



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

- + *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
- + *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
- + *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
- + *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertarti di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da <http://books.google.com>

a. g. b.
1464

Euchides

<36625286630017

<36625286630017

Bayer. Staatsbibliothek

33

Auct. Jr. Vet. 101. p. 534.

EVCLIDIS

*Catalogo SEX, PRIMI Collegij
ELEMENTORUM GEO-
METRICORUM LIBRI CUM
Solijs PARTE UNDECIMI Jesu
Ex majoribus Clavij commentarijs
in commodiorem formam contracti*

Per P. CHRISTOPHORUM GRIEN-
BERGERUM e SOCIETATE JESU

*Pravij acceſſit, item ferme ex Clavio Inſcriptio
BREVIS TRIGONOME-
tria planorum, cum Tabulis Si-
num, Tangentium, & Secan-
tium, ad partes Radij 100000 per
Sex prima scrupula gra- Phil.
duum*

Anno 1702.
Per P. JACOBVM HONORA-
TVM DVRANDVM EIVSDEM
SOCIETATIS.

GRÆCII,
*Apud Heredes ERNESTI WI-
MANSTADII.*

ANNO M. DC. XXXVI.

Ad Lectorem.

Hic liber est pardus, spectata mole,
sed usum.
Si spectes, Lector, maximus
hic liber est.

Instructio pro Bibliopego

Agella figurarum eo loco sunt inserenda,
ubi primo incipit esse illarum usus, pri-
us ex cuiusq; superscriptione cognoscatur:
ad dextram autem singularium, adheret fo-
lium vacans, ut illud libello ita insuatur,
ut quando debet esse usus figurarum, illa ex-
tra libellum protendantur, & ad sinistram
zora parcant, sintoq; semper oculis exposita
quacunq; libelli pagina legatur.

IMPRIMATUR

Alphonsus Seidetti So-
cietatis J E S U, Vniversi-
tatis Cancellarius.

R E U E R E N D I S S I -
MIS, ET ILLUSTRISSIMIS

P R I N C I P I B U S
E P I S C O P I S ,

A M P L I S S I M I S , E T
REVERENDISSIMIS

P R A E L A T I S ,
Excellentissimis

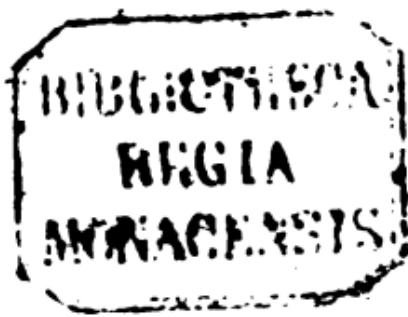
I l l u s t r i s s i m i s , & G e n e r o s i s s i m i s ,
I l l u s t r i b u s , G e n e r o s i s , a c
strenuis,

P R I N C I P I B V S ,
C O M I T I B V S , B A -
R O N I B U S , A T Q ; E Q U I -
T I B U S ,

Magnificis, & nobilibus Viris, Ci -
vitatibus, atq; Oppidis,

I N C L Y T I S T Y R I A E
D U C A T U S

Dominis meis gratiissimis & Ob -
seruantissimis.





VENADMODVM
sublimiora adficia,
ita scientie sine soli-
dis fundamentis assurgere non pos-
sunt. Postquam in hac Græcensi
Universitate Philosophiam docui;
quinquennio jam integro, cum a-
lijs occupationibus Mathematici-
cam sum professus: quo tempo-
re, non sine dolore animadverti,
Mathematicæ facultati de solidis
fundamentis parum esse prospe-
ctum; defuit scilicet copia libro-
rum, quibus continentur Geome-
trica elementa, sine quibus tamen
vanum omnino est, in Mathe-
matica solidos sperare progres-
sus. Prospexere sibi jam multæ
Universitates de hujusmodi ele-
mentis & fundamentis; quare
mearum quoq; partium esse putavi

effice-

efficere, ut huic etiam Vniversi-
tati provideretur: quod dum a-
nimō voluo, commodum accidit, ut
ad manus meas deveniret Eucli-
des in compendium contractus,
quem P. CHRISTOPHORVS
GRIENBERGERVS Mathematicus emeritus, ut simili Romanae
indigentie provideret, nuper edide-
rat; Opusculum quidem mole par-
vum, utilitate maximum, & in
quo vere ex ungue Leonem agno-
scas, in quo brevitas, quam ma-
xime seſtatus est, claritati, quan-
tum quidem in rebus abſtrusiori-
bus retineri potest, non obfuit;
nec sinceritati Geometricarum de-
monstrationum (in quo alia mul-
ta compendia deficiunt) quid-
quam detraxit. Hoc ergo com-
pendium, adeo numeris omnibus
absolutum, ut etiam hac Vniver-
sitatis

sitas illo gauderet, hic imprimendum judicavi. Adjeci Brevem Instructionem de resolutione triangulorum saltem rectilineorum, quia ea notitia necessaria est ad Astronomiam, Geometriam practicam, Gnomonicam, Architectonicam maxime militarem &c. Cum vero ad resolutionem triangulorum, necessarium sit usum nosse tabularum sinuum, tangentium & secantium, breves etiam hujusmodi tabulas adjeci, ut quaecunque pro fundamentis sufficiunt simul haberentur: quae qui Magistro dirigente, & explicante, probe perdidicerit, satis erit instrutus, ut sine ulteriori duce, Autatores alios per se legat, & intelligat, & magnos faciat in mathematicis progressus. Cum porro hoc Opusculum solum ideo emitatur

tatur in lucem ut publico hu-
jus Patriæ bono deserviat : non
potuit apud alios sibi querere au-
xilium & patrocinium, quam a-
pud eos quos Patria PATRIÆ PA-
TRES agnoscit, & veneratur, &
quorum publico testimonio omnia
eo collimant studia & labores, ut
Patria bene sit. Non asper-
nabuntur spero aut muneric te-
nuitatem, aut denegabunt Opu-
sculo patrocinium, quibus omne
id, & gratum est, & magnum
habetur, quod confert ad publicam
utilitatem.

INCLYTI STYRIÆ DUCATUS

Servus in Christo

Jacobus Honoratus Durandus.

EVCLIDIS ELEMENTUM PRIMUM.

DEFINITIONES.

*Quibus vocabula Artis, & Terminorum
in Elementis usurpati explicantur.*



DEFINITIONES. Punctum est, cuius pars nulla est.

2. Linea, unius tantum dimensionis secundum longitudinem capax.

3. Lineæ termini sunt puncta.

4. Linea recta est, quæ ex æquo sua inter jacet puncta.

Secundum Archimedem est minima eam quæ terminos habent eosdem, hoc est, brevissima extensio inter duo puncta.

5. Superficies est duarum dimensionum secundum longitudinem & latitudinem capax.

6. Superficiei autem extrema sunt lineæ.

7. Plana superficies est quæ ex æquo suas interjacet lineas.

Secundum Heronem cui omni ex parte congruit linea recta.

8. Planus angulus est duarum linearum in plâno concorrentium, & non in directum jacentium (*sunt una verba concursum* *& secundum naturam suam protracta non continetur cum altera*) *falterius ad alteram inclinatio.*

9. Rectilineus angulus est, quem constituant lineæ rectæ.

10. Angulus rectilineus rectus est quando linea alteri lineæ insistens, ad utramque partem æquales angulos facit. Et tales lineæ dicuntur sibi mutuo perpendiculares.

11. Obtusus angulus est qui recto major est.

12. Acutus qui minor recto.

13. Terminus est, id quod alicujus extremitum est.

14. Figura est, quæ sub uno vel pluribus terminis continetur. *vel relig. comprehendit.*

15. Circulus est figura plana, unica linea comprehensa quæ peripheria appellatur, ad quam omnes rectæ, ex quodam puncto eductæ sunt æquales.

16. Hoc punctum cœtrum circuli vocatur.

17. Diameter est, quæ producta per cen-

1. trum dividit circulum bifariam.
18. Unde semicirculus, est figura contenta diametro, & semiperipheria.
19. Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis lineis continentur.
20. Trilateræ, quæ sub tribus.
21. Quadrilateræ, quæ sub quatuor.
22. Reliquæ vocantur multilateræ.
23. Æquilaterum triangulum est, quod tria habet latera æqualia.
24. Isosceles quod duo æqualia.
25. Scalenum quod omnia tria haberinæ qualia.
26. Rectangulum triangulum est, quod habet angulum rectum.
27. Amblygonium quod habet obtusum.
28. Oxygonium quod omnes acutos.
29. Quadratum est quod æquilaterum, & rectangulum est.
30. Altera parte longior figura est rectangula non æquilatera, ^{oppidæ} & latera st. æqua.
Potest uno nomine vocari Oblonga, sed Oblongum.
31. Rhombus æquilatera est, non rectangula.
32. Rhomboides habet latera, & angulos oppositos æquales, & neque æquilatera est. neque rectangula.
33. Reliquæ figuræ quadrilateræ vocantur Trapezia.

Elementorum

34. Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plāno quantumcunq; protractæ non posunt concurrere.
35. Parallelogrammum est figura quadri-latera habens latera opposita parallelæ.
36. In parallelogrammo propositionis 43. duo parallelogramma A H G E, GFDI. dicuntur circa diametrum AD existere, & reliqua duo H C F G, GEBI, vocantur complementa.

PETITIONES seu POSTVLA TA.

Sunt propositiones practica, & supponuntur ut per se note.

1. A Puncto ad punctum liceat lineam rectam ducere, id quod fit per conceptionem brevissimæ extensionis.
2. Et lineam rectam quantumlibet producere.
3. Item quovis centro, & intervallo eidem centro applicato, circulum describere.

*AXIOMATA seu PRONVN-
CIA TIA.*

Sunt Propositiones speculativa, qua non indigent demonstratione.

1. Q Uæ eidem æqualia, inter se sunt æqualia.

2. Si æqualibus adjiciantur æqualia, sunt æqualia.
 3. Si ab æqualibus abiciantur æqualia, remanent æqualia.
 4. Inæqualia cum æqualibus, faciunt inæqualia. sed ibi in exemplis Non.
 5. Äqualia ablata ex inæqualibus, relinquent inæqualia.
 6. Dupla vel dimidia ejusdem, sunt æqualia inter se, q[uod] est q[uod] 2, 1 et 2, 3, 4.
 8. Quæ sihi mutuo congruunt sunt æqualia. *Debet autem talis congruenzia constare intellectu, & quæ sunt æqualia, sibi mutuo congruunt, seu superponitæ esse debent.*
 9. Totum sua parte majus est.
 10. 11. Due rectæ concurrentes, & se mutuo secantes, non habent aliquam partem communem, seu segmentum p[ar]tis maioris.
 12. Omnes recti anguli sunt æquales.
 13. Ex Euclidis 61. ponitur ad propositionem 28. sine qua non potest sufficienter concipi.
 14. Due lineæ rectæ possunt quidem constitutere angulum, sed non claudere spatiuum, aut constituere figuram.
 15. 16. 17. 18. Non sunt usui in Elementis.
 19. Omne totum est æquale suis partibus simul sumptis.
 20. Si totum totius est duplum, & ablatum ablati, etiam reliquum est duplum reliqui.
- et p[ar]t[es] se secant,* A 3 qui.

um,
inti
ab

us

vel
pan-
cti-
in-
ab-
funt
tri-
un-
qui-

ten-
r se,
qua-
ndo
non
viā
ures
is e-
pen-
ubi
ate-
fficit
ad
on-

demonstrationem Theorematum assumuntur, certa esse constet, hoc est sint vel ex principijs, vel ex alijs propositionibus premonstratis deducta.

Problematæ quæ sunt per instrumenta non sunt pure Geometrica; possunt tamen aliquo modo dici mathematica saltem illæ, quæ utuntur sola Regula & Circino. Hæc enim duo instrumenta fundantur immediatae in postulatis, hoc est in linea recta, & circulari.

Eodem possunt reduci etiam illæ instrumenta quæ sunt per Regulam & Circinum. Reliqua vero referantur ad Mechanicam. ex quibus aliqua sunt quidē vera, sed nondum Geometricè demonstrata, alia falsa, vel saltem dubia, quæ tamen subinde admittuntur, quia videntur satisfacere sensui.

Deniq; tam Problemata, quæ Theorematum proponuntur aliquādō nomine Lemmatum, quæ præmittuntur vel subjiciuntur propositionibus principalibus, quando sunt necessaria, neq; possunt commode circari.

PROPOSITIO I. PROBLEMA I.
Super dato linea A B, triangulum æquilaterum describere.

C^{on}tro A, intervallo A B, describatur per 3. postul. circulus C B D; & centro B eodem intervallo B A, alter C A D, se-
cans

trans priorem v. g. in C; & ex C, ad A, B
ducantur CA, CB, per postul. 1. Dico tri-
angulum ABC esse æquilaterum. Est enim
AC, æqualis AB, & BC, æqualis eidem
per def. circuli; ergo æquales inter se, per
1. pron. atque adeo triangulum ABC, est
æquilaterum per def. 23.

PROPOS. 2. PROBL. 2.

*ad datum punctum A, dare BC ponere is-
aeam aqualem, et*

PROPOS. 3. PROBL. 3.

*Ex majori AH, minori BC aqualem ab-
scindere.*

P Er Primam describatur supra AC, tri-
angulum æquilaterum ACD, & centro
C, intervallo CB, per postul. 3. circulus B
E secans protractam DC, in E. & rursus
centro D, intervallo DE alius EG secans
protractam DA in G, & tertius GI, de-
scriptus ex A, intervallo AG, abscindat ex
AH, rectam AI. Dico AI, æqualem esse
datæ BC. Rectæ enim AI, est æqualis AG
per def. circuli, AG æqualis CE, quia DE,
DG sunt æquales per eandem def. circuli,
& ablatæ DA, DC sunt æquales, per def.
trianguli æquilateri: ergo per 3. pron. AG,
est æqualis CE. Est autem eidem CE, per
def. 15. æqualis BC, ergo tam AI, quam
AG, sunt æquales ipsi BC.

PRO-

Liber Primus.

PROPOS. 4. THEOREMA 1.

Angulus A, sit aequalis Angulo D, & latus AB, aequali lateri DE, & AC, ipsi DF: Dico & basim BC, aequalem esse basi EF; & triangulum G, aequali triangulo H, & angulum B, angulo E, quibus opponuntur aequalia latera AC, DF; & angulum C, angulo F, quibus opponuntur reliqua duo latera aequalia AB, DE.

Facta enim superpositione lateris AB, super latere DE; AB, congruit DE, per ax. 8. & angulus A, angulo D; & consequenter latus AC, lateri DF, propterea quod omnia ista sunt aequalia ex hypoth. Ergo & basis BC congruit basi EF; triangulum G triangulo H; angulus B, angulo E, & C ipsi F, & ideo omnia ista sunt inter se aequalia per 8. pron.

PROPOS. 5. THEOREMA 2.

Latus AB, sit aequali lateri AC, sintque producta ad D, E necunque: Dico tam angulos ABC, ACB, quam DCB, ECB, esse aequales.

Per tertiam fiat AE aequalis AD; ne-
stanturque per postul. I. CD, BE. Erunt-
que per 3. pron. etiam BD, CE aequales; &
in triangulis ABE, ACD erunt circa com-
munem angulum A, latera lateribus aequa-
lia, AB ipsi AC, & AE, ipsi AD. Ergo per
q. basis BE, est aequalis CD; angulus ABE,
quoniam & C aequali sunt, ergo A: & C, si & f: non congrueantur
quoniam & C, & f: non ad eam lineam ab hypot. l. & r. habeant gradus
adversos. I. haec est q. 2.

angulo ACD, & AEB, angulo ADC. Rur-
sus in triangulis BCE, CBD. circa æquales
angulos E & D. Latus BE est æquale lateri
CD, & CE ipsi BD, Ergo per eandem 4. an-
gulus BCE, est æqualis CBD; & hi sunt
duo anguli infra basim BC: & angulus C
BE, æqualis BCD, & hi sublati ex æqua-
libus ACD, ABE relinquunt supra ean-
dem basim æquales ACB, ABC.

Coroll. Hinc patet triangulum æquilate-
rum esse æquiangulum.

PROPOS. 6. THEOR. 3.

*Angulus ABC, sit aequalis ACB: Dico
latera AC, AB, esse aequalia.*

Si enim essent inæqualia, posset semper
ex majori v.g. AB abscindi BD æqualis
minori AC; atq: ita fieret triangulum BCD,
æquale triangulo ABC, per 4. quia cir-
ca æquales angulos DBC, ACB, sunt la-
tera lateribus æqualia.

Coroll. Ergo triangulum æquiangulum,
erit quoque æquilaterum.

PROPOS. 7. THEOR. 4.

*AD sit aequalis AC, EG BD, aequalis sibi con-
termina BC; EG AC, BC, convenient ad
C. Dico reliquas AD, BD ad partes C,
non convenire ad aliud punctum.*

Aliter.

*Triangulis ACB, ADB sit communis
basis AB; EG AD, aequalis AC, EG BD, ipsi
triangulis ABD, BDC, et diversa. Atque ut C B C
ergo triangulus ABD, et triangulus BDC
æquales.*

CDico ABD , translatum in alteram partem, coincidere prorsus cum triangulo ABC .

Eulides præmittit hanc propositionem octavæ, quam Proclus ita demonstrat, ut potius octava præluceat septima.

PROPOS. 8. THEOR. 5.

*Latus AB, sī aquale DB, & AC, ipsi DC,
nec non basis BC, basi BC, Dico angulum,
A aqualem esse angulo D.*

Intelligantur conjuncta ad communem basim BC ita ut latera æqualia sint etiam contermina, sed ad partes diversas, necaturque AD , quæ vel transit per C , ut in primo casu; vel cadit inter B, C ut in secundo; vel extra ut in tertio. In primo propter æqualitatem laterum BD, BA , anguli A, D sunt æquales per 5. In 2. & 3. propter æqualitatē laterum AB, BD , sunt æquales anguli BAD, BDA ; & propter æqualitatem laterū CD, CA , sunt quoq; æquales anguli $CD A, CAD$. Ergo in secundo casu totus angulus BAC erit æqualis toti BDC ; & in tertio reliquis angulis BAC reliquo BDC .

Coroll. Et quia circa angulos æquales BDC, BAC sunt latera lateribus æqualia: erunt per 4. triangula æqualia; & reliqui anguli reliquis angulis, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

AD 7. PROPOSIT.

In septima ponuntur eadem quæ in octa-

vii. Ergo in triangulis ABD, ABC erunt anguli DAB, DBA, æquales angulis CAB, CBA. Et ideo in superpositione sibi mutuo congruent, & latus AD, coincidet cum AC, & BD, cum BC, atque adeo punctum D, cum punto C.

PROPOS. 9. PROBL. 4.

Datum angulum rectilineum BAC, bifariam secare.

Abscindantur per 3. æquales AD, AE, & supra DE fiat per 1. triangulum æquilaterum DEF. Dico AF satisfacere proposito. Angulus enim FAD, est æqualis angulo FAE, per 8. quia duo latera FA, AD, sunt æqualia duobus FA, AE, & basis FD, basi FE.

PROPOS. 10. PROBL. 5.

Datum rectam AB bifariam secare.

Describatur per 1. triangulum æquilaterum ABC, & recta CD fecet per 9. angulum C, bifariam. Dico eandem CD, secare quoque bifariam AB. Est enim AD æqualis DB, per 4. quia circa æquales angulos ad C, sunt latera lateribus æqualia.

PROPOS. 11. PROBL. 6.

Ex punto C, recta AB, erigere perpendicularē.

Acipientur per 3. æquales CD, CE, & ADEF, sit per 1. æquilaterum. Dico FC, esse perpendicularē. hoc est angulos ad C,

ad C, esse æquales, ideoque per definit. 10. rectos. Sunt enim duo latera CF, CD, æqualia duobus CF, CE, & basis FD, æqualis FE, ergo per 8. FCD, æqualis angulo FCE.

PROPOS. 12. PROBL. 7.

Ex punto C, in datam AB, perpendicularem demittere.

Centro C, describatur per 3. post. circulus secans AB utcunque in DE, & DE fecetur per 10. bifariam in F. Dico CF, esse perpendicularem. quia FC, FD, sunt iterum æqualia lateribus FC, FE, & basis CD æqualis CE per def. circuli. ergo.

PROPOS. 13. THEOR. 6.

*Recta recta insistens, vel facit duos rectos,
vel duobus rectis æquales.*

Quando EB insistens, est perpendicularis; certum est angulos EBC, EBD, esse rectos. At AB magis inclinata in unam partem quam in aliam, constituit saltem duos angulos ABC, ABD, æquales duabus EBC, EBD: quia tam isti, quam illi sunt æquales tribus EBC, EBA, ABD.

PROPOS. 14. THEOR. 7.

CD, CE sunt una linea continua, quando alia AC, facit angulos ACD, ACE, æquales duobus rectis.

Sicut enim CF, pars protractæ DC, cade-

ret

ret supra, vel infra C E ; essent nihilominus per 13. anguli A C D , A C F , æquales duobus rectis , & æquales duobus A C D , A C E quod est absurdum..

PROPOS. 15. **THEOR.** 8.
A B , C D , secant se in uno ad exteriorum E ,
Disco angulum A E C , aqualem esse D E
B , & A E D , ipsi B E C .

Nam & A E , cum C D , & C E cum A B facit per 13. angulos duobus rectis æquales. & ideo A E D , A E C , æquales sunt duobus C E A , C E B ; demptoque communis A E C , remanet A E D , æqualis C E B . Similis est ratiocinatio de angulis A E C , B E D .

Coroll. 1. Hinc patet omnes quatuor angulos ad punctum E esse æquales quatuor rectis.

Coroll. 2. Immo quotcunque fuerint anguli ad E , omnes simul erunt quatuor rectis æquales.

PROPOS. 16. **THEOR.** 9.

Dico angulum externum C A D , trianguli A B C , maiorem esse utrolibet interno , & opposito , tam A C B , quam A B C .

Secto latere A C , bifariam in E , & ex protracta B E , sumptâ E F , æquali ipsi B E , & juncta F A : erunt per 15. æquales anguli B E C , F E A , & duo latera E B , E C , æqualia duobus E F , E A ; & ideo per 4. an-

gulus $\angle A F$, æqualis $\angle C B$, est autem externus $\angle A D$, major quam $\angle A F$. ergo idem externus est quoque major $\angle C E$.

Protracto autem latere CA ad G , fit externus BAG , æqualis priori $\angle CAD$ per 15. & secuto bifariam latere AB in H ; factaque HI , æquali $\angle HC$, demonstratur ut prius, angulum BAG , majorem esse $\angle ABC$, ergo & $\angle CAD$, erit major eodem,

*Ex Proclo. **

*Si AB, AC, sunt aequales, quacumque alia AD,
non erit eisdem aequalis.*

Si enim AD esset æqualis, esset per 5. angularis C , æqualis B , & eidem B , esset æqualis ADB . ideoque æqualis ACD , quod est absurdum, quia ADB est externus, ideoque major interno & opposito C .

PROPOS. 17. THEOR. 10.

Duo quilibet anguli trianguli, sunt minores duobus rectis.

Productis BC , BA , in D , E , efficitur per 16. externus $\angle ACD$ major $\angle B$, & ideo $\angle ACD$, $\angle ACB$ maiores duobus $\angle ABC$, $\angle ACB$. Sunt autem illi æquales duobus rectis per 13. ergo isti sunt minores duobus rectis. Eadem est ratio de duobus angulis $\angle BAC$, $\angle BCA$. Pro duobus autem $\angle CAB$, $\angle BAC$ assumendus est externus $\angle CAE$.

Ex Proclo. *

Ex eodem punto A, in CD, una tantum cadit perpendicularis AC, Si enim præter AC, esset alia AB: essent duo anguli ABC, ABC, æquales duobus rectis, quod est absurdum.

Coroll. 1. Propter eandem causam, in triangulo non potest esse nisi unus tam reetus, quam obtusus.

Coroll. 2. Existente angulo ABC, acuto, perpendicularis AC, cadit ex parte anguli acuti. si enim caderet ex parte obtusi, qualis est AD; ABD, ADB, essent duobus rectis maiores.

Coroll. 3. Duo anguli ad basim isoscelij; & omnes tres trianguli æquilateri, sunt acuti.

PROPOS. 18. THEOR. 11.

Majus latus AC, subtendit majorem angulum ABC, & AB, minus minorem ACB.

Si enim AD, fiat æqualis AB, erunt per anguli ad basim BD, æquales, est autem per 16. ADB, major C: ergo & ABD, & multo magis ABC, erit major C.

Coroll. Hinc patet in Scalcno tres angulos esse inæquales.

PROPOS. 19. THEOR. 12.

Majori angulo A B. Copponitur majus latus AC, & minori C, minime latus AB.

Per latum incremento sensu hæc est ratio geometrica, & ait Si in rectâ angulo acutâ, & que cum unius, illius doble representat, aliis de rectâ angulis acutis, hæc ratio hæc sit, hæc est angulus acutus.

Si enim latus AB in superiori figura foret æquale AC, essent predicti anguli æquales, & si AB, esset majus; esset per præced. cōtra hypoth. angulus C, major angulo ABC.

Coroll. Omnia rectarum AC, AC, AC, perpendicularis A B, est omnium brevissima; quia AB opponitur acutis, & AC, opponuntur recto.

PROPOS. 20. THEOR. 13.

Duo qualibet latera trianguli, sunt reliquo majora. ~~per 14. qd. 6. qd.~~

Lateribus CA, AB, sit æqualis CAD, hoc est AD, æqualis AB. Ergo ad basim BD, sunt per 5. anguli æquales. Estque ABD, minor DBC: ergo & ADB, seu CD B, est minor eodem, & per 19. BC. minor CD, hoc est minor duabus CA, AB, & ita de reliquis.

PROPOS. 21. THEOR. 14.

Duæ rectæ BD, CD, intra triangulum AB C, sunt minores lateribus conterminiis AB, AC, & angulus BDC, major A.

Productâ enim BD, in E; erunt per 20. BA, AE, majora reliquo istere BE, adjectaque EC, duæ rectæ AB, AEC, majora duabus BE, EC. Sunt autem & CE, ED, majora CD, & additâ DB, duæ CE, ED, sunt majora duabus CD, DB. ergo AB, AC, sunt multo majora duabus BD, DC. Porro angulus BDC, major est DEC. *per 16.*

6 B

22.

2-

s E,

duo

que

), E

alis

vfin

22.

G,

G

gu-

ulo

t C,

base

an-

2-

in

ca-

dit

dit supra, & in 3. infra. In omnibus vero casibus recta E G, est per 4. æqualis basi & C. & in primo quidem casu manifestum est E G, ideoque & BC, majorem esse EF. In secundo vero in triangulo isoscelio DFG, anguli ad basim FG sunt per 5. æquales, estque DGF, major sua parte EGF. ergo & DFG, multoque magis totus EFG, major est eodem EGF. Ideoque per 19. EG, hoc est BC, major base EF. Denique in tertio in quo æquales DF, DG, sunt protractæ ad H, I, anguli infra basim FG sunt per 5. æquales; estque IGF, major sua parte EGF. ergo & HFG, & multo magis EFG, major est eodem EGF. & idcirco EG, seu BC, major quam EF ut prius.

PROPOS. 25. THEOR. 16.

Vice versa angulus A, major est angulo D, quando basis BC major est base EF, & reliqua latera reliquis equalia, ut in praecedenti. //

Esset enim per 4. basis BC, æqualis EF, si angulus A, posset esse æqualis angulo D, & BC per 24. minor esset quam EF, si A esset minor D.

PROPOS. 26. THEOR. 17.

Anguli B, C, sunt æquales angulis E, F, & latus BC, ipsi EF, nimirum adjacens, adjacenti; vel certe AB ipsi DE, quae alterius regis prædicti coniuncti exinde; & n. ē. æqualsib[us] sanguinis, c. 2. p. 26. 26. p. 26.

qualibus angulis opponuntur: Dico ergo reliqua reliquis esse aequalia.

Sit primo BC æqualis EF , & DF si fieri potest sit major AC . Sumptâ igitur FG , æquali ipsi AC ; erunt circa æquales angulos C , F , latera AC , CB , æqualia lateribus GF , FE ; ideoque per 4. angulus ABC , seu D E F , æqualis angulo G E F , quod est absurdum, ~~et hoc est quod est~~

Secundo sit $A B$ æqualis $D E$, & si fieri potest $E F$, sit major $B C$. Sumptā igitur $E G$, æquali ipsi $B C$, erit ut prius angulus. $B C A$, hoc est EFD , æqualis EGD , internus externo *contra* 16.

Sunt igitur. omnia latera omnibus æqua-
lia, ideoque per 8. etiam reliqua æqua-
lia.

PROPOS. 27. THÉOR. 18.

*Recta E F fecer duas A B, C D, faciatque
angulum A G H aequalem alterno D H G:
Disco A B, C D, esse parallelas.*

Sin minus concurrant in I. Cum igitur trianguli GHI; latpus IG, sit protractum; erit per 16. angulus externus AGF, major interno & opposito IHG quod est absurdum. Idem sequitur si concurrerent ad K.

PROPOS. 28. THEOR. 19.

Eadem A B, C D, erunt quoque parallela,
si constet exterrnum A G E aequaliter esse
supradictarum abstandit in hoc gradu, quod ad modum inter-
est, in aliisque supradictis gradibus, quod ad modum est.

interno C H G : Vel duos internos A G H,
C H G, aequales duobus rectis.

Ex utroque enim sequitur alternum **B**G H, aequalem esse alterno C H G. Externo enim A G E aequalis est per 15. BG H, ad verticem G. & duo A G H, C H G sunt per 13. aequales duobus H G A, H G B, estque H G A, communis. ergo reliquus H G B, aequalis est reliquo C H G, alternus alterno. ergo per 27. A B, C D, sunt parallelæ.

Ex hac posteriore parte constat sufficienter veritas 13. pronunciati.

A X I O M A 13. *

Si in duas rectas incidat recta O I, faciatque duos angulos O, I, minores duobus rectis : duę rectę A B. C D, concurrent ad partes angularium O, I.

PROPOS. 29. THEOR. 20.

Duas parallelas A B, C D secet E F, in G, H.

Dico alternum alterno; externum interno; Et duos angulos internos esse duobus rectis aequales, convertendo duas precedentibus.

Nam primo si alternus A G H esset major alterno D H G, addito communi B G H essent duo D H G, B G H, minores duobus A G H, B G H, hoc est minores duobus rectis, & ideo per 13. axioma. A B, C D, concurrent ad partes B, D, *quod ei*

est contra' hypothesis. Ergo alterni sunt æquales, hoc est, BGH , ipsi CHG . Est autem per 15. BGH , æqualis AGE , ergo etiam externus AGE , erit æqualis interno CHG , & quia BGH , cum AGH , æquipolle per 13. duobus rectis, eruntque duo interni AGH , CHG æquales duobus rectis.

PROPOS. 30. THEOR. 21.

AB , CD , sint parallela eidem IK : Dic etiam ipsas esse parallelas inter se.

Dicitur enim EFG erit per 29. BGL , æqualis alterno ILG & CHL , æqualis KLH : sed ILG , KLH , sunt per 15. æquales. ergo & alterni BGL , CHL sunt æquales, & per 27. AB , CD parallelæ.

PROPOS. 31. PROBL. 10.

Per A, ducere parallelam dare BC.

Dicitur AD utcunque, & facto per 23. angulo DAE , æquali alterno ADC , erit per 27. EAF , ipsi BC , parallela.

PROPOS. 32. THEOR. 22.

Externus angulus ACD , est æqualis duobus internis, & oppositis A , B : Et omnes tres anguli cuiuscunque trianguli sunt æquales duobus rectis.

Ducatur per 30. CE parallella AB ; eritq; per 29. ECA , æqualis alterno A , & externus ECD , æqualis interno B , & totus externus ACD , æqualis duobus internis A ,

B. Adjectoq; communi $\angle ACB$, erunt omnes tres interni A, B, C , æquales duobus ACD , ACB hi autem sunt per 13. æquales duobus rectis. ergo & illi.

Coroll. 1. Ergo omnes tres anguli unius trianguli sunt æquales tribus cuiuscunque alterius trianguli simul sumptis: & quando duo sunt æquales duobus, erit & reliqua reliquo æqualis.

Coroll. 2. In triangulo ifosceli rectangle lo; anguli ad basim sunt semirecti.

Coroll. 3. Angulus trianguli æquilateri est una tertia duorum rectorum, vel duas tertias unius recti.

Ex Scholio. *Videtur. Mult. folij.

OMnis figura rectilinea distribuitur in tot triangula, quod ipsa continet latera demptis duobus; ita ut anguli triangulorum constituant angulos figuræ.

Cumque anguli cuiuscunque trianguli sint æquales duobus rectis, erunt omnes anguli figuræ rectilineæ, æquales his tot rectis, quot ipsa habet latera, demptis duabus lateribus.

Quot autem habet latera, tot habet angulos internos & externos. Ergo interni simul cum externis sunt æquales his tot rectis, quot sunt latera; quia quilibet externus cum suo interno æquivalet duobus rectangulis eis 20 extenso angulo, qui triangulo.

Etis per 13. Interni autem soli, sunt equa-
les bis tot rectis quot sunt latera demptis
duobus, quibus respondent quatuor recti;
demptis igitur omnibus internis, remane-
bunt externi quatuor rectis equeales, & i-
deo omnium figurarum anguli externi si-
mul sumpti, sunt equeales simul sumptis.

PROPOS. 33. THEOR. 23.

Sint A B, C D, equeales & parallela. Di-
co etiam A C, B D, esse equeales, &
parallelas.

Ductâ enim $B C$, erunt per 29. alterni
 $A B C, D C B$ equeales, & duo latera
 $A B, B C$, duobus $B C, C D$ eequalia. ergo
per 4. etiam basis $B D$, eequalis basi $A C$, &
angulus $A C B$, eequalis alterno $C B D$, ideo-
que per 27. $B D$, parallela $A C$.

PROPOS. 34. THEOR. 24.

In parallelogrammo latera & anguli oppo-
siti sunt equeales; & diameter secat ip-
sum bisfariam.

Cum enim per def. 35. latera $A B, D C$,
nec non $A D, B C$ sint parallela; erit
per 29. angulus $B A C$ eequalis $D C A$; & A
 $C B$, ipsis $C A D$. estque latus $A C$, ipsis ad-
jacentis commune, ergo per 26. $A B$, erit
equate $C D$, & $A D$, ipsis $B C$, & angulus B ,
angulo D , & triangulum $A B C$, triangulo
 $A D C$. Deniq; reliqui anguli A & C , sunt
equeales quia constant ex eequalibus.

Ex

Ex Scholio. †

Omnis quadrilaterum habens latera opposita, vel angulos oppositos aequales, est parallelogrammum.

Sint primo A B, C D, & A D, B C, aequalia. Ducta igitur A C, erunt duo latera A B, B C, aequalia duobus C D, D A, & A C, basis erit communis. Unde per 8. non solum angulus B, angulo D, sed & angulus B A C, angulo D C A, & A C B, aequalis erit C A D, nimirum alterni alternis, atq; adeo per 27. A B, erit parallela C D, & A D, ipsi B C.

Secundo. Angulus A, sit aequalis C, & B, ipsi D; eruntque duo A, B, aequales duabus C, D, & duo A, D, aequales duabus C B. Sunt autem omnes quatuor aequalis quatuor rectis per Scholium 32. ergo tam A, B, quam A, D, erunt duobus rectis aequalis, & ideo per 28. A B, C D, & A D, B C, erunt parallelae.

Ex priore parte hujus demonstrationis constat Quadratum, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma.

Ex posteriore constat idem de Quadrato, figura altera parte longiore, & Rhomboide.

Item.*

In omni parallegrammo diametri se inueniuntur.

et uno secant bifariam : \S in Quadrato \S
Rhombo secant angulos bifariam; in figura altera parte longiore siue oblonga, \S .
Rhomboide non bifariam : eademq; in quadrato, \S oblongo sunt aequales, in *Rhombo* \S *Rhomboide* inaequales.

Dico primo $A C$, $B D$, secari bifariam in E . Anguli enim $E A D$, $E D A$, sunt aequales angulis $E C B$, $E B C$, per 29. & latera adjacentia $A D$, $B C$, sunt aequalia per 34. ergo per 26. $E A$, est aequalis $E C$, & $E B$, aequalis $E D$.

Dico secundo in quadrato, & *Rhombo* angulos A , C secari bifariam à diametro $A C$. latera enim $C A$, $A D$, aequalia sunt lateribus $A C$, $A B$, & basis $C D$, basi $C B$. ergo per 8. angulus $C A D$. angulo $C A B$.

Dico tertio in oblongo, & *Rhomboide* angulos A , C , secari à diametro $A C$ non bifariam. Est enim angulus $B A C$, minor angulo BCA , per 18. & per 29. BCA , est aequalis alterno $C A D$. ergo $B A C$, minor est $C A D$.

Dico quarto in quadrato, & oblongo diametros $A C$, $B D$, esse aequales per 4. quia circa aequales angulos nempe rectos latera $D A$, $D C$, sunt aequalia lateribus $B C$, $C D$.

Dico 5. in *Rhombo* & *Rhomboide* diameter $A C$, quæ subtendit minorem angulum

gulum D, minorem esse diametro BD, quæ subtendit majorem C. Sunt autem D & C, inæquales, quia simul sunt æquales duobus rectis per 29. & per def. neuter est rectus. Cum enim latera DA, DC, sint æqualia lateribus CB, CD, & angulus D minor angulo C, ex hypothesi; erit basis AC, minor base BD, per 24.

