

NOUVEAUX OUVRAGES
DE MONSIEUR
L'ABBE BOSCOVICH
APPARTENANTS PRINCIPALEMENT
A L'OPTIQUE, ET A L'ASTRONOMIE
EN CINQ VOLUMES
DÉDIÉS
A U R O I.
TOME SECOND.



A^r BASSAN MDCCCLXXXV.
~~~~~  
& se vendent  
*A<sup>r</sup> VENISE, CHEZ REMONDINI.*  
*Avec Approbation, & Privilége.*

ROGERII JOSEPHI  
BOSCOVICH  
OPERA PERTINENTIA  
AD OPTICAM, ET ASTRONOMIAM  
*Maxima ex parte nova, & omnia hucusque inedita,*  
IN QUINQUE TOMOS DISTRIBUTA  
**LUDOVICO XVI.**  
GALLIARUM REGI POTENTISSIMO DICATA.  
TOMUS SECUNDUS.



B. 2. I. 12.



*BASSANI MDCCCLXXXV.*

PROSTANT

VENETIIS APUD REMONDINI;

*Superiorum Permissu, ac Privilegio,*



# I N D E X

OPUSCULORUM, CAPITUM, PARAGRAPHORUM, &c.

*Quæ in hoc secundo Tomo continentur.*

---

## OPUSCULUM I.

De correctionibus pertinentibus ad oculares, quibus accedit correctio  
solius erroris figuræ sphæricæ objectivorum. Pag. 1

**PRAEFATIO.**

ibid.

CAP. I. *De correctione colorum provenientium ab ocularibus.* 2

§. I. *De origine, & natura colorum provenientium ab ocularibus.* 5

§. II. *De refractione prismatum exigui anguli, & lentium, ac de ha-  
rum focus.* 22

§. III. *De remedio adhibendo coloribus ocularium per unicam ocularem  
acromaticam.* 36

§. IV. *De remedio adhibendo coloribus ocularium per binas oculares sim-  
plices ex eodem etiam communi genere vitri.* 52

§. V. *De remedio colorum inductorum ab ocularibus per lentes tres,  
quarum una acromatica.* 61

§. VI. *De remedio colorum inductorum ab ocularibus per lentes tres  
simplices.* 73

§. VII. *De combinatione lentium quatuor simplicium.* 95

CAP. II. *De incommodis ortis ab errore figura sphærica tam objectivi,  
quam ocularium, & remediis.* 128

§. I. *De vitiis ortis ex errore figura sphærica.* 132

§. II. *De correctione, vel diminutione erroris figura sphærica lentis u-  
nicæ.* 142

§. III. *De correctione erroris figura sphærica per duas lentes conjunctas  
ex eodem vitri genere pro objectivo.* 167

§. IV. *De eadem correctione pro ocularibus.* 174

## APPENDIX AD OPUSCULUM I.

*Variae considerationes circa ocularium systemata.*

183

## SUPPLEMENTUM OPUSCULI PRIMI.

*De distributione luminis refracti a lentibus per circellum experimentem errorum figurae sphæricæ.*

195

*ADDITAMENTUM De distributione luminis per circellum erroris diversæ refrangibilitatis.*

233

## OPUSCULUM II.

*De lente istoria potissimum ingenti.*

237

## OPUSCULUM III.

*De modo determinandi discrimen velocitatis, quam habet lumen, dum percurrit diversa media, per duo telescopia dioptrica, alterum commune, alterum novi cujusdam generis.*

248

*§. I. Methodus adhibenda pro solutione problematis propositi.*

251

*§. II. Theoria, & construſſio novi telescopii propositi.*

265

*§. III. De fixis ad hanc determinationem idoneis cum solutione objectum propositarum contra hanc methodum.*

286

*§. IV. De effectu aberrationis luminis respectu objectorum terrestrium.*

297

## OPUSCULUM IV.

*De novo genere micrometri objectivi.*

315

*MÉMOIRE sur un nouveau micromètre & mégamètre présenté à M. de Sartine Ministre de la Marine le 7 Mai 1777 par M. l' Abbé Boscovich Directeur d' Optique pour la Marine.*

324

*MÉMOIRE sur le micromètre & mégamètre objectif à prisme de verre simple par M. l' Abbé Boscovich.*

328

OPU-

## OPUSCULUM V.

De Telescopio exhibente simul binas imagines ejusdem objecti, alteram directam, alteram inversam, cum earum motibus contrariis, & æqualibus. 359

MÉMOIRE sur une lunette qui donne deux images du même objet l'une directe, l'autre inverse, avec deux mouvements contraires des objets mobiles. 360

## OPUSCULUM VI.

De globulis nigris translatis per discum solis cum epistola gallica ad ejus phænomeni Observatorem. 379

LETTRE de M. l'Abbé Boscovich à M. Messier sur son observation singulière des petits globules noirs qu'il a vu monter obliquement sur le disque du soleil. 381

## OPUSCULUM VII.

De refractionibus astronomicis. 398

§. I. De refractionum proprietatibus, quæ non dependent ab ulla hypothesis circa legem virium refringentium. 399

§. II. De natura curvæ a radiis descriptæ, & refractionum proprietatibus pendentibus a lege virium, potissimum earum, quæ sint constanter eadem per totam atmospharam. 408

§. III. De deductione, determinatione, & mutua comparatione regularum Simponi, & Bradleyi. 413

§. IV. De refractionibus cœlestibus pro locis elevationibus, & de terrestribus objectorum, quæ sunt intra atmospharam. 425

SCHOLIUM. 436

## O P U S C U L U M VIII.

De refractionibus astronomicis , & altitudine poli , determinandis per  
distantias apparentes binarum fixarum supra , &c infra polum . 444

|                                                                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §. I. <i>Deduction formularum .</i>                                                                                                                                            | 445 |
| §. II. <i>Applicatio calculi arithmeticci ad formulas , in quibus habetur ra-</i><br><i>tio triple refractionis subtracta a distantiis apparentibus a ze-</i><br><i>nith .</i> | 450 |
| §. III. <i>Applicatio calculi numerici ad formulas simpliciores , in quibus</i><br><i>ea subtractione negligitur .</i>                                                         | 456 |
| §. IV. <i>De refractionum tabula confienda , &amp; ejus comparatione cum</i><br><i>observationibus .</i>                                                                       | 461 |

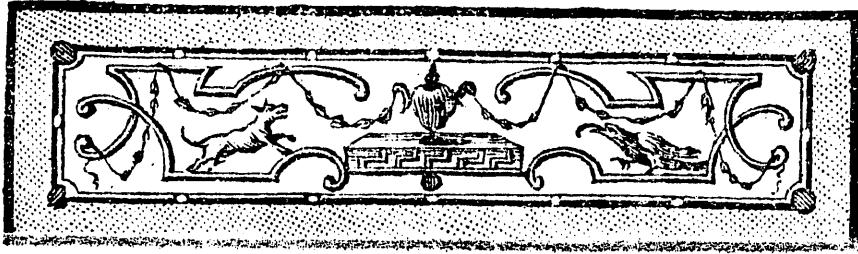
## O P U S C U L U M IX.

Methodus determinandi refractiones astronomicas sine ulla supposi-  
tione physica , quæ non videatur omnino certa , ope instrumenti  
habentis utilitatem generalem in tota Astronomia . 465

## E X T R A I T

De ce second Volume . 473

|                                                                                                                                            |       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| §. I. <i>Notice générale de son sujet .</i>                                                                                                | ibid. |
| §. II. <i>Premier chapitre du premier Opuscule .</i>                                                                                       | 480   |
| §. III. <i>Second chapitre sur l' erreur de sphéricité .</i>                                                                               | 493   |
| §. IV. <i>Du supplément de cet Opuscule .</i>                                                                                              | 502   |
| §. V. <i>Du second Opuscule , qui a pour objet les effets des lentilles</i><br><i>brillantes .</i>                                         | 508   |
| §. VI. <i>De l'Opuscule III , qui a pour objet les avantages d' une espèce</i><br><i>nouvelle de lunette remplie d'eau dans son tube .</i> | 509   |
| §. VII. <i>De l' Opuscule IV. Sur une nouvelle espèce de micromètre ob-</i><br><i>jectif .</i>                                             | 520   |
| §. VIII. <i>Des Opuscules V , &amp; VI.</i>                                                                                                | 532   |
| §. IX. <i>De trois derniers Opuscules .</i>                                                                                                | 536   |



## OPUSCULUM I.

DE CORRECTIONIBUS PERTINENTIBUS AD OCULARES , QUIBUS  
ACCEDIT CORRECTIO SOLIUS ERRORIS FIGURE  
SPHÆRICÆ OBJECTIVORUM .

---

P R A E F A T I O.



GITUR in hoc Opusculo potissimum de ocularibus , tam quod pertinet ad supprimendos colores ab iis inductos , quam quod pertinet ad vitia provenientia ab errore figuræ sphæricæ ipsarum ocularium , & eorum remedio . Occasione arrepta accedit correctio erroris figuræ sphæricæ pro objectivis independens ab errore diversæ refrangibilitatis , qui ab ea correctione , quam h̄c proponemus , non tollitur . Quæcumque autem h̄c proponentur , eo utiliora erunt , quod fere omnia non indigent , nisi vitro communi . Habebuntur plures regulæ admodum simplices , quæ proderunt communibus etiam telescopiorum constructoribus . Sunt , qui amant formulas admodum generales ; sed ad eas non pervenitur , nec eæ ad casus particulares applicantur , nisi per calculos admodum complicatos : plurima theoremeta particularia , & elegantia , & simplicia , licet iis contineantur , effugiunt mentis oculos , ob ipsam multiplicatatem consecutariorum , quæ ab ejusmodi generalissimis solutionibus profluunt , ubi inter quamplurima inutilia conduntur quodammodo velut demersa . Posteaquam ea methodis particularibus sunt inventa , haud difficulter evolvuntur etiam ex illis generalibus , ubi illud accidit , quod in massa litterarum apud typographos . Habentur ibi omnia opera tam quæ huc usque sunt edita , quam quæcumque edi pos-

Tom. II.

A

sunt .

## OPUSCULI I.

sunt. Poema Virgilii inde facile eruitur, posteaquam ab ipso olim conscriptum habetur præ manibus a typographo, qui ipsum nunquam inde eruisset, nisi videret jam erutum. Idcirco generalissimis ejusmodi methodis sepositis, ego h̄ic particularia quædam sum persecutus, quæ & magis accommodata sunt ad captum communem, & statim exhibent solutiones, & regulas admodum elegantes, & simplices.

## CAPUT I.

*De correctione colorum provenientium ab ocularibus.*

1. OBJECTIVUM compositum more Dollondiano e binis vitris, quæ pari refractione possint inducere distractionem radiorum heterogeneorum satis diversam, potest, si minus accurate, saltem proxime conjungere focos pertinentes ad bina genera radiorum: satis est ad eam rem inducere partibus, e quibus componitur, curvaturas respondentes eorum qualitatibus refractivis, & distractivis, juxta ea, quæ diximus in Opusculo II Tom. I. Ejusmodi objectiva idcirco appellata sunt acromatica, & telescopia dioptrica ipsis instructa itidem acromatica græco vocabulo exprimente colorum expertia. Ea objectiva essent accurate acromatica; si conjungerent simul focos omnes pertinentes ad omnia genera radiorum coloratorum: telescopia essent acromatica accurate; si post ejusmodi unionem factam ab objectivo non haberetur nova separatio inducta ab ocularibus.

2. Quod pertinet ad unionem simultaneam colorum omnium, ego quidem, institutis quam plurimis experimentis, uti exposui in Opusculo I Tom. I, circa plurima vitrorum genera, crystallo montanam, & aquam, comparando inter se multa earum substantiarum binaria inveni, per binas substantias non posse conjungi, nisi bina genera radiorum coloratorum, quod quidem accidit, quia qualitates distractivæ pertinentes ad diversa binaria colorum non habent rationem eandem inter se in diversis substantiis. Si ea ratio esset eadem; conjunctis binis coloribus per prismati

mata exiguorum angulorum , vel per lentes continentes exiguas partes totarum superficierum sphæricarum , conjungerentur simul & reliqui : cum vero ea ratio non sit eadem ; mutato angulo prismatis alterius , unio colorum habetur non simultanea , sed successiva ita , ut conjunctis binis , nullus alius conjugatur cum ipsis , ac idcirco objectiva composita e binis substantiis non possunt conjugere focos nisi binorum colorum tantummodo . Ad conjungendos tres requiruntur tres substantiæ : ad plures , totidem quot foci conjungendi sunt : exhibui in secunda e veteribus meis dissertationibus formulas pro conditionibus necessariis ad conjungendos ternos per tres substantias , quas ad multo meliorem formam redegi in supplemento II Opusculi II Tomi præcedentis .

3. Id quidem obstat accurato acromatismo objectivorum : verum conjunctis binis focus , distantia reliquorum ab ipsis ita est exigua , ut effectus inde orti vix sub sensum cadant , aut ne vix quidem transpicienti ; quam ob causam e præclaro Dollondi invento admodum ingens perfectio accessit dioptricis telescopiis . Idcirco minus improprio vocabulo appellari possunt acromaticæ ejusmodi objectiva , cum per ea conjungantur colores omnes , si minus accurate , saltem satis proxime . Sed telescopia iis instruenda non possunt eam appellationem promereri , nisi impediatur nova illa separatio inducta ab ocularibus : ea , si nullum adhibetur remedium , est sane ingens , ubi campus telescopii est satis magnus , & augmentum imaginis itidem satis magnum . Ubi lentes oculares sint rite dispositæ ita , ut omnium sphæricitatum centra jaceant in unica recta , quæ dicitur axis telescopii , & transit per centrum campi , in ipso campi centro ii colores sunt nulli : recedendo ab eo versus margines eorum separatio statim incipit , initio quidem exigua , tum eo major , quo magis receditur , & pari aumento imaginis crescit in ratione distantiarum ipsius , pari distantia in ratione augmenti .

4. Inde fit , ut ubi unica lens simplex ocularis adhibetur , uti mos erat in veteribus telescopiis astronomicis , cum aumento , & campo satis magno , ac in ipsis primis Galileanis , quorum formam adhuc habent brevia telescopiola , quæ haberí solent ad manus ,

## OPUSCULI I.

nus, colores semper appareant satis magni prope margines campi; objectum exiguum lucidum, ut Venus, vel Jupiter, habet colorem rubeum versus centrum campi, violaceum versus marginem; objecta autem habentia partes contiguas illustratas satis inæquali vi lumen apparent in ipsis earum partium limitibus infecta coloribus pro diversa earum partium positione diversis. Idem colores apparent etiam, ubi unica lens ocularis simplex conjungitur cum objectivo acromatico: ubi autem plures adhibentur oculares, apparent semper colores ipsi, nisi ocularium combinatio talis adhibita fuerit, ut eosdem destruat: eam ob causam in ipsis telescopiis Dollondianis plerumque apparent colores, qui saeppe observantur in iis admodum ingentes; quin immo in ipsis telescopiis catadioptricis, in quibus specula nullam inducunt separationem colorum, observantur saeppe colores, qui induci ibi non possunt, nisi ab ocularibus: ii autem multo magis evadunt sensibiles in omni telescopiorum generc, ubi per ipsa traducitur imago solis, & excipitur charta albâ. Solis margo in campi centro apparet satis nitidus, & a colore sensibili prorsus immunis, vel fere prorsus, etiam ubi objectivum sit commune simplex: idem versus campi margines evadit infectus coloribus satis amplis.

5. Agam in hoc capite de remedio adhibendo ejusmodi coloribus, & primo loco proponam ipsam eorum genesim, & naturam, unde patebit ingens discrimen inter colores inductos ab objectivo, & eos, quos oculares inducunt: plerumque colores, qui in telescopiis observantur, sunt hujuscce secundi generis ita, ut telescopia perfici possint sensibilium colorum expertia, adhibito etiam objectivo simplici, per solam lentium ocularium combinationem, in quibus etiam imago solis transmissa habeat colores residuos perquam exiguos. Deinde proponam remedia ipsa; sed haec remedia non pertinebunt, nisi ad unionem duorum colorum, nec generaliter extendentur ad omnia systemata, quæ haberi possint, sed applicabuntur tantummodo ad casus quosdam particulares admodum opportunos.

6. Ob ea, quæ de generalibus methodis indicavi in ipsa hujus Opusculi præfatione, arbitror accidisse, ut post remedia objectivas

vis adhibita, vix quidquam pro ocularibus sit præstitum, quod communi usui sit accommodatum. Sub ipsum primum præclarissimum sane Dollondi patris inventum plurima ego quidem vidi telescopia acromatico ipsius objectivo instructa, & adhuc maxime infecta hoc genere colorum provenientium ab ocularibus. Quæ nunc ex Anglia adferuntur, eo vitio plerumque carent, quod provenit ab opportuna ipsarum ocularium dispositione. Verum ea habent systemata admodum diversa a pluribus telescopiorum formis, quas Eulerus e generalibus suis formulis deduxit, & quæ, ut a pluribus telescopiorum constructoribus accepi, successu caruerunt. Nescio, an ea systemata sint casu inventa per longam attentionem, an deducta ex aliqua idonea theoria, quæ alicubi prodierit typis mandata. Promam hinc ego particularium mearum perquisitionum fructum multiplicem: ab iis deductus sum ad solutiones nonnullas admodum simplices, & elegantes, quæ requirunt tam ad investigationem, & accuratam demonstrationem prima tantummodo, & vulgaria elementa, ac veritates jam vulgo cognitas, quam ad operis executionem regulas admodum expeditas, & vitrorum artifici commodas. Accedit, quod fere omnes admittunt etiam unicum genus vitri communis. Iis propositis, arbitror, me utilem præstiturum operam acromaticis telescopiis: sed aggrediamur rem ipsam.

## §. I.

*De origine, & natura colorum provenientium ab ocularibus.*

7. **E**s ter (fig. 1) AA objectivum simplex, cuius centrum C, BB lens ocularis convexa, & simplex posita ultra focum ipsius objectivi, cuius ocularis centrum G. Considerabimus prius viam radiorum transeuntium trans idem objectivum, tum eorum transitum per ocularem.

8. Ad totum objectivum deveniunt radii digressi a singulis punctis objecti, quorum singuli componuntur e filis innumeris omnium colorum primigeniorum habentium diversos refrangibilitatis

tis gradus. Omnia minime refrangibilis est rubeus primus, omnium maxime postremus violaceus. Radii devenientes a puncto quovis objecti satis remoti ad diversa puncta objectivi ipsius habentur pro parallelis inter se. DC est radius delatus a puncto objecti sito in axe telescopii, quod punctum apparent in centro campi, & bini d'A ipsi ad sensum parallelis deveniunt ad marginem objectivi ipsius. Radius D'C, ac bini d'A sunt ii, qui proveniunt a puncto quopiam posito extra ipsum axem, quod spectatum ex C habet distantiam visualem a priore determinatam ab angulo DCD': & si id punctum appareat in margine campi telescopii; is angulus metitur semidiametrum ipsius campi.

9. Radius DC pergit per axem DGL prorsus irrefractus cum omnibus suis filiis coniunctis: quivis alias habet binas refractiones, alteram in ingressu, alteram in egressu objectivi: sed inter eos omnes, qui adveniunt directione obliqua d'A, habetur unus, qui habet binas refractiones contrarias aequales ita, ut post egressum perget cum eadem directione, cum qua advenerat. Is potest considerari pro irrefracto, & ipsum refert recta D'C continuata in directum usque ad ocularem in G', qui itidem secum dicit sibi coniuncta sua fila colorata omnia. Reliqui radii dividuntur in sua fila colorata convergentia ad diversa puncta rectarum CG, CG'. Fila ipsa homogenea delata ab eodem puncto objecti non uniuntur omnia in eodem puncto, sed in quodam spatiolo ob errorem figuræ sphæricæ; verum eo errore hic omisso, considerabimus unionem filorum homogeneorum pertinentium ad ideum punctum objecti, ut factam in unico puncto, quod idcirco dicitur eorum filorum focus. Fila prima rubea pertinentia ad radios d'A, convenient cum axe CG in puncto quodam F, violacea postrema magis refracta in alio propiore f, ut prima rubea pertinentia ad radios d'A convenient cum recta CG' in puncto quodam F', violacea postrema in alio propiore f'. Hæc posteriora occurunt prioribus in punctis ee, e'e' positis inter focos F, f, F', f'. Inter eos extremos focos habetur series quædam continua focorum pertinentium ad fila colorum intermediorum; omnia autem fila pertinentia ad omnes radios ejusdem puncti objecti

jecti contrahuntur in circellis exiguis habentibus pro diametris re-  
ctas  $ee$ ,  $e'e'$ , quæ sunt spatiola minima omnium ab iis omnibus  
occupatorum. Ibi efformatur imago objecti, quæ esset distinctissima,  
& omni colore expers, si pro iis circellis haberentur to-  
tidem puncta. Sed illa distractio obest non nihil distinctioni,  
& si imago excipiatur chartâ albâ, sit autem satis magna ob satis  
magnam distantiam ab oculari; partes ejus lucidiores apparent  
etiam coloratae in suis marginibus. Si D sit punctum satis luci-  
dum in medio magis obscuro, & imago excipiatur ante situm  $ee$ ;  
margo ejus imaginis apparebit rubeus ob fila  $AeF$  extantia ad la-  
tus. Si excipiatur post eum locum; margo apparebit violaceus,  
ob procursum radiorum  $Afe$  magis dilatatorum. Sed si excipia-  
tur in ipso situ  $ee$ ; margo apparebit ibi tintus colore quadam  
composito e rubeo, & violaceo, quem Newtonus appellat pur-  
pureum, & est veluti vinaceus diversus prorsus ab omnibus sim-  
plicibus primigeniis. Verum in minoribus distantiis focalibus is  
color evadit ita tenuis, ut sensum omnem effugiat.

10. Distantia illa, ad quam convergunt in lente convexa ra-  
di cujuspiam generis, qui ad eam adveniunt paralleli, dicitur  
ejus distantia focalis pro illo radiorum genere, & distantia foca-  
lis pertinens ad radios mediæ refrangibilitatis dicitur absolute ejus  
distantia focalis, quæ est aliquanto minor, quam distantia foca-  
lis radiorum rubeorum, major, quam violaceorum. Si radii  $dA$   
adveniant accurate paralleli radio DC; CF est distantia focalis  
lentis AA pro radiis rubeis, Cf pro violaceis, & cum dicitur  
absolute distantia focalis, intelligitur distantia puncti C a lineola  $ee$ ,  
quæ distantia est media inter præcedentes. Sic focus ejus lentis  
absolute dicitur punctum medium inter  $e$ ,  $e'$ , focus radiorum ru-  
beorum F, violaceorum f. In quavis autem lente possunt consi-  
derari bini ejusmodi foci positi hinc, & inde ab ipsa, prout radii  
adveniant ad hanc, vel ad illam ejus faciem; & quando consi-  
derantur radii advenientes ex altera ejus parte, illum, in quo ipsi  
coeunt, ego quidem appello ulteriorem idcirco, quod is jacet ul-  
tra ipsam, alterum vero oppositum dico citeriorem. Si radii ad-  
veniunt convergentes, convergunt ad punctum propius foco pa-  
ral-

rallelorum : si adveniunt divergentes a puncto remotiore , quam sit focus lentis citerior , convergunt ad punctum remotius foco ulteriore : si adveniant divergentes a foco citeriore , prodeunt paralleli ; si divergentes a puncto propiore , prodeunt divergentes , & eo magis , quo punctum illud est proprius lenti . Hæc omnia sunt vulgo nota ex theoria lentium , quæ hæc commemoranda censui , cum eorum usus debeat occurrere in iis , quæ pertractabimus : adhuc tamen demonstrabuntur in §. 2.

11. Fila rubea AF , AF' devenient ad ocularem in H , H' , violacea Af , Af' in h , h' , ubi illa occupabunt circulum HH , H'H' , hæc aliquanto ampliorem hh , h'h' . Si FG sit distantia focalis filorum rubeorum , quæ ad lentem BB adveniant inter se parallela ex parte opposita ; prodibunt ipsa FH per rectas HM parallelas GL . Fila autem fh divergentia a puncto f remotiore , quam sit focus ejus lentis pertinens ad radios violaceos , qui est ipsi propior adhuc quam F , prodibunt per rectas hm convergentes versus axem . Quod si lens BB removeatur adhuc magis a foco F , convergent nonnihil etiam fila HM , sed hm magis , quam ipsa : si autem ipsa lens admoveatur magis ; fila HM divergent ; sed initio fila hm adhuc convergent , donec distantia fG evadat æqualis distantiae focali filorum violaceorum , quo casu prodibunt parallela : lente autem promota adhuc versus C prodeunt divergentia etiam ipsa .

12. Hinc facile deprehendi potest , quid accidat imagini puncti admodum lucidi siti in axe in ingenti distantia ab objectivo transmissæ per telescopium dioptricum simplex constans objectivo simplici , & unica oculari convexa excepta charta alba ultra ipsam lentem ocularem . Si lens BB sit vicinior objectivo AA , quam par est ; punctum illud lucidum apparebit amplum , in medio quidem , album ob unionem colorum omnium , tum versus margines tintatum coloribus postremis violaceo , indico , cæruleo : excipientur nimirum in fine sola fila violacea hm , tum paulo interius violacea mixta cum indico , tum cum indico , & cæruleo , & ita porro ; donec deveniatur ad spatium MM continens omnes colores , quorum mixtio exhibebit albedinem , sed rubore tintam , ob rubeorum minus dis-

distractorum majorem vim . Removendo ocularem ab objectivo , convergent etiam fila rubea , adeoque si imago ejus puncti lucidi excipiatur in distantia eadem non nimis exigua ab oculari , minueretur non obstante dilatatione spatii  $hh$  , & evadet eo minor , quo charta ipsam excipiens magis removebitur : apparebunt autem colores iidem , donec ipsa charta abeat ultra concursum ipsorum filorum rubeorum ad eam distantiam , in qua ipsa jam divergentia incurront in fila violacea adhuc convergentia . Ibi in ipso margine ejus imaginis habebitur mixtio ipsorum rubeorum cum violaceis , quæ mixtio ibi exhibebit purpureum colorem vinaceum . Ulteriori remotione jam rubea fila excurrent ultra violacea , crescente rursus imagine , & margo incipiet habere colorem rubeum , cui paulo post accedent ex interiori parte aureus , & flavus compositi e pluribus congruentibus .

13. Ubi imago evadet minima , adeoque maxime distincta , apparebit margo coloratus , sed , ut diximus , colore illo vinaceo composito ex extremis , & admodum diverso ab omnibus simplibus primigeniis . Quod si loco unici puncti habeatur limbus solis in centro campi , vel prope ipsum , imago in distantiis majoribus a limbo erit alba ob unionem filorum omnium ; sed in limbo ipso habebitur illa eadem successio colorum , quæ in casu distinctionis maximæ continebit colorem mixtum ex extremis . Ad obtinendam eam distinctionem maximam requiritur , ut innui , protractio lentis ocularis ad distantiam ab objectivo majorem , quam sit summa distantiarum focalium , ut nimirum habeatur convergentia filorum omnium prodeuntium ex oculari , & quo minor erit distantia chartæ excipientis imaginem ab oculari , eo major requiretur protractio ocularis ad obtinendam convergentiam majorem , & concursum propriem .

14. Considerandus jam est progressus filorum pertinentium ad radium D'C , & radios d'A ipsi parallellos . Advenient per CG' ad ocularem conjuncta fila omnia , uti diximus , sed ibi a refractione lentis BB separabuntur . Convergent omnia ad axem , sed rubeum primum minus refractum ad punctum axis I remotius a G via G'L , violaceum postremum refractum magis ad punctum :

## OPUSCULI I.

propius via  $G\gamma$ , reliqua intermedia ad puncta intermedia directionibus intermediis: tum si F fuerit focus lentis BB pro radiis rubeis venientibus ex parte opposita in directione axis; erit proxime & F' focus similis pro radiis rubeis, qui concipientur advenientes directione  $F'G'$ : hinc ambo fila rubea  $F'H'$  prodibunt cum directionibus  $H'M'$  parallelis rectæ  $G'L'$ , violacea vero per rectas  $h'm'$  convergentes: remotâ magis oculari, convergent & rubea, & violacea, sed rubea minus: admotâ magis ipsâ oculari, divergent jam rubea, convergentibus adhuc violaceis, donec ulteriori accessu violacea evadant parallela, tum incipient divergere etiam ipsa. Imago puncti lucidi positi in campo obscuriore extra axem excepta in distantia ab oculari satis magna apparebit amplior & oblonga, ac in margine interiore rubea filis  $G'L'$ ,  $H'M'$ , in exteriore violacea filis  $G\gamma$ ,  $h'm'$  sine mixtione extremerum generante vinaceum, nisi ob nimis magnam divergentiam filorum  $H'M'$ , &  $h'm'$  illorum externa commisceantur cum horum internis. Distantia mutata lentis ocularis a vitro objectivo pariet plures eorum colorum variationes; sed ubi distinctio evadet maxima, habebitur semper color rubeus versus centrum campi, violaceus versus marginem in imagine objecti admodum lucidi per quam exigui.

15. Quod si objectum lucidum sit ingens, ut sol; limbo ipsius posito extra centrum campi, duo casus considerari debent, in quorum primo sol ipse jaceat a limbo versus ipsum centrum, in secundo versus marginem. Solis imago interior alba apparebit in margine tincta coloribus, qui in primo casu erunt violaceus, indicus, cœruleus a filis  $h'm'$ , & proximis excurrentibus versus partem campi obscuram, dum fila rubea  $H'M'$  commiscentur cum filis colorum omnium pertinentium ad partes disci solaris interiores. In secundo autem margo apparebit rubeus, aureus, flavus, violaceis  $h'm'$  commixtis cum omnibus reliquis pertinentibus ad partes disci positas ultra limbum respectu centri.

16. Summa capita phænomenorum h̄ic persecuti sumus, quæ omnia, ac alia plura, facile perspiciet, qui accurate perpenderit hoc ipsum schema, & naturam fotorum, ac diligenter distinxerit

rit radios provenientes ab eodem puncto quovis objecti, & incidentes in omnia puncta objectivi, a radiis pertinentibus ad diversa puncta objecti, & transeuntibus per centrum objectivi ad sensum irrefractis, uti sunt DCG, D'CG'. Hi posteriores singuli ducunt agmen quodammodo sociorum quisque suorum pertinentium ad idem punctum objecti, & pervenient cum suis filiis omnibus conjunctis integri usque ad ocularem, dum cæteri singulorum socii statim dissolvuntur separatis filiis colorum diversorum. Notandum tantummodo, errorem figuræ sphæricæ, quæ non sinit omnia fila ejusdem speciei conjungi in eodem unico puncto, debere inducere mixtionem, & confusionem aliquanto majorem.

17. Facile patet, haberi discriminem ingens inter colores inductos a distantia focorum F, f objectivi, & inductos a separatione radii CG' in fila G'L', G'l facta per ocularem. Priores illi habentur etiam in centro campi, in quo hi posteriores evadunt nulli, nisi forte lens ocularis sit male constructa, aut male disposita, ut centrum ipsius non respondeat centro campi. Illi priores ibi, ubi imago transmissa evadit maxime distincta, exhibent in margine ipsius colorem vinaceum compositum: hi posteriores hinc rubeum purum cum adjacentibus aureo, & flavo compositis, inde violaceum purum cum adjacentibus indico, & cæruleo compositis, vel pro diversa positione objecti lucidi amplioris alterum ex hisce binis colorum generibus. Addendum & illud, hosce posteriores esse multo ampliores illis in distantia satis magna puncti G' a centro campi G, quia multo longius discedit filum G'l a filo G'L', quam fila hm ab HM in situ maximæ distinctionis: is discessus est eo major, quo lens BB magis convexa ad augendam magis imaginem objecti magis intorquet filum G'L' distractione respondentे refractioni in eodem vitri genere. Eam ob causam margo imaginis solaris transmissæ per ejusmodi telescopium appetat in centro campi satis distinctus, & minus infectus colore, & prope marginem semper evadit maxime confusus, & imbutus colore admodum largo.

18. Excipientur jam oculo hi omnes radii collocatâ pupillâ versus Ii. Ad hoc, ut imago objecti appareat admodum distincta,

& sine coloribus, deberent omnia fila colorata pertinentia ad omnes radios digressos a quovis unico objecti puncto coire in fundo oculi in unicum punctum. Opus esset nimis longum, & molestum persequi viam filorum omnium intra oculum. Habentur in eo saltem quatuor superficies refringentes, per quas traducta fila fere omnia habent novas quatuor refractiones: prima fit in ingressu in corneam, secunda in ejus egressu, tertia in ingressu in humorem crystallinum lentiformem, quarta in egressu: verum habentur etiam multæ aliæ refractiones intra ipsum crystallinum, qui non habet densitatem uniformem: consideratio omnium ejusmodi refractionum est admodum implexa, immo & incerta, ob minus cognitam & figuram, & vim earumdem superficierum refringentium. Verum iis omissis considerabimus transitum per omnes ejusmodi superficies, tanquam si fieret trans novam lentem quandam.

19. Si distantia focalis ejus lentis terminaretur exakte in fundo oculi; ad habendam ejusmodi unionem deberent radii pertinentes ad idem punctum objecti, advenire ad oculum inter se parallelis. Verum plerumque ipsi oculi ita sunt conformati, ut requirant divergentiam aliquam saltem exiguum. Qui habent in cornea, vel humore crystallino nimiam curvaturam, requirunt sæpe divergentiam majorem, & appellantur myopes: qui habent curvaturam nimis exiguum, requirunt convergentiam, & appellantur presbytæ, & iis malis adhibetur remedium notissimum perspicillorum, quæ continent pro prioribus vitra concava, pro posterioribus convexa.

20. Quoniam in telescopio, quod consideravimus, fila pertinentia ad axem habent in egressu directionem alia aliam; satis patet, non posse haberi distinctionem exactam ne in ipso quidem punto objecti sito in centro campi. Possunt ad summum ita coire fila rubea sola, vel sola violacea. Myopes admovent nonnihil ocularem objectivo ad obtainendam divergentiam, presbytæ removent ad obtainendam convergentiam, quæ respondeat illi determinatæ constitutioni oculi intuentis. Remota, vel admota oculari, unusquisque invenit locum distinctionis maximæ. Ea intra

oculum etiam obtinetur ibi , ubi circellus , in quem coeunt omnia fila rubea , fere congruit cum circello , in quem coeunt violacea , quo casu punctum admodum lucidum situm in axe adhuc debet habere magnitudinem quandam apparentem , in cuius margine apparet color ille vinaceus compositus : protrahendo , & intrudendo ocularem , margo idem apparebit jam rubeus , jam violaceus , prout circellus filorum rubeorum evaserit in fundo oculi major , vel minor circello violaceorum , & eadem phænomena debet exhibere limbus solis adductus ad centrum campi .

21. Hi colores erunt maxime sensibiles , ubi recessus a situ distinctionis fuerit ingens cum ingenti confusione ; verum prope eum situm in telescopio satis bono fere semper effugient sensum , atque id , ut arbitror , ob plures rationes : primo quidem , quia tot refractiones intra oculum conjunctæ cum figura superficierum refringentium ipsius oculi , quæ nunquam est accurate , qualis debet esse , inducunt novas radiorum commixtiones : vitium figuræ observamus in natura ubique , in foliis omnibus , in pomis , in omni productionum genere observamus semper constructionis via , nec unquam ita exigua , ut non sponte incurvant in oculos : secunda ejus phænomeni ratio esse potest brevitas viæ radiorum intra oculum ; qua fit , ut imagines objectorum sint ibi exiguae , adeoque multo magis exiguae minores aberrationes radiorum : tertia , quia sensatio pendet a tremore impresso particulis sive solidis , sive fluidis fundi oculi propagato ad cerebrum ; tremor autem ipse non fit in unico puncto ; quam ob causam effectus impulsionis factæ a filis coloratis devenientibus ad puncta diversa , sed proxima , possunt confundi invicem . Ob eas causas , & alias , de quibus agemus inferius in §. 3 , oculus limbum solis transpiciens per telescopia dioptrica mediocria nullos animadvertisit colores sensibiles prope centrum campi . Sic etiam transpiciendo trans prismata Dollondiana composita ex vitro communi , & flint ad corrigendam distractionem colorum retentâ refractione satis magna , nullus deprehenditur color residuus ; dum radius solis traductus per ipsa , & exceptus pariete , vel chartâ albâ in distan-  
tia non exigua exhibet admodum sensibilem fimbriam coloratam

hinc

hinc vinaceam ex violaceo, & rubeo colore coniunctis, inde viridem ex medio in ipsa eorum coniunctione extante ad latus.

22. Non idem accedit puncto lucido posito in satis magna distantia a centro campi, quando ipse campus, & augmentum sunt satis magna. Separatio filorum  $h'm'$ ,  $G'l$  a filis  $H'M'$ ,  $G'L'$  statim incurrit in oculos. Si fila  $L'G'$ ,  $l'G$  concipientur producta in  $N,n$ , & pertineant ad punctum satis lucidum; id apparent in  $Nz$  oblongum, & rubeum ex parte interiore  $N$ , violaceum ex exteriori  $n$ ; tanquam si diversa puncta lucida alterum rubeum, alterum violaceum misissent suos radios ad oculum directionibus  $NG'I$ ,  $nG'i$ , advenientibus filis colorum intermediorum cum directionibus intermediis. Inde Jupiter in communibus telescopiis dioptricis collocatus in satis magna distantia a centro campi apparet rubeus in margine interiore, violaceus in exteriori, quamquam in medio apparet albus ob mixtionem omnium filorum pertinentium ad diversa puncta disci habentis amplitudinem satis magnam ad gignendam ejusmodi mixtionem. Limbus autem solis apparet ibidem tinctus colore violaceo, vel rubeo, prout discus respectu limbi jaceat versus centrum, vel versus marginem. Distractio illa facta per angulum  $NG'n$ , de cuius magnitudine agemus infra; est multo major, quam distractio inducta in  $mMLMm$  a distantia focorum  $F$ ,  $f$ .

23. Hinc colores, qui apparent in communibus telescopiis dioptricis, fere semper apparent extra centrum campi, quo casu sunt semper hujusce secundi generis, nimirum inducti non ab objectivo, sed ab ocularibus. Per Dollondianam coniunctionem binorum vitrorum flint, & crown in objectivo composito conjunguntur foci  $F$ ,  $f$ , & abeunt in punctum unicum, quo casu foci colorum intermediorum, licet non congruant cum ipsis, ut supra monui, tamen ita parum distant, ut distantia sensum effugiat. Eo casu tollitur ea separatio colorum in centro: fila  $hm$  congruunt cum filis  $HM$ , ut etiam fila  $h'm'$ , cum filis  $H'M'$  conjunguntur; sed secunda illa separatio facta extra centrum campi per angulum  $L'G'l = NG'n$  remanet integra; quam ob causam omnia objectiva acromatica si conjungantur cum unica

lente

lente oculari simplici, quæ præstet campum, & augmentum satis magnum, exhibent ejusmodi colores æque ingentes, ac objectiva simplicia pari campo, & augmentatione. Concipiatur objectivum ita accurate acromaticum, ut puncta F, f, e, e cum omnibus focus intermediis conjungat simul, & cogat in punctum unicum: radius D'CF', qui transiit per centrum objectivi ad sensum irrefractus, & devenit ad ocularem in G' cum omnibus suis filiis simul coniunctis, dividitur, ac distrahitur ab oculari per angulum L'G' = NG'n eo majorem, quo est major angulus CG'N exhibens mutationem itineris factam a filo rubeo, sive ejus refractionem.

24. Ea distractio nullam mutationem subit a compositione objectivi, a qua nihil mutatur radius CF'G', adeoque nullum ei malo remedium potest induci ab objectivo. Requiritur remedium petitum ab ocularibus ipsis, de quo agemus in hoc Opusculo. Inveniuntur telescopia dioptrica habentia plures oculares, in quibus combinatio fortuito inventa colores hos ipsos vel aufert penitus, vel valde imminuit; sed plura habentur egregia telescopia Anglicana, in quibus objecti distinctione prope centrum campi est maxima, nec ibi ullus appetet color, sed abeundo versus margines campi colores in iis emergunt admodum sensibiles, & in non-nullis ingentes. E contrario ego curavi construenda telescopia habentia objectivum simplex, cum remedio colorum idoneo adhibito systemati ocularium, in quibus transpiciendo nulli colores apparebant, excipiendo autem imaginem solis transmissam habebantur per quam exigui etiam in margine campi; usque adeo illud colorum genus, quod maxime appetet in telescopiis dioptricis, originem dicit ab ocularibus, non ab objectivo.

25. Ea colorum dispersio ibidem nocet etiam distinctioni, cum ita radii pertinentes ad unumquodvis objecti punctum protensi per spatiolum non insensibile commisceantur cum radiis pertinentibus ad alia puncta, a qua permixtione sola oritur confusio imaginis. In communibus telescopiis confusio multo major habetur ex utraque causa conjuncta: quin immo distinctionem majorem in centro impedit sola illa distractio filorum hm, HM non coextantium in eodem punto cum GL, & intermediis ob diversam

re-

refrangibilitatem conjunctam cum errore figuræ sphæricæ, quam evitant maxima ex parte telescopia habentia objectivum rite compositum; nam ea destruunt maxima ex parte tam errorem diversæ refrangibilitatis, quam errorem figuræ sphæricæ. Eam ob causam potest ipsis tribui multo major apertura objectivi ipsius, & augmentum majus. Sed remedia adhibita soli objectivo relinquunt intactam originem eorum colorum, qui maxime observari solent in telescopiis, & qui, ut diximus num. 5, observantur sæpe in ipsis telescopiis catadioptricis habentibus pro objectivo speculum, quod colores in reflexione utique non separat.

26. Separatio filorum G'IL', G'il prodesse potest distinctioni solum in casu, in quo observetur astrum quodpiam, ut Jupiter, parum elevatum supra horizontem. Tum refraætio atmosphæræ satis magna inducit sensibilem separationem colorum: quamobrem in ipso etiam campi centro id astrum apparet violaceum ex parte superiore, rubeum ex inferiore, filis violaceis magis inclinatis deorsum, quam rubeis. Si telescopium ita dirigatur, ut astrum occupet punctum campi paulo inferius centro; adhuc rubescet astrum ipsum in parte limbi propiore margini campi, erit violaceum in propiore centro, quod mihi prima vice advertenti vi sum erat contrarium toti huic theoriæ colorum telescopicorum: sed re attentius considerata statim deprehendi causam ejus phænomeni. Removendo astrum in diametro campi verticali a centro infra ipsum, vidi augeri distinctionem, corredo nimirum effectu atmosphæræ elevantis directionem filorum violaceorum supra directionem rubeorum ab effectu separationis L'G'V deprimentis directionem G'n infra G'N. Elevando Jovem intra campum telescopii per exiguum depressionem tubi, crescebat confusio imaginis, & ampliores evadebant colores, conjuncto in parte superiori effectu telescopii cum effectu atmosphæræ, & illo priore eo magis crescente, quo magis Jupiter removebatur a centro campi: minuebatur uterque defectus deprimento Jovem, imminutis coloribus, & crescente distinctione ob imminutum effectum telescopii usque ad centrum, ubi jam evanescit, & mutato in contrarium infra centrum ita, ut jam effectum atmosphæræ, vel penitus,

vel

vel magna ex parte corrigeret. Ad videndam hanc phænomenorum seriem oportet, Jupiter, vel Venus parum admodum eleventur supra horizontem: telescopium autem adhiberi potest tam commune, quam acromaticum cum unica lente simplici.

17. Colores ex hoc secundum fonte crisi possunt in ipso centro campi. Id accidet; si axis lentis ocularis non transeat per id centrum; si nimis punctum G ocularis ipsius respondens centro aperturæ reliæ liberæ a diaphragmate, quod punctum respondet centro campi apparentis, non sit illud idem, per quod transit recta conjungens centra binarum sphæricitatum, in quo ipsa ocularis habet crassitudinem maximam, ac superficies oppositas parallelas (\*). Tunc in ipso centro G habetur eadem distractio,

*Tom. II.*

C

quæ

(\*) Centrum lentis appellari solet id punctum, in quo occurrit superficie utriversis axis, qui transit per bina centra sphæricitatum. In ocularibus, in quibus ob curvaturam ingentem bina segmenta superficerum habere solent marginem communem circularem sine ulla crassitudine vitri in eo ipso margine, id facile invenitur: id ibi est in medio illo, quod est polus, & quasi centrum ejus ipsius circuli marginalis. At in objectivo, in quo curvatura est multo minor, habetur in margine crassitudo. Terminantur illa segmenta binis marginibus vel accurate, vel ad sensum circularibus, qui distant a se invicem per illam ipsam crassitudinem. Si ea est circumquaque accurate ejusdem magnitudinis; ipsi margines sunt accurate circulares, & centrum habetur itidem in medio illo ipso margine circulari singularum superficerum. Sed si crassitudo ex una parte est vel tantillo major, quam ex altera opposita, binis marginibus habentibus plana sua nonnihil inclinata ad se invicem; axis transit per puncta superficerum propiora ei punto marginis; in quo crassitudo est minima. Ubi id centrum non respondet quamproxime centro marginis, objectivum dicitur male centratum, & si ejus distantia a medio est aliquanto major, imago objecti evadit confusa, crescente plurimum errore sphæricitatis, qui respondet distantia maxima ejus centri a margine aperturæ. Plures habentur methodi pro determinando, an objectivum sit bene centratum, & inveniendo loco centri ipsius; sed eæ, quæ adhiberi solent, non ita accurate rem exhibent. Admodum facile id punctum determinatur, & admodum accurate ope mei tubuli instructi speculo, per quod immittitur radius solis in conclave, qui tubulus habetur in fig. 11 tabulæ II primi Tomi: immisso eo radio directione proxime horizontali, ei objiciatur positione ad sensum perpendiculari lens in distantia arbitraria (satis est opportuna distantia circiter unius pedis) ita, ut ipse radius incurrat in primam superficiem lentis ipsius: secunda superficies obtegatur chartâ albâ circulari, quæ ipsi adhæreat per duo

vel

quæ habebatur in G'. Ad eos colores nihil confert objectivum male centratum , vel oblique positum , nec obliqua positio ocularis ipsius . Ea vitia imminuunt distinctionem , non pariunt colores . Ubi cumque sit in toto objectivo AA punctum G , per quod transit ejus axis ; si G sit punctum , per quod transit axis lentis ocularis ; radius CG transibit ad sensum irrefractus , cum in utroque vitro inveniat superficies inter se proximas , & parallelas , adeoque perget per GL cum omnibus omnium colorum filis conjunctis ; dum reliqui omnes radii CG' ad ipsum inclinati , & transeuntes itidem per objectivum sine separatione filorum habebunt separationem ipsam in GL' , G'l ab oculari . Idcirco si punctum illud G pertinens ad axem lentis ocularis fuerit in centro campi ; nullus ibi color habebitur ex illa secunda origine ; eo autem existente ad latus , ob malam lentis constructionem , vel collocacionem malam ipsius , aut diaphragmatis , habebitur is color in ipso campi centro , & deerit in alio ejus punto quopiam extra centrum sito , ubi jacebit punctum G .

28. Similia phænomena accidunt etiam Galileano telescopio , quod habet objectivum simplex cum simplici oculari concava (\*) :

ve-

---

vel tria frustula ceræ : habebuntur bini radii reflexi a binis superficiebus , qui , parum admodum inclinatæ lente ipsâ , apparebunt ad latus ipsius foraminis . Ipsi erunt distantes a se invicem ; si radius incidit extra locum illius centri : nam in eo uno binæ superficerum particulæ reflectentes eum radium sunt invicem parallelae : movendo lentem ipsam sursum , deorsum , hinc , & inde , devinetur ad positionem , in qua bini radii reflexi congruent accurate superpositi sibi ipsis , & locus apparebit in charta illa adnexa superficie posteriori , quæ ibi erit illuminata luce admodum vivida : illuminabitur circellus ipsius paullo major circello foraminis , adeoque facile notabitur calamo punctum medium ejus circelli illuminati . Circinus docebit , an id punctum sit in medio marginis circularis . Si inveniatur aliquantis per distans ab eo medio ; poterit eo centro , & radio minimæ distantiae a margine describi circulus , & relinquere apertura habens illud ipsum punctum pro centro : abradendo quidquid extat extra illum circulum , vel obtegendo diaphragmate relinquente aperturam ei circulo concentricam , habebitur objectivum bene centratum .

(\*) Hi colores molestissimi in ejusmodi telescopiolis habentibus ocularem concavam simplicem corrigi possunt per ocularem acromaticam , qua de re egimus in secundo Opusculo Tomi primi , & agemus iterum hic in paragrapho tertio hujus capituli primi , qui totus versabitur circa oculares acromaticas .

verum cæteris omissis considerabimus in ipso solos radios trans-euntes per centrum objectivi. Manentibus reliquis in fig. 2, ocularis BB excipit radium DL antequam adveniat ad focos objectivi fF. Radius D'G' ab ipsa concava deflectitur deorsum divisus in fila contenta angulo L'G'Y, ubi primus rubeus omnium minime detorquetur per GL, postremus violaceus omnium maxime per GY. Hinc directio L'G'N exhibet colorem rubeum proprium centro campi, LG'n violaceum remotiorem. In telescopiis longioribus ejus constructionis ejusmodi color apparere non potest satis sensibilis, quia in iis campus est perquam exiguus, cum GG' non possit esse major semidiametro pupillæ, adeoque angulus DCD', qui metitur semidiametrum campi, cum sit æqualis angulo GCG', debet esse perquam exiguus. Sed in brevioribus illis, quæ adhiberi solent ad manus pro theatris per noctem, vel etiam interdiu pro objectis propioribus, is angulus excedit etiam unum gradum, adeoque refractione F'G'L' æqualis angulo CG'N evadit plurimum graduum, & ejus differentia NG'n satis magna, ut separatio sensum afficiat. Hinc in ejusmodi telescopiolis, licet instruantur objectivo acromatico, colores apparent versus marginem campi admodum largi; nisi diaphragmate perquam exiguo, & sito in aliqua non nimis exigua distantia ab oculo, minuatur campus quamplurimum, quod quidem præstari solet, sed est ingens quoddam eorum instrumentorum vitium.

29. Telescopia habentia unicam lentem ocularem convexam, ut in fig. 1, invertunt objecta, quorum partes jacentes in ea figura ex parte sinistra axis in directione CD', apparent e dextera, tanquam si jacerent in directione IG'N: telescopia habentia unicam concavam, ut in fig. 2, exhibent quidem objecta directa, sed habent campus nimis exiguum, si sint longiora, quod requiritur ad habendum ingens augmentum imaginis. Idcirco illorum priorum usus relictus est pro solis observationibus astronomicis, quibus objecti inversio nihil nocet: hæc posteriora adhiberi solent tantummodo brevissima pro objectis parum remotis cum exiguo incremento imaginis, quærendo in ipsis distinctionem potissimum, & augmentum exiguum. Pro objectis terrestribus adhibentur plu-

res oculares, quæ secunda inversione restituant positionem objecti, ac in communibus ejusmodi telescopiis adhibita sunt diu, & a multis adhuc adhibentur tres tantummodo lentes similes, & æquales illi unicæ, ac ita dispositæ, ut priorum binarum distantia sit paulo major, quam summa distantiarum focalium, posteriorum æquales ipsi summæ. Fiant autem plurimæ aliæ dispositiones, mutando distantias focales, ac distantias lentium mutuas, vel etiam augendo earum numerum, & adhibendo lentes quatuor, vel quinque. Hic attingemus tantummodo id, quod pertinet ad primam illam combinationem simplicem trium lentium æqualium respectu separationis colorum factæ ab ocularibus in radio proveniente ab objecto sito extra centrum campi.

30. In fig. 3 omnia usque ad  $I'$  sunt communia figuræ i pro radiis  $DCG$ ,  $D'CG'$ . Distantia  $GI$  est major, quam distantia focalis lentis  $BB$  pertinens ad radios ipsos rubeos, cum ea lens debeat conjungere in  $I$  radios divergentes a  $C$ , & in distantia focali radios parallelos, sed paullo major, cum distantia  $CG$  debeat esse satis magna respectu distantiarum focalis ejus lentis: reliquæ binæ lentes  $HH$ ,  $MM$  occurunt axi in  $K$ ,  $P$ . Sit  $KI$  distantia focalis ipsius  $HH$  pro radiis rubeis, cui æquales sint  $KO$ ,  $OP$ . Filum rubeum  $G'I$  incurrens in lentem  $HH$  in  $L$  refringitur ab ipsa per rectam  $LQ$  parallelam  $KP$ , cum  $IL$ ,  $IK$  divergant a foco citeriore  $I$  ejus lentis, & incurrens in lentem  $MM$  in  $Q$  ab ipsa refringitur per rectam  $QR$  convergentem cum axe ad quandam distantiam  $PR$  ob directiones  $LQ$ ,  $KP$  parallelas. Interea radii rubei pertinentes ad punctum objecti situm in axe in ingenti distantia, qui hic vitandæ confusionis gratiâ non exprimuntur, transmissi per totam superficiem ipsius objectivi, convenient primo in  $F$ , ut in fig. 1, & progrediuntur directione parallela ultra lentem  $BB$ , cum qua incidentes in  $HH$  convergunt ad ejus focum  $O$ : progressi ultra ipsum debent prodire paralleli ex lente  $MM$ , cum is sit ejus focus citerior. Is parallelismus requiritur ad habendam distinctionem, vel pro diversa constitutione ocularum, exigua convergentia, aut divergentia, quæ obtinetur mutando nonnihil distantiam ab objectivo totius systematis ocularium,

vel

vel distantiam solius lentis postremæ MM a præcedenti HH.

31. Filum violaceum  $G'$  delatum ad HH in l ita intorquetur, ut convergat versus axem. Si enim i sit focus citerior lentis HH pro radiis violaceis; ejus distantia  $K'$  erit minor, quam distantia focalis rubeorum  $KI$ , adeoque adhuc minor, quam  $K'$ , & radius discedens a distantia majore, quam sit distantia focalis lentis convexæ, debet convergere. Ipsum filum  $G'$  detortum per refractionem secat  $LQ$  in quodam puncto  $O'$ , & devenit ad MM in quodam puncto  $q$ , unde egreditur directione quadam  $qr$ , quæ si producatur indefinite ex parte opposita versus t secat  $RQ$  productam itidem indefinite versus T in quodam ejus puncto S. Separationem apparentem colorum extremorum exprimit angulus  $TSr$ . Quæremus inferius intersectionem  $O'$ , & angulum  $TSr$ , & invenimus esse  $IO' = KO$ , & in hoc casu omnium lentium æquallum esse angulum  $TSr$  tantillo minorem angulo  $NG'n$ ; ut idcirco ea divisio colorum post ejusmodi tres lentes sit tantillo minor, quam post unicam. Sed adhuc in eo etiam genere telescopiorum dioptricorum habentur colores ejusdem generis ac in primo, & fere æquales ipsis.

32. Si adhibeantur aliæ combinationes fotorum, & distantiarum; obveniunt aliæ determinationes ejus anguli finalis, & quærendæ sunt combinationes, quæ ipsas destruant, ac efficiant, ut filum violaceum pertinens ad radium devenientem a puncto objecti siti extra axem, ac transeuntem per centrum objectivi abeat in egressu a postrema oculari cum eadem directione, ac rubeum, nimirum sit ipsi parallelum; quo pacto unientur in fundo oculi, vel in ea positione ipsa, vel pro diversa oculorum constitutione in ea nonnihil mutata. Quæremus combinationem, quæ exhibeat proxime parallelismum; qua inventa, si colores ejus generis non fuerint extinti; exigua mutatione positionis unius e lentibus determinabitur multo melius, & facilius per immediatam observationem ab artifice collocatio, quæ vel omnino tollat, vel minimos efficiat ejus generis colores. Id præstabimus sequentibus paragraphis. Interea addemus illud, hic in fig. 3 positam esse congruentiam tam in I, quam in O fotorum pertinentium ad radios rubeos,

quam-

quamquam potius soleat effici, ut congruant foci radiorum mediorum. In eo casu recta LQ non esset parallela axi, sed ab ipso divergeret nonnihil, dum lq convergit. Hic casus ab illo parum admodum differt ob exiguum fotorum distantiam, & aliunde ille parallelismus reddit plures demonstrationes simpliciores. Potest effici, ut GL referat filum quodpiam mediae refrangibilitatis pro rubeo, & existente I foco medio, prodibit id filum per rectam LQ parallelam: omnia eodem redibunt, & solum absoluta mensura angulorum NG'n, TSt obveniet duplo major, si I sit focus filii rubei, quam si sit filii medii: adhuc tamen in hoc secundo casu separatio extremorum a se invicem esset proxime eadem, ac in primo, quia ipsa esset duplo major, quam separatio rubei a medio.

## §. II.

*De refractione prismatum exigui anguli, & lentium,  
ac de harum focus.*

33. IN superiore paragrapho adhibuimus plura theorematum pertinentia ad focos lentium, quorum demonstrationem promisimus num. 10. Plura alia eodem pertinentia occurrunt inferius necessaria ad determinandas correctiones colorum inductorum ab oculariis. Occurret autem & aliud theorema, quod exprimit rationem, quam habet differentia refractionis exiguae diversorum filorum coloratorum simul incidentium in prisma exigui anguli, vel in lenticula, ad refractionem totam, quod facile demonstratur considerando ejusmodi refractionem in prisme. Plures correctiones facile determinantur ope ejus theorematis, & ex eo facile itidem deducuntur ea omnia, quae pertinent ad focos lentium, in quibus negligatur error figuræ sphæricæ, & ipsarum lentium crassitudo. Idcirco censuimus fore opportunum, si eadem hic proponeremus.

34. Fere omnia, quae hic occurunt, sunt elementaria, & satis nota: adhuc tamen non inutilem putavimus ejusmodi tractationem; tum quia hic simplici, & non usitata methodo demonstra-

bun-

buntur veritates , quarum usus per totam dioptricam latissime patet , & frequentissime occurrit ; tum quia sic in hoc ipso primo capite hujus Opusculi habebuntur demonstrationes eorum omnium , quæ ibidem proponenda sunt (\*) pertinentia ad ejus argumentum , ut adeo ipsum per se sibi sufficiat . Pro secundo capite adhibebuntur nonnulla desumpta e secundo Opusculo Tomi primi , pertinentia ad errorem sphæricitatis , quæ non ita facilem haberent determinationem deductam e prismatum theoria .

35. Supponemus tantummodo primum illud fundamentum totius dioptricæ , quod ubi radius cuiusvis speciei determinatæ transit per superficiem dirimentem duo quævis media determinata , in quavis inclinatione fiat is transitus , sit semper sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti in eadem ratione , quæ in transitu e secundo medio ad primum sit inversa ejus , quæ habebatur in transitu e primo ad secundum .

36. Angulus , quem efficit radius adveniens cum perpendiculari superficie refringentis ducto pér punctum , in quo fit refractio , dicitur angulus incidentiæ : ego , ut monui in primo etiam volume , appello angulum refractum eum , quem efficit radius transmissus cum eodem perpendiculari : communiter ipsum appellant *angulum refractionis* ; sed ego refractionem voco angulum , quem continet continuatio viæ radii advenientis cum via radii detorti , quæ est ipsa quantitas deviationis facta per refractionem , & communiter itidem appellari solet refractio : idcirco vitandæ confusio-  
nis causâ dico illum alterum angulum refractum . Ratio sinus incidentiæ ex aere in substantiam quamquam , ut vitrum , ad sinum anguli refracti dicatur *m* ad 1 , & erit 1 ad *m* ratio sinuum in egressu ex ea substantia ad aerem : valor *m* habebitur dividendo  
sinum

(\*) Maxima horum pars habetur in Opusculis Tomi primi . Plures e formulâ hinc erutis inferius pro lentibus habentur in Opusculo II , sed deductæ methodo longe alia . Hic autem repetuntur ob duas rationes indicatas in textu . Verum habebuntur hic plurima alia deductæ ex iis communibus , quæ non habentur ibi , & usui erunt in hoc Opusculo : præter quam quod nec inutile , nec injucundum est Geometriæ cultoribus videre easdem veritates deductas e diversis principiis diversis methodis .

sinum priorem in ingressu per posteriorem, vel posteriorem in egressu per prioren. Is valor erit diversus pro eodem colorato filo respectu diversarum substantiarum, in omnibus substantiis major unitate: in vitris plerumque inter  $\frac{15}{10}$  &  $\frac{16}{11}$ , in aqua proxime  $\frac{4}{3}$ , in aliis substantiis alius. Est itidem diversus pro diversis filis coloratis respectu ejusdem substantiae. Differentiam binorum valorum  $m$  pertinentium ad bina fila colorata, ut primum rubeum, & postremum violaceum, respectu cuiuspiam substantiae ejusdem dicemus  $dm$ .

37. Valor  $dm$  non est infinite parvus respectu  $m$ , sed solet esse admodum exiguus respectu ipsius. Newtonus invenerat in pluribus substantiis, ut in vitris communibus, valorem  $dm = \frac{1}{27}$  valoris  $m - 1$  pertinentis ad primum filum rubeum, existente  $m - 1$  primi rubei ad  $m - 1$  postremi violacei ut 27 ad 28, & crediderat, generalem esse substantiis omnibus hujusmodi legem, ut  $\frac{dm}{m-1}$  sit semper  $= \frac{1}{27}$ . Si valor ejus fractionis esset constans in omnibus binariis substantiarum; non possent fieri lentes acromaticæ compositæ, ut mox patebit: sed inventum est postea, eum valorem in aliis substantiarum binariis esse alium, quod acromaticis telescopiis inveniendis occasionem præbuit. Is valor habetur satis proxime  $= \frac{1}{27}$  in vitris communibus, & aqua: sed in vitris habentibus majorem copiam plumbi admixtam, invenitur multo major: in flint Anglicano esse solet  $\frac{1}{18}$ , in vitro strass  $\frac{1}{14}$ . In aliis vitris est alius, & ad habendas combinationes pro lentibus acromaticis constantibus ex binis substantiis oportet nosse valores  $m$  pertinentes ad ipsas, & rationem valoris  $dm$  alterius ad valorem  $dm$  alterius.

38. Si ea ratio esset accurate eadem pro omnibus binariis filorum coloratorum; conjunctis binis filis conjungerentur omnia, ut itidem demonstravimus in primo volumine, & patebit etiam ex formulis, quas hic proponemus: invenitur proxime eadem; & idcirco conjunctis binis conjunguntur proxime & reliqua. De modo inveniendi per observationes pro substantiis adhibendis tam valores  $m$ , quam rationem valorum  $dm$  egimus in Opusculo I primi

voluminis, in quo exposuimus constructionem, & usum instrumenti ad id idonei. Hic evolvemus ea, quæ pertinent ad inveniendas combinationes pro lente, quæ conjungat bina fila diversæ speciei in eodem foco, & impedit illam separationem filorum G<sup>1</sup>, G<sup>2</sup>; ac in sequentibus paragraphis ostendemus usum ejusmodi lenti compositæ ad impediendos colores ocularium in telescopiis, & applicabimus theorema hic demonstratum ad idem præstandum per plures lentes simplices factas ex eodem etiam vitro communi.

39. Sit BAC (fig. 4 Tab. II) angulus prismatis exiguus, & radius DE adveniat cum inclinatione non nimis magna (magna hic exhibetur ad evitandam confusionem) ad punctum E primæ faciei, per quod transeat perpendicularum FEG: is relictæ EH continuazione viæ præcedentis DE refringetur per viam EI accedendo ad perpendicularum EG. Si IK sit perpendicularum secundæ faciei dum ex punto I, ad quod radius appellit; is relictæ IL continuazione viæ præcedentis EI, prodibit per viam IM recedentem a perpendiculari IK. Occurrant sibi invicem rectæ FEG, KI in N, & DEH, MI in O. Erit in ingressu DEF angulus incidentiæ, GEI angulus refractus, HEI refractio: in egressu erit NIE angulus incidentiæ, KIM angulus refractus, LIM refractio; cui cum æqualis sit EIO ad verticem oppositus; erit MOH refractio totius prismatis: ea erit æqualis binis illis refractionibus simul, cum is angulus sit externus respectu OIE, OEI internorum, & oppositorum in casu, quem figura exprimit, in quo utraque e refractionibus singularum facierum fit in eandem plagam: possent eæ fieri in plagas oppositas, quo casu is angulus esset eorum differentia. Angulus autem GNI erit itidem summa angularum NEI, NIE in eodem casu expresso a figura, qui quidem debet esse æqualis angulo prismatis A; nam uterque debet esse supplementum anguli ENI, quod de primo patet, de secundo facile deducitur ex eo, quod in quadrilineo AENI habente angulos ad E, I rectos, reliqui duo ad A, N simul debeant æquari duobus rectis.

40. Jam vero si primus radius DE adveniat cum directione non nimis obliqua ad primam superficiem; angulus DEF cum reliquis

omnibus non erit nimis magnus, adeoque ii anguli erunt proxime proportionales suis sinibus; eritque  $m:1::DEF=NEO:NEI$ , adeoque assumendo primo loco secundos terminos rationum, secundo differentias ipsorum, erit  $1:m-1::NEI:IEO$ . Pariter erit  $m:1::MIK=NIO:NIE$ , adeoque itidem  $1:m-1::NIE:EIO$ . Quare in eadem ratione  $1$  ad  $m-1$  erit summa antecedentium  $NEI, NIE$ , nimirum angulus  $GNI$  æqualis angulo prismatis  $A$ , ad summam consequentium  $IEO, EIO$ , nimirum ad angulum  $IOH$ , qui est refractio totalis facta a prisme: idcirco ea habebitur multiplicando ipsum angulum refringentem per  $m-1$ . Inde autem patet, differentiam refractionum binorum filorum coloratorum fore ipsum angulum ductum in  $dm$ ; nam pro secundo filo habebitur is angulus multiplicatus per  $m+dm-1$ . Quare pro refractionibus non nimis magnis factis per prisma habens angulum non nimis magnum habebitur hujusmodi theorema, quod erit quædam veluti basis eorum, quæ dicturi sumus.

41. *Refractio radii non nimis oblique incidentis in angulum non nimis magnum prismatis æquatur proxime ipsi angulo multiplicato per  $m-1$ , & differentia refractionum binorum filorum incidentium directione eadem in idem punctum æquatur refractioni minori multiplicata per valorem  $\frac{dm}{m-1}$ .* Hic valor exprimet qualitatem distractivam ejus substantiæ, cum exprimat divaricationem filorum simul incidentium directione eadem. Juxta num. 37 in aqua, & vitro communi hæc distractio pro primo rubeo, & postremo violaceo erit circiter  $\frac{1}{27}$  totius refractionis, in flint  $\frac{1}{18}$ , in strass  $\frac{1}{14}$ , nimirum pro singulis gradibus refractionis habebitur paullo plus, quam minuta duo in primo substantiarum genere, tria in flint, quatuor in strass. Patet autem, refractionem ita fieri, ut nova via recedat a cuspide anguli radio detorto versus plagam ipsi oppositam.

42. Inde facilis est transitus ad lentes. Sint (fig. 5)  $BFD, BHD$  bini arcus circulares orti ex sectione lentis utrinque convexæ per suum axem  $NM$ , qui occurrat chordæ communi in  $G$ , & habeat in  $M, N$  centra eorum circulorum: radius traductus per

eam

eam lentem occurrat ipsis in E, I, & eidem chordæ in G', cui tangentes ductæ per E, I occurrant in K, L, & sibi invicem in A; radii autem ME, NI occurrant ipsi chordæ in P, Q, & sint ER, IS perpendiculares axi. Refractio ejus radii fiet eodem pecto, quo fieret, si loco lentis haberetur prisma cum angulo EAI. Is angulus est summa angulorum ALK, & AKL = EKD. Porro angulus EKG', sive EKP æquatur angulo EMF, sive PMG ob angulos PEK, PGM rectos, & angulos EPK, GPM ad verticem oppositos æquales; ac simili ratione ostenditur angulum KLA, sive QLI esse æqualem angulo HNI, sive GNQ ob angulos QIL, QGN rectos, & angulos IQL, GQN æquales. Quare angulus A prismatis æquivalentis erit æqualis binis

angulis FME, HNI, quorum sinus ad radium = 1 sunt  $\frac{RE}{ME}$ , &  $\frac{SI}{NI}$ . Dicantur  $a, b$  bini radii sphæricitatum ME, NI, & neglectâ crassitudine lentis, ac habitis RE, SI pro æqualibus GG', quæ dicatur  $e$ , erunt sinus eorum angulorum  $\frac{e}{a}, \frac{e}{b}$ , qui poterunt assumi pro angulis ipsis, adeoque angulus EAI, qui est angulus prismatis æquivalentis, sive angulus refringens poterit considerari ut  $= \frac{e}{a} + \frac{e}{b}$ .

43. Radius digressus (fig. 6) e puncto C axis incidat in punctum G' lentis BB, in quod neglectâ crassitudine abierunt puncta E, I fig. 5, & ibidem refractus abeat ad punctum axis I: concipiatur autem recta CG' producta in E. Angulus refringens in G' erit  $\frac{e}{a} + \frac{e}{b}$ ; refractio erit angulus IG'E, æqualis binis G'CG, G'IG, quorum sinus sunt  $\frac{GG'}{CG'}, \frac{GG'}{GI}$ , ac poterunt substitui CG, GI pro CG', GI, ubi puncta G, G' sint satis proxima inter se. Fiat CG =  $p$ , GI =  $x$ , & accipiantur tangentes pro angulis: erit refractio IG'E =  $\frac{e}{p} + \frac{e}{x}$ , quæ cum

debeat (num. 40) æquari angulo refringenti dueto in  $m - 1$ , erit  
 $\frac{e}{p} + \frac{e}{x} = (m - 1)(\frac{e}{a} + \frac{e}{b})$ . Si fiat  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ ; di-  
 videndo per  $e$ , erit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \frac{m - 1}{f}$ , sive  $\frac{1}{x} = \frac{m - 1}{f} - \frac{1}{p}$ .

44. Hic considerati sunt ut positivi radii sphæricatum lentis  
 utrinque convexæ, quorum prior  $a$  jacet in directione radiorum  
 advenientium, secundus  $b$  in directione contraria, & considera-  
 tus est ut positivus valor  $p$  exprimens GC distantiam a lente  
 puncti, a quo radii divergant, quæ itidem habet directionem con-  
 trariam directioni radiorum advenientium. Reducetur formula ad  
 formam commodiorem pro omni genere superficierum convexa-  
 rum, planarum, concavarum, & pro omni directione radiorum  
 divergentium, parallelorum, convergentium; si omnes valores  
 accipiuntur pro positivis, ubi incipiendo a lente jacent in direc-  
 tione radiorum advenientium, quo pacto valor  $a$  erit positivus,  
 infinitus, vel negativus, prout prima superficies fuerit convexa,  
 plana, vel concava, contra valor  $b$  erit negativus, infinitus, vel  
 positivus pro iisdem qualitatibus superficie secundæ, & valor  $p$   
 erit positivus, infinitus, vel negativus, prout radii advenerint  
 convergentes, paralleli, vel divergentes. Tum mutato signo va-  
 lorum  $b$ , &  $p$  in iis formulis erit  $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ , &  $\frac{1}{x} =$   
 $\frac{m - 1}{f} + \frac{1}{p}$ . Ea formula eruitur aliis methodis independentibus  
 a theoria prismatum, quod præstitimus in Opusculo II Tom. I;  
 & ex ea facile deducuntur omnia theorematum, quæ pertinent ad  
 focos lentium, ubi in earum consideratione negligitur error figu-  
 ræ sphæricæ, & crassitudo lentis. Eruemus hic ea, quorum usus  
 nobis occurret in hoc Opusculo.

45. In primis patet, omnes radios homogeneos digressos ab eo-  
 dem punto C, & incidentes in puncta G non nimis remota a G  
 debere convergere proxime ad idem punctum I: nam valores  $m$ ,  
 $p$ ,  $f$  manebunt iidem, adeoque idem etiam valor  $x = GI$  pro omni-  
 bus. Idcirco punctum I erit focus radiorum divergentium a C.

46. Patet præterea, quamcumque lentem, quæ habeat radios sphæricitatum utcumque diversos, habere alias lentes numero infinitas, quæ neglecto errore figuræ sphæricæ, & crassitudine ipsius lentis, sint ipsi æquivalentes in ordine ad nexum inter punctum, a quo radii divergunt, vel punctum, ad quod convergunt ante appulsum, & punctum, ad quod convergunt, vel a quo divergent post egressum; quod punctum in casu priore dicitur focus realis, & in posteriore virtualis. Nexus inter  $p$ , &  $\pi$  erit idem exhibitus ab ea formula, si valor  $f$  sit idem. Hic autem erit idem, si in binis lentibus habentibus radios sphæricitatum  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  sit

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b}.$$

Determinato ad arbitrium radio  $a'$ , semper habebitur radius  $b'$  ex æquatione  $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ , qui erit ejus socius pro lente æquivalente. Inter omnes æquivalentes habebitur una, cuius sphæricitates erunt æquales ambæ convexæ, vel ambæ concavæ, quæ dicitur isoscelia. Sint ejus radii  $a$ , &  $b$ , & erit  $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b}$ , posito signo negativo in posteriore termino ob directionem contrariam, quam ibi habent radii æquales sphæricitatum oppositarum æqualium. Hinc  $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$ , &  $f = \frac{1}{2}a$ . Nimicum valor  $f$  in formula adhibitus erit dimidium radii sphæricitatum lentis isoscelæ.

47. Hic valor erit positivus in lente utrinque convexa, & in plano-convexa, ac concavo-convexa habente convexitatem majorem concavitate. Erit enim in primo casu uterque e valoribus  $\frac{1}{a}$ ,  $-\frac{1}{b}$  positivus, in secundo alter positivus, alter zero ob radium superficie planæ infinitum, in tertio alter positivus, & alter negativus, sed negativus minor, ob radium sphæricitatis minoris majorem. Erit autem valor idem negativus in lente utrinque concava, vel plano-concava; vel concavo-convexa habente concavitatem convexitate majorem, quod simili modo demonstratur. Hinc in prioribus tribus casibus lens æquivalens erit utrin-

trinque convexa, in posterioribus utrinque concava. Appellabimus lentem convexam eam, quæ habet isosceliam æquivalentem convexam, & dicemus concavam eam, quæ habet isosceliam æquivalentem concavam. Porro cum sit  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{2}{a}$ , erit  $a = \frac{2ab^2}{b^2-a^2}$ , &  $b^2-a^2$  in utrinque convexis, vel utrinque concavis est summa radiorum binarum sphæricitatum, in concavo-convexis differentia. Quare, datis binis sphæricitatū radiis, invenietur radius sphæricitatis lenti isosceliæ æquivalentis dividendo duplum productum eorum radiorum per summam, vel differentiam radiorum non isosceliæ, prout binæ sphæricitates fuerint ejusdem speciei, vel contrariæ.

48. Si lens etiam non isoscelia invertatur; nexus inter positionem radiorum advenientium ad lentem, & egressorum ex ipsa remanebit idem. Nam lens isoscelia æquivalens remanebit eadem. Hæc æquivalentia non erit accurata ob neglectam crassitudinem lentis, cum errore figuræ sphæricæ; sed erit eo major, quo fuerit minor crassitudo lentis, & minor distantia punctorum G, G'. Diminutâ utrâque in infinitum, minuetur in infinitum error & formulæ, & theorematum inde deductorum.

49. Formula cum iis omnibus, quæ inde deducuntur, habebit locum non quidem accurate, sed proxime etiam pro radiis digressis a puncto rectæ nonnihil inclinatæ ad axem lentis: si enim punctum G sit illud idem, in quo axis occurrit lenti, quod dicitur centrum ipsius lentis, & angulus CGG' parum abludat a recto; adhuc ejus sinus erit quamproxime = 1, adeoque sinus angulorum GCG', GIG' adhuc erunt quamproxime  $\frac{GG'}{CG}, \frac{GG'}{GI}$ ; angulus autem refringens in G' erit idem, ac prius. Idcirco in fig. 1, & 3 radii advenientes ex puncto axis DC posito in imensa distantia habent focum in quodam puncto F ejusdem axis producti, & radii advenientes ex puncto D' rectæ D'C parum inclinatæ ad ipsum axem, & transeuntis per centrum lentis C habent ipsum in productione ipsius D'C in F', uti affirmavimus.

num.

num. 9, quod punctum erit positum proxime in eadem distantia ab ipsa lente AA. Ibi efformabitur imago objecti similis formæ; sub qua id apparet directe intuenti, ob lineas ipsius GG' proportionales distantiarum visualibus DD'. Aberratio erit major h̄c, quam in axe, novis erroribus inductis a suppositione angularum G' æqualium recto; sed hi errores novi erunt perquam exigui, si anguli ad G' non differant plurimum a recto; quia prope quadrantem differentia sinuum est perquam exigua, nimirum exigua respectu ipsius differentiarum arcuum. Idcirco etiam in fig. 3 Tab. I radii homogenei, qui adveniant ad lentem BB directione IG' parallela rectæ GF' transeuntis per ejus centrum G debent habere focum aliqui in ipsa GF', tanquam si advenissent ex ejus punto positio in infinita distantia, quod affirmavimus num. 14.

50. Si radii adveniant paralleli; valor  $p$  evadit infinitus, &  $\frac{1}{p} = 0$ . Tum erit  $\frac{1}{x} = \frac{m-1}{f}$ . Dicatur  $h$  valor  $x$ , qui habetur in eo casu, adeoque exprimit distantiam focalem radiorum parallelorum, & erit  $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$ , ac pro omni alia positione radiorum habebitur  $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ : erit autem  $h = \frac{f}{m-1}$ ; unde patet, distantiam focalem radiorum parallelorum, quæ juxta numer. 10 dicitur absolute distantia focalis lentis cuiuspiam, non pendere a solis radiis sphæricitatum determinantibus valorem  $f$ , sed etiam a vi refractiva determinante valorem  $m$ . Valor  $h$  paribus sphæricitatibus erit eo major, quo valor  $m-1$  fuerit minor. Cum is pro radiis violaceis sit major, quam pro rubeis; distantia focalis violaceorum erit minor, quam rubeorum, nimirum in fig. 1 Cf minor, quam CF, quod affirmavimus num. 9.

51. In lentibus diversarum substantiarum distantia focalis erit eo minor, quo ipsa substantia habuerit majorem vim refractivam. Omnes itidem distantiarum focales radiorum & convergentium, & divergentium pendebunt a valore  $m$ , a quo pendet  $h$ , cum in formula  $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$  manente eadem incidentia radiorum, a qua sola pendet  $p$ , adhuc  $h$  pendeat a valore  $m$ .

52. Va-

52. Valor  $h$  exprimens distantiam focalem absolutam est idem pro omnibus lentibus æquivalentibus, & pro lente isoscelia in vitris est communiter paullo minor radio sphæricitatis communi binarum superficierum. Cum enim  $m$  sit (num. 37) in vitris pleniusque paullo major  $\frac{1}{2}$ ; erit  $m-1$  paullo major  $\frac{1}{2}$ , &  $\frac{1}{m-1}$  paullo minor  $\frac{1}{2}$ , ac ob  $f = \frac{1}{2}a$  in lentibus isosceliis (num. 47), erit  $\frac{f}{m-1}$  paullo minor, quam  $a$ ; sed in aliis vitris alias, quod mirari solent artifices ignari theoriarum. In lentibus convexis sphæricitatis magnæ, in quibus crassitudo non est exigua respectu radii sphæricitatis, hic valor non parum turbabitur ab ipsa crassitudine: habebit locum pro distantia a puncto quopiam assumpto intra ipsam crassitudinem. Erit autem accuratus pro radiis infinite proximis centro: in aperturis majoribus fiet adhuc brevior ab errore figuræ sphæricæ radiorum remotiorum.

53. Valor  $h$  in lente convexa erit positivus, in concava negativus; quia in formula  $h = \frac{f}{m-1}$  valor  $m$  est semper positivus, & valor  $f = \frac{1}{2}a$  positivus in prima, negativus in secunda (nummer. 47), adeoque radii, qui adveniunt paralleli ad primam, convergent ad focum positum ultra ipsam, uti sunt puncta  $F$ ,  $F'$  in fig. 1, & 3: qui ita adveniant ad secundam, divergent, adeoque lens convexa habebit focum realem pro radiis parallelis, concava virtualem, juxta num. 46. Poterunt considerari in quavis lente bini foci, juxta num. 10. quorum alter jaceat citra lentem respectu radiorum advenientium, alter ultra ipsam, positi in eadem distantia ab ipsa  $= h$ , ut in fig. 6 Tab. II puncta  $P$ ,  $F$ . Radii advenientes paralleli axi directione CGI ad lentem BB, quæ sit convexa, convergent post egressum ad focum ulteriorem  $F$ : radii, qui advenirent ex parte opposita directione IGC, convergerent ad focum  $P$ , qui esset ulterior respectu ipsorum, & citerior respectu illorum priorum. Si lens sit concava; radii egressi divergerent a foco citeriore, in quo pro ipsa ponni deberet punctum  $F$ , posito  $P$  in foco ulteriore ad hoc, ut ubique punctum  $F$  dirigat

rigat radios refractos, veluti C dirigit incidentes, & servetur analogia geometrica, vi cuius constructio, & enunciatio facta pro uno casu possit applicari reliquis omnibus juxta generales constructionum leges, quas ego fuse evolvi in tertio meorum elementorum tomo post sectionum conicarum elementa.

54. Formula  $\frac{I}{w} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  exhibebit nexus inter distantiam a data quavis lente puncti dirigentis radios incidentes, qui ad ipsum convergant, vel ab ipso divergant ante transitum, & distantiam puncti dirigentis radios refractos, quod punctum erit focus realis, ad quod convergent, vel virtualis, a quo divergent post egressum: nam illa prior est  $p$ , hæc posterior  $w$ , &  $h$  in data lente quantitas constans. Ea est semper positiva in lente convexa, negativa in concava numerum præcedentem. Hinc primus terminus valoris  $\frac{I}{w}$  erit semper positivus pro lente convexa, negativus pro concava. Secundus erit positivus, zero, vel negativus, prout radii advenient ad lentem convergentes, paralleli, vel divergentes: signum valoris  $w$  erit idem ac  $h$ , si  $p$  habuerit signum idem cum ipso  $h$ , vel fuerit zero, vel habuerit signum contrarium, & fuerit major, quam  $h$ , ut  $\frac{I}{p}$  sit minor, quam  $\frac{I}{h}$ : valor  $w$  erit infinitus, si  $p$  habuerit signum contrarium  $h$ , & fuerit ipsi æqualis, existente tum  $\frac{I}{h} + \frac{I}{p} = 0$ . Signum ipsius  $w$  erit contrarium signo  $h$ , si  $p$  habuerit signum contrarium  $h$ , & fuerit ipso minor; quia tunc  $\frac{I}{p}$  erit major, quam  $\frac{I}{h}$ . Inde facile patent theorematum sequentia, quorum plura adhibuimus num. 10.

55. Pro utravis lente convexa, & concava distinguemus casus quinque. Radii pro convexa adveniant 1°. convergentes: 2°. paralleli: 3°. divergentes a distantia majore, quam sit distantia focalis: 4°. divergentes a distantia æquali, sive a foco citeriore: 5°. divergentes a distantia adhuc minore. In 1°. casu radii refracti convergent ad focum realem propriem, quam sit focus parallelo-

rum : in 2°. ad focum ipsum ulteriore : in 3°. convergentes ad focum remotiorem : in 4°. paralleli : in 5°. divergentes : nam in primo casu erit valor  $p$  positivus : in 2°. infinitus : in reliquis negativus, sed major, æqualis, minor, quam  $h$ , adeoque  $\frac{1}{p}$  in 1°. casu valor positivus addens aliquid termino  $\frac{1}{h}$  : in secundo zero : in reliquis negativus, sed minor, æqualis, major respectu  $\frac{1}{h}$ . Pro lente concava adveniant 1°. divergentes : 2°. paralleli : 3°. convergentes ad distantiam majorem, quam sit distantia focalis : 4°. ad æqualem, sive ad focum ulteriore : 5°. ad distantiam minorem. In 1°. casu radii refracti divergent a foco virtuali propiore, quam sit focus parallelorum : in 2°. ab eo ipso foco : in 3°. divergent a foco virtuali remotiore : in 4°. erunt paralleli : in 5°. convergentes. Demonstratio est prorsus similis, sed existente  $h$  negativo, & mutato signo valoris  $p$  in singulis casibus in contrarium.

56. Plurima theorematata pro casibus singularibus erui possunt ex eadem formula : proponemus hæc tria, quorum usus occurret inferius. *Si radii adveniant convergentes ad distantiam æqualem distantiae focali, vel divergentes a dupla, vel divergentes a dimidia distantia focali; prodibunt in primo casu convergentes ad distantiam dimidię ipsius distantiae focalis, in secundo convergentes itidem ad duplam, in tertio divergentes a distantia ipsi æquali.* Quia in formula  $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ , erit  $p$  in primo casu  $= h$ , in secundo  $= -2h$ , in tertio  $= -\frac{1}{2}h$ . Quare in primo  $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}$ , &  $x = \frac{1}{2}h$ : in secundo  $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} - \frac{1}{2h} = \frac{1}{2h}$ , &  $x = 2h$ : in tertio  $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} - \frac{2}{h} = -\frac{1}{h}$ , &  $x = -h$ .

57. Addemus alia duo generalia, quorum primum erit nobis usui inferius, secundum exhibet methodum facilem inveniendi distantiam focalem datæ lentis per observationem. *Si radii incidunt*

*dant in lentem convexam BB divergentes a quodam puncto C ita, ut convergant ad quoddam punctum I; sint autem F, P ejus foci ulterior, O citerior; erit CP : CG :: CG : CI :: PG = GF : GI. Demonstrabitur facilius ope formulæ numeri 43 pro radiis divergentibus  $\frac{I}{x} = \frac{I}{h} - \frac{I}{P}$ , ubi CG = p, PG = GF = h, GI = x, adeoque CP = p - h. Porro ibi  $\frac{I}{x} = \frac{p-h}{ph}$ , adeoque  $x = \frac{ph}{p-h}$ , &  $p + x = \frac{pp}{p-h}$  ob - ph + ph = 0: hinc CP = p - h : CG = p :: CG = p : CI = p + x; unde ex natura proportionis continuæ deducitur, in eadem ratione esse etiam differentiam priorum PG, sive GF ad differentiam postremorum GI.*

58. *Erit etiam distantia focalis GF æqualis producto e binis distantiis GC, GI lentis a punctis dirigentibus radios incidentes, & refractos divisæ per earum summam CI. Erit enim  $\frac{I}{h} = \frac{I}{x} + \frac{I}{p} = \frac{p+x}{px}$ , adeoque  $h = \frac{px}{p+x}$ , ubi p, x sunt ex duæ distantiæ, p + x earum summa. Si ad foramen exiguum conclavis occlusi illustratum a sole apponatur charta cum filo tenui transverso; collocatâ lente in satis magna distantia ab ipso, facile invenietur distantia ab eadem lente, in qua appareat maxime distincta imago filii. Productum binarum distantiarum lentis a foramine, & ab imagine divisum per earum summam exhibebit distantiam focalem quæsitam.*

59. Hæc pertinent ad lentes singulas: addemus aliud usui futurum pro lentibus pluribus conjunctis, quod neglectâ earum crassitudine, evadit simplex, & elegans. Pro lentibus sequentibus valores  $m$ ,  $f$ ,  $h$ ,  $p$ ,  $x$  exprimantur iisdem litteris cum serie accentum, & ex formula  $\frac{I}{x} = \frac{m-1}{f} + \frac{I}{p}$  num. 44, eruentur valores distantiarum puncti dirigentis radios refractos, si adhibeatur  $x$  pro  $p'$ , tum  $x'$  pro  $p''$ , & ita porro. Inde in egressu e secunda lente habebitur  $\frac{I}{x'} = \frac{m'-1}{f'} + \frac{I}{p'} = \frac{m'-1}{f'} + \frac{m-1}{f} + \frac{I}{p}$ :

E 2 in

in egressu e tertia  $\frac{I}{x''} = \frac{m'' - 1}{f''} + \frac{I}{p''} = \frac{m'' - 1}{f''} + \frac{m' - 1}{f'}$   
 $+ \frac{m - 1}{f} + \frac{I}{p}$ . Patet autem progressus.

60. Cum  $\frac{m - 1}{f}$  sit  $= \frac{I}{h}$ ,  $\frac{m' - 1}{f'} = \frac{I}{h'}$ , & ita porro; si dicitur H distantia focalis omnium simul; facto  $\frac{I}{p} = 0$ , erit  $\frac{I}{H} = \frac{I}{h} + \frac{I}{h'} + \frac{I}{h''}$  &c. Nimirum fractio habens pro numeratore I,  
*O* pro denominatore distantiam focalem plurium lenti junctarum, æquabitur summae omnium similium fractionum pertinentium ad singulas. Inde autem patet, si conjugantur binæ lentes habentes distantias focales æquales, distantiam focalem communem fore dimidiam singularum. Erit enim  $h' = b$ , adeoque  $\frac{I}{H} = \frac{I}{h} + \frac{I}{h} = \frac{2}{h}$  &  $H = \frac{I}{2}h$ . Patet itidem, quocunque ordine ponantur lentes, distantiam focalem omnium simul fore semper eandem, cum nimirum debeat esse eadem earum fractio summa.

### §. III.

*De remedio adhibendo coloribus ocularium per unicam ocularem acromaticam.*

61. **U**BICUMQUE collocetur unica lens BB (fig. 3 Tab.I) simplex, habebitur semper separatio illa radii obliqui CG' in fila G'I, G'i diversorum colorum. Nam refractio debet esse (num. 41) æqualis angulo refringenti multiplicato per  $m - 1$ ; angulus autem refringens in G' est idem pro omnibus filis coloratis advenientibus per CG', & valor  $m$  diversus in eadem unica substantia pro diversis filis coloratis. Potest tantummodo imminui, minuendo campus, & augmentum. Nam refractio in fig. 6 Tab. II est angulus IGE, qui æquatur CGN communi utriusque figuræ, ipsi, & terciæ. Is debet multiplicari per valorem  $\frac{dm}{m - 1}$ , sive (num. 37) in

vitrīs

vitris communibus proxime per  $\frac{1}{27}$ , ad habendam differentiam refractionum  $NG'n$ , & idem æquatur binis  $GCG'$ ,  $GIG'$  internis, & oppositis. Prior  $GCG' = D'CD$  exhibit distantiam angularem objecti a centro campi, & in fine campi ipsius ejus semidiametrum: secundus  $GIG'$  est idem ille prior auctus per telescopium adeoque multiplicatus per augmentum telescopii. Quare si distantia a centro campi dicatur  $c$ , & augmentum  $n$ ; erit separatio colorum  $\frac{dm}{m-1}(nc+c)$ , nimirum in vitro communi  $\frac{1}{27}c(n+1)$ .

62. Hæc est separatio filorum coloratorum, cuius determinacionem promisimus num. 22. Ea pendet a valoribus  $c$ , &  $n$ . Si centrum ocularis sit in centro aperturæ, ut esse debet in telescopio rite ordinato; in ipso centro est  $c=0$ , adeoque distractio ibi est nulla. Pari augmento  $n$  ipsa distractio crescit in ratione  $c$ , adeoque est eo major, quo major est distantia objecti a centro campi: pari autem distantia crescit in ratione  $n+1$ , adeoque est eo major, quo augmentum majus. Nihil ad hoc colorum genus confert major, vel minor apertura objectivi: id pendet unice ab iis binis elementis, a campo, qui pendet ab apertura oocularis, & augmento: minuitur, si minuatur campus, vel augmentum, vel utrumque simul, & ea est unica ratio minuendi eos colores per unicam ocularem simplicem. Extra centrum campi valor  $c$  semper est aliquis, &  $n+1$  non potest evadere  $= 0$ , adeoque nec ii colores tolli possunt extra centrum campi.

63. Si campus sit unius gradus, & augmentum tantummodo 20; distantia a centro in margine campi est minutorum 30, adeoque separatio colorum  $\frac{30 \times 21}{27} = 23'$ . Telescopia communia

trium pedum, quæ quadrantibus astronomicis aptari solent, habent campum adhuc majorem, & augmentum majus: in iis in fine campi color violaceus extremus debet esse separatus a rubeo primo saltem per minuta 23, sive plusquam per duos trientes diametri apparentis lunæ visæ nudo oculo. Si ejus magnitudinis non apparet separatio colorum in iis telescopiis; id provenit a plu-

pluribus causis. Primo quidem, quia postrema fila violacea habent vim nimis exiguum ad percellendos oculos, adeoque separatio sensibilis oculo directe intuenti determinatur per numerum aliquanto minorem, quam  $\frac{1}{27}$  refractionis totius; deinde quia trans tubum excludentem omnia, quæ interjaceant inter spectatorem, & objectum, quod per ipsum vespicitur, imago apparet multo minus aucta, quam deberet respectu ejus augmenti intra oculum, ut & lunaris diameter transspecta trans tubum omni vitro vacuum apparet multo minor, quam libere visa extra tubum, & in summo cælo apparet multo minor, quam prope horizontem. Accedunt ea, quæ proposuimus num. 22, ex quibus omnibus fit, ut ii colores sint multo magis sensibiles in imagine objecti satis lucidi transmissâ per telescopium, & exceptâ chartâ albâ, quam in visione directâ trans telescopium. Verum & in hac habentur semper in ejusmodi telescopiis versus marginem campi.

64. In telescopiis, quæ habent objectivum acromaticum, si habeant ocularem unicam simplicem, iidem sunt multo majores, quia ea admittunt augmentum multo majus. Verum generaliter, ubi augmentum fit majus, semper campus est minor, & facile demonstratur, non posse campum ingentem conjungi cum ingenti augmentatione. Id constat etiam ex eo, quod spatium in fundo oculi præparatum ad excipiendas imagines habet certos limites, intra quos eo minor pars imaginis directæ contineri potest, quo majus est ejus augmentum, ut si imago quæpiam depicta in data exigua tabula, debeat transferri ad aliam æqualem dimensionibus auctis, eo minor ejus pars in eam transferri poterit, quo dimensionum augmentum est majus. Inde fit, ut ii colores non possint ita enormiter augeri, uti augerentur, si cum ingenti campo conjungeretur ingens imaginis augmentum.

65. Remedium iis coloribus adhibebitur; si pro oculari simplici adhibeatur composita acromatica. Acromaticam ocularem appellabimus hic, ut num. 1 objectiva acromatica diximus nomine jam communi ea, quæ ita composita sunt, ut conjugant focos binorum filorum coloratorum, licet non conjugant accurate focos cæterorum, sed proxime. Ocularis ejusmodi applicata (fig. 3 Tab. I) in BB  
de-

detorquebit utrumque filum delatum per CG' directione eadem G'I. Nam omnia fila coloris ejusdem delata ad lentem BB directione IG haberent focum in quodam puncto axis F pro utroque filorum genere, & omnia delata directione GF' in quodam puncto F' ejusdem rectæ, quod patet ex num. 49; cum et reæta transeat per centrum lentis BB, & ubi campus non sit major justo, non inclinetur nimis ad axem. Quare si lens sit ita composita, ut debeat conjungere binos focos binorum colorum; deberet conjungere in eodem puncto F' rectæ GF' omnia fila utriusque coloris delata directione IG' ipsi parallela. Hinc (num. 55) utrumque coloratum filum, quod deferatur simul ad lentem BB directione F'G', debebit prodire coniunctum per eandem rectam G'I parallelam F'G', quod affirmavimus num. 14 de filis singulorum colorum respectu sui foci F'.

66. Ubi cumque collocetur ocularis BB, si sit eo modo composita, corriget illam separationem filorum coloratorum pertinientium ad radium CG': sed ad habendam distinctionem imaginis oportet, sit F focus communis & objectivi, & ocularis vel accurate, vel proxime juxta id, quod exposuimus a num. 18. Existente F foco communi, & F' foco objectivi pro radiis habentibus directionem D'CG', ipsum F' erit aliquanto remotius ab oculari, quam sit ejus focus radiorum habentium directionem GF'. Cum enim sit CF' quam proxime æqualis CF (num. 49) & CF', F'G' sint simul maiores sola CG, demptis æqualibus CF', CF, remanebit F'G' major, quam FG. Id discrimen non erit satis sensibile, si distantia focalis GF sit satis magna respectu semiaperturæ GG' determinantis semidiametrum campi. Sed ubi adhibentur lentes distantiae focalis nimis exiguae ad habendum ingens augmentum, discrimen ipsum pariet illud incommodum, quod in pluribus telescopiis occurrit, ut protrusa lente BB versus objectivum, donec habeatur imago distincta in centro campi F, margo appareat confusus in F', & ad habendam distinctionem ibi, protrudenda sit adhuc magis ocularis ipsa, amissâ distinctione in centro.

67. Lens ocularis rite composita destruet eodem pacto colores  
in

in telescopio Galileano figuræ 2, quæ nimirum detorquebit per eandem rectam  $G'L'$  utrumque filum delatum per  $CG'$ , & reliqua omnia per rectas eidem rectæ quam proximas. Remanet tantummodo, ut doceamus, quo pacto determinandæ sint sphæricitates ad habendam lentem compositam tam convexam pro telescopio figurae 1, quam concavam pro telescopio figuræ 2, ut sit acromatica.

68. Lens composita, ut sit acromatica, debet conjungere in eodem puncto fila duorum colorum digressa ab eodem puncto. Formula (fig. 6 Tab. II) pro GI, quæ est distantia a lente puncti

$$\frac{I}{x} = \frac{m' - 1}{f'} + \frac{m - 1}{f} + \frac{1}{p}, \text{ ubi } x \text{ est valor GI post transitum per binas lentes, } p$$

distantia  $CG$  puncti dirigentis radios incidentes,  $m'$ ,  $m$  sunt valores pertinentes ad vim refractivam substantiarum, e quibus constant ipsæ lentes,  $f'$ ,  $f$  valores dati per radios sphæricitatum. Ad habendam unionem in eodem puncto I oportet valor  $x$  sit idem, sive ponantur in formula  $m'$ , &  $m$  pertinentes ad unum colorem, sive  $m' + dm'$ ,  $m + dm$  pertinentes ad alium, adeoque debet esse  $\frac{dm'}{f'} + \frac{dm}{f} = 0$ , sive  $\frac{I}{f'} = -\frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f}$ , &  $fdm' = -f'dm$ .

69. Valores  $f$ ,  $f'$  (num. 46) sunt dimidii radiorum sphæricitatis lentium isosceliarum æquivalentium, quorum alter cum debeat esse positivus, alter negativus, lens altera debebit esse convexa, altera concava: cum vero debeat esse  $fdm' = -f'dm$ , erit  $f': f :: dm': -dm$ , adeoque radii sphæricitatū debebunt esse in ratione directa valorum  $dm$  pertinentium ad substantias, ex quibus sunt compositæ. Quod si ponatur in valore  $\frac{I}{x}$  pro  $\frac{I}{f'}$  valor suus  $-\frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f}$ , habebitur  $\frac{I}{x} = -(m' - 1) \times \frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f}$

$$+ \frac{m - 1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{dm}{f} \times \left( -\frac{m' - 1}{dm'} + \frac{m - 1}{dm} \right) + \frac{1}{p}.$$

70. Si utraque lens sit ex eadem substantia ; erit  $m' = m$ , &  $dm' = dm$ , adeoque  $f' = -f$ ,  $-\frac{m'-1}{dm'} + \frac{m-1}{dm} = 0$ , unde evadit  $\frac{1}{s} = \frac{1}{p}$ . Nimirum  $f' = -f$  indicat sphæricitates lentium oppositas debere esse æquales, &  $s' = p$ , adeoque refractionem nullam, habentibus idcirco omnibus filis post transitum per lēntem compositam directionem eandem, quam habuerant ante, quod ostendit, non posse ad eam rem adhiberi vitra ex eadem substantia. Similis autem demonstratio evinceret, quemcumque numerum lentium contiguarum ex eadem substantia fore ineptum ad eam rem.

71. Præterea si lens debeat esse convexa, quod requiritur pro quovis objectivo, & pro oculari figuræ 1; debebit valor  $s'$  esse positivus etiam pro radiis parallelis, in quo casu  $\frac{1}{p} = 0$ : idem autem debet esse negativus pro lente concava. Id fieri non poterit, nisi valores  $\frac{m'-1}{dm'}$ ,  $\frac{m-1}{dm}$  fuerint inæquales, nimirum cum  $\frac{dm}{m-1}$  exprimat (num. 41) distractionem radiorum pari refractione; oportebit substantiæ adhibendæ habeant vires distractivas diversas. Quoniam (num. 60) utravis lens potest collocari prima versus objectivum; poterit assumi  $m$  pro substantia minus distractiva, pari refractione,  $m'$  pro magis distractiva, utrovis ordine deinde collocentur ex binæ lentes, licet in deducione formulæ positum sit  $m$  pro prima,  $m'$  pro secunda. Tum vero erit  $\frac{dm'}{m'-1}$  majus, quam  $\frac{dm}{m-1}$ , &  $\frac{m'-1}{dm'} \text{ minus, quam } \frac{m-1}{dm}$ , adeoque  $-\frac{m'-1}{dm'} + \frac{m-1}{dm}$  valor positivus. Quare cum valor  $dm$  sit semper positivus, debebit  $f$  esse valor itidem positivus pro lente composita convexa, negativus pro concava; adeoque ex binis lentibus conjungendis pro priore composita debebit fieri convexa ex substantia, quæ pari refractione minus distrahit, con-

cava ex distrahente magis : & vice versa pro composita posteriore.

72. Demum si differentia virium eo sensu distractivarum sit nimis exigua in binis substantiis ; ex erunt ineptæ ad efformandas ejusmodi lentes ; quia ex numeris 59, & 60 infertur, esse  $\frac{1}{x'} = \frac{1}{H} + \frac{1}{f}$ , ubi H est distantia focalis lentis compositæ : conferendo autem hunc valorem cum valore ejusdem fractionis, qui habetur in fine numeri 69, habebitur  $\frac{1}{H} = \frac{dm}{f} \times \left(-\frac{m-1}{dm}\right) + \frac{m-1}{dm}$ , sive ob  $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$  (numer. 50), adeoque  $\frac{dm}{f} = \frac{dm}{h(m-1)}$ , fiet  $\frac{h}{H} = \frac{dm}{m-1} \left(-\frac{m-1}{dm} + \frac{m-1}{dm}\right)$ . Is valor erit nimis exiguis, adeoque nimis exigua ratio distantiarum focalis lentis primæ convexæ respectu distantiarum focalis lentis compositæ, quæ posterior evadit nimis magna, nisi illa prior sit admodum exigua, quod fieri non potest, nisi sit admodum exiguis saltem alter e binis ejus radiis sphæricitatis cum curvatura nimis magna. Ubi autem agitur tam de objectivis, quam de ocularibus, radius sphæricitatis superficiei cuiusvis etiam unicæ nimis exiguis respectu distantiarum focalis impedit aperturam satis magnam, quæ in objectivo est necessaria ad habendam satis magnam copiam luminis transmissi, & impediendam obscuritatem, & in ocularibus ad habendum campum satis magnum. Apertura non potest fieri major diametro, sive duplo radio sphæricitatis, ut patet : debet autem esse multo minor ipso radio ad evitandos errores figuræ sphæricæ, quorum correctio ubi queritur, ut in objectivis, in quibus est omnino necessaria, supponitur in omnibus calculis apertura exigua respectu radii sphæricitatis, sine qua suppositione si ii destruantur in magna distantia a centro campi, non destruentur in medio campo. Adhibitis radiis sphæricitatum, qui admittant satis magnas aperturas, distantiarum focales prodibunt nimis longæ ; quod si habeatur in objectivo, requirit nimiam longitudinem tuborum, in oculari autem imminuit augmentum, quod pendet ab ejus distantiarum brevitate.

73. Hinc quamvis in vitris communibus inveniatur discriminus aliquod in distractione inducta pari refractione; ex substantiæ non possunt adhiberi ad ejusmodi usum, sed requiritur pro altera e lentibus conjugendis flint, vel strass, & hoc posterius est adhuc magis idoneum, cum (num. 37) habent majorem ejusmodi vim distractivam. Ea vis eo major inveniri solet, quo plus plumbi habetur in vitro. Generaliter eo aptiores erunt substantiæ conjugendæ cum vitro communi, quo major fuerit in iis valor  $\frac{dm'}{m'-1}$ , nimirum quo major differentia  $dm'$ , & minor valor  $m'$ . Valor  $m$  non solet augeri multum, adhuc tamen minus commode accidit, quod in flint, & strass, quæ adhiberi solent, cum valore  $dm'$ , crescit etiam valor  $m'$ . Verum cum in multo majore ratione crescat  $dm'$ , quam  $m'-1$ , adhiberi possunt, & hic proponemus dimensiones pro ocularibus, quæ convenient pluribus ex ejusmodi binis substantiis combinandis cum pluribus vitris communibus. Sed ad habendas dimensiones accuratas, patet ex hisce ipsis formulis, esse necessariam determinationem qualitatum refractivarum utriusque substantiæ.

74. Et quidem ad relationem mutuam radiorum sphæricitatis satis est habere solam rationem valorum  $\frac{dm}{dm'}$ , & ad relationem ipsorum ad distantiam focalem lentis compositæ requiritur præterea uterque valor  $m$ ,  $m'$ : nam prima continetur (numer. 68) in formula  $\frac{I}{f} = - \frac{dm}{dm'} \times \frac{I}{f'}$ , sive  $\frac{f}{f'} = - \frac{dm}{dm'}$ , secunda (num. 69) in formula  $\frac{I}{x} = - (m'-1) \times \frac{dm}{dm'} \times \frac{I}{f} + \frac{m-1}{f} + \frac{I}{p}$ , ubi omissa  $\frac{I}{p}$ , valor  $x'$ , evadit distantia focalis lentis compositæ  $H$ , adeoque habetur  $\frac{f}{H} = m-1 - \frac{dm}{dm'} \times (m'-1)$ : sunt autem  $f$ ,  $f'$  dimidii radii sphæricitatis isosceliarum æquivalentium (num. 46). Valores absoluti  $m$ ,  $m'$  requiruntur etiam pro corrigendo errore figuræ sphæricæ in objectivis. Ea ipsa tria, nimi-

rum  $m, m'$ ,  $\frac{dm}{dm'}$  inveniuntur admodum facile ope mei instrumenti methodo exposita in Opusculo I Tomi I.

75. Collectis omnibus, quæ deduximus ex formula binarum lentium, simul habebuntur sequentia theorematæ. *Lens ocularis acromaticæ non potest esse simplex: non potest componi e binis lenticibus constantibus ex eodem vitro: requirit duo vitra inducentia separationem colorum, pari refractione, non parum diversam, quæ nimirum habeant valores  $\frac{dm}{m-1}$  non parum diversos: quo majus est eorum valorum discriminæ in binis vitris, eo ipsa aptiora sunt ad componendam lentem acromaticam: debet pro lente composita convexa fieri convexa lens e materia minus distrahente, ut vitro communi, & concava e materia magis distrahente, ut flint, vel strass: ratio radiorum sphæricitatis lentium isoscelitatum æquivalentium debet esse eadem, ac ratio valorum  $dm$  pertinentium ad earum substantias.* Accedunt sequentes formulæ, quæ vel sunt ipsæ propositæ, vel ex ipsis facile deducuntur. Factis radiis sphæricitatum substantiarum minus distrahentis  $a, -b$ , magis distrahentis  $a', -b'$ , &  $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$ , ac ratione sinuum in illa  $m$ , in hac  $m'$ , cum differentiis pro binis filis coloratis  $dm$ ,  $dm'$ , distantia focali lentis compositæ  $H$ ; habebuntur hujusmodi binæ æquationes  $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f}$ ,  $\frac{1}{H} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} = \frac{1}{f} \times (m-1 - \frac{dm}{dm'}(m'-1))$ .

76. Quoniam binæ sunt æquationes pro efformanda lente acromaticæ distantiarum focalis datæ, & valores determinandi sunt quatuor, nimirum  $a, b, a', b'$ ; remanent binæ determinationes arbitrariorum. Ubi agitur de objectivo, aliam determinationem requirit correctione erroris figuræ sphæricæ: ea in ipso est maxime necessaria; cum in aperturis majoribus, quas ea objectiva requirunt, is error crescat ita, ut evadat admodum sensibilis in majore illa distantia focali, quæ objectivo tribui debet, ad habendum augmen-

tum

tum satis magnum. Ea esset utilis etiam in oculari potissimum ad evitandum aliud vitium, quod s<sup>e</sup>pe occurrit in telescopiis habentibus campum satis magnum cum satis magno augmento. Id vitium consistit in eo, quod lineæ rectæ objecti detorqueantur ad arcus incurvos, atque eo magis curvatos, quo magis distant a centro campi. Provenit autem ex eo, quod distantia GI non est eadem pro ipsis filis homogeneis incurrentibus in omnia puncta aperturæ, sed major pro incurrentibus prope centrum, quam pro incurrentibus in majore distantia ab ipso; unde fit, ut & augmentum imaginis prope margines campi sit majus, quam prope centrum, & distantiae punctorum objecti a centro campi augeantur in majore ratione pro punctis remotioribus ab ipso centro, quam pro propriis (\*).

77. Adhuc tamen, si apertura ocularium non sit nimis magna respectu radiorum sphæricitatis; id vitium non evadit sensibile, & aliunde correctio erroris figuræ sphæricæ requirit calculum multo complicatiorem, & ipsam ejusmodi lentium constructionem magis molestam. Plura, quæ ad ipsam pertinent, proponemus in capite secundo: hic autem insistemus soli correctioni colorum, quæ admittit determinationes multo simpliciores adhibitis tantummodo formulæ numeri 75, & assumptis reliquis determinationibus arbitrariis. Poterunt autem pro unica lente convexa e vitro communis adhiberi etiam binæ convexæ ex eodem, quod evadit utile ad evitandam nimiam brevitatem radiorum sphæricitatis, quam in ea requirit lens concava ejus socia præstans effectum refractionis contrarium, qui ejus focum amandat ad distantiam multo maiorem eâ, quæ haberetur per ipsam solam. Habetur semper lens simplex æquivalens compositæ ex pluribus ejusdem materiæ, quæ sola habens curvaturam maiorem præstabit in ordine ad refractionem, & distractionem effectum eundem, quem præstant illæ omnes habentes curvaturas minores.

78. Si pro iis binis dicantur F, & F', quod in ea unica est f,  
& di-

(\*) Omnis theoria pertinens ad hanc curvaturam exponetur uberiorius in secundo capite hujus Opusculi, adjecta figurâ ad rem idoneâ.

& dicatur  $\omega$  distantia focalis tam ejus solius, quam compositæ ex iis binis; erit  $\frac{1}{\omega} = \frac{m-1}{F} + \frac{m-1}{F}$ , adeoque  $\frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F}$ .

Inde determinari potest, quod pertinet ad ipsas, quæ deinde collocari poterunt vel conjunctæ immediate, vel interpositæ inter ipsas lente illâ aliâ ex materia magis distrahente, cum (num. 60) quocumque ordine ponantur plures lentes conjunctæ, habeatur eadem communis distantia focalis, neglecto errore figuræ sphæricæ, & neglectâ lentium crassitudine.

79. Assumemus pro binis lentibus binas suppositiones, quarum singulæ continebunt binas determinationes arbitrarias: prior assumet lentem utramque isosceliam, posterior isosceliam eam, quæ est ex materia magis distrahente, & superficiem internam ejus, quæ est ex minus distrahente, congruentem cum internâ isosceliæ. Pro tribus lentibus, quarum binæ ex materia minus distrahente, & intermedia ex magis distrahente, assumemus præterea eas binas prorsus æquales, intermedium vero isosceliam, & eas binas in prima suppositione itidem isoscelias, in secunda cum superficiebus internis itidem congruentibus (\*). Ex suppositiones cum binis æquationibus determinant omnes radios sphæricitatis; sed hinc assumemus pro unitate radium sphæricitatis lentis isosceliæ, quæ est ex materia magis distrahente: invento valore distantia focalis in ejusmodi unitatibus, habebitur relatio omnium radiorum sphæricitatis ad eam ipsam distantiam, quâ data in aliis unitatibus quibuscumque, ut in lineis pedis Parisiensis, invenientur facile reliqui radii omnes in iisdem.

80. Ex quatuor positiones exhibebunt eosdem prorsus numeros pro radiis lentis compositæ convexæ, & concavæ, cum eo solo discrimine, quod in composita convexa lens e vitro magis distrahente erit concava utrinque, reliquâ, vel reliquis binis convexis;

(\*) Has ipsas suppositiones assumpsimus etiam in secundo Opusculo Tomi I, ubi & formulas eruimus pro iisdem hisce combinationibus respondentes unitati ibi adhibitæ, & theorematæ deduximus, ac regulas finales, quæ cum his vel penitus congruunt, vel ad hasce facile reducuntur.

xis; in concava e contrario illa erit convexa, hæc, vel hæc concavæ. Haberentur octo systemata pro lente composita: sed cum iidem valores obveniant pro composita convexa, & concava, permutatis tantummodo convexitatibus, & concavitatibus, remanent sola quatuor. Duplicabitur eorum numerus, si pro vitræ agis distrahente adhibeatur vel flint, vel strass, pro quorum priore assumatur  $\frac{dm}{dm'} = \frac{2}{3}$ , & pro posteriore  $= \frac{1}{2}$ , ut haberi solet in ipsis satis proxime. Ex solæ suppositiones determinabunt relationem radiorum sphæricitatis omnium ad se invicem: pro relatione ipsorum ad distantiam focalem communem assumendi erunt itidem valores  $m, m'$ , qui parum abludant in iis vitris a valore  $\frac{3}{2}$ . Eruemus inde octo systemata pro lente composita convexa, & totidem cum iisdem numeris habebuntur pro concava: erunt quatuor pro flint, & totidem pro strass: ex iis quatuor bina pro binis lentibus, alia bina pro tribus: ex iis binis unum pro lentibus omnibus isosceliis, & alterum pro superficiebus internis congruentibus.

81. Porro exhibendi erunt prius valores algebraici, ut determinatis accuratius singularum substantiarum valoribus  $m, m'$ ,  $\frac{dm}{dm'}$ , possit institui calculus accuratior: tum adhibebimus numeros simpliciores ex suppositione  $m = m' = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$  &  $\frac{dm}{dm'} = \frac{2}{3}$ , vel  $= \frac{1}{2}$ . Poterit autem fieri  $\frac{dm}{dm'} = u$  ad faciliorem scriptiōnem, quod & hæc superius præstitimus, & passim in tomo I.

82. Pro binis lentibus componentibus ocularem convexam erit (num. 79)  $a' = -b' = -1$ . Hinc  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} = -1 - 1 = -2$ . Sed  $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f} = -\frac{u}{f}$ . Quare  $\frac{u}{f} = 2$ , &  $f = \frac{1}{2}u$ . Si lens convexa fuerit isoscelia; erit  $a = -b = 2f = u$ : pro flint  $a = \frac{2}{3}$ , pro strass  $a = \frac{1}{2}$ . Si binæ superficies internæ debeat congruere; erit  $b = a' = -1$ . Hinc ob  $\frac{u}{f} = 2$ , erit  $\frac{2}{u} = \frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + 1$ , &  $\frac{1}{a} = \frac{2}{u} - 1$ . Pro

Pro flint  $\frac{1}{a} = 2 \times \frac{3}{2} - 1 = 2$ , &  $a = \frac{1}{2}$ . Pro strass  $\frac{1}{a} = 2 \times 2 - 1 = 3$ , &  $a = \frac{1}{3}$ . Inde habentur relationes radiorum ad se invicem. Pro distantia focali lentis tam duplicis quam triplicis valor  $\frac{1}{H}$  est idem. Nam ex num. 60 valor  $\frac{1}{H}$  pro duabus lentibus est  $= \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} = \frac{2(m-1)}{u} = 2(m-1)$ : pro flint, & strass  $m-1 = m'-1 = \frac{1}{2}$ , adeoque  $\frac{1}{H} = \frac{1}{u} - 1$ , nimirum pro flint  $\frac{1}{H} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ , &  $H = 2$ , pro strass  $\frac{1}{H} = 2 - 1 = 1$ , &  $H = 1$ .

83. Si adhibeantur lentes tres, quarum binæ extremæ similes, & æquales; valor intermediæ erit idem, ac prius, & binæ extremæ simul æquivalebunt uni: erit nimirum  $F' = F$ , &  $\frac{m-1}{F} + \frac{m'-1}{F'}$ , qui valor (num. 78) est  $= \frac{m-1}{f}$ , erit  $= \frac{2(m-1)}{F}$ , adeoque  $\frac{2}{F} = \frac{1}{f} = \frac{2}{u}$ , sive  $\frac{1}{F} = \frac{1}{u}$ . Si eæ fuerint isosceliæ, & radius sphæricitatis primæ  $= a$ , erit  $\frac{2}{a} = \frac{1}{F} = \frac{1}{u}$ , adeoque  $a = 2u$ , nimirum in flint  $= \frac{4}{3}$ , in strass  $= 1$ . Si superficies internæ debeat congruere; erit adhuc  $b = a = 1$ , adeoque  $\frac{1}{u} = \frac{1}{F} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + 1$ , &  $\frac{1}{a} = \frac{1}{u} - 1$ : nimirum in flint  $\frac{1}{a} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ , &  $a = 2$ , in strass  $\frac{1}{a} = 2 - 1 = 1$ , &  $a = 1$ . En igitur denominations & formulas.

