe. 2°. preſa la metà di queſta differenza, e aggiunta alla metà della baſe darà il ſegmento maggiore adjacente al lato maggiore, e ſottratta darà il

(1) 51. Can. 6.

il ſegmento minore adjacente al lato minore. 3°. Poi (2) ſi fa, come il lato adjacente è al ſuo ſegmento, così il raggio è al ſeno dell' angolo oppoſto, il cui complemento è l' angolo compreſo da' due lati preſi. 4°. Così conoſciuti gli angoli alla baſe, ſi ſaprà l' angolo ad eſſa oppoſto, che è ſupplemento al ſemicircolo.

(2) 39. Can. 1.

Sia per eſ. nella Fig. 8. il Δ A C B: il lato A C ſia di 20 piedi, e il ſuo logaritmo 1. 30103: B C di 15. piedi, e il ſuo logaritmo 1. 17609: A F ſia la ſomma de' lati, cioè di 35 piedi, e il ſuo logaritmo 1. 54406: A B ſia di 30. piedi, e il ſuo logaritmo 1. 47712: A E ſia la differenza de' lati, cioè di 5 piedi, e il ſuo logaritmo 0. 69897. Si fa 1°. come A B = 1. 47712. ad A F = 1. 54406., così A E = 0. 69897. ad A D differenza de' ſegmenti = 0. 76591, a cui corriſpondono 5 piedi, e 10. pollici.

2°. A I ſegmento maggiore ſia di 17. piedi, e 11. pollici, e B I di 12. piedi, e un pollice. Si fa, come A C = 1. 30103. ad A I = 1. 25320, così il raggio = 10. 00000. a 9. 95217, che è ſeno di 63°. 36'., il cui complemento A è di 26°. 24': indi ſi fa, come B C = 1. 17609. a B I = 1. 08207., così il raggio = 10. 00000. a 9. 90598., che è ſeno di 53°. 30'., il cui complemento B è di 36°. 30'. Dunque l' angolo A C B è di 117°. 6'. Ciocchè ec.

PAR-

PARTE III.

Della Risoluzione de' Triangoli Sferici, o della Trigonometria Sferica.

PARAGRAFO I.

Della natura, e di certe proprietà della sfera, degli angoli, e de' Triangoli sferici.

LVII. DEf. 1. La sfera (come si disse nella Def. 47. di Geometria) è un corpo solido compreso dentro una sola superficie, in cui v'è un punto chiamato Centro, dal quale tutte le rette tirate alla superficie sono fra loro uguali, e diconsi raggj, o semidiametri della sfera; e la retta tirata per il centro della sfera, e terminata da una parte e dall'altra alla superficie chiamasi Diametro della sfera.

ANNOTAZIONE.

LVIII. La sfera si concepisce generata dalla rotazione di un semicircolo intorno all' immobile proprio asse, finchè il semicircolo ritorni, d'onde partì.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo tutte le linee rette tirate dall' immobil centro del semicircolo alla sua peri-

feria fra loro uguali, ancora tutte le rette dal medesimo punto, come da centro, tirate alla superficie del corpo solido generato dalla rotazione del semicircolo saranno uguali. Dunque un tal corpo solido così generato sarà la
(1) 57. def. 1. sfera (1).

COROLLARIO I.

LIX. Se la sfera sia segata comunque da un piano, il segamento sarà un circolo.

DIMOSTRAZIONE.

O la sfera sia segata da un piano, che passi per il centro di essa, o nò, sempre il segamento è un circolo. Perchè

Fig. 10. Nel 1°. caso sia segata la sfera dal piano A B D, che passi pel centro C; tutte le rette, che dal centro C della sfera si tirano al segamento fatto da quel piano nella superficie della sfera stessa, cioè C A, C B, C D,
(2) 57. def. 1. sono uguali al raggio della medesima sfera (2): dunque tutti i punti A, B, D, si trovano nella periferia di un circolo, il cui centro è C. Dunque il segamento sarà un circolo.

Nel 2°. Caso sia segata la sfera dal piano E F H, che non passi per il centro C: da questo si tiri la retta C G perpendicolare al suddetto piano; e da' punti C G, si tirino a due punti della curva del segamento, cioè F, H, le rette C F, C H, G F, G H. Gli angoli C G F, C G H saranno retti per la retta C G perpendicolare al suddetto piano E F H. Dunque il quadrato della Ipotenusa C F sarà uguale a' quadrati C G + G F; ed il quadrato della Ipotenusa C H uguale a' quadrati
(3) 67 prop. 7. C G + G H (3). Ma C F = C H (2): e C G è lato comune: dunque i qua-

draquadrati GH, GF, e però ancora i lati GF, GH sono uguali. Ma lo stesso accade, rimanendo il punto H, e variando comunque il punto F: dunque la curva del segamento, o sia il perimetro è la periferia d'un circolo, il cui centro è G, e il raggio GH. Dunque ec. Ciocchè ec.

COROLLARIO II.

LX I Circoli, i cui piani passano per il centro della sfera, sono fra loro uguali, e maggiori di quelli, i cui piani non passano per il suddetto centro.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Se il circolo ABD sia qualunque de' circoli, i cui piani passano per il centro della sfera, sarà CD raggio del circolo, ed insieme raggio della sfera (4): dunque i raggj di tali circoli essendo uguali ai raggj della sfera, saranno fra loro uguali: dunque ancora gli stessi circoli saranno fra loro uguali.

(4) 57. def. 1.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

In qualunque circolo EFH, il cui piano non passi per il centro della sfera, il raggio GH è minore del raggio della sfera CH, perchè (5) il quadrato CH è uguale a' quadrati CG + GH, e però CH è maggiore del solo GH: dunque il circolo descritto

(5) 59 Cor. 1 def. 1.

col raggio CH farà maggiore del circolo descritto col raggio GH. Dunque ec Ciocchè ec.

LXI. Def. 2. I circoli, i cui piani passano per il centro della sfera, si dicono circoli massimi della sfera.

COROLLARIO I.

LXII. I circoli massimi si segano tutti fra se in due parti uguali, e il comune segamento de' loro piani è lo stesso che il diametro della sfera.

DIMOSTRAZIONE

Poichè i piani di tutti questi circoli passano per il centro della sfera, s' incontrano tutti in uno stesso centro, ch' è comune ad essi, ed alla sfera (6): dunque si segano fra loro in una qualche retta (7), la quale passa per il centro comune ad essi, ed alla sfera, ed arriva da ambe le parti alla superficie de' circoli, e della sfera: dunque quella linea, che è il comune segamento, sarà insieme diametro di que' circoli, e della sfera. Ciocchè ec.

(6) 59 Cor. 1 def. 1.
(7) 150. Cor. 2. Ass. 12.

COROLLARIO II.

LXIII. Per due punti, dovunque si prendano nella superficie della sfera, si può tirare un circolo massimo: e per qualsisia punto si può tirare un circolo massimo, il cui piano sia perpendicolare al circolo massimo già dato.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Siano i dati due punti B, F: si congiungano col centro per le rette F C, B C, e fra loro per la linea F B; il triangolo sarà tutto in un medesimo piano (8). Ma se con quel piano si seghi la sfera, il segamento P F B p sarà un circolo (9), e passando per il centro della sfera sarà un circolo massimo (1): dunque per due punti dovunque siano presi nella superficie della sfera si può tirare un circolo massimo.

(8) 152. Ass. 14.
(9) 59. Cor. 1. def 1.
(1) 61. def. 2.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Sia il dato circolo massimo P F B p: sia il dato punto E: da questo nel piano del circolo dato si tiri la perpendicolare E G, e si congiungano i punti E, G col centro per le rette G C, E G: si avrà il Δ E G C, che sarà tutto in uno stesso piano perpendicolare al piano del circolo dato (2): ma se con quel piano si seghi la sfera, il segamento E P D p A sarà un circolo (9); e poichè passa per il centro C della sfera sarà un circolo massimo (1). Dunque ec. Ciocchè ec.

(2) 168. Cor. 2. def. 4.

LXIV. Def, 3. Il diametro della sfera, che è perpendicolare al piano di un circolo nato dal segamento fatto nella superficie della stessa sfera, dicesi *Asse della sfera*; e gli estremi punti dell' Asse si chiamano *Poli*. Quindi nella Figura 10. la retta P p è Asse della sfera, ed insieme Asse de' circoli E F H, A B D, per i cui piani passa perpendicolarmente in G, C; e i punti P, p sono i loro Poli.

COROLLARIO I.

LXV. L' Asse passa per il centro del circolo, di cui è Asse.

DIMOSTRAZIONE.

Se il circolo sia massimo, è manifesto; perchè l' asse passa per il centro della sfera (3); con cui qualunque circolo massimo ha il centro comune (4).

(3) 64. def. 3.
(4) 61. def. 2.

Se poi il circolo non sia massimo, si tirino a due qualunque punti F, H dal centro C della sfera le rette C F, C H: dall' incontro dell' asse P C nel punto G col piano E F H G nasceranno gli angoli retti C G F, C G H, poichè l' asse è perpendicolare al piano suddetto F G H (3): dunque ne' due △△ C G F, C G H, essendo C G lato comune, e C F = C H per esser raggj della sfera, ancora G F = G H, dovunque nel circolo E F H trovisi il punto F (5): Dunque G è il centro del suddetto piano: dunque l' asse P C passa per il centro G del circolo E F H, di cui è asse, Ciocchè ec.

(5) 45. prop. 2.

COROLLARIO II.

LXVI. Tutti i punti della circonferenza di qualsivoglia circolo nella superficie della sfera sono distanti dal suo medesimo polo per archi uguali di circoli massimi.

DI-

DIMOSTRAZIONE

Se nella circonferenza del circolo per es. B F H si prendano alla superficie della sfera i due punti H F, e per essi si tirino i circoli massimi P H p, P F p, che passino per il Polo P, i raggj della sfera H C, F C saranno uguali, e i raggj del circolo G F, G H saranno pure uguali, il lato C G è comune: dunque i due △ △ G C H, G C F saranno uguali (6): dunque ancora i loro angoli al punto C saranno uguali: ma gli angoli uguali sono misurati da archi uguali: dunque se l' angolo G C H = G C F, l' arco P H = P F. Dunque ec.

(6) 56. prop. 4.

COROLLARIO III.

LXVII. Il circolo massimo dall' uno e l' altro de' suoi poli è distante per un quadrante d' un circolo massimo: e quel circolo, di cui qualunque punto è distante per un quadrante d' un circolo massimo dal suo polo, sarà un circolo massimo.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Sia il circolo massimo A B D: questo passerà per il centro C della sfera (7): e l' asse P C p sarà perpendicolare a tutto il piano A B D C (8): dunque i raggj B C, D C esistenti nel piano A B D saranno perpendicolari all' asse P C p: ma i suddetti raggj B C, D C segano i piani de' circoli P F p,

(7) 61. def. 2.

(8) 64. def. 3.

 P H p

P H p: dunque tanto gli archi P B, P D, quanto gli archi p B, p D ſono quadranti, cioè miſura degli angoli retti B C P, B C p, D C P, D C p. Dunque i punti B, D del piano ABD ſono diſtanti da loro poli per un quadrante di un circolo maſſimo.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Sia il circolo non maſſimo E F H: queſto non paſſerà per il centro C della sfera (9): dunque ſegata la sfera per il centro C dal piano A B D parallelo al piano E F H, ſaranno gli archi P B, P D, p B, p D quadranti (per la I. parte): dunque P F, P H ſono archi minori di un quadrante; p F, p H archi maggiori di un quadrante. Dunque niun punto d' un circolo non maſſimo è diſtante per un quadrante dal ſuo polo. Dunque il circolo, di cui qualunque punto è diſtante dal ſuo polo per un quadrante, ſarà circolo maſſimo.

(9) 60. Cor. 2. def. 1.

LXVIII. Def. 4. Angolo sferico diceſi quello, che nella ſuperficie sferica è formato da due archi di circoli maſſimi in quel punto, dove concorrono: per avere una miſura uguale ad un tal angolo, ſi conſidera l' angolo rettilineo formato dalle rette eſiſtenti negli ſteſſi piani co' medeſimi archi, e verſo le ſteſſe parti, e tangenti quegli archi nello ſteſſo punto del concorſo. Così per eſ. F P H è angolo sferico, a cui per ſua miſura ſi ſoſtituiſce l' angolo rettilineo f P h formato dalle tangenti f P, h P nel punto P.

CO-

COROLLARIO I.

LXIX. Se un arco cade sopra un' altro arco, fa due angoli, o retti, o presi insieme uguali a due angoli retti.

DIMOSTRAZIONE

La tangente f P colla tangente e h fa due angoli o retti, o uguali a due retti (1): ma gli angoli fatti dalle rette esistenti negli stessi piani cogli archi, e verso le medesime parti, e tangenti gli archi nello stesso punto del concorso sono misure degli angoli sferici fatti dagli archi concorrenti insieme in un punto (2): dunque ancora l' arco F P cadendo sopra l' arco E H nel punto P, ivi farà due angoli, o retti, o uguali a due retti. Ciocchè ec.

(1) 26. Cor. 2. def. 10. Geom.

(2) 68. def. 4.

COROLLARIO II.

LXX. Se due lati di un triangolo si prolunghino oltre al concorso, gli angoli alla cima opposti sono uguali.

DIMOSTRAZIONE

Se le tangenti f P, h P si prolunghino di là dal concorso P, formano angoli nella cima P opposti fra loro, ed uguali (3): dunque (4) ancora se si prolunghino gli archi F P, H P di là dal concorso P, formeranno angoli alla cima opposti, ed uguali. Ciocchè ec.

