LUSO.

Thomae e Com.^bus Valpergiae et Maxini

jak
8 vall.

Boskovic, Rudjer Josip

ELEMENTORUM UNIVERSÆ MATHESEOS

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

SOCIETATIS JESU

PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

TOMUS I.

CONTINENS
- GEOMETRIAM PLANAM.
- ARITHMETICAM VULGAREM.
- GEOMETRIAM SOLIDORUM.
- TRIGONOMETRIAM PLANAM, & SPHÆRICAM.

EDITIO PRIMA VENETA,

Summo labore ac diligentia ab erroribus expurgata.

VENETIIS, MDCCLVII.

APUD ANTONIUM PERLINI.

SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIIS.

W. W. Beman
gt.
5-25-1923
3 vols.

AUCTORIS PRÆFATIO.

PRodiit jam superiore anno hic ipse liber sub titulo partis primæ Tomi primi Elementorum Matheseos sine meo nomine, & alter itidem sine meo nomine continens Algebræ Elementa sub titulo partis secundæ Tomi primi. Iis nunc accedunt Sectionum Conicarum Elementa, cum Locorum Geometricorum transformationibus. Primis iis Tomi primi partibus, quamquam hoc anno distractis jam magna ex parte, non quidem iterum recusis, sed iisdem illis, mutatur titulus: accedit meum nomen, & quæ fuerant binæ partes Tomi primi, evadunt Tomus primus, & secundus, ut jam novus, qui nunc additur, fiat tertius. Cur superiore anno meum defuerit nomen, facile intelliget, qui fusiorem præfationem legerit adjectam Tomo tertio; quam ut percurrat, Lectorem rogo. Id ut nunc accederet, impressa simul præfatione illa, facile a me impetravit is, cujus sumptibus tertius nunc prodit Tomus.

Idem autem priores illos non Tomi partes, sed Tomos appellari maluit, cum nominis mei addendi gratia mutari deberet titulus, crescente nimirum universo opere, in quo jam integra postulor totius Matheseos Elementa.

Porro prima illa Geometriæ, & Arithmeticæ Elementa, quæ solent sub Præceptoris disciplina addisci contractiore methodo exposita sunt in hoc primo Tomo ita, ut præcipua quædam tantummodo capita percurrantur, & Præceptoris ipsius ductum omnino requirant, qui appendicem legat in fine addiectam. Ejus appendicis ope, confido, fore, ut Tyro rite institutus brevi, & maximo cum fructu Geometriam addiscat, & se abunde in inventione exerceat. A fine Arithmeticæ usque ad primi Tomi finem omnia, quæ occurrunt, & uberius explicata sunt, & fusius pertractata. Menda nonnulla Typographi, vel librarii exscribentis per sese facile deteguntur. In Tri-

a 2 *gono-*

gonometria plana vel mihi scribenti præpropere, vel Editori, qui plura in hoc Tomo quandoque contraxit, effugit quintus casus triangulorum rectangulorum, qui addendus fuisset post num. 10, quo nimirum dato altero angulo, quærantur reliqua. Facile autem solvitur, cum angulus alter inveniatur per canonem 1, basis per 2, latus alterum per 3.

In tertio Tomo omnia sunt abunde explicata, nec ductorem, ut arbitror requirent. In reliquis itidem curabo, ne qui Tyro in Geometria, & primis calculi rudimentis versatus requirat. Eorum autem, quæ consequentur, & quorum materia omnis in promptu est, hic erit ordo. Quarto Tomo persequar Elementa infinitorum, & infinitesimorum pure geometrica, ubi etiam de generalibus agam curvarum proprietatibus, & earum, quæ omnium maxime, vel utiles vel notæ sunt Elementa tradam. Alius deinde aget de applicatione Algebræ ad Geometriam, & de seriebus infinitis, alius præcipua calculi differentialis, & integralis fundamenta aperiet, & usum demonstrabit. Hinc absolutis, quæ ad puram Mathesim pertinent, aggrediar mixtam. Prima quidem ea, quæ ad motum pertinent, tum quæ ad Lucem, exponam, deinde Sphæram, & ex ea pendentem Gnomonicam, tum Astronomiam præcedentibus omnibus indigentem evolvam, quibus adjiciam demum illa, quæ ex Mathesi requiruntur ad Geographiam, Chronologiam, utramque Architecturam, & Musicam, si nimirum vita, & otium supererit.

In iis omnibus erunt pleraque, ut in his ipsis, quæ jam edidi sunt sane multa, mihi quidem nova, & deductionis ordinem habebo in primis ob oculos, cujus deductionis specimen in primo potissimum, ac tertio tomo, & vero etiam in secundo me abunde dedisse arbitror.

EDI-

EDITORIS MONITUM
AD LECTOREM.

MATHESEOS Elementa edenda curavimus Adolescentium rationibus accommodata, qui publicis in Scholis huic facultati dant operam: eorum scilicet, quibus plerumque ex hujusmodi disciplinis ea tantum delibare est animus, quæ & captu faciliora sint, & cum cæteris facultatibus arctius connexa. Si qui sunt igitur, quos paulo major & exquisitior harum rerum scientia delectet, ubi satis fuerint in his Elementis exercitati, privato studio a probatissimis Scriptoribus haurire poterunt, quæ communem discentium captum excedunt. Brevitati consulendum in primis esse duximus, ut liber evaderet qui & facile parari posset, & commodè circumferri. Licet autem perspicuitatis etiam ratio sit habita, tamen si cui quædam videbuntur aliquanto pressius dicta, & obscurius, Magistri voce aliquid præstandum esse meminerit. Arithmeticæ locum inter planam, & solidorum geometriam medium dedimus

Eucli-

Euclidis exemplum magis sequuti, quam quod id rerum natura postularet. Cæterum satius censemus eodem tempore in utroque genere quantitatis, continuæ nempe, & discretæ, tyronem exerceri; ob eamque rem nihil veriti sumus in Geometriæ planæ decursu ad contrahendas, aut clarius exponendas demonstrationes arithmeticam adhibere. Reliquorum ratio satis legentibus constabit. Vale.

DO

DOMINICUS FRANCHINI

SOCIETATIS JESU

In Provincia Romana Præpositus Provincialis.

CUM Librum, cui titulus: *Elementorum Matheseos &c.* a nostræ Societatis Sacerdote conscriptum, aliquot ejusdem Societatis Theologi recognoverint, & in lucem edi posse probaverint; potestate nobis a R. P. Nostro Ignatio Vicecomite Præposito Generali ad id tradita, facultatem concedimus, ut Typis mandetur, si ita iis, ad quos pertinet, videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus. Romæ 11. Decembris 1751.

Dominicus Franchini.

NOI

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Revisione, ed Ap provazione del P. *F. Gio: Paolo Zapparella* Inquisitor Generale del Santo Officio di *Venezia* nel Libro intitolato *Elementorum Universæ Matheseos auctore P. Rogerio Josepho Boscovich Soc. Jesu*. No v' esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, parimente per Attestato del Segretario Nostro, nient contro Principi, e buoni costumi concediamo Licen za ad *Antonio Perlini* Stampator *di Venezia* che poss essere stampato, osservando gli ordini in materia d Stampe, e presentando le solite Copie alle Publich Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 18. Agosto 1756.

(Barbon Morosini K. P. Ref.
(Alvise Mocenigo 4. K. P. Ref.

Registrato in Libro a Carte 46. al Num. 469.

Giacomo Zuccato Seg.

Adi 20. Agosto 1756.

Registrato nel Mag. Eccellentiss. degli Esecutori contro la Bestemia.

Francesco Bianchi Seg.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

Axiomata.

1. QUÆ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqalia: Et quod uno æqualium majus est vel minus, altero quoque majus vel minus erit.

2. Si æqualibus æqualia demas vel addas, residua in primo aggregata in secundo casu sunt æqualia. Et si æqualibus inæqualia demas, vel addas, ea quæ remanent sunt inæqualia.

3. Quantitates quæ certam aliquam quantitatem tantundem continent, vel ab ea tantundem continentur, sunt æquales; unde quantitates æquales in eamdem quantitatem ductæ, vel per eamdem divisæ sunt æquales.

4. Si ex duabus quantitatibus prima sit dupla, tripla, vel utcumque multiplex alterius, & a prima auferatur pars dupla, tripla, vel æquè multiplex ejus, quæ aufertur a secunda; erit residuum primæ duplum, triplum, vel æquè multiplex residui alterius.

5. Quæ sibi mutuò superimposita perfectè congruunt sunt æqualia.

6 Totum qualibet sui parte majus est: est autem omnibus sui partibus simul sumptis æquale.

Definitiones.

1. Punctum est, cujus nulla pars est.

2. Linea est longitudo latitudinis expers.

3. Superficies est longitudo, & latitudo profunditatis expers.

4. Solidum est extensio in longum, latum, & profundum.

Scholion.

AD tres priores definitiones probè intelligendas, finge tibi tabulam KL affabrè expolitam (Fig. 1.), cujus pars A alba sit, B nigra, D rubra, C cærulea, EI limes album colorem a nigro dirimens, nullam certè latitudinem habet; utcumque enim in alterutram partem inclines, vel in albo, vel in nigro consistes; limitem tamen hunc in longum partiri licet. Idem dic de limitibus IG, IH, IF. Et hæc est notio lineæ.

Concursus autem harum linearum I neque latitudinem, neque longitudinem habet, adeoque nec partes. Et hæc est notio puncti Mathematici, ex qua oritur axioma illud; lineam a linea secari in unico tantum puncto.

Quod si tabula KL aliquam habeat licet minimam profunditatem, limes interius dirimens partem albam A, a nigra B habebit longitudinem EI, tantamque latitudinem, quanta est tabulæ profunditas, ipse vero profunditatis expers erit. Et hæc est notio superficiei.

Si jam omnes colores uno obducantur, qui sit omnibus partibus communis, limes EF videri desinet; adhuc tamen erit in tabula, quandoquidem locus manet ubi & albus desierat color, & niger cœperat. Quare sublatis coloribus manet adhuc puncti, lineæ, & superficiei notio.

Duo hinc eruuntur. 1. hoc punctum, & hæc linea Physica non sunt; uti esset e.g. ferri filum tam tenue, quod neque latitudinem habeat, neque profunditatem, hoc enim fieri posse plerique negant.

2. Ejusmodi puncta, lineæ, superficies, posita corporum continuitate, non sunt res imaginariæ, quas sibi intellectus a rebus abstrahens confingat, sed verè existunt independenter ab ingenii nostri commentis. Corpora quidem non sunt, sed corporum affectiones, quæ

ab

ab invicem distrahi non possunt. Hinc punctum est terminus lineæ, linea superficiei, superficies corporis.

Def. 5. Circulus est figura plana, unica curva linea comprehensa, quæ peripheria dicitur, sive circumferentia, ad quam omnes rectæ lineæ a puncto medio, quod centrum dicitur, ductæ, æquales sunt inter se.

6. Linea recta per centrum ducta, & utrinque in peripheria terminata diameter dicitur, quod circulum bifariam dividat.

Scholion.

In fig. 2. circulus est ADEB, sive FGLK; diameter est AB, sive FL, unde æquales sunt rectæ CA, CD, CE, CB, quæ semidiametri dicuntur, sive radii. Circulus dividi solet in partes æquales 360. quæ gradus dicuntur; singulos gradus partimur in 60. minuta prima, quodlibet minutum primum in 60 secunda, & sic in infinitum. Solent autem hæc designari quibusdam lineis numeris superimpositis, cum gradus per o designentur. Ita si forte occurrant 35°. 25'. 36''. 42'''. lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda, 42 tertia.

Si duo circuli idem habeant centrum, ac rectæ lineæ CD, CE comprehendunt in interiori circulo 30, aut 40 gradus, manifestum est, quod totidem gradus in exteriori comprehendent; quod probe notandum est ad angulorum notionem rite concipiendam.

Sed antequam de angulis dicere aggrediar, subjiciam hic postulata, quo nomine Geometræ operationes designant, quas Geometria ex Mechanicis mutuatur. Constat autem has perfici posse, & per circinum, & regulam facile perficiuntur.

Postulata.

1. A puncto ad punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam terminatam producere, ita ut recta maneat.

3. Ex dato puncto tanquam centro, dato intervallo tamquam radio, circulum describere.

4. Ex recta majori partem auferre minori æqualem.

Scholion.

Quidquid geometricè fit, per hæc postulata perficitur; aliter non dicetur geometricè factum.

Def. 7. Angulus est unius rectæ lineæ ad alteram inclinatio.

Scholion.

Anguli notio est omninò necessaria, & ope circuli facillime concipitur. Duæ rectæ lineæ HK, FL, quæ concurrunt in C, efficiunt angulos LCH, HCF, FCK, KCL, qui non ex eo majores fieri intelliguntur, quod producantur ipsorum latera; sed ex eo profectò quod latera ipsa, sive crura divaricentur: quandoquidem anguli naturam in majori, aut minori inclinatione unius lineæ ad aliam consistit. Hinc angulorum mensura sunt gradus, quos ipsorum latera comprehendunt in peripheria circuli ex anguli vertice tamquam centro descripti. Si arcus EB 60 gradus continet, angulus LCH erit graduum 60. Et quia eumdem numerum graduum continebit arcus HL, ad hunc angulum definiendum idoneus est quilibet circulus centro C descriptus.

Corollarium.

Hinc si ad punctum M. (Fig. 3.) rectæ datæ ON fieri debeat angulus æqualis angulo dato LCH, centro facto in C, & M, & quolibet intervallo, dummodo sit utrobique æquale, describatur arcus BE occurrens lateribus CL, CH, in B, & E; itemque arcus QP indefinitè: tum facto centro in P intervallo BE ducatur arcus alterius circuli, qui ex priori abscindet arcum PQ æqualem arcui BE, & ducatur recta MQR; patet angulum NMR æqualem fore dato angulo LCH.

Def. 8. Linea dicitur alteri lineæ perpendicularis, quando in ipsam incidens facit angulos hinc & inde æquales, cujusmodi sunt anguli GCL, GCF. Anguli hujusmodi dicuntur recti.

9. Angulus obtusus dicitur, qui est recto major, ut FCH.

10. Acutus, qui recto minor, ut HCL.

Co-

Coroll. 1.

Patet illum esse angulum rectum, qui quartam circuli partem, sive 90 gradus comprehendit; illum esse acutum, qui pauciores, illum obtusum, qui plures continet gradus.

Coroll. 2.

Manifestum est quoque, quod recta HC incidens in rectam FL vel duos angulos rectos facit (si videlicet cum perpendiculari coincidat) vel duobus rectis æquales: etenim anguli FCH, HCL simul sumpti totam semicircumferentiam, sive 180 gradus comprehendunt, totidem scilicet, quot duo recti.

Coroll. 3.

Hinc quotcumque sint lineæ rectæ, quæ concurrant ad punctum C, omnes, quos faciunt, anguli KCL, LCK, KCF &c. totam peripheriam, sive 360 gradus comprehendunt, adeoque 4 rectis æquales sunt.

Coroll. 4.

Si rectę HC, LC producantur, manifestum est, quod in unam lineam coalescere non possunt, sed efficient angulos FCK, LCH, qui dicuntur ad verticem oppositi, æquales inter se: cum sit enim dimidia peripheria FKL æqualis dimidiæ peripheriæ HLK, sublata communi parte KL, erunt arcus reliqui FK, HL æquales inter se.

Def. 11. Triangulum æquilaterum illud est, quod habet omnia latera æqualia, ut ABC. (Fig. 4.)

12. Isoscele dicitur, quod duo tantum habet æqualia latera, uti sunt AB, BC. (Fig. 5.)

13. Scalenum est, quod omnia habet latera inæqualia, ut ABC. (Fig. 6.)

14 Triangulum rectangulum est quod unum habet angulum rectum, ut BAC. (Fig. 6.

15. Quadratum est figura quatuor lateribus constans, quæ & æqualia sint inter se, & ad angulos rectos junctas. (Fig. 1.

16. Si autem angulos quidem habeat rectos, sed duo latera opposita reliquis duobus majora, dicitur simpliciter rectangulum. (Fig. 7.)

17. Parallelæ dicuntur rectæ lineæ, quæ in in tum productæ nusquam sibi occurrunt, nec magis invicem accedunt.

Scholion.

Ex ipso parallelismi conceptu, affectiones quæ parallelarum descendunt, quibus in demonstrandis gnopere laborant Geometræ vel ex hoc ipso, quod ne ullo magisterio natura ipsa de illarum veritate edocet. Sunt autem hæ. Lineæ rectæ in eodem no existentes vel convergunt, uti (Fig. 8.) GI, divergentes ex parte opposita GH, FC: vel eodem ter se ubique distant intervallo nusquam invicem oc rentes, uti sunt AB, CD. Si æque ubique distent invicem, ducta qualibet recta EO, quæ parallelas cet in G, & F; ipso naturæ lumine notum est, ea dem fore parallelæ utriusque inclinationem ad rect EO, adeoque erit 1.° angulus OFD æqualis ang OGB, quorum primus dicitur externus, secundus tem internus & oppositus. 2.° cum angulus GFC quetur angulo DFD ad verticem opposito (per Cor 4. Def. 10.) erunt etiam æquales anguli BGF, GF qui dicuntur alterni. 3.° tandem anguli OFD, GF cum æquentur duobus rectis (per Coroll. 2. def. 1 æquales item erunt duobus rectis anguli interni, & eamdem partem positi DFG, FGB.

Pariter: quoties angulus OFD æqualis erit inter & opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum C AB ad rectam EO, ac proinde rectæ illæ neque co vergunt, neque divergunt, sed parallelæ sunt inter Rursus quoties æquales erunt anguli alterni BGF, GF vel duobus rectis erunt simul æquales interni ad ea dem partem positi BGF, GFD; semper angulus exte nus DFO æqualis erit angulo interno & opposito BG & rectæ AB, CD erunt parallelæ.

Coroll. 1.

En igitur tres parallelarum necessarias affectiones quarum ex una qualibet inferre licet rectas illas e parallelas. 1.° Angulus externus æqualis est interno

opposito,

opposito. 2.° Anguli alterni æquales sunt inter se; 3.° Interni & ad eamdem partem duobus rectis æquantur.

Coroll. 2.

Si duæ rectæ AB, HK (Fig. 9.) parallelæ sint eidem rectæ CD, erunt etiam inter se parallelæ. Etenim ducta recta EO illis occurrente in G, F, I, inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO, eadem erit atque inclinatio rectæ CD ad eamdem.

Coroll. 3.

Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam datæ rectæ AB; ex quolibet hujus puncto G ducatur recta GFO, & fiat (per Coroll. def. 7.) angulus OFD æqualis angulo OGB, eritque recta FD parallela ipsi AB.

Scholion.

His parallelarum affectionibus nititur methodus, qua Eratosthenes telluris ambitum mensus est. Urbis Sienes puteos norat ille solstitii æstivi tempore solis radios in imo excipere, cum illis sol ad perpendiculum immineret. Porro Sienem, & Alexandriam in eodem meridiano sitas existimavit, ut eodem temporis momento meridies utrobique esset; ac præterea Sienem Alexandria abesse stadiis 5000. His positis en methodum, qua usus est. Sit T (Fig. 10.) telluris centrum PAF meridiani circulus utrique Civitati communis. Siene, cui sol imminet ad perpendiculum, sita sit in P; & quidem si radius SP produci intelligatur, per centrum terræ transibit. Sit demum A Alexandria. In hac ita collocavit hemisphærium cavum CAD, ut acies stili AE in centro esset hemisphærii, stilus vero ipse perpendicularis esset horizonti, adeoque per terræ centrum transiret si produci intelligeretur. Exinde in ipsa solstitii meridie aciem umbræ a stilo projectæ AB diligenter notavit, reperitque eam comprehendere in hemisphærio quinquagesimam partem totius peripheriæ, seu 7°, 12'. Cum radii Solis SPT, sEB ob immanem solis distantiam sint ad sensum paralleli; æquales erunt anguli alterni BET, ETP; quare erit etiam angulus ATP; adeoque arcus AP, quinquagesima totius circuli pars. Igitur cum hæc ex hypothesi contineat stadia 5000, totus telluris ambitus continebit stadia 250000, sive passuum millia 31250, siquidem 8 stadia singulis passuum millibus tribuantur. Et hæc quidem methodus de causis minus est idonea ad exactam telluris dimensionem, ac perperam ab Eratosthene assumi censent, quod Sienes & Alexandria sub eodem jaceant meridiano, quod locorum intervallum stadiorum fuerit 5000, & quod radii SP, sE pro parallelis haberi possint. Nihilo tamen minus libuit hujus Astronomi artificium exponere, ut vel hinc agnoscant Tyrones quantam & utilitatem, & voluptatem ex hoc studio sibi debeant polliceri, quantoque laboris in fructu Geometræ ex his levibus initiis, quæ nullius fere momenti videntur, gradum sibi fecerint ad ea cognoscenda, quæ longe ab oculis nostris natura seposuit.

Def. 18. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus latera opposita parallela sunt. (Fig. 11.)

PROPOSITIO I.

IN omni triangulo si latus unum producatur, angulus externus æqualis est duobus internis & oppositis: Et uniuscujusque trianguli tres anguli duobus rectis æquantur.

In Triangulo ABC (Fig. 12.) producto latere AC in D, angulus BCD externus dicitur. Dico igitur primò hunc angulum æquari duobus A & B internis & oppositis.

Demonstr. Ducatur CE parallela lateri AB (per Coroll. 3. def. 17.) Erit angulus externus ECD æqualis interno & opposito BAC (Coroll. 1. def. 17.): & angulus ECB æquatur alterno ABC: ergo totus angulus BCD æquatur duobus A, B: Q.E.D.

2. Tres anguli simul sumpti trianguli ABC, hoc est A, B, BCA æquantur duobus rectis. Nam (Coroll. 2. def. 10.

def. 10.) anguli BCD, BCA æquantur duobus rectis: sed BCD æquatur angulis B, & A: ergo anguli B, A, BCA æquantur duobus rectis. Q.E.D.

Coroll.

Hinc cujusvis trianguli tres anguli simul sumpti æquantur tribus angulis cujusvis alterius simul sumptis: quare si in duobus triangulis duo anguli inveniantur æquales, etiam tertius unius alterius tertio æqualis erit: & si unius trianguli duo anguli innotescant, etiam tertius notus erit.

Scholion.

Hujus propositionis usus incredibilis dictu est: Ex ea Keplerus ambitum telluris metiri docuit sine ullo ad solem, & stellas recursu. Sint T & M (Fig. 13.) duorum montium vertices satis dissiti inter se: sitque AB arcus interceptus inter utriusque montis radices, quem diligenter metiri oportet. Præterea quam fieri poterit accuratissimè notentur anguli CTM, CMT quos pendulum efficiet per rectas TC, MC ad centrum telluris constanter vergens, & linea visualis TM. Horum angulorum summam ex 180. gradibus aufer, differentia dabit Angulum ACB; ex quo cognosces quota portio totius circuli sit arcus AB, cumque hujus dimensio per notas mensuras deprehensa fuerit, ad easdem licebit totius ambitus dimensionem revocare.

Ricciolius hanc methodum adhibuit, ut ipse refert Geogr. Ref. lib. 5, cap. 33, in Turri campanaria Mutinensi in vertice montis Paterni, qui Bononia non longe abest. Invenit angulum CTM 90°, 15′, 7″; angulum verò CMT 89°, 26′, 13″, 27‴, his ex 180°, subductis reliquus fuit angulus C 18′, 39″, 33‴. Cumque locorum intrevallum AB repertum ab eo esset passuum Bononiensium $20016\frac{10}{504}$ facilè intulit gradum telluris passus continere 64363. ac totum proinde ambitum passus 23179680.

Accuratius multo quæsitæ sunt a recentioribus Telluris dimensiones, ex quibus constat imminui gradus a

Polis

Polis ad Æquatorem, & contra. Ad usus tamen præsentes, ubi Tellurem pro sphæra habere possumus, retinebimus cum Cassino Picardi mensuram, ut singuli gradus exapedas habeant 57060; hoc est, Milliaria Parisiensia 68, ac præterea passus 472. Unde totus telluris ambitus continebit milliaria 24649, passus 920. Minor proinde quam qui a Ricciolio inventus fuerat, ut patet si pes Parisiensis ad Bononiensem revocetur, qui ad illum est ut $1682\frac{2}{5}$ ad 1440.

PROPOSITIO II.

SI duo triangula duo latera habuerint æqualia, & angulos ab his lateribus interceptos æquales; & basim æqualem habebunt, & aream, & angulos æqualibus lateribus oppositos æquales.

In triangulis ABC, DEF (Fig. 14. 15.) sint AB, & BC unius latera æqualia alterius lateribus DE, EF, & angulus B æqualis angulo E; dico basim AC æqualem esse basi DF, Angulos A & C angulis D & F, & totum triangulum ABC toti triangulo DEF. Etenim si latus AB ejus æquali lateri DE superimponi intelligatur cum illo congruet, & ob angulum B æqualem angulo E etiam latus BC cadet super sibi æquale EF, & punctum C in F. Ergo basis AC congruet cum basi DF, angulus A cum D, C cum F, & totum triangulum cum toto. Ergo æqualia erunt (Ax. 4.) Q. E. D.

Coroll. 1.

Rectæ igitur, quæ rectas lineas parallelas, & æquales jungunt, ipsæ quoque parallelæ sunt, & æquales. Nam si BC (Fig. 16.) parallela est, & æqualis rectæ AD, ductâ AC erunt (Coroll. 1. def. 7.) anguli alterni BCA, CAD æquales. Quare in duobus triangulis BCA, DAC erunt latera BC, AC æqualia lateribus AD, AC, & anguli ab his lateribus intercepti æquales. Ergo & bases æquales erunt, & anguli alterni DCA, CAB; adeoque rectæ AB, CD parallelæ sunt, & æquales.

Cor-

Coroll. 2.

Si triangulum ABC (Fig. 17. 18.) sit isoscele, habens nempe duo latera AB, BC æqualia, eodem pacto ostenditur angulos A, C ab basim æquales habere. Intelligatur enim ejusmodi triangulum bis positum, & triangulum BAC superimponi triangulo *b a c* situ inverso. Ob æqualitatem laterum inter se, latus AB superimpositum lateri *bc* cum illo congruet, & ob æquales angulos B & *b* jacebit BC super sibi æquale latus *ab*, quare punctis A & C abeuntibus in *c* & *a* basis cum basi congruet, angulus A cum angulo *c*, & C cum *a*. Æquantur igitur hi anguli inter se, adeoque angulus A angulo C.

Coroll. 3.

Cum sit triangulum æquilaterum quaquaversus isoscele, omnes ejus anguli sunt æquales inter se, ac proinde erunt singuli 60 graduum. Si vero triangulum isoscele duobus æqualibus lateribus rectum angulum comprehendat, erunt duo reliqui semirecti, graduum singuli 45. (per Prop. 1.)

Coroll. 4.

Si ACB (Fig. 19.) sit diameter circuli ADF, cujus centrum in C, & centro B intervallo BC describatur alter circulus priorem secans in D, & F, ducanturque rectæ CD, DB erunt hæ (def. 5.) æquales semidiametro CB, ac proinde æquales inter se. Ergo triangulum BCD erit æquilaterum, & angulus DCB itemque arcus DB graduum 60, sive sexta pars peripheriæ ADF. Quare si iterum centro facto in A intervallo AC abscindantur arcus AE, AG, constabit ratio, qua exagonum regulare (hoc est figura sex æqualibus Lateribus & angulis constans) in dato circulo inscribi possit. Illud quoque manifestum est, quomodo per gemini circuli descriptionem super data recta CB triangulum æquilaterum describi possit.

PRO-

PROPOSITIO III.

SI duo triangula habuerint duos angulos æquales, & latus his angulis interjectum æquale, habebunt & reliqua latera, & aream æqualem.

Sint anguli A, C (Fig. 14. 15.) æquales angulis D, F, & latus AC lateri DF, dico fore latera AB BC æqualia lateribus DE, EF, & totum ABC, toti DEF. Nam si latus AC lateri æquali DF superimponi intelligatur, anguli A & C congruent cum æqualibus D & F, ac proinde latera AB, BC cum lateribus DE, EF positione congruent. Quod autem etiam terminatione congruant patet ex eo, quod si punctum B lateris AB non caderet in punctum E, sed supra, vel infra, tunc latus BC necessario caderet vel extra, vel intrà latus EF, adeoque angulus C major, vel minor foret angulo F contra hypothesim. Ergo punctum B cadit in E, & latera lateribus perfectè congruunt, & angulus B angulo E, & totum triangulum ABC cum toto DEF. Q. E. D.

Coroll. 1.

Si præter latera AC, DF æquentur anguli A, B angulis D, E; etiam C æquatur F (per Coroll. pr. 1.) ac proinde & reliqua latera, & tota triangula æqualia. Quoties igitur in duobus triangulis æquantur ita duo anguli, & unum latus: tota sunt æqualia.

Coroll. 2.

Si triangulum ABC (Fig. 17. 18.) habet angulos ad basim A, C æquales, æqualia etiam habet latera his opposita. Nam si triangulum ejusmodi bis positum intelligatur, & ABC situ inverso superimponi triangulo *abc*; ob æqualitatem angulorum inter se angulus A superimpositus angulo *c* cum illo congruet, & ob AC æqualem *ac* puncto C abeunte in *a*, angulus C congruet cum *a*, ac proinde AB cum *bc*, CB cum *ab*. Unde AB æquatur ipsi BC.

Coroll. 3.

Si in triangulo rectangulo acutorum unus fuerit semiremirectus, alter quoque semirectus erit (Coroll. 1. pr. 1.) & triangulum proinde erit isoscele.

Scholion.

Hinc eruitur ratio omnium expeditissima ad turrium, aliorumve ædificiorum altitudines investigandas. Paretur ex aliqua materia satis spissa triangulum MCN (Fig. 20.) rectangulum in C, & isoscele. Ita oculo applicetur in M, ut alterum latus NC situm verticalem constanter obtineat (id quod ope penduli ex N suspensi facile perficitur) ac tamdiu ad turrim accedas, vel ab eadem recedas, donec radius visualis secundum latus MN directus in turris TR vertice T terminetur. Notetur punctum Q, in quem desinit radius MC, eritque altitudo QT æqualis intervallo MQ. Cum enim parallelæ sint lineæ NC, TQ, ac proinde angulus TQC æqualis externo NCM (Coroll. 1. def. 17.) erit TQM rectus. Quare cum sit angulus M semirectus (Coroll. 3 pr. 2.) etiam T semirectus erit, & triangulum MQT isoscele; & latus TQ æquale lateri MQ, & tota turris altitudo TR æqualis rectis MQ, QR, quas metiri licet.

Coroll. 4.

Ex eadem propositione tertia eruitur, quod in omni parallelogrammo latera, & anguli oppositi sunt æquales, & totum parallelogrammum bifariam dividitur a diametro, sive diagonali AC. (Fig. 16.) Nam in triangulis ABC, ACD, præter basim AC communem, æquantur anguli alterni DCA, CAB, & DAC, ACB (Coroll. 1. def. 17.) ac proinde & reliquus angulus, & latera, & tota triangula æqualia sunt.

PROPOSITIO IV.

SI in duobus triangulis tria latera æqualia sint; & anguli æqualibus lateribus oppositi, & tota triangula erunt æqualia.

In triangulis ABC, DEF (Fig. 21. 22.) æqualia sint latera AB, BC, CA lateribus DE, EF, FD; dico etiam

an-

angulos A, B, C æquales fore angulis D, E, F. Nam si latus DF concipiatur superimponi lateri æquali AC, vertex E cadet in B. Cadat enim, si fieri potest, extra verticem B in aliquod punctum G. Quoniam ex hypothesi AB æquatur lateri AG, & BC ipsi GC; ducta BG, erunt isoscelia triangula BAG, BCG, ac proinde angulus ABG æqualis erit angulo AGB, (Coroll. 2, prop. 2.) qui cum sit minor angulo CGB, pars toto, etiam ABG minor erit eodem angulo BGC. Jam verò cum sit etiam triangulum BCG isoscele, erit idem angulus CGB æqualis angulo CBG: ergo prior ille ABG minor esset etiam hoc ultimo GBC, totum parte, quod est absurdum. Igitur non possunt esse latera AB, BC æqualia lateribus AG, GC, quin punctum G cadat in B. Quare si triangulum DEF triangulo ABC superimponatur, uti dictum est, perfectè congruent, angulique, & areæ æquales erunt. Q.E.D.

Coroll.

Duo igitur circuli nonnisi in duobus punctis se mutuò intersecant. Nam si recta AC (Fig. 23.) centra jungat duorum circulorum se mutuò secantium in B & H; ductis rectis lineis AB, BC, sequitur ex modo demonstratis inveniri non posse ex parte ipsius B punctum aliud G, ad quod ductę lineę AG, GC æquentur duabus AB, BC: quod tamen necesse esset, si punctum G in utriusque circuli peripheria situm esset, adeoque si in eo puncto iterum se circuli intersecarent.

PROPOSITIO V.

DAtum angulum rectilineum bifariam dividere.

Oporteat bifariam dividere angulum rectilineum HCI. (Fig. 24.) Centro facto in C, quolibet intervallo CA describatur circulus EAL secans alterum latus in B, ac deinde centris A & B, eodemque intervallo notentur arcus circulorum sibi mutuo occurrentium in K, & ducta KC, dico quod hęc datum angulum bifariam secabit. Etenim in triangulis ACK, BCK ex constructio-

ne

ne latera AC, AK æquantur lateribus CB, BK, & basis CK utrique communis est: ergo (prop. 4.) anguli æqualibus lateribus oppositi æquales sunt, adeoque angulus ACK æquatur angulo KCI: Q.E.F.

Scholion.

Anguli trisectio, sive methodus, qua quivis angulus in tres partes æquales dividi possit, frustra a Geometris quæsita est per circinum & regulam. Franciscus Vieta solutionem hujus problematis mechanicam dedit, sed elegantem, & expeditam. Sit angulus HCI (Fig. 25.) quem oporteat in tres partes dividere. Centro facto in C quovis intervallo CA describatur circulus ABD secans latus CI in B, & latus HC indefinite productum versus F in A & D. Regula BF circa punctum B moveatur, donec ita occurrat rectę AD in F, ut segmentum EF inter hoc punctum, & peripheriam interceptum circino inveniatur æquale rectæ CA (id autem est, quod geometricè fieri nequit): tùm sumptis arcubus AG, GK æqualibus arcui DE, ducantur rectæ CG, CK; eritque angulus HCI in tres æquales partes divisus. Etenim ducta CE, erit hæc æqualis radio CA, cui per constructionem æqualis est recta EF; erit ergo isoscele triangulum CEF, ac propterea æquales anguli ECF, EFC (Coroll. 2. prop. 2.). Quare cum angulus externus CEB horum quolibet duplus sit (Prop. 1.) cumque sit etiam triangulum BCE isoscele, erit etiam angulus CBE duplus angulo F. Ergo angulus externus BCH æqualis duobus internis oppositis B & F, triplus erit angulo F, sive ECD, qui est illi ęqualis; ac propterea triplus erit tam angulo ACG, quam angulo GCK. Unde etiam KCB tertia pars est totius HCB, & HCB in tres ęquales partes divisus est: Q.E.F.

Coroll. 1.

Si puncta AB, (Fig. 24.) jungantur recta AB, quę occurret rectę CK in D, in triangulis ACD, BCD, pręter latera AC, CB ęqualia, & latus CD commune, anguli ACD, BCD ab ęqualibus lateribus intercepti ęquales

les sunt: ergo etiam basis AD basi DB æqualis erit (Prop. 2.). Quare si rectam terminatam AB bifariam dividere oporteat, vides quid facto opus sit. Nempe centro facto in A, & B quolibet intervallo, dummodo utrobique idem sit, satis erit notare arcus circulorum sibi mutuo occurrentium in punctis C & K, & hæc puncta jungere recta CK, quæ datam lineam bifariam secabit in D.

Coroll. 2.

Ex eadem prop. 2. constat æquari angulos CDA, CDB: ac propterea CD perpendicularis est rectæ AB. Ergo si ex puncto C demittere oporteat perpendicularem lineam in rectam indefinitam FG, satis erit centro C, & quolibet intervallo CA notare arcum circuli AB, & invento, uti supra dictum est, puncto K, rectam ducere CK, quæ ad perpendiculum insistet rectę datę in puncto D.

Coroll. 3.

Quod si in ipsa recta FG detur punctum D, ex quo perpendiculum oporteat excitare, sumptis ad arbitrium AD, BD hinc & inde æqualibus; centro facto in A & B, eodem intervallo notentur arcus circulorum, qui se mutuò intersecant in C, ducaturque CD, quæ erit perpendiculum quæsitum. Nam in triangulis CDB, CDA latera omnia æqualia erunt, ac propterea anguli CDB, CDA æquales (per Pr. 4.)

Coroll. 4.

Ex iisdem demonstrationibus patet, quòd in circulo EABL recta CD per centrum transiens, si bifariam secat chordam AB, secat etiam ad angulos rectos: & si secat ad angulos rectos bifariam secat.

Schol. 2.

Ex perpendicularium doctrina, ac præcipuè ex prop. 3. ratio pendet ictus reflexi in ludo trudiculari, sive unica reflexione opus sit, sive duplici.

Præmittere tamen oportet tamquam experientia notum, globum perfecte elasticum A (Fig. 26.) cujusmodi ferè sunt eburnei, obliquè occurrentem plano

immeimmobili CD in B ita resilire versus F, ut fiat angulus reflexionis DBE æqualis angulo incidentiæ CBA: quam legem in luminis reflexione natura constanter servat.

Sit igitur MCDF (Fig. 27.) mensę lusorię portio, in qua sphęram eburneam A trajicere oporteat per anulum ferreum E ex parte ipsius, quæ respicit punctum N. Producatur EN ad CD perpendicularis in I, donec fuerit IN æqualis ipsi NE. Sphęra impellatur versus punctum I, quæ occurrens repagulo immobili in B resiliet per BE, anulumque trajiciet. Etenim in triangulis EBN, IBN æquantur latera EN, NI, & BN utrique commune; quare cum æquentur anguli recti BNE, BNI ab his comprehensi, tota æqualia sunt (Prop. 2.), & anguli EBN, IBN æquales. Sed angulus IBN æquatur angulo CBA ad verticem opposito (Coroll. 4. def. 10.); ergo etiam angulus NBE æquatur angulo CBA, & sphæra impulsa per rectam BA resiliet per rectam BE.

Si in linea AB alia sphęra jaceat quę motum per AB impediat, id ipsum duplici reflexione poterit hoc pacto obtineri. Ex A ducatur in repagulum CM perpendiculum AM, quod producatur in L, donec fuerit LM æqualis ipsi AM. Ex L inspiciatur idem, de quo supra, punctum I, & notentur puncta K, H, quibus in utroque repagulo linea visualis occurret. Dico, quod si sphera impingat in K, inde resiliet per KH, & iterum impingens in H resiliet per HE, anulumque trajiciet. Nam demonstrabitur ut supra æquari angulos AKM, LKM, CKH, itemque KHC, IHN, NHE.

Si recta LI tota jaceret extra angulum C, casus esset impossibilis. Sæpe etiam continget, ut repagula MC, CD vel superficiem habeant inæqualem, vel non satis firma sint, in quo casu angulus reflexionis angulo incidentiæ æqualis non erit. Ad hęc ipsa sphæræ moles, cujus nullam habuimus rationem, si satis magna sit, aliquem producet errorem, pręsertim in angulis valde acutis.

PROPOSITIO VI.

PArallelogramma super eadem basi, & intra easdem parallelas constituta æqualia sunt inter se.

Super eadem basi AD (Fig 28.), & intra easdem parallelas AD, BF, sint parallelogramma ABCD, AEFD. Dico hęc æqualia esse.

Dem. In triangulis ABE, DCF æquantur latera AE, DF, & AB, DC (Coroll prop. 3.), itemque EF, & BC æquales eidem AD, æquales erunt inter se: itaque addito communi segmento CE, erit quoque latus BE æquale lateri CF, & tota triangula æqualia (Prop. 4.) Dempto igitur communi triangulo CLE, erit quadrilaterum BCLA æquale quadrilatero DLEF, & addito communi triangulo ALD erit parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo AEFD. Q. E. D.

Coroll. 1.

Ductis AC, AF erunt triangula ACD, AFD parallelogrammorum dimidia (Coroll. 4. pr 3.) Ergo etiam triangula super eadem basi, & intra easdem parallelas constituta æqualia sunt.

Coroll. 2.

Si non eidem basi; sed æqualibus tamen basibus intra easdem insistant parallelas, & triangula, & parallelogramma erunt æqualia. Etenim si parallelogramma DB, HE habent æquales bases AD, GH, ductis rectis lineis AE, DF ob AD & EF parallelas, & æquales eidem GH: adeoque & inter se, erunt AE, DF parelleleę, & æquales (Coroll. 1. pr. 2.), eritque AEFD parallelogrammum, quod cum sit æquale parallelogrammis ABCD & EGHF erunt hęc æqualia inter se.

Coroll. 3.

Igitur parallelogrammum duplum est trianguli super eamdem vel æqualem basim, & intra easdem parallelas constituti.

Scholion.

Multa ex hac propositione & mira, & utilia descendunt. Ac primo quidem ostenditur, nullam esse quanti-

tita-

titatem ita tenuem, qua minor dari non possit. Cum enim recta BF in infinitum produci possit, puncto F magis ac magis recedente a puncto B, dummodo sumatur EF æqualis rectę BC, sive AD, semper parallelogrammum AEFD utcumque productum æquale erit parallelogrammo ABCD, unde apparet nullum in eo producendo, vel attenuando limitem inveniri. Quod si hęc parallelogramma sint corporum superficies, quę ex. gr. habeant unius digiti grassitudinem, poterit idem corpus in infinitum attenuari, & produci.

Secundò: licebit metiri planam quamlibet superficiem in plura divisam triangula, & agrorum dimensiones ad invicem comparare; in qua re cum veterum Geometrarum potissimum se exerceret industria, inde facultas ipsa & nomen habuit, & ortum. Nam in primis quodlibet rectangulum BD (Fig. 29.) tot unius pedis quadrata, sive, ut ajunt, quadratos pedes continebit, quot prodeunt, si unum latus per alterum multiplicetur; quandoquidem si latus AD quatuor continet pedes, AB, verò quinque, ductis totidem lineis adjacenti lateri parallelis, quatuor erunt ordines quadratorum pedum, & in singulis ordinibus quinque pedes quadrati; quare ut omnium summam habeas, duc 4 in 5, & habebis 20 pedes quadratos totius areæ dimensionem. Jam verò triangulum AED super eadem basi, & intra easdem parallelas ejus rectanguli dimidium est, & demissa perpendiculari EF in basim AD productam, si opus fuerit, erit hæc æqualis lateri AB. Unde ad habendam aream trianguli, dimidia basis in ejus altitudinem ducenda erit, vel dimidia altitudo in basim. Sic in eadem hypothesi dimidia basis duorum pedum, ducta in altitudinem EF quinque pedum, dabit 10 pedes quadratos, qui erunt ejus trianguli dimensio.

Igitur si metiri oporteat superficiem polygoni ABCDE (Fig. 30.) dividatur in triangula, ductis rectis DB, DA ab uno angulorum in alios, & habebitur singulorum dimensio ex basis, & altitudinis dimensione, quæ in singulis fuerit inventa. Contineat ex. gr. basis BD pedes 30, altitudo CF 20, duc 30 in 10, sive 15 in 20; habebis pedes quadratos 300, dimensionem trianguli BCD. Quod si idem in reliquis triangulis facias, habebis ex omnium summa totius polygoni dimensionem.

Eadem ratione areæ circularis dimensio obtinetur. Cum enim circulus ABE (Fig. 31.) divisus possit intelligi in infinitos sectores BCD, qui nullam ferè habeant curvitatem in arcu infinitè parvo, hi pro triangulis haberi possunt, quorum basis sit arcus BD, altitudo verò radius CB; itaque singulorum dimensio habetur ducendo radium BC in dimidium arcum BD; adeoque omnium summa, seu, quod perinde est, area circularis æquatur facto ex dimidia peripheria in radium. Itaque si circularis areæ mechanica dimensio quæratur, peripheriam, & radium metiri oportet, & hunc in dimidiam ducere peripheriam.

PROPOSITIO VII.

IN omni triangulo rectangulo quadratum lateris angulo recto oppositi æquatur quadratis reliquorum laterum simul sumptis.

Sit triangulum BCD (Fig. 32.) rectangulum in C. Dico quadratum BAGD hypothenusę, seu subtensę DB (sic enim vocant latus angulo recto oppositum) æquari quadratis reliquorum laterum DHIC, CKLB simul sumptis. Ducatur enim CF parallela lateribus BA, DG (per Coroll. 3. def. 17.), & rectæ BH, CG. In duobus triangulis CDG, HDB latera DG, DC æquantur lateribus DB, DH (per def. 15.) anguli verò ab his lateribus comprehensi GDC, BDH æquales sunt, cum ambo coalescant ex angulo recto, & angulo CDB utrique communi. Ergo tota triangula æqualia sunt (per prop. 2.) Sed triangulum GCD habet eamdem basim cum rectangulo DGFE, & intra easdem parallelas GD, CF continetur; ergo hoc rectangulum hujus trianguli duplum est (per prop. 6.). Similiter quadratum DCIH duplum est trianguli DBH, sunt enim super eamdem basim HD, & intra easdem parallelas HD, IB constitura tuta; ergo cum æqualia sint triangula, erit etiam quadratum HICD æquale rectangulo GDEF. Eadem demonstratione ostenditur quadratum CBLK æquari rectangulo FEBA: ergo quadratum subtensæ DB æquatur quadratis laterum rectum angulum comprehendentium: Q. E. D.

Coroll.

Quod si quadrata duorum laterum in triangulo simul sumpta æqualia sint tertii lateris quadrato, facile ostenditur angulum huic lateri oppositum rectum esse. Nam si in triangulo ACB (Fig. 33.) quadrata laterum AC, CB simul sumpta æquentur quadrato lateris AB, ex puncto C erigatur super CB perpendicularis CD (per Coroll. 3. pr. 5.) quæ fiat æqualis lateri CA, & ducta BD, erit hujus quadratum æquale quadratis laterum BC, CD, sive BC, CA per construct. adeoque etiam quadrato AB ex hypothesi. Igitur recta AB æquatur rectæ BD, & (per prop. 4.) triangula ACB, BCD æqualia sunt, & Angulus ACB æqualis angulo BCD, qui rectus est per constructionem.

Scholion.

Per hanc propositionem, cujus auctor fertur Pithagoras, datis in triangulo rectangulo duobus lateribus, tertius invenitur. Nam si unum latus ex. gr. 3. palmorum sit, alterum 4; quadratum primi 9 quadratos palmos continebit, quadratum alterius 16; igitur horum summa dabit quadratum lateris angulo recto oppositi palmorum 25, cujus radix erit ipsa lateris extensio, quinque scilicet palmorum. Contra si detur latus angulo recto oppositum 5 palmorum, & alterutrum latus 3 palmorum, ex primi quadrato 25 aufer quadratum secundi 9, & differentia 16 erit quadratum lateris quæsiti, cujus radix 4 est ipsum latus.

Porrò sicuti factum ex numero in seipsum ducto numeri quadratum dicitur, ita numerus qui in seipsum ductus datum efficit numerum hujus radix quadrata dicitur. Ita quadratum 3 est 9, & radix 9 sive $\sqrt{9}$ (sic enim radices designantur) est 3. Igitur datis in triangulo rectangulo lateribus duobus, utriusque quadratum, ac propterea quadratum tertii lateris numquam non licebit obtinere. At non semper ipsius quæsiti lateris exacta habebitur dimensio, quandoquidem non omnis numeri quadrata radix inveniri potest nisi per approximationem. Sic Radix 1 est 1, & $\sqrt{4}$ est 2; at ipsius 2 non potest accurate radix inveniri, cum nullus sit numerus vel integer vel fractus, qui in seipsum ductus efficiat 2. Definiunt Arithmetici $\sqrt{2}$ quamproximè: æqualem nempe 1. 4 1 4 2 &c. hoc est, unitati, quatuor decimis partibus unitatis, uni centesimæ, quatuor millesimis, duabus deni smillesimis; verum supersunt adhuc ad exactam radicem obtinendam plus quam duæ, & minus quam tres denæ millesimæ partes unitatis, & numquam ea radix determinabitur, quin aliqua quantitate vel a vera deficiat, vel veram excedat. Si itaque latera rectum angulum comprehendentia æqualia sint, subtensa latus unum continebit, ac prætera quatuor decimas ipsius partes, 1 centesimam 4 millesimas, 2 denas millesimas, & sic in infinitum, ita ut aliquid semper superfit, nec ullo possit vel integro vel fracto numero exactè definiri: ex quo quantitatum divisibilitas in infinitum colligitur.

Hinc etiam quantitatum incommensurabilium notitia pendet. Mensura quantitatis dicitur quantitas, quæ aliquoties sumpta illam adæquat. Ita pes est passus mensura, qui quinque pedibus constat; digitus est mensura pedis Parisiensis, qui duodecim digitis constat; at ejusmodi digitus pedem Romanorum non metitur, nam decies sumptus ipsum non adæquat, & undecies sumptus ipsum excedit, siquidem pes Romanus decem continet digitos Parisienses ac præterea 11 partes ipsius duodecimas, posita ratione pedis Parisiensis ad Romanum, ut 144 ad 131.

Quantitates commensurabiles dicuntur illæ, quæ aliquam habent communem mensuram: Ita pes Romanus, & Parisinus commensurabiles sunt, communemque mensuram habent Lineam sive duodecimam digiti partem, siquidem Parisinus ejusmodi Lineas continet 144, Romanus 131.

Con-

Contra incommensurabiles sunt, quæ nullam habent mensuram communem.

Quod dentur ejusmodi quantitates incommensurabiles etiam Geometria demonstrat, cum geometricè demonstretur in triangulo rectangulo & Isosccle ABC (Fig. 34) nullam esse communem mensuram lateris AB, vel BC, & subtensæ AC. Duo tamen præmittere oportet axiomata, quæ ex data Mensuræ definitione per se patent.

I. Quod metitur totum, & ejus partem, etiam residuum metitur.

II. Quantitas major minorem metiri non potest.

Sit igitur, si fieri potest, BM communis mensura basis AC, & laterum. Bifariam dividatur angulus BAC (per prop. 5.) per rectam AE, quæ occurrat in E lateri BC, & ex E ducatur in basim perpendiculum EF (per Coroll. 2. prop. 5.), ducaturque EG basi parallela (per Coroll. 3. def. 17.) In duobus triangulis AEB, AEF præter basim AE communem, & angulos ad B & F rectos, æquales erunt anguli ad A: ergo etiam latera AF, FE æquantur lateribus AB, BE (per Coroll. 1. prop. 3.) Præterea ob parallelas GE, AC facilè ostenditur esse etiam isoscele triangulum GBE (Coroll. 1. def. 17. & Coroll. 2. prop. 3.) cumque duobus triangulis rectangulis EFC, ABC communis sit angulus C: erit (Coroll. pr. 1, & Coroll. 2. pr. 3.) isoscele etiam triangulum EFC: Quare ob æqualia latera EB, EF, erunt etiam æqualia BG, FC, eruntque æqualia (per prop. 2.) triangula rectangula EBG, EFC, & æquales bases EG, EC. Quod si iterum bifariam secetur angulus BGE per rectam GH, & demittatur HL perpendicularis in GE. & HI eidem parallela, eadem demonstratione invenientur æquales rectæ lineæ GB, GL; BH, HL: BI, LE, ac demum HI, HE: eademque omninò contingent, si hæc operatio continuari intelligatur donec recta respondens ipsi GH cadat alicubi in D supra M.

Jam verò si BM metiebatur & latera AB, BC, & basim AC, metietur quoque AF æqualem ipsi AB, ergo per primum axioma ex paulo ante traditis metietur quoque ipsius residuum FC, & GB, BE ipsi æquales: sed metiebatur totam BC, ergo etiam residuum EC, & ipsi æqualem GE. Eodem argumento ostenditur eamdem BM metiri rectas GL, LE, IB, BH, HE, HI &c. unde patet eo demum deveniri ut eadem BM metiatur quoque BD se minorem, quod implicat per axioma secundum. Ergo nequit inveniri communis mensura laterum AB, BC, & basis AC, licet minor & minor in infinitum inquiratur.

PROPOSITIO VIII.

IN omni triangulo majori lateri major angulus opponitur.

In triangulo ABC (Fig. 35.) sit latus AB majus latere AC; dico etiam angulum ACB majorem fore angulo ABC.

Demonst. abscindatur ex majori latere segmentum AD æquale lateri AC, & ducta CD erit triangulum ACD isoscele, adeoque (Coroll. 2. prop. 2.) angulus ADC æqualis erit angulo ACD: sed CBA minor est externo CDA (prop. 1.) ergo minor est angulo ACD, & adhuc minor angulo ACB, Q. E. D.

Coroll. 1.

Hinc sequitur in omni triangulo majori angulo majus latus opponi. Sit enim angulus ACB major angulo ABC; latus AB non erit lateri AC æquale, nam triangulum esset isoscele, & anguli prædicti essent æquales (Coroll. 2. prop. 2.): sed neque latus AB minor est latere AC, nam angulus ABC major esset angulo ACB ex demonstratis, reliquum ergo est, ut AB majus sit latere AC.

Coroll. 2.

Quod si igitur in duobus triangulis ABC, ABD (Fig. 36.) fuerint duo latera AB, BC, æqualia duobus AB, BD, anguli verò ab his lateribus comprehensi fuerint inæquales, erit basis AD quæ majorem angulum subtendit,

tendit, major quam AC minori angulo opposita. Nam si intelligatur unius trianguli latus AB lateri alterius sibi æquali supetimponi, ut hic factum supponitur, congruent quidem ista latera, sed latus BD cadet extra latus BC ob angulum ABC majorem angulo ABC. Jam verò centro facto in B intervallo BD describatur circulus, qui transibit per C ob æquales BD, BC, ducaturque CD. Erit CBD isosceles, in triangulo verò ACD angulus ACD major est angulo BCD, ac proinde angulo quoque CDB (per Cor. 2. pr. 2.) ergo multo major erit angulo CDA; adeoque latus AD oppositum angulo majori majus est latere AC, quod minori opponitur.

Coroll. 3.

Contra verò si duo triangula, duo latera habuerint æqualia, unius vero basis alterius basi major sit, erit angulus basi oppositus in illo major quàm in hoc. Nam si hos angulos æquales esse dicas, bases quoque æquales esse opportebit (per prop. 2.) quod est contra hypothesim; si vero dicas angulum minori basi oppositum majorem esse, ex modo facta demonstratione constabit hunc angulum a majori basi subtendi, quod hypothesi item repugnat.

Coroll. 4.

Omnium rectarum, quæ ab aliquo puncto C (Fig. 37.) duci possunt ad rectam indefinitè productam KL, brevissima est perpendicularis CB; nam si ducatur alia quævis CA in triangulo rectangulo CBA erunt anguli C & A simul sumpti recto æquales (Coroll. 3. prop. 2.): ergo angulus A minor est recto ABC, adeoque latus AC majus est latere CB; id quod etiam ex præcedenti constat, siquidem quadratum lateris AC æquatur quadratis laterum AB, BC simul sumptis.

Coroll. 5.

Quod si igitur centro facto in C intervallo CB circulus describatur, hic rectam CA alicubi secabit in G ita ut abscindat CG æqualem CB. Ergo quodlibet punctum A rectæ AL extra circulum cadet, qui propterea

tan-

tangitur ab hac recta in unico puncto B, in quo perpendicularis est diametro BC. Recta igitur, quæ ab extrema circuli diametro eidem perpendicularis ducitur, circuli tangens est.

Coroll. 6.

Si ducatur BF sub angulo quantumvis tenui ABE, eique fiat æqualis angulus BCA, in triangulo EBC, erunt duo anguli EBC, & BCE simul sumpti æquales recto ABC: ergo tertius angulus CEB rectus erit (prop. 1.), & recta CE erit per hanc minor recta CB, sive CG. Quare punctum E erit intra circulum. Ex quo sequitur inter tangentem AB & arcum circuli nullam duci posse rectam lineam BEF; & angulum, quem arcus circuli efficit cum tangente minorem esse quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur.

Coroll. 7.

Si duo circuli FGB, IOB (Fig. 38.) eamdem habent tangentem, recta PB eidem in eodem puncto perpendicularis per utriusque centrum C, D transibit, id quod ex Corollario quarto facilè deducitur. Quod si ducatur CG, & DG, quæ producta secabit in O circulum IOB, & in N tangentem AB, erit semper in triangulo GDC latus DG minus duobus reliquis GC, CD simul sumptis (quod etiam facilè ostenditur per hanc, & Coroll. 2. prop. 2; & per se patet): Quare cum radii CG, CB æquales sint, erit recta DG minor quàm DB, sive DO, quæ item ut DB radius est circuli IOB. Ergo quodlibet punctum G circuli FGB erit intra circulum IOB, ac propterea illi circuli in unico puncto B se mutuo contingent ubi rectam tangunt AH.

Scholion.

Hinc quoque divisibilitas in infinitum, & admirabilis infiniti natura deducitur. Nam si adhuc supra punctum D centro facto in L describatur circulus QMB, ille quoque dictos circulos, & communem tangentem AH in unico puncto B continget, ac proinde rectam DN alicubi secabit in M inter O & N, & si alii & alii in infinitum majori semper radio describantur circuli,

culi, minus semper abscindent segmentum MN, illudque in totidem partes secabunt; cumque incrementa radii circulorum nullum habeant limitem, nullum pariter habebunt decrementa rectæ MN. Quod verò majorem habet admirationem, & magnas omni tempore concertationes excitavit, angulus contactus, quem scilicet facit arcus FGB cum tangente AB in infinitas partes dividitur ab arcubus illorum circulorum, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit ex Coroll. 4. Hujus rei non alia videtur esse causa, quam anguli rectilinei natura diversa ab ea quam habet angulus curvilineus in puncto contactus: ita ut, quemadmodum infinitæ lineæ numquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quantitates ratio potest assignari licet in infinitas partes dividi possint; ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sint, licet sint divisibiles in infinitum. Et licet id majorem habeat admirationem; tamen Geometricas demonstrationes percipienti erit evidens angulum contactus & minorem esse quovis rectilineo, & in infinitos curvilineos dividi posse.

PROPOSITIO IX.

IN circulo angulus ad centrum duplus est angulo ad peripheriam, si eidem arcui insistant.

Eidem arcui AB (Fig. 39. 40. 41.) insistant anguli ACB ad centrum, & ADB ad peripheriam: dico primum illum hoc altero duplum esse.

Nam si alterutrum latus DA per centrum transeat (ut in Fig. 39.) cum æquales sint anguli CDB, CBD in triangulo isoscele BCD, erit externus BCA æqualis duobus internis oppositis CDB, CBD (prop. 1.) ac duplus ipsorum utrovis D.

Quod si centrum C cadat vel intra angulum, ut in Fig. 40., vel extra, ut in Fig. 41., ducta DCE, erit ut supra angulus externus ACE duplus interno opposito ADE, itemque ECB duplus angulo EDB: quare angulus

ACB

ACB, qui est angulorum ACE, ECB summa in primo differentia in secundo casu, duplus est angulo ADB qui angulorum ADE, BDE est item summa in primo differentia in secundo casu: Q. E. D.

Coroll. 1.

Quare sicut anguli ad centrum mensura est totus arcus, cui insistit, erit anguli ad peripheriam mensura dimidium illius arcus. Angulus igitur ADB (Fig. 42.) diametro AB, hoc est semiperipheriæ AFB insistens, quique angulus in semicirculo dicitur, mensuram habet quartam circumferentiæ partem, ac rectus proinde est; angulus EDB in minori segmento existens, ac propterea arcui majori EFB insistens obtusus, ac demum angulus FDB in majori segmento acutus est.

Coroll. 2.

Si ex dato puncto A (Fig. 43.) ducere oporteat rectam lineam, quæ datum circulum tangat, ducta AC ad centrum dati circuli C, eaque bifariam divisa in B (Coroll. 1. pr. 5.) centro facto in B, intervallo BA describatur circulus priorem secans in D & E, ducanturque rectæ AD, AE, quæ circulum tangent (Coroll. 5. prop. 8.). Junctis enim punctis E, C, D rectus erit tam angulus AEC, quam ADC, cum uterque in semicirculo existat.

Coroll. 3.

Hinc quoque manifestum fit in omni quadrilineo ABCD (Fig. 44.) circulo inscripto angulos oppositos simul sumptos duobus rectis æquari. Etenim mensura anguli ABC est dimidius arcus ADC, & mensura anguli ADC est dimidius arcus ABC. Quare utriusque simul mensura est semicirculus, sive 180°. Unde etiam facilè deducitur, quod quadrilineum, in quo anguli oppositi duobus rectis æquantur, in eodem circulo existit.

Coroll. 4.

Mensura anguli ABC (Fig. 45.), quem efficiunt chordæ CD, AE intra circulum concurrentes, erit semisumma arcuum interceptorum AC, DE: mensura vero an-

guli

guli AFC, quem efficiunt chordæ AE, CG extra circulum concurrentes erit semidifferentia arcuum interceptorum AC, EG. Ducta enim EC erit angulus externus ABC (Prop. 1.) æqualis duobus internis oppositis BEC, BCE, quorum alterum metitur dimidius arcus AC, alterum dimidius arcus DE; horum igitur summam, sive angulum ABC metitur semisumma eorumdem arcuum. Pariter cum angulus externus AEC æquetur internis oppositis ECF, EFC, erit angulus AEC dempto angulo ECG æqualis angulo F, sed anguli AEC mensura est dimidius arcus AC, & anguli ECG dimidius arcus EG. Ergo mensura anguli F est dimidius arcus AC dempto dimidio arcu EG, sive semidifferentia eorumdem arcuum.

Coroll. 5.

Si chordę circuli AB, CD (Fig. 46.) parallelæ sint; ducta CB, erunt anguli alterni DCB, CBA æquales (Coroll. 1. def. 7.) ac proinde arcus quoque AC, DB æquales sunt, cum ipsorum dimidia æquales angulos metiantur. Ergo lineæ in circulo parallelæ æquales utrinque arcus intercipiunt.

Coroll. 6.

Angulos ABE, ABF (Fig. 47.) quos efficit chorda BA cum tangente EF metiuntur arcus dimidii BA, BDA. Etenim cum sit diameter DB tangenti perpendicularis (*Coroll.* 3. *prop.* 8.) & ducta AD angulus in semicirculo DAB rectus sit, erunt anguli reliqui ejusdem trianguli ADB, ABD simul sumpti æquales recto EBD (Coroll. 3. prop. 2.). Quare sublato communi ABD erit reliquus ADB æqualis reliquo EBA, ac proinde hujus mensura eadem erit quæ anguli ADB, dimidus nempe arcus AB. Præterea anguli ABE, ABF duobus rectis æquantur, (Coroll. 2. def. 10.) & mensuram habent semicirculum, quare cum angulum ABE metiatur dimidius arcus AB, anguli ABF mensura erit dimidium residui ADB.

Scholion.

Pleręque propositionum, quas Euclides in secundo libro demonstravit, vel etiam in tertio, facilius demonmonstrantur; præmissis aliquibus ex sexto, quæ portionum doctrinam supponunt: Hanc ab Eucli sius traditam & obscure in quinto breviter hic & cide exponemus.

Nosse oportet in primis notarum quarumdam ficationem, quarum usus in Algebra frequens est teræ *a*, *b*, *c* &c. denotant quamlibet quantita & ut a cognitis incognitæ discriminentur has der solent postremis alphabeti litteris *x*; *y*, *z* &c.