PROPOS. 35. THEOR. 25.

Parallelogramma A C D E, F C D B, super eadem basi C D, & inter easdem parallela A B, C D, sunt æqualia.

IN primo casu coincidit punctum F cum puncto E; in secundo existit inter puncta A, E; in tertio inter puncta E, B. In omnibus autem tribus casibus angulus CAF æqualis est per 29. DEB, & per 34. AC æqualis DE, & AE, FB æquales eidem CD, ideoque æquales inter se. & in secundo casu auferendo intermedium FE relinquentur æquales AF, EB. & in tertio fit idem addendo communem EF. Atque ita circa æquales angulos CAF, DEB, erunt duo latera CA, AF, æqualia duobus lateribus DE, EB, & idcirco per 4. triangulum CAF, erit æquale triangulo DEB. & in primo casu addito triangulo CED. in secundo Trapezio CFE D. & in tertio abjecto primo triangulo GEF & postea adjecto

B 2

triang-

C
H
G
t
int
æ.
&
-
B;
ec
est

afsi
D.

A
al-
e-
C
F

su-

lia

Quia sunt semisses æqualium parallelogramorum A C D E, F G H B.

Ex Scholio. t

Recta igitur F H, secans basim G I, bifariam in H; secat etiam bifariam triangulum F G I.

PROPOS. 39. THEOR. 29.

Triangula A B C, B C D. sint super communis basi B C, æqualia. Dico A D, esse parallelam B C.

Sin minus, sit A E parallelæ, & secet C D, in E; eritque per 37. triangulum B C E æquale eidem A B C: & ideo B C E, B C D, æqualia; quod est absurdum.

PROPOS. 40. THEOR. 30.

Idem dico quando triangula A B C, D E F sunt æqualia, & super æqualsibus basibus B C, E F.

Si enim alia A G, esset parallelæ; triangula A B C, G E F, essent æqualia per 38, nec non G E F, D E F.

PROPOS. 41. THEOR. 31.

Parallelogrammum A B C D, & triangulum E B C, sint inter parallelas A E, B C: Dico parallelogrammum duplū esse trianguli.

Quia parallelogrammum ABCD est per 34. duplum trianguli ABC; & hoc est æquale triangulo EBC per 37. Ergo.

PROPOS. 42. PROBL. XI.

Triangulo ABC, constituere parallelogrammum equale, cum angulo D.

Basis BC, secetur bifariam in E: per 10.
Beritque per 38. triangulum ABC, duplum trianguli AEC: & facto angulo CEF, æquali D, ductaque AFG, parallela BC,
& CG, parallela EF; factum erit parallelogrammum EG, duplum ejusdem trianguli AEC, per 41. & idecirco æquale triangulo ABC.

PROPOS. 43. THEOR. 32.

*Complementa GB, GC, de quibus defin. 36.
sunt æqualia.*

Triangulum enim ACD æquale est triangulo ADB, per 34. AGH, ipsi AG
E; & GDF, ipsi GDI: Et ablatis AGH,
GDF ex ACD, remanet complementum
GC, & ablatis AGE, GDI ex ADB, re-
manet complementum GB. ergo. \dagger

PROPOS. 44. PROBL. XII.

ad datam A. dato triangulo B; æquale parallelogrammum applicare, cum dato angulo C.

Per 42. fiat parallelogrammum GE, æquale triangulo B, cum angulo F, æquali C; & ex DE protracta, sumatur EI, æqualis A, & IF, secet DG, in K, perficiaturque reliqua parallelogramma: ex quibus complementum FL, est per 43, æquale

\dagger non ab æquilib. ADC, ADB æquilib. æfia, sed jux. comple-
H. G. t. el. et c. e. z. do. f. g. D. G. g. j. g. remaneat æfia CG.

complemento G E, hoc est triangulo B, & habet latus F H, æquale ipsi E I, hoc est, ipsi A; & angulum M F H æqualem angulo F, per 15. hoc est angulo C.

PROPOS. 45. PROBL. 13.

Dato rectilinea, A, B, C: aquale parallelogrammum constitutere, cum angulo D.

Distribuatur rectilineum in sua triangula A, B, C, ipsique A, fiat per 44. æquale parallelogrammum F H cum angulo F. æquali D: & aliud G I æquale ipsi B applicetur ad G H, cum angulo G, æquali eidem D: denique ad K I applicetur K M æquale ipsi C, & I K L; sit rursus æqualis angulo D: eruut F H, G I, K M simul æqualia rectilineo A, B, C. Quod autem F M, sit parallelogrammum probatur hoc modo. Angulus F est æqualis H G K, & duo H G K, H G F. sunt æquales duobus H G F, G F E, & hi duo sunt æquales duobus rectis per 29. ergo & illi, & ideo per 14. G F, G K, sunt una linea: & eadem est ratio de K G, K L. immo eadem quoque de tribus E H, H I, I M; quia angulis F, G, K, sunt per 34. æquales, oppositi H, I, M. Cumque G H, sit æqualis & parallela E F, & K I, æqualis, & parallela G H, & L M, æqualis, & parallela ipsi K I: erunt etiam E F, L M, æquales & parallelae, & per 33. F L, E M, erunt similiter æquales & parallelae.

PROPOS. 46. PROBL. 14.

Super datam A B, quadratum describere.

Erigantur duæ perpendiculares $A D$, $B C$, æquales ipsi $A B$: eritque per 33. etiam DC æqualis & parallela ipsi AB , & angulis rectis A , B , erunt per 34. æquales oppositi C , D . Hoc est figura AC , erit æquilatera, & rectangularia.

PROPOS. 47. THEOR. 33.

In triangulo A B C, habente rectum ad A:

Quadratum lateris B C, æquale est quadratis duorum laterum A B, A C.

Describantur per 46. quadrata $B D$, $B G, CI$: eritque per 14. tam $B A I$, quam $C A G$ una linea recta, quia anguli ad A , sunt recti. Et quia $A B F$, $C B E$ sunt æquales; addito communi $A B C$, fit totus $F B C$, æqualis toti $A B E$; & ductis rectis FC , $A E$, & AK , parallela ipsi $B E$; erunt circa æquales angulos FBC , ABE duo latera $F B$, $B C$; æqualia duobus AB , BE . Quare triangulum FBC , æquale erit triangulo ABE , per 4. Trianguli autem FBC duplum est quadratum BG , per 41. quia sunt super eadem basi $B F$, & inter easdem parallelas $B F$, CG : & trianguli ABE duplum est parallelogrammum $BLKE$; quia sunt super eadem basi $B E$, & inter parallelas BE , AK . Ergo parallelogrammum $BLKE$ æquale est quadrato BG . Eodemq; modo demon-

Pro quo deq; in antiquis lato subtenuis obliquo stratur angulo facie majoris quadrati quadratus reliquo latere. & in genio subtenuis lato acutus lato obliquo minor.

stratur alterum parallelogrammum $L\,CD$
 R , æquale esse quadrato $C\,I$. Totum igitur
 quadratum $B\,D$, erit æquale duobus qua-
 dratis $B\,G$, $C\,I$. + et triangula $A\,C\,D$, et $A\,C\,B$ æq[ue]
~~æq[ue] cum duplo nimis parallelogrammum $C\,D\,R\,L$ ex quadratis
 & $C\,H\,F$ cum duplo æq[ue]~~
Ex Scholio. *

Inventio hujus Theorematis tribuitur Pythagoræ; qui cum advertisset in quibusdam numeris, quales sunt 3. 4. 5. duorum 3. & 4. quadratos 9. & 16. facere 25. quadratum tertij; voluit idem experiri in lineis, & invenit ex tribus lineis ab hujusmodi numeris numeratis constitui semper triangulum rectangulum.

Inventio autem hujusmodi numerorum ita se habet. Pro minimo sumatur quicunque numerus impar, v. g. 5. & ex ejus quadrato 25. abiiciatur 1. Reliqui enim numeri 24. medietas 12. erit secundus, & tertius erit 13. unitate major. Vel sic, pro minimo sumatur par v. g. 6. & ex quadrato 9. hoc est ex quadrato numeri 3. qui est medietas numeri 6. abiiciatur 1, eidemque addatur 1. eritque secundus numerus 8. & tertius 10.

PROPOS. 48. THEOR. 34.

Vice versa angulus A , est rectus, quando quadrata $A\,B$, $A\,C$ sunt aequalia quadrato $B\,C$.

B 5.

Eri-

Erigatur ex puncto A super BA , perpendicularis AD , & æqualis AC ; eritque per. 47. quadratum BD , æquale quadratis AB , AC : atq; adeo quadrato BC ; & ideo BD , erit æqualis BC . Et quia præterea duo latera AB , AD , sunt æqualia duobus AB , AC ; erit angulus BAD æqualis BAC , sed ille est rectus; ergo & iste.

EVCLIDIS ELEMENTUM SECUNDUM.

DEFINITIONES.

Parallelogrammum rectangulum dicitur contineri sub duabus lineis rectis, quæ comprehendunt angulum rectum. *Ex Scpolio.*

Ratio est, quia in duabus illis lineis, & angulo recto, assignantur omnia illa, quibus datis datur ipsum rectangulum; nemirum longitudo, & latitudo, & angulus rectus,

rectus, qui est solus ex omnibus angulis invariabilis.

Alia ratio est, quia ex ductu hujusmodi linearum unius in alteram, formatur optimè conceptus ipsius rectanguli. Nam si duæ rectæ AB , AC contineant angulum rectum A , & AC intelligatur moveri per rectam AB . ex A usque ad B , ita ut semper ipsi AB , existat perpendicularis; describet punctum C tertium latus CD , & si eadem recta AC intelligatur aliquid post se relinquere, id erit superficies plana, inter AB , AC , CD , DB , comprehensa.

Habet etiam hæc comprehensio rectanguli sub duabus rectis, nec non hie ductus unius lineæ in alteram, magnam affinitatem cum multiplicatione, vel ductu unius numeri in aliud. Sicut enim ex multiplicatione v.g. 3. in 4. producitur numerus 12. cuius unitates possunt disponi in forma rectanguli, diciturque idem numerus 12. contineri sub duobus numeris 3. & 4. eo quod fiat ex ductu 3. in 4. ita quoq; si AC , trium partium, ducatur in AB , 4. partium; producuntur 12. quadratula unius partis, quæ constituunt totum rectangulum contentum sub ijsdem duabus rectis AC , AB .

Secunda definitio. In parallelogrammo CB diviso in alia quatuor; duo comple-

menta GC , GB , una cum HE ; constituunt Gnomonem $FHEI$, & cum parallelogrammo FI , constituunt Gnomonem HFE .

PROPOS. i. THEOR. i.

Rectangulum contentum sub A, EBC. qualem est BCFG: aquale est ipsi, qua continentur sub eadem A, seu BG, E singulis partibus recta BC.

ACtis enim per D , E ipsi BG parallelis ADH , EI ; distribuitur rectangulum BF in rectangula BH , DI , EF , quæ continentur sub BG , DH , EI , hoc est sub A , & sub partibus BD , DE , EC . Est autem per 19. pronunc. omne totum æquale suis partibus; ergo.

Applicatio ad numeros.

Sit BC , 10. segmenta BD , DE , EC . Sint 5. 1, 4. & recta A vel BG , sit 6. Eritque rectangulum BF , seu numerus productus ex BG , 6. in BC , 10. numerus 60: & BG , 6. in BD , 5. erit 30: & DH 6. in DE , 1. erit 6: & EI , 6. in EC , 4. erit 24. Et hæc omnia tria rectangula numerica collecta in unam summam, faciunt eundem numerum 60. quem facit A , 6. in BC 10. Et hoc modo applicari possunt numeris ferre omnes propositiones sequentes.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

BC, scilicet sicunque in D : *Dico quadratum*

*tum BC aequale esse rectangulis contentis
sub BC, BD, & sub BC, DC.*

Hec non differt à præcedenti si BG, intelligatur æqualis ipsi BC. Rectangulum enim BE, hoc est quadratum ipsius BC, erit æquale rectangulo BF, contento sub BG, BD, hoc est BC, BD; & rectangulo DE, contento sub DF, DC, hoc est sub BC, DC.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

*BC, sit secta uscunque in D: Dico rectan-
gulum contentum sub BC, & sub uno
segmentorum g. g. sub BD, aequale esse
quadrato BV, & rectangulo sub segmen-
tis BD, DC;*

Hec quoque continetur in prima, estq; manifesta si BG, ponatur æqualis BD. Sic enim BF, est quadratum ipsius BD; & DE, rectangulum sub DF, seu BD, & DC.

PROPOS. 4. THEOR. 4. *Vide notit. p. 3. N. 3*
*A B, secta siè uscunque in C: Dico quadra-
rum totius AB, aequale esse duobus qua-
dratis AC, CB, & duobus rectangulis sub
segmentis AC, CB.*

Quadratum totius AB, sit AD, dia-
meter BE, CGF, parallela AE; & HGI pa-
llela ipsius AB. Dico primū HF, CI, esse
quadrata segmentorum, AC, CB. Nam la-
tera AB, AE, circa rectum A, sunt æqualia;
ergo per 2. Coroll. p. B. 7. 32. Et. s. *Eccelle*

Coroll. 32. anguli A E B, ABE sunt semirecti: sed istis sunt æquales C G B, H G E, per 29. ergo omnes quatuor sunt æquales, & per 6. primi H G, H E: & C B, C G, æquales inter se, atque adeo HF, quadratum rectæ HG, quæ per 34. est æqualis AC, & CI, quadratum segmenti C B. Dico secundo rectangula A G, G D contineri sub ijsdem segmentis A C, C B.. illud enim continetur sub A C, C G; & C G, est æqualis C B; & G D, continetur sub G F, G I, & G F, est æqualis G H, hoc est, A C, & G I, segmento C B. Quibus ita demonstratis manifesta est propositio.

Coroll. Hinc patet parallelogramma H F C I circa diametrum quadrati, esse quadrata.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

A B secta sit bifariam in *C*, & non bifariam in *D*: Dico quadratum *C B*, aquale esse rectangulo *A D B*, una cum quadrato *C D*, seu nomine *A D, K E, D L*.

Facto quadrato *C F*, & ductis reliquis parallelis, erit per coroll. quartum KG quadratum sectionis intermediae *C D*, & *D I* quadratum segmenti *D B*; & rectangulum *A H*, erit illud quod continetur sub inæqualibus segmentis *A D*, *D B*, eo quod *D H*, sit æqualis *D B*. Dico hoc rectangulum *A H*, una cum quadrato *K G* æuale esse *T* *acide* *C G* si quadrati *ædiposita* *ejus* *lateralis* *intra* *quadra-*
tionis

quadrato C F. Complementum enim H C, est per 43. pr. æquale complemento H F; adjectoque D I; rectangulum G B, æquale rectangulo B K. Sed B K, est æquale K A per. 36. pr. ergo K A. G B, sunt æqualia, & una cum C H, erit A H æquale Gnomoni G I D K; & rursus addito quadrato K G; erit A H, una cum quadrato G K, æquale toti quadrato C F, quod componitur ex Gnomone, & quadrato K G.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Recta A B, secta bifariam in C, adjecta sit B D: Dico rectangulum A D B, una cum quadrato C B, æquale esse quadrato ipsum C D.

Construētio similiſ est præcedenti. Dico rectangulum A I, quod continetur sub A D, D I, hoc est sub A D, D B, una cum quadrato K G quod est quadratum rectæ C B, æquale esse quadrato C F. Nam C L, C H sunt æqualia per 36. pr. & C H, H F æqualia per 43. ergo C L, æquale est H F; adjectoque communi C I, totum A I, æquale Gnomoni G I B K. Sed hic, una cum quadrato K G, æquivalet quadrato C F: ergo & A I, K G, æquivalent eidem.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

A B, secta sit utcunq; in C: Dico quadratum torsum A B, nimirum A D, una cum

cum quadrato segmenti $\hat{v}. g.$ $A C$, hoc est una cum quadrato $H F$, aequalē esse re-
ctangulo $B A C$, bis, hoc est duobus rectan-
gulis $A F$, $H D$, una cum quadrato $C I$,
reliqui segmenti $C B$.

Duo enim rectangula $A F$, $H D$ sunt
æqualia Gnomoni $C H F I$, & quadra-
to $H F$: addito ergo quadrato $C I$, erunt
duo rectangula $A F$, $H D$, & quadratum C
 I , æqualia Gnomoni, & duobus quadratis
 $H F$, $C I$. Gnomon autem & quadratum C
 I , faciunt quadratum $A D$. Ergo quadrata
 $A D$, $H F$, sunt æqualia duobus rectangulis
 $A F$, $H D$, & quadrato $C I$.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

*Recta $A B$, sc̄cta utcunq; in C adīciatur
 $B D$, equalis $\hat{v}. g.$ segmento $B C$. Dico
quadratum totius $A D$, aequalē esse qua-
tuor rectangulis $A B C$, seu $A B D$, &
quadrato reliqui segmenti $A C$.*

Constrūcio est similis superioribus, &
C $A E$ est quadratum totius AD : $O I$,
quadratum segmenti AC ; $N Q$, BM , sunt
quadrata æqualia BC , BD , qualia sunt e-
tiam quadrata CH , HP . Unde constat u-
num ex quatuor rectangulis esse $A H$, quia
continetur sub AB , BH quæ est æqualis
 BC . Secundūm est $L Q$: quia continetur
sub LH , HQ , quæ sunt iterum æquales
ipsis AB , BC : Tertium est HE , conten-
tum

tum sub H G, H M, quæ etiam sunt æquales eisdem A B, B C. Quartum denique constituunt K G, B M, quia KG, est æquale QE per 36. pr. & quadratum BM, est æquale quadrato HP. Cum igitur hæc quatuor rectangula constituant Gnomonem qui cum quadrato O I, facit totum quadratum AE; manifestum est totum quadratum AE, æquale esse quatuor rectangulis ABC, & quadrato segmenti AC.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Recta AB secuta sit bifariam in C, & non bifariam in D: Dico quadrata in aequalium segmentorum AD, DB, dupla esse quadratorum ex AC, CD.

Perpendiculus CE sit æqualis CA, vel CB: eruntque ACE, ECB. Isoscelia rectangula, & quatuor anguli ad bases AE, EB erunt per 2. coroll. 32. semirecti, & totus AEB, rectus. Rursus perpendicularis DF, fecet EB, in F, & FG, sit parallela CD: eruntque etiam FD B, FGE, rectangula; & quia anguli DBF, GE F, sunt semirecti, erunt & reliqui DFB, GFE, semirecti, & per 6. pr. DF, æqualis DB, & EG æqualis GF, vel CD. Unde per 47. pr. quadratum rectæ AE, æquale est quadratis CA, CE, & duplum quadrati AC. Et quadratum EFD duplum quadrati GF, vel CD, & duo quadrata AE, EF, hoc est qua-

quadratum $A F$, vel loco istius, duo quadrata AD, DF . vel duo AD, DB , dupla quadratorum AC, CD .

PROPOS. 10. THEOR. 10.

$A B$ secta bifariam in C , adjiciatur quaque $B D$. Dico duo quadrata AD, DB dupla esse duorum AC, CD .

Constructio est eadem cum præcedente, & angulus $A E G$, rectus, & ACE . $E GF, BG D$ triangula rectangula Isoscelia, & ideo quadrata AE, EG , dupla quadratorum AC, EF , hoc est, quadratorum AC, CD . duobus autem quadratis AE, EG , est per 47. pr. æquale quadratum AG ; & quadrato AG ; sunt æqualia AD, DG , hoc est AD, DB . Ergo etiam duo quadrata AD, DB sunt dupla quadratorum AC, CD .

PROPOS. 11. PROBL. 1.

Rectam AB ita secare in C . ut rectangulum ABC , sit æquale quadrato segmenti AC . xxx

Quadratum ipsius AB , sit AD ; & latus AE , bifariam sectum in F ; & recta FG , æqualis ipsi FB , & AC æqualis AG ; perficiaturque quadratum AH ; & HC , sit protracta in I : eritque EH , rectangulum contentum sub EG, GH hoc est, sub EG, GA . Hoc autem rectangulum una cum quadrato AF , æqualia sunt per 6. quadrato FG ,

in Basis fusi e. ad eundem A lato. & ad æqualem segmentum hoc te æqui unitate secutus. tamen in f. intercluso. Tunc eundem f. & h. in d. & g. in f. segmento A. C. q. in h. i. summa. & h. v. l.

hoc est, quadrato FB : & per 47.pr. quadratis AB , AF , ergo rectangulum EH , cum quadrato AF , æquale est quadratis AB , AF , hoc est, quadrato AD , & quadrato rectæ AF , deinpto igitur quadrato communis AF remanebit quadratum AH , hoc est, quadratum segmenti AC , æquale rectangulo CD , hoc est, rectangulo contento sub tota AB , & reliquo segmento CB .

PROPOS. 12. THEOR. 11.

In triangulo ABC, sit angulus B, obtusus; ita ut perpendicularis AD per schol. 17. primi cadat extra triangulum: Dico quadratum lateris AC; excedere quadrata laterum AB, BC, gemino rectangulo CB D.

Quadratum enim CD , est per 4. æquale quadratis BC , BD . & gemino rectangulo $CB D$. addito ergo quadrato AD ; erunt duo CD , DA , hoc est, per 47.pr. quadratum AC , æquale geminato rectangulo $CB D$, & tribus quadratis CB , BD , DA , Quadratis autem BD , DA , æquale est quadratum AB . ergo quadratum AC , æquale est duobus quadratis AB , BC , una cum geminato rectangulo $CB D$.

PROPOS. 13. THEOR. 12.

In triangulo ABC, sit angulus C, acutus; eritq; saltem alter reliquorum acutus, scilicet B; & ideo perpendicularis AD, caderet intra

invenit alibi justa, l. in *intra triangulum. Dico quadratum la-*
serio A B, minus esse quadratis A C, B C,
geminato rectangulo B C D.

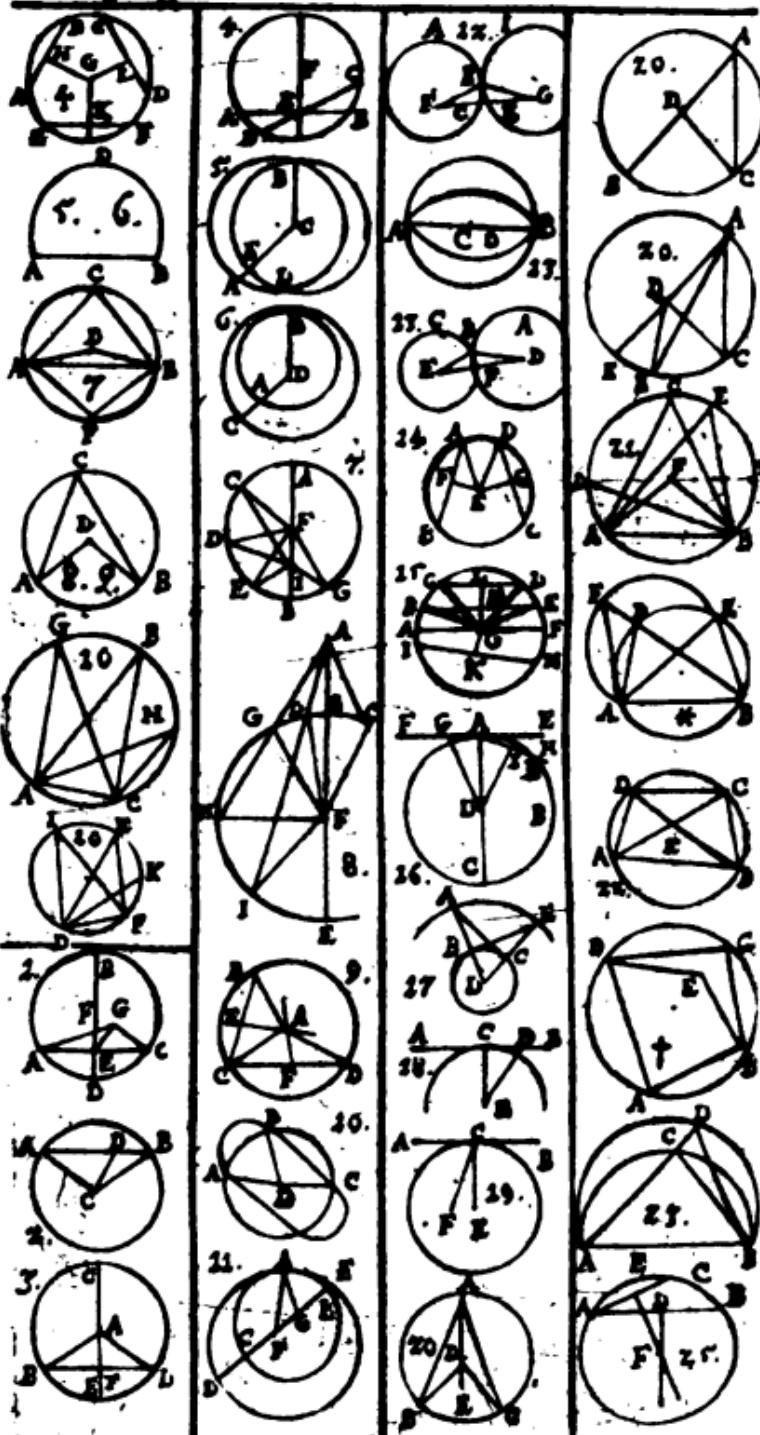
Quadrata enim $B C, CD$, sunt per 7. æqualia gemino rectangulo $B C D$, & in-super quadrato $B D$. Ergo addito quadra-to AD . Eiunt tria quadrata $B C, CD, A$
~~et~~ $D A$, vel duo $B C, AC$, æqualia rectangulo
~~CD, AD~~ gemino $B C D$, & duobus quadratis $B D$,
 $D A$, quibus est æquale quadratum AB .
Ergo solum quadratum AB , minus est duo-bus quadratis $B C, AC$ prædicto gemino
rectangulo $B C D$. $\ddot{\sigma}$

PROPOS. 14. PROBL. 2.

Dato rectilineo A, æquale quadratum exhibere.

Per 42. vel 45. primi fiat rectilineo A æquale rectangulum $B D$, ipsique $C B$ sumatur æqualis $C F$; & centro G , circa to-ram $D F$, describatur semicirculus, eumq; secet $B C$ in H . Dico quadratum CH , æ-quale esse rectangulo DB , hoc est, rectili-neo A . Rectangulum enim DCF , hoc est DB , una cum quadrato GC , æquale est, per 5. quadrato GF , hoc est, quadrato GH . Sed huic sunt per 47. pr. æqualia quadrata CH , CG . Ergo hæc duo quadrata, sunt æqualia dicto rectangulo DB , & quadrato GC ; dé-ptoq; communi quadrato GC , remanebit quadratum CH æquale rectangulo DG , hoc est, rectilineo A .

Secundum quadratum AD in genere rectangulo BC'D' agitur in quo quadratis
CA' *EU-*



- Re
alii, el
curvam, seu*
7. Angulus in segmento v. g. in segmento $A C B A$, est angulus rectilineus $A C B$, cum angulus C est ad peripheriam, & latera $C A$, $C B$. pertingunt ad terminos basis $A B$.
8. Tam angulus rectilineus $A C B$ ad peripheriam, quam $A D B$ ad centrum, dicitur insistere peripheriaz $A B$, quam intercipiunt lineaæ rectæ continentes angulos C , D .
9. Figura antem mixta $A B D$, & contencta peripheria $A B$, & duabus rectis $A D$, $B D$ coeuntibus in centro D , appellatur Sector.
10. Similia circuli segmenta sunt, in quibus anguli juxta defin. 7. sunt æquales. & satis est si vel unus $A B C$, sit æqualis uni $D E F$, quia per 2 i. hujus etiam reliqui sunt æquales, quia omnes in eodem segmento sunt æquales.

PROPOSITIO 1. PROBLEMA 1.

Dati circuli centrum repere.

Retta $B D$, secans aliam $A C$ bifariam, & ad angulos rectos in E , segetur bifariam in F . Dico F , esse centrum. Si enī F non est centrum, sit aliud G , extra ipsam $B D$. recta enim $B D$, semel tantum secatur bifariam in puncto F . Neceantur $G A$ $G C$

G C, G E, eruntque duo latera **G E, EA,** æqualia duobus **G E, EC,** & per 15. def. pr. basis **G A,** basi **G C.** ergo per 8. pr. **G E** **C, G E A,** sunt æquales, & recti, & rectus **G E C, æqualis recto D E C;** quod est absurdum. enon. certe recti, ergo etiam recte aperte, non possunt esse absurdum.

Coroll. Ergo in quavis recta, quæ aliam secat bifariam, & ad angulos rectos, est centrum circuli; atq; adeo in communi carundem concursu. te bifarii secantur.

PROPOS. 2. THEOR. 1.

Recta AB, neclens duo puncta peripherie A, B, cadit intra circulum.

Ex centro **C,** ad **AB** ducantur semidiametri **CA, CB;** & ad quodvis aliud punctum **D,** recta **CD.** Erunt igitur per 5. pr. **CAB, CBA** æquales. Est autem per 16. pr. **CD** **A** major **CBA,** ergo etiā major quam **CAD;** ideoq; per 19. pr. **CD** minor semidiametro **CA.**

Coroll. Ergo linea tangens, tangit circumferentiam in unicō punto.

PROPOS. 3. THEOR. 2.

Diametor CAE secans aliam BD, non per centrum dicitur bifariam, secans ad angulos rectos: Et vice versa, secans ad angulos rectos, secatur bifariam.

In prima enim hypothesi duo latera **AF,** **FB** sunt æqualia duabus **AE, ED,** & ba-

sis AB , basi AD . ergo per 8. pr. angulus AFB æqualis est angulo AFD .

In secunda, præter angulos rectos ad F , erunt per 5. pr. æquales ABD , ADB , & latus AF , istis oppositum commune. ergo per 26. pr. latus FB erit æquale lateri FD .

Coroll. Eodem modo in omni triangulo isosceli ABD ; recta AF secans bifariam basim BD , secat ipsam ad angulos rectos; & secans ad angulos rectos, secat bifariam.

PROPOS. 4. THEOR. 3.

Extra centrum, nullæ lineaæ se mutuo secant bifariam.

Si enim AB , CD sectæ essent bifariam in E ; recta FE , ducta ex centro F , esset per 3. perpendicularis ad utramque, & anguli FEA , FEC , essent æquales, quod est absurdum.

PROPOS. 5. THEOR. 4.

Circuli se mutuo secantes non habent idem centrum.

Si fieri potest commune centrum sit C . Ergo CB , erit semidiameter communis, eique erint æquales aliæ CA , CE ; ideoq; æquales inter se, quod est absurdum.

PROPOS. 6. THEOR. 5.

Etiam se mutuo tangentium, non est idem centrum.

Propter eandem causam, quia D B , esse commune

communis, & D A, D C, æquales essent e-
idem D B, & æquales inter se.

~~+ diametrum~~ PROPOS. 7. THEOR. 6.

~~Si ex punto ex centro I, educantur A, I
B, per centrum F, & alia I C, I D, I E,
nec unque: erit IFA omnium máxima;~~
~~I B, minima;~~ ~~I C major I D,~~ & ~~I E~~
~~q. g. I E una tantum poterit esse aqua-~~
~~lis ex altera parte maxima, vel mini-~~
~~ma.~~

Primo, FI, FC sunt *per 20. pr.* mayores
IC, sed FI, FC; sunt æquales FI, FA.
ergo IA, major est IC, &c.

Secundo IF, FC, sunt æquales IF, FD;
& angulus IF C, major IF D. ergo *per 24.*
pr. IC major quam ID, &c.

Tertio IF, IE, sunt mayores FE, hoc est,
FB, dempta igitur communi IF, remanet
IE major IB.

Quarto si angulo BFE, fiat æqualis BF
G: erunt circa ipsos latera IF, FE; æqua-
lia lateribus IF, FG. ergo *per 4. pr.* & ba-
sis IE, basi IG, & nulla alia; reliquæ enim
omnes sunt mayores vel minores *ex pre-*
missis.

PROPOS. 8. THEOR. 7.

*Ex punto A extra circulum posito, duca-
sur quocunque rectam AB, FE per centrum
F, ADI, AGH. nec unque, tam ad con-
vexam peripheriam quam ad concavam*

Dico A E esse maximam eductarum ad concavam; A B, minimam eductarum ad convexam; A I, majorem esse A H; Et A G majorem A D: ipsique g. g. A D, unam tantum aliam posse esse aequalem.

Primo, A F, F I, sunt per 20. pr. majores A I. Ergo & A F E, quae est aequalis ipsis A F, F I, &c.

Secundo. A D, D F sunt majores A F. ergo demptis aequalibus F D, F B; remanebit A D, major quam A B &c.

Tertio A F, F I sunt aequales A F, F H; sed angulus A F I, est major quam A F H, ergo per 24. pr. A I, major quam A H &c.

Quarto. duæ A D, D F, sunt per 21. pr. minores duabus A G, G F; & G F, D F, sunt aequales. ergo A D, minor quam A G, &c.

Quinto. angulus AFC, sit aequalis AFD. ergo per 4. pr. A D, erit aequalis A C, quia circa aequales angulos latera A F, F D, sunt aequalia lateribus A F, F C.

PROPOS. 9. THEOR. 8.

Tres rectæ A B, A C, A D, sunt aequales:

Dico A esse centrum.

Restat CB, CD, secantur bifariam in E, F, & ducantur AE, AF; eruntque duo latera AE, EB, aequalia duobus EC, & basi AB, aequalis AC. ergo per 8. pr. anguli

anguli A E B, A E C, sunt æquales, & recti:
& per coroll. prima hujus, in E A, erit cen-
trum circuli; sed propter eandem causam
debet esse in F A. ergo centrum est A.

PROPOS. 10. THEOR. 9.

*Circulus circulum secat duxaxat in duas
bus punctis,*

SI enim fieri potest sint tria puncta B, A,
C; & centrum unius sit D. Cum ergo
tria puncta B, A, C, sint communia, erunt unus
etiam ad alterius circuli peripheriam tres
rectæ D B, D A, D C, æquales; ideoq; D
centrum erit utriusque, quod est contra §.
hujus.

PROPOS. 11. THEOR. 10.

*Recta conjugens ceperat duxorum circulorum
se mutuo tangentium interior, transfit
per contactum.*

Punctum contactus sit A, centrum inte-
rioris circuli G, exterioris F; & recta
F G, si fieri potest non transeat per A, sed
interiorum secet in B, exteriorum in E. E-
rantque G A, G B, æquales, adjectaque F
G, erunt A G, G F æquales F B; sed A G,
G F sunt majores A F, per 20. pr. ergo eti-
am F B, major est quam A F, hoc est, ma-
jor quam F E. quod est absurdum. idem se-
queretur ex altera parte, si F , ponatur
esse centrum interioris, & G exterioris,

etiam si puncta C, D, vel B, E, ponerentur coincidere in unum.

PROPOS. 12. THEOR. 11.

Recta conjugens centra duorum circulorum se mutuo tangentium exterius; transit per contactum.

Senim F G, conjugens centra F, G, non transit per contactum B, sed fecerit circulos in C, E. erunt duo latera FB, GB, vel æqualia, vel minora tertio F C E G, quod est contra 20. primi.

PROPOS. 13. THEOR. 12.

Contactus circulorum, est unicum punctum.

Si duo essent puncta contactus v. g. A, B; recta C D, conjugens centra C, D, per 11. hujus transiret per utrumque, essetque A C D B, communis diameter, eademque secta bifariam in duobus punctis C, D, quod est absurdum.

Si autem duo circuli se mutuo tangenterent in duobus punctis B, F, exterius, una, eademque D E, transiret per utrumque, per 12. vel certe F D, F E, essent æquales ipsi D E, vel B D, BE æquales ipsi D F E, quæ omnia sunt absurdia.

PROPOS. 14. THEOR. 13.

Ad æquales AB, CD, cadunt æquales perpendiculares EF, EG. Et AB, CD, sunt ad eam velæ æquæ uno signo aquales;

*aqua*les; quando perpendiculares E F, E G sunt aquales.

Perpendiculares enim E F, E G, secant A B, C D, bifariam per 3. & ideo A F, D G, semisses æqualium, sunt æquales. & quia æqualibus quadratis semi-diametrorum E A, E D, æqualia sunt per 47. pr. quadrata A F, F E, & quadrata D G, G E: necesse est hæc duo, illis duobus esse æqualia, & demptis æqualibus A F, D G, remanere æqualia quadrata E F, E G, & rectas E F, E G æquales.

Vice versa, si ex duobus quadratis E F, F A, quæ sunt æqualia duobus E G, G D, quia sunt æqualia quadratis E A, E D; tollantur æqualia E F, E G, remanent æqualia quadrata F A, G D, ipsæque A F, D G æquales. Est autem per 3. A F medietas totius A B, & D G medietas totius D C. ergo A B, D C sunt æquales.

PROPOS. 15. THEOR. 14.

Applicatarum in circulo maxima est diameter, s. g. C F; & H I centro propinquior, major est remotiore C D.

Ducantur perpendiculares G K, G L, quarum illa erit per def. 4. hujus minor ista, & ideo ex G L poterit abscondi G M, æqualis G K; & B E, æquidistans ipsi C D, erit per 14. æqualis I H. Nectantur præterea G B, G C, G D, G E; eruntque per

20. pr. duo latera G B, G E, majora, reliquo B E, sed G B, G E sunt æquales diametro A F. ergo.