(3) 28. Cor. 4. def. 10. Geom.

(4) 68. def. 4.

CO-

COROLLARIO III.

LXXI. Se i piani de' lati saranno fra loro perpendicolari, l'angolo sarà retto: E se l'angolo è retto, i piani de' lati sono fra loro perpendicolari.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Se il piano F P p sia perpendicolare al piano H P p, la tangente f P è perpendicolare al diametro P p, il quale è il comun segamento di que' piani: dunque la tangente f P è perpendicolare ancora a tutto il piano H P p: ma la tangente h P si suppone nello stesso piano H P p: dunque la tangente f P è perpendicolare alla tangente h P: dunque l'angolo f P h è retto. Ciocchè ec.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Se poi la tangente f P è perpendicolare alla tangente h P, sarà perpendicolare ancora al diametro P p, per essere tangente al punto P: dunque f P sarà perpendicolare ancora al piano h P p (5): ma la tangente f P per ipotesi è nel piano F P p: dunque ancora il piano F P p è perpendicolare al piano H P p (6): dunque se l' angolo f P h è retto, que' due piani sono fra loro perpendicolari. Ciocchè ec.

(5) 158. prop. 16.

(6) 168. Cor. 1. def. 40.

CO-

COROLLARIO IV.

LXXII. Se da qualunque punto del diametro, che passi per la cima dell' angolo sferico, escano ne' piani degli archi, da' quali si forma l' angolo sferico, due rette perpendicolari allo stesso diametro, l' angolo rettilineo sarà uguale all' angolo sferico.

DIMOSTRAZIONE

Escano per esempio dal punto G del diametro le rette G F, G H ne' piani degli archi F P p, H P p perpendicolari allo stesso diametro; l' angolo FGH è uguale all' angolo f P h, cioè ambedue sono retti in questo caso, per essere ancora le rette f P, h P negli stessi piani, e perpendicolari allo stesso diametro, e però parallele alle rette F G, H G: ma l' angolo f P h rettilineo è uguale all' angolo sferico F P H (7): dunque ancora è l' angolo rettilineo (7) 68. def. F G H = F P H angolo sferico. Ciocchè ec. 4.

COROLLARIO V.

LXXIII. L' angolo sferico è uguale all' angolo formato da' piani degli archi stessi, che contengono l' angolo sferico.

DIMOSTRAZIONE

La inclinazione del piano F P p al piano H P p forma l' angolo rettilineo, F G H (per la precedente): ma F G H = F P H sferico angolo formato dagli archi stessi (per la precedente): dunque ec. Ciocchè ec.

CO-

COROLLARIO VI.

LXXIV. La misura uguale all' angolo sferico è l' arco di qualsivoglia circolo, che ha il polo nella cima dell' angolo, il quale arco è compreso tra i lati, o gli archi che formano l' angolo sferico.

DIMOSTRAZIONE

Segata la sfera da qualunque piano A B D, o E F H perpendicolare al diametro P p, che è comune segamento di que' piani degli archi P F, P H, il segamento della sfera sarà un circolo (8), che ha il polo in P (9); ma l' arco B D, o F H compreso tra gli archi P F, P H, o B P, P D è arco d' un tal circolo, come è manifesto; ed è misura uguale all' angolo sferico; come lo dimostro. Perchè l' arco B D è misura dell' angolo B C D formato da' raggj B C, C D perpendicolari all' asse P p; e l' arco F H è misura dell' angolo F G H formato da' raggj F G, H G, pure perpendicolari all' asse: ma gli angoli B C D, F G H sono uguali all' angolo sferico B P D, o F P H (1): dunque l' arco B D, o F H è misura uguale all' angolo sferico suddetto. Ciocchè ec.

(8) 59. Cor. 1. def. 1.
(9) 64. def. 3.
(1) 72. Cor. 4. def. 4.

COROLLARIO VII.

LXXV. Se gli archi, che formano un' angolo sferico si prolunghino; di nuovo concorrono in guisa, che e compiscono ciascuno un semicircolo, e formano un' altro angolo sferico uguale al primo.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Essendo la retta P C p diametro di ambedue gli archi P F, P H, ambedue gli archi prolungati devono passare per l'altra estremità p del loro diametro: dunque P F p, P H p saranno semicircoli. Ma inoltre lo stesso angolo rettilineo B C D, o F G H sarà uguale allo sferico angolo B p D (2). Dunque lo stesso arco B D, o F H misura degli angoli B C D, o F G H, ed ugual misura dell' angolo sferico F P H (3), sarà ancora misura uguale dell' angolo sferico B p D. Dunque l' angolo sferico F P H = B p D. Ciocchè ec.

(2) 72. Cor. 4. def. 4

(3) 73. Cor. 5. def. 4.

COROLLARIO VIII.

LXXVI. Il circolo massimo, che sia perpendicolare ad un' altro circolo massimo, passa per i poli di questo: e se un circolo massimo passa per il polo di un' altro circolo massimo, quello è perpendicolare a questo.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Sia il circolo massimo P B p perpendicolare al circolo massimo A B D: sarà il piano del circolo P B p perpendicolare al piano del circolo A B D (4): dunque se si seghi la sfera da un' altro piano A P D p, che passi per il C, e che sia perpendicolare al suddetto piano A B D, il segamento P C p comune di que' due piani P B p, A P D p fra se perpendicolari, e perpendicolari al terzo piano A B D,

(4) 71. Cor. 3. def. 4.

B D, sarà pure necessariamente perpendicolare al piano A B D (5): dunque i punti P, p, che sono nel circolo P B p saranno i poli del circolo A B D (6): dunque ec. Ciocchè ec.

(5) 169. Cor. 2. def. 4

(6) 68. def. 4.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Se il circolo massimo P B p passi per il polo P del circolo massimo A B D, passerà ancora per l'asse P C p perpendicolare allo stesso piano del circolo A B D, di cui è asse (7): dunque il circolo massimo P B p sarà perpendicolare (8) all' altro circolo A B D. Ciocchè ec.

(7) 64. def. 3.

(8) 169. Cor. 2. def. 40.

LXXVII. Def. 5. Triangolo sferico dicesi quello che è formato nella superficie sferica da tre archi di circoli massimi, che sono i suoi lati.

COROLLARIO I.

LXXVIII. Se in un triangolo sferico due angoli sono retti, i lati ad essi opposti sono quadranti. 2°. e se due lati sono quadranti, gli angoli ad essi opposti sono retti. 3°. ed in ambedue i casi il terzo lato è misura del terzo angolo.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

Se gli angoli P B D, P D B sono retti, il punto P, che è il comune segamento de' cir-

coli BP, DP, sarà polo del circolo ABD (9): (9) 76. Cor. 8. def. 4.
ma il circolo ABD, che passa per il centro
C della sfera, è circolo massimo (1); ed il (1) 60. Cor. 2. def. 1.
circolo massimo d'ogni intorno è distante dal
suo polo per il quadrante di un circolo massimo (2): dunque gli archi PB, PD, che (2) 67. Cor. 3. def. 3.
sono le distanze dal polo del circolo massimo
ABD, saranno quadranti. Ciocchè ec.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Se poi gli archi PB, PD sono quadranti, essendo misure degli angoli BCP, DCP: questi saranno retti: dunque la retta CP sarà perpendicolare a tutto il piano BCD, dunque i piani degli archi PB, PD, che hanno il comune segamento PC perpendicolare al piano BCD, saranno pure perpendicolari allo stesso piano BCD: dunque gli angoli PBD, PDB saranno retti (3). Ciocchè ec. (3) 71. Cor. 3. def. 4.

DIMOSTRAZIONE
Dello III. Parte.

In ambedue i casi il terzo angolo è l'angolo sferico BPD: ma l'arco BD è misura uguale d'un tale angolo sferico, essendo il punto P il polo del circolo BD (4): dunque il terzo lato BD è misura del terzo angolo. (4) 74. Cor. 6. def. 3.
Ciocchè ec.

COROLLARIO II.

LXXIX. Se tutti gli angoli sono retti, tutti i lati sono quadranti. 2°. e se tutti i lati ti sono quadranti, tutti gli angoli del triangolo sono retti.

DIMOSTRAZIONE
Della I. Parte.

Se ancora il terzo angolo BPD al polo P sarà retto ancora l'angolo BCD sarà retto: (5) dunque ancora l'arco BD sarà quadrante. Dunque ec. Ciocchè ec.

(5) 74. Cor. 6. def. 3.

DIMOSTRAZIONE
Della II. Parte.

Se ancora il terzo lato, o arco BD è quadrante, sarà misura dell'angolo BCD uguale all'angolo sferico BPD (6): dunque ancora il terzo angolo sarà retto. Ciocchè ec.

(6. 78. Cor. 1. def. 5.

ANNOTAZIONE.

LXXX. Quindi si fa palese la risoluzione del triangolo sferico, che abbia retti tutti gli angoli, o almeno due, ne' quali non è d'uopo delle Tavole delle Funzioni. Rimane a trattare de' triangoli rettangoli, ne' quali un solo angolo è retto, e la base è sempre opposta all'angolo retto; e de' triangoli obliquangoli, ne' quali niun'angolo è retto, e qualsivoglia lato può prendersi per base.

PARAGRAFO II.

Della Risoluzione de' Triangoli Rettangoli.

LXXXI. Sei canoni si ricercano per la risoluzione de' triangoli rettangoli sferici, i qua-

quali tutti si fanno manifesti dalla considerazione della sola Figura 11. In essa siavi il triangolo B A D rettangolo in A. Il circolo del lato A D sia A D E F L, il cui piano si concepisca esser lo stesso, che il piano della carta. Il lato A B sia di un circolo perpendicolare al piano del suddetto circolo A D E F L: e la base B D sia obliqua al suddetto piano. Se B D, e A B si prolunghino, incontreranno il piano A D E F L ne' punti E, F, sicchè A E, D F saranno diametri, e A B E, D B F saranno semicircoli. Fig. 11.

Concepiscasi dal punto B, che non è il polo del circolo A D E, ma gli resta obliquo, tirata la retta B C, che sarà obliqua al diametro A E: indi tirata la retta I perpendicolare al piano A D E, e al diametro A E nel punto I; poi la retta I G perpendicolare al diametro D F, ed alla retta B G, che pure sia perpendicolare a D F: giacchè il piano B I G passando per I B perpendicolare al piano A D E, sarà ancora perpendicolare al suddetto piano A D E (7): onde anche la retta G C, perpendicolare al segamento I G, sarà pure perpendicolare al piano B I G, e però anche alla retta B G.

Finalmente preso il quadrante D L dal punto L concepiscasi tirato il circolo massimo L H P, che divida il semicircolo D B F in H, e il semicircolo A B E in P: del circolo A D E F L sarà polo il punto P: del circolo L H P ec. sarà polo il punto D (8): ma il punto L, che sta nella circonferenza D A L, non sarà polo del circolo D B H F, dovendo riuscire un tal polo sotto il punto L, altrimenti L H dovrebbe essere quadrante (9): gli angoli D L H, D H L saranno ret-

(7) 169. Cor. 2. def. 40.

(8) 76. Cor. 8. def. 4.

(9) 64. def. 3.

ti, e però DL, DH quadranti, e l'arco LH misura uguale dell' angolo ADB (1): e gli angoli ALP, LAP retti, e però PA, PL quadranti; e l'arco AL misura uguale dell' angolo HPB (1).

(1) 78. Cor. 1. def. 5.

LXXXII. Tutta la risoluzione de' triangoli sferici deriva dalla considerazione della piramide BIGC, e dal confronto de' triangoli rettangoli sferici BAD, BHP: la prima ci somministra tre Canoni; il secondo altri tre, in cui si contengono tutti i casi de' triangoli rettangoli sferici. Si osservi adunque la piramide da noi considerata come a giacere, che abbia la cima in C, la base opposta BIG, e i tre lati della base alla cima BC, IC, GC, da cui si formano le tre faccie BCI, BCG, ICG.

Queste colla base fanno quattro triangoli piani rettangoli, perchè gli angoli BIG, BIC sono retti per la BI perpendicolare al piano CIG; e gli angoli CGB, CGI sono retti per la CG perpendicolare al piano BGI (per costruzione): la misura dell' angolo BCI è l'arco opposto BA; e dell' angolo BCG è l'arco BD; e dell' angolo ICG è l'arco AD, i quali angoli sono tutti alla cima C, e l'angolo BGI nella base è uguale allo sferico BDA (2).

(2) 72. Cor. 4. def. 4.

LXXXIII. Si confrontino tra loro i due triangoli sferici BAD, BHP rettangoli in A, ed H; e si troverà ad ogni o lato, o angolo di un triangolo corrispondere nell' altro triangolo qualche cosa o uguale al primo, o suo complemento. Perchè nel 1°. è l'angolo retto BAD = BHP del 2°.: l'angolo ABD = HBP alla cima opposto: l'angolo ADB del 1°., misurato dall' arco LH, ha per com-

ple-

plemento il lato HP del 2°: il lato AB del 1°. ha per complemento la base BP del 2°: il lato DA del 1°. ha per complemento l' arco AL, ch' è misura dell' angolo BPH: e la base BD del 1°. ha per complemento il lato BH del 2°. (per il n°. 81.)

LXXXIV. Or dunque i primi tre Canoni si ricavano dalla considerazione della piramide (per il n°. 82.), tenendo sempre, e adoperando il Corollario 9. della Trigonometria piana n°. 21; cioè prendendo per raggio prima la retta CB, poi la CG, ed in fine la CI. Ne' Δ Δ rettangoli CIB, CGB, dove CB è comune, nascerà la ragione delle rette BG, BI; e la base BIG darà l'altra ragione delle medesime rette, le quali ragioni combinate fra loro daranno i tre seguenti Canoni.