Signum additionis est $+$, effertur autem plu $2 + 3$ legitur, duo plus tria; ac denotat utri illius numeri summam.

Signum subtractionis est $-$; effertur autem mi Sic $5 - 2$, legitur, quinque minus duo, ac d tat id quod relinquitur, si e priori numero post auferatur.

Signum æqualitatis est $=$, sic $2 + 3 = 5$ d tat summam duorum numerorum tertio æqualem

$>$ est signum excessus unius quantitatis super ali $<$ verò est signum defectus unius quantitatis ab Sic $10 > 8$ denotat denarium numerum majorem se quam 8, & $7 < 9$ denotat 7 esse minorem quam

Si quantitati quantitas interposita lineola subjicia quotum denotat ex superiori per inferiorem divi sic $\frac{a}{b}$ denotat quotum ex *a* divisa per *b*, seu quo inferior terminus *b* qui denominator dicitur, in su riori, seu numeratore contineatur. Sic $\frac{8}{2} = 4$. Desig ri etiam solet divisio unius quantitatis per aliam d bus punctis litteris interjectis, sic $a : b = \frac{a}{b}$

Demum signum multiplicationis est $\times$, & efferri let *in*: sic $a \times b$ legitur *a* in *b*, & denotat factum multiplicatione ipsius *a* per *b*. Sic $2 \times 3 = 6$, hoc 2 ter sumpta efficiunt 6. Cæterum multiplicatio qua titatum per litteras communiter designari solet per i mediatam ipsarum litterarum conjunctionem. Sic *a* deno-

denotat factum ex *a* in *b*, sive *a* toties sumi, quot unitates continentur in *b*, si *b* numerus est integer. Quod si quantitas se ipsam multiplicet, denotatur factum apponendo litteræ ad partem ejus dextimam numerum, qui aliquantulum supra ipsam litteram assurgat. Sic *aa*, sive quadratum *a* scribitur a^2, & *aaa*, sive cubus ipsius *a* scribitur a^3, & sic deinceps.

Proportio alia est Arithmetica, alia Geometrica. Arithmetica est quæ inter quatuor terminos invenitur, quorum duo primi æque differunt inter se, ut duo reliqui, ita ut si primus secundo major est, etiam tertius major sit quarto, & contra. Indicatur autem hæc proportio punctis quibusdam hoc pacto 3 . 5 .. 7 . 9. Sunt nempè hæ quantitates arithmeticè proportionales, quia eadem quantitate differunt 3 & 5, 7 & 9, duabus scilicet unitatibus. Ex quo fit, ut in Arithmetica proportione summa extremorum semper æqualis sit summæ mediorum, cum quartus terminus tertium contineat, atque id præterea, quo secundus differt a primo sic $3 + 9 = 5 + 7 = 12$.

Proportio Geometrica est quæ inter quatuor terminos intercedit, quorum primus toties secundum continet, vel aliquam ejus partem, quoties tertius continet quartum, aut similem ejusdem partem: vel etiam generalius, quorum primus ita continet secundum, quemadmodùm tertius continet quartum. Hæc autem ipsa continentia dicitur ratio unius termini ad alium, quorum primus dicitur *antecedens*, secundus *consequens*, & illo aucto, hoc imminuto ratio crescit. Hæc proportio punctis ita indicatur $a . b :: c . d$; nempe, ita est *a* ad *b*, ut *c* ad *d*. Sic 4 . 2 :: 6 . 3, quia sicut antecedens primæ rationis 4 bis continet suum consequentem 2, ita antecedens secundæ rationis 6 bis continet suum consequentem 3: & 3 . 7 :: 6 . 14, quia sicut numerus 7 bis continet 3, ac præterea tertiam ipsius partem 1, ita 14 bis continet 6, ac præterea tertiam ipsius partem 2. Et in genere ut sit $a . b :: c . d$, si $a = mb$, oportet ut etiam sit $c = md$.

Ex

Ex data rationis explicatione duo inferuntur:

I. Ratio est ille ipse numerus m, qui exprimit relationem termini primi ad secundum: unde si primus bis continet secundum, dicitur *duplam* ad hunc rationem habere, si ter, *triplam* &c. Si vero continet ejus dimidium, dicitur habere ad illum rationem *subduplam*, si tertiam partem *subtriplam* &c. Quare ratio a ad b scribi potest tamquam si fractio esset $\frac{a}{b}$, aut $a:b$.

II. Termini æquales eamdem habent ad alium rationem, & si eamdem habeant ad alium rationem æquales sunt.

PROPOSITIO X.

IN terminis geometricè proportionalibus factum extremorum æquatur facto mediorum: & contra, si factum sub extremis terminis æquatur facto sub mediis, ipsi termini sunt geometricè proportionales.

Sit $a.b::c.d$ & si m exprimat quomodo, aut quoties b contineatur in a, ita ut sit $a = mb$, erit etiam ex proportionum notione $c = md$: est ergo $ad = mbd$, & $cb = mdb$, sunt autem mbd, & mdb idem factum ex b in d iterum ductum in m, ergo $ad = cb$: sive factum ex primo in quartum æquale facto ex secundo in tertium, quod erat primum.

Sit jam $ad = cb$, dico esse $a.b::c.d$. exprimat m rationem a ad b, sive sit $a = mb$. Erit $ad = mbd$, sed $ad = bc$, ergo $cb = mbd$, sive dividendo per b $c = md$, hoc est, idem numerus m exprimet etiam rationem c ad d: Q. E. D.

Coroll. I.

Primæ hujus propositionis parti nititur regula, quam auream vocant Arithmetici, sive trium. Emit aliquis 15 frumenti modios aureis 95, quærit quanti stabunt modii 45. Exprimat x hunc numerum ignotum aureorum, eritque $15 . 95 :: 46 . x$. Unde $15x = 95 \times 45 = 4275$, & dividendo per 15, erit $x = 285$. Obtinetur igitur quæsitus numerus, si tertius terminus in secun-

secundum ducatur, & factum dividatur per primum.

Coroll. 2.

Ex altera propositionis parte quilibet, quod quoties sit $a.b::c.d$, erit quoque *alternando*, ut ajunt, $a.c::b.d$, & *invertendo* $b.a::d.c$, & *componendo* $a+b.b::c+d.d$, & *dividendo* $a-b.b::c-d.d$, nam semper productum extremorum æquale invenitur producto mediorum. In primis enim duabus permutationibus habentur ad & bc æquales quantitates ex supposita proportione. In tertia habentur $ad+bd$, & $bc+bd$, in quarta $ad-bd$, & $bc-bd$, quæ item quantitates æquales utique inter se sunt, quandoquidem æqualibus ad, & bc, in primo casu adjicitur, in secundo adimitur eadem quantitas bd. Quinimmò regula quoque universalior ex eadem ratione deducitur. Nempe in terminis geometricè proportionalibus est, ut summa, sive differentia primi & secundi ad primum vel secundum, aut contra, uti primus vel secundus ad summam vel differentiam primi & secundi: ita summa, vel differentia tertii & quarti ad tertium vel quartum; sive tertius vel quartus ad summam vel differentiam tertii & quarti. Qui Canon nil fere differt ab axiomate quarto. Porro omnes has permutationes quivis poterit in numeris experiri.

PROPOSITIO XI.

Rationem compositam explicare.

Difficilius intelligitur ratio ex pluribus rationibus composita, quam alii aliter definiunt. Nos illam dicemus rationem ex pluribus compositam rationibus, quæ intercedit inter productum ex omnibus illarum rationum antecedentibus, & productum ex omnibus earumdem consequentibus. Sic ratio composita ex rationibus 2 ad 3, & 4 ad 5, est ratio 2×4 ad 3×5, sive 8 ad 15. Et in genere ratio composita ex rationibus a ad b, c ad d, e ad f est ratio ace ad bdf.

Coroll. 1.

Hinc ratio duplicata dicitur quæ intercedit inter quadrata, & triplicata quæ inter cubos, & sic deinceps. Cum enim quadratum sit quantitas quævis in se ipsam ducta; & cubus sit idem quadratum in eandem ductum quantitatem, manifestum est rationem compositam ex a ad b, iterumque ex a ad b esse rationem aa ad bb, hoc est unius quadrati ad aliud, & sic de reliquis.

Coroll. 2.

Sequitur etiam rationem a ad b componi ex rationibus ejusdem a ad quemlibet aliud terminum c, & hujus ipsius c ad ipsum b; nam ratio ex his composita est ac ad cb, quæ non alia est quam ratio a ad b. Etenim si quantitas a est tripla, centupla &c. quantitatis b, erit eadem quantitas a in aliam quamlibet c ducta dupla pariter centupla &c. quantitatis ipsius b in eamdem c ductæ. Immò in genere ratio a ad b componitur ex rationibus a ad quamlibet c, & c ad quamlibet d, & d ad quamlibet e &c. & postremi termini ad b: etenim ratio ex his omnibus composita est ratio $acde$ &c. ad cde &c. b, sive (ob cde &c. commune terminorum coefficiens) eadem ratio ipsius a ad b. Id vero probe tenendum est cum quantitatis incognitæ ratio ad notam quantitatem inquiritur, cujus ratio ad aliam pariter notam quantitatem habetur, & hujus ad aliam &c. & tandem postremi termini ad quantitatem quæsitam. Non ratio quantitatis datæ ad quæsitam erit factum ex omnium illarum rationum antecedentibus, ad factum ex omnibus consequentibus.

Coroll. 3.

Facile etiam deducitur fractiones esse inter se in ratione composita ex directa numeratorum, & inversa denominatorum; ex. gr. ratio $\frac{a}{b}$ ad $\frac{c}{d}$ componitur ex ratione directa numeratoris a ad numeratorem c, & inversa denominatoris b ad denominatorem d; sive (quod perinde est) ex ratione d ad b. Est enim $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} :: ad \cdot bc$,

quando-

quandoquidem factum sub extremis terminis invenitur æquale facto sub mediis. Nam $\frac{eaa}{d} = \frac{cd}{b}$ cum utrumque sit ca. Item patet in numeris.

PROPOSITIO XII.

IN triangulis æquales habentibus angulos latera æqualibus angulis opposita sunt proportionalia.

Sint triangula ABC, FGH (Fig. 48. 49.) æquiangula: dico latera FG, GH lateribus AB, BC æqualibus angulis oppositis esse proportionalia.

Demonstr. Fiat BE = FG, BD = GH, & ducta ED ob æquales angulos B, G erunt æqualia (Prop. 2.) triangula FGH, EBD; & trianguli ad basim E, D æquales angulis F, H, hoc est (ex hypothesi) angulis A & C. Ergo ED, AC parallelæ sunt (Coroll. 1. def. 17.), ac propterea ductis rectis AD, EC erunt triangula EDA, EDC super eadem basi, & intra easdem parallelas æqualia (Coroll. 1. prop. 7.) Addito ergo communi triangulo EBD, erunt tota triangula ABD, CBE æqualia. Sed triangula, quæ eamdem habent altitudinem, & æqualibus basibus insistunt æqualia sunt (Coroll. 2. prop. 6.), ergo triangulum CEB ita continebit triangulum DEB, quemadmodum basis CB basim BD; pariterque triangulum ADB ita continebit idem triangulum EDB, quemadmodum basis AB continet basim EB. Jam verò idem triangulum EBD æquè continetur ab æqualibus triangulis CEB, ADB: ergo etiam CB ita continet BD sive HG, quemadmodum AB continet EB sive FG, eritque AB. BC :: FG. GH, sive alternando AB. FG :: BC. GH: Q. E. D.

Coroll. 1.

Eadem methodo facilè ostenditur ipsa triangula æquiangula esse inter se in ratione duplicata laterum homologorum, hoc est, ut quadrata laterum quæ angulis æqualibus opponuntur. Etenim triangulum DEB est ad triangulum CEB, ut basis DB ad basim CB, & triangulum CEB est ad triangulum CAB ut EB ad PA, site iterum ut BD ad BC. Ergo ratio trianguli DEB ad CAB (Coroll. 2. prop. 11.) componitur ex rationibus DB ad CB, atque iterum ejusdem DB ad eamdem CB eruntque triangula ut quadrata ipsarum DB, CB. Itaque si fuerit DB dimidia ipsius CB, adeoque etiam BE dimidia AB, erit triangulum DEB dimidium triangnli CEB, & CEB dimidium trianguli CAB, ac proinde triangulum DEB erit dimidium dimidii, sive quarta pars trianguli CAB.

Coroll. 2.

Si in triangulis FGH, ABC anguli B & G fuerint æquales, & latera FG, GH proportionalia lateribus AB, BC, erunt triangula æquiangula. Fiat enim BE = GF, ducaturque ED parallela AC. Æquiangula erunt triangula BED, BAC (Coroll. 1. def. 17.) ac proinde AB. BC :: EB. BD. Est autem ex hypothesi AB. BC :: FG. GH, ergo EB. BD :: FG. GH, & alternando EB. FG :: BD. GH. Cum sit igitur EB = FG, erit etiam BD = GH: & ob angulos B & G æquales erunt æqualia tota triangula EBD, FGH (Prop. 2.). Sunt vero EBD, ABC æquiangula, ergo etiam FGH & ABC æquiangula sunt.

Coroll. 3.

Quod si triangulorum FGH, ABC tria latera tribus sint lateribus proportionalia, etiam hæc eadem demonstratione erunt æquiangula, Sumpta enim EB = FG, & ducta ED parallela AC, erit EB. ED :: AB. BC :: FG. GH: & alternando EB, FG :: BD. GH, hoc est, in ratione æqualitatis. Eodem pacto ostendetur FH = ED: quare triangula FGH, EBD habent tria latera æqualia singula singulis, adeoque æqualia sunt (Prop. 4.) Cumque EBD, ABC æquiangula sint, eruntetiam FGH, ABC.

Coroll. 4.

Cum sit, ex demonstratis in propositione, AB. BE :: BC. BD, erit dividendo (Coroll. 2. prop. 10.) AE. BE :: DC. BD, ex quo sequitur rectam BD, (Fig. 50.) quæ bifariam dividit angulum B in triangulo ABC basim dividere in ratione laterum. Etenim producto latere AB

donec

donec fiat BE = BC, ductaque EC, erunt æquales anguli ad basim in triangulo isoscele EBC (Coroll. 11 prop. 2.); quare angulus externus ABC duobus internis & oppositis æqualis (Prop. 1.) duplus erit anguli E, & ejus dimidium ABD = BEC. Cum igitur in rectis BD, EC externus angulus ABD sit interno opposito BEC æqualis, erunt ipsæ parallelæ inter se, ac proinde AD. DC:: AB. BE, sive BC, quæ per constructionem ipsi BE æquatur.

Coroll. 5.

Pariter si duæ rectæ AB HR (Fig. 51.) occurrant utcumque parallelis EC, FD, GK, ab his secantur in partes proportionales, ut sit EF. CD:: FG. DK. Ducta enim CLM, quæ sit parallela ipsi AB, erunt CL, LM æquales ipsi EF, FG (Coroll. 4. prop. 3.): sunt verò in triangulis MCK, LCD, LC. LM:: CD. DK, ergo etiam EF. FG:: CD. DK.

Coroll. 6.

Si datis tribus rectis quæratur quarta proportionalis, fiat quilibet angulus CAB (Fig. 50.), & in alterutro latere sumantur AE, AB duabus primis datis æquales, tertiæ vero æquale fiat latus AC, & ducta EC ducatur ex puncto B recta BD ipsi EC parallela; eritque AD quarta proportionalis quæsita: erit enim AE. AB:: AC. AD. Si verò rectam AC in data ratione dividere oporteat, sumantur AB, BE æquales terminis datæ rationis, & eadem constructio dabit AB. BE:: AD. DC. Ex quo etiam divisibilitas in infinitum deducitur. Cum enim esse possit AE utcumque multiplex ipsius AB in infinitum, poterit etiam esse AD quantum libuerit submultiplex AC pariter in infinitum.

Scholion.

Figuræ similes dicuntur, quarum omnes anguli æquales sunt singuli singulis, & latera circa æquales angulos proportionalia. Hinc patet similia esse triangula æquiangula, quorum proprietates, quas exposuimus, incredibile dictu est quanti sint usus in Mathematicis. Earum ope facillimè solvuntur problemata omnia, quæ ad Trigonometriam, hoc est ad triangulorum dimensionem, pertinent. Hinc & altitudines, & distantias metimur, & alias hujusmodi quantitates per quadrantem in gradus divisum, & eam quam scalam vocant.

Quadrantis constructio non est admodum difficilis. Fiat in aliqua solidiori materia rectus angulus ABC (Fig. 58.) & centro facto in B mediocri intervallo BA describatur quadrans ADEC, ac duo alii interius paulo minori intervallo. Centris A & C intervallis AB, CB inveniantur puncta D, E, eritque tam AE, quam CD graduum 60. (Coroll. 4. prop. 2.): quare cum graduum 90 sit totus quadrans, erit tam AD quam CE, & DE graduum 30. Si igitur in tres partes æquales secentur arcus AD, DE, EC (Schol. prop. 5.), dividetur quadrans in novem arcus æquales, quorum singuli denos gradus contineant. Quod si hi rursus bifariam dividantur (Prop. 5.), quinos quosque gradus obtinebis. Demum singuli gradus haberi poterunt, eorum mensuram per attentationem inquirendo, vel per Coroll. 6. hujus, cum arcus ejusmodi parum differant a rectis lineis. Hæc figura rectis lineis CB, BA, & arcu CA comprehensa quadrans dicitur.

Scala quoque facile costruitur hoc pacto. Sub angulo quocumque B (Fig. 59.) ducantur rectæ AB, BD. A puncto B ad E sumantur decem partes æquales, & fiat BD quintupla ipsius BE in decem partes æquales divisa, quarum prima est a B ad 100, sumptisque a B ad A 20 partibus æqualibus, compleatur Parallelogrammum ABDC, & ab omnibus divisionum punctis rectæ AB, itemque rectæ BD (excepto primo quod jacet inter B & E) ducantur rectæ parallelæ lateribus parallelogrammi: tum divisa quoque AF in decem partes æquales, quarum prima sit AI, agantur obliquè a singulis divisionum punctis BI, & reliquæ, quarum postrema desinit in F, quæque parallelæ erunt inter se (Coroll. 1. pr. 2.) cum æquales, & parallelas lineas includant. Numeris, ut in figura factum est, distributis, manifestum est rectam BD quinquaginta particulas EO con-

continere, quarum decem in EB continentur; partemque EO in viginti æquales partes gradatim divisam esse ob latus EF trianguli OFE in totidem æquales partes divisum. Harum particularum unam prima post verticem F parallela continet, duas secunda, tres tertia, & sic deinceps, inter rectas FO, FE interceptas. Itaque recta BD continebit ejusmodi particulas 20 X 50 = 1000, ac proinde inveniri poterunt ipsius rectæ BD in eadem scala partes millesimæ quotcumque.

Metiri jam oporteat locorum A & B (F. 52. 53.) distantiam BA eorum accessu vel a flumine, vel ab alia quavis causa intercluso. Assumpto quolibet loco C, cujus distantiam a B metiri liceat, ope quadrantis & linearum visualium AC, BC notentur anguli B & C. Tum in charta probe complanata assumatur ex scala *bc* totidem partium, quot pedes in intervallo BC continentur, fiantque anguli *b*, *c* ope quadrantis ejusdem æquales angulis B, C. Lateribus *ba*, *ca* in aliquo puncto *a* coeuntibus exploretur quotnam in scala particulas contineat latus *ba*, totidemque pedes intervallum AB continebit. Nam cum in triangulis BAC, *bac*, anguli B, C æquentur angulis *b*, *c* per constructionem, ac propterea A quoque & *a* æquales sint (Coroll. prop. 1.), erunt triangula similia, & latera proportionalia.

Si BAC campus sit, cujus mensura in quadratis pedibus inquiritur, demittatur in basim *bc* perpendiculum *ad*, & inveniantur particulæ, quæ ab illo in scala continentur. Tot enim pedes continebit perpendiculum AD ob similitudinem triangulorum ADB, *adb*, ejusque dimidium in basim ductum dabit aream ABC in pedibus quadratis (Schol. prop. 6.)

Eadem ratione altitudinem Montis A (Fig. 54.) metiri licebit, si in subjecta planitie duæ dentur stationes B, C, quarum distantiam metiri possimus.

Et ita quidem inveniuntur latera, & area in triangulo, cujus unum detur latus cum duobus angulis. Si verò tria dentur latera, & quærantur anguli, sumptis ex scala tribus rectis *bm*, *bc*, *cn* (Fig. 52. 53.) totidem partium, quot in datis lateribus pedes continentur, centris b, c, intervallis bm, cn describantur arcus circulorum se mutuo intersecantium in a, & ductis ab, ac, erit triangulum bac dato triangulo æquiangulum (Coroll. 3. hujus) ob latera proportionalia; unde & altitudo, & area innotescet. Sed de his planius in Trigonometria constabit.

PROPOSITIO XIII.

Si duæ chordæ sive intra circulum, sive extra circulum se mutuò intersecent, factum sub unius segmentis erit æquale facto sub segmentis alterius.

Secent se mutuo chordę AC, DE (Fig. 55. 56.) sive intra, sive extra circulum; dico esse AB×CB = DB × BE.

Dem. Ductis AD, CE, erit in primo casu in duobus triangulis ADB, BCE angulus ABD ęqualis angulo EBC ad verticem (Coroll. 4. def. 10.), ac præterea æquantur anguli ADB, ECB, ut qui eidem insistunt arcui AE (Coroll. 1. prop. 9.): ergo æquiangula sunt triangula & similia, ac proinde (Prop. 12.) BA. BD:: BE. BC.

In secundo autem casu quadrilinei circulo inscripti anguli oppositi ACE, ADE æquantur duobus rectis (Coroll. 3. prop. 9.), & duobus item rectis æquantur ACE + BCE (Coroll. 2. defin. 10.), quare ADE æquatur ipsi BCE; & cum angulus B sit utrique communis, æquiangula & similia erunt triangula BAD, BEC. Ergo in utroque casu erit BA. BD:: BE. BC, ac proinde BA×CB = BD×BE (Prop. 10.): Q. E. D.

Coroll. 1.

Si fuerit AC (Fig. 57.) circuli diameter, & chorda DE ad illam perpendicularis, ac propterea bifariam divisa in B (Coroll. 4. pr. 5.); erit AB×BC æqualis DE², nam in hoc casu EB×BD = BD². Est igitur AB. DB:: DB. BC (Prop. 10.). Quare si inter AB & BC quæratur media proportionalis, bifariam divisa AC in F, ac ac descripto semicirculo erigatur in B perpendiculum BD donec circulo occurrat; eritque BD media proportionalis quæsita.

Coroll. 2.

Ducto radio FD erit, ob angulum rectum B, $FB^2 + BD^2 = FD^2 = FC^2$ (Prop. 7.) Quare cum sit $DB^2 = AB \times BC$, erit $AB \times BC + FB^2 = FC^2$: Hoc est, si recta AC secta fuerit bifariam in F, & non bifariam in B, erit quadratum dimidiæ æquale rectangulo sub inæqualibus segmentis una cum quadrato intermedii.

Coroll. 3.

Si ducantur prætetea AD, DC, erit angulus ADC in semicirculo rectus (Coroll. 1. prop. 9.); quare $AC^2 = AD^2 + DC^2$: sed ob angulos rectos in B, $AD^2 = AB^2 + BD^2 = AB^2 + AB \times BC$, & $DC^2 = BD^2 + BC^2 = BC^2 + AB \times BC$: ergo $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC$. Hoc est, utcumque secetur recta AC in B, quadratum totius AC æquatur quadratis segmentorum AB, BC una cum rectangulo bis comprehenso sub ipsis segmentis.

Coroll. 4.

Cum sit autem $AD^2 = AB^2 + AB \times BC$, erit (Prop. 10.) $AB . AD :: AD . AB \times BC$: hoc est, chorda est media proportionalis inter segmentum AB, totamque diametrum AC, & illius quadratum æquatur rectangulo $AB \times AC$.

Coroll. 5.

Si figura 56 mutetur in 60, ita ut BD transeat per centrum F, & BCA accedat ad circumferentiam, donec evanescente AC evadat BC tangens, erit $BC^2 = BE \times BD$, & ducta FC, quæ tangenti occurret ad angulos rectos (Coroll. 5. prop. 8.) erit in triangulo rectangulo FCB, $FB^2 = FC^2 + CB^2 = FE^2 + EB \times BD$. Hoc est, si recta DE bifariam dividatur, eique in directum adjiciatur recta quævis EB, erit quadratum compositæ ex dimidia & adjecta æquale quadrato dimidiæ una cum rectangulo ex tota & adjecta simul sumptis in adjectam.

Scho-

Scholion.

Ex hoc postremo corollario definiri potest quam longè pateat prospectus in maris superficiem ex data altitudine: sed telluris diametrum prius definire oportet ex ipsius circumferentia, quam in annotationibus ad primam propositionem invenimus. Id autem fiet si proxima ratio circumferentiæ ad diametrum inveniatur, in quo etiam circuli quadratura veræ proxima sita est, qua contenti esse possumus cum exactam habere non liceat. Archimedes ad rem conficiendam polygonis usus est inscriptis & circumscriptis.

Concipiatur radius AC (Fig. 61.) in partes 1000000 aut plures etiam, ut libuerit, divisus & tangenti AD occurrat in D recta CD angulum rectum ECA, & quadrantem AE bifariam dividens. Erit. ob angulum ACD semirectum, & angulum CAD rectum (Coroll. 3. prop. 8.) angulus quoque ADC semirectus, & triangulum isoscele (Coroll. 3. prop. 3.) Quare $DA = CA = 1000000$, & $DC^2 = DA^2 + AC^2 = 2000000000000$ cujus radix DC major est quam 1414212, & minor quam 1414213. Bifariam diviso angulo DCA recta CH, quæ occurrat tangenti in H, erit DC. CA::DH. HA (Coroll. 4. prop. 12.), & componendo $DC+CA$ ($2414212\frac{2}{3}$). CA (1000000)::DA (1000000).HA. Unde invenitur HA major quam 414213, minor quam 414214. Hinc eruitur HC, & secto iterum bifariam angulo HCA invenietur nova portio tangentis AD, atque aliæ deinceps, ut libuerit. Quod si chorda IL parallela fuerit tangenti HAM, ac proinde radio CA perpendicularis, & bifariam secta in K (Coroll. 4. prop. 5.), erit CH. HA::CI. IK (Prop. 12.). Cumque tres priores quantitates notę sint, quarta quoque IK innotescet & major & minor vera, ac propterea etiam ipsius dupla IL, & ducta CLM, quę tangenti occurrat in M, erit tota HM dupla ipsius AH.

Sit jam circulus APT (Fig. 62.) primò in quatuor partes ęquales divisus, deinde in 8, in 16, in 32, in

64,

64, in 128. &c. prout cuique libuerit, & concipiamus per ea divisionum puncta tangentes, & chordas alternatim ductas, habebuntur, ut patet, duo polygoni, quorum alter inscriptus circulo est, alter circumscriptus: ambo autem triangulis constant æqualibus triangulis HCM, ICL; cumque haberi possint HM & IL quantumlibet veris proxime, & numerus laterum habeatur; omnium quoque summa innotescet, hoc est, perimeter inscripti proxime minor vera, & perimeter circumscripti proxime major vera, ita ut hic defectus vel excessus quantum cuique libuerit tenuis sit, cum radius in quemlibet partium numerum dividi possit. Jam vero manifestum est perimetrum polygoni circumscripti circuli peripheria majorem esse, perimetrum verò inscripti minorem, ac propterea intra hos limites ipsam peripheriam contineri. Isti limites quantum quisque velit contrahentur aucto laterum numero. Etenim ob triangulorum HCA, ICK similitudinem cum sit CA. CK: : AH. KI, erit quoque dividendo AC. AK:: AH. AH—KI, & in eadem ratione erit tota perimeter polygoni circumscripti ad ejus differentiam ab inscripto (Axiom. 4.) Quod si laterum numerus augeatur minuitur quantumlibet IK, & multo magis AK, adeoque minuitur quantumlibet polygonorum differentia, & contrahuntur limites, intra quos situs est valor peripheriæ circuli.

Hinc quoque accuratius demonstratur aream circuli factum esse ex radio in dimidiam peripheriam. Nam triangulum HCM est factum ex radio AC in dimidiam basim HM (Schol. prop. 6.), ac proindè totum Polygonum habetur ducendo radium AC in dimidiam perimetrum. Est autem area polygoni circumscripti major quam area circuli, ita tamen ut ejus excessus supra aream circuli minor sit quam excessus supra polygonum inscriptum. Verum ita potest laterum numerus in infinitum augeri, ut differentia perimetri polygoni circumscripti a circuli peripheria, & illius areæ ab area polygoni inscripti minor sit data qualibet quantitate. Quamobrem factum quoque ex radio in dimidiam peripheriam

riam

tiam ab area circuli differet differentia quę minor sit data qualibet quantitate, ac proinde nulla.

Hac methodo Archimedes invenit diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22, ita ut tenuissimus sit excessus peripherię sic inventę supra veram.

Hęc eadem ratio subtilius ab aliis quęsita est, in quibus Ludolphi Coloniensis eminet industria, qui eam ad cifras usque 60 promovit. Ex Leibnitio in Actis Lipsiensibus tom. 1. habetur ratio diametri ad quartam peripherię partem, ut 1 ad $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. producendo hanc seriem quousque libuerit per signa contraria, & numeros impares; eamdemque rationem habet quadratum circulo circumscriptum ad aream circuli. Sed omnium est elegantissima ratio diametri ad peripheriam, quam exprimunt tria paria trium primorum numerorum imparium, videlicet 113 ad 355.

In re nostra contenti esse possumus Archimedis ratione, cumque peripheria maximi telluris circuli (Schol. prop. 1.) passus Parisinos contineat 24649920; fiat ut 22 ad 7 ita prędictus ille passuum numerus ad telluris diametrum, quę obveniet passuum 7843156; ac proinde milliaria continebit 7843, ac passus 156.

Sit jam HI montis altitudo ad mille passuum assurgens, & quęratur intervallum HA quousque patet in maris superficiem oculi prospectus; erit HS passuum 7844156, ergo $AH^2 = IH \times HS = 1000 \times 7844156 = 1844156000$; cujus radix 88567 milliaria dabit 88, ac passus pręterea 567; intra quod spatium continentur objecta ex hoc monte conspicua, cum cętera omnia ob ipsam telluris rotunditatem ex oculis sese subducant. Refractio tamen, vi cujus radius AH inflectitur, nonnulla adhuc objecta deteget, quę aliquanto longius distent. At si HI sit unius passus, quantum ferè e solo assurgit hominis oculus stantis in littore, erit HS passuum 7844157, & $IH \times HS$ erit pariter 7844157; cujus radix passus dabit 2800 7. Quare si duo homines sex passuum millibus distent in eodem maris littore

ob

ob telluris rotunditatem se invicem videre non poterunt.

PROPOSITIO XIV.

OMnes figuras similes rectilineas in eumdem similium triangulorum numerum partiri licet.

Sint duę figurę similes rectilineę ABCDE, *abcde* (Fig. 63. 64.), & ductis BE, CE; *be*, *ce*, dico similia esse triangula ABE, *abe*; BEC, *bec* &c.: nam in triangulis EAB, *eab* anguli A & *a* ęquales sunt, ut ipsa notio figurarum similitudinis indicat, eruntque latera proportionalia; hoc est AE. *ae*:: AB. *ab*. Ergo (Coroll. 2. prop. 12.) similia erunt triangula ABE, *abe*, ac proinde (Prop. 12.) anguli ABE, *abe* ęquales sunt; cumque essent ęquales anguli ABC, *abc*, erunt etiam ęquales EBC. *ebc*. Erant autem latera circa ęquales angulos ABE, *abe* proportionalia, hoc est BE. *be*:: AB. *ab*::BC. *bc* (ob figurarum similitudinem) ergo iterum in triangulis BCE, *bce* latera circa ęquales angulos EBC, *ebc* proportionalia sunt, ac propterea ipsa triangula similia. Eadem methodo si progrediaris, reliqua quoque triangula similia esse comperies, easque figuras in eumdem similium triangulorum numerum divisas esse: Q. E. D.

Coroll. 1.

Eodem pacto ostenditur similes esse figuras illas rectilineas, quas similia triangula eodem numero, eodemque ordine partiuntur.

Coroll. 2.

Cum duo quęlibet similia triangula sint inter se ut quadrata laterum homologorum (Coroll. 1. prop. 12.), latera autem sint in eadem ratione constanti, erunt (Ax. 4.) perimetri similium figurarum ut duo quęlibet ipsarum latera homologa; & areę totę erunt ut quadrata eorumdem laterum. Id etiam circulis convenit, ut patet ex his quę adnotavimus ad Prop. 13.: quare si unius circuli radius alterius radio duplus sit, il-

lius

lius quoque peripheria dupla erit; area vero quadrupla.

Scholion.

Possunt etiam alia quadam ratione similia triangula in similibus figuris considerari. Nempe si fuerint similes figuræ ABCDE, *abcde* (Fig. 65. 66.) ducanturque ex duobus angulis æqualibus A & *a*, B & *b*, ad reliquos angulos rectæ lineæ AD, BD, AC, &c. *ad*, *bd*; *ac* &c. simili methodo demonstrabitur similia esse triangula AEB, *aeb*, ADB, *adb* &c. id quod in agrimensura maximum habet usum. Etenim si alicujus fundi aut agri ichnographiam describere oporteat, ac dimensiones accipere ex duobus locis A, B: metire prius locorum distantiam AB, & oculorum aciem in objecta conspicua dirigens, quibus ager terminatur in E, D, C, probè observa angulos BAE, BAD, BAC, itemque ABC, ABD, ABE: tum in charta aut tabula duc rectam *ab* tot particulis e scala desumptis constantem, quot inventi sunt pedes in intervallo AB, & ope quadranti fiant in *a* & *b* anguli æquales inventis in A & B. Linearum ita ductarum concursus in *e*, *d*, *c* determinabunt perimetrum figuræ *a e d c b*, quæ similis est agro describendo ut ex demonstratis constat. Itaque quot fuerint particularum inventæ rectæ lineæ *ae*, *ad*, *de*, *be* & totidem pedibus constant intervalla AE, ED, DC, CB &c. area vero invenietur ex dictis ad propos. 13. & 6.

Eadem ratione, ut patet, distantiam DC utrinque inaccessam metiri licet. Etenim sumptis duabus stationibus A & B, quarum intervallum metiri liceat, & angulis in A & B triangulorum ADB, ACB, fiat ut antea simile quadrilineum *dabc*, & quot particulas in scala continebit recta *dc*, totidem pedes, vel decempedas continebit distantia quæsita DC.

Scholion.

Cum Euclidis Elementa passim ab auctoribus citentur, non erit inutile indicem subjicere, unde constare possit ubinam in his nostris elementis eorum demonstratio

ſtratio quærenda ſit, quæ Euclides in ſex prioribus libris complexus eſt, quibus planam geometriam abſolvit. Uſu autem conſtabit nullam ferè ejus propoſitionem paulò frequentius adhiberi in geometricis quæ non fuerit a nobis demonſtrata, aut non facile ex his demonſtretur. Cæterum libri 5 & 6 propoſitiones præcipuas complectitur Scholion ad prop. 9, & propoſitiones 10, 11, 12 cum ſuis Corollariis, quod cum ſemel notaſſe ſatis fuerit, ſupervacaneum duximus has cum noſtris comparare. Sed & rationum theoriam uberiorem dabimus in Arithmetica.

Euclidis Lib. I.	Nobis eſt	Euclidis Lib. I.	Nobis eſt
Pr. 1	Cor. 4. pr. 2.	Pr. 26	Pr. 3. & Cor. 1. ejuſd.
4	Pr. 2.	27)	Scol. def. 17., &
5	Cor. 2. pr. 2.	28)	Coroll. 1. ejuſ-
6	Cor. 2. pr. 6.	29)	dem.
7	Coincidit cum propoſ. 4.	30	Cor. 2. ejuſd.
8	Pr. 4.	31	Cor. 3. ejuſd.
9	Pr. 5.	32	Pr. 1.
10	Cor. 1. pr. 5.	33	Cor. 1. pr. 2.
11	Cor. 3. pr. 5.	35	Cor. 4. pr. 3.
12	Cor. 2. pr. 5.	36	Pr. 6.
13	Cor. 2. def. 10.	36	Cor. 2. pr. 6.
15	Cor. 4. ejuſd.	37	Cor. 2. ejuſd.
18	Pr. 8.	38	Ibidem.
19	Cor. 1. pr. 8.	39)	Ex iiſd. facillimè
22	In ſch. pr. 12.	40)	dem.
23	Cor. def. 7.	41	Cor. 3. pr. 6.
24	Cor. 2. pr. 8.	47	Pr. 7.
25	Cor. 3. ejuſd.	48	Cor. ejuſd.

Euclidis Lib. II.		Euclidis Lib. III.	Nobis est
Pr. 4	Cor. 3. pr. 13.	Pr. 17	Cor. 2. pr. 9.
5	Cor. 2. pr. 13.	20	Pr. 9.
6	Cor. 5. ejusd.	21	Patet ex ead.
Lib. III.	.	22	Cor. 3. ejusd.
Pr. 3	Cor. 4. pr. 5.	31	Cor. 1. ejusd.
10	Cor. pr. 4.	32	Cor. 6. ejusd.
13	Cor. 7. pr. 8.	34	Pr. 13.
16	Cor. 5. 6. 7. ejusd.	35	Cor. 5. ejusd.

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De fundamentalibus Arithmeticæ operationibus.

1. EÆ sunt notatio, additio, subtractio, multiplicatio, divisio, & extractio radicum, quas omnes hoc capite breviter expediemus.

§. I.

Notatio.

2. NUmeros omnes in vulgari arithmetica decem notis designamus, quarum Arabes feruntur auctores; sunt autem, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa ipsarum forma, sed etiam ex diverso loco, quem occupant. Nam quæ ante punctum postremæ legenti occurrunt unitates designant, quæ proxime præcedunt unitatum decades; exinde centenarii sequuntur, millenarii, & sic deinceps in decupla proportione. Atque huic potissimum usui cyphra, seu 0 destinatur, cum enim ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem longius illas a puncto removens; sic unitatis nota, quæ punctum proxime præcedens unicam designaret unitatem, beneficio unius vel duplicis cyphræ in secundum aut tertium locum rejecta denas unitates, ant centenas designabit.

3. Breviores numeri facilè leguntur, nemo enim non videt numerum A (Tab. 1.) ducentas quadraginta septem unitates exprimere; at in numeris longioribus aliquo opus est artificio. Numerum B, quem legere opor-

teat, ita divides a postremis notis exorsus, ut ternos singulis partibus numeros attribuas. Tres postremos a præeuntibus divides puncto superius apposito: tribus sequentibus appones 1; & sic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim appones, vel numerum, ita tamen ut numeri unitate semper augeantur, quemadmodum in apposito schemate factum vides. His peractis quamlibet notarum classem perinde leges, ut si sola esset, & ubi punctum invenies dic mille, ubi 1 dic decies centena millia, seu, ut vulgo loquimur, millionem; ubi 2, dic milliones millionum, sive Billiones; ubi 3, dic Trilliones, & sic deinceps. Sic itaque numerus B legendus erit. Ter mille ac ducenti quadragintaduo Trilliones, quingenta septuaginta octo millia ac quingenti sexaginta duo Billiones, nongenta quatuordecim millia, ac viginti Milliones, quadringenta sexaginta septem millia, bis centum, ac duodecim.

4. Quod si notæ eædem punctum subsequantur, fractos exprimunt decimales; ita quidem, ut quæ primum occurrit decimas unitatis partes designet, secunda centesimas, tertia millesimas, & sic deinceps. Has autem notas vel singulas seorsim efferre licet, vel omnes simul denominatione a postrema desumpta, quæ denominatio ex numero desumitur, quem exprimit unitas tot cyphris aucta quot sunt post punctum notæ. Sic numerus C designat viginti tres unitates, & duas decimas partes unitatis, quatuor centesimas, nullam millesimam, sex denas millesimas, vel bis mille quadrigentas sex denas millesimas. Numerus D denotat ducentas triginta duas unitates, nullam decimam, duas centesimas, tres millesimas, seu 23 millesimas partes unitatis. Demum numerus E nullam exhibet unitatem, nullam decimam, nullam centesimam, sed tantum duas millesimas, & sex denas millesimas, sive 26 denas millesimas partes unitatis.

5. Fractiones alię duobus numeris exprimuntur, quos lineola interjecta dirimit, ita ut alter supra lineam scribatur, alter infra lineam. Qui inferior est denominator

tor dicitur, qui superior est numerator. Ille denotat in quot partes unitas divisa sit, hic autem ejusmodi partium numerum designat. Sic numerus F duas tertias unitatis partes exprimit, numerus C quinque octavas, numerus H septem duodecimas. Fractiones quoque sunt particulę, quibus horas, & gradus circuli partiri consuevimus; nam & horas & gradus singulos in 60 minuta prima dividimus, singula minuta prima in 60 secunda, singula secunda in 60 tertia, & sic deinceps. Has autem fractiones peculiaribus quibusdam notis designamus, nam horas integras exprimit numerus cui apponitur littera *h*, gradus integros numerus cui superius apponitur o: & in utroque casu unica lineola numeris superimposita minuta prima dęsignat, duę lineolę minuta secunda, tres tertia, & sic deinceps: unde numerum I sic leges: 23 horas, 46 minuta prima, 52 secunda, 37 tertia. 41 quarta.

§. II.

Additio in numeris integris.

6. NUmeri his notis expressi, si integri sunt, in unam summam facile colliguntur. In exemplo primo, quatuor numeros, quos addere oportet, ita alios aliis adscribe serie descendente, ut unitates unitatibus subjiciantur, decades decadibus, & sic de reliquis; tum infra omnes numeros ducta linea, & a postrema columna exorsus dic: 1 & 8 efficiunt 9, 9 & 2 efficiunt 11, 11 & 1 efficiunt 12. Colligis ergo ex hac columna unam decadem unitatum, ac præterea duas unitates: quare scribe 2 in loco unitatum, & decadem illam rejice in sequentem decadum summam dicens: 2 & 1 efficiunt 3, 3 & 6 efficiunt 9, 9 & 9 efficiunt 18, 18 & 6 efficiunt 24, hoc est duas decades decadum, sive duo centenaria, & 4 decades: scribe ergo 4 in loco decadum, & duo centenaria in sequentem columnam rejice, eodemque pacto in hac & reliquis ope-

 rare,

rare, & tandem invenies numerum K, qui quatuo merorum erit quæsita summa. Eodem pacto, in E trium numerorum summa colligitur numerus L, qu nota supra numeros datos est auctus, quod in p columna quæ postrema est operanti, 12 colliguntu unitas illa in sequentem locum rejicienda fuit.

7. Notandum est autem quod uniuscujusque colu numeri ita colliguntur tamquam si essent unitates eaque summa tot unitates in proximè sequentem ciuntur, quot in præcedente decades supra unitates lectæ sunt.

8. Totius autem operationis ratio constat, quia progredimur ab unitatum columna ad reliquas, quælibet in ordine subsequente decuplo majorem h valorem quam in proxime præcedente.

§. III.

Subtractio in numeris integris.

9. UT numerum datum a dato numero subduc subducendum numerum illi subjicies, a quo trahi debet, ita ut unitates unitatibus respondeant, cades decadibus, & sic de reliquis. Tum ab unitati exorsus quamlibet inferiorem notam a superiori sub he, & residuum scribe infra lineam & habebis nu rum qui sit datarum quantitatum differentia. Quo alicubi occurrat inferiorem notam superiori majo esse, hanc augere oportebit decem unitatibus, ea mutuas accipies a proxime sequenti nota, quam pterea deinceps habebis tamquam unitate mulctatam

10. In Ex. 3. numerus M est inter datos num differentia quæsita, quia auferendo 5 ex 7 relinqu 2, auferendo 4 ex 9 relinquitur 5 &c. At in Ex. cum numerus 8 ex 7 subduci nequeat, adjice huic nas unitates, & auferendo 8 ex 17 residuum hab 9; tum vero notam superiorem proximè sequentem u tate mulctabis, hanc enim ab ea mutuam accepisti,

den

denis unitatibus præcedentem augeres. Aufer ergo 4 ex 5 & habebis residuum 1. Eodem pacto in reliquis duabus notis operare, & habebis numerum N differentiam quæsitam. Haud absimili ratione invenitur differentia O in Ex. 5°, ubi cum ex o nequeat auferri 6, aufertur ex 10, & residuum 4 infra lineam ponitur: tum quia iterum sequitur o ex quo nequit auferri 4, aufertur non quidem ex 10 sed ex 9, quandoquidem denarius numerus, qui eo loco substituitur ex proxime sequenti 9, jam in antecessum unitate mulctatus est; atque ita fieret si plures essent o, cum tamen numerus qui primo occurrit unica tantum unitate minor fiat.

11. Si nota inferiori ex superiori sublata nihil reliqui sit, eo loci notari debet o, quod tamen non fit, si nullus præterea sequatur numerus, qui in differentia quæsita ante cyphram sit adscribendus, ut factum vides in Ex. 6°, in quo præter duas postremas notas reliquæ omnes se mutuo elidunt.

12. Operationis ratio satis per se constat, cum unitates ab unitatibus auferantur, denarii a denariis &c. Nam quod in Ex. 4°: numerus 7 decem augeatur unitatibus, & numerus insequens 6 una mulctetur, ratio in promptu est. Hæc nempe unitas in numero 6 decem valet earum quibus constat numerus 7, eique respondens 8, quare etsi unam ille amittat huic tamen decem acquiruntur. Similiter in Ex. 5°, unitas e 9 sublata decem valet unitates si in locum rejiciatur, cui subest auferendus numerus 4, & rursus una ex his decem unitatibus in locum translata cui subest numerus 6, decem valet unitates ejusmodi, quibus nota auferenda constat. Quare his sublatis ex 10, relinquitur numerus 9, ex quo auferas 4, & deinceps 8, ex quo 2 auferre oportebit.

13. Si explorare velis utrum subductio ritè peracta sit, differentiam inventam adde numero sublato, & quantitas redibit, ex qua subductio facta est.

14. Si tota quantitas auferenda illam excedat, ex qua debet auferri, adhuc minor numerus è majori sub-

ducitur; sed differentia quæsita erit quantitas negativa, & minor nihilo. Sic si quis expensas faceret, quæ suas opes excederent, has subduceret ab expensis, & differentia ostenderet quanto deterioris conditionis sit factus, quam si nihil haberet, vel quid sibi desit, ut ære alieno expeditus nihil habere incipiat. Unde vides æs alienum congrue dici quantitatem negativam & nihilo minorem. Innumera sunt ejusmodi, ex quibus Tyrones oportet negativæ quantitatis notionem probè concipere.

§. IV.

Multiplicatio in numeris integris.

15. QUantitas data per numerum integrum multiplicatur cum toties sumitur, quoties unitas in numero continetur, per quem debet multiplicari. Tum verò per numerum fractum multiplicari dicitur, cum tot illius partes sumùntur, quot fractio indicat, in quam ducitur. Augetur itaque numerus cum in integrum ducitur: minuitur si in fractum ducatur.

16. Singulæ notæ in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt 3 in 4, sive 4 tèr sumptum 12 efficere. Si numerorum alter denarius sit, factum ex multiplicatione emergens tot erunt decades, quot alter numerus habet unitates; at si quinarius fuerit, tot erunt decades sumendæ, quot in alterius dimìdio sunt unitates: demum si uterque numerus quinario major sit, in altera manu, reliquis compressis, tot digiti erigantur, quot alter numerus habet unitates supra quinarium, itemque in altera manu tot erigantur, quot unitatibus alter numerus quinarium excedit. Tùm verò tot decades sumantur quot sunt erecti digiti, iisque adjiciatur quod prodit invicem ducendo digitos in utraque manu compressos, atque ita habebis factum ex utriusque dati numeri multiplicatione. Sic si ducere oporteat 7 in 9, erunt erecti digiti in altera quidem manu 2, in altera 4, unde sex decades sumendæ

dæ sunt; compressi verò erunt in illa 3, in ista 1, ex quorum multiplicatione emergunt tres unitates; factum ergo ex 7 in 9 sunt 6 decades, & 3 unitates, sive 63.

17. Idem facile absolvitur per tabulam, ut vocant, Pytagoricam. Rectanguli ACDB latus AC in novem partes æquales divide, latus verò CD in decem. Per utrisque divisionis puncta duc rectas lineas his lateribus parallelas, ac divisum erit rectangulum in decem columnas, quarum singulæ novem continent rectangula. Scribe in prima collumna novem primos numeros, in secunda eorum duplos, in tertia triplos, & sic deinceps. In decima vero columna nonnisi cyphras conscribes ad usus postea indicandos. Interim habebis, ut vides, productum cujuslibet numeri in alium quemlibet ab 1 ad 9, quod facile invenies si alterum numerum in prima columna inquiras, alterum in primo ordine rectangulorum; nam si ab hoc descendas ad ordinem usque, in quo primus invenitur, ibi erit productum quęsitum. Sic si factum quæratur ex 9 in 6, sume in prima columna 6, in primo autem ordine sume 9, & descende usque ad ordinem sextum, in quo 6 invenitur, & numerus 54 erit factum ex 6 in 9.

18. Idem productum invenitur si in prima columna assumas 9, & in primo ordine 6: ex quo patet nihil omninò interesse sive primum numerum per secundum multiplices, sive secundum per primum. Idipsum in genere de numeris omnibus ostenditur, unde si tres aut mille numeri invicem debeant multiplicari, undecumque incipias, aut quocumque ordine progrediaris unum ducens in alterum, & factum ex his duobus in tertium, & sic deinceps, semper idem postremo loco factum emerget.

19. Si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe ita, ut unitates unitatibus subjiciantur; deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica initio utrobique a postremis facto. Decades quæ inter multi-

plicandum colliguntur sepone adjiciendas facto ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris, si qua supersit. Facta quæ emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris infra lineam seorsim notentur, ita ut uniuscujusque unitate subjiciantur numero per quem multiplicatio peragitur. Quod si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quæsitum.

20. In Ex.7° quæritur factum ex 235 in 43. Scribe 43 sub 235, uti dictum est, tum ducta linea dic: 3 in 5 efficiunt 15. Scribe quinque sub numero multiplicante 3, & unam decadem sepone adjiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9, cui si 1 addas, habebis unam decadem, & nullas præterea unitates: scribe igitur 0, & facto ex 3 in 2 adjiciens 1 scribe 7. Rursus dic: 4 in 5 efficiunt 20; scribe 0 ita ut multiplicatori 4 subjaceat, & facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adjiciens 2 habebis 14: scribe igitur 4, & 1 servans dic: 2 in 4 efficiunt 8, & adjecto 1, scribe 9. Demum ducta linea collige in unam summam hos numeros ita dispositos, eritque numerus Q factum ex datis numeris.

21. Demonstratio facilè eruitur ex ipsa numeralium notarum natura, quæ in anterioribus locis decuplo plus valent, quam in posterioribus, & ex eo principio quod partes simul sumptæ totum adæquant.

22. Ipse verò usus docebit, quod si vel alteruter vel uterque numerus in cyphras desinit, poterunt hæ in multiplicatione omninò negligi, dummodò producto tot in fine cyphræ apponantur, quot erant in coefficientibus. Sic in Ex. 8 idem prodit numerus R ex 52300 in 8420. Sive per ipsas cyphras multiplicationem instituas, sive his neglectis ducas 523 in 842, & producto tres cyphras apponas. Similiter si intra notas ipsas multiplicatoris aliqua cyphra occurrit, poterit ea negligi, dummodo factum ex numero subsequenti sub ipso multiplicante numero notari incipiat, ut in Ex.9°.

23. Si explorare velis utrum multiplicatio rite peracta sit, jubent eosdem numeros iterum multiplicare, sed ordine inver-

verso; ita nempe ut qui prius multiplicator fuerat, fiat multiplicandus, & contra. Sed hoc valde molestum accidit ubi numeri longiores sunt. In his casibus ad calculi molestiam levandam, & ad erroris periculum longius amovendum satius erit artificium adhibere, quod Neperus excogitavit. Tabulam Pythagoricam ita scribe ut numeri, qui duabus notis constant transversa lineola dirimantur, uti factum est in rectangulo ACDB, deinde tabulæ columnas divide ut ordine quolibet disponi possint, ac plures ejusdem numeri tabellas compara, ut tot præsto esse possint, quot ejusdem numeri notas in numero multiplicando esse contingat. Quin etiam cum fieri possit ut inter numeri multiplicandi notas cyphræ occurant, lamellas quoque habere necesse est in quibus solæ cyphræ notentur. His positis si detur in fig. 10° numerus T, quem per V multiplicare oporteat tabellas selige, quarum singulæ singulas notas numeri T habeant in fronte, easque eodem ordine dispone, quo in dato numero disponuntur. Quoniam T per 8 multiplicare oportet, numeros omnes in ordine octavo contentes initio a postremis facto scribe infra lineam ita ut postremus jaceat sub numero 8, hoc tamen animadverte quod qui in eodem rhombo includuntur colligi debent in unam summam, & decades, si quæ occurrunt, proxime subsequenti adijciendæ. Habebis ea ratione factum ex numero T in 8. Rursus nota eodem pacto sub numero 9 numeros, quos lamellæ exhibent in ordine nono, & habebis factum ex T. in 9. Idem in reliquis præsta, & omnium summa dabit numerum X, quod est productum ex numero T in V. Totius operationis ratio facile intelligitur ex dictis.

Divi-

§. V.

Divisio in numeris integris.

24. CUM quantitas data per aliam datam quantitatem dividenda proponitur, eo demum quæstio reducitur ut inveniatur quoties in dividenda quantitate dividens quantitas contineatur; unde numerus ex divisione resultans, per quem scilicet huic quæstioni satis fit, quotus dicitur.

25. In Ex. 11° proponatur numerus 10105 per 43 dividendus. Dividendo numero divisorem præfige lineola interjecta: tum operationem instituens in notis initialibus dividendi, quæ quantitatem exhibeant divisori æqualem, vel proxime majorem, dic: quoties 43 continentur in 101? Resp. 2. Scribe ergo 2 ex altera parte dividendi, lineola pariter interjecta, & factum ex 2 in 43, sive 86, aufer ex 101, & residuo 15 notam appone, quæ in dividendo proximè sequitur quantitatem jam divisam 101. Dic iterum: quoties 43 continentur in 150? Resp. 3. Scribe 3 in quoto & factum ex 3 in 43, seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem notam dividendi 5, & dic iterum: quoties 43 continentur in 215? Resp. 5. scribe 5 in quoto, & aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215. Cum nihil ex ea divisione supersit, constat numerum 235 illum præcisè esse qui oritur ex divisione 10105 per 43.

26. Demonstrationem habebis, si animadvertas in ejusmodi quæstione ita prorsus se rem habere ut si quæreretur quota pars totius quantitatis singulis hominibus obveniret, si eam ex æquo tot hominibus distribui oporteret, quot habet divisor unitates. Nam in singulis operationibus illud scilicet inquirimus, quot unitates, decades &c. singulis dari possint; iisque datis, quæ dari possunt, quot adhuc distribuendæ supersint. Rem transfer in quæstorem regium, qui 10105 nummos aureos a

Rege

Rege acceperit militibus 43 ex æquo largiendos, & adhuc res magis in aperto erit.

27. Facile vides post quamlibet subtractionem peractam id quod relinquitur, antequam notam ulteriorem ex dividendo adjicias, divisore minorem esse oportere: nam si residuum æquale foret vel majus, jam divisor pluries contineretur in quantitate jam divisa, quam numerus indicet in quotum relatus.

28. Postquam residuo ulteriorem divisoris notam adjeceris, si adhuc quantitas manet divisore minor, qui proinde nusquam in ea contineatur, cyphram scribes in quoto, & adhuc ulteriorem divisoris notam residuo adjicies ut divisionem promoveas. Sic in Ex. 12° quia sublatis 1641 ex 1684, residuum 43 auctum nota 7 adhuc minus est divisore 547, ponitur 0 in quoto, & nota 6 apposita numero 437, quæritur quoties divisor in 4376 continuetur.

29. Si divisione peracta, cum nulla reliqua est in dividendo nota, adhuc aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adjicienda est fractio, cujus denominator est divisor, numerator vero residuum illud postremum. Sic in Ex. 13° cum 182 superfuerint, quoto adjecta est fractio $\frac{1}{8}\frac{8}{3}\frac{2}{5}$ Nempe si nummos 43602 partiri deberes ex æquo hominibus 853, singuli acciperent nummos 52, & præterea 182 partes ejusmodi, qualium in singulis nummis 835 continentur. Poteris etiam divisionem promovere si postremo residuo cyphram adjicias puncto interposito, ut unitates ad decimas partes unitatis redigantur, nam si puncto item interposito quoto notas adscribas, quæ deinceps obveniunt, ex divisione (quam per novas subinde cyphras residuis adjectas continuare poteris ut libuerit) habebis partes unitatis decimas, centesimas, millesimas &c. integris notis addendas, eadem prorsus methodo, qua notæ integræ inventæ sunt, ut videre est in Ex. 14°. Continget interdum ut ad ultimum divisionis limitem hoc pacto pertingas, plerumque tamen fiet ut in seriem incidas abe-

untem

untem in infinitum, cujus termini serius ocius iidem redeant, numquam tamen serius, quam post totidem terminos, quot habet divisor unitates. In hoc casu producitur divisio, donec valor obtineatur tam vero proximus, quantum quæstio, de qua agitur, requiret.

30. Cum numeri longiores sunt, omnis difficultas in eo sita est; quod non satis pateat, quoties divisor in assumptis dividendi notis contineatur. Qui satis fuerit in ejusmodi calculis exercitatus facile videbit ex primis ipsis utriusque numeri notis, quoties unus sumendus sit, ut altero fiat proximè minor; at qui usu careat facilè in eo decipietur. Tutius incedet, si divisionem aggressurus eam prius, quam scalam vocant, sibi confecerit. Divisor nempe per numeros omnes ab 1 ad 9 multiplicandus est, omnesque producti ex ea multiplicatione numeri divisori ex ordine subjiciendi, ut in Ex. 14° factum est; hoc enim pacto si hos numeros compares cum dividendi notis, in quibus divisionem instituis, statim videbis quinam ex illis sit proxime minor: pones in quoto numerum, in quem ductus divisor eam efficit quantitatem, quantitatem vero ipsam ex dividendi notis subduces.

31. Verum ea res admodum molesta accidit, & animus defatigatione victus facilius quam credi possit impinget ubi cæteroquin nulla est difficultas. Quare in his præsertim casibus Neperianis lamellis uti præstat. In Ex. 15° (Tab. 2.) tabellas selige, & dispone ut earum in fronte numeri exhibeant divisorem 37895. Deinde resectis ad dexteram dividendi notis, quibus numerus fiat divisori par, vel eodem proxime major, quære in lamellarum ordinibus, numerum 94076, vel proxime minorem, probe animadvertens quod diximus, hos numeros in lamellis ita legendos ut qui eodem rhombo includuntur in unam summam colligantur, denariis, si quæ occurrunt, in anteriores notas de more translatis. Invenies hoc pacto in ordine secundo numerum proxime minorem prędicto, 75790: scribe ergo 2 in quoto, & dendo subtrahe, residuo adijce numerum inventum a divi

proxi-

proxime ſequentem dividendi notam, & ſic porro perge donec vel diviſionem abſolvas, vel quotum habeas quantum libuerit vero proximum.

32. Diviſionis rite peractæ argumentum habebis ſi diviſorem in quotum ducas, redeatque diviſus numerus; nam ſi non redeat, manifeſtum eſt alicubi errorem eſſe admiſſum. Nota tamen quod ſi diviſorem exactum habere non licuit, facto ex diviſore in quotum addere oportet reſiduum ex ultima diviſionis ſubtractione, ut redeat diviſa quantitas. Sic in Ex. 15° ſi ducas 37895 in 2482, & facto addas poſtremum reſiduum 21138, habebis diviſum 94076528.

§. VI.

Additio & ſubtractio in numeris fractis.

33. ET hæc quidem in numeris integris ita peraguntur, at in fractis aliam fere rationem inire oportet. Fractiones ejuſdem ſpeciei dicuntur, ſi eundem habent denominatorem, diverſæ ſi diverſum. Quæ ejuſdem ſpeciei ſunt facile in unam ſummam adduntur, vel ab invicem ſubtrahuntur addendo vel ſubtrahendo numeratores: qua in re illud eſt animadvertendum, quod quoties ex numeratoribus colligitur numerus denominatori æqualis, toties unitas ad integros eſt reijcienda: itemque in ſubtractione ſi ſubtrahenda fractio illa major eſt unde ſubtrahitur, unitas ex integris, ſi qui ſunt in quantitate mulctanda, mutua eſt accipienda, ex qua fractio fiat eumdem habens cum ſubtrahenda denominatorem, ac numeratorem ut minori fractioni adjiciatur.

34. In exemplo 16° ſi fractionum numeratores colligas bis pervenies ad 5 partes unitatis quintas, quare duæ unitates integris ſunt adjiciendæ, & ſummam colliges $64\frac{1}{5}$ At in Ex. 17° quoniam fractio $\frac{4}{8}$ ex $\frac{2}{5}$ au-

ferri

ferri nequit, ex 23 unitas sumitur quæ valet $\frac{5}{5}$ & $\frac{4}{5}$ auferetur ex $\frac{7}{5}$, tum 8 auferuntur ex 22, & reliqua est differentia 14. $\frac{3}{4}$

35. Licet etiam in unam summam seorsim colligere numeratores, & numerum exinde provenientem per denominatorem dividere: quotus enim integros dabit numeros, & residuum erit numerator fractionis adjiciendæ. Sic in Ex.18° summa numeratorum est 94, quem numerum si dividas per 24, quotus est 3. $\frac{22}{24}$ quem integrorum summæ addere oportet. Et hac quidem methodo uti præstat ubi numeris majoribus fractiones constant.

36. Cum pondera & mensuræ, aut alia ejusmodi in unam summam colliguntur, vel ab invicem subtrahuntur, quorum majores partes certum minorum partium numerum continent, eadem methodo in his pertractandis uti debemus, qua in reliquis ejusdem speciei fractionibus usi sumus: nam & hæ re ipsa fractiones sunt, quibus denominator idcircò non apponitur, quia jam constat quot ex illis requirantur ut unam ex partibus proximè majoribus efficiant. Sic in Ex.29° cum 18 octavæ colligantur duæ tantum hærent loco suo, reliquæ vero 16 cum duas uncias efficiant, earum numerum duabus augent unitatibus: & similiter cum unciæ colligantur 32, duas ex his libras conficimus, & in unciarum loco 8 tantum, quæ superfluunt, notari debent. At in Ex.20° cum 4 octavæ a 3 auferri nequeant, mutuam accipe unam unciam, quæ 8 continet octavas, & ex 11 sublatis 4, supersunt septem. Similiter cum ex 5 reliquis unciis 9 auferri nequeant, mutuam accipimus unam ex libris, quæ duodecim unciis constat, & 9 unciis sublatis ex 17, supersunt 8: ac denique ex libris 40 subducimus 17 & reliquas habemus 23.

Fra-

§. VII.

Fractiones ad eundem denominatorem redigere.