Quod autem H I , sit major C D ; patet
per 24. pr. quia latera G B , G E , sunt æ-
 qualia G C , G D , & angulus B G E , major
 C G D .

PROPOS. 16. THEOR. 15.

Recta $F A$ est diametro $A D C$ perpendicularis in A , resa cadit extra circulum: Et angulus contingentia $E A B$, non potest dividisi per lineam rectam: Angulus etiam semicirculi $C A B$ major est, Et reliquus contingentia minor omni angulo rectilinneo acuto.

Primo. Ad quodlibet punctum G , rectæ $E F$, ducatur ex centro D , recta $D G$ Quoniam igitur rectus A , major est acuto DGA ; erit per 19. pr. DG , major semidiametro DA ; & G , extra circulum &c.

Secundo. Dico rectam AH , eductam ex A , utcunque infra AE , secare circulum. Angulo enim $E AH$, fieri potest æqualis DI , ad centrum D , per 23. pr. & DI , concurrit necessario cum AH , v. g. in I , quia duo IAD , IDA , sunt minores duobus rectis, quia sunt æquales recto DAE , & ideo necesse est $DI A$, esse rectum & per 19. pr. DI , minorem esse semidiametro DA , atque adeo punctum I , nec non totam AI ,

esse intra circulum; & rectam AH nequam cadere inter rectam AE . & peripheriam AB .

Tertio. Dico angulum semicirculi CAB , majorem esse acuto CAH . quia præter acutum, continet angulum, segmenti quod abscindit eadem AH .

Quarto. Dico angulum contingentia contentum rectâ AE , & peripheriâ AB , minorem esse quolibet acuto EAH . Hic enim continet angulum contingentia, & simul angulum segmenti abscissi à recta AH .

Coroll. Hinc patet rectam E , si cum diametro CA , ad punctum A , constituat rectos CAE , CAF ; tangere circulum in punto A .

PROPOS. 170 PROBL.

Ex A, ducere rectam. qua tangat circulum BC.

Entro D intervallo DA , describatur alius circulus, vel arcus AE , cumque fecet perpendicularis BE , in E ; & DE , fecet circulum in C : dico AC , tangere circulum in C . Est enim per 4. pr. angulus DCA ; æqualis recto DBE , quia circa angulum D duo latera DC , DA , sunt æqualia duobus DB , DE ; perpendicularis ad ordinem tantum in D secans: ergo constat, tangentia AC tangens circulum in C .

PROPOS. 18. **THEOR.** 16.

A B tangat circulum in C: Dico semidiametrum E C, esse perpendicularem ad A B.

Nam si alia E D, esset perpendicularis; esset E D C, rectus, & E C D, acutus, & per 19. pr. E D minor semidiametro E C; punctumque D, intra circulum, quod est contra hypothesim.

PROPOS. 19. **THEOR.** 17.

Recta C E constituta cum tangentे A B, angulum rectum A C E. Dico C E transire per centrum.

Si enim E, non est centrum sit F. Ergo per antecedentem rectus F C A, æqualis erit recto E C A. quod est absurdum.

PROPOS. 20. **THEOR.** 18.

Angulus B D C, ad centrum D; duplus est B A C, anguli ad peripheriam; cum fuerit eadem peripheria basis angularium.

In primo casu anguli E D C, E D B, sunt dupli angularum D A C, D A B: quia triangula D A C, D A B, sunt Isoscelia; & E D C, E D B, sunt per 32. pr. æquales duabus internis, & oppositis.

In 2. propter eandem causam BDC, duplus est anguli BAC.

In 3. totus E D C, duplus est totius E A C; & ablatus E D B, ablati E A B; ergo reliquis B D C, duplus reliqui B A C.

PRO-

PROPOS. 21. THEOR. 19.

Quis in eodem segmento sunt anguli, quales sunt ADB, ACB, AEB, sunt inter se aequales.

Ratio est, quia unus & idem angulus AFB, ad centrum, est duplus angulorum, ADB, ACB, AEB.

Unde sapienter Euclides definit ultima definitione similitudinem segmentorum, per aequalitatem hujusmodi angulorum.

Ex Scholio.

Resta A B, subtendat ad easdem partes duos angulos aequales ADB, AEB: Dico puncta A, B, E, D esse ad peripheriam ejusdem circuli. Si enim peripheria ABE, non transit per D, fecet rectam BD, ultra vel citra punctum D, in F ducta igitur AF, erunt per demonstratae anguli AFB, AEB, in eodem segmento ABF, aequales. & consequenter etiam AFB, ADB aequales. quod est absurdum, unus enim est altero major per 16. pr. quia unus est externus, & alter internus & oppositus.

PROPOS. 22. THEOR. 20.

Quadrilateri ABCD inscripsi circulo, anguli oppositi sunt aequales duobus rectis.

Anguli enim ACB, ADB, sunt aequales per 21. & similiter ABD, ACD.

C 5

& id-

b-
D,
n-
tis
do
C,

C,
is,
ad
er
a-
e-
m &
u-
od
n-
u-
or!

b-
i-
e-
D;

sicutque angulus externus $A C B$, major interno $C D B$, quod est contra hypothesin, anguli enim similium segmentorum debent esse æquales.

PROPOS. 24. THEOR 22.

Idem verum est quando bases sunt æquales.

PROPOS. 25. PROBL. 3.

Dati segmenti $A B C$, centrum reperire.

Duæ rectæ $A B$, $A C$, quæ non sint parallelae secantur bifariam in D , E ; & ex D , E erigantur perpendiculares $D F$, $E F$, in quibus necessario existit centrum circuli per coroll. prima hujus, nimirum in eomuni concursu F .

Eodem modo describitur circulus per quælibet alia tria puncta A , B , C , vel etiam circa triangulum: dummodo puncta non existant in una linea recta.

Quod autem prædictæ perpendiculares $E F$, $D F$, concurrant probatur in sequenti lemma.

Lemma.

Perpendiculares secantes latera triangulo bifariam, concurrunt ad unum punctum.

In primo triangulo $A B C$, angulus A est rectus; in secundo obtusus; & in tertio sunt omnes acuti. in omnibus autem, secundum est latus $A D$, bifariam in D , & $D G$ parallelum.

Parallelia lateris AC , occurrit basi BC , in G ; & GE est parallela AB ; & ex his pro-creatur parallelogrammum $ADGE$, in quo latera opposita DG , AE , & AD, GE , & DB , sunt æqualia *per. 34. pr.* & *per 29.* angulus EGC , æqualis interno B , & GE C , GD B , æquales inter se, quia sunt æqua-les eidem A . Et quia angulis EGC , GE C adiacet latus GE , & BD , ipsi GE æquales, adiacet duobus GBD , GD B ; erit *per 26,* *pr. GC*; æqualis GB , & GD , æqualis EC ; atque adeò EC , æqualis ipsi AE . Atq; hæc sunt communia.

Jam vero in prima figura perpendiculares DF , EF , coincidunt cum parallelis DG , GE , eo quod etiam anguli GD B , GE C sint æquales recto A . Unde constat etiam perpendiculares DF , EF concurrere, & concursum F esse punctum G , in quo basis BC , secta est bifariam: ita ut in hoc ea-su non sit opus ducere tertiam perpendi-cularem quæ deberet erigi ex punto G , su-per BC .

In secundo vero casu perpendiculares DF , EF , concurrent infra BC . Cum enim angulus GD B , æqualis sit obtuso A ; & BD F sit rectus. recta DF , cadit necessario in-ter DG , & DB , & similiter EF cadit inter EG , EB . unde concursus non potest non esse infra BC : concursum autem probat re-cta

Et a $D E$, quæ ex duobus rectis ad D, E demit duos $A D E, A E D$. & ideo reliqui $F D E, F E D$, sunt duobus rectis minores; ex quo sequitur concursus per 13. *Axioma.*

In tertio casu perpendicularares $D F, E F$, cadunt inter $D A, D G$, & inter $A E, E G$, quia anguli $B D F, C E F$ sunt majores angulis $G D B, G E C$, qui sunt æquales acuto A , & ideo concursus F est intra triangulum $A B C$.

Denique in utroque casu tertia perpendicularis coincidit cum recta FG . Nam primo $F B$, est æqualis $F A$, per 4. pr. quia circarectos $F D A, F D B$ sunt duo latera $F D$ $D A$, æqualia duobus $F D, D B$. secundo $F C$. æqualis est eidem $F A$, eandem ob causam, assumendo triangula $F E A, F E C$. ergo etiam $F C$, est æqualis $F B$. sunt autem etiam duo latera FG, GB , æqualia duabus $F G, GC$. ergo per 8. pr. anguli FBG, FGC erunt æquales & recti. atque adeo omnes tres perpendicularares concurrent ad commune punctum F . quod erat demonstrandum.

Pro figuris regularibus plurimum laterum ponitur aliud Lemma huic simile ad octavam propositionem quarti.

Cæterum in propositione 25. non est necesse ut rectæ AC, AB , habeant punctum A commune, dummodo non sint parallelae.

rallelæ. Et licet hic concursus perpendicularium demonstratus sit duntaxat in triangulis; idem tamen sequitur si duæ lineæ ducantur utcunque dummodo non sint parallelæ quales sunt A H, C I. Nam produc&æ constituunt cum A C, triangulum A C B, & perpendiculares D G, F G concurrunt in G. ergo etiam perpendiculares K M, L M, quæ secant A H, C I, bifariam concurrunt alicubi in M, cum sint parallelæ ipsis D G, F G, &c.

PROPOS. 26. THEOR. 23.

In eodem, vel in aequalibus circulis anguli aequales insunt aequalibus peripherijs, si&ve sint constituti ad centrum, si&ve ad peripheriam.

Sint primo æquales anguli ad centra G H. Cum igitur circa eosdem sint quatuor semidiametri æquales, erit per 4. pr. basis A C, æqualis basi D F. & quia ijdem anguli G, H, sunt per 20. dupli A B C, D E F: ideoque super æqualibus basibus segmenta A B C, D E F, similia, erunt per 24. eadem segmenta æqualia, & peripheria A B C, D E F, nec non reliquaæ A C, D F æquales.

Deinde si anguli B, E ponantur æquales; necesse est etiam G, H esse æquales. ergo &c.

PRO-

PROPOS. 27. THEOR. 24.

Quando arcus D F, A C sunt aequales, sunt quoque ram anguli ad circula G, H, quam angulis B, E. ad peripheriam aequales.

Si enim angulus AGC, esset major DHF, ipsique DHF, sic ret æqualis AGI, arcus A I, esset æqualis DF, per 26. hoc est, ipsi AC, quod est absurdum. Similis est ratio de angulis B, E.

PROPOS. 28. THEOR. 25.

In eodem, vel aequalibus circulis, aequales rectæ subtendunt aequales peripherias.

ERUNT enim per 8. pr. anguli G, H, æquales, quia circa ipsos sunt quatuor semidiametri æquales; & insuper basis AC, ponitur æqualis basi DF. ergo per 26. arcus AC, est æqualis DF, & reliquus ABC, reliquo DEF.

PROPOS. 29. THEOR. 26.

Peripherias aequales subtendunt rectæ aequales.

QUIA per 27. erit etiam angulus G, æqualis H, si peripheria AC, sit æqualis DF. & per 4. pr. basis AC, æqualis basi DF, propter quatuor semidiametros æquales.

PROPOS. 30. PROBL. 4.

Daram peripheriam ABC, bifariam secare.

HOc præstat recta BDE, quæ subtenet sam AC, secat bifariam, & ad angulos rectos

rectos in D. quia circa rectos sunt latera BD, DA, & equalia lateribus BD, DC. Et idcirco per 4. pr. basis AB, & equalis BC; & per 28. arcus BA, & equalis BC.

PROPOS. 31. THEOR. 27.

Angulus in semicirculo rectus est; in maiore segmento minor; in minore, major recto. Angulus quoq; segmenti majoris major est recto, & minoris minor.

Dico primo angulum ABC in semicir-
culo ABC esse rectum. Angulus enim
ADB, duplus est DBC, & CDB, duplus
DBA, eo quod triangula ABD, DBC,
sint Isoscelia. sed illi dupli sunt aequales
duobus rectis, ergo DBA, DBC, consti-
tuent rectum ABC.

Dico 2. in majori segmento CAB, an-
gulos esse acutos. In eodem enim segmen-
to est quoque angulus BAC, qui est acutus,
quia ABC, est rectus. huic autem BAC,
sunt omnes reliqui in eodem segmento
& quales per 21. Ergo.

Dico 3: angulum BEC, in minori seg-
mento BEC. esse obtusum. In quadrila-
tero enim ABC, oppositi E, A, sunt &
quales duabus rectis per 22. & A est acutus.
ergo E obtusus.

Denique reliquæ duæ partes sunt mani-
festæ; quia angulus segmenti majoris nem-
pe angulus mixtus CBA, componitur ex
angulo recto C, & angulo acuto B.

recto ABC, & angulo segmenti quod absindit recta A B. Et protracta A B, in F, fit angulus rectus CBF, major angulo segmenti minoris nempe mixto CBE.

*Ex Scholio. **

Vice versa, dico angulum rectum, sc. g. ACB, esse ad semicirculum, hoc est, si recta AB, ducta uscunque secerit bisfariam in D, & centro D, circa AB describatur semicirculus, ipsum transire per C.

Si enim punctum C esset in alio segmento, angulus ACB, non esset rectus; sed obtusus, vel acutus, ut demonstratum est.

PROPOS. 32. THEOR, 28.

Recta AB, tangat circulum in C, & CD, secerit eundem in C, p: Dico angulo ACD, ^{Nec proq.} aquales esse angulos in alterno segmento ^{2. N. 1.} DEC; & angulo DCB, angulos in alterno segmento CFD.

SI CD, non transit per centrum H, transseat CH E: eruntque per 18. ECA, ECB, recti, & ipsis erunt aquales CGE, CDE, in alternis segmentis, hoc est, in semicirculis quos absindit diameter CE.

Deinde quoniam CDE, rectus est: erunt DEC, DCE, uni recto, nempe toti ECA aquales, per 32. pr. de impto que communis DCE reliquis DEC, in alterno segmento, ^{z-}

to, æqualis erit reliquo ACD, ad punctum contactus C.

Denique in quadrilatero E D F C, anguli oppositi D F C, C E D, sunt per 22. æquales duobus rectis, hoc est, duobus D C A, D C B. Sed D C A, æqualis est D E C ergo reliquis D F C, in alterno segmento, est æqualis reliquo D C B, ad contactum C.

PROPOS. 33. PROBL. 5.

Super data recta A B, describere segmentum circuli, capiens angulum dato æqualem.

Primo, quando angulus datus est rectus, certum est segmentum esse semicirculum.

Secundo, quando angulus datus est acutus v. g. C, tunc constituatur ipsi æqualis B A D, & ex A, super A D erigatur perpendicularis A E, & in punto B fiat angulus A B F, æqualis B A E: eruntque F A, F B æquales, & F, centrum circuli A G B K; & angulus A G B, in segmento A B G A, erit æqualis angulo B A D, ad punctum contactus A. Nam propter rectum D A E, recta D A, tangit circulum per 16. Est autem B A D, æqualis C. ergo etiam A G B, est æqualis C.

Tertio, quando angulus datus v. g. H. est obtusus, accipiatur ejus loco acutus C. Descripto

scripto enim segmento ΔGB ; habebit
reliquum ΔKB , & angulus K , erit æqualis
 H , quia per 22. G , & K æquivalent duobus
rectis, hoc est, duobus C , H . C autem est æ-
qualis G , ergo K , æqualis H .

PROPOS. 34. PROBL. 6.

*A dato circulo abscindere segmentum, quod
capiat angulum æqualem dato g. g. D.*

Ducatur tangens EAF , & angulus EAC , fiat æqualis D , angulus enim ABC , in alterno segmento $CB A$, erit per 32. æ-
qualis angulo EAC , hoc est, angulo D .

PROPOS. 35. THÈOR. 29.

*Si in circulo due rectæ se mutuo secant: re-
ctangula sub segmentis erunt æqualia.*

Primo quando intersectio sit in centro,
omnia segmenta sunt semidiametri, &
rectangula sub segmentis sunt quadrata
æqualia.

Secundo, quando CD , transit per cen-
trum F , & secat AB , bifariam, atque adeo
ad angulos rectos in E , per 3. Tunc recta
 CD , erit secta bifariam in F , & non bifa-
riam in E ; & per 5. secundis, rectangulum C
 ED , una cum quadrato EF , erit æquale
quadrato FD , hoc est quadrato FB , & per
Pythagoricam, quadratis BE , EF : abla-
to que communi EF , remanebit quadra-
tum BE æquale rectangulo CED . Quadra-
tum

tum autem BE , est idem cum rectangulo EB . ergo rectangulum sub segmentis AE , EB , est æquale rectangulo contento sub segmentis CE , ED .

Tertio. Quando CD , transiens per centrum F non secat bifariam AB , in E , secabitur bifariam in alio puncto G , & FG , erit ad AB , perpendicularis; & per 5. secundi rectangulum AEB , una cum quadrato EG , erit æquale quadrato GB ; adjectoque quadrato GF , erit idem rectangulum AEB , cum quadratis EG , GF , hoc est, cum quadrato EF , æquale quadratis GB , GF , hoc est, quadrato FB . Huic autem quadrato FB , seu FD , ostendimus æquale esse rectangulum CED , una cum eodem quadrato EF , ablato igitur quadrato EF ; remanebunt rectangula CED , AEB , æqualia.

Quarto, & ultimo, neutra transeat per centrum: dico nihilominus rectangula AEB , CED , esse æqualia, quia utrumque debet esse æquale rectangulo GEH , per causas antecedentes, ducendo GEH , per centrum F .

PROPOS. 36. THEOR. 30.

Si ex punto D, recta DB, tangat circulum;
& alio puncto C A, secerit: Rectangulum ADC, erit æquale quadrato DB.

*T*ranseat primo recta DCA , per centrum F . Quoniam igitur AC , secta est bifaria

bifariam in F , ipsique addita CD ; ergo per 6. sec. rectangulum ADC , cum quadrato FC , æquale est quadrato FD , hoc est, per 47. pr. quadratis DB, BF . Sunt autem FC , FB , æqualia. ergo & reliqua, nimirum rectangulum ADC , & quadratum DB . sunt æqualia,

Secundo, recta DCA , non transeat per centrum F , sed recta FE , sit ad ipsam perpendicularis, atque adeo per 3. fecerit ejus segmentum CD , bifariam in E . Quare iterum per 5. sec. rectangulum ADC , cum quadrato EC , erit æquale quadrato ED : adjectoque quadrato EF ; erit idem rectangulum ADC , cum duobus quadratis EC, EF , hoc est, cum quadrato FC , æquale quadratis ED, EF , hoc est, quadrato FD . Quadrato autem FD , sunt æqualia quadrata $DB, BF, \& BF$, est æquale FC , ergo etiam reliqua erunt æqualia: nempe rectangulum ADC , & quadratum DB .

Coroll. I. Hinc manifestum est, si à punto D , ducantur plurimæ rectæ circulum secantes; rectangula sub totis, & sub segmentis inter punctum, & convexam peripheriam interceptis, esse æqualia: quia omnia sunt eidem quadrato tangentis æqualia.

Coroll.

~~lignis~~ Coroll. 2. Constat etiam duas tangentes
~~lignis~~ ex eodem punto ductas, esse æquales.

Coroll. 3. Ex eodem punto solum duci
duas tangentes.

~~lignis~~ Coroll. 4. Si duæ rectæ æquales circulo
~~lignis~~ incident, & una tangat, etiam aliam tan-
gere.

PROPOS. 37. THEOR. 31.

*Quod si constet rectangulum A D C, aquale
esse quadrato D B: recta D B, incidens
circulo erit tangens.*

Ducatur tangens D F, & necatur E F;
quæ ad D F, erit per 18. perpendicularis,
& quia eidem rectangulo A D C, æ-
qualia sunt quadrata D F, D B, erunt etiam
ipsa æqualia, & rectæ D F, D B, æquales.
Cumque duo latera E F, FD, sint æqualia
duobus EB, BD, & ED, sit basis com-
munis: erit per 8. pr. angulus EBD, æ-
qualis recto F. & ideo per 16. hujus
DB, tanget circulum, quod
erat demonstran-
dum.

E U.

EVCLIDIS ELEMENTUM QUARTUM.

DEFINITIONES.

1. **F**igura rectilinea v. g. D E F dici-
tur inscribi figuræ A B C: cum an-
guli D, E, F, attingunt latera figu-
ræ A B C. *Videtur propositio: figura rectilinea.*
2. A B C, dicitur circumscribi figuræ D E
F: cum latera figuræ A B C, attingunt
angulos figuræ D E F *rectilinea*.
3. Ut rectilineum D E F, dicitur inscri-
ptum circulo, debent anguli D, E, F, esse
ad peripheriam G H I.
4. Ut autem rectilineum A B C, dicatur
circulo circumscripsum; debent latera
rectilinei tangere circulum v. g. & D F
5. Item circulus erit figuræ A B C, inscri-
ptus; cum figuræ latera contigerint cir-
culum.
6. Denique circulus erit figuræ DEF, cir-
umscripturn; cum peripheria transferit
per angulos D, E, F.
7. Recta linea dicitur coaptari circulo;
videtur ad C, P DF cum

cum ejus termini fuerint ad circuli peripheriam.

PROPOS. 1. PROBL. 1.

In dato circulo, data recta D, (quando id fieri poterit juxta 15. tertij) coaptare aqualem.

EX diámetro BC abscindatur BE, æqualis D, per 3. pr. & centro B, intervallo BE, describatur arcus secans datum circulum in A. Recta enim BA, erit æqualis BE, per defin. circuli, & æqualis ipsi D, per primum pronunt.

PROPOS. 2. PROBL. 2.

In dato circulo inscribere triangulum, dato triangulo DEF equiangulum.

AD punctum contactus A, cum tangentie GH, fiat angulus GAB. æqualis F; & HAC, æqualis E. Dico triangulum ABC, ipsi DEF, esse æquiangulum. Angulus enim C, est per 32. tertij, æqualis GA B, seu F; & angulus B, æqualis HAC, hoc est E. ergo per 32. pr. etiam reliquo reliquo.

Nota. Si hoc modo inscribatur æquilaterum, circulum dividi in tres partes æquales.

PROPOS. 3. PROBL. 3.

Circulo circumscribere triangulum, cincumq; DEF equiangulum.

Externis G, H, fiant in centro I, æqua-

Iles A I B, B I C : eritque reliquias A I C,
æqualis reliquo K, quia per 15. pr. omnes
anguli ad I, & per 32. ejusdem omnes ex-
terni G, H, K, sunt æquales quatuor rectis.
Demum ducantur per A, B, C, tres tangen-
tes quæ concurrent ad tria puncta L, M, N.
Cum enim I A L. I B L, sint recti ; erunt B
A L, A B L, minores duobus rectis ; & ideo
per 13. *Axiomà.* A L, B L, concurrent ver-
sus L : & ita de reliquis. Dico angulum L,
æqualem esse E. Omnes enim anguli qua-
drilateri A I B L, sunt per 32. pr. æquales
quatuor rectis, cum igitur duo ad A; B, sint
recti : reliqui I, & L, erunt æquales duobus
rectis, hoc est duobus G E. sed A I B, & G,
sunt æquales, ergo etiam L & E, &c. eadem
enim est ratio de reliquis.

Nota in triangulo æquilatero, & simili-
ter in omnibus alijs figuris regularibus,
omnes externos esse inter se æquales. Atq;
ita etiam anguli ad centrum I, erunt æqua-
les, & per ipsos secabitur circulus in partes
æquales,

PROPOS. 4. PROBL. 4.

*Intra triangulum A B C, circulum de-
scribere.*

Duo anguli B, C secentur bifariam, &
B D, CD, concurrant ad D: Dico tres
perpendiculares D E, D F, D G, esse æqua-
les &c. Anguli enim D E B, D B E, sunt æ-
quals

D

quales DFB, DBF; & DB rectis E, P
oppositum, est commune. ergo per 26. pr.
perpendicularis DE, æqualis est DF. Est
autem eidem etiam æqualis DG: eo quod
C, sectus fit bifariam, & F, G, sint recti, &
CD, communis. ergo omnes tres sunt æ-
quales, & circulus descriptus per E, F, G;
tanget latera per 16. tertij.

PROPOS. 5. PROBL. 5.

Triangulo ABC, circulum circumscribere.
Hoc problema re ipsa non differt à
prop. 25. tertij, ubi docuimus per tria
puncta data, qualia hic sunt A, B, C. descri-
bere circulum. perpendiculares enim DF,
EF, quæ secant quælibet duo latera AB,
AC, bifariam; necessario concurrunt in
quæsito centro F.

PROPOS. 6. PROBL. 6.

Dato circulo quadratum inscribere.

Duæ diametri AC, BD, sint invicem
perpendiculares in centro E: Dico
quadrilaterum ABCD, esse quadratum.
Quatuor enim angulis rectis ad centrum
respondent per 26. ter. quatuor arcus æ-
quales; & quatuor arcus æquales subten-
dunt quatuor lineæ æquales AB, BC, CD,
DA per 29. ter. Denique quatuor anguli
ad A, B, C, D, per 31. ter. sunt æquales;
quia sunt in quatuor semicirculis.

PRO-

PROPOS. 10. PROBL. 10.

Estque Lemma ad sequentem.

Triangulum Isosceles constitueret, cuius una terg, equalium angulorum sit duplo reliqui.

Per 11. sec. secetur quævis A B, ita, ut rectangulum A B C, æquale sit quadrato A C; & centro A, intervallo AB describatur circulus, vel arcus, eique applicetur per 1. B D, æqualis A C; & per 5. describatur circulus circa triangulum A D C, quem recta B D, tanget in D, per 37. ter. quia rectangulum A B C, æquale est quadrato B D, eo quod B D æqualis sit A C, & per 32. ter. angulo B D C, ad contactum D, æqualis erit in alterno segmento angulus C A D; adjectoquè communi C D A, erunt duo C A D, C D A, æquales toti A D B; & quia duobus C A D, C D A, æqualis est per 32. pr. externus D C B; huic erit æqualis A D B, seu A B D. & in triangulo D C B, erunt per 6. pr. D B, D C, æquales. estque D B, æqualis C A; ergo C A, æqualis C D, & per 5. pr. anguli C A D, C D A, æquales; & D C B, nec non A D B, vel A B D, duplus ipsius B A D. ergo &c.

PROPOSITIO 11. PROBL. 11.

Circulo Pentagonum Regulare inscribere.

Per secundam hujus inscribatur circulo

triangulum E F G, æquiangulum triangulo A B D, pr opositionis antecedentis, & G H, F I, secent angulos E F G, E G F, bifariam. Hac enim ratione erunt omnes quinq; anguli F E G, I F E, I F G, H G E, H G F, æquales; quia E F G, E G F, sunt dupli F E G: & ideo *per 26. ter.* quinque arcus F G, E I, I G, E H, H F, sunt æquales; & quinque rectæ ipsos subtendentes æquales *per 29. ter.* & omnes quinque anguli æquales *per 27. ter.* quia sicut H E I, insistit tribus arcubus æqualibus H F G I. ita quoque reliqui insistunt totidem æqualibus.

PROPOS. 15. PROBL. 15.

Circulo Hexagonum regulare inscribere.

S Emidiametro A G, applicentur æquales A B, A C, eruntque A G C, A B G, triangula æquilatera; & tam angulus A G C, quam A G B, erit *per 32, pr.* una tertia duorum rectorum. Productâ autem CG, in E, fiunt omnes tres A G C, A G B, E G E æquales duobus rectis, ergo E G E, erit reliqua pars tertia, & omnes tres erunt æquales: & totidem alij erunt eisdem æquales ad verticem G. Et ideo insistent sex arcubus æqualibus, & arcus subtendent sex rectæ æquales; & omnes sex anguli erunt æquales; quia sicut E D F, insistit quatuor arcubus æqualibus E B A C F, ita reliqui.

Secundum ratione triâ inveniatur transversa A B, et C, et C, hinc in D ex. e n. ratione triâ clara C, s. 62a PRO in circulo.

PROPOS. 15. PROBL. 16.

Circulo inscribere Quinsegonum regulare.

Inscribatur triangulum æquilaterum A B C, per 2. & per 11. pentagonum A D E F G. Qualium igitur partium 15. est tota circumferentia, talium 5. erit AB; & talium trium A G, & A G F, 6. atque adeo talium partium erit una, arcus B F, hoc est una decima quinta.

PROPOS. & PROBL. 7. & 12.

Circulo Quadratum, & Pentagonum regolare circumscribere.

Ut praxis sit omnibus figuris ipsique etiam triangulo communis, Angulus quadrati, vel pentagoni internus sit A. externus B; quibus in figuris regularibus constat reliquos esse æquales; & externo B, siant ad centrum D, æquales quatuor pro quadrato, & quinque pro pentagono, id quod potest fieri, quia omnes anguli externi cujuscunque figuræ æquivalent quatuor rectis per 32. pr. & hoc ipso divisus erit circulus in quatuor, vel quinque partes æquales, & lineæ subtendentes arcus æquales, constituent quadratum E F G H, vel pentagonum E F G H I, regulare, & circulo inscriptum, ut pater ex demonstracionibus 6. & undecima. Inventis autem punctis E F G &c. circumscribitur circulo qua-

dratum, vel pentagonum per tangentes, si-
fut in tertia circumscripsum est triangu-
lum, & sicut ibi ita etiam hic demonstra-
tur omnes angulos K L M &c. esse æquales
internis A, quia v.g. in quadrilatero E D F
K, propter duos rectos E, F, reliqui duo D
& K sunt æquales duobus rectis, hoc est du-
obus A, B, & quia D, factus est æqualis B,
sequitur K, æqualem esse A. Latera vero K
L, L M, &c. esse æqualia probatur hoc mo-
do. Tangentes K E, K F, & similiter L F, L
G, &c, sunt æquales *per 2. coroll. 36. tertij.*
ergo omnia triangula E K F, F L G, &c. sunt
æfoscelia, & ad æquales bases E F, F G, &c.
sunt anguli angulis æquales; eo quod etiā
K, L, &c. sint æquales. & ideo *per 26. pr.*
erunt etiam omnia latera E K, K F, F L, &c.
æqualia, nec non duo K F, F L, duobus LG,
G M, &c. æqualia.

PROPOS. & PROBL. 8. & 13.

*In Quadrato, & Pentagono. circulum
inscribere.*

TRiangulo inscriptus est circulus prop.
T 4. dividendo duos angulos bifariam, id
quod etiam habet locum in omnibus figu-
rit regularibus. Rectæ enim B F, C F, divi-
dentes bifariam angulos v. g. B, C, con-
currunt necessario intra figuram alicubi in
F, per lemma quod sequitur; & perpendi-
culares F G, F H, F I, &c. ductæ ex puncto

facilius que si hanc & latera K, el. A, intervale F G, G F, F, in
puncti Q et H perpendiculares in illi, q. puncti H est in circulo,
q. puncti Q est in circulo, ut perpendiculus sit perpendicularis.

P, in singula latera sunt æquales: idque demonstratur eodem modo, quo in quarta quod attinet tres perpendiculares F G, F H, F I. pro reliquis vero præmonstrandū est, etiam reliquas F D, F E, F A, secare reliquos angulos D, E, A bifariam.

Dico igitur angulum F D C æqualem esse F B C. Nam circa æquales F C B, F C D, duo C F, C B, sunt æqualia duobus lateribus C F, C D. ergo *per 4. pr.* angulus C D F, æqualis est C B F. hic autem est medietas totius B, ipsique B æqualis est totus D: ergo etiam FD, secat bifariam angulum D. & ita de reliquis, eodem enim modo, & ordine proceditur ad reliquos, & tandem *per 26. pr.* demonstratur reliquas perpendiculares F K, F L, &c. æquals esse tribus F G, F H, F I. quia v. g. in triangulis F D L, F D K, præter rectos ad I, K; anguli ad D, sunt æquales, & latus F D, rectis oppositum est commune. quare circulus descriptus centro F intervallo F G, transit per reliqua puncta H, I, K, L, & in ijsdem tangit latera figuræ datæ.

Lemna. *

In figura regulari, & primo in figura laterum numero parium v. g. in octogono: Dico primo rectam A E, ductam ad angulos oppositos A, F, utrumq; angulum secare bifariam. Ex hæc lata estia exponit, ut angulos agat.

D

Ex

Google

Ex eodem enim punto A, ducantur re-
liquæ rectæ ad reliquos angulos, ita ut
fiant ad utramque partem rectæ AE, tria
triangula. Erunt primo duo triangula AGH
ACB, penitus æqualia *per 4. pr.* quia
circa æquales angulos H, B, latera lateri-
bus sunt æqualia; hoc est basis AG, erit æ-
qualis AC, & angulus HAG, angulo BAC;
& HGA, angulo BCA: & isti duo dem-
pti ex totis GC, qui etiam sunt æquales,
relinquunt alios duos AGF, ACD, æqua-
les: Et circa istos erunt iterum duo latera
duobus æqualia, ideoque *per 4. pr.* & basis
AF, æqualis basi AD, & angulus FAG, æ-
qualis DAC, & GFA æqualis CDA. De-
niq; eodem modo demonstratur angulum
AEF, æqualem esse angulo AED, & EAD
F, ipsi EAD. Patet igitur rectam AE, se-
care angulum Ebifariam; imo & angulum
BAH; quia ad utramq; partem rectæ EA,
sunt tres anguli tribus æquales.

*Dico 2. rectam EI transire per A, si bifaria
viam secet angulum E.* Debet enim coinci-
dere cum recta AE, quam ostendimus eun-
dem angulum E secare bifariam.

*Dico 3. si due rectæ EI, DI, bifariam
secant duos angulos E, D, ipsas concurrete
intra figuram.* Anguli enim figurarum re-
gularium sunt minores duobus rectis. ergo
& semissiles IED, IDE; & ideo *per 13.*

Axioma

*Axioma EI, DI, concurrent: & quia trans-
seunt per angulos oppositos, concurrunt
intra figuram.*

Dico 4. etiam duas perpendiculares $L I$, $K I$, qua bifariam secant latera $E F$, $E D$, concurrere in I . Nectantur enim $L I$, $K I$. Cum igitur in triangulo $I E D$; anguli sint æquales; erunt $I E$, ID , æquales. sunt autem etiam $I K$, KE æqualia duobus lateribus IK , KD . ergo per 8. pr. anguli ad K , sunt recti. Rursus duo latera $I E$, EL , sunt æqualia duobus IE , EK , & anguli contenti æquales; ergo per 4. pr. angulus L , est æqualis recto K . Quoniam igitur perpendiculares prædictæ necessario coincidunt cum ipsis LI , KI concurrunt etiam ipsæ in I .

*In figura autem lacerum imparium V. g. in
Heptagono: Dico primo rectam A K, qua-
separ angulum A, bifariam, secare etiam
bifariam laterum oppositum E D. ibi ergo ultima pag.*

Ducantur $A F$, $A C$, $A E$, $A D$ & seda-
 $E D$, bifariam in K , necatur $A K$. de-
monstrabitur, ut prius, $A E$, AD esse æqua-
les. Sunt autem & $A K$, KE æqualia late-
ribus $A K$, $K D$, ergo per 8. pr. anguli ad K ,
sunt recti, & $KA E$. $KA D$. æquales. sunt
autem *juxta demonstrationem preceden-
tem*, etiam reliqui duo $EA F$, FAG , æ-
quales duobus DAC , CAB . ergo & $tau-$
D 5 218

tus K A G, toti K A B, & ideo recta secans angulum A bifariam, coincidit cum A K, secatq; similiter latus E D bifariam, & ad angulos rectos in punto K,

Dico 2. Vice versa perpendicularem K I, secare bifariam angulum A. Coincidit enim necessario cum illa quam ostendimus secare bifariam angulum A.

Dico 3. Duas A I, B I, secantes bifariam angulos A, B, concurrere intra figuram v. g. in I. ratio est, quia debent secare latera oposita bifariam.

Dico 4. Ad idem punctum I coire perpendiculares L I, K I, si bifariam secant latera E F, E D. Utraque enim coincidit necessario cum illis quæ secant bifariam angulos A, B.

PROPOS. & PROBL. 9. & 14.
Quadrato, & Pentagono regulari circulum circumscribere.

SEcentur duo latera A B, B C bifariam in G, H, sintq; G F, H F, perpendiculares, hoc est, idem fiat hic quod in propositione 5. factum est, in descriptione circuli circa triangulum: concurrent dictæ perpendiculares intra figuram ad F, per lemma primum. & tres lineæ FA, FB, FC, ostendentur esse æquales sicut in 5. Nam circa æquales angulos ad G, sunt latera lateribus æqualia, & similiter circa rectos ad

H. Ex-

H. Ergo per 4. pr. $F A$, FC , sunt æquales eidem FB , atque adeo omnes tres æquales inter se; & triangula ABF , BCF , isoæscelia habentia æquales angulos ad bases A , B , C . Dico easdem FA , FB , FC , imo & reliquas FD , FE , secare bifariam angulos A, B, C, D, E . Sunt enim FB , BC æqualia lateribus FB , BA , & basis FC , æqualis FA . ergo per 8. pr. angulus $FB C$, æqualis est $F B A$. hoc est uterque erit semissis totius B . Sunt autem ijsdem æquales FAB , FCB . ergo etiam isti sunt semisses angulorum A , C . & quia rursus circa æquales FCB , FCD , latera FC , CB , æqualia sunt lateribus FC , CD : erit per 4. pr. etiam FD , æqualis FB , & angulus $FD C$, æqualis FBC , hoc est, etiam $FD C$, erit semissis totius D . eodemque modo demonstrabitur FE , esse æqualem FC ; & angulum FED , esse semissem totius E , &c. Cum igitur omnes rectæ FA , FB , FC , FD , FE , &c. sint æquales, si centro F , intervallo A describatur circulus, transibit per scilicet puncta B , C , D , E , &c.