Ratio sinuum in substantia distrahente  $\left\{ \begin{array}{l} \text{minus . . . . . } m \\ \text{magis . . . . . } m' \end{array} \right.$

Ratio differentiarum eorum valorum . .  $\frac{dm}{dm'} = . . . . . u$

Radii sphæricitatum lentis distrahit  $\left\{ \begin{array}{l} \text{minus . . . . . } a, b \\ \text{magis . . . . . } a', b' \end{array} \right.$   
 Distantia focalis omnium simul . . . . . H

## EQUATIONES GENERALES PRO COMPOSITA CONVEXA.

Positio arbitraria . . . . .  $a' = -b' = -1$

Pro distantia focali . . . . .  $\frac{1}{H} = \frac{2(m-1)}{u} - 2(m'-1)$

Pro casu  $\left\{ \begin{array}{l} \text{si prima sit isoscelia . . . . . } a = -b = u \\ \text{binarum . . . . . } \text{si superficies internæ congruant } \frac{1}{a} = \frac{2}{u} - 1, b = -1 \end{array} \right.$

Pro casu  $\left\{ \begin{array}{l} \text{si prima sit isoscelia . . . . . } a = -b = 2u \\ \text{trium . . . . . } \text{si superficies internæ congruant } \frac{1}{a} = \frac{1}{u} - 1, b = -1 \end{array} \right.$

In hoc casu trium lentium tertia debet esse æqualis, & similis primæ.

85. Si pro vitro communi, & flint adhibeantur  $m = 1 \frac{1}{2}$ ,  $m' = 1 \frac{1}{2}$ ,  $\frac{dm}{dm'} = u = \frac{2}{3}$ ; habebuntur hujusmodi determinationes.

Lens e flint erit utrinque concava isoscelia, & radius ejus sphæricitatis debebit fieri dimidius distantiae focalis totius lentis compositæ: lens e vitro communi erit utrinque convexa. Ea in casu lentis compositæ e binis erit sola, & si sit isoscelia, habebit radium sphæricitatis  $\frac{2}{3}$  radii concavæ,  $\frac{1}{3}$  distantiae focalis: si habuerit superficiem internam congruentem; radius ipsius erit æqualis radio concavæ, dimidius distantiae focalis, radius externæ dimidius radii internæ, quadrans distantiae focalis. In casu lentis compositæ e tribus duæ erunt convexæ, & si sint isosceliæ, habebunt radium  $\frac{4}{3}$  radii concavæ,  $\frac{2}{3}$  distantiae focalis: si superficies internæ congruant, ex lentes habebunt radium superficiei internæ itidem æqualem radio concavæ, dimidium distantiae focalis: radius autem externæ erit duplus radii internarum, æqualis distantiae focali.

86. Quod si adhibetur vitrum commune, & strass, ac sup-

Tom. II.

G

po-

ponatur esse  $m = m' = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{dm}{dm'} = \frac{1}{2}$ ; fiet lens concava ex ipsis strass cum radio sphæricitatis æquali distantiæ focali: tum una, vel duæ convexæ e vitro communi: si adhibeatur una isoscelia; debet habere radium sphæricitatis dimidium radii prioris: si debent superficies internæ congruere; fiet radius internæ æqualis radio prioris, radius externæ ejus triens. Si autem adhibeantur duæ isosceliæ e vitro communi; debet radius omnium sphæricitatum esse æqualis radio prioris, ubi habebitur isoscelismus cum congruentia.

87. Pro lente composita concava lens e substantia magis distrahente erit convexa, ex minus distrahente una utrinque concava, vel binæ utrinque concavæ: mensuræ autem radiorum erunt eadem, ac in lente composita convexa tam relatæ ad se invicem, quam relatæ ad distantiam focalcm foci virtualis.

88. Combinatio, in qua superficies internæ congruant, erit magis idonea ad conservandam vim luminis: nam in transitu immediato e vitro in vitrum vel habetur unica refraction, & ea perquam exigua, vel nulla: at ubi inter binas lentes interponitur aer, habetur satis copiosa reflexio tam in egressu e priore vitro in aerem, quam in ingressu ex aere in vitrum posterius. Sed oportet, superficies sint accuratissime æquales, ut prorsus congruant: si enim remaneat inter ipsas intervallum tenuissimum; tum oritur ibi aliud colorum genus ortum ex alio capite, nimirum ex iis, quas Newtonus appellat vices facilitatis reflexionis, & facilitatis transmissus, ex quibus pendent colores laminarum tenuum. Hinc quicumque non speret accurationem in æqualitate, & congruentia superficierum, debet præferre systemata, in quibus omnes lentes tam convexæ, quam concavæ sint isosceliæ.

89. Sic evolvimus, quæcumque pertinent ad remedium adhibendum per unicam ocularem compositam. Ea quidem tollet colores, qui induci solent ab ocularibus; sed non erit idonea pro telescopiis astronomicis, in quibus quæritur satis magnum augmentum, saltem si cum vitro communi adhibeatur flint, vel etiam si exhibito strass, adhibeantur in compositione lentes tan-

tum-

tummodo duæ . Nam distantia focalis lentis compositæ evadit multo major , quam sit distantia focalis singularum componentium e vitro communi ; adeoque ut distantia focalis lentis compositæ sit exigua , quod requiritur ad habendum augmentum satis magnum , radii sphæricitatum debent fieri nimis breves , quod impedit aperturam satis magnam , adeoque minuit campum .

90. Id remedium est magis idoneum pro telescopiis exiguis , quæ adhiberi solent cum constructione Galileana ocularis concavæ , cum in iis ( num. 29 ) non debeat haberi augmentum nisi exiguum . Hinc potest adhiberi ocularis composita etiam ex duabus tantummodo lentibus . Fiet convexa ex flint cum radio sphæricitatis dimidio ejus distantia focalis , quam debet habere lens composita ; ac illi addetur concava isoscelia , quæ habeat radium sphæricitatis  $\frac{2}{3}$  radii convexæ , nimirum  $\frac{1}{3}$  distantia focalis totius compositæ : vel fiet convexa e strass cum radio sphæricitatis æquali ejus distantia focali , quam debet habere lens composita ; ac illi addetur concava isoscelia , quæ habeat radium sphæricitatis trientem radii convexæ , adeoque trientem etiam distantia focalis lentis compositæ .

91. Ego quidem , ut jam innui in capite II Opusculi I Tom. I curavi fieri telescopiola cum ejusmodi oculari concava acromaticæ , quod successum habuit egregium : caruerunt coloribus , & distinctionem habebant singularem . Satis commodus occurret inferius usus ocularis acromaticæ etiam in systemate trium ocularium ; sed antequam agamus de eo systemate , agemus in paragrapho sequenti de systemate duarum tantummodo , & ostendemus methodum expeditam liberandi telescopia astronomica invertentia objectum a coloribus ocularium adhibitis binis ocularibus tantummodo , quarum utraque sit ex eodem etiam vitri genere , ut ex quovis vitro communi .

## §. IV.

*De remedio adhibendo coloribus ocularium per binas oculares simplices ex eodem etiam communi genere vitri (\*).*

92. SINT in fig. 7 puncta A, C, A, D, D', B, G, G', B, I, i eadem, ac in fig. 3 Tab. I, & lens HKH (fig. 7 Tab. II) occurrat axi in punto K inter puncta I, G: excipietur filum rubeum in puncto L remotore a centro suo K, violaceum in puncto l propiore: hinc angulus refringens binarum superficierum lentis, qui (num. 42) est eo major, quo magis receditur a centro ipsius, erit major in L, minor in l: poterit ita augeri refractio fili rubei, minui refractio violacei, ut, compensata minore refrangibilitate

(\*) Quæcumque in superioribus proposita sunt pro combinatione plurium lentium simplicium, non respiciunt nisi distantias focales ipsarum ita, ut quæ demonstrata sunt de separatione colorum, quæ ab ipsis inducitur, locum habeant, quæcumque adhibeatur combinatio sphæricitatum binarum superficierum ex iis numero infinitis, quæ juxta num. 45 exhibent eandem distantiam focalem. Itidem, quæ in præcedenti paragrapgo proposita sunt de remedio adhibendo coloribus ocularium per unicam lentem acromaticam conjunctam cum binis simplicibus, non respiciunt nisi solas distantias focales earundem simplicium. Eodem pacto quæcumque proponentur in hoc, & in sequenti paragrapgo tam pro determinatione anguli, quo bini radii diversæ refrangibilitatis dígressi ab eodem puncto objecti sito extra axem telescopii, & transeuntes per centrum objectivi inclinantur ad se invicem, quam pro correctione, qua fiat, ut egrediantur ab oculari postrema per rectas parallelas, locum habent itidem, quæcumque adhibeatur combinatio radiorum sphæricitatis pro singulis lentibus ad habendam eandem distantiam focalem, quæ sola occurret in formulis adhibendis: licebit considerare singulas etiam, ut isoscelias. Discrimen ortum ab ea diversa earum sphæricitatum combinatione nihil aut prodest, aut obest, ubi agitur, ut in hoc primo capite, de solis ocularium coloribus. Hinc habebimus huc pro æqualibus lentes, quæ habeant distantias focales easdem. Hisce distantias focalibus determinatis relinquetur indeterminatio orta ex libertate adhibendi diversas earundem sphæricitatum combinationes, quæ exhibeant eandem distantiam focalem. De his agemus in capite II, ubi earum consideratio occurret pro corrigendis, vel minuendis incommodis ortis ab errore sphæricitatis.

litate illius per excessum anguli refringentis , prodeant per rectas LVM , *lm* parallelas inter se , quod fieri non posset , si punctum K jaceret ultra I , ut in fig. 3 Tab. I , ubi angulus refringens in L est minor , quam in *l* .

93. Is parallelismus obtineri potest infinitis modis , sed oportet ita res disponere , ut radii digressi ex eodem puncto objecti , qui in fig. 1 convenient in focis F', f' , prodeant paralleli , vel accurate , vel proxime pro diversa oculorum constitutione , & alia evitentur incommoda , ut illud , ne punctum dirigens ejusmodi radios incidentes in lentem quampiam sit ipsi nimis proximum , quod si accidat , minimi ipsius defectus , minima pulvisculi granula ipsi adhaerentia cadunt sub aspectum ; cum intercipiant omnes radios provenientes ab eodem objecto puncto (\*) : vitandum itidem , ne ad habendum augmentum satis magnum , aliquis sphæriticatis radius sit ita exiguus , ut impedit aperturam sufficientem pro campo satis magno .

94. En combinationem maxime expeditam , & quæ iis tribus faciat satis . Sit lens HH (fig. 7. Tab. II) ex eadem substantia , ac BB , & habeat distantiam focalem æqualem trienti distantiaæ focalis ipsius BB , quæ (num. 30) est proxime æqualis GI , & col-

loce-

(\*) Id quidem facile perspicitur considerando in fig. 1 partem superficii *h'h'* occupatam a radiis digressis ab eodem punto objecti positi in directione CD'. Si granum pulveris adhaerens ipsi superficie fuerit majus eo spatio ; intercipiet omnes radios digressos ab eo punto , quod idcirco non cadet sub sensum visus , sed ejus loco nigricans macula , etiam si id punctum pertineat ad objectum lucidissimum : sed si id granum sit minus eo spatio ; intercipiet quidem partem eorum radiorum , sed pars alia incidens in superficiem ipsam hinc , & inde ab eo punto transmissa ad oculum , & collecta demum in ejus fundo excitabit ejus visionem : & quidem si id granum fuerit multo minus eo spatio ; pars residua multo major parte intercepta id efficiet , ut defectus hujus non animadvertisatur . Porro quo focus f' fuerit propior lenti , eo spatum *h'h'* erit minus , adeoque eo minora pulvisculi granula intercipient vel omnes ejusmodi radios , vel maximam illorum partem , adeoque sub sensum cadent . Id spatum erit semper multo minus , quam exprimatur hic a figura ; quia apertura objectivi AA erit multo minor respectu distantiaæ focalis Cf' , quæ hic exhibetur major ad reddendam figuram magis sensibilem . Hinc sine præcautione hic proposita sensibilia fient granula admodum exigua .

locetur ita, ut GK sit dupla ejus distantiae focalis, cui idcirco erit proxime æqualis KI. Filum rubeum G'L, & violaceum G'V prodibunt per rectas LM, lm proxime parallelas, quod sic demonstratur.

95. Cum GK sit dupla distantiae focalis lentis HH pro radiis rubeis; fila rubea digressa ex G coirent (num. 56) post transitum per lentem HH in axe in distantia æquali ipsi GK, adeoque & fila rubea digressa ex G' coirent (num. 49) in puncto M rectæ G'K transeuntis per K centrum lentis ad distantiam proxime æqualem GK: & quidem ob G'K paullo majorem, quam GK esset KM paullo minor ipsâ G'K. Est autem etiam G'L paullo minor, quam G'K, & LM paullo major, quam KM. Quare G'L erit proxime æqualis LM, & G'V, lM proxime æquales. Quoniam autem ob viciniam punctorum L, K, anguli KLI, KIM non multum differunt ab angulo recto, si concipientur ex l duæ perpendiculari in LI, LM, ea parum different a recta Ll, adeoque multo minus a se invicem; etiam anguli LG'V, LMl erunt proxime æquales inter se.

96. Filum autem violaceum G'V prodibit per rectam lm jacentem in angulo KIM, & angulus mIM erit differentia refractionum Mli, mli pertinentium ad fila rubeum, & violaceum, quæ concipientur simul advenientia per G'V, ut producta CG' in E, angulus LG'V est differentia refractionum LG'E, lG'E pertinentium ad fila rubeum, & violaceum simul advenientia per rectam CG', quæ differentiæ debent habere (num. 41) ad ipsas refractiones Mli, LG'E eandem rationem valorum dm ad m - i pertinentium ad eandem earum lentium substantiam.

97. Porro refractione LG'E est proxime æqualis refractioni Mli. Nam angulus Mli est proxime æqualis angulo MLI ob viciniam punctorum L, l, & I, i: etiam MLI est proxime æqualis angulo CIG'; quia si LM occurrat axi in V; fila rubea KI, LI, quæ convergebant ad focum I lentis HH, convergent ad distantiam KV dimidiam KI (num. 56). Quamobrem IV erit proxime = VK, adeoque proxime = VL ob viciniam punctorum L, K, & angulus VLI, sive MLI proxime = VIL, sive = CIG'. De-

mum  $CIG'$  est proxime  $\equiv IG'E$  ob alterum internum  $ICG'$  di-  
midium campi simplicis multo minorem ipso aucto in  $CIG'$  per  
telescopium. Quare primus ille  $Mli$  est proximus ipsi  $IG'E$ ,  
adeoque binæ refractiones rubei in  $G'$ , & in  $l$  proxime æquales,  
& idcirco etiam proxime æquales eorum partes similis  $LG'$ ,  
 $Mlm$ , quæ sunt differentiæ earum refractionum filii rubei, &  
violacei. Cum igitur  $LMI$  sit proxime æqualis  $LG'$ ; erunt proxi-  
me æquales  $LMI$ ,  $Mlm$ , &  $LM$ ,  $lm$  proxime parallelæ.

98. Admovendo nonnihil lentem  $HH$  lenti  $BB$ , & eam re-  
movendo, facile invenietur situs parallelismi, vel ejus exiguae  
inclinationis eorum filorum ad se invicem, quæ efficiat, ut ea  
fila uniantur in fundo oculi correctâ illâ separatione  $NG'n$ , quam  
induxerat lens prima. Ea admotio, & remotio facta ab artifice  
multo facilius corriget effectus quantitatum exiguarum, quæ in  
hac demonstratione neglectæ sunt una cum effectu neglectæ cras-  
situdinis vitri, quam longissima investigatio corundem effectuum  
facta per geometriam, vel calculum. Quæ diximus, abunde sunt ad  
evincendum, binas lentes ex eadem materia, quarum altera ha-  
beat distantiam focalem triplam alterius, debere saltem proxime  
corrigere separationem colorum inductam a prima lente, si col-  
locetur minor post majorem in distantia proxime dupla distantia  
focalis ipsius. Videndum jam, ubi collocandum sit hoc binarum  
lentium systema respectu objectivi  $AA$ , & an in eo evitentur  
illa alia incommoda, quæ diximus evitari debere.

99. Ad habendam distinctionem debet lens  $HH$  reddere proxi-  
me parallelos inter se radios delatos ab eodem unico punto ob-  
jecti remoti sito in axe telescopii, quos objectivum solum colli-  
geret in suo foco posito alicubi in eodem axe in  $F$ . Quare ea  
lens (num. 55) debet eos excipere digressos e suo foco citerio-  
re  $O$  posito ad distantiam focalem  $KO = KI$ , remanente ita &  
 $GO = KO = \frac{1}{3} GI$ . Hinc lens  $BB$  debet efficere, ut ii uniantur  
in  $O$ ; cumque  $GO$  sit minor, quam ejus distantia focalis  $GI$ ,  
debet (num. 55) ipsos excipere convergentes; adeoque ipsa lens  
 $BB$  debet collocari citra focum objectivi  $F$ . Distantia autem  $GF$   
ipsius lentis ab eo foco sic facile invenietur.

100. In formula (num. 50)  $\frac{I}{x} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$ , applicata ad hanc lentem erit  $GI = h$ ,  $GO = x = \frac{I}{3}h$ ,  $GF = p$ , qui valor quæritur. Erit  $\frac{3}{h} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$ , adeoque  $\frac{2}{h} = \frac{I}{p}$ , &  $p = \frac{I}{2}h$ . Quare systema earum binarum lentium debet ita collocari, ut prima jaceat citra focum objectivi ad distantiam dimidiam suæ distantiae focalis. Ea distantia est major, quam in simplici telescopio astronomico figuræ i Tab. I esset distantia FG a lente BB; si pro ipsa adhiceretur hæc HH. Nam in eo casu esset ipsa FG æqualis distantiae focali ejus lentis, & hæc est æqualis  $\frac{1}{2}GI = \frac{3}{2}KI$ ; quæ KI est distantia focalis hujusce lentis HH: adeoque focus F distat a lente BB multo plus, quam distaret in eo telescopio habente eam unicam ocularem, quod evitat nimiam viciniam, quam vidimus debere evitari. Distantia vero foci O a lente HH non potest esse minor eâ, quæ habetur hæc, quæ est ejus distantia focalis.

101. Augmentum poterit esse satis magnum cum campo satis magno; erit enim ipsum augmentum duplo majus, quam si adhiceretur unica lens BB, quia augmentum determinaretur ab angulo GIG', sive VIL, & determinatur ab angulo KVL, qui est duplus ipsius VIL, cum æquatur binis internis, & oppositis VIL, VLI proxime æqualibus, & quidem in accessu puncti L ad centrum campi K. ii duo anguli accedunt ad æqualitatem in infinitum, & augmentum ad duplum augmenti habendi per solam lentem BB. Hinc ea lens poterit fieri duplo minus convexa, quam alia, quæ sola præstaret idem augmentum: sic & ejus apertura potest fieri duplo major, quæ duplicata duplicabit campum. Lens HH non cogit imminuere eam aperturam; quia semiaperturæ GG', KL necessariæ ad transmittendum eundem radium CG' determinantem punctum extreum campi sunt proportionales distantias GI, KI focalibus earum lentium, quæ lentes idcirco possunt fieri prorsus similes ita, ut accipient eosdem numeros graduum in suis arcibus.

102. Posset generaliter solvi problema, quærendo distantiam fo-

focalem secundæ lentis ex quacumque etiam diversa substantia, ac ejus distantiam a prima BB, quæ inducunt parallelismum filorum LM, lm: id problema remanebit indeterminatum. Sint earum lentium distantiæ focales  $h, h'$ , cum suis valoribus  $m, m'$ , ac fiat  $GK = z$ , & datis  $m, m', h$ , quæratur  $h'$ , considerando GI, ut æqualem  $h$ . In formula (num. 50)  $\frac{z}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$  erit  $h = h'$ ,  $KI = p = h - z$ ,  $KV = x$ , adeoque  $\frac{z}{x} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h-z} = \frac{h+h'-z}{h'(h-z)}$ . Assumpto  $VK = x$  pro VL, & angulo IG'E, qui dicatur  $\alpha$ , pro VIL, erit  $VL = x : VI = h-z - x :: VIL = \alpha : VLI = \frac{\alpha(h-z)}{x} - \alpha$ , qui poterit haberi pro æquali refractioni Mli. Hinc (numer. 41)  $LG'l = \frac{adm}{m-1}$ , &  $Mlm = \frac{adm'(h-z)}{x(m'-1)} - \frac{adm'}{m'-1} = \frac{adm'(h-z)(h+h'-z)}{h'(h-z)(m'-1)} - \frac{adm'}{m'-1} = \frac{adm'(h+h'-z)}{h'(m'-1)} - \frac{adm'}{m'-1}$ .

103. Cum G' sit punctum dirigens radios rubeos incidentes in lentem HH, & M refractos; si fiat  $KM = u$ , in formula  $\frac{z}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ , erit  $x = KM = u$ ,  $h = h'$ ,  $p = -KG' = -KG = -z$ , adeoque  $\frac{z}{u} = \frac{1}{h'} - \frac{1}{z} = \frac{z-h}{h'z}$ . Porro assumptis KM, KG pro LM, LG', erit  $LM = u : LG' = z :: LG'l = \frac{adm}{m-1} : LMI = \frac{azdm}{u(m-1)} = \frac{azdm(z-h')}{h'z(m-1)} = \frac{azdm}{h'(m-1)} - \frac{adm}{m-1}$ . Hic valor debet fieri  $= Mlm = \frac{adm'(h+h'-z)}{h'(m'-1)} - \frac{adm'}{m'-1}$  ad habendum parallelismum rectarum LM, lm; adeoque, instituta divisione per  $\alpha$ , obtinebitur sequens æquatio  $\frac{zdm}{h'(m-1)} - \frac{dm}{m-1} = \frac{dm'}{h'(m'-1)} \times (h+h'-z) - \frac{dm'}{m'-1}$ .

104. In ea æquatione habentur binæ indeterminatæ,  $h'$  exhibens speciem lentis secundæ per suam distantiam focalem, &  $z$  exhibens ejus collocationem per distantiam a prima: solutiones haberi poterunt infinitæ numero, assumptâ ad arbitrium alterâ ex iis, vel quapiam relatione alterius ad alteram. Sed cavendum, ne facta ea determinatione arbitraria, duta deinde determinatur positio primæ lentis respectu foci objectivi F necessaria ad hoc, ut secunda lens excipiat radios, qui pertinent ad idem punctum objecti, divergentes a foco ejus citeriore O, distantia ejusdem primæ lentis ab objectivo obveniat ita exigua, ut evadat erronea suppositio facta distantia KI proxime æquali distantia focali rædiorum parallelorum, & anguli VIL proxime æqualis angulo IGE, ac præterea augmentum fiat nimis exiguum.

105. Determinatio maxime omnium expedita est illa, qua superiorius usi sumus, in qua utraque lens est ex eadem substantia, extente  $\frac{dm'}{m'-1} = \frac{dm}{m-1}$ , & KI est distantia focalis lentis secundæ, quod reddit  $h - z = h'$ , adeoque  $z = h - h'$ : tum enim æquatio finalis numeri 103 evadet  $z = h + h' - z$ , sive  $h - h' = zh'$ , &  $h' = \frac{1}{3}h$ : nimirum erit  $KI = \frac{1}{3}GI$ , &  $GK = 2KI$ , uti posuimus. Hæc analysis illam determinationem exhibuit, quam immediate proposuimus, & demonstravimus more synthetico.

106. Ut ea, quæ inventa sunt, unico intuitu videnda pateant, en remedium adhibendum telescopiis astronomicis ad tollendos colores inductos ab ocularibus. Capiantur binæ lentes convexæ ex eodem vitro communi quocumque, quarum prima habeat distantiam focalem, & aperturam triplam secundæ: collocentur in distantia a se invicem dupla distantia focalis minoris: prima collocetur citra focum objectivi in distantia ab ipso æquali dimidiæ suæ distantia focalis. Augmentum erit duplum ejus, quod præstaret prima lens sola, & campus æqualis illi, quem haberet ipsa sola.

107. Ad habendam correctionem accuratiorem potest secunda lens

lens aptari tubulo, qui possit moveri intra tubulum primæ, ut admovendo, & removendo nonnihil ipsam ab altera inveniatur locus correctionis maximæ. Distinctio pro diversa oculorum constitutione poterit obtineri tam protrudendo tubulum majoris intra tubum objectivi, ut totum systema mutet distantiam respectu ipsius objectivi, quam protrudendo solum tubulum secundæ intra tubulum primæ, quod non turbabit ad sensum extinctionem colorum.

108. Hic secundus motus erit magis opportunus; si adhiberi debet micrometrum. Ipsum non potest apponi nisi in situ O, in quo solo formatur imago objecti, nimirum in distantia a prima lente æquali trienti sue distantiae focalis, quæ est tota distantia focalis secundæ lentis. Ad hoc ut partes ejus micrometri subtendent in cælo eundem numerum minutorum pro oculis omnibus, debet retineri constans distantia primæ lentis ocularis ab objectivo, relieto motu secundæ soli.

109. In eodem loco debet collocari diaphragma, quod campi marginem determinet. Ipsius aperturam determinabit recta OT perpendicularis axi occurrens radio GI extremo aperturæ lentis ocularis primæ in T. Cum sit KO æqualis & ipsa distantia focali lentis secundæ = KI, erit OI =  $\frac{2}{3}$  GI, adeoque & OT =  $\frac{2}{3}$  GG'. Hinc apertura diaphragmatis erit  $\frac{2}{3}$  aperturæ ocularis primæ. Debet fieri potius tantillo angustior, quam amplior: si fiat amplior; evadit prorsus inutilis.

110. In eo telescopio objectum apparebit inversum: posset fieri etiam telescopium, quod per duas oculares tantummodo exhibeat objectum directum, sed in eo separatio colorum, de qua hinc agimus, evitari non posset, nisi facta acromaticâ utrâque oculari, præter quam quod id telescopii genus habet plura alia incommoda adnexa, quorum causâ id quidem non est in usu.

111. Ad eam rem secunda ocularis HH (fig. 8) collocanda esset post I ad distantiam IK majorem ejus distantiae focali OK: tum radius rubeus IL convergeret (num. 55) ad distantiam quandam KV, & objectum situm ad sinistram in directione CD' appareret itidem ad sinistram in directione VLT. Si lentes non sint acromaticæ; prima refringet magis filum violaceum, ut prius,

per rectam  $\vec{G}il$ , quod debet ob actionem secundæ convergere ad distantiam  $Ku$  minorem KV, cum discedat (num. 55) a distantia  $Ki$  majore, quam  $KI$ , & sit magis refrangibile. Hinc filia LV,  $lu$  se intersecarent in quodam puncto R, ac haberetur major separatio colorum per angulum TR $\tau$ : nam is evaderet adhuc major angulo  $LG'$ , cum distantia LR debeat evadere minor, quam sit LV, quæ in combinatione numeri sequentis evadit æqualis LI, adeoque minor quam  $LG'$ .

112. Si  $KI$  esset dupla distantia focalis KO; distantia KV evaderet (num. 56) æqualis ipsi  $KI$ , adeoque angulus LVK esset æqualis angulo LIK, sive  $GIG'$ , qui determinat augmentum factum a prima lente. Quamobrem secunda restituens directionem objecti non minueret augmentum factum a prima. Longitudo systematis GV a prima lente usque ad oculum collocandum in V esset æqualis longitudini GR figuræ 3 Tab. I systematis lentium trium; si lens secunda esset æqualis primæ: quia ibi GK continet binas distantias focales lentium æqualium, KP alias binas, & PR quintam: hlc in fig. 8 (Tab. II) GI haberet unam, IK duas, KV alias duas. Sed FG distantia primæ lentis a foco objectivi esset major; quia radii digressi ab unico puncto objecti sito in axe, & coentes in F non deberent prodire a prima lente paralleli, ut in fig. 3 Tab. I, sed convergentes ad distantiam GO (fig. 8 Tab. II) duplam ejus distantia focalis: debent enim semper coire in foco citeriore lentis ultimæ ad hoc, ut prodeant ex ipsa paralleli. Hinc (num. 56) deberent discedere a distantia GF itidem dupla distantia focalis, quod augeret nonnihil longitudinem telescopii.

113. Id incommodum esset perquam exiguum, adeoque nullius momenti; sed aliud multo majus occurrit in diminutione campi. Si enim semidiometer aperturæ KL sit quanta maxima conciliari potest cum ejus lentis curvatura; GG' esset ejus dimidia ob GI dimidiad IK: adeoque si & lenti BB relinquatur apertura æqualis aperturæ KL; dimidium ipsius evaderet inutile, & campum determinaret sola GG' dimidia KL. Si lens HH admoveretur magis lenti BB; ratio semiaperturæ utilis GG' ad KL cresceret, adeoque manente KL cresceret ipsa GG' cum campo: sed pun-

ctum

Etum V recederet a K, imminuto KVL, adeoque imminuta quantitate augmenti. Si autem HH removeretur a BB; cresceret augmentum, imminutâ KV; sed adhuc magis minueretur ratio GG' ad KL, adeoque campus evaderet adhuc minor: nec quidquam prodesset distantia focalis secundæ lentis imminuta, vel aucta, ut facile ostendi potest. Verum quæ huc usque diximus, abunde sunt ad reddendam rationem, cur independenter etiam a coloribus, de quibus hinc agimus, rejecta fuerit ejusmodi combinatio jam ab ipso initio a constructoribus telescopiorum; licet ea sit simplicior, quam combinatio lentium trium, quæ semper fuit in usu. Colores autem, qui in ea evitari non possunt, nisi adhibendo utramque lentem acromaticam, multo magis nos cogunt, ut eam hinc rejiciamus.

## §. V.

*De remedio colorum inductorum ab ocularibus per lentes tres, quarum una acromatica.*

114. **Q**uo magis crescit numerus lentium, eo major evadit indeterminatio problematis: quamobrem hinc amplitudinem ipsius contraham determinatione arbitraria, quæ magis accedat ad veterem usum communium telescopiorum non invertentium objecta, & tamen destruat colores inductos ab ocularibus. Nimirum assumam positionem priorum duarum lentium ejusmodi, ut (fig. 3 Tab. I) focus I primæ lentis pro radiis rubeis divergentibus a puncto C, sit etiam focus secundæ pro radiis iisdem parallelis, ut idcirco filum G'IL debeat prodire e secunda per rectam LV parallelam axi: & in hoc quidem paragrapho agam solum de systemate trium lentium ocularium, quarum binæ sint simplices ex eodem vitri genere, & tertia sola composita acromatica; sed proponam plura magis generalia, quorum usus occurret etiam in sequentibus paragraphis.

115. Primo quidem determinabo punctum O', in quo filum violaceum G'il detortum per lq occurrit rubeo G'LQ. Concipiatur CG'

$CG'$  producta in  $E$ , &  $GL$ ,  $G'V$  in  $Z$ ,  $z$ ; sit vero  $HH$  ex eadem substantia, ac  $BB$ . Seclusâ mente tertiatâ lente  $MM$ , ducatur recta  $G'K$ , producaturque, donec occurrat rectæ  $LV$  in  $Q$ , & concipiatur  $IQ$ . Si ex  $G'$  discederent radii rubei per  $G'K$ ,  $GL$ ,  $G'V$ ; deberent coire (num. 49) in eodem puncto rectæ  $G'K$  transversis per centrum  $K$  lentis  $HH$ : adeoque cum  $G'K$ ,  $LV$  coeant in  $Q$ , ad id punctum abiret &  $G'V$  per rectam  $IQ$ : ac proinde  $Qlq$  erit differentia refractionum filii rubei, & violacei advenientium per eandem rectam  $G'V$ . Refractio rubei est angulus  $zIQ$  proxime æqualis  $ZLQ$ , sive  $LK$ , cui est proxime æqualis refractio  $IG'E$  rubei in  $G'$  (num. 97), ubi differentia refractionis rubei, & violacei est angulus  $LG'V$ . Quare ex differentiæ ob æqualem vim distractivam earum lentium ex eadem materia erunt (num. 41) æquales. Porro ob inclinationem  $GL$  ad axem non nimis magnam possunt considerari anguli  $LG'V$ ,  $LQl$  ut reciproce proportionales longitudinibus  $LG'$ ,  $LQ$ , & potest accipi  $GK$  pro  $GL$ , &  $LO'$  pro  $IO'$ . Quare erit  $LQ$  ad  $GK$ , sive  $KQ$  ad  $G'K$ , ut  $Qlq$ , sive  $QlO'$  ad  $LQl$ , sive  $O'Ql'$ , nimirum ut  $QO'$  ad  $O'l$ , sive  $O'L$ , & componendo  $G'Q$  ad  $G'K$ , sive  $QL$  ad  $KI$ , ut  $QO' + O'L$ , sive eadem  $QL$  ad  $LO'$ . Hinc  $KI$ , sive  $KO = LO'$ .

116. Inde habetur hujusmodi elegans theorema. *Si primæ duæ lentes sint ex eodem vitri genere, & carum foci congruant, utcumque sint æquales, vel inæquales earumdem distantiæ focales; fila, rubeum, & violaceum radii advenientis ad centrum objectivi a puncto objectivi sito extra axem, separata a prima lente conjungentur a secunda in distantiâ æquali suæ distantiæ focali.* Hoc affirmavi num. 31 promittens ejus demonstrationem. Id alia methodo inveni ante aliquot annos, & exhibui in Opusculo edito Mediolani sermone italicico pertinente ad theoriam telescopiorum dioptricorum.

117. Hic statim patet, remedium iis coloribus adhiberi; si sola etiam tertia lens  $MM$  fiat acromaticæ, & collocetur ita, ut ejus focus citerior congruat in  $O$  cum foco ulteriore secundæ, sive ipsa habeat eandem distantiam focalem, ac præcedentes, sive omnes

omnes omnium trium distantiarum focales sint diversae. Demonstratio parum differt ab adhibita num. 65. Fila omnia coloris utriusque delata ad ejusmodi lentem directione RPO deberent uniri in ejus foco O, & omnia delata directione PO' in foco O'. Quare omnia digressa ex O' decurrent ab ipsa ita refringi, ut prodirent eadem directione parallelâ O'P: adeoque fila, O'Q rubeum, & O'q violaceum, debebunt prodire inter se parallela. Cum PO' sit aliquanto longior in fine campi, quam PO; deberet lens tertia protrudi aliquanto plus versus secundam: verum etiam alii neglectus adhibiti in demonstrationibus inducunt discrimina, ob quae omnia deberet protrudi nonnihil antrorsum, retrorsum ipsa lens tertia, donec appareat colorum disparitio, ut etiam num. 98 monuimus.

118. In hac combinatione ad habendam distinctionem debet prorsus, ut in communi, punctum F esse focus communis ulterior objectivi AA, & citerior ocularis BB pro radiis rubeis parallelis, vel potius juxta num. 32 pro mediis: tum I focus communis ulterior lentis BB pro radiis divergentibus a C, citerior lentis HH pro parallelis: demum O focus pariter ulterior, & citerior lentium HH, MM utriusque pro parallelis. Sic radii delati ab eodem puncto objecti sito in axe, & admodum remoto habitu pro parallelis convenient in F: inde digressi prodibunt a lente BB paralleli: colligentur a lente HH in O: prodibunt e lente MM paralleli.

119. Distantia primae lentis ab objectivo erit summa distantiarum focalium utriusque: distantia primae ocularis a secunda erit paullo major, quam summa distantiarum focalium earumdem lentium: nam GI est paulo major, quam distantia focalis GF lentis BB. Est nimurum FG ad GI in ratione CF ad CG per numerum 57, cum hic punctum F sit idem focus citerior lentis BB, qui in fig. 6 Tab. II, ad quam refertur is numerus, notatur litterâ P: ea autem ratio debet accedere ad æqualitatem, cum ad habendum augmentum satis magnum distantia focalis lentis ocularis BB debeat esse multo minor, quam objectivi AA, ut est satis notum, & patebit paulo inferius. Demum distantia lentium HH, MM debet esse summa distantiarum focalium earum lentium.

120. Ad

120. Ad habendam distinctionem pro diversa oculorum constitutione h̄c etiam prorsus, ut in telescopiis communibus, satis erit admoveare objectivo pro myope, removere pro presbyta, vel totum systema trium oocularium, vel solam postremam ocularem MM. Prior motus non turbabit ad sensum theoriam colorum, cum debeat esse perquam exiguus, adeoque nihil ad sensum mutet angulum IG'E, differentiam refractionum LG'V, & distantiam LO' unionis filorum GL, GV. Motus posterior reddit divergentia, parallela, vel convergentia fila QR, qr. Quamobrem per hunc posteriorem determinari debet extinctio colorum: tum inventa per ejus motum ea extinctione, vel, si quid semper superstet, quod sensu percipi possit, minimâ colorum quantitate in fine campi, & ocularibus in ea distantia connexis inter se, protrudens deinde erit tubulus continens id omne sistema ad obtinendam distinctionem de more.

121. Imago objecti formabitur itidem, ut in telescopiis communibus, in FF', & in OO'. In utrovis loco potest apponi dia phragma; sed locus aptior erit FF', ubi habetur imago, quæ locum non mutat mutata positione totius systematis trium lentium, dum distantia imaginis OO' a lente HH mutatur nonnihil eo motu. Margo diaphragmatis positi in FF' debet evadere satis distinctus: esset distinctissimus; si ibi unirentur in singulis punctis foci radii omnes pertinentes ad singula puncta objecti: erit eo major ea distinctio marginis, quo fuerit major ea unio, cui cum faveat plurimum acromatismus objectivi, idem favebit plurimum ei ipsi distinctioni.

122. Diameter diaphragmatis debebit esse paullo minor, quam apertura lentis ocularis BB. Si sit major, evadit inutilis, quia tum radii, qui transeunt prope marginem diaphragmatis ipsius, cadunt extra aperturam lentis ocularis. Ad hoc, ut omnes radii transmissi perveniant ad ocularem, & per eam ad oculum, debebet in primis esse GG' ad FF', ut est CG ad CF: præterea debebet haberri amplitudo adhuc paullo major, ut excipiat in fig. i radios advenientes ad spatium G'H'h' situm a G' ad partes oppositas centro G. Verum ne apertura diaphragmatis evadat ex parte

te inutilis, debet apertura lentis secundæ (fig. 3) HH esse ad aperturam lentis BB, saltem ut est distantia focalis KI lentis secundæ ad GI paullo majorem distantiam focali primæ, in qua ratione est KL ad GG'. Apertura autem tertiaræ debet esse æqualis aperturæ secundæ ob  $PQ = KL$ .

123. Oculus debet collocari in R ad distantiam PR æqualem distantiae focali lentis tertiaræ MM. Ibi excipiet radios omnium punctorum objecti existentium in angulo DCD' jacente circumquamque circa axem directione RST. Augmentum imaginis erit determinatum a ratione anguli PRQ ad angulum GCG', & diameter campi a duplo angulo GCG'. Utriusque mensuræ facile determinantur datis distantiis focalibus lentium, & earum aperturis.

124. Tangentes angulorum GIG', GCG' sunt  $\frac{GG'}{GI}$ ,  $\frac{GG'}{GC}$ , quæ sunt ut GC ad GI, sive permutando in numero 119, ut CF ad FG, quibus sunt proxime proportionales ii ipsi anguli; nam primus est semper exiguus, secundus non nimis magnus, ac ea ratio angulorum accedit ad veram in infinitum, si punctum G' accedat in infinitum ad G. Quare habebitur hujusmodi theorema: *augmentum in telescopio habente unicam ocularem habetur dividendo distantiam focalem objectivi per distantiam focalem ocularis.* Et quidem id theorema habet locum in telescopio tam figuræ 1, quam 2, ac ex eodem constat id, quod affirmavimus num. 119, distantiam focalem ocularis debere esse multo minorem distantiam focali objectivi ad habendum augmentum satis magnum.

125. Angulus LIK æquatur angulo GIG', & si lentium omnium distantiae focales sint æquales, angulus PRQ æquabitur angulo KIL ob latera circa angulos restos æqualia. Quare in casu distantiarum focalium æqualium augmentum post ejusmodi tres lentes remanet idem, ac post primam solam. Sed si distantiae focales sint inæquales;  $\frac{KL}{KI}$ ,  $\frac{PQ}{PR}$  erunt tangentes angulorum KIL, PRQ, adeoque eæ tangentes accurate, & ipsi anguli proxime ut PR, KI. Si hæc ratio componatur cum ratione FC ad FG, quæ est ratio anguli GCG' ad GIG', sive KIL; erit tangens anguli

PRQ ad tangentem GCG' accurate , & angulus ad angulum proxime , ut est FCXKI ad FGXPR . Patet autem , hanc demonstrationem habere locum , quotiescumque foci lentium primæ , & secundæ congruant in I , quæcumque fuerit distantia tertiaræ a secunda , cum pendeat ab æqualitate rectorum KL , PQ , & hæc a parallelismo rectorum KP , LQ . Inde hujusmodi theorema : *augmentum per tres lentes oculares , quarum priores duæ habent focus congruentes inter se , & prima focus suum congruentem cum foco objectivi , habetur dividendo productum ex distantia focalibus objectivi , & lens ocularis intermediæ per factum ex distantia focalibus ocularium extremarum .*

126. Inde autem constat , 1°. mutatis in eadem ratione distantia focalibus binarum tantum ocularium , intermediæ , & alterius ex extremis , augmentum remanere idem : 2°. posse haberi augmentum majus dupli modo , nimirum minuendo distantiam focalem utriuslibet ex ocularibus extremis , vel augendo distantiam focalem ocularis intermediæ . Secundus augendi modus reddit aliquanto longius systema ocularium ; adhuc tamen est omnino præferendus primo potissimum hic , ubi tertia ocularis debet esse composita ; quia difficilior est constructio accurata lentium brevioris foci etiam in lentibus simplicibus , sed multo magis hic , ubi tercia debet esse composita ex convexa , & concava , quæ posterior cum producat focus (num. 89) , cogit inducere curvaturas multo maiores tam convexæ , quam concavæ ; nisi adhibeat vitrum strass satis distrahens cum vitro communi , & fiant binæ lentes convexæ , quo casu (num. 86) lens composita habet omnes sphæricitates æquales , & ex formulis expositis num. 84 facile eruitur , distantiam focalem lentis compositæ in eo casu fore æqualem illi , quam haberet una sola e binis convexis .

127. Videndum interea , quid accidat campo , cuius habenda est ratio . Campum determinat angulus GCG' , cuius anguli is est duplex : is facile invenitur , datis CG , GG' . Hæc secunda est tangens ejus anguli ad radium = CG , quæ potest considerari , ut æqualis arcui ejus dimidii , & ejus duplum , sive tota apertura , ut æqualis arcui totius campi . Arcus æqualis radio continet 57° .

17°. 45'', sive proxime 57°. 18' = 3438'. Quare erit ut CG distantia objectivi a prima lente ad 2GG' aperturam primæ ocularis, ita 3438 ad numerum minutorum campi, & habebitur hujusmodi regula: *numerus 3438 multiplicetur per aperturam primæ lentis, & dividatur per distantiam ipsius ab objectivo, ac habebitur campus telescopii in minutis.*

128. Hæc apertura primæ lentis debet esse illa, quæ relinquuntur a diaphragmate, cuius diameter determinabitur determinatâ eâ aperturâ, quæ potest tribui oculari ipsi: non potest hæc apertura fieri major, quam sit dimidia distantia focalis, ne curvatura nimia augendo errorem figuræ sphæricæ deformet objectum, & quo est minor respectu ejus distantiæ, eo melius res procedet; sed campus, eâ imminutâ, minuitur. Eadem apertura debet relinquere utilis tota a reliquis binis lenti bus, quarum aperturæ si sint minores debitâ, reddent inutilem partem ipsius. Facile est autem determinare mensuras harum aperturarum necessarias ad relinquendam utilem totam aperturam illius primæ determinantis campum. In hoc systemate, in quo foci primæ, & secundæ ocularis convenient, semiaperturæ utiles lentis secundæ KL, & tertiaræ PQ erunt inter se æquales, si negligatur exiguis excessus secundæ LL'. Ipsa secunda KL est æqualis primæ GG', si sint æquales rectæ GI, IK, quarum secunda est accurate æqualis distantiæ focali lentis secundæ, prima proxime æqualis distantiæ focali lentis primæ: & si hæc distantiæ focales sint inæquales; debebit esse KL ad GG' in ratione ipsarum KI, GI.

129. Hinc ubi adhibendæ sint lentes, quæ habeant distantias focales inæquales; pro determinanda serie aperturarum utilium, & per ipsas campo telescopii, potest incipi a tertia lente determinando aperturam, quæ ipsi tribui possit, respondentem ejus distantiæ focali. Apertura secundæ assumetur æqualis ipsi, tum apertura primæ fiet ad aperturam hujus in ratione, quam habent earum distantiæ focales: hæc postrema apertura lentis primæ multiplicabitur per 3438, & dividetur per distantiam primæ lentis ab objectivo, ad habendum numerum minutorum campi: per aperturam inventam pro prima determinabitur apertura diaphragmatis

necessaria ad habendam utilem hanc aperturam lentis primæ : ad eam obtinendam multiplicabitur ipsa apertura primæ lentis per distantiam focalem objectivi , & dividetur productum per summam distantiarum focalium ipsius , & lentis ejusdem .

. 130. Si eo paſto obvenerit apertura lentis primæ nimia respectu ejus distantiae focalis ; tum ea minuenda erit ita , ut non excedat dimidium ipsius distantiae , & reliquæ aperturæ utiles lentium , ac diaphragmatis minuentur in eadem ratione : apertura lentis secundæ in hoc systematum genere nunquam evadet major justo ; quia ipsius distantia focalis nunquam debet fieri minor , quam distantia focalis lentis tertiae , quod sine ullo fructu minueret augmentum . Determinatâ apertura alterius ex extremis ita , ut non sit major justo , reliquarum aperturæ possunt relinquiri utcumque maiores iis , quas regula exposita præbuerit , quod nihil nocebit campo : tantummodo pars aliqua aperturarum reliquarum remanebit eo casu inutilis : sed non possunt adhiberi minores . Proderit etiam præbere primæ aperturam paulo majorem propositâ , quo tutius liberetur tota apertura diaphragmatis , quæ si esset vel tantillo major justâ ; id ipsum evaderet inutile .

131. Aperturæ nimis magnæ respectu distantiae focalis nocent ex pluribus capitibus : inducunt confusionem in fine campi , & colores , ac deformant objectum curvando rectas lineas . Vitium colorum minuitur plurimum a remediis , de quibus agimus in hoc Opusculo : residuum illorum , & reliqua duo vitia oriuntur ab errore figuræ sphæricæ , quæ omnia minui possunt per commodiorum distributionem sphæricatum in singulis lentibus , quam investigabimus in capite II : hic illud addemus tantummodo : si quid eorum accidat post determinationes hic propositas ; satis erit minuere aperturam diaphragmatis , quâ imminutâ , minuentur in eadem ratione reliquæ aperturæ utiles , & campus : artifex per successivam diaphragmatum minorum applicationem inveniet , quid maxime conveniat : sic etiam si distinctio in medio campo non fuerit satis bona ob nimium augmentum ; poterit successive augere distantiam focalem primæ lentis , vel minuere secundæ : quo perfectior fuerit materia , & opus objectivi , eo majoris augmen-

ti te-

ti telescopium erit capax : ea omnia melius determinabit experientia , & attentatio , quam theoria , quæ evadit nimis complicata .

132. Si tres lentes sint simplices , & æquales ; ipsarum aperturæ fieri possunt omnes æquales : sed si lens tertia habeat distantiam focalem breviorem ; ejus apertura minor relinquet aperturas utiles reliquarum duarum minores , quam earum curvaturæ ferre possint : si lens prima fiat brevioris distantiae focalis ; tum ejus apertura imminui potest in eadem ratione ejus distantiae imminutæ , reliqtâ integrâ aperturâ reliquarum duarum ; quia singularum aperturæ ad suas distantias focales habebunt adhuc rationem eandem . Si fiat lens secunda distantiae focalis majoris ; tum & ejus apertura utilis , & apertura utilis primæ evadent minores , quam ferre possint ipsarum curvaturæ . Assumptâ curvaturâ lentis tertiae , quantam permittet ipsius distantia focalis , debebit assumi apertura secundæ æqualis ipsi , tum apertura primæ minor ipsâ in ratione distantiae focalis ipsius ad distantiam focalem ejusdem secundæ .

133. Inde patet , manente apertura lentis tertiae , si lens secunda fiat distantiae focalis longioris , in eadem ratione imminui campus , in qua crescit augmentum apprens objecti , nimirum in ratione distantiae focalis ipsius mutatae : nam in ea ratione crescit productum ex distantia focali ipsius , & objectivi , a quo pendet augmentum , & decrescit apertura utilis lentis primæ , a qua pendet campus .

134. Si tertia lens debeat esse acromatica ; tum ejus apertura non poterit habere rationem eandem ad suam distantiam focalem , nisi ipsa fiat ex binis lentibus communibus , & strass : quia omnes curvaturæ lentium ipsam componentium erunt majores , quam pro distantia focali totius lentis compositæ ; adeoque patietur ipsa lens aperturam minorem , quam pati posset lens simplex ejusdem distantiae focalis , quod reddet minores aperturas utiles reliquarum , & proinde campus minorem . Jam hinc redditur minus commodus ejus usus : sed præterea si quærendum esset augmentum majus per imminutionem distantiae focalis lentis tertiae ;

res

res evaderet maxime incommoda ex alio etiam capite : nimis radii sphæricitatum deberent fieri nimis exigui , si non adhibetur strass cum dupli lente e vitro communi : ea nimia curvatura redderet difficiliorem accuratam constructionem ejusmodi lentium . Hinc in primis telescopiis , que curavi perficienda cum ejusmodi lentium systemate , quæsivi augmentum majus per imminutionem distantiarum focalis lentis primæ : curavi tertiam acromaticam longioris distantiarum focalis , secundam distantiarum focalis ejusdem cum ipsa , primam brevioris ; ut prima ipsa determinaret augmentum , quod reliquæ duæ habentes eandem distantiam focalem utcumque majorem relinquunt integrum : id eo casu habetur , ut in telescopio figuræ primæ habente unicam lentem convexam , dividendo distantiam focalem objectivi per distantiam focalem ipsius ocularis primæ . Illæ distantiarum focales longiores reliquarum duarum nihil prosunt campo : permittunt quidem aperturam majorem lentis tertiarum augendam cum ejus distantia focali aucta , & majorem itidem aperturam secundæ : sed iis auctis apertura utilis primæ remanet eadem , quæ esset , si distantiarum focales , & aperturarum duarum essent minores in ratione quavis : nam apertura secundæ ad aperturam utili primæ debet esse , uti sunt earum distantiarum focales , adeoque , auctâ distantiarum focali , & aperturâ secundæ in ratione eadem quamcumque , & manente distantia focali primæ , remanet eadem etiam ipsius apertura . Adhuc tamen longiores distantiarum focales lentis secundæ , & tertiarum prosunt facilitati constructioni tertiarum compositarum , cum requirant curvaturas ipsius non ita magnas , productis earum radiis .

135. Lens acromatica habens distantiam focalem unius pollicis non nimis incommodè componi potest per binas lentes convexas e vitro communi , & tertiam concavam etiam e flint . Radii sphæricitatum lentis concavæ evadunt proxime linearum 6 (num. 85) , radii sphæricitatum utriusque convexæ isoscelicæ linearum 8 : commodius tamen fieret e vitro communi combinato cum strass , quo casu omnes sphæricitates lentis compositarum haberent radium unius pollicis . Si reliquæ duæ lentes simplices habeant distantias focales itidem unius pollicis , & id systema adhibetur cum objectivo

objectivo acromatico pedum trium, obtinetur augmentum 36; nam id augmentum (num. 125) est  $= \frac{CF \times KI}{FG \times PR} = \frac{36 \times 1}{1 \times 1}$ . Id quidem est nimis exiguum; nam objectiva acromatica trium pedum, si sint satis bona, possunt habere aperturam pollicum trium, quæ debet exhibere augmentum multo majus. Id potest duplicari tam facta primâ lente cum distantia focali linearum 6, quam facta secunda pollicum 2, & triplicari tam facta prima linearum 4, quam facta secunda pollicum 3.

136. Campus in utraque methodo minuitur in eadem ratione, in qua augmentum crescit. Si lenti acromaticæ detur apertura linearum 6, & omnes distantiae focales sint æquales; prima lens habebit itidem lineas 6 aperturæ utilis: distantia lentis ocularis ab objectivo erit linearum  $3 \times 144 + 12 = 444$ . Quare campus evadet  $\frac{6 \times 3438}{444} = 46$ . Si prima lens habeat distantiam focalem 6; retentis reliquarum distantiarum focalibus pollicis unius, & aperturis linearum 6, ejus apertura utilis erit 3, quæ itidem conveniet ipsius curvaturæ duplo majori. Erit  $GF = 6$ , adeoque  $CG = 438$ , & campus  $= \frac{3 \times 3438}{438} = 23$ . Si retineretur distantia focalis primæ pollicis unius, & fieret ea distantia secundæ pollicum duorum, retentâ eâdem lente tertiatâ; apertura hujus tertiatæ retinenda esset linearum 6, adeoque & secunda haberet 6: prima habens pollicem pro distantia focali posset quidem habere aperturam linearum 6, si esset sola: sed cum ejus distantia focalis sit dimidia distantiarum focalis lentis secundæ, non essent utilles nisi 3 lineæ: nam existente KI dupla GI, & existente KL tantummodo linearum 6, ut PQ, debent hæ esse duplæ GG', & ipsa GG' tantummodo linearum 3. Esset  $FG$  linearum 12,  $CG = 444$ , & campus  $\frac{3 \times 3438}{444} = 23$ , ut prius. Divisor 444 non est idem, ac prior 438, quod oritur a differentia distantiarum FG, quæ cum sit exigua respectu totius CG, non mutat valorem quoti nisi per fractionem unius minutæ, quæ hic negligitur.

In

In utraque autem mutatione augmentum evadit 72: nam in valore ~~CFXKI~~  
~~FGXPR~~ prima mutatio reddit FG duplo minorem, secunda duplo majorem KI.

137. Patet in hoc exemplo, utroque modo duplicari augmentum, & campum evadere duplo minorem. Verum secunda mutatio habet nonnihil incommodi ex eo, quod producat telescopium per tres pollices. Facta enim primâ lente cum distantiâ focali linearum 6, & retentis reliquis unius pollicis, evadit FI pollicis unius, tum usque ad R habentur alii 4, adeoque FR = 5: sed retentâ primâ unius pollicis, & factâ secundâ duorum, evadit FI = 2, IO = 4, OR = 2, adeoque FR = 8. Tres pollices adjecti sunt fere  $\frac{1}{12}$  totius. Campus cum exiguo illo augmento 36 erat satis magnus, nimirum minutorum 48 continens totam diametrum lunæ cum ejus dimidio: is quidem utcumque haberi posset; si omnes lentes essent simplices: sed cum tertiatâ acromaticâ per concavam ex flint non posset haberi tantus, quia apertura linearum 6 esset æqualis integro radio sphæricitatis concavæ, quæ est nimis magna: multo majus incommodum inde haberetur pro augmento 72, in quo campus 24 adhuc imminutus evadit nimis exiguus.

138. Hoc incommodum campi nimis imminuti evitari non potest; si colores impediri debeant adhibitâ tertiatâ lente acromaticâ cum lente cava ex flint: evitaretur eâ adhibitâ ex strass, quo casu campus, & augmentum essent prorsus eadem, ac in veteri methodo tria lentium e vitro communi simplicium. Verum aliud incommodum occurrit ex imminuta vi luminis; cum lens composita acromaticâ multo plus luminis intercipiat, quam simplex, potissimum si constet e tribus lentibus, præterquam quod ipsa trium lentium constructio auget laborem artificis. Eam ob causam quæsivi, an posset impediri effectus divisionis colorum factæ ab ocularibus per lentes tres simplices, nec successu res caruit, ut patebit in paragrapho sequenti.

## §. VI.

*De remedio colorum induktorum ab ocularibus per lentes tres simplices.*

139. PRIMO quidem determinabimus angulum  $TSt$ , quo color violaceus distrahitur a rubeo in egressu e systemate communis trium lentium simplicium, quod promisimus num. 31, tum proponemus ejus vitii remedia. Manentibus ceteris in fig. 3 ipsa etiam lens tertia in systemate communis est simplex, ex eodem vitri genere cum duabus reliquis, & transit per  $Q$  occursum rectæ  $LV$  cum  $G'K$  producitur: sunt autem distantiae focales omnium trium lentium æquales cum centris coincidentibus, adeoque  $GK$  proxime æqualis  $LQ$ , & (num. 115) angulus  $Qlq$  proxime  $= LG'l$ : tum  $QO' = O'L$ , proxime  $= O'l$ , adeoque angulus  $QO'q$  proxime duplus anguli  $Qlq$ , sive  $LG'l$ . Concipiantur radii rubei egressi per rectas  $O'Q$ ,  $O'q$  e puncto  $O'$  foco lentis  $MM$  pro radiis advenientibus directione  $PO'$ : ii debebunt prodire per rectas  $QR$ ,  $qr'$  parallelas rectæ  $O'P$ . Quare angulus  $r'qr$  est differentia refractionis radiorum rubei, & violacei advenientium per eandem rectam  $O'q$ , qui ob  $qr'$ ,  $SR$  parallelas debet esse  $= TSt$ . Ut is comparetur cum angulo  $LG'l$ , ponatur  $n$  in occurso rectarum  $O'q$ ,  $QR$ .

140. Ipse  $r'qr$  debet æquari (num. 41) refractioni rubei  $uqr'$  multiplicata per  $\frac{dm}{m-1}$ ; cumque  $LG'l$  æquetur angulo  $IG'E$  itidem multiplicato per  $\frac{dm}{m-1}$ ; differentia angulorum  $TSt$ ,  $LG'l$  erit differentia ipsorum  $uqr'$ ,  $IG'E$  multiplicata per  $\frac{dm}{m-1}$ . Est  $IG'E = GIG' + GCG'$ , &  $GIG' = LIK = QRP = VQn = QnO' + QO'n = uqr' + QO'q$ . Quare angulus  $uqr'$  deficit ab  $IG'E$  per  $GCG' + QO'n$ , & hæc summa ducta in  $\frac{dm}{m-1}$  exhibebit differentiam ipsorum  $TSt$ ,  $LG'l$ . Horum angulorum hic habetur ratio; cum queratur differentia distractionum in  $G'$ , &  $S$ , quæ est ordinis inferioris; dum in aliis perquisitionibus assumitur an-

gulus  $IG'E$  pro æquali angulo  $GIG'$ , &  $uqr$  pro æquali angulo  $VQR$ , qui æquatur hīc ipsi  $GIG'$ . Ea proxima æqualitas indicat proximam æqualitatem ipsarum distractionum, quarum discrimen ipsum hīc quærimus.

141. Sit angulus  $GCG' = c$ , & augmentum factum a prima lente  $n$ , ac erit (num. 41) angulus  $LG'l = \frac{dm}{m-1}(nc+c)$ : positis, ut num. 63,  $c=30^\circ$ ,  $n=20$ ,  $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{27}$ , is angulus ibi evadit  $= 23^\circ$ , adeoque  $QO'u = 46^\circ$ . Hinc  $GCG' + QO'u = 30^\circ + 46^\circ = 76^\circ$ , & differentia angulorum  $TSt$ ,  $LG'l = \frac{76}{27}$ , sive proxime minutorum  $2\frac{3}{4}$ , quibus distractio colorum  $TSt$ , in egressu e tertia lente est paullo minor, quam  $LG'l$ , sive  $NG'n$  in egressu e prima. Ea inventa fuerat num. 63  $= \frac{30 \times 21}{27}$ ,  $= \frac{630}{27}$ : cum igitur hæc differentia sit  $= \frac{76}{27}$ , est ad ipsam, ut 76 ad 630, nimirum minor, quam pars octava totius distractionis factæ a prima lente.

142. Hæc diminutio distractionis, cum primum ipsam animadvertis, spem mihi præbuit corrigendi eam penitus, etiam per lentes simplices, ut innui in Opusculo, quod ante hosce quatuor annos edidi Mediolani conscriptum italicice. In eo proposui tantummodo remedium paragraphi præcedentis petitum a tertia lente composita acromatica: ibidem determinavi etiam quantitatem ejus diminutionis, sed minus accurate, quam hīc persecutus sum accuratius. Inveni postea remedium per duas lentes pro telescopio invertente objectum, quod hīc exposui §. IV; ac deinde id ipsum transtuli ad sistema lentium trium redditum directionem objecti. Plura haberi possunt systemata, quæ id præstent: incipiam ab admodum simplici, & parum dissimili ab eo, qui habetur in ipso illo paragrapho tertio.

143. Sint (fig. 9 Tab. II) lentes omnes e vitro communi, ac priores duæ habeant distantias focales æquales cum foco I communi, tertia remaneat in eadem distantia  $KP = GK$  transiens per

per idem punctum Q, quod in fig. 3 Tab. I erat concursus rectarum G'K, LV; sed habeat distantiam focalem dimidiam distantiae reliquarum. Erit PO (fig. 9 Tab. II) dupla distantia focalis ipsius pro radiis parallelis axi, adeoque PO' proxime dupla ejusdem pro radiis habentibus directionem ipsius. Hinc rectae QR, qr, per quas egredierentur ex ea lente fila rubea advenientia per O'Q, O'q, non erunt parallelae, sed convergent ad quoddam punctum X ipsius rectae O'P; & cum PO' sit paullo major, quam dupla distantia focalis radiorum habentium ejus directionem; erit (numer. 56) PX paullo minor ipsa. Quare ob viciniam punctorum P, Q poterunt haberi QX, qX pro aequalibus QO', qO', & anguli QXq, QO'q pro aequalibus inter se. Porro angulus rqX, quem radius violaceus delatus per rectam IO'q, & egressus per qr continet cum via qr'X ejus radii rubei concepti ut delati per eandem rectam O'q, debet esse aequalis angulo QO'q. Nam ob PR dimidiam KI, habendus erit angulus QRP pro duplo anguli LIK: hinc si habeatur uqr' pro aequali VQR, sive QRP, & IG'E pro aequali GIG', sive LIK; refractio in q erit dupla refractionis in G', & idcirco differentia rqX refractionum rubei, & violacei delatorum per eandem rectam O'q, dupla differentiae LG'I, cuius cum sit duplus in eo casu (num. 139) etiam angulus QO'q; erit rqX = QO'q. Hinc idem rqX = QXq, adeoque via radii rubei QRX parallela viæ violacei qr.

144. Idem casus occurrit hic, qui num. 94, ubi in fig. 7 ex eo, quod KG erat dupla distantia focalis lentis HH, radii G'L, G'I assumpti sunt ut convergentes per LM, IM ad distantiam paullo minorem rectam G'K, rectam LG', IG' assumpta pro aequalibus rectis LM, IM, angulus LMI assumptus pro aequali angulo LG'I, cui cum aequalis esse deberet angulus MIm ob refractiones in G', & L aequales, deductus est inde parallelismus rectarum LM, Im.

145. Videndum jam hic etiam, quæ sit positio totius systematis respectu foci objectivi F (Fig. 9), quid accidat augmento, & campo. Radii pertinentes ad idem punctum objecti, quos objectivum colligit in suo foco F, debent prodire e postrema lente MM proxime paralleli. Hinc debent discedere ab ipsius distantia

focali, quæ sit  $P\alpha' = \frac{1}{2}$ , factis nimirum distantiis focalibus reliquarum = 1. Quare ob  $KP = 2$  erit  $K\alpha' = \frac{3}{2}$ , adeoque lens HH debet eos excipere (num. 55) divergentes a quodam puncto a, ut eos colligat in ea distantia majore, quam sit ejus distantia focalis, ad quam nimirum convergerent, si advenirent paralleli.

Invenietur x per formulam solitam (num. 50)  $\frac{z}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ . Erit hic  $x = K\alpha' = \frac{3}{2}$ ,  $h = 1$ ,  $p = K\alpha$ . Quare  $\frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{p}$ , &  $\frac{1}{p} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ , ac  $p = -3$ . Valor  $K\alpha$  evasit negativus ob divergentiam,  $K\alpha = 3$  debet jacere contraria directionem radiorum advenientium, nimirum versus G. Est autem  $KG = 2$ , adeoque  $G\alpha = 1$ . Debet igitur lens prima BB eos reddere divergentes a distantia  $G\alpha$ , adeoque (num. 56) distantia GF, e qua eos excipit divergentes, debet esse ipsius dimidia. Debet igitur sistema collocari post focum objectivi ita, ut ab eo distet per dimidium distantiae focalis primæ lentis, quod est æquale distantiae focali lentis tertiae.

146. Augmentum esset proxime idem, ac si haberetur sola lens tercia, vel omnes tres lentes essent ejusdem distantiae focalis cum ea ipsa lente tercia. Id facile eruitur ex theorematis numerorum 124, & 125. Pro utroque ibi supposita est coincidentia fotorum objectivi, & primæ ocularis, quæ habetur semper, ubi adhibetur lens unica, sed non habetur hic, ubi adhibentur tres lentes cum distantia tertiae a secunda majore, quam sit summa earum distantiarum focalium: idcirco evasit GF æqualis non distantiae focali integræ lentis primæ, sed ejus dimidiæ. Adhuc tamen illud theorema secundum habet locum etiam sine coincidentia eorum fotorum; dummodo distantia GF lentis primæ a foco objectivi, & distantia focalis ipsius lentis primæ, sint exiguae respectu distantiae focalis objectivi, quod semper accidet in exemplis, quæ adhibebimus. Prima conditio reddit in fig. 3 Tab. I proxime æquales CF, CG, secunda (num. 57) GI proxime æqualem distantiae focali lentis BB. Hinc si distantia focalis objectivi dicatur b, & distantiae focales ocularium h, h', h"; ratio anguli

$GIG'$

**GIG'** ad **GCG'**, quæ ibi erat **CG** ad **GI**; erit adhuc proxime eadem, ac  $b$  ad  $h$ . Ratio autem anguli **QRP** ad **KIL** = **GIG'**, erit adhuc, ut ibi, eadem ac **KI** ad **PR**, sive  $h'$  ad  $h''$ . Quare ratio ex iis composita, quæ est ratio anguli **QRP** ad **GCG'**, exprimens augmentum, erit  $hh'$  ad  $hh''$ . Eius valor erit  $\frac{hh'}{hh''}$ (\*); porro is erit idem, qui esset; si valores  $h$ ,  $h'$ , quos hic supponimus æquales inter se, essent æquales ipsi  $h''$ ; & erit idem ac  $\frac{b}{h''}$ , qui valor (num. 124) exhiberet augmentum, si lens tertia esset sola. Porro inde patet, positionem foci objectivi respectu primæ lentis in ordine ad reddendos sensibiles pulveres ipsi adhærentes non esse magis incommodam, quam debeat esse in communibus telescopiis pari aumento, & quam sit in omnibus positio foci præcedentis postremam lentem, quæ debet distare ab ipsa per ejus distantiam focalem.

147. Campus itidem fieri poterit idem, ac si tertia lens **MM'** esset sola, vel omnes tres æquales: nam factâ semiaperturâ **PQ**, quantam permittit lens ipsa tertia, quæ est convexa plus, quam cæteræ, poterunt ipsi fieri æquales **KL**, **GG'**, quarum prior debet esse ipsi semper æqualis in quovis e casibus congruentiæ focorum in I, posterior debet esse æqualis priori pro hoc casu priorum binarum lentium æqualium. Quamobrem hæc combinatio non est incommoda.

148. Potest redi commodior duplicando campum, & retinendo eandem distantiam. Satis est in **MM'** pro unica lente, quæ habeat distantiam focalem dimidiæ, adhibere duas simul conjunctas æquales prorsus prioribus. Nam ex num. 60 patet, distantiam focalem utriusque lentis simul conjunctæ fore dimidiæ distantiarum focalis singularum, si negligatur earum crassitudo. Hinc adhibitâ ea lente compositâ habebuntur omnia, quæ habebantur in simplici dimidiæ distantiarum focalis; sed duplo minor curvatura

du-

---

(\*) Ob eandem rationem intervallorum **CF**, **CG** proxime æqualium in mensura campi accipiens sape primum ex iis pro secundo.

duplo majorem aperturam permittebat ; adeoque duplicari poterit semiapertura PQ , quæ reddat KL , GG' duplas .

149. Hæc substitutio duarum lenti loco unius efficit , ut hoc remedium pertineat ad systema quatuor ocularium ; sed illud hinc propono , considerando compositam e binis conjunctis ut unicam . Dixi , per eam conjunctionem obtineri posse aperturam duplam , quæ exhibeat campum duplo majorem : hinc nimirum respexi tantummodo aperturam proportionalem radiis sphæricitatum , quæ comprehendat arcus similes . Ad determinandam relationem aperturarum , quæ destruat , vel reddat minima reliqua incommoda ab iis pendentia , requiritur investigatio multo complicatior , in qua inquirendum est potissimum in differentiam augmenti pro diversa distantia puncti objecti a centro campi , a qua oritur potissimum incommodum aperturarum majorum justo ; quærendum ibi etiam , quid prodesse possit mutatio binarum sphæricitatum lentis æquivalentis cuivis ex isosceliis , quid noceat singularum crassitudo . Id materiam præbebit novis perquisitionibus : interea illud est evidens , aucto lenti numero augeri combinationes quantitatum indeterminatarum , quæ pro vitiis corrigendis adhibenda sunt ; quod quidem spem præbet correctionis majoris , & plurium vitiorum . Eam ob causam hæc substitutio binarum lenti pro unica potest esse utilis ; licet nonnihil incommoda sit eo ex capite , quod quo plures lentes adhibentur , eo plus luminis amittitur per crassitudinem vitri , quod nunquam est accurate diaphanum , & per reflexiones in quovis ingressu , & egressu .

150. En igitur hoc remedium . Determinato augmento , quod sperari possit ab objectivi perfectione , & aperturâ , dividatur distantia focalis ipsius objectivi per numerum , qui exprimit id augmentum : quotus erit distantia focalis lentis tertiae : hæc assumatur vel simplex , vel composta ex binis conjunctis , quarum singulæ habeant distantiam focalem duplam . Assumantur aliæ binæ lentes , quæ habeant distantias focales duplas ejus , quam habet tercia simplex , vel æquales illi , quam habent singulæ e binis illam componentibus . Aperturæ omnes ipsarum lenti fiant æquales inter se , non majores dimidiâ distantia fo-

cali

*cali lentis tertiae, si ea sit sola, vel cuiusvis e quatuor lenti-  
bus, si ea sit composita. Bina intervalla primæ a secunda, &  
secundæ a tertia fiant æqualia inter se, singula vero dupla di-  
stantiæ focalis lentis primæ, vel secundæ: collocetur diaphrag-  
ma in foco objectivi, cuius apertura sit paullo minor aperturis  
ocularium. Distinctio habebitur, ubi systema ocularium ita ad-  
motum fuerit ipsi diaphragmati, ut lens prima distet ab ipso  
circiter per dimidium distantie focalis lentis tertiae simplicis,  
vel compositæ. Hæ positiones erunt non penitus accuratæ, sed  
veris proximæ: ad habendas accuratiores, adhibenda erit metho-  
dus proposita num. 98. Distantia tertiae lentis a secunda invenie-  
tur, ipsam promovendo, & retrahendo nonnihil, donec colores  
effugiant sensum, vel evadant minimi, nimirum donec, eâ autem  
adhuc magis nonnihil, & imminutæ, color rubeus in limite inter  
objectum admodum lucidum, & obscurum succedat violaceo, &  
vice versa, quo indicio facile deprehendetur distantia debita: con-  
stitutâ primâ lente respectu secundæ in ea distantia, totum sy-  
stema trium lentium movendum erit nonnihil antrorsum, retror-  
sum; donec pro diversa oculorum constitutione habeatur distin-  
ctio maxima.*

151. Infinitæ aliæ combinationes haberi possunt, quæ corrigant  
eam colorum separationem: facile invenietur formula generalis  
pro casu, in quo omnes tres lentés sint ex eadem materia, &  
priorum duarum foci convenienter in I (fig. 9 Tab. II), quicumque  
fuerint radii sphæricitatum. Omnia erunt communia huic figuræ  
cum figura 3 usque ad puncta O, O', sed tertia lens MM poterit  
occurrere rectis iisdem LO'V, LO'u in aliis punctis Q, q pro  
diversa ejus distantia a lente secunda HH: semper autem fila ru-  
bea, quæ concipiuntur delata per rectas IQ, IO'q prodibunt per  
rectas QR, qr', & filum violaceum delatum per rectam IO'Q  
prodibit per rectam qr, quarum directiones non erunt eadem ac  
in fig. 3. Erit autem R focus ulterior lentis MM pro radiis ru-  
beis parallelis axi, ac a' focus ipsius citerior. Sint ut num. 146,  
distantiæ focales trium lentium h, h', h'', & angulus LG'l dica-  
tur a. Erit (num. 116) LO' = KO = h', & angulus LG'l ad  
LO'q

$LO'V$  proxime ut  $GL$ , sive  $GK$  ad  $LO'$ , ac  $GI$  proxime  $= h$ , adeoque  $LO' = h : GK = h + h :: LG'V = \alpha : LO'V = QO'q$  cuius valor erit  $= \frac{(h+h)\alpha}{h}$ . Pariter ut  $PR$ ,  $= h''$ , ad  $KI$   $= h'$ , ita angulus  $LIK$ , sive  $GIG'$ , vel  $IG'E$  ad  $PRQ$ , sive  $VQR$ , vel  $uqr$ , adeoque (\*) ita  $LG'V = \alpha$ , ad  $r'qr = \frac{h'\alpha}{h''}$ . Is angulus debet esse æqualis angulo  $QXq$  ad habendas  $QX$ ,  $qr$  parallelas, & anguli  $QO'q$ ,  $QXq$  debent esse proxime in ratione reciproca rectarum  $QO'$ ,  $QX$ , quæ sunt proxime æquales rectis  $O'P$ ,  $PX$ . Quare erit  $O'P : PX :: \frac{h'\alpha}{h''} : \frac{(h+h)\alpha}{h} :: h^2 : h''(h+h)$ . Porro in formula solita  $\frac{I}{x} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  applicata ad tertiam lentem  $MM$  pro radiis digressis ex  $O'$ , & coeuntibus in  $X$  est  $PO' = -p$ ,  $PX = x$ ,  $h'' = h$ . Quare fiet  $h^2 : h''(h+h) :: -p : x = -\frac{ph''(h+h)}{h^2}$ . Hinc  $- \frac{h^2}{ph''(h+h)} = \frac{I}{x} = \frac{I}{h''} + \frac{I}{p} = \frac{p+h''}{ph''}$ , &  $p+h'' = -\frac{h^2}{h+h}$ , ac  $p = -h'' - \frac{h^2}{h+h}$  (\*\*).

152. In hac formula  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$  exprimunt tres distantias focales,  $p$  valorem  $PO'$  proxime æqualem distantiae  $PO$  lentis tertiaræ a foco ulteriore secundæ, &  $h + h'$  est proxime æqualis distantiarum secundæ a prima,  $h - p$  est distantia tertiaræ a secunda;

cum

---

(\*) Nam  $LG'V$ ,  $r'qr$  sunt distractiones respondentes refractionibus  $IG'E$ ,  $uqr$ : cum ea æquentur ipsis multiplicatis per  $\frac{dm}{m-1}$  (num. 41), debent esse, ut ipsæ.

(\*\*) Si libeat potius assumere ad arbitrium distantiam tertiaræ lentis a secunda; habebitur  $-p$  dempta inde distantia focali  $h'$  ipsius secundæ, quod exhibebit distantiam focalem tertiaræ adhibendæ in ea distantia ad extinguendos colores. Sed præstat assumere ad arbitrium ipsam lentem tertiam, cum multo facilius sit datam lentem collocare in distantia, quæ respondeat formulæ, quam lentem efformare, quam requirit formula pro data distantia.

cum ea distantia sit  $KO + OP$ , &  $KO$  sit  $= h'$ ,  $OP$  assumpta h̄c in directione contraria directioni  $PO$ , quæ induxit valorem  $p$  negativum respectu formulæ pertinentis ad tertiam lentem. Quare ipsa relinquit ingentem indeterminationem; cum exhibeat unicum nexus inter quatuor valores indeterminatos. Aliam determinationem addit augmentum  $n$ , quod cum sit  $= \frac{bh}{hh'}$ , requirit  $\frac{hh'}{h} = \frac{b}{n}$ . Sed videndum, quid accidat aperturis pro campo, & distantiaæ lentis primæ a foco objectivi. Horum determinatio generalis exhibebit regulas simplices, & elegantes; sed interea statim h̄c incurrit in oculos combinatio omnium simplicissima, in qua omnes distantiaæ focales sint æquales. Fiat  $h'' = h' = h = 1$ : erit  $p = -\frac{1}{1+1} - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ . Quare habebitur correctio colorum, si adhibeantur tres lentes simplices prorsus æquales ex eadem materia, quarum priores binæ collocentur in distantia æquali duplæ distantiaæ focali singularum, ac tercia a secunda distet per eas distantias focales  $2\frac{1}{2}$ .

153. Augmentum in hoc casu itidem erit h̄c, ut num. 146, idem, ac si haberetur sola tertia lens, vel eæ tres lentes æquales haberent focorum coincidentiam; quia ejus valor erit  $\frac{bh}{hh'}$ , qui ob  $h = h'$  evadit  $\frac{b}{h'}$  æqualis valori exprimenti (num. 124) augmentum factum per solam lentem tertiam. Hinc si omnes haæ tres lentes sint æquales lenti tertiaæ numeri 150, habebitur h̄c idem augmentum, ac ibi; & patet, aperturam, qua campus determinatur, fore eandem in utroque casu. Sed distantia GF primæ lentis a foco objectivi esset h̄c (\*) dimidia ejus, quæ ha-

Tom. II.

L

be-

(\*) H̄c comparantur bina systemata lentium ocularium: primum est id, quod proponitur numero 143, in quo priores binæ habent distantias focales æquales, tertia dimidiā, sive ipsa sit sola, habens convexitatem majorem, & suam distantiam focalem minorem, sive composita e binis contiguis habentibus cur-

beretur ibi. Nam esset hic PO =  $1\frac{1}{2}$ , & Pa' = 1; adeoque Oa' =  $\frac{1}{2}$ , Ka' =  $\frac{3}{2}$  ob KO itidem = 1, unde eruitur, ut numer. 145, Ka = 3, Ga = 1, GF =  $\frac{1}{2}$ . Sed hic unitas est ipsa distantia focalis lentis tertiae æqualis reliquis; ibi erat distantia focalis præcedentium dupla distantiae focalis lentis tertiae. Quare ibi unitas erat duplo major, quam hic, & distantia GF =  $\frac{1}{2}$  ibi duplo major quam hic: nimirum ibi æqualis toti distantiae focali lentis tertiae, hic dimidiæ distantiae focali ipsius. Et cum ad habendum idem augmentum distantia focalis lentis tertiae utroque debeat esse eadem; erit GF ibi duplo major quam hic.

154. Id reddit duplo magis incommodum hoc systema in ordine ad reddendos sensibiles pulveres primæ lentis. Reddit quidem hæc combinatio paullo brevius totum systema ab F ad R. Nam hic habetur RK =  $3\frac{1}{2}$  PR, KG = 2, GF =  $\frac{1}{2}$ , adeoque RF = 6 PR: ibi autem RK = 5 PR, KG = 4, GF = 1, adeoque RF = 10 PR; ac proinde totum systema lentium ibi est longius, quam hic per quadruplum distantiae focalis lentis tertiae: sed id sane non compensat tanto majus incommodum pulverum, adeoque illud systema est præferendum huic. Accedit, quod ibi duplicari potest apertura lentis tertiae substituendo uni simplici compositam e binis habentibus curvaturam duplo minorem: hic vero id fieri non potest, cum hæc combinatio requirat distantias focales omnium trium æquales, unde fit, ut si tertiae compositæ ex binis minus curvis præbeatur apertura major, reliquæ duæ ipsam ferre non possint. Oporteret duplicare omnes, quod nimis

mi-

---

vaturas easdem, ac priores duæ, ut idcirco singulæ habeant distantias focales suas æquales distantiis focalibus earum singularum, sed distantia focalis lentis tertiae compositæ ex iis binis sit dimidia, nimirum æqualis ei, quæ in eodem numero tribuitur illi unicæ: secundum systema est id, de quo hic agitur, lentium tantummodo trium, quarum singulæ habeant distantiam focalem eandem, quam ibi habebat illa tertia lentium tantummodo trium. In illo priore Pa' distantia focalis lentis tertiae, sive sit sola, sive composita e binis, est dimidia distantiae focalis singularum præcedentium, in hoc posteriore est æqualis ipsis earum distantiis focalibus. Hinc in utroque systemate Pa' distantia focalis tertiae est eadem: distantiae autem focales præcedentium, & intervallum Oa', in hoc secundo sunt dimidia eorum, quæ fuerant in priore.

minueret vim luminis. Quamobrem systemati trium lentiū æqualium habentium distantiam tertiarę a secunda majorem distantiam mutuā priorum, debet præferri systema, in quo præcedentes duæ habeant distantiam focalem duplam distantiarę focalis lentis tertiarę compositarę e binis, sed distantia tertiarę a secunda æquetur distantia harum mutuarę.

155. Infinitae aliae positiones fieri possunt, ut patet, assumendo binas alias determinationes diversas, uti factum est in singulis e duabus combinationibus, quas huc usque consideravimus, in quibus distantiarę focales priorum duarum lentiū assumptarę sunt æquales inter se, distantia vero focalis tertiarę in priore dimidia earum, in posteriore æqualis etiam ipsa. Iis assumptis determinantur eadem methodo & aperturę pro campo, & distantia primarę lentis a foco objectivi pro pulveribus, ac iis determinatis ea systemata compararentur cum iisdem jam consideratis. Sed præstat exhibere determinationem generalem, quæ evadit admodum elegans & simplex.

156. Quod pertinet ad augmentum, id erit (num. 146) =  $\frac{bh}{hh}$ .

Facile demonstratur, eum valorem non posse crescere, quin decrescat campus in eadem ratione, si nulla apertura possit habere rationem majorem quam determinatam ad suam distantiam focalē, & aperturę in una quamplam combinatione jam habeant omnem magnitudinem, quam habere possunt. Nam is valor non

potest crescere, nisi crescente ratione  $\frac{h}{h}$ , vel decrescente  $h$ . Ra-

tio  $\frac{h}{h}$  est proxime  $\frac{KI}{GI} = \frac{KL}{GG}$ . Manente  $h$ , manebit  $PQ$ , &

$KL$ , & aucta eā fractione, minuetur in eadem ratione ejus denominator  $GG'$ , & campus: manente autem ea fractione, & immunito  $h$ , minuetur in eadem ratione  $PQ$ , adeoque &  $KL$ , &  $GG'$  cum campo. Quare in examine combinationum contentarum in

formula  $h + p = - \frac{h}{h + h}$ , omissa consideratione campi, satis erit considerare augmentum, cui erit semper reciproce proporcional-

nalis ipse campus, & distantiam foci objectivi a prima lente ob pulveres.

157. Ad habendum augmentum æquale cuivis numero dato  $n$ , satis erit juxta num. 146, efficere  $n = \frac{bh'}{hh''}$ , sive  $\frac{hh''}{h'} = \frac{b}{n}$ , quæ æquatio cum æquatione  $h'' + p = - \frac{h'}{h+h'}$  exhibebit duas determinationes quatuor valorum indeterminatorum  $h, h', h'', p$ , relictis adhuc binis aliis indeterminationibus. Ope prioris ex hisce binis æquationibus facile comparatur augmentum horum systematum cum augmento casus simplicissimi, in quo lens ocularis sit unica. Si ejus distantia focalis dicatur  $H$ ; erit (num. 124) idem valor  $n = \frac{b}{H}$ . Quare  $\frac{b}{H} = \frac{bh'}{hh''}$ , sive  $H = \frac{hh''}{h'}$ ; unde profluit hujusmodi theorema. *Lens unica simplex, quæ præberet idem augmentum, habet distantiam focalem æqualem productio ex distantiis focalibus extreamarum diviso per distantiam focalem intermediae.*

158. Valor  $n$  assumendus erit major, vel minor pro diversa perfectione objectivi, & ejus distantia focali  $b$ , nec eum satis accurate determinabit theoria. Pro telescopiis communibus theoria exhibit pari perfectione objectivi simplicis augmentum  $n$  proportionale reciproce radici quadratæ valoris  $b$ ; sed pro acromaticis, in quibus binæ substantiæ non colligunt, nisi bina tot filorum coloratorum genera, non poterit determinari ea ratio, nisi determinetur quantitas erroris residui pertinentis ad reliqua fila, & plurium errorum, qui profluunt a quantitatibus neglectis. Idcirco ea omnia sperari non possunt a sola theoria, sed a diuturna, & multiplice experientia. Nimirum satis cognito genere vitrorum, quod adhibetur, & constructis plurimis objectivis, ac variatis combinationibus, quæ diversa augmenta exhibeant, determinari poterit aliquid eo pertinens. Selecto quovis systemate, quod faciat satis conditionibus reliquis per relationem quantitatum  $h, h', h''$  ad se invicem, valor  $n$  augeri poterit, vel minui in data quavis ratione, augendo numeratorem  $h'$ , vel minuendo am-

bos valores  $h$ ,  $h''$  denominatoris in eadem ratione ob valorem  $b$  permanentem, & valor  $p$  variatus itidem ita, ut satisfaciat æquationi secundæ, retinebit eandem correctionem colorum.

159. Distantia foci objectivi F a prima lente, quæ respondeat æquationi secundæ destruenti colores, sic facile determinabitur.

Valor  $PO = p$  erit  $= -h'' - \frac{h}{h+h''}$ , cum num. 151 sit  $PO'$ , pro qua sumitur hinc  $PO = -p$ , &  $p + h'' = -\frac{h''}{h+h''}$ , qui valor negativus ob directionem contrariam radiis advenientibus, relinquit  $OP = h'' + \frac{h''}{h+h''}$ : hinc ob  $\alpha'P = h''$  evadit  $O\alpha' = \frac{h''}{h+h''}$ , & ob  $KO = h'$  fit  $K\alpha' = \frac{h''}{h+h''} + h' = \frac{hh'+2h''}{h+h''}$ .

Is valor in formula generali (num. 50)  $\frac{I}{s} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  respectu lentis HH evadit  $= s$ : in eadem pro  $h$  ponendum erit  $h'$  pertinens ad eam lentem, ac habebitur  $\frac{h+h'}{hh'+2h''} = \frac{I}{h'} + \frac{I}{p}$ , sive

$\frac{I}{p} = \frac{h+h'}{(h+2h')h'} - \frac{I}{h'} = \frac{h+h'-h-2h'}{(h+2h')h'} = -\frac{I}{h+2h'}$ , vel  $p = -h - 2h'$ . Valor  $p$  est  $K\alpha'$ , cuius directionem exprimit signum negativum, adeoque  $\alpha'K = h+2h'$ ; cumque sit  $GK = h+h'$ , remanet  $\alpha'G = h'$ . Is valor negative sumptus debet sumi pro  $s$  in formula  $\frac{I}{s} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  applicata ad primam lentem retento  $h$  pro  $h$ , adeoque erit  $-\frac{I}{h'} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$ , &  $\frac{I}{p} = -\frac{I}{h} - \frac{I}{h'}$ , sive  $GF = p = -\frac{hh'}{h+h'}$ , cuius signum negativum exprimit itidem directionem ipsius a G versus F contrariam directioni radiorum advenientium. Inde habetur hujusmodi elegans, & satis generale theorema.

*Quævis combinatio trium ocularium ex eodem vitri genere habentium focus primæ, & secundæ lentis congruentes, quæ corrigat distractionem colorum, debet habere primam lentem positam ultra focum objectivi in distantia æquali*

*li productio ex distantiis focalibus priorum duarum lentium di-*  
*viso per earum summam.*

160. Si priores binæ lentes fuerint æquales ; habebitur dimidium distantiarum focalium singularium ex iis . Sic in binis combinacionibus , quas assumpseramus prius , inventa est num. 145 , & 153 distantia eadem foci objectivi ab oculari prima  $\equiv \frac{1}{2}$  , cum distantia focalis tam primæ , quam secundæ esset utrobique  $\equiv 1$  . Ii sunt casus particulares contenti sub hoc generali . Pulveres adhaerentes lenti primæ erunt eo minus sensibiles , quo fuerit major quotus ortus ex ea divisione . In omnibus hisce combinacionibus diaphragma collocandum erit in foco objectivi , & debebit habere aperturam paullo minorem aperturâ utili lentis primæ : oculus autem debet collocari in R in distantia a lente tertia æquali ejus distantiae focali .

161. Cum valor  $Ox'$  evaserit  $\equiv \frac{h^2}{h+h'}$  , patet , distantiam KP lentis secundæ , ac tertiaræ fore semper majorem summam distantiarum focalium KO , a'P , & excessus erit  $\frac{h'^2}{h+h'}$  , ubi  $h + h'$  est proxime æqualis distantiae GK lentis primæ a secunda . Inde eruitur theorema sane elegans , & regula simplex . *Ad destruendam distractionem colorum adhiberi poterunt tres lentes ex eodem vitri genere habentes distantias focales quascunque : collocatis prioribus binis in distantia proxime æuali summae distantiarum focalium earundem lentium , collocanda erit tertia in distantia a secunda excedente summam distantiarum focalium earundem : pro excessu sumenda erit quantitas tertia proportionalis post distantiam primæ a secunda , & distantiam focalem secundæ ; sive quadratum distantiae focalis secundæ divisum per summam distantiarum focalium prime & secundæ .*

162. Hæc itidem regula congruit cum iis , quæ inventa fuerant pro illis binis casibus particularibus . Distantia KP num. 145 erat  $\equiv 2$  existentibus distantiis focalibus priorum duarum lentium  $\equiv 1$  tertiaræ  $\equiv \frac{1}{2}$  . Distantia mutua priorum erat  $\equiv 2$  , nimirum æqualis summae distantiarum focalium priorum binarum lentium :

distan-

distantia vero secundæ a tertia = 2 excedit summam distantiarum focalium ipsarum  $1\frac{1}{2}$  per  $\frac{1}{2}$ , sive per  $\frac{1}{1+1}$ . Eadem ex numer. 152 prodit =  $2\frac{1}{2}$ : sunt autem ibi distantiae focales omnes = 1: Distantia mutua priorum est pariter = 2; distantia autem posteriorum  $2\frac{1}{2}$  pariter superat summam distantiarum focalium  $1+1=2$  per  $\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ .

163. Generalibus determinationibus potest addi longitudo totius systematis a foco objectivi F usque ad oculum collocandum in R. Est  $FG = \frac{hh'}{h+h'}$ ,  $GI = h$ ,  $IO = 2h'$ ,  $Oa' = \frac{h^2}{h+h'}$ ,  $a'R = 2h''$ : est autem summa terminorum primi, & quarti  $\frac{h^2 + hh'}{h+h'} = h'$ : hinc habebitur  $h + 3h' + 2h''$ ; adeoque hujusmodi theorema: *Longitudo totius systematis erit summa distantiarum focalium unius lentis primæ, trium secundæ, duarum tertiarum.*

164. En igitur conditiones, quæ habendæ sunt ob oculos, in selligenda combinatione trium lenti ex eodem vitri genere, quarum priores duæ habeant focus congruentes, totum autem sistema destruat colores.

Distantiae focales objectivi, & trium ocularium  $b, h, h', h''$

|                                                                           |                              |
|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| I. Distantia lentis primæ a secunda . . . . .                             | $h + h'$                     |
| II. Distantia lentis secundæ a tertia . . . . .                           | $h + h'' + \frac{h^2}{h+h'}$ |
| III. Distantia lentis primæ a foco objectivi posito extra ipsam . . . . . | $\frac{hh'}{h+h'}$           |
| IV. Augmentum n . . . . .                                                 | $\frac{bh'}{hh''}$           |

Accedunt sequentes determinationes.

V. Distantia focalis lentis simplicis præstantis

idem augmentum . . . . .  $\frac{hh''}{h}$

VI. Distantia oculi a lente tertia . . . . .  $h''$

VII. Longitudo totius systematis ocularium . . .  $h + 3h' + 2h''$

VIII. Longitudo totius telescopii . . . . .  $b + h + 3h' + 2h''$

IX. Aper-

|                                                         |                                |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------|
| IX. Aperturæ lentium $e, e', e''$ , cum æquatio-        |                                |
| nibus . . . . .                                         | $e' = e'', e = \frac{he'}{h'}$ |
| X. Apertura diaphragmatis a paullo minor quam . . . . . | $e$                            |
| XI. Campus proxime (*) . . . . .                        | $\frac{3438a}{b}$              |

165. Consideratis omnibus, videtur omnium simplicissima combinatio, in qua distantiaæ focales lentium primæ, & secundæ sint æquales inter se, & habeant distantiam focalem satis magnam, lens autem tertia habeat breviorem. Distantia lentis tertiaræ a secunda debebit fieri æqualis distantiaæ focali ipsius cum  $\frac{3}{2}$  distantiaæ focalis unius e prioribus binis, quia valor  $\frac{h''}{h+h'}$ , qui additur valori  $h'+h''$  (num. 164 II) evadit in eo casu  $= \frac{1}{2}h'$ . Quo lens tertia habuerit minorem distantiam focalem, eo majus erit augmentum, quæcumque fuerint distantiaæ focales reliquarum: campus autem erit eo minor, quo id augmentum erit majus. Quo distantiaæ focales reliquarum fuerint majores, eo minus apparetur pulveres; quia lens prima eo magis distabit a foco objectivi. Proderit etiam longitudine earum distantiarum focalium ad minuendos errores figuræ sphæricæ ipsarum; quia ipsarum aperturæ in ea combinatione debent æquari illi, quæ tribuetur lenti tertiaræ multo magis curvæ: quo ea longitudine fuerit major, eo erit magis idonea ad eos usus: sed nimia earum longitudine augebit nimis longitudinem totius systematis, & producit telescopium plus æquo.

166. Pro tertia lente simplici poterit poni lens composita ex duabus habentibus distantiam focalem duplo majorem, quod permettet aperturam majorem, adeoque majorem campum, paribus reliquis

(\*) Proxime; quia pro divisore deberet assumi distantia objectivi a prima oculari, quæ præter distantiam focalem objectivi  $= b$  habet etiam distantiam focus ipsius objectivi ab oculari eadem. Sed juxta num. 146 pro mensurâ campi proxima substitui potest distantia focalis objectivi  $b$  distantiaæ ipsi objectivi ejusdem ab oculari: atque id fieri poterit etiam in iis combinationibus, in quibus prima ocularis jacet nonnihil citra ipsius objectivi focus.

liquis omnibus. Augmentum majus poterit obtineri minuendo distantiam focalem lentis primæ, sed eo pacto minuetur & campus: poterit autem obtineri idem augmentum cum eodem campo tam augendo distantiam focalem secundæ lentis, quam minuendo eam primæ: tum distantia primæ lentis a secunda erit itidem æqualis summæ earum distantiarum focalium, & distantia secundæ a tertia continebit summam distantiarum focalium earundem cum quadraginta secundæ diviso per summam primæ, & secundæ. Quid maxime conveniat, experientia docebit melius, quam theoria (\*). Ea melius, quam theoria, docebit, quæ distantia foci objectivi a prima lente tolerari possit, sine nimiò incommodo orto a pulveribus.

167. Si quæratur combinatio pro objectivo habente distantiam focalem pedum trium, quæ augmentum exhibeat 54; poterunt fieri primæ duæ lentes distantiarum focalium æqualium quarumcunque: tertia debet habere distantiam focalem linearum octo, quia hæc sola cum eo objectivo exhibet id augmentum dividendo pollices 36 per  $\frac{2}{3}$ : si ipsi tribuatur apertura dimidia distantiarum focalis linearum quatuor, reliquæ binæ habebunt aperturam eandem: tum in formula (num. 164) pro campo  $\frac{3438a}{b}$ , erit  $a=4$ ,  $b=36\times 12$ ,

Tom. II.

M

adeo-

(\*) Tam theoria hlc exposita pro corrigendo errore refrangibilitatis, & extingendis coloribus, qui visum percellant, quam ea, quæ habebitur in capite II pro corrigendo eo errore sphæricitatis, qui incurvat rectas objecti lineas, & confusionem inducit, mihi exhibuit combinationem simplicissimam, & quæ est admodum commoda pro artificiis, lentiū quatuor prorsus æquallium, quarum singulæ sint plano-convexæ, ubi satis est, planum sit proximate, nam curvatura admodum exigua nihil officeret, secunda habeat planum obversum objecto, reliquæ tres oculo, ac tam distantia primæ a secunda, quam secundæ a tertia æquetur duplo distantiarum focalis singularum, quarta sit contigua tertiae ita, ut eæ binæ simul æquivaleant uni habenti distantiam focalis dimidiā distantiarum focalis singularum, quo pacto fit, ut hæc combinatio pertineat ad systema trium ocularium, quarum postrema habens distantiam focalem dimidiā duplicit augmentum, aperturæ autem sint omnes æquales, diaphragma tantillo minus. Experientia multiplex jam confirmavit hujus systematis utilitatem.

adeoque campus proxime  $= \frac{3438 \times 4}{36 \times 12} = \frac{3438}{108} = 32'$ . Si fiat distantia focalis lentis tertiae unius pollicis, & distantia secundae dupla distantiae primae; augmentum erit idem, quia in formula  $\frac{bh}{hh}$  valores  $h'$ ,  $h''$  dupli exhibebunt eundem valorem  $\frac{h}{h'}$ : campus itidem erit idem, licet apertura  $e''$  lentis tertiae possit fieri duplo major, quam prius, quia cum debeat esse  $e' = e''$  (num. 164), &  $e = \frac{he'}{h'}$ , ejus valor erit idem, duplicatis valoribus  $e'$ , &  $h'$ : campus augeri poterit tantummodo facta lente tertia composita e binis, quarum singulae sint unius pollicis. Distantia focalis lentis compositae erit  $\frac{1}{2}$ , adeoque augmentum idem ac prius: tum si apertura compositae fiat dimidia distantiae focalis utriuslibet e componentibus; erit duplo major: adeoque manentibus reliquis aperturis campus evadet minutorum 64, qui quidem est satis magnus, continens nimirum bis diametrum lunarem.

168. Quo fuerit major vis refractiva vitri, eo id erit aptius pro ocularibus; quia requiretur curvatura minor ad habendam eandem distantiam focalem, & cum curvatura minore poterit induci apertura major. Videntur idcirco preferenda pro ocularibus vitra flint, & strass, quae habere solent majorem vim refractivam. Ea habent majorem etiam vim distractivam, quamobrem sunt minime idonea pro objectivis simplicibus, quia inducunt multo majorem colorum separationem: pro compositis acromaticis eo magis sunt idonea, quo major est eorum vis distractiva, & eo minus, quo vis refractiva est major; quia vis refractiva major lentis concavae, pro qua adhibentur ea vitra in compositione objectivi, producit distantiam focalem ipsius. Sed pro ocularibus, si adhibeantur remedia, quae hic propono, vis distractiva major nihil nocet, cum combinationes exhibitae corrigan distractionem ipsam, vis autem refractiva major prodest plurimum, cum reddat breviorem distantiam focalem pari curvatura. Vim refractivam omnium corporum diaphanorum maximam habet adamas, in quo valor  $m - 1$  est proxime  $= 1\frac{1}{2}$ , dum in vitris communibus

bus est  $\frac{1}{2}$ , ut idcirco, pari angulo, refractio in ipso sit triplo major, quam in vitris communibus, quod redderet triplo minorem curvaturam respondentem eidem distantia focali. Si posset haberi vitrum, quod eiusmodi vi refractiva esset praeditum; id quidem esset egregium pro oocularibus.

169. Verum vitra flint, & strass, & alia quæcumque, quæ habeant vim distractivam multo majorem, idcirco sunt minus opportuna pro oocularibus extra casum, in quo queratur ocularis, quæ sit acromatica ipsa per conjunctionem binorum vitrorum habentium qualitates distractivas diversas, quod eadem correctio colorum haberi potest per combinationes adeo simplices, & commodes adhibendo vitra ejusdem generis etiam communia, dum illa vitra multo magis distrahentia multo difficilius obtinentur satis pura, licet ea difficultas sit minor, ubi agitur de frustis exiguis, quam ob causam constant etiam majore pretio, dum vitra minus distrahentia passim occurrunt, & idcirco appellari solent communia. Verum ne hæc quidem adhibenda sunt sine deleſtu; saepissime enim in iis inveniuntur inæqualitates internæ, quæ radios ita detorquent ante appulsum ad superficiem secundam, ut rem omnem perturbent, & confusionem pariant, utcumque sint exactæ superficierum politissimarum curvaturæ calculis initis respondentes.

170. Et vero etiam ubi adhibentur quæcumque vitrorum genera, etiam eorum, quæ appellamus communia, cavendum illud, ut omnes tres lentes adhibeantur ex eadem vitri specie, quod facilius obtinebitur, si omnes abscindantur ex eadem lamina: nam illud discriminem, quod invenitur non solum inter diversa vitra flint, sed etiam inter diversa communia, obest effectui respondentis formulæ, in quibus suppositæ sunt qualitates distractivæ lentium omnium eædem. Si primæ duæ lentes non habeant distantiam focalem eandem; res aliter se habebit in figuris 3, 7, 9. Concursus fili rubei G'L V in fig. 3, & 9 cum violaceo G'l u non fiet in distantia LO' æquali distantia focali KO secundæ lentis, uti eam invenimus num. 115 ex æqualitate angularum LG'z, Qlq; porro ex ea æqualitate rectangularum LO', KO profluxerunt illæ formulæ numeri 164. Suppositio ejusdem qualitatis vitri lentis pri-

mæ, & secundæ in fig. 7 exhibuit (num. 97) æqualitatem angulorum  $LMl$ ,  $Mlm$ , & eadem suppositio pro lente prima, & ter-  
tia exhibuit (num. 143) differentiam  $rqX$  refractionum in  $q$  du-  
plam differentiæ  $LG'l$  refractionum in  $G'$ , quæ differentiæ utrobique  
assumptæ sunt proportionales refractionibus radii rubei in iisdem  
punctis, cum hæ illas exhibeant multiplicatæ per eundem valorem  
 $\frac{dm}{m-1}$ . Mutato vitrorum genere debet induci etiam ratio pertinens  
ad valores  $\frac{dm}{m-1}$  diversos pro diversis substantiis. Ex ea mutatione  
profluunt consecaria diversa, quæ possunt utique inveniri calculo  
rite instituto; sed exhibent formulas aliquanto minus simplices.

171. Pro invenienda distantia  $LO'$  figuræ 3 Tab. I determina-  
bitur prius  $LQ$  ope hujusmodi proportionum  $GI:IK::G'I:IL$ ,  
adeoque  $GI = h : GK = h + h' : : G'I : GL :: IK = h' : LQ =$   
 $\frac{h(h+h')}{h} : \text{tum } LQ = \frac{h(h+h')}{h} \text{ ad } LG' \text{ proxime } = GK =$   
 $h + h'$ , ita proxime  $LG'l$ , quem angulum num. 151 appellavimus  
 $a$ , ad  $LQ'l$ , qui erit  $= \frac{ha}{h'}$ . Porro si fiat, ut valor  $\frac{dm}{m-1}$  per-  
tinens ad primam lentem ad eum valorem pertinentem ad secun-  
dam, ita  $1$  ad  $n$ , quæ erit ratio distractionis  $LG'l = a$  ad dis-  
tractionem  $Qlq$ ; valor hujus erit  $na$ . Quare erit  $QO' : O'l =$   
 $O'L :: QlO' = Qlq : O'Ql = LQl :: an : \frac{ah}{h'} :: nh' : h$ , &  
componendo  $h + nh' : h :: QO' + O'L = QL = \frac{h(h+h')}{h} :$   
 $O'L = \frac{h(h+h')}{h+nh'}$ . Si ambæ lentes prima, & secunda sint ex eo-  
dem vitri genere; erit  $n=1$ , adeoque  $O'L = h' = OK$ , uti  
fuerat inventum numero 115. Si prima lens sit e vitro commu-  
ni, secunda e flint; erit  $n = \frac{3}{2}$ : si hæc secunda fuerit e strass;  
erit  $n=2$ .

172. Inventâ  $LO'$  in fig. 3, quæ erit eadem, ac in fig. 9 Tab.  
II, licebit progredi, ut num. 151, ad determinandam in fig. 9  
distantiam, ad quam tertia lens data collocari debeat respectu se-

cundæ. In formula  $\frac{I}{n} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  applicata ad ipsam tertiam MM ponendum erit  $h''$  pro  $h$ , & obtinendus novus valor  $n$  ad habendum  $\frac{I}{p} = \frac{I}{n} - \frac{I}{h''}$ , sive  $p = \frac{h''n}{h'' - n}$ . Is valor determinabitur prorsus ut ibi, assumpto tantummodo novo valore  $n'$ , qui sit quartus geometrice proportionalis post valores  $\frac{dm}{m-1}$  pertinentes ad substantias lentium primæ, & secundæ, ac unitatem. In primis pro angulo  $QO'q$  habebitur eadem proportio, ac ibi, mutato tantummodo valore  $LO'$ , qui ibi erat  $= h'$ , in hunc hic inventum  $= \frac{h'(h+h')}{h+nh'}$ , adeoque erit  $LO' = \frac{h'(h+h')}{h+nh'} : GK = h+h' :: LG'l = \alpha : LO'l = QO'q = \frac{(h+nh')\alpha}{h'}$ . Angulus  $LG'l = \alpha$  ad angulum  $r'qr$  erat ibi, ut refractio  $IG'E$  ad refractiōrem  $uqr$ , quæ ratio inventa est ibidem eadem, ac ratio  $h''$  ad  $h'$ : hic ea ratio erit componenda cum ratione binorum  $\frac{dm}{m-1}$ , nimirum  $1$  ad  $n'$ : hinc erit angulus  $r'qr = \frac{n'h'\alpha}{h''}$ , qui angulus debet esse ut ibidem  $= QXq$ . Tum eodem progressu calculi erit  $O'P : PX :: QXq = \frac{n'h'\alpha}{h''} : QO'q = \frac{(h+nh')\alpha}{h'} :: n'h'^2 : h''(h+nh')$ .

In formula  $\frac{I}{n} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  applicatâ ad lentem tertiam pro radiis digressis ex  $O'$ , & coeuntibus in  $X$ , erit & hic, ut ibi,  $PO' = -p$ ,  $PX = n$ , &  $h'' = h$ , adeoque erit hic  $n'h'^2 : h''(h+nh') :: -p : n = -\frac{ph''(h+nh')}{n'h'^2}$ , &  $\frac{I}{n} = -\frac{n'h'^2}{ph''(h+nh')}$   
 $= \frac{I}{h''} + \frac{I}{p} = \frac{p+h''}{ph''}$ , ac demum  $p+h'' = -\frac{n'h'^2}{h+nh'}$ ,  $p = -h'' - \frac{n'h'^2}{h+nh'}$ .

173. Posito pro casu vitrorum ejusdem speciei  $n' = n = 1$ ,  
redit

$\text{redit } p = - h' - \frac{h^2}{h+h}$  formula eadem, quæ num. 151. Cum  
 hæc sit simplicior, & facilius sit determinare valorem  $\frac{dm}{m-1}$  pro  
 unica specie vitri, quam pro tribus ad habendos valores  $n$ ,  $n'$ ,  
 præstat adhibere pro omnibus lentibus frusta vitri excedia ex ea-  
 dem lamina, quæ erunt speciei ejusdem. Notandum autem hinc  
 erit pro omnibus hisce formulis, cum per ipsas non invenian-  
 tur valores accurati, sed tantummodo veris proximi ob quanti-  
 tates ordinum inferiorum neglectas, posse inveniri accuratio-  
 res adhibendo pro singulis superficiebus methodum adhibitam in  
 postremo supplemento Tomi præcedentis ad inveniendos errores,  
 qui supersunt, & id genus falsæ positionis compositæ, quo ibi  
 usi sumus ad eos corrigendos. Sed calculus evadit admodum lon-  
 gus, & molestus. Multo expeditius res potest perfici, inventâ  
 correctione colorum per mutationem distantiarum lentis tertiaræ a se-  
 cunda, & mutatâ distantia totius systematis ab objectivo pro ac-  
 quirenda distinctione.

174. Eadem methodus rem perficiet etiam pro casu, in quo  
 libeat augere distantiam focalem lentis secundæ ad habendum aug-  
 mentum majus; quamobrem omittimus determinationem distantiarum  
 postremarum lentium pro eo casu. Posset fieri perquisitio pro  
 casu, in quo foci priorum binarum lentium non congruant; sed  
 perquisitio ipsa esset magis implexa: invenimus autem combina-  
 tiones satis idoneas pro congruentia eorum focorum, adeoque a  
 systemate trium lentium transibimus jam ad sistema lentium qua-  
 tuor (\*), de quo proferemus nonnulla non inutilia in paragrapho  
 sequenti.

---

### §. VII.

(\*) Etiam in iis, quæ proposuimus in hoc paragrapho, occurrit usus quatuor len-  
 tum, ubi proposita est compositio tertiaræ e binis contiguis; sed illæ binæ,  
 quæ tertiam componunt, considerantur ibi tanquam si esset lens unica, adhi-  
 bitis binis ad habendam tantummodo minorem curvaturam. In ordine ad co-  
 lores ex binæ reipsa agunt, tanquam si pro iis haberetur unica habens distan-  
 tiæ focalem eandem, ac ipsarum systema.

## §. VII.

*De combinatione lentiū quatuor simplicium.*

175. **S**i ad hanc quatuor lentiū ob multo majorē indeterminationē indiget perquisitione multo operosiore ad eruendas combinationes simplices, & facilis evolutionis, existentibus multo magis complicatis formulis generalibus. Hinc modo pauca admodum proponemus, quæ potius viam sternant ad ulteriora tentamina.

176. Primum quidem se offert casus simplicissimus figuræ 3 Tab. I (\*), in quo omnes priores tres lentes habeant distantias focales æquales cum focus coincidentibus, in quo invenimus (numer. 141) distractionem colorum  $TSz$ , sive  $QSg$  parum discrepantem a distractione  $NG'n$ , sive  $LG'l$ : uti enim in fig. 7 radii  $G'I$ ,  $G'i$  redditi sunt paralleli in  $LM$ ,  $lm$  per additionem novæ lentis  $HH$  post  $BB$ , ita ibidem nova lens addita post  $MM$  potest reddere parallelos radios  $SR$ ,  $Sr$ . Determinatio ejus novæ lentis fiet in ipsa figura 7, sumendo in hac posteriore puncta  $G$ ,  $G'$ ,  $I$ ,  $i$  pro illius punctis  $P$ ,  $S$ ,  $R$ ,  $r$  cum hoc discrimine, quod in fig. 7 punctum  $G'$  jacet in ipsa lente  $BB$  ex parte dextra respectu axis, & in fig. 3  $S$  ex parte sinistra citra  $MM$  in distantia, quæ facile determinatur: tum  $HKH$  ipsius figuræ 7 referet quartam lentem addendam.

177. Cum in fig. 3 in casu fotorum pertinentium ad priores duas lentes coincidentium in  $I$  sit  $LO' = KO$  (num. 116), & additâ tertiatâ lente  $MM$  æqualis distantiaæ focalis, debeat esse punctum  $O$  focus communis lentiū  $HH$ ,  $MM$ ; erit  $KO = OP = O'Q$ , adeoque  $LO' = QO'$ , &  $Ll = Qg$ , & ob angulum  $QSg$  proxime æqualem  $LG'l$ , erit  $QS$  proxime æqualis  $LG'$ , sive  $= GK = 2KI = 2PR$ , & additâ  $QR$  proxime æquali  $PR$ , fiet  $SR$

pro-

(\*) Cum sèpe hic transiri debeat a figura 3 ad 7, & viceversa, satis est semel demum monere id, quod in superioribus jam toties habuimus, figuram 3 haberi in tabula I, figuram 7 in Tabula II.

proxime  $= 3PR$ . Hinc in figura 7 erit censenda  $G'I$  proxime  $= 3PR$  figuræ 3, adeoque proxime  $= 3GI$  figuræ 7. Congruant in I foci lentium BB, HH ipsius figuræ 7, & fiat  $GI = h$ ,  $KI = z$ , qui erit proxime valor etiam rectæ LI : erit  $G'L = 3h - z$ . Si etiam  $G'L$  esset radius rubeus, ut  $G'L$ ; convenirent in recta  $G'K$  producta ad distantiam  $KM$  inveniendam ope formulæ generalis  $\frac{I}{x} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  applicatæ ad lentem HH. In ea applicatione manebit valor  $h$ , & erit  $p = G'K$ , sive proxime  $G'L = -(3h - z)$ , ac  $KM = x$ . Hinc  $\frac{I}{x} = \frac{I}{h} - \frac{I}{3h - z}$ .

178. Jam vero angulus  $Mlm$ , cui debet esse æqualis angulus  $LMl$  ob parallelismum, est differentia refractionum respondens refractioni ejus radii rubei  $Mli$ , sive proxime  $MLI$ , & numer. 97 ostensum est, existente I foco lentis HH, esse angulum  $VLI$  proxime æqualem angulo  $VIL$ , sive  $GIG'$ , cui in fig. 3 respondet  $SRP$ , sive  $QRP$  æqualis angulo  $LIK$ , sive  $GIG'$ , vel proxime  $IG'E$ . Quare differentia refractionis  $Mlm$  figuræ 7 habenda erit pro æquali differentiæ  $LG'l$  figuræ 3, sive anguli  $RSr$  ejusdem, qui respondet angulo  $IG'i$  figuræ 7, vel  $LG'l$ . Quare ut num. 94 debebit esse  $LG'$  proxime æqualis  $LM$ , &  $G'K$ ,  $KM$  proxime æquales. Est  $G'K$  proxime  $= 3h - z$ , &  $KM = x$  formulæ finalis numeri superioris. Hinc  $\frac{I}{3h - z} = \frac{I}{h} - \frac{I}{3h - z}$ , &  $\frac{2}{3h - z} = \frac{I}{h}$ , sive  $2h = 3h - z$ , adeoque  $z = h$ .

179. Debet igitur  $KI$  esse æqualis  $GI$ . Nimirum quarta lens debet applicari tertiaræ sine intervallo, & habere distantiam focalis ipsi æqualem. Hæc est combinatio numeri 148 orta ex duplicatione lentis tertiaræ. In ea adhibendæ sunt quatuor lentes similes, & æquales ex eadem materia: collocandæ autem tam prima respectu secundæ, quam secunda respectu tertiaræ ad distantiam duplam distantiæ focalis singularum, evadente augmento duplo illius, quod exhiberetur ab una sola ex iis lentibus, campo eodem, quod illa sola habere posset, & distantiâ  $GF$  figuræ 3 dimi-

dimidiâ ejus , quam requireret ipsa sola , sed æquali illi , quæ haberetur , si obtineretur idem augmentum per lentem unicam , vel per tres æquales , factâ nimirum ipsarum distantia focali duplo minore . Hæc combinatio quatuor lenti haberet idem augmentum , & distantiam GF eandem cum casu unius , vel trium æqualium habentium distantiam focalem duplo minorem , sed campus fieri posset duplo major , quæ omnia determinata sunt paragrapho superiori .

180. Hæc applicatio mihi occasionem præbuit totius perquisitionis ipsius paragraphi superioris , nec inutile futurum arbitror hinc etiam proponere seriem , & nexus idearum , quarum quæ simplicissimæ sunt , plerumque postremæ occurrunt . Videram jam olim ortum colorum telescopicorum ex ocularibus , quarum causâ hinc sâpe occurrunt & in telescopiis , quæ appellant acromaticæ , & in telescopiis ipsis catadioptricis . Eorum genesis persecutus ante aliquot annos in Italia , inveneram id , quod hinc demonstratum num. 115 proposui num. 116 , nimirum fila separata a prima lente conjungi a secunda in ipsius foco ulteriore , si eæ sint ex eodem vitri genere , & focus ulterior primæ congruat cum citiore secundæ . Id ipsum longe alia & complicatiore methodo demonstraveram in Opusculo italice edito , ac proposueram ibidem remedium lentis tertiaræ compositæ acromaticæ . Ibidem animadverteram , separationem colorum in egressu a tertia lente simplici esse aliquanto minorem in casu trium lentiæ æqualium , quam in primo egressu e prima , & indicaveram , inde suboriri spem correctionis per lentes , quæ sint e vitro communi omnes .