CANONE I.

LXXXV. Il raggio è al seno dell' angolo, come il seno della base al seno del lato opposto.

DIMOSTRAZIONE

Presa la retta BC per raggio ne' triangoli rettangoli CGB, CIB, saranno le perpendicolari BG, BI seni degli angoli opposti BCG, BCI (3): ma BG per una parte è seno dell' arco BD, che nel triangolo sferico BDA è base; e BI è seno dell' arco BA opposto all' angolo sferico *D*; e per l' altra parte nel Δ BIG rettangolo in I la retta BG, lato dell' Ipotenusa, rappresenta il raggio, e BI reppresenta il seno dell' opposto angolo rettilineo BGI, o sferico BDA.

(3) 21. Cor. 9.

 Dun-

Dunque così è il raggio al seno dell'angolo, come il seno della base B D al seno del lato opposto B A, cioè come B G. B I. Ciocchè ec.

CANONE II.

LXXXVI. Il raggio è al co-seno dell'angolo, come la tangente della base alla tangente del lato adjacente.

DIMOSTRAZIONE.

Preso il lato C G per raggio ne' triangoli rettangoli C G B, C G I, sarà G B la tangente dell'angolo B C G, e G I la tangente dell'angolo I C G (3); ma per una parte la retta G B rappresenta ancora la tangente dell' arco, o base B D; e la retta G I rappresenta la tangente dell' arco, o lato D A adjacente all' angolo D: per l'altra parte nel △ B I G la retta G B si può prendere come raggio, e G I come co-seno dell' angolo rettilineo B G I, o dello sferico B D A, a cui corrisponde: dunque così è il raggio al coseno dell' angolo, come la tangente della base alla tangente del lato adjacente all' angolo. Ciocchè ec.

(3) 21. Cor. 9.

CANONE III.

LXXXVII. Il raggio è alla tangente dell' angolo, come il seno del lato adjacente è alla tangente del lato opposto.

DIMOSTRAZIONE

Ne' △△ C I B, C I G presa la retta C I per raggio, (3) sarà la retta I G seno dell' an-

(3) 21. Cor. 9.

angolo I C G, o dell' arco, o lato A D adiacente all' angolo D, e la retta I B sarà tangente dell' angolo I C B, o dell' arco, o lato A B opposto al suddetto angolo: ma nel △ B I G la retta I G può rappresentare il raggio. ed in tal caso la retta I B rappresenta la tangente dell' angolo rettilineo B G I, o dello sferico D. Dunque così è il raggio alla tangente dell' angolo, come il seno del lato adiacente al suddetto angolo è alla tangente del lato opposto allo stesso angolo. Ciocchè ec.

CANONE IV.

LXXXVIII. Il raggio è al co-seno di un lato, come il co-seno dell' altro lato è al co-seno della base.

DIMOSTRAZIONE.

Nel △ B P H (4) il raggio B P, cioè il seno dell' arco B P, è al seno dell' angolo B P H, o dell' arco A L opposto, che lo misura, come il seno della base, o arco B P è al seno dell' arco B H opposto al suddetto angolo: ma per una parte nel △ A B D il raggio B D, cioè il seno dell' arco B D è al seno dell' arco B A, ch' è co-seno dell' arco D A complemento di A L, come il seno dell' arco B P è al seno dell' arco B H, giacchè il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj, e D B H = A B P; e per l' altra parte il seno dell' arco PB è co-seno dell' arco B A, ed il seno dell' arco B H è co-seno dell' arco, o base B D, essendo l' un arco complemento dell' altro. Dunque il raggio B G seno dell' arco B D, è al lato B I seno di B A, e co-seno di G I, o A D;

(4) 85. Can. 1. sf.

come il co-seno dell' arco B A seno dell' arco B P è al co-seno della base B D, seno dell' arco B H. Ciocchè ec.

CANONE V.

LXXXIX. Il raggio è al seno dell' angolo adiacente, come il co-seno di un lato è al co-seno dell' angolo opposto.

DIMOSTRAZIONE

(5) 85. Can. 1. sf.

Per lo stesso canone 1°. (5) il raggio B P, cioè il seno dell' arco B P è al seno dell' adiacente angolo P B H = A B D (di cui è misura l'arco A D, ed è seno la retta I G); come il seno dell' arco B P è al seno dell' arco P H: ma il seno dell' arco B P è co-seno dell' arco, o lato A B adiacente all' angolo A B D; e il seno dell' arco P H è co-seno dell' arco H L, o dell' angolo sferico D da esso misurato, ed opposto al lato A B: dunque il raggio, o seno dell' arco B D è al seno dell' angolo adiacente D B A, che è G I, come il co-seno del lato A B, che è il seno dell' arco B P, è al co-seno del lato H L cioè dell' angolo D opposto ad A B, che è il seno dell' arco H P. Ciocchè ec.

CANONE VI.

XC. Il raggio è alla tangente di un angolo come il co-seno della base è alla co-tangente dell' altro angolo.

DIMOSTRAZIONE

Nel △ B P H preso il seno del lato H B per raggio, il seno dell' arco P H sarà tangen-gente, e il seno della base BP sarà segante: dunque per il Canone 3. (6) il raggio è alla tangente dell' angolo B ad essa opposto, come il seno dell' arco BH adiacente all' angolo B è alla tangente HP del suddetto angolo ad essa opposto: ma ancora nel Δ ABD preso il seno dell' arco AB, cioè BI. per raggio, il seno dell' arco AD, cioè IG, sarà tangente dell' angolo B ad essa opposto; ed il seno della base BD, cioè BG, sarà segante. Dunque per lo stesso Can. 3 il raggio BI è alla tangente GI dell' angolo B, come il seno dell' arco BH è alla tangente dell' arco HP. Ma il seno dell' arco BH è co-seno dell' arco, o base BD; e la tangente dell' arco HP è co-tangente dell' arco HL, o dell' altro angolo D da esso misurato. Dunque il raggio BI, cioè il seno dell' arco AB, è a GI tangente dell' angolo B ad essa opposto, cioè al seno dell' arco AD; come il co-seno della base BD è alla co-tangente *dell'* altro angolo D, cioè dell' arco HL, che lo misura. Ciocchè ec.

(6) 87. Can. 3. sf.

ANNOTAZIONE

XCI. Prima d' insegnar l' uso de' suddetti Canoni, darò due regole, onde conoscere, di quale specie siano gli angoli, e gli archi cercati, cioè se esser debbano gli angoli acuti, o ottusi, e gli archi minori, o maggiori di un quadrante. Le due regole indicanti la specie degli angoli, ed archi, qualunque volta questa sia in se determinata, si ricaveranno facilmente dalla Fig. 12.

REGOLA I.

I lati sono della medesima specie cogli angoli opposti.

XCII. Per intelligenza di questa, e della seguente regola si osservi la costruzione della Fig. 12., che ora spiegheremo. Fig. 12.

Rimanendo i punti A, B, P, D, E, come nella Fig. 11., che ancora quì si suppone, per il polo P, e per il punto D si tiri l' arco D P d' un circolo massimo (7), il quale sarà perpendicolare al circolo A D E (8): indi diviso il semicircolo A D E in due parti uguali in I (il qual punto I sarà il polo del circolo A B E (9), giacchè i poli di questo circolo devono stare nel circolo A D E, ed esser distanti per un quadrante dal circolo stesso A B); si tiri l' arco B I quadrante: finalmente si tiri l' arco B d per qualunque punto del semicircolo A D E; purchè il punto d stia rispetto ad I alla parte opposta del punto D; e fatto il polo in B si tiri l' arco F I f, che incontri gli archi B D, B d in F, f; il quale arco F I f sarà circolo massimo, essendo distante del suo polo B per il quadrante B I, e formerà gli archi B F, B f quadranti (7), e gli angoli B I F, B I f retti (9).

(7) 62. Cor. 1. def. 2.
(8) 76 Cor. 8. def. 4.
(9) 67. Cor. 3. def. 3.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Regola.

XCIII. Se il lato A B sia minore del quadrante A P, come è nella Figura, l' angolo A D B misurato da A B sarà sempre minore dell'

dell' angolo retto A D P misurato dal quadrante A P, perchè come l' angolo A D B è parte dell' angolo A D P, così il lato A B è parte di A P. Se poi si faccia il lato A B maggiore del quadrante A P, ancora l' angolo A D B conterrà l' angolo retto A D P, e però sarà maggiore di questo, comunque sia l' altro lato A D: dunque i lati sono della medesima specie cogli angoli opposti. Ciocchè ec.

REGOLA II.

XCIV. Se due angoli, o due lati, o un lato con un' angolo adiacente 1°. saranno della medesima specie, la base sarà minore di un quadrante. 2°. se quelli saranno di diversa specie, la base sarà maggiore di un quadrante. 3°. ed all' opposto se la base sarà minor di un quadrante, quelli sono della medesima specie, e se maggior di un quadrante, quelli sono di specie diversa.

DIMOSTRAZIONE

E primieramente se due lati di un triangolo siano ciascuno minori di un quadrante, come nel △ B A D sono i lati A B, A D; la base B D ancora sarà minore di un quadrante. Infatti essendo A B minore del quadrante A P, ed A D minore del quadrante A I; e però ambedue della medesima specie; ancora la base B D è minore del quadrante B F.

Similmente se due lati di un triangolo siano ciascuno maggiori di un quadrante, e però della medesima specie, come nel △ B E D è il lato BE maggiore del quadrante P E, e il lato D E maggiore del quadrante I E;

an-

ancora la base B D resterà minore del quadrante B F. Così se due angoli, o un lato con un angolo adiacente saranno della medesima specie, cioè o minori ambedue, o maggiori di un quadrante, come nel Δ A B D sono gli angoli acuti B, D; e nel Δ E B D sono gli angoli ottusi B, D; dovendo i lati opposti esser della medesima specie con quegli angoli (1), parimente la base B D sarà sempre minore del quadrante B F.

(1) 93. Reg. 1.

2°. Se due lati saranno di diversa specie, come è nel Δ B A d il lato B A minore del quadrante A P, e il lato A d maggiore del quadrante A I: o se due angoli, o un lato con un angolo adiacente siano di diversa specie, come sono nel suddetto Δ B A d gli angoli B d, che (1) devon seguire la specie de' lati opposti A d, A B; la base sarà sempre maggiore di un quadrante, cioè B d sarà maggiore di B F.

3°. All' opposto se la base sia minor di un quadrante, i due lati, e i due angoli alla base saranno della medesima specie; perchè altrimenti (2) se questi fossero di diversa specie, la base dovrebbe esser maggiore di un quadrante. E se la base sia maggior di un quadrante, quelli esser devono di diversa specie; perchè altrimenti (3) se questi fossero della medesima specie, la base esser dovrebbe minore di un quadrante. Dunque ec.

(2) per la 2. parte.

(3) per la 1. parte.

COROLLARIO

XCV Poichè (4) gli angoli sono della medesima specie co' lati opposti, quando trattasi della loro specie, possono gli uni agli altri sostituirsi.

(4) 93. Reg. 1.

PRO-

PROBLEMA X.

In ogni triangolo rettangolo sferico, date due cose, oltre l' angolo retto, trovare il rimanente.

SPIEGAZIONE

XCVI. Per soddisfare al Problema conviene 1°. trovar qualche funzione dell' arco, o angolo cercato. 2°. trovare di quale specie sia l' arco, o angolo cercato. La prima sempre si trova per mezzo di alcuno de' suddetti Canoni, per cui avremo tre termini proporzionali, onde poter trovare il quarto cercato. La seconda sempre si ottiene per mezzo di alcuna delle due regole, fuorchè nel caso, in cui si dia un lato coll' angolo opposto, e si cerchi qualunque dell' altre cose. Questo caso è sempre dubbio, e può avere due soluzioni, perchè qualunque delle altre cose può essere o maggiore, o minore di un quadrante; come ne' △△ BAD, BAF rettangoli in A, dato il lato A B, e l' angolo opposto, essendo il lato A B comune a' due triangoli, e misura costante dell' angolo opposto, e l' angolo D del 1°. triangolo uguale all' angolo F del 2°. triangolo, sempre sarà dubbia cosa, quale di que' due triangoli prender si debba per trovare il rimanente.

XCVII. Sei sono le combinazioni, che aver si possono ne' triangoli rettangoli sferici, e sono le seguenti, a cui soggiungo i Canoni, in cui si contengono, e le regole, per cui mezzo si può trovare la specie degli angoli, e i lati adiacenti alla base; e giacchè la seconda

re-

regola contiene tre parti, si esprimerà ciascuna di esse secondo il bisogno.

1°. La base con ambedue i lati. per il Canone 4., reg. 2. parte 1.

2°. La base con ambedue gli angoli. per il Can. 6., reg. 2. parte 2.

3°. La base con un lato, ed angolo adiacente. per il Can. 2., reg. 2. parte 3.

4°. La base con un lato, e l'angolo opposto. per il Canone 1., reg. 1., o niuna nel caso dubbio.

5°. Ambedue i lati con un'angolo. per il Can. 3., reg. 1., o niuna nel caso dubbio.

6°. Ambedue gli angoli con un lato. per il Can. 5., reg. 1., o niuna nel caso dubbio.