Scholium.

EX his patet inscriptionem quidem figurarum intra circulum esse plerisque figuris regularibus peculiarem, reliquas vero

D C

in scri-

inscriptiones & circumscriptiones esse universales.

Peculiares sunt omnes illæ quas tradit Euclides nimirum inscriptio triâguli, quadrati, pentagoni, hexagoni & quintidecagoni intra circulum, hoc est divisio circuli in 3. 4. 5; 6. & 15. partes æquales: possunt tamen aliquæ esse universales. Nam ex prædicta divisione possunt fieri infinitæ aliae, praxi omnibus communis nimirum per continuam bisectionem arcuum bifariam. Beneficio enim quadrati inscribitur octogonum: figura 16. laterum, 32. laterum, 64. 128. &c. & similiter beneficio Pentagoni figura 10. laterum 20. 40. 80. &c & ita de reliquis.

Inscriptio vero Heptagoni, Nonagoni, 11. laterum 13. &c. adhuc desideratur; quia nondum est repertum problema, & constructio trianguli isoscelij cuius uterlibet angulorum æqualium sit triplus quadruplus &c. reliqui anguli, quorum beneficio inscriberentur circulo heptagonum nonagonum &c: eo modo quo descriptum est pentagonum. Et beneficio heptagoni & nonagoni inscriberetur figura 63. laterum, sicut inscriptum fuit ab Euclide quintidecagonum.

E.U.

EVCLIDIS ELEMENTUM QUINTUM.

DEFINITIONES.

1. **P**ars, scilicet aliquora est, quæ metitur suum totum præcise.
2. Ipsum vero totum vocatur multiplex sive partis aliquotæ. *E.g.*, 3. est pars aliquota numeri 12, et 12. multiplex numeri 3. *Quia* $\frac{12}{3} = 4$, *et* $12 = 3 \times 4$.
3. Ratio est duarum magnitudinum, ejusdem generis, mutua quædam secundum quantitatem habitudo.
4. Rationū autē similitudo, est Proportio, vel potius proportionalitas. *Exempli gratia* $\text{relatio } 2. \text{ ad } 1.$. *Vel* $4. \text{ ad } 2.$. *Vocatur ratio,* et *quia eadem est relatio } 2. \text{ ad } 1. \text{ Et } 4. \text{ ad } 2. *idcirco inter } 2. \text{ et } 1. \text{ et } 4. \text{ et } 2. *inveniatur }* 4. *Et } 2 dicitur esse proportionem.***
5. Ejusdem generis magnitudines sunt illæ, quæ multiplicatae se mutuo possunt superare. *tales non sunt linea, et superficies; superficies, et corpus: angulus con-*
q[ui] linea p[ro]lata est in figura D 7. *ringens*

singentia, & angulus rectilineus. Quid autem sensendum sit de angulis segmentorum consule Clavisum. Neque verum est quod aliquis dicunt recti ad curvum non esse proportionem. Sunt enim quadrata nonnulla lunula, & ab Archimede quadrata est Parabola, figura mixta ex curvo & recto.

6. Ut eadem sit ratio A ad B, & C, ad D, debent etiam multiplices an-

E A B G tecedentium A, C, v.g. E, F,
 $\frac{9}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{24}{4}$ quæcunque illæ sint, duplæ,
 F C D H triplæ, quadruplæ, &c. respe-
 $\frac{j}{2} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{32}{32}$ cùm quartamcunque æque-
 multiplicium consequentium

B, & D, hoc est respectu G, H; quæcunque possunt esse duplæ, triplæ, &c. habere hanc conditionem, ut E, F una sint æquales ipsis G, H, vel una excedant, vel una deficiant, hoc est quando E est æqualis ipsi G, etiam F, sit æqualis H, quando E, est major, quam G, etiam F sit major quam H, & quando E, est minor quam G, etiam F sit minor quam H.

Vide infra. 7. Eandem proportionem habentes magnitudines vocantur proportionales.

8. Quod si in exemplo defin. 6. deprehenderetur aliquam multiplicem E, maiorrem quidem esse multipli G, at æquimultiplicem F, non esse majorem H,
** hoc est à 12 singula, seu in uno Junio redacto. In C. Gang*

tunc A ad B, dicetur habere majorem rationem quam C ad D, ~~et C non aequaliter~~.

9. Termini proportionales ut minimum sunt tres, potest enim consequens terminus prioris rationis, esse antecedens sequentis, ut contingit in proportione continua. In discreta vero requiruntur ut minimum quatuor termini. $\text{X}^3, \text{y}^6, \text{z}^12, \text{w}^6$, $\text{y}^3, \text{z}^2, \text{w}^3$.
10. Non habet usum in hoc libro, & respondet quintae definitioni libri sexti.
11. Homologæ magnitudines sunt antecedentes, antecedentibus, & consequentes consequentibus.

*In reliquo definitionibz
sequuntur sex modi argumentandi in Proportionibus, qui inferius suis locis demonstrantur, b. 36. &c. mythes quinque nonius.*

12. *Primus modus.* Alterna seu permutata ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem. Ut quando ex eo quod ut A ad B; ita est C ad D, infertur, ergo $A^9 \text{ -- } B^3$ permutando, ut A ad C. $C^6 \text{ -- } D^2$ antecedens ad antecedentem, ita est B ad D consequens ad consequentem. Demonstraratur propositione 16.

13. *Secundus modus.* Inversa seu conversatio, est sumptio consequentis instar ante-

antecedentis, ad antecedentem, velut
ad consequentem. *Vt quando ex eo quod*
ut A ad B ita est C ad D.
 $A \frac{9}{1} : B \frac{3}{1}$ *infertur, ergo converten-*
 $C \frac{6}{1} : D \frac{2}{1}$ *do, vel invertendo ut B;*
ad A, ita est D ad C. Demon-
stratur in coroll. prop. 4.

14. *Tertius modus.* Compositio rationis,
est sumptio antecedentis cum conse-
quente instar unius, ad ipsam consequé-
tem.

$A \frac{9}{1} : B \frac{3}{1}$ *quod ut A ad B, ita est C*
 $C \frac{6}{1} : D \frac{2}{1}$ *ad D; infertur. Ergo*
 $\underline{AB \frac{12}{1} : B \frac{3}{1}}$ *componendo ut AB si-
mul, ad eandem B, ita C*
 $\underline{CD \frac{8}{1} : D \frac{2}{1}}$ *CD simul, ad eandem D.*

Demonstratur prop. 18.

15. *Quartus modus.* Divisio rationis, est
sumptio excessus, quo antecedens supe-
rat consequentem, ad ipsam consequen-
tem. *Vt quando ex eo*

$A \frac{B \frac{9}{1}}{1} : B \frac{3}{1}$ *quod ut AB simul ad*
 $CD \frac{6}{1} : D \frac{2}{1}$ *partem B; ita sunt CD*
 $\underline{A \frac{6}{1} : B \frac{3}{1}}$ *simul ad partē D; infer-*
 $\underline{C \frac{4}{1} : D \frac{2}{1}}$ *tur. Ergo dividendo ut*
pars A, ad eandem par-
sem B, ita reliqua pars C, ad eandem D.
Demonstratur prop. 17.

16. *Quintus modus.* Conversio rationis,
est sumptio antecedentis ad excessum,
quo

quo antecedens superat consequentem.

Vt quando ex eo quod ut AB, simul ad partem B, ita sunt CD,

AB 9 B 3 ad partem D; infertur.

CD 6 D 2 Ergo per conversionem

AB 9 A 6 rationis ut AB simul,

CD 6 C 4 ad reliquam partem A,

ita CD simul, ad reli-

quam partem C. Demonstratur prop. 19.

Quinq[ue] his modi argumentandi in Propor-

tionibus, exhibentur hoc schemate.

Quia est ut 9. ad 3. ita 6. ad 2.

Erit permutando ut 9. -- 6. 3. -- 2.

Converendo 3. -- 9. 2. -- 6.

Componendo 12. -- 3. 8. -- 2.

Dividendo 6. -- 3. 4. -- 2.

Per convers. rationis 9. -- 6. 6. -- 4.

17. Sextus modus. Ratio ex æqualitate sive ex æquo est, si sint plures magnitudines quam duæ, & aliæ his multitudine pares quæ binè sumuntur & in eadem ratione; & infertur ut in primis magnitudinibus se habet prima ad ultimā, ita in secundis magnitudinibus se habet prima ad ultimā. *Est autē Ratio ex equalitate duplex.*

18. Ordinata est, cum fuerit quænammodum antecedens ad consequentem. Ita antecedens ~~aliter~~ ad consequentem: fuerit etiam ut ^{hoc} consequens ad aliud quidpiam, ita ^{alia} consequens ad aliud quidpiam. *Xe ḡ grāas nūtūs esēmōn̄ ē ḡpulās mēdīḡ*

46. B. A. 14
C 3. D 4. C D 7

4. C 8. 12. 13.
4. D 18. 19.
4. 3. 20. 15.
4. 3. 16. 17.
4. 3. 18. 19.
4. 3. 20. 15.

4. C 8. 12. 13.
4. D 18. 19.
4. 3. 20. 15.
4. 3. 16. 17.
4. 3. 18. 19.
4. 3. 20. 15.

Si enim in A sunt v. g. tres magnitudines E, F, G, æquales ipsi C; erunt etiā in B, totidem magnitudines H, I, K, æquales ipsi D: & E, H simul æquales, erunt ipsi C, D, semel; & F, I, secundo; & G, H, tertio. atque adeo quoties A, continet C, toutes E, F, G, H, I, K, hoc est, A & B simul, continebunt C, D simul.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Sint A & C, aquemultiplices ipsarum B & D; & alia E, F sint earundem B, D, aquemultiplices; Dico A, E simili, & C, F simil, esse earundem B, & D, aquemultiplices.

Si enim æqualibus multitudinibus A, C, addantur æquales multitudines E, F; siunt A, E, simul, & C, F simul, æquales multitudines earundem B, D.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

A, B sint aquemultiplices magnitudinum C, D; & E, F aquemultiplices aquemultiplicum A, B: Dico E, F earundem C, D, esse aquemultiplices.

Si enim in E, sunt v.g. tres partes G, H, I, æquales ipsi A, erunt totidem K, L, M in F, æquales ipsi B. Cumque G, K, sint æquales ipsi A, B, erunt G, K ipsarum C, D, aquemultiplices. sunt autem & H, L, eandem ob causam, earundem æquemultiplices. ergo per præcedentem G, H simul, & K, L

K, L simul, sunt earundem C, D æquemultiplices; & quia etiam I, M, sunt earundem æquemultiplices; erunt per eandem omnes G, H, I, & omnes K, L, M, hoc est, E & F, æquemultiplices ipsarum C, D.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Ita A ad B, ita sit C, ad D, & E, F sint æquemultiplices antecedentium A, C; & G, H necunque æquemultiplices consequentium B, D: Dico esse ut E ad G, ita F ad H.

Ipsarum enim E, F, sumantur quæcunque æquemultiplices I, K, & aliæ quæcunque æquemultiplices L, M, ipsarum G, H. Ergo per defin. 6. I, K, erunt æquemultiplices ipsarum E, F, & L, M, æquimultiplices ipsarum B, D, atq; adeo per defin. 6. I, K, erunt vel una æquales ipsis L, M, vel una excedent, vel una deficient. Sunt autem I, K æquemultiplices ipsarum E, F, & L, M, æquemultiplices ipsarum G, H. Ergo per eandem 6. defin. erit quoque ut E ad G, ita F ad H.

Demonstratio rationis Conversæ. +

Coroll. Ex eadem definitione probatur eadem facilitate ratio Conversa. Nam si ut A ad B, ita fuerit C ad D; & ipsarum A, C, sumantur æquemultiplices E, F, & aliæ G, H, æquemultiplices quæcunque ipsarum B, D, erunt per defin. 6. E, F vel una æquales ad B & fuerit, ut C ad D, vel f. quæcunque quales illa quæ ad g, ita quæ ad h. f. quæcunque quales

quales ipsis G, H, vel una excedent, vel una deficient; imo & vice versa G & H, vel una erunt æquales, vel una excedent, vel una deficient ab E, F. Unde sequitur per eandem defin. ut B ad A, ita esse D ad C.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Quam est multiplex magnitudo A B, magnitudinis C D, tam sit ablata A, multiplex ablata C: Dico etiam reliquam B, tam esse multiplicem reliquam D, quam est tota totius, vel ablata ablata.

Quam est multiplex tota totius, vel ablata A, ablata C, tam sit B, multiplex alicujus magnitudinis E. Ergo per 1. A, B, simul, tam erunt multiplices ipsarum C, E simul, quam est A ipsius C, vel quam est A B simul, ipsarum C D. Atque ita A B, simul, sunt æquemultiplices tam ipsarum C E, quam ipsarum C, D. & ideo C, E, sunt æquales C, D; & ablata communis C, remanebit D, æqualis E; sed B, ita est multiplex ipsius E ut ablata A, ablata C. ergo etiam B, ita erit multiplex ipsius D, ut A ipsius C, vel A B, ipsarum C D.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

A B, C D, sint aquemultiplices magnitudines E & F; E A, C ablata, sint earundem E, F, aquemultiplices; Dico reliquas B, D, vel esse aquates ipsas E, F; vel earundem aquemultiplices.

His.

His enim positis erunt in A B, C D, partes ipsis E, F, magnitudine & numero aequales: & similiter tot erunt in A, quot in C, ablato ergo numero partium A, C, remanebit aequalis numerus partium in B, D, aequalium eisdem E, F.

PROPOS. 7. THEOR 7.

Equales A, B, ad eandem C, habent eandem rationem; et si C eandem ad eequales A, B, ratione ternarii est secundarii duplo, et vice versa.

Nam æquemultiplices antecedentium A, B, v. g. D, E, sunt æquales ipsi F, multiplico ipsius C, vel una deficiunt, vel una excedunt. Ergo *per defin. 6.* ut A ad C, ita est B ad C. Et vice versa multiplex F, vel una erit æqualis æquemultiplicibus D, E, vel una excedet, vel una deficiet; eritque *per eandem defin. 6.* ut C ad A, ita C ad B.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Sint duæ magnitudines A B major & A minor (poteſt enim minor concipi ut pars majoris) & terciæ ſit quæcunque C. De co majorē A B , ad C , habere majorē rationem, quam minor A , ad eandem C .

Sumantur ipsarum B, & A, æquemultiplices D, E, hac lege, ut D, major sit quam C, & E, non minor. Quoniam igitur D, E sunt æquemultiplices duarum B,

X Si ergo patet Seneca et Seneca est caninus, sed A; CRUX
ad quinque et decimam, id est quod est Rutilius et Seneca, ergo Seneca
est Seneca, Rutilius ratus vel et idem, quod est Seneca.

A; erunt per primam D. E, simul, ita multiplices totius A B, ut est E, multiplex minoris A. Capiatur quoque F G multiplex ipsius C. proxime major E. dempta igitur G, quæ intelligitur æqualis C, reliqua F, non erit major quam E. est autem & D major quam C, hoc est quam G, ergo tota D E major est tota F G. Quare cum D E, & E, sint æquemultiplices ipsarum A B majoris, & A minoris, & F G, ipsius C, quæ est instar duarum consequentium, sitq; E D multiplex primæ AB, major quidem multiplex secundæ C, hoc est major quam F G, sed multiplex tertiæ A, hoc est E, non major F G, multiplex quartæ C: Erit per 8. defin. major ratio A B, ad C, quam A ad eandem C.

Et vice versa C ad A B, habebit minorē quam ad A, quia vicissim, est quidem F G major quam E; sed non est major quam D E.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Sive A, & B, eandem habeant rationem ad C: sive C eandem ad A & B; semper AE & B, erunt æquales.

Si enim A, major foret quam B, non haberent rationem eandem ad C, per precedentem, quod est contra hypothesim. Neque haberet eandem ad A, & ad B.

PRO

PROPOS. 10. THEOR. 10.

*Si A ad C maiorem rationem habeat, quam
B, ad eandem C. Erit A, major quam B,
Et vice versa si C ad A habet maiorem
quam ad B; erit B, major quam A.*

Si enim A esset æqualis B, non haberet proportionem maiorem ad C, & si esset minor haberet minorem per antecedentes. Et è contrario C, ad A, & B haberet eandem, si A & B, essent æquales, & si A, esset major quam B; haberet C ad A, minorem, quod est absurdum.

PROPOS. 11. THEOR. 11.

*Si A ad B, & C ad D, eadem sit ratio, quia E
ad F: erunt etiam ipsa eadem inter se.*

Sint G, I, H æquemultiplices A, E, C, & K, M, L æquemultiplices ipsarum B, F, D. Quoniam igitur ut E ad F, ita est tam A ad B, quam C ad D. ergo per def. 6. quando I, est æqualis, major, vel minor quam M, erunt quoque G & H æquales ipsis K & L, vel una deficient, vel una excedent; & ideo per eandem 6. defin. A, B: C, D. sunt proportionales, hoc est, ut A ad B, ita est C ad D.

PROPOS. 12. THEOR. 12.

*Si fuerit ut A ad B, ita C ad D, & ita E ad F, &c. erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes, ut una ad unam s. g.
ut A ad B,*

Suman-

Summahtur G, H, I, æquemultiplices antecedentium, & K, L, M, utcunque æquemultiplices consequentium: ita ut per i. tam sint multiplices, G, H, I, ipsarū A, C, E simul, quā est G ipsius A: & K, L, M, ipsarū B, D, F, ita multiplices, ut K ipsius B. Deinde quoniam rationes A ad B, C ad D, E ad F, sunt eadem, ergo quando G, est æqualis, major, vel minor quam K, erit etiam H, & I æqualis, major, vel minor, quam L & M: Atque adeo quando G major est, minor, vel æqualis ipsi K; erunt omnes G, H, I, majores, minores, vel æquales omnibus K, L, M. Sunt autem G, & G, H, I, æquemultiplices A, & A, C, E; & K, & K, L, M, æquemultiplices B; & B, D, F. ergo per defin. 6. ut A, ad B, ita sunt omnes, A, C, E, ad omnes B, D, F.

PROPOS. 13. THEOR. 13.

Si A ad B eandem rationem habuerit quam C ad D; at C ad D, maiorem quam E ad F: etiam A ad B, habebit maiorem, quam E ad F.

Sumptis enim æquemultiplicibus, ut in præcedenti; erit per def. 6. G, semper maior quam K, quando H, major est quam L: at per 8. defin. quando H, major est quam L, non semper I est major quam M. Ergo etiam I, potest esse non major quam M, quādō G major est quam K, & ideo per eandem

defin. 8. major erit ratio A ad B, quām Ead F.

PROPOS. 14. THEOR. 14.

Pr A ad B, ita sit C ad D: *Dico* A ēg B, & el una esse aequales ipsis C, D; & el una excedere, & el una deficere.

Existente enim A, v.g. majore ipsā C; ratio A ad B major est, quām C ad B, per 8. Sed ut A ad B, ita est C ad D: Ergo major est ratio C ad D, quām C ad B; ideoq; per 10. major erit B, quām D. simillima est ratiocinatio in reliquis.

PROPOS. 15. THEOR. 15.

Partes A, B, cum aequemultiplicibus C, D; sunt in eadem ratione.

Sint enim exempli gratia in C, tres partes aequales ipsi A, nimirum E, F, G. Erunt ergo totidem in D, nempe H, I, K, aequales ipsi B, utque A ad B, ita erit E ad H; F ad I, & G ad K; & per 12. ut E ad H, hoc est ut A ad B, ita erunt omnes E, F, G, ad omnes H, I, K, hoc est, ita erit C, ad D.

PROPOS. 16. THEOR. 16.

Ratio Alterna.

Pr A, ad B, ita sit C ad D: *Dico* permutando ut A ad C, ita esse B ad D: & hoc quando omnes quatuor magnitudines sunt ejusdem generis.

Sint E, F, aequemultiplices ipsarum A, B; & G, H, utcunque aequemultiplices ipsarum C, D. Ergo ut A ad B, ita erit, per an-

tecedi.

4 12 C 8
4 4

seced. E ad F; & ut C ad D, ita G ad H; & per 11. ut E ad F, ita G ad H; & per 14. E & F, erunt vel una æquales ipsis G, H, vel una excedent, vel una deficient, per def. 6. ut A ad C, ita erit B ad D, sunt enim E, F, æquemultiplices antecedentium; & G, H, æquemultiplices consequentium.

PROPOS. 17. THEOR. 17.

Divisio Rationis.

Et A B, ad B, ita sit C D, ad D: Discodividendo esse ut A, ad B, ita C ad D.

Sumentur E, F; G, H, omnes æquemultiplices ipsarum A, B, C, D. eritque per 1. aggregatum E F, tam multiplex totius A B, quām est E ipsis A, & G H, tam multiplex totius C D, quām G, ipsis C: Sed E & G, sunt æquemultiplices ipsarum A, C; ergo etiam E F, & G H, sunt æquemultiplices totarum A B, CD. Sint quoque aliæ I, K. earundem B, D, æquemultiplices. ergo per secundam, etiam F, I, & H, K, erunt earundem B, D, æquemultiplices cum igitur EF, GH, sint æquemultiplices antecedentium A B, CD; & FI, HK consequentium B D. ergo per def. 6. E F, & GH, vel una erunt æquales, vel una deficient, vel una excedent multiplices F I, H K: quando autem E F, & G H, sunt majores quām FI, HK; tunc demptis communibus F, H, restant E, G, majores quām I & K, & quando

et si
A in D in
F in C in

E 2

Digitized by Google

sunt

sunt minores, vel æquales, remanent ma-
iores, vel æquales; suntque E; G, æquemul-
tiplices ipsarū A, C; & I, K, ipsarū B, D; ergo
per ciendem def. 6. erit ut A ad B, ita C ad D.

PROPOS. 18. THEOR. 18.

Compositio rationis.

Et A B, ad BC, ita sit DE, ad EF, Discomponendo, ut AC, ad BC, ita esse DF, ad EF.

SIn minus, sit ut $\bar{A}C$, ad $\bar{B}C$, ita $\bar{D}F$, ad $\bar{E}G$, minorem $\bar{E}F$. Ergo *dividendo* ut $\bar{A}B$, ad $\bar{B}C$. ita erit $\bar{D}G$, ad $\bar{G}F$, Sed ita ponebatur etiam $\bar{D}E$, ad $\bar{E}F$. ergo ut $\bar{D}E$, ad $\bar{E}F$, ita erit $\bar{D}G$. ad $\bar{G}F$. Sed prima $\bar{D}E$, minor est quam $\bar{D}G$. ergo tunc *per 14.* etiam $\bar{E}F$, minor est quam $\bar{G}F$, quod est absurdum. Quod si ut \bar{AC} , ad $\bar{B}C$, ita es-
set $\bar{D}F$, ad $\bar{E}G$, majorem ipsam $\bar{E}F$, seque-
retur $\bar{E}F$, esse majorem $\bar{G}F$, quae poneba-
tur major.

PROPOS. 19. THEOR. 19.

*Et tota A B, ad rotam C, D, ita sit ablata A,
ad ablataram C: Dico ita quog; esse reli-
quam B, ad reliquiam D.*

ERit enim per 16. *permutando ut A B,*
ad A; ita CD, ad C; & dividendo ut B,
ad A; ita D ad C; & iterum permutando
ut B ad D; ita A ad C, vel A B ad CD.

Conversio rationis. *

Coroll. Ut A B ad B ; ita sit C D ad D : er-
o. e. c' dupl' is, ablat' i. e. c' dupl' heic ablat' i. go
ber eligimus illig i. f. c' dupl' reliq. illig i. q' g'f'nd'go.

go dividendo ut A ad B; ita erit C ad D; & convertendo ut B ad A; ita D ad C; & componendo ut B A ad A; ita D C ad C. Et hoc est argumentari per conversionem rati-
onis.

PROPOS. 20. THEOR. 20.

*Ut A ad B; ita sit D ad E; Et ut B ad C, ita E ad F. Dico primas A, D, vel esse unae a-
quales extremis C, F; vel maiores, vel
minores.*

Quando enim A, C, sunt æquales, tunc A & C habent eandem proportionem ad B: Sed ut A ad B, ita est D ad E; & ut C ad B, ita est convertendo F ad E: ergo etiā ut D ad E, ita est F ad E; & idcirco per 9.D, & F, sunt æquales. Similis est ratio in reli-
quis casibus.

PROPOS. 21. THEOR. 21.

*Ut A ad B, ita sit E ad F; Et ut B ad C, ita D
ad E: Dico iterum A Et D, vel una esse
aquaes extremis C, F; vel una maiores,
vel una minores.*

Quando A major est quam C, tunc A, ad B, habet majorem proportionem quam C ad B; sed ut A, ad B, ita est E ad F; & ut C ad B, ita est convertendo E ad D: ergo E ad F, habet majorem rationem quam E ad D; & ideo per 10.D, major est quam I. & ita de reliquis casibus.

*9. 4. 6. f. 2.
X. 10. 2. 2. 2.
AC. 6. 2. 2.
DC. 6. 2. 2.*

*Dire. 6. f. 3.
AC. 6. 2. 2.
D. 6. 2. 2. f. 3.*

Digitized by Google

PRO-

PROPOS. 22. THEOR. 22.

Æqualitas ordinata.

Sit rursus, ut in 20. ut A ad B, ita D ad E,
Et ut B ad C, ita E ad F, ita ut proportio
sit ordinata etiam in pluribus terminis.
Dico ex equalitate ordinata, ut A ad C,
ita esse D ad F.

Ipsarum A, D, sunt æquemultiplices G,
H; ipsarum B, E æquemultiplices I, K; &
L, M, æquemultiplices ipsarum C F. Ergo
per 4. ut G ad I, ita est H ad K; & ut I ad L,
ita K ad M; & per 20. primæ G, H, erunt u-
na æquales, vel majores, vel minores ex-
tremis L, M: & ideo per 6. defin. ut A ad C;
ita erit D ad F.

Quod si præterea, ut C ad N, ita fuerit
F ad O; sequeretur primo per demonstratio-
nem premissam ut A ad C, ita esse D ad F; &
quia ut A ad C, ita est D ad F; & ut C ad N,
ita F ad O. ergo per eandem erit iterum, ut
A ad N, ita D ad O, &c.

PROPOS. 23. THEOR. 23.

Æqualitas perturbata.

Vtr A ad B, ita sit E ad F; Et ut B ad C, ita
sit perturbata D ad E: Dico ex equalitate
perturbata, ut A ad C, ita esse D ad F.

Sint G, H, I, æquemultiplices trium A,
B, D; & K, L, M, æquemultiplices reli-
quarum. Ergo per 15. ut A ad B, ita est G
ad H; & ut E ad F, ita L ad M, sed ut A ad B,
ita

ita est E ad F: ergo ut G ad H, ita est L ad M. Item per 4. ut H ad K, ita est I ad L. Cum ergo ut G ad H, ita sit L ad M; & ut H ad K, ita I ad L: ergo per 21. G & I, vel una erunt aequales ipsis K, M, vel maiores, vel minores; & per def. 6. ut A ad C, ita erit D ad F: & si ut C ad N, ita foret alia O ad D, &c. sequeretur eodem modo, ut A ad N, ita esse O ad F.

PROPOS. 24. THEOR. 24.

Pr A ad B, ita sit C ad D: Et ut E ad B, ita F ad D: Dico ut AE simul, ad B, ita esse CF simul ad D.

Nam *convertendo*, erit *quaque* ut B ad E, ita D ad F; & sic A, B, E, & totidem C, D, F, erunt ordinatè proportionales. Quare ut A ad E, ita erit per 22. C ad F, & *Componendo* ut AE ad E, ita CF ad F: & sic erunt iterum tres AE, E, & B, & tres CF, F, & D; ordinatè proportionales: iterumque per 22. ut AE ad B, ita erit CF ad D.

PROPOS. 25. THEOR. 25.

Si quatuor magnitudines AB, CD, A, C, proportionales fuerint & AB maxima, ideoq; C minima: maxima, & minima simul, erunt reliquis maiores.

Concipiantur tertia A, & quarta C; ut partes primæ AB, & secundæ CD. Cum igitur sit ut AB ad CD, ita ablata A, ad ablatam C; erit per 19. reliqua B, ad reliquam

liquam D, ut tota A B, ad totam C D. sed
~~A B~~, ponitur major C D: ergo per 14. B erit
 major quam D. Additis ergo A, C; erunt A,
 B, C, majores quam A, C, D.

Propositiones ab alijs additæ.

PROPOS. 26. THEOR. 26.

*Ratio A ad B, sit major ratione C ad D: Di-
 co convertendo B ad A, minorem esse
 A ad C.*

C 10. Q. 4. **N**am ut C ad D, ita sit E ad B: eritque
 etiam ratio A ad B, major ratione E
 ad B, ideoque per 10. A major quam E; &
 per 8. ratio B ad A, minor quam B, ad E,
 hoc est, quam D ad C.

PROPOS. 27. THEOR. 27.

*Ratio A ad B, sit major ratione C ad D: Di-
 co permutando A ad C, majorem esse
 B ad D.*

Sit iterum ut C ad D, ita E ad B: eritque
 ut in precedente A, major quam E,
 Quare major erit ratio A ad C, quam E
 ad C. sed ut E ad C, ita est permutando B
 ad D. ergo major est A ad C, quam B ad D.

PROPOS. 28. THEOR. 28.

*Ratio A ad B, major sit ratione C ad D: Di-
 co componendo A B, ad B, majorem es-
 sem, quod est C D, ad D.*

Ut C ad D, ita sit E ad B; eritque ite-
 rum A, major quam E; & A B, major
 quam

Digitized by Google



quàm $E B$; & per 8. ratio $A B$, ad B , major ratione $E B$, ad B , hoc est, ratione $C D$, ad D ; quia componendo ut $E B$ ad B , ita est CD , ad D .

PROPOS. 29. THEOR. 29.

Ratio A B ad B, sit major ratione C D ad D: Dico dividendo A ad E, majorem esse C ad D.

UT C D ad D, ita sit $E B$ ad B : eritque $A B$, major quàm $E B$; & dempta communi B , erit A , major quàm E & per 8. ratio A ad B major ratione E ad B , hoc est C ad D ; quia dividendo ut C ad D , ita est E ad B .

PROPOS. 30. THEOR. 30.

Ratio A B ad B, sit major ratione C D, ad D:

Dico per conversionem rationis, A B ad B, ad A, minorem esse C D, ad E.

NAm dividendo per 29. erit quodque A ad B major, quàm C ad D ; & conver-
tendo per 26. B ad A , minor quàm D , ad C ;
& componendo per 28. $A B$, ad A , minor C D , ad C .

PROPOS. 31. THEOR. 31.

*Ratio A ad B, sit major D ad E; E ad C,
major E ad F: Dico ex æqualitate ordi-
nata, A ad C, majorem esse, D, ad F.*

UT E ad F, ita sit G ad C; & ut D ad E ,
ita H , ad G . Quoniam igitur B , ad C ,
major est quàm E , ad F , seu G , ad C ; erit B ,
major G ; & ratio A , ad G , major ratione A ,

ad *B*: est autem *A*, ad *B* major ratione *D*; ad *E*; hoc est *H*, ad *G*. ergo *A*, ad *G*, major est ratione *H*, ad *G*; & *A*, major quam *H*. Quare ratio *A*, ad *C*, major est ratione *H*, ad *C*; ut autem *H*, ad *C*, ita est ex *æqualitate ordinata* *D* ad *F*. ergo etiam *A*, ad *C*, major est ratione *D*, ad *F*.

Idem verum est in pluribus terminis; possunt enim reduci ad 3. sicut factum est in 22.

PROPOS. 32. THEOR. 32.

A, *C* Major sit ratio *A* ad *B*, quam *E* ad *F*; & *B* ad *C*; major quam *D* ad *E*: Dico ex æqualitate perturbata, *A* ad *C*, majorē esse ratione *D* ad *F*.

UT *D*, ad *E*, ita sit *C*. ad *C*; & *H*, ad *G*; ut *E*, ad *F*: eritque ratio *B*, ad *C*, major ratione *D*, ad *E*: hoc est, *G*, ad *C*; ideoque *B*, major quam *G*; & ratio *A*, ad *G*, major quam *A*, ad *B*. per 8. Sed hæc major est quam *E*, ad *F*, seu *H*, ad *G*: ergo *A*, ad *G*: multo est major ratione *H*, ad *G*: & *A*, major quam *H*; & ideo ratio *A*, ad *C*, major ratione *H*, ad *C*. Sed ut *H*, ad *C*; ita est ex *æqualitate* *D*, ad *F*: ergo *A*, ad *C*, major est ratione *D*, ad *F*.

PROPOS. 33. THEOR. 33.

Ratio totius *AB* ad totam *CD*, major sit ratio totius *AB* ad totam *CD*, major sit ratio ablata *A*, ad ablata *C*: Dico ratio nem reliqua *B*, ad reliquam *D*; majorem efficiat totius ad totam.

Nam

Nam permutando per 27. erit major ratio AB , ad A , quam CD , ad C ; & per conversionem rationis, hoc est per 30. ratio AB , ad B , minor ratione CD , ad D ; iterumque permutando AB , ad $C D$, minor ratione B , ad D .

PROROS. 34. THEOR. 34.

*S*i sint quoscunq; magnitudines A , B , C , & alia D , E , F , ipsis numero aequales, sit AB major ratio A , ad D , quam B , ad E ; item BC major B , ad E , major quam C , ad F : Dico rationem ABC ad omnes DEF , majorem esse ratione BC , ad $E F$; minorem quam A , ad D ; & majorem quam C , ad F . X

Cum enim major sit A , ad D , quam B , ad E ; erit per 27. permutando major A , ad B , quam D , ad E ; & componendo per 28. AB , ad B , major quam DE , ad E , & iterum permutando, major AB , ad DE , quam ablatæ B , ad ablatam E . Quare per 33. reliqua A , ad reliquam D , major erit quam AB , ad $D E$. Eademque ratione, erit B , ad E , major quam totius BC , ad totam EF . multo igitur major erit A , ad D , quam BC totius, ad totam EF ; & permutando A ; ad $B C$, major quam D , ad $E F$; & componendo ABC , ad $B C$, major quam DEF , ad $E F$. & rursus permutando omniū ABC , ad omnes DEF , major quam $B C$, ad $E F$, quod est primum.

Cumque ABC , ad DEF ; sit major quam $B C$, ad $E F$; erit per 33. reliqua A , ad reliquam E 6 D , ma-

D, major quām totius **A B C**, ad totum **D E F**, quod est secundum.

Rursus ex eo quod ratio **B**, ad **E**, major est quām **C**, ad **F**, sequitur permutando **B**, ad **C**, esse maiorem **E**, ad **F**; & componendo totius **B C**, ad **C**, majorem totius **E F**, ad **F**. & rursus permutando **B C**, ad **E F**, majorem **C**, ad **F**. est autem ratio **A B C**, ad **D E F**, major quām **B C**, ad **E F**, ut ostendimus; multo ergo major erit **A B C**, ad **D E F**, quēm **C** ad **F** quod est tertium.

Jam vero sit quoque **C**, ad **F**, major quām **G**, ad **H**. Eritque per demonstrata major ratio **B**, ad **E**, quām **B C G**, ad **E F H**; multo igitur major **A**, ad **D**, quām **B C G**, ad **E F H**; & permutando **A**, ad **B C G**, major quām **D**, ad **E F H**, & componendo major **A B C G**, ad **B C G**, quām **D E F H**, ad **E F H**; & permutando **A B C G**, ad **D E F H**, major quām **BCG**, ad **E F H**, quod est primum.

Cumque sit major ratio totius **ABC G** ad totam **D E F H**, quam ablatæ **B C G**, ad ablatam **E F H**; erit & reliqua **A**, ad reliquam **D**, major totius **A B C G**, ad totam **D E F H**, quod est secundum.

Quoniam vero ut in tribus demonstratū est, major est **B C G**, ad **E F H**, quām **G**, ad **H**. & major **A B C G**, ad **D E F H**, quām **B C G**, ad **E F H**: multo major erit **A B C G**, ad **D E F H**, quām ultimæ **G**, ad ultimam **H**, & ita de pluribus.

EUCLI-

EVCLIDIS ELEMENTUM SEXTUM.

DEFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ angulos angulis habent æquales, & circa ipsos, latera lateribus proportionalia.
2. Reciprocae sunt, cum in utraque antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.
3. Linea v. g. A B, secta erit media & extrema ratione; cum tota A C B AB cum partibus A C, C B, fuerint continuæ proportionales.
4. Altitudo figuræ, est linea perpendicularis, à vertice in basim ducta.
5. Ratio duarum magnitudinum, dicitur composita ex tot rationibus, quot inter easdem continuantur.
- vel $\begin{cases} 24 \frac{1}{2} & 6 \\ 90 & 45 \end{cases}$ hoc est, si inter A, C, B intercedat B; proporsio A, ad C, dicitur composita, ex ratio-
- g. Sub fuenit, ut tota AB ad segmentum eius AC, ne
tela BC ad segmentum eius CB. Haec propositio non exprimitur.*

ne A, ad B; & B ad C; sive hujusmodi rationes interjectæ sint eadem, sive non. Item ratio A, ad D, componi dicitur, ex rationibus, A, ad B; B, ad C; & C, ad D. propterea quod dictæ rationes inter terminos A, D, continuentur, per interjectos terminos B, C.