181. Superiore anno (\*) de eadem re cogitans inveni correctionem per lentes duas ex eodem vitro communi , quam hinc proposui in §. 4 ; quia animadverteram , quod tamen erat visu facile , posse eadem methodo correctionem obtineri additâ lente quartâ post tertiam . Adhibui autem methodum , quam hinc exponam

*Tom. II.*

N

paul-

---

(\*) Cum hæc imprimò in Italia anno 1783 , jam anni octo elapsi sunt ab eo tempore , quo hoc primum hujus Opusculi caput conscripsi in Gallia .

paullo inferius, revocandi ad examen combinationes nonnullas quatuor lentium, quæ observatæ fuerant in nonnullis telescopiis Anglicanis, & ejus ope inveni ea, quæ in ipsis pertinent ad augmentum, campum, distantiam primæ lentis a foco objectivi connexam cum sensu pulverum, ac separationem colorum in egresu e postrema lente, & mutationem inducendam ad destruendos colores. Illud autem mihi accidit in pluribus ejus generis combinationibus, ut semper invenerim focum objectivi quam proximum primæ lenti, vel combinationes, quæ objecta per curvaturam regularum linearum deturparent plurimum; quamobrem eam perquisitionem tum quidem omisi: post plures menses eam iterum aggressus sum exordiendo ab hac translatione remedii petiti a secunda lente adjecta post primam, ad quartam adjectam post tertiam, & evagatus longiore ambitu demum animadverti quartam æqualem tertiaræ, & ipsi adhærentem. Cum ex binæ, neglegitâ crassitudine, quam in omnibus hisce perquisitionibus neglexi, debeat præstare eundem effectum respectu refractionis, & distractio-  
nis colorum, quem præstat lens unica habens distantiam focalem duplo minorem, regressus ad lentes tres, primum exposui directe remedium petitum a tertia lente habente distantiam focalem du-  
plo minorem, & positâ ad distantiam eandem, quam prius ha-  
bebant illæ duæ æquales conjunctæ; ac inde progressus ad formulam generalem trium lentium habentium focos primæ, & secundæ conjunctos, ejus consecaria exposui in eodem superiore paragraphe. Hic fuit idearum nexus, in quo, quæ statim debuisse videre, nonnisi longo, & flexuoso ambitu deprehendi, & eum ambitum hic protuli, cum ex hac additione lentis quartæ conjunctæ cum tertia æquali ortum duxerint illa reliqua.

182. Hic etiam ab hoc casu particulari liceret progredi ad magis generales; sed formulæ obveniunt admodum complicatae. Indicabo tantummodo methodum, qua calculus iniri possit pro ca-  
su quatuor lentium, quarum priores duæ habeant focum ulte-  
riorem primæ congruentem cum citeriore secundæ, ac foci ulte-  
riores tertiaræ & quartæ sint congruentes. Ad id præstandum o-  
portet redire ad ea, quæ in superiore paragraphe agendo de sy-  
stema-

stemate trium lentium ex eadem substantia, demonstrata sunt pro prioribus binis habentibus eam focorum congruentiam ante considerationem tertiarę. In figura 9 Tab. II omnia pro hoc casu erunt eadem ac in figura 3 Tab. I usque ad puncta  $OO'$ . Habantur binæ lentes  $BB$ ,  $HH$ , cum earum distantiis focalibus  $GT = h$ ,  $IK = KO = LO' = h'$ , sint autem  $Q, q, P$  occursum lensis tertiarę collocatæ in distantia nondum definita, cum radiis  $LO'$ ,  $IO'$ , & axe  $KO$ , ac prodeant ex ipsa per rectas  $QRX$ ,  $qr'X$  radii rubei, qui concipientur delati per rectas  $O'Q$ ,  $O'q$ , & radius violaceus reipsa delatus per rectam  $O'q$  prodeat per  $qr$ (\*). E num. 151 erunt  $GI = h$ ,  $IK = LO' = h'$ , angulus  $LG'l = \alpha$ ,  $QO'q = LO'l = \frac{(h+h')\alpha}{h'}$ , qui erit itidem valor anguli  $QO'q$  in fig. 9. Sit ibidem distantia focalis lentis  $MM$  itidem  $h''$ , & distantia  $OP$ , sive  $O'P = -p$ , & erit in formula  $\frac{I}{x} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  applicata ad lentem  $MM$  ponendum  $h''$  pro  $h$ , adeoque  $\frac{I}{x} = \frac{I}{h''} + \frac{I}{p}$ : factis autem ut  $PX = x$  ad  $PO' = -p$ , sive  $QX$  ad  $QO'$ , ita  $QO'q = \frac{(h+h')\alpha}{h'}$  ad  $QXq$ , habebitur valor hujus anguli  $= \frac{-(h+h')\alpha p}{h'} \times \frac{I}{x} = \frac{-(h+h')\alpha p}{h'} \times (\frac{I}{h''} + \frac{I}{p}) = -\frac{(h+h')\alpha p}{h'h''} - \frac{(h+h')\alpha}{h'}$ : angulus autem  $r'qr$ , sive  $Xqr$  erit per eundem numerum  $= \frac{h'\alpha}{h''}$ . Horum differentia erit convergen-

(\*) Recta  $qr$  non debet hic prodire parallela rectæ  $QR$ , ut numero 143, sed inclinata ad ipsam in angulo majore, vel minore pro diversa distantia focali lensis tertiarę, & positione ipsius respectu secundarę. Angulus ejus inclinationis hic est determinandus per ea duo elementa: ipsi erit censendus æqualis angulus  $RSr$ , sive  $TSt$  figuræ 3, nempe angulus  $LG'l$  figuræ 7, qui debet corrigi a quarta lente  $HH$ , uti præstitum est initio hujus paragraphi pro casu trium lentium æqualium cum focus congruentibus tam primarę, & secundarę, quam secundarę, & tertiarę: hic focus ulterior secundarę non congruit cum citeriore tertiarę, sed foci ulteriores tertiarę, & quartarę congruunt, ut ibi.

tia rectarum  $XQ$ ,  $rq$ , quæ in fig. 3 exhibebit angulum  $RSr$ , sive  $QSq$ , cuius valor analyticus idcirco habebitur constans tribus terminis.

183. Hinc in eadem fig. 3 quæcumque sit distantia lenti tertiae a secunda, punto  $Q$  indicante occursum rectæ  $QY$  cum ipsa, habebitur valor analyticus utriusque anguli  $QO'q$ ,  $QSq$  per  $h, h', h'', p, \alpha$ , que id ita, ut ibi valor  $\alpha$  sit coeffiens singulorum e terminis. Porro considerari poterunt rectæ  $QO'$ ,  $QS$ , ut reciproce proportionales iis angulis, & factis  $QSq : QO'q :: QO' : QS$ , in valore hujus postremæ lineæ elidetur  $\alpha$ , &  $QO'$  accipi poterit pro  $= PO' = -p$ . Hinc habebitur  $QS$  per  $h, h', h'', p$ : cumque etiam  $QR$  sumi possit pro  $= PR = h''$ , habebitur &  $SR$ . Cum eo, & valore anguli  $RSr$ , migrabitur ad figuram 7, ut num. 176, ponendo valorem inventum rectæ  $RS$  pro  $IG'$ , & valorem anguli  $RSr$  pro  $IG'i$ . In ipsa fig. 7  $GI$  erit itidem  $= h''$ , & fiet  $KI = z$ ; tum reliqua omnia, ut numer. 177, & 178, adhibitis tantummodo hisce binis valoribus rectæ  $IG'$ , & anguli  $IG'i$ , pro illis, qui ibi habebantur. Obtinebitur eodem prorsus modo æquatio, quæ præter quatuor valores distantiarum focalium  $h, h', h'', z$ , continebit  $p$ . Determinatis ad libitum quatuor ex iis quinque valoribus, invenietur quintus; eritque distantia lentis primæ a secunda  $= h + h'$ , secundæ a tertia  $= h' + p$ , tertiae a quarta  $= h'' - z$ , quartæ ab oculo  $= z$ . Facile autem regressu facto a lente quartâ ad præcedentes, invenientur etiam puncta dirigentia radios incidentes in quamvis ex iis lentibus, adeoque innotesceret etiam distantia foci objectivi a lente prima, qui focus dirigit radios incidentes in ipsam illâ eadem methodo, quæ satis colligi potest ex exemplis, quæ supra proposuimus, & quam paullo inferius hic evolvemus pro casu generali, in quo nulli etiam foci congruant, distantiae autem focales sint utcumque diversæ, ac etiam utcumque diversæ substantiae singularum lenti.

184. Licet in casu, quem hic consideravimus, habeantur binæ positiones arbitrariæ, quæ problematis amplitudinem contrahant, suppressis binis aliis indeterminatis, nimirum distantia lentis pri-

mæ a secunda ; & tertiaræ a quarta , & adhibeantur omnes quatuor substantiæ ejusdem speciei ; adhuc tamen satis patet , quam immensus sit numerus casuum , qui considerari possint variando ad arbitrium positionem quatuor e quinque indeterminatis , quæ remanent . Combinationes simplices , & satis utiles sperari non poterunt a formulis generalibus adeo complicatis ; sed longa attentione utendum erit , donec reflexionibus quibusdam institutis circa plures casus particulares , & quandoque etiam casu mere fortuito , inveniantur , quæ usui esse possint .

185. Si mutentur binæ illæ suppositiones arbitrariæ , quibus hinc usi sumus , in alias ; poterunt inveniri aliæ formulæ non nimis compositæ , ut si priores binæ lentes haberent focos alio modo congruentes , nimirum congruentes etiam focos priorum duarum ulteriores , uti congruunt hinc ulteriores postremarum . Eo casu augmentum respondens primæ duplicaretur a secunda , ut augmentum tertiaræ a quarta , & campus fortasse augeri posset pari augmentatione imaginis objecti . Posset autem induci extinctio colorum , vel mutatâ distantia focali cujuspam ex ipsis , vel distantia mutuâ binarum quarumcumque . Sed ea perquisitione nunc saltem omissa proponam methodum , qua generaliter inquire poterit in sistema quodvis propositum , ut innotescat augmentum cum campo , & distantia foci objectivi a prima lente , cum quantitate separationis colorum residua , ac methodus extinguendi colores ipsos per mutationem cujuspam e distantias focalibus , vel e distantias lentium mutuis . Id facile obtinebitur idoneâ applicatione formulæ generalis , qua toties jam usi sumus  $\frac{I}{x} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  .

186. Sit in figuris 10 , & 11 Tab. III objectivum AA , quatuor oculares BB , B'B' , B''B'' , B'''B''' , & occurrat ipsis axis in C , D , D' , D'' , D''' , sit vero F focus objectivi : figura 10 exhibebit progressum radiorum , qui adveniant ad objectivum e puncto objecti ita remoto , ut habeantur pro parallelis , uti in fig. 1 Tab. I est radius dA respectu DC , qui quidem debent prodire vel parallelis ex lente quarta , vel nonnihil convergentes , aut divergentes pro diversa constitutione oculorum ; sed considerabimus parallelismum in

in egressu, & ex eo determinabimus distantiam foci objectivi a prima lente. Figura 11 exhibebit progressum radii provenientis a puncto objecti sito extra axem, uti in eadem fig. 1 est radius D'C respectu ejusdem DC, qui ab oculari dividitur in fila colo- rata, & ex eo determinabimus quantitatem distractionis eorum filorum in egressu e quarta lente postrema, quæ quidem figura exhibebit simul & augmentum, & campus, & singularum lentium aperturas utiles una cum apertura diaphragmatis. Possent ea omnia expediri per formulas generales notas geometris; sed præstat hic adhibere calculum numericum applicatum exemplo, ex quo facile pateat, quid in singulis casibus præstandum sit; omissis formulis complicioribus, & retento usu maxime simplicium.

187. Pro objectivo distantiaæ focalis pedum 6 propositum mihi fuit systema ocularium quatuor e vitro communi, quarum distantiaæ focales, incipiendo ab ea, quæ prima radios excipit obversa objectivo, erant linearum 14, 21, 27, 32, intervalla autem inter ipsas 23, 44, 40, & aperturæ 9, 13, 11, 12, ac apertura diaphragmatis positi in foco citeriore postremæ ocularis 7. In utraque figura erit  $DD' = 23$ ,  $D'D'' = 44$ ,  $D''D''' = 40$ ,  $CF = 6 \times 144 = 864$ , & si distantiaæ focales ocularium dicantur  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$ ,  $h'''$ , erunt  $h = 14$ ,  $h' = 21$ ,  $h'' = 27$ ,  $h''' = 32$ . Quærenda erit in fig. 10 distantia DF primæ lentis a foco objectivi F: tum in fig. 11 accident aperturæ utiles lentium ocularium, & diaphragmatis, augmentum, campus, quantitas eorum residua.

188. Deveniat in figura 10 radius quidam e mediis, cuius spe- ciei respondeant eæ distantiaæ focales, directione parallela axi ad punctum objectivi K: detorquebitur inde ad ipsius focum F, & occurret primæ oculari BB alicubi in E. Abeat a prima lente ad secundam per rectam EH, quæ producta, si opus sit, occurrat axi in G, tum a secunda ad tertiam per HM, quæ axi occurrat itidem in I, deinde a tertia ad quartam per rectam MP occurrentem axi in N. E quarta prodeat per rectam PR, quæ ad habendam distinctionem debet prodire parallela ipsi axi, vel pro di-

diversa oculorum constitutione nonnihil convergens, vel divergens, sed considerabimus parallelam.

189. Ex suppositione hujus parallelismi invenietur DF ope formulæ  $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ , ubi  $h$  distantia focalis singularum lentium,  $p$  distantia puncti dirigentis radios incidentes, cujusmodi puncta respectu quatuor lentium sunt F, G, I, N, distantia dirigentis refractos  $x$ , cujusmodi puncta sunt G, I, N, & infinitum versus RQ. Eundum erit ordine retrogrado a valore  $x'' = \infty$  ad inveniendos  $p''$ ,  $x''$ ,  $p''$ ,  $x'$ ,  $p'$ ,  $x$ ,  $p$ : dum ii inveniuntur, figura describetur, quæ vitandæ confusionis gratia calculum dirigit, ponendo puncta extrema distantiarum inventarum ultra, vel citra lentes, prout ii valores obvenerint positivi, vel negativi: postremus valor  $p$  exhibebit quæsitam DF. Formula mutabitur in hanc  $\frac{1}{p} = \frac{1}{x} - \frac{1}{h} = \frac{h-x}{hx}$ , adeoque  $p = \frac{hx}{h-x}$ .

190. Valores  $x$  habebuntur a formula: valores  $h$  jam habentur: valores  $x$ , &  $h-x$  invenientur pro præcedentibus lentibus ex inventis  $p$  pro sequentibus per formulam, & datis DD', D'D'', D''D''' qui addentur valoribus  $p$ , vel ab iis subtrahentur pro diverso valore positivorum, vel negativorum, qui ipsi nimirum considerati directione opposita D'D, D''D', D'''D'' erunt negativi. Ex ejusmodi positionibus en calculum numericum.

Pro lente 4 est  $x''' = \infty$ ,  $h''' = 32$ ,  $p''' = \frac{32 \times \infty}{32 - \infty} = -32 = D''N$ : hinc  $ND''' = 32$ ,  $D''N = D''D''' - ND''' = 40 - 32 = 8$ .

Pro lente 3 erit  $D''N = x''' = 8$ ;  $h''' = 27$ ;  $h''' - x''' = 19$ ;  $p''' = \frac{8 \times 27}{19} = 11,37 = D''I$ : hinc  $D'I = D'D'' + D''I = 44 + 11,37 = 55,37$ .

Pro lente 2 erit  $D'I = x' = 55,37$ ;  $h' = 21$ ;  $h' - x' = -34,37$ ;  $p' = \frac{55,37 \times 21}{-34,37} = -33,83 = D'G$ : hinc  $DG = D'G - D'D = -33,83 + 23 = -10,83 = DG$ .

Pro

$$\begin{aligned} \text{Pro lente 1 erit } DG = s &= -10,83; h = 14; h - s \\ &= -10,83 - 14 = -24,83; p = \frac{10,83 \times 14}{-24,83} = \\ &= 6,11 = DF. \end{aligned}$$

191. Habetur igitur distantia primæ lentis a foco objectivi paulo major lineis 6, & signum negativum ostendit, eam collocandam esse ultra ipsum. Ex ea distantia, & distantia focali objectivi  $CF = 864$  habetur  $CD = 864 + 6,11 = 870,11$ , cum qua perpendum ad fig. 11. In ea  $CE$  est radius pertinens ad punctum objecti situm extra axem traductus per centrum ipsius objectivi ad sensum irrefractus, & incurrens in punctum E primæ lentis, a qua dividitur in fila colorata. Concipiems unum ex intermediis  $EGH$ , cum extremo violaceo  $Egh$ : distantias focales assumemus eas, quæ pertinent ad ipsum medium, cum ejusmodi distantia focalis inveniri soleat, ubi ea quæratur excipiendo imaginem objecti satis remoti efformatam a lente quapiam. Distantiam eorum filorum duplicabimus deinde ad habendam distractionem coloris rubei a violaceo.

192. Occurrat filum medium cæteris lentibus in  $H, M, P$ , & rectæ  $EH, HM, MP$  axi in  $G, I, N$ , ac via ipsius post egressum e quarta lente in  $R$ ; litteræ autem eadem, sed minusculæ adhibeantur pro radio violaceo. Figura idonea cuivis casui hinc etiam delineari non poterit, nisi post calculum numericum. In eo progrediendum erit a valore  $p$  ad valores  $s, p^1, s^1, p^2, s^2, p^3, s^3$ , quorum ope invenientur omnia, quæ quæruntur adhibendo eandem formulam  $\frac{1}{s} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ , ubi erit  $s = \frac{ph}{p+h}$ . Et quidem pro radiis mediis adhibebimus eosdem valores,  $h, h^1, h^2, h^3$ : sed pro violaceis ipsos sic generaliter inveniemus ope valoris  $\frac{dm}{m-1}$ , qui in iis vitris communibus, in quibus esse solet circiter (num. 38)  $= \frac{1}{27}$ , posito  $m$  pro filis rubeis, &  $dm$  pro differentia rubeorum a violaceis; erit is valor  $\frac{1}{55}$ , posito  $m$  pro filis mediis,  $dm$  pro differentia mediorum a violaceis, & idem erit major in vitris magis distrahitibus, ut flint, & strass.

193. Sit  $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{q}$ , & in formula  $\frac{m-1}{f} = \frac{1}{h}$  (num. 50) posito H pro distantia focali violaceorum erit  $\frac{1}{H} = \frac{m+dm-1}{f}$   
 $= \frac{1}{h} + \frac{dm}{f}$ , sed  $\frac{1}{f} = \frac{1}{h(m-1)}$ . Quare  $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{dm}{h(m-1)}$   
 $= \frac{1}{h} + \frac{1}{hq} = \frac{q+1}{hq}$ . Facto pro quopiam vitro communi  $q=55$ ;  
erit  $H = \frac{55h}{56}$ . Quare cum sit  $h=14$ ;  $h'=21$ ;  $h''=27$ ;  
 $h'''=32$ ; erit  $H=13,75$ ;  $H'=20,62$ ;  $H''=26,52$ ;  
 $H'''=31,43$ .

194. Jam vero puncta dirigentia radios incidentes, adeoque terminantia valores p respectu earum lentium, incipiendo a prima pro filis mediis erunt C, G, I, N, & puncta dirigentia radios refractos terminantia valores x erunt pro iisdem G, I, N, R, exhibebuntur autem ejusmodi puncta pro filis violaceis a litteris C, g, i, n, r.

195. En calculum pro filis mediis.

$$\begin{aligned} \text{Pro lente 1 erit } CD &= p = -870,11, h = 14, p + h \\ &= -856,11, x = \frac{-870,11 \times 14}{-856,11} = 14,23 = DG : \end{aligned}$$

$$\text{hinc } D'G = D'D - GD = -23 + 14,23 = -8,77.$$

$$\begin{aligned} \text{Pro lente 2 erit } D'G &= p' = -8,77, h' = 21, p' + h' \\ &= 12,23, x = \frac{-8,77 \times 21}{12,23} = -15,06 = D'I : \text{hinc } D''I \\ &= D''D' + D'I = -44 - 15,06 = -59,06. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pro lente 3 erit } D''I &= p'' = -59,06, h'' = 27, p'' + h'' \\ &= -32,06, x'' = \frac{-59,06 \times 27}{-32,06} = 49,74 = D''N : \text{hinc } D'''N \\ &= D''N - D''D'' = 49,74 - 40 = 9,74. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pro lente 4 erit } D'''N &= p''' = 9,74, h''' = 32, p''' + h''' \\ &= 41,74, x''' = \frac{9,74 \times 32}{41,74} = 7,47 = D''R. \end{aligned}$$

196. Pro filis violaceis sic habebitur.

$$\begin{aligned} \text{Pro lente 1 erit } CD = p &= -870,11, H = 13,75, p + H \\ &= -856,36, n = \frac{-870,11 \times 13,75}{-856,36} = 13,97 = Dg: \\ \text{hinc } Dg &= D'D - gD = 23 + 13,97 = 36,97. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pro lente 2 erit } Dg = p' &= -9,03, H' = 20,62, p' + H' \\ &= 11,59, n' = \frac{-9,03 \times 20,62}{11,59} = -16,07 = Di: \text{ hinc} \\ D'i &= D''D' + D'i = -44 - 16,07 = -60,07. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pro lente 3 erit } D''i = p'' &= -60,07, H'' = 26,52, p'' + H'' \\ &= -33,55, n'' = \frac{-60,07 \times 26,52}{-33,55} = 47,48 = D''n: \text{ hinc} \\ D''n &= D''n - D''D'' = 47,48 - 40 = 7,48. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pro lente 4 erit } D''n = p''' &= 7,48, H''' = 31,43, p''' + H''' \\ &= 38,91, n''' = \frac{7,48 \times 31,43}{38,91} = 6,04 = D'''r. \end{aligned}$$

197. Ope horum valorum invenientur facile aperturæ utiles duplex reſtarum DE, D'H, D'M, D''P. Ponemus h̄ic derivatio-nes pro filis mediis, & ad latus similes expressiones pro viola-ceis.

$$\begin{aligned} DG : D'G :: DE : D'H &= \frac{DE \times D'G}{DG} \dots D'h = \frac{DE \times D'g}{Dg} \\ D'I : D''I :: D'H : D'M &= \frac{DEXD'G \times D''I}{DG \times D'I} \dots D'm = \frac{DEXD'g \times D''i}{Dg \times D'i} \\ D''N : D'''N :: D''M : D''P &= \frac{DEXD'G \times D''I \times D'''N}{DG \times D'I \times D''N} \dots D''p \\ &= \frac{DEXD'g \times D''i \times D'''n}{Dg \times D'i \times D'''n}. \end{aligned}$$

198. Haec expressiones, assumptâ utcumque primâ semiaperturâ DE exhibebunt reliquas D'H, D'M, D''P, D'h, D'm, D''p; sed ne aliqua sit nimis magna respectu cuiuspiam e distantiis focalibus, potest initio assumi DE = 1, nimirum unius linea: inventis reliquis in ea suppositione, ea, quæ respectu suæ distan-tiæ focalis fuerit omnium maxima, augeri poterit ita, ut ejus di-

dimidium non excedat : tum reliquæ omnes augebuntur in eadem ratione.

199. Expressionibus numeri 197 poterit addi etiam expressio pro apertura diaphragmatis ponendi in foco anteriore postremæ lentis. In hac combinatione , in qua focus objectivi F jacet inter ipsum objectivum , & primam ocularem , habentur duæ imagines objecti . Altera in foco ipso objectivi in FF' , altera in foco anteriore lentis postremæ , nimirum , si in fig. 11 sumatur D''T parallela , & æqualis D''N figuræ 10 , in TT'. In utrolibet loco potest poni diaphragma , quod si ponatur in FF' debebit habere aperturam paullo minorem aperturâ lentis primæ ob FF' paullo minorem DE : si autem ponatur in TT' , erit  $TD'' = h'' = 3^2$  , adeoque dabitar &  $TN = TD'' + D''N = 9,74 + 3^2 = 41,74$  . Erit autem

$$D''N : TN :: D''P : TT' = \frac{D''P \times TN}{D''N}.$$

Si focus objectivi caderet post primam lentem ; tum imago non haberetur nisi unica in TT' , adeoque ibi tantum diaphragma collocari posset ad habendum campi marginem satis distinctum .

200. Eadem expressiones numeri 197 exhibent etiam augmentum  $n$  , pro quo assumi potest tangens anguli D''RP divisa per tangentem anguli DCE . Illa est  $\frac{D''P}{D''R}$  , hæc  $\frac{DE}{DC}$  ; cumque sit  $D''P = \frac{DEXD'GXD'IXD''N}{DGXD'IXD''N}$  ; erit augmentum  $= \frac{DCXD'GXD'IXD''N}{DGXD'IXD''N \times D''R}$  .

Hæc expressio non pendet ab aperturis , cum DE evaserit e calculo per divisionem : sed inventis ad alios usus aperturis , habebitur facilius per formulam  $\frac{DC \times D''P}{DE \times D''R}$  , ubi poterit etiam assumi  $DE = 1$  , dummodo assumatur D''P respondens ei ipsius valori . Habetur itidem campus , qui juxta num. 127 erit  $= \frac{3438' \times 2DE}{DC}$  .

Pro hoc valore oportebit determinare magnitudinem absolutam aperturæ  $2DE$  ; dum augmentum habetur independenter ab ipsa , eliso per divisionem valore DE in ejus expressione .

201. Ex iisdem expressionibus patebit, an colorum separatio inducta per primam ocularem adhuc permaneat, an sit correcta, an etiam plusquam correcta. Si sit correcta; debent PR,  $pr$  esse parallelæ inter se, adeoque  $\frac{D''P}{D''R} = \frac{D''p}{D''r}$ . Si hæc æqualitas non habeatur; poterit videri, quantum distrahanter colores; sed ad eam determinationem requiritur itidem determinatio magnitudinis absolutæ valoris DE. Nimirum inveniendi sunt anguli  $D''RP$ ,  $D''rp$ , qui habent pro tangentibus  $\frac{D''P}{D''R}$ ,  $\frac{D''p}{D''r}$ . Si primus sit minor secundo, colores non erunt satis correcti: si major, erunt plusquam correcti: differentia eorum angulorum exhibebit quantitatem distractionis colorum medii, & violacei, quæ duplicita exhibebit distractionem violacei a rubeo. Porro ad habendam absolutam magnitudinem eorum angulorum, oportet habere absolutas magnitudines  $D''P$ ,  $D''p$ , quarum valores involvunt valorem DE; dum hujus valor non est necessarius, ubi quæritur tantum, an eæ binæ fractiones sint æquales inter se; nam is ingreditur expressionem utriusque numeratoris, adeoque, demptâ etiam DE ex expressione utriusque, residua debent exhibere æqualitatem, si ea exhibetur a valoribus integris.

202. Ad habenda hæc omnia, & potissimum ad habendam accuratius distractionem colorum, erit opportunum adhibere logarithmos, qui dum retinentur in progressu ab alia apertura ad aliam, minus erroris inducitur, quam ubi assumuntur statim numeri, contemptis fractionibus inferioribus. Pro quantitate dispersionis colorum requiritur exactitudo major, cum ipsa dispersio pendeat a differentia perquam exigua angulorum, qui ipsi sunt exigui. Ut pateat progressus omnis calculorum hujusmodi in exemplo combinationis propositæ, exhibebimus hic seriem calculi numerici instituti per logarithmos digestam in tabulam, cuius singulas partes deinde explicabimus. Ea tabula cum evadat latior paginâ hujus editionis, ponitur hic extrahenda ad latus more tabularum continentium figuræ ad calcem hujus paragraphi post numerum 245 pag. 128.

203. Habentur in ea tabula loculamenta XI Romanis numeris distincta, & a se invicem separata per binas rectas lineas, quibus singula terminantur circumquaque, ac deinde fere omnia dividuntur in plures partes per singulas lineas transversales. Continentur in iis omnis, quæ pertinent ad figuram II. Calculus pro figura 10 multo brevior pro iis, quæ habentur numero 190, est prorsus similis illi, qui habetur hic num. IV pro iis, quæ continentur num. 195, adeoque ejus exemplum hic omittimus.

204. Num. I habentur fundamenta calculi, nimirum in prima linea quatuor valores intervallorum inter vitra incipiendo ab objectivo, in secunda distantiæ focales quatuor ocularium, & formula pro inveniendo valore  $x$  distantiæ focalis puncti dirigentis radios refractos ex valore  $p$  distantiæ puncti dirigentis incidentes, & distantiâ focali: ea habetur num. 192.

205. Num. II habetur calculus pro inveniendis distantiis focalibus lentium ocularium pertinentibus ad radios extremos violaceos ex valoribus  $h$  numeri I, methodo exposita num. 193, ubi eas appellavimus  $H$ , & invenimus  $H = \frac{55h}{56}$ . Prima columna numeri II continet numeros, secunda eorum logarithmos disjunctos ab iis per sola punctula, quod fit itidem in omnibus reliquis loculamentis. Semper in fine cujusvis lineæ habentur logarithmi valorum, qui sunt in initio ejusdem, & pro valoribus existentibus in numeratore fractionis sunt logarithmi ipsi; pro valoribus autem existentibus in denominatore sunt eorum complementa arithmeticæ, quæ ut discernantur a logarithmis, designantur lineolâ habente directionem ipsius lineæ superpositâ primæ notæ exhibenti characteristicam: ea complementa efformantur de more demendo singulas logarithmi notas a 9, & postremam a 10. Ii logarithmi omnes omnino, præter duos in numeris IV, & V, de sumpti sunt e tabulis communibus, in quibus numeri non pertinent, nisi ad 10000, sine partibus proportionalibus, quod contrahit calculum; satis sunt enim ubique 4 notæ pro iis, quæ hic queruntur: eæ poterant esse satis etiam pro iis valoribus; sed in iis retenta est quinta nota, quam calculus exhibuerat,

cum

cum ea ter tantum occurreret in initio calculorum, & usui esset in capiendis summis, ac differentiis.

206. Ejus numeri II priores duæ lineæ continent log. 55, & compl. log. 56, tertia eorum summam = log.  $\frac{55}{56}$ . Tum sequentes 4 habent distantias focales  $h$  cum suis logarithmis. Singulis hisce logarithmis additur logarithmus lineæ tertiae, & summae notantur in postremis 4 lineis in columna logarithmorum: logarithmus lineæ 8 est summa linearum 3, & 4, logarithmus lin. 9 est summa lin. 3, & 5, & ita porro: harum summarum quæruntur in tabula logarithmorum numeri correspondentes, qui singuli notantur ad latus, & ii sunt valores distantiarum focalium H = 13,75; 20,62; 26,52; 31,43.

207. Ii ponuntur numero III, sed ibi appellantur itidem  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$ ,  $h'''$ , cum debeant applicari eidem formulæ valoris  $w$  numeri I pro calculo pertinente ad radios violaceos, qui habetur num. V, ut valores priores  $h = 14; 21; 27; 32$  applicantur eidem formulæ pro radiis mediis. Idcirco commoda est positio numeri III in eadem columna cum V, in qua ejus usus occurrit.

208. Calculus numeri IV, & V exhibet 4 valores  $w$  pertinentes ad 4 lentes deductos ex valoribus  $p, h$ : singulæ e 4 partibus eorum loculamentorum respondent singulis lentibus. Prima utrobius continet 4 lineas, reliquæ tres quinas singulæ: hæ quatuor lineæ primæ partis, & postremæ quatuor cujusvis e sequentibus destinatæ sunt pro valoribus  $p, h, p+h, w$ : harum prima habet distantiam lentis ad eam pertinentis a præcedente, quæ addita valori  $w$  invento in postrema linea partis præcedentis exhibet novum valorem  $p$  pro ipsa. Illæ lentium distantia sumuntur ubique in iis loculamentis in directione contraria directioni radiorum advenientium, adeoque iis præmissum est signum negativum. Habitæ ratione signorum in reliquis valoribus positivis, vel negativis, prout conspirant cum directione ipsa radiorum eorundem, vel ipsi opponuntur, signum valoris  $w$  exhibet, ad quam plagam accipi debeat ejus valor respectu lentis ad efformandam hanc figuram juxta num. 189, & idem cum valore negativo distantia lentium exhibet signum valoris  $p$  æqualis eorum summæ.

209. In prima parte numeri IV habetur ex num. 191 valor  $DG = -870,11 = p$  in prima linea, in secunda  $h = 14$  ex num. I, in tertia  $p + h$  summa negativa per subtractionem positivi minoris a negativo majore: prioribus est adnexus suus logarithmus; postremo, qui fuerat denominator, complementum arithmeticum logarithmi. In quarta fit summa logarithmorum, cui ad latus adscribitur valor  $x = 14,23 = DG$  respondens ei summæ erutus e tabulis, & positivus ob duo signa negativa in præcedentibus tribus terminis formulæ. Prima linea secundæ partis continet valorem  $D'D = -23$  desumptum ex num. I, sed negativum, ut diximus, cujus summa cum positivo  $DG = 14,23 = x$  linea superioris postremæ in parte prima, exhibet pro secunda linea valorem  $D'G = -8,77 = p'$ . Cum eo, cum  $h'$ , &  $p' + h'$  inveniatur eodem modo in postrema linea partis secundæ  $x'$ : & inde patet progressus similis ad  $p'', x'', p''', x'''$ . Similis autem est methodus in numero V cum solo discrimine valorum  $h$ , qui pro eo sumuntur e num. III. Sic habentur num. IV, & V calculi indicati num. 195, & 196 subdueti ope logarithrorum, qui deinde usum habent in reliquo calculorum progressu.

210. In sequentibus 4 loculamentis habentur, quæ pertinent ad aperturas; adhibitis formulis numerorum 197, & 199. Num. VI supponitur  $DE = 1$ . Hinc valor  $D'H$  evadit  $= \frac{D'G}{DG}$ . Pro ipso assumitur complem. log.  $DG$  ex linea 4 num. IV logarithmus  $D'G$  ex lin. 6. Factâ summâ, obtinetur in lin. 3 log.  $D'H$ , & ejus valor  $= 0,62$ . Pro  $D''M$  debet is valor multiplicari per  $\frac{D'I}{D'I}$ : hinc linea 4 continet compl. log.  $D'I$  assumptum ex ejus log. linea 9 num. IV, linea 5 log.  $D''I$  ex 11 ipsius IV. Pro linea 6 fit summa præcedentium trium linearum log.  $D'H +$  compl. log.  $D'I +$  log.  $D''I$ , quæ in ipsa exhibet log.  $D''M$ , & ejus valorem  $2,42$ . Is multiplicatus per  $\frac{D'''N}{D''N}$  exhibet  $D'''P$ , quamobrem in linea 7, & 8 habentur compl. log.  $D''N$ , & log.  $D''N$  ex linea 14, & 16 num. IV. Summa logarithrorum contentorum

rum in postremis tribus numeris exhibet in lin. 9 log. D<sup>"</sup>P, & ejus valorem 0,47.

211. Eo pacto obtinentur semiaperturæ 4 lentium; 1; 0,62; 2,42; 0,47. Si eæ comparentur cum distantiis focalibus h̄ numeri I = 14; 21; 27; 32; tertia 2,42 habet rationem maximam ad  $h^{\prime\prime} = 27$ , cum sit ejus pars circiter  $\frac{1}{11}$ . Quare huic lenti tribuenda est apertura quantam ferre potest maximam. Si apertura sumatur dimidia distantiæ focalis; erit semiapertura D<sup>"</sup>M =  $\frac{27}{4} = 6,75$ . Omnes reliquæ augendæ erunt in eadem ratione valoris 2,42, quem habebat prius, ad hunc novum 6,75; adeoque debent priores valores singularium multiplicari per  $\frac{6,75}{2,42}$ . Id fit numero VII.

212. In prima ejus linea habetur logarithmus numeri 6,75 erutus ex tabulis, in secunda complementum logarithmicum valoris prioris D<sup>"</sup>M desumptum ex lin. 6 num. VI. Horum summa exhibet in lin. 3 logarithmum valoris DE, cum ejus valor præcedens = 1 habuerit logarithmum = 0. Is autem additus cum singulis logarithmis priorum valorum D<sup>"</sup>H, D<sup>"</sup>P, existentibus in eadem columna in lineis 3, & 9 numeri VI exhibet h̄c in lineis 4 & 5 logarithmos novorum valorum earundem D<sup>"</sup>H, D<sup>"</sup>P. Sic jam obtinentur 4 semiaperturæ utiles absolutæ lentium in lineis 3,4,1,5 hujus numeri, quæ sunt 2,79; 1,72; 6,75; 1,32; adeoque aperturæ integræ utiles evadunt 5,58; 3,44; 13,5; 2,64.

213. Postrema apertura absoluta exhibet aperturam diaphragmatis, cuius dimidium TT' fuerat num. 199 =  $\frac{D^{\prime\prime}PXTN}{D^{\prime\prime}N}$ . Ea obtinetur numero VIII. Prima ejus linea habet TD<sup>"</sup> = h<sup>"</sup> = 32, secunda D<sup>"</sup>N cum suo complemento logarithmico eruto ex lin. 16 numeri IV, tertia TN earum summam cum suo logarithmo eruto ex lin. 18 ejusdem numeri, quarta D<sup>"</sup>P cum suo logarithmo, quæ habentur in lin. 5 numeri VII, quinta summam præcedentium trium, cuius logarithmi numerus 5,66 exhibet quæsitam TT', & ejus duplum 11,32 aperturam integrum ejus diaphragmatis.

214. Num.

214. Num. IX obtinentur semiaperturæ respondentes colori violaceo extremo. Earum basis est valor absolutus primæ DE inventus num. VII, qui est communis omnibus coloribus. Is habetur in linea 1: reliqua omnia procedunt hinc cum litteris minoribus eodem pacto, quo num. VI cum majoribus, assumptis logarithmis valorum correspondentium ex num. V, ut pro illo ex IV. Habetur in lin. 2, & 3 compl. log. D<sup>g</sup>, & log. D'<sup>g</sup> ex lin. 4, & 6 numeri V. Horum summa cum præcedenti, nimirum summa omnium trium præcedentium exhibet logarithmum D'h, cuius valor ipsi respondens invenitur in tabulis 1, 80. Tum linea 5, 6, 8, 9 continent compl. log. D'i, log. D''i, compl. log. D''n, log. D'''n ex lineis 9, 11, 14, 16 numeri V. Linea 7 habet log. D''m, & 10 log. D'''p, quorum singuli sunt summæ trium immediate præcedentium. Hoc pacto habentur D'h = 1, 80, D''m = 6, 75, D'''p = 1, 06.

215. Hi valores cum valoribus numeri VII exhibent ea, quæ pertinent ad distractionem colorum, & habentur numero XI. Sed e solo num. IV deducitur primo distantia oculi a lente postrema, quæ est in ejus postrema linea D'''R = 7,47. Deinde etiam deducuntur augmentum n, & campus c, quorum formulæ habentur num. 200, & calculus pro ipsis hinc num. X. Pro primo habetur ibi  $\frac{DC \times D'''P}{DE \times D'''R}$ , ubi valores D'''P, DE erui possunt tam e num. VI, quam e VII, cum in utroque habeant eandem rationem; sed melius est ipsos assumere ex VI, in quo supponitur DE = 1, adeoque remanet  $\frac{CD \times D'''P}{D'''R}$ . Habetur num. VI D'''P in postrema linea, ex qua transfertur huc in lineam 2. Prima hinc habet log. CD e lin. 1 num. IV, & tertia compl. log. D'''R ex ejus linea postrema. Summa eorum trium logarithmorum exhibet in linea 4 logarithmum augmenti n, quod evadit 55,16.

216. Formula pro campo erat  $\frac{3438 \times 2 DE}{CD}$ ; sed hinc valor DE debet desumi e num. VII, cum pendeat campus a tota apertura absoluta. Omissa 2 habetur dimidius campus, translato log. DE in Tom. II. P lineam

lineam 5 hujus numeri X e lin. 3 num. VII assumpto log. 3438 e tabulis, & compl. log. CD e lin. 1 hujus numeri ipsius X pro lineis 6, & 7. Eorum trium summa exhibet in linea 8 log. 11', 03, cuius duplum est campus = 22', 06.

217. Numero XI habetur primo quidem distractio colorum per differentiam angulorum  $D''RP$ ,  $D''rp$ ; tum lens, quæ si esset sola, exhiberet idem augmentum. Eorum angulorum tangentes sunt  $\frac{D''P}{D''R}$ , &  $\frac{D''p}{D''r}$ . In linea 1 habetur log.  $D''P$  e postrema num. VII, in secunda compl. log.  $D''R$  e 3 lin. X, in quarta log.  $D''p$  e postrema num. IX, in quinta compl. log.  $D''r$  e postrema numeri V. Summa linearum 1, & 2 exhibet in 3 log. tan.  $D''RP$ , & summa 4, & 5 in 6 log. tan.  $D''rp$ , qui anguli obveniunt  $10^\circ. 2'. 18''$ , &  $9^\circ. 58'. 40''$ . Eorum differentia  $3'. 38''$  exhibet in linea 7 distractiōnēi violacei minus refracti a medio magis refracto, cuius duplum  $7'. 16''$  est in linea 8 distractio violacei postremi a primo rubeo.

218. Augmentum a lente unica habetur (num. 124) dividendo distantiam focalem objectivi per distantiam focalem ocularis. Hinc distantia focalis ocularis habebitur dividendo augmentum  $n$  per distantiam focalem objectivi. Habetur in lin. 9 log. 864 ex tabulis, in 10 compl. log.  $n$  e linea 4 num. 10. Eorum summa exhibet in lin. 11 logarithmum distantiae focalis ejus lentis = 15, 66.

219. Hæc pertinent ad tabulam exhibentem valores quæsitos. Sed si libeat determinare etiam pro ipsa lente æquivalente campus, & colores; id facile præstabitur. Si ipsi daretur apertura dimidia sua distantia focalis; haberetur pro ipsa 7, 83: distantia autem objectivi ab oculari esset  $864 + 15, 66 = 879, 66$ , adeoque campus  $\frac{3438 \times 7, 83}{879, 66} = 30'. 36''$ . Separatio colorum es-

set (num. 61)  $\frac{dn}{m-1} \times c(n+1)$ , ubi pro radio medio, & violaceo  $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{55}$  (num. 192),  $c$  dimidium campi,  $n$  augmentum. Hinc

Hinc ea distractio esset  $\frac{15^{\circ}30' \times 56,16}{55} = 15^{\circ}37''$ , cuius duplum exhiberet distractionem violacei a rubeo  $31^{\circ}14''$ . Formula distractionis  $\frac{dm}{m-1} \times c(n+1)$  pro diversis distantiis a centro campi erit eadem posito  $c$  pro ea distantia; adeoque ipsa distractio proportionalis ei distantiae, quæ idcirco in medio inter centrum, & marginem campi ipsius non erit nisi  $15^{\circ}37''$ .

220. Determinatis eo pacto omnibus, quæ pertinent ad systema ocularium, primo loco se offert illud, de quo agimus, distractio colorum, quam inducit. Illa quidem inventa est (numer. 217)  $7^{\circ}16''$ , dum in unica lente æquivalente est (num. 219)  $31^{\circ}14''$ . Hæc combinatio plusquam corrigit distractionem colorum, & inducit oppositam, quæ est pars circiter quarta prioris; oportet corrigere hanc ipsam, quod infinitis modis præstari potest. De ea correctione agemus, post alias considerationes eorum, quæ pro eo systemate deduximus.

221. Augmentum 55 pro telescopio communi pedum sex est nimium, pro acromatico nimis exiguum. Fieri potest majus, vel minus servatâ ad sensum eadem distractione colorum, & ratione inter aperturas utiles lentium minuendo, vel augendo in quapiam communi ratione omnes distantias focales omnium quatuor lentium ocularium: nam imminutâ in eadem ratione in fig. 10 etiam distantia DF primæ lentis a foco objectivi, & omnibus intervallis lentium, habebitur figura prorsus similis priori ab FG usque ad PR, adeoque radii prodibunt itidem parallelî: in figura autem 11 mutatio distantiae DC erit exigua respectu totius; adeoque DG adhuc parum differet a distantia focali lentis primæ. Sed ratio anguli DGE ad DCE, quæ determinat augmentum factum a prima lente, evadet major, vel minor in eadem ratione, in qua erit major, vel minor ratio DC manentis ad sensum ad DG mutatam, nimirum in qua erit minor, vel major distantia focalis primæ lentis. Reliquæ autem lineæ, & anguli servabunt inter se rationem eandem, adeoque angulus postremus D<sup>"</sup>RP ad primum DGE servabit itidem rationem eandem priorem: hinc etiam aug-

mentum in egressu e postrema lente erit in eadem ratione majus, vel minus eo, quod habebatur prius.

222. Sed si fiat hæc mutatio distantiarum omnium in data illa ratione; mutabuntur in eadem omnes etiam aperturæ utiles ocularium, cum tertia debeat respondere suæ distantiaæ focali, & reliquæ omnes ad ipsam habere rationem eandem, ac prius. Hinc mutabitur & campus in eadem ratione illa communis, cum manente ad sensum DC, debeat mutari angulus DCE in eadem ratione cum DE. Campus 22' in hac combinatione evasit nimis exiguus pro telescopio pedum 6, cum vix contineat  $\frac{2}{3}$  diametri lunaris. Fuisset adhuc minor, si lens tertia haberet aperturam propositam numero 187, quæ erat tantum linearum 11, & hæc tota fuisse utilis. Reliquæ, & campus debuissent imminui in ratione hujus aperturæ 11 ad assumptam (num. 212) 13,5, adeoque campus provenisset tantummodo 18'. Factâ etiam aperturâ lentis tertiaræ 13,5, adhuc evasit multo minor, quam esset campus unicæ lentis, qui est 30'.36" (num. 219), & qui esset idem adhibitis tribus lentibus æqualibus huic, dum ratio potissima, vel etiam unica multiplicandi oculares, debet esse ampliatio campi, quæ per ejusmodi multiplicationem obtineri possit pari augmento. Adjunctâ lenti tertiaræ quartâ æquali, posset haberi duplo adhuc major, nimirum 61 itidem cum eodem augmento, adeoque fere triplo major, quam per hanc combinationem ocularium.

223. Causa ejus diminutionis campi potissima est nimia vicinia punctorum G, I respectu lentis secundæ B'B', & nimia distantia D'D'' secundæ a tertia, quod efficit tanto reliquis majorem semiaperturam D''M, respectu primæ unitatis assumptæ = DE, unde effectum est, ut attributo ipsi D''M eo numero linearum, quem permittit distantia focalis  $h''$ , minor linearum numerus habitus sit pro ipsa DE, & idcirco contraxit primam DE, a qua campus pendet immediate. Posset augeri campus auctâ distantia DD', & immunitâ D'D'', quo pacto evaderet D''M multo minus inæqualis respectu reliquarum. Sed tum omnis fere calculus deberet iterum institui ad determinandum augmentum, & distractionem colorum. Progressus superioris calculi docet saltem, quæ mutatio institui debeat

debeat ad reddendam minus imperfectam combinationem propositam.

224. Hæc tanta inæqualitas aperturarum ostendit, quam magna pars reliquarum aperturarum sit inutilis. Aperturæ propositorum (num. 187) sunt 9; 13; 11; 12; dum hic obvenerunt (numer. 212) 5,58; 3,44; 13,5; 2,64. Prima ibi assumpta est fere duplo major, secunda fere quadruplo, quarta plusquam quadruplo major, quam tertia ferre posset: ipsa autem tertia multo minor, quam ferre posset ejus distantia focalis. Calculorum superiorum ingens est usus etiam ad deprehendendum, quid fieri possit circa aperturas. Si ea sint majores justo; id nihil nocet: remanet tantummodo earum magna pars inutilis: adhuc tamen ubi agitur de quodam systemate ocularium pro certa quadam longitudine distantiae focalis objectivi, præstat per examen hujus generis inquirere in aperturas: nam eo pacto fieri possunt aperturæ paulo majores justo, evitato labore inutili, quo poliantur partes superficierum, quæ inutiles manere debeant, & vero etiam crassitudinem tubi continentis sistema ocularium majorem necessariâ.

225. Apertura diaphragmatis TT' hic obvenit (num. 213) 11,32, scilicet  $11\frac{1}{3}$ . Propositum fuerat (num. 187) linearum 7. Id erat nimis exiguum etiam respectu illius aperturæ lentis tertiaræ, quæ ibi erat 11. Vel ex ipsa figura constat, ejus aperturam debere esse non adeo minorem, quam sit apertura lentis præcedentis, nimirum minorem tantummodo in ratione TN ad D'N, quæ hic est (numer. VIII, & IV) ratio 41,74 ad 49,74; sive proxime 4 ad 5. Hinc aperturæ 11 lentis tertiaræ poterat respondere apertura diaphragmatis 9, & apertura 7 relinquebat utiles tantum 9 lineas lentis primæ, quo pacto campus deberet esse in ea combinatione adhuc minor. Is invenitur factis, ut apertura diaphragmatis inventa 11,33 ad propositam 7, ita campus 22' inventus (numer. 216) ad novum, qui remaneret 13', 36''. Campus igitur in proposita combinatione erat prorsus intolerabilis ob exiguitatem.

226. Diaphragma majus justo est prorsus inutile, ut patet ex ipsa figura, in qua si puncta T' jaceant ultra postremos radios

MN,

MN, mn, radii omnes transeunt per aperturam tanquam si ipsum diaphragma non adesset. Debet esse tantillo arctius, quam requirat calculus hic institutus ex aperturis ocularium; quia in puncto T fig. 11, quod respondet puncto N fig. 10, non uniuertur simul accurate omnes radii, ne homogenei quidem provenientes ab eodem puncto objecti, at aberratio est paullo major extra axem in T, adeoque distinctio in margine campi erit aliquanto minor debitâ, si pars tantummodo radiorum provenientium a punctis objecti sitis in extremo campo transeat, parte interceptâ a margine diaphragmatis. Si fiat ea apertura multo arctior; id nihil obest distinctioni: tantummodo minuuntur omnes aperturæ utiles, & campus in eadem ratione, in qua minuitur apertura diaphragmatis infra terminum respondentem aperturis lentium. Idcirco vel oportet minuere nonnihil aperturam diaphragmatis, & campum, vel augere nonnihil aperturam ejus lenti, quæ habet totam aperturam utilem, ad conservandum campum integrum, qui determinabitur a diaphragmate.

227. Hæc combinatio habet etiam majus incommodum a pulveribus adhærentibus primæ lenti, quam systema unicæ lentis, vel trium æquâlium, quæ idem augmentum exhibeant; ea ibi esset totius distantiae focalis, adeoque linearum (num. 118)  $15\frac{2}{3}$ ; dum hic non habentur nisi 6 (num. 190). Si corrigantur ibi colores, adhibitis pro tertia lente binis æqualibus conjunctis; ea distantia evadit duplo minor (num. 150) sed adhuc major, quam in hoc systemate, nimirum fere 8, dum hic habetur 6. In ea combinatione 4 lentium æquâlium, quarum postremæ duæ conjunctæ ita, ut æquivaleant unicæ habenti distantiam focalem dimidiâ, augmentum esset duplo majus, quam in lente unica ejusdem distantiae focalis cum campo eodem, adeoque augmentum = 110 cum campo 31' (num. 219). Quare ex utroque capite augmenti, & campi illa combinatio esset melior hac: esset autem melior etiam ob minorem longitudinem totius systematis. Nam ibi haberetur in fig. 3 in FG, & PR dimidium distantiae focalis  $15\frac{2}{3}$ , in GK, & KP duplum, adeoque in FR  $5 \times 15\frac{2}{3} = 78\frac{1}{3}$ . Hic in fig. 11 in FD 6, in DD' 23, in D'D'' 44, in D''D''' 40, in

in  $D''R 7\frac{1}{2}$ , adeoque in  $FR 120\frac{1}{2}$ . Si quis velit in eo systemate 4 lentium æqualium destruentium colores idem augmentum tantummodo 55; tum satis erit adhibere omnium distantias fo-cales duplo majores, nimirum  $31\frac{1}{3}$ . Erit quidem duplo major etiam longitudo totius systematis, adeoque  $156\frac{2}{3}$ . Sed istam productionem compensabit duplo major distantia primæ lentis a foco objectivi, quæ evadet  $15\frac{2}{3}$ , & campus, qui fieri poterit duplo major, nimirum 62'; dum h̄c non pertingit nisi ad 22', & si adhibeatur apertura diaphragmatis proposita, nonnisi ad  $13'.36''$  (num. 225).

228. Accedit, quod hæc combinatio relinquit (num. 217) distractionem colorum =  $7'.16''$ , quam illa corrigit. Hi colores corrigi possunt mutatâ aliquâ e lentibus, vel e lentium distantiis, & problema, quo quæratur mutatio eam correctionem exhibens, est admodum indeterminatum, ut patet. H̄c retentis tribus prioribus lentibus, & earum distantiis, quæreremus mutationem inducendam in solam postremam, quæ mutatio corrigat colores: methodus fuse exposita huc usque inserviet pro revocando ad trutinam quovis proposito systemate 4 lentium, & corrigendis ejus coloribus.

229. Pro obtainenda hac correctione colorum determinandum erit primo punctum S figuræ II Tab. III, in quo coeunt directiones filorum NP, np prodeuntium a lente penultima, & angulum NSz, quem efformant in ipso congressu. Utrumque determinabitur ope lineolarum Mm, Pp, quas exhibent differentiæ aperturarum, quæ habentur in numeris tabulæ VII, & IX. In hoc systemate casu fortuito obvenit  $D''m$  in posteriore = 6,75 prorsus ut  $D''M$  in priore, quod ostendit, concursum eorum filorum fieri in ipso appulsu ad tertiam lentem B''B'' coeuntibus ibi punctis M, m. Logarithmus  $D''m$  in lin. 7 numeri IX est paullo minor, quam  $D''M$  in lin. 1 num. VII, quod indicat  $D''m$  paullo minorem, & cum itidem  $D''p$  in linea postrema num. IX sit minor, quam  $D''P$  in postrema numeri VII; patet inde, concursum fieri paullo ante appulsum ad B''B''. Sed cum sit ita exiguus ille defectus logarithmi, ut numeri non differant ne per unam quidem

dem centesimam ; poterit assumi hic  $Mm$  pro nulla , & punctum  $S$  ut congruens cum  $M$  .

230. Si haberetur aliqua differentia sensibilis ipsarum  $D''M$  ,  $D''m$  , uti habetur differentia  $D''P = 1,32$  (num. VII) a  $D''p = 1,06$  (num. IX) ; deberent assumi eæ differentiæ , ut est  $Pp = D''P - D''p = 0,26$  : & si altera earum esset positiva , altera negativa ; punctum  $S$  caderet inter  $M$  , &  $P$  : si essent ambæ positivæ , vel ambæ negativæ ; caderet in punctum aliquod rectæ  $MP$  productæ ad partem minoris ex iis binis differentiis . In primo casu fieret ut summa , & in secundo ut differentia eorum valorum ad  $Pp$  , ita  $PM$  , pro qua assumi potest  $D''D''$  , ad  $D''S$  .

Tum pro angulo  $PSp$  fieri posset ejus sinus  $\frac{Pp}{PS}$  , vel  $\frac{Pp}{D''S}$  consideratâ  $PS$  , ut perpendiculari ad  $B''B''$  , ad quam parum admodum inclinatur , & habitâ  $D''S$  pro æquali ipsi  $PS$  . Is erit in casu præsenti  $\frac{0,26}{40} = 0,0065$  , cui respondet angulus  $22^{\circ}.2''$  .

231 Eadem poterant inveniri etiam sine  $Pp$  per  $Mm$  , &  $Nn$  . Si enim concipiatur  $nN'$  parallela  $BB$  occurrens  $MN$  in  $N'$  , erit  $D''N:D''M::Nn:nN' = \frac{D''M \times Nn}{D''N}$  . Tum per  $nN'$  , &  $Mm$  inveniretur punctum  $S$  ut prius , & habita  $nN'$  pro perpendiculari ad  $SN$  , a qua parum abludit , cum ipsa  $SN$  parum abludat a parallelismo cum axe ob exiguitatem rectæ  $D''M$  respectu distantiæ  $NM$  , anguli sinus esset  $\frac{nN'}{Sn}$  . Hic est  $Sn = D''n$  , adeoque si-

nus anguli  $\frac{D''M \times Nn}{D''N \times D''n}$  . Habetur logarithmus valoris  $D''M$  in lin. I num. VII =  $0,829304$  , logarithmi  $D''N$  ,  $D''n$  in linea postrema partis tertiaræ numeri IV , & V , quorum complementa  $8,303306$  , &  $8,323495$  , & cum sit  $Nn = D''N - D''n = 49,74 - 47,48 = 2,26$  ; erit log.  $Nn = 0,354108$  . Hinc logarithmus ejus sinus erit  $7,756273$  , & angulus =  $22^{\circ}.13''$  ; differentia exigua a valore priore provenit a fractionibus minoribus neglectis ; hinc pro eo angulo accipiemus  $22^{\circ}$  , quæ erit ibi distractio violacei a medio , adeoque violacei a rubeo esset  $44^{\circ}$  .

232. Solutio expeditissima omnium erit similis ei, quæ adhibita est in fig. 7 num. 94, & 102, supponendo nimirum focum ultiorem lentis novæ in concursu cum axe radiorum homogeneorum refractorum per lentem præcedentem, quo pacto novus concursus fit in dimidia distanza, refractio æquatur angulo præcedentis concursus jam dato, & angulus novus cum axe, qui demum determinat augmentum, evadit ejusdem duplus. Sed quoniam ex tabula jam calculata habemus viam omnem utriusque filii colorati, utemur concursu filii violacei cum axe ipso in  $n$ , quod punctum sit focus ulterior radiorum mediorum lentis novæ  $B''B''$ . Sit  $SS'$  perpendicularis axi, & ducatur  $SD''$ , producaturque donec occurrat recta  $PR$  itidem productæ in  $O$ . Si alter radius medius deveniret per  $Sp$ ; abiret itidem ad  $O$  punctum dirigens radios medios refractos a  $B''B''$  respondens puncto  $S$  dirigenti radios incidentes: & ut recta  $pr$  sit parallela  $PR$ , debebit angulus  $POp$  esse æqualis angulo  $Opr$ , qui angulus est differentia refractionum filii medii, & violacei devenientium simul per  $Sp$  respondens refractioni  $npO$  filii medii. Ea differentia erit  $\frac{1}{5}$  ipsius  $npO$ , qui erit æqualis angulo  $mnD''$ ; quia si  $pO$  occurrat axi in  $r'$ ; convergentia radiorum tendentium ad focum  $n$  lentis  $B''B''$  fiet ad distantiam  $D''r$  dimidiā  $D''n$ , & idcirco angulus  $npr'$  erit proxime  $= pnr' = D''nm$ .

233. Porro tangens anguli  $D''nm = \frac{D''m}{D''n}$  habetur habitis  $D''m$ , &  $D''n$  ex. num. IX, & V. In priore habetur (lin. 7) log.  $D''m = 0,829104$ , e posteriore eruitur (lin. 14) compl. log.  $D''n = 8,323495$ , quorum summa  $9,152599$  est tan.  $8'.5' = 485'$ , & proinde ob  $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{55}$  pro filo medio collato cum rubeo distractio  $Opr = POp$  est  $= \frac{485'}{55} = \frac{97}{11}$ . Quare is angulus erit ad distractionem corrigendam  $PSp = 22'$  (num. 231), ut  $\frac{97}{11}$  ad 22, sive ut 97 ad 242: ea erit proxime ratio  $Sp$  ad  $pO$ , sive proxime ratio  $SD''$  ad  $D''O$ . Jam vero in formula  $\frac{1}{n} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$

applicata ad lentem B<sup>"</sup>B<sup>"</sup> pro radiis mediis, qui concipientur advenientes per rectas SP, Sp, SD<sup>"</sup>, erit D<sup>"</sup>O =  $\pi$ , SD<sup>"</sup> accepta cum signo negativo =  $p$ , D<sup>"</sup>n =  $h$ . Hinc  $97:242 :: SD^" = -p : D^"O = \pi = -\frac{242p}{97}$ , &  $\frac{1}{\pi} = -\frac{97}{242} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{h}$   
 $+ \frac{1}{p}$ , adeoque  $\frac{1}{h} = -(\frac{97}{242} + 1) \times \frac{1}{p} = -\frac{339}{242} \times \frac{1}{p}$ , sive  $-p = \frac{339h}{242}$ , & SD<sup>"</sup> + D<sup>"</sup>n =  $-p + h = (\frac{339}{242} + 1)h = \frac{581h}{242}$ ,  $h = \frac{242D^"n}{581}$ . Abeunte S' in D", evadit S'n = D<sup>"</sup>n = 47,48 (num. V), adeoque fit D<sup>"</sup>n =  $h = \frac{242 \times 47,48}{581} = 19,78$ , & D'D" = D<sup>"</sup>n - D<sup>"</sup>n = 47,48 - 19,78 = 27,70.

234. Quare lens quarta, quæ habeat distantiam focalem 19,78, & distet a tertia per 27,70 destruet distractionem colorum. Porro hic illud perquam commode accidit, quod in fig. 10 distantia D'N lentis tertiae a foco citeriore quartæ remanet ad sensum eadem, quæ prius. Fuerat (num. 190) = 8: est autem hic = 27,70 - 19,78 = 7,92. Inde fit ut omnes calculi figuræ 10, & 11 non accipient ex mutatione ejus lentis nisi exiguum perturbationem usque ad ipsam, quam acciperent multo majorem, si ea distantia obvenisset multo magis diversa: si ea obvenisset major; distantia DF primæ lentis a foco objectivi obvenisset minor eum majore incommodo a pulveribus. Diversa magnitudo FD induceret discrimen æquale in CD, quod afferret discrimen aliquod in valoribus omnibus figuræ 11; sed id discrimen esset exiguum, cum ob longitudinem CD ingentem respectu distantiae focalis primæ lentis jam DG parum excedat eam ipsam distantiam. Potuisset obvenire hæc correctione inutilis ex aliis capitibus, ut si obvenisset distantia focalis novæ lentis nimis exigua: poterat etiam obvenire positio puncti S ejusmodi, ut redderet impossibilem eam correctionem sine mutatione aliquâ inducâ in distantias focales, vel distantias mutuas trium lentium præcedentium.

235. Mutatio ejus lentis inducit mutationem in augmentum, ac in aperturam ipsius, & distantiae oculi ab ipsa. Augmentum red-

redditur majus in ratione valoris novi , quem acquirit angulus  $D''RP$ , ad eum , quem habebat prius. Fuerat (num. XI) = 10°.  $2'.18'' = 602',3$  , & evadit =  $D''rp = 2D''sp = 2D''nm = 16^{\circ}$ .  $10' (num. 283) = 970'$ . Hinc factis  $c_{\infty}, : 970 :: 55,16$  augmentum vetus (num. X) : 89 ; hoc erit augm. Apertura habebitur factis ut  $D''N = 49,74$  (§. IV) cum novum valorem  $D''N = D''N - D''D'' = 49,74 - 27,70 = 22,04$  , ita  $D''M = 6,75$  (num. VII) ad novum valorem  $D''P = 2,97$  , cuius duplum 5,78 erit nova apertura ejus lentis. Cum ea sit multo minor , quam dimidia ejus distantia focalis ; relinquit liberas reliquias , quæ fuissent minuendæ , si ipsa fuisse major justo . Distantia oculi erit æqualis novo valori  $D''R$  , qui erit dimidius  $D''N$  , adeoque proxime = 10.

236. Si augmentum 89 sit nimis magnum ; poterit juxta numer. 221 reduci ad illud idem 56 auctis omnibus distantiis tam focalibus , quam mutuis lentium in ratione 56 ad 89. Tum omnia melius cederent : nam evaderet major in eadem ratione etiam distantia primæ lentis a foco objectivi : fuerat = 6,17 : fieret 9,98 cum minore incommodo a pulveribus : campus , qui fuerat 22' , auctus in ratione eadem fieret 35'. Ita hæc ipsa ocularium combinatio rite correcta posset evadere admodum utilis.

237. Sed aliæ multo plures inveniri possunt ope expressionis generalis , quæ contineat æquationem indeterminatam pro correctione præstanta per mutationem lentis quartæ corrigentis colores inductos a tribus præcedentibus permanentibus : ea haud difficulter invenietur inductis binis indeterminatis , quarum una sit distantia focalis lentis quartæ , quam hæc pro  $h''$  appellabimus itidem simpliciter  $h$  , altera sit distantia  $S'D''$  ipsius a puncto  $S$  invento , nimirum hæc  $D''D''$  , quæ distantia dicatur  $z$ . Dicatur autem angulus  $D''nm = \alpha$  ,  $NSn = PSp = c$  , distantia  $S'n = D''n = b$  ;

& erit  $D''n = b - z$  : in formula vero generali  $\frac{I}{x} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  fit  $\frac{I}{x} - \frac{I}{p} = \frac{I}{h}$  , adeoque  $h = \frac{px}{p-x}$  , sive  $h : p :: x : p - x$ .

Porro applicando ipsam ad lentem  $B''B''$  respectu radiorum me-

diorum, qui concipientur convergentes ad  $n$ , est  $p = D''n = b - z$ ,  $s = D''r$ , adeoque  $p - s = rn$ : sumptū autem  $pr$  pro  $D''r = s$ , erit  $h : b - z :: pr : rn$  (nimirum ob angulos exiguos acutos ad  $r$ , &  $n$ , proportionales suis sinibus, adeoque lateribus  $pr$ ,  $rn$ ):  $\therefore pr = D''rn = a : rn = \frac{a(b - z)}{h}$ . Hinc angulus  $POp = rpo = \frac{a(b - z)}{55h}$ , qui valor erit ad angulum  $PSp = c$ , ut  $SD''' = z$ , ad  $D''O = \frac{55chz}{ab - az}$ . Porro in formula  $\frac{I}{s} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p}$  applicata ad eandem lentem respectu radiorum mediorum, qui concipientur advenientes per rectas  $SP$ ,  $S_p$ ,  $SD'''$  erit  $p = -D''S = -z$ ,  $s = D''O$ . Quare erit  $\frac{ab - az}{55chz} = \frac{I}{h} - \frac{I}{z}$ , sive  $ab - az = 55cz - 55ch$ ; &  $(55c + a)z - 55ch = ab$ .

238. Si in hac aequatione fiat  $D''n = h = b - z$ , erit  $z = b - h$ , adeoque  $55cb - 55ch + ab - ah - 55ch = ab$ , sive  $55cb = ah + 110ch$ , &  $h = \frac{55cb}{a + 110c}$ . Porro est hic  $a = D''nm = (\text{num. } 233) 485$ ,  $b = D''n = 47,48$ ,  $c = PSP = 22$ , adeoque evadit  $h = \frac{55 \times 22 \times 47,48}{485 + 110 \times 22} = \frac{47,48 \times 1210}{2905} = \frac{47,48 \times 242}{581}$ , ut numero 233. Sed si libeat conservare eandem lentem; tum manente  $h = 32$ , qui num. I fuerat valor  $h''$ , erit  $z = \frac{ab + 55ch}{a + 55c} = \frac{61747,80}{1695} = 36,43$ . Collocanda esset lens quarta distantiae focalis 32 in distantia 36,43: distantia  $D''N$  in fig. 10 evaderet =  $36,43 - 32 = 4,43$ . Id quidem amandaret puncta  $G$ , &  $F$  ad majorem distantiam a lente  $BB'$ , quod prodesset reddendo pulveres ipsi affusos minus sensibiles; sed punctum  $I$  accederet multo plus ad lentem tertiam  $B''B'''$ , quod e contrario redderet magis sensibiles pulveres huic adhaerentes. Illa elongatio puncti  $F$  a prima lente turbaret non nihil calculos figuræ II augendo  $CD$ , & diminuendo  $DG$ ; sed id augmen-

mentum esset exiguum, adeoque parum noceret correctioni colorum. Facile autem inveniretur hujus combinationis augmentum, apertura utilis ejus lentis, & diaphragmatis, ac omnia cætera methodo adhibitâ pro priore ejus distantia a lente tertia.

231 Verum ope ejusdem formulae licebit etiam conservare distantiam eandem D<sup>"</sup>N figuræ 10 ad conservandos accurate omnes calculos utriusque figuræ pertinentes ad objectivum, & ad omnes reliquias lentes, & generalius poterit assumi in eadem figura 10 valor quivis pro D<sup>"</sup>N. Fiat is valor =  $e$ , & habebitur in eadem D<sup>"</sup>D<sup>"</sup> = D<sup>"</sup>N + ND<sup>"</sup> =  $e + h$ , qui valor in fig. 11 erit =  $z$ . Posito hoc valore in formula numeri 237 fiet  $(55c + a)(e + h) - 55ch = ab$ , sive  $55ce + ae + ah = ab$ , &  $h = b - e - \frac{55ce}{a}$ . Posito pro  $e$  valore 8, habetur  $h = 47,48 - 8 = 19,95 = 19,53$ , valor proximus illi 19,78 invento num. 233, qui exhibuerat (num. 234) valorem D<sup>"</sup>N figuræ 10 adeo parum diversum ab hoc  $e = 8$ , nimirum 7,92.

240 Substituto pro  $e$  valore minore, quam 8, removeretur punctum F fig. 10 a lente prima BB, quod prodesset nonnihil minuendo incommodum proveniens a pulveribus: sed si N fig. 10 admoveretur aliquanto magis lenti tertiae; accederet ad ipsam etiam punctum I, quod redderet sensibiles pulveres adhaerentes lenti tertiae B<sup>"</sup>B<sup>"</sup>, ut diximus num. 238. Seligenda esset una e combinationibus, quæ utrique mederetur. Posset autem seligi etiam lens brevioris distantiae focalis ad habendum augmentum majus, quod deinde permitteret substitutionem omnium lentium habentium distantias focales maiores cum augmentatione campi. Sed hic eam perquisitionem omittimus, quam instituere poterit, qui velit, cum aliis mutationibus inductis in lentes præcedentes, ac in earum distantias, quæ poterunt exhibere combinationes multo commodiores, potissimum auctâ distantâ DD', & imminutâ D'D'', quo paclô minueretur nimia inæqualitas semiaperturarum D'H, D'M, quæ est potissima ratio exiguitatis campi provenientis in hisce combinationibus. Mutatio autem radiorum sphæricitatis singularum lentium, quæ retineret distantias focales easdem, potest

ad-

adhiberi ad corrigendos errores sphæricitatis, vel saltem minuendos, nihil turbatâ correctione colorum, quæ pendet a solis distantias focalibus, qua de re agemus in capite sequenti.

241. Satis erit h̄ic exposuisse methodum, qua possit calculo simplici, & expedito inquiri in combinationem quatuor ocularium datam quamcunque, determinando viam radiorum, augmentum, distantias focorum a lentibus, aperturas, campum, colores, & tradendo methodum, qua possit destrui separatio colorum extre- morum inducta ab ocularibus, quibus conjunctis, separatio inter- mediorum facta ab ocularibus habentibus tanto breviores distantias focales non erit sensibilis oculo transpicienti. Seligi poterunt com- binationes, quæ videbuntur omnium commodissimæ, tradendæ ar- tificibus post varia tentamina, & post alias considerationes, quas proponemus in eodem sequenti capite, ubi apparebit, quam ido- nea sit ea, quam indicavimus in adnotatione ad numerum 166.

242. Interea addemus h̄ic alia duo pro complemento hujus capitis. Primo quidem methodus h̄ic adhibita pro lentibus ex ea- dem materia potest applicari lentibus constantibus ex materia utcumque diversa. Satis est pro inventione distantiaæ focalis ra- diorum violaceorum ex foco mediorum adhibere pro quavis sub- stantia suum valorem  $\frac{dm}{m-1}$ , qui h̄ic adhibitus est  $\frac{1}{55}$  pro omni- bus lentibus, assumptâ itidem parte  $\frac{1}{55}$  refractionis radii medii pro distractione violacei ab ipso. Is valor esset assumendus major pro flint, & multo major pro strass, pro illo circiter  $\frac{1}{36}$ , pro hoc  $\frac{1}{27}$ . Hæc libertas mutandi substantias, & eas diverso modo com- binandi inter se, inducit novam indeterminationem, quæ usui esse potest ad evitandum melius aliud quoddam vitium ocularium, de quo agemus in capite sequenti.

243. Deinde notandum illud, valorem  $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{55}$  h̄ic adhibi- tum esse eum, quem habere solent vitra communia: sed quoniam etiam ipsa vitra communia habent aliquod discrimen in qualitate refractiva, & distractiva; valores inventi non erunt penitus ac- curati. Essent multo accuratiore, si determinarentur accurate ii

valores in vitris adhibendis, quod quidem est multo magis opportunum, ubi agitur de flint, & necessarium omnino, ubi de illo, quod appellavimus strass, pro efformandis ocularibus acromaticis: nam in diversis flint Anglicanis invenitur itidem discrimen, & sc̄p̄e <sup>et</sup> iā exiguum inter eorum vires refractivas, & distractivas, maximum autem occurrit in iis, quæ habent multo plus admixtum plumbi, inter quæ numeratur ipsum strass. Verum ne tum quidem haberetur accuratio omnimoda, quia in hisce calculis non est habita ratio erroris figuræ sphæricæ, & crassitudinis lentium, & quia habitu sunt pro æqualibus nonnulli anguli, & plures lineæ, in quibus non habetur æqualitas accurata: accedit illa separatio colorum intermediorum conjunctis extremis, minor quidem, sed tamen aliqua. Accuratio multo major haberi posset, adhibendo, ut innuimus etiam num. 173, methodum expositam in postremo supplemento Opusculi II Tomi præcedentis, persequendo nimirum vias singulorum radiorum, primi rubei, & postremi violacei, incidentium tam prope centrum, quam in marginem aperturæ, post transitum per singulas superficies: sed calculus numericus evaderet nimis prolixus: & aliunde exigui errores, qui supersunt, minus nocent effectui ocularium, quam objectivi, ob multo breviores viam radiorum ab una lente oculari ad aliam, quam ab objectivo ad ejus folum. Præterea quod pertinet ad errores refrangibilitatis, qui inducunt colores, ii post combinaciones determinatas per methodos traditas non nimis abludentes ab exactis multo facilius poterunt corrigi ab ipso Artifice per motum, de quo jam toties injecta est mentio, lentis ultimæ respectu penultimæ, imminutâ deinde confusione per motum alterum totius systematis ocularium respectu objectivi. Longa observationum series melius, & facilius corriget ipsas regulas generales, quas theoria relinquit incorrectas, quam longa series calculorum.

244. Progressus, quo usi sumus pro combinatione quatuor lentium, adhiberi potest prorsus idem pro quocunque ipsarum numero. Dato systemate quovis potest eodem modo inveniri ejus positio respectu objectivi, & quantitas colorum residua continuando figuras 10, & 11. In priore incipiendo a lente postrema, ex

qua

qua radii provenientes ab unico punto objecti debeant prodire paralleli, gradatim ibitur ad lentes præcedentes usque ad primam ope formulæ  $x = \frac{ph}{p+h}$ , invento pro quavis lente valore  $x$  ex  $p$ , &  $h$ , invenitur  $p$  lentis sequentis ex valore  $x$  præcedentis, & distantia lentium a se invicem. Inventis eo pacto omnibus  $x$ , &  $p$ , inveniuntur semiaperturæ omnes, & inde postremi anguli filorum medii, & violacei cum axe, quorum differentia exhibet distinctionem colorum, ac methodo adhibita in superiore paragrapho invenitur augmentum, & campus.

245. Eodem itidem modo inveniri potest ope lineolarum  $Pp$ ,  $Mm$  in fig. II punctum  $S$ , & angulus  $NSn$ , quem in ipso continent bina fila medium, & extremum, nimirum distractio, quæ habetur in egressu a lente penultima, qua distractio inventa invenietur ejus correctio per solam mutationem pertinentem ad lentem postremam. Verum ea omnia, uti diximus, non sunt penitus accurata, & debet accedere ad majorem ocularium perfectionem correctio, vel saltem imminutio errorum sphæricitatis necessaria etiam ipsa, ad quam jam progrediemur in capite sequenti.

## CAPUT II.

*De incommodis ortis ab errore figuræ sphæricæ tam objectivi, quam ocularium, & remediis.*

I. ARGUMENTUM h̄c propositum præbet locum perquisitionibus pluribus, quarum pleraque sunt admodum complicatae, quæ nimis longam, & difficilem tractationem requirunt. Omissis quam plurimis, quæ vel nondum satis digesta, vel ne tentata quidem persequar fortasse alibi, & olim proferam, exhibeo h̄c præcipua quædam, quæ usum habere possunt egregium pro quibusdam combinationibus particularibus, potissimum ad corrigendum vitium, quod ab indebita combinatione superficierum exhibentium eandem datam distantiam focalem, & eadem vitia, vel remedia colorum, oritur in telescopiis, quæ si campum habeant, & augmen-

I

$CD = 870,11$ ;  $DD' = 23$ ;  $D'D'' = 44$ ;  $D''D''' = 40$

$$h = 14; h' = 21; h'' = 27; h''' = 32; x = \frac{ph}{p+h}$$

II

|                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| 55 . . . . .    | 1,740363        |
| .56 . . . . .   | <u>8,251812</u> |
|                 | 9,992175        |
| 14 . . . . .    | 1,146128        |
| 21 . . . . .    | 1,322219        |
| 27 . . . . .    | 1,431364        |
| 32 . . . . .    | 1,505150        |
| 13,75 . . . . . | 1,138303        |
| 20,62 . . . . . | 1,314394        |
| 26,52 . . . . . | 1,423539        |
| 31,43 . . . . . | 1,497325        |

VI

|                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| .DG . . . . .      | <u>8,846827</u> |
| D'G . . . . .      | 0,943000        |
| D'H = 0,62 . . .   | <u>9,789827</u> |
| D'I . . . . .      | <u>8,822207</u> |
| D''I . . . . .     | 1,771293        |
| D'''M = 2,42 . . . | <u>0,383327</u> |
| D'''N . . . . .    | <u>8,303306</u> |
| D'''N . . . . .    | 0,988559        |
| D'''P = 0,47 . . . | <u>9,675192</u> |

VII

|                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| D''M = 6,75 . . .  | 0,829304        |
|                    | <u>9,616673</u> |
| DE = 2,70 . . .    | <u>0,445977</u> |
| D'H = 1,72 . . .   | <u>0,235804</u> |
| D'''P = 1,32 . . . | <u>0,121169</u> |

VIII

|                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| TD''' = 32         |                 |
| D'''N = 9,74 . . . | <u>9,011441</u> |
| TN = 41,74 . . .   | 1,620552        |
| D'''P . . . . .    | 0,121169        |
| TT' = 5,66 . . .   | <u>0,753162</u> |

IV

|                               |                 |
|-------------------------------|-----------------|
| DC = - 870,11 = p . .         | 2,939574        |
| h = 14 . . . . .              | 1,146128        |
| (p + h) = 856,11 . . . .      | <u>7,067471</u> |
| DG = 14,23 = x . . .          | 1,153173        |
| <br>                          |                 |
| D'D = - 23                    |                 |
| D'G = - 8,77 = p' . .         | 0,943000        |
| h' = 21 . . . . .             | 1,322219        |
| (p' + h') = 12,23 . . . .     | <u>8,912574</u> |
| D'I = - 15,06 = x' . .        | 1,177793        |
| <br>                          |                 |
| D''D' = - 44                  |                 |
| D''I = - 59,06 = p'' . .      | 1,771293        |
| h'' = 27 . . . . .            | 1,431364        |
| (p'' + h'') = - 32,06 . . . . | <u>8,494037</u> |
| D''N = 49,74 = x'' . .        | 1,696694        |
| <br>                          |                 |
| D'''D'' = - 40                |                 |
| D'''N = 9,74 = p''' . .       | 0,988559        |
| h''' = 32 . . . . .           | 1,505150        |
| (p''' + h''') = 41,74 . . . . | <u>8,379448</u> |
| D'''R = 7,47 = x''' . .       | 0,873157        |

IX

|                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| DE . . . . .       | 0,445977        |
| .Dg . . . . .      | <u>8,854780</u> |
| D'g . . . . .      | 0,955688        |
| D'h = 1,80 . . .   | <u>0,256445</u> |
| <br>               |                 |
| D'i . . . . .      | <u>8,794001</u> |
| D''i . . . . .     | 1,778658        |
| D'''m = 6,75 . . . | 0,829104        |
| <br>               |                 |
| D'''n . . . . .    | <u>8,323495</u> |
| D'''n . . . . .    | 0,873902        |
| D'''p = 1,06 . . . | <u>0,026501</u> |

X

|                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| CD . . . . .    | 2,939574        |
| D'''P . . . . . | 9,675192        |
| D'''R . . . . . | <u>9,126843</u> |
| " = 55,16 . . . | 1,741609        |
| <br>            |                 |
| DE . . . . .    | 0,445977        |
| 3438 . . . . .  | 3,536306        |
| CD . . . . .    | <u>7,060426</u> |
| 11,03 . . .     | 1,042679        |
| 22' campus      |                 |

III

$$h = 13,75; h' = 20,62$$

$$h'' = 26,52; h''' = 31,43$$

V

|                            |                 |
|----------------------------|-----------------|
| DC = - 870,11 = p . .      | 2,939574        |
| h = 13,75 . . . . .        | 1,138303        |
| (p + h) = - 856,36 . . . . | <u>7,067343</u> |
| Dg = 13,97 = x . . .       | 1,145220        |

$$D'D = - 23$$

|                           |                 |
|---------------------------|-----------------|
| D'g = - 9,03 = p' . .     | 0,955688        |
| h' = 20,62 . . . . .      | 1,314394        |
| (p' + h') = 11,59 . . . . | <u>8,935917</u> |
| D'i = - 16,07 = x' . .    | 1,205999        |

$$D''D' = - 44$$

|                               |                 |
|-------------------------------|-----------------|
| D''i = - 60,07 = p'' . .      | 1,778658        |
| h'' = 26,52 . . . . .         | 1,423539        |
| (p'' + h'') = - 33,55 . . . . | <u>8,474308</u> |
| D''n = 47,48 = x'' . .        | 1,676505        |

$$D'''D'' = - 40$$

|                               |                 |
|-------------------------------|-----------------|
| D'''n = 7,48 = p''' . .       | 0,873902        |
| h''' = 31,43 . . . . .        | 1,497325        |
| (p''' + h''') = 38,91 . . . . | <u>8,409939</u> |
| D'''r = 6,04 . . . . .        | 0,781166        |

XI

|                     |                 |
|---------------------|-----------------|
| D'''P . . . . .     | 0,121169        |
| D'''R . . . . .     | <u>9,126843</u> |
| t. 10.° 2'. 18" . . | 9,248012        |

$$D'''p . . . . .$$

$$D'''r . . . . .$$

$$t. 9.° 58'. 40" . .$$

$$9,245334$$

$$o \cdot 3 \cdot 38''$$

$$o \cdot 7 \cdot 16 \text{ colores}$$

$$864 . . . . .$$

$$8,238361$$

$$15,66 . . .$$

$$1,194933$$



mentum aliquanto majus sine ejus vitii correctione, deformant objecti imaginem incurvando ejus lineas rectas: id enim vitium provenit, ut videbimus inferius, ab errore figuræ sphæricæ ocularium, qui quidem error corrigi potest, vel saltem magna ex parte diminui ita, ut curvatura sensum oculi effugiat.

2. Cum ejus vitii remedium non ita pendeat a natura vitrorum, ut exigat ea, quæ habent multo majorem vim distractivam, & admodum difficulter inveniuntur satis homogenea, & pura, possint autem, ut vidimus in capite superiore, etiam per idoneam combinationem ocularium e vitro communi tolli colores illi, quos ipsæ pariunt male dispositæ; erit operæ pretium ita agere de ejus erroris remedio, ut applicari possit etiam objectivo composito e binis lentibus constantibus eodem vitro communi. Quoniam, ut sæpe jam monui in Tomo I (\*), error figuræ sphæricæ multo majorem vim habet ad impellendas oculi fibras, quam pro comparatione ejus diametri ad diametrum erroris diversæ refrangibilitatis determinatâ a Newtono, quæ Opticos ante Dollandianum inventum absterruit ab eo adhibendo pro objectivis communium telescopiorum; sperandum est sane non exiguum auditamentum ad ipsorum perfectionem, si adhibetur pro ipsis id remedium, potissimum si accedant, quæ in hoc Opusculo propinquimus pro correctione colorum provenientium ab ocularibus, & curvaturæ linearum rectarum objecti in margine. Telescopia Dollondiano more elaborata habent objectivum ita compositum, ut id corrigat errorem tam diversæ refrangibilitatis, quam figuræ

*Tom. II.*

R

sphæ-

---

(\*) Sæpe hic occurret mentio hujus excessus ejus vis, & ipsius effectus: fundatum habetur in dissertatione Viennensi tertia, quam etiam idcirco hic exhibeo in hujus Opusculi supplemento, omissis, vel mutatis admodum paucis, correctis omnibus. Viennenses appello quinque e veteribus meis dissertationibus pertinentibus ad Dioptricam, quæ simul prodierunt impressæ Viennæ in Austria anno 1767, quarum mentionem injeci pluribus vicibus in Tomo præcedente, ac promisi reimpressionem hujus tertie pro hoc Tomo, & id etiam idcirco, quod in ea editione facta me absente irreperserunt errores complures, ipsius autem impressionis exemplaria extra Germaniam sunt admodum rara, ut idcirco passim ignoretur compertum, quod ibi continetur, & est omnino magni momenti respectu theoriarum telescopiorum.

sphæricæ: præstant illa quidem plurimum communibus, quæ habent objectivum simplex obnoxium utriusque errori: attribuitur is effectus fere soli correctioni primi erroris, a quo derivatum est ipsum illud nomen *acromatici* a Græco vocabulo, quod exprimit privationem colorum. Quid si magna ex parte is proveniat a correctione erroris secundi? Experientia docebit, quid ea de re judicandum sit: theoria nihil determinabit, quæ nimirum determinare non potest magnitudinem ejus partis circelli, per quem diffundit radios provenientes ab unico objecti puncto diversa refrangibilitas, quæ pars sensibilem actionem exercet in oculum, ad circumcellum, per quem ii diffundantur ab errore figuræ sphæricæ: in hujus circelli peripheria vis luminis excrescit in infinitum ubique, dum id in circello diversæ refrangibilitatis non accedit nisi in unico centro: longitudo illius peripheriæ habet ad illud centrum rationem infinitam, quod videtur indicare, nonnisi exiguum esse partem hujus secundi circelli centro proximam, quæ exerceat in fibras oculi vim satis sensibilem respectu vis impressæ a margine prioris..

3. Præterea, ut toties jam diximus, objectiva illa composita, quæ appellantur acromaticæ, non habent id nomen, nisi impropriæ, cum non conjungant accurate radios omnes heterogeneos dgressos ab eodem puncto objecti, sed binos tantummodo: telescopia autem multo minus id nomen promerentur, nisi accedat idoneum systema ocularium, de quo nihil haberi solet apud eos, qui de telescopiis acromaticis agunt, & a quo maxime pendet exclusio colorum, qui apparent in veteribus telescopiis dioptricis communibus. Quamobrem systema lentium tam objectivarum, quam oocularium constantium ex eodem vitro communi, quod corrigat errorem figuræ sphæricæ objectivarum, & colores provenientes ab oocularibus, corrigendo simul errorem figuræ sphæricæ oocularium ipsarum, videtur æquivalere saltem magna ex parte systemati objectivi compositi ex vitro communi, & flint, quod per se ipsum non excludit colores a telescopio, & non corrigit nisi ex parte eos binos errores respectu sui ipsius. Hinc hæc theoria videtur etiam facere satis quæstioni propositæ ab Academia

Patavina pro præmio anni 1781 hisce terminis : *Ritrovare un sistema di lenti tanto obiettive, che oculari (eseguibili da buoni artefici) per formare canocchiali acromatici con vetro, o cristallo d'una sola pasta, facendo che la figura, e la disposizione delle lenti medesime supplisca alla forza del flint in modo, che si ottengano se non in tutto, almeno in buona parte gli effetti degli acromatici composti.* Ego quidem malui hæc omnia multo ante inventa cum reliquis ad acromatica telescopia pertinentibus huic operi simul vulganda reservare, quam ad eam Academiam tum transmittere, & eam ob causam hinc inter ea, quæ ad lentes oculares pertinent, in ipso hujus Opusculi titulo enunciavi hoc additamentum de correctione solius erroris figuræ sphæricæ pro objectivis.

4. Incipiam autem a consideratione ejus erroris relate ad lentem unicam, & exponam, in quo situm sit detrimentum unicum, quod inde profluit pro imagine efformata ab objectivo in suo foco, nimirum confusio, quam parit is error, si apertura ipsius objectivi major: justo conjugatur cum augmentatione nimis magno ejusdem imaginis : tum ostendam, oriri quidem confusionem aliquam etiam ex ejusmodi errore ocularium, sed minorem, verum inde oriri gravissimum incommodum curvaturæ apparentis linearum rectarum objecti, quæ imaginem in fundo oculi efforman- dam & deturpet, & confundat.

5. Iis expositis gradum faciam ad remedia. Adhibeo autem formulam inventam in capite primo Opusculi secundi Tomi I, & adhibitam in sequentibus excerptam e prima dissertatione Vienensi, ex qua ibidem etiam in ea dissertatione deduxi, nullam haberi posse combinationem sphæricitatum pertinentium ad binas ejus superficies, quæ eum errorem destruat pro radiis, qui ad eam lentem adveniant paralleli, posse autem pro divergentibus a quadam distantia, & pro convergentibus ad quandam aliam, quæ distantiae determinantur a qualitate refractiva vitri, & a radiis binarum sphæricitatum. Earum distantiarum limites ibidem determinavi num. 92, sed in ejus determinationis applicatione ad figuram irrepsit ibi error exiguus, qui facile deprehenditur, & cor-

rigitur : is autem h̄c non habebit locum . Verum error figuræ sphæricæ potest corrigi pro radiis tam parallelis , quam utcumque divergentibus , vel convergentibus per superficies curvaturæ cujusdam , quam Cartesius determinavit longiore calculo , Newtonus vero eleganti , & simplici geometrica constructione . Ego alibi curvæ ipsius mechanicam constructionem dedi jam olim per fila , quæ evadit admodum simplex , ubi sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti habet rationem , quæ exprimi possit per numeros simplices , ut 3 ad 2 . Ea quidem esset maximæ utilitatis , si inveniretur methodus expedita , & certa efformandi vitra ad ejusmodi curvaturam : verum id est ita difficile , ut vix ulla , vel potius omnino nulla de eo spes haberi posse videatur . Potest utique ea correctio haberi haud difficulter per superficies sphæricas lentis compositæ e binis lentibus ; ubi vero habetur lens unica , potest error ipse saltem imminui pro ea directione radiorum , quæ correctionem non admittit , determinata combinatione sphæricatum , quæ ipsum exhibeant minimum . Agam h̄c de hisce omnibus , & comparabo etiam plures alias combinationes binarum sphæricatum tam inter se , quam cum combinatione minimi , ut saltem seligantur eæ , quæ videantur maxime idoneæ : sed aggregiamur rem ipsam .

## §. I.

*De vitiis ortis ex errore figuræ sphæricæ .*

6. PRIMUM vitium telescopiorum proveniens ab errore figuræ sphæricæ est , ut innuimus , quædam confusio , ac veluti nebulositas , quæ tollit distinctam visionem partium objecti . Ea ab hoc errore oritur præcipue in imagine , quam vitrum objectivum efformat in suo foco ; sed nocet distinctioni , quanquam minus , etiam error pertinens ad lentes oculares . Imago objecti in foco objectivi esset maxime distincta , si omnes radii digressi a quovis unico puncto ipsius objecti , unirentur in unico puncto ejus imaginis respondente illi puncto priori . Tum nulla haberetur commixtio radiorum pertinentium ad diversa puncta objecti ipsius ;  
sed

sed cum ii radii dispergantur per circellum quendam ; circellus pertinens ad unum punctum objecti cadit supra circellum pertinentem ad aliud punctum parte sui aliqua , quando ea est distantia eorum punctorum ipsius objecti , ut centra circellarum distent a se invicem minus , quam per summam duarum semidiametrorum , nimirum quam per diametrum unius circelli : partes autem congruentes eo sunt majores , quo minor est distantia punctorum objecti a se invicem .

7. Quando per noctem cernitur unicum punctum objecti satis lucidum , ut fixa quedam , quæ carens omni diametro apparenti sensibili acceptâ in eo sensu , in quo accipitur ab Astronomis , haberit potest instar unici puncti ; multo major pars ejus circelli afficit fundum oculi ita , ut sensum excitet , quam per diem ; quam ob causam fixæ videntur habere diametrum quandam apparentem , quod oritur ab iis radiis aberrantibus ; & ob eandem causam planetarum quoque diametri apparentes debent omnino augeri , ubi ipsi planetæ observantur lucidi in fundo obscuro , minui autem , ubi ii apparent nigri in disco solis , cuius radii aberrantes , qui pertinent ad ejus puncta proxima limbo obscuro , debent protendi ultra limbum ipsum .

8. Si agatur de solo circello pertinente ad errorem figuræ sphæricæ , videtur debere id augmentum admodum sensibile responde-re toti ipsius semidiametro , quia , ut jam monui , densitas lu-minis in eo circello augetur in infinitum non tantum in accessu ad centrum , sed etiam in accessu ad circumferentiam , & ibi etiam , ubi est minima , habet vim satis magnam . Secus debet accidere , si agatur de solo circello pertinente ad errorem diversæ refrangibilitatis , in quo densitas ita decrescit in recessu a centro , ut in ipsa circumferentia prorsus evanescat . Partes ejus cir-cellii , in quibus densitas luminis jam est minor , quam ut possit sensum afficere , non debent esse satis proximæ peripheriæ . Per noctem quidem is limes debet esse ipsi propior , quando objectum est magis lucidum , ut patet . Tertius quidam circellus amplior oritur ex coniunctione omnium circellarum utriusque generis . Si concipientur in hoc tertio coniuncta centra priorum duorum ; in casu ,

casu , in quo is , qui pertinet ad figuram sphæricam , esset amplior eo , qui oritur a diversa refrangibilitate , posset utique extendi usque ad ultimum marginem sensibilitas excitanda : sed cum hic posterior sit multo amplior ; accidet in eo genere etiam circello composito e binis erroribus id , quod deberet accidere soli secundo illi diversæ refrangibilitatis . Ultra peripheriam illius primi figuræ sphæricæ is secundus remanet solus : hinc sensibilitas debet desinere multo ante postremum marginem ejusdem compo- siti , & ejus limes debet esse eo propior centro , quo objectum est minus lucidum . Eam ob causam fixæ , quæ idcirco tantum appellantur magnitudinis primæ , quia hic apud nos major est vis earum luminis , apparent in telescopiis dioptricis communibus mul- to majores , quam eæ , quæ dicuntur magnitudinem minorum , & fixæ telescopicæ apparent etiam in iis , ut puncta quædam . Id autem accidit etiam in acromaticis , & vero etiam in telescopiis catoptricis : in acromaticis ob duplēm rationem : primo quia ne ipsa quidem objectiva acromatica colligunt simul omnes radios heterogeneos , uti jam toties diximus : deinde vero , quia lentes o- culares itidem efficiunt dispersionem aliquam : hæc autem secun- da ratio pertinet etiam ad telescopia catoptrica . Nam quæ pro- posuimus in capite præcedente hujus Opusculi , de correctione er- roris diversæ refrangibilitatis per idoneum sistema ocularium , ha- bent eandem difficultatem , quæ impedit accuratam unionem per objectivum . Combinatio distantiarum focalium , quæ determinat sistema utile ad eam unionem , est diversa pro diversis binariis filorum coloratorum . Adeoque remanet semper aliquid , quod pa- rit effectum expositum .

9. Ubi non agitur de punto lucido in campo obscuro , sed de punto objecti cuiuspiam , quod habeat alia lucida prope se ; mul- to minorem distantiam debet habere a centro limes sensibilitatis : nam non solum centrum circelli alterius puncti , sed etiam pun- eta ab ipso remota usque ad quandam distantiam non ita exiguum habebunt vim luminis tanto majorem ea , quæ ibi respondet pun- to circelli diversæ refrangibilitatis magis remoto ab ipsius cen- tro , ut ipsam reddat prorsus insensibilem . Fieri itidem poterit ,

ut

ut ne id quidem , quod inde habetur in illo altero centro , sensum percellat ; id accidit lumini fixarum minorum , quæ ne per telescopia quidem percipiuntur interdiu : in loco , in quo haberi deberet eorum imago , habetur totum lumen , quod pertinet ad puncta atmosphæræ proxima , quæ singula suos circellos habent , & illud ipsum , quod pertinet ad punctum atmosphæræ ipsius respondens illi exiguo astro : additamentum luminis ab ipso emissum est ita exiguum respectu ejus , quod ibi habetur ex atmosphæra , ut omnem sensum effugiat : id additamentum est sensibile solum , cum pertinet ad fixas lucidiores , & quo major est apertura objectivi colligens ejusmodi radios , eo plures fixæ videri possunt interdiu trans telescopium .

10. Quo longius protenditur distantia limitis sensibilis a centro circelli congruentis parte sui cum partibus adjacentium circellarum , eo major est confusio . Theoria , uti monuimus in exordio hujus capit is , nunquam poterit determinare eam distantiam , quæ quidem est varia etiam respectu diversorum oculorum , diversæ vis luminis objecti totius , & plurium aliarum circumstantiarum : ex eadem theoria nunquam deducetur proportio inter radium circelli erroris figuræ sphæricæ , & distantiam a centro , quam habet limes sensibilitatis particularum circelli diversæ refrangibilitatis . Accedunt in ordine ad confusionem imaginis in oculo plurimæ aliæ considerationes . Circellus , qui respondet singulis iis erroribus in foco objectivi , augetur plurimum ab erroribus lentis ocularis unicæ , vel plurium ; ab erroribus ortis a forma oculi , & ejus vi- tiis , quæ semper occurrunt in individuis naturæ operibus ; a distantia , ad quam agunt particulæ luminis in fibras fundi ipsius oculi ; a longitudine fibrarum ipsarum , quarum singularum dum una pars immediate afficitur , tremit ob nexum fibra tota cum aliis ipsi adjacentibus ; a modo , quo impressio facta in oculo traducitur ad cerebrum . Posito etiam , quod limes sensibilitatis distet a centro circelli diversæ refrangibilitatis centuplo plus , quam circumferentia circelli figuræ sphæricæ a suo centro , si reliquæ causæ præstent augmentum millicuplo majus ; ratio erit 1109 ad 1001 , quæ est minor , quam 11 ad 10 .

11. Ista omnia ita pendent non solum a vi luminis in diversis punctis circellorum omnium admodum difficulter determinanda per geometriam, & calculum; sed etiam a natura physica humorum oculi, ac fibrarum in ejus fundo, a nexus ipsius cum cerebro, ab alio nexus inter motus corporeos, & perceptiones animi; ut nulla unquam haberi possit determinatio non admodum vaga, & incerta, rationis, quam habet id, quod pro confusione profluit ab errore diversæ refrangibilitatis, ad id, quod profluit ab errore figuræ sphæricæ. Illud tantummodo evidentissime patet ex iis, quæ diximus, hunc secundum errorem multo magis ad id conferre, quam pro magnitudine sui circelli relati ad circellum diversæ refrangibilitatis.

12. Et quidem in eo genere illud etiam est maxime considerandum, quod expressio densitatis infinitæ, quam exhibet geometrica solutio problematis, non habetur pro hoc secundo circello, nisi in centro, quod est punctum unicum; dum pro illo priore præter centrum habetur in tota peripheria, nimirum in linea continua. Reipsa densitas rite accepta nusquam erit infinita; nam præterquam quod lux ipsa juxta meam generalem theoriam non est corpus continuum, densitas exigit spatiolum extensum, cum sit quantitas luminis divisa per spatium, in quo ipsum lumen est conclusum; in punctis autem ejus spatii positis extra id punctum, vel illam lineam, ipsa expressio est ingens, non infinita. Adhuc tamen si consideretur in circello priore spatiolum infinitimum adjacens peripheriæ, ac in posteriore positum circa centrum; debet in hoc concipi vis infinites minor, quam in illo, cum in illo expressio infinitæ densitatis extendatur per totam ejus longitudinem, in hoc reducatur ad punctum unicum. Inde patet adhuc multo magis, quanti intersit conari, ut obtineatur correctio ipsius erroris figuræ sphæricæ, qui ex sola comparatione magnitudinum eorum cicellarum visus est Newtono, & aliis plurimis post ipsum prorsus negligendus, quem vero Dollondus optimo sane consilio censuit corrigendum una cum errore diversæ refrangibilitatis.

13. Et quidem eo magis id erat necessarium, quod, ut Newtonus

tonus ipse animadverterat , & demonstrabitur in adnotationibus addendis tertiae e quinque dissertationibus Viennensibus , quæ efficiet Supplementum hujus Opusculi , paribus cæteris omnibus diameter circelli diversæ refrangibilitatis augetur in ratione simplici diametri aperturæ lentis , diameter autem erroris figuræ sphæricæ in ratione ejusdem triplicata : nam telescopia acromatica exigunt aperturas majores ad habendum majus augmentum sine obscuritate (\*). Iis omnibus consideratis patet in primis , cur telescopia catoptrica , in quibus specula carent errore diversæ refrangibilitatis , reliquo solo errore figuræ sphæricæ , non habeant vim in eadem ratione majorem vi telescopiorum dioptricorum communium , in qua circellus erroris diversæ refrangibilitatis est major circello erroris figuræ sphæricæ ; quod quidem legi in Opusculis Geometræ primi ordinis , visum ipsi mirum admodum , ut geometricis conclusionibus minus conforme . Deinde patet etiam , cur ipsa acromatica telescopia non habeant vim in immensum majorem , quam communia . In illis ipsis , uti diximus , nec totus uterque error penitus corrigitur , & præter ipsos tam multæ aliæ concausæ agunt ad confusionem augendam , quas hic proposuimus .

14. Id vitium productum in imagine efformata ab objectivo in suo foco ab errore figuræ sphæricæ pertinet ad radios digressos

*Tom. II.*

S

ab

(\*) Spatium illud , quod in oculari unica figuræ i<sup>r</sup> occupant radii digressi ab unico punto objecti , ita est minus totâ aperturâ objectivi , ut sit ad ipsam in eadem ratione , in qua est ejus distantia focalis ad distantiam focalem ipsius , & dum brevitas ejus spati prodest diminutioni ejus erroris , brevitas distantiae focalis , a qua itidem is pendet , ipsi nocet . Verum pensatis omnibus , error , qui respondet iis radiis , est multo minor in oculari , quam in objectivo : quamobrem ubi agitur de unione eorum radiorum , cuius defectus patit confusionem imaginis , multo minus nocet is error inductus ab oculari , quam inductus ab objectivo . Ubi autem agitur de radiis pertinentibus ad diversa puncta objecti transeuntibus per medium objectivum , error sphæricitatis est multo major : nam ii incurront in totam ipsius ocularis superficiem , non in exiguam ejus particulam , & is nocet plurimum , cum præter confusionem inducat curvaturam illam linearum objecti restarum , quæ imaginem deformant , adeoque ad eam causam magni interest , ut is vel corrigatur penitus , vel saltem plurimum minuatur .

ab eodem puncto objecti quocunque, & incidentes in totam amplitudinem aperturæ vitri objectivi. Si vel progressi ultra focum objectivi ipsius, vel ante appulsum ad ipsum incident in ocularem, quæ deberet ipsos excipere directos ab unico puncto ejus imaginis, & emittere cum alia quadam directione, quam determinant formulæ focorum generales applicatae ad casus particulares: occupant autem in superficie ipsius ocularis spatium quoddam, quod pareret errorem aliquem in directione illa nova, etiam si nullus adfuissest error ortus a figura sphærica objectivi; adeoque cum illo priore conjungitur hic novus, quod accidit in omni transitu per lentem ocularem quamvis, ubi habentur plures. In fig. 1 hujus Opusculi videre est casum unicæ ocularis, qui pertinet ad telescopia astronomica communia, in quo ipsa lens BB excipit in HH radios rubeos AF detortos ab extremis punctis A, A aperturæ objectivi: reliqui omnes intermedii incident ibi in arcum HH. Is cum sit sphæricus, parit itidem errorum suum. Sed hic error debet esse minor priore, cum intervallum HH sit multo minus aperturæ objectivi AA, & error figuræ sphæricæ crescat cæteris paribus in ratione triplicata aperturæ ipsius, ut diximus.

15. Quocunque numero adhibeantur lentes oculares, posset semper determinari error finalis proveniens ab omnium summa tam per formulas analogas iis, quas adhibuimus ad eruendum errorum lentis unicæ, ut vitri objectivi, vel binarum simul coniunctarum, quam per calculum trigonometricum analogum ei, quo usi sumus in capite præcedente ad eruendum errorum diversæ refrangibilitatis post transitum per plures lentes oculares. Sed pro utraque methodo oporteret habere rationem distantiarum lenti, quod induceret in priore complicationem calculi ingentem, nisi pro quavis lente quæreretur ejus error coniunctus cum errore præcedente, methodo, quam indicabimus inferius. Pro methodo calculi trigonometrici quærendum esset per formulas punctum axis, ad quod convergunt, vel a quo divergunt radii incidentes in punctum superficie cujusvis in distantia ab axe infinitesima, & per calculum trigonometricum id, quod dirigit eos, qui incident in extrema puncta

Etia aperturæ objectivi. Distantia finalis eorum punctorum esset error longitudinalis compositus ex omnibus præcedentibus. Inde ope causticæ, quæ adhiberi solet in ejusmodi problematis, ut ea est adhibita in illa tertia dissertatione Viennensi, quæ hinc habebitur reimpressa, erueretur diameter circei minimi omnium eorum, per quos disperguntur omnes radii digressi ab eodem puncto objecti.

16. In iis calculis sæpe occurrerent etiam valores negativi permixti positivis, qui minuerent summam exhibentem errorem finalem, quæ quidem aliquando etiam evanesceret, quod nobis obveniet in hoc ipso capite, ubi quæremus combinationes superficierum lentis unicæ, vel plurium lentium, quæ corrigant errorem ipsum figuræ sphæricæ. Sed hinc illud tantummodo agebatur, ut explicaretur, in quo situm sit primum illud damnum illatum telescopiis ab errore figuræ sphæricæ tam objectivi, quam ocularium, inducens confusionem objecti, ubi is excrescat plus æquo auctus ab apertura justo majore.

17. Confusio augeri solet in margine campi, ubi error sphæricitatis augetur adhuc magis ex eo, quod inclinatio radiorum advenientium ad objectivum directione obliquâ efficit, ut is, qui incidit perpendiculariter ad superficiem, distet adhuc magis a margine objectivi ex una ejus parte, quod in ordine ad hunc erroriem æquivalet aperturæ majori, & id ipsum damnum plerumque augetur ab ocularibus. Sæpe autem accidit in telescopiis, ut dum imago in centro campi est admodum distincta, sit confusa in margine, & viceversa, quod accidit, ubi campus est ingens, & ingens augmentum: nam focus radiorum, qui deveniunt obliqui ad axem, non habetur accurate in eadèm distantia, ac focus parallelorum ipsi axi. Sed iis omissis faciemus jam gradum ad illud aliud vitium, quod inducitur ab errore sphæricitatis pertinente ad oculares, & consistit in curvatura linearum rectarum objecti, quæ visionem ipsius pessime deturpat, & confundit. Id autem pertinet ad radios digressos a diversis punctis objecti transeuntes per centrum objectivi, & incidentes in totam aperturam utilem lentis ocularis cujuscunque. Ii radii singuli sunt axes totidem conorum continentium omnes radios emissos ab iis singulis objecti punctis,

qui ad habendam visionem distinctam considerantur in egressu ab oculari postremâ tanquam fasciculi radiorum parallelorum conjungendorum in fundo oculi in punctis totidem ad efformandam itidem imaginem objecto similem.

18. Sit in fig. 12 (Tab. IV) DK axis occurrentis objectivo AA in C, & oculari BB in G, ac bini radii obliqui EC, E'C traducti per medium objectivum C, cuius crassitudo hic negligitur, adveniant ad ipsam ocularem BB in H, H', a qua detorqueantur ad puncta axis I, I'. Si eorum prior adveniat a puncto objecti propiore axi, quam posterior, erit ob errorem figuræ sphæricæ GI' brevior, quam GI. Concipiantur rectæ tendentes a puncto I ad eadem puncta objecti, ad quæ tendunt rectæ CE, CE': quæ occurrant oculari BB in punctis e, e', & erunt ad sensum parallelæ ipsis CE, CE': addatur recta Ih parallela rectæ IH'. Puncta objecti E, E' posita circumquaque circa punctum D, quod est in centro campi, apparebunt oculo nudo posito in I directionibus Ie, Ie', & eidem transpicienti trans telescopium astronomicum directionibus IH, Ih, dum punctum D apparent directione IG: erit autem Gh longior quam GH'.

19. Sit jam in fig. 13 OMO'N planum respondens toti campo, cuius centrum G sit idem, ac in fig. 12, ac lineæ cujusdam rectæ objecti, cui in fig. 13 respondeat recta PQ, punctum proximum centro campi habeat in fig. 12 distantiam apparentem oculo nudo Ge, oculo armato GH. Iis autem in fig. 13 æqualia sint segmenta Ge, GH semidiametri GO perpendicularis ipsi PQ, puncti vero alterius cujusvis ejusdem rectæ distantia apparet oculo nudo sit in priore figura 12 Ge: erit distantia ejus apparet oculo armato Gh respondens rectæ Ih habenti eandem directionem cum directione radii IH' (\*), non GH', quibus ita respondebunt in fig.

(\*) Nam omnes radii pertinentes ad idem objecti punctum, qui demum egressi e postrema lente oculari ad pupillam proxime paralleli inter se, debent conjungi in fundo oculi in unico eodem puncto, quod esset vere punctum, si visio esset accurate distincta, sed est exiguum spatiolum, quod hic consideramus ut punctum. Locus apparet ejus puncti objecti pendet a positione illius

fig. 13. distantia  $Ge'$ ,  $GH'$ ,  $Gh$ , ut puncto  $e'$  jacente in recta illa  $PQ$  campi objectivi in angulo quodam  $eGe'$ , puncta  $H'$ ,  $h$  debeant jace-re in eadem recta  $eG$  ultra  $G$ . Porro punctum  $H'$  jacebit in recta  $MN$  perpendiculari eidem radio  $GO$ . Patet enim, fore in fig. 12  $Ge : Ge' :: GH : GH'$ ; adeoque eadem proportio habe-bit locum in fig. 13. Hinc triangula  $eGe'$ ,  $GHH'$  habentia la-tera proportionalia circa angulos aequales ad  $G$ , erunt similia, adeoque angulus  $GHH'$  aequalis angulo  $Ge'e'$  recto. Cum igitur  $Gh$  in utraque figura sit major, quam  $GH'$ ; punctum  $h$  procur-ret in figura posteriore ultra rectam  $MN$ ; & quoniam quo pun-tum  $H'$  in fig. 12 accedit magis ad marginem campi, eo magis

pun-

Ilius ipsius puncti fundi oculi, in quo puncto ii radii uniuntur ad efformandam imaginem ejus puncti objecti respectu aliorum punctorum imaginis, & nos ab infantia assuevimus referre puncta singula objecti visi oculo inermi ad eam directionem, in qua adveniunt ad pupillam radii egressi ab iis singulis, qui ob exiguitatem ipsius pupillae respectu ejus distantiae censemur omnes inter se parallelis. Radii delati ab eodem puncto objecti, & egressi demum e diversis punctis humoris crystallini adveniunt ad id punctum fundi oculi cum direc-tionibus admodum diversis, cum nimirum amplitudo pupillae, per quam radii transeunt, & adveniunt ad eundem humorem crystallinum, non sit exi-gua respectu distantiae hujus a fundo oculi: quin immo ad puncta imaginis ef-formatae in eodem fundo a radiis pertinentibus ad puncta objecti sita in ali-qua distantia ab axe oculi produsto usque ad objectum ipsum nullus radius advenit cum ea directione, cum qua devenit ad oculum, cum humor crystallinus, qui jacet in aliqua distantia a pupilla intra oculum, non excipiat ra-dios incidentes oblique in pupillam, nisi parte sui sita ultra axem ipsum. Ad-huc tamen ii radii convenient in fundo oculi in illo eodem puncto, in quo convenirent omnes, qui cum ipsis allati essent ad totam humoris crystallini superficiem, illa autem assuetudo facta ab infantia id efficit, ut attribuamus locum visum directioni unicæ discedenti ab eo puncto fundi oculi, in quo ab iis convenientibus pingitur imago, & tendenti contra eam, per quam radii digressi ab eodem objecti punto devenerunt ad oculum.

Ordo punctorum imaginis, & quidem delatus ad cerebrum (nam anima eam i-maginem non videt per alium oculum, nec vero est ipsi immediate præsens, cum & in mea, & in sententia jam communi, præsentia ipsius immediata non extendatur per totum corpus, nec vero per totum caput), & longa assuetudo adjuta a reliquis sensibus, potissimum a tactu, determinat judicium de posi-tione objecti visi: ac ea est unica ratio, cur directa censeamus objecta, quo-rum imago, quam anima immediate non videt, pingitur inversa in eodem oculi fundo: sed hæc jam pertinent ad Animasticam, non ad Opticam.

punctum  $I'$  accedit ad  $G$ , adeoque eo magis punctum  $h$  recedit ab  $H$ ; idcirco pariter eo magis punctum  $h$  recedet a recta illa  $MN$ . Is recessus initio prope punctum  $H$  erit infinitesimus ordinis secundi, ut infinitesimus ordinis secundi est excessus rectæ infinite parum declinantia perpendiculari supra ipsam perpendicularem: adeoque puncta  $h$  erunt in curva quadam linea, quæ erit in ipso punto  $H$  tangens rectæ  $MHN$ . Id ipsum docet experientia; imminuto enim campo, & incremento, ita curvatura minuitur, ut sensum effugiat, quæ quidem cæteris paribus eo debet esse major, quo major est error figuræ sphæricæ lentis ocularis.

20. Ubi plures adhibentur lentes, nisi earum combinatio per errores negativos permixtos positivis destruat hunc errorem sphæricitatis finalem, semper idem vitium occurret, quod sæpe potius augebitur, quam minuatur. Id penitus evanesceret, si omnes radii in fig. 12 abirent in  $I$ , evanescentibus omnibus  $II'$ . Satis est hinc aperuisse fontem ejus vitii, quod conabimur destruere, vel saltem minuere per remedia jam proponenda.

## §. II.

### *De correctione, vel diminutione erroris figuræ sphæricæ lentis unicæ.*

21. **E**RRORE figuræ sphæricæ, de quo nos hinc acturos promisimus num. 76 capitinis præcedentis, oritur, uti jam toties diximus, ex eo, quod radii etiam homogenei, qui incident in lentem convexam habentem superficies sphæricas prope axem, concurrunt cum ipso axe in distantia majore, quam ii, qui incident in marginem lentis ipsius. Distantia eorum concursuum est error sphæricitatis rectilineus, sive longitudinalis, error circularis est circulus minimus eorum omnium, per quos disperguntur iidem radii excepti plano perpendiculari ad axem. Hic determinatur per illum methodo, quæ habetur in illa dissertatione veteri, quæ fere tota habebitur hinc in supplemento, ac itidem ut error refrangibilitatis destruitur, vel imminuitur, eo deucto, vel immunito. Pro ea distantia nobis recurrentum est hinc ad formulas O-

pu-

pusculi II Tomi I; nam earum determinatio desumpta a theoria exiguorum prismatum, ex qua desumpsimus in capite superiore formulas adhibendas pro corrigendo errore refrangibilitatis, esset multo operosior, & magis complicata. Formula pro valore ejus distantia numero 30 capitinis I Opusculi II Tomi I est  $r^p$ , ubi  $r$  est distantia lentis a puncto, in quo radii colliguntur ab ipsa, & valor  $p$  est  $= \frac{m-1}{m} \left( \frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2 f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2 f} \right) \frac{1}{2} e^2$ : ibi autem juxta num. 41 ejusdem capitinis more solito  $m$  est ratio sinus anguli incidentiae ad sinum anguli refracti, & semidiameter aperturæ ipsius lentis,  $p$  distantia lentis a puncto, ad quod radii concipientur convergentes ante appulsum, qui valor evadit negativus, si radii adveniant divergentes, & radius sphæricitatis primæ superficiei positivus, si ea est convexa, negativus, si concava: est autem  $\frac{I}{f} = \frac{I}{a} - \frac{I}{b}$ , ubi  $b$  est radius secundæ superficiei positivus, si ea est concava, negativus, si convexa.