Ciascuna delle suddette combinazioni contiene tre casi, giacchè può cercarsi qualunque di quelle tre cose, date le altre due; e quindi 18. sono i casi del proposto Problema. Ma poichè due casi della prima, e seconda combinazione sono i medesimi, essendo lo stesso caso, qualunque de' due lati si cerchi, data la base, e l'altro lato, come nella prima, e qualunque de' due angoli si cerchi, data la base, e l'altro angolo, come nella seconda; però ogni risoluzione de' triangoli si contiene in 16 casi. Ciascuna delle tre ultime combinazioni contiene un caso dubbio, cioè quando dato un lato, e l'angolo opposto, si cerchi la base, come nella quarta, o si cerchi l'altro lato, come nella quinta, o si cerchi l'altro angolo. come nella sesta, ne' quali casi non abbiamo l'ajuto delle regole, come ho avvisato nel num. prec. Troppo lunga cosa sarebbe il proporre, e scioglie-re tutti i 16. casi; e però uno ne proporrò per esempio, onde ad imitazione di esso gli al-

altri sciogliersi possano da chi vorrà per esercizio.

XCVIII. Sia nel Δ A B D data la base B D, e il lato A D, trovare l'angolo D adiacente.

Rif. Questo caso si contiene nella terza combinazione, e si risolve (5) per il Can. 2. parte 3, della reg. 2. Sia la data base B D = 57°. 25'. Sia il lato A D = 41°. 16'. nel Canone 2. abbiamo = *il raggio essere al coseno dell' angolo, come la tangente della base alla tangente del lato adjacente* =.

(5) 86 Can. 2. Reg. 2.

Dunque il logaritmo del coseno dell' angolo D è uguale al residuo nato dalla sottrazione del terzo termine dalla somma degli estremi, cioè = logaritmo del raggio + logaritmo della tangente del lato di 41°. 16'. — logaritmo della tangente della base di 57°. 25', cioè = 10.00000+9.94323—10.19445 = 9.74878. Ma a questo nelle Tavole corrisponde l'arco di 55°. 54'. dunque ec. Ma nella parte terza della reg. 2. abbiamo, che se la base è minore di un quadrante, ancora il lato coll' angolo adiacente saranno minori di un quadrante: dunque essendo la data B D base di 57°. 25'., e il dato lato A D di 41°. 16'., ancora l'angolo D cercato sarà minore di un quadrante, e però si dovrà prendere 55°. 54'., come lo esibiscono le tavole, e non il complemento di 41°. 16'., giacchè ne' triangoli sferici si verifica necessariamente, che la somma de' tre angoli supera due angoli retti. Dunque saranno trovati tutti tre gli archi, o lati, ed angoli del suddetto triangolo A B D. Ciocchè ec.

XCIX. Per la soluzione de' casi contenuti ti nelle sei suddette combinazioni, si avvertono le cose seguenti, che si ricavano da' sei suddetti Canoni, come ciascuno potrà per se dedurre.

1°. La base nel triangolo rettangolo non può essere distante dal quadrante più che qualsivoglia de' due lati: per il Canone 1°; o 3°; o 4°.

2°. La base rispetto a qualsivoglia angolo adjacente può aver qualunque grandezza: per il Canone 6°.

3°. L'angolo non può essere distante dal quadrante meno del lato opposto: per il Canone 1°; o 3°, o 5°.

4°. Due angoli insieme presi devon' esser maggiori di un retto: per il Canone 5°; o 6°.

5°. L'angolo rispetto al lato adjacente può aver qualunque grandezza: per il Canone 2°.

6°. L'angolo rispetto alla base può aver qualunque grandezza: per il Canone 6°. Quindi si deducono i casi impossibili, ed i possibili a sciogliersi, che si contengono in altre sei combinazioni; e sono

1°. Data la base, e un' altro lato, il caso sarà impossibile, se la base distante sia dal quadrante più che il lato dato: (per il n°. 1.); di cui daremo poi l'esempio

2°. Data la base, e un' altro angolo, il caso sarà sempre possibile: (per il n°. 2.)

3°. Dati due angoli, il caso sarà impossibile, se la loro somma non superi l' angolo retto: (per il n°. 4.)

4°. Dato un' angolo, e il lato opposto, sarà impossibile, se l' angolo sia distante dal quadrante meno del lato opposto: (per il n°. 3.)

5°. Da-

5°. Dato un' angolo, e il lato adjacente, sarà sempre possibile: (per il n°. 3.)

6°. Dati due lati, sarà sempre possibile: (per il n°. 3.)

C. Qualunque volta il caso sarà impossibile, il calcolo trigonometrico lo dimostra. Sia data per es. la base di 57°; ed il lato di 76°; e si cerchi l' angolo opposto a questo lato. Il caso si contiene nella 4. combinazione al n°. 97, e nella prima al num 99. Alla quarta combinazione corrisponde il Can. I., in cui abbiamo, che = *il raggio è al seno dell' angolo, come il seno della base al seno del lato opposto* =: Dunque il seno dell' opposto angolo cercato è uguale al prodotto degli estremi diviso per il terzo termine, cioè il logaritmo del seno dell' angolo opposto cercato = al logaritmo del raggio + logaritmo del seno di 76°, — logaritmo del seno della base di 57°., cioè = 10.00000 + 9.98690 — 9.92359 = 10.06331., il quale è maggiore del logaritmo del raggio, e però di qualsivoglia logaritmo de' seni.

Paragrafo III.

Della Risoluzione de' Triangoli Obliquangoli.

CI. I triangoli obliquangoli si riducono a' rettangoli per un' arco perpendicolare, che dalla cima di un qualunque angolo passando venga al lato opposto, preso per base, come si fa ne' triangoli piani per mezzo di una retta tirata perpendicolare.

Sia il Δ A B D (Fig. 13.): preso per base il lato A D, e prolungati gli archi A B, D B, si compiano i semicircoli A a, D d. Fig. 13.

Per

Per il punto B si tiri il circolo E B e perpendicolare al circolo A D a d, che segherà ne' due punti E, e diametralmente opposti, e il punto del segamento E caderà nel semicircolo A D a; e l'altro punto e nel semicircolo a d A: finalmente si seghino i due semicircoli E A e, E a e ne' punti ı, I in due parti uguali.

Il Δ A B D per il perpendicolo B E si riduce a due triangoli rettangoli A E B, D E B, dove o il perpendicolo cada dentro la base del triangolo, come ivi, o cada fuori di essa, come nel Δ A B d, sempre A E, E D si dicono segmenti della base; A B E, D B E segmenti della cima dell' angolo; ed i segmenti A E, A B E sono adjacenti al lato A B, e all' angolo A, ed opposti al lato B D, e all' angolo D; ed al contrario i segmenti D E, D B E sono opposti a' primi, e adjacenti al lato B D, e all' angolo D.

Ora coll' ajuto de' sei primi Canoni esposti nel precedente Paragrafo ne ricaveremo altri sette spettanti a' suddetti segmenti, lati, ed angoli, e tutto ciò, che diremo del Δ A B D, ha luogo negli altri tre Δ Δ A B d, a B D, a B d, purchè alle lettere majuscole del Δ A B D si sostituiscano le piccole degli altri triangoli.

CANONE VII.

CII. I seni degli angoli sono come i seni de' lati opposti.

DIMOSTRAZIONE

(1) 85. Can. 1. Per il Can. 1. il raggio (1) è al seno dell' angolo A, come il seno del lato A B al se-

ſeno del lato B E: e alternando, il ſeno dell' angolo D è al raggio, come il ſeno B E al ſeno B D: ora in queſte due proporzioni tolti i termini comuni, argomentando per *ugualtà perturbata* (2), ſarà il ſeno dell' angolo D al ſeno dell' angolo A, come il ſeno del lato A B al ſeno del lato B D: cioè (2) 122. Cor. 6. prop. 11.

Il Raggio. ſeno A:: ſeno A B. ſeno BE.

Il Seno D. Raggio:: ſeno BE. ſeno BD.

Dunque tolti i termini comuni,

Il ſeno D. ſeno A:: ſeno A B. ſeno BD.

Dunque nel △ A B D i ſeni degli angoli ſono come i ſeni de' lati oppoſti. Ciocchè ec.

CANONE VIII.

CIII. I co-ſeni de' ſegmenti della cima ſono come le tangenti de' lati oppoſti.

DIMOSTRAZIONE.

Per il Can. 2. (3). Il raggio è al co-ſeno dell' angolo A B E, come la tangente del lato A B alla tangente del lato B E: ed alternando il co-ſeno dell' angolo D B E è al raggio, come la tangente del lato B E alla tangente del lato B D: Dunque argomentando per *ugualtà perturbata* (4), e tolti i termini comuni, ſarà il co-ſeno dell' angolo D B E al co-ſeno dell' augolo A B E, come la tangente del lato A B alla tangente del lato D B: cioè

(3) 86. Can. 2.

(4) 122. Cor. 6. prop. 11.

Il Raggio. Co-ſeno A B E:: Tangente AB. Tangente B E.

Il Co-ſeno D B E. Raggio:: Tangente BE. Tangente B D. Dunque ſarà

Il Co-ſeno D B E. Co-ſeno A B E:: Tangente A B. Tangente B D. Ciocchè ec.

CANONE IX.

CIV. I seni de' segmenti della base sono come le tangenti degli angoli opposti.

DIMOSTRAZIONE

(5) 87. Can. 3. Per il Can. 3. (5) Il raggio è alla tangente dell' angolo A, come il seno del segmento AE della base al seno del lato BE: ed alternando, la tangente dell' angolo D è al raggio, come il seno del lato BE è al seno del segmento DE della base. Dunque per (6) 122. Cor. 6. prop. 11. *ugualtà perturbata* (6) tolti i termini comuni, sarà la tangente dell' angolo D alla tangente dell' angolo A, come il seno del segmento AE al seno del segmento DE: cioè

Il Raggio. Tang. di A :: seno del seg. AE. seno BE.

La Tang. di D. Raggio :: seno BE. seno del seg. DE. Dunque sarà

La Tang. di D. Tang di A :: seno del seg. AE. seno del seg. DE. Ciocchè ec.

CANONE X.

CV. I Co-seni de' segmenti della base sono come i co-seni de' lati adjacenti.

DIMOSTRAZIONE

(7) 88. Can. 4. Per il Can. 4. (7). Il raggio è al co-seno del lato BE, come il co-seno del segmento AE della base è al co-seno del lato AB e come il co-seno del segmento DE della base è al co-seno del lato DB. Dunque tolta

ta la prima comune ragione, ed alternando, il co-seno del segmento A E sarà al co-seno del segmento DE della base, come il coseno del lato A B è al co-seno del lato D B. Ma A B, D B sono lati adiacenti alla base A D. Dunque ec. cioè Il Raggio. Co-seno B E:: Co-seno del segmento A E. Co-seno A B:: Co-seno del segmento D E. Co-seno D B. Dunque alternando, Co-seno del segmento A E. Co-seno del segmento D E:: Co-seno A B. Co-seno D B.

CANONE XI.

CVI. I seni de' segmenti della cima sono come i co-seni degli angoli adiacenti.

DIMOSTRAZIONE

Per il Canone 5, (8) alternando, il raggio è al co-seno del lato B E, come il seno dell' angolo A B E, segmento della cima, è al co-seno dell' angolo A; e come il seno dell' angolo D B E, segmento della cima, è al co-seno dell' angolo D. Dunque alternando, tolta la prima ragione comune, il seno dell' angolo A B E è al seno dell' angolo D B E, come il co-seno dell' angolo A è al co-seno dell' angolo D; cioè

(8) 89. Can. 5.

Il Raggio. Co-seno B E:: seno A B E. Co-seno A:: seno D B E. Co-seno D. Dunque è alternando; il seno ABE. seno DBE:: Co-seno A. Co-seno D. Ciocchè ec.

ANNOTAZIONE.

CVII. In questi cinque nuovi Canoni,

si hanno altre cinque combinazioni de' lati, degli angoli, e de' segmenti sì della base, che della cima, a ciascuna delle quali corrisponde un Canone per la soluzione: cioè

7. I lati, e gli angoli fra loro. per il Canone 7.

8. I lati, e i segmenti della cima. per il Can. 8.

9. I lati, e i segmenti della base. per il Canone 10.

10. Gli angoli, e i segmenti della cima. per il Can. 11.

11 Gli angoli, e i segmenti della base. per il Can. 9.

Quindi poi altri due Canoni si deducono, d'onde in due casi si ritrovano gli stessi segmenti.

CANONE XII.

CVIII. La Co-tangente della semisomma de' segmenti della base, o sia la co-tangente della metà della base è alla tangente della semidifferenza, come la co-tangente della semisomma de' lati è alla tangente della lor semidifferenza.

DIMOSTRAZIONE

Si prendano le somme, e differenze de' termini, come nella Fig 3. Per il Canone 10. (9) i co seni de' segmenti della base sono fra loro, come i co-seni de' lati adiacenti: dunque la somma de' co seni de' segmenti della base sarà alla lor differenza, come la somma de' co-seni de' lati adiacenti è alla lor differenza: ma per il Teorema Generale (1) la somma

(9) 105. Can. 10.

(1) 23. Teor. parte 2.

ma

ma de' co-seni è alla differenza, come co-tangente della semisomma alla tangente della semidifferenza: dunque la co-tangente della semisomma de' segmenti della base, cioè la cotangente della metà della base è alla tangente della semidifferenza, come la cotangente della semisomma de' lati alla tangente della loro semidifferenza.

CANONE XIII.

CIX. La tangente della semisomma de' segmenti della cima, cioè la tangente della metà dell' angolo verticale è alla tangente della semidifferenza, come la co-tangente della semisomma degli altri due angoli è alla tangente della semidifferenza.