FRactiones diversæ speciei addi nequeunt vel subtrahi, nisi prius ad eundem denominatorem redigantur. Potest autem quælibet fractio salva quantitate diversum habere denominatorem, si numeratorem per eamdem quantitatem multiplices, vel dividas, per quam denominator multiplicatur, aut dividitur; Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{4}{8}$ &c. eadem quantitas sunt, licet diversi sint numeri, quia unius numerator numeratoris alterius æque multiplex vel submultiplex est, ut denominator denominatoris. Itaque si duæ dentur fractiones diversę speciei, ut alia ratio non suppetat qua redigi possint ad eandem speciem, numeratorem unius duces in denominatorem alterius, & viceversa; denominatores vero ipsos invicem duces, ut in Ex. 21° factum est. Nam factum ex denominatoribus erit novarum fractionum communis denominator, & duo priora producta novos dabunt numeratores. Et eadem ratione progredi licebit si plures sint ejusmodi fractiones ad eandem speciem revocandæ. Nam ubi priores duas addideris, vel invicem subduxeris, prout res postulat, summa, vel differentia, ad eundem denominatorem redigetur, quo tertia afficitur, & sic deinceps.

38. Dixi, *ut alia ratio non suppetat*, nam multoties idem obtineri potest una tantum immutata fractione, si nempe hujus denominator ad eundem numerum revocari possit cum denominatore alterius, sive per integrum multiplicetur (in quem numerator etiam ducendus erit) sive per integrum dividatur, quo etiam numerator dividi possit. Sic si dentur duæ fractiones $\frac{1}{3}$, $\frac{9}{6}$, nemo non videt primam revocari posse ad denominatorem secundę duplicando ipsius denominatorem, ac numeratorem:

rem: & si dentur $\frac{2}{3}$, $\frac{}{1}\frac{6}{8}$, secunda ejusdem evadit speciei cum prima, si per 6 uterque illius numerus dividatur. Verum non id semper licebit, nam $\frac{1}{5}$ & $\frac{8}{7}$ Ex: gr. non possunt ad eumdem denominatorem adduci, nisi utroque denominatore immutato per traditam methodum; cum nullus sit integer, in quem ductus 5 evadat 7, & nullus sit integer per quem 7 divisus evadat 5.

§. VII.

Inventio divisorum.

39. Generatim loquendo, nusquam licebit unam fractionem ad eamdem speciem cum altera revocare, nisi utraque immutata, quoties denominatores numeri erunt vel in se primi, vel inter se. Numeri in se primi dicuntur, quos sola unitas metitur, cujusmodi sunt 1, 5, 7, 11, 19. Inter se primi dicuntur, qui præter unitatem nullum habent inter se communem divisorem.

40. His opponuntur numeri compositi, quos nempe præter unitatem alii quoque numeri metiuntur: sic 12 componitur ex 2 & 6, itemque ex 3 & 4, unde 2, 3, 4, 9 metiuntur 12, seu (quod perinde est) aliquoties sumptis 12 adæquant. Quod si igitur alicujus fractionis denominator sit numerus compositus, & resolvi possit in alterius fractionis denominatorem divisione instituta per numerum, ex quo numerator etiam componatur, licebit per divisionem fractionem hanc ad alterius denominatorem deprimere.

41. Et in minoribus quidem numeris facile dignoscitur utrum, & quos communes habeant divisores, at in majoribus aliquo artificio opus est, quo etiam utimur cum fractionem ad minimos terminos deprimere volumus. Etsi autem methodus tradi solet, qua communes ejus-

ejuſmodi diviſores inveniantur, libet tamen docere quomodo omnes dati numeri diviſores inveniendi ſint, quod & ad rem facit, de qua loquimur, & alias etiam in arithmetica præſtat utilitates.

42. Quærantur omnes diviſores numeri 148. Ducta linea horizontali (Ex. 22°) ſuper illam aliam erige tranſverſam lineam, cui ex alterutra parte numerum datum, & quotos ex diviſione emergentes adſcribas, ex altera vero diviſores inveniendos. Quæratur primò minimus dati numeri diviſor, qui in caſu noſtro eſt 2, ut vel ex eo poteſt intelligi, quod numerus datus eſt par. Scribe ergo 2 in diviſoribus, & ex altera parte quotum ex hac diviſione 74. Rurſus cum hic quotus ſit numerus par, dividi poterit per 2: quare ſcribe iterum 2 in diviſoribus, & quotum 37 ex alia parte. Tum duc 2 in 2, & factum 4 adjice diviſoribus inventis. Nam ſi 148 dividi poteſt per 2, & quotus hujus diviſionis iterum dividitur per 2, manifeſtum eſt, quod totus numerus etiam per 4 dividi poteſt. Quoniam verò poſtremus quotus 37 numerus eſt primus, qui per ſe ipſum tantummodo dividi poteſt, aut per unitatem, nam alii ipſius diviſores fruſtra inquiruntur: ſcribe 37 in diviſoribus, & unitatem in quotis, deinde ob rationem jam dictam duc 37 in diviſores antea inventos 2 & 4, & qui inde fiunt numeri 74, 148 diviſoribus adjiciantur, habebiſque omes dati numeri diviſores 2, 4, 37, 74, 148. Quod ſi igitur revocanda eſſet ad minimos terminos fractio $\frac{37}{148}$ ex his intelligeres dividendam eſſe per maximum diviſorem communem 37, ut evaderet $\frac{1}{4}$; & ſi ad eamdem denominationem revocare oporteret fractiones $\frac{1}{37}$, $\frac{8}{148}$, hanc ad illam redigendam eſſe intelligeres diviſione inſtituta per 4, qui numeratorem etiam dividit, & evadent $\frac{2}{37}$.

43. Notandum hic eſt, quod numeri etiam integri

ad quamlibet fractionis speciem revocari possunt, si per numerum multiplicentur, qui denominator est fractionis datæ, & facto idem subjiciatur denominator. Sic 7 & $\frac{2}{5}$ ad eamdem speciem rediguntur si 7 ducatur in 5, exinde conficiatur fractio $\frac{35}{5}$. Ratio in promptus est ex dictis, si numeri integri pro fractis habeantur, quorum denominator est unitas.

§. VIII.

Fractiones multiplicare, & dividere.

44. Nulla reductione opus est, ubi fractiones multiplicare oportet; satis est enim numeratores, & denominatores invicem ducere, ut novus existat numerator & denominator fractionis, quæ erit factum ex datis fractionibus emergens. Sic factum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8}$ est $\frac{8}{48}$. Contra vero si fractio per aliam fractionem dividenda sit, dividendæ numerator per alterius denominatorem est multiplicandus, & illius denominator in hujus numeratorem ducendus est. Sic quotus ex $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16}$ est $\frac{48}{12}$, sive 4. Nec mirum esse debet, si fractio per fractionem divisa dat numerum integrum, cum revera una fractio bis, ter, quater &c. in alia contineri possit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per divisionem, & ratio constat, si ipsa divisionis, & multiplicationis natura attendatur. Quod si numerus compositus ex integro & fracto per numerum ex fracto & integro paritèr compositum multiplicandus sit aut dividendus, uterque integer ad eamdem cum fracto suo speciem revocandus est, & in unam summam cum eodem colligendus, ubi enim hoc feceris eadem prorsus methodo res absolvitur, ut in puris fractio-

ctionibus factum est. Atque ita etiam si diversæ speciei quantitates (ut puta, libræ, unciæ, octavæ per similes quantitates multiplicandæ essent, aut dividendæ, utrasque priùs oporteret ad infimam speciem redigere. Sic ut habeatur factum ex $2.\frac{4}{5}$ in $3.\frac{5}{6}$, prior quantitas ad eandem speciem redacta dat $\frac{14}{5}$, secunda verò $\frac{33}{6}$, & factum ex utraque $\frac{322}{30}$, sive $10.\frac{22}{30}$, aut $10.\frac{11}{15}$, fractione ad minimos terminos depressa.

§. IX.

De iisdem in fractionibus decimalibus.

45. Fractiones decimales eadem omnino ratione qua integri, pertractantur. Solum habenda est maxime ratio puncti, quo ab integris dirimuntur. Hoc enim punctum in eadem verticali linea jacere debet cum plures quantitates vel in unam summam colligendæ sunt, vel ab invicem subducendæ. Ubi vero multiplicatio instituitur, eum locum in facto occupare debet, ut totidem post se notas relinquat quot erant in utroque coefficiente. Demum si divisio peragitur, divisi numeri decimales notæ probe notandæ sunt computando in his etiam cyphras, quæ ad divisionem continuandam adjectæ essent; nam in quoto, & divisore simul totidem esse debent post punctum notæ, quot erant in dividendo. Additionem, subtractionem, multiplicationem, & divisionem ejusmodi exhibent exempla 23, 24, 25, 26.

46. Notandum est tamen quod interdum vacantia loca cyphris supplenda sunt. In subtractione, si numerus subtrahendus plures habet notas quam is unde subtrahitur, huic adjicere oportet tot cyphras, quot in illo notæ superfluunt. Sic in Ex. 27 subtractio peragitur

non aliter quam si vacantia superioris numeri loca cyphras continerent.

47. At si quantitates se mutuo destruant antequam ad punctum pervenias, quæ vacant in differentia loca ad punctum usque cyphris supplenda sunt, sive etiam integri numeri omnino se destruant, ut in Ex. 28°, sive aliquam relinquant differentiam, ut in Ex. 29°.

48. In multiplicatione, si non tot fuerint in facto notæ, quot in utroque coefficiente decimales, tot illi sunt cyphræ anterius apponendæ, donec hunc notarum numerum adæquent. Ita factum est in Ex: 30.

49. Demum in divisione instituenda, si dividendus non tot habet notas quot requiruntur ut divisorem superet vel adæquet(tot in fine cyphræ adjiciantur, quot opus fuerit ad hunc defectum supplendum. Quod si divisione peracta, plures sint in diviso numero decimales notæ quam in divisore simul, & quoto, huic erunt apponendæ anterius tot cyphræ quot in diviso notæ superfluunt. Utrumque contingit in Ex. 31°. Nam si divisor est 356. 27, & dividendus sit 2. 314, huic erunt duæ cyphræ apponendæ, ut divisio possit institui, quæ cum deinde per duplicem cyphræ adjectionem continuetur, numerabit dividendus septem decimales notas, cum duæ tantum sint in divisore. Quinque igitur ejusmodi notæ esse debebunt in quoto, & ut totidem sint duæ illi cyphræ erunt anterius apponendæ.

§. X.

Extractio Radicum.

50. VEniendum est jam ad extractionem radicum; qua in re illud in primis est animadvertendum quod si numerus in se ipsum ducitur, productum dicitur quadratum, sive potentia aut dignitas secunda ejusdem numeri, cum numerus ipse potentia prima dicatur. Si quadratum iterum ducitur in suum numerum, factum dicitur cubus, sive potentia tertia. Si cubus

bus in eumdem ducatur numerum factum dicitur potentia quarta. Si hæc iterum ducatur in eumdem numerum, factum erit potentia quinta, eodemque modo sexta, septima &c. ejusdem numeri potentiæ gignuntur. Sic 3 est sui ipsius potentia prima, 9 secunda, 27 tertia, 81 quarta, 243 quinta, & sic deinceps.

51. Contraria prorsus ratione 3 dicitur radix quadrata, aut secunda, sive sine ullo addito radix numeri 9, radix cubica aut tertia numeri 27, Radix quarta 81, quinta 243 &c.

52. Dati numeri potentiam quamlibet invenire facillimum est ope multiplicationis; at radicem investigare longe difficilius: immo infiniti numeri nullas habent radices veras, quas numeris liceat exprimere, sed tantummodo veris proximas, quæ scilicet fractionum ope ad veras quantum libuerit accedant, quin usquam ad exactum earumdem valorem pertingant. Sic potentia secunda binarii est 4, ternarii est 9, adeoque Radix 4 est 2, radix 9 est 3: sed nullus numerus inter 4 & 9 radicem habet exactam in numeris vel integris vel fractis. Non in numeris integris quia major esse debet quam 2, minor quam 3: non in fractis vel in integris simul cum fractis, quia numerus fractus, vel compositus ex integro & fracto, in suo quadrato fractionem aliquam semper habet.

53. Radices extrahere dicimur cum ejusmodi radices veras, vel veris proximas investigamus. Methodum hic dabimus expeditam ad radices quadratas extrahendas, de altioribus dicemus in arithmetica speciosa, ubi formulæ algebraicæ ipsam hujus operationis rationem facile demonstrabunt. Ante tamen in promptu habere necesse est quadrata novem primorum numerorum, quæ sunt 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ut statim assignari possit radix vera, vel proxime minor vera cujuslibet numeri minoris quam 100.

54. Detur in Ex. 32° numerus 1819022 5 cujus radicem quadratam extrahere oporteat. Numerum datum in classes divide, quarum singulæ duas notas conti-

neant, initio a postremis facto, nihil enim refert sive unica tantum nota prima classis constet, sive duabus, ut in hoc casu contingit, & quot erunt ejusmodi classes, totidem radix quaesita habebit notas. Hinc dicta linea transversa ad calcem numeri, ut divisione fit,

55. Quaere radicem veram, aut proxime minorem vera notarum primae classis, quae in nostro casu est 4, scribe 4 ubi in divisione quoti numeri notari solent, & ejus quadratum 16 aufer ex 18. Residuo 2 adnecte notas classis proxime sequentis & hujus novi numeri postrema nota contempta, quaere quoties duplum radicis hactenus inventae, sive 8, contineatur in 21? Resp. 2. scribe ergo 2 in radice & ex 219 aufer productum ex 2 in 82, hoc est, in numerum compositum ex duplo radicis prius inventae in decadum ordinem translato, & ex radice postremo inventa. Quod si contingeret factum ex 2 in 82 majorem esse, quam ut ex 219 subduci posset, pro 2 scribendus esset in radice numerus proxime minor & in eo tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit, quare ex 219 aufer 2 in 82, sive 164, & residuo adnecte notas classis proxime sequentis. Rursus contempta novi numeri postrema nota dic: quoties duplum radicis hactenus inventae, sive 84 continetur in 550? Resp. 6, & quoniam factum ex 6 in 846 est ejusmodi ut auferri possit ex 5502, scribe 6 in radice, & ea subtractione peracta residuo adnecte postremas duas dati numeri notas. Dic ergo iterum quoties duplum radicis hactenus inventae, sive 852 continetur in 4262? Resp: 5: & quoniam factum ex 5 in 8525 auferri potest ex 42625, scribe quinque in radice, & subtractione peracta quoniam nihil reliqui sit, id erit indicio radicem exactam dati numeri esse 4265.

56. Quod si post ultimam subtractionem aliquid supersit, punctum residuo apponitur, & duae cyphrae adjiciuntur, ut operatio continuetur in partibus decimis unitatis. Exinde eadem ratione progredimur ad centesimas, & sic deinceps quantum libuerit, ut videre est in Ex. 33°.

57.

57. Idem hic quoque notare oportet quod est in divisione animadversum. Nempe si post adjectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis duplum radicis inventæ nusquam contineatur in numero, qui per illud dividendus est postrema hujus nota contempta, cyphra ponenda est in radice, & classis sequentis duabus notis demissis operatio continuanda.

58. Denique hæc operatio divisioni est perquam simillima, in qua radix sit quotus, divisor verò sit duplum radicis postremò inventæ auctum nota, quæ deinceps inquiritur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, hic autem semper augetur; ibi totus divisor cognoscitur, hic autem ignota est novi divisoris nota, quæ inquiritur; quod in causa est, cur in hac divisione instituenda postrema quantitatis dividendæ nota prætereatur.

59. Si numerus, unde radix extrahenda est, fractiones habeat decimales, classium divisio hinc & inde a puncto exordium sumit, ut videre est in Ex. 34: ubi nota quod cum decimalium classes desinant in unam notam, ubi hæc postremo residuo est adjicienda, apposita cyphra ad binas adducitur.

60. Hujus operationis ritè peractæ argumentum habebis, si radicis inventæ quadratum quæras, & huic residuum addas, si aliquid peracta operatione superfuit, redibit enim numerus, unde radix extracta est. Quod si radix extracta est ex quantitate composita ex integris & decimalibus, ubi operationis periculum facies numerus emerget, qui præter dati numeri notas aliquot in fine cyphras contineat; ne tamen putes alicujus erroris indicium hoc esse, nam cyphræ decimalibus in fine numeri adjectæ nihil mutant quantitatem, quemadmodum nihil eamdem mutant in integris cyphræ anterius appositæ.

§. XI.

De numeris surdis.

61. Multoties ab extrahenda radice supersedemus; ubi veram invenire non licet, & numero, ex quo esset extrahenda signum radicale præfigimus $\surd$: sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3, & $\sqrt[3]{10}$ denotat radicem cubicam denarii & $\sqrt[4]{28}$ denotat radicem quartam 28. Et hi sunt quos Arithmetici vocant numeros surdos, sive irrationales.

62. Ubi plures dantur ejusmodi numeri surdi, adduntur, vel subtrahuntur facillime, si & ejusdem sint ordinis & idem sit ubique sub signo radicali numerus, præfigendo scilicet numerum, qui denotet quoties ea surda quantitas sumenda sit; sic $7\sqrt{2}$ est summa $2\sqrt{2}$ & $5\sqrt{2}$, & $5\sqrt{2}$ est differentia inter $7\sqrt{2}$, & $2\sqrt{2}$. At ubi numeri sub signo radicali positi diversi sunt non aliter fere addi possunt, aut subtrahi quam connectendo quantitates per additionis, aut subtractionis signa, de quibus dictum est in Scholio post prop. 9. Geom. & iterum dicetur in §. I. Elem. Algebræ.

63. Contingit tamen interdum ut quantitates surdæ ad eumdem numerum revocari possint; in quo casu licebit post reductionem easdem addere, aut subtrahere, uti dictum est. Reducuntur autem eadem ratione, qua ad minimos terminos revocantur. Numeri sub signo radicali positi quære omnes divisores, & inspice an inter illos sit aliquis, ex quo liceat radicem extrahere ejus ordinis, cujus est surda quantitas. Si aliquem ejusmodi divisorem invenias, ejus radicem præfige signo radicali, sub quo hærebit tantummodo alter dati numeri coefficiens. Sic $\sqrt{8}$ resolvitur in radicem facti ex 2 in 4 unde æqualis invenitur $2\sqrt{2}$, & $\sqrt{32} = \sqrt{\overline{16\sqrt{2}}}$ æquatur $4\sqrt{2}$. Eadem ratione $\sqrt[3]{16}$ æquatur $2\sqrt[3]{2}$, quia

16

37895 9
7 18
1 21
1

20
18
17

94

(Ex.19)

lib.	unc.	oct.
34.	9.	6
7.	11.	5
35.	10.	7
78.	8.	2

(Ex.20)
41.6.3
17.9.4
23.8.7

(Ex.28.)
231.467
231.465
0.002

(Ex.21.)

$\frac{3}{7} \times \frac{1}{5}$

$\frac{15}{35}$ $\frac{7}{35}$

(Ex.22)
2
4.2
148.74.37

(Ex.27)
.23 47.23000
.65789 15.65789
.57211 31.57211

(Ex. 29)
46.378
21.369
25.009

(Ex.30)
.134
.231
134
402
268
.030954

(Ex.31)
356.27
.00649.
2.31400
213762
176380
142508
338720
320643
18077

3134.6211(18.292
1
234
224
10.62
724
33810
32841
96900
73164
23736 &c.

.0026. F $\frac{2}{3}$. G $\frac{5}{8}$. H $\frac{7}{12}$

h 46'. 52". 37'''. 41

7
8
9

(Ex.5)

290062
124620
O 165442

(Ex.6)

39782
39690
P 92

(Ex.7)

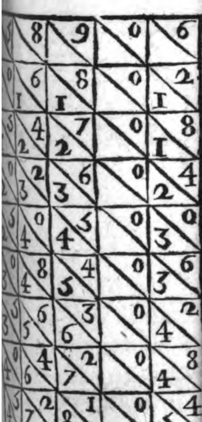
235
43
705
940
Q 10105

4
44

308

(Ex.13)

835 | 43602 | 52 $\frac{182}{835}$
4175
1852
1670
182



35

(Ex.14) 835 | 43602 | 52 217 &c.

2	1670	4175
3	2505	
4	3340	1852
5	4175	1670
6	5010	
7	5845	1820
8	6680	1670
9	7515	

1500
835
6650
5845
805

16 resolvitur in coefficientes 8 & 2, quorum ille habet radicem cubicam 2, & $\sqrt[4]{96}$ æquatur $2\sqrt[4]{6}$, quia 96 resolvitur in 16 & 6, quorum prior habet radicem quartam 2.

64. Demum multiplicantur, & dividuntur numeri irrationales, quemadmodum reliqui numeri, & facto vel quoto idem quod prius erat signum radicale præfigitur, quod quidem in utroque numero sit ejusdem ordinis; nam si sint ordinis diversi, prius ad eumdem ordinem quantitates erunt ejusmodi revocandæ, de qua re commodius dicetur ubi de potentiarum exponentibus & logarithmis agemus. Interim factum ex $\sqrt{2}$ in $\sqrt{8}$ est $\sqrt{16}$, sive 4, & quotus ex $\sqrt{8}$ divisa per $\sqrt{2}$ æquatur $\sqrt{4}$, seu 2. Factum vero ex $\sqrt{2}$ in $\sqrt{3}$ est $\sqrt{6}$, & quotus ex $\sqrt{5}$ per $\sqrt{3}$ æquatur $\sqrt{\frac{5}{3}}$. Quod si quantitates irrationales per rationales multiplicare oporteat aut dividere, non alia re opus est quam has illis præfigere, aut subjicere sic factum ex 10 in $\sqrt{3}$ est $10\sqrt{3}$, & quotus ex divisione $\sqrt{3}$ per 5 est $\sqrt{\frac{3}{5}}$, seu $\frac{1}{5}\sqrt{3}$; sic enim scribere præstat ne divisorem radicali signo affectum esse quis putet.

CAPUT II.

De Rationibus, & Proportionibus.

§. I.

De ratione simplici.

1. Et si de his in Geometriæ Elementis aliqua diximus quantum eo loci res postulabat, non tamen erit inutile aliqua hic repetere, ubi ea doctrina plenius tradenda est; tum ne sæpius lectorem ad superiora remittamus, tum quia tanti refert animo hæc altius imprimere,

re, ut operę pretium sit ea sæpius Tyronibus inculcare. Utemur interdum arithmeticæ speciosæ notis ad proportionum affectiones vel generalius exprimendas, vel brevius demonstrandas. Itaque antequam hoc caput legere aggrediantur, recolant quæ de his ibidem adnotavimus, aut §. I. & II. Algebræ, quos a reliquis noluimus divellere, attente perlegant.

2. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum habitudo, qua ad invicem referuntur in ordine ad ipsam quantitatem. *Geometrica* est si in ea relatione spectemus quomodo una quantitas alteram contineat: *Arithmetica*, si excessum tantummodo unius supra aliam consideremus. Si referas 10 ad 5 quatenus prior quantitas secundam bis continet, ratio erit geometrica: at si referas 10 ad 5 quatenus prior quinque unitatibus secundam excedit, ratio erit arithmetica. Rationis autem nomine, nisi quid additur, semper Geometrica designatur.

3. In omni ratione quantitas, quæ ad aliam refertur, antecedens dicitur, ea vero ad quam refertur, consequens.

4. Ratio Geometrica dicitur dupla, tripla, deculpla &c. Si antecedens bis, ter, decies &c. consequentem continet: contra vero subdupla, subtripla subdeculpla &c. Si bis, ter, decies &c. antecedens in consequenti continentur.

5. Exponens rationis Geometricæ dicitur quotus ex antecedenti per consequentem diviso: Exponens vero arithmeticæ est differentia consequentis ab antecedenti. Sic exponens rationis Geometricæ 10 ad 5 est 2, exponens arithmeticæ 10 ad 7 est 3: Exponens Geometricæ 6 ad 9 est $\frac{2}{3}$, exponens arithmeticæ 5 ad 8 est $8 - 3$: & in genere si dentur quantitates a & b, earum rationem geometricam exponet $\frac{a}{b}$ sive $a : b$ (nam ita quoque ea divisio designatur) arithmeticam $a - b$. Hinc ratio geometrica ad instar fractionis scribitur, arithmetica ad instar subtractionis.

6. To-

6. Tota rationum doctrina ab hoc generali theoremate pendet: si antecedens & consequens rationis geometricæ per eamdem quantitatem multiplicentur aut dividantur eadem manet ratio: & eadem pariter manet ratio arithmetica si illius antecedentem, & consequentem eadem augeas quantitate, vel imminuas. Res demonstratione non indiget, patet enim ex ipsis terminis esse $6 : 2 = 6 \times 4 : 2 \times 4 = 24 : 8$, & $a : b = ac : bc$: itemque $6 : 3 = \frac{6}{2} : \frac{3}{2}$, & $a : b = \frac{a}{d} : \frac{b}{d}$ Similiter $8 - 5 = (8 + 4) - (5 + 4) = 12 - 9$, & $8 - 5 = (8 - 2) - (5 - 2) = 6 - 3$.

7. Quantitates æquales æqualem habent ad eamdem quantitatem rationem, & contra: duarum vero inæqualium quantitatum quæ major est majorem habet ad tertiam quantitatem rationem, quam minor. Hæc & his similia satis per se manifesta sunt, & inter axiomata reponenda.

8. Duarum rationum æqualitas proportio dicitur Geometrica vel Arithmetica pro rationum ipsarum qualitate: quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur, & prima ad secundam esse dicitur, ut tertia ad quartam. Quòd si eadem quantitas bis assumatur, ut proportio in tribus tantum quantitatibus consistat, quod videlicet fit cum primæ rationis consequens idem est cum antecedente secundæ, proportio dicitur continua, quæ alias discreta diceretur. Designatur Geometrica Proportio sic: $a . b :: c . d$, vel $a : b = c : d$, vel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: Arithmetica vero $a - b = c - d$.

9. In proportione Geometrica factum sub extremis terminis, æquatur facto sub mediis: & si quatuor quantitates sint ejusmodi, ut factum sub extremis æquetur facto sub mediis, eæ sunt geometricè proportionales. Id ipsum contingit in extremarum, & mediarum summa, si de Arithmetica proportione sermo sit. Si rem in numeris experiaris, ita se habere liquido deprehendes, at si demonstrationem directam inquiris, primam, & secun-

ſecundam partem demonſtravimus in Elem. Geom. prop. 10. Tertia verò & quarta ex dictis num. 6., & 7. facile demonſtratur. Nam ſi fuerit $a - b = c - d$, erit (*per n.* 6.) $(a + c) - (b + c) = (a + c - (a + d)$; ergo (*per num.* 7.) $b + c = a + d$. Rurſus ſi fuerit $b + c = a d$, erit (*per num.* 5.) $(a + c) - (b + c) = (a + c) - (a + d)$ Ergo (*per num.* 6.) $a - b = c = d$.

10. In omni proportione geometrica datis tribus terminis quartus facile invenitur. Nam ſi unus eſt ex extremis, æqualis erit facto ſub mediis per alterum extremum diviſo; & ſi eſt unus ex mediis æquabitur facto ſub extremis per alterum medium diviſio. In Arithmetica vero proportione idem invenitur eadem ratione ſi multiplicationi additionem ſubſtituas, & diviſioni ſubtractione. Deſcendit ex præcedentibus, nam ſi eſt $a . b :: x . c$, erit $a \times c = b \times x$, atque adeo $x = \frac{ac}{b}$ ſimiliter ſi fuerit $c . d :: e . x$ erit $c x = d e$, adeoque $x = \frac{de}{c}$ At in Arithmetica ſi fuerit $a - x = b - c$, erit $a + c = x + b$, unde $x = a + c - b$. Hinc regula aurea, ſive trium, deſcendit, in qua datis prioribus tribus terminis geometricæ proportionis, tertius duci jubetur in ſecundum, & factum dividi per primum, ut quartus habeatur.

11. Ex nono numero deducitur quod utcumque ordinentur quatuor termini proportionales, manet proportio dummodo qui ſemel fuerant extremi, vel ambo maneant extremi, vel medii, aut vice verſa. Cum enim ſint proportionales, factum ſub extremis æquabitur facto ſub mediis, & ordine, uti dictum eſt, immutato eadem manebit æqualitas. Et idem valet de ſumma in proportione Arithmetica. Quoniam vero quilibet ex quatuor terminis primum locum occupare poteſt ejus coefficiente in poſtremum locum rejecto, & ex aliis duobus uterque mediorum primus eſſe poteſt altero ſecundo exiſtente; terminorum ordo octies mutari po-

est, ut patet in A, & B (Tab. pag. 110.) ubi ejus rei exemplum tam in Geometrica proportione positum est, quam in Arithmetica.

12. Ex prima terminorum ordinatione reliquæ omnes inferuntur, quarum illationum duæ tantum propriis nominibus designantur a Geometris, secunda scilicet, & quinta earum quæ sunt in A; nam argumentari dicimur *alternando* cum primus infertur esse ad tertium, ut secundus ad quartum: *invertendo*, si infertur esse secundus ad primum, ut quartus ad tertium. Cæterum omnes ejusmodi mutationes non incongrue uno vocabulo *permutando* fieri duci possent.

13. In proportione geometrica est summa vel differentia terminorum primæ rationis ad primum vel secundum, ut summa vel differentia terminorum secundæ rationis ad primum vel secundum; & contra primus vel secundus terminus primæ rationis est ad summam vel differentiam terminorum ejusdem, ut primus vel secundus terminus rationis secundæ ad ejusdem terminorum summam vel differentiam. Rursus summa terminorum primæ rationis est ad eorumdem differentiam, ut summa terminorum secundæ ad ipsorum differentiam: & contra differentia terminorum primæ rationis ad eorumdem summam est ut differentia terminorum secundæ ad ipsorum summam. Hinc decem inferuntur proportiones, quæ dispositæ sunt in C, quarum posteriores quinque ex quinque prioribus fiunt *invertendo*. Harum omnium legitimam illationem in numeris explorabunt Tyrones, quos litteris in prima proportione semel substitutos iisdem in omnibus reliquis substituent, permagni enim interest per hanc numerorum substitutionem algebraico, ut ita dicam, sermoni assuescere eumque sibi familiarem efficere; in nostro autem casu quantitates semper proportionales obtinebunt. Cæterum generalis horum demonstratio patet in D ubi harum omnium illationum extremi & medii termini invicem ducti dant æquales quantitates, cum sit ex hypotesi

ad

$ad = bc$, & his æqualibus quantitatibus ubique addantur vel adimantur æquales.

14. Ex his decem proportionibus cum secundam inferimus, in qua summa terminorum ad secundum refertur, argumentari dicimur *componendo*; si vero eorumdem differentia ad secundum refertur, argumentari dicimur *dividendo*: Quod si demum utriusque rationis prior terminus ad primi & secundi differentiam referatur, ut in octava fit, hoc argumentandi genus dicitur *conversio rationis*. Reliquæ illationes propriis nominibus carent. Cæterum in Arithmetica proportione harum illationum nulla locum habet.

15. In qualibet proportione eadem manebit rationum æqualitas, si per eandem quantitatem multiplicetur aut dividatur, vel primus & secundus terminus; vel primus & tertius; vel tertius & quartus; vel secundus & quartus, vel aliquod ex his binariis; vel omnia simul, sive per eandem omnia, sive per singulas singula binaria quantitates. Etenim in his omnibus casibus invenietur factum sub extremis terminis æquale facto sub mediis, ut patet in exemplo apposito in E ubi hos casus expressimus, in iisdem quantitatibus $a . b :: c . d$ per eamdem m successive multiplicatis, aut divisis. Et in quatuor quidem prioribus casibus factum sub extremis est ubique mad; factum sub mediis mbc; in quatuor vero posterioribus, illud est $\frac{ad}{m}$, hoc $\frac{bc}{m}$; quæ omnia æqualia sunt inter se ob $ad = bc$. Porro cum maneat proportio sive dividatur per eandem quantitatem sive multiplicetur unumquodlibet ex prædictis binariis; manifestum est eamdem manere sive in pluribus successive, sive in omnibus simul idem fiat. Rem in numeris experiri Tyronibus erit in primis utile, ut monuimus, tum ad exercitationem, tum ad res altius animo defigendas.

§. II.

De ratione composita.

16. **R**Atio composita ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur, quam habet factum ex earum antecedentibus ad factum ex consequentibus; ratio autem ex Arithmeticis composita est illa, quam habet summa antecedentium ad summam consequentium. In F & H duæ sunt ex una parte rationes geometricæ, tres ex alia, & rationes ex his compositæ in G & K inveniuntur. Similiter duæ sunt rationes Arithmeticæ in L, & ex his compositæ in M.

17. Ratio composita est factum ex componentibus in geometricis, summa in arithmeticis. Nam quod ad primum attinet ratio $a : b$ est fractio $\frac{a}{b}$, & ratio $c : d$ est $\frac{c}{d}$ cum sit per num. 5. valor rationis quotus ex antecedenti per consequentem diviso. Sed $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ exprimit rationem $ac : bd$ ex simplicibus compositam: ergo ratio composita est factum ex componentibus. Sic ratio $4 : 2$ erat dupla, ratio $9 : 3$ tripla, ratio composita $36 : 6$ est sextupla. Similiter ex ratione $4 : 2$ dupla, $9 : 3$ tripla, $20 : 5$ quadrupla, oritur ratio $720 : 30$, cujus exponens est 24, factum scilicet ex $2 \times 3 \times 4$. Secunda pars evidens est, nam summa antecedentium est $a + c$, summa consequentium $b + d$, unde ratio ex his composita $(a + c) - (b + d)$. Patet etiam in rationibus $6 - 2 = 4$, $7 - 5 = 2$, ex quibus componitur ratio $13 - 7 = 6 = 4 + 2$.

18. Si plures sint geometricæ proportiones & primi seorsim termini invicem multiplicentur; tum secundi, tum tertii, tum quarti; facta erunt proportionalia: & idipsum continget in proportionibus arithmeticis si multiplicationi summa terminorum substituatur. Patet, quia

qua-

quatuor termini, qui inde efficiuntur, duas constituent rationes ortas ibi ex multiplicatione, hic ex summa rationum æqualium adeoque & ipsæ æquales erunt inter se. Exempla habes in Q, R, S, T.

19. Si in pluribus rationibus geometricis vel arithmeticis eumdem terminum alicubi esse contingat tum in antecedentibus, tum in consequentibus; eadem erit ratio composita etiamsi terminus ille supprimatur. Exempla habes in V & X, ubi *am*: *nc*, & *a*: *n* sunt rationes compositæ ex tribus superioribus suppresso termino *b* in prima, & *bc* in secunda, quod hi antecedentibus, & consequentibus communes sunt. Eadem exempla exhibent numeri in Y, Z. Quod si quis in arithmeticis quoque rationibus exempla desideret, facillime per se ponet. Demonstratio pendet ex eo quod in his casibus terminus supprimitur, qui multiplicaret in geometrica, & augeret in arithmetica utrumque terminum rationis, quare eadem manet ratio (*per num.* 6.) sive abjiciatur ille terminus, sive inducatur in rationem compositam. Inde etiam facile eruitur quod toties in consequentibus idem terminus prætermitti potest quoties in antecedentibus suppressus est, ut in AA: ubi cum *b* semel in antecedentibus occurrat, bis in consequentibus, in his non nisi semel supprimi potest.

20. Ratio sive geometrica, sive arithmetica uniuscujusvis termini ad alium quemvis componitur ex rationibus intermediis, quæ oriuntur ex quovis numero terminorum interjacentium. Sic ratio *a*: *b* æquatur rationi compositæ ex *a*: *m*, *m*: *p*, *p*: *r*, *r*: *c*, *c*: *b*, initio facto in *a*, & desinendo in *b*, sumptis terminis intermediis quot libuerit. Sic in numeris ratio 36: 2 est ratio composita ex 36: 18, 18: 6, 6: 12, 12: 4, 4: 2. Demonstratio in promptu est, quia quantitates illæ intermediæ in antecedentibus & consequentibus occurrunt, unde ratio composita ex *a*: *m*, *m*: *p*, *p*: *r*, *r*: *c*, *c*: *b* eadem est ac ratio *amprc*: *mprcb*, in qua suppressis communibus terminis remanet ratio *a*: *b*.

21. Hinc duplex oritur argumentandi ratio, quarum alte-

altera dicitur *ex æqualitate ordinata*, altera *ex æqualitate perturbata*. Sint, ut in AB & AC, tres quantitates ex una parte, & tres ex alia, ita ut eadem sit utrobique ratio primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam; erit etiam utrobique eadem ratio primæ ad tertiam, & hoc est argumentari ex æqualitate ordinata. Si vero fuerit ex una parte prima quantitas ad secundam ut secunda ad tertiam ex alia, & contra; argumentabimur ex æqualitate perturbata si inferamus eamdem esse utrobique rationem primæ ad tertiam. Exempla pro ratione arithmetica sunt in AD & AE, demonstratio autem pendet ex eo quod ultimæ rationes ex præcedentibus æqualibus componantur.

22. Hinc etiam intelligitur cur Euclides rationem compositam definiens ex duabus $a:b$, $c:d$, fieri jubeat ut antecedens secundæ c ad suum consequentem d, ita consequentem primæ b ad novam quantitatem e, ut sit $a:e$ ratio ex duabus prædictis composita. Id inquam, intelligitur ex nostra etiam definitione, nam ratio $a:e$ componitur ex rationibus $a:b$; $b:e$; quare cum sit $b:e = c:d$, erit ratio $a:e$ composita ex rationibus $a:b$, $c:d$.

23. Ratio inversa, seu reciproca dicitur, quam habet consequens ad suum antecedentem. Sic ratio inversa 3 ad 6 est ratio dupla, eadem scilicet, quam habent 6 ad 3.

24. Fractiones sunt in ratione composita ex directa numeratorum, & reciproca denominatorum. Exemplum numericum habes in AF, & ibidem ostenditur universim in litteris, revocando fractiones ad eumdem denominatorem.

25. Ratio ex duabus æqualibus composita dicitur duplicata, ex tribus triplicata, ex quatuor quadruplicata, & sic deinceps.

26. Hinc ratio Geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius est ejus duplicata, quam habent ipsæ quantitates ad invicem, ratio cuborum triplicata, & sic aliarum potentiarum rationes

æque multiplices sunt, & dicuntur rationis, quam habent inter se radices, quot habent potentiarum exponentes unitates. Et contra ratio quam habent inter se radices quadratæ, cubicæ, quartæ &c. dicitur subduplicata, subtriplicata, subquadruplicata &c. rationis potentiarum correspondentium: at ratio quæ intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc est ratio $a^{\frac{3}{2}}$ & $b^{\frac{3}{2}}$, dicitur sesquiplicata, cum sint $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

27. Facile intelligitur in omni progressione sive geometrica, sive arithmetica primum terminum ad tertium habere rationem duplicatam primi ad secundum, primum ad quartum habere rationem triplicatam, & sic deinceps: nam eæ rationes componuntur ex omnibus intermediis, quæ æquales sunt inter se. Euclides definit rationem ejus duplicatam, quam duæ quantitates habent inter se, illam quæ intercedit inter primum terminum & tertium proportionalem post primum & secundum; triplicatam quæ intercedit inter primum & quartum, & sic de reliquis, quod cum nostra definitione coincidere nemo non videt.

28. Si duæ sint variabiles quantitates ita connexæ inter se, ut si una dupla, tripla, vel utcumque multiplex evadat, altera etiam æque multiplex fiat; dicitur esse prima in ratione directa simplici alterius. Sic in motu uniformi spatium est in ratione simplici directa temporis. At si prima in eadem ratione decrescit, in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in ratione inversa, sive reciproca istius. Sic ubi res aliqua in partes æquales dividitur divisionibus diversis, magnitudo partium est in ratione inversa numeri ipsarum partium. Quod si istæ duæ variabiles quantitates ita sint invicem connexæ, ut altera crescat in eadem ratione qua primæ quadratum, aut cubus, aut potentia quarta &c. tunc illa esse dicetur in hujus ratione duplicata, triplicata, quadruplicata &c. Sic in sphæris superficies sunt in ratione duplicata radiorum, moles vero in ratione tripli-

cata

cata eorumdem. At si in eadem ratione decrescit, qua crescunt primæ quadrata vel cubi, dicetur esse in ratione hujus reciproca duplicata aut triplicata: Sic gravitas Nevvtoniana est in ratione reciproca duplicata distantiarum, quia decrescit in eadem ratione, qua distantiarum quadrata augentur. Dicitur demum una quantitas esse in ratione composita plurium quantitatum, quando crescit in eadem ratione, qua productum ex his quantitatibus: Sic in diversis motibus uniformibus spatium est in ratione composita celeritatis, & temporis. Porro componuntur hæ rationes ex directis, & reciprocis, sive simplicibus, sive duplicatis, triplicatis, subduplicatis &c.

29. In quantitatibus variabilibus ratio inversa, qua una ad alteram refertur bene etiam exprimitur per hoc quod una esse dicatur directe ut unitas, sive constans quælibet quantitas, per alteram variabilem divisa; nam fractio quæ inde emergit tanto minor est, quo major est ille divisor. Sic ubi spatium diversis celeritatibus percurritur, tempora sunt in ratione reciproca celeritatum, hoc est, ut unitas sive alia constans quantitas per easdem celeritates divisa, aut ad easdem applicata: quod loquendi genus satis est Geometris familiare ad hanc divisionem designandam.

30. Hoc proportionis genus, quod inter quantitates variabiles intercedit, signo etiam æqualitatis exprimitur. Sic, si spatium dicatur S, tempus T, velocitas C, erit $S = CT$, hoc est, spatium æquabitur velocitati in tempus ductæ. Nempe si fuerit aliud spatium s, aliud tempus t, alia velocitas c, erit $S . s :: CT . ct$.

31. Hinc argumentamur utrinque multiplicando aut dividendo, tamquam si vera & propria æqualitas intercederet. Cum sit enim $S = CT$, erit utrinque dividendo per C $\frac{S}{C} = T$, hoc est, tempus in ratione composita ex directa spatii S, & reciproca velocitatis C. Quod autem ita se res habere debeat patet ex eo, quia cum sit $S . s :: CT . ct$, si primus & tertius terminus

 divi-

dividatur per C, secundus & quartus per c, manebit rationum æqualitas (per num. 15.) eritque $\frac{S}{C} . \frac{s}{c} :: T . t$.

32. Si quantitas quædam, quæ prius variabilis erat, constans evadat; poterit ejus loco unitas substitui, atque adeo auferri, si vel in fractionis denominatore erat, vel in numeratore cum aliis quantitatibus composita. Sic cum sit $S = CT$, si duo motus æquabiles inter se comparentur, & eadem sit utrobique velocitas, erit $S = T$, hoc est, spatia in ratione temporum directa; & rursus cum sit $T = \frac{S}{C}$, si idem fuerit in duobus motibus spatium, erit $T = \frac{1}{C}$, hoc est tempora in ratione reciproca velocitatum. Eodem pacto res agitur in aliis similibus casibus, in quibus hac methodo ex uno Theoremate alia quamplurima facillimè eruuntur. Facilis est demonstratio, cum sit enim $S . s :: CT . ct$, ubi C constans est, erit $C = c$, quare dividendo terminos secundæ rationis per eamdem quantitatem manebit $S . s :: T . t$. Similiter cum sit $T . t :: \frac{S}{C} . \frac{s}{c}$, si fuerit $S = s$, dividendo per hanc quantitatem tertium, ac quartum terminum, manebit $T . t :: \frac{1}{C} . \frac{1}{c}$; quoniam $\frac{S}{S} = 1$ & $\frac{s}{s} = 1$.

CAPUT III.

De Progressionibus, & Logarithmis.

1. PRogressio vocatur, uti dictum est, terminorum series, qui in eadem continua proportione crescunt, vel decrescunt. Est autem progressio arithmetica, vel geometrica pro qualitate rationis, qua termini ad invicem referuntur. Geometricam habes in A, Arithmeti-

A d d md md d d

L

$a - b$ $6 - 2$

$c - d$ $7 - 5$

$ac\ldots) - (b + d)$ M $13 - 7$

$a . b :: m . n$

$c . d :: p . q$

$e . f :: r . s$

B d $\frac{}{m}$ d $\frac{}{m}$

3 $ace . bdf :: mpr . nqs$

4 . 2 :: $a - b = m - n$

9 . 3 :: $c - d = p - q$

20 . 5 :: $e - f = r - s$

. 30 :: 14 $f) = (m + p + r) - (n + q + s)$

AA a C 24 , 12, 4 : 18,6,3

m 24 . 12 :: 6 . 3

b 12 . 4 :: 18 . 6

am 24 . . 4 :: 18 . 3

A

metricam in B. Et hæ quidem Progressiones crescentes sunt; decrescentes vero in C, & D exhibentur.

$$\begin{cases} A & 1.2.4.8.16.32.64.128.256.512 \text{ \&c.} \\ B & 0.1.2.3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ 7.\ \ 8.\ \ 9 \text{ \&c.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C & 4.2.1.\ \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{1}{32}.\frac{1}{64} \text{ \&c.} \\ D & 2.1.0.-1.-2.-3.-4.-5.-6 \text{ \&c.} \end{cases}$$

2. Progressionis ratio ea est, quam habet primus terminus ad secundum, eadem est enim qua quilibet alius terminus ad proxime sequentem refertur.

3. Si terminus quilibet referatur ad eum, qui secundus ab illo est, invenietur habere ad eumdem rationem progressionis duplicatam, si ad tertium triplicatam, & sic deinceps.

Patet ex eo quod rationes ejusmodi ex omnibus intermediis componuntur. Sic in A est 8 ad 32 in ratione duplicata 1 ad 2; & 8 ad 64 in eadem ratione triplicata; & sic de reliquis.

4. Igitur si in qualibet progressione, sumantur quatuor termini, quorum priores duo eodem intervallo distent inter se, ac duo posteriores, erunt hi proportionales. Sic si sumatur in A secundus terminus 2, & quintus 16; itemque sextus 32, & nonus 256; erit 2. 16 :: 32. 256. Nam harum rationum utraque æque multiplex est rationis in qua termini progrediuntur.

5. In progressione Geometrica terminorum differentiæ erunt pariter in eadem continua ratione: & si in quadam terminorum serie fuerint differentiæ terminis proportionales, erunt hi in progressione geometrica. Sic in 18, 6, 2, differentiæ 12, 4 sunt ut 18 ad 6, in tripla nempe ratione, adeoque termini illi 18, 6, 2 sunt in progressione geometrica.

Dem. Sit $a. b :: b. c.$ Erit (*per num.* 13 & 14 *cap.* 2.)

convertendo $a.\ a - b :: b.\ b - c$. ergo alternando (*per num.* 12. *ib.*) erit $a.\ b :: a - b.\ b - c$. Sit jam $a.\ b :: a - b.\ b - c$; erit alternando $a.\ a - b :: b.\ b - c$; & convertendo $a.\ b :: b.\ c$.

6. In omni progressione Geometrica termini crescunt, vel decrescunt in infinitum, nec ulla est finita quantitas ultra quam vel crescens non ascendat, vel non descendat decrescens: quin tamen hæc ad nihilum usquam perveniat.

Dem. Cum enim terminorum differentiæ sint ipsis terminis proportionales, his crescentibus illas quoque augeri necesse est. Sit jam quælibet data quantitas p, & differentia termini primi a secundo q. Erit profecto numerus aliquis m, in quem si ducatur q datam quantitatem excedet. Quod si igitur tot progressionis termini sumantur post primum, quot habet m unitates, erit postremus major quam p. Etenim quod quilibet terminus sequens antecedenti addet, erit plus quam q, & universa incrementa totidem terminorum quot sunt in m unitates, erunt plusquam mq, adeoque datam quantitatem p excedent, & progressio eamdem prætergredietur. Sit rursus quantitas r quantumvis exigua, dico progressionem Geometricam decrescentem infra illam demum descendere. Dicatur enim primus terminus a, & sumatur aliquis terminus p, qui sit ad a ut a ad r, Si progressio fiat crescens a termino a in eadem ratione, in qua decrescit, post aliquem terminorum numerum perveniet ad quemdam numerum u, qui major sit quam p. Sumatur jam in decrescente idem numerus terminorum, & sit t terminus, ad quem pervenitur: erit (*per num.* 4.) $t.\ a :: a.\ u$, est autem ex hypothesi $a.\ r :: p.\ a$, erit ergo perturbate (*per num.* 21. *cap.* 2.) $t.\ r :: p.\ u$; Et quia p minor est quam u, erit & t minor quam r, ex quo constat nullam esse finitam quantitatem infra quam series decrescens non descendat. Nec tamen ad nihilum perveniet, quia in serie crescente post quemlibet terminorum numerum ad finitam aliquam quantitatem u pervenietur, & post eumdem terminorum numerum

rum in decrescente invenietur t qui sit ad a ut a ad u, nec esse poterit $t = 0$ cum sit $= aa : u$.

7. Progressio Arithmetica crescens ultra quamlibet positivam quantitatem ascendet, decrescens vero infra quamlibet negativam descendet, & in ejus terminis etiam o esse poterit.

Cum enim eadem quantitas continuò adjiciatur vel adimatur; limitem quemcumque vel positivum vel negativum prætergredi necesse est. Quod si terminos esse contingat differentiæ exactè multiplices; crescens aut decrescens series per o necessariò transibit, cum additio vel subtractio continua terminos destruat. Sic in D series per o transit, & ab o incipit in B. (pag. 111.)

8. Dato termino primo, ratione terminorum, & eorum numero, tam in gometrica progressione, quam in aritmetica postremus invenitur.

Sit a terminus primus, & terminorum ratio in geometria ut 1 ad r, & numerus terminorum $m + 1$. Erit terminus secundus ar, tertius ar^2, quartus ar^3, ultimus ar^m. At in Arithmetica si primus terminus sit a, ratio vero ut o ad r, hoc est differentia terminorum r, & numerus terminorum $m + 1$, erit secundus $a + r$, tertius $a + 2r$, quartus $a + 3r$, & ultimus $a + mr$. Hinc duo hæc theoremata inferuntur. In progressione geometrica ultimus terminus æquatur facto ex primo in exponentem rationis ad eam potestatem elevatum, quam exprimit numerus terminorum unitate mulctatus. At in progressione arithmetica ultimus terminus æquatur summæ ex primo, & differentia terminorum in eorumdem numerum ducta unitate mulctatum. Sic in A (pag. 111.) terminus quintus ita invenitur: $a = 1$, $r = 2$, $m + 1 = 5$, $m = 4$, ergo quintus $ar^m = 1 + .2 + 2 + 2 + 2 = 16$. At in B $a = 0$, $r = 1$, $m = 4$, unde terminus quintus $a + rm = 4$.

9. In progressione Geometrica est differentia primi a secundo ad differentiam primi ab ultimo, ut primus ad totam seriem dempto ultimo.

a	b
b	c
c	d
d	e
e	f
f	g
M	N

Sint enim a, b, c &c. seriei termini; quorum postremus g: Distribuantur in duas columnas, quarum alterius summa sit M; alterius N; ita ut prima contineat omnes terminos præter ultimum, & secunda omnes præter primum. Cum quilibet terminus columnæ M ad quemlibet columnæ N sit in eadem ratione; erit pariter in eadem ratione summa omnium primæ ad summam omnium secundæ: siquidem proportionales quantitates proportionalibus additæ rationem non mutant, quod facile ostenditur. Erit igitur $a . b :: M . N$, & convertendo $a . a - b :: M . M - N$, aut invertendo $a - b . a :: M - N . M$. Sed $M - N$ est differentia primæ columnæ a secunda, hoc est, differentia a à g, cum reliqui termini communes sint, ergo $M - N = a - g$: & $a - b . a :: a - g . M$: sive alternando $a . a - b :: a . M$. Quod erat dem.

Itaque ut in A (p. 111.) habeatur summa priorum quinque terminorum, fiat ut 1 (differentia primi a secundo) ad 31 (differentiam primi a sexto), ita 1 (terminus primus) ad summam quæsitam; quæ erit 31.

10. Si progressio decrescit in infinitum ultimo contempto termino, qui pariter in infinitum decrescens prorsus evanescit, habebitur tota series, si fiat ut differentia primi a secundo ad primum, ita primus ad omnium summam. Sic progressio $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. in unam summam collecta invenietur $= 1$, & hæc alia $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ &c. $= 1 + \frac{1}{3}$. Unde si quis unum deberet, & primo anno solveret $\frac{1}{2}$, secundo $\frac{1}{4}$, & sic deinceps; post infinitas solutiones totum debitum solveret. At qui deberet 2, & primo anno sol-

veret

veret 1, secundo $\frac{1}{4}$, tertio $\frac{1}{16}$, & sic deinceps; post infinitas solutiones adhuc aliquid deberet.

11. In progressione Arithmetica dimidium summæ termini primi & ultimi in numerum terminorum ductum dat totam seriem.

Cum enim sit primus ad secundum ut penultimus ad ultimum, summa primi & ultimi eadem erit, quæ secundi & penultimi, & sic de cæteris, cum omia ejusmodi binaria eamdem habeant summam. Cum igitur tot sit binaria quot habet terminos dimidia series, manifestum est summam termini primi & ultimi in dimidium numerum terminorum totam seriem colligere. Sic in B (pag. 111.) summa priorum sex terminorum, quorum primus est 0, postremus 5, erit $(0 + 5) \times 6 : 2 = 30 : 2 = 15$.

12. Hæc si conferas cum his quæ dicta sunt in n. 8. facile intelliges summam omnium numerorum in serie naturali ab unitate progredientium usque ad numerum quemdam x inclusive fore $(xx + x) : 2$; & summam omnium imparium pariter ab unitate, existente terminorum numero x, fore x^2. Sic omnium numerorum summa usque ad 6 inclusive est $(36 + 6) : 2 = 21$ & summa sex priorum imparium $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$. Similiter si sumas quemdam numerum x numerorum parium in serie naturali a 2 progredientium, invenies hanc fore $xx + x$. Sic summa priorum quinque numerorum parium $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 25 + 5 = 30$.

13. Si sint duæ progressiones, quarum altera geometrica sit, altera arithmetica, & sub singulis primæ terminis singuli secundæ notentur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum Logarithmi. Sic termini progressionis F sunt logarithmi progressionis E, singuli singulorum sibi imminentium: 6 est logarithmus 2, & 16 est Log. 64.

E $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.

F -4. -2. 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. &c.

14

14. Logarithmi multipliciter variari possunt. Integrum est enim cuivis duas quaslibet progressiones assumere, & alteram alteri affigere. Sed ad rem totam determinandam satis est duos geometricæ progressionis terminos cum suis Logarithmis constituere. Sic ubi semel decreveris 4 & 6 esse Log. 1 & 2, reliqui Logarithmi constituti sunt.

15. Utcumque fuerit constituta progressio geometrica cum suis Logarithmis, utramque seriem licebit interjectis quotcumque terminis augere. Si quidem inter duos quoslibet Geometricæ terminos medium geometricè proportionale, & inter duos eorum Logarithmos medium arithmeticè proportionale constituas. Sic inter 2 & 4 medium proportionale est $\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2.829$ &c. cujus Log. est $(6 + 8) : 2 = 7$. Et eadem methodo semper inveniri poterunt infiniti alii Logarithmi numerorum, qui vel integri sint, vel ex integris & fractis compositi, medios terminos inter duos proximos semper inquirendo. Porro geometricæ progressionis termini dicuntur sine ullo addito *numeri*, termini vero arithmeticæ *Logarithmi*.

16. Utcumque fuerint Logarithmi constituti, semper verum erit hoc generale Theorema, quod si e progressione Geometrica quatuor sumantur termini, qui sint inter se geometricè proportionales, erunt eorum Logarithmi in proportione arithmetica. Erunt enim illi ita in serie dispositi, ut priores duo æque distent inter se, ut duo posteriores; quod idem cum Logarithmis contingat, erunt etiam hi arithmeticè proportionales.

17. Igitur quæcumque fuerit Logarithmorum constitutio, in regula trium satis erit secundi & tertii termini Logarithmos addere, & ab ea summa Logarithmum primi subtrahere ut habeatur Logarithmus quarti; cum enim sint geometricè proportionales numeri, quorum tres dantur & unus inquiritur, erunt eorum Logarithmi arithmeticè proportionales; quare summa primi & ultimi æqualis erit summæ secundi & tertii, adeoque habebi-

bebitur quartus, si ab horum summa primum subducas.

18. Logarithmi designantur præfigendo quantitati litteram L, vel Log. quod frequentius usurpatur. Itaque Log. a denotat Logarithmum numeri a. Quod si his notis utaris, clarius etiam intelliges quod dicebamus; fore nempe Log. x = Log. b + Log. c − Log. a, si fuerit $a . b :: c . x$. Cum sint enim numerorum geometricè proportionalium Logarithmi arithmeticè proportionales, erit Log. a − Log. b = Log. c − Log. x; ergo Log. a + Log. x = Log. c + Log. b; adeoque Log. b + Log. c − Log. a = Log. x.

19. Forma Logarithmorum omnium commodissima est, in qua Logarithmus unitatis constituitur o, & utraque progressio crescit. Sint duæ hujusmodi progressiones G, & H.

G $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c.

H −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c.

20. In hac forma Logarithmorum in primis quilibet numerus erit aliqua potestas ejus, qui proximè sequitur unitatem: sic in nostro exemplo 4 est potestas secunda ipsius 2, 8 potestas ejusdem tertia, 16 potestas quarta &c. Erit enim $1 . 2 :: 2 . 4 = (2 \times 2) : 1$, & $1 . 2 :: 4 . 8 = (2 \times 2 \times 2) : 1$, & sic deinceps.

21. Præterea si progressio arithmetica habeat post o unitatem, erunt Logarithmi hujusmodi potestatum exponentes. Sic 4 est Logarithmus 16, qui est quarta potestas ipsius 2. Id manifestè sequitur ex num. præcedenti.

22. In qualibet forma Logarithmorum, in quibus o fit Log. 1., locum habebunt hæc quatuor Theoremata.

1° Log. (pq) = Log. p + Log. q.

2° Log. $\frac{p}{q}$ = Log. p − Log. q.

3° $\text{Log. } p^m = m \text{ Log. } p$.

4° $\text{Log.} \sqrt[m]{p} = \frac{1}{m} \text{ Log. } p$.

Horum theorematum sensus, ac vis est quæ sequitur.

23. Denotat primum æquari Logarithmum facti Logarithmis coefficientium simul sumptis. Sic quia $2 \times 8 = 16$; hujus numeri Logarithmus in progressione H æqualis est $1 + 3$; qui sunt Logarithmi numerorum 2 & 8. Facilis est demonstratio. Est enim $1 . p :: q . pq$. Ergo $\text{Log. } 1 + \text{Log. } (pq) = \text{Log. } p + \text{Log. } q$. (per num. 18.), sed $\text{Log. } 1 = 0$; ex hypothesi; ergo $\text{Log. } (pq) = \text{Log.} p + \text{Log.} q$.

24. Secundi theorematis sensus est: Logarithmum quoti æquari Logarithmo divisi, dempto Logarithmo divisoris. Sic quoniam $64 : 16 = 4$ erit $\text{Log. } 4 = \text{Log. } 64 - \text{Log. } 16 = 6 - 4 = 2$. Etenim cum sit per regulam trium $q . 1 :: p . p:q$, erit $\text{Log. } q + \text{Log. } (p:q) = \text{Log. } 1 + \text{Log. } p$, & delendo Log. 1, qui in nostro casu est $= 0$, & auferendo utrinque Log. q, erit $\text{Log. } (p:q) = \text{Log. } p - \text{Log. } q$.

25. Tertium theorema est: Logarithmum potestatis cujuslibet numeri obtineri multiplicando per exponentem potestatis ipsius numeri Logaritmum. Sic si elevare velis numerum 4 ad tertiam potestatem, & hujus potestatis Logarithmum quæras, obtinebis ducendo Log. 4 in 3. Nempe $\text{Log. } 4 = 2$, & $2 \times 3 = 6$, qui est Log. 64; est autem 64 potestas tertia ipsius 4. Etenim potestates oriuntur ducendo numerum in se ipsum, quare hujus Logarithmus continuò sibi ipse adjicitur, ut novæ potestatis Logarithmus habeatur. Sic $a^2 = a \times a$, ac propterea $\text{Log. } a^2 = \text{Log. } a + \text{Log. } a = 2 \text{ Log. } a$, eodemque modo $a^3 = a \times a \times a$, & $\text{Log.} a^3 = \text{Log.} a + \text{Log. } a + \text{Log. } a = 3 \text{ Log. } a$.

26. Quartum theorema est: Logarithmum radicis alicujus numeri haberi, si ejus Logarithmus per exponentem

tem radicis dividatur. Sic Log. $\sqrt{64} = 6:3$, hoc est Logarithmo 64 per 3 diviso, est autem quotus ex hac divisione emergens 2 Logarithmus ipsius 4, qui radix tertia est numeri 64. Demonstratio facile intelligitur ex superiorum theorematum demonstratione.

27. Hinc factum est, ut numerorum radices ab Arithmeticis tamquam quædam ipsorum potestates per exponentes fractos designentur, ut eodem pacto illas pertractare liceat, quo reliquæ numerorum potestates, quæ communiter hoc nomine designantur. Sic $\sqrt[3]{4}$ scribitur $4^{1:3}$; & $a^{2:3}$ denotat radicem cubicam quadrati ipsius a; & $a^{m:n}$ denotat radicem n ipsius a^m. Patet igitur quantitates radicales, sive numeros surdos ordinis diversi ad eumdem ordinem redigi, non aliter quam fractiones ad eumdem denominatorem, id ipsum nempe efficiendo in eorum radicalium exponentibus fractis: quod ex num. 71. cap. 1. in hunc locum rejecimus. Sic si oporteat invicem multiplicare $\sqrt{a}$ & $\sqrt[3]{aa}$, cum id fieri nequeat, nisi prius ad eundem ordinem redigantur, scribe pro $\sqrt{a}$, $a^{1:2}$, & pro $\sqrt[3]{aa}$, $a^{2:3}$ & revocando exponentes ad eumdem denominatorem habebis $a^{3:6}$, & $a^{4:6}$, sive $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{a^4}$, quorum factum est $\sqrt[6]{a^7}$, sive $a\sqrt[6]{a}$. Eadem ratione $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{6} = 6^{1:3}$, quibus ad eumdem ordinem redactis habebis $2^{3:6}$, & $6^{2:6}$, sive $\sqrt{8}$, & $\sqrt{36}$, quarum factum est $\sqrt{288}$.

28. Si numerorum omnium Logarithmi haberi possent, supputandi rationem commodissimam haberemus. Multiplicatio enim additione perficeretur, divisio subtractione, & quælibet dati numeri potestas, vel radix multiplicatione aut divisione ejus Logarithmi invenire-

niretur. Nunc autem cum omnes accurate haberi non possint, obtinentur quantum libuerit veris proximi continua mediorum proportionalium inquisitione. Sic multorum annorum labore supputati sunt Logarithmi pro omnibus numeris usque ad 100000. Sed hi sunt alterius cujusdam formæ, de qua mox dicemus.

29. In hac Logarithmorum forma, in qua unitati respondet 0, integri numeri Logarithmos habebunt positivos, fracti negativos, ut facilè apparet in H, ex quo constat hoc theorema. Dato Logarithmo negativo, ut ejus numerus habeatur satis erit unitatem accipere per numerum divisam, cui idem Logarithmus si positivus esset, responderet. Nempe si fuerit $a =$ Log. b, erit $-a =$ Log. $\frac{1}{b}$; etenim Log. $\frac{1}{b} =$ Log. $1 -$ Log. $b = -$Log. b. Sic -3 est Log. $\frac{1}{8}$, quia 3 est Log. 8.

30. Præterea si plures fuerint Logarithmorum series utcumque constitutæ, dummodo in omnibus Log. 1 sit 0, erunt cujuslibet numeri logorithmi inter se, ut logarithmi cujuslibet alterius. Nam si ex. gr. Log. 2. fuisset constitutus pro 1 quilibet alius numerus, cum numerorum sequentium Logarithmi æquabiliter crescant, tanto majores omnes reliqui obvenissent, quanto major primus assumptus esset.