22. Pro destruendo eo errore debet valor, qui est intra parenthesim, fieri = 0. Pro calculo expeditiore assumemus  $f = 1$ , & incipiendo a radiis advenientibus parallelis erit  $\frac{I}{p} = 0$ , adeoque habebitur æquatio  $m^3 - \frac{2m^2+m}{a} + \frac{m+2}{a^2} = 0$ ; nimirum  $\frac{1}{a^2} - \frac{2m^2+m}{m+2} \times \frac{1}{a} + \frac{m^3}{m+2} = 0$ . Inde eruitur  $\frac{1}{a} = \frac{2m^2+m}{2(m+2)}$   $\pm \sqrt{\left(\frac{(2m^2+m)^2}{4(m+2)^2} - \frac{m^3}{m+2}\right)}$ . Redacto secundo termino valoris inclusi signo radicali ad eundem denominatorem ejus numerator evadet  $= 4m^3(m+2)$ , qui additus numeratori  $(2m^2+m)^2$  primi termini evoluto exhibebit numeratorem summam  $4m^4 + 4m^3 + m^2 - 4m^4 - 8m^3 = m^2 - 4m^3 = m^2(1 - 4m)$ , qui valor erit semper negativus ob valorem  $m$  majorem unitate. Quare valor  $\frac{1}{a}$  erit

erit semper imaginarius, quod indicat, eum errorem omnino corrigi non posse in eo casu radiorum parallelorum per lentem unicam habentem superficies sphæricas.

23. In casu radiorum convergentium, vel divergentium retinendi erunt etiam postremi tres termini coefficientes  $p$  in denominatoribus, adeoque totus valor inclusus parenthesi debet esse  $= 0$ . Præter  $f = 1$  fiat  $\frac{1}{p} = n$ , unde innotescat ratio valoris  $p$  ad distantiam focalem lentis  $= h$ , quæ reddat valorem inclusum signo radicali positivum; adeoque radices reales. Nam e formulis ejusdem numeri 41 capitatis I Opusculi II Tomi I est  $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$ , adeoque hic  $= m-1$ ; & proinde erit  $\frac{h}{p} = \frac{n}{m-1}$ .

24. Facta substitutione valorum 1 pro  $f$ , &  $n$  pro  $\frac{1}{p}$  in formula inclusa parenthesi numero 21 habebitur

$$m^3 - \frac{2m^2 + m}{a} + \frac{m+2}{a^2} + (3m^2 + m)n - \frac{(4m+4)n}{a} + (3m+2)n^2 = 0$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2m^2 + m + (4m+4)n}{m+2} \times \frac{1}{a} + \frac{m^3 + (3m^2 + m)n + (3m+2)n^2}{m+2} = 0$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2m^2 + m + (4m+4)n \pm \sqrt{(- (4m-1)m^2 + 4(m-1)m \cdot n + 4m^2n^2)}}{2m+4} \quad (*)$$

Porro incipiendo a radiis parallelis hic etiam pro iis debet fieri de more  $\frac{1}{p} = n = 0$ , & demptis omnibus terminis, qui habent

(\*) Nam dimidium coefficientis secundi termini est  $\frac{2m^2 + m + (4m+4)n}{2(m+2)}$ , cuius quadratum habebit pro divisore  $4(m+2)^2$ : numerator postremi termini multiplicandus est per  $4(m+2) = 4m+8$ , ut reducatur ad eundem denominatorem, & acceptus cum signo negativo addendus ei quadrato. Facta eâ multiplicatione, & comparatis singulis terminis cum terminis respondentibus ejus quadrati evoluti, evanescunt plures quantitates, ac is numerator reducitur ad formam simplicem expressam hic sub signo radicali: denominatoris autem radix extraea remanet denominator communis totius valoris.

bent eum valorem, formula reducitur ad valorem inventum pro eo casu numero 22, in quo valor inclusus signo radicali est negativus. Reliqui duo termini hic adjecti, qui continent  $n$ , &  $n^2$ , & sunt ambo positivi, efficient positivam summam omnium trium; si valor  $n$  fuerit satis magnus, existente  $p$  satis exiguo. Limes inter valores  $n$ , qui relinquunt eam summam negativam, & eos, qui ipsam efficiunt positivam, est ille, qui eam reddit  $= 0$ .

Positâ autem cå summâ  $= 0$ , habebitur  $n^2 + (m-1)n - \frac{4m-1}{4} = 0$ ; unde eruitur  $n = -\frac{1}{2}(m-1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+2m)}$ .

25. Adhibito pro  $m$  valore suo, obtinebuntur bini limites, alter positivus pro distantia puncti dirigentis radios advenientes, nimirum ejus, ad quod radii debent convergere, alter negativus, a quo debent divergere, ut habeantur limites quæsiti. Si adhibetur valor  $m = \frac{3}{2}$ , a quo is non nimis recedit in vitris communibus; habebitur  $n = -0,25 \pm \frac{1}{4}\sqrt{21} = -0,25 \pm 1,15$ .

Hinc  $\frac{h}{p} = \frac{n}{m-1} = 2n$ , erit  $= -0,5 \pm 2,3 = \begin{cases} 1,8 \\ -2,8 \end{cases}$ . Ii valores evadunt  $\frac{2}{5}$ , &  $\frac{14}{5}$ . Inde pro ejusmodi vitris habetur sequens theorema. *Si distantia puncti, ad quod convergunt radii advenientes ad lentem, fuerit major, quam  $\frac{5}{9}$  distantiæ focalis ipsius lentis, vel major, quam  $\frac{5}{14}$  distantiæ puncti, a quo divergunt; non poterit per combinationem binarum superficierum destrui error figuræ sphæricæ: poterit, si ea fuerit æqualis, vel minor.*

26. Pro casu, in quo is error destrui possit, habebitur valor  $\frac{I}{a}$  in formula inventa numero 24, & valor  $\frac{I}{b}$  erit  $= \frac{I}{a} - 1$ , ob va-  
lorem  $\frac{I}{a} - \frac{I}{b} = \frac{I}{f} = 1$ . Valor  $\frac{I}{h} = m - 1$  divisus per eos  
valores exhibebit valorem  $\frac{a}{h}, \frac{b}{h}$ , sive valorem  $a$ , &  $b$  redu-  
ctum ad partes unitatis æqualis distantiæ focali  $h$ . Sed vix un-  
quam occurret usus eorum valorum ob nimiam proximitatem li-  
mitum inventorum. Vix unquam accidet, ut radii appellant ad  
lentem convergentes ad punctum usque adeo proximum ipsi len-

ti, vel divergentes a puncto tam proximo, nimirum ad punctum distans minus quam per  $\frac{5}{9}$  distantiae focalis, vel a puncto distante minus quam per  $\frac{5}{14}$ .

27. Pro casu, in quo is error non potest destrui, potest saltem imminui: proderit determinare prime combinationem sphericatam, quæ ipsum exhibeat minimum omnium, qui haberi possunt manente eadem distantia focali  $h$ , eadem aperturæ  $e$ , eodem valore  $p$  determinante directionem radiorum advenientium, & mutatâ tantummodo combinatione sphericatam binarum superficierum: tum comparare residuum cum eo, qui habetur in aliis combinationibus, quæ adhiberi solent, ut pateat, quid præstet silegere, habitu respectu ad magnitudinem erroris, qui habetur in singulis, & ad faciliorem executionem.

28. Si fiat  $u = \frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2 + m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2 f} + \frac{3m^2 + m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2 f}$ , qui est totus valor inclusus parenthesi valoris  $p$  numeri 21; error ibi expressus  $r^2 p$  evadit  $\frac{m-1}{2m} \times r^2 ue^2$ , ubi manentibus cæteris variatur solus valor  $u$ . In eo valore manent reliqua omnia, præter valorem  $a$ : manente enim  $h$ , manet etiam  $f$ , qui valor ob  $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$  evadit  $= (m-1)h$ : eo facto itidem  $= 1$ , & determinato  $a$ , qui exhibeat minimum, habebitur etiam  $b$  ex formula  $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$  (num. 26), & utriusque ratio ad distantiam focalem  $h$ . Porro termini continentis  $a$  sunt tantummodo tres, nimirum  $- \frac{2m^2 + m}{a} + \frac{m+2}{a^2} - \frac{4m+4}{ap}$ , ob  $f=1$ .

Hinc captâ differentiâ habebitur  $\frac{(2m^2 + m)da}{a^2} - \frac{2(m+2)da}{a^3}$   
 $+ \frac{(4m+4)da}{a^2 p}$ , adeoque  $\frac{1}{a} = \frac{2m^2 + m}{2m+4} + \frac{4m+4}{(2m+4)p}$ . Solus primus terminus exhibit valorem  $\frac{1}{a}$  pro radiis, qui adveniunt

parallelī, secundus est addendus pro convergentibus, vel divergentibus. Si fiat  $m = \frac{3}{2}$ , erit pro illis prioribus  $\frac{1}{a} = \frac{6}{7}$ , &  $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1 = -\frac{1}{7}$ , adeoque habebitur  $a : b :: 1 : -6$ , nimirum lens habens minimum errorem figuræ sphæricæ in eo genere vitri debet esse utringue convena ita, ut radius secundæ superficie sit sextuplus radii primæ. Quod si fiat  $m = 1,53$ , quod habetur in pluribus vitris, erit  $\frac{1}{a} = \frac{6,2118}{7,06} = \frac{1}{1,1365}$ , &  $\frac{1}{b} = -\frac{0,1365}{1,1365}$ , &  $a : b :: 0,1365 : 1 :: 1 : 7,33$ , nimirum pro eo genere vitri debet lens itidem esse utringue convexa, sed radius secundæ superficie paullo etiam major, quam septuplus radii primæ.

29. Valores  $a$ , &  $b$  invenientur in partibus unitatis æqualis distantiarum focali  $= h$ , si valor  $\frac{1}{h} = m - 1$  dividatur per hosce valores  $\frac{1}{a}$ , &  $\frac{1}{b}$  jam inventos. Pro vitro priore habebitur  $a = 0,5 \times \frac{7}{6} = 0,583$ ,  $b = -0,5 \times 7 = -3,5$ , & pro posteriore  $a = 0,53 \times 1,1365 = 0,602$ ,  $b = -0,53 \times \frac{1,1365}{0,1365} = -4,41$ .

30. Hi sunt valores radiorum sphæricitatis exhibentium errorrem figuræ sphæricæ minimum pro radiis advenientibus parallelis ad lentem vitrorum ejus generis, nimirum eorum, quæ habent eum valorem pro  $m$ . Pro errore residuo calculus numericus est prolixior. Ad eum habendum in partibus unitatis assumptæ  $= f$ , oportet assumere valorem numericum formulæ  $\frac{m-1}{2m} \times r^2 ue^2$  (numer. 28), in quo valor  $u$  habet tres terminos pro radiis parallelis datos per  $m$ , &  $a$ .

31. Combinationes inventæ num. 28, & 29 convenient objectivo simplici, ad quod nimirum concipiuntur radii advenientes ut parallelī. Pro errore minimo sphæricitatis in ejusmodi objectivo constante e vitro communi, oportebit sémper adhibere radium

sphæricitatis secundæ superficie multis partibus majorem primo ; & quidem pro vitris habentibus adhuc majorem vim refractivam , uti sunt ea , quæ habent majorem etiam distractivam , videlicet flint , strass , & ea omnia , quæ habent admixtam satis magnam copiam plumbi , adhuc major esset excessus secundi radii supra primum , cum a valore  $\approx 1,3$  ad  $1,53$  iuum sit a radio sextuplo ad plus quam septuplum : sed objectiva simplicia nunquam fieri debent ex ejusmodi vitris ob errorem diversæ refrangibilitatis multo majorem in ipsis , quam in vitris communibus .

32. Cum discrimen obveniat ita magnum inter combinationes exhibitas ab iis binis valoribus pertinentibus ad vim refractivam , quorum utrumque inveni in pluribus vitris , patet ad habendum id , quod sit optimum factu pro ejusmodi etiam objectivis simplicibus , oportere prius determinare ipsum valorem  $m$  , quod ostendit utilitatem instrumentorum , quæ habentur hic in Opusculo I Tomi I exhibentium prisma variabile , cuius ope sine novis distantiarum mensuris determinatur is valor . Multo autem magis id proderit pro objectivis compositis ex binis lentibus licet excisis ex eodem vitri genere , de quibus agemus infra , quæ destruunt valorem ejus erroris expressum a superiore formula , pro quibus itidem oportebit nosse valorem  $m$  . Adhuc tamen cum circa maximum , & minimum differentiæ sint fere semper exiguae ; quando non habetur valor accuratus , potest adhiberi pro vitris communibus radius secundus sextuplus , vel octuplus prioris , atque id eo magis , quod valor  $m$  non est idem pro omnibus radiis heterogeneis ne tum quidem , cum agitur de eodem vitro , ut ideo error minimus pro uno genere radiorum exhibeat combinationem diversam ab ea , quæ exhibetur ab errore minimo pro quopiam alio .

33. Ubi agitur de radiis convergentibus , vel divergentibus oportet pro habendo errore minimo addere primo termino  $\frac{2m^2+m}{2m+4}$  numeri 28 secundum  $\frac{4m+4}{(2m+4)p}$  , & pro ipso errore minimo , qui ibi remanet , vel pro errore , quem habet in quavis alia combina-

binatione pro radiis parallelis valor  $u$  formulæ  $\frac{m-1}{2m} \times r^2 u e^2$  ejus numeri, assumere solos eosdem tres primos terminos, qui carent valore  $p$ ; pro radiis vero convergentibus, vel divergentibus addendi sunt ipsis tres termini postremi. Porro si etiam fiat  $f = 1$ ; habebitur error relatus ad eam unitatem per eam formulam. Is reducetur ad unitatem æqualem distantiae focali  $h$  ejusdem lentis, si ejus valor inventus dividatur per valorem  $h$  assumptum in iisdem prioribus unitatibus, cum numerus partium relativarum ad diversas unitates sit in earum ratione reciproca.

Est autem (num. 26)  $\frac{1}{h} = m-1$ ; adeoque valor inventus  $\frac{m-1}{2m} \times r^2 u e^2$  multiplicandus erit per  $m-1$ , & evadet  $\frac{(m-1)^2}{2m} \times r^2 u e^2$ .

34. Comparabimus hinc errores plurimi specierum lentium tam respectu radiorum, qui adveniant ad lentem paralleli, quam respectu eorum, qui adveniant convergentes ad ejus focum, quod reddet ipsam formulam adhuc simpliciorem. Prior applicatio pertinet ad objectiva simplicia, posterior ad lentem ocularem secundam adjectam primæ numero 94 capitatis primi ad corrigendos colores genitos ab ipsa prima. Porro in unitatibus prioribus est  $r$  pro radiis parallelis  $= \frac{1}{m-1}$ , & pro convergentibus ad focum  $= \frac{1}{2(m-1)}$ , adeoque pro illis  $(m-1)^2 r^2 = 1$ , pro his  $= \frac{1}{4}$ , & totus error redactus ad unitatem  $= h$  pro prioribus erit  $e^2 \times \frac{u}{2m}$ , pro posterioribus  $e^2 \times \frac{u}{8m}$ . Is eo pacto erit redactus ad summam simplicitatem. Proderit enim ad habendum valorem  $\frac{u}{m}$  sex terminos valoris  $u$  dividere per  $m$  ante applicationem numerorum, ut facto  $\frac{u}{m} = u'$ , &  $f = 1$ , fiat  $u' = m^2 - \frac{2m+1}{s} + \frac{m+2}{ms^2} + \frac{3m+1}{P} - \frac{4m+4}{map} + \frac{3m+2}{mp^2}$ . Eo pacto tres ex iis terminis acquirunt divisorem  $m$ , sed & ii, & reliqui tres habent numerato-

ratorem ita simplicem, ut ejus valor numericus habeatur unico intuitu, ac sine ullo usu logarithmorum, sine calculo ullo scribendo in pagella separata, uti patebit infra, ubi tabellas propo-nam, & explicabo. Pro sola comparatione errorum pertinentium ad diversas combinationes superficierum, satis erit invenire valorem  $u'$ , & pro radiis parallelis ipsum dividere per 2, pro convergentibus ad focum per 8: tum si quæratur etiam quantitas absoluta redacta ad eandem unitatem æqualem valori  $r$ ; satis erit valorem sic inventum multiplicare per quadratum  $e^2$  semidiametri aperturæ redactæ ad unitatem eandem.

35. E valoribus  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$  inventis in partibus prioris unitatis  $= f$  invenientur facile itidem valores  $a$ , &  $b$  redacti ad unitatem  $= h$  dividendo per ipsos valorem  $\frac{1}{h} = m - 1$  de more.

36. Hic comparabo inter se per applicationem numerorum quatuor species lentium, quarum prima habeat combinationem erroris minimi, secunda sit plano-convexa ita, ut planum obvertatur oculo, tertia isoscelia, quarta plano-convexa ita, ut planum obvertatur objecto; nam, ut patebit ex ipso calculo, eo ordine crescunt errores a minimo primæ lentis ad maximum postremæ. Quæram autem valorem erroris tam pro radiis parallelis, quam pro radiis, qui adveniant convergentes ad focum lentis, pro quibus radiorum advenientium directionibus invenimus valores algebraicos  $\frac{u}{2m}$ , &  $\frac{u}{8m}$ . Omnia erunt communia utrique radiorum generi, & lentibus omnibus præter  $\frac{1}{a}$ , qui valor occurrit in duobus terminis valoris  $u$ , & ejus quadratum in tertio. Is debet accipi pro lente erroris minimi talis, qualis occurrit relatus ad pri-mam unitatem  $= f$ : pro lente isoscelia erit  $= 2$ , ob  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = 1$ , &  $-\frac{1}{b} = \frac{1}{a}$ , quod efficit  $\frac{2}{a} = 1$ , adeoque  $a = 2$ . Pro plano-convexa, in qua planum obvertitur oculo, est  $\frac{1}{b} = 0$ , adeo-

adeoque  $\frac{I}{a} = 1$ , & ipse  $a = 1$ . Pro plano-convexa, in qua planum obvertitur objecto est  $\frac{I}{a} = 0$ . Hi valores erunt rite substituendi in illis tribus terminis valoris  $u$ . Ad distinguendum va- lorem  $a$  erroris minimi pertinentis ad radios parallelos ab eo, qui pertinet ad eos, qui adveniunt ad lentem convergentes ad ejus focum, appellabimus hunc secundum  $a'$ ; & quoniam pro hisce ra- diis habetur  $\frac{I}{P} = \frac{I}{h} = \frac{m-1}{f}$  (num. 23)  $= m - 1$  ob  $f = 1$ , secundus terminus numeri 28, qui erat  $\frac{4m+4}{(2m+4)p}$ , erit  $= \frac{(4m+4)(m-1)}{2m+4}$ . Hinc erit  $\frac{I}{a} = \frac{2m^2+m}{2m+4}$ , cui pro  $\frac{I}{a'}$  accederet ipse  $\frac{(4m+4)(m-1)}{2m+4}$ .

37. Forma calculi numerici, quæ mihi visa est omnium commo- dissima, habebitur in tribus tabulis, quas exhibebo inferius suis locis cum singularum explicatione (\*). Hic apponam numeros fi- nales valorum quæsitorum inde erutos: pertinent ad tria vitro- rum genera, quorum  $m$  est 1,5; 1,52; 1,54; unde per inter- polationem obtinebuntur pro reliquis communibus. Incipiems au- tem a radiis sphæricitatis binarum superficierum lentis erroris mi- nimi  $a$ , &  $b$  pro radiis parallelis, quæ lens erit utrinque con- vexa,

---

(\*) Pro singulis casibus applicatio numerorum ad formulam est expedita, nec in- digeret explicatione: sed pro comparandis inter se pluribus valoribus finali- bus, uti sunt ii, qui hic exhibentur, præstat habere tabulam, pro qua com- putandâ prodest plurimum habere idoneum calculi numerici ordinem, quod inserviet tam pro revocandis ad trutinam hisce valoribus hic inventis, quam pro applicandis aliis valoribus  $m$  fortioribus, si libeat adhibere vitra ipsis præ- dita: idcirco censuimus operæ pretium ipsas tabulas exhibere cum tota cal- culi forma, & operationes adhibitæ explicare singillatim. Explicatio incipiet num. 41: tabulæ ipsæ habebuntur, ubi incipient singularum explications. Si quis velit persequi operationes ipsas, & revocare ad trutinam; poterit sin- gulas describere in paginis separatis, & habere ad manus, dum hic inferius explicabuntur, quod est multo commodius, quam continuus excursus ad im- pressas in aliis paginis.

vexa,  $a'$ , &  $b'$  pro convergentibus ad focum, quæ erit convexo-concava convexitate obversa objecto; quibus accedet ipsorum ratio: tum addemus quantitatem erroris pro quatuor lentibus propositis numero 36: siquicunq[ue] respondebunt errores bini pro quovis valore  $m$ , quorum errorum prior pertinebit ad radios parallellos, posterior ad convergentes.

Radius sphæricitatum pro unitate æquali distantia focali.

|                                        | $m = 1,5$        | $1,52$   | $1,54$   |
|----------------------------------------|------------------|----------|----------|
| Radiis advenientibus parallelis.       | ( $a = 0,5833$   | $0,5961$ | $0,6085$ |
|                                        | ( $b = -3,5$     | $-4,072$ | $-4,800$ |
| Radiis convergentibus ad focum.        | ( $a' = 0,3182$  | $0,3216$ | $0,3248$ |
|                                        | ( $b' = 0,875$   | $0,8431$ | $0,8152$ |
| Ratio radiorum.                        |                  |          |          |
|                                        | $b : a = -6$     | $-6,831$ | $-7,889$ |
|                                        | $b' : a' = 2,75$ | $2,621$  | $2,510$  |
| In lente . . . . .                     | Errores.         |          |          |
| Erroris minimi . . . .                 | ( $0,267$        | $0,274$  | $0,280$  |
|                                        | ( $0,040$        | $0,039$  | $0,038$  |
| Piano-convexa plano verso ad oculum.   | ( $0,291$        | $0,293$  | $0,295$  |
|                                        | ( $0,135$        | $0,149$  | $0,161$  |
| Utrinque convexa isoscelia.            | ( $0,416$        | $0,434$  | $0,455$  |
|                                        | ( $0,375$        | $0,400$  | $0,427$  |
| Plano-convexa piano verso ad objectum. | ( $1,125$        | $1,155$  | $1,186$  |
|                                        | ( $0,760$        | $0,796$  | $0,833$  |

38. Patet e numeris h[ic]c propositis, quam ingens habeatur discrimin inter quantitatem erroris figuræ sphæricæ ortum ex sola diversa relatione binarum sphæricitatum lentium, quæ habeant distantiam focalem prorsus eandem, atque id potissimum in lente, quæ excipiat radios convergentes ad suum focum, ut est illa secunda lens ocularis addita primæ in telescopiis astronomicis de

de qua num. 18. Is error in secunda lente est triplo , vel quadruplo major , quam in prima , in tertia nonuplo , vel decuplo major , in quarta etiam vicecuplo ; usque adeo plurimi interest debitam sphæricitatum combinationem lentibus inducere . Patet autem , lentem piano-convexam adhibendam potius , quam isosceliam , dummodo planum obvertatur oculo ; nam ea est omnium pessima , si planum obvertatur objecto (\*): præstat tamen pro objectivo simplici adhibere utrinque convexam , sed ita , ut radius sphæricitatis superficie secundæ sit circiter septuplus radio primæ . Pro secunda lente oculari , quæ habeat folum ulteriorem communem cum prima , lens ad habendum errorem minimum proprium debet habere radium secundæ superficie concavæ , qui sit ad radium primæ convexæ circiter , ut 2,6 ad 1 , sive ut 13 ad 5.

39. Diximus ad habendum errorem minimum proprium : nam ad habendum minimum utriusque lentis , opus est calculo multo magis composito: debet enim haberi ratio erroris sphæricitatis inducti a prima , & inveniri expressio , quæ exhibeat errorem secundæ lentis ortum ex errore primæ , & suo . Multo magis complicata est perquisitio erroris , qui remanet in foco lentis postremæ , ubi adhibentur plures lentes , qua de re agemus iterum inferius . Interea duo hic notanda sunt : primo quidem errorem inventum pro radiis convergentibus ad folum referri ad unitatem , quæ sit æqualis distantia focali lentis adhibitæ ; qui si referatur

Tom. II.

V

ad

(\*) Id quidem habet locum in ea combinatione lentis secundæ excipientis radios digressos e diversis punctis objecti , qui se intersecantes in centro objectivi detorquentur deinde a prima oculari ita , ut convergant ad folum communem ipsius , & lentis secundæ , quæ idcirco eos excipit convergentes ad folum suum . Ibi omnium pessima est forma lentis plano-convexæ , piano obverso radiis advenientibus : eadem est itidem pessima pro prima oculari , quæ eos excipit proxime parallelos : itidem pro objectivo excidente radios digressos ab eodem punto objecti proxime parallelos est pessima omnium ; si planum obvertatur versus objectum . Verum in systemate trium , vel quatuor ocularium , in quo secunda excipit eos radios pertinentes ad diversa puncta objecti digressos a suo foco , quos idcirco debet reddere parallelos , pessima est , ut dicetur inferius , forma piano-convexa , piano obverso oculo : pro ipsa e contrario planum debet obverti radiis advenientibus .

## OPUSCULI I.

ad unitatem aequalem distantiae lentis a foco, in quo ipsa colligit radios, exprimetur per numerum duplo majorem: ea enim distantia est duplo minor, quam distantia, quæ dicitur absolute focalis, quæ nimurum pertinet ad focum radiorum parallelorum. Deinde ad subhendum errorem absolutum debere (num. 34) nueros inventos multiplicari per quadratum semidiametri aperturæ redactum ad eandem unitatem, qui valor adhibendus erit, ubi quæritur error secundæ lentis auctus ab errore primæ.

40. In sequenti paragrapho agemus de remedio per duas lentes conjunctas; sed interea proponemus tabulas, ex quibus decerpti sunt valores propositi numero præcedenti, quas explicabimus singillatim de more, incipiendo hinc a prima. Qui eas hinc descriptas in pagina separata habeat præ manibus singulas dum explicantur, facilius conferet cum ipsa explicatione.

T A B U L A I.

|           | $m = 1,5$     | $m = 1,52$              | $m = 1,54$             |
|-----------|---------------|-------------------------|------------------------|
| $2m + 4$  | 7             | 7,04 . . . 9,152427     | 7,08 . . . 9,149967    |
| $m$       | 1,5           | 1,52 . . . 0,181844     | 1,54 . . . 0,187521    |
| $2m + 1$  | 4             | 4,04 . . . 0,606381     | 4,08 . . . 0,610660    |
| $1 : a$   | 6:7           | 0,8723 . . . 9,940652   | 0,8875 . . . 9,948148  |
| $4m + 4$  | 10            | 10,08 . . . 1,003460    | 10,16 . . . 1,006894   |
| $m - 1$   | 0,5           | 0,52 . . . 9,716003     | 0,54 . . . 9,732394    |
|           | 5:7           | 0,7445 . . . 9,871890   | 0,7749 . . . 9,889255  |
| $1 : a'$  | 11:7          | 1,6168 . . . 0,208656   | 1,6624 . . . 0,220735  |
| $1 : a$   | 6:7           | — 0,059348              | — 0,051852             |
| $1 : a'$  | 11:7          | — 9,791344              | — 9,779265             |
| $1 : b$   | — 1:7         | — 0,1277 . . . 0,893809 | 0,1125 . . . 0,948848  |
| $1 : b'$  | 4:7           | — 0,6168 . . . 0,209856 | 0,6624 . . . 0,178880  |
| $a$       | 7:12 = 0,5833 | 0,5961 . . . 9,775351   | 0,6085 . . . 9,784246  |
| $a'$      | 7:22 = 0,3182 | 0,3216 . . . 9,507347   | 0,3248 . . . 9,511659  |
| $b$       | — 7:2 = — 3,5 | — 4,072 . . . 0,609812  | — 4,800 . . . 0,681242 |
| $b'$      | 7:8 = 0,875   | 0,8431 . . . 9,925859   | 0,8152 . . . 9,911274  |
| $b : a$   | — 6           | — 6,831 . . . 0,834461  | — 7,889 . . . 0,896996 |
| $b' : a'$ | 2,75          | 2,621 . . . 0,418512    | 2,510 . . . 0,399615   |

41. Tabula I continet calculum pro valoribus  $\frac{1}{a}$ , &  $\frac{1}{a'}$ , qui respondent iis binis directionibus radiorum, positis pro  $m$  valoribus

bus tribus 1,5; 1,52; 1,54. Accedunt valores  $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$ ,  $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - 1$ , ex quibus eruentur  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  in partibus unitatis æqualis distantiaæ focali  $h$ , dividendo (num. 35) valorem  $\frac{1}{h}$   $= m - 1$  per valores fractionarios inventos, ac ratio radiorum  $b$ ,  $b'$  ad  $a$ ,  $a'$ . Inde ope partium proportionalium invenientur facile ii valores pro omnibus vitris communibus, quorum  $m$  plerumque cadet inter hinc adhibitos, nec unquam nimis recedet ab eorum aliquo. Formula, quæ hinc evolvitur est (num. 28, & 33)

$$\frac{1}{a} = \frac{2m^2 + m}{2m + 4}, \quad \& \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{4m + 4}{(2m + 4)p}, \quad \text{ubi } p \text{ est } = h, \quad \& \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{h} = m - 1,$$

adeoque is secundus terminus addendus evadit  $\frac{(4m + 4)(m - 1)}{2m + 4}$ .

42. In primis tribus lineis primæ columnæ ejus tabulæ habentur termini pertinentes ad valorem  $\frac{1}{a} = \frac{2m^2 + m}{2m + 4} = \frac{m(2m + 1)}{2m + 4}$ , nimirum in prima linea divisor  $2m + 4$  cum puncto præcedente, quod indicat, ipsum esse divisorem, adeoque ubi adhibeantur logarithmi, sumendum esse complementum logarithmicum ipsius: in secunda, & tertia bini factores numeratoris, nimirum  $m$ , &  $2m + 1$ : in quarta linea  $\frac{1}{a}$  divisione expressa per duo puncta ob commodiorem impressionem: in quarta, & quinta duo factores numeratoris  $(4m + 4)(m - 1)$  termini addendi pro habendo  $\frac{1}{a'}$ . Sexta relinquitur libera pro valore ejus secundi termini apponendo e regione ipsius in reliquis columnis: in octava habetur  $\frac{1}{a}$ , cuius valorem ibi exhibet summa valoris  $\frac{1}{a}$  lineæ quartæ, & valoris termini secundi inveniendi in linea præcedente septima ex suo logarithmo: is obtinetur ibi addendo simul duos logarithmos præcedentes, qui pertinent ad duos coefficientes numeratoris  $(4m + 4)(m - 1)$ , cum logarithmo primæ lineæ, qui pertinet ad

denominatorem. Sequentes quatuor linea $\bar{x}$  continent valores  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{b}$  cum puncto præmisso, quod indicat, eos debere esse divisores: debet enim per eos dividi valor  $m=1$  linea $\bar{x}$  sextæ ad habendos in quatuor lineis sequentibus valores  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  redactos ad partes unitatis æqualis distantiæ focali  $h$ , ut diximus.

Valor autem  $\frac{1}{b}$ , &  $\frac{1}{b'}$  efformatur ex valore  $\frac{1}{a}=1$ ,  $\frac{1}{a'}=1$ , uti præmisimus. In postremis binis lineis habetur fractio exprimens rationem radii sphæricitatis superficie primæ ad radium secundæ.

43. Posteriores tres columnæ continent in linea prima tres valores numericos expressos per  $m$ , quibus hinc utimur, tum in singulis lineis sequentibus valores numericos respondentes algebraicis columnæ primæ, cum suis valoribus logarithmicis, ubi iis est opus, præter decimam, & undecimam, quæ continent valores logarithmicos sine numeris: ii enim jam habebantur in linea quinta, & nona, nec eorum repetitione est opus. Duxi autem, valores logarithmicos esse adjectos, ubi opus est, nam in secunda columna facilius inveniuntur omnia sine logarithmis, ob simplicitatem valoris  $m=1,5$ , sive  $=\frac{3}{2}$ . Repetuntur autem ibi valores numericci respondentes algebraicis  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{a'}$  in lineis decima, & undecima ex quinta, & nona, in gratiam calculi reliquarum columnarum, in quibus id est opportunum, ut mox patebit.

44. In secunda columna primæ tres linea $\bar{x}$  continent valores numericos respondentes terminis algebraicis primæ. Valor linea $\bar{x}$  secundæ est denominator 7, productum binarum sequentium est numerator  $2m^2+m=6$  valoris  $\frac{1}{a}$  linea $\bar{x}$  quintæ. Binæ linea $\bar{x}$  sequentes habent binos factores denominatoris secundi termini adjungendi primo pro habendo  $\frac{1}{a}$  in linea 9. Linea 8 habet eorum productum 5, denominatore remanente itidem 7. Summa hujus termini cum termino quintæ efficit numeratorem 11 nonæ. Lineæ 10, & 11 sunt cædem, ac 5, & 9, a quarum valoribus demptâ unitate,

habentur in linea 12, & 13 valores  $\frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{b^2}$ . Penultimus evasit negativus ob  $\frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{7}$ , quod indicat, secundam quoque superficiem, radiis advenientibus parallelis, esse convexam, dum valor positivus lineæ postremæ indicat concavitatem ejus superficie. Dividendo per hos valores valorem respondentem valori  $m-1$ , qui habetur in linea 7, & est  $= \frac{1}{2}$ , obtinentur in quatuor sequentibus valores  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  redacti ad unitatem  $= h$ , ponendo denominatorem communem pro numeratore, & adhibendo pro quovis denominatorem duplum numeratoris correspondentis. Hi valores reduciti ibi sunt ad fractiones decimales, ut melius appareat earum relatio ad valores, qui ipsis respondent in columnis sequentibus. Postremæ duæ lineæ habent rationem valoris  $a$  ad  $b$ , &  $a'$  ad  $b'$  expressam a numeratoribus valorum lineæ 10, & 12 pro priore 11, & pro posteriore 13, in quibus denominator est semper idem, & numeratores sunt breviores, quam denominatores sequentium linearum, qui possent exprimere rationes easdem.

45. In iis columnis prima linea continet valorem  $m$ , secunda denominatorem  $2m+4$ , qui primo intuitu obtinetur duplicando valorem primæ, & addendo 4, ut æque facile inveniuntur ex linea prima in lineis 6, & 7 valores numericæ respondentes logarithmis algebraicis columnæ primæ. Accedunt iis numeris valores logarithmici, nimirum complementum logarithmicum in secunda, quæ continet denominatorem, & in reliquis logarithmos ipsos. Linea quinta continet summam trium logarithmorum præcedentium cum suo numero eruto e tabulis, qui est valor  $\frac{1}{a}$ . Linea 8 continet summam logarithmorum linearum 2, 6, 7 cum numero itidem adscripto, qui est valor secundi termini. Summa hujus cum numero lineæ quintæ, qui erat valor primi termini, exhibet in linea 9 valorem  $\frac{1}{a'}$ .

46. Lineæ 10, & 11 habent complementsa logarithmorum lineæ 5, & 9, tum linea 12 residuum ad unitatem numeri lineæ 5 cum signo negativo, & complemento sui logarithmi eruendo e tabulis.

Li-

Linea 13 habet excessum supra unitatem numeri linea $\alpha$  9 cum complemento sui. Quatuor linea $\alpha$  sequentes habent singulæ summam singulorum e quatuor logarithmis præcedentibus additis logarithmo linea $\alpha$  septimæ. Id perficit divisionem valoris  $m - 1$  per valores  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{a'}$ ,  $\frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{b'}$ , & exhibet in iisdem lineis valores  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  redactos ad unitatem  $\frac{1}{h}$ . Logarithmus linea $\alpha$  penultimæ obtinetur subtrahendo logarithmum  $a$ , qui est in linea 14 a log.  $b$  linea $\alpha$  16, & logarithmus postremæ subtrahendo illum linea $\alpha$  15 ab eo linea $\alpha$  17.

47. E binis postremis lineis hujus tabulæ patet, rationem radii sphæricitatis secundæ superficiei ad radium primæ non ita parum variari a diversa vi refractiva vitri pro minimo errore in radiis parallelis, quæ nimirum septupla in primo genere vitri evadit fere octupla in postremo. Pro iis ipsis lens est semper utrinque convexa: pro convergentibus ad focum radius secundæ evadit quodammodo plus quam infinitus, a negativo indicante convexitatem abiens in positivum, qui ibi indicat concavitatem: sed autem vi refractivâ, minuitur ea ratio, & variatur minus, quam pro radiis parallelis, dum a valore 2,7 primi vitri abit in postremo tantummodo ad 2,5.

48. Habitibus valoribus  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{a'}$ , qui convenient errori minimo, transiri potest ad comparationem ipsius cum errore illarum trium lentium, quas proposui num. 36. Formula erroris pro comparatione sola erat (num. 34) valor  $\frac{u}{m}$ , sive  $u'$ , dividendus pro radiis parallelis per 2, pro convergentibus ad focum per 8. Valor  $u'$  habetur ibidem, & primi soli tres ejus termini assumendi sunt pro parallelis. Nam reliqui, ubi agitur de radiis, qui adveniunt ad lentem parallelī, evanescunt, evanescente pro ipsis valore  $\frac{1}{p}$ . Ubi autem agitur de radiis, qui adveniunt convergentes ad focum, ipse valor  $\frac{1}{p}$  evadit idem, ac valor  $\frac{1}{h}$ , qui est  $= \frac{m-1}{f}$ , nimirum, ut num. 36,  $= m-1$  ob valorem  $\frac{1}{f} = 1$ . Quare pro

pro ejusmodi radiis ponendus erit ipse valor  $m - 1$  pro valore  $\frac{1}{p}$   
in iis tribus postremis terminis, qui factâ ejusmodi substitutione,  
evadent  $(3m+1)(m-1) - \frac{(4m+4)(m-1)}{m^2} + \frac{(3m+2)(m-1)^2}{m^2}$

Porro ex iis sex terminis valoris  $n'$  num. 34. tres carent valore  $a$ ,  
qui idcirco sunt communes omnibus lentibus: tres habent eum valo-  
rem, sed ita, ut valor  $\frac{1}{a}$  in lente erroris minimi habeatur ex ta-  
bula superiore tam pro  $\frac{1}{a}$  pertinente ad radios parallelos, quam  
pro  $\frac{1}{a^2}$  pertinente ad radios, qui convergunt ad focum, in prima  
autem ex tribus lentibus num. 36 sit  $\frac{1}{a} = 1$ , in secunda  $= \frac{1}{2}$ , in  
tertia  $= 0$  (num. 34). Quamobrem licebit procedere sequenti parte  
pro iis tribus terminis, quorum duo habent valorem  $\frac{1}{a}$ , & ter-  
tius  $\frac{1}{a^2}$ . Ii termini sunt ibi  $\frac{2m+1}{a} - \frac{m+2}{ma^2} + \frac{(4m+4)}{map}$ ,  
qui postremus pro radiis parallelis evanescet, pro convergentibus  
ad focum fiet  $\frac{(4m+4)(m-1)}{ma}$ . Primo quidem invenientur valo-  
res dati per  $m$ , nimirum  $2m+1$ ,  $\frac{m+2}{m}$ ,  $\frac{(4m+4)(m-1)}{m}$ .

Numeri, qui iis respondent, pertinebunt ad errorem pro lente  
habente  $a=1$ : primi, & tertii dimidium, ac secundi quadrans  
pertinebunt ad errorem pro lentibus habentibus  $a=2$ : sed ter-  
tius habebit usum tantummodo pro radiis convergentibus ad fo-  
cum, cum evanescat pro parallelis. Tum primus ex iis tribus  
numeris inventis multiplicabitur per valorem  $\frac{1}{a}$ , &  $\frac{1}{a^2}$ , secundus  
per  $\frac{1}{a^2}$ , &  $\frac{1}{a^3}$ , pertinentes ad lentem erroris minimi ad haben-  
dos terminos, qui pertinent ad errorem ejus lentis, prior pro  
radiis parallelis, posterior pro convergentibus ad focum. Ter-  
tius autem ex iis numeris erit multiplicandus tantummodo per  
 $\frac{1}{a}$  ad obtainendum terminum postremum pertinentem ad errorem  
ejus.

## OPUSCULI I.

ejusdem lentis pro radiis convergentibus ad focum , cum is evanescent pro parallelis . Collectis in unam summam omnibus terminis , qui pertinent ad singulos errores , habitâ ratione positivorum , & negativorum , ea summa pro radiis parallelis erit dividenda per 2 , pro convergentibus ad focum per 8 juxta num. 34 . Ordo calculi patebit ex tabulis II , & III , quorum priorem proponemus hic , posteriorem post hujus explicationem , nimirum post numerum 53 . Prior continebit calculum pro numeris , qui respondent singulis ex iis sex terminis valoris  $u^{\wedge}$  , posterior eorum summas .

## T A B U L A II.

|                   | $m = 1,5$            | $m = 1,52$           | $m = 1,54$           |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $2 \cdot m$       | 2,25                 | 2,31 . . . 0,363687  | 2,372 . . . 0,375041 |
| $3m + 1$          | 5,5                  | 5,56 . . . 0,745075  | 5,62 . . . 0,749736  |
| $m - 1$           | 0,5                  | 0,52 . . . 0,716003  | 0,54 . . . 0,732394  |
|                   | 2,75                 | 2,891 . . . 0,461078 | 3,035 . . . 0,482130 |
| $3m + 2$          | 6,5 . . . 0,812913   | 6,56 . . . 0,816904  | 6,62 . . . 0,820858  |
| $2 \cdot (m - 1)$ | 0,25 . . . 0,397940  | . . . . . 0,432006   | . . . . . 0,464788   |
| $\cdot m$         | 1,5 . . . 0,823909   | 1,52 . . . 0,818156  | 1,54 . . . 0,812479  |
|                   | 1,083 . . . 0,034762 | 1,167 . . . 0,067066 | 1,254 . . . 0,098125 |
|                   | 6,083                | 6,368                | 6,661                |
| $2m + 1$          | 4 . . . 0,602060     | 4,04 . . . 0,606381  | 4,08 . . . 0,610660  |
| $\pi : a$         | . . . . . 0,933053   | . . . . . 0,940652   | . . . . . 0,948148   |
| $\pi : a'$        | . . . . . 0,196295   | . . . . . 0,208656   | . . . . . 0,220735   |
|                   | 3,429 . . . 0,535113 | 3,524 . . . 0,547033 | 3,621 . . . 0,558808 |
|                   | 6,286 . . . 0,798355 | 6,532 . . . 0,815037 | 6,783 . . . 0,831395 |
| $m + 2$           | 3,5 . . . 0,544068   | 3,52 . . . 0,546543  | 3,54 . . . 0,549003  |
| $\cdot m$         | . . . . . 0,823909   | . . . . . 0,818156   | . . . . . 0,812479   |
|                   | 2,333 . . . 0,367977 | 2,316 . . . 0,364699 | 2,299 . . . 0,361482 |
| $2 \cdot 1 : a$   | . . . . . 0,866106   | . . . . . 0,881304   | . . . . . 0,896296   |
| $2 \cdot 1 : a'$  | . . . . . 0,392590   | . . . . . 0,417312   | . . . . . 0,441470   |
|                   | 1,714 . . . 0,234083 | 1,762 . . . 0,246003 | 1,81 . . . 0,257778  |
|                   | 5,762 . . . 0,760567 | 6,054 . . . 0,782011 | 6,353 . . . 0,802952 |
| $4m + 4$          | 10 . . . 1,000000    | 10,08 . . . 1,003460 | 10,16 . . . 1,006894 |
| $m - 1$           | . . . . . 0,698970   | . . . . . 0,716003   | . . . . . 0,732394   |
| $\cdot m$         | . . . . . 0,823909   | . . . . . 0,818156   | . . . . . 0,812479   |
| $\pi : a'$        | 3,333 . . . 0,522879 | 3,449 . . . 0,537619 | 3,562 . . . 0,551767 |
|                   | . . . . . 0,196295   | . . . . . 0,208656   | . . . . . 0,220735   |
|                   | 5,238 . . . 0,719174 | 5,575 . . . 0,746275 | 5,923 . . . 0,772502 |

49. Prima linea tabulæ secundæ habet, ut prima præcedentis, tres valores  $m$ , pro tribus generibus iisdem vitrorum, Infra ipsam singulæ columnæ habent primo ternas divisiones (divisionem hinc appello quidquid continetur intra binas rectas lineas continenter duas a margine sinistro tabulæ ad dexterum), quarum prima habet unam lineam, secunda tres, tertia quatuor: ex inserviunt pro tribus terminis carentibus valore  $a$ , qui sunt primus  $m^2$ , quartus  $(3m+1)(m-1)$ , postremus  $\frac{(3m+2)(m-1)^2}{m}$ . Valores algebraicos continet prima columnæ: numericos iis respondentes columnæ secunda cum logarithmis omnium præter priores quatuor, ubi calculus numericus sine logarithmis fit primo intuitu. Quadratum  $m^2$  exprimitur in prima columnæ per  $2 \cdot m$ , interposito puncto inter  $2$ , &  $m$ , quod exprimit, illud  $2$  esse exponentem, non coefficientem, & divisio per  $m$  præposito puncto ei litteræ, ac lineolâ superpositâ charæteristicæ ejus complementi logarithmici, ut in præcedentibus Opusculis.

50. Pro secunda linea secundæ columnæ patet,  $2,25$  esse quadratum valoris  $m=1,5$ : pro secunda tertia, & quartæ eruitur e tabulis duplus logarithmus valorum  $1,52$ , &  $1,54$  ibi appositus, cuius numerus  $2,31$ , &  $2,372$  proximus vero erutus ex ipsis tabulis pro valore  $m^2$  ipsum præcedit. Valores  $3m+1$ , &  $m-1$ , pro primis duabus lineis divisionis secundæ cuiusvis columnæ obtinentur facile ex valore  $m$  primæ lineæ. Ipsarum productum itidem facile obtinetur primo intuitu pro tertia ejus linea in secunda columnæ: in reliquis binis eorum valorum logarithmi desumpti e tabulis adjacent ipsis: eorum summa obtinetur in linea tertia, cuius numerus ipsi præmissus est valor termini  $(3m+1)(m-1)$ . Eodem paëto primo intuitu obtinentur valores numericæ  $3m+2$ ,  $(m-1)^2$ , &  $m$  apponendi in primis tribus lineis divisionis tertiae. Pro secunda linea columnæ secundæ ejus divisionis obtinetur  $(m-1)^2=0,25$  ex  $m-1=0,5$ , cui apponitur logarithmus eruendus e tabulis: pro reliquis columnis logarithmus ejus quadrati obtinetur duplicando logarithmum valoris  $m-1$ , qui habebatur in secunda linea divisionis secundæ earundem colu-

mnarum. Pro numero linea $\bar{e}$  primæ logarithmus erutus est e tabulis, ut & complementum logarithmicum pro numero linea $\bar{e}$  tertia $\bar{e}$ . Trium logarithmorum summa fit in quarta linea, & ejus numerus erutus e tabulis est valor ejus termini. In linea sequenti habetur summa eorum trium valorum numericorum exhibentium valores terminorum, qui non habent  $\alpha$ , & sunt omnes positivi: ii habentur in divisione prima, & postremis lineis divisionis secundæ, ac tertiae: summa ipsorum erit communis omnibus lentibus, cum ii termini non pendeant a valore  $\alpha$ : adhibebitur tota pro radiis convergentibus ad focum, pro parallelis autem solus primus terminus, qui in divisione prima respondet valori  $m^2$ .

51. Post hasce summas habentur tres aliæ divisiones respondentes tribus terminis  $\frac{2m+1}{\alpha}$ ,  $\frac{m+2}{ma^2}$ ,  $\frac{(4m+4)(m-1)}{ma}$ , quorum medius est positivus, reliqui duo sunt negativi. In columna prima habentur itidem coefficentes algebraici eorum terminorum, ubi  $1:\alpha$ , &  $2.1:\alpha$  exprimunt  $\frac{1}{\alpha}$ , &  $\frac{1}{\alpha^2}$  pro radiis parallelis: accedit accentus pro convergentibus ad focum: sed in postrema divisione deest  $1:\alpha$ , cum ejus terminus evanescat pro radiis parallelis. In reliquis columnis initio singularum linearum habentur valores numerici, qui facile eruuntur ex prima linea sumendo ipsius duplum pro prima divisione, ipsum pro secunda, ipsius quadruplum pro tertia, ac ipsis addendo  $1, 2, 4$ , & horum logarithmi ipsis adjacentes eruti sunt e tabulis: valori  $\frac{1}{m}$  expresso per  $m$  non adscribitur numerus, sed ejus logarithmus desumitur ex linea octava cuiusvis columnæ: logarithmi vero valorum  $1:\alpha, 1:\alpha^2$  pro divisione  $1$ , &  $3$ , qui pertinent ad lentem erroris minimi, hic pro radiis convergentibus, ille pro parallelis, eruendi sunt ex lineis  $5$ , &  $9$  tabulæ præcedentis; & logarithmus valoris  $\frac{1}{\alpha^2}$  expressi per  $2.1:\alpha$  pro secunda divisione obtinetur duplicando logarithmum valoris  $1:\alpha$  jam appositum in divisione præcedente, & eo-

& eodem pacto obtinetur logarithmus valoris  $\frac{1}{a^2}$ . Idcirco pro illis valoribus algebraicis non habentur in reliquis columnis valores numerici, sed sola puncta.

52. Porro in divisione prima logarithmus linea $\bar{x}$  primæ additur soli logarithmo secundæ in quarta, idem soli tertiaræ in quinta, adeoque numerus respondens ei logarithmo in quarta exhibet erroris minimi valorem  $\frac{2m+1}{a}$  pro radiis parallelis, & in quinta  $\frac{2m+1}{a^2}$  pro convergentibus ad focum. In secunda divisione linea tertia habet summam binorum logarithmorum præcedentium cum suo numero: ei summa additur in linea 6 logarithmus linea $\bar{x}$  quartæ pro errore minimo radiorum parallelorum, in lin. 7 logarithmus quintæ pro errore convergentium ad focum, ut obtineatur valor numericus ipsi respondens, qui est valor ejus termini. In linea quarta divisionis tertiaræ fit summa priorum trium logarithmorum, cui adscribitur suus numerus: tum huic additur in sexta logarithmus quintæ, ubi eodem pacto habetur valor numericus ejus termini. Numeri, qui habentur in lin. 1 divisionis primæ, in 3 divisionis secundæ, in 4 divisionis tertiaræ omnium trium columnarum, sunt ii, qui exprimunt valores coefficientium datum per  $m$ , & numeros, adhibendi juxta num. 48 pro tribus speciebus lentium comparandis cum lente erroris minimi, & inter se.

53. Si radii advenirent convergentes ad aliam quamvis distantiam  $p$  a lente, vel divergentes ab alia quavis distantia; ordo calculi esset idem, & solum in postremis tribus terminis valoris  $\frac{1}{p}$  pro  $m-1$ , qui hic erat valor  $\frac{1}{P}$ , & pro  $(m-1)^2$ , ponendus esset novus valor ipsius  $\frac{1}{p}$  in primo casu positivus, in secundo negativus, vel ejus quadratum in utroque positivum, ut patet. In sequenti tabula III colligetur fructus calculatorum tabulæ præcedentis colligendo summas numerorum respondentium singulis terminis formulæ algebraicæ, & assumendo singularum dimidium pro radiis parallelis, octantem pro convergentibus ad focum juxta num. 48.

## TABULA III.

| Radii            | paralleli | convergentes | paralleli | convergentes | paralleli | convergentes |
|------------------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|
| $\alpha$ minimi  | 2,250     | 6,083        | 2,310     | 6,368        | 2,372     | 6,661        |
|                  | 2,372     | 5,763        | 2,316     | 6,364        | 2,372     | 6,373        |
|                  | 3,964     | 11,845       | 4,072     | 12,422       | 4,182     | 13,014       |
|                  | 3,429     | 6,286        | 3,524     | 6,532        | 3,621     | 6,783        |
|                  | 0,535     | 5,238        | 0,548     | 5,575        | 0,561     | 5,923        |
|                  | 0,267     | 11,524       | 0,274     | 12,107       | 0,280     | 12,706       |
|                  |           | 0,321        |           | 0,315        |           | 0,308        |
|                  |           | 0,040        |           | 0,039        |           | 0,038        |
| $\alpha = 1$     | 2,250     | 6,083        | 2,310     | 6,368        | 2,372     | 6,661        |
|                  | 2,333     | 2,333        | 2,316     | 2,316        | 2,299     | 2,299        |
|                  | 4,583     | 8,416        | 4,626     | 8,684        | 4,671     | 8,960        |
|                  | 4,000     | 4,000        | 4,040     | 4,040        | 4,080     | 4,080        |
|                  | 0,583     | 3,333        | 0,586     | 3,449        | 0,591     | 3,562        |
|                  | 0,291     | 7,333        | 0,293     | 7,482        | 0,295     | 7,642        |
|                  |           | 1,083        |           | 1,195        |           | 1,318        |
|                  |           | 0,135        |           | 0,149        |           | 0,165        |
| $\alpha = 2$     | 2,250     | 6,083        | 2,310     | 6,368        | 2,372     | 6,661        |
|                  | 0,583     | 0,583        | 0,579     | 0,579        | 0,575     | 0,575        |
|                  | 2,833     | 6,666        | 2,889     | 6,947        | 2,947     | 7,236        |
|                  | 2,000     | 2,000        | 2,020     | 2,020        | 2,040     | 2,040        |
|                  | 0,833     | 1,667        | 0,869     | 1,724        | 0,907     | 1,781        |
|                  | 0,416     | 3,667        | 0,434     | 3,744        | 0,453     | 3,821        |
|                  |           | 2,999        |           | 3,203        |           | 3,415        |
|                  |           | 0,375        |           | 0,400        |           | 0,427        |
| $1 : \alpha = 0$ | 2,250     | 6,083        | 2,310     | 6,368        | 2,372     | 6,661        |
|                  | 1,125     | 0,760        | 1,155     | 0,796        | 1,186     | 0,833        |

54. In hac tabula præter titulos lineaꝝ primæ habentur divisiones quatuor separataꝝ a se invicem lineaꝝ horizontalibus, quarum singulæ destinatæ sunt singulis ex illis quatuor lentiū generibus, vel positionibus expressis num. 36, quarum prima est lens erroris minimi, secunda plano-convexa, plano posito versus oculum, tertia isoscelia, quarta plano-convexa, plano spestante objectum. Prima columnă habet valorem radii  $\alpha$  sphæricitatis primæ, tum singula binaria columnarum respondent singulis e tribus valoribus  $m$  expressis in linea prima præcedentium binarum tabularum, nimirum 1,5; 1,52; 1,54. Binarii cujusvis columnæ prior res-

respondet radiis parallelis, posterior convergentibus ad focum, ut indicant tituli superpositi. In singulis columnis proponuntur termini valoris experimentis errorem redacti ad numeros in tabula praecedenti pro lente erroris minimi, & rite reducendi pro reliquis, quorum summa debet dividi per 2 pro radiis parallelis, per 8 pro convergentibus ad focum juxta num. 34 ad habendum errorem quæsumum. Hæc patebunt explicatione sequenti.

55. In linea prima columnæ cujusvis ponitur pro radiis parallelis unicus terminus carens valore  $\alpha$  erutus ex linea secunda tabulæ praecedentis, & pro convergentibus summa trium eruta ex linea 10 ipsius: pro primo binario, qui respondet valori  $m = 1,5$ , est  $2,250$ , &  $6,083$ : tum in secunda linea ponitur pro parallelis valor  $1,714$  respondens termino positivo  $\frac{m+2}{m\alpha^2}$  erutus e linea 21 praecedentis: in tertia habetur eorum summa  $3,964$ , in quarta ponitur valor  $-3,429$  respondens termino negativo  $-\frac{2m+1}{\alpha}$ , qui subtraetus ab ea summa relinquit  $0,535$  in linea 5: hujus dimidium in linea 6 exhibet valorem erroris quæsumi  $0,267$  pro radiis parallelis in lente erroris minimi. At pro radiis convergentibus, habetur in secunda linea itidem valor positivus termini  $\frac{2m+1}{m\alpha^2}$ , qui est  $5,762$  erutus e linea 22 tabulæ praecedentis, ac in tertia fit pariter summa binorum numerorum praecedentium: sed in binis lineis sequentibus habentur bini termini negativi, prior  $-6,286$  erutus e linea 15, posterior  $-5,238$  e postrema: in linea 6 habetur horum negativorum summa  $-11,524$ , quæ ablata a summa positiva linea 3 relinquit  $0,321$  in linea 7: hujus pars octava in linea sequenti relinquit  $0,040$ , qui est valor erroris quæsumi pro radiis convergentibus ad focum in hac lente: huic autem prorsus similis est calculus in reliquis columnis pro reliquis binis vitrorum generibus.

56. In secunda divisione prima linea cujusvis columnæ habet eundem numerum, quem prima divisionis praecedentis, cum contineat terminum, vel summam terminorum carentium valore  $\alpha$ :

secun-

secunda, quæ respondet valori  $\alpha = 1$ , habet numerum, qui in tabula præcedenti habebatur in linea 18, & ibi dividendus erat per  $\alpha^2$ , hinc remanet idem, nimirum in columnis primi binarii 2,333: at in linea secunda divisionis tertiae, cuius  $\alpha = 2$ , habetur idem divisus per 4, nimirum 0,583. In postrema divisione, ubi  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}$ , omnes termini evanescunt præter eos, qui habentur in linea prima 2,250, & 6,083. In tertia linea columnæ cuiusvis habetur summa binarum linearum præcedentium: in quarta linea habetur in columna priore divisionis secundæ valor negativus termini divisi per  $\alpha$ , & in posteriore bini ita divisi cum eorum summa post ipsos: eruitur ille e linea 11 tabulæ præcedentis, hi e lineis 14, & 26, cum divisio per  $\alpha = 1$  relinquat numeros eosdem, qui habebantur ante divisionem per  $\alpha$ : in priore columna subtrahitur ille numerus a præcedente, in columna posteriore ea summa a summa positiva linea tertiae, & obtinetur in linea penultima valor, qui divisus ibi per 2, hinc per 8, exhibet errorem hujus lentis 0,416 pro radiis parallelis, 0,375 pro convergentibus.

57. In tertia divisione omnia procedunt, ut in secunda, sed in ejus linea secunda pertinente ad utramque columnam habetur pars quarta numeri respondentis in divisione præcedente, ut monuimus, ob  $\alpha = 4$ , & in quarta columnæ prioris, quarta, & quinta posterioris, habetur dimidium ob  $\alpha = 2$ . Hinc obtinetur in linea postrema error, qui in binario primo est 1,125, & 0,760. Pro postrema divisione habetur in prima linea unicus terminus, ut monuimus, cæteris omnibus ibi evanescentibus, cuius dimidium in prima columna, pars octava in secunda, exhibet in linea ultima errorem quæsumum, qui pro binario primo est 1,125, & 0,760. E tabula I, & III sunt eruti valores omnes, quos proposuimus numero 37.

## §. III.

*De correctione erroris figuræ sphæricæ per duas lentes con-  
junctas ex eodem vitri genere pro objectivo.*

58. CORRECTIO erroris figuræ sphæricæ in hoc casu innititur iisdem fundamentis, & calculus procedit fere eodem modo, quo in capite II Opusculi II Tomi I. Error figuræ sphæricæ est hic, uti ibi (num. 8)  $R^2(q + q')\frac{1}{2}e^2$ , ubi  $e$  est semidiameter aperturæ,  $R$  est distantia lentis compositæ a puncto, ad quod convergunt radii infinite proximi axi post egressum ab ipsa, qui valor hic est idem, ac  $H$  eruendus  $e$  valore  $\frac{I}{H} = \frac{I}{h} + \frac{I}{h}$  (ibi num. 13): valores  $q$ ,  $q'$  habentur ibidem num. 7 e valoribus  $m$ ,  $f$ ,  $a$ ,  $p$  pro prima lente,  $m'$ ,  $f'$ ,  $a'$ ,  $p'$  pro secunda. Hic ipsi, &  $h$ ,  $h'$ ,  $H$  haberi debent ab iisdem, cum solo discrimine, quod hic habetur  $m' = m$ , adeoque habentur

$$q = \frac{m-1}{m} \left( \frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4(m+1)}{apf} + \frac{3m+2}{p^2f} \right)$$

$$q' = \frac{m-1}{m} \left( \frac{m^3}{f'^3} - \frac{2m^2+m}{a'f'^2} + \frac{m+2}{a'^2f'} + \frac{3m^2+m}{p'f'^2} - \frac{4(m+1)}{a'p'f'} + \frac{3m+2}{p'^2f'} \right).$$

59. Porro  $a$ , &  $b$  sunt radii sphæricitatum primæ lentis positivi de more, cum respectu objecti centrum jacet ultra lentem, negativi cum citra:  $a'$  &  $b'$  sunt radii sphæricitatis lentis secundæ: est  $\frac{I}{f} = \frac{I}{a} - \frac{I}{b}$ ,  $\frac{I}{f'} = \frac{I}{a'} - \frac{I}{b'}$ ,  $m$  ratio sinuum,  $p$  distantia primæ lentis a puncto, ad quod concipiuntur convergentes radii, dum adveniunt ad primam lentem,  $p'$  distantia ipsius ab eo, ad quod concipiuntur convergentes, dum incident in secundam: sunt autem iidem de more  $h$ , &  $h'$  distantiae focales singularum lentium,  $r$ ,  $r'$  distantiae ipsarum a punctis, ad quæ radii convergunt post egressum ab ipsis, & habentur formulæ  $\frac{I}{h} = \frac{m-1}{f}$ ,  $\frac{I}{h'} = \frac{m-1}{f'}$ ;  $\frac{I}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{I}{p} = \frac{I}{h} + \frac{I}{p} = \frac{I}{p'}$ ;

$I:r'$

$\frac{1}{r'} = \frac{m-1}{f'} + \frac{1}{p} = \frac{m-1}{f'} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$  : qui valor assumi poterit pro  $\frac{1}{R}$ , &  $\frac{1}{H}$ , exprimente hic tam R, quam H distantiam  $r'$ , ad quam convergunt post egressum e secunda lente radii, qui inciderant paralleli in primam. Pro destruendo errore figuræ sphæricæ habebitur, ut num. 14 ejusdem cap. II Opusculi II Tomi I,  $q + q' = 0$ .

60. Inde vero pro objective, facto  $\frac{1}{p} = 0$ , quod efficit  $\frac{1}{p}$   
 $= \frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$ , posito divisore  $m$  intra parentheses, facto  $\frac{1}{f} = 1$ , &  $\frac{1}{f'} = -u$  (\*), ac divisione institutâ per valorem  $m-1$  communem, habebitur sequens æquatio  $m^2 - \frac{2m+1}{a} + \frac{m+2}{ma^2} - u^3 m^2 - \frac{u^2(2m+1)}{a} - \frac{u(m+2)}{ma^2} + u(3m+1)(m-1) + \frac{4u(m+1)(m-1)}{ma} - \frac{u(3m+2)(m-1)^2}{m} = 0$ . Hæc æquatio fere eadem, ac illa numer. 33 ejusdem capituli II Opusculi II Tomi I, differt ab ipsa in eo, quod hic est itidem  $m$ , quod ibi  $m'$ , adeoque valor  $c$ , qui ibidem erat  $= \frac{m-1}{m'-1}$ , evadit hic  $= 1$ , quam ob causam non appetet, & quod valor  $u$ , qui ibidem erat determinatus a correctione diversæ refrangibilitatis, quæ ipsum ibi num. 6 exigebat  $= -\frac{dm}{dm'}$ , hic est arbitrarius, ut idcirco dum ibi relinquatur unica determinatio libera, hic habeantur binæ, quarum una adhiberi poterit pro valore  $a$ , altera pro hoc valore  $u$ : horum valorum variationes infinitæ possunt saltem per attentationem

---

(\*) Patet, hunc valorem  $u$  esse diversum ab eo, qui adhibitus est in paragrapho præcedente, ubi adhibebatur pro eo, qui in valore  $q$  continebatur intra parenthesis: hic est magis analogus ei, qui est adhibitus loco citato Opusculo II.

nem exhibere plures combinationes superficierum ad rem idoneas, ut seligantur eae, quae videri possint maxime opportunae. Iis autem determinatis, forma calculi evadet similis illi, quam adhibuimus in capite IV ejusdem Opusculi II, & adhuc simplicior, ob valorem  $m^2$  communem utriusque lenti.

61. Valorem  $\frac{I}{f}$  hinc in ipsa formula assumpsimus negativum  $= - u$ , licet sit arbitrarius, at ea minus differret ab illa eius capitinis: sic valor  $u$ , qui erat adhibendus, remanebit positivus, ac prima lente existente convexa, secunda erit concava, quod quidem proderit ad evitandam imaginarietatem imminuto, non aucto valore  $m^2$  primi termini per  $u^3, m^2$  termini quarti. In illo Opusculo valor  $\frac{I}{a}$  assumptus est  $= \frac{I}{2}$ , derivatus nimirum a prima lente assumpta isoscelia utrinque convexa, quod hinc etiam fieri posset, ut & retineri ille idem valor  $u$ , qui ibidem est adhibitus: eo pacto forma calculi rediret hinc fere prorsus eadem, ac ibi in illo capite quarto, omissa tantummodo valore  $c$ , & facto  $m = m'$ , quod minueret numerum terminorum primae, & secundae columnae tabulae ibi adhibitae.

62. Posset adhiberi valor  $a$ , &  $a'$  arbitrarius, quod reduceret pro valore  $u$  aequationem gradus tertii, qua habaret saltem unum valorem realem; sed is posset esse minus ad rem idoneus removendo nimis focum communem; praeterquam quod ipsa resolutio aequationis tertii gradus exigit calculum magis operosum. Videtur primo aspectu maxime idonea determinatio, qua adhibeat utraque lentem ejusmodi, ut singularum error sphæricitatis proprius sit minimus eorum, qui haberi possint manente cadem distantia focali singularum. Ea conditio pro prima lente determinat valorem  $\frac{I}{a}$  eum, qui habetur in Tabula I exposita in fine paragaphi praecedentis: nam ea excipit radios parallelos. Pro secunda oporteret determinare relationem  $\frac{I}{a'}$ , ad  $\frac{I}{f} = - u$ , qua inventa eliminaretur alter ex iis binis valoribus, & aequatio reducere-

tur ad unicam incognitam. Id vero præstari posset sequenti modo.

63. Considerato ut constanti valore  $f'$ , licet non  $= 1$ , qui valor reservabitur pro  $f$ , differentiandi erunt iidem tres termini, qui in valore numeri 28 paragraphi præcedentis continent  $a'$ , positum pro  $u$ , posito  $f'$ . Si  $p'$  pro  $f$ , &  $p$ : ii sunt  $\frac{-2m^2+m}{a'f'^2}$   
 $+\frac{m+2}{a'^2f'}-\frac{4m+4}{a'p'f'}$ . Hinc habebitur  $\frac{(2m^2+m)a'}{a'^2f'^2}-\frac{2(m+2)a'}{a'^3f'}$   
 $+\frac{(4m+4)a'}{a'^2f'p'}=0$ , ubi  $\frac{1}{p'}$  est  $= m-1$ , cum radii ad secundam lentem adveniant convergentes ad focum primæ, adeoque valor  $p'$  sit æqualis valori  $h$  primæ lentis, pro qua relate ad unitatem  $= f$  habetur  $\frac{1}{h}=m-1$ . Quare habebitur  $\frac{1}{a'}=\frac{2m^2+m}{(2m+4)f'}$   
 $+\frac{(4m+4)(m-1)}{(2m+4)}$ . Posito ibi  $-u$  pro  $\frac{1}{f'}$ , & substituto eo va-

lore pro  $\frac{1}{a'}$ , & ejus quadrato pro  $\frac{1}{a'^2}$  in æquatione num. 60, ex haberet quidem unicum valorem incognitum  $u$ , sed assureret ad gradum tertium, & totus calculus evaderet admodum complicatus.

64. Si retentâ formâ primæ lentis  $c$ , quæ reddat minimum ejus errorem sphæricitatis, adhibito nimirum pro  $\frac{1}{a}$  illo valore, qui inventus est num. 56, assumatur aliquis valor  $u$  arbitrarius; deprimetur iterum æquatio ad gradum secundum pro valore  $\frac{1}{a'}$  inveniendo. Adhibendus autem est positivus, ut jam innuimus, & ejusmodi, ut valor negativus  $f'$  sit major, quam  $f$ : si enim is esset minor; focus evaderet virtualis pro reali. Assumemus hinc ipsum  $f'=-2$ , quo pacto fiet  $u=-\frac{1}{f'}=\frac{1}{2}$ , ac distan-  
tia  $H$  eruta ex valore  $\frac{1}{H}=(m-1)-\frac{1}{2}(m-1)=\frac{1}{2}(m-1)$  erit  $\frac{2}{m-1}$ , positiva, & tantummodo dupla distantia focalis len-  
tis primæ, cuius valor ex  $\frac{1}{h}=m-1$ , est  $h=\frac{1}{m-1}$ .

65. Positis pro  $m$ ,  $\frac{1}{a}$ ,  $u$  valoribus numericis  $1\frac{1}{2}$ ,  $\frac{6}{7}$ ,  $\frac{1}{2}$  devenietur ad aequationem, & eruentur ex ipsa radii sphæricitatis eadem methodo, quam adhibuimus in capite IV Opusculi II T. III 1. Adhibebimus hic primum e valoribus numericis adhibitis in Tabula I (num. 57) paragraphi praecedentis  $m = 1,5$ , cui respondeat  $\frac{1}{a} = \frac{6}{7}$ : ejus logarithmus est 9,933053, ac posito  $u = \frac{1}{2}$ , aequatio numeri 60 evadit  $2,25 - 3,4286 + 1,7143 - 0,2812 - \frac{1}{a} - \frac{1,1667}{a^2} + 0,6875 + \frac{1,6667}{a} - 0,5417 = 0$ , sive  $\frac{1,1667}{a^2} - \frac{0,6667}{a} - 0,4003 = 0$ . Inde obtinetur  $\frac{1}{a} = 0,2857 \pm 0,6517$ , & assumpto valore negativo, ne positivus nimis aetius imminuat plus aequo valorem  $a$ , fiet  $\frac{1}{a} = -0,3660$ ,  $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f} = -0,3660 + 0,5 = 0,1340$ : est autem  $\frac{1}{a} = \frac{6}{7} = 0,8571$ ,  $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f} = \frac{1}{a} - 1 = -0,1429$ .

66. Ad habendos radios  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  in partibus unitatis aequalis distantiæ focali H lentis compositæ, dividendus est hic, ut jam toties, valor  $\frac{1}{H} = \frac{1}{2}(m-1) = 0,25$  per fractiones inventas, quæ divisio exhibet  $a = 0,2917$ ,  $b = 1,7495$ ,  $a' = -0,6831$ ,  $b' = 1,8657$ , valore H existente = 1: valor autem  $h$  ejus dimidius erit = 0,5, &  $h'$  duplus hujus, sed negativus ex valore  $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ , erit = -1 respectu H = 1.

67. Possent pro  $m$  substitui reliqui duo valores 1,52, & 1,54, cum suis  $\frac{1}{a}$ , ut deinde erui possent valores radiorum sphæricitatis pro valoribus  $m$  intermediis per interpolationem: & quidem radii  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  obvenerunt satis idonei, nimirum satis magni re-

specitu distantiae focalis lentis compositae  $H = 1$  : sed valor  $a = 0,2917$ , licet non omnino intolerabilis, est tamen satis exiguis, quod evitari debet, quantum fieri potest. Idcirco cum id, quod ad rem pertinet, sit corre&atio erroris figuræ sphæricæ in foco lentis compositæ præstanda non a singulis componentibus, sed ab earum coniunctione; omissâ non solum formâ utriusque lentis, quæ reddat singularum errorem minimum, sed etiam ejusmodi formâ primæ solius, possunt assumi conditiones aliæ, & quidem plurimæ aliæ post alias, ad seligendas combinationes, quæ videri possint omnium aptissimæ. Nos hic unam seligemus, quæ formam primæ lentis exhibeat isosceliam, adeoque admodum commodam, in qua nimirum  $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ , & ponemus  $u = \frac{1}{2}$ .

68. Incipiendo a valore  $m = 1,5$  fiet  $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ , & æquatio habebit eosdem terminos numericos, præter secundum, ac tertium provenientes ab algebraicis  $-\frac{2m+1}{a}$ , &  $\frac{m+2}{ma^2}$ , qui erunt

$-2$ , &  $\frac{7}{12} = 0,5833$ . Hinc ipsa evadet  $\frac{1,1667}{a^2} - \frac{0,6667}{a} - 0,6979 = 0$ , unde eruitur  $\frac{1}{a} = 0,2857 \pm 0,8244$ . Assumpto valore negativo habebitur  $\frac{1}{a} = -0,5388$ , adeoque  $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f} = -0,5388 + 0,5 = -0,0388$ , dividendo  $\frac{1}{H} = 0,25$  per  $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{b} = -\frac{1}{2}$ , per eos valores  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$ , & per  $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{h} = -\frac{1}{4}$ , habebitur  $a = 0,5$ ;  $b = -0,5$ ;  $a' = -0,4640$ ;  $b' = -0,443$ ;  $h = \frac{1}{2}$ ;  $h' = -1$ ;  $H = 1$ . Ii sunt valores multo aptiores, quia nullus ex iis radiis obvenit nimis exiguis, & isoscelismus primæ lentis est magis commodus artifici.

69. Substituendo  $1,52$ , &  $1,54$  pro  $m$ , ac retinendo  $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ , &  $u = \frac{1}{2}$ , habebuntur binæ æquationes sequentes

tes  $\frac{1,1579}{a^2} - \frac{0,7142}{a} - 0,7198 = 0$ , &  $\frac{1,1493}{a^2} - \frac{0,7613}{a}$   
 $- 0,7419 = 0$ . Ex exhibit valores  $- 0,5382$ , &  $- 0,5378$   
pro valore  $\frac{1}{a}$ , unde ablato positivo  $= \frac{1}{f} = 0,5$  obtinetur  
 $- 0,0382$ , &  $- 0,0378$  pro  $\frac{1}{b}$ : per eos valores diviso  $0,26$ ,  
&  $0,27$ , qui sunt valores  $\frac{1}{H} = \frac{1}{2}(m-1)$ , obtinentur valores  
 $a'$ , &  $b'$  relati ad unitatem  $H$ . Ii cum valoribus respondentibus  
valori  $= 1,5$ , & cum valoribus  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $h'$  inventis pro hisce  
ipsis tribus valoribus  $m$  methodo expositâ superius exhibit  
valores tabulæ sequentis. Ibi in summa fronte habentur ii ipsi tres  
valores  $m$  assumpti  $1,5$ ;  $1,52$ ;  $1,54$ : tum in prima columna  
valores algebraici  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $h$ ,  $h'$  redacti ad partes unitatis  
æqualis distantiaæ focali  $H$ . Patet autem, primam lentem esse  
utrinque convexam, quod indicat valor positivus primi ejus ra-  
dii, & negativus secundi: secunda autem habet primam superfi-  
ciem concavam, & secundam convexam ob utrumque signum ne-  
gativum: verum radius secundæ sphæricitatis ita est longus, ut  
videatur posse assumi pro ipsa sine metu erroris notabilis super-  
ficies plana, vel quæcumque parum convexa. Verum multo ma-  
gis exacta evadet correctio; si determinetur accurate vis ejus vi-  
tri, quod est adhibendum, & invento ejus valore  $m$ , eruantur  
per interpolationem radii sphæricatum, qui ipsi conveniunt, ex  
hisce tribus hinc inventis.

| $m$  | 1,5    | 1,52   | 1,54   |
|------|--------|--------|--------|
| $a$  | 0,5    | 0,52   | 0,54   |
| $b$  | 0,5    | 0,52   | 0,54   |
| $a'$ | 0,4640 | 0,4831 | 0,5020 |
| $b'$ | 6,4433 | 6,8063 | 7,1429 |
| $h$  | 0,5    | 0,5    | 0,5    |
| $h'$ | I      | I      | I      |
| $H$  | I      | I      | I      |

## §. IV.

*De eadem correctione pro ocularibus.*

70. **D**INA sunt incommoda telescopiorum inducta ab errore figuræ sphæricæ pertinente ad lentes oculares, uti vidimus in §. I, confusio imaginis, & curvatura linearum rectarum objecti. Primum producitur a radiis, qui digressi a quovis unico puncto objecti deberent ab objectivo colligi omnes in ejus foco, ut (fig. I Tab. I) in F. Factâ ejusmodi unione per correctionem ipsius, adhuc idem radii progressi usque ad ocularem, & occupantes in casu ocularis unicæ, quem figura exprimit, intervallum superficie HH, patiuntur errorem sphæricitatis, qui pertinet ad primum incommodum: pro eo corrigendo oportet in formulis experimentibus eum errorum supponere valorem  $p = -FG$ . Secundum incommodum producitur a radiis, qui digressi a diversis punctis objecti, & transeuntes per medium objectivum C incident in totam aperturam ocularis BB, & pro ipso corrigendo debet assumi pro  $p$  valor negativus æqualis toti distantia CG.

71. Si ageretur de correctione præstanda per solam relationem binorum radiorum sphæricitatis lenti simplicis; problema determinaretur ab alterutra ex iis positionibus sola; adeoque nec potest quæri ea relatio, quæ destruat simul utrumque, nec vero ea, quæ reddat simul utrumque minimum. Quinimmo nec alterius tantummodo destrutio haberi posset, quia cum FG in eo casu debeat esse æqualis distantia focali lenti BB, & proinde CG multo major eâ ipsâ distantia, utraque jacet extra limites, quos in paragrapho II invenimus pro ejusmodi destructione. Omissa correctione prioris, qui minus nocet, ut vidimus in paragrapho I, adhibenda esset relatio, quæ exhibeat secundum errorum minimum, pro qua instituendus esset calculus, assumpto pro  $p$  valore negativo distantia CG, quæ est in eo casu summa distanciarum focalium utriusque simul, objectivi, & ocularis. Verum cum hæc summa debeat esse multis partibus major, quam sola

di-

distantia focalis lentis ocularis, posset fieri  $\frac{I}{P} = 0$ , ut pro radiis, qui adveniunt paralleli, quod exhiberet valores inventos numero 41.

72. Sed cum hic agatur de correctione per ocularem compositionem binis lentibus, potest utique institui calculus ponendo valores  $q + q'$  numeri 58 = 0 dupli modo, primo quidem substituendo pro  $P$ , &  $P'$  valores, qui respondent distantiae FG, deinde vero substituendo eos, qui respondent distantiae CG: id exhiberet binas æquationes, & adhuc remaneret una determinatio arbitraria: si facto  $f = 1$  de more, quod nihil determinat, assumeretur prima lens isoscelia, quod exhiberet  $\frac{I}{a} = \frac{I}{2}$ ; remanerent determinandi per eas binas æquationes valores  $\frac{I}{f}$ , &  $\frac{I}{a}$ . Valor  $P$  pro priore esset --FG, pro posteriore --CG: valor  $P'$  pro prima æquatione esset distantia puncti, ad quod compellit prima lens radios divergentes ab F, & pro secunda distantia ejus, ad quod ea compellit eos, qui divergunt a C..

73. Posset utique pro eo casu calculus reddi aliquanto minus complicatus considerando distantiam CG, ut infinitam respectu primæ lentis, quod redderet pro secundâ æquatione  $\frac{I}{P} = 0$ , &  $\frac{I}{P'} = \frac{m-1}{f} = m-1$ : pro prima vero æquatione haberetur  $\frac{I}{P} = 0$ ; nam radii pertinentes ad unicum punctum objecti, & coentes in F deberent egredi e secunda paralleli. Verum adhuc calculus esset admodum complicatus, & facile fieri posset, ut in æquatione finali obvenirent valores imaginarii, ad quos evitandos oporteret instituere plura tentamina variando illam positionem, quæ remaneret arbitraria, quod itidem posset frustrare omnem spem, objectis semper valoribus imaginariis in radicibus æquationis finalis. Et quidem dispositio, quæ destruat errorem pro radiis, qui digressi ab uno puncto debeant prodire paralleli, est inversa ejus, quæ ipsum destruat pro radiis, qui adveniant par-

ralleli , & debeant coire in unico puncto ; adeoque dispositiones necessariæ ad evitandum utrumque incommodum videntur esse contrariaæ , quod auget metum imaginarietatis .

74. Hinc si sit adhibenda ocularis constans binis lentibus conjunctis ; satius erit adhibere correctionem solam , quæ tollat curvaturam linearum reftarum objecti , pro qua saltem in telescopiis habentibus objectivum foci longioris poterunt haberri radii illi , qui transeunt per medium objectivum , ut paralleli , quod exhibet pro ea correctione combinationes illas numeri 41 : pro minoribus telescopioliis , quæ adhibentur unica manu , in quibus distantia focalis objectivi est exigua , id habere locum non potest : sed calculus ineundus esset aptatus radiis divergentibus ab illa data distantia centri aperturæ ipsius objectivi ab oculari . Occurrit autem alia difficultas communis etiam telescopiis longioribus , quod ad habendum ingens augmentum necessaria est ocularis habens distantiam focalem exiguam , quod exigit curvaturas majores , potissimum ubi lens altera debet per concavitatem suam producere distantiam focalem communem : eam ob causam requiruntur plures gradus arcus circularis , potissimum , si pro augendo campo fiat ingens apertura lentis ocularis . Tum enim quantitates ordinum inferiorum , quæ contemptæ sunt in eruendis formulis , evadunt multo majores , quam ut contemni possint , quarum si habeatur ratio , formulæ non solum fiunt multo complicatiōres , sed etiam ita involvunt superiores potentias radii aperturæ  $e$  , ut totus valor erroris , qui debet fieri  $= 0$  , divisus per  $e^2$  , non relinquat formulam carentem ipso valore  $e$  . Inde autem fit , ut pro diversâ eâ semiaperturâ combinatio eruenda evadat diversa , adeoque ea , quæ conjungit radios allapsos ad puncta infinite proxima axi cum radiis incidentibus in marginem aperturæ , non conjungat eosdem cum iis , qui incident in alia puncta intermedia inter centrum , & marginem . Accedit etiam crassitudo lentis aucta , cuius neglectus parit idcirco errores formularum non contemnendos : usque adeo omne id argumentum est obseptum difficultatibus quamplurimis etiam , ubi agitur de lente oculari unica composita e binis .

75. Ubi agitur de pluribus ocularibus, difficultas crescit; nam ad destruendum errorem in fine postremæ etiam eum, qui pertinet ad conjunctionem radiorum marginalium cum proximis centro, haberi debet ratio errorum omnium inductorum a lentibus præcedentibus procedendo gradatim a quavis præcedente ad proxime sequentem. Hinc indicabimus tantummodo methodum, quæ adhiberi deberet ad instituendum calculum pro destructione illius, qui provenit a summa omnium in egressu ex oculari postrema. Ad id obtainendum oportet incipere a determinatione erroris, qui habetur in egressu e quavis lente posteriore compositum ex eo, qui relinquitur a præcedente, conjungendo cum illo, quem gignit ipsa posterior.

76. Is haberi potest ope formulæ numeri 30 capitinis I Opusculi II Tomi I, ubi distantia foci a lente, neglectâ crassitudine lentis, remanet  $= r - r^2 p$ : est autem  $-r$  distantia foci radiorum proximorum axi,  $p$  ille valor  $q$ , qui habetur h̄c numero 58, datus in  $\frac{1}{2} e^2$  dimidium quadratum semidiametri aperturæ:  $r^2 p$  distantia foci radiorum incidentium in marginem aperturæ a foco incidentium prope axem, qui est error longitudinalis figuræ sphæricæ negativus. Per formulam autem, qua jam toties usi sumus, est  $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ , ubi  $h$  est distantia focalis pertinens ad radios axi proximos, qui concipiuntur advenientes paralleli,  $p$  distantia lentis a puncto, ad quod concipientur convergentes radii, dum incident in ipsam lentem. Porro h̄c etiam si distantia  $p$  concipiatur aucta mutatione exigua  $dp$ , erit  $-\frac{dr}{r^2} = -\frac{dp}{p^2}$ , sive  $dr = \frac{r^2 dp}{p^2}$ .

77. Dicantur jam  $h'$ ,  $h''$ ,  $h'''$ ,  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$ ,  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$ ,  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$  valores pertinentes ad lentes secundam, tertiam, quartam, analogi valoribus primæ, & errores simplices singularum lentium  $r^2 p$ ,  $r'^2 p'$ ,  $r''^2 p''$ ,  $r'''^2 p'''$  dicantur  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ ,  $c'''$ . Si omnes radii advenirent ad secundam lentem convergentes ad distantiam eandem  $p'$ ; radii proximi axi egredierentur convergentes ad distantiam  $r'$ , & marginales ad distantiam  $r' - c'$ : si omnes advenirent convergentes ad distantiam  $p' - dp'$ , egredierentur conver-

gentes ad distantiam  $r' - \frac{r'^2 dp'}{p''}$ : differentia autem distantiae puncti convergentiae radiorum marginalium a puncto convergentiae proximorum axi esset adhuc quamproxime æqualis eidem valori  $c'$ , a quo non differret nisi per quantitatem exiguum respectu ipsius. Hinc distantia pro ipsis erit  $r' - \frac{r'^2 dp'}{p''} - c'$ . Porro valor  $dp$  est ille accessus foci radiorum marginalium incidentium in primam lentem a foco proximorum axi; adeoque distantia post egressum puncti convergentiae marginalium incidentium in secundam lentem erit  $r' - \frac{r'^2 c}{p''} - c'$ , & error sphæricitatis post egressum e secunda lente erit  $\frac{r'^2 c}{p''} + c'$ .

78. Jam vero hic erit valor  $dp'$  pro tertia lente, & simili argumento distantia foci incidentium in marginem erit  $r'' - \frac{r'^2 r''^2 c}{p'' p'''}$   
 $- \frac{r'^2 c'}{p''} - c''$ , ac error  $\frac{r'^2 r''^2 c}{p'' p'''}$   $+ \frac{r''^2 c'}{p''} + c''$ . Error post egressum e quarta esset  $\frac{r'^2 r''^2 r'''^2 c}{p' p'' p'''} + \frac{r''^2 r'''^2 c'}{p'' p'''} + \frac{r'''^2 c''}{p'''} + c'''$ ; unde patet errorum series. Applicatio numerorum ad hasce formulas es-  
set admodum complicata potissimum ob complicationem summam valorum  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ ,  $c'''$  pendentium a valoribus  $q$ ,  $q'$ ,  $q''$ ,  $q'''$ , quo-  
rum singuli habent sex terminos: ii valores invenirentur multo  
facilius inveniendo distantias  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$  pertinentes ad radios  
proximos axi per formulas, & distantias incidentium prope mar-  
gines ope Trigonometriæ.

79. Eam methodum fuse exposuimus in postremo supplemento Opusculi II Tomi I, evolvendo singulos casus, qui possint occurrere in transitu per superficiem quamcumque, & applicavimus ad quatuor superficies binarum lentium componentium objectivum acromaticum habendo rationem etiam crassitudinis singularum. Posuimus ipsas contiguas: sed si distent a se invicem; habebitur ratio

ratio distantiae superficie secundæ lentis præcedentis a superficie prima sequentis eodem modo, quo per crassitudinem lentis habetur ratio distantiae superficie primæ ipsius a secunda. Methodus autem est eadem pro quocunque numero lentium. Progrediendo a quavis superficie præcedente ad proxime sequentem devenitur demum ad distantiam lentis postremæ a puncto axis, ad quod convergent radii digressi a margine campi, & traducti per centrum aperturæ objectivi tam  $i$ , qui incidunt prope centrum primæ ocularis, quam  $i$ , qui incident in margines aperturæ ipsius, & omnium sequentium aperturarum utilium. Hujus posterioris distantiae differentia a postremo e valoribus  $r$  eruto ope formularum est idem ille error, qui quærebatur numero superiore per formulas illas complicatiōes. Methodum inveniendi aperturas utiles exposuimus in §. 7 capitī primi hujus Opusculi.

80. Formula erroris figuræ sphæricæ pertinentis ad ocularem postremam, & conjuncti cum omnibus præcedentibus, potest adhiberi ad tentandam correctionem ipsius erroris per conjunctiōem duarum lentium methodo paullo complicatiōe, quam sit ea, qua usi sumus pro objectivo. Sit  $R$  distantia ejus ocularis compositæ a puncto, in quo ipsa debet colligere radios egressos e margine campi, & transeuntes per medium objectivum,  $p$  distantia puncti, ad quod ocularis penultima compellit radios infinite proximos axi,  $c$  hujus distantia ab eo, ad quod eadem penultima compellit marginales, qui est error ipsius penultimæ compositus e suo, & præcedentibus inveniendus per Trigonometriam.

Error ultimæ ocularis erit  $\frac{R^2 c}{p^2} + \frac{1}{2} e^2 R^2 (q + q')$ , existente  $e$  semidiametro aperturæ ultimæ ocularis, ac valoribus  $q$ , &  $q'$  pertinentibus ad binas lentes componentes eam ocularem. Hæc formula eruitur ex illa, quæ habetur in fine numeri 77, quæ pertinet ad errorem lentis secundæ: nam ejus vices gerit hæc ultima ocularis composita, gerente vices erroris  $c$  lentis primæ hoc errore  $c$  invento per Trigonometriam, unde fit, ut hæc sint  $R, p, \frac{1}{2} e^2 R^2 (q + q')$ , quod ibi  $r, p, c = r^2 p$ . Hic valor  $p$  erit idem pro valore  $q$  pertinente ad primam e binis lentibus compo-

nentibus ocularem ; pro valore autem  $q'$  valor  $p'$  erit distantia puncti , ad quod prima lens compelleret radios infinite proximos axi , existente  $\frac{1}{p'} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p} = m-1 + \frac{1}{p}$  .

81. Pro destruendo eo errore deberet fieri ejus valor inventus  $= 0$ , qui divisus per  $R^2$  relinquet  $\frac{c}{p^2} + \frac{1}{2} e^2 (q + q') = 0$ , ubi oportebit reducere valorem  $e$  ad eandem unitatem  $f$ , cuius valor est  $= \frac{ab}{b-a}$  ob  $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ , existentibus  $a$ , &  $b$  radiis sphæricitatum primæ e binis lentibus componentibus . In ea æquatione habebuntur prorsus , ut in objectivo composito paragraphi præcedentis , binæ indeterminationes variandæ ad arbitrium , donec evitetur imaginarietas per combinationes idoneas , si ullæ adsunt .

82. Longam calculorum seriem necessariam ad ea omnia , quæ hic proposui , instituet , quicunque voluerit : mihi satis est ostendisse methodum , juxta quam id fieri potest . Inter alia multa , quæ me retrahunt ab eo labore suscipiendo , est etiam illud , quod ea correctio videtur omnino haberi non posse sine concavitate alterius e binis lentibus componentibus ocularem , quæ ipsam correctionem exhibeat ; id autem secum trahit remotionem foci multo majorem eâ , quæ requiritur in ocularibus ad habendum sat magnum augmentum , nisi distantia focalis lentis convexæ sit perquam exigua : id autem requirit curvaturas nimis magnas , quæ in apertura necessaria ad habendum campum non nimis exiguum inducit incommodum indicatum superius , ortum ex eo , quod quantitates neglectæ pro eruendis formulæ evadant multo maiores , quam ut negligi possint . Productio distantiarum focalis in objectivis , quæ semper remanent cum perquam exiguæ numero graduum circulorum , ad quos tornatæ sunt superficies , non solum non nocet , sed est utilis , dum ea in ocularibus est admodum perniciosa .

83. Hinc omissâ perquisitione ulteriore eo pertinente , recurram ad combinationes superficerum , quæ reddant errorem sphæricitatis minimum pro singulis lentibus . Et quidem binæ formæ

respondentes binis casibus, quos evolvimus in §. 2, & habentur in tabula numeri 37, satisfaciunt ipsæ solæ binis combinationibus, quæ, ut in capite præcedenti invenimus, corrigunt colores indirectos ab ocularibus, & altera convenit telescopiis astronomicis, quæ invertunt objectorum imagines, altera terrestribus, quæ ipsas exhibent directas. Illa prior constat binis lentibus, quarum secunda habet distantiam focalem subtriplam primæ, & distat ab ipsa per duplum ejusdem suæ distantiaæ focalis, posterior exhibit tres, vel quatuor lentes, quarum in secundo casu duæ postremæ sunt æquales, & contiguæ. Ad habendum errorem minimum, binæ illæ combinationis prioris habebunt binas illas formas; ex illis autem quatuor combinationis posterioris, tres priores habebunt primam, quarta si addatur, debebit habere formam secundam.

84. Nam in prima combinatione binarum ocularium telescopi astronomici lens prima excipit radios digressos a centro aperturæ objectivi ita remoto ab oculari, ut ii haberi possint pro parallelis: secunda eos excipit convergentes ad suum folum. Hinc iis convenient binæ illæ formæ ejus tabulæ numeri 37 juxta titulos ibidem expressos, ubi continentur radii sphæricitatum adhibendi ad habendum errorem minimum. Quod si libeat adhibere lentes plano-convexas; utraque debet adhiberi ita, ut planum obvertatur oculo: hæ, ut videre est in postrema e tribus tabulis posita post numerum 53, habebunt errorem aliquanto majorem, sed non nimis magnum.

85. In secunda combinatione prima ocularis (fig. 3. Tab. I) excipit radium marginalem D'CG' devenientem itidem e puncto axis remoto C, qui haberi potest pro parallelo ipsi axi, adeoque etiam ei lenti convenit forma eadem prior ejus tabulæ, vel plano-convexa, plano verso ad oculum: secunda ocularis illum excipit ita delatum per GIL, ut debeat ex ipsa prodire per rectam LQ parallelam axi, adeoque etiam ipsi convenit eadem forma, quæ radiis advenientibus parallelis, sed cum positione contraria. Tertia illum excipit delatum per eam lineam parallelam axi, adeoque ipsi etiam convenit forma eadem, cum eadem positione primæ. Ea deberet compellere eum radium ad folum suum, adeoque

que ad distantiam focalem æqualem distantiaæ focali lenti quartæ , si ea adjungatur contigua eidem tertiaæ . Quare ipsi convenit forma secunda respondens radiis convergentibus ad folum , eadem quæ lenti secundæ combinationis primæ , ac si ea adhibetur plano-convexa , debebit ejus planum obverti oculo .

36. Hinc si libeat uti lentibus plano-convexis ; in prima combinatione utraque habebit planum obversum oculo : in secunda combinatione lentes prima , tertia , & quarta habebunt itidem planum obversum oculo , secunda vero obversum objecto . Si autem libeat adhibere formas erroris minimi ; pro prima combinatione binæ lentes habebunt binas formas tabulæ ejus numeri 37 : pro secunda combinatione primis tribus conveniet prima ex iis formis , quartæ secunda . Sed lens secunda debebit habere positionem contrariam primæ , & tertiaæ . Experientia docebit , an necessariæ sint in casu augmenti , & campi majoris hæ formæ , an sufficient lentes plano-convexæ , quæ exhibent formam generalem , & artificibus expeditam . Potest tamen his exhiberi forma plano-convexa pro prima e binis ocularibus telescopii astronomici invertentis objecta , & pro primis tribus earum quatuor , quas proposuimus pro telescopio terrestri exhibente eadem directa , pro illarum autem secunda , harum quarta adhiberi forma erroris minimi respondentis valori refrangibilitatis cuiusdam mediæ vitrorum communium  $m = 1,52$  , quæ habetur in medio ejus ipsius tabulæ numeri 37 , in qua radius primæ superficie convexe est ad radium secundæ concavæ , ut 26 ad 10 , sive 13 ad 5 : nam error minimus ad errorem lentis plano-convexæ obvertentis planum oculo est ibidem in casu radiorum parallelorum , ut 27 ad 29 , & in casu convergentium , ut 4 ad 15 , nempe pro prioribus illis ocularibus fere æqualis , pro postrema fere quadruplo minor . Ea forma est quidem minus commoda artificibus , sed nec nimis incommoda , cum possit adhiberi constanter eadem . Errores , qui supererunt , poterunt utique esse satis exigui respectu vitiorum , quæ possunt occurrere ob theoriam ocularium nondum satis exultam , ut patebit in Appendice , quam hic subjicimus .

## APPENDIX

## AD OPUSCULUM I.

*Variæ considerationes circa ocularium systemata.*

1. **E**ROR figuræ sphæricæ consistit, ut toties jam diximus, in eo, quod segmentum figuræ sphæricæ non colligit in puncto unico omnes radios digressos ex uno puncto, & incidentes in ipsam, licet sint homogenei. Hinc & lens constans binis segmentis sphæricis eos non colligit in unico puncto. Radii, qui incident in puncta superficie propiora axi, incurruunt in ipsum axem remotius quam radii, qui incident in puncta remota. Hinc in fig. 11 Tab. III radius **CE** adveniens ad punctum **E** lentis **BB** remotius a centro **D** incurrit in punctum **G** axis proprius puncto **D**, quam is, qui advenit ad punctum lentis ejusdem remotius ab eodem ejus centro **D**. Puncta **G**, **I**, **N**, **R**, **g**, **i**, **n**, **r** determinata calculis, qui habentur in fine capitum I, sunt ea, quæ pertinent ad radium **CE** infinite proximum axi **CD**; & quidem nec idipsum prorsus accurate ob neglectam crassitudinem lentis in omnibus iis calculis. Inde fit, ut correctione indigeant omnes valores inventi in calculis iisdem, quæ eo major evadit, quo magis receditur a centro campi. Sed ea correctio evadit operissima, si adhibendæ sint formulæ generales, quæ pro errore figuræ sphæricæ sunt admodum complicatæ, & continent multos terminos pro singulis lentibus. Ipsæ autem formulæ generales, quæ proferri solent, itidem non sunt accuratæ, ut jam diximus in capite II, cum erui soleant, neglectis quantitatibus ordinum inferiorum, quæ non sunt prorsus exiguae, ubi aperturæ sunt aliquanto majores respectu radiorum sphæricitatis.

2. Præter defectus valorum inventorum in superioribus calculis hic error figuræ sphæricæ producit aliud, qui reddit inutiles plurimas combinationes ocularium, quæ alia incommoda evitant, ob muta-

mutatam formam imaginis curvando nimirum, ut vidimus in capite II, in imagine ipsa lineas, quæ in objecto sunt rectæ. Id videmus itidem, ubi trans lensem distantia focalis nimis exigua transpicimus objectum proximum interpositâ ipsâ lente in distan-  
tia exigua ab oculo, & ab objecto: imago objecti habet suam formam, ubi lens applicatur immediate oculo, & objecto, sed augmentum evadit exiguum: remotâ lente ab utrovis, imago cres-  
cit, & evadit maxima in medio, sed distinctio, & forma remanent in parte campi perquam exigua proxima ejus centro: inde versus marginem habetur ingens confusio, & lineæ rectæ trans-  
euntes prope centrum incurvantur plurimum convexitate obversâ centro ipsi. De hoc vitio, & remediis adhibendis ad ipsum saltem minuendum egimus in capite II, sed eorum evolutio requiri tractationem multo fusiorem.

3. Quod pertinet ad confusionem ortam ab errore sphæricitatis, jam exposui in hoc Opusculo, unde ea ortum ducat, nimirum ex eo, quod radii etiam homogenei digressi ab unico puncto objecti non coeant in puncto unico imaginis, sed dispergantur per circellum quendam, ac circelli pertinentes ad diversa puncta objecti congruant sibi invicem parte sui majore, vel minore, prout ipsi circelli sunt majores, vel minores. Quivis circellus ceteris paribus eo est major, quo apertura lentis AA in fig. i Tab. I est major. Verum haud difficulter demonstratur, eandem aperturam æquivalere in ordine ad eum errorum aperturæ majori respectu radiorum provenientium a puncto rectæ D'C obliquæ, quam respectu provenientium a puncto axis DC; quamobrem is circellus evadit major in F', quam in F, & eo major, quo punctum F' magis distat ab F ob obliquitatem rectæ D'C majorem. Inde fit, ut distinctio eo sit minor, quo magis disceditur a centro campi. Differentia ejus circelli est exigua, ubi agitur de unica lente, & objecto satis remoto ab ipsa, ac de angulo obliquitatis exiguo. Sed pro objecto propiore, & inclinatione majore crescit quamplu-  
rimum: ubi autem plures adhibentur lentes ita, ut reliquæ post primam excipient radios objecti utcumque remoti jam deflexos ad puncta propiora rectarum DC, D'C, discrimen ejus spatioli quan-  
doque

doque evadit ingens etiam pro radiis digressis a puncto rectæ D'C parum inclinatae. Id minuit distinctionem in punctis imaginis remotioribus a centro campi, ac pro varia combinatione plurium lentium ita minui potest distinctio, ut etiam in punctis objecti distantibus a centro campi per pauca admodum minuta abeat in caliginem quandam, ac confusionem totalem.

4. Quod pertinet ad curvaturam apparentem linearum rectangularium objecti, id exposui in capite II hujus Opusculi, ubi egi etiam de remediis; sed perterritus difficultate ejus argumenti proposui tantummodo nonnulla, quæ pro paucis quibusdam casibus minuant, non autem penitus tollunt ejus mali causas. Indicavi formulas, quæ eo pertinent, sed ex sunt nimis complicatae, & plures ex iis erutæ sunt negligendo quantitates ordinum inferiorum. Porro hæ quantitates non sunt ita exiguae, ubi apertura non est exigua: si ea sit dimidia radii sphæricitatis, assumit fere 15 gradus hinc, & inde a centro ipsius; qui possunt relinquere metum a quantitatibus neglectis: iis autem etiam neglectis, complicatio formularum adhuc evadit ingens: nam pro una lente in formulis eo pertinentibus habentur 6 termini, qui multiplicato lentium numero usque adeo excrescunt, ut nullam relinquant spem destruendi hoc vitium ope generalium ejusmodi formularum.

5. Augetur difficultas ab effectu crassitudinis lentium, quæ si debeat involvi in ipsis formulis generalibus, reddit calculum adhuc multo magis operosum, ac prorsus inextricabilem. Quamobrem videtur non alio pacto inquire posse in magnitudinem hujus vitii pertinentis ad datam quampliam combinationem ocularium, nisi determinando, ut proposui in fine capitilis II hujus Opusculi, ope Trigonometriæ viam radii remotioris ab axe post singulas refractiones singularum superficierum, habitâ semper ratione numeri graduum distantiarum ab axe, & distantiarum superficie sequentis a præcedenti. Ea via comparabitur cum via radii infinite proximi axi, quæ erui potest facilius e formulis generalibus. Tum demum apparebit, an, & quantum distet focus pertinens ad punctum objecti situm in fine campi a foco pertinente ad punctum

infinite proximum. Is calculus erit numericus tantummodo, longus utique, sed simplex, & facilis. Inventâ quantitate ejus erroris in combinationibus, quæ destruant colores, quæ quidem habent præterea plures quantitates indeterminatas, fieri poterunt in iis mutationes, quæ ejusmodi effectum minuant, si forte totum impedit non possunt.

6. Error ejusmodi non potest destrui in lente unica, nisi radiis habentibus punctum dirigens situm intra certos quosdam limites: pro parallelis omnino non potest, sed pro iis determinatur tantummodo combinatio radiorum sphæricitatis, quæ ipsum reddat minimum. In duabus lentibus conjunctis, quarum altera sit convexa, & altera concava, potest corrigi penitus pro radiis incurrentibus in finem aperturæ, & id præstatur in objectivis a-cromaticis. Utrumque autem præstitimus in capite II hujus Opusculi, & quidem hoc secundum pro binis lentibus conjunctis ex eodem vitri genere. An ubi omnes lentes sint convexæ, ut solent esse in ocularium combinationibus, possit idem error penitus destrui, destruentibus se mutuo erroribus omnibus ita, ut summa evadat nulla; & quæ sit ratio minuendi saltem, quantum maxime fieri possit, ejusmodi vitium; id sane requirit longam admodum, & implexam perquisitionem, ac observationes plurimas requirit determinatio limitis, usque ad quem effectus ejus erroris effugit sensus ita, ut tolerari possit. Campus hinc aperitur uberrimus, per quem & theoria, & observatio practica possit excurrere, nec unquam sane telescopiorum theoria perfici poterit, nisi perficiatur hæc theoria ocularium, quæ huc usque parum admodum exulta est.

7. At ego hinc quidem vix primum limitem prætergressus consistam contentus iis, quæ in postremo hoc Opusculo proposui de natura, & remediis tam colorum inductorum ab ocularibus ob errorem diversæ refrangibilitatis, quam confusionis, & deformationis imaginis provenientium ab ipsarum errore sphæricitatis. Addam tantummodo enumerationem conditionum, quas debet habere sistema ocularium, ut careat omni vitio, & quas omnes habere debet ob oculos, qui hanc Opticæ partem suscipiat exco-

lendam . Primo quidem ab ocularibus collatis cum distantia focali objectivi pendet augmentum , quod debet curari , quantum maximum ferre potest perfectio objectivi , & cui cæteris paribus debet esse proportionalis diameter aperturæ ipsius objectivi . Plures regulæ pro pluribus casibus occurunt in hoc ipso Opusculo , ut & methodus generalis , quam proposuimus , determinandi augmentum ope formularum generalium pro particulis objecti proximis centro campi , & alia , quam indicavimus , obtinendi ejus determinationem ope calculi trigonometrici pro omnibus utcumque remotis . Id augmentum exhibetur a relatione anguli , quem radius adveniens a puncto objecti sito extra axem ad centrum objectivi continet ibidem cum axe ipso , ad angulum , quem idem continet cum eodem axe post suum egressum e lente postrema : ubi autem agitur de distantia puncti objecti a centro campi , in quod concipiatur defixus oculus , potest augmentum æstimari a tangentे hujus postremi anguli divisa per tangentem illius primi : ubi autem de magnitudine apparenti particulæ objecti visæ oculo in eam directo , augmentum æstimari poterit ab angulo , quem continent radii profecti ex binis ejus extremis in egressu ex ultima lente , diviso per angulum , quem iidem subtendunt in centro objectivi ; cum nimirum angulus , quem habent in egressu , exprimat magnitudinem apparentem trans telescopium , & angulus , quem habent in centro objectivi , magnitudinem apparentem nudo oculo .

8. Quæ augmenta possint convenire diversis distantiis focalibus objectivorum , suppositâ æquali exactitudine operis , id quidem multo melius determinatur per observationes , quam ope theoriæ : pro telescopiis communibus habentibus objectivum simplex solebat adhiberi regula , quæ videbatur conformis theoriæ errorum pariens confusionem , per quam regulam augmenta deberent esse , ut radices quadratae distantiarum focalium objectivorum : quanquam generaliter pro objectis magis lucidis potest adhiberi augmentum majus , quamobrem plures combinationes sæpe parari solent pro iisdem objectivis , quarum aliæ adhibeantur in aliis circumstantiis . Pro acromaticis nondum , quod ego sciam , habetur quidquam sat definitum in eo genere : nihil pro ea re definiri posse arbitror .

**e**x pura theoria tum ob alias rationes , tum quia objectivum , quod appellatur acromaticum , & componi solet e binis substantiis , non colligit , ut jam toties diximus , in unico foco nisi duo tantummodo genera filorum coloratorum : reliqua genera quantum aberrent , nondum per observationes determinatum est , nec vero unquam generaliter determinabitur , si ea aberratio in diversis substantiarum binariis est diversa . Adhuc tamen hujus aberrationis perquisitio pertinet ad perfectionem ocularium , & longa series observationum instituta in telescopiis hujus generis poterit subministrare regulas quasdam , quæ artificibus proponantur observandæ , nisi pro singulis objectivis tentare velint plures combinationes , quarum aliæ exhibeant alia augmenta , ut inveniatur illud , quod pro eo ipso objectivo eligendum esse videatur præ cæteris omnibus .

9. Distinctio pendet partim ab objectivo , partim ab oculariis . Distinctio maxima , quam potest exhibere datum systema ocularium coniunctum cum dato objectivo , acquiritur per distan-  
tiam debitam primæ ocularis ab objectivo , quæ pro quovis sy-  
stemate ocularium invenitur methodo exposita num. 190 capit. I ;  
quin immo pro diversa oculi constitutione invenitur protrudendo introrsum , extrorsum tubulum , qui continet id systema . Verum hæc ipsa distinctio respondens dato objectivo , & datae combina-  
tioni potest esse major , vel minor : objectivo existente acroma-  
tico est major , & est major , si figura debita est accuratior : pa-  
ri perfectione objectivi est eo minor , quo est major apertura i-  
psius , & augmentum , quod dum auget imaginem , auget simul ejus errores : verum pendet etiam a bona constitutione ocularium ,  
pari etiam augmento . Esset prorsus accurata distinctio , si radii  
omnes digressi a quovis unico puncto objecti possent egredi e po-  
strema lente paralleli inter se , vel pro diversa constitutione ocu-  
lorum divergentes ab unico quodam puncto , aut convergentes ad  
unicum quoddam punctum . Quo majus est discrimin ab ea con-  
ditione , eo minor est distinctio . Cum datis vitrorum qualitati-  
bus refractivis , & distractivis liceat satis accurate ope formula-  
rum obtinere viam radii cuiusvis proximi axi , & ope Trigonomo-

tric

triæ viam remotioris cujusvis trans superficies quotcumque, quārum innotescant radii sphæricitatum, ac mutuæ distantiæ; potest semper obtineri ope calculi quantitas erroris residui tam pro punctis objecti proximis axi, quam pro utcumque remotis: calculus esset admodum molestus, & longus; sed tamen per ipsum id obtineri omnino posset. Verum oporteret posse habere formulas generales, & quidem simplices ad videndum, an possit pro omnibus obtineri accurata distinctio, quod arbitror fieri non posse, vel saltem ad eligendum errorem distinctionis minimum, qui cum cæterorum vitiorum correctione conjungi possit.

10. Sæpe accedit, ut distinctio sit satis bona in centro campi, & habeatur confusio in ejus margine, ac protruso introrsum tubulo continente combinationem ocularium acquiratur distinctio in campi margine, succedente confusione in centro, de quo vitio jam in superioribus mentionem injecimus. Id semper accedit in telescopio habente unicam ocularem cum campo, & augmentatione nimis magno. Focus  $F'$  (fig. 1.) pro radio  $D'C$  obliquo, & ejus sociis est propior puncto  $C$ , quam  $F$ , adeoque differentia distantiarum, quas habent ea puncta a  $G$ , debet esse adhuc major, & tamen ad habendam eandem distinctionem in utroque puncto imaginis deberent eæ distantiæ parum differre a se invicem. Quærendum in primis, an ad æqualitatem distinctionis requiratur accurata æqualitas earum distantiarum, vel quæ sit differentia ipsarum ad id necessaria: tum si ea non possit obtineri per unicam lentem, quæ sit combinatio radiorum sphæricitatis, quæ salvis cæteris reddat minimum id vitium: sic exempli gratia si lens  $BB'$  sit concavo-convexa concavitate obversâ punctis  $F, F'$ ; punctum  $G'$  ita adducitur ad  $F'$  aliquanto magis, quo pasto videtur posse corrigi ex parte is error: sed videndum, an is accessus revera ipsum minuat, & quantum: ex alia vero parte ea cavitas requirit curvaturam multo majorem superficie convexe ad habendam eandem distantiam focalem, quæ requiritur exigua pro satis magno augmentatione. Videndum autem præterea, an ubi plures lentes oculares adhibentur, diversa combinatio, quæ æque evitet cætera vitia, possit efficere, ut ubi habetur postrema imago objecti

in foco postremæ lentis , ut in OO' , fieri possit , ut eorum punctorum positio respectu ipsius lentis postremæ sit ea , quæ requiritur ad eam distinctionum æqualitatem , vel saltem , quo pacto discrimen possit reddi minimum , mutatis lentium curvaturis , & distantiis mutuis .

11. Aliud vitium , de quo egimus in capite II hujus Opusculi , est illud imaginis deformatae per curvaturam linearum rectarum objecti . Videndum , an possit corrigi penitus , an saltem ex parte satis magna , & per quas mutationes sphæricitatum in lenti bus omnibus possit reddi minimum . Utrumque ex hisce binis vitiis minuitur semper , imminutâ aperturâ utili lentium , quæ minuitur , imminutâ aperturâ diaphragmatis , quando tota ejus apertura est libera ab impedimento , quod induceret apertura ocularis cujuspiam justo minor . Sed iis aperturis imminutis minuitur campus . Jam egimus hinc etiam de campi magnitudine : sed oportet determinare combinationes , quæ , correctis quam maxime fieri potest iis erroribus , relinquant campum satis magnum . Partim per theoriam , partim per observationes oportet invenire regulas generales pro magnitudine campi omnium maxime opportuna , conjungenda cum correctione cæterorum defectuum . In superioribus assumpsimus aperturas habentes rationem non majorem quadam data ad distantiam focalem , seu etiam ad radios sphæricitatum : at ratio accurata pro minimis ejusmodi erroribus videtur debere esse diversa pro diverso situ puncti dirigentis radios incidentes : id ipsum diligentem perquisitionem requirit .

12. Accedit cæterorum vitorum correctioni correctio separatio nis colorum , de qua fuse egimus in hoc Opusculo . Et quidem hinc egimus de correctione distractionis binorum : sed ubi duo fila diversarum specierum prodeunt parallela ; non idcirco prodeunt omnia , ut & de objectivo acromatico diximus . In eo tres substantiae possunt habere ejusmodi qualitates refractivas , & distractivas , ut uniantur tres colorum species . Possent ita variari ocularium superficies , & distantiae , ut corrigatur distractio non duorum tantum , sed plurium simul . Id pendet a discriminine valorum  $\frac{dm}{m-1}$  , ubi  $dm$  pertinet ad diversa colorum binaria . Sæpe ac-

accidit ob id ipsum discriminem, ut colores, qui observantur in punctis campi lucidis satis remotis ab ejus centro, non sint extremitati, ut rubeus, vel violaceus, nec vinaceus ortus ex iis commixtis, sed alii compositi. Verum saltem curandum erit, ut conjugantur duo, quibus conjugatis reliqui solent parum distare ab ipsis.

13. Aliud vitium pertinens ad colores occurrit saepe in telescopiis, ut nimirum margo campi appareat coloratus, quod ejus distinctionem impedit. Id habetur potissimum, ubi vel omnino desit diaphragma, vel apponatur in foco citeriore lentis postremæ. In fig. 11 si nullum adsit diaphragma, campus terminatur cum apertura lentis cujuspiam, ut  $B''B''$  in P. Ibi fila pertinentia ad objectum situm in margine campi non habentur omnia, sed solum quedam eorum pars, parte cadente extra lentem: itidem eorum pars habetur, si campus terminetur per diaphragma collatum in TT'. Evitarentur ibi colores, si punctum S abiret in T': sed si id eo abeat, non poterunt fila PR, pr̄ egredi parallela, nisi factâ acromaticâ lente postremâ. Hinc ubi adhibentur lentes ex eadem materia, non potest punctum S eo abire, nec possunt colores evitari in campi margine eo pacto. Evitabuntur, si diaphragma ponatur in FF', & objectivum sit acromaticum; quia in F' habebuntur omnes radii pertinentes ad idem punctum objecti situm in margine campi, qui deinde si prodeant omnes ex postrema lente cum directione eadem, unientur in oculo, & colores evitabuntur in margine campi, ut in quovis punto lucido objecti sito intra campum. Solum, quoniam, ut toties jam diximus, objectiva ipsa, quæ appellantur acromaticæ, non colligunt nisi duo colorum genera, reliquis extantibus nonnihil ad latum; non poterunt evitari omnes penitus colores in margine campi, ut nec penitus omnes in punto objecti lucido posito intra campum: ipsi poterunt esse ita exigui, ut transpiciendi per telescopium non percellant sensum: sed in imagine solis transmissa per ipsum telescopium, & excepta in aliqua distantia non exigua semper apparebunt aliqui tam in margine ipsius imaginis, quam in margine campi.

14. Quæri itidem potest, an, adhibito objectivo simplici, distractio facta ab ipso, & expressa in fig. 1 possit corrigi per oculares ex eadem materia. Credo omnino, id fieri non posse, si omnes oculares adhibitæ sint convexæ. Quæri potest, an id fieri possit permiscendo lentes convexas convexis: credo itidem tamen etiam si forte id possit, rem fore inutilem ex alio capite: nam censeo, eam permixtionem obsfuturam augmento, & campo: sed id itidem meretur perquisitionem accuratam.

15. Inter conditiones, quas debet habere systema lentium ocularium carens omni vitio, considerandum est etiam incommodum a pulveribus adhærentibus lenti cuipiam, qui incurunt in oculos in quibusdam ocularium combinationibus: id evitari debet quantum fieri potest. Pulveres aspersi objectivo non possunt afficere visum: ii tantum intercipiunt partem radiorum pertinentium ad quodvis punctum objecti, relictâ liberâ viâ cæteris omnibus trans-euntibus inter ipsius pulveris particulas. Evadunt sensibles, si adhærent cuipiam oculari, cui sit nimis proximum punctum dirigens radios incidentes in ipsam. In fig. 10 radii pertinentes ad punctum objecti situm in axe detorti ab objectivo ad punctum F occupant in superficie primæ lentis circellum habentem pro diametro  $2DE$ , in secunda  $2D'H$ , in tertia  $2D'M$ , in quarta  $2D''P$ . Si is circellus sit multo major, quam singula pulverum granula, & hæc distent a se invicem; tum ea granula non intercipient nisi partem exiguum radiorum pertinentium ad id objecti punctum, reliquis devenientibus ad oculum; adeoque ea granula non impedient visum illius puncti objecti: cumque pro radiis aliorum punctorum sitorum intra campum id spatiolum sit magnitudinis fere ejusdem, ut sunt in fig. 1 spatiola  $HH'$ ,  $H'H''$ , nullum objecti punctum tegetur ab iis granulis. Sed si ea spatiola sint minora, vel majora excessu nimis exiguo iisdem granulis; tum, particulis objecti penitus, vel fere penitus contectis ab ipsorum interpositione, ea incurrent in oculos.