DIMOSTRAZIONE

Per il Can. 11. (2) I seni de' segmenti della cima sono fra loro, come i co-seni degli angoli adiacenti alla base: dunque la somma de' seni de' segmenti sarà alla lor differenza, come la somma de' co-seni degli angoli adiacenti è alla lor differenza. Ma per il Teorema Generale (3), la somma de' seni è alla differenza, come la tangente della semisomma de' loro archi è alla tangente della semidifferenza E (4) la somma de' co-seni è alla differenza, come la co-tangente della semisomma è alla tangente della semidifferenza. Dunque è vero il Can. Ciocchè ec.

(2) 106. Can. 11.

(3) 23. Teor. parte 1.

(4) 23 Teor. parte 2.

REGOLA III.

CX. Se i due angoli alla base saranno

della medesima specie, il perpendicolo cadrà dentro la base: e se quelli saranno di diversa specie, questo cadrà fuor della base.

DIMOSTRAZIONE

Della I. Parte.

(5) 93 Reg. 1. Per la prima Regola (5) i lati sono della medesima specie cogli angoli opposti: dunque gli angoli B A E, B D E sono della medesima specie coll'arco B E: dunque ancora gli angoli B A D, B D A sono della medesima specie: ma nel △ A B D il punto E, dove cade il perpendicolo B E, giace dentro la base A D. Dunque ec. Ciocchè ec.

DIMOSTRAZIONE

Della II. Parte.

Per la stessa prima Regola (5), Nel △ A B d nè i lati B d, B A, nè gli angoli B d A, B A d sono della medesima specie: ma il punto E, ovvero e, dove cade il perpendicolo, è fuori della base A d: dunque se gli angoli alla base sono di diversa specie, il perpendicolo cade fuori della base. Ciocchè ec.

PROBLEMA XI.

In ogni sferico triangolo obliquangolo, date tre cose, trovate il rimanente.

CXI. Caso 1° Siano dati due lati coll'angolo fra essi compreso. Due cose cercar si possono; 1°. il terzo lato; 2°. l'angolo opposto a qualsivoglia dato lato.

Rif.

Rif. della 1. parte. Sia A l' angolo dato compreso, ed AB, AD i dati lati nel Δ ABD, e si cerchi il lato BD Preso il perpendicolo BE, nel Δ AEB abbiamo per base il dato lato AB, e l' angolo A, e si cerca il lato AE (6) per la combinazione 3. Can. 2. (7) facendo, così è il raggio al coseno dell' angolo, come la tangente della base alla tangente del lato adjacente. Se quindi risulta il lato AE = AD, il punto E passerebbe in D, ed il triangolo sarebbe rettangolo in D. Se AE è minore di AD, il perpendicolo cade dentro la base AD. Se AE è maggiore di AD, il perpendicolo cade fuori. Così trovato il segmento coll' ajuto ancora della parte 3 della reg. 2. (8); per cui data la base AB si trova la specie dell' angolo A, e del lato adjacente AD, sarà trovato l' altro segmento ED, giacchè AD si suppone dato. Ora da' segmenti AE, ED, e dal lato AB già noti si dedurrà (9) per la combinazione 9. e Can. 10. il co-seno BD; perchè così è il co-seno del segmento AE al co-seno del segmento DE, come il co-seno del lato AB al co-seno del lato BD. Finalmente dal dato angolo A si conosce la specie del lato BE (1): e dalla specie de' lati BE, ED si conosce la specie del lato BD (8). Ciocchè ec.

(6) 97. prob. 10.
(7) 86. Can. 2.
(8) 94. Reg. 2.
(9) 107 ann. Can. 11. 105. Can. 10.
(1) 93. Reg. 1.

Rif. della 2. parte. Si cerca l' angolo D opposto al dato lato AB. Si prende per base il dato lato AD adjacente all' angolo D. Trovati i segmenti AE, ED, come sopra, da questi, e dal dato angolo A (2) per la combinazione 11; e Can. 9; si trova la tangente dell' angolo D, facendo, come è il seno del segmento AE al seno del segmento

(2) 107. ann. Can. 11. 104. Can. 9.

DE, così è la tangente dell' angolo A alla tangente dell' angolo D. Si osservi, che se AE è minore di AD, gli angoli D, A sono della stessa specie; se AE è maggiore di
(3) 110. Reg. 3. AD, quelli sono di diversa specie (3). Ciocchè ec.

CXII. Caso 2°. Siano dati i lati AB, BD coll' angolo A opposto a BD. Tre cose cercar si possono: 1°. il lato AD; 2°. l' angolo ABD compreso; 3°. l' angolo D opposto al lato AB.

Rif. della 1. parte. AD sia la base: si trova il segmento AE, come nel 1°. caso, e la specie del lato BE dal dato angolo A
(4) 93. Reg. 1. (4) per la regola 1'. indi dai dati lati AB,
(5) 107. ann. Can. 11. 105. Can. 10. BD, e dal segmento AE trovato (5) per la combinazione 9; e Can. 10 si trova il co-seno del lato ED, facendo, come è il co-seno del lato AB al co-seno del lato BD, così è il co-seno del segmento AE al co-seno del segmento ED Finalmente dalla specie de' lati BE, BD si trova la specie di ED per
(6) 94. Reg. 2. la regola 2. (6).

Si osservi, che siccome il caso è capace di due soluzioni, secondo che il perpendicolo cade dentro, o fuori della base; così da E preso ED da una parte, ed EA dall' altra, e sottratto quello da questo si ha la prima soluzione, ed aggiunto quello a questo, si ha l' altra soluzione. Se mai AD dalla sottrazione diventi quantità negativa per essere AE minore di ED, o se per l' aggiunta AD diventi maggiore di un semicircolo, si rigetti quella soluzione.

Rif. della 2. parte Si cerchi l' angolo ABD compreso. Dal dato lato AB, ed angolo A si cerca il segmento della cima AB

E (7) per la combinazione 2; e Can. 6; facendo, come è il raggio alla tangente dell' angolo A, così è il co-ſeno della baſe A B alla co-tangente dell' angolo A B E. Indi da' dati lati A B, B D, e dal ſegmento della cima A B E ſi trova il co-ſeno dell' angolo E B D (8) per la combinazione 8; e Can. 8; facendo, così è la tangente B D alla tangente A B, come il co-ſeno di A B E al co-ſeno di E B D. Finalmente dal dato lato B D, e dalla ſpecie del lato B E trovata, come ſopra, ſi trova la ſpecie della baſe, e però ancor dell' angolo D B E per la regola 2. (6). Si oſſervi, come ſopra, che ſottraendo E B D da E B A ſi ha la prima ſoluzione, aggiugnendo quello a queſto ſi ha l' altra. Se l' angolo A B D dalla ſottrazione diventi negativo, o dall' aggiunta diventi maggior di due retti, ſi rigetti la ſoluzione.

(7) 97. prob. 10. 90. Can. 6.

(8) 107. ann. Can. 11. 103. Can. 8.

Riſ. della terza parte ſi cerchi l' angolo D oppoſto al lato AB. Dai dati lati AB, BD, e dall' angolo A ſi trova il ſeno dell' angolo D (9) per la combinazione 7., e Canone 7., facendo, come il ſeno del lato B D è al ſeno del lato A B, così il raggio al ſeno dell' angolo D. La ſpecie dell' angolo D nella ſeconda ſoluzione ſarà la ſteſſa, che quella dell' angolo A; e nella prima ſoluzione ſarà diverſa per la regola 3. (1).

(9) 107. ann. Can. 11. 108. Can. 7.

(1) 110. Reg. 3.

CXIII. Caſo 3°. Siano dati gli angoli A, B col lato fra eſſi compreſo A B: due coſe cercar ſi poſſono; 1°. il lato B D; 2°. l' angolo D.

Riſ. della 1. parte. Sia il lato A D la baſe: ſi cerchi l' angolo A B E, come nella 2. parte del caſo 2°., ſi avrà ancora l' angolo E B D per eſſere A B D angolo dato. Da que-

questi due segmenti della cima, e dal lato
(2) 107. ann. Can. 11. 103. Can. 8. AB si trova la tangente del lato BD (2) per la combinazione 8., e Can. 8.; facendo, come il co-seno di DBE è al co-seno di ABE, così la tangente di AB alla tangente di BD. Finalmente dalla specie dell' angolo A
(3) 93. Reg. 1 si ha la specie di BE per la regola 1 (3); e dalla specie di BE, e dall' angolo EBD si
(4) 94. Reg. 2. ha la specie di BD per la regola 2. (4).

Ris. della 2. parte. Sia la base AD: e si cerchino i segmenti della cima, come sopra. Da questi, e dall' angolo A si trova il co-se-
(5) 107. ann. Can. 11. 106. Can. 11. no dell' angolo D (5) per la combinazione 10., e Can. 11., facendo, come il seno di ABE è al seno di DBE, così il co-seno di A è al co-seno di D. Questo angolo sarà della stessa specie, che l' angolo A, se l' angolo ABE sarà minore di ABD; altrimenti
(6) 110. Reg. 3. sarà di specie diversa (6) per la regola 3.

CXIV. Caso 4°. Siano dati gli angoli A, D col lato AB. Tre cose si possono cercare; 1°. il lato AD compreso; 2°. l' angolo ABD; 3°. il lato BD.

Ris. della 1. parte. Sia lo stesso lato AD la base. Dal dato lato AB, ed angolo A si cerchi il lato AE, come nella 1 parte del caso 1°. Indi dagli angoli A, D, e dal segmento della base AE si trovi il seno dell'
(7) 107. ann. Can. 11. 104. Can. 9. altro segmento ED (7) per la combinazione 11., e Can. 9, facendo, così la tangente dell' angolo D è alla tangente dell' angolo A, come il seno del segmento AE al seno del segmento ED. La specie di ED sarà indeterminata: Si aggiunga ED ad AE, se gli angoli A, D sono della stessa specie; ma se sono di diversa specie sottraggasi ED da EA, e si avranno le due basi AD Ad per le due soluzioni: ma se AD

per

per l'aggiunta non ſarà minore di un ſemicircolo, o per la ſottrazione non rimarrà poſitiva, ſi rigetti quella ſoluzione.

Riſ. della 2. parte. Si cerchi l'angolo A B D compreſo. Dal dato lato A B, ed ango-A ſi trova il ſegmento della cima A B E (8) per la combinazione 2., e Can. 6., facendo, come il raggio è alla tangente dell'angolo A, così il co-ſeno della baſe A B alla co-tangente di A B E. Dai tre angoli A, D, D B E. ſi trova il ſeno E B D (9) per la combinazione 10.; e Can. 11., facendo, come il co-ſeno di A è al co-ſeno di D, così il ſeno di A B E è al ſeno di D B E. Si oſſervi, che quì pure l'angolo E B D ſarà di ſpecie indeterminata; ſe gli angoli A, D ſaranno della ſteſſa ſpecie, ſi aggiunga all'angolo A B E; ſe poi quelli ſiano di ſpecie diverſa, ſi ſottragga per la regola 3 (1). Se dalla ſottrazione A B D diventi quantità negativa, o per l'aggiunta diventi maggiore di due retti, quella ſoluzione ſi rigetti.

Riſ. della 3. parte. Si cerchi il lato B D. Dai dati angoli A, D, e dal lato A B ſi trova il ſeno di B D (2) per la combinazione 7., e Can. 7., facendo, come il ſeno. D è al ſeno A, così il ſeno di A B è al ſeno di B D: ma l'arco B D ſarà di ſpecie dubbia. Se inoltre ſia data la di lui ſpecie; da eſſa, e dalla ſpecie di B E, più volte trovata, ſi determinerà la ſpecie di D E, e dell'angolo E B D per la regola 2. (3). Ciocchè ec.

CXV. Caſo 5° Siano dati i tre lati, e ſi cerchi l'angolo, A.

Riſ. Si faccia baſe uno de' lati adiacenti ad A, per eſempio AD. Dai dati lati AB, BD, e dalla metà della baſe A D ſi trova la tan-

gen-

(8) 97. prob. 10. 90. Can. 6.

(9) 107. an. Can. 11. 106. Can. 11.

(1) 110. Reg. 3.

(2) 107. an. Can. 11. 102. Can. 7.

(3) 94. Reg. 2.

gente della ſemidifferenza de' ſegmenti AE, E D, che ſi prenderà non maggiore di un quadrante (4) per il Can 12., facendo, come la co-tangente della ſemiſomma de' lati è alla tangente della lor ſemidifferenza, così la cotangente della metà della baſe è alla tangente della ſemidifferenza de' ſegmenti. Queſta ſemidifferenza aggiunta alla metà della baſe, cioè alla ſemiſomma de' ſegmenti darà il ſegmento maggiore, e ſottratta darà il minore, (5): e quindi ſi avranno i ſegmenti A E, DE: ma per AE ſi prenda quello, ch'è più, o meno diſtante dal quadrante, ſecondo che il lato adiacente AB è più, o meno diſtante dal quadrante, di quel che ſia il lato BD; giacchè (6) per il Can. 10. i co-ſeni de' ſegmenti ſono come i co-ſeni de' lati adiacenti, ed il co-ſeno dell'arco più vicino al quadrante ſia il minore. Da' lati AB, AE nel △ ABE ſi trova l'angolo BAE (7) per la combinazione 3., Can 2., facendo, come la tangente della baſe è alla tangente del lato adiacente, così il raggio è al co-ſeno dell'angolo. Ma ſe AE ſarà il ſegmento trovato per la ſottrazione della ſemidifferenza, e riuſcirà negativo, cadendo il perpendicolo BE fuori della baſe di là da A, allora l'angolo cercato BAD non ſarà lo ſteſſo di BAE, ma bensì il ſuo complemento a' due retti. Ciocchè ec

(4) 108. Can. 12.