Defin. 10. Libri 5.

Vel { A B C D Q uando omnes proportiones interjectæ sunt eadem; tunc ratio A, ad C, dicitur per compendium esse duplicata proportionis A, ad B: eo quod eadem ratio, sit his continuata per communem terminum B; & A, ad D, dicitur triplicata ejusdem, quia ter continuatur per terminos B, C. &c.

Scholium.

IN duabus istis definitionibus explicandis insultus quidem fuit Clavius, non tamen superfluus. Quinta enim quæ definit compositionem rationum, suæ debuit restituiri integratam, & quorundam expositiones falsæ fuere detegendæ, & reiiciendæ. Nam quod in vulgari definitione habetur, denominatorem rationis compositæ, fieri ex multiplicatione denominatorum rationū componentium, non est Definitio, sed Theorema, neque eo in sensu usurpatum ab Euclidem,

elide, alijsque Geometris, ut videre est ad propositionem 23. in qua ostenditur, rationem parallelogramorum, componi ex rationibus laterum, quæ sunt circa angulos æquales, continuando dictas rationes componentes in tribus terminis, & demonstrando rationem primi ad tertium, quam Euclides per definitionem 5. vult esse compositam ex intermedijs, eandem esse cum ratione, quam habet parallelogramum, ad parallelogramum. Unde manifestè colligitur, definitionem compositionis vulgaris, non esse ex sententia Euclidis positam, sed ab alio aliquo immutatam. Ex sensu enim compositionis vero, non potest aliud inferri nisi quod rationes componentes, positæ inter duos terminos habentes dictâ rationem compositam, possint continuari, saltem eo ordine quo pronúciantur. Quod autem interponi possint ad libitum, videtur potius petendum à Theoremate peculiari, quam à definitione generali. Atque hoc est quod hic peculiari lemmate demonstrandum suscepimus.

Lemma.

S I ratio v.g. A ad B dicatur composita, v.
g. ex rationibus a. e. i: Dico eandem
componi, ex eisdem quocunq; ordine po-
sitis.

tis. Hoc est, inter duos terminos A B, licetum esse continuare dictas rationes toties, quoties possunt inter se mutare locum: iuxta Regulam ad initium Spheræ positam, ubi Clavius disputat de numero, & ordine Elementorum, estque sequens.

Regula mutationum.

Sumantur tot numeri in serie naturali, quot sunt res propositæ: multiplicati enim invicem, producunt summam mutationū: quæ pro duabus rebus est 2. pro tribus 6. pro quatuor 24. pro quinque 120. &c.

ut videre est

Mutat.	nát.	Ser.	Res	in calculo hic adjecto; & manife-
pro duabus.	2	1	A	stius in qua-
pro tribus.	6	2	B	tuor exem-
pro quatuor.	24	3	C	plis, ad sin-
pro quinque.	120	4	D	gulas muta-
		5	E	tiones ex-
		&c.	&c.	tensis, quo-

rum consideratio, & comparatio plurimum facit ad abbreviadam demonstrationem.

Prj.

Primum exemplum duarum rerum.

a	e
1 a c 2 c a	

Secundum exemplum trium rerum.

a	e	i
1 a c i 3 e a i 5 i a c		
2 a i e 4 e i a 6 i e a		

Tertium exemplum quatuor rerum.

a	e	i	o
1 a c i o 7 e a i o 13 i a e o 19 o a e i			
2 a c o i 8 e a o i 14 i a o e 20 o a i e			
3 a i e o 9 e i a o 15 i e a o 21 o c a i			
4 a i o c 10 e i o a 16 i e o a 22 o e i a			
5 a o e i 11 e o a i 17 i o a e 23 o i a e			
6 a o i e 12 e o i a 18 i o c a 24 o i e a			

Quar-

Quattuum exemplum quinque rerum.

1	a e i o u	25	e a i o u	49	i a e o u	73	o a c i u	97	u a c i o		
2	a e i u o	26	c a i u o	50	i a c u o	74	o a e u i	98	u a e o i		
3	a c o i u	27	c a o i u	51	i a o e u	75	o a i e u	99	u a i e o		
4	a c o u i	28	c a o u i	52	i a o u e	76	o a i u e	100	u a i o e		
5	a c u i o	29	c a u i o	53	i a u e o	77	o a u c i o	101	u a o e i		
6	a c u o i	30	c a u o i	54	i a u o e	78	o a u i e	102	u a o i e		
7	a i e o u	31	e i a o u	55	i e o u	79	o e a i u	103	u e a i o		
8	a i e n o	32	c i a u o	56	i e a u o	80	o e a u i	104	u e a o i		
9	a i o e u	33	e i o a u	57	i e a u	81	o e i a u	105	u e i a o		
10	a i o n e	34	e i o u a	58	i e o u a	82	o e i u a	106	u e i o a		
11	a i u o e	35	e i u a o	59	i e u a o	83	o e u a i	107	u e o a i		
12	a i u e o	36	e i u o a	60	i e u o a	84	o e u i a	108	u e o i a		

13	a e i u	37	e o a i u	61	i o a c u	85	o i a c u	109	u i a e o
14	a o e u i	38	e o a u i	62	i o a u e	86	o i a u e	110	u i a o e
15	a o i e u	39	e o i a u	63	i o e a u	87	o i c a u	111	u i e a o
16	a o i u e	40	e o i u a	64	i o e u a	88	o i e u a	112	u i e o a
17	a o u e i	41	e o u a i	65	i o u a c	89	o i u a c	113	u i o a e
18	a o u i e	42	e o u i a	66	i o u e a	90	o i u e a	114	u i o e a
19	a u e i o	43	e u a i o	67	i u a c o	91	o u a c i	115	u o a e i
20	a u e o i	44	e u a o i	68	i u a o e	92	o u a i e	116	u o a i e
21	a u i c o	45	e u i a o	69	i u c a o	93	o u e a i	117	u o e a i
22	a u i o e	46	e u i o a	70	i u c o a	94	o u e i a	118	u o c i a
23	a u o e i	47	e u o a i	71	i u o a e	95	o u i a c	119	u o i a e
24	a u o i e	48	e u o i a	72	i u o e a	96	o u i c a	120	u o i e a

E

In primo exemplo, videre est duas series in transversum, notatas literis a, e & sub singulis mutationes singulas. & duas in universum, quia singulæ literæ non possunt occupare primum locum sæpius, quam semel.

In secundo exemplo, sunt tres series, in transversum, denominatæ à tribus literis a, e, i, & sub singulis sunt duæ mutationes. quia singulæ literæ possunt occupare primum locum bis, hoc est toties, quot in primo exemplo erant mutationes in universum. unde in secundo exemplo sunt mutationes 6.

In 3. exemplo sunt quatuor series transversæ, denominatæ à quatuor literis a, e, i, o, & infra singulas sunt 6. mutationes, & in universum 24.

In 4. exemplo sunt quinque transversæ series, denominatæ à quinque literis a, e, i, o, u, & sub singulis, mutationes 24. quæ multiplicatæ per quinque faciunt 120. &c.

Altera consideratio est, quod in secundo exemplo, primæ duæ literæ serierum, a, e, In tertio, primæ tres serierum a, e, i, & in quarto, primæ quatuor serierum a, e, i, o. sint eadem, licet non eodem ordine positæ. & idem verum est de posterioribus literis ultimarum serierum, quæ in 2. exemplo sunt iterum duæ a, e, in 3. tres a, e, i, in 4. quatuor a, e, i, o.

Postremo. in omnibus seriebus præter literas quæ primum locum occupant, reliquæ sunt cædem, cum ijs quæ ponuntur in capite.

Ex his generalibus cōsiderationibus, formatur lemmatis demonstratio, eademq; quo ad præcipuas partes communis, hoc modo.

Pro omnibus exemplis termini rationis compositæ erunt AB, & componentes erūt vel duæ a,e, vel tres a,e,i, vel quatuor, a,e,i,o, vel quinq; a,e,i,o,u,&c. ita ut per def. §. inter A,B, possint continuari, vel duæ ra-

a	c	e			tiones a, e, per u-
A	C		B		num terminū intermedium C, vel
	a	e	i		tres a,e,i, per duos C, D, vel qua-
A	C	D	B		tuor a, e, i, o, per tres C, D, E, vel
	a	e	i	o	quinque a, e, i, o,
A	C	D	E	B	u, per quatuor C, D, E, F.
	a	e	i	o	
A	C	D	E	F	B

Demonstratio primi exempli.

1	a	e	D	Einde pro pri-
	A	C	B	mo exemplo
2	e	a		præter terminos A
	G	I	H	CB, quibus conti-
				nuantur duæ ratio-
				nes a,e, continuatur in alijs tribus terminis

nis G, I, H, eadem proportiones ordine mutato, ita ut ratio G ad I, sit e, & ratio I ad H, sit a. Dico rationes A ad B, & G ad H. esse easdem. Cum enim ut A ad C; ita sit I ad H; & sicut C ad B, ita G ad I. ergo per æqualitatem ordinatam, erit quoque ut A ad B, ita G ad H; sed G ad H, componitur *per defin.* 5. ex rationibus e, a. ergo etiam A ad B, componitur ex eisdem. hoc est ratio A ad B, componitur, tam ex rationibus a, e, quam ex rationibus e, a.

Demonstratio 2. exempli.

	a	c	i		N	secundo
1	A	C	D	B	I	exemplo pre-
3	G	I	K	H	C	ter terminos A
5	G	I	K	H	D, B, quibus	cōtinuantur ra-
						tiones a, e, i.
						primi casus se-
						cundi exempli superius positi, continuen-
						tur in alijs quatuor terminis G, I, K, H, ra-
						tiones e, a, i, ut habentur in tertio casu, &
						rationes i, a, e, ut habentur in quinto.

Quoniam igitur in primo & tertio casu; inter A D, & G K, continuantur duæ ratios, a, e, ut cunque; ergo per demonstratiōnem primi exempli, ut A ad D, ita erit G ad K, ut autem D ad B, ita est K ad H; ergo per æqualitatem ut A ad B, ita erit G ad H.

In

In quinto vero casu quoniam rationes a, e, sunt continuatæ inter posteriores tres terminos I, K, H; idco ut A ad D, ita erit I ad H, & quia præterea ut D ad B, ita est G ad I, erit rursus per æqualitatem ut A ad B, ita G ad H. Cum igitur G ad H, in tertio casu componatur ex rationibus e, a, i; & in quinto ex rationibus i, a, e, manifestum est est eandem rationem A ad B, non solum componi ex a, e, i; sed etiam ex e, a, i; & i, a, e.

Reliqui casus 2. 4. & 6. reducuntur ad tres priores 1. 3. & 5. mediante tertia consideratione, ex qua constat in singulis series, primas literas esse easdem, & reliquias quotcunque sint non differre nisi positione. tales sunt in serie a, literæ e, i in serie e, literæ a, i, & in serie i, literæ a, e. Quæ sicut in præcedenti demonstratione, ex eo quod in 1. & 3. casu componentes a e, e a, sunt similes, & reliqua utrobique est eadem litera i, ostensum est, ut A ad B, ita esse G ad H. ita etiam hic, quoniam in 1. & 2. casu, e i; i e, sunt similes, & reliqua a, e- adem, valet eadem consequentia, hoc est, ut A ad B, ita esse G ad H; si inter A, B, per C, D, continentur rationes a, e, i, primi casus; & inter G, H, per I & K, rationes a, e, i, secundi casus.

Similiter si per G, I, K, H, continentur ratio-

	a	e	i	rationes e, a, i, e, i, a,	
1	A	B	C	D	tertij & quarti casus; ut
	e	a	i		G ad H, in 3. casu, ita
3	G	I	K	H	erit G ad H, in 4. Vt an-
	e	i	a		tem G ad H, in 3. casu,
4	G	I	K	H	ita ostendimus esse A
					ad B, in primo casu. Er-
					go etiam ut A ad B, ita erit G ad H, in 4.
					casu.

Denique in 5. & 6. casu omnia sunt similia, & consequenter manet etiam demonstratum totum secundum exemplum. hoc est rationem A ad B, componi ex rationibus a,e,i, quocunque ordine positis.

Demonstratio reliquorum exemplorum.

In reliquis exemplis non est alia differentia, quam quod in ipsis rationes componentes sint plures tribus. Methodus autem demonstrandi est eadem. Rationes enim componentes quæ habentur in capite singularium serierum, reducuntur ad rationes primo loco propositas, & ad has reliquæ, quæ sub iisdem capitalibus, subiiciuntur, non aliter quam factum est in precedenti exemplo,

Corollarium.

Huic licentiaz permutandi rationes componentes, puto corollarium titulo annetij

annecti posse non inutiliter nonnulla eodem spectantia.

Primum est. Compositionis campum patere latissime, ut appareant rari, qui ipsum pervagentur. Omnis enim ratio proposita, quamvis non componatur ex quibuslibet, componitur tamen ex quotlibet; imo unam tantum si demas, componitur ex quotlibet & quibuslibet.

a e i o bet. Sint duæ magnitudines A, C D E B, habentes quamcunque rationem, inter quas statuantur quotcunque, & aliæ quamcunque magnitudines ejusdem generis C, D, E. eritque ex vi defin. 5. ratio A ad B composita ex rationibus A ad C, C ad D, D ad E, & E ad B. Neque dubium est, si priores tres fuissent v.g. rationes $\frac{a}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, easdem continuari posse à magnitudine A, per aliquos terminos C, D, E, usque ad E, atque ita solum manere postremam rationem o, inter E & B, quæ sola non potest assignari ad arbitrium, sed determinatur eo ipso quod reliquæ sint continuatæ per terminos C, D, E.

2. *Coroll.* Certum est easdem rationes componere easdem, & easdem componi ex eisdem. hoc enim sequitur ex definitione immediate. Quare si ratio A ad B, & F ad G, est eadem, & prior A ad B. sic

B **compo-**

a	e	i	o
A	C	D	E
u	a		
ALC			
i	e	a	o
F	H	I	K
			G

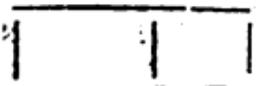
composita ex a, e, i, o, erit etiam F ad G, ex ijsdem composita. & vice versa, nulla habita ratione ordinis, quod attinet rationes componentes.

3. *Coroll.* Et hinc deducitur hæc alia consequentia. Si rationes a, e, i, o, per terminos C, D, E, sint continuatæ inter A, B; & inter F, G, per terminos H, I, K, fuerint continuatæ eadem; & hoc modo permutatæ i, e, a, o: ita & constet sicut A ad C, ita esse I ad K, ut C ad D, ita H ad I; ut D ad E, ita F ad H; sequitur etiam reliquas, E ad B, & K ad G, esse easdem.

4. *Coroll.* Si a, e, i, o, componant rationes A ad B, & F ad G, ut in præcedenti exemplo, ab ijs ciaturque utrinque ratio a, reliquæ non component quidem rationem A ad B, vel F ad G; component tamen aliquam aliam eandem.

5. *Coroll.* In eodem exemplo si ratio v. g. A ad C, hoc est ratio a, dicatur composita ex alijs v. g. ex rationibus u, a, ita ut ratio A ad L, sit ratio u, & L ad C, sit a. sequitur non solum rationem A ad B, componi ex rationibus u, a, e, i, o, sed etiam rationem F ad G. Item si dematur utrinque ratio a, etiam

etiam compositas ex reliquis u, e, i, o, esse easdem. quamvis ita composita non sit eadem cum ratione A ad B, vel F ad G. Hujusmodi argumentationem licet videre apud Pappum lib. 7. propos. 142.

6. Parallelogrammum AD., cum nomine E D F occupat totam lineam AB,

 sicut occupat parallelogrammum AF; dicitur deficiens. Parallelogrammum vero AF, quod occupat AB, majorem ~~AC~~; dicitur excedens, vel excedens, parallelogrammo CE.

PROPOS. II. THEOR. II.

Triangula A B C, DEF; item parallelogramma C G, E H, inter easdem parallelas, ejusdemq; altitudinis; sunt inter se, & basis B C, ad basim E E.

Sint BI, IK, KL, æquales BC, & FM, **N**, æquales EF; hoc est BL, FN sint basium multiplices; nec tanturque AI, AK, AL, DM, DN; Eruntque triangula A BI, A IK, A KL per 38. pr. æqualia, ipsi ABC, & simul tam multiplicia ejusdem, quam est BL multiplex basis BC, similiter, triangula D FM, DMN, tam erunt multiplicia trianguli DEF, quam est basis FN, basis EE.

Quando autem B L, æqualis est F N; semper triangulum A B L, est æquale triangulo D F N; & quando B . L, major est quam F N, etiam triangulum est majus triangulo; & quando minus, minus. Quare per 6. def. 5⁴ ut B C, ad E F, ita est triangulum A B C, ad triangulum D E F.

Parallelogramma autem CG, EH sunt dupla triangulorum ABC, DEF per 41. pr. ergo per 15. quinti, ut triangulum ad triangulum, hoc est, ut basis BC, ad basim EF, ita est parallelogramnum ad parallelogramnum.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

In triangulo ABC, DE, si parallelia BC;
Dico latera AB, AC, scilicet esse proportionaliter in D, E: E quando scilicet sunt proportionaliter rectam DE; esse parallelam BC.

Dicitæ enim BE, CD, faciunt per 37. pr. æqualia triangula DEF, EDC; & ideo per 7. quinti habent eandem rationem ad triangulum ADE. Sed ratio DEB, ad ADE, est ut basis BD, ad basim DA: quia triangula EBD, EDA, sunt ejusdem altitudinis: & ratio EDC, ad ADE, est ut basis CE, ad AE, ut demonstratum est in precedenti. Ergo per 11. quinti, ut DB, ad DA, ita est CE ad EA.

Vice versa, si ut AD, ad DB, ita sit AE,

ad E C; habebit triangulum A D E, ad triangula D E B, E D C, rationem eandem. & idcirco eadē triangula D E B, EDC, erunt aequalia. & D E, B C parallelæ per 39. pr.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Recta A D, secet angulum B A C, bifariam:
Discour A B, ad A C, ita esse segmentum
B D, ad D C. Et vice versa. si ut A B ad A
C, ita sit B D, ad D C: Dico, A D secare
angulum B A C, bifariam.

Sit B E parallela A D, & occurrat C A in E. Ergo per 29. pr. anguli A E B, A B E sunt aequales aequalibus D A C, D A B: & ideo per 6. pr. A B, A E, sunt aequales. Ut autem A E, ad A C, ita est per 2. B D, ad D C. ergo etiam ut A B, ad A C, ita est B D ad D C.

Deinde supposita eadem constructione, si sit ut B D, ad D C, ita A B ad A C, cum per 2. etiam A E, ad A C, sit ut B D, ad DC; erit quoque ut A B, ad A C, ita A E ad eandem A C; & idcirco A B, A E sunt aequales, & anguli ad basim B E, aequales. Est autem propter parallelas A D, E B, D A C, aequalis ipsi A E B; & D A B, ipsi A B E. ergo etiam isti sunt aequales.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Triangula A B C, D C E, sint aequiangularia:
Dico circa aequales angulos A, D, latera A
B, A C, esse proportionalia lateribus D C,

D E & c. & Homologa, subrendere angulos aequalibus.

Latera $B C$, $C E$ adjacentia aequalibus angulis, continentur in eadem recta $B C E$; ita ut $B C$, sit aequalis $D C E$, & $A C B$, ipsi $D E C$, sic enim erunt $A B, D C$, & $A C, D E$ parallelæ; & $E D, B A$ protractæ constituent parallelogrammum $C F$; eritq; $A C$ aequalis $F D$, & $A F$, ipsi $C D$, per 34. pr. & per 2. hujus erit, vt $A B$, ad $A F$, hoc est ad $C D$: ita $B C$, ad $C E$. & permutando ut $A B$, ad $B C$, ita $C D$, ad $C E$. item ut $B C$, ad $C E$, ita est $F D$, seu $C A$, ad $E D$; & iterum permutando ut $B C$, ad $C A$, ita $C E$ ad $E D$. Denique ex eo quod ut $A B$ ad $B C$, ita esse $C D$, ad $C E$; & ut $B C$, ad $C A$, ita $C E$ ad $E D$; sequitur ex aequalitate ordinata, ut $A B$, ad $A C$, ita esse $C D$, ad $D E$. Atque ex hac ipsa demonstratione est manifestum, tam antecedentes terminos, quam consequentes, hoc est homologos, opponi angulis aequalibus.

Coroll. Constat etiam parallelam $C D$. vel $A C$, abscindere ex toto triangulo $F B E$, triangulum simile.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Triangula $A B C, D E F$, habeant latera lateribus proportionalia: Dico latera homologa opponi angulis aequalibus.

Angulis B, C , siant aequales $G E, F, G F E$: triangulo $C D F$ retriangulo $D E F$, de eiusdem te et triangulis $A B C$, illius similis in isto, $C D F$ est eius $C D$, habet C .

eritque per 3. pr. reliquus G , æqualis reliquo A , & per 4. hujus erunt circa æquales angulos latera lateribus proportionalia, hoc est, ut AB , ad BC , ita erit GE , ad EF . Ut autem AB , ad BC ; ita ponitur esse DE , ad EF . ergo etiam ut GE ad EF ; ita erit DE ad eandem EF . & ideo per 9. quinti GE , DE , erunt æquales. neque aliter demonstrabitur GF , æqualis DF , atque ita erunt duo latera GE , GF , æqualia duobus lateribus DE , DF . estque basis EF communis: ergo per 8. pr. non solum angulus D , erit æqualis angulo G , sed etiam reliqui reliquis: & quidem illi erunt æquales, quibus homologa latera opponuntur: & quia GE , EF , est æquiangulum ABC ; erunt etiam AB , C , DE , EF , dicto modo æquiangula.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Circa æquales angulos B , E DEF , *sunt* latera proportionalia: *Dico* triangula esse æquiangula, E angulis equalibus subtendens latera homologa.

Lat iterum triangulum GEF , æquiangulum triangulo ABC ; ut in præcedenti; eritqua iterum GE , æqualis DE , & quia circa æquales angulos DEF , GEF , latera DE , EF , sunt æqualia lateribus GE , EF . erunt triangula DEF , GEF , penitus æquialia. Sed GEF , est ipsi ABC , æquiangulum; ergo & DEF . & ideo per 4. habebunt c.

tiam reliqua latera circa reliquos angulos
proportionalia &c.

PROPOS. 7. THEOR 7.

In triangulis A B C, D E F, sint aequales an-
guli A, D; & latera A C, C B, proportionalia
lateribus D F, F E, & reliqui an-
guli B, E, sint minores, vel non minores
recto: Dico triangula esse aequiangula.

Sint primo anguli F, B minores recto, &
Si fieri potest angulus A C B, sit major
angulo F. Facto igitur angulo A C G, æ-
quali ipsi F; erunt duo triangula A C G, D
F E, æquiangula, & per 4. erit ut D F, ad F E,
ita A C, ad C G; sed ut D F, ad F E, ita po-
nitur A C, ad C B: ergo ut A C, ad C G, ita
est eadem A C, ad C B. & propterea C G,
C B, erunt per 9. quinti aequales, & anguli
C B G, C G B, aequales per 5. pr. Est au-
tem B acutus, sicut est E; ergo etiam C G
B. reliquus vero C G A, quem ostendimus
æqualem acuto E, erit obtusus. quod est
absurdum.

Si autem anguli B, E, ponerentur esse
non minores recto; essent in triangulo iso-
scelio C B G, ad basim duo anguli obtusi,
quod est similiter absurdum. Quare necesse
est angulum A C B, æqualem esse angulo F:
& per præcedentem, triangula esse æquian-
gula, & similia.

PRO-

PROPOS. 8. THEOR. 8.

*In triangulo A B C, sit angulus A rectus, et
A D, ad basim perpendicularis: Dico tri-
angula A D B, A D C, esse similia toti.*

Est enim rectus A D B, æqualis recto B
E A C; & B est communis: ergo reliqua
æqualis est reliquo. similiter A D C, æqua-
lis est B A C; & C communis. ergo.

*Coroll. Hinc sequitur per quartam hujus,
BD, DA, DC, esse continue proportionales,
& A B, esse medium proportionale inter
CB, BD; & AC, medium inter BC, CD.*

PROPOS. 9. PROBL. 1.

*A data recta AB, partem imperatam aufer-
re. v.g. duas tertias.*

Sumantur in alia A C, tres partes æqua-
les A D, D E, E F; & duæ partes tertiae
sint A D E. Ductâ igitur F B, & E G, ipsi F
B parallela; erit etiam A G duæ tertiae to-
tius A B, per 2. quia ut A F, ad A E, ita est
A B, ad A G.

PROPOS. 10. PROBL. 2.

*Secunda A B, necunque in C, D: aliam E F, si-
militer secare.*

Rectæ E H, H I, I G, sumantur æquales
partibus A C, CD, DB; & per H, I, du-
cantur parallelæ ipsi G F: eritque per 2.
ut E H, ad H I: ita EM ad M L: & ductâ alia
H O N, parallela ipsi E F, ut H I ad I G, ita

F 5.

erit HO, ad ON, hoc est ML, ad LF, quia
per 34. pr. HO, ON sunt æquales ML,
LF.

PROPOS. 11. PROBL. 3.

Datam rationem AB, ad AC; continuare.

Ipsif AC, sumatur æqualis BD, ipsique BC
IC, agatur parallela DE: eritque CE,
tertia proportionalis, quia ut AB, ad BD,
hoc est, ad AC, ita est per 2. AC, ad CE.

PROPOS. 12. PROBL. 4.

*Tribus datis AB, BC, AD, quartam pro-
portionalēm adjungere.*

Ipsif BD; agatur parallela CE; eritque ut
AB, ad BC, ita AD, ad DE.

PROPOS. 13. PROBL. 5.

*Inter duas AB, BC, medium proportionale-
lēm invenire.*

Circa AC, compositam ex AB, BC, de-
scribatur centro E, semicirculus: Per-
pendicularis enim BD; erit per corollari-
um octava, media proportionalis inter AB,
BC.

PRO-

PROPOS. 14. THEOR. 9.

Parallelogramma B D, B F, sint aequalia, & anguli ad B, sint aequales: Dico latera esse reciprocè proportionalia, ut A B ad B G, ita esse B E ad B C. & si latera circa aequales angulos dicto modo sint proportionalia: parallelogramma aequalia esse.

*C*onjungantur parallelogramma ad angulum B, ita ut A B, B G, sint una linea continua, hac enim ratione, erunt etiam B E, B C, una linea continua per 14. pr. Ex concursu autem D C, F G, in H, fit tertium parallelogrammum B H, ejusdem altitudinis cum parallelogrammis BD, BF: Et idcirco per 1. ut B D, ad B H, ita erit A B, ad B G: utque B F, ad B H. ita B E ad B C. Sed B D, & B F, ad B H, est una eademque proportio per 7. quinti, ergo etiam ut A B, ad B G; ita erit B E, ad B C.

Vice versa, si fuerit ut A B, ad B G, ita B E ad B C; habebunt B D, B F eandem proportionem ad B H; ideoque B F, BD, erunt aequalia per 9. quinti.

PROPOS. 15. THEOR. 10.

Eadem est ratio de triangulis A B C, B G E, si sint aequalia, habentaque aequales angulos ad B, & seu bases, vel alterius genit. E. ex quo, apposuerint Regulam ad alterius ligna, tunc ad alterius ligna,

Possunt enim copulari ad angulum B, ut parallelogramma, & referri ad tertium triangulum BGC, ut videré est tam in superiori figura, quam in ista.

PROPOS. 16. THEOR. 11.

Si quatuor linea proportionales fuerint; aequalia erunt parallelogramma rectangula que sunt ab intermediis, & extremis. Et si haec sint aequalia, quatuor linea erunt proportionales.

Hæc propositio nullo negotio reducitur ad decimam quartam. Si enim AB, BG, BE, BC, sint proportionales; jam est demonstratum BD, BF, esse aequalia: & si BD, BF, sint aequalia, quatuor rectas AB, BG, BE, BC, esse proportionales.

PROPOS. 17. THEOR. 12.

Si fuerint tres proportionales; rectangulum sub extremis, erit auale quadrato intermedia. & si hoc illi fuerit auale, latus quadrati erit medium proportionale, inter lata rectanguli.

Hæc non differt à præcedenti, si in præcedenti duas intermedias intelligantur

esse æquales: ita ut quatuor proportionales sint $A B$, $B G$, $B E$, $B C$; & $B G$, $B E$, sunt æquales.

PROPOS. 18. PROBL. 6.

Natura in figura quadrata et libera rectas in lineas super datam $A B$, rectilinceo $C D G F E$, simile rectilineum describere.

Distribuatur rectilineum datum in sua triangula, & super $A B$, fiat primo triangulum $A B I$, æquiangulum triangulo $C D F$: tum super $A I$, & $B I$, fiant alia $A I K$, $B I H$, æquiangula triangulis $C F G$, $D F E$ &c. ita ut sicut $F C D$, $F C G$, constituunt totum angulum C , ita $I A B$, $I A K$, constituant totum A , & ita de reliquis: Dico etiam circa eosdem angulos, latera esse proportionalia. Per 4. enim ut $C C$, ad $C F$, ita est $K A$, ad $A I$; & ut $C F$, ad $C D$, ita $I A$, ad $A B$, ergo ex equalitate ordinata, ut $K A$, ad $A B$, ita & $C C$, ad $C D$ &c.

PROPOS. 19. THEOR. 13.

Similia triangula sunt in duplicata ratione laterum homologorum. X

Si $A B C$, simile triangulo $D E F$, & latera homologa sint $B C$, $E F$; sitque tertia proportionalis $B G$: ita ut *juxta defin.* 10. $\triangle ABC$ ad $\triangle DEF$, et $\triangle BGC$ ad $\triangle EFD$. Ita si $B C$ ad $E F$ sit dupla, & $B G$ ad $E F$ sit dupla, $\triangle ABC$ ad $\triangle DEF$ sit dupla.

quinti. proportio $B C$, ad $B G$, sit duplicita proportionis $B C$, ad $E F$: Dico rationem trianguli $A B C$, ad $D E F$, esse ut recta $B C$, ad $B G$.

Quando triangula sunt æqualia, hoc est, quando $B C$, $E F$, nec non tertia proportionalis $B G$, sunt æquales, res est manifesta.

Quando vero latera $B C$, $E F$, sunt inæqualia, demonstratur hoc modo. Jungatur $A G$. Quoniam igitur angulus B , est æqualis E ; & propter similitudinem triangulorum, ut AB , ad BC , ita est DE , ad EF ; & permixtando ut AB , ad DE , ita BC ad EF ; hoc est $E F$, ad $B G$: erunt circa angulos æquales, BE , latera reciproce proportionalia. Quare per 15. triangula ABG , DEF erunt æqualia; & per 7. quinti, ut triangulum ABC , ad ABG , ita erit idem triangulum ABC , ad DEF . ut autem ABC , ad ABG , ita est per 1. BC , ad BG . ergo ABC , ad DEF erit ut BC ad BG .

*Corollarium** Hinc sequitur si tres lineæ, A , B , C fuerint proportionales; ut prima ad tertiam, ita esse triangulum A , super primam, ad simile triangulum B , supra secundam ~~erectum~~.

PROPOS. 20. THEOR. 14.

Similia Polygona $ABCDEF$, $FGHIK$, in similia triangula resolvuntur, &

re aequalia, & homologa rotis, & polygona
habent rationem duplicatam ^{ratio} laterum
homologorum. homologa & similia sunt
latera, ut A E, F K. & C I, G H.

Nam eo ipso quo Polygona ponuntur
esse similia, necesse est & angulos esse
æquales, & latera circa æquales angulos
proportionalia. Quare ut D E ad E A, sic
erit I K ad K F ; ideoque *per 6.* triangula
A D E, F I K similia, & anguli E D A , E A
D, æquales angulis K I F, K F I. est autem
totus A, æqualis toti F; ergo & reliquo D
A B, æqualis reliquo I F G. Jam sic, ut A
D, ad A E, ita est I F, ad F K; & ut A E, ad
A B, ita F K, ad F G. ergo *ex aequalitate*, e-
rit quoque ut A D, ad A B, ita I F ad F G.
ideoque rursus *per 6.* triangula D A B, I F
G, similia. Atque in hunc modum procedi-
tur ad reliqua.

Demum quoniam omnium istorum tri-
angulorum latera homologa sunt propor-
tionalia, hoc est ut A E ad F K, ita A B ad F
G; & B C ad G H, &c. ipsaque triangula si-
milia habeant *per 19.* rationem duplicatam
laterum homologorum, manifestum est, e-
tiam ipsa triangula esse proportionalia, hoc
est, ut A D E, ad F I K. ita A B D, ad F G I,
&c. Quare *per 12.* *quinti.* ut unum trian-
gulum v.g. A D E, ad F I K, ita erunt om-
nia simul ad omnia. & ideo triangulum v.g.
A D E, erit homologum Polygono A C E I

+ homologa sunt, & similia per hujus triangulis ad plures tri-
angulos, ita & huius habet ad huius illius, et huius, hoc similiter
A D E ad seu tales, 3 polygonos, quae & ea homologa.

& triangulum F I K, homologum polygono F H K.

Tertia deniq; propofitionis pars sequitur ex dictis. Polygonum enim ad polygonum est, ut triangulum A B D, ad F G I: ratio autem trianguli ad triangulum, est duplicita laterum homologorum A B, F G per 19. ergo & polygonorum.

Coroll. Ut ergo prima trium proportionalium ad tertiam, ita est polygonum supra primam ad polygonum simile supra secundam: & polygonus supra secundam ad polygonum supra tertiam.

PROPOS. 21. THEOR. 15.

Eidem rectilinea similia; sunt inter se similia.

Nam similia eidem, sunt eidem æquiangula. per 1. def. Ergo A, B æquiangula ipsi C, sunt æquiangula inter se; ideoque per 4. similia.

PROPOS. 22. THEOR. 16.

Si A B ad C D, ita sit E F, ad G H; sintque I, K, rectilinea similia: & L, M, similia ut libet: Dico I, K; L, M, esse proportionalia. & vice versa.

Proportio enim I, ad K, est duplicita proportionis A B, ad C D, vel E F, ad G H, per 19. vel 20. Est autem & ratio L, ad M,

ad M, duplicata ejusdem rationis E F, ad G H. ergo ut I ad K ita est L ad M;

Vice versa si ut I ad K, ita est L ad M erit quoq; ut A B, ad C D, ita E F, ad G H: quia rationes I ad K, & L ad M, quæ sunt cædem, sunt duplicitæ rationis A B ad C D, & E F ad G H, quæ proinde debent esse quoque cædem.

PROPOS. 23. THEOR. 17. *littera h.*

fol. 2. N. 7.

Parallelogramma aquiangula g. g. C A, C F: habent rationem compositam ex ratione lateris C B, ad C G; & ratione lateris C D, ad C E..

P Arallelogramma C A, C F, componantur ad angulum C ut in 16. Utque B C, ad C G, ita sit quædam I, ad K; & ut C D, ad C E, ita K ad L; hoc est rationes laterum sint continuatae in tribus terminis I, K, L. Ergo per def. 5. tatio composita ex ratione laterum erit ratio I, ad L. Dico ut I, ad L, ita esse C A, ad C F. Nam ut C B, ad C G; hoc est ut I, ad K; ita est per 1. C A, ad C H; & ut C D, ad C E, hoc est ut K, ad L; ita C H ad C F: ergo ex equalitate, ut I, ad L, ita est C A, ad C F.

PROPOS. 24. THEOR. 18.

Parallelogramma F G, H E, existens in circadia-

et diametrum DB; sunt similia rotis AC.

Sunt enim æquiangula, quia habent communes angulos ad B, & D. *Vide Schol. 34. primi.* Deinde per 4. hujus ut BA ad AD, ita est BG, ad GI. item ut BA, ad BD, ita BG ad BI; ut autem BD, ad BC; ita est BI, ad BF, ergo *ex aquo*, ut BA, ad BC, ita est BG, ad BF. Eodemque modo demonstrantur reliqua latera circa reliquos angulos esse proportionalia.

PROPOS. 26. THEOR. 19.

Parallelogramma similia AC, EG; existant ad communem angulum B: *Dico eadem existere circa communem diametrum BI-D.*

Si enim diameter searet EI, in alio puncto O; Effet etiam parallelogrammum LE, simile ipsi AC, *per praecedentem*, utque BA, ad AD, hoc est, ut BE, ad EI; ita esset BE, ad EO. & ideo *per 9. quinti* BI, EO; essent æquales.

PROPOS. 26. PROBL. 7.

Dato rectilineo A; construere aliud simile, & alteris B, aequalē.

Per ultimam secundi ipsis A, B, siant æqualia quadrata, quorum latera sint E, F; & ut

& ut E, ad F; sic fiat C D, ad G H: per 12.
 & super G H fiat per 18. figura similis A,
 dico ipsam æqualem esse figuræ B. Nam
 per 22. ut quadratum E, ad quadratum F,
 hoc est, ut A, ad B, ita est idem A, ad simile
 rectilineum ipsius G H. Ergo per 9. quinto
 G H, & B. sunt æqualia.