16. Facile est, dato systemate ocularium, & objectivo, computare ea spatiola: calculus est prorsus similis calculo aperturarum figuræ 11. Erit ut  $CF$  ad  $FD'$ , ita apertura objectivi =

$2CA$  ad  $2DE$  : tum  $GD : GD' :: 2DE : 2D'H$ ; deinde  $D'I : D''I :: 2D'H : 2D''M$ ; ac demum  $D''N : D'''N :: 2D''M : 2D'''P$ . Si jam granula pulverum supponantur certæ cujuspiam magnitudinis, ut  $\frac{1}{20}$  linea, comparari poterunt cum iis spatiolis. Patet autem, ea spatiola cæteris paribus fore eo majora, quo apertura objectivi fuerit major, quæ cum sit semper major in telescopiis habentibus objectivum acromaticum, in iis telescopiis eorundem pulverum incommodum erit metuendum minus: patet itidem, ea spatiola eo fore majora, adeoque eo minus timendum periculum ipsorum pulverum, quo distantia FD,  $GD'$ ,  $D'I$ ,  $D''N$  erunt minores. Hæc postrema semper erit æqualis distantia focali lentis postremæ. Sola autem experientia potest docere, quæ magnitudo granulorum pulveris adhaerentis ocularibus timeri debeat, & quæ ratio inter ipsa, & ea spatiola reddet incommodum sensum ipsorum pulverum. Pulveres majores, vel nimis densi apparebunt utique semper, & ii evitari debent detergendo lentes ipsas, si nimis sordescant.

17. Hoc paœto enumeravimus omnia, quæ considerari debent in systemate ocularium ad seligendum sistema, quod reliquis præstet, in quo argumento satis patet ex iis, quæ proposuimus, quantum itineris adhuc remaneat ad perficiendam earum theoriam. Ei perquisitioni in hoc Opusculo vix apertus est aditus, excultâ aliquanto magis ea parte, quæ pertinet ad colores, & ad remedia adhibenda erroribus ortis a figura sphærica. Ut unico intuitu videri possit id, quod requiritur ad perficiendam theoriam ocularium, en conditiones præcipuas, quæ habendæ sunt ob oculos: 1°. distinctio in campi centro: 2°. distinctio æqualis in centro, & in margine: 3°. impedimentum deformationis figuræ: 4°. incrementum satis magnum: 5°. incrementum æquale prope centrum, & prope marginem, ne figura deformetur: 6°. correctione distractionis colorum: 7°. campus, & in ejus gratiam sistema aperturarum utilium ipsarum ocularium, & diaphragmatis: 8°. impedimentum incommodi a pulveribus. Pro iis omnibus quærendum est maximum commodum proveniens ex omnium summa. Quantitates, quæ variari possunt, sunt pro singulis lentibus habentibus

eandem distantiam focalem bini radii sphæricitatum : series aperturarum , quarum reliquæ omnes pendent a mutatione unius ex ipsis tantummodo , ipsis autem aperturis , & radiis respondent crastitudines : distantia lentis primæ ab objectivo , & sequentium a præcedentibus : addi possunt etiam substantiæ diversæ in ordine ad qualitates refractivas , & distractivas . Omisso etiam hoc postremo capite , in solo systemate quatuor lentium habentur quantitates indeterminatæ  $8 + 1 + 3 = 12$  . Nam in primo capite singulæ e quatuor lentibus habent binos radios , qui variari possunt utcumque , si non sit determinata distantia focalis , & si ea determinetur , assumptâ distantia focali ad arbitrium , remanet determinandus ad arbitrium unus e binis radiis , quo determinato , & determinatâ distantia focali , alter radius remanet itidem determinatus . Hinc pro singulis lentibus habebuntur binæ indeterminationes , nimirum vel bini radii sphæricitatum , qui determinati determinant distantiam focalem in data vitri specie , vel distantia focalis , & alterius e binis radiis : adeoque cum lentes sint quatuor , possunt considerari ex hoc capite indeterminationes octo . Secundum caput seriei aperturarum exhibet unicum , cum determinatis distantias focalibus , & distantias lentium ab objectivo , ac inter se , & unicâ ex aperturis utilibus , determinantur reliquæ omnes . Tertium caput distantiarum mutuarum in systemate quatuor lentium ocularium contineret indeterminationes quatuor , nimirum primæ lentis ab objectivo , secundæ a prima , tertiae a secunda , quartæ a tertia : sed unam ex iis indeterminationibus aufert necessitas ita collocandi postremam lentem , ut radii digressi ex unico puncto objecti coeant in ejus foco citeriore . Quamobrem ex eo capite habentur tres indeterminationes : adeoque omnes simul sunt 12 ; dum conditiones obtinendæ per earum variationem propositæ numero præcedenti sunt tantum 8 . Quare patet , problema , quo quæratur combinatio omnibus anteponenda , esse adhuc admodum indeterminatum , præterquam quod est admodum complicatum . Hinc ejusmodi perquisitio longam admodum attentionem requirit , longam seriem calculorum , & observationum .

---

## S U P P L E M E N T U M

### O P U S C U L I   P R I M I.

*De distributione luminis refracti a lentibus per circellum  
exprimentem errorem figuræ sphæricæ.*

1. **U**BI radii lucis incident in unam, vel plures lentes, & ab iis detorti per refractionem exhibit imaginem objecti, ea imago esset maxime distincta, si radii a quovis objecti ipsius puncto profecti in unico puncto colligerentur. At obstat tam figura sphærica, quam diversa radiorum refrangibilitas. Figura sphærica radios etiam homogeneos non colligit accurate in unico puncto; sed ii, qui incident propiores axi, coeunt cum ipso axe in puncto remotiore ab ipsa lente, quam qui incident remotiores. Quod si etiam lens illos colligeret in unico puncto; diversa diversorum colorum refrangibilitas efficeret aberrationem, quæ cum illo errore figuræ sphæricæ conjungitur, cum nimirum radii violacei citius coeant, quam rubei.

2. Secluso mente errore figuræ sphæricæ, radii omnes heterogenei colliguntur in circello, & ipse error figuræ radios omnes homogeneos adhuc intra circellum continet, quos circellos consideravimus in prima dissertatione impressa in parte prima Tomi V Academiæ Bononiensis, ac eos, ubi minimi sunt, inter se contulimus, atque invenimus proportionem diametrorum generalē, quæ in casu considerato a Newtono eandem nobis rationem exhibuit, quam ipse in Optica sua sine demonstratione proposuerat, quæ aliquot millibus vicium reddit majorem diametrum in illo errore diversæ refrangibilitatis, quam in hoc figuræ sphæricæ.

3. Newtonus quidem in eodem illo errore diversæ refrangibilitatis consideraverat etiam distributionem totius luminis per ipsum circellum, & proposuerat tam rationem, in qua variatur ejus densitas in progressu a centro ad peripheriam, quam eam, quæ ex-

primat, quota pars totius luminis contineatur in quovis minore circello concentrico continente partem areae totius circelli exprimentis eum errorem. Determinatio ab illo exhibita Opticæ parte I libri I prop. 7 huc redit. In nostra figura 1 (\*) COC', ut mox videbimus, exprimit diametrum circelli erroris figura sphærica; sed si hic ea recta sumatur pro diametro ejus, qui pertinet ad refrangibilitatem, & sumatur quodvis punctum H inter centrum O, & peripheriam; densitas luminis erit ibi proportionalis fractioni  $\frac{HC}{CO}$ , quantitas autem luminis in circello, cuius radius OH, ad totum lumen est, ut differentia quadratorum OC, CH ad quadratum OC: unde patet, densitatem in centro, evanescente HO, abire in infinitum, perpetuo autem minui versus marginem C, in quo, evanescente HC, evanescat etiam ipsa; quantitatem vero luminis fore dimidiam quantitatis totalis in eo circello, in quo quadratum CH fuerit dimidium quadrati OC, quo casu lumen in eo ipso circello erit æquale lumini annuli residui HC.

4. Proportionem illam Newtoni ego quidem accurate, & methodo admodum simplici demonstravi in parte 2 dissertationis de lumine impressa anno 1748, quam quidem demonstrationem inde descriptam huic dissertationi adnectam in fine. Libet nunc perquisitionem eandem instituere in circello pertinente ad errorem figuræ sphærica, quæ quidem perquisitio plurimi interest, ubi ii errores inter se comparantur, cum sensus a lumine excitatus pendeat omnino ab ipsius densitate, & copiâ luminis in dato spatiolo collecti (\*\*). Ad hanc perquisitionem proderunt plurimum ea,

(\*) Omnes hujus supplementi figuræ habentur in Tabula V, quod hic semel monuisse sit satis.

(\*\*) En autem quid demum invenerim; nam diurnæ, & admodum molestæ perquisitionis fructum hic paucis exponam in antecessum.

Circellus C'OC continens in minimo spatio radios omnes homogeneos refractos ab apertura F'AF cadit inter B concursum radiorum extremorum, & I ultimam intersectionem infinite proximorum axi, triplo propior illi, quam huic.

ea, quæ in memorata Bononiensi dissertatione sunt demonstrata (\*).

## 5. Re-

Ejus diameter, mutatâ aperturâ, est in ratione triplicata aperturæ ipsius, & sesquiplicata rectarum IO, OB, IB.

Ad quodvis punctum H ipsius diametri deferuntur radii numero tres a tribus aperturæ punctis P, P', P'', quæ sic inveniuntur. Centro O, intervallo OI describatur circulus occurrens ipsi IO productæ in R: in IR productâ tantum in E capiatur IG, quæ sit ad ipsam IE, in duplicata ratione OH ad OC: centro R, intervallo RG inveniatur in peripheria circuli punctum K. Sumatur arcus RM triens RK, tum MM', MM'' trientes totius peripheriæ, posito M' in semicirculo RKI, vel in opposito, prout fuerit IG minor, vel major, quam IR: centro R intervallo RM, RM', RM'' inveniantur puncta N' versus I, & N, N'' versus E: erigantur perpendiculares ad IE rectæ NT, N'T' in directione OH, & N''T'' in opposita, quæ sint ad OC in ratione sesquiplicata IN, IN', IN'' ad IO (nimirum ut  $IN^{\frac{3}{2}}$  &c. ad  $IO^{\frac{3}{2}}$ ).

Rectæ ductæ ex H per puncta T, T', T'', determinabunt quæsitas directiones radiorum PH, P'H, P''H.

Ad singula puncta C, C' peripheriæ circelli deferuntur bini tantum radii, & ad centrum O numero infiniti.

Lumen, quod ingeritur in quemvis annulum HQ ab annulo intermedio Pp, æquatur ingestio a reliquis binis P'p', P''p'' simul.

Factis Oq, Oq' ad OC in subduplicata ratione 1 ad 2, circello interiore q'Oq continetur dimidium totius luminis contenti toto circello C'OC, reliquo dimidio contento in annulo exteriore q'C, qui est ipsi circello interiori æqualis.

Ubicumque fuerit punctum H, lumen contentum annulo HQ ad dimidium luminis totalis, nimirum semidifferentia luminis contenti circello interiore OH, & annulo exteriore HC ad semisummam est, ut chorda RM ad radium OR.

Densitas luminis in quovis loco H est reciproce, ut differentia quadratorum eiusdem chordæ RM, & radii OR, quæ densitas idcirco in margine C, C', & in centro O excrescit in infinitum, est autem minima in punctis q, q'.

Ea densitas minima ad medianam, quæ haberetur, si totum lumen æqualiter diffunderetur per totam aream circelli C'OC, est ut 2 ad 3, quod quidem acuit sensum erroris figuræ sphæricæ per totum circellum.

Continentur hic horum omnium demonstrationes cum tota investigationis ratione, & pluribus animadversionibus scitu non indignis.

(\*) Quæcumque habentur ibi, quæ sint necessaria pro demonstrationibus hic instituendis, habentur itidem hic in Opusculo II Tomi I. Citationes, quæ hic proferuntur in textu, referuntur ad numeros illius dissertationis Bononiensis: verum pro iis, quæ hic erunt necessaria, indicabimus in annotationibus loca ejus ipsius Opusculi secundi: quæ autem pertinent ad naturam causticæ, indicata hic, ut demonstrata ibi; demonstrantur deinde in hac ipsa dissertatione, & quidem multo facilius a num. 7.

5. Referat recta  $F'F$  in figura i Tab. V lentem , a qua radii detorqueantur ad axem AI: ostensum est ibi (idem autem etiam in Opusculo II Tomi I horum Operum , & in hoc I Tomi II), radios quidem , qui incident in puncta propiora axi, serius convergere prope punctum quoddam I , quod sit ultimus limes concursum omnium cum ipso axe , & consideratur, ut focus radiorum infinite proximorum axi , veluti radius  $P'H$ , qui appellit ad punctum axis  $L'$  proximum puncto I, tum reliquos , quo magis remoti incident ex parte utravis , eo citius ad ipsum devenire, ut  $PH$  in  $L$ ,  $P''H$  in  $L''$ , postremos autem , qui incident in puncta extrema aperturæ  $F'F$  , omnium citissime in quodam puncto B , exprimente BI errorem rectilineum respondentem toti aperturæ habenti semidiametrum AF. Porro is error ibi determinatur generaliter ita , ut respondeat cuivis aperturæ non nimis magnæ . Determinatur autem ex data superficerum curvatura , qualitate refractiva , & amplitudine aperturæ , appellatâ nimirum AP semidiametro aperturæ  $e$  , invenitur pro errore rectilineo formula continens valorem datum per ipsam qualitatem refractivam substantiæ , e qua lens constat , & radios sphæricitatum , ductum in  $e^2$  , quæ formula cum exprimat distantiam concursus L ab I , inde patet , errorem ejusmodi rectilineum LI esse , ut quadratum semidiametri aperturæ AP.

6. Porro satis patet , radios ejusmodi contingere perpetuo in punctis quibusdam T , qui sunt ultimi limites intersectionum radiorum proximorum , curvam quandam continuam , quam Geometræ causticam appellant, quam ibidem consideravimus a numero 69. Numero 71 inventum est , causticam hujusmodi in hoc lentium casu prope punctum I accedere in infinitum ad naturam parabolæ gradus tertii , in qua quadrata ordinatarum sunt ut cubi abscissarum computatarunt ab ipso puncto I, ubi ejusmodi parabola habet cuspidem efformatam ab arcibus  $IC'D'$ ,  $ICD$  tangentibus hinc , & inde axem medium IOA . Radii incidentes in  $F'$ ,  $F$  eam tangunt in punctis  $D'$ ,  $D$  , quæ puncta erunt æque remota ab axe , ac is rectam  $DD'$  secabit bifariam , & ad angulos rectos in E , si ipsa puncta  $F'$ ,  $F$  pariter æque ab eo distant :

tum

tum ii radii progressi ultra B secant arcus ipsius oppositos in C, C' ita, ut & C'C secetur ab axe eodem bifariam itidem, & ad augulos rectos in O. Demonstratum est autem num. 72, fore subtangentem ad abscissam computatam ab I, ut 2 ad 3, adeoque  $EB = \frac{2}{3}EL$ , & proinde IB trientus IE, ut etiam illud, fore IO quadrantem ipsius IE, adeoque  $IB:IO :: 4:3$ , & BO trientus IO: fore itidem  $C'C = \frac{1}{8}D'D$ . Ipsum circellum descriptum diametro C'OC esse spatium minimum omnium eorum, quæ radios omnes excipiunt, demonstratum est num. 69 ex eo, quod versus E se expandat caustica, versus I latera BC', BC anguli C'BC.

7. Ea omnia sine ullo calculo infinitesimali, quo ibi usi sumus, quanquam admodum elementari, sic demonstrabuntur multo faciliter ex hisce solis lemmatis, quod error rectilineus IL in diversis aperturis sit, ut quadratum semidiometri aperturæ AP, & quod is error, ubi aperturæ non sint ita enormes, sit per quam exiguis respectu distantiæ foci AI: ea satis sunt nota, & immediate deducuntur ex ipsa expressione erroris hujuscce determinata in eadem dissertatione (\*).

8. Sint in fig. 2 bini radii infinite proximi PL, pl, quorum intersectio T haberi poterit pro contactu, in quem ea desinit, ubi demum pl desinit in PL, & restæ ex T, ac L parallelæ AP occurrant illa axi in N, hæc radio pl in H. Primo quidem factâ  $\frac{AP^2}{IL} = 1$ , quod quidem licet, cum ob IL proportionalem quadrato AP valor ejus fractionis sit constans, erit  $AP^2 = IL$ , adeoque  $AP^2 = Ap^2$ , sive  $2AP \times Pp = Ll$ , nimirum  $Pp : Ll :: 1$

(\*) Eadem expressio habetur & hic in Opusculo II Tom. I, cuius caput I excerptum est e dissertatione eâdem. Èa usi sumus etiam in hoc Tomo II numer. 21 capituli II hujus Opusculi I. Valor erroris longitudinalis est  $r^2\rho$ , &  $\rho$  habet pro factore  $e^2$  quadratum semiaperturæ, quod statim offert proportionatatem erroris longitudinalis sphæricitatis cum quadrato semiaperturæ, & exiguitatem ipsius ob exiguitatem aperturæ, respectu distantiæ focalis. Porro ex hac eadem expressione deduximus num. 99 supplementi II Opusculi II Tomi I hujusmodi theorema pro errore longitudinali sphæricitatis: *is erit in ratione compositæ ex duplicata directa apertura, & reciproca simplici distantiæ focalis.*

## S U P P L E M E N T U M

$\therefore 1 : 2 AP$ . Deinde habebuntur e triangulorum similitudine sequentes proportiones  $AN : NL :: PT : TL :: Pp : LH$ , &  $Ap : Al$ , sive (ob ultimam congruentiam punctorum  $P, p, & L, l$ )  $AP : AL :: LH : Ll$ . Igitur habitis  $AN$ ,  $AL$  pro aequalibus ob ingenitam distantiam puncti  $A$  a punctis  $N, L$  proximis sibi invicem, & puncto  $I$ , erit ex aequalitate perturbata  $AP : NL :: Pp : Ll :: 1 : 2 AP$ . Quare  $NL = 2AP^2$ . Cum igitur sit  $IL = AP^2$ , erit  $NL = 2IL$ , &  $IL$  pars tertia abscissæ  $IN$ , quæ ipsa abscissa erit idcirco, ut quadratum ipsius  $AP$ .

9. Hinc autem habebitur  $AL^2 : NL^2 = \frac{4}{9} IN^2 :: AP^2 = IL = \frac{1}{3} IN : NT^2 = \frac{4IN^3}{27AL^2}$ . Cum igitur  $AL$  haberi possit pro  $AI$  constanti; erit  $NT^2$ , ut  $IN^3$ , sive quadratum ordinatæ, ut cubus abscissæ, quæ est natura parabolæ gradus tertii, quam supra nominavimus.

10. Inde vero consequuntur omnia, quæ diximus. Nam in fig. 1 abeunte  $T$  in  $D$ , abit  $L$  in  $B$ , & est  $IB$  triens  $IE$ : assumptâ vero  $OB = \frac{1}{4} IB$ , adeoque  $= \frac{1}{8} BE$ , & erectâ  $OC'$  normali ad axem usque ad concursum cum  $DB$  in  $C'$ , erit  $OC'^2 : ED^2 :: OB^2 : BE^2 :: 1 : 8 \times 8 = 64$ : & pariter est  $IO^3 : IE^3 :: 1 : 4 \times 4 \times 4 = 64$  (\*). Quare cum & quadratum ordinatæ erectæ ex  $O$  ad  $ED^2$  debeat esse, ut  $IO^3$  ad  $IE^3$ , erit  $OC'$  ordinata ad curvam, quam idcirco ibi secat iterum tangens  $FDB$ : cumque eadem sit ratio pro puncto  $C$ , patet, diametrum  $COC'$  circelli continentis in minimo spatio omnes radios esse ad rectam  $D'ED$ , ut  $OB$  ad  $BE$ , nimirum ut 1 ad 8, & ejus distantiam  $IO$  a vertice cuspidis  $I$  esse quadrantem totius axis  $IE$  (\*\*):

II. O-

---

(\*) Nam  $IO$  est  $= IB - OB = \frac{3}{4} IB$ , &  $IB = \frac{1}{3} IE$ , adeoque  $IO = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} IE = \frac{1}{4} IE$ .

(\*\*) Patet autem, fore  $AB : FF' :: BO = \frac{1}{4} IB : CC'$ , sive  $IB : CC' :: 4AB : FF'$ , quod est secundum e binis theorematis adhibitis num. 101 ejusdem supplementi II Opusculi II Tomi I, ubi sic habetur. Error longitudinalis ad diametrum erroris circularis est pro refrangibilitate, ut dupla distantia focalis  
ad

11. Oportet jam videre, qua lege distribuatur totum lumen per planum ejus circelli, nimirum primo quidem, quæ sit ratio densitatum in punctis quibusvis assumptis intra ipsum in quovis plano secante totum solidum spinale causticæ respondens toti lentii circumquaque circa axem, quod planum refert figura 1, ita, ut solidum ipsum spinale generetur conversione dimidiæ ipsius figuræ circa axem AI: tum vero, quæ sit ratio totius luminis ad partes contentas circello genito ab OH, & residuo annulo genito ab HC.

12. Ad ea determinanda proderit plurimum prius investigare, quot, & qui radii PL deferantur ad quodvis punctum H, & in quibus angulis, sive quæ futura sit pro iis radiis ratio distantiarum AP ad semidiametrum totius aperturæ AF, quibus semel determinatis, cætera omnia inde admodum facile consequentur. Porro id quidem totum præstatur expeditissime per analysim admodum elementarem, & constructionem sane elegantissimam.

13. *Problema 1.* Invenire radium, qui debeat appellere ad quodvis punctum H datum in quovis radio OC circelli CC'.

14. Assumpta ES versus I = IO, erit SI =  $\sqrt{3}$ IO, NI =  $\sqrt{3}IL$ , adeoque SN =  $\sqrt{3}OL$ : est autem  $IO^3 : IN^3 :: OC^2 : NT^2$ , &  $LN^2 = \frac{4}{9}IN^2 : LO^2 = \frac{1}{9}SN^2 :: NT^2 : OH^2$ . Quare conjunctis rationibus, & demptis communibus  $\frac{1}{9}NT^2$ ,  $IN^2$ , erit  $4IO^3 : IN \times SN^2 :: OC^2 : OH^2$ , nimirum  $IN \times SN^2$  quantitas data, cum dentur reliqua in ea proportione (\*): inde facile eruitur æquatio

*Tom. II.*

C c

com-

*ad aperturam, & pro sphæricitate ut quadrupla eadem distantia ad eandem aperturam.* Primum patebit in Additamento hujus supplementi paullo inferius. Cum autem error longitudinalis IB sit in ratione duplicata aperturæ ex adnot. ad num. 7, & hic ad habendum valorem CC'is debeat adhuc multiplicari per diametrum aperturæ ipsius FF', ac dividi per quantitatem 4AB habendam pro constanti; patet, fore diametrum erroris circularis in ratione triplicata ejusdem aperturæ, quod affirmavimus pluribus in locis, ut num. 13, capit. II hujus Opusculi I.

(\*) *Problema* huc reductum est, ut datis in recta indefinita binis punctis I, S, queratur tertium N ejusmodi, ut e binis ejus distantiis NI, NS a punctis datis, productum ex altera in quadratum alterius æquetur dato solido. *Æquatio.*

commodissima, & constructio simplicissima. Captâ OR in axe æquali OI, unde fient etiam RS, SE æquales utrilibet, fiant singulaæ ex ipsis  $= a$ , tum OC  $= c$ , OH  $= r$ , RN  $= x$ : erit IN  $= x + 2a$ , SN  $= a - x$ , & iis valoribus substitutis  $c^2 : r^2 :: 4a^3 : -3a^2x + x^3 + 2a^3 = \frac{c^2}{c^2}$ , sive  $x^3 - 3a^2x + a^2(2a - \frac{4ar^2}{c^2}) = 0$ .

15. Hæc æquatio habet radices reales tres, quotiescumque valor  $2a - \frac{4ar}{c^2}$  fuerit minor, quam  $2a$ , quod hinc semper accidit; nam ob OH semper minorem OC est  $r$  minor, quam  $c$ , adeoque  $\frac{4ar^2}{c^2}$  minor, quam  $4a$ , qui valor ablatus a valore  $2a$  vel relinquet quantitatem positivam, vel saltem negativam minorem  $2a$ . Maxima e tribus radicibus erit æqualis reliquis binis simul sumptis, & cum signo contrario, cum earum summa  $= 0$  destruat secundum terminum: ea vero maxima erit positiva, vel negativa, prout ultimus terminus fuerit e contrario negativus, vel positivus, cum postremus terminus debeat esse productum ex radicibus omnibus acceptis cum signo contrario, adeoque ob productum binarum minorum conformium semper positivum, debeat habere signum contrarium signo radicis maximæ. Construetur autem methodo elementari notissima ad trisectionem arcus circuli, cuius radius  $a$  chorda  $2a - \frac{4ar^2}{c^2}$  (\*). En constructionem ipsam

sane

---

tiones omnes secundi gradus eo reducuntur, ut debeat esse productum ex iis distantiis æquale plano dato. Ad hoc autem productum datum ex quadrato alterius in alteram reducuntur omnes æquationes gradus tertii, in quibus secundus terminus deest, & tertius est negativus.

(\*) 1. Licet ea constructio sit satis nota, ac pertinens ad elementa; eandem tamen hinc evolvemus, cum ab ea pendeant reliqua fere omnia, quæ dicturi sumus. Sit in fig. 3 Tab. V arcus RMK divisus in partes æquales tres in M, N, & chorda KR occurrat radiis OM, ON in A, & B. Patet, triangulum MRA fore simile isoscelio MOR ob angulum ad M communem, &

sane simplicem, & elegantem pro iis radicibus, & earum usu ad determinandos radios quæsitos.

## Cc 2

## 16. Ca-

angulum MRK æqualem MOR, cum ille insistat ad circumferentiam arcui KM, hic ad centrum arcui MR ejus dimidio. Quare erit & RA = RM, & posito OR =  $a$ , RK =  $b$ , RM =  $x$ , erit QR =  $a : RM = x :: RM$  =  $x : MA = \frac{x^2}{a}$ . Erit itidem OM =  $a : OA = a - \frac{x^2}{a} :: NM = x : BA = x - \frac{x^3}{a^2}$ . Sunt autem RA, & KB æquales inter se, ut patet, & singulæ = MR =  $x$ . Quare erit tota KR =  $3x - \frac{x^3}{a^2} = b$ , sive  $x^3 - 3a^2x + a^3b = 0$ .

2. Ejus æquationis una radix erit chorda RM : reliquæ duæ, si assumantur trientes circuli MM', MM'', erunt chordæ RM', RM'', quia arcus RMM', & RMM'M'' erunt trientes arcuum RKIM'RK, RKIM''RKIM''RK, qui omnes eâdem æquatione contineri debent.
3. Patet autem, debere esse  $b$  non majus, quam  $2a$ , cum chorda diametro major esse non possit.
4. Posito M' in codem semicirculo cum RMK, & M'' in opposito, patet, factio  $b = 2a$ , abire K in I, adeoque arcum RM fore trientem semiperipheriæ, & idcirco RM'' itidem eidem æqualem fore; ac chordas RM, RM'' æquales radio RO, punctum vero M' abiturum in I: factio autem  $b = 0$ , evanescit tam RK, quam RM, & fiunt RM', RM'' æquales inter se, chordæ nimirum graduum 120, quæ sunt ad radium in ratione subduplicata 3 ad 1.
5. In reliquis casibus erit RM radix minima, RM' maxima, quæ habebit signum contrarium signo reliquarum, & contrarium signo valoris  $b$ .
6. Facile inveniuntur ex radices per tabulas sinuum. Fiat ut IR =  $2a$  ad RK =  $b$ , ita radius ad sinum anguli, qui dicatur A: capiantur  $\frac{1}{3}A$ ,  $60^\circ$  +  $\frac{1}{3}A$ ,  $60^\circ - \frac{1}{3}A$ , & factis, ut radius ad sinum cuiusvis ex iis tribus, ita RI =  $2a$  ad quartum: habebuntur tres chordæ RM, RM', RM''.
7. Sunt enim chordæ RK, RM, RM', RM'', sinus angulorum, quos metiuntur dimidii sui arcus, ad radium RI, & dimidia arcuum MM', MM'' sunt gradus 60.
8. Mutatâ RK, mutantur omnes tres chordæ RM, RM', RM'', ita tamen, ut mutatio primæ aequetur mutationibus reliquarum simul sumptis.
9. Nam crescente arcu RM, debet crescere arcus RM', qui oritur a summa ipsius RM, &  $120^\circ$ , & decrescere arcus RM'', qui oritur a differentia, adeoque crescent chordæ RM, RM', & decrescat chorda RM''. Cum vero debeat remanere RM' æqualis summæ RM, RM'', debet ejus incrementum æquari excessui incrementi RM supra decrementum RM'', adeoque incrementum RM' cum decremente RM'' debet æquari soli incremento RM.
10. Hæc harum radicum proprietas hlc probe notanda est, magno nimirum futura usui ad obtinendum præcipuum totius perquisitionis scopum.

16. Capiatur ab I versus E recta IG, quæ sit ad IE in ratione duplicita OH ad OC : centro O, intervallo OI describatur circulus occurrens axi iterum in R : centro R, intervallo RG inveniatur in peripheria ejus circuli punctum K : assumatur arcus RM triens RK : centro R, intervallo RM inveniatur in axe punctum N ad partes oppositas puncto G respectu R : erigatur demum ordinata NT ad arcum ICD jacentem ad eandem axis plagam cum H, & recta HT determinabit positionem radii quæsiti PL.

17. Constructionis ratio est manifesta. Cum sit  $OC^2 = c^2$  :  $OH^2 = r^2 :: IE = 4\alpha : IG = \frac{4\alpha r^2}{c^2}$ , &  $IR = 2\alpha$ ; erit  $RG = 2\alpha - \frac{4\alpha r^2}{c^2}$ , cui capienda erat æqualis chorda RK. Tum RM erit  $= x$ , ut oportebat. Quod si, facta IG majore, quam IR, abeat RG in directionem oppositam in Rg; mutabit directionem etiam arcus RK abiens in Rk, & RM in Rm, adeoque & RN in Rn, quæ adhuc debebit esse contraria Rg, uti fuerat præscriptum.

18. Scholium 1. Aequatio illa gradus tertii præter radicem RM habet illas duas, quæ inveniuntur assumptis trientibus MM', MM" totius peripheriæ. Pro casu IG minoris, quam sit IR, ponatur M' in eodem semicirculo cum K, M, & M" in opposto, ac pro casu IG majoris, abeuntis nimirum in Ig, mutata directione RK, RM in Rk, Rm, retineantur m', m" in semicirculis, in quibus erant M', M", ut jam sint m, m" in eodem, m' in opposto. Sumatur autem tam RN" in primo casu, quam Rn" in secundo versus E, & RN', Rn' versus I, ducaturque ordinata N'T', vel n't' ad arcum eundem ICD, ordinata vero N"T", vel n"t" ad oppositum IC'D'.

19. Plagæ punctorum N determinantur a valore radicum: in primo casu, existente RG positiva, radix maxima est RM', & debet esse negativa, reliquis positivis, & idcirco RN" jacet cum RN ad eandem plagam, RN' ad oppositam. In secundo casu existente Rg negativa, & migrante m ad partes m", radix maxima evadit Rm", & remanet sola positiva, reliquis negativis: quam ob

ob causam mutat directionem  $Rm$ , sed eam retinet tam  $Rm'$ , quam  $Rm''$ . Porro idem exhibet etiam motus continuus eorum punctorum : solum punctum  $M$  delatum ad  $R$  progreditur ita , ut  $RM$  evanescens in  $R$  , abeat in negativam in  $Rm$ .

20. *Schol. 2.* Inventis punctis  $N$  , facile determinantur puncta  $T$  sine ullo curvæ præsidio . Capienda erit  $NT$  ad  $OC$  in sesquiplicata ratione  $IN$  ad  $IO$  , sive fieri debet , ut  $IO^3$  ad  $IN^3$  , ita  $OC^2$  ad  $NT^2$  , cuius quadrati latus exhibebit rectam quæsitam  $NT$  .

21. Notandum quoque , quælibet puncta  $N$  determinare per suas  $TN$  productas ad arcum appositum etiam alia puncta , quæ exhibebunt radios pertinentes ad punctum  $H'$  positum ex parte opposita versus  $C'$ . Nam idem punctum  $G$  pertinet ad  $H'$  , quod ad  $H$  ; cum  $IG$  determinetur per quadratum  $OH$  , quod facta  $OH$  negativâ in  $OH'$  adhuc remanet positivum .

22. *Schol. 3.* Proderit plurimum evolvere casus præcipuos pendentes a diversa positione punctorum  $H$  , &  $G$  , ductis per  $S$  , &  $R$  ordinatis , quæ occurrant curvæ in punctis  $V, V', Z, Z'$ . Porro haberi debet ob oculos semper nexus inter  $G$  , &  $H$  , cum sit  $IG:IE::OH^2:OC^2$  per constructionem . Pro varia positione puncti  $H$  in recta  $OC$  acquirit  $G$  variam positionem in recta  $IE$  , & ab ipsa pendent positiones punctorum  $M, N, T, P, L$ . Est nimirum chorda  $RK=RG$  , arcus  $RM=\frac{1}{3}RK$  ,  $MM'=MM''=120^\circ$  , recta  $IL=\frac{1}{3}IN$  , adeoque quadratum  $AP$  proportionale ipsi  $IL$  , est itidem proportionale  $IN$  , rectæ autem  $IO, OR, RS, SE$  sunt æquales inter se .

23. Si punctum  $H$  abierit in centrum  $O$  , evanescente  $OH$  , evanescet etiam  $IG$  , & puncto  $K$  abeunte in  $I$  cum  $G$  , erit  $RM$  triens semiperipheriæ , cui idcirco fiet æqualis &  $RM''$ ; puncto  $M'$  abeunte itidem in  $I$ . Abibunt igitur in  $I$  & puncta  $N', T', L'$  , nimirum unus e tribus radiis erit is ipse , qui defertur per axem  $AI$  , quem utique patet debere transire per centrum  $O$ . Chordis autem  $RM$  ,  $RM''$  factis æqualibus radio circuli  $RO$  , abibunt & puncta  $N, N''$  in  $S$  , puncta  $L, L''$  in  $O$  , contactus  $T, T''$  in  $V, V'$  , puncta autem  $P, P''$  abibunt in ejusmodi puncta

Etta Y, Y', ut sit tam AY, quam AY' ad AF in subduplicata ratione IO ad IB, nimirum 3 ad 4, sive proxime ut 87 ad 100.

24. Et quidem ubicumque fuerit H extra centrum O, ad ipsum non devenient, nisi soli tres radii delati a tribus punctis P jacentibus in eodem plano cum ipso, & axe determinatis per propositam constructionem. Sed ad centrum O præter radium, qui venit per axem, venient infiniti numero radii, nimirum ii omnes, qui transeunt per peripheriam circuli habentis YY' pro diametro, cum plana omnia in eo casu transeant per punctum H tum jacens in ipso axe in O.

25. Si captis in OC, OC' punctis q, q' ita, ut quadratum Oq, Oq' sit dimidium quadrati OC, punctum H abeat in q, vel q'; erit IG dimidia IE, adeoque punctum G abibit in R, evanescentibus tam RK, quam RM. Is est casus, in quo unâ e tribus radicibus æquationis RM factâ = 0; reliquæ binæ RM', RM'' evadent æquales inter se, & erunt singulæ ad IR in subduplicata ratione 3 ad 4, sive proxime ut 87 ad 100; cadet N in R, & P in quoddam punctum Q ita, ut sit itidem quadratum AQ dimidium quadrati AF, uti est IR dimidia IE, eritque ibi AQ:AF::Oq:OC. Sumptis autem Rr, Rr' versus I, & E, quæ sint ad IR in subduplicata ratione 3 ad 4, abibunt N', N'' in r, r'.

26. Si fuerit OH adhuc major; jam IG evadens major, quam IR abibit in Ig. Factâ Rg negativâ, debebit mutare directionem etiam arcus RMK juxta num. 18, abeunte K in k, M in m, N in n infra R, N' in n' supra r, N'' in n'' supra r'; perget autem recedere P ab F, P' ab A, & accedere P'' ad F'.

27. Si punctum H abierit in C; erit Ig = IE, adeoque Rk iterum æqualis RI, abeunte m' in I, n' in E, & factis Rm, Rm' æqualibus inter se, & æqualibus radio RO, abibunt ambo n', n in O. Nimirum contactus t' abibit in D', & bini contactus t', t in C, abeunte radio P''H in illum F'D'C extreum, & binis P'HT', PTH in unicum, tangentem curvam in C, & transeuntem per quoddam punctum X, quod quidem secabit bifariam rectam AF, cum per num. 10 debeat tum esse  $AP^2 = AX^2 : AF^2 ::$

IO : IE :: 1 : 4 (num. 8, & 10), licet id figura non exprimat omnibus exiguum distantiam rectæ F'AF a curva D'ID.

28. *Coroll.* Ad quodvis punctum assumptum in margine circelli deveniunt bini radii, ad quodvis positum ubi vis inter peripheriam, & centrum deveniunt tres, ad centrum ipsum numero infiniti.

29. Patet ex evolutione casuum expositorum in scholio superiore.

30. *Scholium 4.* Erit admodum utile considerare nexus omnem punctorum P, T, N, H, & eorum motus pendentes a se invicem ad acquirendam ideam admodum distinctam casuum omnium, quæ viam sternet pronam, & expeditam ad considerandam ipsam luminis distributionem, quæ est totius perquisitionis caput præcipuum.

31. Si punctum H digressum a centro O percurrat totum radius OC; punctum P' percurret rectam AX, punctum P rectam YX, punctum P'' rectam Y'F': punctum N', & n' rectam IrO : N, & n rectam SRO : N'', & n'' rectam Sr'E: punctum T', & t' arcum IC : T, & t arcum VZC : T'', & t'' arcum V'D', & iis æquales sunt motus ex parte opposita, puncto H' percurrente OC'.

32. Si punctum P (designabimus h̄c unicâ litterâ sine accentibus casus omnes pertinentes ad H, & H') motu continuo excurrat ab F' ad F, unicam quandam velut oscillationem perficiens; punctum contactus T percurret itidem motu continuo arcus D'C'I, ICD unicam itidem oscillationem conficiens in curva continua D'ID: punctum N ipsi respondens descendet per EI, tum ascendet per IE conficiens oscillationem duplicem: punctum H descendet a C, & perficiet oscillationem triplicem: primam per COC', dum abit P per F'X', N per EO, T per D'C', secundam per C'OC', dum abit P per X'AX, N per OIO, T per C'IC, tertiam iterum per COC', dum abit P per XF, N per OE, T per CD.

33. Quoniam punctum H in singulis ejusmodi oscillationibus semel advenit ad quodvis punctum assumptum intra diametrum C'OC,

C'OC, præter ipsa puncta extrema C', C, ad quorum utrumvis advenit tantummodo bis in oscillationum limitibus; idcirco ad quodvis punctum H advenient tres radii, & ad utrumvis e punctis C', C duo tantum. Ad centrum O etiam advenient tantummodo tres e radiis jacentibus in plano quovis transeunte per axem. Sed quoniam advenient radii pertinentes ad omnia ejusmodi plana'; in eo habebuntur simul infiniti.

34. Patet autem, in secunda sesquioscillatione puncti H redire omnia eodem prorsus modo, quo in prima, sed ordine retrogrado.

35. *Scholium 5.* Si pro puncto H assumatur quodvis punctum d in recta C'OC producta ex parte ultravis; quadratum Od fit majus quadrato OC, adeoque & Ig major, quam IE, & Rg major diametro RI. Quamobrem chorda ipsi æqualis in circulo aptari non potest. Is est casus, in quo valor  $\frac{4ar^2}{c^2}$  evadit major, quam  $4a$ , &  $2a - \frac{4ar^2}{c^2}$  major, quam  $2a$ . In eo casu æquatio  $x^3 - 3a^2x + a^2(2a - \frac{4ar^2}{c^2}) = 0$ , habet unicam radicem realem, quæ non pertinet ad trisectionem anguli, sed ad inventionem duarum mediarum continue proportionalium inter duas datas: ejus expressio habetur tota realis per formulas notissimas radicales: ea rite tractata hoc reducitur

$$\alpha\sqrt[3]{(\frac{2r^2 - c^2 + 2r\sqrt{r^2 - c^2}}{c^2})} + \alpha\sqrt[3]{(\frac{2r^2 - c^2 - 2r\sqrt{r^2 - c^2}}{c^2})},$$

cujus valor debet esse major, quam  $2a$ , adeoque punctum N abiaret ultra E, & determinaret contactum in arcu IC'D' opposito puncto h producto ultra D'. Illuc nimirum adveniret radius unicus pertinens ad aperturam productam ultra F', adeoque majorem datâ (\*).

35. *Fa-*

---

(\*) i. Punctum quidem d adhuc est ejusmodi, ut perpendicularis ex ipso ducta ad axem occurrat ipsi axi supra punctum I, & secet curvam alicubi in C, quam ob causam ad ipsum etiam pertinet inventa æquatio. Sed si ea perpendicularis caderet infra I; immutanda esset paulisper calculi ratio. Illud quidem satis

36. Facile autem demonstrari potest illud, ex omnibus radiis transeuntibus per aperturam FF' devenire ad quodvis punctum assumptum intra angulum F'BF radium unicum: ad quodvis punctum trilinei D'BC', vel DBC contenti binis rectis, & arcu D'C', vel binis rectis, & arcu DC duos: ad quodvis punctum quadrilinei BC'ICB contenti binis rectis, & binis arcubus C'I, CI tres: ad quodvis punctum situm extra ejusmodi quadrilineum, sed in-

Tom. II.

D d

tra

satis erat pro investiganda distributione luminis per circulum C'OC, & per totum ejus planum, sed ad eam habendam pro plano quovis, sive situm sit supra I, sive per ipsum transeat, sive cadat infra, ita instituenda est analysis, ut non pendeat a concursu ejus perpendicularis cum ipsa curva. Id autem hic præstabimus.

2. Ad id præstandum considerentur positiones omnes puncti H, per quod radius transire debeat. Sint in fig. 4 ID'X', IDX biña crura ejus parabolæ gradus tertii, ad cuius formam accedit caustica in infinitum prope cuspidem I, & jaceat ubicunque punctum H, per quod debeat transire radius contingens ipsam curvam in T, & occurrens axi in L. Ducta ex eo recta perpendiculari ad axem, tres erunt casus, quorum singuli in alios subdividentur: vel enim ea recta incurret in ipsum axem supra I versus curvam in O, vel incurret in ipsum I, puncto H abeunte in h, vel infra ipsum in O', puncto H abeunte in H'. In primo autem casu recta OH incurret alicubi in curvam in C, & punctum H jacebit vel in axe in O, vel respectu ipsius axis citra C, vel in C, vel ultra C; in secundo, & tertio vel erit in axe in ipso I, aut O', vel cadet extra ipsum.

3. Ut unica solutio transferri possit ad omnes eos casus, applicetur ipsa primo casui, & in eo consideretur contactus T cadens ad partem axis contrariam respectu H; nam ex ea parte habetur semper aliqua solutio realis in omnibus casibus, & ducta ordinata TN, tum ex quovis alio puncto p assumpto ad arbitrium in axe supra I ordinata pq, captaque OR æquali, & contraria OI, ponatur IO = OR = a, OH = r, Ip = b, pq = c, RN = x: eritque (juxta num. 8) IL =  $\frac{1}{3}$  IN =  $\frac{1}{3}(x + 2a)$ , LN =  $\frac{2}{3}(x + 2a)$ , OL =  $\frac{1}{3}(x + 2a)$  - a =  $\frac{1}{3}(x - a)$ .

4. Erit autem (juxta num. 5)  $Ip^3 = b^3 : IN^3 = (x + 2a)^3 :: pq^2 = c^2 : NT^2 = \frac{c^2(x + 2a)^3}{b^3}$ . Rursum  $OL^2 = \frac{1}{9}(x - a)^2 : LN^2 = \frac{4}{9}(x + 2a)^2 :: OH^2 = r^2 : NT^2 = \frac{4r^2(x + 2a)^2}{(x - a)^2} = \frac{c^2(x + 2a)^3}{b^3}$ . Hinc  $\frac{4b^3r^2}{c^2} = (x + 2a)(x - a)^2$ , quod exhibet æquationem  $x^3 - 3a^2x + a^3(2a - \frac{4b^3r^2}{a^2c^2}) = 0$ .

5. Si

## S U P P L E M E N T U M

tra angulum  $C'BC$  cruribus utcumque in infinitum productis, iterum unicum; ad reliqua puncta omnia nullum. Sed iis omissis progrediemur ad determinandam distributionem luminis per circulum  $COC$ .

37. Ad ejusmodi perquisitionem notandum illud, quod patet: si concipiatur aliud punctum  $b$  quocunque in radio  $OC$  cum punctis  $P, P', P''$  ipsi respondentibus in apertura  $FF'$ , lu-

men

---

5. Si jam punctum  $p$  arbitrarium ita assumatur, ut congruat cum  $O$ , fiet  $c = OC$ , &  $b = a$ , adeoque  $x^3 - 3a^2x + a^2(2a - \frac{4ar^2}{c^2}) = 0$  æquatio illa ipsa, quam evolvimus a num. 15, in qua nimirum si  $OH$  non sit major, quam  $OC$ , sive  $r$  major, quam  $c$ , habentur radices tres reales, quas exhibet illa trisection arcus circularis: sed earum binæ fiunt inter se æquales, ubi abeat  $H$  vel in  $O$ , existente tum æquatione  $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$  cum radicibus  $a, a, - 2a$ , vel in  $C$ , existente tum æquatione  $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$  cum radicibus  $-a, -a, + 2a$ : habenturque generaliter quidem in figura 1 tres radii  $PH, P'H, P''H$ , sed ubi  $H$  abit in  $O$ , abeuntibus  $P, P''$  in  $Y, Y'$ , ac  $P'$  in  $A$ , adhuc sunt tres: & ubi  $H$  abit in  $C$ , abeuntibus  $P, P'$  in  $X$ , ac  $P''$  in  $F'$ , remanent tantum duo: illi autem, qui veniunt ad centrum  $O$  ex  $Y', Y$ , sunt tantum duo ex omnibus advenientibus in unico plano transeunte per axem: sed cum in omnibus ejusmodi planis jaceat ipsum  $O$ , & in singulis habeantur bini ejusmodi radii; infiniti numero adveniunt ad punctum  $H$  abiens in  $O$  num. 28.

6. In secundo casu, in quo punctum  $O$  abit in  $I$ , fit  $a = 0$ , adeoque æquatio  $x^3 - \frac{4b^3r^2}{c^2} = 0$ . In ea si etiam  $b$  figuræ 4 abeat in  $I$ ; evanescit &  $r$ , & evadit  $x^3 = 0$ , quo nimirum casu omnia puncta  $P, P', P''$  figuræ 1 abeunt in unicum  $A$ , solo radio, qui per axem advenit, abeunte ad  $I$ . Sed si  $b$  sit extra  $I$ ; habet  $x$  unicum valorem realem  $b\sqrt[3]{\frac{4r^2}{c^2}}$ , qui facile admodum construitur. Si enim in figura 4 ita capiatur  $Ip$ , ut sit  $pq = 2Ih$ , evadet  $c = 2r$ , adeoque  $x = b = Ip$ .

7. Capiatur igitur  $Ie$  dupla  $Ih$  in directione contraria, & ex  $e$  erigatur recta axi parallela: ejus occursum cum arcu curvæ exhibebit quæsitum punctum  $T$ . Erit enim  $NT = Ie$  dupla  $Ih$ , & abeunte  $p$  in  $N$ , fiet  $pq$  æqualis ipsi  $NT$ . Est autem admodum expedita etiam directa demonstratio constructionis adeo simplicis, erit enim  $IL : IN = eT : hi : he :: 1 : 3$ , ut oportebat juxta num. 8. In tertio casu, in quo  $O'$  cadit infra  $I$ , abit infra  $I$  etiam  $R'$ , ac mutata directione rectæ  $IO'$ , mutatur signum valoris  $a$ , & æquatio evadit  $x^3 - 3a^2x + a^2(-2a - \frac{4b^3r^2}{a^2c^2}) = 0$ , sive  $x^3 - 3a^2x - a^2(2a + \frac{4b^3r^2}{a^2c^2}) = 0$ , quæ,

men omne, quod transmittitur per annulos genitos a conversione linearum  $Pp$ ,  $P'p'$ ,  $P''p''$  circa axem AI, abire in annulum genitum a linea  $Hh$ . Radius enim PH motu continuo puncti P usque ad  $p$  abit in  $ph$ , & everrit quodammodo spatia  $Pp$ ,  $Hh$ : atque idem habetur in reliquis.

38. Porro inde facile eruitur sequens lemma, quod viam sternit ad solutionem sequentium problematum.

D d 2

39. Lem-

quæ quidem æquatio, ubi posito  $H'$  extra  $O'$  valor  $r$  non evanescit, habet unicam radicem realem ob valorem inclusum parenthesi majorem valore  $2a$ , eamque habet positivam, & majorem quam  $2a$ .

9. Ea æquatio invenietur immediate, si fiat  $IO' = O'R' = a$ , &  $R'N = x$ , tum enim habetur  $IN = x - 2a$ , &  $OL = \frac{1}{3}(x + a)$ , adeoque  $(x - 2a)X(x + a)^2$ , ut num. 4, mutato tantummodo signo valoris  $a$ , sive  $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = \frac{4b^3r^2}{c^2}$ , sive  $x^3 - 3a^2x - a^2(2a + \frac{4b^3r^2}{c^2}) = 0$ .
10. Quod si valor arbitrarius  $b$  fiat  $= a$ , assumpta nimirum  $Ip = IO'$ ; habetur  $x^3 - 3a^2x - a^2(2a + \frac{4ar^2}{c^2}) = 0$ , quæ æquatio differt ab æquatione reducta primi casus in solis signis postremi termini. Formula autem eam radicem exprimens cum solo signorum discriminè invenietur  
 $a\sqrt[3]{(\frac{2r^2 + c^2 + 2r\sqrt{(r^2 + c^2)}}{c^2})} + a\sqrt[3]{(\frac{2r^2 + c^2 - 2r\sqrt{(r^2 + c^2)}}{c^2})}$ .

11. Si autem abeunte  $H'$  in  $O'$  fiat  $r = 0$ ; habetur  $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$ , cum tribus radicibus  $-a$ ,  $-a$ ,  $+2a$ . Sed priores illæ, quæ in primo casu obvenerant, abeunte  $H$  in C, & exhibebant binos valores  $x = RO$ , cum binis punctis contactuum abeuntibus in C, hic nullius sunt usus, cum terminentur infra R' ad punctum axis, cui respondent ordinatæ ad curvam imaginariæ: postrema terminatur ad I, & exhibet unicam solutionem realem, qua ostenditur, ad ipsum  $O'$  devenire unicum radium, nimirum illum, qui defertur per axem.

12. Hæc quidem locum habent; si consideretur curva integra producta utcumque ultra puncta D', D figuræ i independenter a limitatione aperturæ F'F, quæ e tota curva abscondit solos arcus finitos ID', ID. Omnia puncta, quæ respectu rectæ F'D'B'C in infinitum productæ jacent versus lenticem, habent unam tangentem ejus arcus, qui post arcum ID' sursum producitur, & idem accidit respectu productionis arcus ID punctis omnibus jacentibus eodem modo respectu rectæ FD'BC'. Ex demenda sunt a tangentibus exhibentibus radios ad ea puncta delatos definitis per superiores æquationes. Huic animadversioni innituntur ea, quæ proponuntur sequenti num. 36.

39. *Lemma.* Quantitas luminis delati ad annulum  $Hh$  ab annulis  $P'p'$ ,  $P''p''$  simul, æquatur lumini delato a solo annulo  $Pp$ .

40. Nam ex quantitatibus luminis sunt proportionales ipsis annulis, cum lumen uniforme deferatur ad totam aperturam  $FF'$ . Porro illi annuli quæ differentiæ circulorum habentium pro radiis  $AP$ ,  $AP'$ ,  $AP''$  a circulis habentibus radios  $Ap$ ,  $Ap'$ ,  $Ap''$ . Differentiæ eorum circulorum sunt, ut differentiæ, quæ habentur inter quadrata radiorum, quæ quadrata cum sint per num. 8 ut rectæ  $IN$ ,  $IN'$ ,  $IN''$ , erunt illi annuli, ut harum differentiæ. Porro differentiæ harum sunt eadem, ac differentiæ rectarum  $RN$ ,  $RN'$ ,  $RN''$ , cum pendeant a sola mutatione punctorum  $N$ ,  $N'$ ,  $N''$ , adeoque sunt eadem, ac differentiæ chordarum  $RM$ ,  $RM'$ ,  $RM''$ , ipsis æqualium. Cum igitur differentia solius chordæ  $RM$  æquetur per num. 8 adnotacionis ad num. 15 binis differentiis chordarum  $RM'$ ,  $RM''$  simul; etiam solus annulus  $Pp$  æquatur binis  $P'p'$ ,  $P''p''$  simul sumptis, & quantitas luminis delati ab illo quantitati luminis delati ab his. Q. E. D.

41. *Corol.* Lumen transmissum ab annulo  $XY$  æquatur lumini transmisso a circulo  $AX$ , & annulo  $YF$ .

42. Nam per num. 31 abeunte  $H$  ab  $O$  ad  $C$  percurrit  $P$  rectam  $YX$ ,  $P'$  rectam  $AX$ ,  $P''$  rectam  $Y'F'$ . Hinc lumen delatum ab annulo  $XY$  æquatur lumini delato simul a circulo  $AX$ , & annulo  $Y'F'$ , qui est idem, ac annulus  $YF$ , cum in media conversione abeat  $YF$  in  $Y'F'$ .

43. *Scholium.* Id quidem patet etiam ex eo, quod per numer. 32, 25, 27 puncta  $A$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $F$  respondent punctis  $I$ ,  $O$ ,  $S$ ,  $E$ , adeoque quadrata, & circuli  $AX$ ,  $AY$ ,  $AF$  sunt, ut rectæ  $IO$ ,  $OS$ ,  $SE$ , & circulus  $AX$ , annulus  $XY$ , ac annulus  $YF$ , ut rectæ  $IO$ ,  $OS$ ,  $SE$ , quarum media æquatur binis extremis simul.

44. Quin immo cum  $OI$ , &  $SE$  æquentur inter se, patet, summam omnium annularum  $P'p'$  æquari summam omnium  $P''p''$ , licet singuli singulis non sint æquales.

45. *Probl. 2.* Invenire rationem luminis contenti circello interiore  $OH$ , & annulo exteriore  $HC$  ad totum lumen transiens per totum circellum  $OC$ .

46. Quo-

46. Quoniam lumen allapsum ad quemvis annulum  $Hh$  a binis locis  $P'$ ,  $P''$ , æquatur simul lumini allapso a solo loco  $P$ , satis erit invenire rationem luminis delati ex hoc solo postremo. Porro inde defertur ad circellum  $OH$  lumen pertinens ad annulum  $YF$ , & ad  $HC$  lumen pertinens ad annulum  $PX$ . Sunt igitur ea lumina, ut ii annuli, nimirum ut differentiæ circulorum habentium radios  $AY$ ,  $AP$ , &  $AP$ ,  $AX$ , sive ut differentiæ quadratorum eorundem radiorum, nimirum per num. 8 ut differentiæ rectarum  $IS$ ,  $IN$ , &  $IN$ ,  $IO$ , vel ut rectæ  $SN$ ,  $NO$ . Quare tres rectæ  $SN$ ,  $NO$ ,  $SO$  expriment lumen contentum circello  $OH$ , annulo  $HC$ , & toto circello  $OC$ , quod erat inveniendum.

47. *Corol. 1.* Luminis quantitas erit eadem in circello interiore, & annulo exteriore, ubi puncto  $H$  abeunte in  $q$ , fuerit area circelli æqualis areæ annuli.

48. Nam puncto  $H$  abeunte in  $q$ , abit per num. 25  $N$  in  $R$ , & fit  $SN = NO$ . Porro ibidem est quadratum  $OH$  dimidium quadrati  $OC$ , & proinde circellus interior dimidius circelli totius, adeoque æqualis residuo annulo exteriori.

49. *Corol. 2.* Semisumma luminis totius ad semidifferentiam luminis contenti circello interiore, & annulo exteriore est, ut radius circuli  $OR$  ad chordam  $RM$ , existente majore illo, vel hoc, prout  $OH$  fuerit major, vel minor quam  $Oq$ .

50. Est enim  $OR$  dimidia summæ  $OS$ , &  $RN$  æqualis  $RM$  est semidifferentia rectarum  $SN$ ,  $NO$ . Circellus autem  $OH$  continebit plus, vel minus dimidio contento in circello  $Oq$ , prout fuerit major, vel minor ipso.

51. *Probl. 3.* Determinare rationem densitatis luminis in diversis locis  $H$  circelli  $OC$ .

52. Concipiatur radius  $ph$  infinite proximus radio  $PH$ , pro quorum intersectione assumi poterit juxta num. 8 contactus  $T$ , & erit densitas radiorum in  $Hh$  ad densitatem in  $Pp$ , ut annulus  $Pp$  ad annulum  $Hh$ . Is annulus ad hunc est conjunctim, ut ejus latitudo  $Pp$  ad latitudinem  $Hh$ , & ut peripheria circuli habentis pro radio  $AP$  ad peripheriam circuli habentis pro radio  $OH$ . Prima ratio est  $PT$  ad  $TH$ , sive  $AN$  ad  $NO$ , secunda radii

radii AP ad OH , sive AL ad OL . Quare illa ratio composita est AN  $\times$  AL ad NO  $\times$  OL . Porro ob tantam distantiam puncti A a punctis N , L proximis puncto I , poterit haberi utraque AN , AL pro æquali constanti AI , adeoque cum & densitas in an- nulo  $P\varphi$  sit constanter eadem per totam aperturam , nimisum den- sitas radiorum incidentium ; erit densitas in H reciproce , ut re- ctangulum NO  $\times$  OL , sive ob SN triplam OL per num. 14 , re- ciproce ut rectangulum ON  $\times$  NS , quæ quidem ratio pertinebit ad densitatem luminis ingesti in H tam ex unico loco P , quam ex omnibus tribus simul , cum per num. 39 hoc sit illius duplum . Quamobrem patet haberi id , quod erat inveniendum .

53. *Schol.* 1. Ratio , quæ determinata est pro lumine veniente ex P , est generalis etiam pro lumine , quod veniat e singulis lo- cis P' , P'' , comparando vel singula ejusmodi puncta inter se in diversis positionibus , vel alia cum aliis , & cum ipso puncto d , si productâ aperturâ , & causticâ , radii eo devenirent , assumen- do suum N , quod caderet ultra E ; ubique enim demonstratio est eadem . Præterea patet , ad videndum omnem progressum densi- tatis satis fore , si consideretur nexus inter motum puncti H ab O ad C , & motum puncti N , vel n ab S ad O juxta num. 31 .

54. *Corol.* 1. Densitas luminis erit reciproce , ut differentia qua- dratorum semidiametri OR , & chordæ RM .

55. Est enim rectangulum ON  $\times$  NS differentia quadratorum OR , RN , & RM æquatur ipsi RN .

56. *Corol.* 2. Densitas eadem in centro O , & in margine C excrescit in infinitum , a centro usque ad punctum q perpetuo decrescit , tum usque ad marginem perpetuo crescit , ut idcirco sit minima in ipsa distantia Oq , cuius quadratum est dimidium quadrati totius OC .

57. Nam rectangulum ON  $\times$  NS evanescit tam puncto N ab- eunte in S , quam puncto n in O , perpetuo crescit puncto N , vel n accedente ad medium R , ubi fit maximum : puncto au- tem H abeunte utravis ex parte ad q , accedit G , vel g ad R , adeoque etiam N , vel n , quod in ipsum recidit , ubi H appel- lit ad ipsum q .

58. Co-

58. *Corol. 3.* Eadem densitas æqualis est in iis binis distantiis a centro O, quarum quadrata æque differunt a quadrato Oq dimidio quadrati OC.

59. Quoniam enim recta IG, vel Ig est proportionalis quadrato OH; ubi hoc quadratum æque distiterit a dimidio quadrati OC, rectæ IG, Ig æque different ab IR dimidia IE, adeoque RG, Rg æquales erunt, ac proinde æquales & RK, Rk, & RM, Rm, & RN, Rn, & ONXNS, OnXns.

60. *Corol. 4.* Densitas minima in q ad densitatem medium, quæ haberetur, si totum lumen æqualiter diffunderetur per circellum OC, est ut 2 ad 3.

61. Nam ob densitatem constantem in tota apertura exprimet densitatem in Hb luminis venientis ex solo annulo Pp is annulus divisus per annulum Hb, sive  $\frac{ANXAL}{NOXOL} = \frac{3ANXAL}{ONXNS}$ , a-

deoque totius luminis densitatem  $\frac{6ANXAL}{ONXNS}$ : densitatem autem medium circulus radio AF divisus per circulum radio OC, nimirum  $\frac{AB^2}{BO^2} = \frac{9AB^2}{OR^2}$ , cum per num. 10 sit  $OB = \frac{1}{3}IO = \frac{1}{3}OR$ . Cum igitur AN, & AL possint haberi pro æqualibus AB, & abeunte H in q, adeoque N in R, fiat  $ONXNS = OR^2$ , erit illa densitas ad hanc ut 6 ad 9, sive ut 2 ad 3.

62. *Scholium 2.* Si consideretur densitas luminis venientis ab unico loco, facile invenietur ratio variationis ipsius habitæ, dum punctum P percurrit totam aperturam FF', quo tempore punctum N juxta num. 32 perficit duas oscillationes, descendendo per EI, & ascendendo per IE, ac punctum H tres, primam per COC', dum abit P per FX', & N per EO, secundam per C'OC, dum abit P per X'AX, & N per OIO, tertiam iterum per COC', dum abit P per XF, & N per OE.

63. Initio primæ oscillationis rectangulum ONXNS, abeunte N in E evadit OEXES = 3OR<sup>2</sup>, tum perpetuo decrescit, donec abeunte P in Y', & H in O, ac N in S, id evanescat cum NS: deinde iterum crescit in progressu P ab Y' ad Q', abeunte H ab

H ab O ad  $q'$ , & N ab S ad R , ubi recidente N in R fit maximum , æquale nimirum quadrato OR . Inde iterum decrescit in progressu P a Q' ad X' , H a  $q'$  ad C' , N ab R ad O , ubi iterum evanescit , evanescente ON .

64. Quare initio primæ oscillationis ex densitas minima in margine C , inde perpetuo crescit versus centrum O , in quo excrescit in infinitum , tum inde decrescit perpetuo , & evadit minima in  $q'$  , in ea distantia , cuius quadratum est dimidium quadrati OC' . Ibi iterum incipit augeri , & post incrementum continuum abit in fine ipsius primæ oscillationis in infinitum in C' .

65. In secunda oscillatione abeunte P ab X' ad A , & H a C' ad O , N ab O ad I , rectangulum ONXNS perpetuo crescit , evadit maximum in I , ubi iterum fit  $= 3OI^2 = 3OR^2$  , tum decrescit per eosdem gradus , abeunte P ab A ad X , H ab O ad C , & N ab I ad O , ubi iterum evanescit .

66. Quare densitas initio secundæ oscillationis decrescit usque ad centrum , ubi evadit minima , tum crescit perpetuo usque ad marginem C , in quo iterum excrescit in infinitum .

67. In tertia oscillatione , cum omnia debeant redire , ut in prima ordine retrogrado , densitas ex infinito marginis C decrescit perpetuo usque ad  $q$  , ubi fit minima , tum augetur perpetuo usque ad centrum , ubi excrescit in infinitum , ac inde perpetuo decrescit usque ad marginem C' .

68. In omni ejusmodi excursione abit in infinitum bis in centro in medio primæ , & postremæ oscillationis , bis in margine in initio , & fine secundæ , acquirit minimum bis in margine in initio primæ , & fine tertiaræ , semel in centro in medio secundæ , semel in puncto  $q'$  in prima post , & in  $q$  in tertia ante appulsum ad centrum .

69. Porro in initio primæ in C , in medio secundæ in O , & in fine tertiaræ in C' densitas est æqualis , cum illud rectangulum ubique fiat  $= 3OR^2$  . In punctis  $q$  ,  $q'$  est triplo major , cum ibidem idem rectangulum sit  $= OR^2$  . Minimum autem illud in C , & C' oritur ex eo , quod apertura non procurrat ulterius ultra F , & F ; nam si ea procurreret eundo a C versus d , vel a

C' ver-

**C'** versus **d'**, pergeret imminui continuatâ mutatione, quam habuit a **q** ad **C**, & a **q'** ad **C'**, procurrente N ultra E, & aucto idcirco adhuc rectangulo ONXNS.

70. Singula e tribus punctis **P"**, **P'**, **P** implent totum circulum descriptum radio **OC** lumine diverso; primum quidem juxta num. 42 lumine annuli **F'Y'**, secundum lumine circuli **AX**, tertium lumine annuli **XY**, nam **FY**, **X'A**, **X'Y'** dum transmittunt lumen ad radium **OC'**, idem eorundem illorum annulorum lumen adhibent, cum ad eosdem pertineant, figurâ circa axem revolutâ. Eæ luminum quantitates sunt juxta num. 43, ut rectæ **ES**, **IO**, **OS**, sive 1, 1, 2, uti debuit esse, cum **P** solum ingerat quantitatem æqualem illatae a **P'**, & **P"** simul.

71. Sed si omnia ea puncta æquale lumen ubique ingererent in suo motu, haberetur densitas media triplo utique minor, quam media considerata num. 60 totius luminis ingesti ab omnibus simul, & densitas minima in **q** esset duplo minor eâ, quam consideravimus ibidem, cum ibi assumpserimus lumen veniens ab omnibus tribus locis duplum luminis venientis hinc a solo loco **P**. Cum igitur ibi densitas minima ad illam mediam in **q** fuerit, ut 2 ad 3; erit hinc ad hanc ut 1 ad 1, sive ipsi æqualis, & in centro in **O**, ac in marginibus **C**, **C'** in initio, & fine triplo minor.

72. *Scholium 3.* Ubi dicitur, densitatem excrescere in infinitum, diligenter notandum est, rem debere accipi in consideratione geometrica, non in physica, considerando nimis lumen tanquam corpus quoddam continuum, cuius omnia puncta progrediantur per lineas accurate rectas, atque id ita, ut compenetrari etiam possint partes diversæ, & quidquid luminis per lineam continuam extendeatur, possit abire in punctum unicum, quidquid extendebatur per superficiem, possit abire in lineam, vel punctum. In physica res longe aliter se habet: lumen non est corpus quoddam continuum, nec ejus partes compenetrantur, sed addensatio fit per earum mutuum accessum majorem; idcirco in ipsa Physica oportet infinitæ densitati substituere densitatem ingentem tantummodo respectu raritatis prioris.

73. Reipsa autem ne in geometrica quidem consideratione hic habebitur densitas infinita , hæc nimirum densitas , quam hic consideravimus . Hic enim consideravimus densitatem , quæ oritur ex massa luminis collocata in spatio habente tres dimensiones , quartu[m] binæ tantum considerantur sunt in annulis ex Ep[heron] , H[eron] , quia interea tertia dimensio , quæ pendet a progressu luminis , habetur utrobique pro eadem ob celeritatem luminis ubique eandem .

74. Hujusmodi densitas non convenit unico cuiquam puncto , nec unicæ cuiquam lineæ , aut superficie , sed solido : quando applicatur puncto cuiquam , intelligitur semper spatiolum circa illud punctum , in quo ea ubique sit eadem , vel habeatur pro eadem , nimirum cuius singulis particulis æqualibus contineantur singulæ particulæ æquales quantitatis luminis , & metitur eam densitatem quantitas luminis divisa per illud spatiolum , quod eam continet .

75. Porro si assumatur areola utcunque exigua circa centrum , vel prope margines ; nulli alteri puncto ejus areolæ posito extra centrum , & ipsos margines convenit expressio densitatis infinitæ , sed erit finita in punctis quibusvis ejus areolæ in se determinatis . Quare nulli spatiolo in se determinato utcumque exiguo conveniet densitas infinita .

76. Habebitur tantummodo illud : si concipiatur punctum quodcumque in se determinatum utcumque proximum centro , vel peripheriæ , & circa ipsum areola in immensum minus lata , quam sit ejus distantia a centro , vel peripheria ; in illa areola habebitur quædam densitas , quæ eo erit major , quo illud punctum plus accedet ad centrum , vel peripheriam , nec ulla erit densitas utcumque magna ejusmodi , ut non possit inveniri punctum quoddam ita parum distans a centro , vel peripheria , ut in spatiolo circa ipsum posito multo minore , quam sit ea parva distantia , densitas sit major , quam illa data . Id constituet seriem quædam densitatum finitarum continuatam in infinitum sine ulla ultima , sed etiam sine ulla absolute infinita , quod probe notandum est ad evitandas plurimas æquivocationes , in quas facile inciditur , ubi agitur de infinito , & infinitesimalibus quantitatibus , quæ qui-

quidem nullæ sunt in se ipsis absolute tales, sed a nobis tantummodo concipiuntur indefinite tales.

77. Si accipiatur centrum ipsum, vel punctum aliquod peripheriæ, & spatiolum accipiatur ipsi adjacens; utcunque id sumatur parvum, densitas luminis in eo, aestimata a toto lumine, quod continet, diviso per ipsum spatiolum, erit semper finita, sed eo major, quo minus spatiolum assumetur: datâ quacunque densitate utcumque magnâ, invenietur spatiolum ita parvum, ut habeat densitatem ita consideratam majorem ipsâ. Sed cum nulum possit esse ultimum spatiolum minimum; nulla pariter erit ultima densitas absolute infinita. Id autem habebitur discriminis inter punctum assumptum ubicunque alibi, ubi expressio densitatis est finita, & ibi, ubi est infinita, quod in primo casu, si consideretur spatiolum perquam exiguum circa ipsum, imminuto eo spatiolo in infinitum, densitas computata a toto lumine diviso per totum spatiolum manebit æquipollenter eadem, quia in singulis ejus particulis æqualibus quantitas luminis est æquipollenter eadem, adeoque densitas æquipollenter eadem: at in secundo casu, quo spatiolum illud magis minuitur, eo magis crescit densitas illa ita computata, nam in particulis ejus æqualibus, quæ propiores sunt ipsi puncto, continetur plus luminis, quam in remotioribus, densitate in illis majore, quam in his, & quidem eo majore in infinitum, quo magis accedunt ad illud ipsum punctum.

78. Plura hîc considerari possent eo pertinentia, sed quæ magis pertinerent ad illustrandam methodum infinitesimorum, atque infinitorum, eorumque usum in Geometria, quam ad argumentum, de quo agimus. Addemus tantummodo illud, quod magis facit ad rem præsentem, quod nimirum in circello habente centrum in ipso margine expressio densitatis infinitæ habetur in punctis omnibus lineolæ continuæ, nimirum arcus peripheriæ, dum in spatiolo assumpto circa centrum ea habetur in unico punto. Hinc etiam translatâ consideratione ejusmodi ad Physicam, magis debet sensum percellere maxima illa radiorum densitas in ipsis marginibus, quam in centro erroris, quia in centro ipsa est tan-

ta in spatiolo quaquaversus exiguo, ad margines vero eam ingentem magnitudinem habet per totam longitudinem peripheriae erroris ejusdem.

79. *Schol. 4.* Potest considerari & aliud densitatis genus, ubi lumen geometrico consideratur, non physice: in eo genere habebitur densitas absolute infinita in centro, ad quod cum adveniant per num. 33 radii omnes, qui transeunt per omnia puncta peripheriae habentis radium AY, in eo quodammodo compenetrantur.

80. Ad omnia reliqua puncta bini, vel terni radii deferuntur ad singula, quorum singuli per singula puncta aperturæ transeunt: quamobrem in iis densitas, si ita loqui fas est, punctualis est ubique eadem extra centrum, in quo ea est absolute infinita, & extra marginem, in cuius singulis punctis non compenetrantur, nisi duo radii.

81. Potest itidem considerari densitas linearis, considerando lineas luminis ut continuas, quæ a lineis longioribus, per quas transibant, abeant ad alias breviores. Quantitatatem hanc linearem luminis exprimere poterit peripheria circuli aperturæ, per quam id transit, & spatium erit peripheria circuli, in quam contrahitur, ac illa divisa per hanc, exhibebit ejusmodi linearem densitatem.

82. Eo pacto densitatem linearem in H exprimet peripheria radio AP divisa per peripheriam radio OH, erit ea nimirum, ut  $\frac{AP}{OH} = \frac{AL}{OL}$ , sive cum AL considerari possit, ut æqualis constanti AI, erit ea densitas reciproce, ut sola OL, nimirum reciproce ut SN ejus tripla. Initio in C, abeunte N in E, exprimetur per  $\frac{I}{SE} = \frac{I}{OR}$ . Abeunte H in O, abicit N in S, adeoque desinente totu peripheriâ genitâ a puncto H in unicum punctum, evadet densitas absolute infinita, sed punctualis, non vero linearis. Abeunte H in fine primæ oscillationis in C', jam abicit N in O, & fiet  $SN = SO = 2OR$ , adeoque densitas evadet prioris subdupla. Redeunte H ad O in secunda oscillatione,

jam

jam abibit N in I, & fiet SN = SI = 3OR, adeoque densitas primæ subtripla: in reliqua autem sesquioscillatione omnia redeunt ordine retrogrado. Erit nimirum in binis appulsibus ad binos margines, & ternis intermediis ad centrum, ut 1, ∞,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ , ∞, 1.

83. *Scholium 5.* Nec inutile futurum arbitror, nec injucundum, iis potissimum, qui simplicitate geometrica delectantur, & in problematum solutione ingenium exercent suum, si aperiam, qua via ad propositas solutiones devenerim, itinere nimirum tortuoso admodum, & molesto. Sæpe mihi videor per sylvam quan-dam vagari densissimam, dum veritatem quampiam inquiero, spinis, herbisque obrutam, & virgultis coniectam. Longo ambitu per implexas, & intricatissimas ambages circumferor, signis per totum iter dispositis, quæ extent, & facile deprehendi possint. Ubi demum in eam incurro, inde trans tenues ramusculos, frondesque transpiciens, agnosco per ea ipsa relicta indicia vel illum locum, unde primo discesseram, vel aliquem ex iis, quæ in via offenderam, ad quem brevi exsectorio tramite, per ipsum eo alias adduco, labore brevissimo, omissis omnibus illis tortuosis, atque spinosis anfractibus, per quos primo incesseram, quorum quidem me demum pudet, quasi vero non illa esset methodorum simplicissimarum ratio, atque natura, ut postremæ in mentem veniant, & nisi aliquanto obstinatiore quærantur animo, ne veniant quidem.

84. In primis inquirens in radios, qui transeant per datum punctum H figuræ 1, feceram, ut erat magis primum, abscissam IN = x, qua positione adhibita, habebam  $LO^2 = (\alpha - \frac{1}{3}x)^2$ :  $LN^2 = \frac{4}{9}x^2 :: OH^2 = r^2 : NT^2 = \frac{c^2x^3}{\alpha^3}$ ; unde mihi obvenit æquatio  $x^3 - 6\alpha x^2 + 9\alpha^2 x - \frac{4\alpha^3 r^2}{c^2} = 0$ . In ea, factâ  $x + 2\alpha$  = x ad eliminandum secundum terminum, habui  $x^3 - 3\alpha^2 x + \alpha^2(2\alpha - \frac{4\alpha r^2}{c^2})$ , quæ usque adeo facile construi poterat ad anguli trisectionem. Hinc cum ea positio det  $x = \alpha - 2\alpha = IN - IR$

— IR = RN , vidi statim , satius fore , si fieret ipsa RN =  $\alpha$  , quo pacto debet obvenire statim æquatio illa ipsa carens secundo termino sine ullo transformationis subsidio .

85. Casu animadverti multo post , cum densitatis rationem investigarem , esse NS triplam CL , ex quo mihi statim facile innotuit , rem eo adduci posse , ut datis punctis I , S quæri deberet punctum N ita , ut quadratum ejus distantiæ IN duætum in distantiam alteram NS æquaretur solido dato juxta num. 14 , quo omnes reducuntur æquationes gradus tertii , in quibus deficiente secundo termino tertius est negativus : sed ad ejusmodi æquationem obtinendam oportet abscindere SR trientem datæ SI , & denominare  $\alpha$  distantiam RN , uti præstiti .

86. In eo quidem nulla difficultas occurrebat , vel admodum exigua ; trisectionis anguli itidem exhibuit mihi admodum expedite casus omnes pendentes a positione puncti H assumpti ubicumque intra rectam OC : deprehendi etiam facile , pro punctis H assumptis in rectâ OC productâ , habere locum eandem æquationem , sed ibi unicam haberi realem radicem , quin arcus circularis trisectionis ulti usui esse posset . Multo serius animadvertis illud , quod jam ab initio debebam animadvertere , eam solutionem non esse generalem pro punctis assumptis in quavis recta , cum possent proponi etiam rectæ transeuntes per ipsam cuspidem causticæ , vel infra ipsam , quo casu paullo aliter disponenda erat figura , & instituendus calculus , uti est deinde præstitum in adnotatione ad num. 35 . Quoniam pluribus jam vicibus omnem dissertationis ordinem mutaveram , simplicioribus , vel generalioribus substituis , & res ad id , quod mihi initio quærendum proposueram , non pertinebat ; ut novam mutationem evitarem , adnotatione sum usus sejuncta a textu , quæ methodum adhibitam extenderet .

87. Processi inde ad investigandam densitatem luminis in quovis loco dato H . Illud mihi statim innotuit , multo faciliorem fore perquisitionem , si considerandam susciperem densitatem luminis venientis ex unico loco , nam consideratio luminis compo-  
siti ex omnibus tribus provenientibus e tribus locis P , P' , P'' de-  
bebat esse multo operosior , cum singularum æquationis radicum  
valo-

valores analytici seorsum haberi non possent. Inquirens autem in ejusmodi densitatem respondentem soli annulo  $Pp$ , vidi facile, eam fore proportionalem reciproce rectangulo  $LOXON$ , & inde facile intuli casus omnes densitatis auctæ in infinitum, evanescente nimis  $OL$ ,  $OL''$ , ubi punctum  $H$  abit in  $O$ , &  $ON$ ,  $ON'$ , ubi abit in  $C$ . Verum ad determinandum locum minimæ densitatis primo quidem usus sum calculo.

88. Positâ itidem  $IN = x$ ,  $IO = a$ , obtinui  $OL = a - \frac{1}{3}x$ ,  $ON = x - a$ , adeoque  $OLXON = -\frac{1}{3}(x^2 - 4ax + 3a^2)$ . Differentiando hanc formulam, & omittendo divisorem communem  $-\frac{1}{3}$ , obtinui  $2xdx - 4adx = 0$ , adeoque  $x = 2a$ , sive  $IN = IR$ , quo casu cum evanescat  $RN$ , adeoque  $RM$ , & idcirco  $RK$ , &  $RG$ , existente  $IG = \frac{1}{2}IE$ , vidi, fore ibi quadratum  $OH$  dimidium quadrati  $OC$ .

89. Eo pacto obtinui minimum, quod habetur in puncto  $q$  in prima oscillatione, & in puncto  $q'$  in tertia inter duo infinita marginis, & centri. Verum ea formula mihi non exhibebat illud minimum, quod habetur in  $O$  in media secunda oscillatione. Cum inquirerem in originem ejus defectus, vidi haud ita difficulter, illud minimum non contineri formulâ  $x^2 - 4ax + 3a^2$ , quæ non habet ullum limitem maximi, qui minimæ densitati respondeat, præter illum, in quo  $x = 2a$ . Illa minima densitas respondet puncto  $N$  eunti in  $I$ , ubi  $x = 0$ . Porro si valor  $x$  perpetuo minuatur, donec evanescat; formula ita crescit, ut abeunte  $x$  in negativum, adhuc pergit crescere, & crescat perpetuo in infinitum. At id ipsum minimum pendet a natura curvæ, vi cuius valor  $x$  non transit e positivo in negativum, sed posteaquam evanuit in appulso  $N$  ad  $I$ , retro regrediente ipso  $N$ , iterum crescit ex parte positiva. Debetur id maximum in formula, minimum in densitate, non naturæ ipsius formulæ, sed naturæ curvæ non permittentis valorem  $x$  formulæ excurrere per omnes magnitudines hinc & inde a zero.

90. Si autem libeat in ipsa differentiatione invenire indicium ejus minimi, oportebit eumdem conferre cum ipsa natura curvæ. In ea ibi ob ipsam naturam ejus cuspidis evadit valor  $dx$  infinites

ties major, quam alibi respectu differentiæ ordinatæ, si assumpto valore alterius abscissæ  $x$  immoto, altera abscissa  $x + dx$  concipiatur ad ipsam accedens in infinitum, decrescente in infinitum  $dx$ . Potest autem ibi alio pacto considerari  $dx$ , nimirum ut differentia inter duas  $x$ , pertinentes ad binâ punctâ extrema arcus infinitesimi, qui concipiatur motu continuo delatus ita, ut ejus extrema puncta aliud post aliud transcurrant punctum I. Ubi medium ejus arcus devenerit ad I, duo extrema ejus puncta hinc, & inde posita ab ipso I eandem habebunt abscissam, existentibus ibi æqualibus binis  $x$ , & existente  $dx = 0$ . Quamobrem adhuc ibi habebitur  $2xdx - 4adx = 0$ , non quod ibi sit  $x = 2a$ , sed quod sit  $dx = 0$ , facta  $= 0$  differentia formulæ, quæ reddit ad priorem valorem.

91. Ejusmodi aberrationes a regulis communibus sæpe accidunt in curvarum punctis quibusdam, quæ ego appellare soleo anomala, uti sunt puncta flexus contrarii, cuspides, atque alia quædam; & jam diu constat; quod & ego demonstravi jam ab anno 1740, in punctis flexus contrarii fallere methodum communem inveniendi maxima, & minima per differentiam positam  $= 0$ : sed hæc hoc loco innuisse sit satis.

92. Dum illam formulam considerarem  $\frac{1}{3}(x^2 - 4ax + 3a^2)$ , quæ oritur multiplicando  $x - a$  per  $\frac{1}{3}(3a - x)$ , facile animadvertis illud,  $3a - x$  exhibere mihi valorem SN, qui proinde deberet esse triplus LO. Statim mihi directe patuit, rem ita se habere, adeoque ejus demonstrationem præmisi initio numeri 14, & ejus ope solutionem problematis, quo radii quærebantur trans-euntes per H, multo elegantiorem concinnavi, reducendo eodem numero problema ipsum ad inventionem puncti N inter puncta data I, S ejusmodi, ut  $IN^2 \times SN$  æquaretur dato solido, mutata idcirco magna parte eorum, quæ jam conscripseram.

93. Cum vero viderem, densitatem quæsitam esse in ratione reciproca rectanguli ON  $\times$  NS tripli LO  $\times$  ON; illud mihi primo in mentem venit, ut eam exprimerem per rectam lineam ei rectangulo proportionalem. Vidi, eam rectam fore ordinatam ad parabolam quamcumque, quæ haberet chordam OS perpendiculararem axi:

axi: facile enim demonstratur, id rectangulum fore æquale rectangulo sub ea ordinata, & parametro. Eam curvam delineaveram, & progressum omnem densitatis ope ejus ordinatæ facile determinaveram, cum illud occurrit, quod statim initio debuisse, nihil opus esse altiore curva, cum quadratum ordinatæ ad circulum, cuius diameter OS, æquetur rectangulo sub ON, & NS, ubi N cadat inter O, & S, & quadratum tangentis, ubi N abeat extra eos limites in N', vel N''. Sed statim & illud occurrit, nec circulo opus esse, cum satis ipsa sola consideratio rectanguli ON × NS omnia per se præberet per varias positiones puncti N, quibus consideratis præstiti omnia a num. 22, sine calculo differentiali, sine parabola, sine circulo.

94. Cum adhuc calculum differentialem adhiberem ad deprehendendam minimam densitatem luminis ex unico loco venientis, tentavi viam, qua invenirem phænomena omnia densitatis luminis venientis simul ex omnibus tribus locis, quæ initio mihi apparuit satis ardua. En specimen tentati itineris.

95. Positâ OH = r, IN = x, IO = a, NT =  $x^{\frac{3}{2}}$ , & factis LN =  $\frac{2}{3}x$ : NT =  $x^{\frac{3}{2}} :: OL = a - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(3a - x)$ : OH = r, habueram  $2r = 3ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$ . Positis autem IN = x, IN' = x', IN'' = x'' habebam densitatem ex tribus locis P, P', P'' simul, ut  $\frac{I}{LO \times ON} + \frac{I}{L'O \times ON'} + \frac{I}{L''O \times ON''}$ , sive ut  $\frac{I}{x^2 - 4ax + 3a^2} + \frac{I}{x'^2 - 4ax' + 3a^2} + \frac{I}{x''^2 - 4ax'' + 3a^2}$ , nullâ mutatione factâ in signis, licet in secundo valore evadat negativum ON', in tertio OL'', cum ex omnibus locis positivum ingeneratur lumen, utut expressum valore negativo. Capienda jam erat differentia hujus formulæ, & ponenda = 0.

96. Ibi  $dx$ ,  $dx'$ ,  $dx''$  reducendæ essent ad  $dr$  ope formulæ  $2r = 3ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$ , in qua  $2dr = \frac{3}{2}ax - \frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$ , sive  $dx = \frac{4x^{\frac{1}{2}}dr}{3(a-x)}$ ,  $dx' = \frac{4x'^{\frac{1}{2}}dr}{3(a-x')}$ ,  $dx'' = \frac{4x''^{\frac{1}{2}}dr}{3(a-x'')}$ . Hoc pacto elimina-

tis jam  $dx$ ,  $dx'$ ,  $dx''$ , tota formula dividi posset per  $dr$ , & remaneret æquatio data per  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$ . Haberentur autem aliæ tres  $2r$   
 $= x^{\frac{1}{2}}(3a - x)$ ,  $2r = x'^{\frac{1}{2}}(3a - x')$ ,  $2r = x''^{\frac{1}{2}}(3a - x'')$ , qua-  
 rum ope eliminatis  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$ , remaneret unica æquatio pro  $r$ .

97. Hoc pacto haberetur expressio densitatis quæsitæ per so-  
 lum valorem  $r$ , adhibitis ad eam inveniendam tribus valoribus  
 $x$ ,  $x'$ ,  $x''$ , sive tribus æquationis radicibus, utut incognitis, &  
 talibus, ut per formulam algebraicam singulæ sine imaginarietate  
 exprimi non possint. Verum is quidem calculus ita est molestus,  
 & implexus, ut omnino vel deterreat, vel saltem animum aver-  
 tat. Idcirco omissâ ejusmodi perquisitione illud mihi in mentem  
 venit, satius fore, si prius investigarem, quota pars totius lu-  
 minis contineretur circello, cuius radius  $OH$ , ut deinde captâ  
 differentiâ ejus valoris, & divisâ per annulum  $Hh$ , obtinerem ex-  
 pressionem quæsitam densitatis luminis totalis.

98. In ejusmodi perquisitione vidi facile, lumen ad annulum  $CH$   
 devenire ab annulo  $F'P''$ , ab annulo  $P'X$ , & ab annulo  $XP$ , ni-  
 mirum ab annulo  $F'P''$ , & ab annulo  $P'P$ ; ad circellum autem  $OH$   
 ab annulo  $P''Y$ , circulo  $AP'$ , & annulo  $PY$ . Porro annuli ii sunt  
 differentiæ circulorum respondentium eorum peripheriis, adeoque  
 pro circello  $OH$  habetur circulus  $AP'$ , & differentia circulorum  
 $AP$ ,  $AY$ , ac  $AY'$ ,  $AP''$ , quæ duæ simul efficiunt differentiam  
 circulorum  $AP$ ,  $AP''$ : pro annulo  $HC$  habetur differentia circu-  
 lorum  $AP''$ ,  $AF'$ , & circulorum  $AP'$ ,  $AP$ . Nimirum si sumantur  
 quatuor circuli  $AF$ ,  $AP''$ ,  $AP$ ,  $AP'$ , ordine suæ magnitudinis,  
 pertinent ad annulum, & ad circellum alterni sumpti positive, &  
 negative: si ii dicantur  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , pertinent ad annulum  $a - b$   
 $+ c - d$ , ad circellum  $b - c + d$ , quorum summa est  $a$  cir-  
 culus totius aperturæ.

99. Porro patebat, eos circulos esse, ut quadrata radiorum,  
 & noveram, ea quadrata esse, ut rectas  $IN'$ ,  $IN$ ,  $IN''$ ,  $IE$ ,  
 juxta num. 5. Quare inde intuli lumine totali expresso per  $IE$ ,  
 exprimi lumen circelli per  $IN' + N'N''$ , & lumen annuli per  $N'N$   
 $+ N''E$ .

100. Quoniam autem  $RN + RN''$  erat  $= RN'$  ob  $RM + RM'' = RM'$ , haud difficulter perspexi, esse  $IN' = IR - RN' = IR - RN - RN'' = IR - 2RN - NN''$ , adeoque  $IN' + NN'' = IR - 2RN = 2OR - 2RN$ . Inde vero ob lumen totale expressum a tota IE  $= 4OR$ , statim patuit, lumen residuum annuli HC debere exprimi per  $IR + 2RN = 2OR + 2RN$ . Assumptis autem dimidiis OR, & RN, sive RM, patebat, posse exprimi totum lumen per OS, lumen circelli per SN, lumen annuli per ON, & sponte inde profluebat theorema propositum num. 49, semisummam luminis circelli, & annuli ad semidifferentiam esse, ut est radius circuli OR ad chordam RM.

101. Id quidem theorema & elegans omnino est, & simplex: at satis longo ambitu ad ipsum deveneram, cum nondum animadvertissem, a binis locis P', & P'' simui, tantum luminis devenire ad annulum HC, quantum a solo loco P. Poteram ego quidem id ipsum vel inde colligere, cum in circellum OH ingeratur ex P lumen ab annulo XP, sive differentia circulorum AP, AX, cui respondet recta SN differentia rectarum IS, IN, quæ cum sit dimidia valoris  $2OR - 2RN$  exprimentis totum lumen, statim inde inferebatur, a solo loco P ingeri tantum, quantum a locis P', P'' simul. Verum cum non pateret hic usus luminis ingesti a solo loco P, ipsum seorsum non quæsieram, sed totum annulum PP'' simul consideraveram, ut idcirco eam ibi æqualitatem non adverterim. Ubi autem id agnovi ea ratione, quam inferius indicabo, multo brevior, & expeditior patuit via ad id ipsum theorema, ex hac ipsa expressione luminis ingesti e solo P respondentis rectæ SN, qua deinde sum usus, deletis iis, quæ ante conscripseram.

102. Inventâ simplici mensurâ totius luminis conclusi circello OH, quod nimirum esset proportionale rectæ SN, inde progressus sum ad definiendam densitatem in annulo Hh sequenti ratione.

103. Densitatem in Hh exprimit totum lumen, quod eo ingreditur divisum per annulum Hh. Quoniam autem totum lumen circelli OH exprimitur per SN, lumen annuli Hh exprimet differentia rectæ SN, quæ est eadem, ac differentia rectæ RN ob RS.

constantem , sive chordæ RM ; & quoniam IG est , ut quadratum OH , adeoque ut circellus OH ; annulum Hh , qui est ejus circelli differentia , exprimet differentia rectæ IG , sive RG , ob IR constantem , vel chordæ RK .

104. Res igitur eo deducēta erat , ut inveniretur expressio comoda rationis , quam habet differentia chordæ RM ad chordam arcus tripli RK .

105. Ad eam investigandam reduxi utramque differentiam ad differentiam arcus , nam differentia arcus tripli est tripla , adeoque utraque differentia chordæ facile reducitur ad differentiam arcus minoris , quæ proinde ex utroque termino rationis eliminatur , remanente ratione expressa per quantitates finitas . Ad eam rem adhibui hujusmodi theorema elementare : differentia arcus ad differentiam chordæ terminatæ ad alterum diametri extremum est , ut ipsa diameter ad chordam , quæ terminatur ad ejus extremum alterum . Nam in fig. 5. si chordæ IM , Rm sibi invicem occurrant in N , lineola MN æquivalebit arcui circuli descripti centro R ob angulum RMN in semicirculo rectum . Quare erit mN differentia chordæ : sunt autem similia triangula mMN , IRN ob angulos ad M , & R insistentes eidem arcui Im , & angulos ad N oppositos ad verticem æquales . Erit igitur differentia arcus Mm ad Nm differentiam chordæ RM , ut diameter RI ad IN , quæ potest sumi pro chorda IM .

106. Hinc in fig. 6 differentia chordæ RM erit  $\frac{MI \times Mm}{RI}$  , differentia chordæ RK =  $\frac{KI \times Kk}{IR} = \frac{3KI \times Mm}{IR}$  , & illa divisa per hanc erit  $= \frac{MI}{3KI}$  . Quare densitas quæsita erit , ut hæc fractio , sive , omisso constanti 3 , ut fractio  $\frac{MI}{KI}$  .

107. Hæc expressio binas habet variables , quarum nexus mutuus non est ita simplex , ut possit statim ingerere ideam variationum omnium , quæ densitati accident . Quamobrem ut ad unicam variabilem devenirem , arcu MK bifariam secto in N , duxi rectam IN quærens , quid mihi exhiberet angulus NIR æqualis KIM . Cum & angulus KRI sit æqualis angulo KMI ob communem .

nem arcum  $KI$ , cui insistunt, vidi statim, posito  $D$  in concur-  
su rectarum  $IN$ ,  $RK$ , fore similia triangula  $KIM$ ,  $DIR$ , adeo-  
que  $\frac{MI}{KI} = \frac{RI}{DI}$ , sive ob  $RI$  constantem, fore illam fractionem,  
& densitatem quæsitam reciproce ut  $ID$ .

108. Variationes rectæ  $ID$  persecutus pro varia magnitudine  
arcus  $RK$ , qui in fig. 1 pendet a positione puncti  $G$  in  $IE$ , &  
 $H$  in  $OC$ , jam definiveram loca densitatis infinitæ, & minimæ,  
putans me devenisse ad expressionem simplicissimam; licet adhuc  
tota lex mutationis rectæ  $ID$  non esset satis obvia primo aspe-  
ctui; cum repente animadverti, posito  $A$  in occurso rectæ  $OM$   
cum  $RK$ , oriri angulum  $AOR$  æqualem angulo  $DIR$ , insistente  
illo ad centrum arcui  $MR$ , hoc ad peripheriam arcui duplo  $RN$ .

Hinc  $\frac{MI}{KI} = \frac{IR}{ID} = \frac{OR}{OA}$ , sive ob  $OR$  constantem reciproce ut  
 $OA$ .

109. Ipsius  $OA$  variatio vix, aut ne vix quidem est magis ma-  
nifesta, quam variatio  $ID$ : at vidi statim ex iis, quæ in fig. 3.  
demonstrata fuerant in adnot. ad num. 15, esse  $OA$  ut differen-  
tiat quadratorum  $OR$ ,  $RM$ . Est enim ibi  $OR : RM :: RM :$   
 $MA = \frac{RM^2}{OR}$ , adeoque  $OA = OM - MA = OR - \frac{RM^2}{OR} =$   
 $\frac{OR^2 - RM^2}{OR}$ , qui valor est ut  $OR^2 - RM^2$  ob  $OR$  constantem.

110. Reducta res erat ad variationem solius chordæ  $RM$ , cu-  
jus mutationes omnes statim incurruunt in oculos. At progressus  
per unum, & alterum passum, vidi in fig. 1 differentiam quadra-  
torum  $OR$ ,  $RM$  esse eandem, ac differentiam quadratorum  $OR$ ,  
 $RN$ , adeoque æqualem rectangulo  $ON \times NS$ . Eo delatus agnovi  
locum, per quem transieram quærendo rationem densitatis lumi-  
nis provenientis a solo loco  $P$ , quæ ratio inventa est eadem nu-  
mer. 52. Id quidem me illico perculit; cum enim in eadem ratio-  
ne mutaretur densitas luminis venientis a solo loco  $P$ , ac lumi-  
nis venientis ex omnibus tribus simul, oportebat, constans ali-  
qua ratio intercederet inter lumen ex eo loco solo adveniens, &  
lumen

lumen delatum ex omnibus tribus simul. Quæsivi igitur, quæ es-  
set ejusmodi ratio, & ea perquisitio industriam requirebat non  
vulgarem.

111. Primo quidem vidi, annulos  $Pp$ ,  $P'p'$ ,  $P''p''$  inferre in  
annulum  $Hh$  lumen sibi proportionale, eos autem esse, ut diffe-  
rentias circulorum  $AP$ ,  $AP'$ ,  $AP''$ , sive quadratorum eorundem,  
vel ut differentias rectarum  $IN$ ,  $IN'$ ,  $IN''$ , quæ sunt eædem, ac  
differentiæ rectarum  $RN$ ,  $RN'$ ,  $RN''$ , sive chordarum  $RM$ ,  $RM'$ ,  
 $RM''$ ; quærenda igitur erat relatio inter ejusmodi differentias.

112. Ad eam relationem investigandam, primo mihi sese ob-  
tulit theorema expositum num. 105, ex quo, si mente concipi-  
antur chordæ  $IM$ ,  $IM'$ ,  $IM''$ , eæ debent esse, ut differentiæ chor-  
darum  $RM$ ,  $RM'$ ,  $RM''$ : nam ob arcus  $MM'$ ,  $MM''$  constan-  
tes, differentiæ arcuum  $RM$ ,  $RM'$ ,  $RM''$ , debent esse æquales  
inter se, & ipsæ ad diametrum  $RI$  ubique eandem, debent per  
id theorema esse, ut sunt eæ differentiæ ad eas chordas. Porro  
noveram, ubi tria puncta  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$  circulum dividunt in tres  
partes æquales, assumpto quovis peripheriæ punto I, chordas  
 $IM'$ ,  $IM''$ , quæ ducuntur ad puncta terminantia arcum, in quo  
assumitur I, simul sumptas, æquari chordæ tertiaræ  $IM$ , quod qui-  
dem theorema prorsus elementare ingentem habet usum, & facil-  
lime demonstratur, ac ex eo etiam pendebat æqualitas summæ  
chordarum  $RM$ ,  $RM''$  cum chorda  $RM'$ . Quare statim se pro-  
didit æqualitas differentiarum pertinentium ad chordas  $RM'$ ,  $RM''$   
cum sola differentia chordæ  $RM$ , quæ mihi prodidit illud, ra-  
tionem illam constantem luminis delati e locis  $P'$ ,  $P''$  cum lumi-  
ne delato ex unico loco  $P$  esse rationem æqualitatis.

113. At ea æqualitatis deductio erat adhuc aliquanto prolixior:  
indigebat novis rectis, & lemmate, quod non est verum, nisi  
in differentiis infinitesimalibus, quarum theoriæ indiget ad sui demon-  
strationem. Vidi autem, rem debere immediate profluere etiam  
ex æqualitate chordæ  $RM'$  cum summa chordarum  $RM$ ,  $RM''$ .  
Verum ea æqualitas me initio suspensum tenuit, cum videretur  
idcirco differentia  $RM'$  debere æquari differentiis  $RM$ ,  $RM''$  si-  
mul, non differentia  $RM$  differentiis  $RM'$ ,  $RM''$ . At rem ali-

quan-

quanto diligentius perpendens, vidi illud, ob MM" constantem, crescente chorda RM, majorem e binis RM', RM" necessario crescere, minorem decrescere, & cum excessus ejus incrementi supra decrementum sociæ minoris debeat æquari incremento minoris, oportere idcirco incrementum minimæ e tribus æquari simul & incremento maximæ, & decremento mediæ: vidi nimirum, quod & num. 95 innui, nullum h̄c habere usum positiva, & negativa, ubi nimirum quantitas luminis ingerenda in annulum H̄z e quovis trium locorum P, P', P" est quidpiam positivum, nec negativa alium usum habeant, nisi ad determinandas plagas motuum in iis differentiis, quarum singularum magnitudini, quo cunque ea signo affecta sit, est proportionale lumen ipsum, quod ingeritur.

114. Hic quidem fuit errorum meorum finis. Deletis fere omnibus, quæ conscripseram, nimirum omissis tot tortuosis itineribus, quibus ad hanc æqualitatem deveneram, statim post ipsam constructionem primi problematis posui numero 9 adnotatio-  
nis ad numerum 15 textus hanc ipsam æqualitatem incrementi chordæ RM cum incremento alterius e chordis RM', RM", & decremente alterius, quæ æqualitas debeat manere etiam in  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ , licet ibi incremento Rm respondeat incrementum Rm'', & decrementum Rm'. Id me brevi itinere deduxit ad æqualitatem luminis propositam num. 39; unde & secundi, & tertii problematis solutio profluxit sane elegans, & expedita. Eam semitam non habuisse, nec æqualitatem differentiarum vidi sem, nec ejus nexum cum æqualitate luminum, nisi ad hanc illo tam longo am-  
bitu deductus percepisse terminorum viciniam inter se, & cum ipso illo, quod in iis problematis quærebatur.

115. Prona quidem erat ea elementaris veritas, quæ mihi alibi etiam fortasse futura erit usui aliquando: *in tribus chordis a quovis peripheriæ puncto ductis ad tria puncta ipsam di-  
videntia in partes æquales tres, incrementum brevissimæ æqua-  
ri incremento longissimæ, & decremente mediae simul sumptis.*  
Prona erat ejus translatio ad hanc æqualitatem luminis in hac investigatione, pronus hujus usus ad hæc solvenda problemata; sed

eorum

eorum nihil ego quidem perspiciebam initio , nec vero perspexisse , nisi post adeo longam indaginem .

116. Dum eam meæ mentis imbecillitatem contemplor , alia se mihi prodit imago rei nihilo minus apta ad eam exprimendam , quam ipse ille implexus per sy'nam error . Videro mihi aliquando videre immensam quandam , apertamque planitiem signis marmoreis , & ornatissimis fontibus , ac floribus , & plantis refertam , ad cuius latus per ampliorem viam ingens cæcorum , & semicæcorum turba prætereat . Illi nihil deprehendunt , hi umbram quandam percipiunt monumentorum , quæ ad paucos passus intra campum sunt sita , de quibus vix quidquam agnoscant , nisi ad singula accedant , & palpando magis , quam adspectando deprehendant demum , ad quam singula classem pertineant ; dum quispiam bene oculatus remotissima quæque cum proximis perspicit simul omnia , & unico intuitu contemplatur . Eodem sane pacto vulgus nihil extra communem semitam situm deprehendit : vulgares Geometræ prima quædam in campi limite sita , utcumque agnoscent : ii , qui habentur pro perspicacissimis , ad paucos passus cognitiones protendunt suas , labore ingenti , quos si ita veluti attentantes , palpantesque intueatur aliud mentium genus ordinis supra humanam naturam multo eminentioris ; dum omnem non earum modo veritatum , sed longissime etiam positarum multitudinem immensam intuitu unico perlustrat ; irrideat , necesse est , humanam imbecillitatem , cæcitatemque , potissimum si nos videat , tam paucis tanto labore utcumque semicompertis , per intolerabilem dementiam superbire .

## ADDITAMENTUM

*De distributione luminis per circellum erroris  
diversæ refrangibilitatis.*

117. **N**UMERO 3 hujus supplementi exhibui theorematum a Newtono proposita pro hac distributione, & num. 4. promisi eorum demonstrationem excerptam ex mea dissertatione de lumine edita anno 1748. Hic fidem liberabo adhibitis schematis, quæ ibidem expressi, quæ quidem hic erunt 7, & 8, ibi erant 11, & 12: in iis litteræ ad eadem puncta denotanda adhibentur diversæ a litteris hinc adhibitis in fig. 1, sed ipsa schematum comparatione illæ facile ad has reducentur. In ea dissertatione a num. 115 habentur, quæ hinc sequuntur.

118. Newtonus Opticæ parte 1, libri 1, prop. 7. agens de distributione radii albi provenientis ab eodem punto objecti, & transmissi per lentem vitream intra circellum, per quem dispergitur ob diversam refrangibilitatem diversorum colorum, qua fit, ut non omnes in eodem punto coeant, sed alii proprius, alii remotius a lente ipsa, sic habet: „ Sit (hinc in nostra fig. 7)  $AD\alpha$ , „ istiusmodi circulus centro C semidiametro AC descriptus, sitque „  $Bb$  minor circellus descriptus eodem centro cum isto  $AD\alpha$ , ejus- „ que semidiametrum AC intersecans in B: bisseca autem AC in „ N. Jamque, ut ego quidem calculum posui, densitas luminis in „ quovis loco B erit ad densitatem ejusdem in N, ut AB ad BC, „ totumque lumen intra circulum minorem  $Bb$  ad totum intra ma- „ jorem  $AD\alpha$  erit, ut excessus quadrati AC super quadratum AB „ ad quadratum ipsius AC “.

119. Sine calculo etiam id theorema sic geometrice eruitur ex illa æquabili distributione (nimirum luminis refracti per longitudinem spectri, de qua in illa dissertatione (\*) agebatur). Ra-

*Tom. II.*

G g

dii

---

(\*) Tum in hoc, tum in alijs locis suæ Opticæ Newtonus supposuit distributionem æquabilem luminis per totum spectrum, ut in illa ipsa dissertatione ostenditur, sine qua suppositione nec theorematum ibi proposita essent vera, nec solutiones problematum procederent.

dii incidentes in fig. 8 ad sensum parallelī in lentem DE ita refringantur, ut rubei quidem minime refrangibiles, contemptā aberratione proveniente a figura vitri, convergant ad punctum axis M, violacei autem maxime refrangibiles ad punctum L, & reliqui omnes radii convergent ad punctum aliquod interiacens inter puncta L, M, ac totidem coni efformabuntur, quorum omnium vertices erunt in recta illa ML. Si omnes hi radii excipientur alicubi plano ad axem perpendiculari, efformabunt circulum quendam, & omnium ejusmodi circulorum minimus erit, si planum transeat per intersectionem AC $\alpha$  extremorum conorum terminorum ad M, & L, ut satis patet (\*).

120. Quoniam anguli MEL, MDL sunt circiter pars vigesima septima totius refractionis, sive totius anguli FME, vel FMD, erunt satis exigui, & distributio radiorum æquabilis per angulos eosdem trahet secum æquabilem distributionem eorundem per intervallum LM convenientium in punctis O, H. Mediæ refrangibilitatis radii coibunt in C, reliqui tam minus, quam magis refrangibiles dispergentur ante concursum in aliquo puncto H, vel post concursum in aliquo puncto O, per circellum, cuius diameter IC $\beta$ , & intra eundem circulum singulorum densitas erit ubique ad sensum eadem, ut erat eadem in appulso ad lentem DE. Excurret autem a C ad A duplex series continua peripheriarum circulorum I $\beta$  sensim majorum, quarum peripheriarum numerus in æqualibus ipsius CA segmentis erit ad sensum æqualis ob æquabilem illam distributionem radiorum in angulis AE $\alpha$ , AD $\alpha$ . Sed si aliorum densitates cum aliorum densitatibus comparantur, erunt ipsæ in ratione reciproca circulorum, per quos singuli

(\*) Facile hic demonstratur primum e binis theorematiis adhibitis in supplemento II Opusculi II Tomi I, cuius mentionem fecimus in adnotat. ad numerum 10 hujus supplementi, quod nimirum, ubi agitur de errore refrangibilitatis, error longitudinalis sit ad diametrum erroris circularis, ut est dupla distantia focalis ad aperturam. Nam ob angulos MD $\alpha$ , MEA exiguos latera La, LA haberi poterunt pro parallelis lateribus aM, MA, adeoque LAM $\alpha$  pro parallelogrammo, in quo error longitudinalis LM sit secundus bifariam ab altera diametro A $\alpha$  in C. Est autem CM:FM :: A $\alpha$ :DE, adeoque CM:A $\alpha$  :: FM:DE, & LM = 2CM:A $\alpha$  :: 2FM:DE.

guli disperguntur, sive in ratione reciproca duplicata semidiame-  
trorum CI.

121. Exprimat jam fig. 7. eosdem circulos  $A\alpha$ ,  $I\beta$ , & in quo-  
vis puncto B aderit aliquid luminis ex omnibus radiis, quorum  
circumferentia terminatur ad quodvis punctum I positum inter  
B, & A, & nihil ex iis, qui ad B non pertingunt. Singulo-  
rum autem densitas erit in ratione reciproca duplicata rectæ CI;  
ac proinde exprimetur per IG ordinatam ad hyperbolam tertii  
gradus FGM descriptam inter asymptotas perpendicularares AC,  
CV, in qua ordinatæ sint in ratione reciproca duplicata abscissa-  
rum. Quare cum excurrente æquabiliter punto I ab A ad B,  
numerus quoque peripheriarum circulorum æquabiliter excurrat;  
exprimet tota area hyperbolica FABM summam omnium parti-  
cularum luminis existentium in B pertinentium ad omnes ejusmo-  
di circulos. Est autem ex hujus hyperbolæ natura area ipsius ab  
ordinata quavis BM, vel AF ad partes oppositas C æqualis re-  
ctangulo CBM, vel CAF. Quare eæ areæ sunt reciproce, ut i-  
psæ CB, CA, sive directe ut CA, CB, & dividendo erit AB  
ad BC, ut differentia illarum arearum, sive area FABM, ad  
aream ultra FA positam. Abeat jam punctum B in N, & fa-  
tis AB, BC æqualibus, evadet area FABM æqualis illi areæ  
positæ ultra FA. Quare area pertinens ad quodvis punctum B  
ad hanc ipsam aream pertinentem ad punctum N, sive densitas  
radiorum in quovis puncto B ad eorundem densitatem in N erit  
in illa ratione AB ad BC, ut Newtonus posuit primo loco.

122. Ut jam innotescat quantitas luminis comprehensi quovis  
circulo  $Bb$ , ad quodvis punctum O rectæ CV ducatur recta AO  
occurrens ordinatæ BM in P, & recta quævis BP exponet nu-  
merum particularum in quavis circumferentia cuiusvis circuli  $Bb$ .  
Nam erit is numerus ut densitas, & circumferentia  $Bb$  simul, si-  
ve directe ut densitas, & ut radius CB. Quare is numerus per-  
tinens ad quodvis punctum B ad eundem numerum pertinentem ad  
N erit, ut AB ad BC, & BC ad CN simul, sive ut AB ad  
CN. Stante igitur punto N, & utcumque variato B, erit nu-  
merus in circumferentia  $Bb$ , ut AB, sive ut BP. Quare quanti-

tas luminis in toto circulo CB inclusi exprimetur per aream BCOP, sive per differentiam similium triangulorum CAO, BAP; quæcum sint, ut quadrata laterum CA, AB; eadem quantitas exprimetur per differentiam quadratorum eorundem: & quoniam abeunte B in A, differentia illi jam æquatur quadrato solius CA, erit in quavis alia puncti B positione quantitas luminis inclusa circulo Bb ad totum lumen inclusum toto circulo Aa, ut differentia quadratorum CA, AB ad quadratum CA. Quod erat alterum a Newtono propositum.

123. Hæc quidem in ea dissertatione: addam hinc illud tantummodo, patere ex hac ipsa demonstratione illud, in illo circello haberi in centro unionem omnium colorum, adeoque lumen album, si id objecti punctum, ad quod ii radii pertinent, & is circellus, pertinebat ad objectum album, vel per se radians, quod nimirum refleßat, vel emitat omne radiorum genus: tum abeundo versus margines deerunt alii post alios colores, qui circa medium spectrum versantur, ac demum in ipso circelli margine habebuntur uniti simul radii rubei, & violacei, qui gignunt purpureum vinaceum nulli primigenio colori similem. Inde autem constat, ex hoc erroris genere non provenire colores illos, qui in communibus telescopiis apparere solent, qui quidem sunt in objectorum lucidorum marginibus violaceus versus campi marginem, & rubeus versus centrum, sed eos gigni ab oculari juxta theoriam, quam exposuimus in adn. ad num. 98. dissertationis primæ (nimirum primæ ex illis veteribus, quarum tertia habet in fine hoc additamentum). Quamobrem conjunctio binarum lentium convexæ, & concavæ e binis substantiis pro objectivo vitro, quæ errorem illum diversæ radiorum refrangibilitatis corrigit in foco ipsius objectivi, non tollit illos colores, qui in communibus telescopiis apparere solent, ubi campus habeatur amplior, cum augmentatione imaginis objecti satis magno, quod quidem etiam in ea adnotacione monuimus.



## O P U S C U L U M I I.

### DE LENTE USTORIA POTISSIMUM INGENTI.

1.



**O**NSTRUCTA est ante hos aliquot annos Parisiis lens uстoria ingens constans binis crassioribus laminis vi- treis habentibus figuram concavo-convexam sphær-icam crassitudine æquali, & continentibus spiritum vini inclusum, cuius lentis apertura habet diametrum pedum 4, & distantia fo- calis est pedum 10. Non defuit, qui affirmaret, melius fore, si ea fieret potius tota e flint. Ea de re interrogatus, quid senti- rem, non modo rejiciendum censui id consilium ob plures ratio- nes, quas hlc exponam, sed ea occasione perquisitionem institui de vi luminis collecti ab ejusmodi lente, determinando impedi- menta omnia, quæ non permittunt, nisi certam quandam radio- rum unionem minorem eâ, quæ prima fronte haberí posse videa- tur. Ea omnia sunt argumentum hujus Opusculi.

2. Vis lentis uстoriæ provenit ex intensitate radiorum, quorum ii omnes, qui incident in ejus superficiem ingentem, colliguntur in spatio exiguo. Quo minus est id spatium, eo major est ea vis: quanquam ipsa contractio ejus spatii id efficit, ut actio lu- minis collecti applicari non possit nisi exiguae parti corporum, quæ ipsi objiciuntur. Potest quidem extendi id spatium removen- do objectum ipsum a foco lentis: sed tum decrescente intensitate luminis, decrescit vis in singulis particulis spatii ipsius. Conside- randum est primo loco, quæ sit unio, & intensitas, quæ per e- jusmodi lentes obtineri possit.

3. Radii solarès incidentes in quampiam lentem constantem ex unica quapiam substantia non possunt colligi in uno puncto ob triplicem rationem: 1°. quia sol non est punctum unicum, sed ha- bet diametrum apparentem, & eam quidem non exiguum, nimi- rum circiter minutorum 31: 2°. quia figura sphærica non colligit radios

radios ne homogeneos quidem, & digressos ex unico puncto solis, ut ex ejus centro, in puncto unico, sed, ut vidimus in supplemento Opusculi primi, eos dirigit secundum tangentes curvæ cujusdam, quæ appellatur caustica: 3°. quia etiam si singulæ radiorum species colligerentur a figura sphærica in totidem punctis; ea puncta essent diversa, radiis violaceis concurrentibus omnium citissime, & rubeis in distantia omnium maxima.

4. Singulæ ex iis tribus causis dispergunt radios per quemdam circulum, qui in lente habente ejusmodi aperturam, & distantiam focalem non est exiguus: disperguntur autem per circulum, cuius diameter est proxime æqualis summæ diametrorum respondentium iis omnibus causis. Postremi duo ex iis tribus circulis sunt ii, quos in eodem Opusculo primo hujus Tomi appellavimus errores circulares sphæricitatis, & refrangibilitatis.

5. Diameter primi circuli pendet a sola distantia focali lenti, cui est proportionalis. Diameter secundi pendet a distantia focali, a diametro aperturæ, & a qualitate refractivâ substantiæ ipsius lenti, & est eo major, quo distantia focalis est minor, & quo diameter aperturæ est major, sed in illius ratione reciproca duplicita, & in hujus directa triplicata, ut facile colligitur ex iis, quæ habentur in eodem supplemento Opusculi I. Diameter tertii pendet ab apertura, & a qualitate distractiva substantiæ, eo major, quo diameter aperturæ est major, sed in ejus ratione simplici, ac major, ubi vis distractiva est major. Licet autem in aperturis exiguis circulus secundus respondens errori figuræ sphæricæ sit perquam exiguus respectu tertii, qui respondet diversæ refrangibilitati, & hic exiguus respectu primi, qui respondet diametro apparenti solis; adhuc tamen in lente proposita distantia focalis, & aperturæ ita magnæ, sunt satis magni omnes tres, ut mox patebit.

6. Distributio luminis per primum circulum est ad sensum æquabilis, per reliquos binos fit admodum inæqualiter. Vidimus in eodem illo supplemento, lumen ita distribui per tertium circulum, ut densitas ipsius in centro excrescat in infinitum, & in recessu a centro ita imminuat, ut in peripheria prorsus evanescent:

scat : pro secundo circulo densitatem in medio excrescere itidem in infinitum , & in recessu ab ipso ita initio descrescere , ut ubi deventum sit ad distantiam , cuius quadratum æquatur dimidio quadrato totius semidiametri , evadat minima , tum iterum crescat , & in peripheria ipsa rursus excrescat in infinitum : ibi autem , ubi est minima , adhuc est satis magna , cum æquetur binis tridentibus ejus , quæ haberetur , si ubique esset eadem .