31. Forma Logarithmorum commodissima, quæ nunc usurpatur est ea, in qua geometrica progressio in ratione decupla est 1, 10, 100, 1000 &c. Arithmetica verò 0, 1, 2, 3 &c. quamvis, ad habendos Logarithmos pro numeris intermediis, integris numeris decimales fractiones adjectæ sint, ut Logarithmi evaderent 0. 0000 &c. 1. 0000 &c. 2. 0000 &c. Incredibili labore inventi sunt veris quam proximi Logarithmi numerorum, qui medii sunt inter 1 & 10, inter 10 & 100. &c. inquirendo medios proportionales veris quam proximos, & eorum Logarithmos. Sic ut haberetur Log. 9 quæsitus est medius proportionalis inter 1 & 10, sive inter 1. 0000000, & 10. 000000 0, extrahendo ex

10.

10. 0 &c. radicem quadratam veræ proximam 3. 1622777 cujus Logarithmus est dimidius Log. 10. Et iste quidem numerus major est aliquanto quam 3, sed adhuc longè distat a 9. Itaque inter eum & 10. 0 &c. iterum quæsitus est medius proportionalis extrahendo radicem numeri, qui oritur ducendo 10. 00 &c. in 3. 16 &c. & inventa est radix veræ quam proxima 5. 6234132. Hic numerus paulo major est quam 5, & ejus Logarithmus habetur si summa Logarithmorum 10. 00 &c. & 3. 16 &c. bifariam dividatur. Sic continua inquisitione mediorum proportionalium intor duos numeros qui sint proximè majores vel minores quam 9, devenitur tandem ad numerum qui ne una quidem millionesima differat à 9, ejusque Logarithmus numero 9 attribuitur. Hoc artificio supputatæ sunt tabulæ Logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 usque ad 100000, sed hæ majoris formæ volumen implent. In libellis, qui vulgò solent circumferri, producuntur tabulæ usque ad 10000. Nos ad calcem Trigonometriæ post tabulas sinuum Logarithmos adjecimus ab 1 ad 1000, ne voluminis moles augeretur, & quod hi ad instituti nostri rationem satis essent.

32. Cœterum in tabulis supputandis non necesse est eam, quam innuimus, methodum adhibere; nisi in numeris primis. Nam in his, qui ex aliorum multiplicatione oriuntur, satis erit Logarithmos coefficientium addere, ut habeatur Logarithmus facti. Sic Log. 15 $=$ Log. 3 $+$ Log. 5 & Log. 27 $=$ Log. 3 $+$ Log. 9.

33. In hac Logarithmorum forma Log. numerorum ab 0 ad 10 habebunt 0 cum aliquot decimalibus adjunctis. Sic invenietur in tabulis Log. 3 $=$ 0 4771213. At qui sequuntur a 10 usque ad 100 habebunt unitatem decimalibus auctam, & ita porrò. Sic Log. 15 $=$ 1. 1760913. Log. 171. $=$ 2. 2329961. Numerus ille integer decimalibus præfixus dicitur Logarithmi characteristica, & hoc habetur Theorema. Omnis quantitas, quę designatur unitate, & quolibet cyphratum numero, habet in Logarithmi characteristica tot unitates meris cy-

phris

phris præfixas, quot ipsa cyphras. Sic Log. 1000000 = 6. 0000000. Quilibet alius numerus tot habet pro characteristica unitates decimalibus præfixas, quot ipse notis constat una dempta. Sic Log. 897 = 2.9527924.

34. Igitur ubi semel Logarithmi characteristica innotuerit, jam sciri potest quot notis ejus numerus constabit: id quod multoties percommodum accidit. Sic si scire velles ad quam perveniet quantitatem qui unitatem continuò duplicet per 64 vices, dicens nempe 1, 2, 4, 8 &c. satis erit notare eum esse perventurum ad sexagesimam tertiam potestatem binarii, quare ejus numeri Logarithmus æqualis erit 63 X Log. 2, seu 18. 9648900. Jam vero si Logarithmus haberet post integras notas meras cyphras, constaret ejus numerus unitate & 18 cyphris, adeoque trillio esset; si vero haberet characteristicam 19, quam meræ cyphræ subsequerentur, esset una Trillionum decas: cum igitur inventus Logarithmus inter hos duos medius sit, & quidem propius accedens ad secundum, quam ad primum, etsi nondum de ejus numero constet, habes tamen Trilione longe majorem esse, & ad denos Trilliones proximè accedere.

35. Cognita jam Logarithmorum natura, videndum superest quomodo dato numero ejus Logarithmus inveniatur, vel contra; & quomodo tabulæ ultra suos limites extendi possint. Quod ubi fecerimus alicujus problematis solutionem adjiciemus, quod sine Logarithmis esset ad solvendum difficillimum.

36. Si datus numerus integer est, eoque minor ad quem tabulæ pertingunt, inveniatur in ipsis tabulis Logarithmus numero appositus. Sic Log. 257. = 2.4099331 Si fractionem adjunctam habeat, cape Logarithmum integri, & ejus differentiam a Logarithmo proxime sequente. Tum dic: si numerus integer augeretur unitate, ejus Logarithmus augeretur inventa differentia; cum ergo augeatur datis partibus unitatis quanto major evadit ejus Logarithmus? id nempe invenies per regulam trium, & additum Logarithmo integri dabit Logarithmum compositi ex integro & fractis. Sic si quæratur Log.

Log. 257. 325, proxime ex tabulis Log. 258, & ex eo subtrahe Log. 257, invenies differentiam 16866. Tantum nempe crevit Logarithmus, ubi numerus augetur unitate; at in nostro casu augetur non quidem 325 unitatibus (quod probè notandum est) sed 325 millesimis partibus unitatis, unde ita ille numerus tractari debet, ut fractio habens denominatorem 1000. Fac igitur $1 : 16866 :: \frac{325}{1000}$ ad quartum, quem minutiis contemptis invenies 5481. Tantum nempe crevit Log. 257, ob additas numero fractiones datas, igitur Logarithmo 257 adde 5481, & habebis Log. 257. 325 = 2.4104812 quamproximè. Etsi enim Logarithmorum differentiæ numerorum differentiis non sint proportionales, tamen ab ea proportione tam parum aberrant in differentiis exiguis, cujusmodi hæ sunt, ut pro talibus haberi possint sine ullo sensibilis erroris periculo. Quod si commodius sit integrum numerum per fractionis denominatorem multiplicare, ut tota quantitas simul collecta fractio spuria evadat, commodius etiam invenietur ejus Logarithmus subducendo Logarithmum denominatoris a Logarithmo numeratoris per n. 24. Sic si quæratur Log. $9 + \frac{1}{3}$ cum ea quantitas commodè redigatur ad spuriam fractionem $\frac{28}{3}$, a Log. 29 aufer Log. 3, & habebis Log. $9 + \frac{1}{3} = 0.9700367$.

37. Quod si numerus datus sit vera fractio, erit Logarithmus denominatoris major quam numeratoris; quare hic ab illo subtrahendus, & præfigendum differentiæ signum negativum, ut habeatur Log. numeri unitate minoris negativus, juxta num. 29. Sic Log. $\frac{3}{25}$ = Lo. 3. − Log. 25 = 0.4771213 − 1.3979400 = − 0.9208187. Quod si fractio sit decimalis notandum est in ea subaudiri denominatorem constantem unitate, ac totidem cyphris quot sunt in ipsa notæ, itaque hujus denominatoris Logarithmum subtrahe a Log. numeratoris, &

 signum

signum negativum differentiæ præfigens rem, ut supra; confeceris. Sic si quæratur Log. 0. 194 aufer Log. 194 a Log. 1000 (hic enim est denominator ejus fractionis) & habebis Log. 0. 194 = − 0.7121983.

38. At si numerus detur major iis, qui in tabulis continentur, ejus Logarithmum vero proximum sic invenies. Ex numero dato tot notas puncto interjecto reseca, quot opus est, ut non plus valeat, quam qui in tabulis continentur. Tum ejus Log. inquires non aliter quam si ex integris & decimalibus constaret, uti factum est in num. 36. Logarithmi sic inventi characteristicam tot unitatibus auge, quot in dato numero notæ pro decimalibus sunt habitæ, & habebis Log. quæsitum. Quæratur exempli gr. Log. 257325. Punctum insere post 257, ut fiat 257.325. Ejus Log. invenies ut supra 2. 4104812; & quia tres notæ ab integro resectæ sunt; & pro decimalibus habitæ, adde 3 hujus characteristicæ, & habebis Log. 257325 = 5. 4104812. Operationis ratio facile intelligitur, etenim dum integri numeri notas aliquas ad ordinem decimalium deprimis, perinde facis, ut si illum divideres per numerum constantem unitate & totidem cyphris, quot sunt depressæ notæ. Sic in nostro casu est 257. 325 = 257325 : 1000. Redibit autem numerus ad priorem quantitatem, si per eundem numerum illum multiplices, per quem divisus est, eritque 257. 325 X 1000 = 257325; quare Log. 257325 = Log. 257. 325 + Log. 1000 (per n. 23); sed Log. 1000 = 3. 0000000, & in genere loquendo Log. numeri constantis unitate & meris cyphris totidem unitates habet pro characteristica, quot numerus cyphras; ergo &c. Sic si daretur num. 25732.5, cum duas tantum ex integro notas ad decimales deprimere necesse sit; perinde erit ut si illum divideres per 100, quare invento Log. 257. 325 ut antea, ejus characteristica duabus tantum unitatibus augenda esset, & habetur Log. 25732. 5 = 4. 4104812.

39. Notandum tamen, quod si datus numerus ita numeros tabularum excedat, ut plusquam duplo plures

notas

notas habeat, Logarithmi hac methodo inventi non satis erunt accurati; cum proxima sit, non accurata, ea proportio, in qua regulæ trium usus innititur. Quare in his casibus satius est tabulas consulere, quæ ad numeros majores pertingunt: aut, si numerus ex his componitur, qui habeantur in tabulis, coefficientium Logarithmos in unam summam colligere.

40. Et hactenus quidem dato numero ejus Logarithmus quæsitus est: Superest, ut dato Logarithmo numerus investigetur. Si Logarithmus datus in tabulis accuratus occurrat, numerum capies eidem appositum. Sic si detur 2.7371926, illum facile invenies, si ductum sequaris characteristicæ & notarum proximè sequentium numerus autem 546 eidem adscriptus, est ille qui quærebatur: Quod si datus Logarithmus accuratus in tabulis non occurrat, & tamen habeat characteristicam, quæ in illis contineatur; duos invenire licebit, quorum alter sit proximè major dato, alter proximè minor. Utrumque ex tabulis deprome cum numeris sibi respondentibus; & ex proximè majori aufer proximè minorem; deinde hunc ipsum aufer a dato; & numero, qui proximè minori respondet adjice fractionem, cujus denominator sit prima illa differentia; numerator verò secunda, & sic habebis quæsitum numerum. Sic si proponatur Logarithmus 2.7375292, invenies in tabulis 2.7379873 proximè majorem, cui respondet numerus 547, & 2.7371926 proximè minorem, cui respondet 546. Aufer hunc & a proximè majori; & a dato Logarithmo, habebisque geminas differentias, 7947 & 3366, ex his fractionem compone adjiciendam numero 546, & habebis numerum quæsitum $546 + \frac{3366}{7947}$. Operationibus ratio est, quia numerorum differentiæ sunt differentiis Logarithmorum quamproxime proportionales. Igitur ut 7947 (quæ est differentia Log. in tabulis existentium) ad 1 (quæ est differentia numerorum illis respondentium) ita 3366 (differentia Log. proxime mino-

ris a dato) ad differentiam, qua numerus dato Log. respondens excedit minorem numerum 546.

41. Fractio inventa facile revocatur ad decimales numeros dividendo numeratorem quot opus fuerit cyphris auctum per denominatorem, & contemptis tenuioribus minutiis, si quotus accuratus haberi nequit. Sic in nostro casu fractio evadet 0.4235, & numerus Log. dato respondens 546.4235.

42. Si dati Logarithmi characteristica tabularum canonem excedit, jam primum constabit quot notas quæsitus numerus habere debeat, totidem nempe, quot characteristica unitates, ac præterea unam. Ut autem inveniri possit ejus characteristica tot unitatibus mulctanda est, quot opus fuerit, ut in tabulis possit inveniri. Logarithmus ita depressus inquiratur in canone & si accuratus occurrat, numerus ei respondens tot cyphris auctus, quot unitates e characteristica ademptæ sunt, erit quæsita quantitas. Quod si accuratus non invenitur sumantur proxime major, & minor, & exinde, ut supra factum est, quærantur notæ decimales adjiciendæ numero, qui logarithmo proxime minori respondet. Curandum est autem, ut totidem saltem per divisionem eliciantur, quot unitates a characteristica dati Logarithmi ademptæ sunt. Nam si tot ejusmodi notæ integro illi numero adjectæ jam pro integris habeantur, habebitur simul quæsita quantitas. At si characteristica fuerit plus quam duplo major ea, quæ in tabulis maxima occurrit, inventus numerus in ultimis notis accuratus non prodiret hac methodo ob rationem in re simili supra adductam.

43. Ex. gr. detur Logarithmus 5.7375292, & tabulis utaris his elementis adjectis. Mulctanda erit characteristica 3 unitatibus, ut fiat 2.7375292. Inventus est supra hujus Logarithmi numerus 546.4235. Tres ex his decimalibus notis ad integros redigantur, eritque quæsitus numerus 546423.5. Si datus Logarithmus fuisset 4.7375292, numerus ei responderet 54642.35: Si 3.7375292; 5464.235. Ac demum si datus Logarith-

rithmus idem fuisset accuratè ac Log. 546, fuisset quæsita quantitas 546000, & sic de reliquis. Operationis ratio facilè intelligitur, nam dum dati Logarithmi characteristicam aliquot unitatibus imminuimus, perinde facimus ut si numerum ei respondentem per numerum divideremus unitate & totidem cyphris expressum quot sunt e characteristica sublatæ unitates. Quantitas igitur huic depresso Logarithmo respondens in eumdem numerum ducenda est, ut illa habeatur, quæ dato Logarithmo respondet.

44. Si Logarithmus datus fuerit negativus, quæratur positivi numerus, & hic unitati subscriptus fractionem dabit, quæ illi respondeat. Sic si detur $-$ 2.7371926, cum ei respondeat 546, erit quæsita quantitas $\frac{1}{546}$

45. Artificii hactenus expositi utilitatem nunquam satis Tyrones intelligent, nisi ubi se cœperint in Trigonometria exercere. Sed tamen vel ex hoc uno problemate poterunt ex parte conjicere. Fœnori det aliquis dena aureorum millia, ita ut 100 aureorum annuus fructus tres aurei sint. Quæritur quot anni requirantur ut sors cum suis fructibus, & fructuum quotannis crescentium fructibus ad 40 aureorum millia perveniat. Dicatur 100 $= a$, 103 $= b$, 10000 $= c$, 40000 $= d$, numerus annorum quæsitus $= x$. Erit in fine anni primi $a . b :: c . \frac{bc}{a}$. Ineunte anno secundo sors est $\frac{bc}{a}$, & si fiat iterum $a . b :: \frac{bc}{a} . \frac{b^2 c}{a^2}$, hæc erit sors ineunte anno tertio, unde in ejus fine $a . b :: \frac{b^2 c}{a^2} . \frac{b^3 c}{a^3}$. Constat igitur, quod in fine annorum x, erit sors $\frac{b^x c}{a^x}$, & ex hypothesi esse debet $\frac{b^x c}{a^x} = d$. Igitur (per n. 24. 25.) x Log. $b +$ Log. $c - x$ Log. $a =$ Log. d; & auferendo utrinque Log. c, erit x Log. $b - x$ Log. $a =$ Log. $d -$ Log. c, ac de-

 mum

mum $x = \frac{\text{Log. } d - \text{Log. } c}{\text{Log. } b - \text{Log. } a}$. Substitue datos valores literis, & habebis $x = \frac{\text{Log. } 40000 - \text{Log. } 10000}{\text{Log. } 103 - \text{Log. } 100}$: Log. 40000 habetur, si colligas in unam summam Logarithmos 40, & 1000, qui sunt ejus coefficientes; & Log. 10000. si Log. 1000 unitate augeas in characteristica. Sic erutis ex tabulis Logarithmis, habebis $x = \frac{4.6020600 - 4.0000000}{2.0128372 - 2.0000000} = \frac{0.6020600}{0.0128372} = 46.\ 8.$ &c. Itaque anni requiruntur 46, 9 menses, ac præterea aliquot dies, & unius diei partes in hujusmodi re contemnendæ, ut sors ad datam quantitatem eo fœnore augeatur.

46. Et hæc de progressionibus & Logarithmis satis dicta sint. Superest, ut aliquid etiam dicatur de proportione Harmonica.

CAPUT IV.

De proportione Harmonica.

1. SI tres fuerint ejusmodi numeri, ut sit primus ad tertium in eadem proportione geometrica, in qua est differentia primi & secundi ad differentiam secundi & tertii, hi numeri dicuntur harmonicè proportionales. Sic 2. 3. 6. sunt harmonicè proportionales, quia 2. 6 :: 3 − 2 = 1. 6 − 3 = 3.

2. Si fuerint tres numeri harmonicè proportionales, factum ex medio in summam extremorum, æquale est duplo producto ex ipsis extremis. Sic in adducto exemplo $(2 + 6) \times 3 = 2 \times (2 \times 6) = 24$. Facilè demonstratur, quia si fuerint a, b, c harmonicè proportionales, erit $a.\ c :: a - b.\ b - c$. Ergo multiplicando extremas & medias quantitates, erit $ab - ac = ac - cb$, & ad-

& addendo utrinque $ac - cb$ erit $ab + cb = 2ac$; hoc est $(a+c) \times b = 2ac$.

3. Hinc datis extremis terminis medius invenitur, si fiat ut summa extremorum ad eorum alterum, ita duplum alterius ad quæsitum. Sic $2 + 6 . 2 :: 2 \times 6 . 3$, hoc est $8 . 2 :: 12 . 3$. Ratio est manifesta, erit enim $a + c a :: 2c . b$.

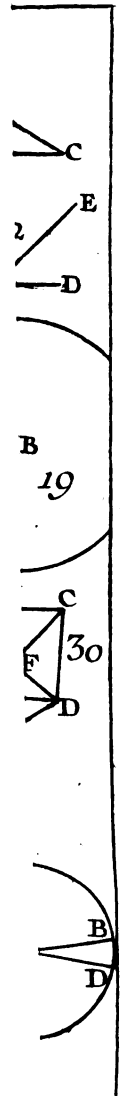
4. Dato quoque extremorum altero una cum medio alter extremus invenietur, si fiat ut differentia dupli extremi dati a medio ad ipsum extremum datum, ita medius ad quæsitum. Sic $2 \times 2 - 3 . 2 :: 3 . 6$. Cum sit enim $ab \times cb = 2ac$, si utrinque auferatur cb, habebitur $ab = 2ac - cb$, hoc est $2a - b . a :: b . c$.

5. Idem facilius obtinebitur ope alterius Theorematis vi cujus harmonica proportio ad continuam arithmeticam redigitur. Proportio nempe harmonica est inversa ratio continuæ arithmeticæ, & contra. Hoc est si fuerint a, b, c harmonicè proportionales, erunt $\frac{1}{a}$ $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ in continua arithmetica ratione, & contra. Sic in exemplo adducto $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$, hoc est, reducendo fractiones ad eumdem denominatorem $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$ & rursus cum sint, 2, 4, 6 in continua ratione arithmetica, erunt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ harmonicè proportionales, cum sint $\frac{1}{2} . \frac{1}{6} :: \frac{1}{2} - \frac{1}{4} . \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$, sive $\frac{6}{12} . \frac{2}{12} :: \frac{6}{12} - \frac{3}{12} . \frac{3}{12} - \frac{2}{12}$, hoc est $\frac{6}{12} . \frac{2}{12} :: \frac{3}{12} . \frac{1}{12}$ Facilis est demonstratio, cum sit enim primus terminus a, tertius c, erit medius $b = \frac{2ac}{a+c}$, ergo si per tres ejusmodi terminos unitas dividatur habebitur $\frac{1}{a}$, $\frac{a+c}{2ac}$, $\frac{1}{c}$, ubi si addantur extremi termini $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{c}{ac} + \frac{a}{ac} = \frac{a+c}{ac}$, quantitas habetur dupla ipsius $\frac{a+c}{2ac}$. Ergo tres

illi termini sunt arithmeticè proportionales.

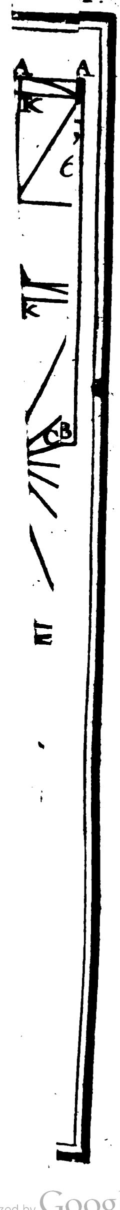
6. Quod si tres fuerint ejusmodi quantitates, in quibus differentia primæ & secundæ ad differentiam secundæ & tertiæ sit ut tertia ad primam: dicentur esse hæ quantitates in proportione Contraharmonica. Si erunt contraharmonicè proportionales a, b, c, si fuerit $a - b . b - c :: c . a$. Facile ad hanc proportionem transferuntur quæcumque de Harmonica dicta sunt.

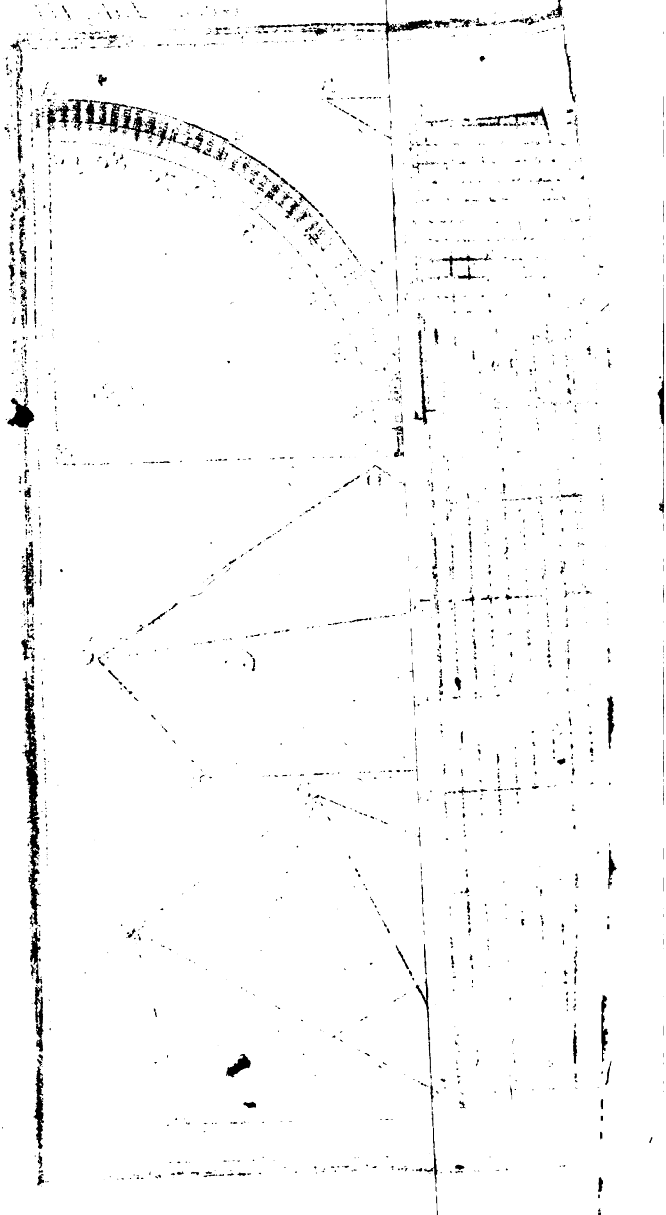
Tab. I



vati scu

I.





ELEMENTA SOLIDORUM.

1. QUædam, quæ admodum facile sine demonstrationibus intelliguntur, præmittemus, ut per se nota.

2. *Axioma* 1. Recta linea vel cum plano tota congruit, vel ipsi parallela est, quo casu æquidistat tota, vel ex altera parte ab ipso recedit, ex altera accedit, quo casu, si satis producatur, ipsum in unico puncto secabit.

Coroll. 1.

3. Si bina rectæ puncta cum plano quodam congruunt, congruit tota.

Coroll. 2.

4. Ejusdem rectæ pars in quodam plano, pars extra ipsum esse non potest.

Coroll. 3.

5. Binorum planorum intersectio est linea recta, cum recta ducta per bina quævis intersectionis puncta debeat jacere in utroque, per num. 3.

6. *Ax.* 2. Per quotvis puncta in directum jacentia; sive per quamvis rectam lineam infinita numero plana duci possunt.

7. *Ax.* 3. Per binas rectas sive concurrentes in aliquo puncto, sive parallelas inter se, ac per tria puncta non in directum jacentia, vel per tria cujusvis trianguli rectilinei latera planum semper duci potest], idque unicum.

8. *Ax.* 4. Bina plana vel parallela sunt, & semper æquidistant; vel ex una parte a se invicem recedunt, ex altera accedunt, & ex eadem satis producta debent se intersecare in recta quadam.

Coroll. 1.

9. Planorum inter se parallelorum intersectiones cum eodum plano sunt inter se parallelæ.

10. Cum enim plana illa parallela nusquam concurrant, illæ intersectiones nusquam concurrent.

Coroll. 2.

11. Binæ rectæ quæcumque GI, KM (Fig. 1.) a planis parallelis AB, CD, EF secantur in eadem ratione in H, & L.

12. Ducatur enim e puncto K recta parallela GI, occurrens planis CD, EF in N, O, & GK, HN, IO intersectiones planorum illorum parallelorum cum plano GHOI erunt parallelæ inter se (per num. 9.), ut & NL, OM intersectiones plani OKM cum iisdem. Quare in parallelogrammis KGHN, HNOI erunt latera KN, NO æqualia lateribus GH, HI. Est autem ob LN, MO parallelas KL ad LM, ut KN ad NO (pr. 12. Geom.); erit igitur etiam ut GH ad HI.

13. *Definitio* 1. Recta plano perpendicularis dicitur, cum est perpendicularis rectis omnibus in eodem plano ductis per concursum ejus rectæ cum ipso plano.

Coroll. 1.

14. Binæ rectæ, ut AC, BC (Fig. 2.) eidem plano in eodem puncto C ad eandem partem ductæ perpendiculares esse non possunt.

15. Si enim ducatur planum per ipsas, id occurret priori plano in quadrata recta DCE per num. 8. eritque tam angulus ACE, quam BCE rectus, nimirum totum æquale parti.

Coroll. 2.

16. Si bina plana fuerint eidem rectæ perpendicularia, erut parallela inter se, & si binorum planorum parallelorum alteri perpendicularis sit quædam recta, erit & alteri.

17. Occurrat enim ea recta (Fig. 3.) binis iis planis in A, & B & ducta quavis recta CBD in posteriore, ducatur per hanc planum CDEF, cujus intersectio cum priore sit EAF. Tum si AB est perpendicularis utrique

plano,

plano, anguli ad A & B erunt recti, adeoque ipsæ AE, BD parallelæ (per cor. 1. def. 7. Geom.). Quare nulla recta posterioris plani occurret plano priori, & proinde plana ipsa nusquam concurrent. Si autem plana fuerint parallela, & recta AB perpendicularis priori, erit BD parallela AE per num. 9, adeoque AB, quæ continet angulos rectos cum AE, continebit etiam cum BD, eritque idcirco perpendicularis ad omnes rectas posterioris plani transeuntes per B, & proinde perpendicularis ipsi plano.

THEOREMA.

18. Si recta quædam AC (F. 4.) sit perpendicularis binis rectis BD, EF in quodam plano ductis per ejus concursum cum ipso plano, erit perpendicularis & reliquis omnibus, ac ipsi plano.

19. Ducatur enim quævis alia GCH, cui occurret alicubi in G recta occurrens binis datis hinc inde in B, E, captisque CD, CF æqualibus ipsis, CB; CE, ducatus FD, occurrens ipsi GH alicubi in H, tum considerentur septem paria triangulorum æqualium.

20. BCE, DCF ob angulos ad verticem C æquales, & latera CF, CD æqualia lateribus CB, CE per constructionem.

21. BCA, DCA ob angulos ad C rectos ex hypothesi, latera CB, CD æqualia per constructionem, & latus CA commune.

22. ECA, FCA pariter ob angulos ad C rectos, latera CE, CF æqualia, CA commune.

23. BAE, DAF ob latera singula singulis demonstrata æqualia, nimirum BE, FD num. 20., AB, AD, num. 21, AE, AF num. 22.

24. BCG, DCH ob angulos ad verticem C æquales, CBG, CDH demonstratos æquales num. 20., latera CB, CD æqualia per constructionem.

25. ABG, ADH ob latera AB, AD demonstrata æqualia num. 21, BG, DH num. 24, angulos ABG, ADH num. 23.

26. ACG, ACH ob latera CG, CH demonstrata æqualia num. 24, AG, AH num. 25, & CA commune

27. Quare & anguli ACG, ACH æquales erunt, & recta AC cuivis GH, adeoque toti plano perpendicularis. Q. E D.

Coroll. 1.

28. Si e quodam puncto C. (F. 5.) cujusdam recta AC exeant tres rectæ CB, CD, CE ipsi perpendiculares, in eodem erunt plano.

29. Si enim ducto plano EH per binas CE, CD, tertia CB in eo plano non jaceat, ducto plano GC per ACB, quod priori occurret in aliqua recta CF; recta AC perpendicularis binis CD, CE erit perpendicularis & ipsi CF. Quare angulus ACF rectus erit, & æqualis recto ADB, pars toti.

Coroll. 2.

30. Si recta CA (F. 6.) semper perpendicularis rectæ cuidam MN gyret circa ipsam immotam, producet planum ipsi perpendiculare.

31. Si enim ductis in ea superficie genita binis rectis ex C, ducatur quævis tertia, ea erit in eodem plano cum ipsis, cum nimirum omnes tres eidem MGN perpendiculares esse debeant.

Coroll. 3.

32. Per datum quodvis punctum potest duci planum perpendiculare datæ cuivis rectæ MN.

33. Sit primo punctum datum C (Fig. 7.) in ipsa recta, & ductis per eam binis planis, MQ, MO ducantur in iis ipsi MN perpendiculares CA, CB, & planum per ACB ductum erit per num. 18. perpendiculare rectæ MN perpendiculari binis AC, BC.

34. Quod si punctum datum sit A extra ipsam, ducatur AC ipsi perpendicularis, tum in quovis alio plano MQ per MN ducto, & non transeunte per A recta CB perpendicularis eidem MN, & pariter erit factum.

Coroll. 4.

35. E binis rectis parallelis AB, CD (Fig. 8.) si altera sit perpendicularis plano cuipiam, erit & altera, & si ambæ fuerint perpendiculares, erunt parallelæ.

36. In plano enim DA ducto per ipsas AB, CD, quod plano dato occurret in recta AC, ducatur CB ad quodvis punctum B in priore assumptum, tum in plano dato recta CE perpendicularis CA, & æqualis AB, ac ducantur rectæ AE, BE.

37. Triangula CAB, ECA habentia angulos ad C, & A rectos, latus AC commune, latera AB, CE æqualia, habebunt & bases CB, AE æquales. Quare in triangulis BAE, ECB singula latera singulis æqualia, adeoque angulus BCE æqualis recto BAE (per prop. 4. Geom.). Cumque etiam ACE sit rectus, recta EC perpendicularis binis CA, CB erit perpendicularis etiam tertiæ CD per num. 18. Quare ipsa CD perpendicularis binis CA, CE erit pariter per num. 18. perpendicularis etiam toti plano dato ACEF.

38. Si autem ambæ fuerint perpendiculares, ducto plano BACD, erunt bini anguli BAC, ACD interni simul æquales duobus rectis, adeoque ipsæ parallelæ erunt. (per cor. 1. def. 7. Geom.)

Coroll. 5.

39. Rectæ FO, GQ (Fig. 7.) parallelæ eidem MN, licet non in eodem plano positæ, sunt parallelæ inter se.

40. Si enim per quodvis punctum D rectæ MN ducatur per num. 33. planum ACB ipsi perpendiculare, erit perpendicularis eidem tam FO, quam QG, per num. 35. Adeoque erunt inter se parallelæ per eund. num.

Coroll. 6.

41. Si binæ rectæ CD, CB (Fig. 9.) fuerint parallelæ, binis AE, AI etiam jacentibus non in eodem plano, continebunt angulos DCB, EBI ad easdem partes æquales.

42. Nam assumptis CB, CD ad arbitrium, tum AE, AI ipsis æqualibus, ducantur CA, DE, BI, & quoniam CB, AI sunt parallelæ, jacent in eodem plano per num. 7. Quare cum & æquales sint; etiam rectæ CA, BI, quæ illas claudunt, erunt & æquales & parallelæ,

rallelæ, & eodem argumento DE, CA parallelæ erunt, & æquales. Hinc & DB, EI, quæ illas claudunt, erunt æquales, & parallelæ. Igitur in triangulis DCB, EAI habentibus singula latera singulis æqualia, erunt anguli ad C & A æquales.

Coroll. 7.

43. Si bina plana IACB, EACD se invicem secantia in recta quadam AC secentur utcumque binis planis DCB, EAI parallelis inter se, anguli DCB, AEI ab intersectionibus contenti ad easdem partes erunt æquales.

44. Nam intersectiones CD, AE, & CB, AI singulorum planorum cum planis parallelis erunt inter se parallelæ per num. 9.

Coroll. 8.

45. Dato puncto vel extra datum planum, vel in ipso, poterit duci recta ipsi plano perpendicularis, eritque unica.

46. Si punctum sit A extra datum planum (Fig. 10.), ducta quavis recta MN in plano dato, ducatur ex A perpendiculum AB in ipsam: tum BC eidem MN perpendicularis in plano dato, in quam ex A ducatur perpendicularis AC, quæ erit perpendicularis plano dato.

47. Nam in primis erit per num. 18. MN perpendicularis plano AIBC cum sit perpendicularis rectis BA, BC. Quare si ducatur recta DCE parallela MBN, erit & ipsa perpendicularis eidem plano per num. 35., adeoque etiam perpendicularis erit rectæ AC. Cumque ipsa AC sit etiam perpendicularis rectæ CB per constructionem, erit perpendicularis toti plano dato MNED per num. 18.

48. Quod si detur punctum B in ipso plano, assumatur punctum quodcunque A extra ipsum, & ducatur perpendicularis AC. Tum in plano BCAI ex B recta BI parallela rectæ CA, quæ pariter erit eidem plano perpendicularis per num. 35.

49. Si autem essent binæ rectæ ut AB, AC eidem plano perpendiculares ex eodem puncto A extra planum

posito,

posito; anguli ABC, ACB in eodem triangulo ABC essent recti, quod est absurdum. Unica igitur ex eodem puncto extra planum assumpto duci potest. Unicam vero duci posse e puncto posito intra planum patet ex num. 14.

Coroll. 9.

50. Per datum punctum, vel per datam rectam dato plano parallelam duci poterit planum plano ipsi parallelum.

51. Si enim datur punctum C (Fig. 9.), demissa CA perpendiculari in planum datum, ducantur in eo binæ AE, AI ad arbitrium, tum CB, CD iis parallelæ, & planum DCB erit parallelum plano dato.

52. Erit enim CA perpendicularis rectis AE, AI per num. 13., adeoque & rectis CB, CD, nimirum per n. 18. plano DCB, quod idcirco erit parallelum plano EAI per num. 16.

53. Si autem detur linea parallela plano dato, assumpto in ea quovis puncto C, & ducto per C plano parallelo dato, debebit recta illa data jacere in hoc plano; si enim ex eo exiret, vel accederet ad planum datum, vel ab eo recederet.

Coroll. 10.

54. Si binæ rectæ CA, CB (Fig. 7.) coeuntes in quodam puncto C binis aliis DE, DH coeuntibus in D parallelæ sint, nec in eodem plano jaceant, planum per illas ductum erit parallelum plano ducto per has.

55. Nam e puncto C demisso perpendiculo CN in planum EI, in quo jacent DE, DH, ducantur NO, NQ parallelæ ipsis DE, DH, quæ proinde erunt per n. 39. parallelæ etiam ipsis CA, CB, erunt autem per num. 13. anguli CNQ, CNO recti. Quare & NCB, NCA recti erunt, & proinde planum ACB perpendiculare rectæ CN per n. 18, cui cum perpendiculare sit ONQ, erunt ea plana inter se parallela per num. 10.

56. *Def.* 2. Angulum binorum planorum se in quadam recta intersecantium dico, inclinationem plani ad planum, quam metitur angulus rectilineus contentus

ab

ab intersectionibus plani perpendicularis communi intersectioni eorumdem planorum, qui si fuerit rectus, dico planum plano perpendiculare.

Coroll. 1.

57. Si in binis planis CI, AD (Fig. 9.) e quovis puncto C mutuæ intersectionis CA ducantur binæ rectæ CB, CD perpendiculares ipsi intersectioni, angulus rectilineus DCB erit mensura inclinationis planorum.

58. Erit enim per num. 18 planum BCD perpendiculare intersectioni CN perpendiculari ad binas CB, CD existentes in eo plano.

Coroll. 2.

59. Ad quamvis rectam cujusvis plani duci potest planum cum eo continens angulum æqualem dato.

60. Si enim sit recta CA plani DCAE, & ducatur in eodem plano CD ipsi perpendicularis, tum in plano perpendiculari ipsi rectæ CA recta CB continens angulum DCB æqualem dato, erit BCAI quæsitum planum.

Coroll. 3.

61. Si planum plano insistit duos angulos efficit hinc inde simul æquales duobus rectis, & si bina plana se intersecant, angulos ad verticem oppositos æquales continent.

62. Id enim accidit in rectis omnibus, adeoque etiam in illis, quæ sunt communes intersectiones eorum planorum cum plano perpendiculari ad communem illorum intersectionem.

Scholion.

63. Eodem pacto ubi planum incidit in bina plana parallela, habebuntur in eorum angulis illa omnia, quæ habentur in rectis lineis, ubi recta incidit in binas rectas parallelas.

Coroll. 4.

64. Planum transiens per rectam alteri plano perpendicularem est ipsi perpendiculare.

65. Si enim recta AC (Fig. 10.) perpendicularis plano

no EDMN, quod a plano ACBI per ipsam ductum secetur in recta BC. Ducatur DE in plano DN perpendicularis ad BC, & quoniam ipsa BC est etiam perpendicularis rectæ CA, erit per num. 18. totum planum ACD ipsi perpendiculare; ac proinde angulus ACD erit mensura inclinationis planorum BD, CI per num. 56. qui cum sit rectus, erunt ea plana sibi invicem perpendicularia.

Coroll. 5.

66. Si bina plana sibi invicem perpendicularia fuerint, recta uni ex iis perpendicularis per intersectionem ducta jacebit in altero, recta intersectioni perpendicularis ducta in altero erit alteri perpendicularis, recta alteri perpendicularis ducta ex quovis alterius puncto jacebit in hoc posteriore, & in communem intersectionem cadet.

67. Sit enim primo communis intersectio BC, (Fig. 10.) & secentur illa plana plano perpendiculari ipsi intersectioni, cujus plani intersectiones cum illis planis sint CA, CD. Erit CA perpendicularis ad CB per nu. 13, & angulus ACD inclinatio planorum pariter rectus per num. 56. Quare CA erit perpendicularis plano DN per num. 18, ac proinde e quovis puncto intersectionis C educta recta ipsi plano DN perpendicularis debet per num. 14. congruere cum ipsa CA, jacente nimirum in plano BA.

68. Pariter cum CA sit perpendicularis plano DN, & intersectioni BC, ac jaceat in plano BA; quævis recta intersectioni perpendicularis ducta in plano BA ex quovis puncto A congruet cum CA, & proinde erit perpendicularis plano ND.

69. Demum recta ex quovis puncto A plani BA perpendicularis plano DN debet per num. 45. congruere cum AC, adeoque jacere in plano BA.

Coroll. 6.

70. Planorum eidem plano perpendicularium intersectio est ipsi perpendicularis.

71 Nam recta ipsi plano perpendicularis educta ex

to ipsius puncto, in quo se intersecant illa bina plana, debet jacere in utroque ex ipsis per num. 66; ac proinde debet congruere cum communi eorum intersectione.

Coroll. 7.

72. Per quodvis punctum, vel quamvis rectam plano perpendicularem infinita plana duci possunt eidem plano perpendicularia.

73. Nam per quodvis datum punctum duci potest recta AC (Fig. 10.) perpendicularis dato plano per n.45, in quo duci poterunt ex ejus puncto C infinitæ rectæ CB, & omnia plana ACBI transibunt per punctum datum, ac per rectam AC, & erunt perpendicularia plano dato per num. 64.

Coroll. 8.

74. Per bina puncta non jacentia in recta plano perpendiculari, vel per rectam ipsi non perpendicularem semper potest duci planum plano perpendiculare, idque unicum.

75. Sint ea puncta A, I (Fig. 10.) vel recta AI; ex altero eorum puncto A, vel e quovis puncto A rectæ ejusdem duci poterit AC perpendicularis illi plano per num. 45, & planum ACBI transiens per ea puncta, vel per eam rectam erit perpendiculare plano dato per num. 64.

76. Quoniam autem recta AC perpendicularis plano dato, debet jacere in quovis plano ipsi perpendiculari transeunte per A per num. 66, ac unicum planum duci potest per puncta CAI non in directum jacentia per num. 7; unicum planum duci poterit dato plano perpendiculare transiens per puncta A, I, vel per rectam AI.

Coroll. 9.

77. Si recta non fuerit perpendicularis plano dato, & per eam ducatur planum ipsi plano perpendiculare, efficiet ipsa recta cum communi intersectione angulum hinc acutum, inde obtusum, & ille erit minimus, hic maximus omnium angulorum, quos ea efficit cum rectis in plano dato ductis per ejus occursum cum ipso

pla-

plano, ac quo magis recta ex occursu ducta recedet hinc inde a recta minimum continente, ac accedet ad rectam continentem maximum, eo majorem angulum continebit cum recta illa data, & semper bini, sed bini tantum hinc inde æquales erunt, iique recti fient, ubi recta in plano dato jacens fuerit illi intersectioni perpendicularis.

78. Sit enim ejusmodi recta AB (Fig. 11.): intersectio plani perpendicularis plano dato cum ipso plano dato sit DBE in quam cadet perpendiculum AC per n. 66, eritque angulus ACB rectus, ac proinde ABC acutus, & ABE obtusus.

79. Centro B sit in plano dato circulus DGEF: & quoniam quævis CG erit major, quam CD, & minor quam CE (quod facile dem. per Coroll. 2. prop. 8. Geom.), recta autem AC communis est triangulis rectangulis ACD, ACG, ACE, ac proinde quadrata AG, AD, AE singula æqualia quadratis singulis CG, CD, CE conjunctis cum quadrato AC, erit AG major quam AD, & minor quam AE. Quare in triangulis ABG, ABD, ABE habentibus latus AB commune, latera BG, BD, BE æqualia, angulus ABG erit major quam ABD, & minor quam ABE (per Coroll. 3. prop. 8.); ac proinde ille minimus, hic maximus omnium, quos recta BA continere potest cum rectis in plano dato ex B ductis.

80. Cum vero quo magis punctum G recedit a D, & accedit ad E, eo magis crescat CG, adeoque AG, & binæ semper, sed binæ solæ hinc inde CG, CF, adeoque & AG, AF inter se æquales haberi possint, etiam quo magis BG recedet a BD, vel accedet ad BE, eo magis crescet angulus ABG, & bini semper, sed bini soli hinc inde ABG, ABF æquales erunt inter se.

81. Demum si HBI fuerit perpendicularis ad DE, erunt anguli CBH, CBI recti, & BH, BI æquales, adeoque æquales etiam CH, CI, & proinde etiam AH, AI, ac anguli ABH, ABI, qui proinde recti erunt.

Scholion.

De Angulis Solidis.

82. Hinc de angulis solidis agendum esset, qui nimirum continentur pluribus angulis planis in apicem unicum coeuntibus. Sed quoniam minus necessaria sunt, & potissimus eorum usus est ad figuras regulares solidas determinandas, ac describendas, quæ itidem exigui sunt usus, ea hic innuemus tantummodo.

83. Angulus solidus facile concipitur, si ex omnibus angulis B, C, D, E (Fig. 12.) poligoni cujuscunque rectilinei ad quodvis punctum A positum extra ejus planum ducantur rectæ. Consurget in A angulus solidus constans tot angulis planis, quot sunt poligoni latera.

84. Cavendum tamen illud, ut in poligono omnes anguli ex parte interna computati sint minores duobus rectis, nimirum ut nusquam latera CB, EB (Fig. 14.) introrsum inflectantur versus poligonum respectu rectæ jungentis angulos contiguos; eo enim casu etiam facies anguli solidi introrsum inflecterentur, ac ejusmodi, anguli solidi considerari non solent, ubi eorum proprietates generaliter demonstrantur, ut & ejusmodi poligona pariter considerari non solent.

85. Generaliter de angulis solidis hæc demonstrantur. Omnes anguli plani angulum solidum constituentes simul sumpti minores sunt quatuor rectis. Id facile intelligitur hoc pacto. Si angulus ille solidus apprimendo verticem A versus poligonum DCBE (Fig. 12. 15.) debeat complanari, oporteret aperiri aliquod latus, ut AD, & figura 12 abiret in 15, in qua omnes anguli plani circa A pertinentes ad priorem angulum solidum simul cum apertura nova DAD constituent quatuor rectos, adeoque omnes simul sunt quatuor rectis minores. Id vero Tyronibus ope anguli solidi e charta efformati admodum facile ostenditur.

86. Ad datum punctum datæ rectæ potest efformari angulus solidus æqualis dato. Si enim sit *ad* (Fig. 12. 13.) recta data fiat angulus *dac* æqualis DAC, tum

pla-

planum *cab* faciens cum *cad* angulum æqualem illi, quem CAB continet cum CAD per num. 59, & in eo angulus *cab* æqualis CAB, & ita porro, donec deveniatur ad rectam *ae* respondentem AE proximæ primę illi AD, & reliquus anguls planus *ead* reliquo EAD, ac totus angulus solidus *a* angulo solido A æqualis erit.

87. Patet enim ex ipsa costructione debere & plana planis, & rectas rectis congruere, si superponantur.

88. Ex quotcumque autem angulis planis poterit semper angulus solidus constitui, dummodo & omnes simul minores sint quatuor rectis & quivis ex iis minor sit reliquis simul sumptis.

89. Si enim (Fig. 15.) ducantur utcumque binæ rectæ AD, AD æquales, tum incipiendo ab altera semper versus eandem plagam ducantur rectæ AE, AB, AC, quotcumque, & in quibuscunque angulis, qui nimirum omnes simul quatuor rectos non adæquabunt, facile concipitur elevari posse punctum A, inclinando eorum plana ita, ut demum rectæ AD, AD congruant, & exsurgat angulus solidus, præter casum, quo aliquis ex angulis illis planis major esset reliquis omnibus simul sumptis, vel iis æqualis; nam reliqui omnes applicarentur illi uni ita, ut in primo casu, rectæ AD, AD ad se invicem non pertingerent, in secundo pertingerent tantum in ipsa applicatione reliquorum ad illum unum.

90. Et quidem si anguli plani essent tantum tres, unicus ex iis angulus solidus componi posset, ut ex tribus rectis unicum triangulum componitur. Si enim essent tres ejusmodi anguli; CAB, BAE, EAD, & immoto BAE converterentur reliqui CAB, EAD circa rectas BA, EA; rectæ AC, AD in unico situ sibi invicem occurrent, & angulum solidum constituerent. At ubi plures sunt anguli, immoto uno, ut CAB possunt reliqui moveri nihil mutatis magnitudine angulis planis ad A, sed mutata eorum positione, sive inclinationibus planorum in rectis AC, AB, AE, AD prorsus ut in quavis

Figura rectilinea pluribus, quam tribus lateribus constante immoto uno latere, possunt moveri reliqua, nihil mutata eorum magnitudine, sed mutatis solum inclinationibus, sive angulis.

91. Porro hæc omnia Geometrico rigore demonstrari non possunt sine fusiore apparatu: admodum autem facile ostenduntur Tyronibus ope angulorum solidorum e charta efformatorum. Sunt & alia quædam circa ipsas inclinationes planorum in angulo solido multo difficiliora demonstratu, ut illud, omnes angulos, quos plana angulorum planorum continent cum planis contiguis esse simul minores totidem rectis, quot exprimit duplus angulorum planorum numerus, sed ab ea mensura semper minus deficere, quam quatuor rectis. Id autem in Trigonometria spherica maximum usum habere potest. Nam ubi consideratur triangulum sphæricum, revera consideratur angulus solidus ad centrum sphæræ constitutus, cujus anguli plani sunt ipsa latera trianguli sphærici, & inclinationes planorum sunt anguli ejusdem trianguli sphærici. Ac proinde hinc consequitur, in quovis triangulo sphærico tres angulos simul & minores esse sex rectis, & majores duobus, ut e superioribus illud deducitur semper in eodem bina latera simul superare tertium.

92. Dixi usum angulorum solidorum maximum esse pro figuris solidis regularibus clausis faciebus planis, quæ dicuntur *poliedra* regularia, seu corpora regularia. Regularia autem dicuntur, quotiescumque & facies omnes æquales habent rectilineas, ac regulares. Ea non posse esse plura quam quinque, sic e superioribus deducitur. Quivis angulus solidus debet constare angulis planis, qui simul sint minores duobus rectis: non potest autem constare paucioribus quam tribus. Jam vero trianguli æquilateri angulus quivis continet gradus 60, quadrati 90, pentagoni 108, exagoni 120, reliquorum poligonorum majores sunt. Porro tres anguli exagoni jam continent gradus 360, adeoque non possunt constituere angulum solidum, & multo minus ipsum constituent anguli poligo-

go-

gonorum plura latera habentium. Tres anguli pentagoni continent gradus 324, & quatuor 432, quadrati autem tres 270, quatuor 360. Quare utrobique e tribus ejusmodi angulis planis angulus solidus constare potest, e quatuor non potest. Trianguli vero æquilateri 6 anguli continent 360, adeoque e sex ejus angulis componi non potest angulus solidus, potest autem e quinque, quatuor, vel tribus. Quare angulorum solidorum pro poliedris regularibus quinque tantum species esse possunt, eorum nimirum, qui constituuntur tribus angulis pentagonorum, quatuor quadratorum, tribus, vel quatuor, vel quinque triangulorum æquilaterorum.

93. Porrò demonstrarunt Veteres, & Euclides id libro 13 persequitur, poliedrum regulare componi e pentagonis 12, e quadratis sex, quo casu est cubus, e triangulis quatuor, ubi terni in apicem coeunt, quo casu est pyramis, vel octo, ubi coeunt quatuor, vel 20, ubi coeunt quinque, & cuivis ex iis corporibus sphæra inscribi potest, quæ omnes ejus facies contingat, vel circumscribi, quæ per omnes ejus angulos transeat. Sed ea minoris sunt usus, & hic innuisse suffecerit.

94. *Def.* 3. Figura solida habens pro basi figuram rectilineam, e cujus singulis angulis extra ejus planum consurgant lineæ æquales, & parallelæ terminantes ejus faciem rectilineam dicitur *Prisma*, quæ basis si fuerit parallelogrammum, prisma dicitur Parallelepipedum, ac si omnes facies fuerint quadratæ dicitur Cubus. Si autem rectæ illæ in apicem coeunt, solidum dicitur Pyramis.

95. Prisma super basi pentagona ABCDE exhibet Fig. 16. pyramidem Fig. 18.

Coroll. 1.

96. Quævis sectio prismatis, vel pyramidis facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi, & in prismate æqualis, in pyramide habens latera homologa minora in ratione distantiæ ipsius a vertice ad distantiam basis ab eodem.

97. Sit enim ejusmodi sectio LPONM (Fig. 16.) & per

num. 9. singula ejus latera erunt parallela singulis lateribus basis, cum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare & singuli anguli LPO, PON &c. erunt æquales singulis ABC, BCD &c. per num 41.

98. Præterea in prismate facies LABP, PBCO &c. erunt parallelogramma, & proinde latera LP, PO &c. æqualia lateribus AB, BC &c. adeoque sectio LPONM prorsus æqualis basi ABCDE.

99. In pyramide vero (Fig. 18.) similia erunt triangula LFP, AFB, & LP ad AB, ut FL ad FA, vel ut FP ab FB, & ita reliqua omnia latera PO ON &c. ad BC, CD &c. erunt in ratione FP ad FB, FO ad FC &c. (per Pr. 12. Geom.) quæ erit semper eadem ratio, ut FP ad FB est eadem ac FL ad FA. Quare sectio LPONM erit similis basi ABCDE, & ratio laterum eadem, ac ratio distantiarum a vertice F.

Coroll. 2.

100. Prisma terminatur altera basi parallela opposita, ac æquali priori, & faciebus lateralibus parallelogrammis.

101. Si enim planum sectionis parallelæ basi concipiatur transire per extremum punctum F rectæ AF (Fig. 16, in quod abeat L, reliqua sectionis puncta BCDE abibunt in KIHG cum omnes BP, CO &c. æquales sint AL, & omnes BK, CI &c. æquales AF. Erit igitur figura FKIHG æqualis ABCDE, & ipsi parallela, ac facies ABKF, BCIK &c. erunt parallelogramma.

Coroll. 3.

102. Prismatis, cujus latera rectilinea sunt basi perpendicularia, superficies demptis basibus est productum ex perimetro basis in unum e lateribus rectilineis: pyramidis autem habentis omnia latera rectilinea æqualia, & latera basis pariter æqualia est dimidium productum ex perimetro basis ducta in perpendiculum demissum e vertice in quodvis latus perimetri ipsius basis.

103. Nam in prismate (Fig. 16.) singulæ facies, ut GEDH, sunt in eo casu rectangula contenta sub singu-

lis laſtis lateribus baſis ut ED, & ſingulis lateribus rectilineis ut EG. Adeoque ſumma omnium ejuſmodi rectangulorum eſt tota perimeter baſis ducta in ejuſmodi latus rectilineum.

104. At in pyramide (Fig. 18.) ſi omnia latera baſis ſunt æqualia inter ſe, & latera rectilinea ipſius pyramidis pariter inter ſe æqualia, erunt omnes facies triangula iſoſcelia æqualia, & ſingulorum menſura erit dimidium productum ex latere AE baſis ducto in ſuum perpendiculum FZ, quæ perpendicula erunt omnia æqualia. Quare pariter ſumma omnium æquabitur dimidio producto ex tota perimetro baſis, & unoquovis ex ejuſmodi perpendiculis.

Coroll. 4.

105. Pyramidis ejuſmodi truncatæ plano parallelo baſi, ſuperficies reliqua verſus baſim æquatur producto ex ſemiſumma perimetrorum baſis, & ſectionis ducta in diſtantiam perpendicularem laterum parallelorum baſis, & ſectionis earumdem.

106. Si enim eadem FZ occurrat lateri LM in Y, trapezii ALME, menſura erit ſemiſumma LM, AE ducta in YZ, cum nimirum reſolvatur in bina triangula ALM, AME, quorum baſes ML, AE, & altitudo communis YZ diſtantia perpendicularis ipſarum baſium parallelarum, adeoque ſingulorum triangulorum menſura ſit dimidium productum ex ſingulis baſibus, & ipſa YZ.

Coroll. 5.

107. Omnia priſmata collata inter ſe, ut & omnes pyramides inter ſe collatæ, ſi ſuper baſibus æquales areas habentibus, & inter eadem plana parallela conſtituantur, æqualia ſpatia ſolida comprehendunt.

108. Secentur enim planis quotcunque parallelis baſibus (Fig. *16.*, *17.*, *18.*, & *19.*), & ſectiones LPONM, QRSTV unius priſmatis, vel pyramidis, æquales erunt ſemper ſectionibus reſpondentibus *lpo*, *qrs* alterius. Nam in priſmate omnes erunt æquales eidem baſi, in pyramide erunt ipſi ſimiles, & ſingula latera reſpondentia

LP,

LP, *lp* erunt ad latera homologa AB, *ab* in ratione eadem, nimirum in ratione FL ad FA, & *fl* ad *fa*, quæ rationes erunt eædem per num. 11., cum puncta F, *f* terminentur ad planum parallelum plano basium, & sectionis. Ea autem solida concipi possunt composita ex iis omnibus superficiebus, quarum singulæ cum singulis æquales sint, erunt & ipsa solida æqualia.

Scholion.

De methodo indivisibilium, & infinitesimali.

109. Hæc ratio demonstrandi dicitur methodus indivisibilium Cavalleriana, quam nimirum Cavallerius invenit primus, eaque cum successu est usus, concipiendo lineas compositas e punctis, superficies e lineis, solida e superficiebus. Revera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineæ, solidum motu continuo superficiei, & linea e lineolis, non e punctis, superficies ex areolis, non e lineis, solidum ex spatiolis solidis, non e superficiebus componitur. Hinc fieri potest, ut hæc methodus aliquando in errorem inducat. Sic si bina rectangula FAEG, *f*AE*g* (Fig. 20.) non in eodem plano posita terminarentur ad binas rectas F*f*, G*g* perpendiculares plano prioris; rectangulum posterius esset longius priore in ratione rectæ E*g* subtendentis angulum rectum EG*g* ad EG latus trianguli rectanguli, cum nimirum communis altitudo esset EA, & tamen sectiones LM, *lm* essent æquales eidem AE, adeoque & inter se.

110. Eam Guldinus difficultatem Cavallerio objecit, qui respondit: in hoc casu lineas, a quibus eæ superficies veluti contexuntur, esse utrobique æquales, sed textum ipsum rariorem in secundo rectangulo. Si enim fiat secunda sectio QV *uq* admodum proxima priori, bina fila QV, *qu* erunt æqualia inter se, sed *qu* ab *lm* remotius, quam QV ab LM. Suam autem methodum tunc solum procedere, cum præter æqualitatem sectionum, e quibus figura constare concipitur, etiam bina-

rum

rum quarumque inter se proximarum distantiæ æquales sint.

111. Et quidem si methodus cum hac animadversione adhibeatur nunquam in errorem inducet, & in quampluribus casibus ejus ope invenientur æqualitates, quæ ægre per longissimas ambages methodo a veteribus adhibita invenirentur. Ut methodi fundamentum pateat, concipiantur parallelogrammata AG, *ag* (Fig. 21.) constituta in eodem plano super basibus æqualibus AE, *ae*, & inter easdem parallelas. Eorum æqualitas hac methodo ostenditur ex eo, quod sectiones LM, *lm*, QV, *qu* parallelæ basibus AE, *ae* æquales sint iis, & inter se, ac lineæ illæ in ipsis superficiebus parallelogrammorum æque inter se distent, licet earum distantiæ VM, *um* computatæ in directione laterum non sint æquales, si eæ directiones diversæ fuerint, adeoque ipsorum laterum æqualitas non habeatur. Sed jam superficies AFGE, *afge* non componentur e lineis LM, *lm*, sed ex areolis LMVQ, *lmuq*, quæ inter lineas continentur, ut & solida AF, *af* in Fig. 18, 19 ex spatiolis solidis LS, *ls* inter superficies contentis non e superficiebus LMNOP, *lop*, in quibus nimirum areolis, & spatiolis bases, & & crassitudines æquales erunt, ac numerus idem.

112. Ex basi & crassitudine æquali ita infertur eorum elementorum æqualitas, ut demonstratio, qua totorum æqualitas evincitur rite procedat, dummodo crassitudo ipsa elementorum concipiatur infinitè parva. Si enim sectio utriusque divisa concipiatur in infinitum numerum particularum æqualium, & similium, æqualis semper assumi poterit utrobique earumdem numerus ita, ut ubi sectiones sunt rectæ lineæ, ut in Fig. 21, utraque sectio in ejusmodi particulas accuratè dividatur, ubi vero eæ sunt areæ, ut in 16, 17, 18, 19, continuata in infinitum divisione, infinitè parva spatiola hinc inde in angulis remaneant. Tum erectis lineis perpendicularibus ad sectionem alteram, usque ad oppositam infinitè proximam, habebitur utrobique infinitus numerus particularum æqualium, & similium inter illas sectiones

infi-

infinitè proximas contentarum, & solum circa margines, ut in Fig. 21. circa LQ, VM, *lq*, *um* deesse poterunt aliquæ ob laterum obliquitatem. Sed numerus earum, quæ desunt, respectu reliquarum minuetur in infinitum, ubi in infinitum minuatur crassitudo, & sectiones oppositæ ad se invicem accedant in infinitum. Quare ubi illorum elementorum, nimirum spatiorum, quæ binis sectionibus infinitè proximis continentur, æqualitas assumitur, contemnitur aliquid infinitè parvum respectu ipsius summæ.

113. Quoties autem in comparandis binis quantitatibus finitis contemnendo aliqua, quæ respectu earum sunt infinite parva, invenitur æqualitas, toties vera æqualitas haberi debet, nec ullus ne infinitesimus quidem error inde oriri potest. Finitæ enim quantitates sunt eæ, quæ in se determinatæ sunt: infinitæ parvæ quantitates sunt eæ, quæ concipiuntur minui ad arbitrium ultra quoscumque limites in se determinatos. Porro contemptus quantitatum infinitesimarum in comparatione quantitatum finitarum nullum errorem parere potest ne infinitesimum quidem. Nam si illæ finitæ quantitates essent inæquales, haberent differentiam aliquam in se determinatam. Quoniam autem illæ quantitates infinitesimæ possunt minui ultra quoscunque limites in se determinatos, poterunt simul omnes esse minores, quam illa differentia supposita, quam idcirco compensare non possent, nec posset ex illarum contemptu derivari æqualitas quantitatis illius in se determinatæ, nimirum compensatio differentiæ suppositæ.

114. Id exemplo sequenti fiet magis manifestum. Sint in bilance hinc inde bini lapides inclusi cum liquoribus quibusdam, qui liquores perpetuo debeant effluere, vel evaporari, donec penitus evanescant. Concipiamus nos nescire utrum lapidum pondera æqualia sint, utrum liquores illis pondus addant, an auferant, utrum æque effluant; scire tamen hæc duo: donec aliquid liquorum supererit, haberi debere æquilibrium, & liquores debere imminui ultra quoscunque limites in se determinatos,

cum

eum nimirum debeant penitus evanescere. Ex his binis veritatibus inferre licebit, lapides æqualis ponderis esse, liquores vel æque augere, vel æque minuere ipsorum pondera, & æqualiter effluere. Si enim ii lapides non æque ponderarent, esset aliqua in ipsorum ponderibus differentia in se determinata. Quoniam igitur liquores debent minui ultra quoscumque limites in se determinatos, aliquando simul omnes addent, vel auferent minus ponderi, quam sit illa differentia supposita. Igitur tunc illam differentiam compensare non possent nec æquilibrium haberetur, quod est contra hypothesim. Si igitur, donec adsunt liquores, æquilibrium habetur, & ii in infinitum imminuuntur, oportet lapides ipsi æquales sint. Quare cum ipsi lapides, & liquores simul æque ponderent; ipsi liquores æqualia pondera vel addunt, vel demunt, adeoque & æque effluunt.