PROPOS. 27. THEOR. 20.

*super AC semissim circins AB, applicatum
 sit parallelogrammum AD, ita ut à toto
 AE, deficiat parallelogrammo CE, quod
 semper est æquale, & simile ipsi AD. De-
 inde ad quodvis aliud segmentum AK. sit
 applicatum aliud parallelogrammum AG,
 ita deficiens, ut defectus sit parallelo-
 grammum KI, similiq; ipsi CE, hoc est cir-
 ca communem diametrum BGD: Dico
 AG minus esse parallelogrammo AD.*

Quando punctum K, est inter C, B; tunc
 parallelogrammum LH, quod per 36.
 pr. est æquale LE, majus est quam GC:
 quia LE majus est quam GE, & GE, GC,
 sunt complementa æqualia per 43. pr. Ad-
 dito ergo LA, erit AD, majus AG.

Quando vero punctum K, est inter A, C;
 tunc DF, DI, sunt æqualia, quia sunt su-
 per æqualibus basibus, & DL, DK, æqua-
 lia,

lia, quia sunt complementa. ergo & D F, D K, sunt æqualia, & G H, minus quam D K; adjectoque communi K H; totum A G, minus toto A D.

PROPOS. 28. PROBL. 8.

*Ad datam A B applicare parallelogram-
mum A I deficiens, & aquale rectilineo C;
ita ut defectus P N, sit similis parallelo-
grammo D. debet autem C, non esse ma-
jus parallelogrammo A F; applicato ad A
E, semissimum torius A B, & defectum E
G, habente similem defectus P N, vel D
juxta præcedentem.*

Differentia inter A F, vel E G, & C sit O, ipsique O, sit æquale L K, & simile ipsi D, vel E G, sintque L K, E G, circa communem angulum E F G. ideoque per 26. circa communem diametrum B I F. Di-
ce A I, cuius defectus est P N, similis D, es-
se æquale ipsi C.

Quoniam enim C & O, hoc est, C & L K,
æquantur ipsi E G, necesse est gnomonem
K N P L, æquari ipsi C. Sed gnomoni æ-
quale est A I; ut patet, si æqualibus A L, E
N, addantur æqualia complementa E I, I
G. ergo A I, est æquale ipsi C.

PRO-

PROPOS. 29. PROBL. 9.

Addatam rectam A B, dato rectilineo C, applicare parallelogrammum equale, cum excessu simili ipsi D.

Secta A B, bifariam in E, fiant circa communem angulum F, EG, OH, similia ipsi D; & EG, sit applicatum ad EB, & OH, sit æquale ipsi EG, & C; simul, hac enim ratione gnomon ERQG, erit æqualis eidem C. Sed gnomoni æquale est SQ: ut patet si æqualibus AO, OB, seu æqualibus AO, BH, addatur communis OQ. Ergo SQ, excedens parallelogrammo RQ, simili D, est æquale rectilineo C.

PROPOS. 30. PROBL. 10.

Rectam AB. secare ratione media extrema, omnis latus minoris habet in se rectam, non quoniam rectas remanserint, sed quoniam placent.

Ad AD, latus quadrati ABCD, applicetur per 29. eidem quadrato æquale rectangulum DG, ita ut excessus sit quadratum AG. Ablato enim communis AE, remanebit FC, æquale quadrato AG, &

G, & per 14. erit ut B C, seu A B, ad A H, ita A H, hoc est A F, ad F B.

PROPOS. 31. THEOR. 21.

In triangulo ABC sit rectus A; & E, F, G, sunt rectilinea similia: Dico E, F, simul, aequalia esse ipsi G.

Demissa enim perpendiculari AD, fiunt BC, CA, CD; nec non BC, BA, BD continuè proportionales per coroll. octava & per coroll. 19. & Vigesima ut CD ad BC, ita erit F ad G. item ut BD, ad eandem BC ita E, ad idem rectilineum G. Ergo per 24. quinti, ut CD, BD simul, ad BC, ita erunt F, E simul, ad G. sed CD, BD, æquantur ipsis BC. ergo etiam F, E, adæquant G.

PROPOS. 32. THEOR. 22.

Ut AB, ad AC, ita sit DC, ad DE; & AB, DC, sint parallela, & similiter AC, DE; & C punctum sit commune: Dico BC, & EF esse in directum.

Quoniam enim circa angulos A, D, qui sunt æquales eidem A C D, per 29. prædicti latera sunt proportionalia, sequitur per 6. angu-

angulum B, æqualem esse D C E. Additis ergo A, & A C D, erit A C E, æqualis duobus A B. Sicut ergo A, B cum A C B, sunt æquales duobus rectis per 32. pr. ita erunt etiam duo A C E. A C B, & ideo B C, C D, erunt una recta per 14. ejusdem.

PROPOS. 33. THEOR. 23.

In aequalibus circulis, tam anguli B A C, F E G, ad peripheriam, quam B D C, F H G, ad centra: nec non sectores B D C, F H G eandem habent rationem quam peripheria B C, F G.

Arcus B C I, sit uteunque multiplex ipsius B C, & F G K L multiplex ipsius F G: Cum igitur anguli insistentes æqualibus peripherijs sint æquales; tam erunt multiplices anguli B D C, C D I ipsius B D C quam est arcus B C I, multiplex peripheriae B C: & similiter anguli F H G, G H K, K H L, & arcus F G K L, erunt æquemultiplices anguli F H G, & arcus F G. Et quando arcus B C I, est æqualis, major, vel minor arcu F G K L; erunt etiam anguli B D C, C D I, æquales, majores, vel minores angulis F H G, G H K, K H L. & ideo per 6. defin. quinti, erit ut arcus B C, ad F G, ita angulus B D C, ad F H G: immo &

angulus BAC , ad angulum FEH ; eo quod
sint semisses angulorum BDC , FHG , per
20. tertij.

Pro sectoribus sicut anguli BMC , CNI :
qui sunt æquales, quia insunt æqualibus
peripherijs, quas absindunt æquales, ar-
cus BC . CI , Unde per 24. tertij segmenta
 BMC , CNI , sunt æqualia. sunt autem &
triangula BDC , CDI , æqualia, propter æ-
qualitatem laterum. Ergo & sectores BDM ,
 $CDIN$. Eruntque prædicti sectores,
& arcus BCI , æquemultiplices sectoris B
 DCM , & arcus BC . Et eodem modo e-
runt sectores FHG , GHK , KHL , & ar-
cus $FGKL$, æquemultiplices sectoris FHG ,
& peripheriae FG : Et idcirco rursus per
6. defin. quinti, ut BC , ad FHG , ita erit se-
ctor BDC , ad sectorem FHG .

Coroll. 1. Hinc manifestum est, sic esse
sectorum ad sectorem, ut est angulus ad an-
gulum.

Coroll. 2. Item ut est angulus ad centrum
circuli ad quatuor rectos, ita peripheria
subtensa anguli, ad totam circumferen-
tiā.

DE

X no iò d' centro n'ini q' radi triani p'nt, a q' rectis agles
è b'ndy b'ndetis se secantib', quoda p'nt q' val'nt'nt
angulo à centro, sola pars totij p'f'nen'nt
ang'li angulo subtensi.

DE RELIQUIS LIBRIS.

In propriis sex libris versata est Euclidis opera circa lineas, angulos, & figuras planas. Aggressurus autem figuras solidas, cum vidoret earum translationem indigere lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus, & ha-
supponerent cognitionem numerorum:
idcirco libro 7. 8. & 9. premitit non-
nullas affectiones numerorum, & in 10.
agit de lineis commensurabilibus, & in-
commensurabilibus. & tandem in 11.
agreditur solida. & in 12. & 13. pro-
sequitur quinq^u corpora regularia dili-
gentius, & in particulari. De quibus
etiam agunt 14. & 15. qui attribuen-
tur Hypsicli Alexandrino, & 16. quem
addidit Franciscus Flussata.

Ego hic consulto ommitto corpora re-
gularia, & ea solum ex 11. attingo que
propriè sunt Elementa Solidorum.

EX LIBRO UNDECIMO.

DEFINITIONES.

1. **S**olidum est quod trinam dimensionem habet, secundum longitudinem, latitudinem, & profunditatem.
2. Solidi extremum est superficies.
3. Linea recta A B, recta est, seu perpendicularis ad planum C D, cum ad omnes rectas B C, B D, B E concurrentes in eodem plano ad B, recta est & perpendicularis. (Ex aequali hanc sententia linea perpendicularis jam non est illa anguli recti.)
4. Planum A B, rectum est ad planum C D; cum omnes O H, I K, quae in plano A B, perpendiculares ad communem sectionem B E, rectæ sunt ad planum C D.
5. Angulus inclinationis, quo recta A B, inclinatur ad planum C D, est angulus B A E, quem B A, facit cum A E, ducta perpendicularis B E. (Ex aequali hinc sententia perpendicularis est illa secunda recta C D.)
6. Plani A B, inclinati ad planum C D; inclinationis angulus est F G H, cum G F, G H, sunt perpendiculares ad communem intersectionem E B.
7. Plan-

7. Planum ad planum dicitur inclinatum similiter, cum dicti inclinationum anguli fuerint æquales.^{V. 2 libri ad opt. angulo ante opt.}
8. Parallelæ planæ sunt quæ non possunt concurrere.
9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus, & multitudine æqualibus planis continentur.^{ut ubi palmarum, et bipalmarum, unde apud fisi}
10. Similes & æquales sunt, quæ planis similibus, & multitudine, magnitudineq; æqualibus continentur.^{ut ubi, ut ubi palmarum}
11. Solidus angulus est inclinatio plurium linearum non existentium in eodem plane, ad idem punctum concurrentium, & ideo continetur pluribus angulis planis, quam duobus. Qualem constituerunt tres lineæ A B, A C, A D ad concursum A, & tres anguli plani B A D, D A C, C A B. ^{genuatae in vertice pyramidis trilatera.}
12. Pyramis est figura solida, v. g. ABCD E, quæ continetur planis A B C D, DA E, A E B, B E C, C E D, ab uno plane A B C D, constituta ad unum pum-
lum E. ^{Et in hoc 3, 5, 6 linea plane, per hanc est trigona, per}
13. Prisma est figura solida planis conténta; quorum duo adversa A B C, D E F, sunt æqualia, similia, & parallelia: reliqua vero B E F C, F C A D: A D E B: parallelogramma:^{pl. grecæ 4, 5, 6 parallelogrammum}
14. Sphæra est tale solidum, quale intelli-

semicircularis.

Elementorum

14. Sunt formari à semicirculo circa diametrum fixam, integrè revoluto.
15. Axis est illa diameter fixa.
16. Centrum sphæræ, est idem quod semicirculi circumducti.
17. Diameter sphæræ, est quævis linea per centrum acta, atque ad sphæræ superficiem terminata.
18. Conus est figura solida, qualem format triangulum rectangulum $A B C$, quando circa latus $A B$ manens, integrè circumvoluitur. estque orthogonus quando latera $A B$, $B C$, sunt æqualia, & amblygonius, quando $B C$, majus est, quam $A B$. & oxygonius, quando minus.
- Ab Appollonio in Conicis traditur alia Coni definitio universalior.*
19. Basis coni, est circulus quem in revolutione describit $B C$. Superficies coni, quam describit $A C$, & A , est vertex coni.
20. Cylindrus est figura solida formata à parallelogrammo rectangulo v. g. $A B C D$, circa $A B$, integrè revoluto.
21. Axis, est ipsa $A B$, manens.
22. Bases sunt circuli descripti à lateribus $A D$, $B C$, reliquum autem $C D$, describit superficiem cylindricam.
23. Similes coni, & cylindri, sunt quorum axes, & diametri basium, sunt proportionales.
- Cylindrus & Conus, quævis axis, & diametri basium, in ratio ex aequali sunt.
- Digitized by Google

25. Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta. hanc alea
26. Tetraedrum, quæ sub quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus continetur.
27. Octaedrum, quæ sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris.
28. Dodecaedrum, quæ sub 12. pentagonis æqualibus, & æquilateris.
29. Icosaedrum, quæ sub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris.
30. Parallelepipedum, est figura solida sex figuris quadrilateris contenta, ita ut adversæ sint parallelae.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Si linea recta pars q. g. A C existat in plana D F, reliqua C B, non existit in sublimi.

Si enim C B esset in sublimi, rotâ rectâ A C B non attingeret superficiem D F; ergo non esset plana. juxta defin. 7. primo secundum Heronem.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Recta A B, C D, se mutuo secantes in E, similiter omne triangulum; existunt in uno plano.

Ducatur BD, & circa D C, intelligatur circumducti planum; quo transcurrit

per B, erunt DB, EB, in eodem, plane cum CD. ergo &c.

PROPOS. 3. THEOR. 3.
Ducam planum A B, C D, communis secatio E F: est linea recta.

Puncta enim E, F, sunt communia, ergo & recta E F. debet enim E F, per defin. q. primi extendi tam per planum A B, quam C D.

PROPOS. 4. THEOR. 4.
Si recta A B, duabus C D, E F, perpendiculariter insistat ad concursum B: erit A B ad planum C E D F, recta.

Flat B C, æqualis B D, & B F, æqualis B E; nec tantumque F C, E D, & duabus G H, utcunq; per B, hec tangentur AF, AG, AC, A E, AH, A D. Eritque primo FC, æqualis ED, & angulus B FC, angulo B ED per 4. primi: quia circa æquales angulos ad verticem B, latera B C, BF sunt æqualia lateribus B D, B E.

2. Latera BG, GF, sunt æqualia latéribus BH, HE, per 26. primi, quia BF, BE, sunt æquales, & adjacent angulis æqualibus.

3. AC, AD, sunt æquales, per 4. pr. quia circa rectos ad B, AB, BC, sunt æquales. AB, BD. & simili arguimento sunt æquales AF, AE.

4. An-

4. Angulus A F C, est æqualis A E D, per 8. prims; quia A F, F C sunt æquales A E, E D, & basis A C, basi A D.

5. A G, A H, sunt æquales per 4. pr. quia circa æquales angulos A F G, A E H, sunt latera lateribus æqualia.

6. Per 8. pr. anguli A B G, A B H sunt æquales & recti, quia A B, B G sunt æquales A B, B H, & basis A G, basi A H.

Eodemque modo demonstratur eandem A B perpendicularē cōscē ad quascunque alias G B H.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Recta A B, insit at tribus B C, B D, B E, ad angulos rectos: Disco omnes tres in uno piano esse.

S I enim B E, non est in piano D F, in quo sunt BD, BC, erit saltem in eodem cum recta A B, nempe in A G, quod cum FD, intelligatur facere communem sectionem B G. Quoniam igitur A B; recta est ad planum FD, per 4. hujus; erit eadem A B, etiam perpendicularis ad B G, per defini 3. atque ita anguli A B G, A B E, recti erunt & æquales quod est absurdum.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Recta A B, C D, sunt recta ad planum EF: Disco ipsas esse parallelas.

Ungantur A D, B D, & in piano E F, recta D G, sit perpendicularis ad B D, & æqualis

qualis A B; ne tanturque B G, A G, Eritque primo B G, et equalis A D, per 4. primi; quia circa rectos B, D, sunt B D, B A, et quales B D, D G. secundo B G, B A sunt et quales A D, D G, & basis A G est communis; ergo angulus A D G, est et equalis A B G. Sed hic est rectus per defin. 3. ergo & alle, & quia per eandem defin. 3. eadem G D est quoque recta ad CD. Erit igitur eadem D G, recta ad tres B D, A D, D C. & ideo per praecedentem eadem tres sunt in uno plano. Sed & A B, est in eodem cum B D, D A plano, ergo etiam A B C D, sunt in uno plano, & propter rectos A B D, C D B, sunt per 29. pr. parallelæ.

PROPOS. 7. THEOR 7.

Parallelas AB, CD, ne illas ascunq; E F: Dico omnes tres esse in uno plano.

Nam A B, C D, sunt in eodem plano per defin. 34. primi. & E F, in eodem per 7. defin. secundum Heronem.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Recta A B, C D, sint parallela, & C D sit recta ad planum E F: Dico etiam A B rectam esse ad planum E F.

Constructio est similis sextæ. hoc est B G sit perpendicularis ad B D, & et equalis

lis CD, &c. Quoniam igitur circa rectos CD, G, BD, DC, sunt æquales B, BG; erit basis BC, æqualis GD, per 4. pr. & quia rursus DC, DG, sunt æquales CB, BG, & CG, communis; erit per 8. primi CBG, æqualis recto CDG. Atque ita GB, erit perpendicularis ad duas BD, BC; ideoque per 4. recta ad planum CD & quia in eodem existit AB, erit recta AB, perpendicularis ad BG, per defin. 3. Et autem eadem AB, etiam recta ad BD; ergo per 4. recta est ad planum GBD. hoc est ad planum E F.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Quæ eidem sunt parallela etiam si sint in diversis planis; sunt nihilominus parallela inter se.

Quando AB, CD, sunt parallelae eidem EF, & omnes in eodem plano, jam propositio est demonstrata *ad 30. primi*. Hic ergo AB, EF, sunt in uno, & CD, EF, in alio plano: & GH, GI, sunt perpendicularares ad EF. eritque per 4. EF recta ad planum HGI, & quia AB, CD, sunt eidem EF, parallelae; erunt etiam AB, CD, ad idem planum rectæ, per 8. & per 8. parallelae inter se.

G 3 PRO-

PROPOS. 10. THEOR. 10.

Rectæ A B, A C, concurrentes in A, sunt parallelæ rectis D E, D F, concurrenribus in D : Dico angulos B A C, E D F, esse aequales, vel aquisvalere duobus rectis.

In priori figura A B, A C, & D E, E F sunt parallelæ, & similiter positæ: item A H, A G, sunt parallelæ eisdem D E, E F; sed non similiter positæ, quia A H, A G, sunt sursum, & D E, D F deorsum: Dico in utroque casu angulos B A C, H A G aequales esse angulo E D F. Quando A H, A G non sunt similiter positæ, erunt saltē protractæ similiter positæ, quales sunt AB, AC, quarum illa fiat aequalis D E, & hæc aequalis D F; nestanturque reliquæ lineæ: ex quibus B E, C F, erunt eidem A D parallelæ, & aequales per 33. pr. & ideo aequales & parallelæ inter se: & quia easdem conjungunt rectæ B C, E F erunt etiam per eandem 33. B C, E F aequales, & parallelæ. Et quia in triangulis B A C, E D F, præter bases B C, E F aequalia sunt latera A B, A C, lateribus D E, D F, erit per 8. pr. angulus B A C, nec non H A G, aequalis angulo E D F.

In posteriore figura rectæ A B, A H, sunt iterum parallelæ rectæ D E; & A C, A G, parallelæ rectæ D F, & quidem A B, D E positæ sunt similiter; at A C, D F dissimili-

ter;

b
n
t
t
t
d
it
t
g
b
n
s
-
c
-
-
B
1-
m
12
es
2-
.is
lo

nt
3.
E
J
35



ter; est enim D F, deorsum, at A C sursum: item A G, D E sunt positæ similiter, sed A H est ad dexteram puncti A, & D E, ad sinistram puncti D: Dico in hoc casu tam angulum B A C, quam H A G, constituere angulos duobus rectis æquales cum E D F. Productâ enim C A, quæ non est similiter posita cum DF, sit etiam AG, similiter posita: & ideo per demonstrata in prioribus casib[us] angulus B A G, est æqualis angulo E D F; adjectoque communi B A C, fiunt duo B A C, B A G æquales duobus B A C, E D F, illi autem duo sunt æquales duobus rectis, per 13. primi: ergo etiam isti duos sunt æquales duobus rectis. idemque demonstratur eodem modo de duobus angulis E D F. H A G.

PROPOS. 11. PROBL. I.

A puncto A, in sublimi, ad planum B C, perpendiculararem ducere.

IN plano B C, ducatur quævis D E, in quam ex A, demittatur perpendicularis A F, per 12. primi; & G F H sit perpendicularis ad eandem D E in plano B C, & in hanc cadat alia perpendicularis ex A, nempe A I: dico ipsam esse rectam ad planum B C. Sit enim K I L parallela DE, sicut ergo D F, recta est ad planum A F I, per 4. ita erit quoque K I L. per 8. hoc est angulus A I L, erit rectus. Est autem & A I H, rectus.

ergo per 4. A I, est recta ad planum B C, in quo existunt G H, K I.

PROPOS. 12. PROBL. 2.

Ad datus planum B C, à punto A, perpendicularē excitare.

EX alio punto D, demittatur perpendicularis per precedentem nempe D E; & per E, A, ducatur HA; & in plano DEA, per 31. pr. ducatur per A, ipsi D E, parallela AF: eritque AF, recta ad BC, per 8.

PROPOS. 13. THEOR. 11.

Ex punto C, una tantum linea est perpendicularis ad planum A B.

Si enim essent duæ CD, CE, essent parallelæ per 6. quod est absurdum, quia concidunt in C.

PROPOS. 14. THEOR. 12.

Eadem A B sit recta ad duo plana C D, C E: Disco eadem plana esse parallela.

NAM si concidunt, & in communi sectione FC, sumatur quodvis punctum L, nec tantumque AL, BL: erunt in triangulo ABL, duo anguli LAB, LBA, per defin. 3. recti, contra 17. primi.

PROPOS. 15. THEOR. 13.

In plane B C, recta A B, ut C, sint parallela rectis

vellis D E, D F, in also plane F B: Dico ipsa plana esse parallela.

Ex A, ducatur in planum E F, perpendicularis A G, per 11. & per G ducantur G H, G I, parallelæ D E, DF, quæ per 9, erunt quoque parallelæ A B, A C: & ideo per 29. primi, anguli G A B, A G H erunt duobus rectis æquales: & quia A G H rectus est, erit & G A B, rectus. immo & G A C, A G I, erunt similiter recti; ideoque eadem A G erit ad utrumque planum recta, & per præcedentem B A C, E D F, erunt plana parallela.

PROPOS. 16. THEOR. 14.

Si duo plana parallela A B, C D, secantur plane E F: communes sectiones E H, G F, erunt parallela.

Si enim concurrerent v. g. in I; concurrerent etiam ipsa plana, quod est contra hypothesis.

PROPOS. 17. THEOR. 15.

Si duæ linea A B, C D, secantur planis parallelis E F, G H, I K, in L, M, N; O, P, Q; secabuntur similiter.

Iungatur L Q, occurrens plane G H in R, à quo ad M, & P, ducantur R M, R P; eritque per præcedentem R M, parallela N Q, & R P parallela L O; & ideo per 2, sexi ut L R, ad R Q, ita erit tam L M, ad M N, quam O P, ad P Q, &c.

PROPOS. 18. **THEOR.** 18.
*Sit A B, recta ad planum C D: Dico omnia
 plana per A B, ducta esse recta ad pla-
 num C D.*

Per A B, sit ductum planum E F, faci-
 ens cum C D, communem sectionem,
G B F, & H I, sit parallela A B, in plano A
 B F; quæ per 8. erit quoque recta ad pla-
 num C D; & ita de omnibus alijs rectis H I.
 ergo per defin. 4. planum E F. rectum est ad
 C D.

PROPOS. 19. **THEOR.** 17.
*Si plana A B, C D, sint recta ad planum G
 H: erit quoque eorundem communis sectio
 E F, ad idem planum recta.*

Quæ enim educitur in plano A B, per-
 pendicularis ad D F, ea est recta ad
 planum G H per defin. 4. & similiter ea,
 quæ educitur ex eodem punto F, perpen-
 diculariter super B F, in plano C D, est re-
 cta ad idem planum G H. Ergo per 11. FE,
 FE sive una linea, hoc est, communis sectio
 E F, erit ad G H, recta.

PROPOS. 20. **THEOR.** 18.
*Angulus solidus A, contineatur tribus an-
 gulis planis B A C, C A D, D A B: Dico
 quoslibet duos esse reliquo maiores.*

Quando omnes tres sunt æquales, ma-
 nifesta est propositio. quando duo sunt
 æqua-

æquales, & tertius minor; similiter. quando vero BAC est maximus probatur reliquos BAD , CAD esse ipso majores hoc modo. Fiat BAE æqualis BAD , & AEC æqualis AD ; Et ducta utcunque BE junctantur BD , CD . Eruntque BE , ED , æquales per 4. pr. Duo autem latera DB , DC , sunt per 20. pr. majora reliquo BC ; demptis ergo æqualibus BD , BE , remanebit CD , major CE , & angulus DAC , erit major CAE , per 24. pr. quia CA , AD , sunt æquales CA , AE , & basis CD , major basis CE . Quare DAC , DAB , simul sunt majores CAE , EAB ; hoc est, toto BAC .

PROPOS. 21. THEOR. 19.

Omnes anguli plani continentur angulum solidum, simul sumptis: sunt minoresq; quatuor rectis.

Solidus A, contingetur primo tribus planis angulis BAC , CAD , DAB . Ductis ergo BC , CD , DB ; erunt tres anguli solidi ad puncta B , C , D ; & duo plani anguli ABC , ABD , erunt per precedensem majores tertio CBD ; & ita de reliquis: ita ut sex anguli ABC , ABD , ACB , ACD , ADB , ADC , sint majores tribus CBD , BDC , DCB , hoc est, majores duobus rectis. Dicti autem sex anguli una cum tribus ad A, sunt æquales 6. rectis, per 32. pr. demptis ergo 6. illis qui sunt maiores

reis duobus rectis, remanebunt isti tres ad
verticem A, minores quatuor rectis.

Secundo contineatur solidus A quinque
angulis planis: eruntque omnes quinque
in pentagono B C D E F per 32. pr. sex re-
ctis æquales, & 10. anguli A B C, A B F, A
C B, A C D, A D C, A D E, &c. erunt sex
rectis majores, sicut in precedenti demon-
stratione. Omnes autem 10. una cum 5.
angulis ad A, sunt 10. rectis æquales. sub-
latis ergo 10. illis, qui sunt majores sex re-
ctis, remanebant 5. ad A, minores quatuor
rectis. & ita de alijs.

PROPOS. 38. THEOR. 33.

*Planum A B, sit rectum ad planum A C, &
ex punto E plani A B, in planum A C,
cadat perpendicularis E G: Dico E, esse
ad communem sectionem A D.*

Si minus, sit alia perpendicularis E I, &
SI G, sit perpendicularis ad A D, ideoque
per 4. defn. recta ad planum A B, & per-
pendicularis ad E G, in triangulo igitur E
G I erunt duo recti E G I, E I G: quod est
contra 17. primi.

(o)

P R O P O S I T I O N E S A L I A E.
*ex ijsdem Elementis de prompte, qua-
rum demonstrationes, hoc compendi-
um Clavio relinquit.*

E X X.

Propos. 117. In quadratis diameter & latus sunt lineæ incommensurabiles. Hoc est proportio diametri AC , ad latus AB , nulla ratione potest exhiberi numeris; Nulla enim datur earundem rectarum AC , AB , mensura communis.

E X X I.

Propos. 29. 30. & 31. Solida parallelepipedæ super eadem, vel super æqualibus basibus constituta, & in eadem altitudine; sunt æqualia.

Talia sunt parallelepipedæ AB, CD habentia communem basim AC , & æquales altitudines AE, AF .

Item parallelepipedæ AB, HI , habentia æquales bases AC, GH , & æquales altitudines AE, GI .

Propos. 32. Solida parallelepipedæ AB, CD , sub eadem vel æquali altitudine BE, CF , in-

C F, inter se sunt ut basis **A E**, ad basim **D F**.

Propos. 33. Similia solida parallelepi-
peda, v. g. **A B C**, **D E F**, in quibus tria
plana **A B**, **B C**, **C A**, circa angulum soli-
dum I, sunt similia tribus planis **D E**, **E F**, **F**
D, circa angulum solidum H, æqualem ipsi-
I, sunt in triplicata ratio laterum homo-
logorum qualia sunt **C I**, **F H**. Hoc est si ra-
tio **C I**, ad **F H**, continuetur usque ad quar-
tam terminum, ut prius ad quartum ita
erit parallelepipedum **A B C**, ad parallele-
pipedum **D E F**.

Propos. 34. Äequalium parallelopipedo-
rum **A B C**, **D E F**, bases & altitudines re-
ciprocantur. Hoc est ut basis **A B**, ad basis **D E**, ita est altitudo **E F**, ad altitudinem **B C**. Et vice versa si ut **A B**, ad **D E**, ita est **E F**, ad **B C**, parallelepipeda sunt
æqualia.

Propos. 35. Si in parallelepipedo **B E**,
circa angulum solidum **A**, tria latera **A B**,
A C, **A D**, sint continuè proportionalia: &
in parallelepipedo **G K**, circa angulum **F**
æqualem ipsi **A**, omnia tria latera **F G**, **I H**,
F I, sint æqualia medie proportionali
A C, erunt parallelepipeda **B E**, **G K**, æ-
qualia.

Propos. 37. Si fuerit ut recta **A** ad **B**, ita
C ad **D**. fuérintque parallelepipeda **A**, **B**
inter se similia, & parallelepipeda **C**, **D** in-
ter se æquales, s. æquantes, a obtutis
et la efficiat s.

ter se similia, erit quoque ut parallelepipedum *A* ad *B*, ita *C* ad *D*; & vice versa.

EX. XII.

Propos. 1. Quæ in circulis polygona similia, inter se sunt ut à diametris quadrata.

Propos. 2. Circuli inter se sunt ut à diametris quadrata.

Propos. 3. & 5. Ejusdem altitudinis Pyramides tam Triangulares, quam Polygonae: inter se sunt, ut bases.

Propos. 8. Similes pyramides sunt in triplicata ratione laterum homologorum, *ad distar. 33. Prop. 33. undecimi de prop. 11. de parallelepipedis.*

Propos. 9. Aequalium pyramidum reciprocantur bases & latera. *ad ep. 34. fin.*

Propos. 10. Conus tertia pars est Cylindri ejusdem basis, & altitudinis.

Propos. 11. Tam Coni, quam Cylindri ejusdem altitudinis, inter se sunt ut bases.

Propos. 12. Tam Coni, quam Cylindri similes, sunt in triplicata ratione diameterorum.

Propos. 15. Tam Conorum quam Cylindrorum æqualium, reciprocantur altitudines & bases. *ad ep. 34. ini. de parallelepipedo.*

Propos. 18. Sphæræ sunt in triplicata ratione diameterorum: *ad ep. 34. fin. de parallelepipedo. 35. ini.*

Ex Pappo lib. 5. prop. 17.

Circulorum circumferentiarum inter se sunt ut Diametri.

*Ex Archimede de dimensione circuli
prop. 1.*

Omnis circulus equalis est triangulo rectangulo, cuius radius est aequalis unilateri eorum quae sunt circa rectum angulum; circumferentia vero est aequalis alteri lateri circa rectum angulum existenti.

*Ex eodem de Sphaera & Cylindro. libr.
1. prop. 30.*

Cuiuscunque Sphaerae superficies quadruplicata est maximi circuli eorum qui sunt in ipsa.

Ex Clavio Geom: practical lib. 5. prop. 7.

Sphaerae soliditas producitur ex ductu semidiametri, in tertiam partem superficie.

ELEN

ELENCHUS PROPOSITIO- NUM SEX LIBRO- RUM EUCLIDIS.

Sicut habentur apud
Clavium.

P R O P O S I T I O N E S *Libri Primi.*

1. **S**uper data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constitutere.
2. Ad datum punctum datæ rectæ lineæ, æqualem rectam lineam ponere.
3. Dniabns datis rectis lineis inæqualibus, de majore æqualem minori rectam lineam detrahere,
4. Si duo triangula quo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumq; utrique, habeant vero & angulum angulo æqualem subæqualibus rectis lineis contentum; Et basim basi æqualem habebunt;

buat; eritq; triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterq; utrique, sub quibus æqualia latera subtendantur.

5. Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt anguli, inter se æquales erunt.

6. Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensta latera æqualia inter se erunt.

7. Super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis; aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraq; utrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdeniq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

8. Si duo triangula, duo latera habuerint duabus lateribus, utrumque utrique æqualia; habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentam, angulo æqualem habebunt.

9. Datum angulum rectilineum bifariam secare.

10. Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

11. Data recta linea, à punto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excita-

re.

12. Super datam rectam lineam infinitam, à dato punto, quod in ea non est, perpendicularē rectam deducere.
13. Cum recta linea super rectam consistet lineam, angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.
14. Si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, duæ rectæ lineæ, non ad easdem partes ductæ, eos qui sunt deinceps, angulos, duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.
15. Si duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficien.
16. Cujuscunque trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno, & opposito major est.
17. Cujuscunq; trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.
18. Omnis trianguli majus latus, majorem angulum subtendit.
19. Omnis trianguli major angulus, majori lateri subtenditur.
20. Omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora, quomodo cunq; assumpta.
21. Si super trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trian-

trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

22. Ex tribus rectis lineis, quae sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam uniuscujuscunq; trianguli duo latera omnifariam sumpta, reliquo sunt majora.

23. Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituiere.

24. Si duo triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utriusque; angulum vero angulo majorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi majorem habebunt.

25. Si duo triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utriusque; basim vero basi majorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo majorem habebunt.

26. Si duo triangula, duos angulos duobus angulis, æquales habuerint, utrumque utriusque, unumque latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus

teribus æqualia utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

27. Si in duas rectas lineas, recta incidens linea, alternatim angulos æquales inter se fecerit: Parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ,
28. Si in duas rectas lineas, recta incidens linea, externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.
29. In parallelas rectas lineas, recta incidens linea: Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.
30. Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.
31. A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.
32. Cujuscunque trianguli uno latere producto, externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis: Et triangulis tres interni anguli, duobus sunt rectis æquales.
33. Rectæ lineæ quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem conjungunt: Et

- ipſe e quales, & parallelę sunt.
34. Parallelogrammorum ſpatiorum e qualia ſunt inter ſe, que ex adverſo & latera, & anguli : Atque illa bifariam ſecat diameter.
35. Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eisdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.
36. Parallelogramma ſuper equalibus baſibus, & in eisdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt e qualia.
37. Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eisdem parallelis inter ſe ſunt æqualia.
38. Triangula ſuper equalibus baſibus conſtituta, & in eisdem parallelis, inter ſe ſunt e qualia.
39. Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eadem partes conſtituta, in eisdem ſunt parallelis.
40. Triangula æqualia ſuper equalibus baſibus, & ad eadem partes conſtituta : in eisdem ſunt parallelis.
41. Si parallelogrammum cum triangulo eandem baſim habuerit, in eisdemq; fu erit parallelis : Duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.
42. Dato triangulo e quale parallelogrammum conſtruere in dato angulo rectiliaco.

43. In omni parallelogrammo, comple-
menta eorum, quæ circa diametrum
sunt parallelogrammorum, inter se sunt
equalia.
44. Ad datam rectam lineam, dato trian-
gulo, æquale parallelogrammum appli-
care, in dato angulo rectilineo.
45. Ad datam rectam lineam, dato rectili-
neo æquale parallelogrammum consti-
tutæ, in dato angulo rectilineo.
46. A data recta linea, quadratum descri-
bere.
47. In triangulis rectangulis, quadratum,
quod à latere rectum angulum subten-
dente describitur, æquale est eis, quæ à
lateribus rectum angulum continentia-
bus describiuntur quadratis.
48. Si quadratum, quod ab uno laterum
trianguli describitur, æquale sit eis, quæ
à reliquis trianguli lateribus describun-
tur, quadratis: Angulus comprehensus
sub reliquis duobus trianguli lateribus,
rectus est.

PROPOSITIONES
Libri Secundi.

1. Si fuerint due rectæ lineæ, seceaturque
ipsarum altera in quotcunq; segmen-
ta:

ta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

2. Si recta linea secta sit utcunq; : Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.
3. Si recta linea secta sit utcunq; : Rectangulum sub tota, & uno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à predicto segmento describitur, quadrato.
4. Si recta linea secta fit utcunque : Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.
5. Si recta linea secerit in æqualia, & non æqualia : Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cum quadrato, quod ab intermedia sectione, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.
6. Si recta linea bifariam secerit, & illi recta quedam linea in rectum adiiciatur : Rectangulum comprehensum sub tota cum adjecta, & adjecta, una cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea quæ

que tum ex dimidia, tum ex adjecta cōponitur, tanquam ab una, descripto.

7. Si recta linea secerit utcunque; Quod à tota, quodq; ab uno segmentorū, utraque simul quadrata, equalia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento sit quadrato.
8. Si recta linea secerit utcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & uno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento sit quadrato, quale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab una linea describitur quadrato.
9. Si recta linea secerit in equalia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplia sunt & ejus, quod à dimidia, & ejus quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.
10. Si recta linea secerit bifariam, adjiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adjuncta, & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata, duplia sunt & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod à composita ex dimidia & adjuncta, tanquam ab una, descriptum sit, quadrati.
11. Datam rectam lineam secare, ut comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod

174 *Elenchus libri secundi & tert.*

à reliquo segmento fit, quadrato.

12. In amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, majus est quadratis, quæ sunt à lateribus, obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

13. In oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ sunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

14. Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

P R O P O S I T I O N E S

Libri Tertiij.

1. **D**ati circuli centrum reperire.

2. **D**Si in circuli peripheria duo qualibet puncta accepta fuerint: Recta linea, quæ

quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circulum cadit.

3. Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum extensam bifariam secet; Et ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.
4. Si in circulo duæ rectæ lineæ, sese mutuo secant non per centrum extensem: Sese mutuo bifariam non secabunt.
5. Si duo circuli sese mutuo secant, non erit illorum idem centrum.
6. Si duo circuli sese mutuo interius tangant, eorum non erit idem centrum.
7. Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua cætrum; minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotoire semper major est: Duæ autem solum rectæ lineæ equales ab eodem punto in circulum cadunt, ad utrasq; partes minimæ, vel maximæ.
8. Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; punto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero ut libet: In cavam per-

H 4 peripheriam

pheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrū ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrū transit, remotiore semper major est: In convexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minima, remotiore semper minor est: Due autem tantum rectæ lineæ æquales, ab eo punto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ, vel maximæ.

9. Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo punto, ad circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales: Acceptum punctum centrum est ipsius circuli.
10. Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.
11. Si duo circuli sese intus contingant, atq; accepta fuerint eorum centra: Ad eorum centra adjuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.
12. Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adjungitur per contactum transibit.
13. Circulus circulum non tangit in pluribus punctis quam uno, sive intus, sive extra tangat.

14. Ia

14. In circulo e^{qua}les rectæ linea^e æqualiter distant à centro: & quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.
15. In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remoto^ere semper major.
16. Quæ ab extremitate diametri cujusq; circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: Et semicirculi quidem angulus, quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.
17. A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.
18. Si circulū tangat recta quæpiam linea^e, à centro autē ad contactum, adjungatur recta quædā linea: quæ adjuncta fuerit ad ipsam contingentē perpendicularis erit.
19. Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangent^e excitetur: In excitata erit centrum circuli.
20. In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli, ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.
21. In circulo, qui in eodē segmento sunt, anguli sunt inter se e^{qua}les.
22. Quadrilaterorū in circulis descripto-

rum anguli, qui ex adverso, duobus rectis sunt æquales.

23. Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.
24. Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se equalia.
25. Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.
26. In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistat.
27. In æqualibus circulis, anguli, qui æquilibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.
28. In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt, maiorem quidem majori, minorem autem minori.
29. In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.
30. Datam peripheriam bifariam secare.
31. In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in majore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, major est recto. Et insuper angulus majoris segmenti, recto quidem major est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

32. Si

32. Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.
33. Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.
34. A dato circulo segmentum abscindere, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.
35. Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, rectangulum comprehendens sub segmentis unius, æqualis erit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.
36. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarū altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.
37. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; punto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat, sit autem, quod sub tota secante; & exterius

inter punctum & convexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur quadrata; Incidens ipsa circulum tanget.

P R O P O S I T I O N E S

Libri Quartii.

1. In dato circulo, rectam lineam accommodare, æqualem datę rectę lineę, quę circuli diametro non sit major.
2. In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.
3. Circa datum circuluhi, triangulum describere dato triangulo æquiangulum.
4. In dato triangulo circulum inscribere.
5. Circa datum triangulum circulum describere.
6. In dato circulo quadratum describere.
7. Circa datum circulum quadratum describere.
8. In dato quadrato circulum describere.
9. Circa datū quadratū circulū describere.
10. Isoceles triangulum constituere, quod habeat utrumque eorum, qui ad basim sunt angulorum, duplum reliqui.
11. In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.
12. Circa datum circulum pentagonum, æquilaterum, & æquiangulum describere.
13. In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.
14. Cir-

14. Circa datum pentagonum equilaterū, & equiangulum circulum describere.
15. In dato circulo hexagonum, & æquilaterum, & equiangulum inscribere.
16. In dato circulo quintidecagonum, & equilaterum, & equiangulum describere.

P R O P O S I T I O N E S
Libri Quinti.

1. **S**i sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinum æqualium numero, singulē singularum, equemultiplices quam multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt, & omnes omnium.
2. Si prima secundē æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundē equemultiplex, atq; sexta quartæ: Erit & composita prima cum quinta, secundæ æquemultiplex, atq; tertia cum sexta, quartæ.
3. Si sit prima secundē equemultiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiaræ: Erit & ex æquo sumptarum utraq; utriusque æquemultiplex, altera quidem secundē, altera autem quartæ.
4. Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam quemul-

quemultiplices primæ & tertię, ad æquemultiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationē, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

5. Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.
6. Si duę magnitudines duarum magnitudinum sint æquemultiplices, & detractæ quædam sint earundé æquemultiplices. Et reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.
7. Äequales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad äequales.
8. Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, majorem rationem habet, quam ad majorem.
9. Quę ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, cę quoque sint inter se æquales.
10. Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quę majorem rationem habet, illa major est; Ad quam autem eadē majorem rationem habet, illa minor est.
11. Quę eidem sunt eadē rationes, & inter se sunt eadē.

12. Sā

12. Si sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.
13. Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, majorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam. Prima quoq; ad secundam majorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.
14. Si prima ad secundam eandem habuerit rationem quam tertia ad quartam; prima vero, quam tertia, major fuerit; Erit & secunda major, quam quarta. Quod si prima fuerit equalis tertiae, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.
15. Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.
16. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et vicissim proportionales erunt.
17. Si compositæ magnitudines proportionales fuerint; hæ quoq; divisæ proportionales erunt.
18. Si divisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque compositæ proportionales erunt.
19. Si

19. Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatū se habuerit ad ablatū: Et reliquū ad reliquū, ut totum ad totū, se habebit
20. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima quam tertia, major fuerit; Erit & quarta quam sexta, major. Quod si prima tertię fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextę: Sin illa minor, hæc quoq; minor erit.
21. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur. fueritq; perturbata eārum proportio, ex equo autem prima, quam tertia major fuerit; Erit & quarta, quam sexta major. Quod si prima tertię fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextę: sin illa minor, hæc quoq; minor erit.
22. Si sint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadē ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.
23. Si sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata eārum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.
24. Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam,

can-

- eandem rationem, quā sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartā.
25. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; Maxima & minima reliquis duabus majores erunt.
26. Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quā tertia ad quartam: habebit convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.
27. Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionē, quām tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.
28. Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quā tertia ad quartam. Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam, majorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.
29. Si composita prima cum secunda ad secundam majorem habuerit proportionem, quā composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit quoq; dividendo prima ad secundam, majorem proportionem, quam tertia ad quartam.
30. Si composita prima cum secunda, ad secun-

secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia eum-quarta, ad quartam: Habebit per conversionem rationis, prima cum secunda, ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

31. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; major proportio primæ priorum, ad secundam; quam primæ posteriorum, ad secundam: Item secundæ priorum, ad tertiam major, quam secundæ posteriorum, ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, major proportio primæ priorum, ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

32. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; major proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Item secundæ priorum ad tertiam major, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, major proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

33. Si fuerit major proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum major proportio, quam totius ad totum.

34. Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque major propor-

proportio primæ priorum , ad primam posteriorum, quām secundæ ad secundā; & hæc major, quām tertiæ ad tertiam, & sic deinceps : Habetur omnes priores simul, ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem , quām omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quām prima priorum ad primam posteriorum , majorem deniq; etiam, quām ultima priorum ad ultimā posteriorum.

P R O P O S I T I O N E S
Libri Sexti.

1. Triangula & parallelogramma , quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.
2. Si ad unum trianguli latus parallelæ ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera, Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint; quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, erit ad reliquū ipsius trianguli latus parallelæ.
3. Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans antem angulum recta linea secuerit & basin: Basis segmenta eandem habebunt rationem quām reliqua ipsius trian-

trianguli latera. Et si basis segmenta e-
tandem habeant rationem, quam reliqua
ipsius trianguli latera: Recta linea, que à
vertice ad sectionem producitur, bifas-
riam secat trianguli ipsius angulum.

4. *Aequiangularium triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.*
5. *Si duo triangula latera proportionalia habeant: æquiangulara erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.*
6. *Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangulara erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.*
7. *Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul utrumq; aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangulara erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.*
8. *Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit: Quæ ad perpendicularē triangula, tum toti*

toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

9. A data recta linea imperatam partem auferre.
10. Datam rectam lineam insectam simili- ter secare, ut data altera recta secta fuerit.
11. Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinvenire.
12. Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.
13. Duabus datis rectis lineis, mediant proportionalem adinvenire.
14. *Æ*qualium, & unum uni æqualem ha- bentium angulum, parallelogrammorū, reciproca sunt latera, quæ circum æqua- les angulos. Et quorum parallelogram- morum unum angulū uni angulo æqua- lem habentium, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æ- qualia.
15. *Æ*qualium, & unum uni æqualem ha- bentium angulum, triâgulorum, recipro- ca sunt latera, quæ circum æquales angu- los. Et quorum triangulorum unum an- gulum, uni angulo æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ circum æqua- les angulos, illa sunt æqualia.
16. Si quatuor recte lineæ proportionales fuerint; quod sibi extremitis comprehen- ditur

- ditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum, æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.
17. Si tres rectæ lineæ, sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: ille tres rectæ lineæ proportionales erunt.
18. A data recta linea dato rectilineo, simile similiterque positum rectilineum describere.
19. Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.
20. Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum, ad homologum latus.
21. Quæ eidem rectilineo sunt similia; & inter se sunt similia.
22. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; Et ab eis rectilinea similia similiterq; descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint;

rint; ipsæ etiam recte lineæ proportionales erunt.

23. Äquiangula parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

24. In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

25. Dato rectilineo simile similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constitutere.

26. Si à parallelogrammo parallelogramum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

27. Omnia parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorū, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus, similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiā applicatur, parallelogramum simile existens defectui.

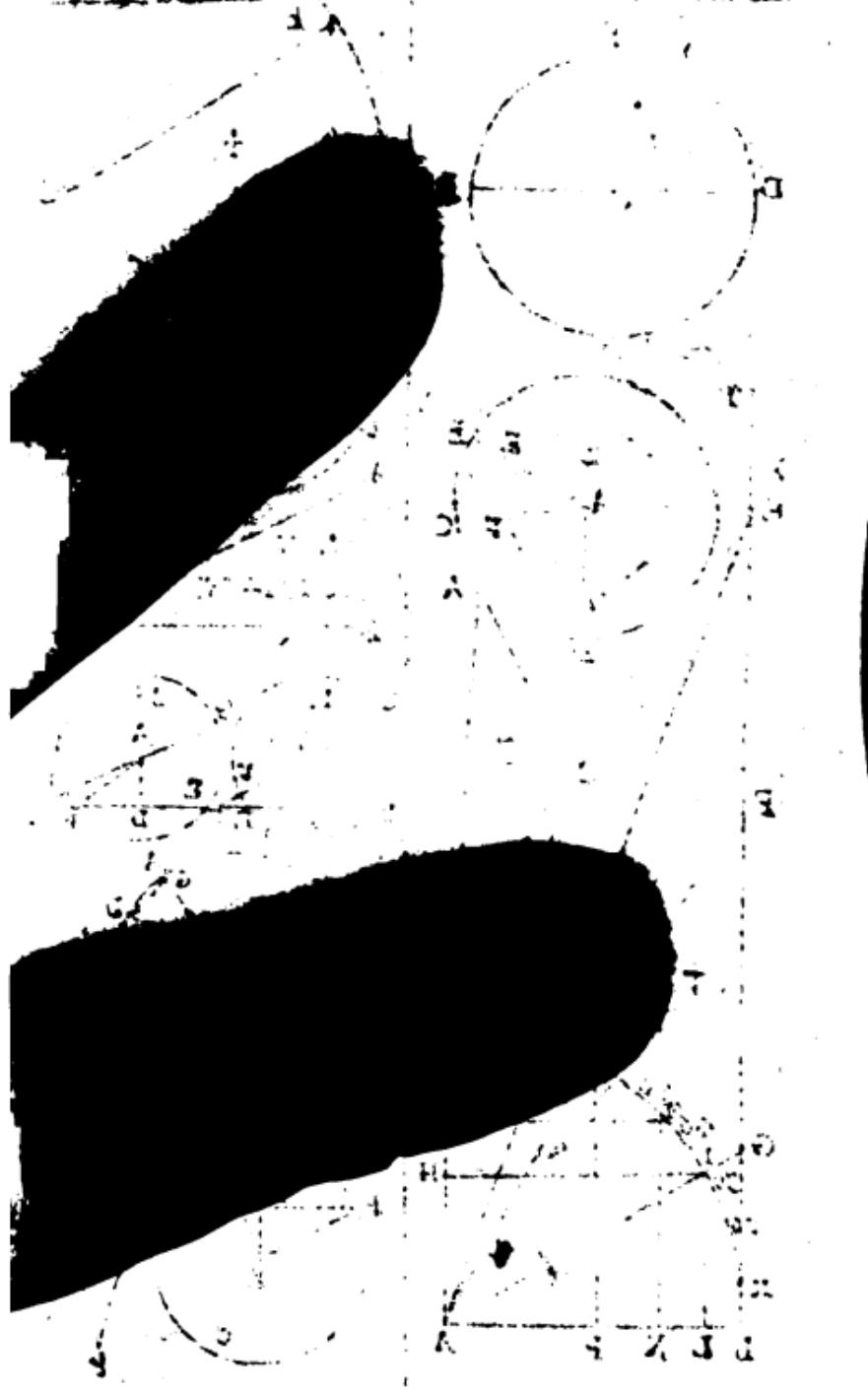
28. Ad datam lineam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato.

Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod addimidiā applicatur, cum similes

- similes fuerint defectus, & ejus, quo ad dimidiam applicatur, & ejus, cui simile deesse debet.
39. Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.
40. Propositam rectam lineam terminatam, extrema ac media ratione secare.
41. In rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.
42. Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera, in rectam lineam collocata reperientur.
43. In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

Digitized by Google

100 plus 10⁴ sq. meters A.



BREVIS TRIGONOMETRIA PLANORVM.

PROPOS. 1.

Angulus rectus BAC ad centrum circuli A constitutus; absindit arcum BC , quartam partem totius peripheriae. Producta enim BA , in D , & CA , in E , est CAD , etiam rectus per defin. 10 primi. & eodem modo DAE , & EAB , sunt etiam recti, ergo per axioma 12. æquales: unde per 26. tertij arcus BC , CD , DE , EB , invicem sunt æquales, est ergo BC , quarta pars totius.

PROPOS. 2.

Datus sit angulus quicunq^z BAC ; ex centro A descriptus circulus BCD , ex eodem centro A descriptus quicunq^z alterius circulus EFG ; Dico esse Arcum BC , ad totam peripheriam circulis BCD , ut est arcus EFG , ad totam peripheriam circuli EFG .

Dicitur enim AD , faciens cum AC angulum rectum, eritq; per precedentem tam arcus CD , quam arcus FG , quartam partem totius Peripherie; sed per 33. sexi tam arcus

arcus B C, est ad arcum C D, quam arcus E F, ad F G, ut angulus B A C, ad angulum C A D: est ergo ut B C, ad C D, ita E F, ad F G. ergo per 22. quinque erit ex æquilitate, ut B C ad totam circumferentiam, ita E F, ad totam circumferentiam.

Quoniam ergo ex prop. 33. lib. 6. in æqualibus circulis, anguli ad invicem eandem habent rationem, quam habent peripheriæ seu arcus, descripti tanquam centro, ex ipso concursu linearum angulum constituentium; ideo Mathematici pro mensura angulorum, assumunt ipsos arcus, qui descripti sunt tanquam centro, ex concursu linearum ipsum angulum constituentium; & quot partium est hujusmodi unus, totidem partium dicitur esse angulus, quem idem ille arcus subtendit. quia autem ex 2. propos. huius constat omnes arcus quibus æquales anguli insistunt, eandem habere rationem ad totam circumferentiam ideo perinde refert ad quamvis distantiam describatur ille arcus qui angulum subtendit, & penes quem anguli mensura desumitur. Sic in superiori figura arcus E F, totidem est partium, sive graduum, quot partium est arcus B C: & idem est, de quoconque arcu, descripto ex centro A, & intercepto lateribus AB, AC, quantumlibet

libet vel productis, vel rescissis. Dividitur porro omnis circulus apud Mathematicos in 360 partes æquales, quas partes gradus vocant, singuli gradus dividuntur in 60. partes æquales, quæ minuta vocantur, sive scrupula prima: singula minuta, iterum dividuntur in 60 partes æquales, quæ vocantur scrupula 2. Scrupula 2. iterum dividuntur in 60 scrupula 3. & sic consequenter, sexagenaria divisione pergunt, quoad placuerit. Cur autem Mathematici, hunc divisionis modum præ alijs divisionibus elegerint, hic nihil attinet dicere, sufficiat quod in hac divisione, pro operationibus præsertim astronomicis perficiendis, multa commoda infint, quibus aliæ divisiones carent. Operationes plerique Mathematicæ, ut sunt investigare cælestes motus, mensurare distantiam, sive astrorum à terra, sive ipso ipsa terra, loci aliquujus, vel à nobis, vel ab alio distantis; Horologia, vel munitiones designare, &c. perficiuntur per triangula: ideo Mathematici quasdam lineas ingeniosissime excoxitaverunt, per quas & latera triangulorum, & anguli, imo & ipsæ areæ, prout opus fuerit, ex quibusdam datis sive cognitis, investigantur. Has ergo lineas cum ex ad triangulorum resolutionem sint necessariæ, breviter explicare nos oportet.

DEFINITIONES. †

1. **S**inus alicujus arcus, est linea perpendicularis, cadens ab uno extremitate arcus cujus dicitur sinus, in diametrum circuli, ab altero extremitate ejusdem arcus ductam.

Coroll. 1. Duo quilibet arcus semicirculum constituentes habent unum eundemq; sinum.

2. **Coroll. 2. Definit. 2.** Sinus quadrantis circuli, sive sinus 90 graduum, est circuli ejusdem semidiameter: & vocatur Sinus totus sive Radius.

3. Complementum arcus, est differentia qua differt idem arcus à quadrante. *A*pud Autores ramci etiam saepe complementum arcus quadrante majoris accipitur pro residuo quod deficit ad duos rectos, sive ad 180. gradus.

4. Tangens alicujus arcus, est recta linea diametri extremitate perpendiculariter insistens, altera vero sui extremitate terminata, linea è centro circuli, per extremitatem arcus cujus est tangens, producita.

5. Secans, est recta linea è centro circuli per extremitatem arcus cujus est secans produ-

producta, donec cum tangente ejusdem arcus concurrat.

6. Sinus, tangens, secans, alicujus anguli, est eadem, quæ est sinus tangens secans, arcus illius qui propositum angulum subtendit & mensurat.
7. Sinus versus alicujus arcus (*alijsagittam vocant*) est pars diametri circuli, inter extreum dati arcus, & sinum ejusdem arcus intercepta.
8. Chorda est recta linea arcum quemcumq; circularem subtendens.

Pro Harum definitionum pleniori explicatione sit Quadrans circuli A B C qui intelligatur divisus in 90. gradus, & singuli gradus intelligantur divisi in 60 scrupula i. & sic consequenter. In hoc quadrante linea A B, quæ est latus quadrantis, sive semidiameter circuli vocatur Radius sive Sinus totus. Hæc supponatur divisa in partes aliquot, vel 100. vel 1000. vel 100000. vel plures; deinde ex puncto B, intelligatur ducta B T. perpendicularis ad lineam A B. Intelligaturque B T producta in infinitum, vel ut alij loquuntur quantum sufficit: item ex A puncto ex quo tanquam circuli centro propositus quadrans descriptus est, per singulos gradus, & per singula minuta 1. 2. &c. intelligantur aliæ lineæ ductæ, quæ producantur donec concur-

stant cum linea B T; quales in proposita figura sunt linea \overline{AE} , \overline{AF} , \overline{AG} ; dicenturque eadem linea \overline{e} , secantes eorundem graduum per quos transseunt. Sic linea \overline{AE} , quæ quadrantem secat in gradu 70 vocatur secans 70. graduum, linea \overline{AF} , quia quadrantem secat in gradu 60. vocatur secans 60. graduum, & sic de reliquis. Tangentes autem accipiuntur in linea B T, incipiendo à punto B, & reliquam lineam accipiendo usque ad occursum alicujus secantis, vocaturq; tangens totidem graduum, quo \breve{t} graduū dicitur illa secans, cui tangens occurrit. Sic linea \overline{BE} . vocatur tangens 70. graduum, linea \overline{BF} est secans 60 graduum, quia hæc occurrit secanti 60 graduum, illa secanti graduū 70, & sic de reliquis. Iterum in eodem quadrante A B C ex singulis gradibus & scrupulis peripheriæ quadrantis, intelligantur demissæ perpendicularares sinus primi, sive sinus recti, sive simpliciter Sinus totidem graduum, quo \breve{t} graduum est ille arcus, ex cujus extremo illæ perpendiculariter dimittuntur; sic linea \overline{IL} , dicitur sinus 30. grad. quia dimittitur ex extremo arcus 30. graduum, sic linea \overline{MN} . est sinus 45. graduum, & linea \overline{KP} . est si-

nus

Nus 60. grad. & sic de reliquis. Iterum in eodem quadrante A B C, ex singulis gradibus, & minutis, intelligantur ductæ rectæ lineæ ad angulos rectos, ad sinus rectos eorundem graduum & minutorum, quales sunt rectæ K D, M R, I H, Vocantur hujusmodi lineæ sinus cōplementi eorundē graduum sic linea K D est sinus cōplementi 60 graduū, & linea MK est sinus complementi graduum 45. linea I H est sinus complementi 30. graduum & sic de reliquis. Quod si vero numerationem graduum in eodem quadrante inchoamus, non in puncto B sed in puncto C. tunc gradus qui facto numerationis initio in B fuit 70, erit 20, facto numerationis initio in C; & secundum hunc modum numerandi, linea K D, erit sinus 30. graduum, linea vero K P, erit sinus complementi graduum 30. unde patet quod est idem esse sinum 30. gradus five esse sinum complementi gradnum 60. numeri scilicet qui deest ad quadrantem, five ad gradus 90. Est enim complementum cuiusvis arcus, five anguli, differentia, qua arcus semicirculo minor differt à quadrante, ut haber definis 3. sic arcus 80 graduum complementum, est arcus graduum 10, quia 80, distat gradibus 10, à 90. Item arcus 100 graduum complementum etiam est 10. quia centum super-

rat 90 gradus, gradibus 10. & sic de reliquis: rarius autem est usus complementorum superantium quadrantem, s̄pissime vero est usus complementi, quod deest ad complendum quadrantem, sive 90 gradus. Valde autem notandum est, duos quovis arcus, qui simul sumpti, compleat medium circulum, sive 180. gradus, habete eundem sinum, *as dicitur in Coroll. I. definitionis prima.* sic sinus 30, graduum, est etiam sinus graduum 150, quia 150, cum 30 gradibus, faciunt 180, sive medium circulum. una ergo eademq; linea subit tria munia, & tres denominations, sic linea L I, est sinus 30 graduum, eadem est sinus graduum 150, eadē est sinus cōplementi 60 graduum. His p̄enotatis pro intellecione definitionū, sequitur Tabularū explicatio.

Tabulæ sinum, tangentium, & secantium, nihil aliud sunt quam tabulæ exhibentes in numeris, proportiones omnium p̄dictarum linearum ad invicem, sunt enim hoc modo computatae. Radius sive sinus totus, sive circuli cujuscunque semidiameter, ponitur divisa in partes æquales tot, quot placuerit, & queritur quot tales partes, æquales partibus radij, contingat quævis sinus, aut secans, aut tangens. Propter facilitatem autem majorem, tam in computu tabularum, quam in usu illarum,

radius semper ponitur divisus in partes quæ exprimuntur unitate cum aliquot cifris, ut in 100. in 1000. 10000. 100000. &c.

Tabulæ quas adjungimus computatae sunt ratione radij divisi in 100000 partes. In superiori ergo figura linea A B. divisa intelligatur in 100000 partes, si quæram quanta sit linea B F, tangens scilicet gradum 60. inveniam eam continere partes 173205. linea vero A F, secans eorundem 60 gradum, continet partes 200000, tales scilicet, quales A B continet 100000: est ergo linea A F, dupla ipsius A B; linea vero K P, finns 60 gradum, continet 86603. Continet porro unaquæque pagina tabularum quatuor columnas, in prima columnâ continentur gradus & minuta, quæ per se na progrediuntur, & in pagina quidem sinistra deorsum, in dextra vero pagina sursum crescunt, qua dispositio ne habetur, ut pagina altera, semper alterius complementum exhibeat, aliæ tres columnæ continent sinus, tangentes, & secantes, gradibus & minutis primæ columnæ competentes. Quod si operatio sit hujusmodi, ut non requirat tam magnos numeros, quanti sunt illi qui in tabulis exhibentur; possumus, servata nihilominus in se eos proportionem, eos minuere, quan-

tum placuerit, reijciendo scilicet aliquot
notas posteriores versus dexteram, hoc
modo *Exempli gratia* vellem habere si-
num, tangentem, & secantem 25 gr. respe-
ctu radij solum 1000 partium, quia ergo
ex radio 100000 posito in tabulis, reijcio
duas notas, scilicet 00. ut remaneat solum
1000, debeo similiter ex sinis, tangente, &
secante repertis in tabulis; abijcere duas
ultimas notas versus dextram, tunc resi-
duus numerus, dabit sinum, tangentem, &
secantem, quas quærebam, respectu radij
solum 1000 partium. *In exemplo posito*,
sinus 25 gr. in tabulis ponitur 42262, reijcio
duas postremas notas scilicet 62, & rema-
nent 422, sinus quæsusitus respectu radij mil-
le partium, sic abjectis 31 duabus poste-
mis notis, è tangente, remanet tangens
466 partium; ex secante abjectis 38, rema-
net secans 1103 partium. Quod si ex ra-
dio solum unicam ultimam notam abjec-
sem, etiam unica ultima nota ex alijs li-
neis foret reijcienda, si ex radio tres no-
tas abijcerem, etiam ex alijs lineis tres
notæ essent abijciendæ, & sic conseqüen-
ter. Hoc quidem modo operandi exhiben-
tur sinus, tangentes, & secantes semper ju-
sto minores, propter hanc tamen notarum
abjectionem, nunquam plus unitate diffe-
riunt à veris: minus autem different à

ve-

veris, hoc modo, si prima nota versis sinistram ex rejectis, major fuerit quam 5, tunc ad numerum relictum addatur unitas; si vero fuerit vel quinque vel minus quam 5, nihil addatur. Sic in exemplo positō, ex finu rejecimus 62, cuius prima nota est major quam 5, ideo ad numerum relictum 422, addo unitatem, ut sinus fiat 423, quæ quidem erit major verâ, sed ne quidem media unitate. in tangente vero & secante, nihil addendum, quia utrobiq; prima nota abjectarum minor est quam quinque; & sunt quidem tangens & secans, minores veris; à veris tamen non differunt media unitate. est ergo horum numerorum 1000, 423, 466. 1103, eadem proportio, quæ est istorum 100000.42262, 46631, 110338, quantum ea in numeris integris haberi potest. Et eadem est ratio de usū aliarum tabularum, quæ pro multo adhuc majori radio computatæ sunt.

Pro usū porro tabularum, & triangulorum resolutione quædam adhuc propositiones sunt præmittendæ.

PROPOSITIO 3.

Datis cunctisque Trianguli duobus angulis habetur tertius, & deinceps angulus.

lo, habetur aggregatum duorum reliquorum.

Datum esse angulum hic intelligimus, quando habetur quot graduum vel minutorum sit angulus propositus. In triangulo ergo ABC, dati sint, angulus A $35^\circ 40'$, & angulus B $30^\circ 15'$: addantur simul duo dati anguli, provenient $65^\circ 55'$. quoniam autem per 32. primi cujuscunq; trianguli, omnes tres anguli simul sumpti æquivalēt duobus rectis, hoc est simul sumpti tres arcus, subtendētes angulos tres cujuscunq; trianguli, cōficiunt mediū circulū, hoc est 180 grad. si subtrahantur duo anguli dati ex 180 , residuum dabit angulum tertium quæsitum, in hoc ergo casu subtrahatis $65^\circ 55'$, ex 180 , sive ex $179^\circ 60'$, remanent $114^\circ 5'$, quantitas anguli tertij. Ob eandem causam, si unius angulus subtrahatur ex 180 , residuum erit aggregatum duorum reliquorum.

Si sciatur quod triangulus propositus est rectangulus, sufficit noscere quemcunq; acutorum, hoc ipso enim noscuntur duo, rectus scilicet, i cuius arcus est quadrans, hoc est 90 grad. & alter acutus qui datur.

Hic modus scribendi $30^\circ : 40'$ infraest ut apud

apud Astronomos, numerus autem ille cuius superponitur vel cui nulla nota superponitur significat gradus, cui vero superponitur / significat minus sive scrupula prima, cuius // denotat scrupula 2. Et sic consequenter. Sic hic numerus 20: 25' 30'' 40''' significat 20. gradus, 25. scrupula prima, 30. scrupula secunda, 40. scrupula tertia.

PROPOSITIO. 4.

In omni triangulo rectilineo latera quævis duo, se habent ad invicem ut sinus angularium ipsius oppositorum.

Primo Datum sit triangulum A B C, rectangleangulum ad A si radius sit C D, quæ est æqualis C B, erit B A sinus arcus B D, sive anguli C per 1. Et 6. def. posita verò B E pro radio, quæ etiam est æqualis B C, erit C A sinus arcus C E, sive anguli C B E ergo.

Secundò Datum sit triangulum non rectangleangulum D E F, & centro F intervallo F E, descriptus arcus E G, & ex punto E demissa perpendicularis E H, erit E H sinus arcus E G, per def. 1. hoc est anguli F per def. 6. sit deinde producta D E in I, te D I, sit æqualis F G, & centro D, intervallo D I, descriptus arcus I K, & ex punto I demissa perpendicularis I L, erit I L sinus anguli D, respectu radij D K, qui est

æqualis radio FG, sed est ut DE ad DI,
ita EH ad IL per 4. sexti: DI autem per
constructionem est æqualis FG, sive FE,
ergo ut DE latus subtendens angulum F,
ad EF latus subtendens angulum D; ita EH
sinus anguli F, ad IL sinum anguli D.

Quod si loco anguli acuti D, demon-
strandum sit de angulo obtuso EMF, tunc
producatur FM & centro E, apertura EM,
describatur arcus MD secans productam
FM in D, ducaturq; ED eritq; ED æqua-
lis linea EM, erit igitur angulus D, æqua-
lis angulo EDM, per 5. pri. ac proinde
IL quæ est sinus anguli D, erit etiam sinus
anguli EDM, respectu scilicet ejusdem
radij FE supra positi: sed anguli EDM, EMF,
habent eundem sinum per coroll. I.
def. prima, ergo erit iterum ut IL sinus an-
guli EMF, ad EH sinum anguli F, ita EF
latus oppositum angulo EMF, ad EM la-
tus oppositū angulo F ergo universim, &c.
*Ex his propositionibus deducuntur pra-
xes resolutionis triangulorum rectilineo-
rum.*

Docemus itaque aliquot exemplis ex
adjunctis tabulis ipsas lineas aut arcus quo-
rum fuerit usus, invenire.

I.
*Dati arcus quadrante minoris, sinum infe-
nire.*

Arcus

AReus omnes usq; ad areum medij quadrantis sive 45.graduum notati habentur in prima columnna sinistræ pagellæ cum minutis adjectis, in proxima columnna habetur sinus cuiq; gradui & minuto primæ columnæ correspondens sic folio 233. invenio sinum 23, 18'. 39555. Reliqui gradus à 45. ad 90. à fine versus initium redendo inveniuntur, in prima colūna dextræ pagellæ. Adjecta minuta supra gradū datū accipi debent: & sic etiam in proximā columnā, adjacet sinus ipsis cōpetens, sic in prima facie folij 234 invenio sinum correspondentem 66, 42'. eſcē 91845 sunt autem 66, 42' complementum 23 & 18' qui in opposita pagella ē regione reperiuntur gradus enim. unius pagellæ, semper sunt complementum graduum in altera pagella ſibi opositorum. 2.

Sinum complementi arcus quadrante minoris reperire.

CUm complementum ut dictum est de fin. 3. sit differentia qua arcus aliquis differt à quadrante; inveniantur gradus quibus datus arcus differt à quadrante, ſinus ipsis competens, erit sinus quartitus.

3.

Sinus arcus quadrante majoris reperire.

CUm per Coroll. 1. definitionis 1. duο quilibet arcus ſemicirculum confi-

tuentes habeant unum eundemque sinum, quærantur gradus quibus arcus propositus differt à semicirculo, & sinus ipsis competens, erit sinus quæsitus.

4.

Sinum versum arcus inventire.

Si arcus est quadrante minor, detrahe ejus sinum complementi à sinu toto, residuum erit sinus versus, si verò arcus est quadrante major, sed tamen semicirculo minor adde ejus sinum complementi sinu toti, conflatum ex utroque, erit sinus versus quæsitus. 5.

Ex sinu cognito arcum correspondentem cognoscere.

Quia idem sinus competit duobus arcibus, ut ex ipso sinu cognito, determinetur arcus, oportet præterquam datum sit sinus, etiam datam esse saltem speciem arcus quæsiti, hoc est, an sit quadrante major, vel minor, si itaque arcus fuerit quadrante minor, quære sinum datum in tabulis & in columna gradduum adjacente, indicabitur quantitas arcus quæsiti. Si verò arcus fuerit quadrante major, gradus jam dicto modo reperti, detrahan- tur ex semicirculo, residuum erit quantitas arcus quæsiti.

Quod si sinus datum phænoise non inventatur inter sinus tabulæ, signum est neque arcum

arcum præcise quæsitum in ipsa tabula reperiri; sumendus itaq; sinus proximè major, vel minor numero dato, & sic etiam arcus correspondens, erit arcus proximè major vel minor arcu quæsito. Si tamen cupis arcum præcisiorem, cape differentiam inter sinum proximè majorem, & proximè minorem, item differentiam inter sinum propositum, & illum in tabula repertum à quo minus differt, & dic si differentia inter duos siūs in tabula repertos, dat 6 minuta addenda arcui sinus proximè minoris, ut habeatur arcus sinus proxime majoris ; vel subtrahenda ab arcu sinus proximè majoris, ut habeatur arcus sinus proximè minoris : quot minuta postulat differentia inter sinum propositum, & sinum proximè minorem, vel majorem; addenda arcui sinus proximè minoris, vel auferenda ab arcu sinus proxime majoris, ut habeatur arcus sinus propositi. Nam hæc minuta juventa, addita arcui sinus proximè minoris (si propositus sinus paucioribus unitatibus ab hoc differt) vel ablata ab arcu sinus proximè majoris, (si ab hoc minus distat sinus propositus) dabunt arcum sinus propositi magis præcissum. Hac methodo, habitis tabulis plenioribus, in quibus habentur omnia minutæ, si quis solis minutis contentus esse nolit,

lit, sed etiam ipsa secunda habere defideret, poterit juxta præscriptum modum operando, etiam ipsa secunda invenire, & ea est causa cur eam hic judicaverim explicandam.

6.

Ex sinu complementi dato, arcum colligere.

O Portet insuper scire, an arcus quæsus sit quadrante major, vel minor, propter rationem datam in præcedenti. Si itaque arcus quæsus fuerit quadrante minor, inveniatur in tabula sinus datus, & gradus in opposita pagella, dicto sinui correspondentes, erunt quantitas arcus quæsiti. Si vero arcus quæsus fuerit quadrante major: juvento sinu proposito in tabella, gradus in eâdem pagellâ ipsi correspondentes, detrahantur ex semicirculo, residuum erit arcus quæsus.

7.

Ex sinu verso cognito, arcum cognoscere.

Si datus sinus versus minor est Radio, detrahe eum ex Radio, residuum erit sinus complementi ipsius arcus quæsiti, quem propterea invenies per præm præcedentem. Si vero sinus versus datus fuerit major Radio, detrahe Radium ex sinu verso dato, remanebit sinus arcus qui quadranti adjectus, arcum quæsum conficit.

8. Chor-

8.

*Chordam cuiuscumq; arcus, & contra ad-
cum chorda cuiuscumq; reperi.*

Si dimidij arcus propositi sinus accipiatur, & duplicetur, habebitur chorda danti arcus. Item si datæ chordæ accipiatur dimidium, & per columnam sinuum queratur arcus tali sinui competens, dabit hic arcus duplicatus, arcum datæ chordæ respondentem.

Ex his facile est colligere modum, ex tabulis Tangentium & secantium, vel Tangentes vel secantes, vel arcus ipsis competentes prout opus fuerit querendi, & inveniendi.

*Sequentes præxes docent ipsam triangulo-
rum resolutionem & primo de Re-
angulis.*

Nota primo per Basim semper hic intelligi latus angulo majori oppositum.

Nota secundo. Ipsam operationem ut peragi debet secundum regulam proportionis Arithmeticam, diverso charactere impressam esse, ut omilla demonstratione, statim pateat quomodo ipsa operatio sit peragenda, in qua membrum quarto loco positum semper est ipsum quæsitus.

I. Ha-

9.

Habentur proportiones laterum; Ex datis omnibus angulis eiusdem trianguli.

Sinulis enim lateribus adscribantur sinus angulorum oppositorum, latera enim easdem habent proportiones quam dicti sinus per 4.

10.

Invenientur latus quodlibet, ex data base & alteruero angulorum acutorum in triangulo rectangulo A B C.

Data enim sit basis A C, cum angulo A, habebitur ergo etiam angulus C per 3. & quia est per 4. Ut radius, ad sinum anguli appositi lateri, quæsito; ita basis A C, ad latus quæsิตum, erit permutando.

<i>Vt radius --</i>	<i>-- ad Basem A C.</i>
<i>Ita sinus alteruero --</i>	<i>ad latus eidem anguli oppositum.</i>

11.