7. Diameter primi circuli , ut mox videbimus , in distantia focali pedum 10 , assumptâ diametro solis minutorum 31 , est quamproxime lin. 13 . Diameter secundi in lente e vitro communi , in quo ratio sinus incidentiarum ad sinum anguli refracti sit , ut 153 , ad 100 , cuiusmodi frequenter occurunt , invenitur proxime 9,10 : at in iis flint , quæ habent eam rationem 160 ad 100 , qui valor in iis occurrit sæpe , obtinetur tantummodo 8,18 . Diameter tertii in vitris communibus provenit linearum 9,78 , in pluribus flint proxime 13 . Hinc diameter spatii circularis , per quod in ejusmodi lente diffunduntur radii , est pro iis vitris communibus proxime linearum 32 , pro flint linearum 34 . Sed postremæ lineaæ habebunt pro utroque vitri genere densitatem luminis exiguum pertinentem ad marginem tertii circuli .

8. Pro computandis omnibus hisce valoribus habentur formulæ satis simplices , quæ exhibeant valores satis proximos veris , ubi aperturæ sint exiguæ respectu distantiarum focalis : verum applicari possunt etiam huic casui distantiarum focalis pedum decem cum apertura pedum 4 sine errore ita magno , ut perturbet judicium , quod ferri possit de lentibus ustoriis .

9. Sit in fig. 1 (Tab. VI) C centrum , ACA diameter aperturæ lentis , ad cuius puncta omnia devenient ab omnibus punctis disci solaris radii , quorum singuli componuntur ex ingenti multitudine filorum coloratorum habentium refrangibilitatem diversam : primus rubeus habet minimam , postremus violaceus maximam . Si axis lentis obvertatur centro solis S , radius SC transibit irrefractus , & integer per CF , reliqui omnes patientur duas refractio-nes , alteram in ingressu , alteram in egressu . Inter radios digres-sos e quovis alio puncto disci solaris habebitur semper unicus spe-ciei

ciei cuiusvis, qui egredietur per rectam parallelam illi, per quam advenerat binis exiguis refractionibus oppositis se mutuo destruentibus, qui quidem transibit per ipsum centrum C, si lens sit isoscelia, & prope ipsum, si curvaturæ superficierum oppositarum sint diversæ; erit autem ita proxima via nova priori productæ, ut potissimum in primo casu is radii, qui transit per centrum C, possit considerari pro continuato, & irrefracto. Hinc si LSL sit diameter disci solaris; radii LCE haberi poterunt pro irrefractis, adeoque dispergentur per angulum ECE æqualem angulo LCL determinanti diametrum apparentem solis, qui idcirco diffundentur per spatium EE, quod in plano perpendiculari ad axem CF erit circulus habens centrum in ipso axe in F. Ii non poterunt colligi, nisi adjecta lente alia multo magis convexa inter C, & F, quæ quidem ipsos non poterit colligere accurate in puncto unico ob errorem figuræ sphæricæ, ut mox patabit, sed hic interea agimus de effectu lentis unicæ.

10. Patet, datâ diametro apparente solis, semidiametrum FE fore proportionalem distantia CF, ad quam erit, ut radius ad tangentem semidiametri apparentis solis LCS = ECF. Cum is angulus sit admodum exiguus, poterit diameter EFE considerari ut arcus circuli habentis radium CF : radius autem æquatur arcui circuli continentis  $57^{\circ} 17' 45''$ , sive quamproxime minuta 3438. Quamobrem si distantia CF fiat = h, & numerus minutorum diametri apparentis solis n, erit diameter EE =  $\frac{nh}{3438}$ . Si fiat n = 31, h = ped. 10 = lin. 1440, erit EE = 12, 98, sive quam proxime = lin. 13, uti posui num. 7.

11. Considerentur jam in fig. 2. radii advenientes a centro solis ad totam superficiem lentis, qui omnes erunt ad sensum paralleli, ut bini radii extremi BA, cum illo medio SC: singuli præter ipsum medium dividuntur in plurima fila colorata, ut diximus, sed hic considerabimus unicam speciem quampiam coloris ejusdem. Radii illi extremi BA refracti versus axem incurvant in ipsum in quodam puncto F, quod non est idem pro reliquis, sed reliqua, quo minus distant ab axe, dum ad ipsum adveniunt;

eo

eo serius in ipsum incident post egressum : extremus eorum concursuum limes est quoddam punctum F, in quo concipiuntur concurrere cum axe ipso radii, qui infinite parum ab eo distant, dum adveniunt ad lentem. Omnes ii radii contingunt (\*) causticam GEFEG, quæ habet cuspidem in F. Radii extremi AF tangunt singuli alterum ex arcibus ejus cuspidis in G ante concussum axis F, tum progressi secant in E arcum oppositum : spatium omnium minimum continens omnes eos radios est circulus habens diametrum EE, & centrum in ejus intersectione I cum axe ; nam id spatium versus F augetur a dilatatione cuspidis, & versus F a progressu radiorum FE.

12. Punctum F est focus radiorum infinite proximorum axi, FF error longitudinalis figuræ sphæricæ, circulus diametro EE ejus error circularis. Ultima pars causticæ GFG accedit in infinitum ad formam parabolæ gradus tertii, in qua quadrata ordinatarum IE sunt, ut cubi abscissarum FI. In curva ejus generis F'I est æqualis  $\frac{1}{4}FF'$ . Hujus FF' valor est ille  $r^2\rho$  adhibitus etiam numero 21 capitinis II Opusculi I hujus Tomi II, qui numero 99 supplementi III Opusculi II Tomi I redactus est ad formam sequentem  $(\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{4}(2m+1) + \frac{m+2}{8m}) \times \frac{e^2}{(m-1)^2h}$ . Est ibi de more m ratio sinuum, e semiapertura lentis, h distantia focalis. Si fiat  $c = (\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{4}(2m+1) + \frac{m+2}{8m})$ ; fiet  $FF' = \frac{ce^2}{(m-1)^2h}$ .

Assumpto autem valore h pro tota CF, erit  $CF' = h - \frac{ce^2}{(m-1)^2h}$ :  $FI = \frac{1}{4}FF' :: AA = 2e : EE = \frac{ce^3}{2(m-1)^2h \times CF'}$ . Dato autem valore m qualitatis refractivæ, & habitâ CF' pro constanti, cum non ita multum differat a valore  $CF = h$ , quo pacto fiet EE  
Tom. II. H h  $= ce^3$

(\*) Quæ hic affirmantur de natura hujus curvæ, demonstrata sunt omnia in eo supplemento, sed in hac figura 2 litteræ A, C, A, G, H, G, F', F, E, I, E, respondent ejus figuræ i litteris F, A, F', D', E, D, B, I, C, O, C'. Id litterarum discrimen provenit ex eo, quod diversis temporibus hæc Opuscula conscripta sunt, atque id ita, ut aliae c litteris analogis respondeant aliis c præcedentibns Opusculis.

$= \frac{ce^3}{2(m-1)^2 h^2}$ , diameter erroris circularis figuræ sphæricæ sequitur rationem triplicatam directam diametri aperturæ  $e$ , & reciprocum duplicatam distantiaæ focalis  $h$ , quod itidem eruimus in eodem supplemento Opusculi I hujus Tomi II. Quoniam autem habetur in numeratore  $e^3$ , & in denominatore  $h^2$ , qui valor uterque hinc datur in pedibus; satis erit formulam inventam multiplicare per  $12 \times 12 = 144$ , ad habendam diametrum quæsitam EE in lineis, & habebitur  $\frac{72ce^3}{(m-1)^2 h^2}$ . Factâ semidiametro aperturæ  $e = 2$ , distantiaæ focali  $h = 10$ , & assumpto pro vitris communibus valore  $m = 1,53$ , obtinebitur valor ejus EE = 9,10, & facto pro flint  $m = 1,60$  habebitur 8,18, uti positum est numero. 7. Inveniretur aliquanto plus, si pro divisore adhiberetur non  $h^2$ , sed  $h \times CF$ . Verum hinc non agitur nisi de valoribus, qui non multum distent a veris, quam etiam ob causam & hinc, & numero sequenti pro valore  $h$  non assumitur distantia lentis a loco maximæ unionis radiorum, vel a loco foci radiorum medium incidentium versus medium inter centrum lentis, & marginem, quod itidem aliquanto laxius accipietur in determinatione sequenti.

13. Demum in figura 3 considerentur ex iisdem radiis provenientibus a centro solis, & incidentibus in puncta extrema aperturæ fila extremæ refrangibilitatis rubea, & violacea, & secludatur mente error figuræ sphæricæ, tanquam si lens colligeret omnes radios homogeneos in puncto axis unico. Sit id punctum pro primis rubeis F, & pro postremis violaceis F', quod utique erit proprius lenti, adeoque radii violacei AF' producunt occurrent rubeis AF oppositis in quibusdam punctis E, ac spatium omnium minimum continens omnia fila colorum omnium erit circulus habens diametrum EE, ac centrum in ejus concursu cum axe in I. Existente  $h$  distantia focali,  $m$  ratione sinuum,  $dm$  ejus differentia pro violaceis, & rubeis, invenitur (num. 98 ejusdem supplementi III Opusculi II Tomi I)  $FF' = dh = - \frac{hdm}{m-1}$ . Quoniam

niam vero anguli F'AE sunt exigui ; quadrilineum FEF'E parum differet a parallelogrammo ; adeoque erit  $FI = \frac{1}{2} FF' = \frac{hdm}{2(m-1)}$ , & factis  $CF = h : FI = \frac{hdm}{2(m-1)} : AA = 2e : EE = \frac{edm}{m-1}$ , hic erit valor diametri quæsitæ.

14. Hinc patet, ipsam diametrum EE pendere a diametro aperturæ  $= 2e$ , cui est proportionalis, & a valore  $\frac{dm}{m-1}$ , qui potest exprimere qualitatem distractivam : nam in exiguis angulis ratio, quam habet separatio filorum extremorum ad totam refractionem, exprimitur per ejusmodi fractionem, ut vidimus numero 41 capitinis I Opusculi I hujus Tomi II. Valor  $dm$  absolutus admodum difficulter determinari potest, nec unquam prorsus accurate; quia in spectro colorato orto ex distractione radiorum diversæ refrangibilitatis color violaceus ita sensim languescit, ut evadat in fine prorsus insensibilis : adhuc tamen determinatur per observationes vero proximus is, qui pertinet ad distractiōnem violaceorum sensibilium a rubeis. Assumemus hīc etiam valorem  $m$  pro flint  $= 1,60$ , pro vitro communi  $1,53$ , tum  $dm$  pro illo  $= 0,027$ , pro hoc  $= 0,018$ , quibus valoribus proximos plerumque inveni. Positis hisce numeris in formula  $\frac{edm}{m-1}$ , &  $2 \times 144 = 288$  pro  $e$ , invenitur diameter quæsita pro flint linearum 13, & pro vitro communi 9,78.

15. Notandum hīc occurrit illud, quod etiam notavimus in supplemento III Opusculi II Tomi I, quam decrescat in aperturis ingentibus respectu distantiæ focalis excessus erroris circularis pertinentis ad refrangibilitatem respectu ejus, qui pertinet ad sphæricitatem etiam, ubi comparentur solæ diametri eorum circellarum. Newtonus in objectivo, quod susceperebat considerandum, invenerat rationem diametri primæ ad secundam eandem ac 5449 ad 1. Nos ibi invenimus pro errore longitudinali rationem tantummodo proxime 337 ad 28, quæ translata ad diametros errorum circularium non evaderet nisi duplo adhuc major. Hīc autem ipsa ratio diametri erroris

roris circularis primi ad diametrum secundi non obvenit pro vitro communi , quod itidem Newtonus consideraverat , nisi 9,78 ad 9,10 , nimirum quam proxime accedens ad æqualitatem , usque adeo apertura ingens respectu distantiaæ focalis auget errorem sphæriticatis .

16. Jam vero pro radiis provenientibus a quovis alio puncto solis , habebitur ad sensum eadem dispersio radiorum respondens iis binis erroribus figuræ sphæricæ , & diversæ refrangibilitatis , quæ habetur pro radiis provenientibus a centro , & effectus utriusque conjunctus exhibebit pro quovis puncto circuli figuræ i circulum , cuius diameter erit circiter summa diametrorum pertinentium ad eos binos errores , adeoque in figura i radii provenientes a limbo solis L dispergentur per circulum ejus magnitudinis , & loco circuli habentis diametrum EE habebitur circulus habens summam eorum diametrorum , quæ pro illo flint erit linearum circiter 34 , pro illo vitro communi 32 juxta ipsum numerum 7 . Ita ob eos errores augetur circulus diametri apparentis solis , qui habebat diametrum linearum 13 , & ejus diameter evadit major vicibus circiter  $2\frac{1}{2}$  : cumque areæ sint , ut quadrata diametrorum , & quadratum  $2\frac{1}{2}$  sit  $6\frac{1}{4}$  , patet , radios ob ejusmodi errores diffundi per spatium plusquam sextuplo majus .

17. Si densitas in eodem circulo esset æquabilis ; ea ubique esset minor in eadem ratione : sed satis patet , distributionem luminis fore maxime inæqualem intra eum circulum , & in extremo margine densitas erit in immensum minor , quam intra , ob ipsam superpositionem circulorum pertinentium ad radios digressos a punctis solis propioribus centro , qui eo plures superponuntur alii aliis , quo magis acceditur ad id ipsum centrum ; præter quam quod ipsi circuli errorum habent inæqualem distributionem , & circulus diversæ refrangibilitatis densitatem versus margines evanescentem , quæ inæqualitas obest perfectioni lentis juxta numerum 2 . Problema , quo quæratur progressus densitatis luminis in eo circulo ortæ ab omnibus iis tribus causis dispersionis luminis , esset admodum implexum , etiam ubi agatur de aperturis exiguis , atque id multo magis evaderet difficile in casu aperturæ

ita

ita magnæ , in quo formulæ , quas hic adhibuimus , sunt parum admodum accuratæ .

18. Potest hic circulus coarctari , adhibitâ secunda lente , quæ circulum figuræ 1 potest contrahere in spatium multo minus : nam radios omnes digressos a punto C colligeret in spatiolum exiguum respectu suæ aperturæ excipientis eos radios , quæ ipsa apertura esset minor , quam EE , interpositâ lente inter C , & F . Sed ea colligeret citius radios AF' figuræ 2 , & 3 jam convergentes , quam radios CE figuræ primæ divergentes : ii post intersectiōnem divaricati iterum recederent a se invicem , & occuparent spatium non exiguum excepti in ea distantia , in qua haberetur unio ipsorum CE figuræ 1 . Esset itidem problema implexum illud , quo quæreretur distantia focalis , & positio lentis secundæ , quæ habitâ ratione omnium trium causarum dispersionis omnium maxime colligeret radios omnes digressos a toto disco solis , & incidentes in totam primæ lentis aperturam ; nec satis video ante accuratiorem perquisitionem , an contractio possit esse ita magna , ut habitâ etiam ratione novæ dispersionis inductæ a secunda lente , & majoris inæqualitatis inductæ per ipsam in densitatem satis magnam , lucrum inde capi possit pro ingenti calore excitando .

19. Sed omissis iis perquisitionibus , ut deveniam ad rem , quæ quæritur ; lens ejus magnitudinis , quæ contineat spiritum vini inter binas laminas vitreas , est omnino magis ad rem idonea , quam lens e quovis genere vitri , lens autem e flint est omnium maxime inepta , neque id tantum ubi agitur de lente adeo ingenti , sed etiam de minoribus quibuscunque . Tres circulos errorum consideravimus . Primus , qui provenit a diametro solis , est idem pro substantiis omnibus : secundus sphæricitatis , qui , pari aperiturâ , & distantia focali , pendet a sola vi refractiva , inventus est quidem minor in flint habente vim refractivam majorem , quam in vitro communi , sed paullo minor , nimirum linearum 8,18 pro 9,10 : sed error postremus refrangibilitatis , qui pendet a vi distractiva , in ipso flint habente ipsam tanto majorem obvenit linearum 13 , dum in vitro communi evasit 9,78 . Non  
habeo

habeo observationes pro comparanda vi refractiva , & distractiva spiritus vini cum vi vitrorum ; sed omnino credo , vim distractivam spiritus vini fore minorem , quam vitri flint , quod redideret minus idoneum id genus vitri , quam spiritum vini , ut patet ex ipsa ingenti dispersione , quæ tertium errorem usque adeo auxit : quam ob causam si vitrum sit adhibendum , oportet , vitro flint rejecto , adhibere potius vitrum commune .

20. Et quidem ubi agitur de lente ustoria exigua , vel magnitudinis mediocris , præferendum videtur vitrum spiritui vini , quia ex una parte multo facilis est elaborare lentem e massa vitri , pro qua satis est perficere bene sphæricas , & politas binas superficies , quam quatuor , quæ necessariæ sunt ad efformandam lentem , quæ contineat spiritum vini conclusum inter duas laminas : & ex parte altera non ita raro inveniuntur massæ minores vitri communis satis puræ , & homogeneæ , quod requiritur , ne internis reflexionibus , & refractionibus nimis magna pars luminis dispergatur , & dispereat , ac pondus ejusmodi lentis non nimis enorme non reddit nimis incommodum ejus usum . Ea sunt bina incommoda lentis adeo ingentis , si fiat e massa vitrea plena , quæ quidem sunt minora in vitro communi , quam in flint ; sed adhuc multo minora in lente continente spiritum vini inter duas laminas vitreas .

21. Quod pertinet ad pondus , id quidem est multo majus in vitro flint habente satis magnam copiam plumbi : adeoque ejus pondus in tanta mole est immane . Accedit , quod massa vitri flint adeo ingens satis pura sperari omnino non potest , nisi ars chymica demum invenerit methodum aliquam , quæ ejusmodi massas exhibeat homogeneas . Vix omnino haberi nunc possunt ex eo vitro laminæ exiguae pro telescopiorum objectivis , & quidem jam ne vix quidem satis idoneæ pro objectivis aperturæ pollicum quatuor ; vitium impedit omnino formationem lentis ustoriæ ejus molis e flint . Vitra etiam communia , quæ minus difficulter inveniuntur homogenea , & pura , sunt multo magis incommoda ob pondus ingens , quam binæ laminæ includentes spiritum vini . Accedit homogeneitas spiritus vini , quæ id efficit , ut ea forma

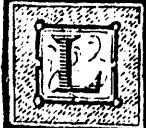
forma lentis ustoriæ videri debeat omnino præferenda. Habentur quidem ibi præter reflexionem radiorum in ingressu in primam laminam, & egressu e secunda, quæ sunt communes etiam lenti e solo vitro, binæ alij reflexiones in transitu e vitro ad spiritum vini, & ab hoc ad vitrum, quæ disperdunt partem aliquam radiorum; sed eæ reflexiones non sunt ita fortes: in ipso autem transitu per massam vitream ita crassam intercipitur non ita exigua lucis copia, ac multo major homogeneitas spiritus vini, quam vitri, utcumque e maxime puris, illam exiguam jacturam compensat.

22. Quod si pondus immane non deterreat, & sperari possint aliquando massæ non solum vitri communis, sed etiam flint, satis puræ, & homogeneæ; tum optimum factu erit, si fiat lens composita ex iis binis substantiis more objectivorum acromaticorum, in quibus corrigatur tam error refrangibilitatis, quam sphæricitatis methodo exposita in præcedentibus Opusculis. Satis patet e supplemento tertio Opusculi II Tomi I, quantum minuantur errores tam sphæricitatis, quam refrangibilitatis per ejusmodi combinationem binarum lentium e binis substantiis convexæ, & concavæ, & quo pacto computari possint errores residui, & vero etiam corrigi, vel saltem minui. Eo pacto haberetur unio radiorum multo major, cum vi lentis ustoriæ multo majore.

23. Verum interea pro lentibus ustoriis ingentibus optimum factu erit, si eæ fiant e duabus laminis vitreis habentibus crassitudinem ubique eandem, & superficies sphæricas bene politas continentibus spiritum vini, vel alium aliquem liquorem bene perspicuum, qui erit eo aptior, quo habuerit majorem vim refractivam conjunctam cum vi distractiva, quam fieri poterit, exigua. Pro minoribus patet, adhibendum esse potius vitrum commune, quam flint, quod omnino debet excludi, potissimum ob tres rationes, quod id vitrum multo majoris est ponderis, quod vix potest sperari satis homogeneous, & ne vix quidem, ac in primis quod cum habeat vim distractivam multo majorem, secum trahit errorem refrangibilitatis itidem multo majorem.

# OPUSCULUM III.

DE MODO DETERMINANDI DISCRIMEN VELOCITATIS, QUAM HABET LUMEN, DUM PERCURRIT DIVERSA MEDIA, PER DUO TELESCOPIA DIOPTRICA, ALTERUM COMMUNE, ALTERUM NOVI CUJUSDAM GENERIS.

I.  U M E N momento temporis propagari ad distantias ut cunque magnas , diu passim creditum est a Physicis , & id ipsum a Peripateticis explicabatur per suas *productiones de novo* factas a causis necessariis , quæ suos effectus edant eodem momento temporis , quo existunt , a Cartesianis vero per impressionem factam in altero extremo lineæ globulorum , quæ traducatur immediate per lineam totam . Eclipses satellitum Jovis , quæ observantur eo citius , quo magis in suo motu circa solem terra accedit ad eum planetam , docuerant superiore sæculo propagationem successivam , & quidem cum ejusmodi velocitate , quæ ipsum ducat a sole ad terram circiter semiquadrante horæ . Aberratio luminis , cuius leges Bradleyus determinavit , & causam inventit desumptam ab ipsa propagatione luminis successiva combinata cum motu terræ ita confirmavit propagationem ipsam successivam , ut nullus jam de ea dubitandi locus supersit , atque id potissimum , quod ex eo effectu usque adeo diverso ab illis phænomenis illarum eclipsium ducatur satis proxime idem semiquadrans horæ pro intervallo æqualis distantia solis a terra .

2. Theoriam impressionis factæ in primum e globulis pro luminis propagatione evertit propagatio rectilinea, ut Newtonus ipse demonstravit, qui ei substituit translationem particularum lucis emissæ a corpore luminoso progredientium motu uniformi per medium homogeneum cum celeritate, quæ videtur immanis, & incredibilis iis, qui non considerant, nos intervalla metiri per relationem ad nostrum pedem, ad quem referuntur hexapedæ, & leucæ, cuius brevitas id efficit, ut immanis habeatur hexapedarum, & ve-

& vero etiam leucarum numerus in iisdem intervallis eodem patet, quo si aliquod e minimis illis insectis, quæ ægre per fortissima microscopia a nobis percipi possunt, intervalla metiretur, immanem in nostro cubito suarum hexapedarum, & leucarum numerum inveniret.

3. Non desunt ex Auctoriibus primi etiam ordinis, qui præferant pro luminis propagatione theoriam analogam propagationi soni, ut nimurum ea fiat per undas excitatas in fluido tenuissimo, & maxime elasticō, & propagationem rectilineam, reflexionem ad angulos æquales angulis incidentiæ, rationem constantem sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti ex eadem theoria deducant: sed in primis undarum natura meo quidem, ut & plurimorum judicio, contraria est ei propagationi rectilineæ, quam videmus in lumine transeunte per foramina, dum undæ expanduntur, & sonus etiam oblique propagatur, qua de re fusius egi in mea veteri dissertatione de Lumine. Deinde præterquamquod in Newtoniana theoria motus progressivi particularum luminis saltem multo facilius eadem illæ proprietates pertinentes ad progressionem rectilineam in medio homogeneo, reflexionem ad angulos æquales, refractionem cum constanti ratione sinuum, deducuntur ope virium, quibus particulæ corporum agunt in aliqua exigua distantia in particulæ luminis, & quidem etiam diversa refrangibilitas a Newtone inventa radiorum diversæ speciei; accedit etiam pars admodum sensibilis radii cujusvis, quæ tam in reflexione, quam in refractione dispergitur irregulariter ita, ut in angulis multo minus distantibus ab angulo reflexionis, vel refractionis regularis discedant a puncto incidentiæ multo plures particulæ: accedit alia luminis proprietas, detecta itidem a Newtone ipso summâ sagacitate, illarum vicium facilitatis reflexionis, & facilioris transmissus redeuntium ad intervalla æqualia, e quibus pendent phænomena plurima, & in primis ratio discriminis inter diversos colores corporum naturalium. Ego eorum omnium explicationem deductam e viribus agentibus in particulæ luminis emissas e corpore luminoso, & progredientes inveni admodum simplicem, quam edidi in mea veteri dissertatione de Lumine,

& in mea Theoria Philosophiae Naturalis, quæ quidem non ita facilem explicationem invenient in theoria undarum excitatarum in fluido elasticō : ostendi autem in mea itidem veteri dissertatione de tenuitate luminis, quam parum jacturæ timeri possit in sole ab immensa lucis copia non solum, quæ hoc usque emissā sit, sed etiam, quæ per immanem sæculorum numerum emitti possit.

4. Quidquid sit de luminis natura explicata per ejusmodi theorias, illud occurrit inter ipsas discrimen, quod in theoria Newtoniana de emissione particularum luminis, & earum motu progressivo invenitur augmentum celeritatis luminis ipsius transeuntis e medio tenuiore habente vim refractivam minorem ad medium densius habens vim majorem: & quidem accuratissime demonstratur in ea theoria, celeritatem eandem in medio densiore esse maiorem, quam in rariore in ratione sinus anguli incidentiæ in ingressu ex hoc in illud ad sinum anguli refracti: dum e contrario ii, qui explicant propagationem luminis per undas, censem, celeritatem in medio densiore debere esse minorem.

5. Methodus determinandi, an celeritas luminis sit major in medio densiore, ut in aqua, quam in rariore, ut in aere, an minor, mihi venit in mentem pluribus annis ante meam transmissionem ex Italia in Galliam, & eam cum amicis pluribus communicavi per litteras tam missas Parisios, quam ad celeberrimum Taurinensem Professorem Beccariam. Obiectæ mihi fuerant ante litteras ad ipsum datas binæ difficultates contra ejusmodi methodum, altera petita a perceptione directionis, qua radius ad oculum advenit, altera ab ipsa immani ejus celeritate, qua redditur in immensum breve, & fere momentaneum tempusculum, quo lumen percurrit exiguum tractum longitudinis telescopii, quo motu ego utor, ut mox patebit. Earum solutionem admodum facilem dedi jam tunc: sed nihil ea de re huc usque edidi, nec vero ab aliis editum est uspiam, quod sciam. Res quidem est summi momenti ad cognoscendam naturam luminis; cum inde videatur pendere ea ipsa quæstio, an ipsius propagatio fiat per undas fluidi cujuspam tenuissimi maxime elastici, an potius per emissionem particularum. Quin immo methodus hic adhiben-

da

da proderit etiam plurimum ad cognoscendam intimius, & confirmandam naturam, & causam aberrationis annuæ fixarum a Bradleyo propositam: nam ea ipsa aberratio adhibebitur in hac methodo, & vero ita, ut ad observandum integrum ejus effectum non debeant expectari observationes plurium mensium, sed intra admodum paucos dies, & fortasse etiam intra unicam noctem, vel ad summum intra duas, res perfici possit per paucas admodum observationes.

6. Indigit hæc methodus novo quodam telescopii dioptrici generi coniuncto cum alio communi , quæ ambo simul applicentur instrumento , quod circa axem verticalem converti possit , & determinare in positione utrâque intra pauca secunda differentiam distantiarum apparentis a zenith ejusdem fixarum , quam exhibent ea singula telescopia , quod quidem ope sectoris plurium pedum , & vero etiam ope quadrantis idonei haud difficulter præstari potest. Spero equidem non defuturum , qui ejusmodi opus suscipiat . Proponam hic methodum ipsam in primo paragrapho , ac dissolvam difficultates mihi olim oppositas : tum in secundo evolvam uberiorum eam , quæ pertinent ad theoriam ejus telescopii novi , quod idoneum esse non potest , nisi ad hunc usum tantummodo : in tertio agam de fixis maxime idoneis ad eam rem , ac dissolvam difficultates oppositas , quæ post præcedentes paragraphos sponte evanescunt .

S. I.

## *Methodus adhibenda pro solutione problematis propositi.*

7. ABBERRATIO fixarum oritur ex eo, quod motus progressivus luminis combinatus cum motu progressivo terræ efficit, ut objecta, saltem uti eorum locus apparet determinatur per instrumenta, nobis appareant in directione diversa a directione postrema, quam habet radius, dum incurrit in oculum, sed in alia, quæ inclinatur ad ipsam in angulo determinato a ratione, quam habet celeritas ipsius terræ ad celeritatem luminis. Ad ejusmodi theoriam evidentissime ponendam ob oculos adhibebimus methodo-

I i 2 dum

dum analogam ei , quam ipse Bradleyus jam ab initio præclarissimi sui comperti proposuit . Ea est admodum simplex , & saltem , quod pertinet ad determinandum per instrumenta locum apparentem objecti collineando in ipsum ope alidadæ instructæ dioptris sive simplicibus , sive telescopicis , caret omnino difficultibus , quibus eam involverunt alii , ut ii , qui ad ejusmodi perquisitionem censuerunt adhibendam theoriam impressionis obliquæ , quam oculus translatus subire debeat a lumine progrediente .

8. Referat (Fig. i. Tab. VII) recta AB regulam habentem , ut moris erat in veterum instrumentis , duas laminas CDEF , GHIK cum foraminulis M , N ab ipsa æque distantibus in usum alidadæ ferentis secum dioptras , & determinantis per suam positionem locum apparentem objecti , quod transpicitur per dioptras ipsas : directio regulæ est eadem , quam habet recta tendens a centro foraminis N ad centrum foraminis M . Ea directio tribuitur positioni apparenti puncti objecti , ubi id ita transpicitur , ut appareat in recta jungente ea centra , & eam positionem indicant divisiones instrumenti , per quas alidada excurrit .

9. Jam vero si terra stet , & recta M , N transiens per centra eorum foraminulorum habeat eandem directionem , quam radius RS delatus a quopiam puncto objecti ad M ; is radius perget ad centrum N secundi foraminis , & percellet oculum applicatum inferne ad id foramen post ipsam laminam , atque id quidem , sive lumen momento temporis propagetur , sive progrediatur cum velocitate quacunque . Sed si dum lumen progreditur ab M ad N , etiam regula motu terræ procedat ita , ut punctum A abeat in A' per rectam AA' jacentem vel in plano ipsius laminæ superioris , vel extra id planum , & extra directionem radii , quod accidet fere semper ; foraminula M , N ita abibunt in M' , N' per lineolas parallelas , & æquales ipsi AA' , ut lumen transmissum per M , dum advenit ad locum , in quo prius erat N , non inveniat ibi centrum ejus foraminuli secundi jam progressi ad N' , sed incurrat in partem laminæ solidam , quæ non permittet ejus progressum , & appulsum ad oculum . Ut id objecti punctum transpici possit trans centra foraminulorum , oportebit ita inclina-

re in fig. 2 regulam BA in plano lineolarum MM', NN', ut dum radius progreditur a prima lamina ad secundam per lineam MN', centrum foraminuli secundi a prima positione N adveniat ad novam N' jacentem in via radii, & permittat ipsius transitum, nimirum ut latus MN' trianguli MNN' ad latus NN' habeat eandem rationem, quam celeritas luminis ad celeritatem foraminis N translati cum terra in N'.

10. Cum hæc unica positio regulæ permittat transitum ejus radii; in hac sola illud punctum objecti apparebit positum in directione tendente a centro secundi foraminuli ad centrum primi, & hæc erit directio apparenſ positionis ejus puncti determinata ab instrumento, quæ nimirum jacebit in plano transeunte per viam radii, & viam foraminuli, & inclinabitur ad viam ipsius radii MN' in angulo MN'M' = N'MN, cuius sinus ad sinum N'NM, quem continet recta NM parallela directioni apparenti N'M' cum via foraminuli, nimirum cum directione motus terræ transferentis secum regulam ipsam cum suis dioptris.

11. Hoc est genuinum fundamentum aberrationis luminis, ex quo patet, nullum hic haberi locum perquisitioni mechanicæ, & animasticæ circa effectum impressionis obliquæ compositæ a directione motus, cum qua lumen advenit ad impellendas fibras oculi, & directione motus fibrarum ipsarum, & circa perceptionem inde resultantem, quæ determinet directionem loci apparentis objecti visi trans centra dioptrarum. Locus apparenſ, quem indicat alidada rite disposita respectu dioptrarum in instrumento, cui ipsa applicatur, est ille, ad quem tendit positio ejusdem alidadæ permittentis transitum radii per centra dioptrarum. Id autem, quod habet locum in ejusmodi veteribus dioptris, habet itidem in dioptris telescopicis. In his adhibetur micrometrum filare in foco objectivi, & axis telescopii tendens ad intersectionem filorum, quæ habeatur in ipso, vel linea, quam appellant fiduciæ, tendens a puncto ejusdem axis proximo mediæ crassitudini objectivi ad ipsam filorum intersectionem adductam ad punctum imaginis efformatae in foco, in quo pingitur punctum quodvis objecti, supplet vices positionis rectæ transeuntis per centra veterum dioptrarum.

rum. Eo puncto imaginis occupato a filo micrometri, tegitur illud objecti punctum: ad hoc autem, ut id punctum appareat ibi, vel tegatur a filo ibi posito, debet axis telescopii, vel ea linea fiduciæ ita inclinari ad directionem radii transeuntis per centrum objectivi, vel per illud punctum axis proximum ejus centro, ut directio loci apparentis jaceat in plano transeunte per viam radii, & viam axis, vel ejus lineæ telescopii translati, & habeatur illa ratio sinuum eadem, ac ratio velocitatum. Id hinc probe notandum est: nam inde pendet solutio prioris ex iis binis difficultatibus, quæ objectæ mihi fuerant contra theoriam hinc proponendam, a Mathematicis, & vero etiam Astronomis primæ noctæ, qui tamen hæc genuina fundamenta aberrationis luminis conformia iis, quæ primus ejus auctor Bradleyus proposuit, independentia prorsus a directione impressionis factæ a radio post egressum e telescopio, non satis intime perspexerant, vel non satis attente consideraverant.

12. Quivis motus telescopii translati manu, vel motu navis, in qua sit observator, parit aberrationem hujusmodi: sed ea est prorsus insensibilis ob excessum immensum velocitatis luminis supra eas velocitates. Sola velocitas motus terræ habet rationem exiguum quidem, sed non ita exiguum ad velocitatem luminis, ut angulus ei velocitatum rationi respondens non sit admodum sensibilis: sed ejusmodi est sola velocitas motus annui: nam aberratio orta a motu telluris diurno est itidem insensibilis. Positâ eadem quavis ratione velocitatum, angulus NMN', qui est semper acutus, immo & ob suam exiguitatem fere accurate proportionalis suo sinui, erit eo major, quo major erit sinus anguli N'NM, quem continet directio motus telescopii cum directione apparente objecti, nimirum, quo is angulus magis accedet ad rectum, & erit maximus, eodem existente recto. Ex ejusmodi aberrationis theoria, & immenso numero observationum institutarum circa stellas fixas per instrumenta, quæ adhibentur in Astronomia, deducitur, aberrationem maximam provenientem e motu annuo terræ in omnibus fixis esse ad sensum eandem, nimirum secundorum 20, quæ si accipientur hinc, & inde a loco medio, evadunt 40:  
sed

sed velocitas motus diurni e distantia solis a terra jam inventa intra limites admodum arctos per postremum transitum Veneris sub sole est minor, quam  $\frac{1}{66}$  velocitatis motus annui (\*), adeoque totus effectus aberrationis provenientis a motu diurno non est, nisi quædam fractio unius secundi. Hinc non habetur ratio ab Astronomis, nisi solius aberrationis ortæ a motu annuo telluris.

13. Theoria hujus aberrationis deducta e positione, & magnitudine anguli N'NM variata pro diversa longitudine, & latitudine fixarum, ac diverso loco telluris in orbita sua determinante longitudinem solis, ostendit, variam esse pro diversis fixis eodem die, & pro eadem fixa diversis diebus tam aberrationem absolutam, quam eandem redactam ad quemvis circulum cælestem, & ex ea erutæ sunt formulæ, ac computatæ tabulæ pro calculanda aberratione in longitudinem, in latitudinem, in ascensionem rectam, in declinationem. Hæc postrema omnium facillime, & cum maxima accurazione determinatur per observationes, cum ea afficiat distantiam apparentem a zenith in appulso fixæ ad meridianum, cuius determinatio non pendet a mensura temporis, sed a sola divisione quadrantum, & partibus micrometri vel interni, vel externi. Innotescit ex iis tabulis, & vero etiam ex ephemeridibus, calculo jam redacto ad satis magnam facilitatem, quanta esse debeat quovis momento temporis aberratio cuiusvis fixæ in declinationem, unde facile deducitur, quæ fixæ, & quo anni tempore habeant aberrationem in declinationem satis magnam. Fixa, quæ sit proxima polo eclipticæ, habet ipsam bis in anno in-

te-

(\*) Parallaxis solis horizontalis determinata est per illum transitum proxime  $= 8^{\text{h}} \frac{1}{2}$ , & radius circuli terræ maximi ad distantiam medium solis a terra, quæ est radius orbitæ annuæ terrestris, est, ut sinus ejus anguli ad radium, nimirum ut  $412$  ad  $1000000$ . Hinc celeritas motus diurni, quæ est ad celeritatem motus annui, ut circumferentia ad circumferentiam, sive radius ad radium directe, & una dies ad numerum dierum in anno  $= 365 \frac{1}{4}$  reciproce, erit ad ipsam, ut  $\frac{412}{1}$  ad  $\frac{1000000}{365,25}$ , nimirum ut  $1$  ad  $\frac{1000000}{412 \times 365,25} = 66,9$ .

tegram secundorum 20 ita , ut altero ex iis binis oppositis anni temporibus ejus declinatio augeatur per hanc aberrationem 20 secundis , altero tantundem minuatur . Hinc factâ reductione , quæ pertinet ad alios duos fixarum motus , nimirum ad præcessionem æquinoctiorum , & nutationem , ipsa declinatio invenitur altero ex iis temporibus minima , tum post sex menses maxima , nimirum 40 secundis major .

14. Seligendæ erunt ad hunc usum , quem hic proponemus , fixæ , quæ habeant satis magnam aberrationem in declinationem , & anni tempora , quibus ea est satis magna . Si adhibetur quadrans , qui converti possit circa proprium axem , poterunt haberi fixæ , quarum aberratio in declinationem æquetur integræ absolutæ secundorum 20 : si potius fiat usus sectorum ingentis radii , qui adhiberi solent pro fixis parum distantibus a zenith , a quibus multo major exactitudo sperari potest , adhuc in locis non nimis proximis zonæ torridæ habebuntur fixæ , quarum aberratio in declinationem ascendat ad secunda 19 , vel 18 : sed ea de re agemus in paragrapho tertio , in quo etiam juxta num. 5 dissolventur difficultates propositæ .

15. Quæ diximus de magnitudine aberrationis tam absolutæ secundorum 20 , quam redactæ ad augendam , vel minuendam declinationem , determinata sunt per telescopia , quæ sunt in usu , quæ nimirum habent aerem intra tubum , per quem radius procedit ab objectivo ad fila micrometri cum ea velocitate , quæ convenit progressui per aerem , quæ quidem debet esse parum admodum diversa ab ea , qua ipsum progreditur per ætherem , vel atmosphærā solarem in toto tractu a sole ad terram , quam ipsam ob causam celeritas , quæ eruitur ex illis 20 secundis aberrationis maximæ , convenit cum ea , quam prius exhibuerant eclipses satellitum Jovis . Quoniam enim ea est secundorum 20 , oportet eo tempore , quo lumen devenit a sole ad terram , terra ipsa percurrat arcum suæ orbitæ ejusdem numeri secundorum : nam spatiū percursum a lumine ad spatium percursum a terra debet esse , ut est radius circuli cuiusvis ad sinum sui arcus secundorum 20 , & sinus anguli exigui haberi potest pro æquali suo arcui .

Por-

Porro motus medius terræ diei unius, sive minutorum  $24 \times 60 = 1440$  est  $= 59', 8'' = 3548''$ , adeoque tempus debitum arcui  $= 20''$ , erit  $\frac{20 \times 1440}{3548} = \frac{800}{354.8} = 8'$ .

16. Sed si per illud intervalum intra tubum loco aeris habetur alia materia, ut aqua; velocitas luminis in ea esset major juxta theoriam Newtonianam ipsius luminis constantis particulis emissis, & progradientibus per rectas lineas intra medium uniforme, ac detortis versus perpendiculum per refractionem ortam a vi medii attractiva, quæ simul augere debet celeritatem, minor autem juxta theoriam undarum. Hinc aberratio in eadem positione terræ, & astri deberet esse minor in priore sententia, major in posteriore in ratione reciproca ipsius velocitatis. Stan- te enim in fig. 2 sinu anguli N'NM, & lineola NN', sinus aber- rationis NMN', qui ob suam exiguitatem considerandus est, ut proportionalis suo angulo, debet esse reciproce proportionalis re- tæ MN'. Cum hæc sit directe proportionalis velocitati luminis in progressu ab M ad N'; patet, aberrationem ipsam debere es- se reciproce proportionalem velocitati, quam habet lumen in eo tractu. Nihil confert ad eam aberrationis magnitudinem motus luminis ante ingressum in tubum, vel post egressum ab eodem, nihil directio motus intra oculum, nihil compositio motuum oculi, & luminis in hujus appulsu ad fibras illius. Angulus N'MN, dato angulo N'NM, pendet a sola ratione linearum N'N, N'M, quæ est ratio velocitatis terræ ad velocitatem, cum qua lumen progreditur non per ætherem, non per atmospharam terrestrem ante appulsum ad tubum, vel post egressum ex ipso, non intra oculum, sed tantummodo in illo intervallo MN'. Si velocitas lu- minis fuerit ibi minor, vel major; oportebit inclinare regulam, vel tubum telescopii plus, vel minus ad hoc, ut radius ingressus per foraminulum M, vel per centrum objectivi inveniat in N' foraminulum, per quod transire possit, & afficere oculum ipsi applicatum, vel incurrat ibi in filum micrometri, a quo inter- ceptus subtrahat aspectum sui puncti objecti oculo prospicienti per ocularem.

17. Hinc si loco regulæ habentis dioptras habeatur tubus , cu-  
jus bases oppositæ habent bina vitra , quæ possint continere a-  
quam , & coniectæ sint versus medium chartâ crassiore habente  
in medio foraminulum , per quod radius transire possit , & ap-  
plicetur is tubus lateri quadrantis astronomi , ac per ipsum ple-  
num aquâ transpiciatur fixa habens aberrationem positivam satis  
magnam in declinationem , & jacens ad boream , quæ removeat  
locum apparentem a zenith ; debebit per ejusmodi tubum plenum  
aquâ inveniri distantia a zenith minor , quam per ipsum vacuum  
in sententia celeritatis auctæ in medio densiore cum differentiâ  
distantiarum æquali differentiæ aberrationum . Distantia enim ap-  
parens erit distantia vera imminuta per refractionem , & per  
aberrationem luminis . Manentibus binis prioribus terminis , di-  
stantia ipsa debet habere differentiam eandem , quam habet ter-  
tius . Si momento temporis , quo fixa appetit trans tubum va-  
cuum , posset infundi aqua ; disperaret utique fixa ipsa , nec trans-  
pici posset , nisi remotâ in latus chartâ tegente basim inferio-  
rem , cum suo foraminulo , ad excipiendum radium , & permitten-  
dum ipsi transitum ; quia auctâ , vel imminutâ per immissionem  
eius novi medii velocitate luminis , ipsum lumen adveniret ad la-  
minam inferiorem in N' citius , quam foraminulum N , vel ipso  
jam prætergresso .

18. Hæc idea tubi vacui , & momento temporis repleti aquâ  
inducitur h̄ic tantummodo ad sistendam oculis , & in evidentiore  
lumine collocandam totam hanc theoriam . Ejusmodi tubus , cum  
iis foraminulis non est idoneus ad instituendas hujusmodi observa-  
tiones , ut nec veteres dioptræ sunt idoneæ ad habendas determi-  
nationes accuratas intra pauca secunda . Recurrentum est ad tele-  
scopia , quorum ope adhibendo micrometra affabre elaborata red-  
dantur sensibilia singula secunda , quin immo , ubi augmentum te-  
lescopii sit ingens , fiunt sensibiles etiam decimæ secundorum par-  
tes . Habentur nunc quidem telescopia dioptrica acromatica , quæ  
augent objecṭa , adeoque & distantias , & motus , etiam tercen-  
tum partibus , licet sint trium , vel quatuor pedum tantummodo .  
Sed ad hunc effectum , de quo agimus , satis etiam sunt telesco-  
pia

pia dioptrica communia, quæ quadrantibus, vel sectoribus majoribus aptari solent. Res tota eo reducitur, ut perspiciatur, quo pacto construi possit telescopium dioptricum, quod inter objectivum, & micrometrum contineat aquam, quo applicato majori quadranti, & sectori una cum alio communi habente aerem in eodem intervallo, determinetur satis accurate differentia distantiarum a zenith exhibitarum ab utroque ejusdem fixæ habentis satis magnam aberrationem in declinationem, quæ exhibebit differentiam aberrationum, adeoque etiam differentiam celeritatis luminis per aerem, & per aquam. Non est necessaria accurata determinatio distantiarum absolute: potest enim ita determinari differentia distantiarum exhibitarum ab utroque telescopio, ut error distantiarum communis in determinatione ipsius factâ per bina telescopia, veluti is, qui oriretur ex minus exacta divisione limbi, nihil turbet differentiam.

19. Quid requiratur ad perficiendum ejusmodi telescopium, exponemus in sequenti paragapho, ubi explicabitur ejus theoria cum præcautionibus necessariis, ne observationes per ipsum institutæ evadant erroneæ: accedet id, quod pertinet ad augendam ejus vim, & reddendum ipsum aromaticum, si libeat. Hic exhibebimus tantummodo methodum instituendi observationes per ipsum conjunctum cum altero formæ usitatæ ad habendum cum evidencia, & accuratione multo majore, & brevi tempore effectum integrum differentiarum aberrationum exhibitarum ab iis; dum ad obtinendum effectum integrum aberrationis absolutæ requiritur intervallum sex mensium, quo aberrationes evadant contrariæ, & maximæ, immo etiam annus integer, quo locus apparet fixæ correctus per alios fixarum motus cognitos redeat ad locum anni præcedentis.

20. Optimum factu erit, si adhibetur sektor longioris radii, cuiusmodi adhiberi solet pro determinanda distantia a zenith fixarum, quæ exiguo graduum numero ab eo distent, ubi ejusmodi observationes instituuntur pro mensura graduum meridiani, qui sektor converti possit circa proprium axem. Ego mei descriptionem exhibui in meo Opere de *Expeditione Litteraria per Pontificiam ditionem*, quod deinde Gallice redditum prodidit etiam

Parisiis sub titulo *Voyage astronomique, & géographique*. Qui fuerit ejus successus, patet utique ex consensu illarum mearum observationum, quarum determinationes diversæ vix uno secundo differunt a media, licet agatur de distantia à zenith absoluta, & adhibeantur binæ fixæ, ac observationes institutæ fuerint semel Arianini, bis Romæ, instrumento eodem pedum octo bis per totam Italiæ latitudinem transportato. Alterum cum majore etiam successu Liesganigius egregius mei tum Ordinis Astronomus ad ejus imitationem contruxit Viennæ in Austria me præsente. Similem Taurinensis Beccaria construi curavit pro suo meridiani gradu cum successu maximo, & vero etiam alii alibi cum eodem successu constructi sunt. Multo autem major exactitudo haberi debet, ubi ope ejusmodi instrumenti non distantia absoluta fixæ cujuspiam a zenith determinari debeat, sed differentia distantiarum exhibitorum a binis telescopiis eidem instrumento simul affixis.

21. Eum sectorem exhibit utcumque figura 3. Is constabat binis regulis metallicis crassioribus connexis invicem ad angulos rectos. Regula longior ABB'A' habebat ex parte posteriore adnexum tubum solidum telescopii habentis axem parallelum rectæ CH transeungi per medium suam longitudinem. Regula D'E'E'D' priori perpendicularis habebat binas laminas DEGF, D'E'G'F' sibi afferruminatas, quæ non occupabant nisi partem ejus latitudinis hinc, & inde, inter quas libere excurrebat lamina FGG'F' antorsum, retrorsum, quæ efformabat limbum, sed mobilem, instrumenti ferentem divisiones non in arcu circulari, sed in recta linea KK'. Hæc lamina erat connexa cum cochleâ, cuius manubrium L, aptatâ regulæ D'E'E'D' ex parte opposita ei, quam figura exhibit: nexus fiebat per virgulas metallicas traductas trans crenas excavatas in ea ipsa regula, & sustinentes cylindros cauos, per quos transibat ipsius cochleæ axis: ipse axis cochleæ habebat sibi adnexum indicem N, qui in circulo habente diametrum EE', & divisiones in sua peripheria, indicabat partes singularium conversionum cochleæ: eo indice notante zero, & nondum revolutâ cochleâ per ullam conversionem, punctum O, quod erat initium divisionum limbi, jacebat in continuatione rectæ CH ita,

ut

ut CO efficeret rectam continuam gerentem vices radii arcus circularis sectorum communium, filo CP suspenso ex acu aptata in C, & sustinente pondusculum P.

22. Directo axe tubi ad fixam S, & filo PC transeunte per punctum quoddam I restæ KK', ac indicante zenith Z, distantia apprens ab ipso zenith habebat pro mensura angulum ZCS = OCI, cuius tangens ad radium CO erat intervallum OI: hujus mensuram exhibebat numerus divisionum ab O usque ad divisionem M, quæ immediate præcedebat punctum I. Residuam particulam addendam ei numero exhibebat cochlea cum suo indice N, retracto nimirum ejus ope limbo mobili, donec divisio M appelleret ad punctum I. Et in meo quidem sectore primo divisiones erant factæ per lineolas rectas tantummodo: in posteriore constructo Viennæ cum Liesganigio adhibita sunt foraminula tenuia, quæ ipse per sese ita bene rotundaverat, ut per microscopium admodum forte apparerent & bene rotunda, & politissima: filum erat parum admodum minus crassum diametro foraminum, ut ipsius media crassitudine congruente cum centro foraminuli extarent hinc, & inde bina segmenta ipsius formæ circularis admodum exigua, quorum inæqualitas, si qua haberetur, insensibilis ex particula diametri extante, ita evidenter apparebat ex inæqualitate chordarum eorundem segmentorum auctâ per microscopium, & multis partibus majore illis particulis diametri procurentis, ut minimo motu cochleæ, ac fere insensibili adducerentur chordæ ipsæ ad æquilitatem. Positio filii medii congruentis cum centro foraminuli determinari poterat sine periculo partis decimæ unius secundi. Tres particulæ admodum latæ divisionis circuli exhibebant unicum secundum, & ipsarum quadrantes per aestimationem egregie poterant determinari.

23. Siquid ambiguitatis remaneret in distantia fixæ a zenith; id unice proveniebat a collocatione fixæ sub filo micrometri interni parallelo motui diurno, qua collocatione præstîtâ, debebat fixa transire accurate per axem telescopii, in quo se fila sibi invicem perpendicularia decussabant de more. Inclinabatur quidem instrumentum ope alterius cochleæ ipsum totum urgentis in latus, donec

donec fixa statim post primum suum ingressum in campum telescopii tegeretur ab ipso filo , immo potius donec ejus magnitudo apparet orta ex errore sphæricitatis , & refrangibilitatis extaret aequa hinc , & inde ab ipsius fili crassitudine , quam ob causam errores illi ipsi proderant exactitudini observationis : nam si fixa apparuisset , ut unicum punctum ; non ita accurate determinari potuisset positio puncti ipsius in media crassitudine fili occupantis utique plura secunda . Verum ipsa aequalitas luminis excurrentis hinc , & inde a filo ingerebat ambiguitatem , quæ impediebat consensum determinationum usque ad fractiones unius secundi . Cum mora fixæ in campo trium etiam , vel quatuor minutorum permetteret plures determinationes , retrahit fixa a filo per motum instrumenti , & iterum adducta , atque id mutato etiam observatore , adhuc raro admodum occurrebat discrimen trium micrometri circularis particularum , nimirum unius secundi .

24. Illud autem commendat hanc formam sectoris , quod cochlea non arcum circularem , sed rectam regulam promovet , & intersectio filorum immobilis facta in ipso telescopii axe rem omnem conficit , quod quanti intersit , norunt sane Astronomi , & unica habetur scala externa divisionum limbi relatarum ad radium CO , & revolutionum cochlearum ad ipsas , quorum omnium , ut & ipsius cochlearum verificatio quam facile , & accurate fieri possit in hoc instrumenti genere , satis patet ex illo meo Opere , in quo ea omnia fuse exponuntur . Accedit , quod conversio instrumenti a positione limbi spectantis orientem adducti ad positionem contraria m occidentem versus in suspensione ibidem exposita fit celer rime , atque ita res parari facile possunt , ut conversio simplex limbum ante primam observationem collocatum in plano verticali , & congruente cum plano meridiani restituat in positionem itidem verticalem , & meridianam .

25. Converso instrumento , filum CP , quod occurrebat lateri OK in I , occurret lateri OK' in I' , & intervallum II' , quod binis OM , OM' addit bina segmenta MI , M'I' determinata a micrometro externo N , exhibet , ut patet , duplam tangentem distantiarum apparentis QS a zenith , quod quidem præter duplicationem deter-

determinationis ejusdem, quæ reddit periculum erroris duplo minus, corrigit per se errorem, qui potuerit occurrere a perpendicularitate non satis exacta linearum CO, KK'. Si in ea positione haberetur aliquis exiguus error; is obesset quidem determinationi facta per unicam tangentem OI, vel OI', non autem per dimidium intervalli II': nam perpendicularum accuratum ductum e puncto C in rectam KK' cadens prope punctum O non differt a longitudine CO nisi per differentiam ordinis secundi ita exiguam respectu radii CO, ut nullus inde error sensibilis provenire possit in angulum determinatum per hunc novum radium substitutum priori CO, ad quem radium novum referatur dimidium intervalli II' assumptum pro tangente. Conversio corrigit etiam per se errorrem aliquem, si quis habeatur in parallelismo axis telescopii cum radio CO, ut norunt Astronomi.

26. Sed & ii errores, si qui adsint, & error divisionum, qui itidem officeret determinationi distantiaæ absolutaæ a zenith etiam post conversionem, nihil obest determinationi differentiaæ distanciarum exhibitarum a binis telescopiis aptatis sectori eidem, de qua hic agimus: ea pendet tantummodo ab indice N, adeoque a sola perfectione cochlearum rite verificatae. Possunt ea telescopia aptari eidem regulæ ex parte AB, & A'B', & firmiter adnecti in ea distantia, in qua alterum non impedit liberam oculi applicationem ad alterum. Tum vero adducto instrumento ad positionem, in qua centrum fixæ ingressæ telescopium sit in medio filo interno alterius telescopii, & notato numero indicato ab indice N pro valore segmenti MI, quod quidem etiam fieri potest citissime per adjutorem observatoris, applicari poterit oculus ad alterum, & fieri observatio eadem. Si utraque observatio absolvatur ante appulsum fixæ ad intersectionem filorum secundi telescopii; poterit fieri conversio instrumenti motu celeri, & haberi utraque observatio in nova positione ante egressum fixæ e campo secundi telescopii, & eo pacto habebitur eadem nocte differentia distantiaæ II', quæ sola exhibet differentiam summæ binarum tangentium pertinentium ad duplum distantiaæ apparentis a zenith, a qua sola pendet duplum differentiaæ binarum refractio-

num,

num, quæ est differentia anguli ICI'. Si eâdem nocte, vel pro fixis majoribus eodem die non habeantur omnes quatuor observationes, possunt admodum facile haberi priores duæ prima nocte, & quidem repeti pluribus vicibus, tum facta conversione die sequenti obtinebuntur commodissime reliquæ duæ, & habebitur differentia quæsita uno die, vel ad summum binis consequenter diebus.

27. Melius erit differre conversionem sectoris in diem sequentem, quo fiat commodius, impendendo tempus mœræ in campo telescopii ejusdem fixæ in repetenda pluribus vicibus observatione per utrumque telescopium: nihil enim timeri potest ex ullo capite mutationis, quæ accidat in distantia apparenti fixæ a zenith tam exigua tempore tam brevi. Mutatio atmosphæræ indicata a barometro, & thermometro mutat refractions, sed mutatio est exigua respectu totius, adeoque si adhibeantur fixæ paucis gradibus remotæ a zenith, in quibus tota refractione est circiter totidem secundorum, nihil sane metui ibi potest a mutatione facta in atmosphæra. Is metus haberet locum, si adhiberetur quadrans instructus binis ejusmodi telescopiis pro fixis multo magis remotis a zenith: quanquam etiam status barometri, & thermometri observatus utroque die indicaret mutationem refractionis semper exiguum citra periculum erroris notabilis. Accedit, quod quadrans integer est minus opportunus pro hujusmodi determinatione. Si is sit radii ingentis, vel non convertitur, vel multo difficilius convertitur. Quadrantes radii minoris habent telescopium brevius, quod si non sit acromaticum, habet augmentum multo minus, unde profuit multo majus periculum erroris in collocatione fixæ sub filo micrometri interni. Majus itidem est in limbo respondente radio minori periculum erroris in æstimando appulsu fili, vel alidadæ ad divisiones limbi. Præstat adhibere potius sectorem longioris radii, ut pedum octo, vel decem, cuius telescopium utut commune habet augmentum satis magnum ad exhibendam determinationem intra unum etiam secundum.

28. Dilatio in sequentem diem nec habet periculum mutatæ distantia apparentis a zenith ex motibus aliis fixarum, qui præterquamquod sunt satis cogniti, ut earum loca observata diversis

die-

diebus reducantur ad eandem epocham, sunt ita exigui intervallo dierum duorum tantummodo, ut omnis etiam ejusmodi reductio omissi possit sine periculo erroris. Retentâ autem positione sectoris eâdem, possunt facilius fieri plures observationes eâdem nocte, adhibitis pluribus fixis: nam plures transeuntes per meridianum sat longo temporis intervallo haberi possunt, quarum aberratio in declinationem sit satis magna, quod patebit ex iis, quæ dicturi sumus in tertio paragrapho.

29. Etiam simplex distantia a zenith habita per bina telescopia proposita exhiberet differentiam distantiarum apparentium quæsitam: sed in primis oporteret bene definire pro utroque telescopio punctum limbi respondens directioni ejus axis tendentis ad zenith, quod obtineri solet per conversionem, quamvis eo semel invento obtineantur deinde distantiaz apparentes ab ipso zenith sine novis conversionibus. Verum præstat adhibere conversionem, saltem quia per ipsam duplicatur effectus, qui idcirco remanet multo magis sensibilis, & accuratius determinatur per observationem.

30. Si loco aquæ infundantur in tubum liquores alii, quorum vires refractivæ sint maiores; habebitur major differentia velocitatum respondens rationi majori sinus anguli incidentiaz in ingressu luminis ex aere in eum liquorem ad sinum anguli refracti: effectus plurium generum fluidorum diversæ naturæ multo magis confirmabit omnem hanc theoriam. Sed jam faciemus gradum ad exponentiam theoriam, & constructionem telescopii novi propositi.

## §. II.

### *Theoria, & constructio novi telescopii propositi.*

31. **A**d habendum ejusmodi telescopium oportet ita id construere, ut infundi possit aqua, & alias liquor perspicuus quicunque, qui impleat totum spatium contentum inter objectivum, & locum micrometri. Quamobrem oportet ejus tubum efformare e lamina metallica: satis est, si fiat ex illa tenui lamina metallica, quæ appellatur in Italia *la latta*, in Gallia *fer blanc*. Ex

*Tom. II.*

L I

parte

parte inferiori oportet applicare basim circularem vitream eo loco , in quo applicari solet diaphragma cum micrometro filari , nimirum in foco objectivi , atque id ita , ut non permittat egressum aquæ inter ipsam , & tubum . Ea basis debet esse lamina vitrea terminata binis superficiebus planis parallelis , in ejus facie superiori , quæ debet remanere interna , possunt duci binæ rectæ lineæ tenues ope cuspidis ex adamante , vel potius e silice , relinquens signum in superficie vitrea , quæ lineæ gerent vices filorum micrometri : ex parte tubi superiore objectivum inclusum suæ thecæ affixæ tubo poterit utique retinere aquam , & impedi re ejus effluxum etiam , ubi ipsa urgeatur versus ipsius superficiem inferiorem internam a pondere aquæ inclusæ in vase externo superiore communicante cum tubo telescopii per canalem ex euntem ex ejus foramine laterali . Infra hujusmodi laminam planam habebitur tubulus continens ocularem insertus continuationi tubi telescopii ita , ut pro diversa oculorum constitutione promoveri intra ipsum possit , & admoveare ocularem vitro plano , vel eam ab ipso removere .

32. Eam dispositionem exprimit utcumque figura 4 . Tubus telescopii est ABB'A' , objectivum CC' , lamina plana vitrea DD' , canalis HIK exiens e foramine H tubi ipsius , & sustinens vas MLL'M' , cum quo habet communicationem in K . Aquæ infusa in id vas , vel alius quivis liquor , impleto tubo , elevabitur intra ipsum usque ad quandam altitudinem NN' , supra quam debet extare pars ipsius vacua , nimirum habens aerem liberum . Hujus aquæ pressio tenebit semper liquorem applicatum immediate toti superficie inferiori objectivi , pondus ejus ipsius liquoris , qui est intra tubum , applicat ipsum basi DD' . Cum liquores vi caloris dilatati condenserint vi frigoris ; si is , qui continetur intra tubum , tempore caloris majoris impleret ipsum penitus occlusum , superficie liquoris ejusdem applicatâ accurate superficie inferiori objectivi ; ipsam desereret tempore frigoris , relicto vacuo inter se , & eam ipsam superficiem , quod quantum obesset , mox patebit : si autem tempore frigoris impleret penitus tubum applicatus ei superficie ; calore superveniente dilatatus inferret vim

vim tubo , & vitris , & vel disrumperet aliquid , vel mutaret nonnihil dispositionem partium , & figuram . Vas adjectum , & communicatio per tubulum HIK impedit utrumque effectum , elevata tantummodo superficie NN' ipsius liquoris in vase , vel de- pressâ , dum liquor vi caloris dilatatur , vel vi frigoris restringitur . Ipsum autem vas potest fieri apertum versus MM' , si telescopium non debeat habere nisi exiguam inclinationem , ut pro hoc observationum genere : verum si libeat ipsum inclinare ita , ut habeat elevationem exiguam supra horizontem ; poterit claudi superficies vasis ipsius MM' , reliquo tantummodo ex quo foramine versus M , per quod aqua non effluet , nisi inclinatione pertinente ad positionem fere horizontalem .

33. Necessitas implendi tubum ita , ut liquor applicetur penitus superficie inferiori objectivi sine vacuo intermedio , patebit ex figura 5 , quæ etiam exhibebit totam hujus telescopii theoriam . Sit tubus ABB'A' inclinatus , & vacuus cum suo objectivo CC' , cuius axis SQ : deveniat ad centrum hujus a fixa quapiam radius sS in directione ejus axis , cum aliis ipsi ad sensum parallelis cC , c'C' incurrentibus in ejus superficiem in C , C' . Si tubus sit vacuus , nimirum plenus solo aere ; procedet radius sS irrefractus per ipsum axem SQ , & radii cC , c'C' detorti per refractionem coibunt in ipso axe ad distantiam focalem SQ objectivi ipsius ( hinc mente secludimus utrumque errorem tam refrangibilitatis , quam sphæricitatis ) . Si jam is tubus impletatur liquore aliquo totus ita , ut liquor ipse applicetur superficie objectivi sine ullo vacuo intermedio ; adhuc radius sS procedet per axem , sed reliqui illi , qui coibant cum ipso in foco Q , coibunt in alio foco Q' remoto utique ab objectivo ipso : nam refractione eorum radiorum in ingressu in objectivum , qui fit transeundo ex aere in vitrum , erit eadem , quæ prius ante immissionem liquoris : sed in egresu , qui fiebat transeundo e vitro in aerem , & jam fit transeundo e vitro in liquorem , erit minor ob inæqualitatem virium refractivarum vitri , & ejus liquoris minorem , quam virium vitri , & aeris , quod minuet convergentiam , & amandabit focum ad distantiam majorem .

34. At si tubus non sit plenus eo liquore totus ; terminabitur ex parte superiore per superficiem RR' horizontalem , quæ idcirco erit obliqua respectu axis inclinati . Si ejus occursus cum axe sit P , & concipiatur recta VPV' perpendicularis ad eam superficiem ; ipse radius SP non progredietur per axem PQ , sed accedit ad rectam perpendicularē PV' per rectam PQ" , ad cuius punctum quoddam Q" convergent etiam radii CQ , C'Q incidentes in superficiem liquoris in T , T' , & inde detorti ad id punctum . Facile demonstratur , distantiam PQ" fore minorem distantiam PQ ; sed primo etiam intuitu statim patet , angulum QPQ" fore maiorem , vel minorem , prout inclinatio tubi fuerit major , vel minor ; quia angulus QPV' æqualis angulo incidentiæ SPV erit itidem major , vel minor . Hinc distantia puncti Q" & ab axe , & vero etiam ab objectivo , erit diversa pro diversa inclinatione tubi , quod reddet variabilem positionem punctorum imaginis respectu micrometri aptati loco ipsius imaginis efformatae in positione tubi verticali , & pervertet totam rationem dimetiendi per fila micrometri positiones objectorum , & nominatim distantiam quæsitam a zenith . Perturbatio autem esset adhuc major ; si liquore applicato ad partem superficie objectivi , pars alia remaneret libera ab ipso , transeunte parte radiorum immediate e vitro in liquorem , & alia parte transeunte prius e vitro in aerem , tum ex aere in liquorem .

35. Accedit , quod ipsa superficies in tubo non nimis amplon est satis plana , nec sphærica , sed intumescens ita , ut unio radiorum refractorum debeat esse multo minus accurata , & minus regularis etiam in casu , in quo tota superficies objectivi sit libera a liquore . Ex iis omnibus satis patet , oportere , liquor sit applicatus toti superficie objectivi sine ullo intervallo vacuo , quod obtinetur per illud vas LM' figuræ quartæ . Tum superficies dirimens liquorem a vitro remanet regularis , & sphærica , nimirum illa ipsa superficies , ad cuius formam tornatum est objectivum habens axem eundem cum axe secundæ superficie objectivi ipsius , & formulæ , quas in Tomo I eruimus pro superficiebus , habent locum hinc etiam .

36. Con-

36. Considerari poterit transitus ex aere in liquorem, ut transitus per lentem quandam, cuius binæ superficies habeant vim refractivam diversam, adeoque diversam rationem sinuum, nimirum diversum illum valorem, quem in omnibus præcedentibus opisculis appellavimus  $m$ . Is pro prima superficie est ille, qui obtinetur methodo exposita in Opusculo I tom I pro illa specie vitri: pro secunda superficie facile deducitur ex eo ipso valore  $m$  pertinente ad eam speciem vitri, & valore  $m'$  pertinente ad eum liquorem. Tam enim ex observationibus, quam ex ipsa theoria virium refractivarum deducitur, rationem sinus incidentiæ in transitu ex una quavis substantia in aliam ad sinum anguli refracti componi e ratione sinus incidentiæ in egressu e prima substantia in aerem ad sinum anguli refracti, & sinus anguli incidentiæ in ingressu ex aere in illam secundam substantiam ad sinum anguli refracti; ratio autem sinus incidentiæ in egressu e vitro in aerem ad sinum anguli refracti est reciproca ejus, quæ habetur in ingressu ex aere in vitrum. Sit ratio sinuum in ingressu ex aere in vitrum  $m$  ad 1, & ex aere in eum liquorem  $M$  ad 1, & dicatur  $m'$  ratio sinuum in transitu e vitro in eum liquorem, erit  $m' = \frac{1}{m} \times M = \frac{M}{m}$ . Si assumatur  $m$  pro vitro  $= \frac{3}{2}$ , &  $M$  pro aqua  $= \frac{4}{3}$ , qui sunt valores proximi veris, evadit  $m' = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$ ; quod satis indicat exiguitatem refractionis in secunda superficie, & protractionem distantiae focalis  $SQ$  in  $SQ'$ .

37. In hac suppositione, si queratur tantummodo distantia foci pro radiis infinite proximis axi, oportebit assumere formulam pro foco unius superficie sphæricæ, quæ habetur in fine capitil I Opusculi II Tomi I num. 41, & eam prius applicare primæ superficie cum suo valore  $m$ , tum secundæ cum suo  $m'$ : nam formula pro lente, quæ habetur ibidem, & qua semper usi sumus huc usque, supponit egressum e lente in eandem substantiam, e qua radius in ipsam fuerat ingressus, ut in aerem, adeoque rationem sinuum in egressu  $\frac{1}{m}$ , positâ ratione in ingressu  $= m$ . Ea formula est ibi  $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$ , in qua radius sphæricitas

tis est  $\alpha$ , qui valor hic pro prima superficie erit positivus, cum ea debeat fieri convexa,  $p$  distantia puncti dirigentis radios incidentes, quæ pro eâdem superficie primâ evadit infinita, evanescente  $\frac{1}{p}$  de more,  $q$  est distantia puncti dirigentis radios refractos, qui valor obveniet positivus ob  $\alpha$  positivum. Hic valor evadet  $p$  pro secunda superficie, pro qua ponendum erit  $b$  pro  $\alpha$ , &  $m'$  pro  $m$ : sed valor  $b$  erit negativus, si secunda superficies debeat esse convexa, quod præstabit, ne focus discedat nimis procul. Hinc fiet  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma}$ , & factâ distantiâ foci post ingressum e secunda superficie vitri in aquam  $= r$ , fiet  $\frac{1}{r} = \frac{m'-1}{m'b} + \frac{m-1}{mm'a}$ . Quod si objectivum sit isoscelium, fiet  $\frac{1}{b} = -\frac{1}{a}$ , & formula evadet  $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \times (\frac{m-1}{mm'} - \frac{m'-1}{m'})$ .

38. Positis pro  $m$ , &  $m'$  valoribus  $\frac{3}{2}$ , &  $\frac{8}{9}$ , habebitur coefficientis numericus secundi membra  $= \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 9}{3 \times 8} + \frac{1}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ . Hinc  $\frac{1}{r} = \frac{1}{2a}$ , &  $r = 2a$ . Pro lente posita in aere habetur ex eadem formula pro prima superficie itidem  $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma}$ , & pro secunda in formula  $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$  ponendum erit  $-a$  pro  $\alpha$  ob convexitatem secundæ superficie, & isoscelismum,  $\frac{1}{m}$  pro  $m$ , adeoque  $1-m$  pro  $\frac{m-1}{m} = 1 - \frac{1}{m}$ , nimirum  $-(m-1)$ , &  $\frac{m-1}{a}$  pro  $\frac{m-1}{ma}$ , ac iterum  $\frac{m-1}{a}$  pro  $\frac{1}{mp}$ , adeoque habebitur  $\frac{1}{r} = \frac{2(m-1)}{a}$ , qui est valor inventus in omnibus præcedentibus Opusculis pro lente isoscelia. Is facto  $m = \frac{3}{2}$  evadit  $= \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$ , &  $r = a$ . Quare in eo vitri genere focus lentis isosceliæ per infusionem aquæ, quæ applicetur toti secundæ superficie, amandatur ad duplam distantiam, & cum exi-

exiguum sit discrimen vis refractivæ in diversis vitris, erit proxime eadem productio distantiae foci ab objectivo isoscelio inducta ab aqua, quæ nimirum ipsum amandabit ad distantiam circiter duplo majorem.

39. Ea ratio ejus distantie auctæ etiam facilius inveniretur considerando tenue velum aeris æque ubique crassum inter secundam superficiem vitri, & superficiem aquæ retinentis eandem formam, & quidem elongatio ejus foci ita habebitur facile pro lentibus etiam non isosceliis. Sit  $h$  distantia focalis objectivi positi in aere,  $b$  radius sphæricitatis superficie secundæ, qui erit idem, ac superficie aquæ,  $M$  ratio sinuum pro ingressu ex aere in aquam. Hæc superficies excipiet radios convergentes ad distantiam  $= h$ , qui idcirco erit valor  $p$  pro ipsa. Hinc in formula superficie unicæ  $\frac{I}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{I}{mp}$ , ponendum erit  $M$  pro  $m$ ,  $b$  pro  $a$ ,  $h$  pro  $p$ , & habebitur  $\frac{I}{r} = \frac{M-1}{Mb} + \frac{I}{Mh}$ . In casu propositionis, in quo  $b = -a$ ,  $M = \frac{4}{3}$  &  $h$  sive  $r$  pro radiis parallelis  $= a$ , ut invenimus numero superiore, erit  $\frac{I}{r} = -\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{a} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{a} = -\frac{1}{4a} + \frac{3}{4a} = \frac{2}{4a} = \frac{1}{2a}$ , &  $r = 2a$ , ut prius.

40. Si habeatur accuratus valor  $m$  vitri adhibendi pro efformando objectivo pertinens ad radios medios, &  $M$  liquoris, ut aquæ; habebitur accuratus coefficiens numericus, qui si dicatur  $n$ , habebitur valor  $\frac{I}{r} = \frac{n}{a}$ : adeoque si quadratur determinata quædam distantia  $r$  objectivi a foco  $Q$ , quæ conveniat radio sectoris; invenietur radius sphæricitatis  $a$  objectivi ipsi respondens, qui erit  $= nr$ . Ad eam distantiam ab objectivo adducendum erit vitrum  $DD'$ . Verum etiam sine accurata determinatione valorum  $m$ ,  $M$ , & radiorum sphæricitatis poterit adhibendo aquam res confici, si ita disponantur omnia, ut sine effusione ipsius aquæ possit variari distantia vitri  $DD'$  ab objectivo: nihil enim oberit determinationi differentiæ refractionum, quæ quadratur; si distantia  $r$  obveniat paullo major, vel minor: satis est, lamina vitrea ita

addu-

adducatur ad focum Q, ut imago fixæ observatæ pingatur satis proxime in ea ipsa superficie ejus laminæ, in qua ductæ sunt illæ rectæ lineæ.

41. Poterit assumi objectivum jam etiam constructum e vitro qualitatis hincognitæ, quod habeat distantiam focalis proxime diuidam valoris r propositi: distantia autem focalis saltem proxima veræ invenitur admodum facile excipiendo imaginem solis, vel objectorum remotorum, quam id objectivum exhibet in pariete cubiculi tenebricosi, vel in charta alba per radios, qui per ipsum transmittuntur. Id objectivum collocatum in tubi vertice debet post infusionem aquæ removere focus ad distantiam saltem proxime duplam ejus distantiae focalis; adeoque innotescet saltem proxime locus tubi, in quo collocanda sit theca DD' continens eam laminam. Tubo etiam crassius elaborato ex illa tenui lamina ferrea, poterit parari aliis brevior quinque, vel sex pollicum affabre elaboratus e solidiore metallo ad tornum, & accurate poliri, politâ etiam superficie DD' thecæ continentis eam laminam, quæ superficies torno itidem elaborata habeat diametrum accurate æqualem diametro superficie internæ ejus tubi. Immisso eo tubo brevi intra tubum longum ferreum, & affixo ipsi ita, ut aqua egredi inde non possit, immittetur theca DD' in eum tubum, intra quem ipsa poterit protrudi magis vel minus, quin aqua inde egredi possit. Immissâ aquâ, poterit transpici per telescopium ita paratum quodpiam objectum etiam terrestre elevatum, & satis remotum, ut vertex montis cuiuslibet, vel etiam vertex turris campanariae habentis crucem in vertice. Promovebitur lens ocularis, donec appareat distinctum illud objectum, & si appareant simul distinctæ lineæ illæ ductæ in superficie vitri plani, id erit indicio, focus jacere in illo eodem plano.

42. Multo autem melius id perspicietur, & si focus non sit ibi, innotescet, an protrudi debeat adhuc magis theca intra tubum, an retrahi, observando, an movendo oculum ad latus hinc, & inde linea illa laminæ vitreæ appareat semper affixa eidem punto objecti, an excurrat per objectum ipsum, qui excursus indicat illam, quam Astronomi appellant parallaxim oculi, & ea est

me-

methodus inquirendi in positionem micrometri filaris communis respectu objectivi etiam in telescopiis communibus, quæ adhibentur in Astronomia. Si filum excurrit per objectum versus eam plagam, versus quam movetur oculus; id indicat, filum ipsum respectu oculi jacere ultra imaginem, adeoque thecam retrahendam esse, & removendam ab objectivo: quod si filum in excursu oculi excurrit per objectum versus plagam oppositam; fila jacent inter oculum, & imaginem, adeoque protrudenda erit theca ipsa versus objectivum, donec demum deveniatur ad positionem, in qua motus oculi nullam inducat mutationem filorum micrometri respectu objecti. Porro dum theca vel adducitur, vel protruditur, aqua objectivi superficiem non deseret, sed tantummodo ejus superficies in vase figuræ 4 descendet, vel ascendet, aucto, vel imminuto spatio tubi, quod ipsa implere debet.

43. Verum res poterit perfici multo facilius per tubos simplices ex illa tenui lamina ferrea. Tubo ABB'A' (fig. 6) paullo longiori, qui in parte inferiore habeat, ut in fig. 4, thecam DD' etiam immobilem cum lamina vitrea, & lentem ocularem GG' inclusam suo tubulo infra ipsam, immittatur alter tubus PQQ'P', qui in parte inferiore contineat objectivum in QQ', & in parte superiore extet supra verticem AA' prioris, infra quem verticem sit vas MLL'M'. Poterit hic posterior tubus protrudi intra priorem plus, vel minus, donec focus appareat in superficie superiore laminæ vitreæ DD', destruetâ parallaxi oculi. Si aqua ascendet inter binos tubos a Q versus A; id utique nihil oberit: quia ipsa non poterit ascendere supra P, & abire ad superficiem objectivi superiorem. Ille autem excessus tubi supra objectivum usque ad PP' nihil itidem oberit; immo etiam poterit prodesse ad excludendam lucem vividiorem diei, vel crepusculi, ut videri possit trans volumen aquæ fixa aliqua major ante noctem. Optimum erit ita parare duplicum thecam GG', ut exteriore immotâ, interior cum lamina habeat motum circularem circa axem telescopii, per quem facilius reducatur altera e lineis rectis referentibus fila micrometri ad positionem parallelam motui diurno: nam ea positio necessaria obtineri aliter non posset, nisi moven-

do circa proprium axem totum tubum telescopii , ante quam iste firmiter adnectetur sectori, quod esset nimis incommodeum . Quoniam diversi liquores praediti diversa vi refractiva debent inducere diversam productionem distantiae foci ab objectivo ; poterit operari hujusce secundi tubi , si fiat paullo longior , ad liberi idem objectivum pro iis liquoribus omnibus , eo tubo protruso intra illum magis , vel minus . Verum si loco aquæ adhibendi sint liquores alii , determinanda erit longitudo  $SQ$  figuræ 5 pro singulis veræ proxima , & eadem operatio repetenda ad præstandam accuratam positionem laminæ vitreæ in foco producendo ab eo liquore .

44. Considerari jam potest , quid accidat tam radiis digressis ab unico puncto objecti , qui debent advenire ad oculum paralleli inter se , vel parum admodum convergentes , aut divergentes ad habendam distinctionem , quid radiis digressis a diversis punctis objecti , & transeuntibus per centrum objectivi ad sensum irrefractis , a quibus pendet augmentum . Ea persequemur in fig. 7 . Sit ibi  $CSC'$  idem objectivum ,  $SQ$  idem axis cum eo foco  $Q$  , qui in figura 5 erat  $Q'$  posito in prima superficie  $DD'$  laminæ vitreæ planæ , cuius crassitudinem utut exiguam referat recta  $Qq$  major , ut progressus linearum reddatur sensibilis .

45. Incipiendo a radiis  $cC$  ,  $c'c'$  ad sensum parallelis axi  $sS$  , qui deveniunt ab unico puncto objecti , & incident in totam superficiem objectivi , ii abeunt ad axem in  $Q$  . Considerabimus solum  $C'Q$  , qui progrediens recta abiret ad  $E$  , sed per refractiōnem deflectitur accedendo ad perpendicularum  $Qq$  per rectam  $Qe$  occurrentem secundæ superficie in  $e$  : si concipiatur recta  $Heh$  perpendicularis ei superficie , adeoque parallela axi ; is radius in egressu e vitro in aerem refringetur recedendo a perpendiculari per rectam  $cX$  , quæ producta ex parte opposita occurret axi  $Qq$  aliqui in  $F$  . Erit autem sinus anguli incidentiae  $QeH = eQF$  ad sinum anguli refracti  $Xeh = eFq$  , ut 2 ad 3 . Is sinus posterior est idem , ac sinus anguli  $eFQ$  sui supplementi , & cum ratio eorum sinuum sit eadem , ac ratio laterum oppositorum , erit ea ratio  $eF$  ad  $eQ$  , quæ rectæ ob exiguitatem anguli  $eQF$  minoris angulo  $EQF$  opposito ad verticem angulo  $SQC'$  , vel exiguō , vel

si aper-

si apertura objectivi sit ingens, non ita magno, parum omnino different a rectis  $qP$ ,  $qQ$ . Quare ii radii discedent divergentes a puncto axis F distante a puncto Q per trientem crassitudinis vitri, & excepti in X ab oculari prodibunt ab ipsa paralleli; si ea ita admovereatur ipsi laminæ DD', ut ejus focus citerior sit in F. Hinc ad habendam distinctionem positio lenti ocularis erit ad sensum eadem, ac si lamina illa vitri non adesset, sed radii prodirent e massa aquæ facta sine perspicuitatis damno solida per glaciem.

46. Consideretur jam e radiis devenientibus ex alio quopiam objecti punto is, qui egreditur ex objectivo cum eadem directione, cum qua advenit, qui huc itidem debet esse aliquis, cum ii, qui incident in margines objectivi circumquaque, detorqueantur introrsum ad focum: is huc etiam potest considerari, ut irrefractus, & transiens per centrum objectivi S. Is deveniens ad superficiem DD' in Q' non progredietur recta per Q'M, sed defletetur versus perpendiculum GQ'g parallelum axi per rectam Q'I, existente sinu anguli incidentiarum  $SQ'G = Q'Sg$  ad sinum anguli refracti  $gQ'I$ , ut 9 ad 8. Cum, productâ rectâ IQ' usque ad concursum cum axe in O, sit angulus  $QOQ' = gQ'I$ ; ratio sinuum angulorum  $QSQ'$ ,  $QOQ'$ , quæ est eadem, ac ratio laterum  $Q'O$ ,  $Q'S$ , sive quamproxime  $QO$ ,  $QS$ : adeoque adveniet ad superficiem DD' is radius, tanquam si discessisset a puncto O posito citra objectivum per intervallum SO æquale octanti distantiarum SQ. Is radius delatus ad secundam superficiem dd' laminæ vitreæ in I non progredietur recta per IN, sed recedet a perpendiculo LI/ per rectam IR occurrentem lenti oculari alicubi in R, quæ recta productâ retro occurret axi alicubi in P. Erit autem sinus anguli incidentiarum  $OIL = IOg$  ad sinum anguli refracti  $LIP = gPI$  in transitu e vitro in aerem, ut 2 ad 3, quæ erit ratio laterum IP, IO trianguli IOP, sive proxime rectangularium  $qP$ ,  $qO$ . Assumptâ autem  $QO$  pro  $qO$  ob exiguum crassitudinem laminæ vitreæ, erit  $QS$  ad  $QP$  in ratione composita ex rationibus  $QS$  ad  $QO$ , sive 8 ad 9, &  $QO$  ad  $QP$ , sive 3 ad 2, nimirum ut  $3 \times 8$  ad  $2 \times 9$ , sive ut 4 ad 3. Ea esset ratio sinus anguli re-

fracti ad sinum anguli incidentiae in egressu ex aqua in aerem, laminâ vitreâ nihil agente, tanquam si non adesset, sed fieret transitus immediatus ex aqua in aerem: nimurum omnis actio vi- rium vitri, quæ habetur in transitu per primam superficiem, de- struitur ab æquali actione directionis contrariae in transitu per se- cundam parallelam.

47. Radius MR adveniens ad ocularem, tanquam si divergeret a puncto P, detorquebitur ad punctum axis V tantillo remotius, quam si advenisset divergens a puncto S. Nam adhuc distantia TP erit satis magna respectu distantiae focalis ejusdem ocularis, ut idcirco distantia TV tam pro radiis divergentibus a puncto S, quam pro divergentibus a puncto P sit paullo major, quam pro parallelis. Si objectivum haberet distantiam focalem SQ in aere, & radii divergentes a puncto S advenirent ad eandem ocularem per rectam SN; augmentum haberetur dividendo angulum SVN per angulum VSN, sive proxime rectam SN, vel ST per VN, vel VT: in hoc autem telescopio ipsum augmentum habebitur di- videndo angulum PVR per angulum VPR, sive proxime rectam PR, vel PT per VT, adeoque ea augmenta erunt, ut PT ad ST. Est autem, ut vidimus, QP ad QS, ut 3 ad 4, & QT exigua respectu PT, & ST: hinc augmentum cum eadem oculari erit majus hic, quam in eo casu in ratione 4 ad 3. In tele- scopio communi sine aqua habente idem objectivum, & ocularem eandem, augmentum esset duplo minus, quam cum objectivo ha- bente pro distantia focali hanc SQ duplam nimurum distantiae fo- calis hujus objectivi. Hinc hujus augmentum in aere cum hac oculari esset ad augmentum ejusdem cum aqua, ut 2 ad 3. Di- stantia focalis lentiocularis, quæ præstet augmentum datum n sic invenietur. Sit distantia focalis hujus objectivi in aere =  $h$ , distantia focalis oculares =  $h'$ . Erit  $SQ = 2h$ , &  $PQ = \frac{3}{4} \times 2h = \frac{3}{2}h$ , pro qua si accipiatur PT, erit augmentum =  $\frac{PT}{VT} = \frac{3h}{2h} = n$ , &  $h' = \frac{3h}{2n}$ . Pro reliquis liquoribus, inventa PQ, eadem dividenda erit per n ad habendam distantiam focalem quæsitam  $h'$ .

Sed

Sed experientia docebit, quod augmentum obtineri possit in ejusmodi telescopio cum sufficienti distinctione.

48. Videndum jam pro complemento theoriæ hujusc generis telescopii, qua ratione id possit reddi acromaticum. Acromatismus posset esse utilis ad habendum augmentum majus, non ut augeat magis diametrum apparentem fixæ, sed ut reddat magis sensibilem ejus motum, & partes cæli respondentes iisdem particulis micrometri. Fixæ non habent ullam diametrum apparentem sensibilem, sumptâ voce diametri apparentis in eo sensu, in quo ea accipitur ab Astronomis. Tota magnitudo apparetis fixarum provenit a radiis aberrantibus, quam ob causam ipsæ trans telescopium apparent potius minores, quam nudo oculo, & trans telescopia meliora adhuc minores, quamquam vivaciores ob majorem quantitatem luminis collectam a tota apertura objectivi, quam a simplici apertura pupillæ. Augmentum motus, & partium superficiei cælestis respondentium filo micrometri prodest pro minuenda quantitate erroris commissi in collocando centro fixæ in media crassitudine ejusdem fili, vel hinc lineæ insculptæ in superficie prima laminæ vitreæ. Cum telescopia acromaticâ ferant aperturas multo majores, & hæc inducant majorem copiam luminis; prodest acromatismus vi quoque luminis, quæ reddet magis visibles fixas etiam trans longiorem tractum per spatium densius, ut est aqua.

49. Porro, quod pertinet ad acromatismum, in primis quæri potest, an cum habeantur binæ substantiæ, per quas radius transit, ut vitrum, & aqua, possit obtineri acromatismus per unicam lentem e vitro, & aquam affusam ejus superficiei posteriori. Hinc tamen in primis notandum est illud, non posse per ejusmodi objectivum cum aqua ita affusa corrigi simul errorem utrumque, nimirum refrangibilitatis, & sphæricitatis, quia binæ solæ superficies, quæ hinc habentur, non inducunt nisi binos radios sphæricitatum determinandos, quarum determinationum altera pertinet ad distantiam foci ab objectivo, alterâ solâ relictâ pro correctione alterius tantummodo ex iis binis erroribus.

50. Ad videndum, an possit haberî hæc correclio erroris refrangibili-

gibilitatis, quæ sola dedit nomen acromatici objectivis, & telescopiis, resumenda est formula  $\frac{I}{q} = \frac{m-I}{ma} + \frac{I}{mp}$ : ex ea juxta num. 37 eruitur pro hisce binis superficiebus (I)  $\frac{I}{r} = \frac{m-I}{mb} + \frac{m-I}{mm'a}$ . Facto variabili valore  $m$ , &  $m'$  per differenti, &  $dm$  pertinentes ad radios primos rubeos comparatos cum postremis violaceis, sumenda erit differentia secundi memtri, & ponenda = 0. Ad faciliorem differentiationem reducetur ea formula ad formam  $\frac{I}{b} \times (1 - \frac{I}{m'}) + \frac{I}{a} \times (\frac{I}{m'} - \frac{I}{mm'})$ . Differentia erit  $\frac{I}{b} \times \frac{dm'}{m'^2} + \frac{I}{a} \times (-\frac{dm'}{m'^2} + \frac{mdm' + m'dm}{m^2 m'^2}) = 0$ , adeoque  $\frac{a}{b} = 1 - \frac{I}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{m-I}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'}$ . Facto  $a = 1$ , fiet (II)  $\frac{I}{b} = \frac{m-I}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'}$ , quo valore substituto pro  $\frac{I}{b}$ , & 1 pro  $a$  in æquatione (I), fiet  $\frac{I}{r} = \frac{(m-I)(m'-I)}{mm'} - \frac{(m'-I)}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} + \frac{m-I}{mm'}$ : primus ex iis tribus terminis redactus ad duos exhibet  $\frac{m-I}{m} - \frac{m-I}{mm'}$ , quorum posterior elidit postremum e tribus iisdem, ac remanet (III)  $\frac{I}{r} = \frac{m-I}{m} - \frac{m'-I}{m^2} \times \frac{dm}{dm'}$ .

51. Æquationes II, & III rem omnem confident, si rite inventantur valores  $m$ ,  $m'$ ,  $\frac{dm}{dm'}$ : nam earum prior exhibebit relationem valoris  $b$  ad  $a=1$ , & posterior valorem  $r$  redactum ad eandem unitatem, adeoque juxta methodum tam sæpe adhibitam in utroque tomo reducetur tam  $a$ , quam  $b$ , ad unitatem =  $r$ , dividendo  $\frac{I}{r}$  per  $\frac{I}{a}$ , &  $\frac{I}{b}$ , ubi ob  $\frac{I}{a} = 1$  relate ad præcedentem unitatem valor  $a$  relate ad hanc novam erit ille ipse, qui relate ad præcedentem fuerit inventus pro  $\frac{I}{r}$ .

52. Vidimus num. 36, valorem  $m'$  esse  $= \frac{M}{m}$ , ubi  $m$  est illa ratio sinuum pro transitu ex aere in vitrum,  $M$  pro transitu ex aere in aquam. Hinc erit  $dm' = \frac{m'dM - Mdm}{m^2}$ , adeoque  $\frac{dm'}{dm} = \frac{1}{m} \times \frac{dM}{dm} - \frac{M}{m^2}$ . Valor  $m$  pro vitro quovis invenitur methodo, quam exposuimus in Opusculo I Tomi I, & eodem pacto  $M$  pro aqua, vel pro alio liquore quovis, si in prisma vacuum habens bina latera efformata a binis laminis vitreis habentibus superficies planas parallelas bene politas infundatur is liquor: valor etiam  $\frac{dm}{dm'}$ , & ejus inversus  $\frac{dm'}{dm}$  invenitur methodo ibidem exposita, quibus habitis obtinebuntur in æquationibus II, & III valores  $b$ , &  $r$  relati ad unitatem  $= a$ .

53. Ii valores in diversis vitris inveniuntur diversi, ut jam toties diximus: adhuc tamen pro vitro communi, & aqua parum ab ludunt ab iis, quos hic supra adhibuimus, qui idcirco assumi poterunt pro exemplis calculorum, facto  $m = \frac{3}{2}$ , &  $M = \frac{4}{3}$ . Pro vitro communi, & aqua Newtonus invenit  $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$ , quod itidem non est generaliter accurate verum, sed pro vitris communibus parum ab ludit a vero. Assumptis autem iis valoribus erit  $m' = \frac{M}{m} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ , tum  $\frac{dM}{dm} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$ , adeoque  $\frac{dm'}{dm} = \frac{1}{m} \times \frac{dM}{dm} - \frac{M}{m^2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{27} - \frac{16}{27} = -\frac{4}{27}$ , & proinde  $\frac{dm}{dm'} = -\frac{27}{4}$ . Quare  $\frac{1}{b} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{4} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3$ : tum  $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'-1}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ . Valor  $\frac{1}{b}$ , qui obvenit positivus  $= 3$ , ostendit, secundam superficiem debere

bere esse concavam cum radio triplo radii primæ . Sed valor  $\frac{1}{r}$   
 $= \infty$  ostendit  $r$  infinitum , radiis prodeuntibus parallelis absque  
foco , & imagine objecti , adeoque per aquam effusam superficie  
secundæ objectivi simplicis e vitro communi haberi non posse a-  
cromatismum quæsitum . Id quidem non est mirum : nam itidem  
per duas , vel etiam plures lentes , sed e binis substantiis , in qui-  
bus  $\frac{dm}{dm'}$  sit  $= \frac{m-1}{m'-1}$  , vidimus in primo Tomo , haberri non pos-  
se objectivum acromaticum , foco itidem abeunte in infinitum ;  
licet ibi habeantur non duæ solæ superficies , sed quatuor , vel et-  
iam plures : quam ipsam ob causam non potest componi objecti-  
vum acromaticum per binas lentes e vitro communi continentem  
aquam , e qua efformaretur lens tertia habens superficies suas con-  
gruentes cum superficiebus earundem binarum internis .

54. Cum fieri possit objectivum acromaticum e flint , & vitro  
communi , posset autem itidem fieri per lentes e flint , & aqua ;  
videndum , an possit haberri hinc per objectivum e flint , cui aqua  
sit affusa . Assumatur etiam pro flint valor  $m = \frac{3}{2}$  , licet sit paul-  
lo major : ejus valor  $dm$  ad eum valorem in vitro communi est  
saltem proxime , ut 3 ad 2 , adeoque cum  $\frac{dM}{dm}$  sit respectu aquæ ,  
& vitri communis  $= \frac{2}{3}$  , erit idem valor pro aqua , & flint  $=$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} &= \frac{4}{9} . \text{ Hinc } \frac{dm'}{dm} = \frac{1}{m} \times \frac{dM}{dm} - \frac{M}{m^2} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} \\ &= -\frac{8}{27} , \text{ & } \frac{dm}{dm'} = -\frac{27}{8} : \text{ tum } \frac{1}{b} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3} \\ &+ \frac{8}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{8} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} , \text{ & } \frac{1}{r} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'-1}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} . \text{ Valor } b \text{ positivus in-} \\ &\text{dicat itidem secundam superficiem concavam , & valor } r \text{ posi-} \\ &\text{tivus indicat folum realem . Sed reducendo valorem } a , \text{ & } b \text{ ad} \\ &\text{unitatem } = r \text{ habebitur } a = \frac{1}{6} , b = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10} . \text{ Radius sphæ-} \end{aligned}$$

sphæricitatis primæ superficiei esset pars sexta totius longitudinis  $r$ , & radius secundæ pars decima, cumque valor  $r$  sit duplus distantia focalis ejus objectivi, aquâ affusâ amandante focum ad duplam distantiam, patet, nimis exiguos fore eos radios, qui idcirco non permetterent aperturas, nisi perquam exiguas, & si paullo majores assumerentur, error sphæricitatis nimis excresceret.

55. Demum si assumeretur vitrum strass habens suum  $dm$  duplo majus, quam vitrum commune; res paullo minus male procederet; sed adhuc male. Retento etiam pro ipso  $m = \frac{3}{2}$ , licet pro eo is valor soleat esse adhuc major, habebitur  $\frac{dM}{dm} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ , adeoque  $\frac{dm'}{dm} = \frac{1}{m} \times \frac{dM}{dm} - \frac{M}{m^2} = \frac{2}{3} \times \frac{r}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} = -\frac{10}{27}$ , &  $\frac{dm}{dm'} = -\frac{27}{10}$ : tum  $\frac{1}{b} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{10} = \frac{1}{3} + \frac{32}{30} = \frac{42}{30}$ ,  $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{m} - \frac{m'-1}{m^2} \times \frac{dm}{dm'} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{27}{10} = \frac{1}{3} - \frac{4}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ . Valor positivus  $b$  ostendit secundam superficiem adhuc concavam, valor  $r$  positivus focum realem: sed reducendo ad unitatem  $= r$  valor  $a$  remanet  $= \frac{1}{5}$ , &  $b = \frac{1}{5} \times \frac{30}{42} = \frac{1}{7}$ , ille pars quinta, hic septima valoris  $r$ , adeoque ille pars decima, hic pars quartadecima distantia focalis objectivi, uterque nimis exiguus.

56. Hi calculi non sunt accurati ob valorem  $m$  assumptum, & pro flint, & pro strass minorem vero: sed cum valores veri non multum differant ab assumptis, patet sane, nullam haberi spem successus per duas superficies alteram e vitro contiguo aeri, alteram e vitro contiguo aquæ. Et quidem satis patet ex ipso calculorum progressu, secundam superficiem debere semper obvenire concavam, quod effectum primæ superficiei minuit amandato foco ad majorem distantiam, quam deinde aqua reddit adhuc du-

*Tom. II.*

N n

plo

plo majorem : hinc radii sphæricitatum evadent semper nimis exiguæ respectu distantiaæ objectivi a micrometro , quod aperturam objectivi reddet semper nimis exiguum , cum exigua copia radiorum , & obscuritate summâ , quam auget tanta aquæ copia interiecta . Hinc recurrendum est ad duas lentes alteram e vitro communi , alteram e flint , quarum ope res confici potest haud difficulter , si agatur de corrigendo solo errore refrangibilitatis , de quo solo egimus etiam h̄c hucusque . En methodum hujusce perquisitionis .

57. Concipiemus binas lentes primam e vitro communi , cujus ratio sinuum  $m$  , radii sphæricitatum  $a$ , &  $b$  , distantia focalis  $h$  , valor subsidiarius  $\frac{I}{f} = \frac{I}{a} - \frac{I}{b}$  , secundam e flint , cujus ratio sinuum  $m'$  , radii sphæricitatum  $a'$  ,  $b'$  , distantia focalis  $h'$  , valor subsidiarius  $\frac{I}{f'} = \frac{I}{a'} - \frac{I}{b'}$  , tum post tenuem velum aeris habebimus superficiem aquæ , cujus ratio sinuum  $M$  , radius sphæricitatis  $b'$  idem , ac postremæ superficie vitri ,  $r$  distantia , ad quam convergunt radii digressi ab unico puncto objecti sito in axe telescopii , quæ ipsa , cum radiis sphæricitatum determinabitur sequenti ratione .

58. E formulis numeri 41 capitinis I Opusculi II Tomi I habetur pro singulis lentibus  $\frac{I}{h} = \frac{m-I}{f}$  ,  $\frac{I}{h'} = \frac{m'-I}{f'}$  , & factâ distantiaâ focali lentis compositæ ab iis binis =  $H$  , est ibi  $\frac{I}{H} = \frac{I}{h} + \frac{I}{h'} = \frac{m-I}{f} + \frac{m'-I}{f'}$  . Is valor erit assumendus pro  $\frac{I}{p}$  in formula pertinente ad unicam superficiem , qua jam usi sumus in superioribus ,  $\frac{I}{q} = \frac{m-I}{ma} + \frac{I}{mp}$  , ubi pro  $m$  ,  $q$  , &  $a$  ponendum erit  $M$  ,  $r$  , &  $b'$  . Hinc habebitur  $\frac{I}{r} = \frac{M-I}{Mb'} + \frac{m-I}{Mf} + \frac{m'-I}{Mf'}$  . Ad hoc , ut valor  $r$  remaneat idem pro radiis primis rubeis , & postremis violaceis , ponenda erit differentia secundi membra = 0 : reducemus autem h̄c etiam primum terminum ejus

ejus membra ad formam  $\frac{1}{b} \times (1 - \frac{1}{M})$ , & fiet  $\frac{dM}{M^2 b} + \frac{dm}{Mf}$   
 $- \frac{(m-1)dM}{M^2 f} + \frac{dm'}{Mf} - \frac{(m'-1)dM}{M^2 f'} = 0$ . Si fuerint inventi me-  
thodo primi Opusculi Tomi I valores  $M$ ,  $m$ ,  $m'$ , &  $\frac{dm}{dm'}$ ,  $\frac{dM}{dm'}$ ,  
qui duo postremi  $\frac{dm}{dm'}$ ,  $\frac{dM}{dm'}$ , dicantur  $u$ ,  $u'$ ; erunt  $dm = u dm'$ ,  
&  $dM = u' dm'$ , quibus valoribus substitutis, & multiplicando  
per  $M^2$ , ac dividendo per  $dm'$ , habebitur  $\frac{u'}{b} + \frac{Mu}{f} - \frac{(m-1)u'}{f}$   
 $+ \frac{M}{f} - \frac{(m'-1)u'}{f'} = 0$ .

59. In hac æquatione habentur tres valores indeterminati  $b'$ ,  
 $f$ ,  $f'$ , quorum binæ relationes mutuæ inducunt binas determina-  
tiones arbitrarias, tertiam pro radiis primæ lentis relinquit in-  
determinatam valor  $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ , nam relatio  $a'$  ad  $b'$  deter-  
minatur per valorem  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$ , & per relationem  $b'$  ad  $f'$ .

Hinc, additâ unâ determinatione a longitudine distantiæ foci, pro  
qua assumetur prima unitas arbitraria, remanebunt arbitrariæ bi-  
næ. Harum altera in Opusculo II Tomi I determinabatur a cor-  
rectione erroris sphæricitatis, altera remanebat arbitraria. Sup-  
positiones fieri poterunt numero infinitæ: fiant ambæ lentes iso-  
sceliæ: erit  $a = -b$ ,  $a' = -b'$ ; adeoque  $\frac{1}{b} = -\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b'} = -\frac{1}{a'}$ ,

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{f} = \frac{2}{a}, \quad \frac{1}{f'} = \frac{2}{a'}, \text{ ac æquatio } -\frac{u}{a} + \frac{2Mu}{a} \\ &- \frac{2(m-1)u'}{a} + \frac{2M}{a'} - \frac{2(m'-1)u'}{a'} = 0, \text{ & factâ præterea } a \\ &= 1, \text{ erit (I) } \frac{1}{a'} = \frac{2Mu - 2(m-1)u'}{u - 2M + 2(m'-1)u'}, \text{ tum (II) } \frac{1}{r} = \\ &- \frac{M-1}{Ma'} + \frac{2(m-1)}{M} + \frac{2(m'-1)}{Ma'}. \text{ Hæ duæ æquationes exhibe-} \end{aligned}$$

bunt solutionem aequationis respondentem ei positioni arbitrariæ.

60. Applicabimus hasce formulas objectivo, in quo prima lens sit convexa e vitro communi, secunda e flint, cuius formam exhibebit calculus, & assumemus hinc etiam numeros parum ab ludentes a veris, quos assumpsimus numero 54, nimiriū  $m = \frac{4}{3}$ ,  $m' = \frac{9}{4}$ ,

$$= \frac{3}{2}, M = \frac{4}{3}, \frac{dm}{dm'} = u \text{ pro flint, & vitro communi} =$$

$$= \frac{2}{3}, \frac{dM}{dm'} \text{ pro flint, & aqua} = \frac{4}{9}. \text{ Applicatis hisce numeris ad binas formulas I, & II, habebitur } \frac{1}{a'} = \frac{2Mu - 2(m-1)u'}{u - 2M + 2(m'-1)u'}$$

$$= \frac{2 \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{2}{3} - \frac{8}{3} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}} = \frac{\frac{16}{9} - \frac{4}{9}}{-\frac{18}{9} + \frac{4}{9}} = -\frac{12}{14} = -\frac{6}{7}, \frac{1}{r} = -\frac{M-1}{Ma'}$$

$$+ \frac{2(m-1)}{M} + \frac{2(m'-1)}{Ma'} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{7} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{3}{14}$$

$$+ \frac{3}{4} - \frac{9}{14} = \frac{3}{4} - \frac{3}{7} = \frac{9}{28}.$$

Porro cum pro reductione valorum  $a$ , &  $a'$  ad unitatem  $= r$  debeat hæc fractio dividi per 1, & per  $-\frac{6}{7} = -\frac{24}{28}$ , erit  $a = \frac{9}{28}$ , sive proxime  $= \frac{1}{3}$ , &  $a' = -\frac{9}{24} = -\frac{3}{8}$ .

61. Valor  $r$  positivus ostendit, folum esse realem, valor  $a'$  negativus lentem secundam e flint debere esse concavam, dum prima e vitro communi est convexa. Ambæ sunt isoscelia, quod est commodum artificibus: radius primæ  $\frac{9}{28}$  est tantillo minor triente distantiæ focalis hujus objectivi ita compositi, & adjacentis aquæ, radius secundæ  $-\frac{3}{8}$  paullo major eodem triente, qui quidem non sunt nimis exigui: sed iidem non sunt exacti, quia assumpti, sunt valores  $m$ , &  $m'$  minores, quam soleant inveniri in vitris utriusque speciei. Si retentis valoribus  $M = \frac{4}{3}$ ,  $u = \frac{2}{3}$ ,  $u' = \frac{4}{9}$ , assumantur pro  $m$ , &  $m'$  valores 1,53, & 1,60, qui magis accedunt ad eos, qui solent inveniri in pluribus vitris communibus, & pluribus flint, quos numeros adhibuimus etiam

in

in præcedenti Opusculo ; obveniunt valores  $\frac{I}{a} = -0,883$ ,  $\frac{I}{r} = 0,220$ , adeoque relate ad unitatem = 1 obtinetur  $a = 0,220$ ,  $a' = -0,242$ , qui valores multo minores prioribus sunt minus idonei pro habenda apertura satis magna. Si ea fiat aliquanto major ; error sphæricitatis timeri potest non ita exiguus :

62. Et quidem quod pertinet ad errorem sphæricitatis , possent aptari formulæ inventæ in illo primo capite Opusculi II Tomi I huic etiam speciei telescopii pro corrigendo simul errore sphæricitatis : habentur enim ibidem formulæ ejus erroris tam pro una , ac pluribus etiam lentibus conjunctis , quam pro unica superficie : eæ possent reduci methodo non multum absimili ab ea , quæ in eodem Opusculo est adhibita , ad casum unicæ superficie aquæ additæ lentibus binis , vel ternis : sed calculus esset admodum complicatus . Verum adest methodus multo simplicior , & expeditissima corrigendi simul etiam in hoc genere telescopii aquei utrumque simul errorem sine ullis novis calculis , quæ mihi postrema in mentem venit , ut accidit plerumque . Satis est objectivo illi ipsi , quod adhibetur pro telescopio acromatico communi , addere ex parte interiore per modum novæ lentis vitrum etiam commune concavo-convexum habens pro radio superficie primæ distantiam focalem ipsius objectivi , & pro radio secundæ eandem diminutam per crassitudinem ejus vitri . Hoc vitrum contiguum aquæ ipsam continebit , radii autem detorti ab objectivo versus focum suum incident ad perpendicularm in utramque superficiem , adeoque sine ulla nova refractione colligentur in eodem foco , in quo collecti fuissent , si aqua non adfuisset . Quin immo poterit etiam secunda superficies tornari ad eandem sphæricitatem , quod erit multo facilius : neglectus crassitudinis tam exiguae respectu radii sphæricitatis nullum notabile detrimentum afferet radiorum unioni . Haberi poterit idem augmentum , & eadem apertura sine ulla alia jaætura præter partem luminis interceptam ab aqua , quæ ipsa jaætura erit multo minor ob brevitatem tubi , qui pro acromaticis telescopiis adhibetur , & aperturam ingentem . Qui careat ejusmodi objectivo , poterit adhibere combinationem propositam numero

superiore , & vero etiam sine ullo usu alterius vitri , quam communis , adhibere objectivum simplex isoscelium ex eo vitro habens distantiam focalem pedum quatuor , quam aqua affusa amandabit ad pedes octo ; auctâ nonnihil aperturâ , quæ compenset jacturam luminis intercepti ab ipsa aqua .

### §. III.

#### *De fixis ad hanc determinationem idoneis cum solutione objectionum propositarum contra hanc methodum.*

63. **F**IXÆ maxime opportunæ sunt , ut superius etiam indicavimus , eæ , quæ habent satis magnam aberrationem in declinationem , & eæ , quæ habent majorem , sunt magis idoneæ , cum debeat esse major earum differentia , quæ determinanda est per duo telescopia : si adhibendus sit semicirculus , qui facile converti possit circa suum axem ; possunt seligi eæ , quæ habeant ejusmodi aberrationem satis magnam , quæcumque sit earum declinatio , a qua pendet earundem distantia a zenith in appulso ad meridianum . Quadrans cum telescopiis affixis medio limbo pertingeret ad distantiam graduum 45 habendorum ex utraque parte . Sed si debeat adhiberi sector longioris radii ejus formæ , quam exposuimus , cuius limbus contineat hinc , & inde a medio numerum graduum  $n$  , distantia vero zenith a polo , quæ est complementum latitudinis loci , dicatur  $a$  ; complementum declinationis ejus fixæ debet esse inter  $a+n$  , &  $a-n$  . Ut autem possit aberratio in declinationem esse non nimis exigua , non debet esse ingens distantia ipsius fixæ a polo eclipticæ , nimirum non nimis exigua latitudo : demum pro quavis fixa , quæ adhiberi possit , oportet seligere illud anni tempus , in quo ejus aberratio in declinationem sit satis magna : nam ea pro quavis fixa ita variatur , ut quodam anni tempore evadat maxima , quodam alio penitus evanescat .

64. Ut ea omnia perspici possint , sit (fig. 8) ABCD ecliptica pertinens ad superficiem sphæræ in immensum remotæ a sole S sito in ejus centro , A initium arietis , B cancri , C libræ , D capricorni , P polus in coluro solstitiorum perpendiculari ad ipsius

eclipticæ planum transeunte per polum æquatoris  $P'$ :  $F$  punctum ejus superficie cælestis, ad quod refertur fixa quæpiam per ultimam directionem radii advenientis ad instrumentum. Id punctum appellabimus hinc locum fixæ verum, ut distinguatur ab eo, ad quod ipsius locum apparentem deflectit aberratio determinata ab inclinatione tubi expositâ in paragrapho primo; licet ne is quidem sit ejus locus verus ob refractionem, & ob aliquem motum, quem eadem stella, utut appellata fixa, potuerit habere eo longissimo intervallo temporis, quo devenit ab ipsa ad terram lumen, quod semiquadrantem horæ impendit in intervallo a sole usque ad nos. Sit præterea  $Z$  zenith in arcu meridiani  $OPO'$ , ad quem locus verus fixæ  $F$  motu diurno adveniat ex parte  $P'Z$  in  $f$  inter  $P'$ , &  $Z$ , vel in  $f$  ultra  $Z$ , prout ipsius distantia  $P'F$  a polo æquatoris fuerit minor, vel major, quam distantia ejusdem poli  $P'$  a zenith  $Z$ , adveniente polo eclipticæ simul ad ipsum meridianum in  $p$ . Concipiantur demum arcus  $PF, P'F$ , quorum prior continuatus usque ad eclipticam versus  $F$  in  $E$ , versus  $P$  in  $E'$  complebit semicirculum  $EPE'$ , & determinabit pro longitudine fixæ arcum  $AE$  computatum directione  $AB$ , & pro latitudine arcum  $EF$ , cuius complementum erit  $PF$ , existente  $P'F$  complemento declinationis.

65. Consideratur hinc totus orbis terræ annuus circa solem, ut unicum punctum, non solum respectu distantiæ ab illa superficie sphærica posita in infinita distantia ultra ipsas fixas, sed etiam respectu distantiæ ipsarum fixarum a sole, & a terra, ad quam si ea haberet rationem sensibilem; angulus subtensus a radio orbis ipsius terminatus ad eandem fixam esset parallaxis annua, cuius effectus deberet conjungi cum effectu hujus aberrationis: sed ea invenitur insensibilis. Licet autem totus is orbis habeatur pro uno puncto; directio motus anni, quæ est eadem, ac tangentis orbitæ ipsius, variata per totum annum, mutat perpetuo directionem, secundum quam telescopium inclinatur, & locus apparet fixæ removetur a loco vero, ac fixa ipsa debet designari a telescopio ita inclinato, tanquam si moveretur in piano parallelo eclipticæ per orbem quendam, qui quidem orbis habendum erit pro circulari, cum velocitas terræ subiens variationem

per-

perquam exiguum respectu totius determinet æqualitatem omnium distantiarum loci apparentis in illo plano a loco vero. Is circulus spectatus e terrâ in immensum proximâ soli respectu immensæ illius distantia, debet apparere in particula superficie ejusdem considerata ut plana itidem circulas, ubi fixa sit in axe hemisphaerii tendente ad polum ipsius: in quavis alia positione fixæ is circulus debet apparere ellipsis eo magis compressa, quo magis radius tendens ad eum locum verum inclinatur ad planum eclipticæ parallelum plano ejusdem circuli; cum is evadat basis quædam coni terminati a directionibus apparentibus, recti in primo casu, obliqui in secundo, & in utroque secti perpendiculariter ad suum axem a superficie ipsa; quæ nimurum est perpendicularis omnibus suis radiis. Hinc ea ellipsis erit eo magis compressa, quo illa inclinatio recedet magis a perpendicularitate, nimurum, quo latitudo fixæ erit minor: donec pro fixis positis in ipso piano eclipticæ tota ellipsis abeat in lineam ad sensum rectam.

66. Eam ellipsim exhibet figura eadem in GLG'L', quæ quidem est perquam exigua, sed delineanda hic fuit multo major, ut quæ ad ipsam pertinent, evaderent sensibilia. Ipsi quadrans PFE occurrit in L versus P, & in L' versus partem oppositam: axis major est GFG' perpendicularis axi minori LL', ille semper æqualis duplæ aberrationi totali secundorum 20, hic ad illum in ratione sinus latitudinis EF ad radius. Arcus P'F ipsi occurrit in I versus P', in I' ad partes oppositas, diameter perpendicularis diametro II' in N, N', diameter hujus conjugata in H, H', per quæ puncta transibunt binæ tangentes parallelæ ipsi NN', quæ occurant ad angulos rectos eidem arcui P'F in M, M'. Si Q secet bifariam semicirculum orientalem EDE', & Q'occidentalem EBE'; eo tempore, quo radius orbitæ terrestris dirigetur à sole versus E, sole viso e terra in E', adeoque habente eandem longitudinem cum fixa, motus ipsius terræ dirigetur versus Q', adeoque locus apparentis fixæ erit in G' vertice orientali axis majoris ellipseos: post menses ternos sole apparente in Q, E, Q', fixa apparebit in L', G, L, eritque in primo casu aberratio in longitudinem FG' ipsam minuens, & in latitudinem nulla, in secundo aberratio

tio in latitudinem erit  $FL'$  ipsam minuens, & nulla in longitudinem, in tertio  $FG$  in longitudinem ipsam augens, & in latitudinem nulla, in quarto  $FL$  in latitudinem eam augens, & in longitudinem nulla. At in ascensionem rectam maximæ, & contraria erunt  $FN$ ,  $FN'$ , loco apparenti fixæ existente in  $N$ , &  $N'$ : erunt maximæ in declinationem, & oppositæ  $HM$ ,  $H'M'$ , loco apparenti fixæ existente in  $H$ , &  $H'$ . Loco apparenti existente in punto quovis ellipsois, arcus perpendicularis diametro  $II'$  erit aberratio in ascensionem rectam, & ejus distantia a centro  $F$  aberratio apparet in declinationem. Nec est difficile determinare pro quovis loco solis in ecliptica punctum ellipsois, in quo tum erit locus apparet in fixæ, qua de re jam satis nota astronomicis fusius egi in una e veteribus meis dissertationibus methodo Geometriæ linearis, & agam hic in uno ex Opusculis Tomi V: erutæ autem sunt & regulæ, & formulæ generales, per quas determinatur pro quovis momento temporis, ut superius affirmavi, aberratio in longitudinem, latitudinem, ascensionem rectam, declinationem fixæ habentis longitudinem, & latitudinem datam: hic satis fuit ingerere ideam quandam ejusmodi variationum.