115. Jam vero lapides illi referunt quantitates finitas, sive in se determinatas, liquores illi referunt quantitates infinitesimas, quibus contemptis, si finitæ quantitates æquales inveniuntur, reipsa debent esse accuratè æquales, & infinitesimæ illæ quantitates, quæ contemnuntur debent se mutuo compensare. Nam nisi illa finitarum quantitatum æqualitas haberetur, contemptus ipsarum decrescentium ultra quoscunque limites, non posset compensare ipsarum differentiam tum, cum infra ipsam eam differentiam imminuerentur.

116. In casu nostro binæ quantitates finitæ sunt bina prismata, vel pyramides, quantitates infinitesimæ sunt summæ particularum illarum omnium, quæ ob laterum obliquitatem desunt in angulis singulorum stratorum binis sectionibus inter se infinite proximis contentorum, ubi eadem in similes, & æquales particulares resolvuntur ad eorum æqualitatem evincendam. Cum his neglectis illa solida inveniantur æqualia; oportet, ipsa omnino æqualia sint, nec ullus error habebitur. Quod autem de binis quantitatibus æqualibus dictum est, facile traducitur ad quantitates quamcunque rationem habentes ad se invicem. Nam si eam rationem accurate non

habe-

haberent, addendum esset aliquid in se determinatum alteri, vel demendum alteri, ut eam assequerentur. Quæ autem contemnuntur, cum decrescere possint infra id, quod addendum, vel demendum esset, non possunt ejus [illegible] supplere, & eam rationem ostendere, quæ ex ipsorum contemptu derivatur.

117. Atque hoc scholio continetur fundamentum tam methodi Cavallerianæ, quam methodi infinitesimalis passim adhiberi solitæ, quarum utraque investigationi est aptissima, utraque demonstrationes mirum in modum contrahit, & secunda multò latius patet, quam prima, utraque autem passim adhiberi solet, & utramque jam adhibebimus ubi opus fuerit. In priore autem illud generaliter moneri potest, eam semper habere locum, ubi areæ in eodem plano positæ per easdem secantur rectas datæ rectæ parallelas, vel ubi solida quævis secantur planis eidem dato plano parallelis; ejusmodi enim areæ vel solida erunt semper, ut sectiones, si sectiones ipsæ datam aliquam rationem habuerint ad se invicem. Habebit autem locum etiam ubicumque sectiones parallelæ inter se fuerint, & æque utrobique distantes, ac numero æquali tam in solidis, quam in areis, sed non in lineis. In methodo autem infinitesimali cavendum, ne contemnatur aliquid, quod non decrescat ultra quoscumque limites in se determinatos respectu ejus, respectu cujus contemnitur, quod si caveatur, nullus error usquam committi poterit.

118. Veteres multo longiore ambitu utebantur adhibentes methodum, quam exhaustionum vocant. Concludebant singulas e binis quantitatibus comparandis inter alias binas ad se invicem accedentes magis, quam pro quavis data differentia, ac demonstrabant æqualitatem quantitatum concludentium inter se, tum inferebant propositarum quantitatum æqualitatem pariter inter se, reducendo semper demonstrationem ad absurdum. Ejusmodi methodus eodem fundamento innititur, quo methodus infinitesimalis, sed multo est implicatior, & longior. Eam apud Euclidis commentatores Tyro videre pote-

poterit, si velit, & ubi aliquanto plus profecerit, apud veteres ipsos, Archimedem in primis. Sed de his jam satis.

Coroll. 6.

119. Pyramides basium æqualium in eundem apicem desinentes, vel utcunque eandem altitudinem habentes, sunt æquales.

120. Potest enim per communem verticem duci planum plano basium parallelum, eruntque super æqualibus basibus, & in iisdem planis parallelis; & pariter si bases collocentur in eodem plano vertices ad eandem partem siti in eadem altitudine terminabuntur ad idem planum basibus parallelum.

Coroll. 7.

121. Pyramis est tertia pars prismatis habentis æqualem basim & altitudinem.

122. Collocentur enim (Fig. 22.) bases in eodem plano, & vertices terminabuntur ad planum ipsi parallelum, ob altitudines æquales. Concipiatur autem in eodem illo basium plano triangulum ACB æquale areæ basium; ac in eadem altitudine prisma terminatum ad DFE ipsi æquale, & parallelum. Tum concipiatur secari ipsum prisma plano CDB, & orientur binæ pyramides habentes verticem in D, & altera habebit pro basi triangulum CAB, altera parallelogrammum CFEB. Si hæc secunda secetur iterum plano CDE in binas pyramides habentes eundem verticem D, & bases FCE, BEC æquales; hæ binæ pyramides erunt inter se æquales (per n. 119.) Earum autem prior considerari potest tanquam habens basim DFE & verticem C, quæ pariter (per n. 119.) æqualis esse debet primæ illi habenti pro basi triangulum ABC, & pro vertice D, cum bases ipsæ sint inter se æquales, & altitudines pariter æquales eidem illorum triangulorum distantiæ perpendiculari a se invicem, adeoque & inter se. Erit igitur prima illa pyramis pars prismatis tertia. Cumque datum prisma huic triangulari prismati æquale sit, ac data pyramis huic pyrami-

ramidi (per num. 107); etiam data pyramis erit pars tertia dati prismatis.

Coroll. 8.

123. Mensura cujusvis prismatis est productum ex basi in altitudinem, pyramidis autem ejus producti triens.

124. Si enim capiatur basis ABCD (Fig. 24.) rectangula æqualis basi dati prismatis, vel datæ pyramidis, & ductis per ejus latera planis perpendicularibus ejus plano in eadem altitudine construatur prisma AG habens facies basi perpendiculares; hoc erit æquale dato prismati, ac triplum datæ pyramidis. Si autem hujus latera AD, DC, & altitudo DF dividantur in particulas æquales quotcumque, quarum numerus, si forte eæ rectę incommensurabiles fuerint, augeatur, & magnitudo minuatur in infinitum, ut ea, quę supersunt, & contemnuntur infinitè parva evadant, concipianturque per singula divisionum puncta plana parallela faciebus parallelepipedi ipsius, habebuntur tot strata, quot particulę fuerint in altitudine DF, & in singulis stratis tot ordines particularum solidarum, quot particulę lineares fuerint in AD, & tot particulę solidę omnes ęquales, & cubicę, quot particulę lineares in latere DC. Quare multiplicando AD per DC habetur numerus particularum solidarum cujusvis strati, qui est idem ac numerus particularum superficialium basis BD. Hunc autem numerum multiplicando per numerum particularum linearium altitudinis DF, habebitur numerus particularum omnium solidarum contentarum eo parallelepipedo. Igitur id parallelepipedum, adeoque datum prisma, vel triplum datę pyramidis est productum ex basi in altitudinem.

125. Ex. gr. Si basis habeat latus AB duorum palmorum, AD quatuor, constabit superficies ABCD palmis quadratis bis quator, sive octo. Si autem altitudo DF fuerit palmorum trium, habebuntur tria strata cuborum palmarium alia supra alia, quorum singula continebunt octo. Quare totum prisma continebit cubos ejusmodi ter octo, sive vigintiquatuor.

Co-

Coroll. 9.

126. Prismata omnia, si inter se comparentur, ad pyramides omnes inter se, erunt ut producta ex basibus, & altitudinibus: & si bases fuerint æquales, erunt ut solæ altitudines: si altitudines fuerint æquales, erunt ut solæ bases: si ea solida fuerint æqualia, altitudines erunt reciprocè proportionales basibus: si bases fuerint reciprocè proportionales altitudinibus, erunt æqualia: si bases fuerint similes, & altitudines proportionales lateribus homologis basium, erunt in triplicata ratione laterum homologorum, vel altitudinum.

127. Patent omnia ex regulis proportionum, & postremum hoc deducitur ex iisdem, ac ex eo, quod basium similium areæ sunt in ratione duplicata laterum homologorum (per Coroll. 2. proposit. 12. Geom.), quibus cum accedat ratio altitudinum, evadit triplicata.

Coroll. 10.

128. Similium solidorum superficies sunt in duplicata ratione laterum homologorum; ipsa autem solida in triplicata.

129. Similia enim dicuntur ea, quæ resolvi possunt in similes pyramides, quarum bases sunt in duplicata ratione laterum, quibus accedit ratio simplex ipsorum laterum, dum in altitudines ducuntur.

130. *Def.* 4. Cylindrus est figura solida inclusa superficie genita motu parallelo rectæ radentis circulum positæ extra ipsius planum: Conus verò, motu rectæ radentis circulum, & transeuntis per punctum quoddam positum pariter extra ipsius planum: utriusque basis dicitur ille circulus, axis ejusmodi recta per centrum ipsius ducta, latus recta, quæ radit circulum, vertex in cono punctum illud immobile; & si axis sit perpendicularis basi, dicitur cylindrus, vel conus rectus; si ille fuerit obliquus, hic etiam dicitur obliquus. Si autem basis fuerit quævis alia curva linea, solidum dicitur Cylindricum, vel Conoidicum.

131. *Fig.* 23. exprimit cylindrum, 25 conum: basis

est circulus AaE, axis FC, latus in cylindro BA, vel ED, in cono FA, vel FE, coni vertex F.

Coroll. 1.

132. Si basis prismatis, vel pyramidis multiplicato in infinitum numero laterum, & imminuta magnitudine, abeat in curvam continuam, satis patet prisma abire in solidum cylindricum, pyramidem in conoidicum, & prisma, cujus latera sunt perpendicularia basi, in cylindrum rectum, pyramidem vero, cujus basis latera æqualia, & distantiæ a vertice æquales in conum rectum, cujus latus rectilineum quodvis erit perpendiculare perimetro basis.

133. Cetera facile patent: ubi vero in pyramide (Fig. 18.) poligonum ABCDE circulo cuidam inscriptum sit, & multiplicatis in infinitum lateribus, poligonum abit in circulum, rectæ FA, FE, abeunt in ipsum perpendiculum FZ.

Coroll. 2.

134. Quamobrem quæcumque dicta sunt de prismate & pyramide in Corollariis defin. 3, locum habebunt in quovis solido cylindrico, vel conoidico, ac ea, quæ ad superficiei mensuram pertinent, habebunt locum in cylindro, & cono rectis tantummodo ita, ut superficies coni recti truncati sit semi-summa peripheriarum binarum basium ductarum in earundem distantiam.

Coroll. 3.

135. In cono obliquo (Fig. 25.) si demisso perpendiculo FD in basim, ducatur per D diameter ACE, jacente A ad partes oppositas C, angulus FCA, & recta FA erunt maximi omnium angulorum FC*a*, & rectarum F*a*, angulus FCE, & recta FE minimi: ipse autem angulus FC*a*, & recta F*a* erunt eo minores, quo magis recedent ab A, & accedent ad E, ac bini tantum hinc inde æquales erunt.

136. Quod pertinet ad angulos patet ex Cor. 9. def. 2. Quod vero pertinet ad rectam patet ex ipso angulo, & ex eo, quod FC sit constans, & C*a* semper æqualis CA, vel CE.

137.

137. *Def.* 5. Sphæra est solidum unica superficie comprehensum, ad quam omnes rectæ e centro ductæ æquales sunt, cujus diameter dicitur recta quævis per centrum ducta, & utrinque terminata ad superficiem: recta autem a centro ad superficiem ducta dicitur radius.

Coroll. I.

138. Omnes sphæræ diametri æquales sunt inter se.

139. Sunt enim æquales omnes radii, quorum binos continet quævis diameter.

Coroll. 2.

140. Si semicirculus circa suam diametrum gyret, generat sphæram habentem idem centrum, & eandem diametrum.

141. Omnes enim rectæ CF, CI, CH (Fig. 26.) ductæ a centro immoto semicirculi C ad quævis superficiei puncta erunt æquales eidem CA, vel CB immotæ.

Coroll. 3.

142. Si sphæra secetur quovis plano, sectio erit circulus, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphæræ, quo casu habebit diametrum, & centrum commune cum diametro, & centro sphæræ, ac deinde erit major, vel minor, prout planum sectionis magis, vel minus accedet ad centrum sphæræ, vel recedet.

143. Sit enim sectio FIH, & ad ejus planum ducatur (per num. 46.) perpendicularis diameter ACB, quæ ipsi occurrat in E; ac si punctum E congruat cum ipso centro C, patet omnes EI fore radios sphæræ. Si autem cadat extra, in triangulis CEI, CEF anguli ad E erunt recti, latus CE idem, basis CI æqualis CF. Quare & quodvis latus EI æquale erit cuivis EF (prop. 7. Geom.), adeoque in utroque casu sectio erit circulus, cujus centrum in E, quod in primo casu cadet in ipsum sphæræ centrum C, circulo maximo habente centrum, adeoque & diametrum, commune cum centro, ac diametro sphæræ.

144. Patet autem ob angulum ad E rectum, radium circuli EF fore semper minorem radio sphæræ CF, nisi congruant abeunte E in C, quo casu æquantur, & quo minor fuerit distantia CE, eo major erit chorda HF, nimirum circuli diameter.

Coroll. 4.

145. Si concipiatur (Fig. 27.) cylindrus rectus KQLM circumscriptus sphæræ habens pro axe diametrum AB, pro basi circulum æqualem circulo sphæræ maximo, quem sectio ipsi sphæræ AB perpendicularis ducta per E secet in RN, superficies segmenti sphæræ HAF erit æqualis superficiei cylindri QNRK, & area totius sphæræ areæ totius cylindri demptis basibus.

146. Concipiatur enim quævis particula Ff peripheriæ circuli genitoris ita parva, ut infinite accedat ad rectam lineam, & producta Ff usque ad BA in G, generabit recta FfG superficiem coni recti, ut patet, ac Ff superficiem coni recti truncati cujus mensura (per num. 134.) erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum habentium pro radiis EF, ef, nimirum (ducto radio CO, qui ipsam Ff secet bifariam in O & ad angulos rectos per Cor. 4. prop. 5. Geom., & demisso perpendiculo OP) in circumferentiam habentem pro radio OP, quæ erit æqualis illi semisummæ; nam $EF . fe :: FG . fG$, & componendo $EF + fe . fe :: FG + fG . fG$, & cum sit $2OG = FG + fG$, erit etiam $\frac{EF + fe}{2} . fe :: OG . fG$; est autem $OG . fG :: OP . fe$, ergo $OP = \frac{EF + fe}{2}$ & cum peripheriæ sint ut radii, erit peripheria ipsius OP æqualis semisummæ peripheriarum habentium radios EF & fe. Jam vero ob similia triangula rectangula Gef, GEF, GPO, OPC, erit $Ee = Nn . fF :: GE . GF :: GP . GO :: PO . CO = EN$. (ut facile intelligitur ex Pr. 12. Geom., ejusque Coroll. 4.) ergo $Nn \times EN = fF \times PO$, atque adeo (cum peripheriæ sint ut radii) erit factum ex Nn in

in peripheriam descriptam radio EN æquale facto ex Ff in peripheriam descriptam radio PQ. Primum illud est area genita ab Nn, hoc secundum est area genita ab Ff. Quare tota area genita a toto arcu AfF æquatur toti areæ genitæ a recta QN, & abeunte REN in MBL tota sphæræ superficies superficiei totius cylindri demptis basibus.

Coroll. 5.

147. Superficies segmenti sphærici HAF æquatur areæ circuli habentis pro radio chordam AF, superficies totius sphæræ areæ circuli habenti pro radio diametrum ipsius sphæræ, quæ proinde erit quadrupla circuli sphæræ maximi.

148. Est enim ut AE, sive QN ad AF, ita AF ad AB, adeoque ita semiperipheria radio AF, ad semiperipheriam radio AB, sive peripheriam radio CB, vel EN. Quare productum ex QN & peripheria descripta radio EN, sive area cylindrica QNRK, vel area segmenti sphærici HAF æquatur producto ex AF in dimidiam circumferentiam radio pariter AF, sive areæ circuli habentis ipsam AF pro radio, quæ AF, abeunte F in B, evadit diameter AB, ac proinde area totius sphæræ æquatur areæ circuli habentis pro radio diametrum ipsius sphæræ; quæ idcirco quadrupla est areæ circuli habentis pro radio radium ipsius sphæræ, nimirum areæ circuli sphæræ maximi.

Coroll. 6.

149. Sector sphæræ CHAFC æquatur cono habenti pro basi circulum radio AF, & pro altitudine radium ipsius sphæræ, & soliditas totius sphæræ cono habenti pro basi circulum quadruplum circuli sphæræ maximi, ac eandem altitudinem, cujus mensura erit area ejusdem circuli ducta in binos trientes diametri.

150. Si enim superficies sphæræ concipiatur resoluta in particulas ita parvas, ut infinitè accedant ad superficiem planam, & a singulis earum perimetri punctis ad centrum sphæræ tendant rectæ, habebuntur totidem pyramides, quarum bases erunt illæ particulæ superficiei

sphæricæ, & altitudo communis radius sphæræ. Quarum omnium summa æquabitur pyramidi vel cono habenti basim æqualem toti illi superficiei sphæricæ, & altitudinem eandem. Porro cum (per n. 147.) totius sphere superficies sit quadrupla circuli sphere maximi, & conus (per num. 134. & 123.) triens producti ex basi & altitudine; erit soliditas sphere equalis trienti producti ex quadruplo circuli maximi, & radio, vel trienti producti ex duplo ipso circulo, & diametro, sive binis trientibus producti ex circulo ipso, & diametro.

Coroll. 7.

151. Si concipiatur conus MAL habens pro basi pariter circulum sphere maximum, ut cylindrus QLMK; erunt conus, sphera, cylindrus ad se invicem ut numeri 1, 2, 3, & superficies sphere, ad superficiem cylindri, inclusis basibus, pariter ut 2 ad 3.

152. Nam cylindrus equatur producto ex basi sua, sive area circuli sphere maximi, & diametro AB (per nu. 134, & 123) sphera binis ejus producti trientibus (per n. 149), conus uni trienti (per n. 134, & 123).

Coroll. 8.

153. Spherarum superficies sunt in duplicata ratione radiorum, sphere autem ipse in triplicata.

154. Nam aree circulorum maximorum sunt in duplicata ratione radiorum, quibus accedit ratio ipsorum radiorum, cum pro habenda sphera ee ducuntur in diametros, vel radios, ac fit triplicata.

Scholion 1.

155. Si Archimedeis numeris uti libeat pro ratione circumferentie circuli ad radium, erit sphera ad cubum diametri, ut 21 ad 11. Erit enim quadratum radii ad aream circuli, ut 7 ad 22. Quare quadratum diametri ad aream circuli, ut 28 ad 22, vel ut 14 ad 11. Si primus ducatur in diametrum, & secundus in $\frac{2}{1}$ diametri, fiunt cubus, & sphera, que solida proinde erunt ut 14 ad $\frac{2}{3} \times 11$, sive ut 3×7 ad 11, vel ut 21 ad 11.

156.

156. Data quavis ratione diametri ad circumferentiam adhuc propiore rationi veræ, semper habebitur facile mensura sphæræ; ut & corporum omnium mensuræ ad pyramides redactæ haberi poterunt ex iis, quæ dicta sunt.

157. Mechanica eorum mensura haberi potest, si corpora ejusdem formæ minora immittantur in vas aquæ plenum, & capiatur mensura aquæ effluentis.

Scholion 2.

158. Subjiciemus indicem propositionum libri 11, & 12 Euclidis, quas fere omnes accuratè demonstravimus, nonnullæ ex demonstratis sponte fluunt. Omisimus aliquas; quas Euclides in gratiam sequentium demonstrat.

Euclidi Lib. XI	Nobis	Euclidi Lib. XI	Nobis
Pr. 1	num. 4	28)	
2	7	29)	
3	5	30)	
4	18	31)	
5	28	32)	126
6	35	33)	
7	7	34)	
8	35	35)	
9	39	36)	
10	41	37)	
11)		38	66
12)	45		
13)		Lib. XII	
14	16	5)	126
15	54	6)	
16	9	7	122
17	11	8)	
18	64	9)	126
19	70		
20	85	10)	
21)		11)	
22)	88	12)	(134
23)		13)	(122
24	98	14)	
25	126	15)	
26	86	18	153

TRIGONOMETRIA.

1. TRigonometria dicitur ars resolvendi triangula. Nimirum in quovis triangulo habentur tria latera, & tres anguli, ex quibus si dentur tria, fere semper reliqua tria inveniri possunt. Ea cum inveniuntur, triangulum resolvi dicitur, ac ejusmodi investigationem Trigonometria docet, quæ triangulorum dimensionem græco vocabulo exprimit.

2. Porro triangula considerari solent vel in plano a rectis constituta lineis, vel in sphæræ superficie ab arcubus circulorum ejusdem sphæræ maximorum. Quæ illorum resolutionem docet Trigonometria, *plana* dicitur, quæ horum, *sphærica*. Id autem præstat ope quarumdam, quæ dicuntur *functiones* arcuum circuli, vel angulorum eosdem arcus habentium pro mensura.

3. Quamobrem hunc tractatum dividemus in partes tres. Prima aget de arcuum functionibus, & earum tabulis, secunda de Triangulis planis, tertia de sphæricis.

PARS PRIMA.

De arcuum functionibus, & earum tabulis.

§. I.

De natura, & proprietatibus functionum.

Definitiones.

4. NOmine *functionis* arcus cujuspiam hic intelligimus sinum rectum, sinum versum, tangentem, secantem, cosinum, cotangentem, cosecantem, quæ singula sunt exponenda.

5. Si ex altero extremo arcus circularis ducatur perpendiculum in diametrum ductam per alterum extremum;

mum; hoc perpendiculum dicitur *sinus rectus* ejus arcus; & pars diametri intercepta inter illud extremum arcus, & ipsum sinum rectum, dicitur *sinus versus*: In Fig. 1. DE est sinus rectus arcus AD; AE est sinus versus ejusdem:

6. Si ex altero extremo arcus ducatur tangens; donec occurrat rectæ ductæ per alterum extremum, & per centrum, ipsa dicitur *tangens* ejusdem arcus. AF est tangens arcus AD, *Af* arcus *Ad*.

7. Illud segmentum rectæ ductæ per centrum, & alterum extremum arcus, quod interjacet inter centrum, & tangentem ductam per alterum extremum, dicitur *secans* ejusdem arcus. CF est secans arcus AD; *Cf* arcus *Ad*.

8. Id quod arcui cuipiam deest ad complendum semicirculum, dicitur ejus *complementum ad semicirculum*, vel *ad* 180 *gradus*: ejus differentia a quadrante, sive ipsum excedat, sive ab ipso deficiat, dicitur absolutè *complementum*, ac sinus, tangens, secans complementi arcus, dicitur ejus *cosinus*, *cotangens*, *cosecans*. DB est respectu AD complementum ad semicirculum, *d*B respectu A*d*: GD, G*d* sunt complementa AD, A*d*: DH, *d*H sunt ipsorum cosinus: GI, G*i* ipsorum cotangentes: CI, C*i* ipsorum cosecantes, cum sint sinus tangentes secantes complementorum GD, G*d*.

Coroll. I.

9. Bini arcus, qui simul sumpti semicirculum complent, habent omnes functiones æquales.

10. Sint AD, A*d* simul æquales semicirculo A*d*B: erit *d*B æqualis AD, ac proinde etiam complementum GD æquale G*d*, eritque angulus DC*d* bifariam sectus per rectam CG (per Schol. def. 7. Geom.), adeoque (per pr. 5. Geom., & ejus Cor. 4.) chorda D*d* secta bifariam, & ad angulos rectos in H. Quare etiam cosinus DH, *d*H erunt æquales, & sinus DE, *de* æquales eidem CH (per Cor. 4. pr. 3. Geom.) erunt æquales inter se. Cumque angulus AC*f* sit æqualis *d*C*e* ad verticem opposito (per Cor. 4. def. 8. Geom.), adeoque

que

que angulo DCA, ob arcus dB, DA æquales; etiam in triangulis ACF, ACf erunt (per pr. 3. Geom.) æquales tangentes AF, Af, & secantes CF, Cf, ut pariter ob æqualitatem angulorum GCI, GCi erunt æquales cotangentes GI, Gi, & cosecantes CI, Ci.

Coroll. 2.

11. Chorda dupli arcus est dupla sinus ejusdem.

12. Nam Dd chorda DGd est (per num. 10.) dupla DH sinus DG, ac arcus DGd est duplus arcus DG.

Coroll. 3.

13. Quadratum radii æquatur summæ quadratorum sinus, & cosinus arcus cujusvis, ac differentiæ quadratorum secantis, & tangentis. Quadratum vero secantis summæ quadratorum tangentis, & radii.

14. Nam ob angulum CHD rectum, est (per pr. 7. Geom.) $CD^2 = CH^2 + HD^2 = DE^2 + DH^2$, & ob angulum CAF rectum, $CA^2 = CF^2 - FA^2$, & $CF^2 = FA^2 + CA^2$.

Coroll. 4.

15. Idem quadratum radii æquatur rectangulo sub cosinu, & secante, ac rectangulo sub tangente, & cotangente.

16. Est enim (per prop. 12. Geom.) ob triangula CED, CAF similia, CE. CD :: CA. CF; adeoque (per pr. 13. Geom.) $CE \times CF = CA \times CD = CA^2$. Præterea cum sit angulus ICG æqualis (per Coroll. 1. def. 17. Geom.) alterno CFA; ac proinde similia triangula rectangula CAF, ICG; est AF. AC :: CG. GI, adeoque $AF \times GI = AC \times CG = CA^2$.

Coroll. 5.

17. Binorum arcuum quorumcumque tangentes sunt in ratione reciproca cotangentium.

18. Nam (per num. 15.) rectangulum sub tangente, & cotangente primi æquatur rectangulo sub tangente, & cotangente secundi; cum utrumque æquetur quadrato radii; ac proinde (per pr. 10. Geom.) illius tangens ad tangentem hujus est, ut cotangens hujus ad cotangentem illius.

Co-

Coroll. 6.

19. In quovis arcu est cosinus ad sinum, ut radius ad tangentem, ac est sinus ad radium, ut tangens ad secantem.

20. Est enim CE, sive DH. ED :: CA. AF, & ED. DC :: AF. FC.

Coroll. 7.

21. Sinus versus arcus quadrante minoris est differentia radii a cosinu, & arcus majoris summa.

22. Nam $AE = AC - CE$, & $Ae = AC + Ce$.

Coroll. 8.

23. Mutato utcumque radio functiones omnes arcuum similium, vel angulorum æqualium mutantur in eadem ratione, & inter se rationem constantem servant.

24. Nam figura 1, aucto utcunque, vel imminuto radio CA, erit semper sibi similis, & omnia triangula habebunt eosdem angulos, quos prius; ac proinde ratio radii CA ad omnes alias lineas, & ratio earundem inter se, erit eadem ac prius.

Coroll. 9.

25. In quovis triangulo rectangulo si basis (cujus nimirum nomine in triangulis rectangulis solet intelligi latus recto angulo oppositum, quod etiam hypothenusa dicitur) habeatur pro radio, latera erunt sinus angulorum oppositorum, & cosinus adiacentium; ac si latus alterum habeatur pro radio, alterum latus erit tangens, basis vero secans anguli adjacentis illi primo lateri, & oppositi huic secundo, ac illud cotangens, hæc cosecans alterius anguli oppositi primo lateri, & adjacentis secundo.

26. Sit enim quodvis triangulum CED rectangulum in E, & concipiatur circulus radio CD. In eo erit DE sinus arcus DA, vel anguli DCA, adeoque cosinus arcus DG, & anguli DCG æqualis alterno CDE.

27. Sit vero quodvis triangulum CAF rectangulum in A, & concipiatur circulus radio CA. In eo erit latus AF tangens, basis CF secans arcus AD, vel anguli ACF adjacentis AC, & oppositi AF; adeoque illud cotan-

tangens, hæc cosecans anguli DCG; nimirum anguli CFA alterni, adeoque æqualis ipsi.

LEMMA GENERALE.

28. Binarum quantitatum semidifferentia addita semisummæ efficit majorem, subtracta relinquit minorem: ac si semidifferentia sit major quam semisumma, altera quantitas negativa erit, quæ hic semper pro minori habebitur, cum habeatur ut minor etiam nihilo.

29. Sint in fig. 2. binæ quantitates AD, DB. Secetur AB bifariam in C, sumaturque CE = CD, ut relinquatur AE = DB; eritque AC, vel CB semisumma, ED differentia, cujus dimidium CD additum semisummæ AC exhibet majorem AD; at idem ablatum a semisumma CB relinquit minorem DB.

30. Si vero earum quantitatum altera sit *Ad*, & altera habita pro negativa *Bd*, summa negativæ & positivæ majorem minuit, adeoque erit AB summa, CB, vel CA semisumma, & facta *Ae* ex parte opposita *Bd* ipsi æquali; erit *ed* differentia, ejusque dimidium *Cd* majus ipsa semisumma CB. Adhuc tamen AC + *Cd* = *Ad*, & CB − *Cd* = − *Bd*, sive parti alteri negativæ.

THEOREMA.

31. In binis arcubus quibuscumque summa sinuum ad differentiam est, ut tangens semisummę eorundem arcuum ad tangentem semidifferentię, & summa cosinuum ad differentiam, ut cotangens semisummę ad tangentem semidifferentię.

32. Sint enim in fig. 3. bini arcus AD, DB, & secetur AB bifariam in E: erit AB summa eorum arcuum, AE semisumma, & (per num. 28.) DE semidifferentia. Ductis autem CD, CE, quibus AB occurrat in G, I, ac (per pr. 5. Geom., & ejus cor. 4.) secetur bifariam, & ad angulos rectos in I, erit AI semisumma, GI semidifferentia binarum AG, GB, ac tandem ducantur AP, BQ perpendiculares CD, quę erunt sinus arcuum AD, DB.

33. Jam vero ob triangula similia AGP, BGQ, quę pręter angulos rectos in P, & Q, habent angulos in

G ad

& ad verticem oppositos ęquales, erunt ii sinus, ut AG, GB, adeoque eorum semisumma ad eorum semidifferentiam ut AI earum semisumma ad semidifferentiam IG. At habendo CI pro radio, in triangulis CIG, CIA rectangulis sunt IG, IA tangentes angulorum ICG, ICA (per num. 25.). Sunt igitur etiam tangentes arcuum, qui eos metiuntur, ut eędem rectę IG, IA. Quare semisumma sinuum arcuum AD, DB, ad eorum semidifferentiam, adeoque & eorum summa ad differentiam erit, ut tangens AE semisummę ipsorum arcuum ad tangentem ED eorum semidifferentię.

34. Completa jam diametro ACK, secetur bifariam etiam KB in M, & capiatur MN = ED versus eandem plagam. Erit EM dimidium totius semicirculi, adeoque quadrans. Quare etiam DN erit quadrans, adeoque DB complementum BN: cumque relinquantur AD, NK ęquales alteri quadranti; erit AD complementum NK; & ipsorum BN, NK erit BM semisumma, BE, seu AE complementum semisummę, MN = ED semidifferentia.

35. Cum igitur summa sinuum arcuum AD, DB ad eorum differentiam sit, ut tangens eorum semisummę AE ad tangentem eorum semidifferentię ED; erit summa cosinuum binorum arcuum KN, NB ad eorum differentiam, ut cotangens eorum semisummę ad tangentem eorum semidifferentię.

Scholion.

36. Multa alia theoremata possunt facile demonstrari circa hasce arcuum functiones: sed hęc ad usus, qui communiter occurrunt, abunde sunt. Ut autem ea ad usum deduci possint, ostendendum est, quo pacto diviso radio in quemlibet partium numerum invenire liceat, quot earum partium contineat quęvis functio cujusvis arcus, saltem eorum omnnium, qui constant gradibus, & minutis, ut in tabulas ordinentur, & ubi opus fuerit prępsto sint.

37. Radius dividi potest in quotcunque partes libuerit, plerumque autem assumitur unitas cum quopiam nume-

mero cyphrarum o, ut 100000, 1000000, 10000000, l alius aliquis ejusmodi numerus; ac si inventis funionibus pro aliquo majore radio, querantur eędem o minore, habebuntur facile ope numeri 23. Sic si nstructis tabulis pro radio 10000000, querantur pro dio 100000, satis est ex inventis functionibus rejicepostremas duas notas, & eas habere pro decimalis; ita enim erit ille primus radius ad hunc novum, illa prima functio ad hanc novam.

38. Ut habeantur ejusmodi tabulę, satis erit eas conuere usque ad 90 gradus; quoniam (per n. 9.) post adus 90 eędem functiones redeunt. Porrò inferius ill etiam ostendemus, quo pacto ordinandę sint, ut mplementa sibi e regione respondeant.

39. Interea notetur illud: evanescente in fig. 1. arcu D, ubi punctum D congruat cum A, sinus rectus ED, tangens AF evanescunt: sed secans CF evadit ęquas radio CA. Crescente arcu, crescunt omnes tres, donec facto AD = 90°, ubi punctum D abit in G, sinus E fit ęqualis radio CG. Quamobrem radius appellaur etiam *sinus totus*, nimirum sinus totius quadrantis: angens vero AF, & secans CF evadunt infinitę, cum iant parallelę, adeoque punctum F in infinitum recelat. Crescente vero arcu ita, ut quadrantem excedat, quemadmodum eum excedit Ad, quo magis ipse augebitur, eo magis decrescet ejus sinus de, tangens Af, secans Cf; donec illo abeunte in semicirculum, evanescat sinus, & tangens, ac secans fiat ęqualis radio.

40. Sinus autem versus AE, arcu evanescente, evanescit, crescente vero arcu, crescit, donec in arcu ęquali quadranti ęquetur radio, & in semicirculo fiat ęqualis diametro AB.

§. II.

§. II.

De constructione tabularum.

41. SI describeretur circulus ita magnus, ut radium haberet palmorum 10000000; dividi posset in gradus, & minuta, ac ductis sinibus, tangentibus, & secantibus, liceret earum mensuras capere, & invento in singulis palmorum numero, tabulas ita construere. Sed id & mechanicum esset; & ferme factu impossibile, potissimum ob immanem postremarum tangentium, ac secantium longitudinem. Computandæ sunt igitur ope Geometriæ, & Arithmeticæ ejusmodi functiones, quæ tamen ob quantitates radicales, in quas inciditur, accuratæ haberi non possunt; sed tantummodo veris proximæ quantum libuerit. Multæ methodi ad contrahendum calculi laborem inventæ sunt; verum cum ita multæ jam computatæ sint tabulæ, non id agitur, ut immani sanè, ac inutili jam prorsum labore iterum computentur, sed ut Tyroni innotescat, qua ratione computari possint. Trademus igitur methodum, quæ & captu facillima sit, & scopum attingat, ac licet in praxi non omnium expeditissima, nec justo tamen sit operosior.

PROBL. I.

42. Data tangente invenire secantem, & sinum.

43. Ex summa quadratorum radii, & tangentis extrahatur radix, & habebitur secans (per n. 13). Fiat ut secans ad tangentem, ita radius ad sinum quæsitum (per n. 19). Et erit factum.

PROBL. II.

44. Datis tangentibus binorum arcuum non majorum quadrante invenire tangentem arcus medii arithmeticè proportionalis.

45. Ex datis tangentibus inveniantur secantes (per num. 41.): tum fiat ut summa secantium ad secantem minorem, ita differentia tangentium, ad quantitatem,

quæ

quæ addita tangenti minori, exhibebit tangentem quæsitam.

46. Sint enim in fig. 4. arcus dati AB, AE, medius Arithmeticè proportionalis AD, tangentes datæ AF, AH, quarum differentia erit HF, ac secantes inventæ CF, CH, tangens vero quæsita sit AG. Ob arcum BD = DE recta CG bifariam secat angulum FCH. Igitur (per Cor. 4. pr. 12. Geom.) erit CH. CF :: GH. GF. Quare componendo CH + CF. CF :: HF. FG. Habetur autem AF + FG = AG.

Coroll. 1.

47. Si alter e binis arcubus esset = 0, abeunte B in A tangens AF, evanesceret, secans CF fieret æqualis radio, & AG ipsi FG. Quare problema mutaretur in hoc aliud. *Data tangente arcus, invenire tangentem ejus dimidii*, & solutio huc rediret: *Inventa dati arcus secante, fiat, ut summa radii, & secantis ad radium, ita tangens data ad quæsitam*.

48. Si alter e binis arcubus fieret quadranti æqualis, abeunte E in I, CH, FH abirent in infinitum, & ratio summæ FC, CH ad FH abiret in rationem æqualitatis. Quare etiam esset FC = FG. In eo igitur casu solutio huc redit: *Secans arcus minoris addatur tangenti ejusdem, & invenietur quæsita tangens*. Porro ejusmodi solutio pro eo casu sic etiam immediatè demonstratur. Angulus FGC æquatur alterno GCI, cum quo in eo casu congruit GCH, cui æqualis est FCG. Quare in eo casu FGC = FCG, & FC = FG.

Coroll. 3.

49. Si utrunque simul contingeret, altero arcu existente = 0, altero = 90°; tangens AF arcus minoris evanesceret, ac secans FC evaderet æqualis radio, adeoque ipsi radio æqualis etiam quæsita tangens, arcus vero ille medius arithmeticus evaderet = 45°. Quare solutio problematis in eo casu huc redit: *Tangens arcus* 45° *æquatur radio*. Id autem etiam immediate constat. Si enim angulus ACG est semirectus, erit (per pr. 1. Geom.)

K semi-

semirectus etiam AGC ob angulum GAC rectum, adeoque triangulum CAG isoscele.

PROBL. III.

50. Datis functionibus binorum arcuum, qui inter se parum admodum differant, invenire functionem cujuscumque intermedii arcus dati veræ proximam.

51. Fiat ut differentia arcus minoris a majori, ad differentiam minoris ab intermedio, ita differentia datarum functionum ad quartum addendum functioni, quæ respondet arcui minori, vel ab ea auferendum, prout crescentibus arcubus functio crescit vel decrescit, ut habeatur functio quæsita.

52. Exprimantur enim in Fig. 5. & 6. segmentis AB cujuspiam rectæ arcus, & rectis BF ipsi perpendicularibus tangentes eorumdem. Omnia puncta F erunt in quadam linea continua MN, quæ si curva sit, exigui arcus ejusdem haberi potuerunt pro rectis lineis. Exprimantur jam bini arcus inter se proximi rectis AB, AC, intermedius recta AD, functiones autem datæ rectis BF, CE, quæsita functio recta DG, ac ipsas DG, CE secet in H, & I recta FI parallela BC. Habita FE pro recta linea erunt similia triangula EFI, GFH, eritque FI ad FH, sive BC ad BD, ut EI ad GH, nimirum differentiæ arcuum circuli ut differentiæ functionum. Porro GH erit addenda ipsi HD, vel FB in Fig. 5, demenda ab eadem in Fig. 6., ut habeatur DG; quia ibi crescentibus arcubus functiones crescunt, hic decrescunt.

Scholium

53. Hac methodo utimur in quovis tabularum genere, in quibus bina quantitatum genera a se invicem pendent, quarum nimirum exiguæ differentiæ habentur pro proportionalibus inter se, ac eadem usi sumus in arithmetica (cap. 3. num. 36.) ad eruendos logarithmos numerorum intermediorum inter integros a tabula exhibitos: ac eadem utemur infra ad eruendos arcus, ope functionum intermediarum inter eas, quas tabulæ exhibent; uti satis erit considerare functiones

ut

ut expositas segmentis AB, arcus vero rectis BF.

54. Pertinet hæc methodus ad methodum generaliorem, quam interpolationis dicunt: Semper autem rite procedit; ubi quantitates assumuntur ita inter se proximæ; ut differentiæ sint inter se proportionales, quod ex ipsis tabulis; cognoscitur; & quidem admodum facile in iis tabulis, in quibus alterius generis quantitates æquè se excedunt; ut in tabula logarithmorum numeri naturales. Tunc enim satis est assumere differentias quantitatum iis respondentium; & si binæ hujusmodi differentiæ sint inter se proximè æquales; invenietur pariter quæsita quantitas proximè æqualis veræ. Differentia logarithmorum numeri 832, & 833 est 5217, numeri 833, & 834 est 5210 proximè æqualis priori, ac proinde multo propiores proportionalitati erunt differentiæ intermediæ inter ipsos numeros 832, 833.

55. Quod si plus æquo inæquales differentiæ deprehenderentur, tunc ad interpolationem non binæ tantum quantitates adhibendæ essent altera major, altera minor quæsita, sed plures; lege quadam, quam alibi exponemus; nam ad usus trigonometricos, methodus tradita sufficit fere semper.

PROBL. IV.

56. Dato arcu quovis, qui quadrante sit minor, invenire ejus tangentem, secantem, sinum.

57. Arcus datus vel erit inter 0, & 45°; vel inter 45°, & 90°. Inveniatur per Probl. 2, & ejus Corollaria tangens arcus medii arithmeticè proportionalis inter eos, inter quos arcus datus jacet. Idem arcus datus jacebit inter hunc novum, & alterum e prioribus binis extremis. Habeantur igitur hi duo pro extremis, & inveniatur tangens arcus medii arithmeticè proportionalis inter ipsos, ac ita fiat semper, donec deveniatur ad arcum datum, vel ad arcum dato proximum, quantum libet. Devenietur autem, quia differentia inter eos, qui assumuntur pro extremis & datum concludunt, semper duplo minor evadet, ac proinde continuata operatione minuetur ultra quoscunque limites.

58. Inventa tangente invenietur secans, & sinus (per num. 42.

Scholion I.

59. Methodus hic exposita inveniendi tangentem arcus dati est admodum similis methodo indicata Arithmeticæ cap. 3 num. 31, inveniendi Logarithmum dati numeri. Potest autem hac methodo ope solius problematis secundi, nec serius, quam par est inveniri tangens, utcumque veræ proxima: nam in prima operatione distabunt arcus extremi per 45°, in 2ª per 22°. 30′, in 3 per 11°. 15′, in 4 per 5°. 37′. $\frac{1}{2}$ in 5 per 2°. 48′. $\frac{3}{4}$ in 6 per 1°. 24′. $\frac{3}{8}$ in 7 per 42′ $\frac{3}{16}$ & ita porro.

60. At ubi jam deventum fuerit ad binos arcus satis inter se proximos, potest plurimum contrahi labor ope Problematis tertii, inveniendo tangentem pro intermedio illo dato per differentias habitas pro proportionalibus, quod ipsum in Logarithmorum investigatione liceret. Licebit autem tuto, ubi differentiæ extremarum a recens inventa in postrema operatione obvenerint inter se æquales.

61. Tacquetus in sua Trigonometria habet pro proportionalibus sinus arcus 45′. Hac nostra methodo post sextam operationem institutam per propositionem 2, posset septima institui per prop. 3, cum extremorum differentia jam sit 42′. $\frac{3}{16}$ tantummodo. Sed non solum pro radio = 10000000, sed etiam pro 100000, adhuc plus æquo inæquales sunt differentiæ in tanto intervallo.

62. Plerumque pro radio 100000, instituendæ erunt 9 operationes pro radio vero 10000000, saltem 12. Notandum tamen, cum in singulis operationibus contemnantur minores fractiones, assumendas esse saltem binas præterea decimalium notas, ne error in postremis integrorum notis committatur.

63. Porro ut methodus exemplo illustretur, quæratur tangens 27°. 43′. In tabella sequenti operatio di-

stincta

stincta est in 12 spatia, in quorum singulis habentur bini arcus cum tangentibus jam inventis, ac inter eos medius Arithmeticè proportionalis cum sua, præter postremum, in quo non medius Arithmeticè proportionalis adest, sed ipse arcus datus. Binæ decimales fractiones adhibitæ ad inveniendos integros minus accuratæ sunt; integrorum notæ accuratissimæ.

Arcus	Tangentes.	Arcus	Tangentes
I.		II.	
45° 0'.	10000000.00	45.° 0'.	10000000.00
22. 30.	4142135.62	35. 45.	6681786.37
0. 0.	0.	22. 30.	4142135.62
III.		IV.	
33. 45.	6681786.37	28. $7.\frac{1}{2}$	5345111.35
28. $7.\frac{1}{2}$	5345111.35	25. $18.\frac{3}{4}$	4729647.75
22. 30.	4142135.62	22. 30.	4142135.62
V.		VI.	
28.° $7'\frac{1}{2}$	5345111.35	28.° $7\frac{1}{2}$	5345111.35
26. $43.\frac{1}{8}$	5033577.98	27. $25.\frac{5}{16}$	5188352.84
25. $18.\frac{3}{4}$	4729647.75	26. $43.\frac{1}{8}$	5033577.98

Arcus	Tangentes	Arcus	Tangentes
VII.		VIII.	
28. $7.\frac{1}{2}$	5345111.35	27. $46.\frac{13}{32}$	5266478.81
27. $46.\frac{13}{32}$	6266478.81	27. $35.\frac{55}{64}$	5227353.18
27. $25\frac{5}{16}$	5188352.84	27. $25.\frac{5}{16}$	5188352.84
IX.		X.	
27. $46.\frac{13}{32}$	5266478.81	27. $46.\frac{13}{32}$	5266478.81
27. $41.\frac{17}{128}$	5246900.25	27. $43.\frac{197}{256}$	5256685.58
27. $35.\frac{55}{64}$	5227353.18	27. $41.\frac{17}{128}$	5246900.25
XI.		XII.	
27. $43.\frac{197}{256}$	5256685.58	27. $43.\frac{197}{256}$	5256685.58
27. $42.\frac{231}{512}$	5251791.92	27. 43.	5253829.13
27. $41.\frac{17}{128}$	5246900.25	27. $42.\frac{231}{512}$	5251791.92

64. In computandis tabulis integris labor plurimum minueretur, cum operationes pro uno arcu institutæ, pro pluribus aliis usui esse debeant, ut patet. Quin immo inventis tangentibus, & secantibus arcuum minorum gradibus 45, admodum facile reliquorum omnium tangentes invenientur. Nam (per num. 15.) diviso quadrato radii per tangentem, habetur cotangens, & (per num. 48.) tangens arcus $45^\circ + a$, qui nimirum

mirum est medius arithmeticè proportionalis inter $2a$, & $90°$, est $=$ tang. $2a + $ sec. $2a$; ac multa ejusmodi compendia haberi possunt.

Scholion 2.

65. Computatis sinibus, tangentibus, ac secantibus, possunt etiam earum functionum logarithmi computari methodo exposita in Arithmetica (cap. 3. num. 31, & 38). Adsunt autem plures methodi computandi logarithmos functionum ipsarum immediatè. Sed hìc satis est indicare rationem aliquam, qua inveniri possint. Porro ipsos quoque earum functionum logarithmos appellabimus in posterum pariter functiones.

P R O B L. V.

66. Functionum computatarum tabulas ordinare.

67. Tabula sex columnas contineat. In prima scribantur arcus, nimirum gradus, vel graduum minuta, in secunda sinus, in tertia tangentes, in quarta secantes iis respondentes, in quinta logarithmi sinuum, in sexta logarithmi tangentium. Porro arcus ipsi in pagina sinistra incipiant a 0, & descendendo perpetuo crescant, & in pagina dextra incipiant a $90°$, & perpetuo crescant: & erit factum.

Coroll.

68. Civis arcui existenti in altera pagina respondebit e regione in altera ejus complementum, adeoque & cosinus, cotangens &c.

69. Nam initio 90, & 0 quadrantem complent, ac deinde semper quantum in altera pagina additur, tantundem in altera detrahitur.

Scholion.

70. Logarithmi in tabulis aptari solent radio 10000000000; ut nimirum logarithmus radii, qui in calculis trigonometricis sæpissime occurrit, sit 10. 00 &c., ac proinde facile & addi possit, & detrahi.

71. Secantium Logarithmi adscribi non solent, cum iidem admodum facile eruantur ex Logarithmis cosinuum. Cum enim (per num. 15.) quadratum radii divisum per cosinum exhibeat secantem; satis erit e

 duplo

duplo Logarithmo radii, sive ex 20.000 &c. subtrahere Logarithmum cosinus.

72. Ut exempla deinceps aliqua dari possint, adjecimus ad calcem hujus tractatus binas tabulas alteram Logarithmorum numerorum naturalium usque ad 1000, alteram harum functionum pro solis gradibus, ex quibus per num. 50, & 51) inveniri poterunt etiam functiones pro minutis. Aptati autem sunt sinus, tangentes, secantes radio 100000. 00, Logarithmi autem Logarithmo radii 10. 000 &c., sive radio continenti cyphras nullitatis decem.

§. III.

De usu tabularum

73. Usus tabularum, quem hic exponimus, reducitur ad bina Problemata, quorum altero ex datis arcubus quærantur functiones, altero contra arcus e functionibus.

PROBL. I.

74. Dato quovis arcu, eruere e tabulis functionem ipsi respondentem.

75. Si arcus datus non sit quadrante major, & solos gradus contineat; invenietur in prima columna paginæ sinistræ, vel dexteræ, prout fuerit minor vel major 45°, ac e regione ipsius in eadem pagina respondebit in secunda columna sinus, in tertia tangens &c., ac in altera pagina complementum cosinus, cotangens &c.

76. Si præterea contineat minuta; inveniatur functio arcus proximè majoris, & proximè minoris ac capiatur earum differentia : arcuum autem differentia erit 1°, vel 60'. Fiat igitur ut 60' ad numerum minutorum, qui in arcu dato continentur supra numerum graduum, ita differentia functionum erutarum e tabulis ad quartum, qui addatur functioni respondenti arcui minori, si quæritur sinus, tangens &c., quæ crescente arcu crescunt, vel dematur, si quæritur cosinus, cotangens &c., quæ illo crescente

scente contra decrescunt; & habebitur quæsita functio (per num. 50. & 51).

77. Quod si arcu quadrantem excedat, subtrahatur a 180°, ac residui inveniatur functio, quæ erit functio arcus dati (per n. 9).

Scholion.

78. Hac methodo habebunt functiones etiam pro minutis ita accuratæ, ut nullus in minutis ipsis committatur error, prorsus ut in vulgaribus tabulis continentibus gradus, & minuta eadem prorsus methodo eruuntur pro minutis secundis, sine ullo in ipsis secundis errore, atque id ubique præter arcus quadranti nimis proximos, in quibus differentiæ multo magis inæquales sunt, & error comittitur aliquanto major.

79. Et quidem in sinibus, tangentibus, ac secantibus plerumque vix ullus, vel admodum exiguus aderit error in nota integrarum postrema; at decimales illæ fractiones haud accuratæ provenient; quas idcirco in sequentibus exemplis omittemus, vel pro unitate computabimus: ut etiam in Logarithmis rejiciemus postremas binas notas, quæ a veris abluderent. In vulgaribus tabulis, si arcus non sint nimis proximi quadranti, assumpto radio cum septem cyphris 0, omnes pro minutis etiam secundis accuratæ obveniunt.

80. At sublimiore illa interpolationis methodo, de qua mentionem fecimus num. 55, ternis adhibitis functionibus, vel quaternis, possunt haberi accuratæ etiam pro minutis, & secundis, omnes harum quoque tabularum functiones. Sed ea sublimior est, quam ut hic proponenda videatur. Præbebimus igitur exemplum methodi expositæ num. 75.

81. Detur arcus $27^{\circ}.\ 43'$, & quæratur tangens. In tabulis tangens $28^{\circ} = 53171.$, tang. $27^{\circ} = 50953$, quarum differentia 2218. Fiat igitur ut 60 ad 43, ita 2218, ad quartum: prodit 1590, quo addito tangenti 50953, habebitur tangens quæsita 52543. Porro eam num. 63 invenimus 5253829, pro radio 10000000, adeoque 52538. pro radio 100000., quæ ab hic inventa

venta differt per 5. Cum vero differentia debita minu-
tis 60 inventa sit 2218, adeoque uni minuto 37; e
hoc 5 particularum errore, ne septimæ quidem part
unius minuti error committitur.

PROBL. II.

82. Data functione invenire arcum, cui respondet

83. Si functio data inveniatur in tabulis; invenietu etiam arcus ipsi e regione respondens. Si vero ea in tabulis non habeatur; inveniatur in iisdem functio proxime minor, & proxime major, ac fiat ut harum differentia ad differentiam proxime minoris a proposita, it 60′ ad numerum minutorum addendum arcui respondenti functioni minori, si ea sit sinus, tangens &c., demendum ab eo si sit cosinus, cotangens &c. Porro tam arcus ita inventus erit is, qui habebit functionem illam datam (per num. 53), quam is qui proveniet eo ablato a 90° (per n. 9).

Scholion.

84. Detur Logarithmus tangentis 9. 87343, & quæratur arcus. In tabulis logarithmus tangentis proximè major, omissis postremis binis notis, est graduum 30 = 9. 87711, proximè minor graduum 36 = 9. 86126. Differentia secundi a primo est 1585, secundi a proposito 1217. Fiat igitur ut 1585 ad 1210, ita 60 ad quartum, & prodit 46′ omissis fractionibus. Arcus igitur quæsitus est 36°. 46′.

PARS

PARS SECUNDA.

De resolutione triangulorum planorum.

§. I.

De Triangulis rectangulis.

85. PRO resolutione triangulorum rectangulorum adhibebimus sequentes tres canones, quos ubi demonstraverimus, proponemus unicum problema, quo omnes casus triangulorum rectangulorum complectemur, ac singulis casibus apponemus exempla, pro quibus eruemus e tabulis hic adjectis functiones ex arcubus, & arcus e functionibus, licet functiones ita erutæ nonnihil discrepabunt a veris, ita tamen, ut nec in angulis error minuti primi, nec in basibus error integræ partis occurrat.

86. I. *In triangulo rectangulo angulorum obliquorum alter est complementum alterius; ac proinde dato altero, datur etiam alter.*

87. Patet ex prop. 1. Geom.

88. II. *Basis ad latus est ut radius ad sinum anguli oppositi ipsi lateri, vel ut secans anguli ipsi adjacentis, ad radium, vel ut secans anguli ipsi oppositi ad ejus tangentem.*

89. Patet ex num. 25, si habeatur pro radio prius basis, tum ipsum latus, ac demum latus alterum.

90. III. *Alterum latus est ad alterum, ut radius ad tangentem anguli adjacentis primo, vel ut tangens anguli ipsi oppositi ad radium, vel ut sinus anguli ipsi oppositi, ad sinum adjacentis.*

91. Patet ex eodem numero, habendo pro radio prius primum latus, tum latus secundum, ac demum basim.

PROBLEMA.

92. Datis in triangulo rectangulo plano præter angulum

gulum rectum binis aliis ad ipsum triangulum pertinentibus, reliqua invenire.

93. *Casus* 1. Si dentur bini anguli, perinde erit, ac si daretur unicus; cum alter innotescat per canon: I. in eo casu solum habebitur ratio, quæ intercedit inter latera, & basim, ope canon. II, & III. ex: gr: sumpto radio, & binis angulorum sinibus, ii per can. II. expriment rationem, quæ intercedit inter basim, & latera ipsis angulis opposita.

94. Sint in fig. 7. A = 57° erit C = 90° − 57° = 33°; eruntque AC; BC, AB, ut 100000. 00. 83867. 06, 54463. 49.

95. *Casus* 2. Detur basis, & alter angulus. Invenietur angulus alter per canon. I., latus oppositum utrilibet angulo per can. II, adhibita quavis ex tribus proportionibus ejusdem canonis.

96. Sit AC = 875, A = 57° erit C = 33°. Fiet autem ut radius 100000 ad sin. A = sin. 57° = 83867, ita AC = 875 ad BC = 733.8 &c., sive 734.

97. Quod si habeantur Logarithmi, facilius invenietur summando Logarithmum sinus 57° = 9.92359, ac Log. AC = Log. 875. = 2.94201, & demendo Logarithmum radii = 10.00000. Erit nimirum Log. BC = 9.92359 + 2.94201 − 10.00000 = 2 86560, cui Logarithmo numerus proximus in tabulis est 734.

98. *Casus* 3. Detur basis, & alterum latus. Invenietur alter angulus per can. II. adhibita altera, e prioribus bins proportionibus. Hinc alter angulus innotescet per can. I, ac deinde latus alterum, adhibita quavis e tribus proportionibus, sive canonis II., sive III.

99. Sit AC = 627, AB = 356. Erit per can. II, Log. sin. C = Log. AB + Log. radii − Log. AC = Log. 356 + Log. radii − Log. 627 = 2.55145 + 10. 00000 − 2. 79727 = 9.75418. Adeoque C = 34°. 36′, qui nimirum angulus invenitur per num. 83. Hinc angulus A = 90° − 34°. 36′ = 55°. 24′ per can. I, & Log. BC = Log. sin. A + Log. AC − Log. rad. = 9. 91544 + 2. 79727 − 10. 00000 = 2. 71271, adeoque BC = 516.

100.

100. *Casus* 4. Dentur bina latera. Invenietur alter angulus ope utriuslibet e binis prioribus proportionibus canonis III. tum alter angulus per can. I, ac demum basis per quamvis e tribus proportionibus canonis II.

101. Sit $AB = 476$, $BC = 595$, erit per can. III Log. tang. $A =$ Log. $BC +$ Log. rad. $-$ Log. $AB =$ Log. $595 +$ Log. rad. $-$ Log. $476 = 2.77452 + 10.00000 - 2.67761 = 10.09691$. Adeoque $A = 51^\circ . 20'$. Quare, per can. I, $B = 38^\circ . 40'$, &, per can. II, Log. $AC =$ Log. $BC +$ Log. rad. $-$ Log. sin. $A =$ Log. $595 +$ Log. rad. $-$ Log. sin. $51^\circ . 20' = 2.77452 + 10.00000 - 9.89251 = 2.88201$, adeoque $AC = 762$.

Scholion.

102. Sic omnes rectangulorum solvuntur casus. In casu quarto, potest etiam sine Trigonometria obtineri basis AC, extrahendo radicem e summa quadratorum laterum, & in casu tertio latus BC extrahendo radicem ex differentia quadrati basis AC, & quadrati lateris AB. Nimirum ibi est $AC = \sqrt{(226576 + 354025)} = \sqrt{580601} = 762$, hic $BC = \sqrt{(393129 - 126736)} = \sqrt{266393} = 516$. Immo quia facile deducitur ex demonstratione corol. 2. pr. 13. Geom. differentiam quadratorum binarum quantitatum quarumcumque æquari producto ex earum summa & differentia, facilius eruetur latus, ducendo in se invicem summam basis, & lateris dati, ac differentiam, & extrahendo radicem, quo pacto & Logarithmi adhiberi possunt. Sic in ipso casu tertio cum sit $AC + AB = 983$, $AC - AB = 271$; erit $BC = \sqrt{271 \times 983} = \sqrt{266393} = 516$, & Log. $BC = \frac{1}{2}($Log. $271 +$ Log. $983) = \frac{1}{2}(2.43297 + 2.99255) = \frac{1}{2} \times 5.42552 = 2.71276$, adeoque $BC = 516$, ut prius.

103. Superest monendum tantummodo in casu 3, si basis non fuerit major latere, casum fore impossibilem, ut patet ex eo, quod basis debeat habere quadratum æ-

quale

æquale summæ quadratorum laterum. Sed id ipsum calculus quoque indicaret. Nam si assumeretur basis AC æqualis lateri AB, sinus anguli C obveniret æqualis radio, & proinde angulus ipse rectus, ac angulus A nullus. Si autem assumeretur basis minor latere, sinus ille prodiret radio major; quod est absurdum.

§. II.

De triangulis obliquangulis.

104. TRes alii canones exhibebunt solutionem triangulorum obliquangulorum. At primum in quovis triangulo obliquangulo ACB (fig. 8, & 9) habito quovis latere, ut AB, pro basi, concipiatur demissum ab angulo ipsi opposito C perpendiculum CI in ipsum latus, quod cadet intra basim, si uterque angulus ad basim acutus fuerit, ut in fig. 8; & extra ipsam, si alter fuerit obtusus, ut in fig. 9.

105. Binas rectas AI, BI dicimus segmenta basis etiam in casu figuræ 9, in quo I cadit extra basim ad partes B, quo casu segmentum BI consideramus, ut negativum. Quamobrem si sumatur ID æqualis, & opposita BI, in utroque casu dicimus AB summam, AD differentiam ipsorum segmentorum, quæ differentia in casu figuræ 9 erit major quam summa. Segmentum AI dicimus adiacens lateri AC, & angulo A, ac oppositum lateri BC, & angulo C; contra vero segmentum BI adiacens his, oppositum illis.

106. Patet vero hoc Theorema. *Segmentum majus lateri majori adjacet.* Quadratum enim segmenti cum quadrato perpendiculi CI utrobique communi æquatur quadrato lateris adiacentis, ob angulos ad I rectos. En autem ipsos canones.

107. IV. *In quovis triangulo latera sunt, ut sinus angulorum oppositorum.*

108. Nam in triangulo rectangulo AIC, per can. II., est AC ad IC, ut radius ad sinum anguli CAI, vel

CAB,

CAB, ac in triangulo BIC est IC ad BC, ut sinus anguli CBI, qui etiam in fig. 9. est idem ac sinus CBA (per num. 9.) ad radium. Quare ex æqualitate perturbata est (per num. 21, cap. 2. Arith.) latus AC ad latus BC, ut sinus anguli CBA oppositi primo ad sinum CAB oppositi secundo.

109. V. *In quovis triangulo summa binorum laterum ad differentiam est, ut tangens semisummæ angulorum ad basim, quæ æquatur complemento dimidii anguli lateribus intercepti, ad tangentem semidifferentiæ.*

110. Cum enim sint ea latera, ut sinus angulorum oppositorum; erit eorum summa ad differentiam, ut summa eorum sinuum ad differentiam, nimirum (per num. 31) ut tangens semisummæ eorum angulorum, ad tangentem semidifferentiæ. Cum vero omnes simul anguli conficiant 180°, binorum dimidium, cum dimidio tertii continent 90°; ac proinde binorum semisumma, est complementum dimidii tertii.

111. VI. *In quovis triangulo summa segmentorum basis, sive basis ipsa est ad summam laterum, ut horum differentia ad differentiam illorum.*

112. Nam ob DI = BI, & CI communem triangulis rectangulis CID, CIB, erit (per pr. 2. Geom.) etiam CD = CB. Quare circulus centro C, & radio CB descriptus transibit per D. Secabit autem AC productam, quantum opus fuerit, in E versus A, & in F ad partes oppositas, eritque AF summa, AE differentia laterum AC, CB, ac erit AB, AE :: AF. AD (per pr. 13. & 10. Geom.)

PROBLEMA.

113. Tribus datis in triangulo obliquangulo, reliqua invenire.

114. *Casus* 1. Si dentur tres anguli; perinde erit, ac si dentur bini tantum; tertius enim invenitur, si eorum summa auferatur a 180. Porro in eo casu solum invenitur ratio laterum, quæ per can. IV est eadem, ac ratio sinuum angulorum oppositorum.

115. *Casus* 2. Dentur bini anguli, & unum latus.

Ter-

Tertius angulus invenitur per num. 114. Tum utrumvis e reliqus lateribus invenitur per can. IV, si fiat, ut sinus anguli oppositi lateri dato ad sinum anguli oppositi lateri quæsito, ita latus datum ad quæsitum.

116. *Casus* 3. Dentur bina latera cum angulo alteri eorum opposito. Invenietur per can. IV, sinus anguli oppositi alteri lateri dato, factis ut primum illud latus ad hoc secundum, ita sinus anguli dati ad sinum anguli quæsiti. Invento sinu, eruentur e tabulis (per num. 83) bini anguli ipsi respondentes, alter acutus alter obtusus, complementum acuti ad 180°.

117. Hinc binas hic casus solutiones habere poterit, & ambiguus sæpe erit, quod in ipsa Fig. 8 est manifestum, in qua triangula ACB, ACD, habent eandem magnitudinem laterum AC, CB & AC, CD, ac eundem angulum *A* oppositum lateri CB. Angulus autem acutus CBD, cum æquetur (per Cor. 2. prop. 2. Geom.) angulo CDB, est complementum ad duos rectos anguli CDA.