(5) 22. lem. gen.

(6) 105. Can. 10.

(7) 97. prob. 10. 86. Can. 2.

CXVI Caſo 6. Siano dati tre angoli: e ſi cerchi qualunque lato, per eſempio AB.

Riſ. Sia baſe un lato degli altri due per eſempio A D. Dagli angoli dati A, D, e dalla metà dell' angolo ABD ſi trova la tangente della ſemidifferenza de' ſegmenti della cima ABE, DBE, che ſi prende non

mag-

maggiore di un quadrante (8); facendo, come la co-tangente della semisomma de' due angoli è alla tangente della loro semidifferenza, così la tangente della semisomma dell' angolo verticale è alla tangente della semidifferenza. Questa si aggiunga alla semisomma dell' angolo A B D, e si ha il segmento maggiore; si sottragga, e si ha il segmento minore (9). Si prenda per il segmento A B E adjacente ad A quello, che più, o meno è distante dall' angolo retto, secondo che al contrario l' angolo A si accosti più, o meno al retto che non l' angolo D; giacchè (1) per il Can. 11., i seni de' segmenti della cima sono come i co-seni degli angoli adjacenti, ed il seno dell' arco più vicino al quadrante è maggiore, ed il co-seno minore. Dagli angoli A, A B E si trova il lato A B. (2) per la combinazione 2, Can. 6., facendo, come la tangente di A è al raggio, così la co-tangente di A B E è al co-seno della base A B. Ma se A B E siasi trovato per la sottrazione, e riesca negativo, cadendo il punto E di là da A, l' angolo B A E sarà dalla parte contraria, e di specie diversa dell' angolo B A D già dato. Ciocchè &c.

(8) 109. Can. 13.

(9) 22. lem. gen.

(1) 106. Can. 11.

(2) 97. prob. 10. 90. Can. 6.

ANNOTAZIONE I.

CXVII. Se il Δ A B D fosse isoscele, e gli angoli A, D, e i lati A B, B D uguali, allora il perpendicolo B E dividerebbe per metà sì l' angolo A B D, come l' arco A D, e però la soluzione sarebbe più breve; perchè nel Δ rettangolo A E B dalla data base A B, e dal lato B E si trova il co-seno del lato A E (3) per il Can. 4., facen-

(3) 88. Can. 4.

cendo, così il co-seno di B E è al raggio come il co-seno della base A B al co-seno del lato A E. Si trova ancora il co-seno dell' an-
(4) 86. Can. 2. golo A B E (4) per il Can. 2., facendo, così la tangente della base A B è alla tangente dell' lato adjacente A E, come il raggio al co-seno dell' angolo A B E. E dal lato A B, e dall' angolo A si conosce la specie del-
(5) 110. Reg. 3. la base A D (5) per la regola 3., e la spe-
(6) 93. Reg. 1. cie di B E (6) per la regola 1. La stessa dimostrazione vale per il $\triangle$ D B E

ANNOTAZIONE II.

CXVIII. Per maggior facilità propongo quì tutti i Canoni, le regole, e combinazioni.

Per i Triangoli Rettangoli Sferici.

CANONI

1°. Il raggio al seno dell' angolo, come il seno della base al seno del lato opposto.

2°. Il raggio al co-seno dell' angolo, come la tangente della base alla tangente del lato adjacente.

3°. Il raggio alla tangente dell' angolo, come il seno del lato adjacente alla tangente del lato opposto.

4°. Il raggio al co-seno di un lato, come il co-seno dell' altro lato al co-seno della base.

5°. Il raggio al seno dell' angolo adjacente, come il co-seno di un lato al co-seno dell' angolo opposto.

6°. Il raggio alla tangente di un' ango-

lo

lo, come il co-ſeno della baſe alla cotangente dell' altro angolo.

Reg. 1. I lati ſono della medeſima ſpecie cogli angoli oppoſti.

Reg. 2. Se due lati, o due angoli, o un lato con un' angolo adjacente 1°. ſiano della ſteſſa ſpecie, la baſe è minore di un quadrante. 2°. Se quelli ſiano di diverſa ſpecie, la baſe è maggiore di un quadrante 3°. Se la baſe è minore di un quadrante, quelli ſono della ſteſſa ſpecie; e s' è maggiore di un quadrante, quelli ſono di ſpecie diverſa.

COMBINAZIONI

1°. La baſe con ambedue i lati. Can. 4. Reg. 2. parte 1.

2°. La baſe con ambedue gli angoli. Can. 6. Reg. 2, parte 2.

3°. La baſe con un lato, ed angolo adjacente. Can. 2 Reg. 2. parte 3.

4°. La baſe con un lato, e l' angolo oppoſto. Canone 1. Reg. 1.) o niuna in caſo dubbio,

5°. Ambedue i lati con un' angolo. Can. 3. Reg. 1.)

6°. Ambedue gli angoli con un lato. Can. 5. Reg. 1.)

Per i Triangoli Obliquangoli sferici.

CANONI

7°. I ſeni degli angoli ſono come i ſeni de' lati oppoſti.

8°. I Co-ſeni de' ſegmenti della cima ſono come le Tangenti de' lati oppoſti.

9°. I

9°. I ſeni de' ſegmenti della baſe ſono come le Tangenti degli angoli oppoſti.

10°. I co-ſeni de' ſegmenti della baſe ſono come i co-ſeni de' lati adiacenti.

11°. I ſeni de' ſegmenti della cima ſono come i co-ſeni degli angoli adjacenti.

COMBINAZIONI

7°. I lati, e gli angoli fra loro. Can. 7.

8°. I lati, e i ſegmenti della cima. Can. 8.

9°. I lati, e i ſegmenti della baſe. Canone 10.

10°. Gli angoli, e i ſegmenti della cima. Can. 11.

11°. Gli angoli, e i ſegmenti della baſe. Can. 9.

Reg. 3. Se i due angoli alla baſe ſiano della ſteſſa ſpecie, il perpendicolo cade dentro la baſe; e ſe quelli ſiano di ſpecie diverſa, queſto cade fuori della baſe.

Per trovare i ſegmenti nel caſo de' lati, o degli angoli dati.

CANONI.

12°. La co-tangente della metà della baſe alla tangente della ſemidifferenza, come la co-tangente della ſemiſomma de' lati alla tangeete della loro ſemidifferenza.

13°. La tangente della metà dell' angolo verticale alla tangente della ſemidifferenza, come la co-tangente della ſemiſomma degli altri due angoli alla tangente della loro ſemidifferenza.

TA-

TAVOLA I.

Gr.	Seni	Tangen.	Segan.	Log. Seni	Log. Tang.
0	0	0	100000. 00	— Infin.	— Infin.
1	1745. 24	1745. 51	100015. 23	8. 2418553	8. 2419215
2	3489. 95	3492. 08	100060. 95	8. 5428192	8. 5430838
3	5233. 60	5240. 78	100137. 23	8. 7188002	8. 7193958
4	6975. 65	6992. 68	100244. 19	8. 8435845	8. 8446437
5	8715. 57	8748. 87	100381. 98	8. 9402960	8. 9419518
6	10452. 85	10510. 42	100550. 82	9. 0192346	9. 0216202
7	12186. 93	12278. 46	100750. 99	9. 0858945	9. 0891438
8	13917. 31	14054. 08	100982. 76	9. 1435553	9. 1478025
9	15643. 45	15838. 44	101246. 51	9. 1943324	9. 1997125
10	17364. 82	17632. 70	101542. 67	9. 2396702	9. 2463188
11	19080. 90	19438. 03	101871. 68	9. 2805988	9. 2886523
12	20791. 17	21255. 65	102234. 07	9. 3178789	9. 3274745
13	22495. 11	23086. 82	102630. 39	9. 3520880	9. 3633641
14	24192. 19	24932. 80	103061. 35	9. 3835752	9. 3967711
15	25881. 90	26794. 92	103527. 62	9. 4129962	9. 4280525
16	27563. 74	28674. 54	104029. 94	9. 4403381	9. 4574964
17	29237. 17	30573. 07	104569. 18	9. 4659353	9. 4853390
18	30901. 70	32491. 97	105146. 22	9. 4899824	9. 5117760
19	32556. 82	34432. 76	105762. 07	9. 5126419	9. 5369719
20	34202. 02	30397. 02	106417. 78	9. 5340517	9. 5610659
21	35836. 79	38386. 40	107114. 50	9. 5543292	9. 5841774
22	37460. 66	40402. 62	107853. 47	9. 5735754	9. 6064096
23	39073. 11	42447. 49	108636. 04	9. 5918780	9. 6278519
24	40673. 66	44522. 87	109463. 63	9. 6093133	9. 6485831
25	42261. 83	46630. 77	110337. 79	9. 6259483	9. 6686725
26	43837. 12	48773. 26	111260. 19	9. 6418420	9. 6881818
27	45399. 05	50952. 54	112232. 62	9. 6570468	9. 7071659
28	46947. 16	53170. 94	113257. 01	9. 6716093	9. 7256744
29	48480. 96	55430. 90	114335. 41	9. 6855712	9. 7437520
30	50000. 00	57735. 03	115470. 05	9. 6989700	9. 7614394

TAVOLA I.

Gr.	Seni	Tangen	Segan.	Log. Seni	Log. Tang.
90	100000. 00	Infin.	Infin.	10. 0000000	Infin.
89	99984. 77	5728996. 16	5729868. 85	9. 9999338	11. 7580785
88	99939. 08	2863625. 33	2865370. 83	9. 9997354	11. 4569162
87	99862. 95	1908113. 67	1910732. 26	9. 9994044	11. 2806042
86	99756. 40	1430066. 63	1433558. 70	9. 9989408	11. 1553563
85	99619. 47	1143005. 23	1147371. 32	9. 9983442	11. 0580482
84	99452. 18	951436. 45	956677. 22	9. 9976143	10. 9783798
83	99254. 62	814434. 64	820550. 90	9. 9967507	10. 9108562
82	99026. 80	711536. 97	718529. 65	9. 9957528	10. 8521975
81	98768. 83	631375. 15	639245. 32	9. 9946199	10. 8002875
80	98480. 77	567128. 18	575877. 05	9. 9933515	10. 7535812
79	98162. 71	514455. 40	524084. 31	9. 9919466	10. 7113477
78	97814. 76	470463. 01	480973. 43	9. 9904044	10. 6725255
77	97437. 01	433147. 59	444541. 15	9. 9887239	10. 6366359
76	97029. 57	401078. 09	413356. 55	9. 9869041	10. 6032289
75	96592. 58	373205. 08	386370. 33	9. 9849438	10. 5719475
74	96126. 17	348741. 44	362795. 53	9. 9828416	10. 5425036
73	95630. 48	327085. 26	342030. 36	9. 9805963	10. 5146610
7	95105. 65	307768. 35	323606. 80	9. 9782063	10. 4882240
71	94551. 85	290421. 09	307155. 35	9. 9756701	10. 4630281
70	93969. 26	274747. 74	292380. 44	9. 9729858	10. 4389341
69	93358. 04	260508. 91	279042. 81	9. 9701517	10. 4158226
68	92718. 39	247508. 69	266946. 72	9. 9671659	10. 3935904
67	92050. 49	235585. 24	215930. 47	9. 9640261	10. 3721481
66	91354. 54	224603. 68	245859. 33	9. 9607302	10. 3514169
65	90630. 78	214450. 69	236620. 16	9. 9572757	10. 3313275
64	89879. 40	205030. 38	228117. 20	9. 9536602	10. 3118182
63	89100. 65	196261. 05	220268. 93	9. 9498809	10. 2928341
62	88294. 76	188072. 65	213005. 45	9. 9459349	10. 2743256
61	87461. 97	180404. 78	206266. 53	9. 9418193	10. 2562480
60	86602. 54	173205. 08	200000. 00	9. 9375306	10. 2385606

TAVOLA I.

Gr.	Seni	Tangen.	Segan.	Log. Seni	Log. Tang.
31	51503. 81	60086. 06	116663. 34	9. 7118393	9. 7787737
32	52991. 93	62486. 94	117917. 84	9. 7242097	9. 7957892
33	54463. 90	64940. 76	119236. 33	9. 7361088	9. 8125174
34	55919. 29	67450. 85	120621. 80	9. 7475617	9. 8289874
35	57357. 64	70020. 75	122077. 46	9. 7585913	9. 8452268
36	58778. 53	72654. 26	123606. 80	9. 7692187	9. 8612610
37	60181. 50	75355. 40	125213. 57	9. 7794630	9. 8771144
38	61566. 15	78128. 56	126901. 82	9. 7893420	9. 8928098
39	62932. 04	80978. 40	128675. 96	9. 7988718	9. 9083692
40	64278. 76	83909. 96	130540. 73	9. 8080675	9. 9238135
41	65605. 90	86928. 68	131501. 30	9. 8169429	9. 9391631
42	66913. 06	90040. 41	134563. 27	9. 8255109	9. 9544374
43	68199. 84	93251. 51	1367[illegible]2. 75	9. 8337833	9. 9696559
44	69465. 84	96568. 88	139016. 36	9. 8417713	9. 9848372
45	70710. 68	100000. 00	141421. 36	9. 8494850	10. 0000000

TAVOLA I.