67. Ex iis patet, quamvis fixam habere aberrationem maximum in longitudinem bis in anno in  $G'$ , &  $G$ , sole habente eandem longitudinem cum ipsa, & longitudinem oppositam habere itidem tribus mensibus post maximum in latitudinem in  $L$ , &  $L'$ , & eam integrum secundorum 20, si fixa sit in ipso polo eclipticæ, cuius ellipsis ibi est circulus, sed eo minorem, quo latitudo ipsius est minor, in ratione sinus ejusdem latitudinis. Aberratio autem tam in ascensionem rectam, quam in declinationem erit integra pro fixa existente in polo eclipticæ, & fere integra pro fixis proximis eidem polo: at quævis alia fixa bis habebit aberrationem maximum in ascensionem rectam in  $N$ , &  $N'$ , bis maximum in declinationem in  $H$ ,  $H'$ , quæ erunt minores illâ integrâ secundorum 20. Sed pro hac, quæ nobis hic venit usui, patet illud, aberrationem maximum in declinationem fore semper majorem illâ maximâ in latitudinem, quæ ad integrum secundorum 20 est ut cosinus latitudinis ad radium: nam quævis semi-

diameter FI in ellipsi est major semiaxe minore FL : & cum quævis tangens HM abeat extra ellipsim ; quævis FM erit major, quam FI , unde habetur duplex excessus aberrationis maximæ in declinationem supra ipsum semiaxem minorem . Quanta autem sit pro quævis data fixa ea aberratio maxima in declinationem , quo anni tempore ipsa evadat maxima , id quidem facile determinatur tam per eas formulas , quam per simplicem constructionem linearem .

68. Aberratio maxima in declinationem potest evadere æqualis integræ secundorum 20 etiam in fixa distante a polo eclipticæ , dummodo ea non distet ab ipso plus ; quam polus æquatoris , nimirum dummodo ejus distantia ab eo polo non sit per hæc tempora major , quam  $23^{\circ} 28'$  , sive ejus latitudo non sit minor , quam  $66^{\circ} 32'$  : tum enim angulus PFP' poterit esse rectus , quo casu ipse axis major GFG' erit perpendicularis arcui NFN' & congruent omnia puncta G'HMI . Datâ distantia PF , cum detur etiam latus PP' , quod tum evadit hypotenusa trianguli PFP' rectanguli ad F , habebitur angulus ad P , nimirum arcus BE , qui determinat longitudinem ejus fixæ : erit enim  $\cos . P'PF = \frac{\tan . PF}{\tan . PP'}$  : habebitur etiam ejus distantia P'F a polo P' complementum declinationis per formulam  $\cos . P'F = \frac{\cos . PP'}{\cos . PF}$  .

69. Datis punctis P , P' , punctum F determinans angulum rectum esset ad circulum diametro PP' , si ageretur de superficie plana : sed cum agatur de superficie sphærica ; id punctum erit ad curvam duplicitis curvaturæ : ejus projectio perpendicularis in planum eclipticæ esset curva , cuius æquatio haud difficulter determinatur : eam invenio gradus quarti (\*). Curva ipsa duplicitis curvaturæ , ad quam est

(\*) Sit enim (fig. 9) ABCD eadem ecliptica , quæ in fig. 8 , conversa paullo aliter , ut facilius perspiciantur lineæ adhibendæ pro hac investigatione , cum eodem semicirculo O'P'PO transeunte per eosdem polos P' , P æquatoris , & eclipticæ : sit autem punctum F in superficie sphæræ cælestis ejusmodi , ut angulus P'FP sit rectus . Concipiatur quadrans PFE idem itidem , ac in fig. 8 , cum

est in superficie sphærica punctum quæsitum F, facilius  
ibi potest in eadem superficie per puncta ex illa ipsa proportio-  
ne, quæ exhibuit valorem enunciatum  $\cos.PF : \cos.PP' :: rad. :$   
 $\cos.P'F$ , ex qua etiam per constructionem geometricam, assum-  
pto quævis area PF non majore, quam sit hypothenusa PP', in-  
venitur arcus P'F: positâ alterâ cuspide circini prius in P cum  
apertura chordæ arcus assumpti PF, tum in P' cum apertura  
chordæ arcus inventi P'F, invenietur punctum F per intersectionem  
circulorum descriptorum a cuspide altera in superficie globi cæle-  
stis, in qua habetur delineatio constellationum. Ita delineatâ eâ  
curvâ per puncta, fixæ omnes, quæ occurrant in ejus perimetro,  
erunt ejusmodi, ut possint habere aberrationem integrum secundo-  
rum 20 in declinationem, & facile definitur tempus anni, in quo  
ea habetur. Ex fixæ præferendæ sunt, si adhibetur ad observa-  
tionem instrumentum habens arcum satis magnum.

70. Sector paucorum graduum pro ejusmodi fixis adhiberi non  
potest, nisi in regionibus nimis borealibus. Quoniam latus P'F  
non potest esse majus hypothenusâ PP'; non potest is arcus es-  
se major, quam  $23^{\circ} 28'$ . Non poterit igitur ea fixa acedere ad

O o z ze-

cum radio PS, qui erit perpendicularis plano eclipticæ, ac rectis PM, FN  
perpendicularibus eidem plano, quarum prior cadet in ipsam diametrum OSO',  
posterior in intersectionem radii SE cum perimetro curvæ quæsitæ MNS ortæ  
in eodem plano a projectione perpendiculari curvæ P'FP: addatur FI per-  
pendicularis radio SP, cum recta SN, quæ erit parallela, & æqualis IF, &  
rectâ NH perpendiculari rectâ SM, quæ erit ordinata curvæ ortæ e proje-  
ctione ad axem SM habentem SH pro abscissa.

Fiat  $SH = x$ ;  $HN = y$ ,  $SN = z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Erit ex theorematis Tri-  
gonometriæ sphæricæ tangens hypothenusæ PP', quæ dicatur  $a$ , ad tan-  
gentem lateris PF adjacentis angulo sphærico P'PF, qui æquatur rectilineo O'SE,  
ut radius ad cosinum ejus anguli, nimirum ut  $SN = z$  ad  $SH = x$ . Por-  
ro PF habet pro sinu ad radium SP, qui dicatur  $r$ ,  $FI = SN = z$ , & tan-  
gens est sinus ductus in radium, & divisus per cosinum, nimirum  $\frac{rz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$ .

Quare multiplicatis extremis, & mediis ejus proportionis, erit  $\frac{ax}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} = \frac{rz^2}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$ , adeoque  $a^2 x^2 (r^2 - z^2) = r^2 z^4$ , vel  $a^2 r^2 x^2 - a^2 x^4 - a^2 x^2 y^2 = r^2 z^4$   
 $+ z r^2 x^2 y^2 + r^2 y^4$ , nimirum  $y^4 + \frac{2r^2 + a^2}{r^2} x^2 y^2 + \frac{a^2 + r^2}{r^2} x^4 - a^2 x^2 = 0$ ,  
æquatio gradus quarti.

zenith Z in suo appulsu ad meridianum minus , quam per excessum distantiae poli a zenith , sive complementi latitudinis loci , supra eum arcum . In observatorio Parisiensi latitudo est  $48^{\circ}50'$ , cuius complementum  $41^{\circ}.10'$ , adeoque non potest ejusmodi fixa accedere ad zenith magis , quam per  $41^{\circ}.10' + 23^{\circ}.28' = 13^{\circ}.42'$  ea erit distantia a zenith minima omnium ex iis , quas habere possunt fixæ capaces aberrationis integræ in declinationem , adeoque deberet haberi arcus fere 18 graduum utrinque in instrumento , nimurum arcus totus 36 graduum . Major adhuc requireretur pro fixis ejus curvæ remotioribus a polo eclipticæ , quæ cum debeat accedere magis ad polum æquatoris , existente arcu PF eo minore , quo PF est major , minus possent accedere ad zenith . Major etiam arcus esset necessarius pro ejusmodi fixis in regionibus australioribus , ut in Italia , & Hispania , ubi distantia poli æquatoris a zenith est adhuc major . Adhiberi posset Petropoli fixa sita prope polum eclipticæ cum sectore satis commodo , cum ejus urbis latitudo sit fere  $= 60^{\circ}$ , cuius distantia a polo æquatoris  $= 30^{\circ}$ , demptis  $23^{\circ}.28'$ , relinquit  $6^{\circ}.32'$ : sectore autem habens radium pedum 8 , & limbum utrinque pedis unius exhibet arcum majorem gradibus 7 .

71. Sed illud commode accidit pro regionibus etiam australioribus , quod ex iis , quæ demonstrata sunt numero 67 , facile eruitur , posse adhiberi fixas satis proximas zenith in appulsu ad meridianum cum jactura aberrationis perquam exigua , potissimum in regionibus satis borealibus , ut Parisiis , & multo magis Londini , cuius latitudo adhuc major superat gradus 51 . Si fiat sectore , qui habeat limbum integrum tantummodo 8 graduum , qui cum radio pedum 8 parum excedit longitudinem unius pedis ; poterunt adhiberi Parisiis fixæ , quæ distent a polo æquatoris per  $41^{\circ}.10' - 4^{\circ} = 37.10$  . Polo eclipticæ existente supra polum æquatoris , eæ distabunt ab illo per  $37^{\circ}.10' - 23^{\circ}.28' = 13^{\circ}.42'$  , qui arcus habet pro cosinu  $0,972$  . Hinc ipsa aberratio FL pro ejusmodi fixa erit  $20'' \times 0,972 = 19'',44$  , adeoque FM adhuc major excedet  $19^{\circ}\frac{1}{2}$  . Pro sectore habente gradus 7 utrinque distantia a polo eclipticæ poterit esse tantummodo  $10^{\circ}.42'$  , cuius cosi-

cosinus 0,984 ductus in 20° exhibet 19°, 68, adeoque FM adhuc major poterit excedere 19° $\frac{3}{4}$ . Consideratâ tantummodo aberratione FL, ea est adhuc secundorum 18° in distantia a zenith 25°. 50', cuius cosinus est = 0,900. Pro illis prioribus non amittitur, nisi quadrans unius secundi, vel ejus dimidium, & pro hisce postremis, quæ distant ab illis per gradus 15', non amittuntur, nisi duo secunda: unde constat, quam sit ampla pars superficiei sphæræ cælestis, in qua non habeatur jaætura' considerabilis aberrationis in declinationem.

72. Ad videndum unico intuitu, quæ fixæ seligi possint, poterit adhiberi constructio facta ope circini in superficie globi cælestis. Aperiatur is prius ad intervallum complementi latitudinis loci imminuti per arcum exhibitum a dimidio limbo sectoris, tum aucti per eum arcum, & applicatâ alterâ cuspide ad polum æquatoris, ducantur notâ delebili in superficie ejus globi bini circuli: inter eos circulos erunt seligendæ fixæ ad rem idoneæ: eæ enim appellant ad meridianum in distantia a zenith, quæ possit exhiberi ab eo seætore. Assumi poterit quævis ex ipsis, quæ distet a polo eclipticæ per arcum non majorem gradibus 25'. Nimirum si figatur cuspis circini aperti ad intervallum chordæ graduum 25', & ducatur is etiam circulus; poterit assumi quævis fixa ex iis, quæ ita habentur in illa priore fasciâ latâ tot gradibus, quot habet integer limbus sectoris, ut simul sint intra hunc circulum, sine periculo diminutionis majoris binis secundis.

73. In ea parte globi cælestis circa polos boreales non occur- runt fixæ magnitudinis primæ, & secundæ, at habentur plures magnitudinis tertiaræ, & quartæ, ut  $\beta$ , &  $\lambda$  Draconis, quæ sunt magnitudinis tertiaræ, & non distant a polo eclipticæ, nisi gradibus 15', cumque habeant declinationem, illa = 52° 30', hæc 51°.32', appellant ad meridianum Parisiis in distantia a zenith 3°.40', ac 2°.42', Londini autem in distantia adhuc minore. Porro licet aqua in tubo pedum 8 intercipiat multum luminis; ego quidem nullus dubito, quin satis evidenter transpici possint trans eam aquæ massam præcipue per noctem & eæ, & fixæ multo minoræ, potissimum si apertura objectivi fiat aliquanto major: nam

sæpe

sæpe in ipso mari tranquillo vidi admodum distincte etiam interdiu lapillos fundi, & pisces in altitudine multo majore pedibus octo, licet aqua marina sit minus pellucida, quam aqua pluvia. Nihil autem timendum est a majore apertura objectivi, quæ non nihil augeat errorem sphæricitatis, cum, ut superius exposui, illa apparet magnitudo impedire non possit, ne ejus centrum sat accurate collocetur in media crassitudine fili, vel lineæ micrometri.

74. His ita fuse expositis, prona jam est solutio objectionum illarum, quæ mihi fuerant propositæ. Prima petita a directione perceptionis de loco objecti respondentे directioni impressionis, quam radius exercet in oculum, nullam habere potest vim; cum locus apparet indicatus ab instrumento pendeat tantummodo ab inclinatione tubi necessaria ad hoc, ut radius ingressus per primum foraminulum figuræ i prodeat e secundo, vel transiens per centrum objectivi incurrat in intersectionem filorum, nullâ habitâ ratione ad id, quod accidat radio post egressum e secundo foramine, qui quidem in casu telescopii cum micrometro ne egreditur quidem. Adeoque differentia distantiarum apparentium a zenith determinatae per bina illa telescopia pendet tantummodo a motu radii in solo intervallo ab objectivo ad lentem ocularem combinato cum motu terræ transferentis tubum.

75. Nec vero translatio aeris, vel aquæ, per quam radius progreditur, facta motu terræ turbat quidquam motum radii rectilineum a loco, in quo centrum objectivi erat initio ejus motus, ad locum, in quo intersectio filorum invenitur in fine, quia particulae luminis eo motu non abripiuntur, sed cum ex una parte habeant liberrimum spatium pro transitu, quod est in immensum majus spatio occupato a materia, & in mea quidem theoria infinite majus, sentiant autem ob medii homogeneitatem circumqueaque in ea exigua distantia, ad quam extenditur earum actio, vires æquales tam in casu massæ, per quam deferuntur, quiescentis, quam in casu ipsius translatæ, non mutant directionem sui itineris, quæ mutatio habetur tantummodo prope superficiem dirimentem duo media, ubi vires particularum medii novi non

sunt

sunt æquales viribus particularum præcedentis. Particulæ luminis, quæ progrediuntur, non incurrun in particulas medii, per quas sibi pandant iter, quod si accideret, paterentur resistentiam, & egressæ e vitro, vel ex aqua possent quidem amittere minus de sua velocitate, non autem recuperare velocitatem, quam habebant in aere ante ingressum, adeoque in novo ingressu posteriore in aliud vitrum non haberent eandem refractionem, quam in primo ingressu; cum eadem vires deflectant magis mobile præditum minore celeritate, quam præditum majore.

76. Sed independenter ab hisce considerationibus, cum e theoria radii progradientis, comparando celeritatem ipsius cum celeritate terræ, deductæ sint leges aberrationis annuæ fixarum, consentientibus observationibus omnibus immenso numero institutis post id egregium Bradleyi compertum; satis constat, a differentia velocitatum debere haberi differentiam aberrationum, quæ respondeat differentiæ eidem. Quantum sit hoc discrimen, facile deducitur in theoria Newtoniana ex eo theoremate, quod, dum lumen mutat medium, velocitas in medio præcedente ad velocitatem in medio novo est reciproce, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti. Ejus theorematis demonstratio habebitur etiam in Opusculo VII hujus Tomi, ubi agendo de refractionibus astronomicis habebitur hujus theorematis demonstratio generalis pertinens etiam ad quemcumque transitum ex uno medio in aliud. Cum in ingressu ex aere in aquam ea ratio sinuum reciproca sit, ut 3 ad 4; ea erit ratio velocitatum in aere, & in aqua, adeoque ratio aberrationum ejus reciproca, ut 4 ad 3. Hinc differentia aberrationum exhibitarum a binis telescopiis erit pars quarta aberrationis, quæ habetur per telescopium habens aerem in tubo. Si adhibetur fixa habens integrum aberrationem secundorum 20 per prium tubum, adeoque duplum aberrationis exhibitum per conversionem instrumenti = 40; differentia erit secundorum 10: si autem adhibetur fixa habens ejusmodi aberrationem in illo eodem tubo secundorum 18, cuius duplum 36; differentia erit adhuc secundorum 9, amissio unico secundo effectus totalis.

77. Porro inde patet solutio secundæ objectionis. Tempuscum,

lum, quod lumen progrediens cum velocitate tam immensa impendit per longitudinem tubi tam exiguum, est omnino insensibile, immo fere imperceptibile, & pene momentaneum: sed ratio velocitatis terræ transferentis tubum ad velocitatem luminis, licet illa sit multo minor hac, non est insensibilis, cum inducat inclinationem telescopii secundorum 20, quorum effectus intervallo sex mensium duplicatur ita, ut si observationes instituantur temporibus, quibus aberrationes maximæ sint contrariæ, & æquales, duplicitur effectus, & assurgat ad secunda 40: per majora autem instrumenta evadit sensibile unum etiam secundum. In telescopio habente augmentum 300, secunda 20 apparent ejus magnitudinis, cuius apparet trans tubum simplicem nullis armatum vitris objectum habens diametrum apparentem minutorum 100, nimirum plus quam triplam diametri apparentis lunæ. Differentia aberrationum, quam exhibent duo telescopia formæ propositæ rite applicata eidem instrumento, si observationes instituantur iis temporibus, quibus aberratio in declinationem est maxima, debet in Newtoniana theoria assurgere saltem ad 9", adeoque est utique admodum sensibilis etiam ipsa, & cum haberi possit intra unam noctem, vel saltem duas, est multo minus obnoxia difficultatibus: ea differentia, si utrumque telescopium ferat id augmentum, debet esse sensibilis trans ipsa plus quam oculo inermi tota lunæ diameter: sed etiam trans ea, quæ aptari solent sectoribus pedum octo, utut multo minoris augmenti, est utique sensibile, uti diximus, etiam unum secundum.

78. Accedit, quod est multo magis sensibile discrimen inter effectus habendos in binis sententiis, quæ requirunt differentias contrarias. Eo tempore, quo aberratio in declinationem maxima auget per 18 secunda declinationem fixæ appellentis ad meridianum inter zenith, & polum, telescopium commune in sententia Newtoniana velocitatis auctæ in medio densiore debet exhibere operæ conversionis instrumenti duplam distantiam a zenith majorem, quam telescopium aqueum, excessu secundorum 9: in sententia vero contraria velocitatis imminutæ in medio densiore debet ea inveniri minor: si hæc differentia contraria debet esse æqualis illi priori;

ri ; pro excessu secundorum 9 debet inveniri defectus aequalis. Differentia inter istos effectus contrarios , a qua pendet quæstionis solutio , evadit secundorum 18 duplo adhuc magis sensibilis . Hinc patet , admodum sensibilem esse effectum illum , per cuius determinationem ea lis est dirimenda .

## §. IV.

*De effectu aberrationis luminis respectu objectorum  
terrestrium (\*) .*

80. JAM olim considerando effectum aberrationis luminis respectu objectorum terrestrium , habitâ celeritate radii constanter eadem in toto tractu usque ad oculum , animadverti , haberi pro objectis terrestribus errores binos , qui se ita mutuo corrigant , ut directio apparet tendat semper ad eum locum , in quo objectum est eo momento temporis , quo cernitur . En eos binos errores , & mutuam ipsorum destructionem in hypothesi velocitatis nihil variatæ . Directio radii transeuntis trans duo foramina figuræ 2 producta retro non tendit ad locum occupatum ab objecto tum , cum cernitur trans ea foramina , sed ad eum , in quo erat cum radius ipse ab eo discessit , & directio foraminum non est eadem , ac directio ejus radii . Verum ista duo ita compensantur , ut directio foraminum tendat ad illum ipsum locum , in quo id objectum est tum , cum cernitur oculo applicato ad secundum foramen .

Tom. II.

P p

81. Si

(\*) Priores tres paragraphos conscripsoram , impressionis tempore jam urgente , cum illud mihi in mentem venit , posse multo commodius adhiberi hoc genus telescopii habentis aquam in suo tubo ab objectivo usque ad micrometrum , dirigendo ipsum ad objecta terrestria abrepta motu terræ simul cum codem inimoto respectu superficie terrestris , cui ejus fulcrum adhæreat , & quidem sine ullo sectore , aut alio instrumento , præter micrometrum internum , quod multo faciliorē admittit motum , quam telescopium cum toto sectore . Retinenda censui quæcumque conscripsoram potius , quam totum Opusculum de novo retexendum , quod toties mihi acciderat in investiganda distributione luminis per circellum erroris figuræ sphæricæ , ut exposui in scholio V supplementi Opusculi I hujus Tomi , & addendum potius novum paragraphum pro hoc objecto , quem hic subjungo .

81. Si enim objectum in figura 2 sit R, & recta NM' concipiatur producta usque ad rectam RR' parallelam rectæ MM'; ipsum etiam punctum R motu eodem terræ progredietur per eam rectam, cum punctis M, N translati per rectas MM', NN', & velocitate ita parum diversa, ut diserimen sit in immensitate exiguum. Discrimen directionis, & velocitatis provenit fere tantummodo a differentia directionis, & velocitatis motus diurni, qui totus respectu totius celeritatis est adeo exiguus, ut vidimus in §. 1: sed ejus differentia in punctis superficie terrestris usque adeo parum a se invicem distantibus respectu semidiametrorum motus diurni, uti distant a se invicem observator, & objectum terrestre observatum, est adhuc in immensum minus sensibilis. Motus autem annuus tam brevi tempusculo & parallelismum, & celeritatem servat fere accuratissime, fere sine variatione ulla respectu omnium punctorum terræ, & multo magis respectu ita proximorum sibi invicem. Hinc erunt similia triangula MN'M', RN'R', & erit RR' ad MM', ut RN' ad MN', nimis ut tempus, quod particula luminis impedit in adventu ab R ad N' in hypothesi velocitatis constanter ejusdem, ad tempus, quod eadem impedit per MN'. Cum in ea eadem ratione eorum temporum debeat esse spatium percursum motu terræ a punto R ad spatium MM' percursum a foramine M; patet, eo momento, quo particula luminis advenit ad oculum applicatum foramini N', punctum R debere esse in R' in eadem recta N'M', quæ est directio apparet transpicienti trans ea foramina, & idem habet locum pro axe telescopii directo ad locum apparentem ejus objecti.

82. Si abscindatur R'r versus R = M'M; particula luminis percurret RM, & inveniet foramen primum M pro primo transitu, dum punctum R objecti terrestris motu terræ percurrit Rr: illa percurret MN', dum puncta R, M, N, percurrunt rectas æquales, & parallelas rR', MM', NN', & inveniet in N' foramen secundum pro secundo transitu. Regula BA indicabit directionem N'M', in cuius productione invenitur punctum R objecti allatum ad R' tum, cum particula appellit ad oculum applicatum  
ad

ad N': id quidem ita se habebit; si radius adveniat ab eo puncto usque ad instrumentum per lineam rectam, & cum eadem celeritate perget usque ad N': nimis ea regula indicabit locum, quem punctum objecti visum vere occupat, non eo momento, quo radius discedit ab R, sed eo, quo is advenit ad N'. Post id momentum pergent moveri aequae puncta R', M', N' vel brevi tempore per rectas ad sensum parallelas, & aequales, quæ erunt continuationes rectarum rR', MM', NN', vel diu motu composito ex annuo, & diurno per arcus curvos iis motibus respondentes ita, ut foramina N, M laminarum affixarum molli terræ totius una cum puncto objecti terrestris remaneant semper in recta linea post quodvis intervallum temporis, ut erant in recta NMr, momento temporis, quo particula luminis advenit ad M, & in recta N'M'R' eo alio momento, quo eadem advenit ad N', atque id utcumque recta, quæ conjungebat bina foramina posita in M, N, vel M', N' cum puncto objecti posito in r, vel R', & quæ illo tempusculo imperceptibili, ac fere momentaneo, quo lumen a primo foramine abiit ad secundum, conservavit fere accuratissime parallelismum, translata per tempus utcumque longum motu annuo, & diurno mutet eodem longo tempore positionem, & directionem. Ii motus non turbabunt distantias, & positiones respectivas eorum trium corporum, nimis binarum laminarum habentium sua foramina, & objecti, adhaerentium massæ solidæ totius terræ.

83. Posita semel in directum ea tria puncta, nimis centra foraminum, & punctum objecti, quod trans ipsa cernitur, remanebunt semper in directum in aliis, & aliis lineis rectis habentibus alias, & alias positiones, & directiones, sed semper rectis; nisi vel regula cum laminis dimoveatur inde alio motu diverso a motu communis globi terrestris, ut lapsu fulcri, vel amota inde impulsu aliquo, aut manu libera. Positionem autem in directum acquirent ea tria puncta, ubicunque sint, si ita semel dirigatur regula, ut id objecti punctum trans eadem foramina transpici possit, nisi radius luminis inflectatur per viam, quod accidere poterit per refractionem, quæ, si agatur de objecto satis remoto, ut de vertice montis cu-

juspiam , radium ab eo digressum incurvat in longo traſtu per atmosph̄oram , & variata variat curvaturam ipsam , a quo refractionis effectu h̄ic pr̄escindimus . Idem autem accidet axi telescopii habenti aerem inter objectivum , & intersectionem filorum micrometri positam in ipso axe : si semel id telescopium dirigatur ita ad objectum terrestre , ut aliquod ejus punctum appareat in illa filorum intersectione ; apparebit semper ibidem .

84. Secus res accidet , si laminæ ferentes foramina sint bases quædam tubi pleni aquâ perpendiculares ipsius axi , & habentes in centris suis ipsa foramina obtecta laminis vitreis ad continentiam eam aquam , vel si telescopium habeat aquam inter objectivum , & micrometrum . Radio abeunte per rectam lineam a puncto objecti usque ad primum foramen , & progrediente rectâ usque ad secundum , linea recta tendens ab hoc ad illud non dirigetur ad locum objecti , nisi in casu , in quo ejus positio habeat eam directionem , quam habet motus eorundem foraminum translatorum cum ipsa terra , vel ei directe oppositam . In quavis alia positione ea recta inclinabitur in plano transeunte per eam ipsam , & per rectas , per quas moventur foramina motu terræ , in quo ipso plano erit idem punctum objecti . Inclinatio autem fiet ad partes oppositas ei , versus quam tendunt foramina ipsa , si celeritas luminis per aquam est major celeritate per aerem , ac in eandem illam partem , si illa celeritas fuerit minor , quam hæc : quantitas inclinationis erit ea ipsa differentia aberrationum respondentium iis celeritatibus diversis pro angulo eodem inclinationis ejusdem rectæ transeuntis per foramina ad viam motus diurni .

85. Sit enim in ipsa figura 2 via radii RMN' , & foramina NM habeant directionem illam eandem , quam habebant prius , tendentem ad illud punctum r , ad quod punctum R devenerat eo tempore , quod particula luminis impendebat in suo motu per aerem usque ad M . Celeritate eadem continuatâ post transitum per id punctum , particula luminis non appellebat ad secundam basim nisi eo momento temporis , quo ipsum foramen N translatum per NN' permittebat ipsi liberum transitum : at celeritate luminis variatâ post transitum per M , foramen N illo tempore

jam

jam mutato non percurret lineolam  $NN'$ , quam percurrebat prius; sed minorem in casu velocitatis auctæ, & majorem in casu ipsius imminutæ: adeoque illa particula non inveniet secundum foramen, per quod transire possit, sed incurret in lamellam solidam. Ad hoc, ut possit transire, oportebit in primo casu inclinare regulam minus, in secundo magis, quam prius: adaptabimus progressum explicationis primo casui velocitatis auctæ per aquam, quem credimus omnino verum: inde ea facile traducetur ad secundum velocitatis imminutæ.

86. Retento loco primi foraminis  $M$ , ad quod particula luminis eadem adveniet per aerem eodem tempore, quo prius, nimirum eo, quo punctum objecti abit ab  $R$  ad  $r$ , oportebit ita inclinare regulam, ut foramen secundum distet a loco  $N'$ , ad quod debebit pervenire ad excipiendum radium, per intervallum  $N'n$  minus priore  $N'N$  in ratione reciproca celeritatis per aerem ad celeritatem per aquam, nimirum in sententia Newtoniana ut 3 ad 4: eodem tempore, quo secundum foramen abibit ab  $n$  ad  $N'$ , particula luminis ingressa per  $M$  perveniet ad  $N'$ , & ibi inveniet foramen secundum jam eo allapsum: sed tempore eodem foramen  $M$  percurret spatium  $Mm$  tantummodo æquale spatio  $nN'$ , adeoque minus priore  $MM'$  in eadem illa ratione reciproca earum velocitatum, nimirum in ratione 3 ad 4. Directio nova foraminum indicata a regula parallela rectæ jungenti eorum centra inclinabitur ad rectam  $N'M'$ , cuius productio tendit ad punctum objecti allapsum ad  $R'$  eo momento temporis, quo particula luminis pervenit ad  $N'$ : ea inclinatio fiet per angulum  $M'N'm$ , tendentem ad partes oppositas directioni motus  $Mm$ , & erit ad angulum  $M'N'M$ , sive  $N'MN$ , quæ erat aberratio determinata a tubo habente aerem, ut 1 ad 4: nam facile perspicitur, fore angulos exiguos  $MN'M'$ ,  $M'N'm$  ut rectas  $MM'$ ,  $M'm$ : patet autem, in casu velocitatis imminutæ fore  $N'n$ , &  $M'm$  minores, quam  $NN'$ , &  $MM'$ , in ratione velocitatum reciproca ob tempus imminutum in eo casu, adeoque inclinationem lineæ tendentis ad locum apparentem deberre fieri versus partem oppositam.

87. Ea deviatio a direktione tendente ad locum, quem occupat objectum

objectum eo momento, quo particula luminis advenit ad  $N'$ , erit nulla, ubi recta  $N'M$  tendens ab  $N'$  ad locum verum objecti ipsius habeat directionem eandem cum motu terræ  $Mm$ , &  $nN'$ , vel oppositam. Mutata autem directione ejus rectæ, mutabitur aberratio  $M'N'm$  in ratione sinus anguli  $N'mM'$ , quem directione apparet  $N'm$  continet cum directione  $mM'$ , quam habet motus terræ, & aberratio ipsa erit maxima, ubi is angulus erit rectus, prorsus, ut accidit aberrationi fixarum, cum hoc solo discrimine, quod ibi concipimus fixas immobiles, hic motus objecti terrestris corrigit aberrationem in casu velocitatis intra tubum æqualis velocitati extra ipsum, & auctâ hac velocitate posteriore per aquam, non penitus corrigit, sed relinquit ejus partem quartam: si autem minuatur velocitas; eam plusquam corrigit ita, ut pariat aberrationem contrariam.

87. Directio rectæ  $N'M'$  tendentis a puncto  $N'$  ad punctum  $R'$ , quod punctum objecti observatum occupat eo momento temporis, quo particula luminis advenit ad ipsum punctum  $N'$ , fere accuratissime constans eo imperceptibili, ac fere momentaneo tempusculo, quo particula luminis trajicit tubum, mutatur plurimum motu diurno, qui mutat & positionem ipsius respectu directionis motus  $MM'$ , &  $NN'$  ad sensum parallel tangentis orbitæ annuæ terrestris, & magnitudinem anguli  $N'mM'$ , a cuius positione, & magnitudine pendet positio, & magnitudo aberrationis  $M'N'm$ , respectu rectæ  $N'M'$ , quam nos translati cum ipsa, & cum tota terra consideramus, ut immobilem. Recta  $NN'$  dirigitur versus id punctum eclipticæ, quod est occidentalius loco solis viso e terra, cum dirigatur per tangentem orbitæ terrestris perpendiculariter rectæ tendenti a sole ad ipsam terram, & directam versus orientem, quod cum sit orientalius tribus signis loco, in quo terra apparet visa e sole, est tantundem occidentalius respectu puncti eclipticæ oppositi, in quo terra videt solem. Si dirigatur tubus ad id punctum eclipticæ, & ibi remaneat fixus respectu superficie terrestris; locus visus objecti terrestris, per quod transit ea directio, erit locus ipsius verus aberratione evanescente: remanebunt per totum diem bina centra foraminum, & id punctum objecti in

in recta linea : sed semidiametro sphæræ cælestis , quæ tendit ad id punctum , recedente per motum diurnum ab ea positione , habebitur aberratio eo major , quo major erit sinus anguli , quem directio ejus semidiametri continebit cum directione ipsius rectæ N'M' .

88. Facile erit collocare tubum etiam horizontaliter in ea directione , in qua recta transiens per centra foraminum tendat ad locum verum objecti , canali HIK figuræ & ita directo , ut aqua per ipsum non effluat . Cognito loco solis in ecliptica pro dato die , habebitur ejus punctum ab eo distans in occidentem per tria signa , & innotescet punctum horizontis , in quo id eclipticæ punctum ascendet supra horizontem , vel descendet infra ipsum , ac momentum temporis , quo id punctum orietur , vel occidet : si dirigatur tubus versus id horizontis punctum , & notetur objectum terrestre , quod appareat in directione foraminum eo momento ; idem objectum erit tum , & perseverabit semper in recta transeunte per ea foraminum centra , quæ transferetur simul cum ipso ita , ut eadem foraminum centra , & id objecti punctum nunquam amittant positionem rectilineam : verum idem punctum objecti non apparebit in centro foraminis M' , sed in puncto m determinato a directione , & magnitudine aberrationis . Si foramen M' sit amplius , & habeat reticulum e filis se decussantibus , habebit punctum m respectu ejus reticuli motum per curvam quandam apparentem , præter casum solstitiorum , in quibus illud punctum eclipticæ distans per tria signa a loco solis orietur , & occidet in punctis ortus , & occasus æquinoctialis , quo casu movebitur id punctum eclipticæ in circulo , in cuius plano erit ipsa recta N'M' , adeoque locus m in reticulo describet rectam lineam discedens a puncto M' perpetuo , donec illud eclipticæ punctum distet ab eo puncto horizontis per gradus 90 , tum regredietur , usque ad occasum puncti ejusdem , quo tempore redibit ad M' aberratione evanescente : deinde procedet abiens versus plagam oppositam , & post alium quadrantem incipiet regredi , bis intra 24 horas evanescente aberratione , bis factâ maximâ , quod maximum in sententia velocitatis per aquam auctæ in ratione 4 ad 3 , quam ,

ut

ut dixi, credo omnino verām, erit secundorum 5, cum debeat esse pars quarta aberrationis integræ secundorum 20, quæ in tubo pleno aere, non aquâ, convenit angulo recto. Hinc summa aberrationum in partes oppositas, quæ tubo ita directo habebitur eo die, erit secundorum 10. Id accidet semper die utriuslibet solstitii, si tubus in quacumque directione congruat cum piano æquatoris. Eo eclipticæ puncto appellente ad tubum, aberratio evanescet: tum per sex horas locus visus recedet a vero orientem versus in recta, in qua planum æquatoris secat planum reticuli, illo puncto eclipticæ recedente in occidentem, atque id per sex horas usque ad distantiam secundorum 5: deinde incipiet regredi, & post alias horas sex, eodem eclipticæ puncto appellente ad punctum oppositum ei, ad quod dirigitur tubus, evanescet iterum aberratio, & locus visus congruet cum vero: inde ipse locus visus transibit ad occidentem, & per sex horas recedet a loco vero usque ad eandem distantiam secundorum 5, & per sex postremas regredietur usque ad novam congruentiam.

89. Sed si tubus collocetur in directione axis æquatoris, in qua ei occurrat aliquod punctum terrestre; recta tendens ad illud punctum eclipticæ, quod est occidentalius loco solis per tria signa, describet planum circuli, vel superficiem coni recti motu respectivo circa axem ejus tubi consideratum a nobis ut immobilem, ac per totas 24 horas angulus, quem ea continebit cum ipso axe, erit constanter idem, nimirum rectus tempore utriusvis solstitii, in quo id eclipticæ punctum erit in æquatore, & aliis anni diebus ejus mensura erit complementum declinationis ejusdem puncti eclipticæ: in æquinoctiis eodem puncto appellente ad alterum tropicis, is angulus erit =  $66^\circ.32'$ . Hinc locus visus circa locum verum describet circulum, cuius semidiameter subtendet in solsticio utrovis angulum = 5", in utrovis æquinoctio =  $5'' \times \sin.66^\circ.32' = 5'' \times 0.917 = 4'', 58$ : summa aberrationum in partes oppositas in intervallo quovis horarum 12 erit = 10" in solsticiis, & = 9", 16 in æquinoctiis.

90. In quavis alia positione axis tubi, locus apparet in reticulo, & ejus continuatio in superficie cælesti describet curvam quandam,

dam, quæ facile construi poterit: ac eadem, considerando exiguum particulam superficie cælestis, quæ non excedit 10 secunda, ut planam, erit, ut mox demonstrabitur, ellipsis, cuius axis major erit perpendicularis arcui circuli transeuntis per polos æquatoris, & per punctum, ad quod dirigitur axis tubi, & in solsticiis quidem secundorum 10, quovis autem alio tempore æqualis arcui 10 secundorum ducto in cosinum declinationis, ejusdem illius eclipticæ puncti occidentalioris loco solis per tria signa, adeoque in æquinoctiis erit =  $5^{\circ} X_0, 917 = 4^{\circ}, 58$ : axis minor erit ad majorem, ut cosinus distantia ejus puncti, ad quod dirigitur axis tubi, a polo æquatoris ad radium.

91. Pro explicatione uberiore, & demonstratione horum omnium adhibebimus eandem figuram 9: sed in ea retinebimus solum punctum P' pro polo æquatoris: assumemus autem punctum P pro eo punto, ad quod dirigitur axis, E pro illo punto eclipticæ, ad quod dirigitur tangens motus annui terræ, quod est occidentalis loco solis per tria signa, ABCD pro circulo, quem motu diurno describit id eclipticæ punctum circa polum P', qui polus æque distabit ab omnibus punctis ejus circuli, nimirum per complementum declinationis puncti E, quanquam eam æqualitatem non bene exhibet figura designata pro determinatione illius alterius curvæ P'FP, sed ita, ut hæc etiam æqualitas hic facile mente suppleri possit pro hoc alio usu, in quo determinabimus constructionem, & naturam curvæ descriptæ a loco viso in superficie cælesti illa, quam consideramus ut immobilem, & in qua concipimus horizontem nostrum, ac meridianum. Dimidium ejus curvæ exprimet QKR, puncta autem O'O intersectionem circuli horarii ducti per puncta P', P cum eodem illo circulo parallelo ABCD, in quo arcus P'P erit complementum declinationis ejusdem puncti P, ad quod axis tubi dirigitur, & O determinabit distantiam ejus horarii a meridiano loci, in quo fit observatio, computatam in eo parallelo. Concipientur demum arcus circuli maximi EP', & EP, qui posterior productus occurrat curvæ quæsitæ in K, ex quo puncto cadat lineola KL perpendicularis ad axem QR curvæ ipsius.

92. Arcus P'P, & angulus, quem circulus horarius P'PO con-

*Tom. II.*

Q q

tinet

tinet cum meridiano loci, invenietur facile; si determinetur plaga horizontis, ad quam dirigitur axis tubi, & ejus elevatio supra horizontem, quod facile fit ope quadrantis mobilis collocati in plano verticali parallelo ipsi axi tubi: latere ipsius quadrantis adducto ad parallelismum cum axe tubi, filium penduli pendentis ab ejus centro de more exhibebit elevationem ejusdem axis supra horizontem, & recta ducta in plano horizontali parallela plano quadrantis ipsius exhibebit eam horizontis plagam, nimirum azimuthum circuli verticalis transeuntis per eundem axem: & quidem satis est habere hæc duo elementa crassiore etiam modo, quamvis non nimis remoto ab exactitudine, cum agatur de determinatione curvæ non compleætentis arcum cælestem majorem secundis 10. Si concipiatur triangulum sphæricum terminatum ad zenith, ad polum, & ad punctum P, ad quod dirigitur axis tubi; habebitur in eo distantia poli, & puncti P a zenith, complementum altitudinis poli, & altitudinis observatæ puncti ipsius, quæ sunt duo latera ejus trianguli circa angulum ad zenith, qui itidem dabitur ex azimutho observato. Quamobrem habebitur etiam latus tertium, quod erit arcus P'P, & angulus in polo, quem horarius ductus per P continet in ipso polo P' cum meridiano.

93. His semel determinatis, prona erit determinatio curvæ quæsitæ per constructionem, quæ quidem fieri poterit, ut libuerit magna, assumptis in scala quacunque numeris pro arcu secundorum 10, & loci visi in eadem curva pro quavis hora diei cùjusvis. In primis innotescet pro quovis die differentia ascensionis rectæ loci solis, & puncti eclipticæ occidentalioris sole per gradus 90, ex quo habebitur hora appulsus ejusdem puncti ad meridianum: tum ex angulo horario puncti P, ejus nimirum, quem arcus PO continet cum meridiano loci, innotescet, quanto tempore prius, vel posterius ille locus eclipticæ adveniet ad eum horarum. Differentia horæ ejus appulsus ab hora data exhibebit angulum OP'E, sive PP'E. Tum in triangulo PP'E innotescet latus inventum P'P constans cum latere P'E complemento declinationis puncti eclipticæ E, & angulo invento EP'P: quare habebitur arcus EP, & angulus P'PE, qui determinat ejus positionem.

nem. In eo arcu producto jacebit PK, cuius valor erit arcus secundorum 5 ductus in cosinum arcus inventi PE. Arcus PQ, PR pertinentes ad axem curvæ hinc, & inde pro appulso puncti P ad horarium P'PO, & P'O' erunt aequales secundis 5 ductis in sinus arcuum PO, PO', qui sinus tempore utriuslibet solstitii erunt aequales inter se, quia tunc punctum E erit in æquatore, & arcus O'PO erit semicirculus: reliquis anni diebus ii arcus erunt aequales complemento declinationis puncti E imminuto, vel aucto per arcum PP'. Hoc pacto pro quibusvis horis habebitur punctum K ad curvam, qui erit locus visus puncti terrestris respondentis puncto P pro iis horis singulis.

94. Si ex illa scala assumatur valor inventus pro rectis PR, PQ, habebitur axis RQ: tum pro singulis horis ductâ PK in angulo invento RPK = O'PE, habebitur curva delineata per puncta, & punctum loci visi pro quavis hora. Et quidem pro delineanda curva satis est tantummodo nosse distantiam PP' puncti, ad quod tendit axis tubi in cælo, a polo æquatoris P', & complementum P'E declinationis puncti E, ac pro quovis angulo O'PE assumpto ad arbitrium invenire in triangulo sphærico P'PE arcum PE ex datis lateribus P'P, P'E, & angulo assumpto ad P.

95. Pro casu solstitiorum, in quo circulus est æquator, inventur facilius arcus PE, qui evadit hypotenusa trianguli rectanguli PO'E. Ea facile invenitur ex eadem illa proportione, qua

$$\text{usi sumus pro curva præcedente: ex ea eruitur } \tan.PE = \frac{\tan.PO'}{\cos.O'PE} \\ = \frac{\tan.PO}{\cos.RPK}. \text{ Ex ejusmodi valore invenitur etiam facile æquatio}$$

ad curvam quæsitam pro eo casu. Fiat enim  $\tan.PO' = t$ , arcus secundorum 5 =  $a$ , PL =  $x$ , LK =  $y$ , PK =  $z$ : erit arcus  $a = 5''$  ad PK =  $z$ , ut radius = 1 ad sinum PE =  $\frac{z}{a}$ .

Tangens æqualis sinui diviso per cosinum erit  $\frac{z}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}} = \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ . Cum hic valor debeat esse  $= \frac{\tan.PO'}{\cos.RPK}$ , & sit  $\tan.PO'$

$$Q q 2 = t,$$

$= t$ ,  $\cos.RPK = \frac{PL}{PK} = \frac{x}{z}$ , erit  $\frac{z}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = \frac{tz}{x}$ , sive  $x^2$   
 $= a^2t^2 - t^2z^2 - t^2y^2$ , ac demum  $y^2 + \frac{(1+t^2)x^2}{t^2} = a^2$ . Ea est  
æquatio ad ellipsim, cuius centrum P, ubi factio x = 0, fit y  
 $= \pm \alpha$ , nimirum semiaxis major perpendicularis axi minori QR,  
& æqualis arcui secundorum 5: semiaxis autem minor PQ =  
PR, facto y = 0, evadit x =  $\pm \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$ , ubi coefficiens  $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$   
est sinus arcus PO, qui nimirum est quartus geometrice proportionalis post secantem  $\sqrt{1+t^2}$ , tangentem t, & radium = 1. Hinc  
semiaxis minor est ad majorem, ut sinus arcus PO', vel PO ad  
radium, ut affirmavimus numero 90, qui quidem sinus est cosinus  
arcus PP', nimirum distantiæ puncti P, ad quod tendit axis tubi,  
a polo æquatoris P': eo punto abeunte in ipsum polum, is co-  
sinus evadit = 1, & ellipsis abit in circulum, ut debebat.

96. Extra tempora solstitiorum æquatio ad curvam quæsitam  
invenitur quidem, sed calculo multo complicatiore, cum P'O, P'O',  
PE non sint quadrantes, nec O'E arcus circuli maximi, ut PO'E  
possit haberi pro angulo sphærico. Oportet desumere valorem ar-  
cus PE e lateribus P'P, P'E datis constantibus, & quovis angu-  
lo assumpto P'PE, qui cum debeat esse multo magis complica-  
tus (\*), æquatio debet assurgere multo altius, & curva esse su-  
bli-

---

(\*) En methodum, quæ mihi prima in mentem venit, pro habendo eo valore,  
& eruendâ inde æquatione ad hanc curvam. Habentur bina latera data P'P,  
P'E, cum angulo variabili EPP',  $= KPL$ , cuius cosinus est  $\frac{PL}{PK} = \frac{x}{z}$ : sit  
P'F perpendicularum duæstum in basim PE, quæ ita habebit duo segmenta PF,  
EF. Si tangens P'P fiat  $= e$ , erit ex illa ipsa proportione jam bis adhibita  
pro nexus inter angulum trianguli rectanguli, hypotenusam, & latus adjacens  
 $\tan.PF = \tan.P'P \times \cos.P'PF = \frac{ex}{z}$ . Ex eo valore tangentis habetur va-  
lor cosinus, qui cum æquetur quadrato radii diviso per secantem, est  $=$   
 $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^2x^2}{z^2}}} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + e^2x^2}}$ . In mea Trigonometria sphærica habetur ne-

blimior, cuius constructio petita ab æquatione nunquam reducetur ad constructionem ita simplicem, uti est ea, quam proposuimus, petita ab inventione arcus PE per Trigonometriam, assumpto PK in eo angulo æquali  $\text{asin.}PE$ . Verum sine æquatione invenitur facile tam longitudo, quam latitudo ejus curvæ ex hac ipsa constructione, ut etiam progressus ordinatarum KL ab una evanescientia in R ad aliam in Q. Longitudo curvæ erit dupla ordinata maxima KL, cum id duplum, ut videbimus, inveniatur majus axe RQ, qui idcirco erit ejus latitudo, ut in illa ellipsi, & ratio longitudinis ad latitudinem invenitur hinc itidem ea ipsa, quæ in eadem ellipsi.

97. Fiat enim arcus P'O = P'O' = P'E = m, PP' = n, existente  $\alpha = 5''$ , ut prius: erit  $PO' = m+n$ ,  $PO = m-n$ ,  $PR' = \text{asin.}PO' = \text{asin.}m\cos.n + \text{asin.}n\cos.m$ , &  $PQ = \text{asin.}PO = \text{asin.}m\cos.n - \text{asin.}n\cos.m$ : hinc axis RQ summa eorum terminorum erit =  $2\text{asin.}m\cos.n$ , quorum semisumma =  $\text{asin.}m\cos.n$  erit dimidius axis, & semidifferentia =  $\text{asin.}n\cos.m$ , erit distantia puncti P a medio axe, quæ poterit considerari tanquam quædam eccentricitas, habito eo medio pro centro. Valor ordinatæ KL invenitur simplex, & simplicissimus ibi, ubi evadit maximus. Is valor est =  $PK \times \sin.LPK = \text{asin.}PE \times \sin.P'PE$ . Porro in triangulo PP'E est  $\sin.PE : \sin.P'E :: \sin.PP'E : \sin.P'PE = \frac{\sin.P'E \times \sin.P'PE}{\sin.PE}$ , adeoque  $KL = \text{asin.}$

xus inter latera, & segmenta basis per hoc theorema, quod ibi est canon 3 triangulorum obliquangulorum: cosinus segmentorum basis sunt, ut cosinus laterum adjacentium, adeoque si cosinus laterum datorum P'P, P'E dicantur  $c, c'$ , erit  $\cos.FE = \frac{c'z}{c\sqrt{(z^2 + c^2x^2)}}$ . E valore cosinuum binorum segmentorum eruitur valor cosinus totius PE; & ex hoc ejus sinus, qui ductus in  $\alpha$  exhibet aberrationem PK, & hæc ducta in sinum anguli RPK =  $\frac{KL}{PK} = \frac{y}{z}$  exhibet valorem  $KL = y$ : ille valor positus =  $y$  exhibebit æquationem, quæ facta divisione per  $y$ , reducetur ad solas indeterminatas  $x$ , &  $z$ , & substituto pro  $z$  valore  $\sqrt{(x^2 + y^2)}$  obtinebitur æquatio quæsita continens solas indeterminatas  $x$ , &  $y$ . Sed satis patet, quam alte ea debeat assurgere.

$\alpha \sin. P'E \times \sin. PP'E$ . Cum  $\alpha$  sit constans, &  $P'E$  complementum declinationis puncti eclipticæ  $E$  distantis per tria signa a loco solis possit haberi pro constanti intra unum diem, potissimum ubi agitur de ordinatis ad curvam ita exiguum, ut tota ipsius amplitudo non excedat decim secundam; evit ordinata  $KL$ , ut sinus anguli  $PP'E$ , qui evanescit, puncto  $E$  abeunte in  $O'$ , vel  $O$ , & evadit maximus æqualis radio 1, puncto eodem distante ab iis punctis per quadrantem ipsius illius parallelī: tum enim angulus  $PP'E$  evadit rectus: adeoque ibi ordinata maxima evadet  $= \alpha \sin. P'E = \alpha \sin. m$ , & longitudo curvæ ejus dupla  $= 2 \alpha \sin. m$ , ad quam latitudo inventa  $2 \alpha \sin. m \cos. n$  erit, ut  $\cos. n = \cos. PP'$  ad radium, prorsus ut num. 95 invenimus pro illa ellipsi.

98. Valor ejus ordinatae proportionalis sinui anguli  $PP'E$  exhibet progressum ipsius ab una evanescentia in  $O$  ad aliam in  $O'$ , post quam ea transit ad partem oppositam, & augetur per eosdem gradus, evadit maxima, decrescit, donec iterum evanescat, puncto  $E$  regresso ad  $O$ . Angulus  $OP'E$  metitur horas ab appulso puncti  $E$  ad  $O$ , nimirum ad circulum horarum transeuntem per  $P$ , qui est quædam conjunctio diurna cum axe tubi, in qua conjunctione aberratio fit in arcu ejusdem circuli, tum per horas sex recedit ab eo semper magis, qui recessus usque ad maximum, habitum eo tempore æqualem valori  $\alpha \sin. m$  est, ut sinus arcus metientis tempus, elapsum ab eodem appulso, ad radium: decrescit iterum per sex horas sequentes per eosdem gradus, per quos creverat, ac evanescit, transit ad partem oppositam, & crescit eodem modo per horas sex sequentes, ac decrescit per sex postremas.

99. In solsticiis pro quacunque positione tubi habebitur ellipsis, & aliis anni diebus ea curva, præter eam positionem, in qua ejus directio sit perpendicularis axi æquatoris: in eo casu evanescet latitudo ejus ellipseos, vel curvæ, & succedet recta linea: tum enim arcus  $P'P$  erit quadrans, & cum latitudo curvæ ad longitudinem debeat esse, ut cosinus ejus arcus evanescentis ad radium, evanescere in ea positione eo cosinu, debet evanescere etiam ea latitudo. Axis major perpendicularis arcui  $P'P$  erit in solsticiis

stiiis = 10°, & reliquis anni diebus idem numerus 10° multiplicatus per cosinum declinationis ejus puncti eclipticæ, cuius producti mensura minima erit in æquinoctiis valor  $10^{\circ} \times \sin.66^{\circ}.32' = 10^{\circ} \times 0,917 = 9^{\circ}, 17$ . Latitudo erit tam in solsticiis, quam extra ad longitudinem, ut cosinus arcus PP' ad radium, adeoque æqualis longitudini, si tubus collocetur in directione axis æquatoris, quo tempore locus visus describit circulum, in aliis tubi positionibus minor: sed quotidie in intervallo horarum 12 ab hora sexta post conjunctionem diurnam ejus puncti eclipticæ cum positione axis tubi ad horam decimam octavam, & viceversa, habebitur tota longitudo, adeoque motus decem secundorum, vel ad minimum novem, utique admodum sensibilis.

100. Ita habentur omnia, quæ pertinent ad hunc motum loci apparentis evoluta, & singillatim exposita. Adhibuimus hic etiam ideam instrumenti habentis dioptras, quæ est simplicior: sed ut fiat sensibilis motus tam exiguus, oportet omnino adhibere telescopium, quod habeat augmentum satis magnum. Major apertura objectivi etiam adjuvabit visionem ob majorem copiam rardiorum collectorum in foco. Pro objecto terrestri potest adhiberi circellus albus in superficie nigra, qui illuminari etiam potest per radios reflexos a speculo concavo superficie satis magnæ, vel a lente ingenti, uti fit ad reddenda magis clara objecta videnda trans microscopium. Id objectum poterit utique videri trans octo pedes aquæ puræ, multo autem melius trans tres, vel quatuor telescopii acromatici, quorum habentur ea, quæ ferant aperturam totidem linearum, quot pollicum est focus, & augmentum admodum ingens, quod adhuc reddat conspicua secunda, & vero etiam fractiones secundorum. Si quis velit vim luminis majorem, potest adhibere tabellam tenuem habentem foramen exiguum illuminatum a flamma ardente prope ipsum in aere inflammabili, & per multas alias methodos potest augeri vis luminis in objecto. Si id sit superficies quæpiam plana bene illuminata; poterunt ipsi applicari bina fila nigra se intersecantia ad angulos rectos. Patet autem, nec esse necessaria duo telescopia, alterum formæ usitatae, alterum novæ hic expositæ. Hoc secundum rem perficiet

per

per sese. Cum possit seligi objectum parum remotum; in tam exiguo intervallo timeri non potest variatio refractionis. Et quidem potest adhiberi objectum satis proximum, ut etiam tantummodo vicecuplo remotius longitudine tubi. Proximitas objecti amandabit focum ad distantiam paullo majorem: verum longitudo aucta non solum non nocet, sed potius prodest, ob incrementum imaginis efformandæ in foco. Facile obtinetur forma lentis vitreæ, quæ habeat distantiam focalem idoneam longitudini tubi, quam sibi quis proposuerit: sed hæc potest variari sine detimento, adhibitis etiam variis ocularibus ad seligendas eas, quæ præbeant satis magnum augmentum conjunctum cum sufficienti claritate, & methodus tubi ferentis objectivum inserti in fig. 6 tubo ferenti laminam vitream, & lentem ocularem adducet semper admodum facile focum objectivi ad laminam vitream supplementem vices micrometri, vel ipsi adhærentem. In exiguo intervallo non poterit, uti diximus, timeri refractio, & multo minus ejus variatio. Adhuc tamen ad majorem præcautionem potest collocari prope hoc telescopium aqueum aliud aereum directum in idem objectum, quod cum non habeat, ut vidimus, ullam aberrationem ortam ex hoc capite, deprehendet omnes mutationes, si quæ accidunt radio in transitu ab objecto ad telescopium, quæ erunt communes utrius telescopio, & excessus motuum apparentium exhibitorum ab hoc telescopii genere supra omnes illos exhibitos ab illo altero, erit is, qui debebit tribui aberrationi ortæ a comparatione celeritatis luminis cum celeritate terræ. Inter motus apparentes, qui induci possunt in objectum sive cælesti, sive terrestre observatum, habentur etiam ii, qui possunt induci a motu aliquo murorum domus ipsius, in qua fit observatio, & cujus pavimento, vel parieti affigitur telescopium hoc novum, sæpe enim inducuntur ii motus ab ipso discrimine caloris. Telescopium commune applicatum prope hoc novum ostendet hos itidem motus, qui erunt communes utrius telescopio, ut ratio eorum haberi possit.

101. Illud autem accidit commodissimum, quod nullo sectore est opus pro determinanda quantitate motus loci apparentis, præter telescopium hujus generis, quod habeat micrometrum inter-

num.

num. Id efformari potest per laminam vitream ferentem duas re-ctas lineas se decussantes ad angulos rectos : potest ea lamina ita aptari thecæ cuipiam , ut ope binarum cochlearum cum suis indicibus notantibus partes revolutionis cuiusvis , possit habere duos motus sibi invicem perpendicularares , per quos adducatur ipsa interse ctio ad punctum objecti , determinato ab iis singulis motu secundum singulas ex iis binis directionibus : potest autem ita comparari theca , ut excursus laminæ mobilis bene politæ per cre-nas itidem bene politas nullum permittat effuxum aquæ . Potest etiam aptari lamina vitrea immobilis , & ad alibi post ipsam mi-crometrum filare , cujus fila radant secundam superficiem ejusdem laminæ , quæ itidem metientur motum loci apparentis . Illud autem hinc accedit iterum perquam commodum , quod objectum respective immotum non effugit celeriter e campo telescopii , ut fixa : varia-tio fit tam lente , ut observatio fieri possit cum summa attentio-ne , & vero etiam repeti per plures vices , ante quam mutatio adveniat sensibilis . Accedit & illud , quod nihil timendum sit a nubibus , nihil ab aeris intemperie , nec certæ seligendæ sint stel-læ . Objecta terrestria ubique prostant in positionibus admodum commodis liberrime seligendis .

102. Omnia aptissima erit collocatio axis telescopii firmiter adnexi forti fulcro metallico in directione proxima ei , quam ha-bet axis æquatoris , cui occurrat aliquod objectum terrestre , quod possit discerni . Nam habebitur quovis intervallo horarum 12 mu-tatio loci apparentis secundorum 10 in solsticiis , & 9 in æqui-noxiis , & quo major est is motus , eo melius discerni poterit , & accuratius determinari .

103. Verum etiam in alia tubi positione quavis haberi possunt tempore solstitiorum secunda 10 , & paullo minor summa habe-bitur etiam quovis alio anni tempore , si observatio instituatur ad intervallum horarum 12 tempore idoneo : positio autem hori-zontalis est multo commodior : occurunt in ea facilius objecta idonea , & quæ multo faciliter illuminentur . Liquor , qui habeat vim refractivam majorem , si sit bene pellucidus , erit magis idoneus , quia majore excessu velocitatis luminis per ipsum indu-

cet deviationem majorem. Si haberri posset medium pellucidum sive fluidum, sive solidum longitudinis paris longitudini tubi necessariæ ad habendum satis magnum augmentum objecti, habens vim æqualem ei, quam habet adamas; haberetur motus secundorum 24: est enim ratio sinuum in ingressu ex aere in adamantem 5 ad 2, adeoque differentia aberrationum in binis tubis, pro stellis fixis, quæ est eadem, ac aberratio in telescopio novæ hujusce formæ =  $\frac{3}{5} \times 20'' = 12''$ , quæ duplicata esset = 24": sed non habentur ejusmodi fluida, nec adamantes ejus magnitudinis, qui ne exigui quidem ad eos usus adhiberi possent ob premium enorme.

104. Aberratio hujus generis, quam exposuimus h̄c, debet haberri etiam in oculo, per cujus humores utique densiores aere lumen progreditur cum velocitate diversa a præcedenti per aerem, sed in primis ea est ita exigua, ut potissimum oculo inermi percipi omnino non possit: ceterum cum perpetuo defigamus oculos in objecta, quæ habent positiones admodum diversas respectu rectæ parallelæ motui annuo, debent haberri ibi aberrationes admodum diversæ in diversis horis ejusdem diei. Fortasse etiam idcirco sapientissimus naturæ auctor tam immanem lumini celeritatem tribuit, quæ si esset multo minor, confusionem induceret per majorem mutationem perpetuam inductam ab aberratione tanto majore, mutante tam directionem, quam magnitudinem ejusdem aberrationis.

105. Hoc pafto evolvimus, quæcunque pertinent ad hoc argumentum, quod quidem est maximi momenti pro bene noscenda natura, & proprietatibus luminis, ac ipsâ naturâ, & causâ genuinâ aberrationis annuæ fixarum. Deberet sane in Astronomiæ speculis inter præcipua instrumenta haberri etiam telescopium hujus generis, cui aqua infundi possit, vel applicatum sectori ad eas observationes destinato una cum telescopio aereo habente satis magnum augmentum, vel saltem solitarium, & armatum micrometro, cuius ope directi ad solum etiam unicum terrestre objectum haberetur mensura quotidiana discriminis, quod habetur in velocitate particularum luminis progredientis per media admodum diversa.

OPU-



## O P U S C U L U M I V.

### DE NOVO GENERE MICROMETRI OBJECTIVI.

1. **M**ICROMETRUM appellatur ab Astronomis instrumentum, quod exhibit mensuram accuratam exiguarum distantiarum, & magnitudinum observatarum per telescopia. Diu nullum aliud fuit in usu, nisi internum illud, quod applicatur in foco objectivi, ubi efformatur imago objecti, qui locus est satis proximus lenti oculari. Constat variis tenuibus filis, quæ disponuntur variis modis: alia sunt ibi fixa, & vel disposita in modum reticuli cuiusdam divisi in numerum ingentem exiguorum quadratulorum, vel se decussantia ad angulos semirectos in axe tubi, nimirum in centro campi apparentis, vel disposita in formam rhombi cuiusdam, pro quo etiam filis substituuntur lamellæ metallicæ, ac de eo micrometrico rhombo aget unum ex Opusculis pertinentibus ad Astronomiam in quarto ex hisce quinque Tomis: alia ex hisce micrometris fixis habent unum filum fixum transiens per centrum campi ipsius, cum altero, vel aliis pluribus inter se parallelis, & perpendicularibus illi priori, cum uno itidem perpendiculari eidem illi primo, sed mobili passu lento ope cochleariæ, cuius integræ revolutiones ipsum promovent per spatiola exigua æqualia latitudinibus singularum spirarum, & partes singularum revolutionum notatae ab indice in circumferentia circuli divisa in particulas plurimas exhibent subdivisiones spatiolorum eorundem ingenti numero.

2. Sero, me jam Professore Matheseos, & exerceente Astronomiam, ex illo, quod ejus inventor Bouguerius appellavit heliometrum, duxit ortum aliud micrometri genus, quod appellatur micrometrum objectivum. Id constat binis partibus lentis habentis distantiam focalem ingentem, quæ adhiberi posset pro objectivo telescopii dioptrici admodum longi. Secatur autem ea lens

R r 2              in

in duas partes æquales sectione transeunte per ejus centrum : ita vero aptata sunt ea duo dimidia ejus lenti ita sectæ instrumento ad id idoneo , ut possint promoveri secundum longitudinem sectionis , & remanentibus singulorum semicirculorum partibus in directum , bina centra tam adduci ad congruentiam , quam removeri a se invicem magis , vel minus . Radii digressi e quovis unico objecti puncto , & transeuntes primum per utrumvis ex iis semicirculis , tum per objectivum telescopii , habent suum focus : ii duo foci in casu congruentiæ centrorum coeunt simul , sed in distantia quavis alterius centri ab altero distant a se invicem in directione eadem , in qua jacent eadem centra , plus , vel minus pro majore , vel minore distantia centrorum eorundem . Fiunt eo pacto binæ imagines ejusdem objecti , quarum altera distat ab altera magis , vel minus , prout evadit major , vel minor distantia centrorum eorundem a se invicem : eæ duæ imagines congruunt accurate , ubi motus instrumenti adducit centra eorundem semicirculorum ad se invicem . Recedentibus a se invicem his , recessit imago altera ab altera , & recessus imaginum determinatur ab illo recessu centrorum , cui est proportionalis . Centrorum distantiam ostendunt divisiones insculptæ laminis connexis cum semicirculis ipsis , ex quibus innotescit , quanta sit angularis distantia optica , quam habet imago altera ab altera , pro quavis illarum regularum positione , & quidem in particulis angularibus per quam exiguis .

3. Plurimi sunt egregii usus ejus instrumenti in Astronomia ; en duos præcipuos . Adductâ prima imagine cujuspiam stellæ fixæ ad congruentiam cum imagine secunda cujuspiam planetæ existentis simul cum ipsa in eodem telescopii campo , innotescit e divisionibus instrumenti ipsius , quot minutis , aut secundis idem planeta distet ab ea fixa . Cum imago circularis prima solis , vel lunæ est in contactu apparenti cum imagine secunda , innotescit magnitudo ejus diametri apparentis , quia ea debet esse æqualis recessui primi limbi primæ imaginis a primo secundæ congruente cum illius limbo secundo . Dicitur autem id micrometrum objectivum , quia in telescopiis dioptricis collocatur ante objectivum prope ipsum .

psum. Aptatur etiam telescopiis catoptricis, & quidem ante inventionem dioptricorum acromaticorum, quæ cum brevi tubo habent itidem ingens augmentum, ut catoptrica, aptabatur solis catoptricis in summo tubo remoto a speculo majore gerente vices objectivi dioptricorum: sed cum constet objectivo vitro longioris foci secto bifariam, & in ipsum incidente radii, ante quam adveniant ad speculum ipsum gerens vices objectivi dioptricorum, dum micrometra filaria apponuntur in loco imaginis efformatae ab objectivo ipso prope lentem ocularem, jam ab initio nomen micrometri objectivi adeptum est.

4. Tota vis ejus instrumenti, & commoditas pro usu pendet ab ortu binarum imaginum ejusdem objecti, quarum altera possit removeri ab altera, quantum libeat observatori, & in quacumque directione sit opus, atque id ita, ut exigua distantiarum apparentium mutatio respondeat satis magno motui linearum insculptarum in instrumento, cui id adnectitur, indicantium eas mutationes exiguae. Anno 1777 Rochonus Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis socius excogitavit aliud genus instrumenti præstantis eundem effectum binarum imaginum, quæ possint removeri a se invicem, vel admoveri, cum satis magna eorum motuum scala. Notum erat Physicis, crystallum montanam habere binas refractiones: eæ, detortis per prisma radiis solis, exhibent binas ejus imagines, nimirum bina colorata spectra, quæ pro quovis individuo prisme distant a se invicem ad angulum habentem certum numerum graduum, dum vitra, saltem fere omnia, unicam habent refractionem cum unica imagine efformata per radios trans ipsorum prismata traductos. Rochonus ea proprietate usus est admodum ingeniose ad habendum eundem effectum binarum imaginum, quæ a se invicem removeri possint, & admoveri cum scala satis magna pro exiguis distantia mutationibus.

5. Ex ea materia confecit bina, quæ appellari possunt, prismata circularia, licet ejusmodi figuram veteres Geometræ appellarent ungulam: basim alteram habent circularem planam, cui altera respondet plana itidem, sed ad ipsam inclinata in angulo exiguo. Cum illa superficierum inclinatio mutua eundem effectum

præ-

præstet, quem prisma habens facies binas in eodem angulo ad se invicem inclinatas, & sint tanquam quoddam prisma ita abrasum, ut una ex iis binis faciebus evadat circularis; non immerito prismatis circularis nomen habere possunt. Sic ob similem rationem in Tomo primo appellavi prisma variabile illud meum compostum e binis frustis, altero plano-convexo, altero plano-concavo, aptatis instrumento descripto in Opusculo I. Cum alterum ex iis prismatis circularibus alteri imponitur ita, ut limbus alterius maxime crassus respondeat limbo alterius maxime tenui; si angulus inclinationis planorum in utroque prismate sit idem; binæ superficies externæ remanent parallelæ ita, ut nullus ibi habeatur prismaticus angulus, sed radii libere transire possint sine ulla refractione. Verum altero prisme gyrante circa alterum immotum, enascitur superficierum oppositarum inclinatio exhibens angulum, qui evadit duplus anguli singulorum, ubi post dimidiā conversionem limbus maxime tenuis appellit ad locum maxime crassi. Enascuntur duplæ singulorum imagines, quæ duplicatio non corrigitur, ut in præcedenti positione: eæ recedunt a se invicem magis, vel minus, prout in ea conversione inclinatio oppositarum superficierum planarum crescit magis, vel minus usque ad maximam inclinationem illam, quæ habetur post conversionem dimidiā. Divisiones motus circularis frusti mobilis, qui determinat magnitudinem anguli prismatis compositi, exhibent mensuram distantiarum imaginum, quæ pro re astronomica habere potest usum eundem, quem habet dupla imago ejus alterius micrometri objectivi.

6. Nunciatum mihi fuit, adhibitam esse a Rochono duplam refractionem crystalli montanæ ad usum micrometri objectivi per motum circularem duplicis prismatis ex ea materia: perspexi statim, res enim erat prona post auditum consilium, quod Rochono feliciter sane in mentem venerat, adhibendi id prismatis genus ex ea materia, cum eo circulari motu, theoriam omnem, & effectum, qui inde oriri deberet, & exposui illi ipsi, qui mihi id compertum nunciaverat: adjeci, multo meliorem fore applicationem unici prismatis ejus naturæ collocati intra tubum, quod posset

posset moveri per totam ipsius longitudinem, & radiis per duplarem refractionem detortis ad efformandam duplarem imaginem, discedente axe radiorum egressorum ex eodem objecti puncto per duas rectas ad se invicem inclinatas in angulo dato: eo motu fieri debere, ut pro diversa distantia ejus prismatis, in quo habetur caput anguli earum rectarum, a foco objectivi, in quo pinguntur imagines, haec discedant a se invicem magis, vel minus auctâ, vel imminutâ distantia laterum anguli ejusdem a se invicem pro diversa eorum longitudine: eo pacto haberi scalam multo maiorem, nimirum totam tubi longitudinem pro exiguo illo angulo divergentiae a prisme binarum rectarum, per quas axis radiorum detorquetur ad efformandam duplarem imaginem. Accedebat illud, quod per unicum prisma non habetur nisi duplex imago, dum singula e binis prismatis binas progignunt. Simul ipsi communicavi methodum aliam a me excogitatam obtinendi eundem effectum duplicis imaginis per prismata e vitro communi, quod erit totum hujus Opusculi argumentum.

7. Paucis diebus post ejusmodi colloquium idem ad me retulit, nunciatum sibi ab amico & suo, & Rochoni, tanquam ingens novum compertum ipsius, illum eundem motum rectilineum prismatis per longitudinem tubi, quod Academiae communicaturus esset in primo proximo consessu. Interrogavi, an amico suo dixisset, se idem additamentum praetuli ejus comperti a me audivisse: retulit, id quidem noluisse, ne videretur velle favere mihi plus aequo, & ob amicitiam attribuere mihi potius, quam Rochono ejusmodi inventum.

8. Suspicabar ego quidem, consilium additionis illius ab ipso per amicum communem ipsius, & Rochoni ad hunc delatum fuisse: erat, cur saltem crederem omnino, idem consilium prius mihi, quam Rochono ipsi venisse in mentem. Adhuc tamen, omissio eo, quod ad me pertinere posset de ejusmodi additamento circa usum prismatis e crystallo montana (quæcumque jam tum per tot annos impresseram, quæ hisce quinque voluminibus continentur, habeo autem alia plura adhuc edenda in alia collectione, quæ non pertinent ad Astronomiam & Opticam, quas solas hic amplector, satis

tis ostendunt, an ego indigeam exiguo hoc additamento ad augendum mearum meditationum catalogum) reservandum mihi censui tantummodo aliud illud genus micrometri objectivi, quod cristallo montana non indigeret, & brevi schediasmate indicavi tantummodo ejus naturam. Cum autem censerem, posse methodum eandem transferri etiam ad mensuram angulorum multo majorum, id ipsum adjeci cum titulo megametri ab iisdem principiis deducendi. Censui, posse eorum instrumentorum ope institui etiam observationes, quæ prosint determinationi accuratiori & latitudinis, & longitudinis geographicæ etiam in mari. Quamobrem id ipsum schediasma misi ad Regium Rei Maritimæ tum Administrum de Sartine: nam per Regium diploma habeo titulum Directoris Opticæ pro ipsa Regia Re Maritima, cum annuo reditu non mediocri attributo, in quo diplomate illud mihi injungitur, ut in primis ad eam Mathematicarum disciplinarum partem annum adjungam, & nominatim ad perficiendam theoriam telescopiorum acromaticorum, quibus ipsa Res Maritima indiget pro suis observatoriis, & navibus. Ut meo muneri facerem satis, jam ea, quæ in hisce primis horum Operum Tomis continentur pertinentia ad theoriam telescopiorum acromaticorum, paraveram, ut etiam plura alia ex iis, quæ habentur in hoc secundo Tomo pertinentia ad Opticam. Cum ad eam pertineret hoc etiam argumentum, & Rei Maritimæ, cui eram addictus, prodesse posset; censui, offerendum esse ante omnes alias id compertum ei Administrō Regio, ad quem idcirco direxi schediasma ipsum, & eidem obtuli.

9. Transmisi idem schediasma ad Scheperdum Regiæ Londinensis Societatis socium, ac Regium Cantabrigiensem eo tempore Astronomum, mihi amicissimum, qui ipsum in ejus Academiæ congressu legit anglice redditum, & tradidit Magistratui, qui procurandis iis, quæ pertinent ad determinationem longitudinis geographicæ, est institutus in Anglia (*bureau des longitudes*), ac ad plures amicos transmisi inserendum in litterariis diariis, quos inter ad celeberrimum Regiæ Parisiensis Academiæ Astronomum La-Landum mihi amicissimum. A Regio Versaliensi Admini-

stro

stro honestissimum accepi responsum, humanissimas Londino litteras cum gratiarum actione, & ab ipsa Londonensi Societate, cuius & ipse sum socius, idem schediasma typis destinatum fuit inter publica ejus Academiæ monumenta imprimendum. Exitus Parisiis fuit admodum diversus. La-Landius ipsum in hebdomadario Academiæ consessu legit: clamores illico enormes excitati me accusantium, ut plagiarum, qui Rochoni comperta sibi tribueret: commissarii destinati ad inquirendum in id suppositum crimen meum, & me plagii damnandum. Quæ in illis tumultibus dicta, acta, tentata tum fuerint, malo hinc ego silentio prætereire. Quanquam multa sane habeo, quæ proferre possem, & quæ meæ consulerent, sed nonnullorum aliorum famæ plurimum obessent.

10. Ego quidem non solum nihil mihi tribueram, quod meum non esset, sed etiam plus æquo ob quietis & pacis amorem de meo jure remiseram: nec vero ea nunc hinc persequerer, nisi post eadem sine ulla ejusmodi altercationum suspicione tam publice in tot locis proposita acerrimam contra omne fas aggressionem perpessus essem. Duo sunt, de quibus agebatur: primum de additione illa ad primam Rochoni ideam de micrometro objectivo efformando per motum circularem binorum prismatum e crystallo montana mutatum in motum rectilineum unici prismatis intra tubum, quod id instrumentum reddebat multò perfectius: secundum autem de alio micrometri objectivi genere efformando per prismata e vitro simplici communi.

11. Quod pertinet ad primum caput, habebam ego quidem jam tum satis firmo innixam fundamento suspicionem de eo, quod, ut superius innui, id ipsi Rochono significatum fuisse ejus additamenti consilium a me amici sui amico communicatum: adhuc tamen in eo schediasmate affirmabam diserte, ut patebit hinc paulo inferius, ubi id ipsum proferam, id inventum ipsi deberi, qui, nullâ habitâ mearum ea de re meditationum notitiâ, id invenerit vel eodem tempore, vel fortasse etiam ante, primus autem id publice proposuerit in Academiæ consessu, primus instrumentum ipsum perficiendum curaverit, ac ejus ope observationes

etiam instituerit primus. Quamobrem profitebar diserte, me mihi nihil de eo comperto tribuere, ipsi uni Astronomiam debere instrumentum sane præclarum. Quid ulterius præstari poterat, ad præripiendam occasionem omnem ejusmodi altercationibus, & literatiis rixis, quas odi semper, & quantum per me fieri potuit, præverti, vel suffocavi?

12. Agebatur secundo loco de illo alio micrometri, & megametri genere, quod perfici poterat per prismata vitrea sine cristallo montana, quæ rarer est, & rarissime excindi possunt ejus laminæ ampliores ita puræ, ut ad opticos telescopiorum usus adhiberi possint: sunt autem multo duriores, ut idcirco difficilius ad debitam formam reducantur, & multo majore pretio constant Rei summa ad id reducitur, ut fiant e vitro communi duo circularia prismata diametri minoris diametro aperturæ objectivi, quæ sibi invicem superposita unicum efficiant prisma habens angulum variabilem per motum circularem methodo superius expositâ, sed applicata superficie ipsius non tegant, nisi ejus dimidium. Radii, qui transeunt per ejus partem liberam, debent efformare unam objecti imaginem in illo eodem loco, in quo ea efformaretur a toto objectivo detecto: aliam efformare debent radii incidentes in prisma, & ab eo detorti, ante quam incident in partem objectivi residuam ab ipso contestam. Variatio anguli prismatis compositi mutationem inducit in distantiam imaginum earundem. Quo autem pacto applicari debeant ea prismata, & moveri, id vero patebit in dissertatione, quam post illud ipsum schediasma hinc adnectam.

13. Hoc ego quidem inventum mihi tribuebam, sed nihil de eo habebatur in iis, quæ tum Rochonus Academiæ obtulerat: in omnibus ejus schediasmatis, quæ protulit alia post alia, non agebatur, nisi de prismatis e crystallo montana habente in angulis prismaticis fere utcunque exsectis duplicem refractionem per se ipsam (habetur positio facierum, ut in ingenti etiam angulo ad se invicem inclinatarum, quæ unicam exhibeat). Significatum mihi fuerat, posse haberi aliquid eo in genere in alio opere Optico, quod is ante aliquot annos vulgaverat: ejus exemplar mihi

hi oblatum fuit, in quo itidem nihil inveni, quod meo illi consilio esset ne analogum quidem. Quamobrem illi clamores omnes nulli fundamento innitebantur.

14. Ali quanto post exposui omnem hujusce micrometri theoriam in Opusculo, quod indicaveram me scripturum ea de re, cum per tempus liceret, & pluribus amicis ostendi: unum ejus exemplar manuscriptum tradidi Vilnensi Astronomo Parisios advecto, qui ipsum in Poloniam transtulit: ignoro, an alicubi sit editum. In una e Londinensibus litteris vidi, schediasma illud meum in Philosophicis Transactionibus prodiisse; sed Maskelynum celeberrimum Greenvicensem Astronomum reclamare compertum idem, ignoro, an illud Rochoni e crystallo montana, an meum e vitro simplici, ut multo ante ab ipso compertum, quamvis non typis editum, ac ea de re ipsius Opusculum etiam in Anglicanis Transactionibus ab ipso editum: sed dum hæc scriberem ne illud quidem Transactionum volumen vidi, in quo meum schediasma insertum est. Dum jam horum meorum voluminum urget impressio, audio, prodiisse Rochoni opus, in quo is & meum schediasma impresserit, ut Maskelynii Opusculum; sed id prodiit Parisiis multo post meum discessum inde ad hæc impri-menda Bassani, quo nullum ejus exemplar adiectum est. Hinc prorsus ignoro, quid Maskelynius, quid Rochonus scripserit ad totam hanc controversiam pertinens. Nec vero quidquam ad bonum publicum, quod ego unice respicio, conferre potest controversia de rei inventore: potest res ipsa plurimum. Idcirco ego hæc illi meo schediasmati adjungam illud meum Opusculum, quo & theoria continetur ejus prismatis duplicitis, & forma instrumenti, quæ mihi commodissima est visa, utramque Gallico idiomate, uti jam tum conscriptum fuit in Gallia, paucis admodum ad uberiorem perspicuitatem mutatis. Si quid occurrat in iis, quæ Maskelynius, ac Rochonus protulerunt, nondum mihi nota, quod explicationem ulteriorem requirat, eam alibi, ubi ea ad me pervenerint, evolvam: a puris recriminationibus, quæ me solum respi-ciant, abstinebo meo more.

## MÉMOIRE

*Sur un nouveau micromètre & mégamètre présenté  
à M. de Sartine Ministre de la Marine  
le 7 Mai 1777*

PAR L'ABBÉ BOSCOVICH DIRECTEUR D'OPTIQUE  
POUR LA MARINE.

15. QUAND j'ai su que M. l'abbé Rochon avoit fait voir une espèce de micromètre , qui par le moyen d'un prisme de cristal de roche à angles variables donnoit deux images du même objet , & en changeoit les distances par un mouvement circulaire d'une des deux parties qui le composoient , je dis à quelqu'un de mes amis , & entre autres au célèbre M. l'abbé Fontana , que je voyois bien comment cela se faisoit , mais qu'il y auroit beaucoup plus à gagner , si l'on rendoit variable la distance du prisme au foyer de la lunette . J'ai ajouté que l'on pouvoit avoir le même effet sans la double réfraction du cristal de roche , en faisant un prisme à verre simple , mais plus petit que l'ouverture de l'objectif . Les rayons qui passent par le prisme formeront une image déplacée de la position naturelle , & les autres , qui passeront dehors , donneront l'autre image à la même place qu'elle auroit , si ce prisme n'y étoit pas .

16. Quelques jours après on a annoncé à M. Fontana que M. l'abbé Rochon avoit imaginé un autre micromètre à prisme de cristal de roche , qui s'approchant plus ou moins du foyer de l'objectif , avoit l'avantage de produire un effet très-grand , & de pouvoir être acromatique ; qu'ayant fait exécuter son instrument , & fait avec lui plusieurs observations il avoit préparé un mémoire sur cet objet pour lire à la prochaine séance de l'Académie . M. l'abbé Fontana eut la bonté de m'en avertir immédiatement ; ce fut pour lors , que je lui répétais ce , que j'avais eu l'honneur de lui dire la première fois sur l'effet de ce micromètre , en y ajoutant la mesure précise de l'échelle pour la

mesu-

mésure du même effet, & la facilité d'obtenir la même chose sans le cristal de roche avec d'autres avantages que l'on pouvoit tirer des prismes à verre simple ne couvrant pas toute l'ouverture de l'objectif, & entre autres celui de pouvoir mesurer par ce moyen des angles beaucoup plus grands que par la double réfraction du cristal de roche.

17. M. l'abbé Rochon a réellement lu à l'Académie son mémoire, & on en a fait mention dans les gazettes : ainsi il a le mérite d'avoir imaginé la même chose dans le même tems, & peut-être avant moi, & absolument sans avoir aucune connoissance de mes idées, sur le même objet, de l'avoir annoncé le premier au public, de l'avoir exécuté, & de s'en être servi le premier : ainsi je n'ai rien à prétendre de ce côté-là : il a le mérite d'une belle découverte, & l'Astronomie lui en aura toute l'obligation.

18. Mais M. l'abbé Rochon n'a employé pour son micromètre que la double réfraction du cristal de roche, & on m'a assuré qu'il a dit que son prisme ne pouvoit lui donner, que jusqu'à six minutes. On sait bien que les pièces assez grandes de cette matière, & assez pures sont très-rares, outre la difficulté de la travailler, étant plus dure que le verre, & quelle attention il faut avoir pour la bien couper afin d'avoir la différence des deux réfractions que l'on veut. Ainsi je crois rendre un service encore plus considérable, en proposant cette autre espèce de micromètre à verre simple en développant sa théorie, & en l'étendant aux angles beaucoup plus grands, ce qui donne le moyen de l'appliquer aussi aux instrumens d'optique que la marine doit employer pour observer les latitudes & les longitudes géographiques. J'avois déjà fait faire un prisme de cette espèce, en faisant voir au même abbé Fontana son effet pour la double image du soleil sur son excellente petite lunette acromatique : on avoit les deux images, en l'appliquant à la main sur l'objectif, de manière qu'il n'en couvroit que la moitié. En le poussant plus ou moins avant, on changeoit la vivacité de la lumière des deux images, où l'on voyoit qu'on pouvoit les réduire à une clarté

égale :

égale : en variant l'inclinaison de cette pièce on varioit la distance des deux images qui n'avoit aucune variation , en changeant hors de la lunette sa distance à l'objectif . Cette pièce étoit un seul prisme simple qui donnoit une réfraction un peu plus grande que le diamètre apparent du soleil . J'y ai fait ajouter après un autre semblable & égal , l'un & l'autre ayant les bases circulaires : en tournant sur son axe l'une des deux parties , on varie l'angle depuis zero jusqu'au double de chacun en particulier , ce qui fait approcher & éloigner les deux images entre elles : on obtient une variation beaucoup plus lente par l'éloignement plus grand ou plus petit du prisme à l'objectif ; mais il y a une raison particulière pour laquelle on ne peut pas lui en donner un trop grand ; car le rétrécissement du pinceau des rayons appartenans à chaque point de l'objet ne permet pas de l'en éloigner trop , ce que affoiblirait trop l'image directe vers le milieu du champ , en interceptant une trop grande partie du même pinceau , & à la fin la feroit perdre totalement .

19. Je fais faire actuellement une machine grossière dans laquelle on peut tourner une des deux pièces à la main sur son axe , pour réduire la distance des deux images un peu plus grande que celle que l'on veut mesurer comme du diamètre du soleil , & à l'aide d'une vis de rappel on peut éloigner le prisme ainsi composé de l'objectif , par un mouvement semblable à celui du petit miroir des télescopes . Je l'ai fait adapter à une lunette ordinaire de quatre pieds , où son effet pour le diamètre du soleil doit être de beaucoup plus d'un pouce de mouvement par minute , & pour les autres planètes on peut avoir 10 ou 15 lignes par seconde , & plus encore . Généralement l'échelle est toute la longueur de la lunette pour la réfraction totale du prisme , ce qui est le même pour la différence des deux réfractions dans le prisme de M. l'abbé Rochon . Mais on peut varier l'angle en appliquant le prisme hors de la lunette à côté de l'objectif , & faisant tourner une des deux parties sur son axe . Alors l'échelle de l'excès que la somme des réfractions des deux parties

ties du prisme a sur la différence n' aura pour la longueur que la demi-circonference d'un cercle , quoiqu'on puisse faire ce cercle aussi grand que l' on veut : mais la différence de la distance des images ne sera pas proportionnelle à la différence des arcs parcourus par l' index . Pour déterminer la relation du mouvement de l' index avec la variation de la distance des deux images , il faut résoudre un problème de géométrie , & j'en ai la solution bien simple par la trigonométrie sphérique : mais il vaudra toujours beaucoup mieux déterminer ce rapport par une observation actuelle terrestre d'une règle divisée , & observée à une distance donnée .

20. Quand il s'agit d'un grand angle , on auroit des couleurs qui déformeroient beaucoup une des deux images de l' objet , c' est-à-dire celle qui est donnée par les rayons passés au travers du prisme : on les évite aisément , au moins en grande partie , en composant chaque prisme de deux pièces une de verre commun , & l'autre de flint-glass . On peut multiplier les prismes composés acromatiques & à angles variables , en faisant que l'un donne les degrés de 5 en 5 , ou de deux en deux , & l'autre les minutes . On peut en mettre deux dehors près de l' objectif , qui changeront la distance des images par le mouvement circulaire , & donneront l' angle cherché un peu plus grand que le véritable , & un autre dedans qui donnera avec toute la précision possible les secondes . J'ai déjà imaginé les instrumens nécessaires pour avoir avec exactitude tous ces objets , comme aussi pour l' application d'un prisme variable à l' octant de marine ordinaire , ayant aussi la solution des problèmes nécessaires . Tout cela sera l' objet d' un ouvrage que je prépare sur cette matière . En attendant je publierai dans les différents journaux ce prospectus pour donner plus tôt à tout le monde le moyen d' imaginer sur la forme mécanique des instrumens quelque chose de mieux que ce qui m' est venu dans l' esprit sur ce sujet nouveau , & bien intéressant .

## MÉMOIRE

*Sur le micromètre & mégamètre objectif à prisme  
de verre simple*

PAR M. L'ABBÉ BOSCOVICH.

21. L'ANNEE dernière 1777 j'ai eu l'honneur de présenter au Ministre de la Marine un mémoire sur une nouvelle espèce de micromètre & mégamètre objectif, qui doit paroître dans les transactions philosophiques de cette année & qui a été imprimé dans quelques journaux. J'y parlois de l'idée que M. l'abbé Rochon avoit eu d'employer à cet effet la double réfraction du cristal de roche par un mouvement circulaire de deux prismes de cette espèce : j'y contois que j'avois fait voir à M. l'abbé Fontana, combien il y auroit plus d'avantage à employer un seul prisme de cette matière, en y donnant un mouvement rectiligne dans l'intérieur du tube le long de son axe : que quelque tems après le même abbé Fontana m'avoit dit qu'on venoit de lui annoncer comme une nouvelle intéressante, que M. l'abbé Rochon avoit exécuté la même idée du mouvement rectiligne, & qu'il alloit en donner tout de suite un mémoire à la prochaine séance de l'Académie. Quoique j'eusse déjà quelque soupçon que mon idée étoit passée par les amis de M. l'abbé Fontana à M. l'abbé Rochon, néanmoins j'avois mis dans mon mémoire en parlant de celui-ci, *ainsi il a le mérite d'avoir imaginé la même chose dans le même tems, & peut-être avant moi.* J'y avois dit de plus, *qu'il avoit le mérite de l'avoir exécuté, & de l'avoir publié le premier, & sans aucune communication de mes idées : que l'Astronomie lui en avoit toute l'obligation : que je n'y prétendois rien.* J'y ajoutois seulement que lui avoit employé à cet usage le cristal de roche, & que je trouvois qu'on pouvoit obtenir le même effet par le moyen du simple verre, en employant des prismes qui couvriroient une partie de l'objectif, en en laissant découverte une autre ; puisqu'

on

on y auroit aussi deux images de l'objet , une formée par les rayons qui passeroient hors de ces prismes , & l'autre par les rayons détournés par leur angle , & on en varieroit la distance ou par le mouvement circulaire d'un des deux prismes sur l'autre , ou par le mouvement intérieur rectiligne d'un seul prisme .

22. M. de la Lande ayant lu mon mémoire à l'Académie des Sciences , on y a excité une espèce de tumulte avec des grandes contestations , comme si j'avois voulu ravir à M. l'abbé Rochon la gloire de son invention . Après l'examen de tout ce que M. l'abbé Rochon avoit donné à l'Académie en différens tems , de plusieurs lettres & billets que je conserve , & de toutes les circonstances de cette affaire , je suis bien persuadé , que lui n' avoit pas eu la moindre idée d'employer le verre simple , en couvrant seulement une partie de l'objectif par une espèce de prisme , ce que j' avois imaginé sans profiter en rien de ses découvertes , & qui par plusieurs raisons est plus avantageux ; que pour le mouvement rectiligne dans l'intérieur du tube , j' avois parlé avec trop de réserve en disant qu'il avoit imaginé *peut-être avant moi , & sans aucune communication de mes idées* , puisque j' avois alors , & j' ai eu beaucoup plus après , tout le fondament de croire , qu'il a trouvé cela postérieurement , avec des raisons pour soupçonner , que mon idée lui a été communiquée par M. l'abbé Fontana , ou par ses amis . Pourtant je ne forme aucune prétension sur cet objet n' ayant aucune preuve positive & assez authentique de ces deux articles . Je conte seulement les choses , comme je crois qu'elles se sont passées : on croira ce que l'on voudra : il me semble bien évident que tout le bruit excité à cette occasion-là a été très-déplacé ; puisque j' avois parlé dans ce mémoire avec une réserve & un ménagement plutôt excessif .

23. Mais beaucoup moins il y a des raisons pour suivre cette contestation à présent , que M. Maskelyne , comme on m' a fait voir dans une lettre de Londres , a annoncé à la Société Royale , que déjà lui , & M. Short avoient eu depuis long-tems l'idée de cette espèce de micromètre , & qu'il a fait un ouvrage

sur cela , qui va paroître bientôt . Je ne sais pas encore , si ce la se rapporte à l'usage du cristal de roche , ou aussi à l'autre du verre commun couvrant une partie de l'objectif . A` tout événement je suis bien content d'avoir au moins excité de nouveau cette idée qui avoit été négligée , & qui par la facilité de procurer des prismes de verre simple doit être beaucoup plus utile à l'Astronomie que l'autre du cristal de roche : je ne cherche dans tous mes travaux que l'utilité publique . Le grand nombre d'ouvrages que j' ai publiés , & qui ont été assez généralement bien reçus , me mettra parmi les personnes équitables à l'abri de tout soupçon d' avoir cherché à me parer des découvertes d'autrui . Dans la même vue d'être utile je mettrai ici une figure que j' avois préparée dès ce tems-là pour mettre sous les yeux la nature de ce nouvel instrument , & j'y ajouterai la solution d'un problème que j' ai seulement indiqué dans ce premier mémoire , comme aussi quelque idée que j' ai conçue de la manière d' adapter ces prismes aux lunettes & aux télescopes .

24. La ligne DEF (fig. 1. Tab. VIII) représente l'objectif perpendiculaire à son axe LEH , la ligne GHI perpendiculaire au même axe le lieu de l'image des objets éloignés , H étant le foyer des rayons qui arrivent à l'objectif avec la direction de l'axe LE , & K de ceux qui arrivent avec la direction de la ligne L'EK inclinée au même axe : BAC est la section d'un verre , qui a deux surfaces inclinées l'une sur l'autre , faite perpendiculairement à leur intersection : nous appellerons ce verre *prisme* , quoiqu'on lui donne la base AB circulaire , de manière que sa figure soit de cette espèce que les géomètres ont appellée *ongle* . Cette base circulaire a un diamètre plus petit que l'ouverture DF de l'objectif , & est placée perpendiculairement à l'axe LE . La partie des rayons , qui passera hors du prisme , formera l'image des points L , L' à la même place en H , & K , comme si le prisme n'y étoit pas , quoique moins lumineuse , & les autres , qui passeront au travers du même prisme , détournés vers la partie opposée à l'angle A , iront en faire un autre à côté , qui tombera sur la même ligne GI , si l'angle du prisme n'est pas

pas trop grand ; & ces images y seront aussi bien distinctes , parceque les rayons qui arrivent parallèles entre eux à une surface réfringente plane , en sortent aussi parallèles : ainsi après le passage par les deux surfaces du prisme ils arriveront à l'objectif aussi parallèles entre eux , & auront le foyer à la même distance que ceux qui sont passés librement .

25. Il y aura seulement un peu de couleurs , qui seront sensibles , si l'angle du prisme n'est pas bien petit , à cause de la différente réfraction que les différens rayons colorés y auront souffert dans le passage par les deux surfaces : mais on pourra rendre insensibles ces couleurs même dans les angles de plusieurs degrés , & les diminuer beaucoup dans les plus grands , en employant un verre chargé de plomb , comme le flint-glass , avec le verre commun , pour rendre le prisine acromatique de la manière qu'on le fait pour les objectifs des lunettes appellées acromatiques .

26. Il y aura dans le même point H une autre image d'un point d'objet placé hors de l'axe ; parcequ'il y aura des rayons obliques qui en passant par le prisme acquéreront la direction de l'axe . Si les points M , N sont les rencontres du même axe avec les surfaces AB , AC , & que l'on conçoive un rayon qui arrive au prisme par EN , & après deux réfractions en N , & Q , en sorte par QP ; le rayon PQ *vice-versa* après deux réfractions en Q , & N sortira par NE , & tous les autres qui arriveront à la surface BA avec la même direction , en sortiront parallélement au même axe , & iront se réunir au foyer H , en y formant l'image du point éloigné P .

27. Si la ligne PQ prolongée rencontre l'axe en R ; l'angle LRP sera la mesure de la distance optique des deux points éloignés L , P , qui auront les images réunies en H : cet angle dépend de la qualité réfractive du verre , & de la grandeur de l'angle du prisme . On démontre aisément dans la théorie des prismes , que quand les prismes de verre ont des angles de peu de degrés , la réfraction est à peu-près égale à la moitié de chaque angle , & la différence entre les réfractions des rayons extrêmes

premier rouge , & dernier violet dans le verre commun à peu-près  $\frac{1}{27}$  du total , & dans le flint  $\frac{1}{18}$  , c'est-à-dire que dans le premier pour chaque degré de réfraction il y a à peu-près deux minutes de séparation des couleurs extrêmes , & dans le second trois , mais dans de différentes espèces de flint il y a de la variété considérable : dans celui qu' on appelle strass , cette différence va jusqu'à 4 minutes par degrés , & dans d'autres verres plus encore chargés de plomb , cela va encore beaucoup plus loin . On a des formules qui expriment la liaison entre l' angle du prisme , la qualité réfractive & dispersive de la substance , l' inclinaison du rayon , en entrant dans la première surface , & la quantité de la réfraction & séparation des couleurs ; mais pour avoir une idée de l' effet des prismes à petits angles , on peut retenir les valeurs que nous avons données de la réfraction égale à peu-près à la moitié de l' angle & de la séparation de deux minutes par degrés dans le verre commun , de trois dans le flint que l' on tire le plus ordinairement d' Angleterre : & si le rayon au lieu d' arriver perpendiculairement à la première surface , y arrive avec une petite obliquité ; il y a bien peu de variation dans l'une & dans l'autre de ces deux quantités .

28. Ainsi dans tout l' espace de l' image en GI , c' est-à-dire dans tout le champ de la lunette , il y aura la réunion des deux images de deux points d' objets qui sont éloignés entre eux d' un angle visuel égal à peu-près à la moitié de l' angle du prisme , & la séparation des rayons extrêmes , qui fera une augmentation d' une image bien lumineuse , sera dans le verre commun de deux minutes par degré , & de deux secondes par minute de cette distance , & de trois dans le flint . Que si l' on forme un prisme composé de deux , un de verre commun , & l' autre de flint , qui ayent leurs angles dans la proportion de 3 à 2 , on corrigera la distraction des couleurs , & on aura la distance visuelle des deux points d' objet réunis égale à peu-près à la sixième partie du premier , quatrième du second , l' angle composé de ces deux contraires réunis étant un tiers de celui-là , & la moitié de celui-ci . Mais on devra déterminer exactement cette di-

stan-

stance par une mesure terrestre , qui donnera l'effet de ce micromètre , comme on le trouve par ce moyen aussi dans les micromètres d'autres espèces .

29. Dans une de mes dissertations sur les nouvelles découvertes de dioptrique imprimées à Vienne en Autriche l'année 1767 j'ai fait voir que par la réunion des deux substances on ne peut réunir que deux seules couleurs , de manière qu' ayant réuni les rayons rouges , & les violets , les rayons verds déborderont , & que pour une réunion de trois il faut employer trois substances , après laquelle réunion le débordement des autres seroit insensible : mais nous n'avons encore , que je sache , des matières propres à donner cette réunion , & laisser assez de réfraction pour rendre toute cette théorie utile dans la pratique à obtenir un plus grand acromatisme des objectifs , & des prismes . Quand on voudra former des prismes à grands angles composés même de deux seules substances capables de réunir deux seules couleurs , & déterminer la quantité de couleurs qui doivent y rester , on a aussi besoin d'une théorie assez compliquée : j'ai déjà développé en partie tout cela , & en partie je le développe actuellement dans des ouvrages à part destinés à la perfection de cette partie de dioptrique , qui est bien intéressante & nouvelle .

30. En attendant pour avoir un assez bon acromatisme dans les petits angles , on peut employer les valeurs que nous avons données ci-dessus , & dans les plus grands il y a un moyen aisément de l' obtenir , si l' on y ajoute un prisme de plus de verre commun . On peut en faire trois à bases circulaires , un de flint , & deux de verre commun , tous les trois à angles à peu-près égaux : en posant un de ces deux sur l'autre , & en le tournant sur son axe , on changera l' angle qui résulte de leur réunion , & en plaçant le premier sur le composé de ces deux ou entre eux , de manière que son angle soit opposé à l' angle formé par les deux autres réunis , on parviendra à trouver par tâtonnement la position dans laquelle l' union des couleurs sera la plus grande possible . Ayant la qualité réfractive & dispersive des deux substances , on peut parvenir par la théorie au même but avec deux seuls

seuls prismes ; mais par la substitution d'un troisième on peut suppléer à la théorie, en employant la méthode indiquée.

31. Si l'on éloigne le prisme BAC, ou qu'on l'approche, mais toujours au de-là de l'objectif ; on voit bien que l'angle LRP sera toujours le même, & les rayons de la même direction PR arriveront toujours à l'objectif avec la même direction NE : ainsi on aura toujours la réunion en H des deux mêmes points de l'objet L, & P. Le rayon qui sera arrivé par l'axe LM, passera par la première surface sans réfraction en N ; mais en sortant aura une réfraction ENO, qui sera à très-peu-près égale aux deux du rayon PQ, dont la somme est l'angle LRP ; puisqu'un très-petit changement d'inclinaison du prisme à un rayon, qui arrive presque perpendiculairement à sa première surface, ne change pas sensiblement la quantité de la réfraction, surtout quand l'angle du prisme est petit, comme on peut s'en assurer aisément aussi par l'expérience. Si la ligne L'E parallèle à NO rencontre la GI en K, & la seconde surface du prisme en n, & que l'on conçoive la droite lmn parallèle à LMN ; le rayon qui sera arrivé par cette droite sortira par la nE, & ira au point K foyer commun de tous les rayons, qui tombant sur le prisme avec la direction parallèle à l'axe, arriveront à l'objectif parallèlement à la droite L'nE, & de tous ceux, qui venant avec la direction parallèle à la même ligne, & passant hors du prisme tomberont directement sur l'objectif. Ainsi on aura en K la réunion des images des deux points de l'objet L, & L' éloignés entre eux d'un angle visuel LEL' égal sensiblement à l'angle LRP ; & la distance du prisme au de-là de l'objectif augmentée ou diminuée ne changera pas la réunion de ces deux images, comme aussi n'en changera aucune autre dans tout l'espace GI de tout le champ de la lunette.

32. Mais cela n'arrivera pas de même, quand le prisme sera placé entre l'objectif & son foyer en B'A'C'. Les rayons, qui seront arrivés parallèlement à l'axe, & auront passé hors du prisme, iront se réunir de même en H : mais le rayon EM'N' sortant du prisme par la direction N'K' toujours parallèle à la

même

même ligne EK à cause de la quantité de réfraction toujours constante , ira à un point K' variable de manière que la distance HK sera proportionnelle à la distance N'H du prisme au foyer de l'objectif. Les autres rayons qui appartiennent à un point éloigné placé sur l'axe , & qui sans le prisme auroient eu la réunion en H , iront se réunir en K' , où ils formeront la seconde image de ce point . L'inclinaison des deux surfaces du prisme conforme à l'inclinaison des surfaces de l'objectif , qui se trouve à l'extrémité F de son ouverture du côté de l'angle A' , & contraire à celle du côté opposé , augmentera un peu la confusion de l'image déjà un peu troublée par l'erreur de la figure sphérique , qui ne peut jamais réunir avec toute l'exactitude dans un seul point tous les rayons partis d'un seul point de l'objet . Cette augmentation doit être considérable , quand l'angle du prisme est assez grand . Dans tous les cas on peut en déterminer exactement la quantité par la théorie : mais l'expérience même fera voir que quand l'angle du prisme est bien petit , cette augmentation de confusion n'est pas considérable . Il n'y a pas cet effet dans les prismes appliquées au de-là de l'objectif en BAC ; & c'est une des raisons pour lesquelles on ne doit pas se servir des grands angles appliqués intérieurement entre l'objectif , & son foyer .

33. Les prismes à petits angles pourront bien être employés intérieurement , & y former un micromètre très-sensible . Toute la longueur de la lunette est l'échelle qui mesure le mouvement de la seconde image formée par le prisme . Quand ce prisme touchera l'objectif en E , la seconde image d'un point L de l'objet détournée par le prisme sera réunie dans un point K' très-près du point K avec la première que nous appellerons directe , d'un autre point qui sera très-peu éloigné du point L' , & qui aura la distance visuelle du point L presque égale à l'angle entier H N' K' de la réfraction du prisme . Comme en diminuant la distance du même prisme au foyer de l'objectif , on diminuera l'intervalle entre les deux images du même point en raison de cette distance , on diminuera aussi la distance apparente de ces deux images , & de même celle des deux points de l'objet , qui seront

réu-

réunis ensemble dans l'image sur le foyer de l'objectif, sera diminuée dans la même raison.

34. Si l'on a un angle du prisme un peu plus grand que d'un degré, pour avoir la réfraction un peu plus grande que le diamètre apparent du soleil & de la lune, qui vont un peu au delà d'un demi-degré ; la lunette étant de trois pieds, on aura presque un pied de mouvement pour une minute de changement de distance dans les deux images, qui donnera  $\frac{1}{5}$  de ligne par seconde ; mais si l'on emploie un angle de deux minutes, qui donne la réfraction d'une minute plus grande que tous les diamètres apparens des autres planètes ; on aura un pied pour 20 secondes, qui donne 7 lignes par seconde, & on en auroit 14 dans une lunette de 6 pieds. Un angle plus petit employé pour les planètes qui ont un diamètre apparent plus petit, donneroit un mouvement plus grand en proportion pour chaque seconde.

35. On ne peut pas profiter de cette grande sensibilité de cette espèce de micromètre, si la réfraction totale n'est pas très-peu plus grande que l'angle visuel de deux points de l'objet que l'on veut mesurer, parcequ'on ne peut pas trop éloigner le prisme de l'objectif. Si l'on a un prisme qui donne une réfraction d'une minute, & qu'on veuille mesurer le diamètre apparent de Vénus périgée, qui en est un peu plus petit, en montant ce prisme dans le tube de la lunette, comme on monte le petit miroir dans les télescopes, & en approchant très-près de l'objectif, on verra deux disques apparents de Vénus un peu détachés l'un de l'autre ; & en l'éloignant peu-à-peu, on arrivera à l'attouchement des deux images avant d'épuiser tout l'éloignement donné par l'instrument : mais si l'on vouloit mesurer par le même prisme son diamètre quand il est de 40"; il faudroit l'éloigner d'un tiers de toute la longueur du foyer de l'objectif, & cet éloignement devroit être beaucoup plus grand pour les diamètres beaucoup plus petits. Or il y a un inconvenient qui empêche de l'éloigner au delà de certaine limite. Ce n'est pas la raison, que j'ai indiquée au num. 12. Un angle si petit ne feroit aucune augmentation sensible de confusion. Mais il y en a une autre qui vient

vient de la diminution qu'on auroit de la lumière de la première image , & de l'augmentation de celle de la seconde.

36. Pour avoir une clarté égale des deux images dans le cas , où le prisme est contigu à l'objectif , s'il n'y avoit aucune perte de lumière causée par la rencontre du prisme , il faudroit faire son diamètre au diamètre de l'ouverture de ce même objectif en raison de 1 à  $\sqrt{2}$  , qui est celle à-peu-près de 10 à 14 ; parcequ'alors la surface du prisme seroit égale à celle de l'anneau de l'objectif qui reste à découvert , ce qui rendroit la quantité des rayons libres qui forment la première image égale à celle des rayons détournés qui font la seconde : mais comme il y a toujours une partie non indifférente qui se perd par les réflexions dans les surfaces du prisme , par ce qui est dispersé irrégulièrement , par le défaut de transparence qui n'est jamais totale dans aucune substance diaphane , il faut faire ce diamètre encore plus grand , comme en raison de 10 à 12 , ou de 5 à 6 . Or en éloignant le prisme de l'objectif la raison de la première quantité de lumière à la seconde doit diminuer continuellement , en arrivant à la distance d'un sixième de la longueur totale du foyer de l'objectif , celle-ci s'évanouiroit totalement .

37. Si l'on conçoit la ligne A'B' prolongée jusqu' aux lignes DH , FH en S , V , le pinceau conique des rayons passés par l'objectif qui vont se réunir en H se rétrécit continuellement , & le diamètre de sa section dans le lieu du prisme devient SV qui est plus petit que le diamètre DF en raison de la ligne EH à M'H . Quand EM' sera un sixième de la distance focale EH , cette raison sera de 6 à 5 : ainsi B'A' devenant égale à SV , le prisme interceptera tout-à-fait tous ces rayons , & la première image disparaîtra tout-à-fait , la seconde ayant le double de la clarté primitive . En s'approchant trop de cette limite , il y aura déjà une inégalité de lumière trop grande . Pour conserver une égalité sensible on pourra faire le diamètre A'B' un peu plus petit que de  $\frac{5}{6}$  de l'ouverture totale de l'objectif & préparer plusieurs diaphragmes de gros papier que l'on appliquera extérieurement sur le même objectif : des essais qu'on aura faits une fois ser-

viront pour savoir quel est celui qu' on doit y appliquer pour obtenir une égalité sensible de clarté quand on devra se servir d'une distance que l'on saura sachant à-peu-près la grandeur de l' objet que l'on doit mesurer , ou en prenant cette grandeur avec l'inégalité non encore corrigée .

38. On pourra bien employer cette méthode en éloignant bien peu le prisme de l' objectif , si l' on réduit ce prisme à avoir son angle variable , ce qui est très-aisé de la manière suivante . Au lieu d'un seul prisme on en fera deux à bases circulaires égales , qui auront les angles au moins à-peu-près égaux , chacun à-peu-près de la moitié de l' angle total qu' on vouloit employer , c'est-à-dire chacun d' un angle à-peu-près égal à la plus grande des mesures que l' on veut déterminer . En plaçant les deux prismes l' un sur l' autre de manière que la partie la plus mince de l'un réponde à la plus épaisse de l'autre , on aura l'angle au moins à-peu-près égal à zero : mais en tournant l'un des deux sur son axe , on augmentera l' angle jusqu' à ce qu' il devienne égal à la somme des deux , c'est-à-dire à-peu-près double de celui d' un seul prisme , quand les parties les plus minces se trouveront l'une sur l'autre .

39. On pourra savoir , quel est l' angle du prisme composé , & de quel côté il est tourné par la solution du problème que j'ai indiqué ci-dessus , & que je donnerai plus bas : mais comme dans un cercle si petit on pourroit facilement commettre une erreur considérable , en déterminant cet angle par cette méthode ; on pourra avoir ce que l' on cherche avec la dernière exactitude de la manière suivante . On enfermera les deux prismes dans deux anneaux des figures 2 , & 3 . Dans le premier il y aura des petits trous coniques creusés dans des parties diamétralement opposées que l' on pourra encore indiquer par des nombres mis à côté : dans l'autre on aura deux pointes de la même épaisseur coniques de même . En faisant entrer les pointes du second adapté à la machine de la lunette dans deux des trous du premier posé par-dessus , on aura une position déterminée de manière que toutes les fois que ces pointes entreront dans les mêmes trous ,

trous, on aura toujours la position respective des deux prismes exactement la même. En ôtant l'objectif pour changer la position, & le remettant après on déterminera l'angle de la réfraction qui répond à chacune de ces positions par la mesure terrestre d'une base bien longue & d'une planche, sur laquelle il y aura une échelle à lignes transversales. La réunion des images de deux points de l'échelle faite dans chaque position donnera la valeur de la réfraction qui lui répond, quand l'index extérieur de la machine corrélatif à celui du petit miroir des télescopes sera au zero de sa division. On fera jouer alors la machine qui porte les prismes, & ayant porté le même index à la division la plus éloignée du zéro, on verra dans cette position des prismes le changement arrivé à la distance angulaire des points réunis, c'est-à-dire à l'angle déterminé, ce qui donnera la valeur des parties de cette échelle dans cette position, & de-là on tirera leur valeur pour toutes les autres positions, parce qu'elle sera proportionnelle à la valeur totale que chaque position aura eue, quand l'index étoit au zero.

40. Ayant fait une fois cette vérification de son micromètre, on pourra s'en servir pour tous les angles depuis le zero jusqu'au plus grand, double à-peu-près de l'angle de chaque prisme séparé, sans avoir besoin d'un grand mouvement le long de l'axe de la lunette. On posera le prisme de la fig. 2 sur celui de la fig. 3 dans la position que l'on croira un peu plus grande, que la mesure que l'on veut prendre. On remettra l'objectif, & en approchant le plus que la machine le permet les prismes de l'objectif, on regardera l'objet. Si l'on voit que la division choisie donne une mesure qui soit plus petite que celle, dont on doit prendre la mesure ou qui l'excède trop, on la changera : ainsi on trouvera la division qui donne un peu plus. Alors en éloignant la machine de l'objectif, on diminuera la distance, & en réunissant les deux images des deux points de l'objet, comme en portant les deux disques d'une planète à l'attouchement extérieur, on aura la mesure exacte.

41. Par ce mouvement circulaire d'un prisme sur l'autre, qui

en forme un à angle variable , on aura un double avantage . Premièrement on évitera un long mouvement le long de l'axe . Si l'on pouvoit faire aller un prisme d'un angle déterminé & invariable par toute la longueur de la lunette sans l'affoiblissement & la disparition totale de l'image directe après un sixième de la longueur de la lunette ; on auroit besoin d'une division très-longue & d'une ouverture latérale du tube presque par toute la longueur . On évite cet inconvénient par le changement de l' angle variable , par lequel on peut faire qu' on n' ait jamais besoin d'un mouvement de deux ou trois pouces , & si l'on veut même d'un seul . En second lieu on a par ce moyen une sensibilité beaucoup plus grande pour les petits angles , que l'on se propose de mesurer , qui est proportionnelle à leur petitesse . Si l'on devoit mesurer une distance angulaire d'une minute par un prisme qui auroit son effet total de 8 ; non seulement il faudroit éloigner le prisme de l'objectif jusqu'à la distance de  $\frac{7}{8}$  de la longueur totale , mais cette longueur toute entière seroit une échelle pour le total de 8 minutes : ainsi la lunette étant de 4 pieds , on auroit six pouces par minute de sensibilité : mais en réduisant l'angle variable à donner l'effet total à une seule minute , on aura une sensibilité 8 fois plus grande , d'un pied pour 7 secondes & demi .

42. Au lieu des trous que j' ai proposés dans la fig. 2 avec des pointes de la fig. 3 on pourra bien donner le mouvement circulaire & l' arrêter à des positions immuablement déterminées par le moyen de dents & d'un ressort de pression que l'ouvrier bien adroit imaginera aisément . Cela sera beaucoup plus commode pour la pratique de l'observateur : mais j' ai mis seulement la manière la plus aisée à concevoir & la plus facile à exécuter . Quand il s' agira d' un prisme composé qui puisse servir seulement pour les diamètres apparents des planètes , on peut faire chacun des deux composants simple de verre commun : les couleurs n' y seront pas sensibles ; mais pour la mesure des diamètres apparents du soleil & de la lune qui demandent l'effet total plus grand que d' une demi-minute , on fera bien pour éviter

ter les couleurs de former chacun des deux acromatique , c'est-à-dire chacun composé de deux un de flint , & l'autre de verre commun de la manière que nous avons dit ci-dessus ; & cela sera beaucoup plus nécessaire , quand il s'agira d'un micromètre d'un effet total plus grand .

43. On peut faire avec toute la facilité & à peu de frais des prismes de cette espèce , ou de verre simple , ou aussi composés de verre , & de flint , surtout n'ayant besoin que d'un à-peu-près dans la mesure des angles , parce qu'on en aura l'effet beaucoup mieux par le moyen de la vérification que nous avons proposée pour déterminer cet effet : on fera bien d'avoir trois prismes composés & emboîtés de manière que l'on puisse adapter chacun à la même machine de la même lunette : le premier aura les deux prismes composants simples chacun d'un angle un peu plus grand que de deux minutes , pour avoir un effet d'un peu plus que d'une minute de réfraction totale : celui-ci servira seulement pour les petits diamètres apparents des planètes , mais il ne pourra servir que pour les lunettes acromatiques d'une grande force , qui puissent rendre bien sensible la grandeur de ces diamètres . Le second aura les deux composants acromatiques chacun d'un effet total un peu plus grand que de 17 minutes , c'est-à-dire d'un angle de verre commun à-peu-près de 51 minutes , & d'un autre de flint de 34 . Celui-ci servira pour les diamètres apparents du soleil & de la lune & on peut l'adapter à cette première lunette : mais si l'on veut , celui-ci peut servir aussi étant adapté à une bonne lunette d'une force médiocre . On peut faire le troisième composé de deux acromatiques de manière que son effet total soit de deux ou trois degrés pour mesurer des distances un peu plus grandes , comme celle de la lune , ou des autres planètes aux étoiles fixes .

44. On peut donner beaucoup plus de sensibilité au second destiné à la seule mesure des diamètres apparents du soleil & de la lune . On fera le premier prisme fixe de 31 minutes d'effet total , & le second mobile de 3 . Dans la demi-révolution celui-ci donnera tous les angles depuis 28 jusqu'à 34 , tout ce grand

mou-

mouvement n' ayant que 6 minutes de variation dans l' angle mesuré .