118. Quare aliunde definienda erit species alterius anguli oppositi alteri e lateribus datis, nimirum an is debeat esse acutus, an obtusus, & si forte latus oppositum angulo dato fuerit majus altero latere, constabit assumendum esse angulum acutum. Si enim is obtusus esset, multo magis deberet esse obtusus alter angulus lateri majori oppositus, & in triangulo bini anguli binos rectos excederent.

Invento autem secundo angulo, invenietur tertius, & ejus ope tertium latus (per num. 115).

119. *Casus* 4. Dentur bina latera cum angulo intercepto. Invenietur utervis reliquorum angulorum factis, per can. V, ut summa datorum laterum ad differentiam, ita cotangens dimidii anguli dati ad tangentem anguli, qui, ubi inventus fuerit, additus complemento dimidii anguli dati exhibebit angulum oppositum lateri majori, ablatus exhibebit oppositum minori. Inventis autem angulis invenietur latus tertium, ut in casu II.

120. *Casus* 5. Dentur tria latera. Invenietur quivis angu-

angulus, habendo pro basi alterum e lateribus, quibus concluditur. Factis enim prius per can. VI, ut ea basis ad summam reliquorum laterum, ita eorumdem differentia, ad differentiam segmentorum basis, ac hujus dimidio addito semisummæ segmentorum basis, sive dimidiæ basi (per n. 105), vel ab ea ablato, habebitur (per num. 28) segmentum basis majus, vel minus; ac assumendum erit illud, vel hoc (per num. 106), prout latus adjacens angulo quæsito erit majus, vel minus opposito. Tum vero, per can. I, fiat ut latus adjacens ad hoc segmentum, ita radius ad cosinum anguli quæsiti.

121. Porro invento cosinu invenientur bini anguli ipsi respondentes alter acutus, alter obtusus. Assumendus autem erit acutus semper præter casum, in quo segmentum ex subtractione proveniens fuerit adhibitum, & existente semidifferentia majore, quam semisumma, evaserit negativum.

122. Invento angulo opposito uni e lateribus, ope can. IV admodum facile invenitur angulus oppositus cuilibet e binis reliquis.

Scholion.

123. Exempla sibi quisque facile assumet. Unicum afferemus casus quarti. Sint tria latera 745, 647, 421, & quæratur angulus oppositus primo. Fiat basis secundum ex iis 647, & reliquorum summa erit 1166, differentia 324. Factis igitur ut 647 ad 1166, ita 324 ad quartum, prodit 584, cujus dimidium 292 additum, ac ablatum dimidiæ basi 323, exhibet bina segmenta 615, ac 31. Quoniam vero latus adjacens angulo quæsito 421 est minus opposito 745, adhibendum est segmentum minus, nempe 31; ac faciendum, ut latus adjacens 421 ad 31, ita radius ad cosinum anguli quæsiti, cujus cosinus logarithmus erit idcirco $=$ Log. 31 $+$ Log. rad. $-$ Log. 421 $=$ 1.49136 $+$ 10.00000 $-$ 2.62428 $=$ 8.86708, adeoque angulus respondens tam 85°. 47′, erutus e tabulis, quam ejus complementum ad duos rectos: sed assumendus est ipse 85°. 47′; cum differentia seg-

mentorum 584 obvenerit minor, quam summa, sive quam basis 647.

124. Notandum autem, aliquando problema posse evadere impossibile: nimirum in casu 1, & 2, si bini anguli dati simul non sint minores duobus rectis: in casu 4 si latus oppositum angulo dato sit nimis exiguum, nimirum minus perpendiculo CI: in casu 5, si bina latera data simul tertio majora non sint. At in omnibus iis casibus impossibilitatem manifestabit ipse calculus; vel enim sinus aliquis obveniet radio non minor, vel aliqua secans eodem non major, vel aliquod segmentum non minus latere adjacente. In solo casu 4 problema est semper possibile.

PARS TERTIA.

De resolutione triangulorum sphæricorum.

§. I.

De angulorum, & triangulorum sphæricorum natura, & proprietatibus quibusdam.

Definitio I.

125. Circuli, quorum plana transeunt per centrum sphæræ, dicuntur circuli sphæræ maximi.

126. Maximos revera esse patet ex num. 142 Solid.

Coroll. I.

127. Circuli maximi se omnes mutuo bifariam secant, & communis intersectio planorum eorumdem est diameter sphæræ.

128. Cum enim omnium plana per centrum transeant; sibi occurrunt in ipso centro; ac proinde parallela non sunt; adeoque se invicem secant in aliqua recta, quæ cum transeat, per centrum sphæræ quod ipsis commune est (per num. 142. Solid.); ipsa eorum planorum intersectio, & erit diameter eorum circu-

lorum,

lorum, quos proinde secabit bifariam, & erit diameter sphæræ.

Coroll. 2.

129. Per quævis bina puncta assumpta in superficie sphære potest duci circulus maximus, & per quodvis punctum potest duci circulus maximus cujus planum sit perpendiculare plano dati circuli maximi.

130. Patet primum, quia per data duo puncta, & centrum potest duci planum (per n. 7. Solid.) cujus sectio cum superficie sphæræ erit circulus (per num. 142. Solid.); & maximus (per num. 124); ac transibit per data puncta.

131. Patet secundum, quia ex illo dato puncto potest demitti perpendiculum in planum dati circuli maximi; (per n. 45. Solid.) & per ipsum, ac centrum potest duci planum (per n. 73. Solid.); cujus sectio erit circulus maximus; ac ejus planum erit perpendiculare plano dati circuli maximi (per n. 64. Solid.).

Definitio 2.

132. Diameter sphæræ perpendicularis plano circuli orti ex sectione sphæræ in ipsius sphæræ superficie, dicitur ejus axis, & extrema axis puncta dicuntur poli.

133. In fig. 10. P*p* est axis circulorum EFH, ABD, quorum plana pertundit in G, & C ad angulos rectos: P, *p* sunt eorumdem poli.

Coroll. 1.

134. Axis transit per centrum circuli, cujus est axis.

135. Si circulus sit maximus, patet; cum axis transeat per centrum sphæræ (per n. 132); cum quo quivis circulus maximus commune centrum habet (per n. 142. Solid.).

136. Si autem circulus non sit maximus, ductis ad bina quævis ejus puncta F, H rectis ex C, & ex occursu axis G cum ejus plano, erunt recti anguli CGF, CGH (per n. 13. Solid.), cum nimirum axis sit perpendicularis plano FGH (per n. 132). Quare quadrata GF, GH, erunt (per prop. 7. Geom.) excessus qua-

dratorum æqualium CF, CH supra quadratum CG, adeoque æqualia; & proinde quævis GF æqualis eidem GH, & G centrum circuli.

Coroll. 2.

137. Omnia puncta peripheriæ cujuscunque circuli in superficie sphæræ distant per æquales arcus circulorum maximorum ab eodem suo polo.

138. Si enim assumantur bina ejusmodi puncta quæcunque H, & F, & per ea, ac polum P ducantur circuli maximi (per num. 129) PHp, PFp, & radii HC, FC, HG, FG, patet ex demonstratione præcedentis corollarii fore æqualia triangula GCH, GCF, adeoque & eorum angulos ad C, & proinde etiam arcus PH, PF æquales fore.

Coroll. 3.

139. Circulus maximus ab utrolibet suo polo distat quaquaversus per quadrantem circuli maximi, & circulus, cujus aliquod punctum distat a polo suo per quadrantem circuli maximi, est maximus.

140. Si enim circulus fuerit maximus, ut ABD, transibit per centrum C, & radii CB, CD, qui erunt ejus intersectiones cum planis PFp, PHp, erunt perpendiculares axi PCp, qui toti plano BCD perpendicularis est; ac proinde tam arcus PB, PD, quam pB, pD erunt quadrantes.

141. Si autem circulus non fuerit maximus ut EFH; non transibit ejus planum per centrum; ac proinde secta (per n. 50. Solid.) sphæra per centrum plano ABD parallelo ipsi EFH, erunt PB, PD, pB, pD quadrantes: adeoque PF, PH minores iis, & pF, pH majores erunt. Nullum igitur punctum circuli non maximi distat per quadrantem a suo polo; adeoque is, cujus aliquod punctum ita distat, maximus est.

Definitio 3.

142. Angulus sphęricus dicitur is, quem in superficie sphęrę continent bini arcus circulorum maximorum, ubi concurrunt, pro cujus mensura ipsi ęquali consideratur angulus rectilineus, quem continent rectę jacentes

tes cum iisdem arcubus in iisdem planis, & ad easdem partes, ac eos tangentes in ipso concursu.

143. EPH est angulus sphęricus, cui substituitur pro ejus mensura angulus rectilineus fPh, quem continent tangentes fP, hP in P.

Coroll. 1.

144. Si arcus supra arcum cadit, duos angulos facit aut rectos, aut simul duobus rectis æquales.

145. Nam tangens fP cum tangente eh duos angulos facit, aut rectos, aut duobus rectis ęquales (per cor. 2. def. 10. Geom.).

Coroll. 2.

146. Si bina anguli latera ultra verticem producantur; angulos ad verticem oppositos ęquales continebunt.

147. Si enim tangentes fP, hP producantur ultra verticem P, continebunt angulos ad verticem P ęquales (per cor. 4. def. 10. Geom.).

Coroll. 3.

148. Si plana laterum fuerint sibi invicem perpendicularia; angulus erit rectus: & si angulus fuerit rectus; plana laterum erunt sibi invicem perpendicularia.

149. Si enim planum FPp fuerit perpendiculare plano HPp; tangens fP, quę est perpendicularis diametro Pp (per cor. 5. & 6. prop. 8. Geom.) communi intersectioni eorum planorum, erit (per n. 66. Solid.) perpendicularis toti plano HPp, adeoque & tangenti Ph.

150. Si autem tangens fP fuerit perpendicularis tangenti Ph, cum etiam sit perpendicularis diametro Pp (per cor. 5. pr. 8. Geom.), erit (per num. 18. Solid.) perpendicularis toti plano HPp, ac proinde & planum FPh erit (per n. 64. Solid.) perpendiculare eidem.

Coroll. 4.

151. Si è quovis puncto diametri transeuntis per verticem anguli exeant in planis arcuum, quibus continetur, binę rectę ipsi perpendiculares; angulum continebunt rectilineum sphęrico ęqualem.

152. Si enim ejusmodi rectę fuerint GF, GH, erunt eę (per Cor. 1. def. 17. Geom.) parallelę rectis Pf, Ph

perpendicularibus eidem diametro Pp; ac proinde ang
lus FGH erit (per n. 41. Solid.) equalis angulo fPb

Coroll. 5.

153. Angulus sphericus est equalis angulo, quem co
tinent plana arcuum continentium ipsum angulum sph
ricum.

154. Nam eorum planorum angulum, sive inclin
tionem plani ad planum exhibet idem angulus recti
neus FGH (per n. 57. Solid.).

Coroll. 6.

155. Mensura equalis angulo spherico erit arcus ci
culi cujuscumque habentis polum in ejus vertice inte
ceptus inter ejus crura.

156. Secta enim sphera plano quovis ABD, vel EF
perpendiculari ad diametrum Pp, communem intersi
ctionem planorum arcuum PF, PH, sectio erit circuli
habens polum in P (per n. 132) cujus arcus BD, vi
FH interceptus cruribus PF, PH erit mensura equalis an
gulo BCD, vel FGH, qui cum contineatur radiis BC
DC, vel FG, HG perpendicularibus axi Pp, equan
angulo spherico FPH (per n. 151).

Coroll. 7.

157. Si anguli spherici crura producantur; iteru
concurrent ita, ut singula semicirculum compleant,
angulum sphericum contineant priori equalem.

158. Cum enim PCp sit diameter utriusque arcus PF
PH; debet uterque productus transire per p; eruntqu
PFp, PHp semicirculi, & angulorum FpH, FPH men
sura erit idem arcus BD, vel FH (per n. 155).

Coroll. 8.

159. Circulus maximus circulo maximo perpendicu
laris transit per ejus polos, & si circulus maximus tran
sit per polum circuli maximi, est ipsi perpendicularis.

160. Sit enim circulus maximus PBp perpendicular
circulo maximo ABD: erit planum PBp perpendicular
plano ABD (per num. 149). Quare in eo jacebit axi
circuli ABD (per n. 66. Solid.), cum sit perpendicula
ris plano ABD (per n. 133) & transeat per BC inter

se-

sectionem planorum ABD, PB*p*. Ac proinde poli, qui sunt extrema axis puncta (per n. 133) jacebunt in ipsa peripheria circuli PB*p*.

Defin. 4.

161. Triangulum sphęricum dicitur, quod continetur in superficie sphęrę tribus arcubus circulorum maximorum, qui dicuntur ejus latera.

Coroll. 1.

162. Si in triangulo sphęrico bini anguli fuerint recti; latera iis opposita erunt quadrantes: & si bina latera fuerint quadrantes, anguli iis oppositi erunt recti; ac in utroque casu tertium latus erit mensura ęqualis tertio angulo sibi opposito.

163. Si enim sint anguli PBD, PDB recti, polus circuli ABD, qui debet jacere in utroque circulo BP, DP (per n. 159), cadet in ipsam eorum intersectionem, sive in anguli verticem P; ac proinde PB, PD quadrantes erunt (per n. 139).

164. Si autem arcus PB, PD fuerint quadrantes; anguli BCP, DCP erunt recti; ac proinde recta CP perpendicularis plano BCD (per n. 18. Solid.): & idcirco plana arcuum PB, PD perpendicularia erunt plano arcus BD, & anguli PBD, PDB recti (per n. 148).

165. In utroque casu, cum P sit polus circuli BD, arcus BD est mensura ęqualis angulo BPD (per num. 155).

Coroll. 2.

166. Si omnes anguli fuerint recti; omnia latera erunt quadrantes, & si omnia latera fuerint quadrantes, omnes anguli erunt recti.

167. Si enim etiam tertius angulus fuerit rectus, etiam tertium latus erit quadrans, & viceversa (per n. 165).

Scholion 1.

168. Hinc patet resolutio trianguli habentis omnes angulos, vel saltem binos rectos, in quibus nullum opus est tabulis functionum. Superest igitur ut agamus de triangulis, in quibus unus angulus est rectus, quę di-

cuntur rectangula, ac de iis, in quibus rectus est nullus, quae obliquangula appellantur. Ac in illis quidem appellatur basis latus illud, quod recto angulo opponitur; in his latus quodcunque pro basi assumi potest.

Scholion 2.

169. Consideratio trianguli sphaerici eodem recidit cum consideratione anguli solidi constituti a tribus angulis planis ut innuimus n. 91. Solid. Consideretur enim in fig. 11. angulus solidus, quem continent tres anguli plani BCD, BCA, ACD, & concipiatur radio CB sphaera occurrens eorum angulorum planis in BD, AD, AB. Hi tres arcus continebunt triangulum sphaericum BAD, cujus latera mensurabunt angulos illos planos ad C, anguli vero ad B, D, A, erunt aequales inclinationibus, seu angulis, quae plana eorundem angulorum continent cum planis contiguis (per n. 153). Quare, quae demonstrantur de eo angulo solido pertinent ad triangulum sphaericum, & viceversa.

170. Porro hinc, & ex iis, quae in Solidis a num. 82. de angulo solido vel demonstravimus, vel innuimus inferuntur juxta n. 91 ipsorum solidorum sequentes triangulorum sphaericorum proprietates.

171. In quovis triangulo sphaerico, tria latera simul circulo minora sunt; potest autem eorum summa in infinitum minui: at bina quaevis tertio majora sunt.

172. Nam anguli plani, ex quibus angulus solidus constat, & simul minores sunt quatuor rectis, (per n. 85. Solid.), & possunt esse magnitudinis cujuscunque dummodo quivis ex iis sit minor reliquis simul sumptis.

173. Ex tribus lateribus quibuscunque potest semper constare triangulum sphaericum, idque unicum; dummodo & omnia simul circulo minora sint, & quodvis ex iis minus reliquis simul sumptis.

174. Id enim ostendimus num. 90. Solid. de angulis planis constituentibus solidum.

175. Trianguli sphaerici tres anguli simul & minores sunt sex rectis, & majores binis.

176.

176. Id constat ex n. 91 Solid. Id ipsum autem, ut etiam a tribus angulis eas conditiones implentibus unicum triangulum constitui posse, ac superiora omnia hic accurate demonstrari possent; sed ea omnia, utpote ad resolutionem non necessaria, innuisse sufficiet.

§. II.

De resolutione triangulorum rectangulorum.

177. Resolutionem triangulorum rectangulorum planorum docuimus ope trium canonum. Pro sphaericis duplo plures requiruntur, quos omnes exhibebit consideratio solius figur. 11.

178. In ea sit jam triangulum BAD rectangulum ad A. Circulus lateris AD sit ADEFL cujus planum concipiatur congruens cum plano ipsius chartæ. Latus AB insistens peripheriæ ADEF verticaliter, & basis DB oblique, si producantur, occurrent ipsi alicubi in E, & F ita, ut AE, DF sint diametri, & ABE, DBF semicirculi (per n. 137).

179. Concipiatur BC, tum BI perpendicularis plano ADE, quæ cadet in ipsam diametrum AE (per n. 66. Solid.) alicubi in I ad angulos rectos, tum IG perpendicularis diametro DF, ac BG, quæ pariter erit perpendicularis ipsi DF. Nam planum BIG transiens per IB perpendicularem plano ADE erit eidem perpendiculare (per n. 64. Solid.). Quare recta GC perpendicularis eorum intersectioni IG jacens in posteriore erit (per n. 66. Solid.) perpendicularis priori, nimirum ipsi BIG, adeoque & rectæ BG.

180. Demum sectis semicirculis DAF, DBF bifariam in L, & H, transeat per ipsa puncta L, H arcus circuli maximi (per nu. 129.) occurrens semicirculo ABE alicubi in P; eruntque anguli DLH, DHL recti (per n. 162); ac proinde D polus circuli LHP (per num. 159), & LH mensura æqualis angulo ADB (per nu. 162). Ob angulos vero ALP, LAP rectos, erit P polus circuli AL, & PA, PL quadrantes (per n. 139.),

ac

ac AL mensura æqualis angulo HPB (per num. 162)

181. Jam vero omnis triangulorum sphæricorum resolutio profluit a consideratione pyramidis BIGC, & comparatione triangulorum rectangulorum BAD, BHP Illa exhibebit tres canones, hæc alios tres, quibus continebuntur omnes casus triangulorum rectangulorum.

182. Primum igitur defigenda mentis acies in pyramidem ipsam. Illa in situ erecto considerata haberet basim IGC in plano chartæ, & verticem in B, at nos jacentem considerabimus ita, ut C sit vertex, basis autem vertici opposita BIG, a qua ad verticem C tendunt tria latera BC, IC, GC, quibus concluduntur tres facies BCI, BCG, ICG.

183. Porro tam illa basis, quam hæ facies sunt triangula plana rectangula. Nam anguli BIG, BIC sunt recti ob BI perpendicularem plano CIG, & anguli CGB, CGI ob CG perpendicularem plano BGI. Angulorum autem rectilineorum, quos illæ tres facies continent in C, nimirum angulorum BCI, BCG, ICG mensuræ ipsis æquales sunt arcus BA, AD, BD; angulus vero rectilineus BGI pertinens ad basim illam pyramidis est (per n. 152) æqualis sphærico BDA.

184. Comparando autem inter se bina triangula sphærica BAD, BHP rectangula ad A, & H, cuivis vel lateri, vel angulo alterius, respondet aliquid in altero vel ipsi equale, vel ejus complementum. Angulo BAD recto primi equalis est angulus BHP rectus secundi: angulo ABD primi equalis est (per n. 146) angulus HBP secundi ad verticem oppositus. Angulus ADB primi; quem exhibet LH (per n. 180) habet pro complemento latus HP secundi: latus AB primi habet pro complemento basim BP secundi: latus DA primi habet pro complemento arcum AL, adeoque angulum BPH, quem is exhibet (per n. 180): basis demum BD primi habet pro complemento latus BH secundi.

185. Jam vero priores tres canones eruemus considerando, juxta num. 25, qui hic consulendus, & habendus semper pre oculis, tamquam radium prius CB, tum

CG,

CG; ac demum CI. Ex prima consideratione orietur in triangulis CIB, CGB, quibus CB communis est, ratio rectarum BG, BI, & alteram earum rationem exhibebit basis BIG, quæ rationes inter se combinatæ præbebunt primum canonem: secundum secunda præbebit ope rectarum BG, IG; tertium tertia ope rectarum GI, BI; sed jam aggrediamur rem ipsam.

186. Habita BC pro radio in triangulis rectangulis CGB, CIB, erunt BG, BI sinus angulorum BCG, BCI; sive sinus basis BD, & lateris BA oppositi angulo sphærico D. At in triangulo BIG rectangulo ad I, eædem BG, BI referunt radium, & sinum anguli rectilinei BGI, seu spherici D. Quare

187. I. *Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi.*

188. Habita CG pro radio in triangulis rectangulis CGB, CGI, erunt GB, GI tangentes angulorum GCB, GCI, sive basis BD, & lateris DA adjacentis angulo D. At in triangulo BIG, eædem GB, GI referunt radium, & cosinum anguli rectilinei BGI, vel sphærici D. Quare

189. II. *Radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis.*

190. Habita CI pro radio in triangulis rectangulis CIB, CGI, erunt IG, IB illa sinus anguli ICG, seu lateris AD adjacentis angulo D, hæc tangens anguli ICB, seu lateri AB eidem oppositi. At in triangulo BIG eædem IG, IB referunt radium, & tangentem anguli rectilinei BGI, seu sphærici D. Quare

191. III. *Radius ad tangentem anguli, ut sinus lateris adjacentis ad tangentem oppositi.*

192. Hæc ex pyramide: jam applicando hosce canones ad triangulum BHP, & ipsum comparando cum triangulo BAD orientur tres alii.

193. Ex can. I radius ad sinum anguli BPH, sive acus AL, nempe ad cosinum lateris AD, ut sinus BP, nempe cosinus lateris AB ad sinum BH, nempe cosinum basis BD. Quare

194. IV. *Radius ad cosinum unius lateris, ut cosinus alterius ad cosinum basis.*

195. Ex eodem can. I radius ad sinum anguli PBH, sive ABD, ut sinus BP, nempe cosinus lateris AB adjacentis ipsi angulo ABD, ad sinum PH, nempe cosinum HL, sive cosinum anguli sphærici D, quem is exhibet, & qui opponitur lateri AB. Quare

196. V. *Radius ad sinum anguli adjacentis, ut cosinus lateris ad cosinum anguli oppositi.*

197. Ex can. III Radius ad tangentem anguli B, ut sinus BH, seu cosinus basis BD ad tangentem HP, nempe cotangentem HL, sive anguli D. Quare

198. VI. *Radius ad tangentem unius anguli, ut cosinus basis ad cotangentem alterius.*

199. In hisce 6 canonibus continentur combinationes omnes, quæ haberi possunt, sumendo tria ex iis quinque, quæ præter angulum rectum continet quodvis triangulum rectangulum, nimirum binis angulis, binis lateribus, ac basi, ut paulò inferius patebit. Possent applicando canonem III etiam ad angulum P, & canonem II tam ad P, quam ad B, erui alii tres canones, qui tamen easdem combinationes iterum redderent, ac ad canones præcedentes facile reducerentur, ac idcirco eos omisimus.

200. Porro in triangulorum resolutione ope horum canonum invenietur semper aliqua functio basis, vel lateris, vel anguli quæsiti, ut jam videbimus. At quoniam (per num. 9) functiones eædem communes sunt binis arcubus semicirculum complentibus, quorum alter est quadrante minor, alter major, necessariæ sunt quædam Regulæ, quæ ostendant, utram speciem habere debeant anguli, & arcus quæsiti, nimirum acuti debeant esse, an obtusi, sive minores, an majores quadrante. Binas autem ejusmodi regulas, quæ semper speciem indicabunt, quotiescunque in se determinata erit, ex fig. 12. admodum facile eruemus.

201. Manentibus in ea punctis ABPDE, ut in fig. 11. per polum P, & punctum D ducatur arcus circuli maximi

ximi (per num. 129), qui erit perpendicularis ad ADE (per num. 159), & semicirculo ADE secto bifariam in I, quod punctum erit polus circuli ABE, cum poli ejus circuli debeant esse in circulo ADE (per num. 159), ac debeant per quadrantem distare ab eodem ABE (per num. 139), ducatur arcus BI, qui erit quadrans (per n. B39). Ducatur demum arcus Bd per quodvis punctum semicirculi ADE jacens respectu I ad partes oppositas D, & polo B sit arcus circuli FIf occurrens arcubus BD, Bd in F, f, qui ob BI quadrantem erit circulus maximus (per num. 139), & (per eundem) abscindet BF, Bf quadrantes, ac constituet angulos BIF, BIf rectos (per num. 159).

202. Jam vero si latus AB sit minus quadrante AP; erit angulus ADB minor semper recto ADP, cujus erit pars: si autem illud sit majus, erit major & hic, utcunque se habuerit alterum latus AD. Quare

203. Reg. 1. *Latera sunt ejusdem speciei cum angulis oppositis.*

204. Si latus AB sit minus quadrante AB, erit angulus BIA, sive (existente etiam AD minore quadrante AI) BID minor recto per Reg. 1, adeoque minor angulo BIF, angulus vero BId major, recto BIf, & propterea basis BD minor quadrante BF, & basis Bd major quadrante Bf. In triangulis igitur BAD, BED, ubi latera sunt ejusdem speciei, basis est quadrante minor: in triangulis BAd, BEd, ubi ea sunt diversæ speciei, basis est quadrante major. Quoniam vero per reg. 1. anguli sunt ejusdem speciei cum lateribus oppositis, possunt pro illis substitui, ubi agitur de eorum specie. Quare

205. Reg. 2. *Si duo latera, vel duo anguli, vel latus cum angulo adjacente fuerint ejusdem speciei; basis erit quadrante minor; si diversæ, major, & viceversa.*

PROBLEMA.

206. In triangulo rectangulo sphærico datis aliis binis præter angulum rectum reliqua invenire.

207. Ut quæstioni satisfiat, oportet arcus, vel anguli quæ-

quæsiti invenire functionem aliquam, tum nosse utrius speciei sit.

208. Primum semper obtinebitur ope canonum. Nam in triangulo rectangulo præter angulum rectum habentur hæc quinque, basis, bina latera, bini anguli: Ea quinque sex tantum combinationes habent, quarum singulis terna ex iis contineantur; videlicet: 1.ª continetur basis cum utroque latere: 2.ª basis cum utroque angulo: 3.ª basis cum latere, & angulo adjacente: 4.ª basis cum latere, & angulo opposito: 5.ª utrumque latus cum altero angulo: 6.ª uterque angulus cum altero latere. Quotiescunque autem dantur bina quævis, & quæritur quodvis tertium, semper ea data, & id quæsitum erunt simul in una ex iis combinationibus; ut si detur basis cum altero latere, & quæratur angulus illi lateri adjacens; ea tria sunt simul in combinatione 3. Porro singulæ ejusmodi combinationes singulis canonibus continentur; sic illa combinatio tertia continetur in canone secundo: *Radius ad sinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis*, ac in eo canone, in quo ea combinatio continetur, habebitur radius, & binæ functiones binorum, quæ dantur, ut in allato exemplo habebitur tangens basis, & sinus anguli, ac simul aderit aliqua ejus functio, quod quæritur, ut ibidem tangens lateris adjacentis. Quare dabuntur tres termini proportionis eo canone inclusæ; ac proinde eruetur & quartus terminus, sive functio quæsiti arcus, vel anguli, (per num. 10. cap. 2. Arithm.), dividendo nimirum, si quæsita functio fuerit in uno ex terminis extremis, productum mediorum per alterum extremum, vel si ea fuerit in uno e mediis, productum extremorum per alterum e mediis, & ubi logarithmi adhibeantur, substituendo multiplicationi, ac divisioni additionem, & subtractionem.

209. Secundum semper obtinebitur per regulas, præter casum, in quo dentur alterum latus cum angulo opposito, & quæratur quodvis ex reliquis tribus. Is enim casus semper ambiguus erit, & binas solutiones admittet, ac quidvis e reliquis tribus esse poterit vel majus,

vel

vel minus quadrante. Nam in triangulis BAD, BAF (Fig. 11) rectangulis ad A, quamcunque magnitudinem habeat, latus AB est commune utrique, & angulus ADB ipsi oppositus in primo æquatur angulo AFB eidem opposito in secundo: basis autem BF, alterum latus AF, & alter angulus ABF posterioris sunt complementa ad duos rectos basis BD, lateris AD, anguli ABD prioris; ac proinde si detur latus AB, & angulus ipsi oppositus, vi eorum tantummodo, ambiguum erit, uter e binis illis triangulis sumendus sit. Porro solum in iis casibus, in quibus detur latus cum angulo opposito illæ regulæ nos destituunt, nec determinant speciem anguli, vel arcus quæsiti, quam determinant in cæteris omnibus. Si enim ex. gr. datis binis lateribus, quæratur angulus alteri oppositus; ejus species innotescet per reg. I, cum debeat esse eadem, ac species data lateris oppositi dati. At si quæratur basis; ejus species invenietur per reg. I, cum debeat deficere a quadrante, vel illum excedere, prout bina latera data fuerint ejusdem speciei, vel diversæ.

Scholion I.

210. Ut pateat illud semper haberi per Canones, hoc semper per regulas; subjiciemus indicem combinatorum, & canonum, quibus ipsæ combinationes continentur, ac regularum, quarum ope in singulis combinationibus invenietur species: & quoniam secunda regula tres habet partes; earum singulas exprimemus.

1. *Basis cum utroque latere.*	*Can.* 4. *Reg.* 2. *pars* 1.
2. *Basis cum utroque angulo.*	*Can.* 6. *Reg.* 2. *pars* 2.
3. *Basis cum latere, & angulo adjacente.*	*Can.* 2. *Reg.* 2. *pars* 3.
4. *Basis cum latere, & angulo opposito.*	*Can.* 1. *Reg.* 1, *vel nulla in casu ambiguo.*
5. *Utrumque latus cum altero angulo.*	*Can.* 3. *Reg.* 1, *vel nulla in casu ambiguo.*

6. *Uter-*

6. *Uterque angulus cum altero latere.*	*Can.* 5. *Reg.* 1, *vel nulla in casu ambiguo.*

211. Ut methodus resolvendi casum quemlibet illustretur exemplo, detur basis $= 57°. 25'$. cum latere $= 41°. 16'$., & quæratur angulus adjacens ipsi lateri. Tria, quæ hic combinantur sunt basis cum latere, & angulo adjacente, quorum priora duo dantur, tertium quæritur. Huic combinationi, quæ est tertia, respondet Canon secundus, & regulæ secundæ pars tertia. In eo canone habetur *Radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis.* Quare Log. cosinus anguli $=$ Log. rad. $+$ Log. tang. $41°. 16'$ $-$ Log. tang. $57°. 25'. = 10.00000 + 9.94323 - 10.19445 = 8.74878$, cum respondet in tabulis $55°. 54'$. Quoniam autem eidem combinationi respondet Reg. 2. pars 3., inde species determinabitur. Ibi enim habetur: *si latus cum angulo adjacente fuerint ejusdem speciei, basis erit quadrante minor, & viceversa.* Nimirum cum hic basis $57°. 25'$ sit minor quadrante; latus cum angulo adjacente erunt ejusdem speciei. Est autem latus $41°. 16'$ quadrante minus. Erit igitur recto minor & angulus quæsitus; adeoque sumendus erit ille ipse $55°. 54'$, quem exhibent tabulæ, non ejus complementum ad duos rectos.

212. Singulæ combinationes continent terna Problemata, cum nimirum quodlibet ex iis tribus possit quæri, datis reliquis binis. Sic in combinatione, qua in exemplo allato usi sumus, posset potius quæri latus data basi & angulo adjacente, vel quæri basis, dato latere, & angulo adjacente. Eo pacto cum habeantur sex combinationes, Problemata essent 18. Sed bina Problemata primæ, & secundæ combinationis, coincidunt inter se; ac ejusmodi combinationes bina singulæ Problemata inter se diversa complectuntur. Nam in prima utrumlibet latus quæratur data basi, & altero latere, eodem res redit, ut in secunda idem dicendum de angulis; ac proinde omnis triangulorum rectangulorum resolu-

resolutio continetur 16 Problematis, quæ iis combinationibus includuntur. Postremæ tres combinationes habent singulos singulæ casus ambiguos, cum nimirum dato latere & angulo opposito possit quæri basis in 4¹, latus alterum in 5², alter angulus in 6¹, in quibus tantum, ut supra monuimus deferimur ab iis regulis ceteros omnes complectentibus.

Scholion 2.

213. Addemus hoc secundo scholio quædam, quæ facile eruuntur è canonibus, & ostendunt, qui casus possint involvere impossibilitatem, quæ tamen, ut minus necessaria, omittere etiam Tyro poterit, si libuerit.

214. Basis in triangulo rectangulo non potest distare a quadrante magis quam latus utrumlibet.

215. Infertur e primo canone, in quo Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi. Cum enim radius non possit esse minor sinu ullius anguli (per num. 39.); sinus basis non potest esse minor sinu lateris oppositi: æque autem facile infertur ex canone 2, vel 4.

216. At basis ipsa respectu anguli utriuslibet potest habere magnitudinem quamcumque.

217. Infertur ex can. 6, in quo radius ad tangentem unius anguli, ut cosinus basis ad cotangentem alterius. Cum anim radius possit habere (per num. 39) quancunque rationem ad tangentem unius anguli, potest, & cosinus basis habere pariter quancunque ad cotangentem alterius.

218. Patet autem etiam ex eo, quod capta utcumque basi DB, & facto utcunque angulo BDA, possit semper (per num. 129) duci ex B circulus perpendicularis circulo DAF, qui ubi semicirculum DAF secabit in A, constituet triangulum rectangulum.

219. Angulus non potest distare a quadrante minus, quam latus oppositum.

220. Infertur ex canone 1. ubi alternando est radius ad sinum basis, ut sinus lateris, ad sinum anguli oppositi.

positi. Patet enim simul lateris non posse esse minorem sinu anguli oppositi, ut radius non potest esse minor sinu basis. Idem æque facile deducitur ex can. 3. pariter alternando, vel ex can. 5.

221. Bini anguli simul debent esse majores uno recto.

222. Infertur ex can. 5. ubi alternando est radius ad cosinum lateris ut sinus anguli adjacentis ad cosinum oppositi. Cum enim radius debeat esse major cosinu lateris, etiam sinus unius anguli debebit esse major cosinu alterius. Quare si uterque sit acutus alter debebit esse major complemento alterius; adeoque ambo simul rectum excedent. Si vero neuter acutus est; patet utrumque simul debere rectum excedere. Idem inferri posset ex can. 6, pariter alternando: & idem infertur etiam ex num. 175. Cum nimirum omnes tres anguli simul debeant duobus rectis majores esse, & unus jam rectus sit; non possunt reliqui duo simul non esse majores recto.

223. Angulus respectu lateris adjacentis potest habere magnitudinem quancunque.

224. Infertur ex can. 2, in quo est radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis. Assumptis enim utcumque basi, & angulo; invenietur tangens lateris adjacentis; & nulla tangens est impossibilis utcumque magna, vel parva.

225. Patet autem etiam ex eo, quod capto utcumque latere AB, & facto quovis angulo ABD, semper arcus BD occurret arcui ADE alicubi in D, & triangulum constituet.

226. Angulum autem respectu basis posse habere magnitudinem quamcumque diximus num. 216.

227. Latus non potest distare a quadrante minus quam basis, nec magis quam angulus oppositus; respectu vero anguli adjacentis & alterius lateris potest habere magnitudinem quamcumque.

228. Patet primum ex num. 214, secundum ex num. 219, tertium ex num. 223, quartum infertur ex can. 3, in quo quicumque fuerit sinus alterius lateris, invenie-

tur

tur tangens alterius, quæ impossibilis esse non potest; ac ex can. 5, in quo cosinus lateris utriuslibet semper proveniet minor radio adeoque possibilis.

229. Ex his patebit, qui casus possint impossibilitatem involvere qui semper possibiles sint. Id vero obtinebitur percurrendo alias sex combinationes, quæ contineant bina quævis, quæ dari possunt ex illis quinque.

230. Data basi, & altero latere, Problema erit impossibile, si basis data distet a quadrante magis, quam latus (per num. 214.)

231. Data basi & altero angulo, Problema erit semper possibile (per num. 216.)

232. Datis binis angulis, erit impossibile, si eorum summa rectum non superet (per num. 221.)

233. Dato angulo, & latere opposito, erit impossibile si angulus distet a quadrante minus, quam latus oppositum (per num. 219.)

234. Dato angulo, & latere adjacente, erit semper possibile (per num. 223.)

235. Datis binis lateribus, erit semper possibile (per num. 227).

236. Atque in omnibus hisce combinationibus continentur iterum illa eadem Problemata, quæ in prioribus: nam singulæ terna continent, cum datis iis binis, quæri possit quodlibet e tribus reliquis; ac in tertia & sexta coincidant bina Problemata, ubi datis binis angulis quæritur latus utrumlibet; vel datis binis lateribus, quæritur uterlibet angulus.

237. Quoniam autem in omnibus Problematis invenitur functio per canones, & species per regulas præter combinationem quartam numeri 233, in qua datur latus cum angulo opposito, quæ speciem indeterminatam relinquit juxta num. 209, omnia ejusmodi problemata unicam admittunt solutionem, ac angulum, vel arcum determinant, præter illa tria in ea quarta combinatione inclusa, quæ non determinant speciem, & proinde binas singula solutiones admittunt.

238. Porro quotiescumque Problema erit impossibile,

M 2 id ipid ipsum calculus etiam trigonometricus ostendet, ut monuimus num. 123. Detur ex. gr. basis 57°. 0', latus vero 76°. 0', & quæratur angulus illi lateri oppositus. Tria quæ hìc combinantur sunt basis cum latere, & angulo opposito, quæ in indice combinationum numeri 210 est quarta, & ipsi respondet canon 1, in quo habetur: *Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi*. Quare erit Logarithmus sinus anguli quæsiti $=$ Log. rad. $+$ Log. sin. 76 .0' $-$ Log. sin. 57° .0' $=$ 10.00000 $+$ 9.98690 $-$ 9.92359 $=$ 10.06331, qui Logarithmus est major quovis sinuum Logarithmo in tabulis, cum sit major quam 10. 00000 Logarithmus radii, adeoque requirit sinum radio majorem, qui est impossibilis, & problematis impossibilitatem evincit. Eam autem facile erat deprehendere ex num. 230; cum nimirum basis data 57.°. 0'. magis distet a quadrante, quam latus oppositum 76°. 0'.

Scholion 3.

239. Iidem canones exhibent alia quoque theoremata sanè multa, in quibus eruendis Tyronem poterit exercere Præceptor, ut ea omnia, quæ de triangulis habentibus plusquam unum angulum rectum diximus, & alia, quæ addi possent. At iis omissis addemus pauca quædam usui futura in consideratione casuum quorundam ambiguorum, vel impossibilium in triangulis obliquangulis.

240. In fig. 12. si ex polo P circuli ADE ducatur ad quodvis punctum D arcus PD circuli maximi; is semper erit quadranti æqualis (per num. 139.), & cum eo angulum rectum constituet (per num. 159.) ac proinde mutato utcunque loco puncti D per totum circulum AIEA, & magnitudo arcus PD, & angulus cum peripheria AIEA manebunt semper magnitudinis ejusdem $=$ 90°. At si sumatur quodcumque aliud superficiei sphericæ punctum B, & ducatur arcus BD; mutato situ puncti D mutatur & magnitudo arcus ejusdem, & ejus inclinatio ad circulum ADE. Non erit abs re contemplari mutationes omnes, quæ accidunt illi arcui, & angulo.

241. Si per B, & P ducatur arcus circuli maximi, qui occurret circulo AIEi alicubi in A, & E ad angulos rectos (per n. 159.), existente A ad partes B respectu P, ac bini semicirculi AIE, AiE secentur bifariam I, & i, qui erunt poli ipsius circuli APE, juxta num. 139; puncto D abeunte in A, arcus BD erit æqualis ipsi BA, & omnium minimus, tum puncto D recedente utralibet ex parte versus E, perpetuo crescet, donec abeunte D in I, vel i fiet quadrans, ac demum abeunte D in E fiet æqualis ipsi BE, & omnium maximus.

242. Id facile deducitur ex can. 4. Nam in triangulo BAD ex eo can. erit radius ad cosinum lateris BA, ut cosinus lateris AD ad cosinum basis BD. Quare stante latere BA, & mutato latere AD, ita mutabitur basis BD, ut cosinuum ratio sit semper eadem; ac proinde decrescente complemento arcus AD per ejus continuum incrementum, usque ad I, vel i decrescet etiam complementum basis BD, quæ proinde perpetuo crescet: ac complementis simul evanescentibus ibidem simul fient quadrantes, tum crescente perpetuo ab I, & i usque ad E complemento arcus AD, crescet perpetuo etiam complementum arcus BD, qui proinde pariter crescet.

243. Patet autem ex eadem demonstratione, tam versus I, quam versus i æque crescere arcum BD in æqualibus distantiis puncti D, hinc inde ab A.

244. Quare omnium arcuum, qui ex puncto B assumpto in superficie sphæræ applicari possunt ad peripheriam circuli AIEi, cui hemisphærium insistit, maximus est BPE qui transit per polum P, minimus BA ipsi oppositus, reliqui eo minores, quo magis ad minimum accedunt, ac bini tantum hinc, inde in æquali distantia a puncto A, vel E inter se æquales applicari possunt.

245. Si igitur ex puncto dato B oporteat applicare arcum datum, is applicari non poterit, si fuerit minor, quam AB, vel major, quam BE, nimirum si distiterit a quadrante magis, quam utervis ex arcubus AB, BE: poterit applicari in unica positione, si æque disti-

terit, in binis hinc inde a perpendiculo, si distiterit minus, & eo propius punctus I, *i*, quo fuerit quadranti propior.

246. At angulus quem arcus ED continebit cum circulo ADE, puncto D abeunte in A erit utrinque rectus; tum abeunte D versus I vel *i*, erit semper BDA acutus versus A, BDE obtusus versus E, & ille perpetuo crescet, hic decrescet donec in I vel *i* fiat ille minimus, hic maximus, existente illius mensura AB, hujus BPE; deinde vero usque ad E ille iterum crescet, hic decrescet, ac abeunte D in E, iterum uterque fiet rectus.

247. Id facile deducitur ex can. 3. Nam ex eo erit radius ad tangentem anguli ADB, ut sinus lateris AD, ad tangentem lateris AB. Quare mutato utcunque puncto D, productum ex sinu lateris AD, & tangente anguli BDA erit semper idem; adeoque illius sinu crescente, vel decrescente, hujus tangens contra decrescet, vel crescet. Sinus autem illius perpetuo crescet donec ipse fiat in I vel *i* quadrans, tum decrescet, adeoque e contrario hujus tangens decrescet usque ad I, vel *i* tum crescet. Quare etiam angulus ex ea parte, ex qua erit acutus decrescet usque ad I, vel *i*, tum crescet, & ex altera parte, ex qua erit obtusus crescet, tum decrescet. Facto autem AD in I, vel *i* quadrante, ejus sinus æquatur radio; adeoque hoc ipso canone tangens ejus anguli æquabitur tangenti arcus AB, vel BE, & ipsi arcus AB, BE erunt mensura angulorum BDA, BDE in illo casu, quod etiam constat ex n. 155, cum D in eo casu abeat in I polum circuli ABE.

248. Patet autem etiam in æquali distantia punctorum D, *d* hinc inde ab I, vel ab *i* angulos hinc BDA, B*d*A, inde BDE, B*d*E æquales fore. Bini enim arcus, AD, A*d* æquabuntur duplo quadrantis AI, sive semicirculo, adeoque sinus arcuum AD, A*d* æquales erunt; ac proinde & tangentes angulorum BDA, B*d*A eandem habebunt magnitudinem.

249. Quare omnium angulorum, qui ad circulum

AIE*i*

AIEi fieri possunt per arcus ductos ex B, minimum versus A metitur AB, maximum versus E metitur BE & uterque ab eo limite ita recedit, ut in rectum desinat.

250. Si igitur ex puncto dato B oporteat applicare arcum, qui contineat angulum BDA, vel BDE datum; is applicari non poterit, nisi, qua parte respicit perpendiculum minus AB, sit acutus, ex parte perpendiculi majoris obtusus: nec pariter applicari poterit, si distet a recto magis, quam uterque arcuum BA, BE a quadrante: poterit autem in I, & *i* tantum, si æque distiterit: ac in binis positionibus æque remotis hinc inde tam ab I, quam ab *i*, si distiterit minus, eoque propius punctis A, E, quo fuerit propior recto.

§. III.

De resolutione triangulorum obliquangulorum.

251. Triangula obliquangula reducuntur ad rectangula ope perpendiculi demissi ex angulo aliquo in latus oppositum habitum pro basi, ut in triangulis planis. Sit ejusmodi triangulum (in fig. 13) ABD: Assumpto pro basi latere AD, occurrant ejus circulo in *a*, & *d* semicirculi arcuum AB, DB productorum. Per punctum B ducatur circulus perpendicularis circulo AD *ad* (per num. 129), qui ei occurret in binis punctis è diametro oppositis, adeoque jacebit altera intersectio E in semicirculo AD*a*, altera *e* in *ad*A. Secentur demum semicirculi E*ae*, altera *e* in *ad*A. Secentur demum semicirculi E*ae*, EA*e* bifariam in I, *i*.

252. Triangulum ABD, ope perpendiculi BE reducitur ad bina triangula rectangula ABE, DBE, ubi sive ipsum perpendiculum BE cadat intra basim, ut figura exhibet, sive extra, ut in triangulo AB*d*, dicimus AE, ED segmenta basis, ABE, DBE, segmenta verticis, & AE, ABE adjacentia lateri AB, & angulo A, ac opposita lateri BD, & angulo D, contra vero DE, DBE illis opposita, his adjacentia.

253. Porro ope priorum sex canonum eruemus allos 7 pertinentes ad hæc segmenta, latera, & angulos, ubi quidquid dicemus de triangulo ABD, habet locum in reliquis tribus triangulis *Abd*, *a*BD, *a*B*d*, dummodo majoribus litteris apte substituantur minores.

254. Ex can. 1. Radius ad sinum anguli A, ut sinus AB ad sinum BE. Ex eodem alternando, est sinus anguli D ad radium, ut sinus BE ad sinum DB. Igitur ex æqualitate perturbata sinus D ad sinum A, ut sinus AB ad sinum BE. Quare.

255. VII. *Sinus angulorum, ut sinus laterum oppositorum.*

256. Ex can. 2. Radius ad cosinum anguli ABE, ut tangens AB ad tangentem BE. Ex eodem alternando cosinus DBE ad radium, ut tangens BE ad tangentem DB, Igitur ex æqualitate perturbata cosinus DBE ad cosinum ABE, ut tangens AB ad tangentem DB. Quare.

257. VIII. *Cosinus segmentorum verticis. ut tangentes laterum oppositorum.*

258. Ex can. 3. Radius ad tangentem A, ut sinus AE ad sinum BE. Ex eodem alternando tangens D ad radium, ut sinus BE ad sinum DE. Igitur ex æqualitate perturbata tangens D ad tangentem A, ut sinus AE, ad sinum DE. Quare.

259. IX. *Sinus segmentorum basis, ut tangentes angulorum oppositorum.*

260. Ex can. 4. Radius ad cosinum BE, ut cosinus AE ad cosinum AB, & ut cosinus DE ad cosinum BD. Ergo alternando cosinus AE ad cosinum DE, ut cosinus AB ad cosinum DB. Quare.

261. X. *Cosinus segmentorum basis, ut cosinus laterum adjacentium.*

262. Ex can. 5. alternando, radius ad cosinum BE, ut sinus ABE ad cosinum A, & ut sinus DBE ad cosium D. Igitur alternando, sinus ABE ad sinum DBE, ut cosinus A ad cosinum D. Quare.

263. XI. *Sinus segmentorum verticis, ut cosinus angulorum adjacentium.*

264. In hisce novis 5 canonibus habentur aliæ quin-

que

que combinationes laterum, angulorum, segmentorum tam basis, quam verticis, nimirum in combinatione.

7. *Latera, & anguli inter se.*	*Can.*	7.
8. *Latera, & segmenta verticis*	*Can.*	8.
9. *Latera, & segmenta basis.*	*Can.*	10.
10. *Anguli, & segmenta verticis.*	*Can.*	11.
11. *Anguli, & segmenta basis.*	*Can.*	9.

265. Superest combinatio segmentorum verticis, cum segmentis basis, pro qua admodum facile canon eruitur ex can. 3. Est enim ex eo alternando, Radius ad sinum BE, ut tangens anguli ABE ad sinum AE, & ut tangens anguli BDE ad sinum DE. Igitur alternando; tangens ABE ad tangentem DBE, ut sinus AE ad sinum DE. Quare *Tangentes segmentorum verticis, ut sinus segmentorum basis adjacentium.* Sed hic canon hic nobis usui non erit, adeoque eum in hac serie canonum non ponimus.

266. Porro hi canones inventis jam ope triangulorum rectangulorum segmentis usui erunt, ut infra patebit; at ex iis binos alios deducemus, ex quibus ipsa etiam in binis casibus segmenta inveniantur.

267. Ex can. 10. sumendo summas & differentias terminorum, erit summa cosinuum segmentorum basis ad differentiam, ut summa cosinuum laterum ad differentiam. Quare (per num. 31.)

268. XII. *Cotangens semisummæ segmentorum basis, sive cotangens dimidiæ basis, ad tangentem semidifferentiæ, ut cotangens semisummæ laterum ad tangentem semidifferentiæ.*

269. Ex can. 11. pariter summa sinuum segmentorum verticis ad differentiam, ut summa cosinuum angulorum ad differentiam. Quare (per n. 31.)

270. XIII. *Tangens semisummæ segmentorum verticis, sive tangens dimidii anguli verticalis, ad tangentem semidifferentiæ, ut cotangens semisummæ reliquorum angulorum ad tangentem semidifferentiæ.*

271. Neperus, & alii passim pro can. 12. proponun hunc

hunc. *Tangens semisumma segmentorum basis, sive tangens dimidia basis, ad tangentem semisumma laterum, ut tangens semidifferentia ipsorum ad tangentem semidifferentia segmentorum basis*; ac ipsum demonstrant ex principiis Conicis. Nos eum facile admodum deducere possumus ex nostro canone 12. Prius enim alternando fit: Cotangens dimidiæ basis ad cotangentem semisummæ laterum, ut tangens semidifferentiæ segmentorum basis ad tangentem semidifferentiæ laterum. Tum pro ratione cotangentis dimidiæ basis, ad cotangentem semisummę laterum, ponendo (per n. 17.), rationem tangentis hujus ad tangentem illius habetur: *Tangens semisumma laterum ad tangentem dimidia basis, ut tangens semidifferentia segmentorum ipsius basis ad tangentem semidifferentia laterum*. Demum invertendo habetur ipsum Neperianum theorema. Sed quoniam hic noster idem prorsus officium præstat; eo, qui sponte propemodum profluit, utemur potius, quam Neperiano.

272. Præter hosce canones erit ad resolutionem necessaria etiam tertia regula, quæ determinet, quandonam perpendiculum cadat intra basim, quando vero extra. Eruetur autem sic.

273. Ex reg. 1. tam angulus BAE, quam BDE sunt ejusdem speciei cum arcu BE. Igitur si anguli BAD, BDA fuerint ejusdem speciei; jacebit punctum E intra basim AD, congruentibus angulis BDA, BDE, ac angulis BAD, BAE. Si vero fuerint diversæ speciei; cadet extra, ut in triangulo AB*d*, ubi cadit in E, vel *e* extra basim A*d* ita, ut angulo BA*d* non habente eandem speciem cum B*d*A, tam ſtAE, quam B*d*E eandem habeant, ac pariter tam BA*e*, quam B*de* eandem. Quare.

274. Reg. 3. *Si duo anguli ad basim fuerint ejusdem speciei, perpendiculum intra basim cadet; si diversa, extra.*

PROBLEMA.

275. In triangulo sphærico obliquangulo tribus datis reliqua invenire.

276. Sex casus complectitur hoc Problema, 1., in quo dentur

dentur bina latera angulo intercepto, 2. Bina latera cum angulo alteri eorum opposito, 3. Bini anguli cum latere intercepto, 4. Bini anguli cum latere alteri eorum opposito, 5. tria latera, 6. Tres anguli. Omnium solutio habebitur ope canonum, quos demonstravimus, excurrendo per casus singulos.

277. Ante tamen notandum est, in primo, & tertio casu Problema semper esse possibile, ac ita determinatum, ut unicam solutionem admittat. Facto enim utcunque angulo A, & assumptis, ut libuerit lateribus AB, AD, poterit per B, & D duci circulus maximus (per n. 129), qui erit unicus, cum planum transiens per puncta B, D, & centrum sphæræ non in directum jacentia sit unicum (per num. 7. Solid.), ac id ipsum ejus circuli sit planum (per num. 130). Pariter facto quovis angulo ad A; assumpto quovis latere AD, quod sit minus semicirculo AD*a*, & facto in D quovis angulo ope semicirculi DB*d*, hic semicirculo AB*a* occurret alicubi necessario in B, & triangulum absolvet.

278. Secundus, & quartus casus possunt habere, vel binas solutiones, vel unicam vel nullam: Sit enim datus angulus BAE, & datum latus AB: ut habeatur propositum triangulum oportet ex B ita applicare arcum BD, ut in secundo casu ipse sit æqualis alteri dato lateri, in quarto vero casu efficiat angulum BDA æqualem dato. Porro ex nu. 245, & 250 facile eruitur id aliquando esse impossibile, aliquando unicam solutionem habere posse, aliquando vero binas.

279. Si latus datum vel datus angulus distet a quadrante magis quam arcus BE, qui ex datis angulo A & arcus AB facile invenitur (per combin. 4.); casus erit prorsus impossibilis, & in resolutione ejus trianguli, methodo, quam trademus infra, obveniet aliquis sinus radio major.

280. Si æque, vel minus distiterit applicabitur quidem arcus BD in una vel pluribus positionibus; sed ad hoc ut triangulum propositum sit possibile, oportet punctum D cadat in semicirculum AE*a*, & binorum angu-

angulorum, qui fiunt ad D is, qui respicit A, æquetur dato.

281. Quæ ad id conditiones requirantur facile erit determinare considerando ipsos numeros 245, & 250, pro varia specie arcus AB & anguli A. Sit angulus BAE acutus, & arcus AB quadrante minor ut figura exhibet: eritque per reg. 1 etiam BE quadrante minor ac (per num. 241) arcuum omnium, qui ex B applicari possunt, minimus, & (per reg. 2.) AE pariter quadrante minor, adeoque assumptis quadrantibus EI, E*i*, cadet punctum I in semicirculum AE*a*, punctum *i* in A*ea*.

282. Hinc in secundo casu, si latus datum sit æquale BE; solutio erit unica puncto D abeunte in E: si idem sit majus, quam BE, sed adhuc minus, quam BA; solutio erit duplex: nam poterit arcus BD applicari vel citra E versus A, vel ut exhibet figura, ultra E versus *a*. Si sit æquale BA, vel eo majus; sed adhuc minus quam B*a*, non poterit BD applicari versus A, poterit autem versus *a*, & solutio erit unica. Si demum sit æqualis B*a*, vel adhuc major, applicari jam non poterit, nec versus A, nec versus *a*, & casus iterum erit impossibilis.

283. At in casu quarto, si anguli dati fuerit mensura arcus BE; poterit applicari BD, abeunte D in I, & *i*, sed sola applicatio in I Problemati inserviet, adeoque solutio erit unica. Si angulus sit aliquanto major, sed adhuc minor angulo B*a*E, sive dato BAE; binæ erunt solutiones, puncto D cadente in arcum I*a*, vel ut figura exhibet in IA. Si is æqualis fuerit ipsi B*a*E nimirum BAE; vel etiam major eodem, sed adhuc minor angulo BA*e* ejus complemento ad duos rectos; solutio erit unica, puncto D cadente in arcum IA, cadet enim in arcum IE, si fuerit acutus, in punctum E si rectus, in arcum EA, si obtusus. Quod si ipsi angulo BA*e* fuerit æqualis, vel eum excesserit; iterum casus fiet impossibilis.

284. Eodem pacto facile est ex iisdem principiis derivare (quando in iis casibus nulla solutio habeatur quando unica, quando binæ; sive arcus AB quadrantem excesse-

cesserit, vel angulus BAE excesserit rectum, vel contigerit utrumque simul. Verum solutio ipsa idem præbebit semper; nam in casu, in quo applicari non poterit arcus BD ullo pacto, obveniet sinus aliquis radio major: in casu vero, in quo is quidem applicari poterit, sed punctum D cadet extra semicirculum AE*a*, binorum segmentorum AE, ED, vel ABE, DBE summa excedet gradus 180, puncto D abeunte ultra *a*, vel differentia evadet negativa, eodem cadente citra A.

285 In quinto casu Problema erit semper possibile dummodo bina quævis latera tertio majora sint, & in sexto dummddo angulorum summa sit minor sex rectis, & major binis, ac in utroque casu Problema erit determinatum, & unicam solutionem admittet ut colligitur ex num. 173, 176, & ex ipsa solutione patebit.

286. Sed jam aggrediamur solutionem ipsam percurrendo singulos casus. In primis autem quatuor semper pro A sumendus est angulus datus, & pro AB latus datum, ex quibus segmentum AE, vel ABE eruetur resolvendo triangulum rectangulum AEB. In reliquis segmenta invenientur per canones postremos.

287. *Casus* 1. Dentur bina latera cum angulo intercepto: duo quæri possunt, 1°. latus tertium, 2.° angulus utrilibet lateri dato oppositus.

288. Quæratur 1.° latus tertium. Sume pro A angulum datum; eruntque data latera AB, AD, & quæretur BD. Ex datis in triangulo rectangulo AEB basi AB, & angulo A quære AE (per combin. 3) & si forte id evaserit æquale arcui AD; abibit D in E, & triangulum erit rectangulum ad D: si minus; perpendiculum BE cadet intra basim AD: si majus, extra. Invento segmento AE, habebis & ED ob datum arcum AD. Ex segmentis AE, ED, & latere AB invenies cosinum BD (per combin. 9, & can. 10): Ex dato A habes speciem BE (per reg. 1.). Ex ipsa, & specie ED habes speciem BD (per reg. 2).

289. Quæratur 2.° angulus utervis. Assume pro AB

latus

latus ipsi oppositum, pro AD alterum latus datum ipsi adjacens, eritque A datus, D quæsitus angulus. Quære segmenta AE, ED ut prius. Ex iis & angulo A (per combin. 11. can. 9) invenies tangentem D. Species autem anguli D erit eadem ac A, vel diversa (per reg. 3), prout segmentum AE obvenerit majus, vel minus basi AD.

290. *Casus* 2. Dentur bina latera cum angulo opposito alteri ex iis: tria quæri possunt, 1.° tertium latus, 2.° angulus datis lateribus interceptus, 3.° angulus alteri lateri oppositus.

291. Quæratur 1.° tertium latus. Sume pro A angulum datum, pro AB latus ipsi adjacens: eritque datum & latus BD, ac quæretur AD. Invenies AE, ut num. 288: Ex datis lateribus AB, BD, & segmento AE, invenies (per combin. 9, can. 10) cosinum ED, qui cosinus si obvenerit æqualis radio, erit ED = o, & puncto D abeunte in E, triangulum rectangulum ad D. Ex specie BE, (quæ est eadem ac BAE), & BD invenies speciem ED (per reg. 2.). Sed quoniam aliquando haberi poterit duplex solutio hinc inde ab E, subtrahe ED ab EA, & habebis primam, adde & habebis secundam. Si forte AD ex subtractione evaserit = o, vel negativa ob AE æqualem ipsi ED vel minorem, vel ex additione evaserit æqualis, vel major semicirculo ob ED æqualem vel majorem E*a*; eam solutionem rejice abibit enim in primo casu D in A vel citra ipsum, in secundo in *a* vel ultra ipsum, juxta num. 284.

292. Quæratur 2.° angulus ABD interceptus. Ex datis AB, & A quære segmentum verticis ABE (per combin. 2.). Ex lateribus AB, BD, & segmento verticis ABE invenies (per combin. 8, can. 8.) cosinum EBD, qui cosinus si fuerit æqualis radio, erit pariter DBE = o, & triangulum rectangulum ad D. Ex BD dato, & specie BE communi angulo dato BAE invenies speciem DBE (per reg. 2.). Subduc. DBE, ab ABE, & habebis primam solutionem; adde, & habebis alteram: Si angulus ABD, ex subtractione evaserit = o, vel negativus, vel ex additione æqualis, aut major duobus rectis; eam solutionem rejice, ut prius.

293. Quæratur 3.° angulus D oppositus lateri AB. E lateribus AB, BD & angulo A invenies (per combin. 7. can. 7.) sinum D: species in secunda solutione erit eadem ac A, in prima diversa, (per reg. 3.).

294. *Casus* 3. Dentur bini anguli cum latere intercepto: duo quæri possunt, 1.° tertius angulus, 2.° latus utrilibet angulo oppositum.

295. Quæratur 1.° tertius angulus. Sume pro latere AB latus datum, eruntque dati anguli A, & B, ac quæretur D. Ex datis AB, & A quære segmentum verticis ABE, (per combin. 2.), quod segmentum si evaserit æquale angulo ABD, punctum D abibit in E, & triangulum erit rectangulum ad D, si minus, perpendiculum BE cadet intra basim BD; si majus, extra. Invento segmento ABE, habebis est DBE ob datum totum ABD. E segmentis ABE, DBE, & angulo A invenies (per comb. 10. can. 11.) cosinum D. Is erit ejusdem speciei cum A, si ABE fuerit minor, quam ABD, perpendiculo BE cadente intra basim, diversæ, si major.

296. Quæratur secundo latus utrumvis. Assume pro A angulum ipsi oppositum, pro ABD alterum angulum ipsi adjacentem; eritque AB latus datum, BD quæsitum. Quare segmenta ABE, DBE, ut prius. Ex iis, & latere AB (per combin. 8. can. 8.), invenies tangentem BD. Ejus speciem invenies (per reg. 2), e specie DBE inventa, & specie BE, quæ est eadem, ac anguli dati A.

297. *Casus* 4. Dentur bini anguli cum latere opposito alteri ex iis: tria quæri possunt, 1° tertius angulus, 2.° latus datis angulis interceptum, 3.° latus alteri angulo oppositum.

298. Quæratur 1.° tertius angulus. Sume pro AB latus datum, pro A angulum datum ipsi adjacentem; eritque datus etiam angulus D, & quæretur ABD. Invenies ABE, ut num. 295. Ex datis angulis A, D, & segmento ABE invenies (per combin. 10. can. 11.) sinum DBE, qui in eo canone non poterit evadere = 0, existente angulo D obliquo. Ejus autem species erit inde-

deter-

determinata, cum solum detur species lateris BE eadem, ac anguli A, & species anguli D oppositi ipsi lateri BE in triangulo BDE, qui est casus ambiguus trianguli rectanguli (per num. 209.). Inde autem colligitur posse aliquando haberi duplicem solutionem, puncto D cadente hinc, vel inde ab I, vel *i*. Quare poterit assumi segmentum DBE tam acutum, quam obtusum. Si autem angulus D fuerit ejusdem speciei cum A, debebit ad habendos pro binis solutionibus binos angulos ABD, utrumque addi segmento ABE, ut (juxta reg. 3.), perpendiculum intra basim cadat. Si verò D fuerit diversæ speciei, debebit utrumque subtrahi. Si ex additione non obvenerit angulus minor binis rectis, vel ex subtractione positivus; eæ solutiones rejiciendæ erunt; abibit enim punctum D in *a*, vel ultra ipsum, aut in A, vel citra ipsum, ut num. 291.