Invenientur latus ex data base, & altero latere.

Sit in eodem triangulo A B C, data basis A C, & latus A B, quia est ut A C ad A B; ita radius ad sinum anguli C per 4. erit permutando

Vt A C basis data -- ad Radium

ista

*qua AB latus da- ad sinum angu-
sum sum li C.*

Invento ergo in numeris signo anguli C,
quæratur inter sinus dictus numerus, &
habebitur quantitas anguli C, & simul an-
gulus A per 3. unde reliqua invenientur
per præcedentem.

12.

*Ex uno latere dato, & uno angulo acuto,
ac proinde etiam altero, invenitur alterum latus.*

IN eodem enim triangulo ABC, polo-
ro quoquinque laterè pro radio, alte-
rum latus est tangens anguli sibi opposi-
ti per 4. def. latus ergo quæsitus sit AB
quia est ut Radius, ad tangentem anguli
C, ita CB latus datum, ad AB latus quæ-
suum; erit permittando

*Vt radius -- -- ad CB latus dasum
sit tangens an -- ad AB latus quæs-
tum.*

13.

Ex ijsdem datis invenitur basis, quia
posito CB pro radio, basis AC est sec-
cans anguli C; posito vero AB pro ra-
dio, eadem AC est secans anguli A per
3. definit. erit ergo permittando ut su-
pra

Vt Radians -- -- ad *CB latens de-*
sum
ita secans anguli C. -- -- ad *AC basim*
quasitam.

14.

*E*x dato utroq; latere, inveniuntur an-
guli acuti, & deinde per praecedentem
invenitur basis, Erit enim ut supra per-
mutando

Vt latens AB -- -- ad radium
ita latens BC -- -- ad tangentem an-
guli A

Quæratur ergo tangens sic inventa in-
 ter tangentes, & correspondebit ipsi in
 gradibus quantitas anguli A, cuius com-
 plementum est Angulus C, habitis ergo
 angulis, quæratur basis AC per praece-
 dentem.

15.

*E*x data Base & uno latere inveniun-
 tur anguli, & alterum latens, erit enim
 ut supra permutando

Vt Basis -- -- ad Radium
ita latens da- -- -- ad sinum anguli
sum dato latere
oppositi

Invento itaque dicto sinu, ex tabulis in-
 venietur

venietur angulus ipsi competens, & complementum erit angulus alter: quibus habitis per 12. praxim invenitur alterum latus.

De Triangulis Rectilineis non rectangulis.

16.

Sit triangulum LOP, nullum habens angulum rectum, datum sit unum basis, & duo anguli, & nomen sit cui angulo basius datum opposatur. tertius angulus innoscet per 3. hujus, reliqua duo latera sic habentur, latus datum sit LP quia est per 4. hujus, ut sinus anguli O, ad sinum anguli P; ita latus LP, ad latus LO, permutando fiat.

Ut sinus anguli O — ad latus LP
ita sinus anguli P — ad latus LO qua-
si sum

Eodem modo invenietur latus OP.

17.

Ex duobus lateribus & angulo uni eorum opposito, si constet species anguli, alteri dato lateri oppositi, inveniantur reliqui duo anguli, & tertium latus.

Datum

Datum sit latus L P, & latus L O; & angulus O oppositus sit lateri L P, erit iterum permutando

Vt Latus LP -- *ad sinum anguli O*
sta Latus LO -- *ad sinum anguli P*

Invento igitur sinu anguli P ex tabulis, habebitur ipse angulus P, & reliqua per primum 16.

18.

Ex datis tribus lateribus inveniuntur segmenta à perpendiculari facta.

Trianguli ABC data sint tria latera, inquirendum sit in quod punctum lateris BC, cadat AD perpendicularis ex Angulo A demissa, quæ aliquando cadit intra triangulum, ut in prima figura, aliquando extra ut in 2. fiat.

*ad summam duorum
aliorum laterum*

Ita differuntia corundem duorum latitudinum ad quatuor summae numerum.

Si quartus numerus inventus minor est latere in quod cadit perpendicularis; si-
gnum est perpendicularem cadere intra
ipsum triangulum; auferendus ergo erit
dictus quartus numerus inventus ex dicto
latere;

latere, semissis enim reliqui numeri, dabit segmentum minus : quod ex toto latere subductum, relinquet segmentum majus. Si vero quartus numerus inventus, major est latere in quod cadit perpendicularis, signum est perpendicularem cadere extra triangulum : auferendum ergo erit illud latus, ex quarto numero invento : semissis enim reliqui numeri, dabit segmentum exterius interjectum inter ipsam perpendicularem, & ipsum triangulum.

Pro Demonstratione, Ex A ad intervallum minoris lateris AB, descriptus sit circulus, secans majus latus AC in F, idemque productum in G : & latus BC, si perpendicularis intra triangulum cadit, vel certe si extra cadit, ipsum productum in E, sectaque; erit recta BE, bifurcata in D per 3 terras. quia vero rectangulum sub BC, CE, æquale est rectangulo sub GC, CF, per coroll. i. propositionis 36 terras, erit ut BC latus in quod perpendicularis cadit, ad GC summam aliorum laterum, ita CF differentia eorundem laterum, ad CE : quare quando CE est minor quam BE latus in quod perpendicularis cadit, ut est in prima figura, ablata CE ex BC, residuum est BE, cuius dividium DB, est segmentum minus &c:

ut dictum est in praxi. Quando vero C E, est major quam latus C B, *ut est in 2 figura,* ablatō latere B C, ex C E, residuum est B E, cuius dimidium est D B, segmentum exterius interjectum inter ipsam perpendiculararem, & ipsum triangulum, *quod etiam in praxi dictum fuit* & erat demonstrandum.

19.

Ex datis tribus lateribus inveniuntur tres anguli.

In intelligatur ducta perpendicularis ex angulo, maximo lateri opposito, ut scilicet perpendicularis semper cadat intra triangulum *ut sit in primā figura praxis precedens,* & inveniantur segmenta duo maximū lateris *per eandem praxim precedensem,* hoc est C D, & B D, quare *per praxim 15* invenietur & angulus C trianguli A D C, & angulus B trianguli A D B; addantur ergo simul anguli B & C, & residuum ad duos rectos dabit angulum B A C *per 3.*

20.

Ex tribus datis lateribus inveniuntur perpendicularis.

Per

Per primum enim 18. invenitur CD, & AC est latus datum, unde per primum 11 invenitur AD tertium latus trianguli AD C, quod idem est cum perpendiculari quæ sita.

21.

Ex datis duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso, tertium latus invenientur.

Si data duo latera sint invicem æqualia, res est facilis, subtracto enim angulo dato ex 180, residuum dabit summam reliquorum duorum angulorum per 3 hujus sunt autem dicti duo reliqui anguli invicem æquales per 5 primi, dimidium ergo dictæ summæ dabit unumquemque illorum; quare omnes tres anguli erunt noti quare per primum 16 invenietur latus ignoratum. Quod si iarius angulus fit rectus erit casus positus in præce 14. Si vero latera sint inæqualia & angulus non rectus fiat.

De semissis aggregatis duorum laterum datarum ad tangentem semissis aggregatis duorum angularium ignoratum,

ita differentia in -- ad tangentem differ-
 ter semissem ag- rentia inter se-
 gregati duorum missem aggrega-
 laterum dasorn̄,
 et utrumlibet ri duorum angu-
 laterum

ligerum ignororum,
 et alterutrum il-
 lorum.

Unde arcus qui ex tabulis tangentium, invenietur correspondere huic tangenti; hoc modo inventæ, additus ad semissem aggregati duorum angulorum ignororum. dabit angulum majorem, vel subtractus ex eadem semisse dabit angulum minorem, invento ergo hoc modo alterutro angulorum ignororum, tertius etiam habetur per 3 hujus, quibus habitis latus quod quærebatur invenietur per prax. 16.

*Lemma subseriens demonstrationi his-
 sus praxis.*

Si Diameter AC chordam quamlibet BD secuerit in E quomodo cumq; ejusq; ar-
 cūm BAD , in A , vel BCD , in C , Dico se-
 gmentum chordæ BE esse ad segmentum ED , ut sinus arcus BC (qui idem est cum
 sinu arcus $B A$ per coroll. 1. prima def.) ad
 sinum arcus AD . Ex B enim & D, demit-
 tantur BF , DG perpendiculares ad dia-
 metrum

metrum A C; eritq; B F sinus arcus B C & D G sinus arcus D A per 1. def. & propter similitudinem triangulorum B E F, D E G: erit ut B E ad ED ita B F, ad D G per 4. sexti.

Demonstratio praxis precedens.

In triangulo L O P, data sint latera, L O partium 10, & L P partium 20, & angulus L graduum 50. aggregatum ergo duorum angulorum O, P, simul, erit 130 per 3 hujus. In circulo A B C D cuius centrum sit E, angulus B E D sit 130 graduum, hoc est quantum est aggregatum angulorum P & O simul, ducta chorda B D, dividatur B D in G, ut sit, ut latus L P, ad latus L O, ita B G ad G D, per 10 sexti & ex centro E, educta E G, producta sit in F; Dico angulum B E F æqualem esse angulo O trianguli propositi, & angulum F E D, æqualem esse angulo P ejusdem trianguli. Est enim per lemma precedens ut B G ad G D, ita sinus anguli B E F, ad sinus anguli F E D, sed ut B G ad G D, ita latus L P, ad latus L O per constructionem; ergo ut latus L P ad latus L O ita sinus anguli B E F ad sinus anguli F E D; ergo per 4 hujus sinus angulorum B E F, & F E D sunt etiam sinus an-

gulorum O & P, ac proinde anguli B E F,
& F E D, sunt æquales angulis O & P: quare
inventis angulis B E F, F E D, etiam in-
venti erunt anguli O & P, illos autem sic
inveniemus, Quoniam data est proportio
lateris L P, ad latus L O, ut 20 ad 10, erit
etiam proportio B G ad G D ut 20 ad 10,
posita ergo B G 20, G D erit 10, & tota
B D erit 30, divisa deinde tota B D bis-
tiam in H, productaque E H in A, erit to-
tus arcus B A D, divisus bifariam in A, ~~ut~~
pater ex demonstratione 30 serrū, eritque
utraque B H, H D 15, & differentia inter
semissem totius B D, & utrumlibet seg-
mentum, scilicet linea H G erit 5; quia
autem totus arcus B A D, ponitur 130 erit
utraq; semissis B A, B D, 65, ac proinde
etiam uterq; angulus B E A, A E D erit
quoq; gradum 65 per dicta ad proposicio-
nem 2, & quoniam posito E H pro radio,
H B est tangens anguli B E H, & H G tan-
gens anguli H E G per def. 4. dabitur ex
tabulis tangentium ad gradum 65, ipsa BH
partium 214451 quare ut tangentem an-
guli H E G inveniamus, scilicet HG, in
partibus homologis cum partibus tan-
gentis B A, fiat.

Pr BH 15. *semis* -- ad BH 214451
torium BD, hoc tangentem *se-*
est aggregati *mis* *aggregati*
terminorum *angulorum BEF,*
proportionis da- *FED.*
ta.

Ira HG 5 differen- -- ad HG 71484
sia inter semis- tangentem an-
sem aggregati guli AEF qui
terminorum pro- est differentia
portionis data, & inter angulos
inrum liber co- BEF, FED.
rundem termi-
norum.

Ex tabula ergo, tangentium elicetur
angulus AEF 35 gr. 34 min. ferè, qui ad-
ditus ad 65, semis scilicet aggregati
angulorum BEF, FED dabit angulum
majorem BEF, qui ostensus est æqualis
angulo O. & reliqua ut in praxi dictum est,
& erat demonstrandum.

TABU.

TABULÆ
SINUS U M
TANGENTIUM
E T
SECANTIUM
Ad partes radij 100000.
per Sex prima scrupula
graduum.

0	0	0	100000
6	175	175	100000
12	349	349	100001
18	524	524	100001
24	698	698	100002
30	873	873	100004
36	1047	1047	100005
42	1222	1222	100007
48	1396	1396	100010
54	1571	1571	100012
	*	*	*
I	1745	1745	100015
6	1920	1920	100018
12	2094	2095	100022
18	2269	2269	100026
24	2443	2444	100030
30	2618	2619	100034
36	2792	2793	100039
42	2967	2968	100044
48	3141	3143	100049
54	3316	3317	100055
	*	*	*
2	3490	3492	100061
6	3664	3667	100067
12	3839	3842	100074
18	4013	4016	100081
24	4188	4191	100088
30	4362	4366	100095
36	4536	4541	100103
42	4711	4716	100111
48	4885	4891	100120
54	5059	5066	100128

Sinns Tangens Secans.

90	0	0	0
54	99999	57295720	57295809
48	99999	28647774	28647948
42	99999	19098419	19098681
36	99998	14323712	14324061
30	99996	11458865	11459301
24	99995	9548948	9549471
18	99993	8184704	8185315
12	99990	7161507	7162205
6	99988	6365674	6366460
89	99985	5728996	5729869
54	99982	5208067	5209027
48	99978	4773950	4774997
42	99974	4406611	4407746
36	99970	4091741	4092963
30	99966	3818846	3820155
24	99961	3580055	3581452
18	99956	3369351	3370835
12	99951	3182052	3183623
6	99945	3014462	3016120
88	99939	2863625	2865371
54	99933	2727149	2728981
48	99926	2603074	2604994
42	99919	2489783	2491790
36	99912	2385928	2388022
30	99905	2290377	2292559
24	99897	2202171	2244440
18	99889	2120495	2122852
12	99881	2044649	2047093
6	99872	1974029	1976560

227 Sinus Tangens Secans

3	5234	5241	100137
6	5408	5416	100147
12	5582	5591	100156
18	5756	5766	100166
24	5931	5941	100176
30	6105	6116	100187
36	6279	6291	100198
42	6453	6467	100209
48	6627	6642	100220
52	6802	6817	100232
	*	*	*
4	6976	6993	100244
6	7150	7168	100257
12	7324	7344	100269
18	7498	7519	100282
24	7672	7695	100296
30	7846	7870	100309
36	8020	8046	100323
42	8194	8221	100337
48	8368	8397	100352
54	8542	8573	100367
	*	*	*
5	8716	8749	100382
6	8889	8925	100397
12	9063	9101	100413
18	9237	9277	100429
24	9411	9453	100446
30	9585	9629	100463
36	9758	9805	100480
42	9932	9981	100497
48	10106	10158	100515
54	10279	10334	100533

	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
37	99863	1908114	1910732
54	99854	1846447	1849153
48	99844	1788631	1791424
42	99834	1734315	1737196
36	99824	1683191	1686159
30	99813	1634986	1638041
24	99803	1589454	1592597
18	99792	1546381	1549611
12	99780	1505572	1508890
6	99768	1466853	1470258
86	99756	1430067	1433559
54	99744	1395072	1398650
48	99731	1361741	1365408
42	99719	1329957	1333712
36	99705	1299616	1303458
30	99692	1270620	1274549
24	99678	1242883	1246900
18	99664	1216324	1220427
12	99649	1190868	1195060
6	99635	1166450	1170728
85	99619	1143005	1147371
54	99604	1120473	1124932
48	99588	1098815	1103356
42	99572	11077967	1082596
36	99556	1057890	1062603
30	99540	1038540	1043343
24	99523	1019879	1024770
18	99506	1001871	1006349
12	99488	984482	989547
6	99470	967680	972833

<i>228.</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
6	10453	10510	100551
6	10626	10687	100569
12	10800	10863	100588
18	10973	11040	100608
24	11147	11217	100627
30	11320	11394	100647
36	11494	11570	100667
42	11667	11747	100688
48	11840	11924	100708
54	12014	12101	100730
7	12187	12278	100751
6	12360	12456	100773
12	12533	12633	100795
18	12706	12810	100817
24	12880	12988	100840
30	13053	13165	100863
36	13226	13343	100886
42	13399	13521	100910
48	13572	13698	100934
54	13744	13876	100958
8	13917	14054	100983
6	14090	14232	101008
12	14263	14410	101033
18	14436	14588	101059
24	14608	14767	101084
30	14781	14945	101111
36	14954	15124	101137
42	15126	15302	101164
48	15299	15481	101191
54	15471	15660	101219

	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
84	99452	951436	956677
54	99434	935724	941052
48	99415	920516	925931
42	99396	905789	911292
36	99377	891520	897111
30	99357	877689	883367
24	99337	854275	870041
18	99317	831259	857113
12	99297	838625	844566
6	99276 *	826355 *	832384 *
83	99255	814435	820551
54	99233	802848	809052
48	99211	791582	797873
42	99189	780622	789001
36	99167	769957	776424
30	99144	759576	766130
24	99122	749465	756107
18	99098	739616	746346
12	99075	730018	736835
6	99051 *	720661 *	727566 *
82	99027	711537	718530
54	99002	702637	709717
48	98978	693952	701120
42	98953	685475	692731
36	98927	677199	684542
30	98902	669116	676547
24	98876	661219	668738
18	98849	553503	661110
12	98823	645960	653655
6	98796	638587	646369

<i>229</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
9	15643	15838	101247
6	15816	16017	101275
12	15988	16196	101303
18	16160	16376	101332
24	16333	16555	101361
30	16505	16734	101391
36	16677	16914	101420
42	16849	17093	101450
48	17021	17273	101481
54	17193	17453	101512
10	*	*	*
6	17365	17633	101543
12	17537	17813	101574
18	17708	17993	101606
24	17880	18173	101638
30	18052	18353	101670
36	18224	18534	101703
42	18395	18714	101736
48	18567	18895	101769
54	18738	19076	101803
11	18910	19257	101837
6	*	*	*
12	19081	19438	101871
18	19252	19619	101906
24	19423	19801	101941
30	19595	19982	101977
36	19766	20164	102013
42	19937	20345	102049
48	20108	20527	102085
54	20279	20709	102122
11	20450	20891	102159
17	20620	21073	102196

	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
8 I	98769	631375	639245
54	98741	624321	632279
48	98714	617419	625464
42	98686	610664	618797
36	98657	604051	612273
30	98629	597576	605886
24	98600	591236	599633
18	98570	585024	593509
12	98541	578938	587511
6	98511	572974	581635
8 O	*	*	*
	98481	567129	575877
54	98450	561397	570234
48	98420	555776	564701
42	98388	550264	559277
36	98357	544857	553958
30	98325	539552	548741
24	98294	534345	543622
18	98261	529235	538600
12	98229	524219	533671
6	98196	519293	528834
7 9	*	*	*
	98163	514455	524084
54	98129	509704	519421
48	98096	505037	514842
42	98061	500451	510344
36	98027	495945	505926
30	97992	491516	501585
24	97958	487162	497320
18	97922	482882	493128
12	97887	478673	489007
6	97851	474534	484956

<i>230</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
12	20791	21256	102234
6	20962	21438	102272
12	21132	21621	102311
18	21303	21804	102349
24	21474	21986	102388
30	21644	22169	102428
36	21814	22353	102468
42	21985	22536	102508
48	22154	22719	102548
54	22325	22903	102589
	*	*	*
13	22495	23087	102630
6	22665	23271	102672
12	22835	23455	102714
18	23005	23639	102756
24	23174	23823	102799
30	23345	24008	102842
36	23514	24193	102885
42	23684	24377	102928
48	23853	24562	102972
54	24023	24747	103017
	*	*	*
14	24192	24933	103061
6	24361	25118	103106
12	24531	25304	103152
18	24700	25490	103197
24	24869	25676	103244
30	25038	25862	103290
36	25207	26048	103337
42	25376	26235	103384
48	25545	26421	103432
54	25713	26608	103479

	<i>Sinns</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
78	97815	470463	480973
54	97778	466458	477057
48	97742	462518	473205
42	97705	458641	469417
36	97667	454826	465690
30	97630	451071	462023
24	97592	447374	458414
18	97553	443735	454863
12	97515	440152	451368
6	97476	436623	447928
	*	*	*
77	97437	433148	444541
54	97398	429724	441206
48	97358	426352	437923
42	97318	423030	434689
36	97278	419756	431503
30	97237	416530	428366
24	97196	413350	425275
18	97155	410216	422229
12	97113	407127	419228
6	97072	404081	416271
	*	*	*
76	97030	401078	413357
54	96987	398117	410484
48	96945	395196	407652
42	96902	392316	404860
36	96858	389474	402107
30	96815	386671	399393
24	96771	383906	396716
18	96727	381177	394076
12	96682	378485	391473
6	96638	375828	388904

<i>231</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
15	25882	26795	103528
6	26050	26982	103576
12	26219	27169	103625
18	26387	27357	103674
24	26556	27545	103724
30	26724	27732	103774
36	26892	27920	103825
42	27060	28109	103875
48	27228	28297	103927
54	27396	28486	103978
16	*	*	*
6	27564	28675	104030
12	27731	28863	104082
18	27899	29053	104135
24	28067	29242	104188
30	28234	29432	104241
36	28401	29621	104295
42	28569	29811	104349
48	28736	30001	104403
54	28903	30192	104458
54	29070	30382	104514
17	*	*	*
6	29237	30573	104569
12	29404	30764	104625
18	29571	30955	104682
24	29737	31147	104738
30	29904	31338	104795
36	30071	31530	104853
42	30237	31722	104911
48	30403	31914	104969
54	30570	32106	105028
54	30736	32299	105087

	<i>Sinu</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
75	96593	373205	386370
54	96547	370616	383871
48	96502	368061	381404
42	96456	365538	378970
36	96510	363048	376568
30	96463	360588	374198
24	96316	358160	371858
18	96269	355761	369548
12	96222	353393	367269
6	96174	351053	365018
74	96126	348742	362796
54	96078	346458	360601
48	96029	344202	358435
42	95981	341973	356295
36	95931	339771	354181
30	95882	337594	352094
24	95832	335443	350032
18	95782	333317	347995
12	95732	331216	345983
6	95681	329139	343995
73	95630	327085	342030
54	95579	325055	340089
48	95528	323048	338171
42	95476	321063	336276
36	95424	319100	334402
30	95372	317159	332551
24	95319	315240	330721
18	95266	313341	328912
12	95213	311464	327123
6	95159	309606	325351

<i>232</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
18	30902	32492	105146
6	31068	32685	105206
12	31233	32878	105266
18	31399	33072	105327
24	31565	33266	105388
30	31730	33460	105449
36	31896	33654	105511
42	32061	33848	105573
48	32227	34043	105636
54	32392	34238	105699
	*	*	*
19	32557	34433	105762
6	32722	34628	105826
12	32887	34824	105890
18	33051	35019	105955
24	33216	35216	106019
30	33381	35412	106085
36	33545	35608	106151
42	33710	35805	106217
48	33874	36002	106287
54	34038	36199	106350
	*	*	*
20	34202	36397	106418
6	34366	36595	106486
12	34530	36793	106554
18	34694	36991	106622
24	34857	37190	106691
30	35021	37388	106761
36	35184	37588	106831
42	35347	37786	106901
48	35511	37986	106973
54	35674	38186	107043

	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
72	95106	307768	323608
54	95052	305950	321878
48	94997	304152	320169
42	94943	302372	318479
36	94888	300611	316808
30	94832	298868	315154
24	94777	297144	313519
18	94721	295437	311902
12	94665	293748	310303
6	94609	292076	308721
	*	*	*
71	94552	200421	307155
54	94495	288783	305607
48	94438	287161	304079
42	94380	285555	302559
36	94322	283965	301959
30	94264	282391	299574
24	94206	280833	298106
18	94147	279289	296652
12	94088	277761	295213
6	94029	276247	293790
	*	*	*
70	93969	274748	292380
54	93909	273263	290985
48	93849	271792	289605
42	93789	270335	288238
36	93728	268892	286885
30	93667	267462	285545
24	93606	266046	284219
18	93544	264642	282906
12	93483	263252	281605
6	93420	261874	280318

<i>233</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
21	35837	38386	107114
6	36000	38587	107186
12	36162	38787	107259
18	36325	38988	107332
24	36488	39190	107405
30	36650	39391	107479
36	36812	39593	107553
42	36975	39795	107627
48	37137	39997	107702
54	37299	40200	107778
	*	*	*
22	37461	40403	107853
6	37622	40606	107930
12	37784	40809	108006
18	37946	41013	108084
24	38107	41217	108161
30	38268	41421	108239
36	38430	41626	108318
42	38591	41831	108397
48	38752	42036	108476
54	38912	42242	108556
	*	*	*
23	39073	42447	108636
6	39234	42654	108717
12	39394	42860	108798
18	39555	43067	108880
24	39715	43274	108962
30	39875	43481	109044
36	40035	43689	109127
42	40195	43897	109211
48	40355	44105	109294
54	40514	44314	109379

Sinus *Tangens* *Secans*

69	93358	260509	279043
4	93295	259156	177780
8	93232	257815	276530
42	93169	256487	275292
36	93106	255170	274065
30	93042	253865	272850
24	92978	252571	271647
18	92913	251282	270455
12	92849	250018	269275
6	92784	248758	268105
68	92718	247509	266947
54	92653	246270	265799
48	92587	245043	264662
42	92521	243825	263535
36	92455	242618	262419
30	92388	241421	261313
24	92321	240235	260217
18	92254	239058	259130
12	92186	237891	258054
6	92119	236733	256988
*	*	*	*
67	92050	235585	255931
54	91982	234447	254883
48	91914	233317	253844
42	91845	232197	252815
36	91775	231086	251795
30	91706	229984	250784
24	91636	228891	249782
18	91566	227806	248789
12	91496	226730	247804
6	91425	225663	246827

<i>e 34</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
24	40674	44523	109464
6	40833	44732	109349
12	40992	44942	109635
18	41151	45152	109721
24	41310	45362	109808
30	41469	45573	109895
36	41628	45784	109982
42	41787	45995	110071
48	41945	46207	110159
54	42104	46418	110248
	*	*	*
25	42262	46631	110338
6	42420	46843	110428
12	42578	47056	110518
18	42736	47270	110609
24	42894	47484	110701
30	43051	47698	110793
36	43209	47912	110885
42	43366	48127	110978
48	43523	48342	111072
54	43680	48557	111166
	*	*	*
26	43837	48773	111260
6	43994	48989	111355
12	44151	49206	111451
18	44307	49423	111547
24	44464	49640	111643
30	44620	49858	111740
36	44776	50076	111838
42	44932	50295	111936
48	45088	50514	112034
54	45243	50733	112133

	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Cosec.</i>
66	91355	224604	245852
4	91283	223553	244900
18	91212	222510	243948
42	91140	221475	243005
36	91068	220449	242070
30	90996	219430	241142
24	90924	218419	240222
18	90851	217416	239311
12	90778	216410	238406
6	90704	215432	237509
	*	*	*
65	90631	214451	236621
54	90557	213477	235738
48	90483	212511	234863
42	90408	211552	233996
36	90334	210599	233135
30	90259	209654	232282
24	90183	208716	231436
18	90108	207785	230596
12	90032	206860	229763
6	89956	205942	228937
	*	*	*
64	89879	205030	228115
54	89803	204125	227304
48	89726	203227	226498
42	89649	202335	225697
36	89571	201449	224903
30	89493	200569	224116
24	89415	199695	223334
18	89337	198828	222559
12	89259	197966	221790
6	89180	197111	221926

<i>235</i>	<i>Sinus.</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
27	45399	50953	11223
6	45554	54173	11233
12	45710	51393	11243
18	45865	51614	112534
24	46020	51835	112636
30	46175	52057	112738
36	46330	52279	112841
42	46484	52501	112944
48	46639	52724	113048
54	46793	52947	113152
*	*	*	*
28	46947	53171	113257
6	47101	53395	113362
12	47255	53620	113468
18	47409	53844	113575
24	47562	54070	113682
30	47716	54296	113789
36	47869	54522	113897
42	48022	54748	114006
48	48175	54975	114115
54	48328	55203	114225
*	*	*	*
29	48481	55431	114335
6	48634	55659	114446
12	48786	55888	114558
18	48938	56117	114670
24	49090	56347	114782
30	49242	56577	114896
36	49394	56808	115009
42	49546	57039	115124
48	49697	57271	115238
54	49849	57503	115354

<i>Secans</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
63	89101	196261	220269
54	89021	195417	219517
48	88942	194579	218771
42	88862	193746	218031
36	88782	192920	217297
30	88701	192098	216568
24	88620	191282	215845
18	88539	190472	215127
12	88458	189667	214414
6	88377	188867	213707
	*	*	*
62	88295	188073	213005
54	88213	187283	212309
48	88130	186499	211617
42	88048	185720	210931
36	87965	184946	210250
30	87882	184177	209574
24	87798	183413	208903
18	87715	182654	208236
12	87631	181899	207575
6	87546	181150	206918
	*	*	*
61	87462	180405	206267
54	87377	179665	205619
48	87292	178929	204977
42	87207	178198	204339
36	87121	177471	203706
30	87036	176749	203077
24	86949	176032	202453
18	86863	175319	201833
12	86777	174610	201218
6	86690	173905	200607

<i>236</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
30	50000	57735	115470
6	50151	57968	115587
12	50302	58201	115704
18	50453	58435	115822
24	50603	58670	115940
30	50754	58905	116059
36	50904	59140	116179
42	51055	59376	116299
48	51204	59612	116419
54	51354	59849	116541
	*	*	*
21	51504	60086	116663
6	51653	60324	116786
12	51803	60562	116909
18	51952	60801	117033
24	52101	61040	117158
30	52250	61280	117283
36	52399	61520	117409
42	52547	61761	117535
48	52696	62003	117662
54	52844	62245	117790
	*	*	*
22	52992	62487	117918
6	53140	62730	118047
12	53288	62973	118176
18	53435	63217	118307
24	53583	63462	118437
30	53730	63707	118569
36	53877	63953	118701
42	54024	64199	118834
48	54171	64446	118967
54	54317	64693	119102

	<i>Sinuus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
60	86603	173205	200000
54	86515	172509	199397
48	86427	171817	198799
42	86340	171130	198205
36	86251	170446	197615
30	86163	169766	197029
24	86074	169091	196448
18	85985	168419	195870
12	85896	167752	195296
6	85806	167088	194726
59	85717	166428	194160
54	85627	165772	193598
48	85536	165120	193040
42	85446	164471	192486
36	85355	163826	191935
30	85264	163185	191388
24	85173	162548	190845
18	85081	161914	190305
12	84989	161284	189769
6	84897	160657	189237
58	84805	160033	188708
54	84712	159414	188183
48	84619	158797	187661
42	84526	158184	187142
36	84433	157575	186627
30	84339	156969	186116
24	84245	156366	185608
18	84151	155766	185103
12	84057	155170	184601
6	83962	154576	184103

33	54464	64941	119236
6	54610	65189	119372
12	54756	65438	119508
18	54902	65688	119645
24	55048	65938	119782
30	55194	66189	119920
36	55339	66440	120059
42	55484	66692	120199
48	55630	66944	120339
54	55775	67197	120480
	*	*	*
34	55919	67451	120622
6	56064	67705	120764
12	56208	67960	120907
18	56353	68215	121051
24	56497	68471	121195
30	56641	68728	121341
36	56784	68985	121487
42	56928	69243	121633
48	57071	69502	121781
54	57215	69761	121929
	*	*	*
35	57358	70021	122077
6	57501	70281	122227
12	57643	70542	122377
18	57786	70804	122528
24	57928	71066	122680
30	58070	71329	122833
36	58212	71593	122986
42	58354	71857	123140
48	58496	72122	123295
54	58637	72388	123450

	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
11			
1236	57	83867	183608
1237	54	83772	183116
1238	48	83676	182627
1239	42	83581	182142
1240	36	83485	181659
1241	30	83389	181180
1242	24	83292	180704
1243	18	83195	180231
1244	12	83098	179761
1245	6	83001	179293
1246	*	*	*
1247	56	82904	178829
1248	54	82806	178368
1249	48	82708	177910
1250	42	82610	177454
1251	36	82511	177002
1252	30	82413	176552
1253	24	82314	176105
1254	18	82214	175661
1255	12	82115	175219
1256	6	82015	174781
1257	*	*	*
1258	55	81915	174345
1259	54	81815	173911
1260	48	81714	173481
1261	42	81614	173053
1262	36	81513	172628
1263	30	81412	172205
1264	24	81310	171785
1265	18	81208	171367
1266	12	81106	170952
1267	6	81004	170540

<i>238</i>	<i>Sinus.</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
36	58779	72654	123607
6	58920	72921	123764
12	59061	73189	123922
18	59201	73457	124081
24	59342	73726	124240
30	59482	73996	124400
36	59623	74267	124561
42	59763	74538	124723
48	59902	74810	124886
54	60042	75082	125049
	*	*	*
37	60181	75355	125214
6	60321	75629	125379
12	60460	75904	125545
18	60599	76180	125711
24	60738	76456	125879
30	60876	76733	126047
36	61015	77010	126216
42	61153	77289	126387
48	61291	77568	126557
54	61429	77848	126729
	*	*	*
38	61566	78129	126902
6	61703	78410	127075
12	61841	78692	127250
18	61978	78975	127425
24	62115	79259	127601
30	62251	79544	127778
36	62388	79829	127956
42	62524	80115	128134
48	62660	80402	128314
54	62796	80690	128495

	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
54	80902	137638	170130
54	80799	137134	169723
48	80696	136633	169318
42	80593	136133	168915
36	80489	135637	168515
30	80386	135142	168117
24	80282	134650	167722
18	80178	134160	167329
12	80073	133673	166938
6	79968	133187	166550
	*	*	*
53	79864	132704	166164
54	79758	132224	165780
48	79653	131745	165399
42	79547	131269	165020
36	79441	130795	164643
30	79335	130323	164268
24	79229	129853	163895
18	79122	129385	163525
12	79015	128919	163157
6	78908	128456	162791
	*	*	*
52	78801	127994	162427
54	78693	127535	162065
48	78586	127077	161705
42	78478	126622	161348
36	78369	126169	160992
30	78261	125717	160639
24	78152	125268	160287
18	78043	124820	159938
12	77934	124375	159590-
6	77824	122391	159245

<i>239</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
39	62932	80978	128676
6	63068	81268	128858
12	63203	81558	129042
18	63338	81849	129226
24	63473	82141	129411
30	63608	82434	129597
36	63742	82727	129784
42	63877	83022	129972
48	64011	83317	130160
54	64145	83613	130350
	*	*	*
40	64279	83910	130541
6	64412	84208	130732
12	64546	84507	130925
18	64679	84806	131119
24	64812	85107	131313
30	64945	85408	131509
36	65077	85710	131705
42	65210	86014	131903
48	65342	86318	132101
54	65474	86623	132301
	*	*	*
41	65606	86929	132501
6	65738	87236	132703
12	65869	87543	132905
18	66000	87852	133109
24	66131	88162	133314
30	66262	88473	133519
36	66393	88784	133726
42	66523	89097	133934
48	66653	89410	134142
54	66783	89725	134353

	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
51	77715	123490	158902
54	77605	123050	158560
48	77494	122612	158221
42	77384	122176	157883
36	77273	121742	157547
30	77162	121310	157213
24	77051	120879	156881
18	76940	120451	156551
12	76828	120024	156223
6	76717	119599	155897 -
50	*	*	*
50	76604	119175	155572
54	76492	118754	155250
48	76380	118334	154929
42	76267	117916	154610
36	76154	117500	154292
30	76041	117085	153977
24	75927	116672	153663
18	75813	116261	153351
12	75700	115851	153041
6	75585	115443	152732
49	*	*	*
49	75471	115037	152425
54	75356	114632	152120
48	75241	114229	151817
42	75126	113828	151515
36	75011	113428	151215
30	74896	113029	150916
24	74780	112633	150619
18	74664	112238	150324
12	74548	111844	150030
6	74431	111452	149738

<i>240</i>	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
42	66913	90040	134563
6	67043	90357	134775
12	67172	90674	134988
18	67301	90993	135203
24	67430	91313	135418
30	67559	91633	135634
36	67688	91955	135852
42	67816	92277	136070
48	67944	92601	136290
54	68072	92926	136511
43	* 68200	93252	136733
6	68327	93578	136956
12	68455	93906	137180
18	68582	94235	137406
24	68709	94565	137632
30	68835	94896	137860
36	68962	95229	138089
42	69088	95562	138319
48	69214	95897	138550
54	69340	96232	138783
44	* 69466	96569	139016
6	69591	96907	139251
12	69717	97246	139487
18	69842	97586	139725
24	69966	97927	139963
30	70091	98270	140203
36	70215	98613	140444
42	70339	98958	140687
48	70463	99304	140930
54	70587	99652	141175
45	70711	100000	141421

	<i>Sinus</i>	<i>Tangens</i>	<i>Secans</i>
48	74314	113061	149448
54	74198	110672	149159
48	74081	110285	148871
42	73963	109899	148586
36	73846	109514	148301
30	73728	109131	148019
24	73610	108749	147738
18	73491	108369	147458
12	73373	107990	147180
6	73254	107613	146903
	*	*	*
47	73135	107237	146628
54	73016	106862	146354
48	72897	106489	146082
42	72777	106117	145811
36	72657	105747	145542
30	72537	105378	145274
24	72417	105010	145007
18	72297	104644	144742
12	72176	104279	144479
6	72055	103915	144216
	*	*	*
46	71934	103553	143956
54	71813	103192	143696
48	71691	102832	143438
42	71569	102474	143181
36	71447	102117	142926
30	71325	101761	142672
24	71203	101406	142419
18	71080	101053	142168
12	70957	100701	141918
6	70834	100350	141669
45	70711	100000	141421