Gr.	Seni	Tangen.	Segan.	Log Seni	Log. Tang.
59	85716.73	166427.95	194160.40	9.9330656	10.2212263
58	84804.81	160033.45	188707.99	9.9284205	10.2042108
57	83807.06	153986.50	183607.84	9.9235914	10.1874826
56	82903.76	148256.10	178829.10	9.9185742	10.1710126
55	81915.21	142814.80	174344.68	9.9133045	10.1547732
54	80901.70	137638.19	170130.16	9.9079576	10.1387390
53	79863.55	132704.48	166164.01	9.9023486	10.1228856
52	78801.08	127994.16	162426.92	9.8965321	10.1071902
51	77714.60	123489.72	158901.57	9.8905026	10.0918308
50	76604.44	119175.36	155572.38	9.884254[illegible]	19.0791565
49	75470.96	115036.84	152425.31	9.8777799	10.0608359
48	74314.48	111061.25	149447.65	9.8710735	10.0455026
47	73135.37	107236.87	146027.92	9.8641275	10.0303441
46	71933.98	103553.03	143955.65	9.8569341	10.0151028
45	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000000

TAVOLA II.

N.	Log	N	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	0. 000000	41	1. 612784	81	1. 908485	121	2. 082785	161	2. 206826
2	0. 301030	42	1. 623249	82	1. 913814	122	2. 086360	162	2. 209515
3	0. 477121	43	1. 633468	83	1. 919078	123	2. 089905	163	2. 212188
4	0. 602060	44	1. 643453	84	1. 924279	124	2. 093422	164	2. 214844
5	0. 698970	45	1. 653213	85	1. 929419	125	2. 096910	165	2. 217484
6	0. 778151	46	1. 662758	86	1. 934498	126	2. 100371	166	2. 220108
7	0. 845098	47	1. 672098	87	1. 939519	127	2. 103804	167	2. 222716
8	0. 903090	48	1. 681241	88	1. 944483	128	2. 107210	168	2. 225309
9	0. 954243	49	1. 690196	89	1. 949390	129	2. 110590	169	2. 227887
10	1. 000000	50	1. 698970	90	1. 954243	130	2. 113943	170	2. 230449
11	1. 041393	51	1. 707570	91	1. 959041	131	2. 117271	171	2. 232996
12	1. 079181	52	1. 716003	92	1. 963788	132	2. 120574	172	2. 235528
13	1. 113943	53	1. 724276	93	1. 968483	133	2. 123852	173	2. 238046
14	1. 146128	54	1. 732394	94	1. 973128	134	2. 127105	174	2. 240549
15	1. 176091	55	1. 740363	95	1. 977724	135	2. 130334	175	2. 243038
16	1. 204120	56	1. 748188	96	1. 982271	136	2. 133539	176	2. 245513
17	1. 230449	57	1. 755875	97	1. 986772	137	2. 136721	177	2. 247973
18	1. 255273	58	1. 763428	98	1. 991226	138	2. 139879	178	2. 250420
19	1. 278754	59	1. 770852	99	1. 995635	139	2. 143015	179	2. 252853
20	1. 301030	60	1. 778151	100	2. 000000	140	2. 146128	180	2. 255273
21	1. 322219	61	1. 785330	101	2. 004321	141	2. 149219	181	2. 257679
22	1. 342423	62	1. 792392	102	2. 008600	142	2. 152288	182	2. 260071
23	1. 361728	63	1. 799341	103	2. 012837	143	2. 155336	183	2. 262451
24	1. 380211	64	1. 806180	104	2. 017033	144	2. 158362	184	2. 264818
25	1. 397940	65	1. 812913	105	2. 021189	145	2. 161368	185	2. 267172
26	1. 414973	66	1. 819544	106	2. 025306	146	2. 164353	186	2. 269513
27	1. 431364	67	1. 826075	107	2. 029384	147	2. 167317	187	2. 271842
28	1. 447158	68	1. 832509	108	2. 033424	148	2. 170262	188	2. 274158
29	1. 462398	69	1. 838849	109	2. 037426	149	2. 173186	189	2. 276462
30	1. 477121	70	1. 845098	110	2. 041393	150	2. 176091	190	2. 278754
31	1. 491362	71	1. 851258	111	2. 045323	151	2. 178977	191	2. 281033
32	1. 505150	72	1. 857332	112	2. 049218	152	2. 181844	192	2. 283301
33	1. 518514	73	1. 863323	113	2. 053078	153	2. 184691	193	2. 285557
34	1. 531479	74	1. 869232	114	2. 056905	154	2. 187521	194	2. 287802
35	1. 544068	75	1. 875061	115	2. 060698	155	2. 190332	195	2. 290035
36	1. 556303	76	1. 880814	116	2. 064458	156	2. 193125	196	2. 292256
37	1. 568202	77	1. 886491	117	2. 068186	157	2. 195900	197	2. 294466
38	1. 579784	78	1. 892095	118	2. 071882	158	2. 198657	198	2. 296665
39	1. 591065	79	1. 897627	119	2. 075547	159	2. 201397	199	2. 298853
40	1. 602060	80	1. 903090	120	2. 079181	160	2. 204120	200	2. 301030

TAVOLA II.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
201	2. 303196	241	2. 382017	281	2. 448706	321	2. 506505	361	2. 557507
202	2. 305351	242	2. 383815	282	2. 450249	322	2. 507856	362	2. 558709
203	2. 307496	243	2. 385606	283	2. 451786	323	2. 509203	363	2. 559907
204	2. 309630	244	2. 387390	284	2. 453318	324	2. 510545	364	2. 561101
205	2. 311754	245	2. 389166	285	2. 454845	325	2. 511883	365	2. 562293
206	2. 313867	246	2. 390935	286	2. 456366	326	2. 513218	366	2. 563481
207	2. 315970	247	2. 392697	287	2. 457882	327	2. 514548	367	2. 564666
208	2. 318063	248	2. 394452	288	2. 459392	328	2. 515874	368	2. 565848
209	2. 320146	249	2. 396199	289	2. 460898	329	2. 517196	369	2. 567026
210	2. 322219	250	2. 397940	290	2. 462398	330	2. 518514	370	2. 568202
211	2. 324282	251	2. 399674	291	2. 463893	331	2. 519828	371	2. 569374
212	2. 326336	252	2. 401401	292	2. 465383	332	2. 521138	372	2. 570543
213	2. 328380	253	2. 403121	293	2. 466868	333	2. 522444	373	2. 571709
214	2. 330414	254	2. 404834	294	2. 468347	334	2. 523744	374	2. 572872
215	2. 332438	255	2. 406540	295	2. 469822	335	2. 525045	375	2. 574031
216	2. 334454	256	2. 408240	296	2. 471292	336	2. 526339	376	2. 575188
217	2. 336460	257	2. 409933	297	2. 472756	337	2. 527630	377	2. 576341
218	2. 338456	258	2. 411620	298	2. 474216	338	2. 528917	378	2. 577492
219	2. 340444	259	2. 413300	299	2. 475671	339	2. 530200	379	2. 578639
220	2. 342423	260	2. 414973	300	2. 477121	340	2. 531479	380	2. 579784
221	2. 344392	261	2. 416641	301	2. 478566	341	2. 532754	381	2. 580925
222	2. 346353	262	2. 418301	302	2. 480007	342	2. 534026	382	2. 582063
223	2. 348305	263	2. 419956	303	2. 481443	343	2. 535294	363	2. 583199
224	2. 350248	264	2. 421604	304	2. 482874	344	2. 536558	384	2. 584331
225	2. 352183	265	2. 423246	305	2. 484300	345	2. 537819	385	2. 585461
226	2. 354108	266	2. 424882	306	2. 485721	346	2. 539076	386	2. 586587
227	2. 356026	267	2. 426511	307	2. 487138	347	2. 540329	387	2. 587711
228	2. 357935	268	2. 428135	308	2. 488551	348	2. 541579	388	2. 588832
229	2. 359835	269	2. 429752	309	2. 489958	349	2. 542825	389	2. 589950
230	2. 361728	270	2. 431364	310	2. 491362	350	2. 544068	390	2. 591065
231	2. 363612	271	2. 432969	311	2. 492760	351	2. 545307	391	2. 592177
232	2. 365488	272	2. 434569	312	2. 494155	352	2. 546543	392	2. 593286
233	2. 367356	273	2. 436163	313	2. 495544	353	2. 547775	393	2. 594393
234	2. 369216	274	2. 437751	314	2. 496930	334	2. 549003	394	2. 595496
235	2. 371068	275	2. 439333	315	2. 498311	355	2. 550228	395	2. 596597
236	2. 372912	276	2. 440909	316	2. 499687	356	2. 551450	396	2. 597695
237	2. 374748	277	2. 442480	317	2. 501059	357	2. 552668	397	2. 598790
238	2. 376577	278	2. 444045	318	2. 502427	358	2. 553883	398	2. 599883
239	2. 378398	279	2. 445604	319	2. 503791	359	2. 555094	399	2. 600973
240	2. 380211	280	2. 447158	320	2. 505150	360	2. 556303	400	2. 602060

TAVOLA II.

N.	Log.	N.	Log	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
401	2.603145	441	2.644439	481	2.682145	521	2.716838	561	2.748963
402	2.604226	442	2.645422	482	2.683047	522	2.717671	562	2.749736
403	2.605305	443	2.646404	483	2.683947	523	2.718502	563	2.750508
404	2.606381	444	2.647383	484	2.684845	524	2.719331	564	2.751279
405	2.607455	445	2.64836[illegible]	485	2.685742	525	2.720159	565	2.752048
406	2.608526	446	2.649335	486	2.686636	526	2.720986	566	2.752816
407	2.609594	447	2.650308	487	2.687529	527	2.721811	567	2.753583
408	2.610660	448	2.651278	488	2.688420	528	2.722634	568	2.754348
409	2.611723	449	2.652246	489	2.689309	529	2.723456	569	2.755112
410	2.612784	450	2.653213	490	2.690196	530	2.724276	570	2.755875
411	2.613842	451	2.654177	491	2.691081	531	2.725095	571	2.756636
412	2.614897	452	2.655138	492	2.691965	532	2.725912	572	2.757396
413	2.615950	453	2.656098	493	2.692847	533	2.726727	573	2.758155
414	2.617000	454	2.657056	494	2.693727	534	2.727541	574	2.758912
415	2.61[illegible]048	455	2.658011	495	2.694605	535	2.728354	577	2.759668
416	2.619093	456	2.658965	496	2.695482	536	2.729165	576	2.760422
417	2.620136	457	2.659[illegible]16	497	2.696356	537	2.[illegible]29974	577	2.761176
418	2.621176	458	2.660865	468	2.697229	538	2.730782	578	2.761928
419	2.622214	459	2.661813	499	2.698101	539	2.7[illegible]1589	579	2.762679
420	2.623249	460	2.662758	500	2.698970	540	2.732394	580	2.763428
421	2.624282	461	2.663701	501	2.699838	541	2.733197	581	2.764176
22	2.625312	462	2.664642	502	2.700704	542	2.733999	582	2.764923
423	2.626340	463	2.665581	503	2.701568	543	2.734800	583	2.765669
424	2.627366	464	2.666518	504	2.702431	544	2.735599	584	2.766413
425	2.628389	465	2.667453	505	2.703291	545	2.736397	585	2.767156
426	2.629410	466	2.668386	506	2.704151	546	3.737193	586	2.767898
427	2.630428	467	2.969317	507	2.705008	547	[illegible].737987	587	2.768638
428	2.[illegible]31444	468	2.670246	508	2.705864	548	2.738781	588	2.769377
429	2.632457	469	2.671173	509	2.706718	549	2.739572	589	2.770115
430	2.633468	470	2.672098	510	2.707517	550	2.740363	590	2.770852
431	2.634477	471	2.673021	511	2.708421	551	2.741152	591	2.771587
432	2.635484	472	2.673942	512	2.709270	552	2.741939	592	2.772322
433	2.636488	473	2.674861	513	2.710117	553	2.742725	593	2.773055
434	2.637490	474	2.675778	514	2.710963	554	2.743510	594	2.773786
435	2.638489	475	2.676694	515	2.711807	555	2.744293	595	2.774517
436	τ.639486	476	2.677607	516	2.712650	556	2.745075	596	2.775246
43	2.640481	477	2.678518	517	2.713491	557	2.745855	597	2.775974
438	2.641474	478	2.679428	518	2.714330	558	2.746634	598	2.776701
439	2.642465	479	2.680336	519	2.715167	559	2.747412	599	2.777427
440	2.643453	480	2.681241	320	2.716003	560	2.748188	600	2.778151