299. Quæratur 2.° latus AD interceptum. Ex datis AB, & A quære segmentum AE (per combin. 3.). Ex angulis A, D, & segmento AE invenies (per combin. 11. can. 9.) sinum ED. Species ipsius erit pariter indeterminata: assume valorem tam minorem, quam majorem quadrante, & adde segmento AE, vel subtrahe, prout angulus D habuerit eandem speciem, ac A, vel diversam, & habebis binas bases AD pro binis solutionibus. Sed si basis ipsa ex additione non obvenerit semicirculo minor, vel e subtractione non manserit positiva, eam solutionem rejice, ut prius.

300. Quæratur 3.° latus BD oppositum angulo A. Ex angulis A, D, & latere AB invenies (per combin. 7. can. 7.) sinum BD. Species altera adhibenda erit in altera e solutionibus, quam in triangulo rectangulo BED definiet (per reg. 2) species BE cognita, nimirum eadem ac species A, una cum specie assumpta segmenti ED, sive segmenti EBD.

301. *Casus* 3. Dentur tria latera; potest quæri angulus quivis.

302. Sume pro A angulum quæsitum, pro basi AD utrumvis latus ipsi adjacens. Ex datis AB, BD, & dimidia

midia basi AD invenies (per can. 12.) tangentem semidifferentiæ segmentorum AE, ED, quam semidifferentiam sumes quadrante minorem. Eam adde dimidiæ basi, & subtrahe, & cum dimidia basis sit semmisumma eorundem segmentorum, habebis (per num. 28) bina segmenta AE, DE. Sed pro AE assumes segmentum illud, quod magis vel minus distet a quadrante, prout latus adjacens AB distabit pariter magis vel minus; cum nimirum (per can. 10.) sint: *Cosinus segmentorum basis, ut cosinus laterum adjacentium*, & arcus propioris quadranti cosinus sit minor (per n. 39.) Jam in triangulo rectangulo AEB ex AB, & AE invenies angulum BAE (per combin. 3. . Sed si AE habitum fuerit per subtractionem, & obvenerit negativum, perpendiculo BE cadente citra A, Angulus quæsitus BAD non erit idem, ac BAE, sed ejus complementum ad duos rectos.

303. *Casus* 6. Dentur tres anguli; potest quæri latus quodvis.

304. Sume pro AB latus quæsitum, pro vertice ABD utrumvis angulum ipsi adjacentem. Ex datis A, D & dimidio angulo verticali ABD invenies per can. 13.) tangentem semidifferentiæ segmentorum ABE, EBD, quam semidifferentiam sumes quadrante minorem. Eam adde dimidio angulo verticali & subtrahe, & cum dimidius angulus verticalis sit semisumma eorundem segmentorum, habebis (per num. 28.) bina segmenta ABE, DBE. Sed pro ABE assumes segmentum illud, quod magis, vel minus distet ab angulo recto, prout e contrario angulus A adjacens distabit minus, vel magis; cum nimirum (per can. 11.) sint sinus segmentorum verticis, ut cosinus angulorum adjacentium, & arcus propioris quadranti cosinus sit minor, sinus major (per num. 39.). Jam in triangulo rectangulo AEB ex AB, & ABE invenies angulum BAE (per comb. 2.). Sed si ABE habitum fuerit per subtractionem, & obvenerit negativum, perpendiculo BE cadente citra A, angulus quæsitus BAD non erit idem, ac BAE, sed ejus complementum ad duos rectos.

Scholion I.

305. Licebit inter se conferre solutiones casus 1, 3, 5, cum 2, 4, 6, quæ ita sibi respondent, ut sæpe eadem prorsus verba adhibeantur. Plerumque solent demonstrare insignem proprietatem triangulorum sphæricorum ac eam in solutione adhibere. Si nimirum in quovis triangulo latera mutentur in angulos, anguli viceversa mutantur in latera, & e contrario. Sed in ea mutatione in novo triangulo angulis quibusdam, vel lateribus substituenda sunt eorum complementa ad duos rectos. Hinc expositis casibus 1, 3, 5, ad eos reducunt reliquos tres ope ejusmodi transformationis. Sed quoniam & transformationis ipsius demonstratio, & determinatio casuum, in quibus lateri, vel angulo transformato substitui debeat ejus complementum ad duos rectos, est aliquanto operosior, & per nostros canones æque facile immediate solvuntur posteriores tres casus, ac priores tres; libuit potius hanc aliam adhibere methodum, quæ multo & expeditior est visa, & magis concinna.

306. Pariter cum secantium Logarithmi in tabulis adscribi non soleant, consulto ubique secantes vitavimus, per solos sinus, & tangentes re perfecta.

307. In quinti & sexti casus solutione semidifferentiam ex tangente deduximus minorem 90.° Potuisset assumi etiam major, & solutio eadem prorsus obvenisset. Secto enim arcu AD bifariam in L, si in casu quinto pro semidifferentia LE, assumptum fuisset ejus complementum ad duos rectos, nimirum L*e*; pro segmentis AE, DE obvenissent segmenta AE,DE*e*, & in triangulo quidem rectangulo BA*e* inventus fuisset angulus BA*e*, complementum ad duos rectos anguli BAE; sed angulus BAD obvenisset idem. Præstat tamen adhibere semidifferentiam minorem 90.°; tum quia immediate eruitur e tabulis, tum quia ob AL quoque minorem quadrante numquam segmentum ex additione proveniens semicirculum excedet, qui aliquando excederetur, ut in ipso casu hujus figuræ segmentum DEA*e*

pro-

proveniret semicirculo majus, pro quo, ad conferenda ipsa segmenta inter se, sumendum esset De ejus complementum ad circulum, cum in vulgari Trigonometria, nec anguli, nec arcus semicirculo majores considerari soleant, ac eadem est ratio pro casu 6.

Scholion 2.

308. In quibusdam casibus solutiones aliquando faciliores haberi possunt. Si bina latera BA, BD essent inter se æqualia, vel bini anguli A, D æquales; perpendiculum BE secaret bifariam basim AD, & angulum ABD. Nam (per num. 244) bini arcus AB, BD possunt esse æquales solum in æquali hinc inde distantia a puncto E, & ibi anguli EBD, EBA, quorum species debet (per reg. 1.) esse eadem ac species EA, ED, erunt ejusdem speciei; functiones vero æquales habebunt (per can. 8.), adeoque & inter se æquales erunt. Si autem assumatur ID = Ia, erit angulus BDE = BaE (per num. 248), adeoque = BAE, per n. 157), nec usquam alibi in semicirculo AEa constitui poterit angulus ipsi BAE æqualis. Cum autem quadrans EI sit æqualis dimidio semicirculo ADa, & arcus DI dimidio Da, erit DE æqualis dimidio AD, adeoque æqualis AE, & inde eodem argumento etiam ABE = DBE. Porro satis patet, quanto facilior inde solutio debeat profluere in hujusmodi triangulis Isosceliis.

309. Quod si aliquo triangulo detur latus quadranti æquale admodum facile dato triangulo substituitur aliud, quod rectangulum sit, & quo resoluto, illud etiam resolvitur. Capto enim quadrante AE, & per B, & E ducto circulo maximo, erunt (per n. 162) anguli AEB, ABE recti, & latus BE mensura anguli A; ac proinde arcus ED, & angulus EBD erunt complementa arcus AD, & anguli ABD. Datis igitur iis, quæ pertinent ad triangulum ABD, dantur ea, quæ pertinent ad BED, & hoc resoluto illud resolvitur.

Scholion.

Ut unico conspectu pateant omnia, quæ ad usum ſpectant, apponemus hic canones, cum combinationibus, & regulas.

Pro triangulis rectangulis

I. *Radius ad ſinum anguli, at ſinus baſis ad ſinum lateris oppoſiti.*

II. *Radius ad coſinum anguli, ut tangens baſis ad tangentem lateris adjacentis.*

III. *Radius ad tangentem anguli, ut ſinus lateris adjacentis ad tangentem oppoſiti.*

IV. *Radius ad coſinum unius lateris, ut coſinus alterius ad coſinum baſis.*

V. *Radius ad ſinum anguli adjacentis, ut coſinus lateris ad coſinum anguli oppoſiti.*

VI. *Radius ad tangentem unius anguli, ut coſinus baſis ad cotangentem alterius.*

Reg. I. *Latera ſunt ejuſdem ſpeciei cum angulis oppoſitis.*

Reg. II. *Si duo latera vel duo anguli, vel latus cum angulo adjacente fuerint ejuſdem ſpeciei; baſis erit quadrante minor, ſi diverſæ, major, & viceverſa.*

	1.	Baſis cum utroque latere:	Can. 4. Reg. 2. pars 1.
Combin.	2.	Baſis cum utroque angulo:	Can. 6. Reg. 2. pars 2.
	3.	Baſis cum latere, & angulo adjacente:	Can. 2. Reg. 2. pars 3.
	4.	Baſis cum latere, & angulo oppoſito:	Can. 1.) Reg. 1. vel nulla in caſu ambiguo.
Combin.	5.	Utrumque latus cum altero angulo:	Can. 3.) Reg. 1. vel nulla in caſu ambiguo.
	6.	Uterque angulus cum altero latere:	Can. 5.) Reg. 1. vel nulla in caſu ambiguo.

Pro

Pro obliquangulis.

VII. *Sinus angulorum, ut sinus laterum oppositorum.*

VIII. *Cosinus segmentorum verticis, ut tangentes laterum oppositum.*

IX. *Sinus segmentorum basis ut tangentes angulorum oppositorum.*

X. *Cosinus segmentorum basis, ut cosinus laterum adjacentium.*

XI. *Sinus segmentorum verticis, ut cosinus angulorum adjacentium.*

Reg. *III. Si duo anguli ad basim fuerint ejusdem speciei perpendiculum intra basim cadet; si diversa, extra.*

	7.	Latera, & anguli.	can.	7.
	8.	Latera, & segmenta verticis	can.	8.
Combin.	9	Latera, & segmenta basis.	can.	10.
	10.	Anguli, & segmenta verticis.	can.	11.
	11.	Anguli, & segmenta basis.	can.	9.

Pro inveniendis segmentis in casu datorum laterum, vel angulorum.

XII. *Cotangens dimidiæ basis ad tangentem semidiferentiæ segmentorum, ut cotangens semisummæ laterum ad tangentem semidifferentiæ.*

XIII. *Tangens dimidii anguli verticalis ad tangentem semidifferentiæ segmentorum, ut cotangens semisummæ angulorum ad basim ad tangentem semidifferentiæ.*

TABULÆ FUNCTIONUM ARCUUM.

Gr.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang
0	0	0	100000.00	—Infin.	—Infin.
1	1745.24	1745.51	100015.23	8 2418553	8.2419215
2	3489.95	3492.08	100060.95	8.5428192	8.5430838
3	5233.60	5240.78	100137.23	8.7188002	8.7193958
4	6975.65	6992.68	100244.19	8.8435845	8.8446437
5	8715.57	8748.87	100381.98	8.9402960	8.9419518
6	10452.85	10510.42	100550.82	9.0192346	9.0216202
7	12186.93	12278.46	100750.99	9.0858945	9.0891438
8	13917.31	14054.08	100982.76	9.1435553	9.1478025
9	15643.45	15837.44	101246.51	9.1943324	9.1997125
10	17364.82	17632.70	101542.67	9.2396702	9.2463188
11	19080.90	19438.03	101871.68	9.2805988	9.2886523
12	20791.17	21255.65	102234.07	9.3178789	9.3274745
13	22495.11	23086.82	102630.39	9.3520880	9.3633641
14	24192.19	24932.80	103061.35	9.3836752	9.3967711
15	25881.90	26794.92	103527.62	9.4129962	9.4280525
16	27563.74	28974.54	104029.94	9.4403381	9.4574964
17	29237.17	30573.07	104569.18	9.4659353	9.4853390
18	30901.70	32491.97	105146.22	9.4899824	9.5117760
19	32556 82	34432.76	105762.07	9.5126419	9.5369719
20	34202.02	36397.02	106417.78	9.5340519	9.5610659
21	35836.79	38386.40	107114.50	9.5543292	9.5841774
22	37460.66	40402.62	107853.47	9.5735754	9.6064096
23	39073.11	42447.49	108636.04	9.5918780	9.6278519
24	40673.66	44522.87	109463.63	9.6093133	9.6485831
25	42261.83	46630.77	110337.79	9.6259483	9.6686725

90

TABULÆ FUNCTIONUM ARCUUM.

Gr.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang
90	100000.00	Infin.	Infin	10.0000000	Infin.
89	99984.77	5728996.16	5729868.85	9.9999338	11.7580785
88	99939.08	2863625.33	2865370.83	9.9997354	11.4569162
87	99862.95	1908113.67	1910732.26	9.9994044	11.2806042
86	99756.40	1430066.63	1433558.70	9.9989408	11.1553563
85	99619.47	1143005.23	1147371.32	9.9983442	11.0580482
84	99452.18	951436.45	956677.22	9.9976143	10.9783798
83	99254.62	814434.64	820550.90	9.9967507	10.9108562
82	99026.80	711536.97	718419.65	9.9957528	10.8521975
81	98768.83	631375.15	639245.32	9.9946199	10.8002875
80	98480.77	567128.18	575877.05	9.9933515	10.7536812
79	98162.71	514455.40	524084.31	9.9919466	10.7113477
78	97814.76	470463.01	480973.43	9.9904044	10.6725255
77	97437.01	433147.59	444541.15	9.9887239	10.6366359
76	97029.57	401078.09	413356.55	9.98690[illegible]	10.6032289
75	96592.58	373205.08	386370.33	9.9849438	10.5719475
74	96126.17	348741.44	362795.53	9.9828416	10.5425036
73	95630.48	328075.26	342030.36	9.9805963	10.5146610
72	95105.65	307768.35	323606.80	9.9782063	10.4882240
71	94551.85	290421.09	307155.35	9.9756701	10.4630281
70	93969.26	274747.74	292380.44	9.9729858	10.4389341
69	93358.04	260508.91	279042.82	9.9701517	10.4158226
68	92718.39	247508.69	266946.72	9.9671659	10.3935904
67	92050.49	235585.24	255930.47	9.9640261	10.3721481
66	91354.54	224603.68	245859.33	9.9607302	10.3514169
65	90630.78	214450.69	236620.16	9.9572757	10.3313275

TABULÆ FUNCTIONUM ARCUUM.

Gr.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang
26	43837.12	48773.26	111260.19	9 6418420	9.6881818
27	45399.05	50952.54	11-2232.62	9.6570468	9.7071655
28	46947.16	53170.94	113257.01	9.6716093	9.7256744
29	48480.96	55430.09	114335.41	9.6855712	9.7437520
30	50000.00	57735.03	117735.05	9.6989700	9.7614394
31	51503.81	60086.08	116663.34	9.7118393	9.7787737
32	52991.93	62486.94	117917.84	9.7242097	9.7957892
33	54463.90	64940.76	119236.33	9.7361088	9.8125174
34	55919.29	67450.85	120621.80	9.7475617	9.8289874
35	57357.64	70020.75	122077.46	9.7585913	9.8452268
36	58778.53	72654.26	123606.80	9.7692187	9.8612610
37	60181.50	75355.40	125213.57	9.7794630	9.8771144
28	61566.15	78128.56	126901.82	9.7893420	9.8928098
39	6293[illegible].04	80978.40	128675.96	9.7988718	9.9083692
40	64278.76	83909.96	130540.73	9.18080[illegible]75	9.9238135
41	65605.90	86928.68	131501.30	9.8169429	9.9391631
42	66913.06	90040.41	134563.27	9.8255109	9.9544374
43	68199.84	93257.51	136732.75	9.8337833	9.9696559
44	69465.84	96568.88	139016.36	9.8417713	9.9848372
45	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000000

TABULÆ FUNCTIONUM ARCUUM.

Gr.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang
64	89879.40	205030.38	228117.20	9.9536602	10.3118181
63	89100.65	196261.05	220268.93	9.9498809	10.2928341
62	88294.76	188072.65	213005.45	9.9459349	10.2743256
61	87461.97	180404.78	206266.53	9.9418193	10.2562480
60	86602.54	173205.08	200000.00	9.9375306	10.2385606
59	85716.73	166427.95	194160.40	9.9330656	10.2212263
58	84804.81	160033.45	188707.99	9.9284205	10.2042108
57	83867.06	153986.50	183607.84	9.9235914	10.1874826
56	82903.76	148256.10	178829.16	9.9185742	10.1710126
55	81915.21	142814.80	174344.68	9.9133645	10.1547732
54	80901.70	137638.19	170130.16	9.9079576	10.1387390
53	79863.55	132704.48	166164.01	9.9023486	10.1228856
52	78801.08	127994.16	162426.92	9.8965321	10.1071902
51	77714.60	123489.72	158901.57	9.8905026	10.0916308
50	76604.44	119175.36	155572.38	9.8842540	10.0761865
49	75470.96	115036.84	152425.31	9.8777799	10.0608369
48	74314.48	112061.25	149447.65	9.8710735	10.0455626
47	73135.37	107236.87	146627.92	9.8641275	10.0303441
46	71933.98	103553.03	143955.65	9.8569341	10.0151628
45	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000000

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	0.0000000	34	1.5314789	67	1.8260748
2	0.3010300	35	1.5440680	68	1.8325089
3	0.4771213	36	1.5563025	69	1.8388491
4	0.6020600	37	1.5682017	70	1.8450980
5	0.6989700	38	1.5797836	71	1.8512583
6	0.7781512	39	1.5610646	72	1.8573325
7	0.8450980	40	1.6020600	73	1.8633229
8	0.9030900	41	1.6127839	74	1.8692317
9	0.9542425	42	1.6232493	75	1.8750613
10	1.0000000	43	1.6334685	76	1.8808136
11	1.0413927	44	1.6434527	77	1.8864907
12	1.0791812	45	1.6532125	78	1.8920946
13	1.1139433	46	1.6627578	79	1.8976271
14	1.1461280	47	1.6720979	80	1.9030900
15	1.1760913	48	1.6812412	81	1.9084850
16	1.2041200	49	1.6901961	82	1.9138138
17	1.2304489	50	1.6989700	83	1.9190781
18	1.2552725	51	1.7075702	84	1.9242793
19	1.2787536	52	1.7160033	85	1.9294189
20	1.3010300	53	1.7242759	86	1.9344984
21	1.3222193	54	1.7323938	87	1.9395192
22	1.3424227	55	1.7403627	88	1.9444827
23	1.3617278	56	1.7481880	89	1.9493900
24	1.3802112	57	1.7558749	90	1.9542425
25	1.3979400	58	1.7634280	91	1.9590414
26	1.4149733	59	1.7708520	92	1.9637878
27	1.4313638	60	1.7781512	93	1.9684829
28	1.4471580	61	1.7853298	94	1.9731279
29	1.4623980	62	1.7923917	95	1.9777236
30	1.4771213	63	1.7993405	96	1.9822712
31	1.4913617	64	1.8061800	97	1.9867717
32	1.5051500	65	1.8129134	98	1.9912261
33	1.5185139	66	1.8195439	99	1.9956352
34	1.5314789	67	1.8260748	100	1.0000000

100

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
101	2.0043214	134	2.1271048	167	2.2227165
102	2.0086002	135	2.1303338	168	2.2253093
103	2.0128372	136	2.1335389	169	2.2278867
104	2.0170333	137	2.1367206	170	2.2304489
105	2.0211893	138	2.1398791	171	2.2329961
106	2.0253059	139	2.1430148	172	2.2355284
107	2.0293838	140	2.1461280	173	2.2380461
108	2.0334238	141	2.1492191	174	2.2405492
109	2.0374265	142	2.1522883	175	2.2430380
110	2.0413927	143	2.1553360	176	2.2455127
111	2.0453230	144	2.1583625	177	2.2479733
112	2.0492180	145	2.1613680	178	2.2504200
113	2.0530784	146	2.1643529	179	2.2528530
114	2.0569049	147	2.1672173	180	2.2552725
115	2.0606978	148	2.1702617	181	2.2576786
116	2.0644580	149	2.1731863	182	2.2600714
117	2.0681859	150	2.1760913	183	2.2624511
118	2.0718820	151	2.1789769	184	2.2648178
119	2.0755470	152	2.1818436	185	2.2671717
120	2.0791812	153	2.1846914	186	2.2695129
121	2.0827854	154	2.1875207	187	2.2718416
122	2.0863598	155	2.1903317	188	2.2741578
123	2.0899051	156	2.1931246	189	2.2764618
124	2.0934217	157	2.1958996	190	2.2787536
125	2.0969100	158	2.1986571	191	2.2810334
126	2.1003705	159	2.2013971	192	2.2833012
127	2.1038037	160	2.2041200	193	2.2855573
128	2.1072100	161	2.2068259	194	2.2878017
129	2.1105897	162	2.2095150	195	2.2900346
130	2.1139433	163	2.2121876	296	2.2922561
131	2.1172713	164	2.2148438	197	2.2944662
132	2.1205739	165	2.2174839	198	2.2966652
133	2.1238516	166	2.2201081	199	2.2988531
134	2.1271048	167	2.2227165	200	2.3010300

200

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
201	2.3031961	234	2.3692159	267	2.4265113
202	2.3053541	235	2.3710679	268	2.4281346
203	2.3074960	236	2.3729120	269	2.4297523
204	2.3096302	237	2.3747483	270	2.4313638
205	2.3117539	238	2.3765770	271	2.4329693
206	2.3138672	239	2.3783979	272	2.4345689
207	2.3159703	240	2.3802112	273	2.4361626
208	2.3180633	241	2.3820170	274	2.4377506
209	2.3201463	242	2.3838154	275	2.4393327
210	2.3222193	243	2.3856063	276	2.4409091
211	2.3242825	244	2.3873898	277	2.4424798
212	2.3263359	245	2.3891661	278	2.4440448
213	2.3283796	246	2.3909351	279	2.4456042
214	2.3304138	247	2.3926970	280	2.4471580
215	2.3324385	248	2.3944517	281	2.4487063
216	2.3344537	249	2.3961993	282	2.4502491
217	2.3364597	250	2.3979400	283	2.4517864
218	2.3384565	251	2.3996737	284	2.4533183
219	2.3404441	252	2.4014005	285	2.4548449
220	2.3424227	253	2.4031205	286	2.4563660
221	2.3443923	254	2.4048337	287	2.4578819
222	2.3463530	255	2.4065402	288	2.4593925
223	2.3483049	256	2.4082400	289	2.4608978
224	2.3502480	257	2.4099331	290	2.4623980
225	2.3521825	258	2.4116197	291	2.4638930
226	2.3541084	259	2.4132998	292	2.4653828
227	2.3560259	260	2.4149733	293	2.4668676
228	2.3579348	261	2.4166405	294	2.4683473
229	2.3598355	262	2.4183013	295	2.4698220
230	2.3617278	263	2.4199557	296	2.4712917
231	2.3636120	264	2.4216039	297	2.4727564
232	2.3654880	265	2.4232459	298	2.4742163
233	2.3673559	266	2.4248816	299	2.4756712
234	2.3692159	267	2.4265113	300	2.4771213

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
301	2.4785665	334	2.5237465	367	2.5646661
302	2.4800069	335	2.5250448	368	2.5658478
303	2.4814426	336	2.5263393	369	2.5670264
304	2.4828736	337	2.5276299	370	2.5682017
305	2.4842998	338	2.5289167	371	2.5693739
306	2.4857214	339	2.5301997	372	2.5705429
307	2.4871384	340	2.5314789	373	2.5717088
308	2.4885507	341	2.5327544	374	2.5728716
309	2.4899585	342	2.5340261	375	2.5740313
310	2.4913617	343	2.5352941	376	2.5751878
311	2.4927604	344	2.5365584	377	2.5763413
312	2.4941546	345	2.5378191	378	2.5774918
313	2.4955443	346	2.5390761	379	2.5786392
314	2.4969296	347	2.5403295	380	2.5797836
315	2.4983106	348	2.5415792	381	2.5806250
316	2.4996871	349	2.5428254	382	2.5820634
317	2.5010593	350	2.5440680	383	2.5831988
318	2.5024271	351	2.5453071	384	2.5843312
319	2.5037907	352	2.5465427	385	2.5854607
320	2.5051500	353	2.5477747	386	2.5865873
321	2.5065050	354	2.5490033	387	2.5877110
322	2.5078559	355	2.5502284	388	2.5888317
323	2.5092025	356	2.5514500	389	2.5899496
324	2.5105450	357	2.5526682	390	2.5910646
325	2.5118834	358	2.5538830	391	2.5921768
326	2.5132176	359	2.5550944	392	2.5932861
327	2.5145477	360	2.5563025	393	2.5943925
328	2.5158738	361	2.5575072	394	2.5954962
329	2.5171959	362	2.5587086	395	2.5965971
330	2.5185139	363	2.5599066	396	2.5976952
331	2.5198280	364	2.5611014	397	2.5987905
332	2.5211381	365	2.5622929	398	2.5998831
333	2.5224442	366	2.5634811	399	2.6009729
334	2.5237465	367	2.5646661	400	2.6020600

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith
401	2.6031444	434	2.6374897	467	2.6693169
402	2.6042261	435	2.6384893	468	2.6702459
403	1.6053050	436	2.6394865	469	2.6711728
404	2.6063814	437	2.6404814	470	2.6720979
405	2.6074550	438	2.6414741	471	2.6730209
406	2.6085260	439	2.6424645	472	2.6739420
407	2.6095944	440	2.6434527	473	2.6748611
408	2.6106602	441	2.6444386	474	2.6757783
409	2.6117233	342	2.6454223	475	2.6766936
410	2.6127839	443	2.6464037	476	2.6776069
411	2.6138418	444	2.6473830	477	2.6785184
412	2.6148972	445	2.6483600	478	2.6794279
413	2.6159500	446	2.6493349	479	2.6803355
414	2.6170003	447	2.6503075	480	2.6812412
415	2.6180481	448	2.6512780	481	2.6821451
416	2.6190933	449	2.6522463	482	2.6830470
417	2.6201361	450	2.6532125	483	2.6839471
418	2.6211763	451	2.6541765	484	2.6848454
419	2.6222140	452	2.6551384	485	2.6857417
420	2.6232493	453	2.6560982	486	2.6866363
421	2.6242821	454	2.6570558	487	2.6875290
422	2.6253124	455	2.6580114	488	2.6884198
423	2.6263404	456	2.6589648	489	2.6893089
424	2.6273659	457	2.6599162	490	2.6901961
425	2.6283889	458	2.6608655	491	2.6910815
426	2.6294096	459	2.6618127	492	2.6919651
427	2.6304379	460	2.6627578	493	2.6928469
428	2.6314438	461	2.6630709	494	2.6937269
429	2.6324573	462	2.6646420	495	2.6946052
430	2.6334685	463	2.6655810	496	2.6954817
431	2.6344773	464	2.6665180	497	2.6963564
432	2.6354837	465	2.6674529	498	2.6972293
433	2.6364879	467	2.6683859	499	2.6981005
434	2.6374897	467	2.6693169	500	2.6989700

500

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
501	2.6998377	534	2.7275413	567	2.7535831
502	2.7007037	535	2.7283538	568	2.7543483
503	2.7015680	536	2.7291648	569	2.7551123
504	2.7024305	537	2.7299743	570	2.7558749
505	2.7032914	538	2.7307823	571	2.7566361
506	2.7041505	539	2.7315888	572	2.7573960
507	2.7050080	540	2.7323938	573	2.7581546
508	2.7058637	541	2.7331973	574	2.7589119
509	2.7067178	542	2.7339993	575	2.7596678
510	2.7075702	543	2.7347998	576	2.7604225
511	2.7084209	544	2.7355989	577	2.7611758
512	2.7092700	545	2.7363965	578	2.7619278
513	2.7101174	546	2.7371926	579	2.7626786
514	2.7109631	547	2.7379873	580	2.7634280
515	2.7118072	548	2.7387806	581	2.7641761
516	2.7126497	449	2.7395723	582	2.7649230
517	2.7134905	550	2.7403627	583	2.7656686
518	2.7143298	551	2.7411516	584	2.7664128
519	2.7151674	552	2.7419391	585	2.7671559
520	2.7160033	553	2.7427251	586	2.7678976
521	2.7168377	554	2.7435098	587	2.7686381
522	2.7176705	555	2.7442930	588	2.7693773
523	2.7185017	556	2.7450748	589	2.7701153
524	2.7193313	557	2.7458552	590	2.7708520
525	2.7201593	558	2.7466342	591	2.7715875
526	2.7209857	559	2.7474118	592	2.7723217
527	2.7218106	560	2.7481880	593	2.7730547
528	2.7226339	561	2.7489629	594	2.7737864
529	2.7234557	562	2.7497363	595	2.7745170
530	2.7242759	563	2.7505084	596	2.7752463
531	2.7250945	564	2.7512791	597	2.7759743
532	2.7259116	565	2.7520484	598	2.7767012
533	2.7267272	566	2.7528164	599	2.7774268
534	2.7275413	567	2.7535831	600	2.7781512

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
601	2.7788745	634	2.8020893	667	2.8241258
602	2.7795965	635	2.8027737	668	2.8247765
603	2.7803173	636	2.8034571	669	2.8254261
604	2.7810369	637	2.8041394	670	2.8260748
605	2.7817554	638	2.8048207	671	2.8267225
606	2.7824726	639	2.8055009	672	2.8273693
607	2.7831887	640	2.8061800	673	2.8280151
608	2.7839036	641	2.8068580	674	2.8286599
609	2.7846173	642	2.8075350	675	2.8293038
610	2.7853298	643	2.8082110	676	2.8299467
611	2.7860412	644	2.8088859	677	2.8305887
612	2.7867514	645	2.8095597	678	2.8312297
613	2.7874605	646	2.8102325	679	2.8318698
614	2.7881684	647	2.8109043	680	2.8325089
615	2.7888751	648	2.8115750	681	2.8331471
616	2.7895807	649	2.8122447	682	2.8337844
617	2.7902852	650	2.8129134	683	2.8344207
618	2.7909885	651	2.8135810	684	2.8350561
619	2.7916906	652	2.8142476	685	2.8356906
620	2.7923917	653	2.8149132	686	2.8363241
621	2.7930916	654	2.8155777	687	2.8369567
622	2.7937904	655	2.8162413	688	2.8375884
623	2.7944880	656	2.8169038	689	2.8382192
624	2.7951846	657	2.8175654	690	2.8388491
625	2.7958800	658	2.8182259	691	2.8394780
626	2.7965743	659	2.8188854	692	2.8401061
627	2.7972675	660	2.8195439	693	2.8407332
628	2.7979596	661	2.8202025	694	2.8413595
629	2.7986506	662	2.8208580	695	2.8419848
630	2.7993405	663	2.8215135	696	2.8426092
631	2.8000294	664	2.8221681	697	2.8432328
632	2.8007171	665	2.8228216	698	2.8438554
633	2.8014037	666	2.8234742	699	2.8444772
634	2.8020893	667	2.8241258	700	2.8450980

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N	Logarith.
701	2.8457180	734	2.8656961	767	2.8857954
702	2.8463371	735	2.8662873	768	2.8853612
703	2.8469553	736	2.8668778	769	2.8859263
704	2.8475727	737	2.8674675	770	2.8864907
705	2.8481891	738	2.8680564	771	2.8870544
706	2.8488047	739	2.8686444	772	2.8876173
707	2.8494194	740	2.8692317	773	2.8881795
708	2.8500333	741	2.8698182	774	2.8887410
709	2.8506462	742	2.8704039	775	2.8893017
710	2.8512583	743	2.8709888	776	2.8898617
711	2.8518696	744	2.8715729	777	2.8904210
712	2.8524800	745	2.8721563	778	2.8909796
713	2.8530895	746	2.8727388	779	2.8915379
714	2.8536982	747	2.8733206	780	2.8920946
715	2.8543060	748	2.8739016	781	2.8926510
716	2.8549130	749	2.8744818	782	2.8932068
717	2.8555192	750	2.8750613	783	2.8937618
718	2.8561244	751	2.8756399	784	2.8943161
719	2.8567289	752	2.8762178	785	2.8948697
720	2.8573325	753	2.8767950	786	2.8954225
721	2.8579353	754	2.8773712	787	2.8959747
722	2.8585372	755	2.8779469	788	2.8965262
723	2.8591383	756	2.8785218	789	2.8970770
724	2.8597386	757	2.8780959	790	2.8976271
725	2.8603380	758	2.8796692	791	2.8981765
726	2.8609366	759	2.8802418	792	2.8987252
727	2.8615344	760	2.8888136	793	2.8992732
728	2.8621314	761	2.8813847	794	2.8998205
729	2.8627275	762	2.8819550	795	2.9003571
730	2.8633229	763	2.8825245	796	2.9009131
731	2.8639174	764	2.8830934	797	2.9014583
732	2.8645111	765	2.8836614	798	2.9020029
733	2.8651040	766	2.8842288	799	2.9025468
734	2.8656961	767	2.8847954	800	2.9030900

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
801	2.9036325	834	2.9211660	867	2.9380191
802	2.9041744	835	2.9216865	868	2.9385197
803	2.9047155	836	2.9222063	869	2.9390198
804	2.9052560	837	2.9227255	870	2.9395192
805	2.9057959	838	2.9232440	871	2.9400181
806	2.9063350	839	2.9237620	872	2.9405165
807	2.9068735	840	2.9242793	873	2.9410142
808	2.9074114	841	2.9247960	874	2.9415114
809	2.9079485	842	2.9253121	875	2.9420080
810	2.9084850	843	2.9258276	876	2.9425041
811	2.9090209	844	2.9263424	877	2.9429996
812	2.9095560	845	2.9268567	878	2.9434945
813	2.9100905	846	2.9273704	879	2.9439889
814	2.9106244	847	2.9278834	880	2.9444827
815	2.9111576	848	2.9283958	881	2.9449759
816	2.9116902	849	2.9289077	882	2.9454680
817	2.9122221	850	2.9294189	883	2.9459607
818	2.9127533	851	2.9299296	884	2.9464523
819	2.9132839	852	2.9304396	885	2.9469433
820	2.9138138	853	2.9309490	886	2.9474337
821	2.9143432	854	2.9314579	887	9.9479236
822	2.9148718	855	2.9319661	888	2.9484130
823	2.9153998	856	2.9324738	889	2.9489018
824	2.9159272	857	2.9329808	890	2.9493900
825	2.9164539	858	2.9334873	891	2.9498777
826	2.9169800	859	2.9339932	892	2.9503648
827	2.9175055	860	2.9344984	893	2.9508514
828	2.9180303	861	2.9350031	894	2.9513375
829	2.9185545	862	2.9355073	895	2.9518230
830	2.9190781	863	2.9360108	896	2.9523080
831	2.9196010	864	2.9365137	897	2.9527924
832	2.8201233	865	2.9270161	898	2.9532763
833	2.9206450	866	2.9375179	899	2.9537597
834	2.9211660	867	2.9380191	900	2.9542425

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
901	2.9547248	934	2.9703469	967	2.9854265
902	2.9552065	935	2.9708116	968	2.9858754
903	2.9556877	936	2.9712758	969	2.9863238
904	2.9561684	937	2.9717396	970	2.9867717
905	2.9566486	938	2.9722028	971	2.9872192
906	2.9571282	939	2.9726656	972	2.9876663
907	2.9576073	940	2.9731279	673	2.9881128
908	2.9580858	941	2.9735896	974	2.9885590
909	2.9585639	942	2.9740509	975	2.9890046
910	2.9590414	943	2.9745117	976	2.9894498
911	2.9595184	944	2.9749720	977	2.9898946
912	2.9599948	945	2.9754318	978	2.9903389
913	2.9604708	946	2.9758911	979	2.9907827
914	2.9609462	947	2.9763500	980	2.9912261
915	2.9614211	948	2.9768083	981	2.9916690
916	2.9618955	949	2.9772662	982	2.9921115
917	2.9623653	950	2.9777236	983	2.9925535
918	2.9628427	951	2.9781805	984	2.9929951
919	2.9633155	952	2.9786369	985	2.9934362
920	2.9637878	953	2.9790929	986	2.9938769
921	2.9642596	954	2.9795484	987	2.9943171
922	2.9647309	955	2.9800034	988	2.9947569
923	2.9652017	956	2.9804579	989	2.9951963
924	2.9656720	957	2.9809119	990	2.9956352
925	2.9661417	958	2.9813655	991	2.9960737
926	2.9666110	959	2.9818186	992	2.9965117
927	2.9670797	960	2.9822712	993	2.9969492
928	2.9675480	961	2.9827234	994	2.9973864
929	2.9680157	962	2.9831751	995	2.9978231
930	2.9684829	963	2.9836263	996	2.9982593
931	2.9689497	964	2.9840770	997	2.9986952
932	2.9694159	965	2.9845273	998	2.9991305
933	2.9698816	966	2.9849771	999	2.9995655
934	2.9703469	967	2.9854265	1000	3.0000000

APPENDIX.

ADDEMUS hic nonnulla, quæ ad Geometriæ planæ potissimum, & Arithmeticæ tractatus vel prorsus necessaria censuimus, vel maxime utilia. Tractatus eosdem jam olim conscripseramus in privatum auditorum usum, qui ab Editore latinè redditi, & cæteris nunc a nobis conscriptis vel auctis præmissi sunt. Porro in Geometria plana seriem quandam theorematum jam tum ordinavimus, ex quibus fere omnia, quæ apud Euclidem, & cæteros Elementorum constructores occurrunt, vel sponte fluerent, vel facile, Præceptore indicante, deduci possent, soliti viva voce Tyronibus indicare deductiones ipsas, eosque ea ratione exercere in demonstratione theorematum, & problematum solutione. In Arithmetica verò demonstrationes pariter viva voce exponere soliti, eas plerumque ibidem omisimus cum obrui soleat Tyronis animus, si dum in operationibus Arithmeticis exercetur, & præcepta ad usum deducit, demonstrationum, quæ scripto admodum difficulter satis dilucidè exponi possunt, longiore ambitu interturbatur.

Hìc igitur ea, quæ Præceptor Tyroni insinuare potest, & quæ nos nostris Auditoribus insinuabimus, indicata potius, quam explicata adjiciemus. Erunt in iis & adnotationes quædam, & problemata exercendo Tyroni apta. Poterit autem hæc Tyroni ipsi Præceptor vel omnia, vel aliqua tantum selectiora pro ejus captu, & otio proponere, vel dum primum elementa percurrit, vel dum, absolutis semel sine hac appendice elementis, ea iterum relegit. Si Tyro sine ullo Præceptore Geometriam addiscit; hæc ubi elementa illa absolverit, videre poterit, sed nonnunquam consulendus erit aliquis Geometriæ peritior, ubi in deductione theorematum, vel solutione problematum vires suas incassum exercuerit: quod tamen multo rarius continget, si schemata, quæ hìc præcipimus, dililigenter delineare curet. Omittimus autem delineationem ipsam, ut eo acrius addiscentis industria exeitetur, & ex veritatibus, tanquam suis quodammodo compertis, jucundiorem capiat voluptatem. Censemus autem nihil utilius ad Geometriam penitius cognoscendam haberi posse, quam hujusmodi contentio Tyronis in deducendis theorematis, vel solvendis problematis; qua fit, ut Geometria ipsa ejus animo multo altius insideat, & investigationis fontes aperiantur.

§. I.

De iis, quæ pertinent ad Geometriam Planam.

1. Axioma 5 converti posse notet in lineis rectis, & angulis æqualibus, quæ si æqualia sunt, debent congruere, & inde pendet demonstratio prop. 2, & 3.

2. Lineæ rectæ, vel curvæ, ut & superficiei planæ, vel curvæ definitionem omisimus, quod nota sint æque, ac quid sit majus, æquale, minus. At illud notandum, eam esse rectitudinis naturam, ut si bina puncta rectæ congruant cum binis alterius, debeant totæ ipsæ rectæ congruere, licet in infinitum productæ. Inde eruuntur hæc bina Euclidis axiomata. Rectæ lineæ spatium non claudunt: Rectæ lineæ segmentum commune non habent nimirum in communem caudam non desinunt.

3. In schol. post def. 4 pag. 2. lin. 35. notentur illa verba: *posita corporum continuitate*: nam si corpora constent punctis indivisibilibus, & a se invicem remotis, licet connexis ratione quadam exposita in dissertatione de lumine habita in Collegio Rom. an. 1748, puncta quidem realia sunt, & punctum quodvis potest solum etiam existere: corpora continuam extensionem, quam in iis Physici communiter admittunt nullam habent, ac in ea sententia alia est lineæ, superficiei, solidi idea. Linea est spatium per cursum motu puncti, superficies concipitur generari motu lineæ, solidum motu superficiei.

4. Post def. 6. addi potest segmentum circumferentiæ circuli dici *arcum*, rectam, quæ ipsum subtendit, *chordam*, figuram interceptam arcu & chorda, *segmentum*, interceptam binis radiis *sectorem*.

5. In schol. post def. 6. assumitur pag. 3 lin. 22. binas rectas ductas ex communi centro binorum circulorum, intercipere tot gradus in minori, quot in majori. Id ipsum accuratè demonstrari potest. Si majoris circuli circumferentia concipiatur divisa in quotcumque partes æquales, ut in gradus, & ad singulas divisiones ducantur rectæ: eæ secabunt in partes pariter æquales etiam peripheriam circuli minoris: Nam si quivis sector majoris circuli concipiatur revolvi circa alterum radium; arcus circuli majoris debebit congruere arcui sibi proximo, cum omnia eorum puncta æque distent a centro, & ipsi æquales sint. Inde autem facile eruitur, debere simul & arcum minoris circuli arcui sibi proximo congruere, adeoque æqualem esse. Inde autem cætera sponte fluunt.

7. Eadem conversione demonstratur etiam circulum a diametro secari in binos æquales semicirculos, quod in defin. 5. assumitur.

8. Ope postulati 3 ad datum punctum poni potest recta æqualis rectæ datæ, quod Euclidi est prop. 2 l. 1. Id ipse operosiore methodo solvit; cum non assumat inter postulata translationem intervalli ex uno in alium locum, quod nos, ut evidenter possibile, & factu facile assumpsimus cum aliis multis.

9. Potest jam hinc insinuare Tyroni Præceptor discrimen inter problemata determinata, quæ vel unicam solutionem admittunt, ut ubi a recta majore abscindenda est recta datæ minori æqualis incipiendo a dato extremo, vel earum numerum determinatum, cujusmodi plura infra occurrent, & indeterminata, quæ infinitas solutiones admittunt, ut hic, ubi circa datum punctum descripto circulo cum intervallo rectæ datæ, quævis recta ad ejus peripheriam terminata solvit problema.

10. Hinc Tyro loci geometrici ideam habebit, qui nimi-

nimirum omnes indeterminati problematis solutiones continet. Circuli descripti peripheria respectu hujus problematis est locus geometricus.

11. In scholio post def. 7 assumuntur arcus circuli pro mensura angulorum. Notet Tyro, id rite præstari, ubi vertex anguli sit in centro. Facile enim demonstratur ope superpositionis, angulos ad centrum æquales subtendi arcubus æqualibus, & viceversa. Quare duplo, triplo, centuplo angulo respondet duplus, triplus, centuplus arcus.

12. In Coroll. sequenti assumitur arcum PQ abscissum centro P intervallo BE esse æqualem arcui BE. Id accuratè demonstrari potest ex prop. 4, quæ hinc non pendet. Ductis enim rectis BE, PQ, habebuntur bina triangula BCE, PMQ, in quibus latera unius erunt æqualia lateribus alterius, adeoque & angulus ad centrum C æqualis; unde patet, quo pacto in dato circulo applicari possit chorda æqualis datæ cuivis rectæ, quam tamen non posse diametro majorem esse patebit infra n. 50.

13. Porro hinc deducitur hoc theorema. In æqualibus circulis chordæ æquales subtendunt arcus æquales ita nimirum, ut cùm quævis chorda subtendat hinc inde binos arcus; bini minores æquentur inter se, & bini majores inter se.

14. Ad defin. 8. exponi potest norma, cujus ope recta datæ rectæ perpendicularis duci potest pet datum punctum, & ejus examen, quod fit producto altero anguli recti latere, videndo an ea congruat novo angulo recto, qui fit ejusmodi productione. A norma ipsa perpendicularis appellatur normalis.

15. Corollarium 2, & 4. defin. 10. converti possunt. Si fuerint (Fig. 2.) anguli HCF, HCL simul æquales duobus rectis, rectæ, CF, CL jacebunt in directum, quia FC producta debet efficere cum HC angulum, qui sit complementum ad duos rectos anguli HCF, adeoque æqualis ipsi HCL, & si binæ rectæ CH, CK efficient cum recta FL angulos FCK, LCH ad verticem oppositos æquales, jacebunt pariter in directum.

Utriusque hujus inversi theorematis usus est frequentissimus, primum Euclides demonstravit, secundum omisit.

16. Potest Tyroni præceptor proponere, ut ope horum corollariorum ostendat, quo pacto extrorsum metiri liceat angulum, quem binæ externæ facies arcis, vel cujuvis alterius ædificii continent in plano horizontali. Præstabitur ope corol. 2. si producto altero anguli latere, mensuretur is, quem ea linea continet cum latere altero, & capiatur complementum ad gr. 180, ope corol. 3, si ducatur quævis recta ab ipso anguli vertice, & a gradibus 360. demantur bini anguli, quos ea cum binis iis lateribus continet; ope cor. 4, si producto utroque latere mensuretur angulus ad verticem oppositus.

17. Quod si eo pacto omnes arcis anguli determinentur, & angulorum latera mensurentur passibus; substituendo passibus ipsis particulas æquales quascunque, poterit arcis ambitus delineari.

18. In parallelarum doctrina assumpsimus in schol. post defin. 17. æqualem inclinationem ad quamvis rectam, quæ nihilo minus evidens est, quam quidquid alii assumunt. At addi potest illud, rectas, quæ convergunt, si satis producantur, debere demum concurrere, licet infinita sint genera curvarum, quæ in infinitum productæ ad rectam, vel ad se invicem accedunt ultra quoscunque limites; quin usquam concurrant, adeoque rectam, quę parallelarum alteram secet, debere secare & alteram.

19. Hinc infertur theorema, quod Euclides pro axiomate assumpsit. Si recta incidens in binas rectas fecerit angulos internos ad eandem partem minores duobus rectis, eæ rectæ satis productæ concurrent. Parallelæ enim continent angulos æquales binis rectis. Quare si per concursum alterius ducatur recta alteri parallela; illa prior hanc novam parallelam secabit, adeoque & illam alteram rectam.

20. Post hic proponi demonstrandum theorema, quod summo usui esse solet, Binæ rectæ binis aliis parallelæ, si uspiam concurrunt, continent angulos ad easdem partes æquales angulis, qui ab iis continentur. Facile

tile demonstrabitur producendo earum alteram, si opus sit, donec occurrat harum alteri. Statim enim apparebit in ipso concursu haberi angulum æqualem utrilibet e præcedentibus.

21. Post def. 18. addi potest, inter figuras quadrilineas *Trapezium* esse id, quod habet latera & angulos utcunque inæquales, *Rhombum*, qui omnia latera æqualia habet *Rhomboidem*, quæ bina quævis opposita æqualia. *Multilateras*, *multangulas*, vel *polygonas* dici figuras plurium laterum, & angulorum, *pentagonum* quinque, *exagonum* sex, *decagonum* decem habere latera, & ita porro. *Polygonum regulare* & latera omnia habere æqualia, & omnes angulos æquales.

22. Post prop. 1. proponi potest quærendum, quam summam conficiant omnes anguli interni cujusvis polygoni, quam omnes externi. Si a singulis angulis ad quodvis punctum assumptum intra ipsum ducantur rectæ, fient tot triangula, quot sunt latera; & omnes eorum anguli simul æquantur omnibus angulis internis polygoni, una cum angulis, qui fiunt in eo puncto, & æquantur 4. rectis. Hinc omnes anguli interni æquantur tot rectis, quot exprimit duplus numerus laterum demptis 4. Cumque quivis externus cum suo interno æquetur duobus rectis; omnes simul externi æquabuntur illis 4. rectis, qui a duplo laterum numero dempti sunt ad habendos omnes internos.

23. Inde eruetur quot graduum debeat esse angulus internus cujusvis polygoni regularis, dividendo summam per numerum laterum. In pentagono summa æquatur 6. rectis sive gradibus 540, quæ divisa per 5. exhibet angulum graduum 108.

24. Post coroll. 3. proponi potest hoc probl. A puncto dato extra rectam datam ducere aliam rectam, quę cum ipsa contineat angulum æqualem dato. Solvetur, e quovis puncto rectæ datæ ducendo rectam, quæ cum data contineat angulum æqualem dato, tum aliam huic parallelam e puncto dato vel ducendo e puncto dato rectam parallelam rectę datę tum aliam, quę cum ea

contineat angulum æqualem dato. Facta constructione statim patebit hanc rectam postremam cum data continere angulum æqualem dato.

25. In propr.2. notandum, quodvis latus pro basi assumi posse; sed in triangulis rectangulis basis nomine, nisi quid aliud exprimatur, intelligi hypothenusam, sive latus recto angulo oppositum.

26. Indicari hic potest, quo pacto distantiam aliquam metiri liceat ope hujus propositionis, ducendo ab extremis ejus punctis ad punctum quodvis binas rectas, mensurando eas, & angulum ibidem contentum, construendo alibi angulum ejusmodi, cum lateribus æqualibus, & mensurando basim novi trianguli obventuram æqualem quæsitæ distantiæ.

27. Ex eadem deducitur chordas æqualium arcuum in æqualibus circulis æquales esse; cum nimirum si utrobique ducantur ab earum extremis radii ad centrum anguli in centris æquales fiant, & latera circa ipsos æqualia.

28. E coroll.2. eruitur, in triang. isoscelio productis lateribus, etiam angulos infra basim æquales esse inter se; nam cum iis, qui supra basim sunt singuli binos rectos complent.

29. Post corol. 4. potest proponi construendum super data recta triangulum vel æquilaterum; vel isosceles datorum laterum; cumque id solvatur, facto centro in utroque extremo datæ rectæ, intervallo ipsius in primo casu, dati lateris in secundo, ductis binis circulis, & ad eorum intersectiones binis rectis: notari potest solutionem ejusmodi haberi per intersectionem binorum locorum geometricorum, de quibus n.9, & in primo casu semper haberi duas solutiones hinc inde a recta data, in secundo vel duas, vel nullam, lateribus nimirum dimidiam basim non excedentibus; ubi problematis impossibilis casus primo occurret.

30. Aliquanto difficilius, sed varietate casuum multo utilius problema erit hujusmodi. Dato puncto in altero latere dati anguli rectilinei, construere triangulum æquilaterum,

rerum; cujus basis sit in eo latere, & incipiat a dato puncto, vertex vero sit in latere altero. Solvetur, assumendo in illo primo latere segmentum quodvis a puncto dato, construendo supra ipsum hinc inde bina triangula æquilatera, producendo utriusque latus illud, quod ad datum punctum terminatur, donec alteri lateri occurrat, ac ex hoc occursu ducendo rectam parallelam alteri lateri ejusdem trianguli æquilateri. Admodum facile demonstrabitur haberi intentum ob angulorum æqualitatem in parallelis, ex quibus deducetur angulos triangulorum prodeuntium inter se omnes æquari. Patebit verò solutiones fore semper binas, præter casum, in quo angulus datus sit graduum 60, vel 120, quo casu alterius trianguli vertex in infinitum recedet, nec uspiam jam erit.

31. In Coroll. 1. pr. 3. notetur, latera æqualia debere opponi angulis æqualibus. Possunt enim bini anguli cum uno latere æquari sine triangulorum æqualitate, si nimirum in altero latus illud iis angulis interjaceat in altero opponatur, vel non opponatur angulis æqualibus.

32. Post Coroll. 4. addendum illud. Si per quodvis diametri punctum ducantur binæ rectæ lateribus parallelæ; eæ parallelogrammum divident in 4 parallelogramma, quorum bina, per quæ diameter transit, dicuntur circa diametrum, reliqua bina dicuntur complementa. Porro complementa ipsa semper æqualia erunt. Nam integrum parallelogrammum secatur a diametro in bina triangula æqualia, a quibus singulis demendo bina triangula, quæ pariter sunt dimidia parallelogrammorum circa diametrum, relinquentur complementa quoque æqualia.

33. Tum proponi possunt demonstranda hæc theoremata, quorum usus sæpissimè occurrit. In quovis parallelogrammo binæ diametri se mutuo bifariam secant: si rectangulum sit, æquales sunt, & in ipsarum intersectione facto centro, circulus ipsi circumscribi potest. Demonstrabitur primum, considerando bina triangula, ad verti-

cem

tem opposita, in quibus invenientur latera parallelogrammi opposita æqualia, & anguli hinc inde ab ipsis alterni in parallelis æquales. Demonstrabitur secundum, considerando triangula, quæ uttavis diameter continet cum binis rectanguli lateribus continentibus rectum angulum quæ habebunt latera æqualia, adeoque & bases. Tertium a primo, & secundo conjunctis sponte fluit.

34. In demonstratione Prop. 4. superpositis basibus non est ostensum verticem unius trianguli non posse cadere in latus alterius, vel intra triangulum ipsum. At non posse cadere in latus, satis patet ob ipsam laterum æqualitatem: non posse cadere intra alterum triangulum, demonstrabitur, si conjunctis verticibus, ut in ipsa demonstratione, considerentur bina triangula isoscelia; nam ad absurdum devenietur eodem modo, si productis alterius lateribus consideretur in eo æqualitas angulorum ultra basim, in altero verò citra, ac illorum alter erit pars alterius ex his, alter vero totum respectu alterius.

35. Atque hic quidem exemplum habet Tyro demonstrationis indirectæ per reductionem ad absurdum. Directa, & expeditior demonstratio habebitur; si bases ita conjungantur, ut vertices cadant ad partes oppositas. Conjunctis enim verticibus, orientur bina triangula isoscelia, ex quorum angulis ad basim communem æqualibus, sponte fluet æqualitas angulorum oppositorum basi in dictis triangulis, & inde eorum æqualitas per prop. 2.

36. Ex eadem Prop. demonstrari potest Rhombum, ac Rhomboidem esse parallelogramma. Ducta enim diametro habebuntur bina triangula per hanc propositionem æqualia, in quibus anguli ipsius diametri cum lateribus exhibebunt æqualitatem angulorum alternorum, pro demonstrando parallelismo laterum. Porro hinc, & ex corollariis Prop. 2., & 3, eruitur in quadrilineo, si ex hisce tribus, 1. quod utrumque par oppositorum laterum servet parallelismum, 2. utrumque servet æqualitatem, 3. alterum & parallelismum, & æqualitatem servet, habeatur

beatur unum, haberi semper reliqua duo. Bina ex his Euclides demonstravit: tertium, quod hic demonstravimus, licet æque necessarium, omisit.

37. Notandum hic in solis triangulis ab æqualitate laterum deduci æqualitatem angulorum, & arearum.

38. Ope prop. 5. facile solvitur hoc problema. Cuivis polygono regulari circulum circumscribere. Solvetur, secando bifariam binos angulos proximos. Bissecantium concursus exhibebit centrum quæsiti circuli. Nam ob angulorum æqualitatem eæ rectæ cum latere poligoni constituent triangulum isoscele. Ex ipso concursu ducta recta ad angulum proximum, fiet novum triangulum æquale priori; habebit enim mediam e tribus rectis bissecantibus angulos communem, latus ipsi proximum æquale lateri prioris, & angulum interceptum æqualem. Quare hæc tertia recta a suo angulo abscindet quantum & prima, nimirum ejus dimidium. Erit igitur & hoc isoscele, ac ita porrò.

39. Ex Coroll. 3. ipsius pr. 5. facile deducitur, quo pacto super data recta quadratum construi possit, vel rectangulum datorum laterum, & concipiendo superposita latera binorum quadratorum, patebit lateris majoris quadratum majus esse, & viceversa.

40. Licebit hic eruere alium locum geometricum, qui contineat vertices omnes omnium triangulorum isoscelium habentium datam rectam pro basi, sive centra omnium circulorum transeuntium per data duo puncta. Is erit recta indefinita secans bifariam, & ad angulos rectos rectam datam, seu jungentem data puncta:

41. Eruetur etiam hoc theorema summo sæpe futurum usui. In triangulo isoscelio ducta ab angulo basi opposito recta quadam, si ex hisce tribus, 1. quod angulus secetur bifariam, 2. quod basis secetur bifariam, 3. quod eadem secetur ad angulos rectos, habeatur unum, habebuntur & reliqua duo, & si in quodam triangulo habeantur duo ex iis, id triangulum erit isoscele. Demonstratio ex propositionis demonstratione sponte fluit.

42. Pro-

42. Problema Tyroni exercendo aptum esse potest hujusmodi. In data recta invenire punctum a binis datis punctis æquè distans. Solvetur jungendo recta puncta data, & ex ipsa bifariam secta ducendo rectam perpendicularem indefinitam, cujus occursus cum data recta solvet problema, qui concursus abibit in infinitum, nec usquam jam erit; si bina puncta jacuerint in recta datæ rectæ perpendiculari.

43. Omitti autem non debet hoc aliud; datis tribus punctis invenire centrum circuli per ea transeuntis. Solvetur conjungendo unum cum reliquis, secando bifariam rectas jungentes, & ducendo per sectionum puncta rectas perpendiculares iis, quarum concursus determinabit quęsitum centrum; quod tamen in infinitum recedet, nec usquam jam erit, si tria data puncta in directum jaceant, recta illa quodammodo æquivalente arcui circuli infiniti.

44. Id autem coincidit cum solutione hujus problematis: dato triangulo circumscribere circulum. Et quoniam datis tribus punctis, unicum invenitur centrum circuli per ea transeuntis, eruitur hoc theorema: Si binorum circulorum tria peripheriæ puncta congruant, congruunt reliqua omnia. Inde autem fluit solutio hujus problematis: dato circuli arcu invenire centrum, & ipsum complere. Satis erit assumptis in eo tribus punctis ad arbitrium invenire centrum circuli per ea transeuntis.

45. Potest exercitationis gratia proponi & hoc: In data recta invenire punctum, ad quod a binis datis punctis ductæ binæ rectæ contineant cum recta ipsa angulos æquales. Solvetur ducendo ex altero rectam perpendicularem rectæ datæ, & eam producendo tantundem; tum ex altero dato puncto ad punctum extremum rectæ productæ ducendo rectam; & erit idem casus, quem solvimus in scholio, pertinens ad reflexionis punctum.

46. Post Coroll. 4. hujus prop. 5. proponendum hoc problema. Datum circuli arcum bifariam secare. Solvetur ducendo e centro rectam perpendicularem chordæ

dati

dati arcus. Deducenda autem sequentia theoremata summo usui futura. Diameter, quæ chordam non per centrum transeuntem bifariam secat, vel quæ chordam quamvis secat ad angulos rectos, secat bifariam & arcum. Si arcum secat bifariam, secat bifariam, & ad angulos rectos chordam. Chorda, quæ aliam chordam, & ejus arcum bifariam secat; vel arcum bifariam, & ejus chordam ad angulos rectos, est diameter. Hæc facilè demonstrantur. Inde fluit hoc aliud: Binæ chordæ, quæ diametri non sint, non possunt se mutuo secare bifariam; recta enim e centro ad intersectionem ducta esset utrique perpendicularis. Demum habetur solutio hujus problematis: Dati circuli centrum invenire: solvitur, si ducta chorda quavis, & secta bifariam, per sectionem ducatur recta ipsi perpendicularis utrinque terminata ad circumferentiam, quæ erit diameter, & secta bifariam exhibebit centrum quæsitum.

47. In prop. 6. si punctum E cadat inter puncta C, & B, vel in B, demonstratio habebitur addendo binis triangulis æqualibus trapezium commune in primo casu, triangulum in secundo.

48. Ipsa prop. ac ejus corollaria convertenda sunt. Maximos enim conversa usus habent. Nimirum parallelogramma, vel triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes, vel parallelogrammum duplum trianguli, sunt inter easdem parallelas: Facile demonstrantur, cum ob bases æquales debeant (per schol. sequens) habere altitudines æquales. Quare recta per vertices ducta, & recta ducta per bases claudunt bina perpendicula æqualia, & proinde parallelæ sunt.

49. Ex rectangulorum mensura, quæ habetur in scholio facile deducitur rectangulum contentum sub binis rectis, quæ nimirum angulum rectum contineant, æquari simul rectangulis omnibus contentis sub illa, & partibus omnibus hujus. Nam idem est unum numerum multiplicare per alium simul, ac multiplicare partes, sive idem est aliquid accipere decies, ac accipere prius bis, tum ter, tum quinquies: Inde vero eruitur etiam

qua-

quadratum lineæ æquari rectangulis omnibus, quæ ipsa continet cum omnibus suis partibus, ac rectangulum, quod una pars lineæ continet cum tota æquari illi, quod continet secum, & cum altera parte, sive quadrato sui, & rectangulo binarum partium, qui sunt casus particulares prioris theorematis. In fine autem scholii, ubi de circuli dimensione agitur, notandum, contemptum quantitatum infinitesimarum adhiberi posse sine ullo erroris periculo ut in solidis demonstratur. Sed de infinitesimis multo uberius agetur post sectiones conicas tomo 2.

50. Ex prop. 7, quæ fæcundissima est, plurima theoremata, ac solutiones problematum derivari possunt. Derivetur in primis hoc theorema. In triangulo rectangulo basis est major utrovis latere, & si in binis triangulis rectangulis bases æquales habentibus unum latus uni lateri æquale erit, erit & alterum alteri æquale, ac tota triangula æqualia; si autem unum latus primi sit majus uno latere secundi, erit alterum minus altero. Patet ex eo, quod summa quadratorum laterum est æqualis quadrato basis.

51. Inde sponte fluet hoc aliud. In circulo chordæ quæ a centro æque distant, æquales sunt: omnium chordarum maxima est diameter, reliquæ eo minores, quo magis a centro distant. Ducto enim a centro perpendiculo in chordam quamvis, quod ipsam secabit bifariam, fiet triangulum rectangulum, quod habebit pro basi radium, pro lateribus semichordam, & distantiam a centro, ex quo omnia facile deducuntur.

52. Proponenda hæc duo problemata: Datis quotcunque rectis, aliam invenire, cujus quadratum sit æquale simul quadratis omnibus earum omnium: Datis binis rectis invenire aliam, cujus quadratum æquetur differentiæ quadratorum earundem. Primum solvetur, conjungendo ope anguli recti quadrata binarum in quadrato novæ rectæ, tum quadratum tertiæ cum quadrato hujus novæ in alia, & ita porrò. Secundum, abscindendo ex latere altero anguli recti segmentum æquale rectæ minori, tum ex extremo ejus puncto applicando in ipso angulo recto

ba-

basim æqualem majori; latus enim alterum problema solvet.

53. Tum hoc theorema inferatur, quod rursus fæcundissimum erit. Rectarum omnium, quæ a dato puncto duci possunt ad datam rectam indefinitam brevissima est perpendicularis, reliquæ eo majores, quo magis a perpendiculari distant; & quæ hinc inde æque distant æquales, nec nisi binæ hinc inde æquales duci possunt. Ea omnia ex ipsa propositione sponte fluunt, si consideretur, quamvis rectam esse basim trianguli rectanguli, cujus alterum latus constans est perpendicularis illa, alterum distantia ab eadem assumpta in ipsa recta indefinita.

54. Inde hæc theoremata consequuntur. Quævis recta indefinitè producta vel circulum secat in duobus punctis, vel contingit in unico, vel illi nusquam occurrit: & in primo casu omnia puncta segmenti binis sectionibus intercepti, sive chordæ, jacent intra circulum, puncta reliqua omnia ejusdem rectæ jacent extra: in secundo casu præter unicum punctum contactus reliqua omnia jacent extra circulum. Si enim recta transit per centrum; in ea pars prima est manifesta: si per id non transit; demisso in eam perpendiculo e centro, si id perpendiculum fuerit minus radio circuli, cadet intra circulum, & recedendo ab ipso hinc inde, distantia a centro semper magis crescet, donec deveniatur ad distantiam æqualem radio, quæ deinde semper major evadet. Si id perpendiculum erit æquale radio, extremum ejus punctum cadet in peripheriam, tum hinc inde distantiæ omnes radio majores erunt. Si perpendiculum fuerit majus radio, multo majores erunt reliquæ omnes distantiæ.

55. Quædam, quæ ad tangentem circuli pertinent, demonstravimus alia methodo in corollariis prop. 8. At vel hic, vel ibi potest deduci hoc theorema maximi usus. Si per quoddam peripheriæ punctum transeant binæ rectæ, & ex hisce tribus, 1. quod altera sit circuli tangens, 2. quod altera sit circuli diameter, 3. quod angulum rectum constituant, habeantur duo simul, habebitur & tertium.

56. Tum hoc illud: Si in circulo adsit chorda, & alia recta per quoddam peripheriæ punctum transeat, ac ex hisce tribus, 1. quod arcus a chorda subtensus in eo puncto secetur bifariam. 2. quod ea recta circulum ibi tangat, 3. quod ipsi chordæ parallela sit; quotiescunque habebuntur duo, habebitur & tertium. Facile autem demonstrabitur, ducta ex illo puncto arcus diametro circuli, qui se ipsum arcum bifariam secat, & illa recta sit ipsi chordæ parallela, secabit ad angulos rectos chordam, adeoque erit perpendicularis illi rectæ, quæ proinde erit tangens. Si ea fuerit tangens, illa diameter erit perpendicularis ipsi, ut chordæ adeoque ipsa tangens parallela chordæ. Si autem illa recta fuerit tangens, & parallela chordæ, diameter erit perpendicularis illi, adeoque & chordæ, quam proinde secabit bifariam.

57. Potest proponi hoc problema satis utile: circulum describere, qui rectam datam contingat in puncto dato, & transeat per punctum datum extra ipsam. Solventur per intersectionem binorum locorum Geometricorum. Alter erit recta datæ rectæ perpendicularis in puncto dato, in qua jacent omnia centra circulorum ibi tangentium ipsam rectam datam; alter recta secans bifariam, & ad angulos rectos rectam jungentem punctum contactus cum altero puncto dato in qua nimirum sunt omnia centra circulorum transeuntium per ea puncta.

58. Demum hic jam solvi potest hoc problema: Dato polygono regulari circulum inscribere: Solvetur autem secando bifarim binos angulos proximos; ac ex concursu, quod erit centrum, ducendo ad latus interceptum rectam perpendicularem, quæ erit radius. Nam rectæ ex eo centro ad omnes angulos ductæ eos bifariam secant juxta num. 38. Quare si ex ipso concursu in bina quævis latera proxima demittantur perpendicula; ea constituent bina triangula rectangula habentia pro basi communi rectam angulum interceptum bifariam secantem pro altero latere dimidia latera polygoni,

ni,

hi, quæ semper æqualia erunt; ac proinde perpendiculum quodvis sibi proximo æquale erit, & uno assumpto pro radio, circulus per omnium extrema transibit, ac latera omnia continget.

59. Facile eruetur ex ipsa demonstratione, in ipsis contactibus latera singula polygoni bifariam secari.

60. Patebit autem eadem demonstratione etiam in quovis triangulo concursum binarum rectarum binos angulos secantium bifariam, præbere centrum circuli inscribendi. Exhibent enim eæ binæ rectæ bissecantes tria perpendicula æqualia.

61. In quovis triangulo bina latera simul tertio majora esse, videtur satis manifestum, ex ipsa rectitudinis natura. At id quidem acuratissimme demonstrari potest ope corol. 1. prop. 8. Si enim (Fig. 35.) binorum laterum BD, DC primum concipiatur productum in A ita, ut sit DA æqualis DC, ducta CA, erit ob isoscelismum angulus DCA æqualis DAC. Quare totus BCA major BAC, & BA, sive BD, DC simul superabunt BC.

62. Inde consequetur hoc aliud theorema. Si bina triangula basim communem habeant, vertex autem alterius intra alterum cadat, hujus bina latera simul minora erunt binis lateribus illius, angulus vero ab iis contentus major illius angulo. Facile demonstrabitur producto inclusi latere altero, donec occurrat lateri includentis. Fiet enim super eadem basi tertium triangulum, cujus latera simul facile demonstrabuntur majora lateribus inclusi, minora lateribus includentis, ut angulus contra illius angulo minor, hujus major.

63. Ad Corol. 2. notari potest, si binorum triangulorum superponantur potius latera majora, fieri posse, ut punctum C cadat extra triangulum ABD, in ipsam basim AD, vel intra triangulum. In primo casu demonstratio facta locum habet, in secundo res est manifesta, in tertio demonstratur ope numeri præcedentis. Nam eo casu cadente C intra triangulum, rectæ AC, CB simul erunt minores rectis AD, DB, & demptis BC, BD æqualibus, recta AD erit major, quam AC.

64. Ex ipso Corol. 2. sponte fluunt sequentia theoremata. Rectarum omnium, quæ ex puncto dato extra centrum circuli terminantur ad omnia puncta peripheriæ, maxima erit ea, quæ ad centrum ducta, ac producta peripheriæ occurit ultra ipsum centrum, reliquæ eo minores, quo per majores arcus distant ab eo occursu puncta, ad quæ terminantur, ac binæ tantummodo quæ hinc inde per æquales arcus distant ab occursu eodem, æquales inter se sunt: minima vero erit nulla, si punctum detur in ipsa peripheria, ac si detur extra, erit ea, quę terminatur ad punctum priori e diametro oppositum. Satis erit ad hæc omnia demonstranda ducere radium e centro ad id punctum peripheriæ, ad quod terminatur recta ipsa, & considerare variationes omnes, quas subit angulus contentus in centro ab hoc radio, & a recta jungente centrum cum puncto dato, cujus bina latera semper eadem erunt, basis vero recta illa a puncto dato ad punctum peripheriæ terminata augebitur, vel minuetur cum angulo.

65. Inde verò facile admodum deducitur: chordam arcus magis a semicirculo recedentis esse minorem: circulum ab alio circulo vel secari in binis punctis ita, ut alter ex ejus arcubus binis interfectionibus interceptus sit totus intra ipsum, alter totus extra, & recta, quæ conjungit bina eorum circulorum centra, bifariam secet tum arcus ipsos, tum chordam per interfectiones ductam, ac secet chordam eandem ad angulos rectos: vel contingi in unico pencto, quod quidem semper jacebit in eadem recta cum binis centris ita, ut si inter ipsa centra jaceat, alter circulus extra alterum cadat, & convexitatem sibi obvertant; si verò utrumque centrum jaceat ad eandem ejus plagam, totus minor circulus in majori includatur: vel demum sibi nusquam occurrere, sive alter ad alterum non pertingat sive eum complexus ultra ipsum transcurrat. Hæc autem patebunt omnia, si pro puncto dato superioris numeri assumatur ipsum alterius circuli centrum.

66. In Corol. 1. post prop. 9, cum dicitur arcum

esse

esse mensuram anguli, non intelligitur mensura in eo sensu, in quo sumitur in schol. post prop. 7, ut sit id, quod aliquoties sumptum adæquat totum, sed pro quantitate æquali, qua mensurata habeatur magnitudo ejus quantitatis, cujus mensura dicitur, atque in hoc sensu fere semper etiam inferius accipietur.

67. In ipsa Prop. 9. notandum, si arcus circuli sit semicirculo major, non posse in communi angulorum consideratione angulum ipsi insistere ad centrum, licet possit ad circumferentiam. Nam ex binis ejus extremis rectæ ad centrum ductæ angulum constituent versus ipsum. Ac si ipse arcus semicirculo æqualis sit, bini ejusmodi radii in directum jacebunt, nec angulum constituent. Hinc ut in hoc communi modo concipiendi angulos demonstretur Corol. 1. recurrendum est iterum ad demonstrationem propositionis, & in hoc casu semper centrum necessariò cadet intra angulum, ut in fig. 40, eritque semper dimidius arcus AE mensura anguli ADE, dimidius BE mensura anguli BDE, adeoque dimidium totius AEB erit mensura totius anguli ADB.

68. Cæterum anguli, sive rectarum inclinationes considerari possunt etiam ex parte opposita cuspidis, nimirum externa, vel convexa, qui ab aliquibus dicuntur anguli gibbi. Quoniam id summo usui esse potest, & ad Geometriæ vim, & analogiam quandam intelligendam plurimum conducit, capiatur circinus, ac sensim aperiatur cuspide utraque, & hiatu spectante Cœlum, donec bina ejus crura in directum jaceant, tum motu in contrariam partem inflectantur. Initio quidem angulus communi modo consideratus Cœlum spectabit; tum is perpetuo crescens abibit in rectum, deinde in obtusum. Jacentibus in directum cruribus, angulus non evadet nullus, sed æqualis binis rectis, sive graduum 180. Deinde vero angulus communi modo consideratus jam spectabit deorsum; at ille, qui

Cœlum spectabat, adhuc magis auctus evadet major binis rectis, & fiet is, quem diximus angulum gibbum. Et si eo quidem pacto anguli considerentur, propositio erit generaliter vera, & cuicunque arcui insistat ad circumferentiam angulus; habebit alium insistentem ad centrum sui duplum.

69. Quin immo concipi potest angulus rectæ lineæ cum alia recta, ut major etiam 4. rectis, & graduum quotcumque, concipiendo alteram circa alteram absolvere integras conversiones quotcunque.

70. E Corol. 1. sponte fluit hoc theorema. Anguli omnes, qui in eodem, vel in æqualibus circulis insistunt arcubus æqualibus, ac ad peripheriam terminantur, sunt inter se æquales. Inde vero hoc aliud ejus inversum. Locus, qui continet ad easdem partes vertices omnes angulorum æqualium, quorum crura discedunt è datis binis punctis, est arcus circulis transeuntis per illa bina puncta, & verticem unius cujuslibet ex ipsis. Nam omnes ad eum arcum terminati æquales sunt; facile autem demonstratur omnes terminatos intra majores esse, extra minores, efficiendo angulum terminatum ad eum arcum, cujus anguli latus transeat per verticem terminati intra, vel extra; Erit enim is angulus respectu terminati intra internus & oppositus, respectu terminati extra externus.

71. Ex eodem Corol. 1. deducitur hoc aliud theorema; Circulus triangulo rectangulo circumscriptus, habet pro diametro basim; inde vero fluit hoc aliud; Vertex anguli recti distat a media basi per dimidiam basim. Primum patet ex eo, quod angulus rectus debeat esse in semicirculo, secundum ex eo, quod centrum debeat esse in media basi.

72. Tum inde haud difficulter derivatur hoc aliud. Si divisa circuli peripheria in partes æquales quotcunque, singulę sectiones conjungantur cum sibi proximis, orietur polygonum regulare inscriptum, si per singulas sectiones ducantur tangentes, orietur circumscriptum.

Pri-

Primum patet; quia latera erunt chordæ arcuum æqualium, adeoque æqualia; anguli autem insistent arcubus æqualibus, nimirum excessui totius circuli supra binos arcus subtensos a binis eorum lateribus. Secundum demonstrabitur ductis a centro ad omnes contactus; & proximarum tangentium concursus rectis, quæ cum segmentis tangentium interceptis inter binas quasque proximas constituent triangula rectangula, & omnia prorsus æqualia; unde & angulorum, & laterum æqualitas sponte fluet.

73. Ad exercendum Tyronem possunt proponi hujusmodi problemata. Per datum punctum rectam ducere ita, ut ejus segmentum dato circulo interceptum æquetur rectæ datæ. Dati circuli tangentem ducere ita, ut ejus segmentum interceptum inter contactum, & rectam datam indefinitam, æquetur rectæ datæ. Rectam ducere, quæ binos circulos datos simul tangat.

74. Primum solvetur ducta e quovis puncto chorda æquali datæ rectæ, tum e centro ducto perpendiculo in ipsam, & hoc radio, ac eodem centro, descripto circulo novo, ad quem si è dato centro ducantur tangentes; problema solvent; exhibebunt enim chordas æque a centro distantes, ac distat chorda primo applicata. Erunt autem binæ solutiones, vel unica, vel nulla; prout data recta fuerit minor, æqualis, vel major diametro.

75. Secundum solvetur, ducta ex quovis puncto peripheriæ tangente circuli æquali rectæ datæ, tum eodem centro per ejus extremum punctum ducto circulo, qui si bis secet rectam datam, solutiones erunt quatuor, ductis binis tangentibus e singulis intersectionibus, si in unico puncto contingat, binæ tantum tangentes inde duci poterunt; si ad eam non pertingat, problema erit impossibile. Demonstratio patebit, si producantur tangentes ipsæ, quæ fiunt chordæ circuli majoris æquè distantes a centro, & in ipsis contactibus bifariam secabuntur.

76. Tertium solvetur, ducendo radium quemvis ma-

joris circuli, ac in eo tam versus centrum, quàm producto ad partes centro oppositas abscindendo segmentum æquale radio minoris circuli: Si enim centro majoris circuli, & hoc novo intervallo summæ, vel differentiæ radiorum describatur circulus: ad eum ducantur tangentes ex centro minoris circuli, per contactum quemvis e centro majoris circuli ducatur radius, & per ejus extremum punctum tangens circuli majoris, eadem & minorem continget. Id autem demonstrabitur, ducendo ex centro circuli minoris perpendiculum in ipsam, quod invenietur æquale distantiæ binarum tangentium circuli majoris, & novi, adeoque radio circuli minoris. Porro si circulus alter extra alterum jaceat totus, invenientur quatuor tangentes ita ut binæ, quæ determinabuntur per summam radiorum, se inter ipsos circulos interserant, reliquarum utralibet ad eandem utriusque partem jaceat; si se contingant exterius, binæ illæ priores in unicam coalescent; si se secent, binæ priores impossibiles fient; si se contingant interius, etiam posteriores binæ in unicam coalescent; si alter intra alterum jaceat; omnes erunt impossibiles; ut adeò haberi possint solutiones 4, 3, 2, 1, nulla.

77. Poterit autem moneri Tyro, hoc postremum problema exhibere umbram, & penumbram Eclipsium, consideratis quatuor communibus tangentibus globorum Solis, & Lunæ, vel Solis, & Terræ, quarum priores duæ penumbram, posteriores umbram determinant.

78. Corol. 3. hujus prop. 9. converti poterit: describendo nimirum circulum per tres vertices angulorum quadrilinei habentis angulos oppositos simul duobus rectis æquales, qui transibit etiam per quartum. Nam si quartus vertex intra circulum caderet, contineret angulum majorem complemento oppositi ad duos rectos, si extra minorem, ut num. 70.

79. Corol. 5. converti potest ita: Si binæ chordæ se intra circulum non secantes intercipiant arcus æquales,

para-

parallelæ sunt. Si enim concurrerent extra; continerent angulum cujus mensura esset semidifferentia arcuum interceptorum.

80. E Corol. 6. infertur hoc theor. Anguli, quos chorda ex contactu ducta continet cum tangente, æquantur iis, qui insistunt ipsi chordæ in alternis segmentis: nimirum angulus ABE æquatur cuivis angulo descripto in segmento ADB, & angulus ABF cuivis descripto in segmento, quem chorda AB continet cum suo arcu versus E. Nam habent mensuram eandem, illi dimidium arcum AB, hi dimidium ADB.

81. Hinc facile solvuntur hæc problemata: A dato circulo abscindere segmentum, quod contineat angulum æqualem dato, & incipiat in puncto peripheriæ dato: Supra datam rectam construere segmentum circuli continens angulum æqualem dato. Primum solvitur, ducta circuli tangente per datum peripheriæ punctum, & ex eodem chorda, quæ cum tangente contineat angulum æqualem dato: secundum solvitur, ducendo per alterum extremum rectæ datæ aliam rectam, quæ cum ea contineat angulum æqualem dato, tum per nu. 57. describendo circulum, qui hanc rectam tangat in eo chordæ extremo, & transeat per alterum extremum.

82. Pariter hoc aliud: Dato circulo inscribere triangulum, quod habeat angulos æquales angulis dati trianguli, & cujusvis anguli verticem in puncto dato. Solvetur ducendo per id punctum tangentem, tum ducendo binas chordas, quæ contineant cum tangente hinc inde binos angulos æquales reliquis angulis trianguli dati. Conjunctis enim extremis chordarum, facile patebit haberi intentum (per n. 80.)

83. In scholio ante prop. 10. delibantur tantummodo quædam, quæ pertinent ad algebraica signa, & Arithmeticæ notiones, quæ & captu facilia sunt, & ad reliqua, quæ hic pertractamus, sufficiunt. Arithmeticam plenius hic post Geometriam planam tractavimus, Algebram finitam hujus tomi pars secunda complectitur. Interea si quam notionem numeri integri, fracti, multipli-

ltiplicationis, divisionis &c. ignoret Tyro nondum Arithmeticam aggressus, eam facile a Præceptore addiscet.

84. Ubi pag. 45. lin. 9. dicitur: *Quoties tertius terminus continet quartum, aut similem ejus partem*; notet in primis nomine *partis* non hic intelligi partem, quę aliquoties sumpta adæquet totum, & dicitur aliquota, sed quæ cum alia parte totum adæquat, & dicitur aliquanta. Deinde nomine *similis* intelligi eodem expressam numero, ut nimirum si primus terminus contineat secundi partem quartam, quintam, decimam, etiam tertius contineat partem quartam, quintam, decimam quarti, & ita porro; nimirum numerus ille, qui exprimit, quo pacto primus terminus secundum contineat, debet esse idem, ac is, qui exprimat idem in tertio respectu quarti. Sine hac explicatione nomen *similis*, quod potest sonare idem ac proportionalis, illud assumeret, quod deberet explicare.

85. Porro ille numerus *m* potest esse integer, vel fractus, vel continere seriem fractionum decrescentium in infinitum. Si primus rationis terminus est commensurabilis cum secundo, semper numerus *m* erit finitus utcumque fractiones involvat. Si primus terminus sit linea palmorum 12, secundus 4, erit $m = 3$, si ille 4 hic 12 erit $m = \frac{1}{3}$, si ille contineat palmos 17, hic 5 erit $m = \frac{17}{5} = 3.\frac{2}{5}$. At si incommensurabiles sint, non poterit haberi *m* sine serie infinita. Sic si primus terminus sit diameter quadrati, & secundus ejusdem latus, erit $m = 1.4142$ &c. (per schol. prop. 7.)

86. Posita hac defin. patet ex axiomate tertio, quantitates æquales ad alias æquales habere rationem eandem, & viceversa; ac patet etiam illud, quod Arithm. cap. 2. assumpsimus pro fundamento totius doctrinæ de proportionibus si uterque rationis terminus per eandem quantitatem multiplicetur, vel dividatur, manere rationem.

87. In proportionibus monendus Tyro terminos homo-

mo-

mologos dici antecedentes inter se, & consequentes inter se, sive primum ac tertium, secundum ac quartum. Rationem autem reciprocam, seu inversam eam, quam habet terminus consequens ad antecedentem. Ratio directa 6 ad 3 est dupla, ratio reciproca ejusdem non est dupla, sed subdupla.

88. In demonstratione prop. 10. notandum, quantitates etiam heterogeneas posse inter se multiplicari, si assumpta in quavis quantitatum specie una aliqua ad arbitrium, quæ dicatur unitas, reliquæ exprimantur numeris finitis, vel serie fractionum infinita, prout fuerint commensurabiles cum ea, vel incommensurabiles.

89. Ut vim habeat demonstratio prop. 10, necessarium est hoc theorema. Quotiescunque tres numeri multiplicantur ita, ut binorum productum multiplicetur per tertium, semper omnium productum evadit idem. Si multiplicandi sint 2, 5, 7 erit $2 \times 5 = 10$, & $7 \times 10 = 70$, tum $2 \times 7 = 14$, & $5 \times 14 = 70$, ac $5 \times 7 = 35$, & $2 \times 35 = 70$.

90. Id in quotcunque numeris verum est, & in Arithmetica demonstrandum. Eo posito vis argumenti sita est in eo, quod sium sit $a = mb$, & $c = md$, erit $ad = mbd$, & $bc = bmd$; nimirum in utroque casu idem productum numerorum m, b, d, licet ordine diverso multiplicatorum. Hinc $ad = bc$ productum extremorum æquale producto mediorum.

91. In Coroll. 1. notetur regulam trium non habere locum, si tres termini dati cum quarto quæsito proportionales non sint. Si navis inæquali vento impellatur, & scias horis tribus confecisse milliaria 7, non potes invenire, quot milliaria conficere debeat horis 9.

92. In Coroll. 2. notetur, alternationem propriè haberi non posse, nisi in quantitatibus homogeneis, & solum ope numerorum quantitates exprimentium transferri ad heterogeneas. In motu æquabili spatium factum uno tempore ad factum alio, est ut primum tempus ad secundum. Alternando est primum spatium ad primum tempus, ut secundum spatium ad secundum tempus.

Propriè

Propriè ſpatium ad tempus nullam rationem geometricam habet, cum ſe continere non poſſint, ſed ratio habebitur in numeris ea exprimentibus.

93. In prop. 11. idem dicendum de multiplicatione antecedentium, & conſequentium. Et quidem Euclides, ut evitaret multiplicationem in quantitatibus heterogeneis, & ſeries infinitas in incommenſurabilibus, alio modo rationem compoſitam definivit, ut videbimus ſuo loco. Sed hæc noſtra methodus eſt multo contractior.

94. Euclides alios duos arguendi modos demonſtravit *ex æqualitate ordinata*, *& perturbata*. Cum nobis hìc uſui futuri non eſſent, eos omiſimus. Habentur Arithm. cap. 2. n. 21, & hic etiam admodum facile demonſtrari poſſent. Pariter alium demonſtrat arguendi modum *per converſionem rationis*, cum ſumitur primus terminus ad exceſſum primi ſupra ſecundum, ut tertius ad exceſſum tertii ſupra quartum, qui includitur in iis, quæ diximus in fine Coroll. 2. prop. 10, & quem demonſtravimus Arithm. cap. 2. num. 12.

95. In demonſtratione prop. 12, ubi pag. 50. lin. 18. dicitur: *Sed triangula &c.*, ex hoc theoremate, quod triangula æquè alta ſi habent baſes æquales æqualia ſunt infertur ſtatim triangula CEB, DEB æque alta ſe eodem modo continere, quod baſes ſuas. Id deducitur hoc pacto. Si utraque baſis dividatur in particulas æquales quaſcunque, & ad communem verticem e ſingulis ſectionibus ducantur rectæ; dividentur triangulorum areæ in particulas æquales vi ejus theorematis, quæ erunt totidem numero, quot baſium particulæ. Quare areæ ſe eodem modo continent, quo baſes.

96. Verum & hæc prop., & aliæ multæ, quæ pertinent ad comparationes ſuperficierum inferuntur e ſcholio prop. 6. & doctrina proportionum: Hæc omnino non ignoranda: Quadratum mediæ proportionalis inter binas rectas æquantur earundem rectangulo. Omnia parallelogramma comparata inter ſe, & omnia triangula inter ſe ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudi-

num

num (per prop. 10.) cum æquentur productis ex basibus, & altitudinibus. Si bases fuerint æquales, illa sunt ut altitudines, & si altitudines fuerint æquales, erunt, ut bases, per nu. 86. Si bases fuerint in ratione reciproca altitudinum, nimirum basis unius ad basim alterius, ut hujus altitudo ad illius altitudinem, areæ æquales erunt, & viceversa, (per prop. 9.)

97. Ope tertii ex his theorematis statim patet in ea demonstratione prop. 12. triangulum CEB ad DEB esse ut basim CB ad DB, & ADB ad idem EDB ut AB ad EB, unde consequitur CB. DB:: AB. EB.

98. Ex prop. 12. plurima theoremata profluunt, plurimæ problematum solutiones, & multa quidem ex iis usu sępissime occurrunt, alia sunt Tyroni exercendo aptissima. Potiora delibabimus. In triangulis habentibus aliquem angulum æqualem areæ sunt in ratione composita laterum eum angulum continentium. Si enim in alterum ex iis assumptum pro basi e vertice opposito demittatur perpendiculum sive altitudo; facile ope trianguli rectanguli, qui oritur ad partem anguli æqualis eruetur, illa perpendicula esse ut latera non assumpta pro basi. Quare cum sint areæ in ratione composita ex ratione basium, & altitudinum; erunt in ratione composita eorum laterum. Hinc in ejusmodi triangulis si ea latera sint in ratione reciproca; areæ æquales erunt, & viceversa.

99. Atque hinc etiam statim consequitur theorema demonstratum in Corol. 1. Triangulorum similium areas esse in ratione duplicata laterum homologorum: cum latera circa æquales angulos sint proportionalia.

100. In quovis triangulo recta basi parallela secat latera in eadem ratione, & si ita secat est parallela. Deducitur facile ex ipsius propositionis demonstratione. Cum enim sit CB. BD :: AB. BE; erit dividendo CD. DB :: AE. EB, & huic quidem theoremati innituntur corollaria 4., & 5. Si autem ita sit, erit ED parallela AE; nam si ea non esset, esset alia ducta ex E, quę in alio puncto secaret latus BC, & tamen secaret in eadem ratione.

ratione. Quare ipsius rectæ BC, pars minor altera e partibus BD, DC haberet ad majorem altera eandem rationem, quam ipsæ habent, quod est absurdum, cum quò primus terminus rationis est minor, & secundus major debeat decrescere numerus, qui exprimat, quomodo se contineant.

101. Notetur etiam in triangulis æquiangulis esse tam AB. BC:: FG. GH, quam AB. FG:: BC. GH. & hic tam CD. DB:: AE. EB, quam CD. AE:: DB. EB, cum nimirum ex altera proportione eruatur altera, ut aliæ plures componendo, dividendo, invertendo, alternando.

102. Eruitur etiam hoc theorema futurum sæpe summo usui. Si per quoddam punctum transeant plures rectæ utrinque indefinite productæ, & incidant in rectas parallelas quotcumque, segmenta parallelarum intercepta binis ex illis rectis ad segmenta intercepta aliis binis quibuscunque erunt in omnibus parallelis in eadem ratione. Nam segmentum unius parallelæ ad segmentum alterius inclusum binis quibusvis iisdem rectis, facile invenietur esse, ut distantia primæ parallelę a vertice ad distantiam secundę assumptam in quavis ex iis rectis, quę rationes omnes facile deregentur æquales.

103. Problemata exercendo Tyroni apta possunt esse hujusmodi: Datis in data recta binis punctis invenire tertium ita, ut ejus distantiæ a binis punctis datis sint in ratione data. Solvetur facile, erigendo ex primo puncto dato in quovis angulo rectam indefinitam, abscindendo in ea ab eodem puncto primam è rectis exprimentibus rationem datam, tum ab hujus extremo secundam, vel ad partes oppositas rectę datę, vel versus ipsam, ducendo ab extremo puncto hujus secundę rectam ad secundum punctum datum, tum ab extremo primę rectam huic parallelam. Hæc determinabit in recta data quęsitum punctum, quod facile in utroque casu demonstrabitur ope triangulorum similium, dividendo pręterea vel componendo. Ac prima quidem solutio exhibebit semper unum punctum inter data duo puncta,

cta, & coincidit cum secunda parte Corol. 6. secunda extra eadem unum ad partes secundi puncti dati, vel nullum, vel unum ad partes primi, prout secunda recta data fuerit minor, æqualis, vel major respectu primæ. Ac plurimum proderit considerare excursum puncti inventi utriuslibet per rectam datam, & transitum ab una parte ad oppositam, pro varia mutatione magnitudinis vel directionis in secunda recta data.

104. Vel hoc aliud. A dato puncto rectam ducere, quæ ita secet latera dati anguli, ut binæ distantiæ puncti dati a binis laterum sectionibus sint in ratione data, vel ut bina latera dati anguli ab ejus vertice ad ejusmodi rectam sint in ratione data. Solvetur problema utrunque ducendo a puncto dato rectam parallelam primo lateri dato, donec occurrat secundo: tum pro solutione problematis primi capiendo ab anguli vertice in secundo latere segmentum, quod sit ad segmentum ipsius interceptum inter parallelam ductam, & verticem anguli in ratione secundæ quantitatis exprimentis rationem datam ad primam: pro secundo capiendo ab intersectione lateris secundi cum parallela ducta segmentum, quod ad ipsam parallelam sit in eadem ratione, ac ad ejus extremum ducendo rectam, quæ problema solvet, ut statim ac delineata fuerit figura, prodet similitudo triangulorum, & in utroque casu binæ solutiones habebuntur, segmento illo assumpto hinc inde ab anguli vertice, vel ab illo concursu, & lateribus anguli dati, si opus fuerit, productis etiam ultra verticem.

105. Potest etiam proponi hoc aliud. Datis binis punctis in binis rectis parallelis, & tertio extra utranque, ducere ab hoc rectam, quæ illas ita secet, ut segmenta intercepta inter ipsam, & illa puncta data sint in ratione data. Solvetur facile conjungendo bina illa puncta data, in recta jungente inveniendo punctum, cujus binæ distantiæ ab ipsis sint in ratione data (per num. 99.) & a puncto dato per hoc punctum ducendo rectam, quæ exhibebit, quod quæritur, ac si punctum

ctum tertium non jaceat in directum cum reliquis binis ſemper habebuntur binæ ſolutiones præter caſum, in quo ratio data ſit ratio æqualitatis, qui caſus unicam ſolutionem admittet. Si autem tria puncta data in directum jaceant; caſus erit impoſſibilis niſi ratio data fuerit eadem, ac ratio binarum diſtantiarum puncti tertii a prioribus binis, & tunc erunt infinitæ ſolutiones; quævis enim recta ducta a puncto dato ſatisfaciet problemati.

106. Et hæc quidem exercendo Tyroni, & alia magis neceſſaria ad Geometriæ complementum proponi poſſunt, ut hoc. Super data recta conſtruere parallelogrammum, cujus area æquetur areæ dati parallelogrammi. Solvetur facile ducendo in dato parallelogrammo perpendiculum, quod erit ejus altitudo, tum inveniendo quartam proportionalem *post* rectam datam, baſim parallelogrammi dati, & ejus altitudinem. Inventa enim quantitas erit altitudo parallelogrammi quęſiti; ac proinde ſi in diſtantia æquali huic novæ altitudini ab illa recta data ducatur recta ipſi parallela, & in quovis angulo ab extremis punctis rectæ datæ ducantur uſque ad eam binæ rectæ parallelæ; ſolvetur problema, quod inde conſtat eſſe indeterminatum, & habere infinitas ſolutiones. Quod ſi præterea requiratur, ut novum parallelogrammum habeat angulum æqualem dato; ſatis erit in eo angulo ducere illas duas rectas parallelas, & jam problema determinatum evadet.

107. Eodem pacto triangulum conſtrui poterit, quod habeat baſim æqualem datæ rectæ, aream æqualem areę dati trianguli, & angulum æqualem dato angulo, inveniendo nimirum novi trianguli altitudinem eodem prorſus modo, & ducendo rectam datæ parallelam in diſtantia æquali inventæ altitudini.

108. Quin immo facile fiet parallelogrammum æquale dato triangulo, vel triangulum æquale dato parallelogrammo cum iiſdem conditionibus. Satis erit in primo caſu dimidiare, in ſecundo duplicare inventam altitudi-

titudinem, cum parallelogrammum esse debeat duplum trianguli habentis eandem basim, & altitudinem.

109. Inde data quavis figura rectilinea poterit cum iisdem conditionibus describi parallelogrammum habens aream ipsi æqualem. Si enim illa figura rectilinea resolvatur in totidem triangula, invenientur altitudines pro totidem parallelogrammis habentibus basim æqualem rectæ datæ, & aream æqualem singulis triangulis: tum si assumatur altitudo æqualis summæ omnium illarum altitudinum; parallelogrammum cum hac altitudine descriptum habebit aream æqualem areæ datæ figuræ, quod facile eruitur e num. 48.

110. Divisio circuli in gradus, quam apposuimus in schol. post prop. 12. obtineri non potest geometrice, cum nec arcus 30. gr. geometrice dividi possit in partes 3, nec arcus 5. graduum in 5. Et quidem, si pro 360 alii numeri adhibiti fuissent in divisione circuli in gradus, posset. Circulus enim potest dividi Geometrice in partes 2 ope diametri, in 6. adeoque & in 3 ope cor. 4. prop. 2, in 4 ope binarum diametrorum sibi invicem perpendicularium. Præterea potest in 5, sed ad id requiritur hoc Euclidis probl. Datam rectam ita secare, ut quadratum unius partis æquetur rectangulo sub reliqua parte & tota, quod quidem nos reservamus applicationi algebræ ad Geometriam, ut & alia quædam theoremata libri 2, quæ minus frequenter occurrunt. Rursus potest in 15, si enim e binis partibus quintis, dematur pars tertia, e sex partibus quintisdecimis dementur quinque; ac proinde relinquetur una. Demum hæ divisiones possunt continuari per bissectionem in infinitum. Atque inde patet, quæ polygona regularia circulo geometrice inscribi possint, & circumscribi.

111. Prop. 13. corol. 2, 3, 4. pertinent ad secundum Euclidis librum, & in numeris quoque possunt ostendi. Sit in cor. 2. AC $=10$, FB $=3$, erit FC $=5$, AB $=8$, BC $=2$. Habetur autem $2\times 8 + 3\times 3 = 5\times 5$ cum sit utrumque $=25$; ac eodem modo numeri in reliquis substitui possunt.

Q 112.

112. Ex prima parte Corol. 5. deducitur, binas tangentes, quæ ex eodem puncto ad eundem circulum ducantur, esse æquales inter se; nam utriusque quadratum æquatur eidem rectangulo BE X BD.

113. Potest hic proponi solvendum hoc problema, quod summum habet usum, & ad quod in Geometria reducuntur omnia illa problemata, quæ in algebra sunt secundi gradus, ut videbimus in applicatione Algebræ ad Geometriam. Data summa, vel differentia binarum rectarum, & earum rectangulo, ipsas invenire. Describatur circulus, qui habeat pro diametro datam summam, vel differentiam: ex extremo diametri puncto ducatur recta ipsi perpendicularis, cujus quadratum æquetur rectangulo dato, quod fiet inveniendo mediam proportionalem intra latera ipsius rectanguli dati. Ex extremo hujus puncto ducatur recta parallela diametro ubi datur summa, per centrum circuli ubi datur differentia, & hujus intersectiones cum peripheria circuli solvent problema. Nam bina intervalla ejus rectæ inter illud extremum, & singulas intersectiones, erunt binæ quæsitæ rectæ. Patet enim illud perpendiculum fore tangentem circuli, & proinde rectangulum sub iis binis rectis æquabitur ejus quadrato, sive rectangulo dato. In secundo autem casu patet, diametrum circuli fore differentiam rectarum inventarum, in primo vero ostendetur facile earum summam eidem æquari, ducendo aliud perpendiculum ab altero extremo, donec occurrat parallelæ illi productæ. Bina enim ejus segmenta intercepta arcu circuli, & binis perpendiculis æqualia esse facile perspicietur.

114. Porro in secundo casu patet, semper in circulo inveniri duo puncta; in primo verò invenientur duo, recta illa parallela secante circulum bis, vel unicum, ea ipsum tangente in vertice, vel nullum, ea cadente ultra circulum, prout illud quadrati latus fuerit minus, æquale, vel majus radio circuli, sive semisumma quantitatum quæsitarum. Quare in secundo casu semper habebuntur binæ quantitates quæsitæ; in primo eæ invenien-

nientur inæquales, æquales vel impossibiles, prout quadratum semisummæ datæ fuerit minus, æquale, vel majus rectangulo dato.

115. Idem problema potest proponi sic. Invenire binas rectas reciprocas datis, quarum detur summa, vel differentia. Si enim sunt reciprocæ iis datis, earum rectangulum æquatur illarum rectangulo.

116. Potest & sic. In data recta datis binis punctis invenire aliud ita, ut rectangulum sub distantiis hujus a punctis datis æquetur dato rectangulo. Si enim id punctum inveniatur inter data puncta, distantiarum summa erit æqualis intervallo punctorum; si extra; differentia. Porro patet semper debere inveniri bina ejusmodi puncta extra, singula ad partes singulorum; & intra ipsa vel bina hinc inde a medio, vel unicum, vel nullum. Sed ea elegantius invenientur sic. Secetur bifariam recta interjacens punctis datis, erigaturque inde perpendiculum cujus quadratum æquetur rectangulo dato. Tum primum facto centro in illo puncto bissecante, & intervallo distantiæ verticis perpendiculi ab altero e punctis datis; invenientur bina puncta extra. Deinde facto centro in vertice perpendiculi, intervallo dimidiæ distantiæ datorum punctorum invenientur bina puncta intra hinc inde a medio, vel unicum in medio, vel nullum, ut supra, & facile est demonstrare hanc solutionem congruere cum præcedenti.

117. Exercendo Tyroni proponi potest hoc problema. A dato puncto rectam ducere quæ datum circulum secet ita, ut binæ ejus distantiæ ab intersectionibus sint in ratione data. Si a dato puncto ducatur tangens circuli, vel recta perpendicularis diametro per datum punctum ductæ, prout ipsum fuerit extra, vel intra circulum; ea erit media proportionalis inter binas distantias. Quare cum detur harum ratio, datur ratio etiam alterius ex his ad illam tangentem. Solvitur igitur hoc pacto. Inter binas rectas inveniatur media proportionalis. Fiat ut hæc ad alteram e rectis datis, ita tangens ducta ad quartam lineam. Facto centro in puncto

cto dato, intervallo hujus novæ rectæ ducatur circulus, qui si datum circulum secuerit, vel contigerit, recta ad sectionem vel contactum ducta solvet problema: sed ubi punctum datur extra circulum, nisi novus circulus secuerit, vel contigerit circulum datum citra tangentem, vel ultra prout in proportione assumpta fuerit minor e datis rectis, vel major; problema erit impossibile.

118. In scholio hujus prop. notandum, rationem circuli ad circumferentiam multo ultra protractam esse nuper ab Eulero ope seriei cujusdam maximè convergentis, usque ad notas arithmeticas 127 in *Introductione in Analysim infinitorum*.

119. Ad prop. 14 notetur figuras similes dici eas, quarum anguli omnes æquales sunt, ac latera circa angulos æquales proportionalia. Est earum insignis proprietas hæc: si in binis figuris similibus e binis punctis perimetri correspondentibus ducantur in iisdem angulis ad latera homologa rectæ proportionales ipsis lateribus, tum ab harum extremis rectæ quævis in iisdem angulis cum iis ipsis; eæ terminabuntur ad puncta pariter correspondentia laterum homologorum, & erunt, ut ipsa latera homologa, quod facile demonstratur ope similitudinis triangulorum.

120. Hinc si e dato puncto ad perimetrum figuræ cujusvis ducatur recta, & in ea producta utrinque assumatur utralibet ex parte puncti ipsius segmentum, quod ad eam sit in data ratione quavis, excurrente ipsa recta per perimetrum figuræ, extremum segmenti punctum describet figuram similem. Demum notetur illud: In parallelogrammo diviso in 4. parallelogramma juxta num. 32. ea bina quæ circa diametrum sunt, sunt & inter se similia, & toti, ac e converso: Si bina parallelogramma similia angulum habeant communem, vel ad verticem oppositum, ac laterum homologorum directiones congruant, vertices oppositi jacebunt in eadem recta cum qua diametrorum directiones congruent. Id autem pariter e similitudine triangulorum facile deducitur.

§. II.

§. II.

De iis, quæ pertinent ad Arithmeticam.

121. COmmunium notarum proprietas, quibus in Arithmetica decadica utimur, in qua nimirum regredimur ad caput numerationis post decades, decadum decades, seu centurias, centuriarum decades, seu millia &c. est, quòd quævis nota seorsim legi possit renunciando speciem, quam exprimit, ultima unitates, penultima decades, præcedens illam centurias, tum alia præcedens millia, deinde millium decades, millium centurias, milliones, & ita porro, vel conjungendo quotcunque notas libeat, & omnia denominando a specie notæ postremæ, idque tam in integris, quam in fractis decimalibus. Numerus 34756 legi potest sic: Tercentum quadraginta septem centuriæ, quinque decades, sex unitates. Numerus 347.56. sic: Triginta quatuor unitates, septuaginta quinque partes decimæ, sex centesimæ, & ita porro.

122. Ejus rei ratio patet ex eo, quod semper nota existens in sede præcedenti significat decuplum ejus, quod significat in sequenti; adeoque si binis sedibus præcedat exprimit ejus centuplum, si ternis millulum, & ita porro.

123. Additionis, & subtractionis demonstratio satis patet ex iis, quæ innuimus post regulas. Notandum autem, ex ipsa multiplicationis notione idem esse, numerum totum simul multiplicare per alium numerum, ac ejus partes ita multiplicare alias post alias, ut monuimus in hac appendice num. 49.

124. Pro multiplicatione numerorum inter 5, & 10 proposuimus num. 16. usitatam methodum per digitos. Quoniam adeo exiguus habetur casuum numerus, potest Tyro methodi demonstrationem sibi conficere per inductionem. Ope notarum algebraicarum res hoc

pacto demonstraretur. Quoniam eriguntur tot digiti, quot unitatibus numerus propositus excedit quinarium; tot deprimentur, quot unitatibus idem deficit a denario. Deprimantur in altera manu digiti numero a, in altera b. Erit primus numerus $10 - a$ secundus $10 - b$. Multiplicentur per partes, & habebitur $10 \times 10 - 10a - 10b + ab$. Nam, ut in Algebra demonstrabitur, signa conformia, si multiplicentur, reddunt signum positivum, difformia negativum, prorsus ut si affirmes, aliquid existere, vel neges deesse, habebis positivam existentiam, si affirmes deesse, vel neges existere, habebis carentiam. Porro est $10 \times 10 - 10a - 10b = 10(10 - a - b)$, & $10 - a - b = 5 - a + 5 - b$, sive $=$ summæ digitorum erectorum. Igitur si ea summa ducatur in 10, & addatur productum ab digitorum depressorum habebitur intentum.

125. Tabulæ Pithagoricæ usus per se evidenter patet ex constructione. Numero autem 18. proponitur insignis proprietas numerorum, quæ demonstrari potest incipiendo a casibus simplicioribus, & pergendo ad magis compositos. Sint bini numeri a, b, ut 6, & 8, multiplicandi per se invicem. Concipe cohortem militum, in qua sint ordines numero a, sive 6, quorum singuli contineant numerum militum b, sive 8. Accipiendo numerum 8 vicibus 6 habetur numerus militum. Ibidem autem erunt 6 primi, quivis in suo ordine, 6 secundi, & ita porro usque ad 6 octavos. Quare etiam sumendo numerum 6 vicibus 8 habetur idem militum numerus. Igitur in binis numeris a, b productum ab, & ba est idem.

126. Si numeri sint tres a, b, c; concipe legionem, in qua cohortes numero a, in quavis cohorte ordines b, in quovis ordine milites c. Erit bc numerus militum in cohorte, & $bc \times a$ numerus militum in legione. Si autem assumantur in quovis ordine soli primi; eorum numerus in cohorte erit idem, ac numerus ordinum b. Quare in universa legione erit ab, & cum sint totidem secundi, tertii &c., habebuntur tot hujusmodi numeri ab, quot milites sunt in quovis ordine,

ordine, nimirum c; adeoque & $ab \times c$ exhibet eundem numerum. Demum si sumantur primi ordines tantum singularum cohortium, habebuntur milites ac, qui per numerum ordinum multiplicati exhibebunt $ac \times b$ numerum pariter omnium militum.

127. Considerando exercitum compositum ex numero legionum d, res extendetur ad quatuor numeros: vires regnis habentis exercitus e, ad quinque, & ita porro. Sed in pluribus numeris combinationes in infinitum excrescunt. Proderit autem Tyroni accipere 4, vel 5 numeros, & se in eorum multiplicatione exercere, ut videat eodem redire $a \times b \times c \times d \times e$, $ab \times c \times de$, $abd \times ce$, $ac \times bde$ &c.

128. Multiplicationis demonstrationem facile intelliget, qui exemplum aliquod consideret, & ea, quę num. 21. innuimus: ac iisdem principiis innititur methodum multiplicandi per tabellas Neperianas exposita num. 23.

129. In divisione ubi ea conficitur sine scala, & tabellis Neperianis, operatio procedit ordine sequenti.

130. Sumantur in primis in dividendo tot notæ e prioribus, quot sufficiunt ad exprimendum numerum divisore non minorem. Eæ autem erunt totidem, quot in divisore continentur, vel una præterea. Nam numerus, qui unica nota alterum excedit semper illo major erit, ut 1000. est major quam 999.

131. Quæratur quoties hic numerus continet divisorem; id autem præstabitur, quærendo quoties primam notam divisoris continet prima partis assumptæ, vel primæ duæ, prout assumptæ fuerint totidem notæ, vel una præterea, sed ita, ut quod ibi relinquitur conjunctum cum nota sequenti, & habitum pro decadibus sufficiat, ut toties saltem contineatur in ea secunda divisoris nota; si enim non suffecerit minuendus est unitate numerus vicium inventus, donec sufficiat. Is numerus vicium scribitur primo loco in quoto.

132. In exemplo exposito in quo 10105 dividitur per

43, cum priores binæ dividendi notæ 10 exhibeant numerum minorem quam 43, assumendæ tres 101. Querendum porro, quoties 4 contineatur in 10. Invenitur 2, & relinquitur 2, cui si addatur assumpti numeri sequens nota 1, fit 21, quod sufficit, ut sequens divisoris nota 3 binis contineatur. Quare in quoto scribitur 2. At si quæreretur, quoties 37 contineatur in 132, quærendo quoties 3 contineatur in 13 inveniretur 4; sed quia superest tantum 1, qui numerus conjunctus cum sequenti 2 exhibet 12, in quo numerus 7 quater contineri non potest: efficiendum ut 3 contineatur in 13 solum vicibus 3, ut relictis 4 possit 7 in 42 contineri pariter vicibus 3; adeoque prima nota quoti esset 3.

133. Per numerum inventum multiplicetur divisor, & productum scribatur sub illa parte divisoris assumpta, subtrahaturque inde, ac post residuum addatur sequens dividendi nota, & iteretur eadem operatio, quærendo eodem modo, quoties divisor contineatur in hoc residuo aucto, scribendo hanc novam notam, post notam quoti jam inventam, multiplicando, ac subtrahendo, ut prius, & ita porro.

134. Demonstratio methodi hinc petitur. Quoniam idem est dividere numerum per numerum, ac videre, si tot res quælibet, quot exprimit dividendus, distribui debeant in tot capita, quot exprimit divisor, quot ex iis dari singulis possint: quæritur primum, quæ sit altissima species numerorum a dividendo expressorum, e qua aliquid dari possit: ut in exemplo allato si e dividendo 10105 solum 10 millia assumuntur, ex his nullum singulis illis 43 dari potest; at si assumantur 101 centuriæ, quæ iis pauciores non sunt, poterunt singulis dari tot ex ipsis centuriis, quoties 43 continetur in 101. Quare ille numerus inventus vicium debet esse prima quoti nota, & in eo exprimere debet illam eandem speciem, quam exprimit postrema nota partis assumptæ dividendi, ut hic centurias. Porro eas exprimet, cum tot aliæ post eam scribi debeant, quot

notæ

notæ in dividendo superſunt pro calculo toties reſtituendo, ut hìc aliæ duæ.

135. Multiplicando autem diviſorem per notam quoti inventam determinatur, quid ex ea ſpecie impendatur in ea diſtributione, ut hìc multiplicando 43 per 2 invenitur 86 centurias impendi. Subtractione invenitur, quid inde ſuperſit, ut hic ſuperſunt 15. Hæ centuriæ ſunt, ac conjunctæ cum decadibus 0, efficiunt decades 150, ac quæritur eodem pacto, quot ſingulis decades dari poſſint; atque ita ſemper a ſpeciebus altioribus gradatim ad inferiores deſcenditur.

136. Porro ubi quæritur, quoties diviſor contineatur in parte quoti aſſumpta, non ſufficit videre, quoties prima ejus nota contineatur in prima vel prioribus binis hujus; ſed relinqui debet, id, quod cum ſequenti ſufficiat ſecundæ; cum diſtribui non debeat numerus dividendus in tot capita, quot exprimit ſola nota prima diviſoris, ſed in omnia a reliquis etiam ejus notis expreſſa. Atque idcirco ſi diviſor contineat plures notas, videndum eſſet primo an quod ſupereſt primæ notæ diviſoris conjunctum cum ſequenti nota dividendi ſufficiat pro ſecunda nota diviſoris, tum an quod ipſi ſupereſt, conjunctum cum alia ſequenti nota dividendi ſufficiat pro tertia diviſoris, & ita porro uſque ad poſtremam. Sed ejuſmodi inquiſitio admodum moleſta eſſet, & plerumque, ubi ſupereſt pro ſecunda, ſupereſſe ſolet etiam pro inferioribus, cum notæ in tertia ſede centies minus, in quarta millies minus exprimant, quàm in prima. Hinc ſatis erit ſemper videre ſolum, an ſuperſit pro ſecunda, & ſi forte reſiduum deinde non ſufſecerit pro reliquis, id calculus ipſe indicabit. Nam multiplicato diviſore per notam quoti inventam, proveniet numerus major eo, a quo ſubtrahi deberet, quo caſu nota inventa minuenda eſset unitate, productum illud delendum, & ſcribendum aliud productum diviſoris multiplicati per notam quoti correctam: ac ſatius erit raro admodum reſtituere calculum, quam ſemper illam adeo moleſtam inveſtigationem inſtituere.

137.

137. Ubi, divisione peracta, aliquid remanet, praescribitur n. 29, ut addatur fractio, cujus numerator sit postremum illud residuum, denominator sit ipse divisor. Ejus demonstratio hinc oritur, quod cum ex illo residuo singulis integrae unitates dari non possint, concipitur quaevis unitas divisa in tot particulas, quot sunt ii, in quos divisio facienda, & quos divisor exprimit, & cum singuli singulas singularum unitatum particulas accipere debeant, singuli accipient tot particulas, quot erant unitates residuae, quarum magnitudinem determinabit denominator divisori aequalis. In casu ibi exposito singuli accipient particulas 182, qualium singulae unitates continent 385.

138. Atque ex his quidem, & ex iis, quae in Arithmetica diximus, habet Tyro, unde vim omnem divisionis percipiat, institutae etiam sine lamellarum, aut scalae praesidio, in qua Tyronem Praeceptor debet exercere, ut minus difficilis illi deinde evadat radicum extractio.

139. In fractionibus, de quibus agitur a n. 33, binae praecipuae proprietates notandae sunt. Primo si numerator demonstratorem excedit, fractio spuria est, & integras unitates continet, quarum numerus habetur dividendo numeratorem per denominatorem. Nam ubi numerator denominatori aequatur, fractio unitatem complet, quod ex ipsa fractionis notione constat. Cum enim pars quinta sit ea, quarum quinque in unitate continentur; patet quinque quintas partes unitatem complere. Hinc tot unitates habentur, quot vicibus e numeratore denominator potest detrahi, sive quot vicibus hic in illo continetur.

140. Secundò si in quavis fractione numerator, & denominator dividantur per eundem numerum quemcumque, valor illius manet idem, cum aeque crescat numerus particularum, ac earum magnitudo minuatur in multiplicatione, ac prorsus oppositum in divisione contingat. Sit fractio $\frac{3}{4}$, & utroque numero ducto in 5 fiet $\frac{15}{20}$ cujus idem est valor. Si enim unitas divisa erat in partes

tes 4, quarum 3 accipiebantur, subdivisis singulis in alias 5, jam unitas continebit partes $4 \times 5 = 20$, & illæ tres assumptæ continebunt $3 \times 5 = 15$, ac idem patet de quovis alio numero.

141. Ex prima proprietate constat ratio ejus, quod præscribitur num. 34., & 35, pro colligendis integris unitatibus, ubi numerator denominatorem excedit.

142. Ex secunda proprietate constat id, quod num. 37. præscribitur pro reductione fractionum ad eundem denominatorem. Notandum autem in fine ejus numeri, plures fractiones simul etiam redigi ad eundem denominatorem multiplicando numeratorem, & denominatorem cujuslibet per omnes reliquorum denominatores. Fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$ reduci possunt ad eundem denominatorem sic $\frac{2 \times 5 \times 7 \times 8}{3 \times 5 \times 7 \times 8}$, $\frac{4 \times 3 \times 7 \times 8}{5 \times 3 \times 7 \times 8}$, $\frac{3 \times 3 \times 5 \times 7}{7 \times 3 \times 5 \times 8}$, $\frac{5 \times 3 \times 5 \times 7}{8 \times 3 \times 5 \times 7}$.

143. Reductio illa facilior, de qua num. 38, fieri potest in binis casibus. Primus est, cum in fractione aliqua numerator, ac denominator communem aliquem divisorem habeant, per quem dividi possint, & ad simpliciores terminos reduci, ut reducitur $\frac{6}{18}$ ad $\frac{1}{3}$ dividendo per 6 tam numeratorem, quam denominatorem juxta num. 140. Secundus est cum bini, vel plures denominatores aliquem divisorem communem habent, tunc enim is in communi illo novo denominatore frustra repeteretur, & ubi is adest, multiplicatio per ipsum omittenda, ubi deest, semel tantum adhiberi debet in multiplicatione conjunctus cum divisoribus reliquis non communibus. Sint $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{4}{7}$, sive $\frac{5}{2 \times 3}$, $\frac{7}{3 \times 5}$, $\frac{4}{7}$. Reducentur ad eundem denominatorem sic $\frac{5 \times 5 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 7}$, $\frac{7 \times 2 \times 7}{3 \times 5 \times 2 \times 7}$, $\frac{4 \times 2 \times 3 \times 5}{7 \times 2 \times 3 \times 5}$, adhibendo communem

divi-

divisorem 3 denominatoris primi, & secundi solum in tertia fractione.

144. Hinc patet pro reductione fractionum necessariam esse methodum inveniendi maximum communem divisorem binorum numerorum. Ea autem est hujusmodi. Dividatur major per minorem, & notetur residuum: tum divisor per hoc residuum, & notetur residuum novum, atque ita porro, donec deveniatur ad aliquam divisionem, quæ accuratè fiat sine ullo residuo. Ultimus divisor ille, per quem divisio accurata successit est maximus communis divisor.

145. Sint numeri 1896, 120, quorum quæratur maximus communis divisor. Diviso 1896 per 120, quotus est 15, residuum 96. Diviso 120 per 96, quotus est 1 residuum 24. Diviso 96 per 24. quotus est 4 sine residuo. Igitur 24 est communis maximus divisor. Et quidem diviso 1896 per 24, habetur 79, ac diviso 120 per 24 habetur 5.

146. Demonstratio innititur hisce theorematis satis per se notis. Quod mensurat aliquem numerum (sumendo mensuram pro parte aliquota) mensurat, & quodvis ejus multiplum, nimirum ipsum quotcunque vicibus repetitum, & quod mensurat binos numeros, mensurat & eorum summam ac differentiam.

147. Porro si quis numerus mensurat 1896, & 120, mensurabit & 120 ductum in primum quotum 15, cumque id productum cum primo residuo 96 æquetur 1896, ille numerus mensurabit etiam id residuum sive differentiam. Eodem argumento cum mensuret 120, & 96, divisum, & divisorem novæ divisionis, mensurabit etiam novum residuum, & ita porro usque ad residuum penultimæ divisionis, quod cum metiatur se & postremum divisorem debet continere divisorem communem quemcumque propositorum numerorum. Totum autem ipsum esse divisorem communem constabit demonstratione retrograda. Cum enim mensuret se, mensurabit etiam divisum postremæ divisionis nimirum se multiplicatum per postremum quotum. Porro ipse erat residuum penultimæ

divi-

divisionis, & postremus divisus erat ejusdem divisor: metiebatur autem ille eum divisorem, adeoque & ipsum ductum in penultimum quotum; cumque id productum cum residuo adæquet divisum ejusdem penultimæ divisionis, mensurabit etiam hunc divisum; ac eodem argumento, cum mensuret divisorem & divisum cujusvis divisionis posterioris, mensurabit etiam divisum & divisorem cujusvis præcedentis usque ad primam, nimirum binos numeros datos.

148. At si omnes divisores dati numeri invenire libeat, inventis divisoribus primis, de quibus §. 7; illud notandum, fore divisores ejusdem numeri omnia producta ex binis, ex ternis, ex quaternis, ex quotcunque simul sumptis, ac productum omnium simul fore ipsum numerum. Si enim sint quotcunque numeri primi, quocunque ordine multiplicentur inter se, utcunque sumantur bini, terni, quaterni &c. ac per reliquos multiplicentur, semper productum idem efficient ut notavimus hìc num 125, 126, 127. Quare ad inventionem omnium divisorum satis est invenire omnes primorum combinationes.

149. Erit aptius, quam in eo §. exemplum numeri 210, cujus divisores omnes invenientur hoc pacto. Dividendo 210 per 2 habetur 105, qui per 2 dividi non potest, dividitur autem per 3, & habetur 35, qui nec per 3 dividi potest, potest autem per 5, & habetur 7, qui dividi solum potest per se, ac habetur 1.

210	2	6	30
105	3	10	42
35	5	14	70
7	7	15	105
1		21	
		35	

Prima columna exhibet quotus, secunda divisores primos 2, 3, 5, 7. Combinando 2 cum 3, cum 5, cum 7, tum 3, cum 5, cum 7, demum 5 cum 7 habentur in tertia columna omnium binariorum combinationes. Combinando singula binaria cum posterioribus, qui ea binaria non ingrediuntur, aliis post alios, habentur omnia ternaria in columna quarta, tum combinando pariter

riter ternaria singula cum reliquis posterioribus habentur omnia quaternaria, & ita porro; sed hic quaternarium est unicum exhibens ipsum numerum propositum: Ac si iis columnis addatur ipse numerus 210 & 1, habentur omnes communes divisores sexdecim.

150. Fractionum multiplicatio exposita §. 9. demonstratur ex ipsa definitione multiplicationis: Habeat primum utraque fractio numeratorem 1; ut si sit $\frac{1}{7}$ multiplicandum per $\frac{1}{5}$. Quoniam multiplicare per fractionem est accipere illam ejus partem, quam ea exprimit, sumenda erit partis septimæ pars quinta; & habebitur particula, quarum 5 continebit quævis è prioribus septem unitatis partibus, adeoque unitas tota continebit 7×5, nimirum habebitur pars $\frac{1}{7 \times 5} = \frac{1}{35}$.

151. Quod si non unius septimæ, sed plurium, ut quatuor septimarum partium sumenda sit pars quinta, patet sumendam fore in singulis unam ex iis particulis, adeoque $\frac{4}{7} \times \frac{1}{5}$ fore $\frac{4}{7 \times 5}$.

152. Demum si non una quinta ejus fractionis pars assumenda sit, sed plures, patet totidem vicibus plures particulas assumi, quot plures partes assumendæ sunt. Adeoque $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$ fore $\frac{4 \times 3}{7 \times 3}$. Nimirum oportere & numeratores inter se multiplicare, & denominatores inter se.

153. Divisio earumdem demonstratur ex eo, quod multiplicatio & divisio debeant se invicem destruere ita, ut quotus per divisorem multiplicatus debeat reddere divisum, ut constat ex ipsa multiplicationis, & divisionis notione. Porro sit $\frac{a}{b}$ dividendum per $\frac{c}{d}$ invertendo divisorem prodibit $\frac{ad}{bc}$; quia hunc quotum multiplicando per divisorem $\frac{c}{d}$ habebitur $\frac{adc}{bcd}$, sive ob dc communem divisori, & diviso habebitur (per num. 140) $\frac{a}{b}$, nimirum divisus ille.

162. Si

162 Si quivis numerus integer consideretur, ut fractio quædam, quæ pro denominatore habeat unitatem; facile ex dictis eruentur hæc theoremata. Fractio multiplicatur per numerum integrum multiplicando per eum ejus numeratorem; Integer multiplicatur per fractionem multiplicando ipsum per ejus numeratorem, & relinquendo in utroque casu denominatorem pristinum. Fractio dividitur per integrum multiplicando per ipsum ejus denominatorem: Integer dividitur per fractionem multiplicando ipsum per ejus denominatorem, & ponendo pro denominatore numeratorem ipsius fractionis.

163. Notandum demum in quavis multiplicatione esse unitatem ad alterum factorem, ut alter ad productum, cum hoc ductum in unitatem maneat idem, nimirum sit æquale producto factorum: In quavis autem divisione esse divisorem ad divisum, ut est unitas ad quotum, cum quotus ductus in divisorem reddat divisum, adeoque divisum ipsum per unitatem multiplicatum; ac proinde in utroque casu habeantur æqualia producta mediorum, & extremorum.

164. Quæ §. 9 dicuntur de additione, & subtractione decimalium, patent ex iisdem principiis, ex quibus eadem deducuntur in integris. Quod pertinet ad eorum multiplicationem; facile demonstrabitur, si apponatur denominator, & notetur illud, quod diximus hic num. 121. Si enim sublato puncto scribatur sub eodem numero pro denominatore unitas cum tot cyphris, quot notæ decimalium habentur post punctum, habebitur fractio idem prorsus exprimens, quod ope puncti exprimitur, integris etiam, si qui sunt, simul ad eum denominatorem reductis. Multiplicatis iis fractionibus bini denominatores multiplicandi erunt, in quibus habebitur unitas cum tot cyphris, quot habebantur in utroque denominatore. Quare si, sublato ipso denominatore, productum ope puncti scribendum est, post punctum totidem in eo notæ haberi debent, quot in utroque factore simul habebatur.

165. Cum autem quotus per divisorem multiplicatus de-

debeat divisum reddere, tot in illis decimales notæ haberi debent, quot habentur in ipso diviso.

166. Porro ubi numerus notarum deest ad implendas hasce regulas, debet suppleri ope cyphrarum præmissarum, quæ in fractionibus decimalibus valorem non mutant post ipsas notas, mutant autem ante ipsas, ut e contrario in integris præmittendo eas cyphras non mutatur valor, mutatur vero plurimum ponendo eas post ipsas notas. Distantia enim a puncto dirimente integros numeros a fractionibus determinat valoris speciem.

167. Extractionem radicis expositam §. 10., demonstrabimus in algebra. Pariter quæ de numeris surdis dicuntur §. 11. multo commodius & extendentur, & demonstrabuntur ibidem.

168. Ad caput 2. Arithmeticæ illud unum notabimus ad num. 9: multo melius, quam in prop. 10. Geometriæ, demonstrari hìc ex principiis idcirco præmissis in proportione geometrica productum extremorum æquari producto mediorum, & viceversa, ac eadem methodo, quæ in proportione arithmetica adhibita est pro summa. Demonstratio autem hìc omissa est hujusmodi.

169. Sit $a.b::c.d$, ducendo priores terminos in c, posteriores in a manebunt ædem rationes (per num. 6. cap. 2. Arith.) eritque $ac.bc::ac.ad$. Quare (per num. 7.) $bc = ad$. Rursus si fuerit $bc = ad$ erit (per num. 7.) $ac.bc::ac.ad$. Quare (per num. 6.) $a.b::c.d$. Q.E.D.

EXPLICIT TOMI I. PARS I.