TAVOLA II.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
601	2. 778874	641	2. 806858	681	2. 833147	721	2. 857935	761	2. 881385
602	2. 779596	642	2. 807535	682	2. 833784	722	2. 858537	762	2. 881955
603	2. 780317	643	2. 808211	683	2. 834421	723	2. 859138	763	2. 882525
604	2. 781037	644	2. 808886	684	2. 835056	724	2. 859739	764	2. 883093
605	2. 781755	645	2. 809560	685	2. 835691	725	2. 860338	765	2. 883661
606	2. 782473	646	2. 810233	686	2. 836324	726	2. 860937	766	2. 884229
607	2. 783189	647	2. 810904	687	2. 836957	727	2. 861534	767	2. 884795
608	2. 783904	648	2. 811575	688	2. 737588	728	2. 862131	768	2. 885361
609	2. 784617	649	2. 812245	689	2. 838219	729	2. 862728	769	2. 885926
610	2. 785330	650	2. 812913	690	2. 838849	730	2. 863323	770	2. 886491
611	2. 786041	651	2. 813581	691	2. 839478	731	2. 863917	771	2. 887054
612	2. 786751	652	2. 814248	692	2. 840106	732	2. 864511	772	2. 887617
613	2. 787460	653	2. 814913	693	2. 840733	733	2. 865104	773	2. 888179
614	2. 788168	654	2. 815578	694	2. 8413 9	734	2. 865696	774	2. 888741
615	2. 788875	655	2. 816241	695	2. 841985	735	2. 866287	775	2. 889302
616	2. 789581	656	2. 816904	696	2. 842609	736	2. 866878	776	2. 889862
617	2. 790285	637	2. 817565	697	2. 843233	737	2. 867467	777	2. 890421
618	2. 790988	658	2. 818226	698	2. 843855	738	2. 868056	778	2. 890980
619	2. 791691	659	2. 818885	699	2. 844477	739	2. 868644	779	2. 891537
620	2. 792392	660	2. 819544	700	2. 45098	740	2. 869232	780	2. 892095
621	2. 793092	661	2. 820201	701	2. 845718	741	2. 869818	781	2. 892651
622	2. 793790	662	2. 820858	702	2. 846337	742	2. 870404	782	2. 893207
623	2. 79 488	663	2. 821514	703	2. 846955	743	2. 870989	783	2. 893762
624	2. 795185	664	2. 822068	704	2. 847573	744	2. 871573	784	2. 894316
625	2. 795880	665	2. 822822	705	2. 848189	745	2. 872156	785	2. 894870
626	2. 796574	666	2. 823474	706	2. 848805	746	2. 872739	786	2. 895423
627	2. 797268	667	2. 824126	707	2. 849419	747	2. 873321	787	2. 895975
628	2. 797960	678	2. 824776	708	2. 850033	748	2. 873902	788	2. 896526
629	2. 798651	669	2. 825426	709	2. 850646	749	2. 874482	789	2. 897077
630	2. 799341	670	2. 826075	710	2. 851258	750	2. 875061	790	2. 897627
631	2. 80002	671	2. 826723	711	2. 851870	751	2. 875640	791	2. 898176
632	2. 800717	672	2. 827369	712	2. 852480	752	2. 876218	792	2. 698725
633	2. 801404	673	2. 828015	713	2. 853090	753	2. 876795	793	2. 899273
634	2. 802089	674	2. 828660	714	2. 853698	754	2. 877371	794	2. 899821
635	2. 802774	675	2. 829304	715	2. 854306	755	2. 877947	795	2. 900367
636	2. 803457	676	2. 829947	716	2. 854913	756	2. 878522	796	2. 900913
637	2. 804139	677	2. 830589	717	2. 855519	757	2. 879096	797	2. 901458
638	2. 804821	678	2. 831230	718	2. 856124	758	2. 879669	798	2. 902007
639	2. 805501	679	2. 831870	719	2. 856729	759	2. 880242	799	2. 902543
640	2. 806180	680	2. 832509	720	2. 857332	760	2. 880814	800	2. 903090

TAVOLA II.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
801	2.903633	841	2.924796	881	2.944976	921	2.964260	961	2.982723
802	2.904174	842	2.925312	882	2.945469	922	2.964731	962	2.983175
803	2.904716	843	2.925828	883	2.945961	923	2.965202	963	2.983626
804	2.905256	844	2.926342	884	2.946452	924	2.965672	964	2.984077
8 5	2.9 5796	845	2.926857	885	2.946943	925	2.966142	965	2.984527
806	2.906335	846	2.927370	886	2.947434	926	2.966611	966	2.984977
807	2.906874	847	2.927883	887	2.947924	927	2.967080	967	2.985426
808	2.907411	848	2.928396	888	2.948413	928	2.967548	968	2.985875
809	2.907949	849	2.928908	889	2.048902	929	2.968016	969	2.986324
810	2.908485	850	2.929419	890	2.949390	930	2.968483	970	2.986772
811	2.909021	851	2.929930	891	2.949878	931	2.968950	971	2.987219
8 2	2.909556	852	2.930440	892	2.950365	932	2.969416	97	2.987666
813	2.910091	853	2.930949	893	2.950851	933	2.969882	973	2.988113
814	2.910624	854	2.9 1458	894	2.951338	934	2.970347	974	2.988559
815	2.911158	855	2.931966	895	2.951823	935	2.970812	975	2.989005
816	2.911690	856	2.932474	896	2.952308	936	2.971276	976	2.989450
817	2.912222	857	2.932981	897	2.952792	937	2.971740	977	2.989895
818	2.912753	858	2.933487	898	2.953276	938	2.972203	978	2.990339
819	2.913284	859	2.933993	899	2.953760	939	2.972666	979	2.990783
820	2.913814	860	2.934498	900	2.954243	940	2.973128	980	2.991226
821	2.914343	861	2.935003	901	2.954725	941	2.973590	981	2.991669
822	2.914872	862	2.935507	902	2.955207	942	2.974051	982	2.992111
823	2.915400	863	2.936010	903	2.955688	943	2.974512	983	2.992554
824	2.915927	864	2.936514	904	2.956168	944	2.974972	984	2.992995
825	2.916454	865	2.937016	905	2.956649	945	2.975432	985	.993436
826	2.916980	866	2.937518	906	2.957128	946	2.975891	986	2.993877
827	2.917506	867	2.938019	907	2.957607	947	2.976350	987	2.994317
828	2.918030	868	2.938520	908	2.958086	948	2.976808	988	2.994757
829	2.918555	869	2.939020	909	2.958564	949	2.977266	989	2.995196
830	2.919078	870	2.939519	910	2.959041	950	2.977724	990	2.995635
831	2.919601	871	2.940018	911	2.959518	951	2.978181	991	2.996 74
832	2.920123	872	2.940516	912	2.959995	952	2.978637	992	2.996512
833	2.920645	873	2.941014	913	2.960471	953	2.979 93	993	2.996949
834	2.921166	874	2.941511	914	2.960946	954	2.979548	994	2.997386
835	2.921686	875	2.942008	915	2.961421	955	2.980003	995	2.997823
836	2.922206	876	2.942504	916	2.961895	956	2.980458	996	2.998259
837	2.922725	877	2.943000	917	2.962369	957	2.980912	997	2.998695
838	2.923244	878	2.943495	918	2.962843	958	2.981366	998	2.999131
839	2.923762	879	2.943989	919	2.963316	959	2.981819	999	2.999565
840	2.924279	880	2.944483	920	2.963788	960	2.982271	100	3.000000

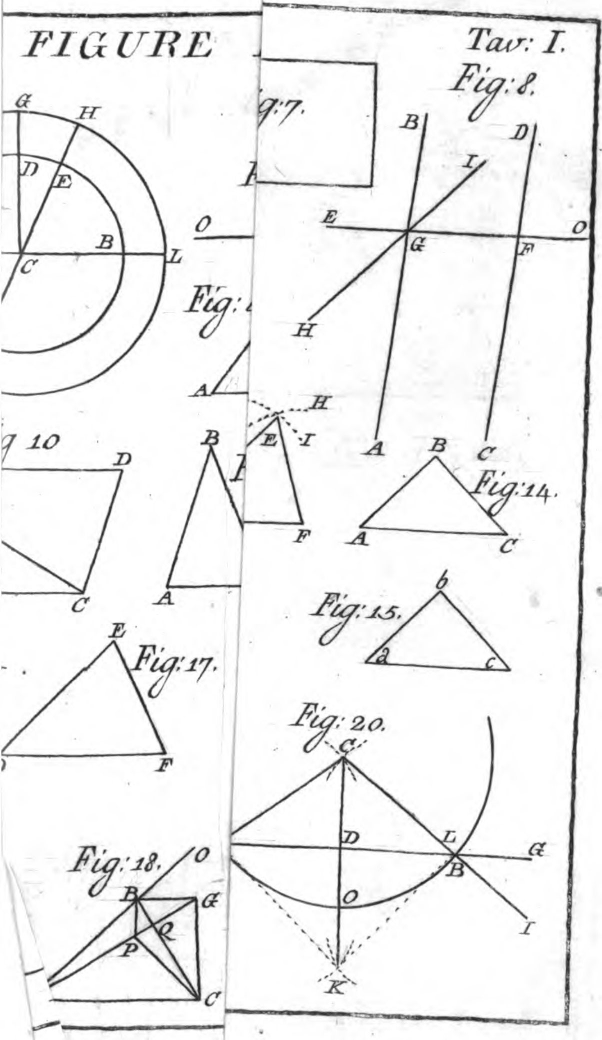
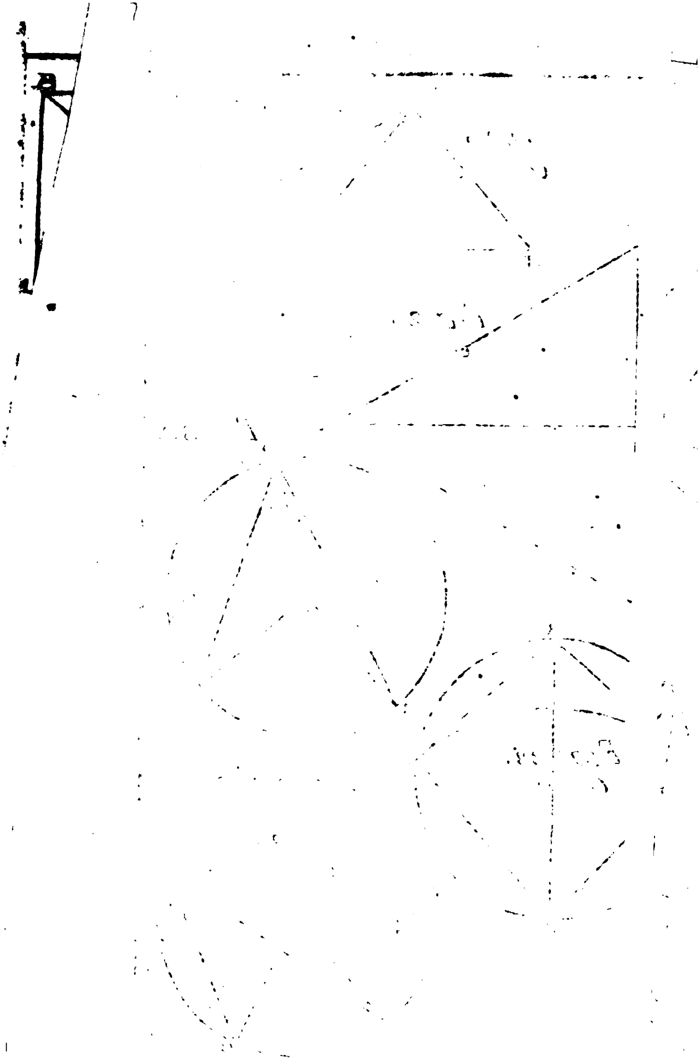
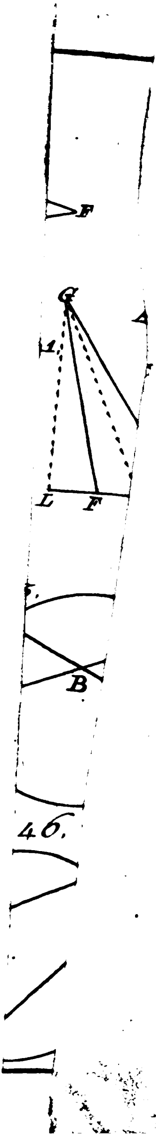


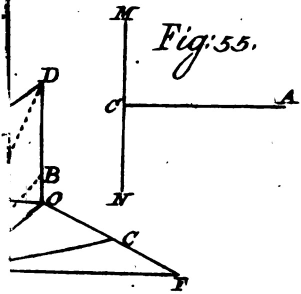
FIGURE
Tav: I.
Fig:7.
Fig:8.
Fig:14.
Fig:15.
Fig:17.
Fig:18.
Fig: 20.
q 10



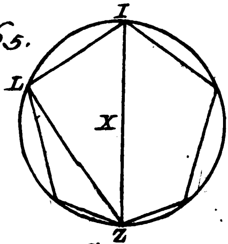

E
G
A
L
F
B
46.

Tav: IV.

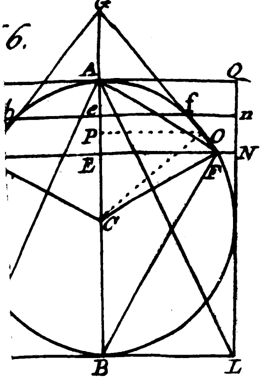
Fig: 55.



65.



6.



METRIA Tav: V.

A.

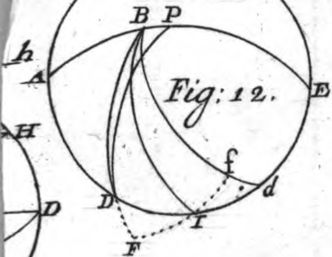


Fig: 12.

Fig: 11.

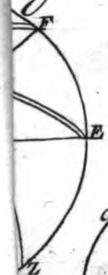
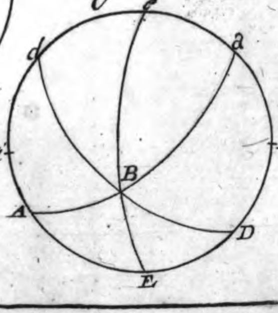


Fig: 13.



adì 18. 8bre 1747.

Scudi Nove per haver servito in detta qua
...al di 17 8bre e ragione di Scudi ...
..., e Scudi Nove e Bai. novantacinque per
... consegnato