45. On aura bien besoin d'un prisme composé à angle variable pour une autre espèce de micromètre objectif formé par des prismes placés en dehors au dehors de l' objectif de la lunette qu' on pourra employer beaucoup plus aisément & qui pourtant aura assez de sensibilité : de l'autre côté il y aura dans celui-ci un autre grand avantage , c'est qu' il pourra être employé à la mesure d' angles beaucoup plus grands ayant aussi l' usage d' un mégamètre . Pour le former on pourra faire cette machine semblable à celle du micromètre objectif ordinaire qui s' adaptera au bout du tube d'une lunette acromatique . Cette machine aura un anneau , qu' à l'aide d'une baguette on pourra faire tourner autour de l' axe de la même lunette , comme celui qui porte les deux demi-lentilles du micromètre objectif . On attachera à celui-ci un cercle beaucoup plus grand , comme d' un demi-pied de rayon , qui aura son plan perpendiculaire au même axe : celui-ci par deux règles de métal dirigées vers son centre soutiendra un des deux prismes composants fixé dans un petit tuyau . Un autre tuyau égal à celui-là portera l' autre prisme composant , & sera lié avec deux autres règles à un second anneau , qui pourra tourner autour du premier à l' aide d' une seconde baguette . Une des deux règles qui porteront ce second prisme , ou chacune des deux prolongée jusqu' au cercle portera un autre arc , qui avec les divisions de ce premier cercle formera un nonius . Ce nonius marquera les positions des deux prismes qui par la variation de l' angle donneront la variation de la distance des deux images de l' objet .

46. Si l' on place de cette manière un prisme composé , qui donne l' angle total d' une minute ; on aura une demi-circonférence entière pour la mesure d' une minute , qui formera une sensibilité beaucoup plus grande qu' elle n' est nécessaire ayant plusieurs degrés pour une seconde : il y aura même pour cette mesure le double , c'est-à-dire le cercle entier , parceque quand on aura formé l' attouchement extérieur de deux disques apparents , & qu'

& qu'on les aura séparés , on continuera le mouvement circulaire jusqu'à un nouvel attouchement . Ainsi dans ce cas-là on n' aura besoin ni d'un cercle d'un demi-pied , ni d'un nonius . On aura assez d'un seul cercle d'un diamètre égal à celui du tube de la lunette avec une simple alidade . Le cercle plus grand & le nonius seront très-utiles si l'on emploie des prismes dont l'effet total soit de plusieurs degrés .

47. Dans la fig. 4 je ne fais qu' indiquer seulement ces anneaux , règles , petits tuyaux par des lignes simples . ABCD est le premier anneau qui peut tourner autour du tube de la lunette en portant avec lui le cercle FGHE : IKLM est le second anneau qui peut tourner autour du premier : AN , OC sont les deux règles attachées au premier anneau qui soutiennent en N , O le premier petit tuyau avec le prisme fixe : EP , QG sont les deux règles attachées au second anneau & au second petit tuyau mobile PQ qui porteront en E , & G les deux arcs dont chacun pourra avoir son nonius . Le premier anneau , le cercle , & le premier petit tuyau avec son prisme seront toujours liés entre eux de manière à pouvoir bien tourner ensemble autour du tube de la lunette , mais ils ne pourront avoir aucun mouvement respectif l'un par rapport à l'autre . Quand on aura fixé cet ensemble dans une position quelconque par rapport au tube de la lunette , on pourra faire tourner le second anneau autour du premier & le second petit tuyau avec son prisme mobile & ces arcs portants le nonius : le mouvement de ce second prisme variera l' angle du prisme composé & le nonius marquera dans le cercle extérieur les positions respectives des deux prismes qui donneront la quantité précise de cet angle . Un ouvrier habile en aura assez pour imaginer le mécanisme le plus simple & exécuter cet instrument . On déterminera une fois pour toujours la valeur de ses divisions par des observations terrestres semblables à celles que nous avons indiquées ci-dessus .

48. Par le mouvement d' un prisme sur l' autre on pourra avoir la mesure des angles les plus grands , si l'on trouve des matières capables de leur donner un acromatisme assez grand qui les

les empêche de déformer & rendre confus les objets. On peut employer à côté de l'objectif deux prismes qui puissent donner chacun un angle d'un ou de deux degrés : la demi-révolution d'un sur l'autre donnera à l'aide du nonius de la fig. 4 la mesure de 2 ou 4 degrés, qui sera bien sensible même pour avoir les secondes. On pourra ajouter au delà de ces deux une seconde machine fixée sur la première, qui les porte avec deux prismes qui auront l'effet total chacun de 25 degrés : on aura par les différentes positions du second sur le premier fixées immobilement à l'aide des trous ou du ressort la mesure exacte des angles depuis zero jusqu'à 50, qui auront des différences entre eux, moindres que de deux ou de quatre degrés : une troisième machine ajoutée avec deux autres prismes semblables donnera aussi une autre mesure depuis zero jusqu'à 50 : à l'aide des deux binaires ensemble on ira depuis zero jusqu'à 100. La vérification des différentes positions donnera certains nombres de degrés, minutes & secondes justes : les prismes de la première machine acheveront l'affaire, donnant le reste avec une très-grande précision.

49. Pourtant si l'on veut une précision plus grande, on peut faire que les deux prismes, qui ont le mouvement corrélatif au nonius, donnent seulement un degré ou un demi-degré : un second binaire de prismes par des positions rendues aussi immobiles après les changements peut donner des angles depuis zero jusqu'à 10 avec des différences moindres que d'un degré ou d'un demi-degré : un troisième binaire peut en donner depuis zero jusqu'à 80 à des intervalles moindres que de 10 degrés. On auroit alors un effet semblable à celui des montres, qui ont trois index, le premier pour les heures, le second pour les minutes, & le troisième pour les secondes.

50. Mais il faudra prendre des précautions pour bien placer ces prismes. La meilleure disposition est celle, dans laquelle le rayon traverse chaque binaire de manière qu'il soit incliné à-peu-près également à sa première, & dernière surface : il est vrai qu'alors on a le minimum de réfraction de chaque binaire : mais

un

un changement bien considérable d'inclinaison vers ce minimum ne donne aucun changement sensible dans la quantité de réfraction , ce qui est un grand avantage pour conserver dans tous les cas & dans tous les points du champ de la lunette le même effet trouvé dans la vérification pour chaque position respective des prismes de chaque binaire.. Comme à la fin l'axe des pinceaux des rayons , qui font la réunion des images des deux objets , doit aller le long du tube dans une direction peu éloignée de celle de l'axe de la lunette ; sachant l'effet total de chaque binaire dans son minimum , il est aisé de déterminer la position nécessaire pour avoir cette égalité d'inclinaison à l'entrée & à la sortie , & on peut bien imaginer un mécanisme qui pour chaque position respective des deux prismes donnera la position du total qui convient à l'effet proposé.

51. En employant plusieurs binaires à la fois il faut avoir égard aussi à la direction dans laquelle un binaire reste par rapport à l'autre : cette position variée change l'effet des deux réunis . On peut déterminer par la solution du problème , que nous donnerons ci-après , la direction dans laquelle restera l'angle que sa première surface fait avec la troisième , pour en tenir compte , où pour trouver un mécanisme qui donnera à tous ces angles de tous les binaires la même direction , dans le quel cas la quantité de la réfraction totale , c'est-à-dire l'angle que la direction de l'axe des pinceaux lumineux antérieure à toute réfraction fait avec la dernière dans le tube prolongé en dehors , est la somme des réfractions particulières de chaque binaire . Mais on peut se passer de toutes ces considérations & attentions particulières par une bonne vérification faite une fois pour toutes les combinaisons . Ce travail est bien long , mais on en sera bien dédommagé par la très-grande utilité d'un instrument de cette espèce une fois bien vérifié .

52. Si parmi les substances que nous connaissons on en trouve des capables à donner à un assemblage de prismes un acromatisme réuni avec la réfraction totale de 90 , ou de 80 degrés capable de laisser à l'image une bonne distinction ; on pourra bien s'en

servir pour déterminer la hauteur du soleil sur l'horizon, & une assez grande distance de la lune au soleil & aux étoiles, ce qui formera un excellent mégamètre pour avoir la latitude, & la longitude sur mer. Il n'y aura rien à craindre du côté de la multiplication des prismes, & des tuyaux & règles nécessaires pour les soutenir, à l'égard de l'affoiblissement de la lumière de la seconde image détournée. Pour la hauteur du soleil on dirigera la lunette à l'horizon, & on en aura la première image claire: la seule seconde du soleil sera affoiblie, ce qui plutôt est un avantage, parceque il faut déjà l'affoiblir par des verres enfumés, & on aura le même avantage, en réunissant la première image de la lune avec la seconde du soleil. Quand on devra prendre la distance de la lune à une étoile, on regardera celle-ci directement, & l'affoiblissement tombera seulement sur l'image de la lune qui pendant la nuit a trop de lumière, & il y a de l'avantage à l'affoiblir dans son image, quand on l'approche à celle d'une étoile fixe.

53. Si l'on n'a encore des substances de cette espèce, on pourra bien en avoir avec le tems à l'aide de la Chymie, qui donnera peut-être des procédés sûrs pour obtenir des substances transparentes, pures, & uniformes dans tout l'intérieur des plaques, & d'un effet toujours constant pour ce qui appartient au degré précis de qualité réfractive & dispersive, tandis qu'à présent on n'a des bonnes plaques que par hazard, & avec de la variété dans la quantité de leur force. Alors on tirera de cette méthode tous les avantages en construisant des mégamètres capables de mesurer des angles de toute grandeur. Leur usage pour la marine seroit encore plus commode que celui de l'octant de réflexion, parcequ'il s'agiroit de diriger à l'horizon ou à une étoile fixe une lunette entourée dans son extremité d'une bande circulaire d'un petit rayon, & donner un mouvement à un alidade de la même longueur, qui changeroit la position d'un seul des prismes, & par le nonius donneroit la mesure des angles. Dans les octants on ne peut employer que de très-petites lunettes, qui ne peuvent avoir un grossissement nécessaire pour rendre

dre sensible un petit nombre des secondes , tandis que dans cet instrument on pourroit employer une lunette acromatique de 2 pieds , qui peut se tenir à la main très-aisément , & être dirigée à l'horizon , quand il s'agira de déterminer la hauteur du soleil , pour les latitudes , à une étoile fixe pour avoir les longitudes par sa distance à cette étoile , même sur un vaisseau .

54. En attendant je suis bien persuadé , que par des prismes de cet acromatisme , que nous pouvons obtenir du flint réuni au verre commun , on peut obtenir d'assez bons mégamètres pour la mesure au moins de 20 degrés , & c'est à l'expérience à faire voir jusqu'où l'on peut pousser leurs forces sans avoir une confusion nuisible d'image & de couleurs trop sensibles . L'usage des prismes de verre , qui couvrent une seule partie de l'objectif , outre l'avantage d'employer une matière moins coûteuse , incomparablement plus facile à trouver assez pure , & plus aisée à travailler que le cristal de roche , a cet autre de pouvoir servir à la mesure d'angles beaucoup plus grands formant non seulement des micromètres , mais aussi des mégamètres . Le cristal de roche ne peut donner que la mesure des angles qui n'excèdent pas la différence de ces deux réfractions , qui est de peu de minutes . M. l'abbé Rochon n'ayant pu obtenir la mesure des diamètres apparents du soleil & de la lune par le moyen du cristal de roche , a proposé depuis l'usage du cristal d'Islande , qui forme aussi deux réfractions avec une plus grande distance angulaire de deux rayons refractés , mais celui-là est incomparablement encore plus rare & très-rarement assez pur , & d'ailleurs ne peut pas donner de grands angles , sa différence de réfraction aussi n'allant pas bien loin .

55. Du reste la théorie du prisme de cristal de roche glissé dans l'intérieur du tube le long de son axe est tout-à-fait semblable à celle du verre simple de la fig. 1 . Si l'on emploie un prisme simple de cette substance , le rayon M'N' par la double réfraction se divisera en deux N'K' , N'K" , & il y formera deux images du même point L placé dans l'axe de la lunette : chacune des deux sera réunie avec une image d'un autre point . Quand le

prisme sera à côté de l'objectif, la distance optique des deux points qui ont les images réunies, sera sensiblement égale à l'angle  $K'N'K''$ , qui est la différence des deux réfractions : mais quand le prisme s'approchera du lieu de l'image en GHI, la distance  $KK'$ , qui sera toujours proportionnelle à la distance optique des deux images d'un même point égale à la distance optique des deux qui ont les images réunies, ira en diminuant sensiblement en raison de la distance  $N'H$  à cause de la grandeur constante de l'angle  $K'N'K''$ . Si l'on rend acromatique ce prisme par l'union d'un autre de verre simple, ce second prisme donnera une réfraction sensiblement égale aux deux parties du rayon séparées par le premier, en conservant ainsi la même divergence qu'ils avoient, & le même effet pour la distance apparente des deux images du même point, & pour celle des deux points qui ont les images réunies. C'est la figure, sur laquelle j'ai fait voir à M. l'abbé Fontana le grand effet que le mouvement rétiligne devoit avoir pour la sensibilité de cette espèce de micromètre.

56. Le seul avantage que le prisme de cristal de roche ou d'Islande a sur le verre simple employé de la manière que j'ai proposée, est que le premier couvrant toute l'ouverture de l'objectif peut aller par toute la longueur du tube sans avoir aucun changement dans la proportion de la quantité de lumière des deux images, tandis qu'à cause de la figure conique du pinceau des rayons appartenants à un point de l'objet on ne peut pas trop éloigner de l'objectif l'autre de verre commun : mais cet avantage est bien compensé par la réduction aisée de l'angle à être très-peu plus grand que celui qui doit donner l'effet total égal à la mesure que l'on veut prendre, ce qui borne la longueur nécessaire de l'ouverture latérale du tube à peu de chose, & donne pour les petits angles une sensibilité beaucoup plus grande, comme j'ai fait voir au num. 41 : de l'autre côté mes prismes appliqués en dehors, qui n'ont pas ce désavantage, peuvent avoir par le cercle & le nonius de la fig. 4 une sensibilité beaucoup plus grande qu'il n'est nécessaire pour la mesure la plus exacte,

ête , tandis qu'ils la donnent assez grande aussi pour celle des grands angles (\*).

57. Pour ce qui appartient à la manière de rendre acromatique un prisme de cristal de roche , il faut bien lui ajouter un prisme de verre : mais ce n'est pas toujours un angle égal , qui fait l'acromatisme . Dans les dissertations que j'ai publiées à Vienne en Autriche j'ai donné des observations faites avec mon vitromètre d'eau en y employant différentes substances , & j'y ai trouvé qu'en parité de réfraction le cristal de roche fait moins de séparation de couleurs qu'aucune autre de ces substances : mais sa qualité distractive est peu différente de celle des verres communs : ainsi quand on emploie le verre commun , l'angle qui réunira deux couleurs sera peu différent de celui du même cristal : mais si l'on y unissoit un prisme de flint , il faudroit faire son angle beaucoup plus petit . Généralement pour avoir l'effet total de la plus grande réunion il faut avoir par des expériences les qualités réfractive & distractive des deux substances que l'on se propose d'employer , soit du cristal de roche & du verre , soit de deux verres selon quelque méthode propre à cela , comme celle que j'ai exposée dans la première de ces cinq dissertations , & que j'ai développée encore mieux dans un Opuscule que je n'ai pas encore imprimé (\*\*), où si l'on n'a pas déterminé ces qualités , il faut employer la méthode que j'ai proposée ici au num. 30 .

58. On pourroit aussi employer un prisme à angle variable pour l'usage de la marine en l'adaptant aux octants de réflexion , pour avoir une détermination beaucoup plus exacte , surtout quand on y ajoute une lunette pour avoir un grossissement & un peu plus de distinction . On peut placer un prisme à angle variable derrière la petite plaque de verre à demi-étamée . On peut faire de

(\*) Il est aisé de s'apercevoir qu'on peut appliquer cette dernière espèce de micromètre , & mégamètre extérieur aussi au bout du tube d'un télescope , ayant égard à ce que l'excès du prisme sur le petit miroir soit à peu-près égal à l'excès de l'ouverture du tube sur le prisme .

(\*\*) C'est le premier du volume précédent à celui-ci .

de manière que l'alidade , qui porte le miroir mobile , puisse à chaque demi-degré être fixée immobilement , & que l'effet total du prisme variable soit d'un demi-degré . Ayant vérifié les angles qui sont donnés par l'alidade dans chacune de ses positions , on aura pour les parties de ce degré-là , qu'il faut ajouter à ce qui est donné par l'alidade , une demi-circonférence entière qui pourra bien donner les secondes , puisqu'un degré y répondra à 10 secondes . Mais cela n'a rien à faire avec la méthode que je me suis proposé de développer dans cet Opuscule de l'usage d'un prisme de verre qui couvre seulement la moitié de l'ouverture de l'objectif .

59. On tirera bien de l'avantage & pour l'un & pour l'autre objet de la solution du problème dont j'ai fait mention au num. 3 . Si l'on veut faire une perte de lumière qui soit la moindre possible , il faut mettre les deux prismes en attouchement , & alors il y aura trois surfaces à considérer , les deux extérieures appartenantes une par prisme , & une intérieure appartenante à tous les deux . Nous les appellerons première , seconde , troisième , selon l'ordre dans lequel elles reçoivent les rayons : ainsi la commune sera la seconde . La première avec la seconde fait le premier des deux angles composants , la seconde avec la troisième le second , & la première avec la troisième fait l'angle composé . L'angle du prisme est celui qu'on a en continuant ses deux surfaces jusqu'à leur intersection mutuelle , & faisant une section du même prisme perpendiculaire à cette intersection : je suppose qu'on sait la grandeur des deux angles composants & leur position , & qu'on cherche la grandeur & la position du troisième .

60. Que (fig. 5.) le cercle A l"<sup>e</sup> BK" soit la base du second prisme , qui est la dernière à recevoir les rayons : nous l'appelons sa seconde surface . Que l'on conçoive une sphère avec le centre C , dont cette base sera un grand cercle . Nous imaginerons cette sphère coupée par deux sections parallèles aux deux autres surfaces , dont une soit celle du milieu commune aux deux prismes , première du second , seconde du premier . Cette section for-

former un second grand cercle  $A'I'BK'$ : la seconde section sera parallèle à la première surface du premier prisme , & formera un troisième grand cercle  $DIEK$ . Nous appellons cette dernière surface , qui est la première à recevoir les rayons , la première de ces trois , & son cercle  $DIEK$  le premier : le second cercle , qui répond à la seconde surface , sera  $A'I'BK'$ , & la base  $A'I''B K''$  sera le troisième . On y aura trois diamètres ,  $GCF$  intersection du plan du premier cercle avec le plan du second ,  $BCA$  intersection du plan du second cercle avec celui du troisième ,  $ECD$  intersection du plan du premier avec celui du troisième . Dans les deux bords de chacun de ces trois diamètres il y aura l'angle sphérique , qui mesure l'inclinaison des deux plans , dont il est l'intersection . Le premier de ces trois binaires répond au premier prisme simple , le second au second , le dernier au prisme composé . Ainsi l'angle sphérique  $AGD = BGE$  sera égal à celui du premier prisme ,  $GBE = GAE$  à celui du second ,  $AEG$  supplément de l'angle  $BEG$  à celui du prisme composé .

61. Il faut considérer le second prisme immobile tandis que le premier tourne autour du centre de la surface intermédiaire  $A'I'BK'$  qui appartient à tous les deux prismes simples . Les cercles  $A'I''B K''$ ,  $A'I'BK'$  ayant les plans toujours parallèles aux surfaces du second prisme immobile resteront sans mouvement avec leur angle  $B$  , qui est égal à celui de ce prisme . Le premier cercle  $DIEF$  toujours parallèle à la première surface du premier prisme aura un mouvement sur la surface de la sphère , & ses intersections avec les deux autres changeront de place : les points  $G$  &  $F$  parcoureront les demi-cercles  $A'I'B$ ,  $A'K'B$ , & les points  $E$ ,  $D$  les demi-cercles  $A'I''B$ ,  $A'K''B$ . L'angle , que le premier demi-cercle fait avec le second en  $G$  , &  $F$  , restera toujours de la même grandeur égal à celui du premier prisme : mais l'inclinaison de son plan à celui du troisième changera avec l'angle en  $E$  &  $D$  . Quand le point  $E$  sera en  $A$  , le point  $G$  y sera aussi , & les points  $D$ ,  $F$  se trouveront en  $B$  : la figure 5 se changera en la fig. 6 , où l'on voit l'union des trois points  $A,G,E$  en haut , & des trois  $B,D,F$  en bas , & quand le point  $E$  se trou-

vera

vera en B , le point G y sera aussi , & les points D , F seront en A : la figure 5 se changera en la fig. 7 , où l'on voit l'union des trois points B , G , E en bas , & des trois A , F , D en haut . Dans le premier cas l'angle du premier cercle avec le troisième , qui est égal à celui du prisme composé , sera (fig. 6) l'angle  $IBI'$  différence des angles  $IBI'$  du premier prisme , &  $IBI''$  du second , & dans le second cas cet angle devient (fig. 7) leur somme  $IBI''$  . Ainsi quand les angles des deux prismes seront égaux , l'angle du prisme composé dans le premier cas s'évanouira , la première surface du premier prisme devenant parallèle à la seconde du second , & dans le second cas il sera double de celui d'un seul des deux composants . Dans toute autre position du premier prisme par rapport au second l'angle AEG du prisme composé sera moindre que la somme des deux des prismes composants , & plus grand que leur différence . On le prouve par la propriété de tout triangle sphérique dont tous les trois angles ensemble font plus que deux droits , & par conséquent l'angle externe , qui avec son interne fait une somme égale à deux angles droits , doit être moindre que les deux internes & opposés . D'après ce principe l'angle AEG externe qui est celui du prisme composé doit être moindre que les deux internes & opposés EGB , EBG qui sont les angles des prismes composants : comme aussi dans le triangle AEG les deux angles internes AEG , EAG ensemble surpassent l'externe AGD , l'angle AEG doit être plus grand que  $AGD - EAG$  , c'est-à-dire que  $BGE - EBG$  , qui en est la différence . Ainsi le maximum de cet angle variable est la somme des deux angles des prismes composants , & le minimum leur différence , & on a ces deux termes extrêmes quand l'intersection des deux surfaces du premier prisme composant devient parallèle à l'intersection des deux de l'autre .

62. On trouvera aisément cet angle pour chaque position donnée du premier prisme par rapport au second . Si le nonius marque zero , quand il y a la position du minimum , le nombre marqué par le même index dans toute autre position donnera l'arc AG du cercle commun : ainsi on aura son supplément BG , qui est

la

la base du triangle BEG. Comme on y a aussi les angles en B & G, on trouvera le troisième BEG supplément du cherché AEG. Ainsi ou aura la grandeur de l'angle du prisme composé: mais aussi on trouvera aisément sa position. Si l'on conçoit l'arc EH perpendiculaire au demi-cercle BGA, sur lequel se fait le mouvement de la seconde surface du premier prisme mobile autour du second immobile, le point H marquera la position du point E, qui est le sommet de l'angle du prisme composé, par rapport à ce cercle, & l'ouverture du même angle répondra à un point du même cercle éloigné du point H de 90 degrés. On trouvera le lieu du point H sur le même cercle très-aisément de la manière suivante. Par les théorèmes élémentaires de la trigonométrie sphérique on a les valeurs suivantes,  $\sin.BH = \frac{\tan.EH}{\tan.EBH}$

&  $\sin.GH = \frac{\tan.EH}{\tan.EGH}$ , d'où l'on tire cette proportion  $\tan.EGH : \tan.EBH :: \sin.BH : \sin.GH$ : par conséquent la somme des tangentes des deux angles donnés B & G est à leur différence comme la somme des sinus des deux segments BH, GH de la base BG, est à leur différence, c'est-à-dire comme la tangente de la moitié de la base BG, qui est la demi-somme de ces segments, à la tangente de leur demi-différence. Les trois premiers termes étant donnés on aura le quatrième, qui fera trouver cette demi-différence: on l'ajoutera à la demi-somme, & on l'en ôtera, pour avoir les deux segments BH, GH. Celui qui est à côté du plus petit des deux angles B, & G sera le plus grand, qui provient de la somme, parceque le segment plus grand répond au plus grand des côtés EB, EG, & le côté plus grand est opposé au plus grand des deux angles.

63. Ayant le segment BH, on aura la direction de l'angle composé, qui est fait par la première, & la troisième surface, & qui répondra à un point de ce cercle éloigné du point H de 90 degrés. On peut trouver aussi l'angle composé, en trouvant les compléments des deux angles BEH, GEH, parceque la somme de ces deux compléments sera égale à l'angle AEG, comme

la somme de ces deux angles l'est à l'angle BEG . Or on trouvera ces deux compléments chacun par son angle , & par le segment qui lui répond dans les triangles BHE , GHE , dans lesquels on a par les formules élémentaires  $\cos. BEH = \cos. BH \times \sin. EBH$  , &  $\cos. GEH = \cos. GH \times \sin. EGH$  .

64. Si les deux angles des deux prismes composants sont égaux , le triangle BEG sera isoscèle , & les segments BH , GH égaux , l'intersection de la première surface avec le troisième restera au milieu de l'arc BG , & l'angle même répondra au milieu de l'arc AG . On aura alors le sinus de la moitié de l'angle composé , en multipliant le cosinus de la moitié de la base BG , c'est-à-dire le sinus de la moitié de AG , par le sinus d'un des deux angles égaux des deux prismes . Si les angles sont inégaux , mais petits , au lieu de la somme & différence des tangentes des deux angles B , & G des deux prismes , on pourra employer dans la proportion du num. 62 la somme & la différence des angles mêmes réduits en minutes & leurs dixièmes , parceque les petits angles sont sensiblement proportionnels à leur sinus , & tangentes .

65. On voit bien que l'angle composé n'aura pas un changement proportionnel au mouvement circulaire du premier prisme mobile sur le second fixe . Dans le cas de l'égalité des deux angles composants , qui est le plus simple , quand on aura amené les deux prismes à la position dans laquelle le point G va en A , l'angle composé sera = 0 : en tournant le premier prisme , cet angle s'augmentera de manière que le sinus de sa moitié soit toujours proportionnel au sinus de la moitié du mouvement donné jusqu'à ce qu'après une demi-révolution il devienne égal au double de l'angle d'un des deux prismes : quand les deux angles seront petits , l'angle composé lui-même sera comme le sinus de la moitié de ce mouvement circulaire . Au commencement l'augmentation sera sensiblement proportionnelle au même mouvement , le sinus de sa moitié étant sensiblement proportionnel à cette moitié ; & pour cela au total aussi . En allant en avant , l'augmentation de cet angle en parité de mouvement sera continuellement plus petite , & très-petite vers la fin de la demi-révolution , où

le

le changement du sinus de sa moitié ne change qu'insensiblement. Ainsi la sensibilité du micromètre sera très-grande, quand on sera près de la position, qui donne l'angle composé le plus grand possible, c'est-à-dire égal à la somme.

66. Si l'on veut tirer de cette théorie la quantité de l'effet du prisme à angle variable corrélativement au mouvement circulaire , il faudra avoir bien exacte la mesure des deux angles composants & leur position sur le cercle commun dans chaque prisme , de laquelle dépend la position , qui donne l'angle composé = zero : d'après la grandeur de ces deux angles il faut calculer une table , qui donnera la grandeur précise de l'angle composé corrélativement au mouvement circulaire de 10 en 10 degrés ou encore de 5 en 5 . Il faudra aussi avoir la qualité réfractive du verre , pour tirer la quantité de l'effet pour chaque angle .

67. Pour la position de l'angle dans un prisme réduit à avoir une base circulaire , on pourra la trouver de la manière suivante . On posera la surface qui est inclinée à la circulaire sur un plan , & on glissera le long de la circulaire un autre plan terminé par une ligne droite , qui à la fin s'adaptera sur le premier plan . On marquera sa position sur ce plan , & ayant ôté le second plan on tirera par le centre de la base circulaire une ligne droite perpendiculaire à cette ligne marquée : sa rencontre avec la circonférence marquera la position de l'angle du prisme éloigné de 90 degrés de la position de l'intersection GF ou AB que nous avons employée dans la fig. 5 . Pour la quantité de l'angle on ne pourra jamais l'avoir qu'à quelques minutes près , & il sera très-difficile de la trouver , quand il est très-petit , surtout le verre ayant de l'épaisseur nécessaire pour une suffisante solidité . Quand il sera un peu-plus grand , on pourra faire entrer le prisme dans le sens du diamètre , qui marque la direction de l'angle , entre les deux règles qui forment le compas de proportion & l'approcher de l'union de ces règles ou l'en éloigner jusqu'à ce que les deux surfaces en soient touchées exactement dans toute la longueur de ce diamètre , ce qui pourra se faire , si

**Y y 2** dans

dans le lieu de la position trouvée de l'angle il y a quelque épaisseur médiocre du verre : en ôtant le prisme , & en retenant l'ouverture du compas , on pourra en déterminer l' angle un peu plus exactement à cause de la longueur de ces mêmes règles . Mais il n'y aura jamais par ce moyen une exactitude suffisante à l'usage du micromètre .

68. Ainsi le meilleur parti sera celui de déterminer l' effet du prisme composé dans des positions différentes par la mesure terrestre , que nous avons proposé ci-dessus . Si l'on rencontre deux positions avec la même quantité de leur effet , on connoîtra les deux positions diamétralement opposées , qui doivent donner le maximum & le minimum , qui seront au milieu de ces deux d'un côté & de l' autre , & on saura quel est le minimum par une troisième intermédiaire : si celle-ci fait un effet moindre que les deux autres , le minimum tombe dans le même arc avec elle : si son effet est plus grand , le minimum tombera dans l'arc opposé . Si tous les trois effets sont inégaux , le point de la position du plus petit de tous tombera sur un des deux arcs du cercle entier terminé par les points des deux autres positions , & le minimum tombera sur le même de ces deux arcs avec lui .

69. Si les plus grands effets des deux prismes sont égaux , ce minimum sera = zero , & si leurs angles sont petits de manière à être sensiblement proportionnels à leurs sinus & à leurs effets , on pourra abréger le travail de la vérification & à l'aide de deux seuls effets par la théorie que nous avons développée former une table pour l'effet de toutes les autres positions , ce qui pourra être bien utile pour avoir les effets du prisme variable , qui marque dans le cercle divisé ses différentes positions par l' index ou l'alidade . Soient G , G' (fig. 4) deux points marqués dans le cercle pour les deux positions , R le point qui doit être marqué dans le minimum : on saura de la manière que nous avons dit par un troisième effet , si ce point tombe sur le plus grand ou sur le plus petit des deux arcs terminés par les points G , G' . Si les deux effets en G , G' ne sont pas égaux , on trouvera le point R de la manière suivante .

70. Que

70. Que l'on conçoive les arcs  $RG$ ,  $RG'$  coupés par le milieu en  $S$ ,  $S'$ : les sinus des arcs  $RS$ ,  $RS'$  seront comme les deux effets, & par-là on aura cette proportion, comme la somme de ces deux effets est à la différence, ainsi la tangente de la demi-somme des deux arcs  $SR$ ,  $S'R$  est à leur demi-différence, c'est-à-dire la tangente de leur demi-somme à la tangente de leur demi-différence. Or si le point  $R$  tombe hors de l'arc  $GG'$ , c'est-à-dire du plus petit des deux terminés par les points  $G$ ,  $G'$ , comme on le voit dans la figure, il tombera aussi hors de l'arc  $SS'$  qui sera la différence des deux arcs  $SR$ ,  $S'R$ , autrement il en sera la somme: sa moitié, qui est le quart de l'arc  $GG'$  connu, sera toujours un des deux derniers termes de cette proportion, dans laquelle connaissant les deux premiers, qui sont la somme & la différence des deux effets, on connaîtra l'autre des mêmes derniers. Ainsi on aura & la demi-somme & la demi-différence des deux arcs  $SR$ ,  $S'R$ . La somme de ces deux donnera le plus grand, la différence le plus petit, & le plus grand sera celui qui appartient à l'effet plus grand, ce qui déterminera le point  $R$  du minimum sur le cercle. Alors pour toute autre position on dira comme le sinus de la moitié de l'arc  $GR$  est au sinus de la moitié de la distance de cette position au point  $R$ , ainsi l'effet connu de la position  $G$  est à l'effet cherché de cette position.

71. Ayant calculé de cette manière l'effet de deux ou trois autres positions, on verra si l'effet trouvé par le calcul est d'accord avec celui qu'on aura trouvé par la vérification terrestre, ce qui doit arriver, si les surfaces de deux prismes sont assez bien planes. Alors on pourra compter sur le résultat du calcul pour les autres positions. Mais comme une fois que l'on aura arrangé ce qu'il faut pour déterminer l'effet de deux positions, il sera bien aisné de le déterminer pour toutes les autres; on fera mieux de déterminer par la même méthode l'effet d'un grand nombre d'autres pour en tirer par interpolation la table entière destinée pour l'usage.

72. On peut considérer aussi la marche du rayon qui passe par plusieurs prismes placés avec des positions différentes inclinées

nées les uns sur les autres d'une manière quelconque , où il y a une quantité de cas , & une théorie très-compliquée , pour déterminer l' angle que sa dernière direction contient avec la première , & la position du plan qui passe par ces deux directions : mais le meilleur parti est celui de bien déterminer par un très-grand nombre d' observations terrestres les effets d'un très-grand nombre de différentes combinaisons , pour en former des tables , & trouver par l' interpolation les effets de toutes les positions que l'on pourroit employer . On mesurera une base assez longue , & on placera à une de ses extrémités une ligne verticale marquée sur une planche . On en placera successivement une autre dans la direction perpendiculaire à la même base partie de la même extrémité , à des distances bien mesurées : la base sera le rayon & celles-ci seront des tangentes des angles formés par les lignes droites , qui de l'autre extrémité de la base iront à ces deux lignes verticales . On placera son instrument au commencement de la base de manière , que son bout réponde au premier point de la même base : on faira réunir par le mouvement du prisme mobile la seconde image de la seconde verticale avec la première de la première en marquant ce que le nonius aura déterminé sur la circonference du cercle extérieur pour chaque observation . On aura alors un bon nombre de divisions de ce cercle avec les angles correspondants . De-là par interpolation on tirera ceux-ci corrélatifs à des divisions prises à des intervalles égaux qu'on rédigera en ordre de tables régulières . Si tous les prismes sont placés de manière que les intersections des deux surfaces réfringentes de chaque prisme soient parallèles entre elles & tournées perpendiculairement à la première direction du rayon , toute la route que ce rayon aura dans les prismes , & entre eux avec la première & dernière direction , tout cela restera toujours dans un même plan perpendiculaire à ces intersections , & l'angle de la première direction avec la dernière sera la somme de tous les effets particuliers de tous les prismes , quand on aura tourné tous les angles du même côté , ce qu'il faudra tâcher de faire , quand on veut employer plusieurs prismes détachés entre eux .

OPU-



## OPUSCULUM V.

**DE TELESCOPIO EXHIBENTE SIMUL BINAS IMAGINES EJUSDEM  
OBJECTI, ALTERAM DIRECTAM, ALTERAM INVERSAM, CUM  
EARUM MOTIBUS CONTRARIIS, ET ÄQUALIBUS.**

**I.**  **R**OPOSITUM mihi fuerat Parisiis consilium de quærenda constructione telescopii dioptrici, quod exhiberet binas imagines ejusdem objecti, alteram directam, alteram inversam, ac si id objectum esset mobile, præberet duplēcē earum motum æqualem, & contrarium: aliquanto post accepi, id ipsum elaboratum fuisse, & exhibitum Regiæ Scientiarum Academiæ tanquam instrumentum admodum utile Astronomiæ. Ipsum ego quidem nequaquam vidi, nec aliud de ejus constructione accepi, nisi ipsum constare pluribus objectivis vitris, quorum aliquid esset perforatum. Præcipua autem ejus utilitas in eo sita esse dicebatur, quod per ejusmodi binos motus contrarios, & æquales posset observari transitus ejusdem astri per meridianum sine ullo usu filorum micrometri, & cum velocitate respectiva accessus mutui duplo majore.

2. Perquisitionem de eo argumento instituendam mihi esse censi, cum potissimum litteris ex Italia ad me datis ea de re interrogarer: eā autem institutā, facile perspexi, obtineri quidem posse duplēcē ejusmodi imaginem cum eo dupli contrario motu per conjunctionem duplicis telescopii, quorum alterum exhibeat imaginem directam per duo objectiva, & unicam ocularem, alterum inversam per unicum objectivum perforatum, per cuius foramen transeant radii alterius, & ad unicam deferantur ocularem communem utrique: sed simul animadverti, debere omnino ejusmodi telescopium esse admodum imperfectum, nec ullam ex eo utilitatem percipi posse pro astronomicis usibus, quæ multo melius per communia telescopia haberi non possit.

3. Con-

3. Conscripti ea de re Gallico sermone Opusculum, & celeberrimo Astronomorum Principi La-Landio mihi amicissimo exhibui, ne sumptus, qui ad id uberioris perficiendum destinati dicebantur, frustra, ut ego quidem censebam, consumerentur. Id ipsum h<sup>c</sup> exhibeo ita, ut tum conscriptum fuit, paucissimis mutatiunculis perpolitum nonnullis in locis. Videor autem mihi satius dilucide demonstrare, æqualitatem magnitudinis, claritatis, distinctionis binarum contrariarum imaginum obtineri non posse, nisi per instrumentum admodum imperfætum, quod multo majore tubi longitudine multo minorem effectum edat cum augmento admodum exiguo: multo minorem obtineri posse celeritatem respectivam mutui accessus binarum imaginum per ejusmodi telescopium, quam accessum unicæ imaginis exhibitæ a telescopio communis longitudinis ejusdem ad filum micrometri ob multo majus augmentum ab ipso exhibitum: nec vero sine ope unius fili, vel etiam duplicitis, obtineri posse occursum mutuum directum earundem imaginum, quod omnem illam impedit instrumenti utilitatem propositam.

4. An ibi ego scopum attigerim, videbit facile, qui Opusculum ipsum diligentius perpenderit: plura saltem inveniet, quæ ad telescopiorum dioptricorum naturam, atque indolem intimius percipiendam conducant, quæ muneri mihi imposito cum titulo Directoris Opticæ respondeant, ac pertineant ad argumenta, quæ in hisce prioribus binis hujus collectionis voluminibus pertractanda suscepit.

### MÉMIRE

*Sur une lunette qui donne deux images du même objet l'une directe, l'autre inverse, avec deux mouvements contraires des objets mobiles.*

1. Il y a deux ans, que M. Jeaurrat a proposé à M. Navarre l'idée de chercher le moyen de faire une lunette capable de remplir ce double objet. Celui-ci m'en parla un jour; mais persuadé qu'une lunette seule ne pourroit pas bien satisfaire au pro-

problème , & ne croyant pas ce double effet d'aucune utilité réelle pour l'Astronomie , je n'y avois plus songé . M. Navarre en a exécuté une depuis : on l'a annoncé à l'Académie , on l'a fait voir à plusieurs personnes , & on en a imprimé la découverte dans le Journal de l'Physique ; mais sans aucun détail sur sa construction , ni aucune indication de sa théorie . Je ne l'ai pas vu : mais on m'a dit qu'il y avoit plusieurs objectifs placés à des distances différentes , dont un percé . Ayant reçu une lettre d'un Opticien d'Italie qui par des combinaisons différentes n'avoit rien obtenu , & il m'en demandoit la construction , j'en ai fait la recherche : je me suis aperçu que ce ne devoit être une lunette simple , mais deux lunettes l'une fourrée dans l'autre avec le passage des rayons de la première à travers le trou de l'objectif de la seconde , & avec un seul oculaire pour tous les deux , mais qu'un pareil instrument devoit avoir un effet incomparablement inférieur à celui d'une lunette ordinaire de la même longueur .

2. On sait bien qu'on peut faire une lunette à trois verres convexes , qui donne une image directe de l'objet , tandis que la lunette astronomique formée de deux la donne inverse . On peut former la première avec deux objectifs & un oculaire , & on forme la seconde avec un seul objectif & un oculaire . Pour rendre cet oculaire commun il faut faire former les deux images dans un même plan perpendiculaire à l'axe , & pour laisser la liberté au passage des rayons de la première il faut percer l'objectif de la seconde , qui sera réduit à un anneau . Mais cette réduction rend cette seconde bien défectueuse en exigeant le cercle extérieur de cet anneau beaucoup plus grand que dans les objectifs entiers des lunettes ordinaires , tandis que l'erreur de réfrangibilité qui est le plus essentiel s'augmente en raison de son diamètre . L'autre espèce de lunette n'est pas en usage , parce qu'elle ne peut faire qu'un effet bien inférieur à celui des lunettes ordinaires à un objectif , & trois oculaires pour l'image directe , & celle d'un objectif avec un seul oculaire pour l'inverse . La position nécessaire pour la réunion des images dans le mê-

me plan la rend mauvaise d'avantage en exigeant un éloignement de son image trop grand par rapport aux petits rayons de sphéricité dont il faut se contenter , comm' on verra dans la théorie que je m'en vais développer dans ce Mémoire .

3. Voici les conditions qu' il faudroit remplir pour avoir un bon effet dans la double image de cette double lunette : 1°. que le grossissement de toutes les deux lunettes soit le même , pour avoir l'égalité des images : 2°. que les deux images formées par toutes les deux se trouvent dans le même lieu , qui doit être celui du foyer de l'oculaire commun , pour avoir la distinction de l'image : 3°. que la quantité des rayons appartenants à un même point d' objet qui arrive aux deux images soit la même , pour y avoir la même clarté : 4°. que l'aberration de réfrangibilité y soit égale , pour avoir l'égalité de distinction .

4. Voici l'analyse corrélative à ces points , qui donnera la construction de l' instrument & fera voir l' origine inévitable de sa faiblesse . Dans la fig. 1 (Tab. IX) A, B, C, D sont les centres de trois objectifs & de l' oculaire placés dans le même axe EH : je le représente par des lignes droites , en négligeant l'épaisseur , comme aussi j'y néglige l'erreur de sphéricité qui est petit par rapport à celui de la différence de réfrangibilité , & je considère d' abord une seule espèce de rayons . Les diamètres de leurs ouvertures sont  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$  , mais le troisième objectif a un trou , dont le diamètre est  $ee'$  : ainsi la lumière n' y passe que par l'anneau  $ce$  ,  $c'e'$  , tandis que les rayons du système des deux premiers objectifs passent par le trou  $ee'$  : F est le foyer de l'anneau du troisième objectif  $cc'$  , & du système des deux premiers A , & B , qui doit être aussi le foyer de l'oculaire  $dd'$  , condition nécessaire pour en faire sortir parallèles entr'eux les rayons partis d' un point d' objet éloigné & rassemblés par chaque lunette dans son foyer .

5. On voit bien que le troisième objectif  $cc'$  devra rassembler les rayons  $mc$  ,  $pe$  , appartenants à un point de l'axe EH bien éloigné , dans son foyer F , & l'oculaire les ayant reçus en  $n'$  ,  $n''$  , les fera sortir par les directions  $n'h'$  ,  $n''h''$  parallèles à l' axe DH . Les

ra-

rayons  $m'a'$  partis du même point doivent être rassemblés par le premier objectif dans son foyer R, & arrivant au second en b ils devront être détournés vers le même point F. Pour cela si BL est la distance focale de cet objectif, il faut que BR en soit plus grande. Et cela dans un rapport qui donnera une des déterminations du problème.

6. Les rayons IC, qui étant partis d'un point d'objet placé hors de l'axe arriveroient au centre C du troisième objectif sans l'interposition des deux précédents, devroient passer sans réfraction jusqu'au point d de l'oculaire qui les renvoyeroit au point G de l'axe, foyer de cette lentille pour les rayons divergents du point C, comme dans les lunettes ordinaires, & l'œil pour les recevoir devroit être placé en G : tous les autres rayons qui étant partis du même point d'objet arriveront à l'anneau formé par cet objectif percé en seront détournés vers un point f de la ligne Cd placé vis-à-vis le point F, qui sera le lieu de ce point d'objet dans son image inverse, en continuant leur route jusqu'à l'oculaire ils en sortiront par des directions parallèles à dG.

7. Les rayons I'A partis du même point de l'objet après avoir passé sans réfraction par le centre A du premier objectif jusqu'à un point o du second devront aller à un point d' de l'oculaire opposé au point d, & également éloigné du point D, pour en être envoyés au même point G de l'axe, & entrer dans l'œil, ce qui exige leur passage par C. Les autres rayons partis du même point de l'objet & arrivés au premier objectif auront une première union en un point r de la ligne Ao placé vis-à-vis le point R, & la seconde en un point f' de la ligne od', qui répondra dans l'image directe au même point de l'objet, & sortiront de l'oculaire par des directions parallèles à la ligne d'G.

8. L'œil G verra le même point de l'objet par les deux directions opposées GdK, Gd'K'. Ces deux lieux dans les deux images en f, & f' seront diamétrallement opposés, & l'égalité des images & des mouvements opposés exige l'égalité des angles DGK, DGK', qui rapportés aux angles visuels primitifs ECI,

EAI' égaux déterminent les deux grossissements : cette égalité exige celle des distances  $Dd$ ,  $Dd'$ , &  $Ff$ ,  $Ff'$ .

9. Comme les angles  $BAo$ ,  $BCo$  sont égaux aux angles  $DCd$ ,  $DCd'$  qui sont égaux entr'eux, ceux-là le seront aussi, & la ligne  $FA$  sera égale à la ligne  $BC$  : pour avoir cette égalité il faut par les principes élémentaires de la Dioptrique, que nous démontrerons au num. 17, que chacune soit double de la distance focale de la lentille B : ainsi on a le théorème suivant : *la distance totale du premier objectif au foyer commun est égale à la distance focale du troisième objectif augmentée du quadruple de celle du second*. Si l'on appelle  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  les distances focales des lentilles A, B, C, D, on aura pour la première des quatre conditions du num. 3  $AB = BC = 2b$ , &  $AC = 4b$ ,  $BF = c + 2b$ ,  $AF = c + 4b$ .

10. Pour la longueur totale de la lunette depuis le premier objectif jusqu'à l'œil il faut ajouter comme dans les lunettes communes le double de  $FG$ , qui est à peu-près le double de la distance focale de l'oculaire.

11. On a par les mêmes principes élémentaires la proportion suivante pour les rayons divergents d'un point R, & réunis au point F par une lentille qui a en L son foyer antérieur :  $RL : RB :: LB : BF$  : ici on a  $AR = a$ ,  $AL = LB = b$ ,  $AB = BC = 2b$ ,  $CF = c$ , & par conséquent  $RL = b - a$ ,  $RB = 2b - a$ ,  $LB = b$ ,  $BF = 2b + c$ , ce qui en multipliant les termes extrêmes & les moyens donne  $2b^2 + bc - 2ab - ac = 2b^2 - ab$  : cela se réduit à l'équation suivante donnée par la seconde des mêmes conditions  $bc - ab - ac = 0$ .

12. Ces trois valeurs sont liées ensemble de manière qu'en ayant choisi deux à volonté, on trouve la troisième. Si l'on prend les deux dernières  $b$  &  $c$ , on aura  $ab + ac = bc$  &  $a = \frac{bc}{b+c}$ .  
Ainsi on trouvera la première en divisant le produit des deux dernières par leur somme.

13. Si l'on prend aussi comme donnée la distance du premier objectif au foyer commun qui avec l'oculaire détermine la longueur

gueur de la lunette, & qu'on l'appelle  $f$ , on aura encore  $4b + c = f$ , ce qui laissera le choix arbitraire d'une seule, tandis que pour avoir l'effet des deux images contraires & égales on peut en choisir deux à volonté, & ayant déterminé la troisième en tirer aussi la longueur de la lunette.

14. La troisième condition de l'égalité de la lumière exige que la surface découverte de l'anneau  $ce$  soit égale à celle du premier objectif  $aa'$ , & que l'ouverture du second  $bb'$  soit assez grande pour recevoir tous les rayons passés par le premier. Les surfaces des cercles sont comme les quarrés des diamètres : ainsi on aura pour le premier objet  $cc'^2 - ee'^2 = aa'^2$ , &  $cc'^2 = ee'^2 + aa'^2$ , ce qui donne ce théorème : *le quarré du diamètre du cercle extérieur de l'anneau doit être égal à la somme des quarrés du diamètre de l'intérieur, & de celui de l'ouverture du premier objectif.* Pour le second objet on aura la proportion suivante (\*)  $aa' = 2Aa : bb' = 2Bb :: AR = a : RB = 2b - a$ , ce qui donne ce théorème : *le diamètre de l'ouverture du premier objectif doit être à celui du second, comme la distance focale du premier objectif est à l'excès du double de celle du second sur la même distance focale du premier.*

15. On perdra une partie de lumière transmise par le premier objectif par l'interposition du second, mais il y aura une espèce de compensation par une perte qu'on aura aussi dans l'anneau à cause d'une barre, qui devra soutenir le système des deux premiers objectifs enfermés dans un tube fixé sur un autre, qui contiendra l'anneau & l'oculaire, comme dans les télescopes il y a une barre, qui soutient le petit miroir. On pourra faire l'ouverture du second objectif un peu plus grande pour lui faire parvenir une plus grande quantité des rayons appartenants aux points de l'objet du bord du champ passés par le premier objectif. Les extrêmes de ces rayons passés par  $a'$ , &  $r$  rencontraient

(\*) Les lettres  $a$ , &  $b$  dans les deux premiers termes de la proportion appartiennent à la figure, & dans les deux derniers sont les valeurs algébriques des deux premiers rayons de sphéricité.

roient la ligne  $bb'$  en un point , dont la distance au point  $b$  se-  
roit l'augmentation du demi-diamètre  $Bb$  : cette augmentation se-  
roit à la distance  $Rr$ , comme  $AR$  à  $AB$ . Quand le champ sera  
de deux degrés , l'angle  $EAI = RAr$  sera  $= 1^\circ$  qui a pour tan-  
gente  $0,017$  : ainsi la distan... <sup>ce</sup> aura 17 millièmes de  $AR$  , &  
par conséquent l'addition seroit la même fraction de  $AB$  . Par-  
ceque si l'on conçoit une ligne droite tirée du point  $a'$  par  $r$  jusqu'  
à sa rencontre avec la ligne  $b'b$  prolongée ; la distance de cette  
rencontre au point  $b$  sera à la droite  $rR$  comme  $a'b$  est à  $a'r$  ,  
ou comme  $AB$  à  $AR$  . Cette addition sur chaque pied de la di-  
stance focale du second objectif porte 5 lignes : mais une pareil-  
le addition obligeroit à faire le trou trop grand , & si l'on se  
bornoit à la seule ouverture  $bb'$  , il n'y auroit d'autre inconve-  
nient que celui d'une lumière moins vive vers l'extrémité du  
champ qui est la situation la moins intéressante à plusieurs au-  
tres titres .

16. La quatrième condition du num. 3 souffre beaucoup plus  
de difficulté : pour cette recherche j'employerai la formule sui-  
vante de Dioptrique assez connue , qui est aussi le fondement de  
deux théorèmes que j' ai supposé au num. 9 & 11 . Si l'on ap-  
pelle  $a$  &  $-b$  les rayons de sphéricité d'une lentille convexe des  
deux côtés ,  $m$  la raison du sinus d' incidence à celui de l' an-  
gle réfracté ,  $p$  la distance de la lentille au point lumineux qui  
sera infinie , quand les rayons arrivent parallèles à l' axe ,  $r$  sa  
distance au point de leur convergence après la sortie ,  $h$  la di-  
stance focale , qui est la valeur  $r$  du cas de rayons parallèles ;  
en faisant  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$  , on aura  $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{p}$  (\*):  
quand

(\*) Cette formule est la même que celle que nous avons trouvé de deux ma-  
nières différentes dans le second Opuscule du Tome I , & premier de ce To-  
me-ci , & que nous avons employée toujours dans les autres Opuscules , avec  
la seule différence , que dans la dénomination pour appliquer plus immédia-  
tement la formule au cas présent on a fait ici  $+b$  &  $-p$  ce que là avoit  
été  $-b$  &  $+p$  à cause de la convexité de la seconde surface & de la diver-  
gence des rayons .

quand les rayons arrivent parallèles,  $p$  est infini, &  $\frac{1}{p} = 0$ ; on aura alors  $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f}$ , & ce sera la valeur de  $\frac{1}{h}$  d'où l'on tire  $f = (m-1)h$ , &  $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} - \frac{1}{p}$ .

17. Quand  $p$  est  $= r$ , on aura  $\frac{1}{h} = \frac{2}{p}$  &  $p = 2h = r$ .

C'est le cas du num. 9, où les rayons partis du point A doivent se réunir en C à la même distance de la lentille, & chacune de ces distances doit être double de sa distance focale. Mais la même formule donne  $\frac{1}{r} = \frac{p-h}{ph}$ , & par conséquent  $p-h:p::h:r$ . Or pour les rayons partis du point R on a la distance focale  $h = LB$ ,  $BF = r$ ,  $RB = p$ , & par conséquent  $RL = p-h$ , ce qui donne la proportion employée dans le num. 11, c'est-à-dire  $RL:RB::LB:BF$ .

18. Pour l'erreur de réfrangibilité en différentiant la formule  $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{p}$ , où la seule  $f$  est constante, on aura  $-\frac{dr}{r^2} = \frac{dm}{f} + \frac{dp}{p^2} = \frac{dm}{(m-1)h} + \frac{dp}{p^2}$ , & par conséquent  $dr = -\frac{r^2 dm}{(m-1)h} - \frac{r^2 dp}{p^2}$ . Mais dans le cas des rayons parallèles la formule étant  $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f}$ , on aura seulement  $-dr = \frac{r^2 dm}{(m-1)h}$ , & comme alors  $r$  est  $= h$ , on aura  $dr = -\frac{hdm}{m-1}$ : celle-ci servira pour le premier & le troisième objectif, qui reçoivent les rayons sensiblement parallèles, la précédente entière pour le second, qui les reçoit divergents du point R, différent par rapport aux différentes espèces de rayons, ce qu'introduit la différence  $dp$ : pour  $dm$  je prend la différence de la valeur  $m$  appartenante aux rayons extrêmes, qui pourtant s'évanouira à la fin du calcul.

19. La valeur  $dr$  donne la distance des deux foyers F dans l'axe:

axe : cette distance produit dans le plan perpendiculaire à l'axe, qui reçoit l'image de l'objet la moins inexacte, la dispersion de toutes les espèces de rayons partis d'un même point de l'objet par un petit cercle qui ne dépend pas seulement de la distance des deux foyers pris dans le même axe, mais aussi des deux ouvertures  $bb'$ ,  $cc'$ , & des deux distances  $BF$ ,  $CF$  : pour déterminer les diamètres de ces deux cercles, & comparer par-là les deux erreurs de réfrangibilité appartenantes aux deux espèces des lunettes réunies dans cet instrument, j'employerai la fig. 2. Le centre de la lentille est  $M$ , le diamètre de son ouverture (\*)  $mm'$ ,  $N$  le foyer des rayons les moins réfrangibles,  $N'$  celui de plus réfrangibles, & on aura  $MN = r$ ,  $NN' = dr$  :  $P$ ,  $P'$  sont les rencontres des rayons  $mN$ ,  $m'N'$ , &  $mN'$ ,  $m'N$  :  $PP'$  sera le diamètre du plus petit des cercles qui contiennent tous les rayons, parcequ'avant cet endroit les rayons  $mN$ ,  $m'N$  seront plus éloignés entr'eux, & après les rayons  $mN'$ ,  $m'N'$  : ce diamètre sera perpendiculaire à l'axe  $MN$ , & si l'on conçoit une ligne  $NQ$  perpendiculaire au même axe, qui rencontre en  $Q$  le rayon  $mN'$ , cette ligne sera sensiblement égale au même diamètre  $PP'$  à cause de la petitesse de l'angle  $NmN'$ . En faisant  $mm' = u$ , on aura la proportion suivante  $MN = r : NN' = dr :: mm' = u : NQ = \frac{udr}{r}$ .

20. En appellant dans la fig. 1  $e$ ,  $e'$ ,  $e''$  les diamètres des ouvertures des deux premiers objectifs, & celui du cercle extérieur de l'anneau du troisième, on aura pour le premier & troisième objectif  $dr = - \frac{hdm}{m-1}$  (num. 18). Pour ce dernier on aura  $h = r = c$ ,  $u = e''$  ce qui fait le diamètre de son erreur  $= - e''cdm$

(\*) On a tout ce procédé dans l'*Additamentum* au supplément du second Opuscule de ce Tome : mais on le répète ici, parcequ'on avoit déjà fait cet Opuscule indépendamment de l'autre. Là s'agissoit de l'erreur d'un seul objectif, ici on l'applique aussi à la somme des erreurs produites par deux consécutives.

$-\frac{e''cdm}{c(m-1)} = -\frac{e''dm}{m-1}$ . Pour le premier on aura la différence

de AR  $= dr = -\frac{adm}{m-1}$ , parceque son  $h$  est  $= a$ . Celle-là prise positivement sera la valeur  $dp$  par rapport au second objectif, parceque la valeur  $dr$  du premier est la diminution de la ligne AR, qui devient augmentation de la ligne BR  $= p$ .

21. Or pour le diamètre du cercle de l'erreur en F dans l'image formée par cet objectif on aura  $\frac{udr}{r} = \frac{e'dr}{r}$ : dans la valeur  $dr = -\frac{r^2dm}{(m-1)h} - \frac{r^2dp}{p^2}$ , qui appartient à cet objectif, &

donne  $\frac{dr}{r} = -\frac{rdm}{(m-1)h} - \frac{rdp}{p^2}$ , on a  $r = BF = 2b + c$ ,  $h = b$ ,  $p = BR = 2b - a$ , & comme on a trouvé  $dp = \frac{adm}{m-1}$ , on aura cette valeur  $= -\frac{(2b+c)dm}{(m-1)b} - \frac{(2b+c)adm}{(2b-a)^2(m-1)}$ ,

ce qui fait le diamètre de ce cercle  $- \frac{e'dr}{r} = -\frac{e'(2b+c)dm}{(m-1)b} - \frac{e'(2b+c)adm}{(2b-a)^2(m-1)}$ . L'égalité de ce diamètre avec le précédent

$- \frac{e''dm}{m-1}$  donne le rapport des ouvertures des deux derniers objectifs  $\frac{e''}{e'} = 2 + \frac{c}{b} + \frac{a(2b+c)}{(2b-a)^2}$ .

22. De là on tire aisément le rapport du troisième diamètre  $e''$  au premier  $e$  qui vient beaucoup plus simple. On a dans le num. 14 la proportion qui donne en lettres de la figure  $\frac{bb'}{aa'}$ , c'est-à-dire en lettres algébriques  $\frac{e'}{e} = \frac{2b-a}{a}$  aussi en lettres algébriques. En multipliant cette fraction par la précédente, on aura  $\frac{e''}{e} = \frac{2(2b-a)}{a} + \frac{c}{b} \times \frac{2b-a}{a} + \frac{2b+c}{2b-a}$ . Mais par le num. 12 nous

avons  $a = \frac{bc}{b+c}$ , d'où l'on tire  $2b-a = \frac{2b^2+bc}{b+c} =$

Tom. II.

Aaa

$b(2b+c)$

$$\frac{b(2b+c)}{b+c} \& \frac{2b-a}{a} = \frac{2b+c}{c}. \text{ Ainsi on aura d'abord } \frac{e''}{e} =$$

$$\frac{2b+c}{b} \times \frac{2b-a}{a} + \frac{2b+c}{2b-a}, \& \text{ après } = \frac{(2b+c)^2}{bc} + \frac{b+c}{b} =$$

$$\frac{4b^2 + 4bc + c^2}{bc} + 1 + \frac{c}{b} = \frac{4b}{c} + 4 + \frac{c}{b} + 1 + \frac{c}{b} = 5$$

$$+ \frac{4b}{c} + \frac{2c}{b}.$$

23. C'est la condition qui embarrasse le plus & qui fait voir l'imperfection nécessaire de cette espèce de lunette. Si tous les trois objectifs sont convexes, les valeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  étant toutes positives, tous les trois termes de la valeur  $\frac{e''}{e}$  sont positifs & la même valeur excessivement trop grande. Or on ne peut pas se dispenser de les faire convexes tous les trois. Le troisième le doit être nécessairement pour former l'image inverse comme dans les lunettes ordinaires astronomiques à deux verres : le second pour rassembler les rayons l'A dans un point de l'axe avant leur arrivée à l'oculaire, ce qui est nécessaire pour faire que l'autre image soit directe. Si le premier objectif étoit concave, il feroit aller le point R du côté opposé du point A de manière que la distance RB seroit plus grande que l'autre AB, & par conséquent le second objectif réuniroit plus-tôt dans l'axe les rayons qui tombent parallèles sur le premier objectif que les rayons passés par A. Ceux-ci seroient réunis chacun avec ses compagnons avant d'arriver à l'axe, & l'image seroit inverse, non directe.

24. Ainsi il est indispensable de faire tous les trois objectifs convexes. Alors on voit bien que dans la formule trouvée outre le nombre 5 positif, les deux autres termes doivent aussi être positifs, & même on ne peut pas faire petit le dernier. On doit faire la distance focale  $b$  du second objectif considérablement plus petite par rapport à celle du troisième  $= c$ , parcequ'autrement la longueur totale de la double lunette par l'addition de AC  $= 4b$  deviendroit trop longue tandis que l'effet de l'extérieure formée par le troisième objectif ne pourroit être que très-foible,

par-

parcequ' elle ne répond qu'à une lunette ordinaire dont l' objectif a pour la distance focale la seule  $CF = c$ , & même elle ne doit être beaucoup plus foible parce qu' on seroit obligé d' un côté à donner plus d' ouverture à son objectif pour y faire le trou & laisser assez de surface à l' anneau , & de l' autre ce trou ne diminueroit point la grandeur de l' erreur de réfrangibilité qui seroit la même comme si le trou étoit rempli , ce qu' on voit aisément dans la fig.2 . Le trou ne diminue que l' erreur de sphéricité qu' on auroit dans l' objectif entier : ainsi le dernier terme  $\frac{2c}{b}$  doit être plus grand que 2 & considérablement plus grand : & même si celui-là n'est pas grand , le second  $\frac{4b}{c}$  le deviendra .

25. On ne pourra jamais avoir qu' une lunette très-mauvaise , si l' on fait chaque objectif simple comme dans les lunettes ordinaires . Elle ne vaudra rien même en faisant les deux premiers objectifs acromatiques , & elle sera bien foible par rapport à sa longueur , même si l' on fait tous les trois objectifs acromatiques .

26. Pour en être bien convaincu il suffira d'appliquer la théorie à quelqu'exemple. La combinaison qui peut paroître une des moins mauvaises est celle qui fait  $c = 3b$  pour ne pas faire le troisième objectif de foyer trop court, & ne pas trop allonger la lunette, ou faire trop petite la distance focale du second qui rend encore plus petite celle du premier. En faisant  $c = 3b$ , on aura  $\alpha = \frac{bc}{b+c} = \frac{3}{4}b$  : ainsi les trois foyers des trois objectifs seront en raison de 3, 4, 12.

27. On verra la grande imperfection même en faisant les deux premiers objectifs de l'espèce qu'on appelle acromatiques, quoiqu'ils ne réunissent jamais exactement toutes les couleurs à la fois : on évitera la grande inégalité des ouvertures n'ayant point d'égard à la quatrième condition de l'erreur de réfrangibilité, comme si celle du troisième objectif simple étoit compensée par ce qui reste d'erreur dans les deux premiers & qui n'est pas si

peu à cause de la petitesse des rayons des leurs sphéricités par rapport à la distance de l'image .

28. On pourra déterminer les ouvertures des objectifs dans ce cas-là de manière à donner à la lunette du troisième objectif le plus grand grossissement qu'on puisse concilier avec la distinction d'une lunette ordinaire d'un même foyer de deux pieds . Comme le trou oblige à faire le diamètre extérieur de l'anneau que nous avons appellé  $e''$  plus grand que dans les lunettes qui ont l'objectif entier ; il faudra diminuer le grossissement à proportion de l'augmentation de ce diamètre , parceque le diamètre de l'erreur de réfrangibilité selon la formule  $\frac{e''dm}{m-1}$  ( num. 20 ) est proportionnel à ce diamètre indépendamment de la longueur de la distance focale : il faudra donner au premier objectif l'ouverture qui répond à ce grossissement pour avoir la même clarté , & pour en avoir assez , on ne peut pas supposer le diamètre de cette ouverture plus petit que d'un nombre des lignes égal au tiers de celui qui exprime le même grossissement : le second sera égal à  $\frac{5}{3}$  de celui-là , qui est la valeur de  $\frac{BR}{AR} = \frac{2b-a}{a} = \frac{8-3}{3}$  : on fera le diamètre le plus petit que on peut le faire sans intercepter les rayons transmis par le second objectif : ainsi nous le supposerons ici même égal à son diamètre en négligeant l'épaisseur du tube qui le contiendra .

29. Le diamètre de l'ouverture du premier objectif étant  $e$  on aura le second  $e' = \frac{5}{3}e$  , & le carré du diamètre extérieur de l'anneau  $e''^2 = \frac{25}{9}e^2 + e^2$  ( num. 14 )  $= \frac{34}{9}e^2$  : ainsi ce diamètre sera  $= 1,94e$  . Si l'on fait le troisième objectif de 2 pieds de foyer , le second en aura 8 pouces , le troisième 6 , la longueur de la lunette composée aura , outre le double foyer de l'oculaire ,  $c + 4b = 24 + 4 \times 8 = 56$  pouces , quoique l'extérieure à objectif simple percé ne sera qu'une lunette de deux pieds ; mais trop inférieure aux ordinaires à cause du diamètre de l'ouverture augmenté pour y avoir le trou , comm'on verra par le calcul suivant .

30. On

30. On ne peut pas donner à une lunette ordinaire de deux pieds de foyer plus de 24 de grossissement, qui porte 8 lignes d'ouverture : mais en changeant celle-ci en celle de  $1,94e$ , il faut changer le grossissement en la même raison inverse à cause de l'erreur de réfrangibilité que nous regardons ici, & qui est proportionnelle au seul diamètre de l'ouverture, comme nous venons de dire. En variant le grossissement il faut varier le diamètre de l'ouverture en la même raison : ainsi pour le premier objectif à la place du diamètre 8, qu'on lui auroit donné pour avoir la quantité de lumière égale à celle de cette lunette de deux pieds, il faudra prendre la valeur  $e$  quatrième proportionnelle après

$$1,94e, 8, \& \text{encore } 8, \text{ce qui donnera } e = \frac{64}{1,94e} : \text{on en tire } e^2 = \frac{64}{1,94} = 32,99, e = 5,75, e' = \frac{5}{3}e = 9,58, e'' = 1,94, e''' = 11,15.$$

Le cercle intérieur de l'anneau dont nous avons supposé le diamètre égal à celui du second objectif  $e'$  laissera pour le double de sa largeur  $e'' - e' = 1,57$ : ainsi la largeur même reste plus petite que d'une ligne, ce qui est bien excessivement peu. Le nouveau grossissement devra être quatrième proportionnel après l'ouverture 8, le grossissement précédent = 24, & la nouvelle ouverture  $e = 5,75$ , qui devient  $= 3 \times 5,75 = 17,25$ . En divisant la distance focale  $c$  de deux pieds  $= 2 \times 144 = 288$  par le grossissement 17,25 on aura la distance focale de l'oculaire  $= 16,7$ , parceque dans les lunettes simples le grossissement est égal à la distance focale de l'objectif divisée par celle de l'oculaire, & par conséquent on doit avoir celle-ci en divisant celle-là par le grossissement.

31. On voit bien l'imperfection de cette espèce de lunette qui étant presque de cinq pieds de longueur, & même ayant les deux premiers objectifs acromatiques n'arrive pas à grossir 17 fois, si l'on veut la clarté & la distinction qu'on a dans les lunettes ordinaires de deux pieds. Si l'on veut employer tous les trois objectifs simples, la force de la lunette devient encore incomparablement plus petite. Pour conserver la clarté & distinction des lu-

net-

nettes ordinaires avec l'égalité des images , de leur lumière , de leur distinction , il faudroit employer le diamètre intérieur de l'anneau beaucoup plus grand que celui du second objectif . On aura comme auparavant  $e' = \frac{5}{3}e$  , mais en appliquant dans la formule  $\frac{e''}{e} = s + \frac{4b}{c} + \frac{2c}{b}$  ( num. 22. ) les nombres 1 & 3 pour  $b$  &  $c$  on aura  $e'' = 12 \frac{1}{3}e = \frac{37e}{3}$  , & par conséquent  $e = \frac{3 \times 64}{37e}$  , comme dans le numero précédent ,  $e^2 = \frac{192}{37} = 5,19$  ,  $e = 2,28$  , ce qui réduit le grossissement à 7 seulement donné par  $\frac{24 \times 2,28}{8} = 6,84$  . Le diamètre  $e'$  de l'ouverture du second objectif sera  $= \frac{5}{3}e = 3,8$  . Mais celle du cercle extérieur du troisième  $e'' = 12 \frac{1}{3}e$  devient excessivement grand  $= 28,12$  . Le carré de l'intérieur , pour avoir l'égalité de la surface de l'anneau avec celle du premier objectif , ôté du carré de l'extérieur doit laisser ( num. 14 ) le carré du diamètre de l'ouverture du même premier objectif : ainsi tout au contraire ce carré  $= e''^2 - e^2$  , & par conséquent le diamètre même  $= 28,03$  . Celui-ci ôté de 28,12 , ne laissoit pour le double de la largeur que 0,09 , quantité insensible . Même le diamètre du cercle intérieur excessivement plus grand que le diamètre  $e'$  laissoit un grand vide à remplir pour empêcher les rayons directs d'aller jusqu'à l'oculaire .

32. Ces désordres viennent de la grandeur de l'erreur de réfrangibilité dans cette espèce de lunette intérieure & de la petitesse de l'ouverture du premier objectif . On ne pourroit pas donner à celui-ci plus d'ouverture , ni augmenter son grossissement sans introduire de la confusion dans son image : on pourroit bien diminuer les diamètres des deux cercles du troisième objectif , en augmentant ainsi sa distinction & diminuant la grosseur du tube de la lunette : mais néanmoins on n'auroit rien de satisfaisant . Si l'on réduisoit le diamètre intérieur à l'égalité avec celui du second objectif , qui est de 3,80 , on auroit le diamètre de

de l'extérieur =  $\sqrt{(2,28 \times 2,28 + 3,8 \times 3,8)} = 4,43$ , qui laisseroit pour la double largeur de l'anneau 0,63 : mais on voit bien que tout celà ne vaut rien.

33. On pourroit obtenir quelque chose de moins mauvais en faisant aussi le troisième objectif acromatique : mais la théorie ne donnera sur cet objectif rien d'assez déterminé. Les objectifs formés de deux seules espèces de verre ne rassemblent pas dans un seul foyer que deux seules espèces de rayons, tandis que les autres débordent encore, bien moins que dans les lunettes ordinaires, mais assez pour introduire de la confusion, quand on veut pousser trop le grossissement qui demande une ouverture trop forte, & on ne peut pas déterminer si aisément, & peut-être encore on ne peut pas absolument déterminer, la quantité précise de ce débordement. Il y a dans les formules, comme j'ai indiqué ci-dessus, des termes inférieurs négligés, dont si l'on vouloit tenir compte, le calcul seroit immense : ainsi on ne peut pas déterminer par la théorie la grandeur du plus petit des cercles qui contiennent tous les rayons. Mais on voit bien que l'augmentation du diamètre extérieur du troisième objectif exigé par le trou doit toujours rendre trop défectueuse la lunette extérieure, qui donne l'image inverse, quoique acromatique, & la petitesse des rayons de sphéricité des deux premiers par rapport à la distance du foyer rend aussi mauvaise l'intérieure, qui la donne directe. Ainsi trois objectifs acromatiques seroient mal employés pour un instrument de cette espèce, qui d'ailleurs, s'il étoit égal en bonté aux lunettes ordinaires, n'auroit aucun usage pour l'Astronomie, parcequ'on peut démontrer aisément que par les instruments, qui sont en usage, on peut avoir ou avec la même précision, ou même avec une précision beaucoup plus grande, tout ce qu'on pourroit déterminer par cette double lunette.

34. On pourroit changer la position des deux premiers objectifs & le rapport des leurs distances focales entr'elles, & conserver l'égalité des deux images en faisant que les rayons l'Ao sortis du second objectif coupent l'axe au-dessous, ou au-dessus du centre C du troisième : mais alors l'oculaire dd' ne les feroit pas

sor-

sortir avec leurs compagnons dirigés au point **G** de manière à entrer dans l'œil avec les rayons **ICd** : une seule partie de ses rayons peu inclinée à l'axe , c'est-à-dire appartenants aux points de l'objet peu éloignés du centre du champ entreroit par la pru-nelle , ce qui rendroit le champ d'une des deux lunettes beaucoup plus petit que celui de l'autre , & très-mal tranché . Il faut faire passer ces rayons par **C** , ce qui oblige à employer les dé-terminations que j'ai données ci-dessus .

35. J'ajouterai seulement ici ce qu'appartient à la manière de placer les trois objéctifs & l'oculaire . Un tube extérieur con-tiendra en *cc'* l'anneau *cec'e'* : un second tube contiendra les deux objéctifs *aa'* , *bb'* , & il arrivera à l'anneau de manière à le tou-cher en *e* , *e'* pour empêcher le passage aux rayons direéts entre lui & le même anneau , qui ne doivent pas arriver à l'oculaire , mais il ne débordera pas beaucoup pour ne pas intercepter les ra-yons réfractés par l'anneau . Celui-ci sera attaché au premier tu-be par une petite barre , qu'on devra faire la plus mince qu'on peut , sauve une bonne solidité , pour intercepter le moins de ra-yons qu'on peut à l'anneau . Un troisième tube contiendra l'o-culaire *dd'* , & il sera mobile dans le second pour les différentes vues : il aura à l'ordinaire l'ouverture **G** pour l'œil .

36. Le diaphragme doit être placé en *ff'* , & il doit avoir un diamètre un peu plus petit que l'ouverture *dd'* de l'oculaire . Ce diamètre détermine le champ :  $\frac{1}{57}$  de la distance focale du troisième objéctif en donnera un degré : ainsi pour la distance fo-cale de 24 pouces , quē nous avons supposé ici , 10 lignes don-neroient deux degrés . Si le diaphragme doit avoir des fils fixes , ou une rhomboïde , comme on le pratique pour certaines obser-vations astronomiques , il faut le placer précisement dans le lieu de l'image *ff'* pour éviter celle qu'on appelle la parallaxe de l'œil .

37. Un fil diamétral qui passe par le centre de la lunette est nécessaire , & il faut l'amener à la direction du mouvement diur-ne , si l'on veut voir réunies les deux images d'une étoile . Quand même les axes des deux lunettes seront bien placés à n' en

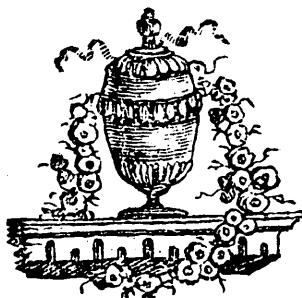
en faire qu'un seul , l'union des deux images ne peut se faire que dans le centre du champ par où l'axe même doit passer , & on ne fera pas parcourir un diamètre du même champ aux deux images , si on les place dans ce champ au hazard sans la direction de ce fil . Pour le soleil ce sera un hazard , si l'on voit bien réunies les deux images , ce qui n'arrivera que quand son centre décrit exactement un diamètre du champ . Comme on ne voit pas ce centre , il faudroit avoir deux fils mobiles de manière à s'éloigner également du centre du champ , & les ayant dirigés selon le mouvement diurne y enfermer le disque du soleil en attouchement . Alors on verra le double attouchement direct des deux disques . C'est la seule observation par laquelle on pourroit croire utile un tel instrument . Si l'on veut déterminer le diamètre apparent du soleil par le temps simple de son passage par le fil perpendiculaire au mouvement diurne , on prend la mesure par cet intervalle réduit en minutes & secondes auparavant du parallèle , & après du grand cercle , tandis que le temps écoulé entre les deux contacts donneroit le double de cette mesure . Mais la manière d'avoir une mesure exacte du diamètre du soleil n'est pas celle d'observer le temps du passage par le fil , dans lequel l'erreur d'une seconde de temps donne 15 secondes du cercle , & ici une seconde d'erreur dans l'intervalle entre les deux contacts en donneroit  $\gamma \frac{1}{2}$  . On prend le diamètre du soleil par un micromètre à un fil mobile ou à deux .

38. On croiroit qu'on pourroit avoir un avantage par cette lunette , parcequ'on y voit les deux contacts des deux disques du soleil & la rencontre des deux images d'une étoile sans avoir besoin d'aucun fil . Mais le moment de la rencontre des deux images de l'étoile & la grandeur du diamètre apparent du soleil ne sera pas donnée par les deux contacts des mêmes disques , si l'étoile ou le centre du soleil ne passe exactement par le centre du champ , & comme j'ai déjà indiqué , on ne réussira pas que par un grand hazard à donner cette position à l'étoile ou au centre du soleil sans le secours d'un ou de deux fils . C'est le micromètre objectif qui donne la mesure du diamètre apparent

sans aucun besoin de fils & sans dépendre du temps , qui étant employé ici en empêche l'exactitude .

39. On prétend qu'une lunette de cette espèce doit être avantageuse , par le double mouvement avec les directions contraires qui rend la vitesse respective plus grande du double que la vitesse absolue des lunettes communes : mais comme par les lunettes communes de la même longueur on peut avoir des grossissements plus forts au de-là du double , on peut compenser cette partie , & même y gagner , en donnant une augmentation au double plus forte , & encore bien d'avantage .

40. Ainsi c'est un instrument qui ne porte aucun avantage à l'Astronomie , & qui a tant d'imperfection en lui même . On ne peut avoir rien de tolérable , si l'on n'emploie trois objectifs acromatiques tous les trois , & même avec ce secours on ne peut avoir qu'un effet beaucoup inférieur à celui d'une lunette ordinaire d'un seul objectif acromatique , & même d'une plus courte de plus du double .





## OPUSCULUM VI.

### DE GLOBULIS NIGRIS TRANSLATIS PER DISCUM SOLIS CUM EPISTOLA GALLICA AD EJUS PHÆNOMENI OBSERVATOREM.

I.  COMMUNICAVERAT mihi singulare phænomenum, quod in sole viderat celeberrimus Astronomus, & diligenter tissimus Observator Messierius interrogans, an dignum censerem, quod inter Regiæ Scientiarum Academiæ Monumenta vulgandum proponeret. Dum in meridie macularum solarium observationes persequeretur, sese ipsi repente obtulit ingens globulorum numerus traductus per ejus discum directionibus parallelis, quâ eâdem directione albicantes nubeculæ ferebantur. Apparebant satis distincti, eo autem numero, ut identidem ipsas solis maculas aspectui subducerent: per totum discum diffusi progrediebantur motu apparenti ita inclinato ad horizontem, ut viderentur oblique ascendere per ipsum discum: extra ipsum inde egressi jam ultra non apparebant. Notavit directionem venti, ac ejus obliqui motus tam directionem, quam celeritatem, tum magnitudinem globulorum, qui occupabant secunda  $2\frac{1}{2}$  disci ipsius, binis vero secundis temporis ipsius diametrum percurrebant. Telescopium erat acromaticum egregium habens distantiam focalem objectivi pollicum 40, ac totidem linearum aperturam; id autem pro macularum solarium observatione aptaverat. Cum ipsi eâdem tubi constitutione, & ii globuli æque distincti apparerent, & solis limbus, & eæ maculæ; post phænomeni finem telescopium idem direxit ad duo objecta terrestria diversæ distantia cognitæ, & notavit, quam diligenter ejusmodi observatio permitteret, quanta esset produc[t]io tubi necessaria ad videnda ea objecta bene distincta: propiora enim productionem requirunt majorem: suspicabantur autem, eos globulos fuisse vel pluviaæ guttas, quæ formam in-

ducunt rotundam , ut satis demonstrat iridis natura , vel grandinis granula .

2. Dignissimum censui phænomenum , quod posteritati transmitteretur , non ob singularitatem tantummodo , nullum enim ejus generis uspiam occurrit in Astronomicis monumentis , licet saepissime accidat , ut sol trans pluviam labentem , & trans nebulas per telescopia transpiciatur ; sed etiam , quod opportunam præberet occasionem cognoscendæ intimius naturæ visionis acquisitæ per telescopia , & inquirendi in ipsam originem inusitati phænomeni , ac interpositorum corporum distantiam a terra . Perquisitione institutâ , perscripsi ad ipsum fusiorem epistolam , qua quidquid eo pertinet diligentissime persecutus , omnia mihi videor non infeliciter evoluisse , & luculenter exposuisse . Ostendo , per telescopia videri non posse in sole globos , qui diametrum habeant aliquanto minorem aperturâ objectivi , quam ob causam pluviales guttæ , aut usitatæ grandinis moleculæ in ejus disco apparere non possunt , nec vero a se invicem separati , ac distincti ii exigui globuli , quorum multitudo nebulam , aut nubem efformat , nec vero aves prætervolantes exhibere globorum formam , ac limites habere suæ figuræ determinatos , atque distinctos : unde videtur patenter consequi , eam fuisse inusitatæ magnitudinis grandinem , quæ cum rarissima sit cælo etiam nubilo , ac procelloso , nunquam antea acciderit , ut in Astronomi , solem per telescopia observantis , oculos incurrerit .

3. Obesse videbatur ascensus apprens , qui tamen cum vero descensu obliquo facile conjungi potest : quamobrem casus omnes evolvi , qui veri , & apparentis motus oppositionem exhibere possint , ac in ipsam inquisivi directionem motus veri , qui quidem accurate determinari posset , si non solum directio ascensionis obliquæ apparentis , sed etiam venti directio , minus crassâ determinatione obtineri potuisset . Quod ad distinctionem pertinet , ostendo ; quam diversa sit origo confusionis , quæ habetur in objectorum marginibus visis per telescopia , cum eorum visio fit per radios ab iis digressos , & cum ea radios alterius post ipsa positæ intercipiant , ut in iis instar nigrantis maculæ debeat apparere .

rere. Exhibeo limites distantiaæ, quæ videri potest necessaria ad habendos margines ejusmodi maculæ satis distinctos, & indico observationes terrestres, per quas limites iidem possent accuratius definiri.

4. Cum ea omnia &c ad Opticam pertineant, & ad telescopiorum theoriam, quæ argumenta in hisce binis voluminibus excolla suscepit, ut indicavi etiam in præcedentis Opusculi præfatiuncula, epistolam illam hinc exhibeo ita, ut tum gallico sermone perscripta fuit, & ipsi tradita. Is ejus compendium cum ipsa phænomeni observatione, & schemate adnexo vulgavit in Monumentis Academiæ pro anno 1777 impressis anno 1780.

## L E T T R E

*De M. l' Abbé Boscovich à M. Messier sur son observation singulière des petits globules noirs qu'il a vu monter obliquement sur le disque du soleil.*

I. J'AI examiné par les principes de l'Optique le phénomène bien singulier que vous avez observé sur le disque du soleil, & je trouve qu'il mérite toute l'attention des Physiciens. Vous y avez vu pendant plusieurs minutes de temps une quantité prodigieuse de globules obscurs & distincts, qui étoient bien peu éloignés les uns des autres & montoit obliquement sur le même disque, qui en étoit tout rempli : la lunette qui renversoit les objets représentoit une descente. Elle a dans son objectif 40 lignes d'ouverture : vous l'aviez adaptée à l'observation des taches du soleil, qui y paroisoient avec la même distinction : le soleil étoit au méridien à l'élévation de 64 degrés : le mouvement de tous ces globules se faisoit par des lignes parallèles inclinées au fil horizontal de 22 degrés & demi : un nuage blanchâtre passoit devant le disque par un vent de O. S. O, dans une direction à peu-près la même que celle des globules. Vous avez jugé le diamètre de ces globules qui paroisoient tous égaux de 2 secondes & demi, & le temps du passage de ceux qui

qui passoient par le diamètre , de 2 secondes : quelque fois il y en avoit une telle quantité qu' ils empêchoient de bien voir les taches , mais ils disparaisoissoient à mesure qu' ils sortoient du disque .

2. Comme on sait que pour voir les objets peu éloignés avec distinction , il faut allonger la lunette , & vous voyez vos globules également distincts que les taches du soleil , vous avez dirigé votre lunette à différents objets terrestres pour donner occasion de porter quelque jugement sur leur distance : pour voir avec distinction un objet éloigné de 2075 toises , vous avez dû allonger le tube de  $\frac{6}{12}$  de ligne , & pour voir après avec distinction un autre éloigné de 285 il vous a fallu l'allonger encore de  $\frac{9}{12}$  de plus .

3. Vous avez jugé que vos globules pouvoient être des gouttes de pluie , ou des grains de grêle , & vous dites qu' à l'occasion de cette observation M. Vallot a lu à l' Académie un Mémoire , dans lequel il a fait voir que la montée apparente peut s'accorder avec la descente réelle . Je ne sais pas de quelle manière M. Vallot s'y est pris pour faire voir cet accord : je donnerai ici la détermination générale de tous les cas , dans lesquels une montée ou une descente apparente peut s'accorder avec une descente ou montée réelle : mais je trouve que la direction du mouvement réel d'un corps pesant , qui reçoit le mouvement oblique par l'action du vent , est déterminée par ces trois données , la hauteur du soleil , l'obliquité de la montée apparente , & la direction du vent : ces trois données , si on les prend sans aucun changement , donnent ici une montée réelle , non une descente . Pour ce qui appartient à la distinction , la théorie de l'allongement du tube pour les objets peu éloignés n'a pas lieu pour ceux qu'on voit comme de taches obscures sur le disque du soleil , quoique votre expérience sur cet article ne laisse pas d'être utile pour confirmer un' exception de la théorie générale de ces allongements . La théorie de la distinction pour cette espèce d'objets est très-différente , & elle exige un éloignement d'autant plus considérable que l'ouverture de l'objectif

est

est grande ; mais elle fait voir qu'on ne peut pas par l'allongement du tube en ôter la confusion qui se trouve , quand la distance n'est pas assez grande .

4. Je trouve par la même théorie , que vos globules doivent être des globes d'un diamètre de plusieurs pouces , qui par conséquent ne pouvoient pas être des gouttes de pluie , qui sont incomparablement plus petites , mais qu'il faut recourir à des grêlons d'une grosseur bien extraordinaire ; on en trouve des exemples , mais ils sont très-rares , & il y reste la difficulté de la montée réelle , qui est exigée par vos données . On peut la diminuer , en changeant un peu la direction de la montée apparente & celle du vent que vous avez déterminées en gros , surtout la seconde , & qui peut avoir été différente dans les différentes hauteurs de l'atmosphère . Mais on ne peut pas changer ces données de manière que l'obliquité de la chute ne se trouve trop grande pour des masses si lourdes , sur-tout quand il n'y avoit aucune apparence d'un vent bien violent , & qu'il paraît bien extraordinaire qu'on n'a pas entendu parler d'une grêle si terrible , qui pourtant devoit tomber dans Paris , ou très-près de la Ville . Cependant je ne vois pas qu'on puisse expliquer le phénomène , que par cette espèce de gros grêlons . On ne peut pas soupçonner une illusion optique d'un œil fatigué , & je ferai voir qu'une apparence de globules ne peut pas être produite par une bande d'oiseaux , dont le soupçon est détruit encore par la quantité prodigieuse de vos globules .

5. Toutes ces recherches appartiennent à l'Optique , & sont bien intéressantes : je les développerai les unes après les autres avec tout le détail nécessaire , qui fera voir l'utilité de votre observation : vous l'avez jugée avec raison digne d'être présentée à l'Académie , & imprimée parmi ses Mémoires . Votre assiduité à observer , & attention à remarquer tout ce qui est digne d'être remarqué , ont procuré aux Physiciens une observation , qui , à ce que je sache , est unique en son genre .

6. Je commence par la direction du mouvement réel , qui répond à celle de l'apparent . Dans la fig. 3 (Tab. IX) O est l'œil

œil dans le centre d'une sphère, dont la surface passe par le centre S du soleil, ABCD son cercle horizontal, ASC le demi-cercle vertical, qui passe par le zenith Z & qui dans notre cas étoit le méridien : ainsi le point C étoit celui du vent de sud, & CS l'élevation du soleil : BSD est le demi-cercle perpendiculaire à celui-là, qui passe par l'Est B, & l'Ouest D, & par-là les deux diamètres AC, BD sont perpendiculaires l'un à l'autre : E est le point de l'objet interposé, qui par la ligne visuelle OE est rapporté au point S : EI, ou EI' est le petit mouvement du même point projeté sur le disque du soleil en F, ou F' par les lignes visuelles OIF, ou OI'F' dans le demi-cercle GSG', qui est l'intersection de la surface de cette sphère avec le plan, qui passe par O, & par le mouvement EI, ou EI', je place le point G dans le demi-cercle BCD, le point G' dans l'opposé BAD, le mouvement EI dans le secteur SOG, EI' dans l'autre SOG'. EH est une ligne perpendiculaire à l'horizon, qui doit tomber à angles droits sur le rayon OC : L est la rencontre de la ligne EI' avec le diamètre G'G, & MO la direction du vent.

7. On voit bien que si le mouvement réel se faisoit dans la ligne SO, le point E paroîtroit immobile en S ; dans tout autre cas il y aura un mouvement apparent. Ce mouvement se fera par le diamètre horizontal du disque, si le réel se fait dans le plan du demi-cercle BSD, dont l'arc en S est perpendiculaire à l'arc du vertical, ainsi le point mobile suivra dans ce cas le fil horizontal du micromètre. Si le mouvement réel se fait dans le plan du cercle vertical ASC, l'apparent suivra le fil perpendiculaire, & il sera une montée ou une descente apparente, selon que le réel sera de même une montée ou une descente. Dans tous les autres cas le mouvement apparent sera oblique par SF', ou par SF. Dans le premier cas il y aura une montée apparente, & dans le second une descente, car l'arc SF' s'élève au dessus du fil horizontal qui suit en S l'arc du demi-cercle BSD vers le zenith Z & l'arc SF se baisse du côté opposé. Dans le triangle sphérique SCG les deux côtés SC, CG étant de la même espèce plus petits qu'un quart de cercle, l'arc SG le sera aussi,

& par

& par conséquent  $SG'$  plus grand, tandis que les arcs  $SD$ ,  $SB$  seront de 90 degrés : ainsi l'angle  $SOG'$  sera obtus,  $SOG$  aigu, & les deux  $SOB$ ,  $SOD$  seront droits. Ce sont les deux lignes tirées du point  $O$ , l'une au premier point  $E$  du mouvement réel, l'autre horizontalement vers le même côté de ce même mouvement, qui par leur angle décident de la position du mouvement apparent. Cette seconde ligne est  $OG$  par rapport au mouvement réel  $EI$ , &  $OG'$  par rapport à l'autre  $EI'$ , & il y aura un mouvement apparent horizontal, ou une montée ou une descente apparente, selon que cet angle sera droit, obtus, ou aigu.

8. Pour la position du mouvement réel c'est le rapport de l'angle  $OEI$ , ou  $OEI'$  au supplément du même angle  $EOG$ , ou  $EOG'$ , qui décide. Il y aura un mouvement réel horizontal, ou une montée ou une descente réelle, selon que cet angle sera égal à ce supplément, ou plus grand ou plus petit : parceque dans le premier cas la ligne du mouvement réel sera parallèle au rayon horizontal  $OG$ , ou  $OG'$ , & dans les deux autres divergente par rapport à celui qui va vers le même côté avec le mouvement réel, ou convergente. On voit bien que chacune des trois conditions du mouvement apparent horizontal, montant, descendant, pourra se combiner avec chacune du mouvement réel.

9. Voyons à présent comment on peut déterminer par nos données, quelle des trois conditions du mouvement réel répondoit dans le cas de votre observation à la montée apparente. La figure est adaptée au cas de la descente réelle. Le mouvement selon la direction  $EI'$ , qui répond à la montée apparente par  $SF'$ , est composé du vertical selon la direction  $EH$ , & de l'horizontal selon  $HL$  : celle-ci étant produite par le vent, sera parallèle à sa direction  $MO$ . Si le point  $M$  tomboit en  $G$ , la ligne  $HL$  seroit parallèle au rayon  $OG'$ , & le point  $L$  allant à l'infini le mouvement  $EI'$  seroit horizontal. Pour faire une descente réelle il faut que l'arc  $CM$  soit plus petit que  $CG$ , comme il est exprimé dans la figure, ce qui fait aller le point  $L$  vers  $G'$  par rapport au centre  $O$  : que si  $CM$  en étoit plus grand, comme  $Cm$ , alors le

*Tom. II.*

Ccc

point

point L iroit du côté opposé en *l*, & à la place de la descente par EI' il y auroit une montée par Ei. Si le vent a été exactement O.S.O ; l'arc CM sera  $\equiv \frac{3}{4} \times 90^\circ = 67^\circ 30'$ . Il y reste à déterminer l'arc CG.

10. Dans le triangle rectangle SCG le côté SC est la hauteur du soleil de  $64^\circ$ , & l'angle GSC  $\equiv$  ASG' est le complément de l'angle BSF', élévation apparente de la ligne SF au-dessus de l'arc SB horizontal en S : Cette élévation étant  $\equiv 22^\circ 30'$ , l'angle GSC sera de  $67^\circ 30'$ . Ainsi on aura  $\tan.CG = \tan.GSC \times \sin.SC = \tan.67^\circ 30' \times \sin.64^\circ$ , & CG  $\equiv 65^\circ 15'$ . Cela feroit cet arc plus petit de  $2^\circ 15'$ , que celui qui est donné par la direction du vent, qui à la place d'être CM seroit Cm, avec la montée réelle par Ei. Mais comme ce vent n'a été déterminé qu'en gros, & qu'entre lui, & le S.O. il y a  $22^\circ 30'$ , on peut soupçonner qu'il étoit éloigné de ce point vers le sud de plusieurs degrés. S'il en a été éloigné de  $2^\circ 15'$ , le mouvement réel a été horizontal ; si plus encore, celui-ci a été une descente.

11. La direction aussi de la montée apparente doit avoir été déterminée par un à-peu-près, mais avec beaucoup plus de précision. Si l'on y suppose l'obliquité de 20 degrés, on auroit CG  $\equiv 67^\circ 57'$ , un peu plus grande que CM, même dans la supposition de l'exactitude du vent de O.S.O, avec une petite descente réelle. Si l'on y ajoute la différence du vent dans les différentes hauteurs de l'atmosphère, on verra toujours mieux qu'on ne peut tirer rien de précis de ce côté-là. Pourtant comme il n'y avoit aucune marque d'un temps orageux, il y a toute la probabilité pour croire, que la direction du vent qui pousoit les globes tombants, si c'étoit des grêlons, n'étoit pas trop éloignée de celle qui pousoit le nuage blanchâtre, & que cette direction étoit moins éloignée du O.S.O, que du S.O, on en tirera toujours que l'inclinaison du mouvement réel à l'horizon étoit bien grande. Si l'on rapproche la direction du vent éloignée du sud de 10 degrés, & que l'on suppose l'élévation du mouvement apparent de 20 degrés seulement, ce qui paroît qu'on puisse s'éloigner le plus de l'estime de l'observation, on

aura

aura l'arc CG =  $67^{\circ} 57'$ , & le CM =  $57^{\circ} 30'$ , ce qui donnera MG =  $10^{\circ} 27'$ .

12. Dans cette supposition on déterminera l'obliquité du mouvement réel de la manière suivante. On a ces deux proportions EH : OH :: tan. CS : 1, & OH : HL :: sin. OLH = sin. GM : sin. HOL = sin. CG : on tire cette troisième EH : HL :: tan. CS X sin. GM : sin. CG :: tan. 64 X sin.  $10^{\circ} 27'$  : sin.  $67^{\circ} 57'$  :: 1000 : 2268. Celle-ci sera la raison du mouvement vertical produit par la gravité à l'horizontal produit par le vent, & ce dernier nombre sera la cotangente de l'angle ELH, qui donne l'obliquité du mouvement réel au rayon = 1000 : elle resteroit =  $77^{\circ} 13'$ . Cette raison & cette obliquité sont trop fortes pour des masses si lourdes, comme nous allons voir, qu'on doit supposer les grêlons, & pourtant nous nous sommes éloignés un peu trop de l'obliquité apparente & de la direction du vent estimées par l'observation : en s'approchant de ces données l'obliquité & l'effet de la force du vent se trouvent excessivement augmentés. Cette grande obliquité est encore conforme à la grande vitesse, avec laquelle ces taches obscures ont traversé le diamètre du disque, & à la grandeur apparente conservée dans la traversée. Si la direction du mouvement se fût approchée de la ligne EO, le mouvement apparent auroit été beaucoup plus lent, & un approchement considérable auroit augmenté le diamètre apparent dans le temps même de la descente.

13. Avant de passer à la détermination de la grandeur de ces masses, je remarquerai seulement que si l'on suppose le point G placé dans l'arc CB, on aura toujours une montée réelle, ce qui donneroit encore plus d'embarras : mais alors la direction du mouvement apparent auroit été trop éloignée de celle du vent, pour pouvoir les estimer à-peu-près les mêmes.

14. Pour déterminer ce qui appartient à la grandeur nécessaire pour faire qu'un globe interposé entre la lunette & le soleil puisse être aperçu sur son disque comme une tache obscure, il faut faire attention à l'ouverture de l'objectif qui reçoit les rayons partis de tous les points du disque, & en forment l'image

dans le foyer du même objectif. Si le diamètre du globe est plus petit que le diamètre de cette ouverture, il n'y aura aucun point de ce disque dont tous les rayons soient interceptés. Ainsi pour cacher tout à fait un seul point du disque, le diamètre du globe doit être égal à celui de l'ouverture, qui dans votre excellente lunette étoit de 40 lignes, & il faut augmenter ce diamètre de beaucoup, pour avoir une tache de quelques secondes de diamètre apparent qui réponde à une partie égale du disque cachée par ce globe.

15. Dans la fig. 4 AB soit un diamètre du disque du soleil, C le centre de l'ouverture DE considérée dans le même plan avec AB, GH le diamètre du globe dont le centre en I, F la rencontre de la droite CI avec le même disque, f le foyer des rayons partis de ce point, qui après avoir été réfractés par l'objectif s'y réunissent dans la même ligne: K, L soit la rencontre des lignes FG, FH avec l'objectif DE, ab l'image de tout le disque. On voit bien qu'à cause de la distance immense du point F on pourra prendre la ligne KL pour égale au diamètre GH. Si celui-ci est plus petit que le diamètre DE de l'ouverture, de tous les rayons, qui sans l'interposition du globe GH auroient formé en f l'image du point F, il n'y aura de perdu que ce qui seroit tombé sur le cercle du diamètre KL: tous les autres qui tomboient sur l'anneau KDLE, y parviendront de même, & y formeront en f l'image du même point plus ou moins claire, selon que le globe sera plus ou moins petit par rapport à l'ouverture DE. Tous les rayons de ce point ne seront pas interceptés que quand le diamètre du globe sera égal à cette ouverture en arrivant jusqu'aux lignes FD, FE sensiblement parallèles en M, N.

16. Si le diamètre du globe GH étoit de 4 lignes, le diamètre DE étant de 40, le cercle KL ne seroit que la centième partie du cercle de l'ouverture entière, & si celui-là étoit de deux lignes, celui-ci ne seroit que la quatrecentième partie: ainsi un globe de deux lignes n'intercepteroit qu'une quatrecentième partie de la lumière totale, & un de 4 lignes la centième. Cette perte non seulement ne peut faire une obscurité totale en f;

mais

mais elle ne pourroit donner aucune différence sensible de clarté entre ce point & ceux dont la lumière tombe sur tout l'objectif. Or jamais une goutte d'eau , quand en tombant a la figure sphérique , n'a un diamètre de 4 lignes , ni même de deux : ainsi il est bien évident que ce phénomène ne peut pas provenir des gouttes d'une pluie , & c'est la raison pour laquelle , quoiqu'il arrive très-souvent qu'on se rencontre à voir le soleil à travers d'une petite pluie , on ne voit jamais un phénomène pareil à celui que vous avez observé à cette occasion . La grêle ordinaire est de même incapable de produire cet effet.

17. Pour ôter toute la lumière à un point de l'image du disque du soleil il faut substituer un globe égal à l' ouverture : un petit excès de celle-ci sur son disque laisse le passage à un anneau , qui a pour largeur cet excès , & pour longueur toute la circonference de la même ouverture qui dans votre lunette va au delà d'un pied entier. Si le diamètre du globe est de 30 lignes , la lumière interceptée ne sera à celle qui arrive qu'en raison de 9 à 7. Ce reste à la place d'une tache obscure laisseroit seulement une lumière un peu plus foible , mais bien peu sensiblement , comme on voit dans les pénombres qui ne sont jamais sensibles qu'assez près de l'ombre . Dans les éclipses totales du soleil la plus petite partie de son disque qui se découvre donne immédiatement une clarté qui forme un vrai jour. Vous pourrez bien aisément faire une observation analogue : en couvrant de plus en plus votre objectif avec du gros papier , vous verrez qu'une partie assez petite découverte vous fera voir le disque du soleil assez clair & bien éloigné de l'apparence d'une sombre obscurité.

18. Un globe d'un diamètre égal à celui de l'ouverture n'empêche tous les rayons que pour un seul point du disque du soleil : pour en cacher une partie d'une étendue donnée , il faut que son diamètre en soit plus grand comme OO' de manière qu' ayant prolongé les lignes EO , DO' jusqu'au disque en P , P' , l'angle FEP soit égal au demi-diamètre apparent de la tache quand elle est bien obscure : alors tout l'objectif est entierement caché

pour

pour tous les points qui se trouveront dans un cercle de disque dont le rayon est  $FP$ , & il n'y aura dans l'image  $ab$  aucun rayon d'aucun des points de ce cercle, ce qui formera une tache noire circulaire en  $pp'$ . La grandeur de l'excès NO du demi-diamètre du globe sur le demi-diamètre de l'ouverture  $CE = IN$  sera déterminée par l'angle  $NEO$  qui est le demi-diamètre apparent de la tache, & par la distance  $EN$  ou  $CI$ , & il sera à cette distance comme le sinus de ce petit demi-diamètre est au rayon. Comme les petits angles sont proportionnels aux sinus, l'excès du diamètre de ce globe sera à la distance, comme le sinus du diamètre apparent est au rayon. Ainsi pour déterminer cette grandeur il faut pouvoir apprécier la distance.

19. Quand même la théorie de l'allongement du foyer de l'objectif pour les objets peu éloignés auroit lieu pour les objets interposés entre le disque du soleil & la lunette, on ne pourroit pas déterminer cette distance, puisqu'au de-là d'un certain point cet allongement doit être tout à fait insensible. Il parroîtroit pourtant qu'à l'aide de vos observations on pourroit trouver au moins une limite, qui en devroit être surpassée. On démontre dans la Dioptrique, que si l'on fait la distance du foyer des rayons parallèles entr'eux à l'objectif  $= f$  & la distance de l'objet  $= d$ ; l'excès de la distance du foyer pour les rayons partis de cet objet sera  $= \frac{f^2}{d-f}$  (\*), dans laquelle formule la valeur  $f$  étant très-petite par rapport à la distance  $d$ , & constante, on voit

(\*) On tire aisément cette formule de celle que nous avons employée tant de fois dans ce volume, & qui est le fondement principal de la théorie des lentilles simples  $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ , où  $h$  est la distance focale de la lentille pour les rayons parallèles, qui est ici  $= f$ ,  $p$  la distance du point, vers lequel on conçoit que les rayons soient convergents en arrivant à la lentille qui sera ici  $= -d$  à cause de la divergence,  $x$  la distance du foyer des rayons divergents: ainsi on aura  $\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{d-f}{df}$ ,  $x = \frac{df}{d-f}$ ,  $x-f = \frac{df-df+f^2}{d-f} = \frac{f^2}{d-f}$ , ce qui est l'allongement énoncé.

voit bien que l'allongement sera en raison réciproque de cette même distance.

20. Si réellement la distance de 2075 toises que vous avez employée dans la première observation terrestre étoit de  $\frac{6}{12}$  de ligne & qu'on prenne  $\frac{1}{12}$  de ligne pour le dernier terme de l'allongement sensible, la limite de la distance nécessaire pour rendre insensible l'allongement seroit selon cette proportion de  $6 \times 2075$  toises = 12450 : mais réellement l'allongement pour cette distance est beaucoup plus petit. La formule  $\frac{f^2}{d-f}$  pour une ligne d'allongement donnera  $\frac{f^2}{d-f} = 1$ , & en réduisant  $f$ , qui dans votre lunette étoit de 40 pouces, en lignes, qui dans un pouce sont 12, & dans un pied  $12 \times 12$ , on aura  $f = 40 \times 12$ , &  $d = 40 \times 40 \times 12 \times 12 + 40 \times 12$  en lignes : comme la toise a  $12 \times 12 \times 6$  lignes, on aura  $d$  en toises  $\frac{1600}{6} + \frac{40}{72} = 267$  en négligeant la petite fraction qu'il y a de plus. Ainsi la distance pour une demi-ligne n'est que de 534 toises à la place de 2075, & pour ce nombre-ci n'y a que  $\frac{267}{2075}$  de ligne, qui fait un peu moins de 0,13, c'est-à-dire tant soit peu plus d'un huitième à la place de  $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ .

21. Pour la seconde des deux distances que vous avez employées & qui est de 285 toises on a par le même théorème  $\frac{267}{285} = 0,94$ . L'excès sur le nombre précédent 0,13 est = 0,81 qui est peu différent de celui que vous avez trouvé de  $\frac{9}{12} = 0,75$ , puisqu'il n'arrive pas à  $\frac{10}{12} = 0,83$ . On voit par-là que la proportion va assez bien, quand il s'agit des objets terrestres, & que vous avez saisi l'allongement nécessaire pour ces espèces d'objets à  $\frac{1}{12}$  de lignes près, quoique le maximum de la distinction, même dans les plus excellentes lunettes acromatiques, ne consi-

ste

ste pas dans un point indivisible. Mais quand on rapporte les objets terrestres au soleil, l'observation n'est pas d'accord avec la théorie, ce qui fait voir que quand il y a une grande différence de lumière dans différents objets, la distinction exige quelque différence dans la longueur de la lunette, comme on saroit déjà, & on en est assuré encore par vos observations.

22. Mais cette théorie ne peut pas s'appliquer aux objets qu'on voit comme de taches noires sur le disque du soleil. Elle appartient aux rayons qui étant partis d'un point de l'objet doivent se réunir dans le foyer de l'objectif. Ici on n'a pas de rayons partis de ces objets : on voit les différents points du disque du soleil par des rayons qui sont partis de cette distance immense, & la tache noire est produite par le défaut des rayons qui appartenient aux parties du disque qui restent cachées. Ainsi le foyer de tous le rayons qui arrivent à l'objectif, & qui forment l'image, doit se trouver à la même distance, & l'allongement du tube à la place d'aider la distinction, & causeroit de la confusion.

23. La confusion dans l'image de cette espèce d'objets, quand ils ne sont pas assez éloignés, comme des oiseaux qu'on voit passer quelque fois sous le disque du soleil, provient de toute autre principe que je m'en vais développer. Si l'on prolonge la ligne DO jusqu'à la ligne AB en Q, & que l'on prenne du côté opposé  $FQ' = FQ$ ; tous le points du disque du soleil, qui seront hors du cercle du diamètre  $QQ'$ , envoieront leurs rayons à toute l'ouverture DE, & auront dans leur image en *ab* la lumière toute entière. Pour les points du cercle PP' toute la lumière sera interceptée : pour ceux, qui se trouveront dans l'anneau PQ, P'Q', la même ouverture sera en partie découverte & en partie cachée par le globe OO'. Tout ce dernier espace aura dans l'image une espèce de pénombre, qui à côté de l'ombre sera bien obscure, & en s'éloignant d'elle ira en s'affoiblissant. Cette pénombre aura toute l'analogie avec la pénombre de la terre dans la lune, & la pénombre des corps opaques exposés au soleil, comme si l'ouverture DE étoit le soleil, & le disque de celui-ci en devoit recevoir l'ombre, & la pénombre.

24. La

24. La pénombre forme une nuance qui rend confuse la limite de l'ombre. Dans tous les deux cas la pénombre est très-forte à côté de l'ombre & s'affoiblit en s'éloignant : la position différente du corps interposé, qui forme l'ombre & la pénombre, fait que celle-ci est ou très-mince & insensible, ou bien large : dans le premier cas l'ombre paroît bien déterminée & tranchée, dans le second incertaine & nuancée : mais dans les ombres du corps exposé au soleil cela dépend de la distance de ce corps au plan sur lequel l'ombre est projetée, & dans les globes vus par la lunette dans son disque c'est la distance du même globe à l'objectif qui donne la détermination : la pénombre est très-mince dans le premier cas, quand cette distance est très-petite, & dans le second, quand elle est bien grande : en augmentant dans celui-là la distance du corps interposé à la surface, qui reçoive l'ombre, elle devient si confuse qu'on ne peut pas en apercevoir la limite comme on voit dans l'ombre que les hautes montagnes projettent sur le plaine : le même effet arrive dans celui-ci en diminuant la distance de ce corps à l'objectif, & pour avoir l'ombre tranchée il faut éloigner le globe.

25. La largeur de la pénombre est déterminée par l'angle POQ = DOE, qui est le diamètre apparent de l'ouverture DE vue de O. Si elle étoit par tout également sensible par elle-même, pour la rendre insensible par rapport à une tache si petite & empêcher la confusion, il faudroit supposer cet angle plus petit d'une seconde, ce qui donneroit la distance EO ou CI en lignes =  $206265 \times 40$ , puisque le rayon d'un cercle est égal à un arc de  $57^{\circ} 17' 45'' = 206265''$ , & l'ouverture qui seroit alors égale à une seconde est de 40 lignes. Cela se réduit à 9550 toises, qui multipliées par 0,8988 sinus de l'élévation sur l'horizon de  $64^{\circ}$  donne 8583 distance excessive pour la supposition des grélons tombants. Mais comme la pénombre n'est pas assez sensible pour troubler une distinction apparente que bien près de l'ombre, on pourra supposer sensible seulement sa dixième partie. Dans la lune la largeur de la pénombre de la terre doit être égale à-peu-près à son diamètre, & pourtant l'étendue de la con-

fusion de la limite , qui rend incertain le moment de l'immersion , & émersion des taches , ne paroît guère plus large d'un dixième de ce diamètre . Dans cette supposition la distance au-dessus de la surface de la terre ne resteroit que de 858 toises : on peut supposer les grêlons encore plus élevés , ce qui donneroit une distiction plus assurée .

26. Si l'on fixe le dixième de l'angle DOE à une seconde , le double débordement NO , MO' pris ensemble formera un quart de l'ouverture DE , parceque celle-ci sera de 10 secondes , & la somme de deux angles OEN , O'DM égale au diamètre apparent de la tache est de  $2\frac{1}{2}$  . Ainsi le grêlon entier seroit de 50 lignes , ou à-peu-près de 4 pouces . Mais il paroît qu'il devroit être plutôt plus gros , parceque nous avons pris plutôt un peu trop en prenant une seconde pour avoir la pénombre insensible par rapport à une tache de deux secondes & demi de diamètre , & trop peu en prenant un dixième de la pénombre totale pour en avoir une partie sensible en elle-même . Il est vrai qu'on doit diminuer un peu ce diamètre du grêlon par la considération qu'une petite partie du diamètre DE de l'ouverture qui reste à découvert ne donne pas une lumière assez vive pour n'être pas prise pour une obscurité & pour une espèce de tache à côté des parties du disque qui ont la lumière toute entière , sur-tout étant si affoiblie en passant par le verre obscur . Mais il y a des réflexions qui font augmenter ce diamètre . Un grêlon investi directement par le soleil doit avoir en lui-même une lumière assez vive , puisqu'il a beaucoup de transparence : il y a encore un débordement de la lumière , qui s'étend des dernières parties éclairées vers l'ombre , par le défaut de l'union des tous les rayons partis d'un point de l'objet lumineux & passés par l'objectif & par les humeurs de l'œil . Ce débordement de lumière fait paraître le bord de la partie lumineuse de la lune directement éclairée par le soleil étendu au de-là du bord de cette lumière pâle , qu'on voit sur le reste de son disque quelques jours après la nouvelle lune , & qui provient des rayons que la terre éclairée par le soleil réfléchit vers elle . Le diamètre de la tache formée par

l'om-

l'ombre seroit plus grand sans ce débordement de lumière , & les parties NO , MO du grêlon , qui doivent déborder , se trouveroient plus grandes .

27. Toute réflexion faite il paroît qu'on ne peut guère diminuer le diamètre des grêlons au-dessous de 3 pouces . Ces masses sont un peu trop lourdes pour être transportées par un vent à une obliquité si considérable , comme celle que nous avons trouvée par la direction du vent & de la montée apparente . La difficulté s'augmente en considérant qu'il n'y avoit aucune apparence d'orage , mais un petit nuage mince blanchâtre , qui ne donne aucun indice d'une formation de grêle , & d'un vent impétueux dans la partie intermédiaire de l'atmosphère : la considération que j'ai indiquée au commencement qu'on auroit dû entendre parler d'une grêle si extraordinaire qui devoit tomber dans Paris ou très-près , augmente encore plus la même difficulté . Mais je ne vois pas qu'on puisse attribuer le phénomène qu'aux grains extraordinaires de grêlons qui quelque fois arrivent à cette grosseur . Sur cet objet je développerai ici un peu plus ce que je n'ai fait qu'indiquer au commencement de cette lettre .

28. Quelqu'un pourroit soupçonner que le passage d'une bande d'oiseaux pouvoit donner une apparence de globules ronds , les parties extrêmes disparaissant à cause de la distance . La direction du mouvement réel , qui , comme nous avons vu ci-dessus , devoit être à-peu-près horizontal , si le vol des oiseaux suivoit la direction du vent , pourroit favoriser cette idée . Mais il y a des raisons qui s'y opposent à mon jugement d'une manière invincible . Premierement il y a le grand nombre de vos globules , qui paroisoient remplir le disque dont le passage a duré un demi-quart d'heure , tandis que chacun passoit par le disque dans deux secondes , & les distances mutuelles étoient très-petites , comme on voit dans la figure que vous en avois dessinée , de manière à empêcher de temps en temps la vue des taches du soleil : il y a la grande hauteur nécessaire pour faire disparaître la pénombre , & celle-ci est la raison , qui fait voir toujours mal tranchés les oiseaux que l'on voit souvent passer devant le disque du soleil :

il y a encore la forme même de taches rondes , sur laquelle les oiseaux ne pouvoient pas paroître , parceque le corps en a la figure allongée , & les ailes étendues ont une largeur plus grande que celle du corps . Tout cela fait voir que ce n'étoit pas une bande d'oiseaux .

29. Si le phénomène n'avoit pas été observé par vous , qui connoissez si bien les effets des lunettes , & avec la plus grande expérience réunissez une attention & une sagacité sans pareille , on soupçonneroit une illusion optique & un mouvement de petits corps opaques ou de petites boules d'air dans l'intérieur de l'œil : mais le grand nombre & le mouvement uniforme avec la même direction en ôte tout principe de soupçon : il n'y en auroit même , si le phénomène avoit été observé par une personne d'une habileté incomparablement inférieure à la votre . Ainsi je crois qu'il n'y a autre manière de l'expliquer que par des gros grêlons transportés par le vent à une obliquité très-extraordinaire pour des masses si lourdes . Il n'y a aucune des difficultés que j'ai exposées ci-dessus qui puisse démontrer positivement le contraire : elles font bien voir qu'un tel phénomène doit être infinitement rare , comme je l'ai dit aussi .

30. J'ajouterai que quoique ni les gouttes d'une pluie , ni les vapeurs ne peuvent pas être visibles , si l'on prend un de ces globules séparement des autres , le grand nombre qui s'en trouve ensemble peut obscurcir le disque & en rendre une partie plus obscure qu'un autre , ou la cacher tout à fait en interceptant en grande partie , ou en totalité les rayons partis de certains points du disque & dirigés vers l'objectif , & c'est sur cette forme que l'on voit passer les nuages par le même disque qui par un amas plus grand en est caché tout à fait si long temps .

31. Je finirai par proposer une expérience qui mettra sous les yeux toute la théorie que j'ai développée : mais pour la faire plus aisément on peut employer les petites lorgnettes de théâtre , qui ont une grande ouverture dans l'objectif , & un foyer très-court de manière à n'avoir besoin d'aucun allongement de lunette pour voir les objets qui ne sont éloignées que de 15 , ou 20

toi-

toises . Si l'on a un mur bien blanc à une distance beaucoup plus grande , & que l'on place un cercle de papier noir ci beaucoup plus-près de la lorgnette , ce cercle ne paroîtra point , quand son diamètre sera peu plus petit que celui de l'ouverture . Quand il sera plus grand , on verra une tache sur le mur , mais avec beaucoup de pénombre bien large . Pour éviter la pénombre il faudroit diminuer l'ouverture & éloigner beaucoup plus le cercle noir : mais il faut que le mur soit beaucoup plus éloigné que le cercle , parceque dans la fig. 4 un cercle d'un diamètre MN beaucoup plus petit couvrira toute l'ouverture DE , si la distance FC n'est pas bien plus grande que FI . Si le cercle n'est pas noir , mais coloré , & qu'il ait un autre objet derrière lui qui ne soit pas d'un simple blanc uni , on verra deux images posées l'une sur l'autre , dont une sera formée par les rayons partis de l'objet interposé qui tomberont sur tout l'objectif , & l'autre par ceux qui étant partis de l'objet éloigné passeront à côté de l'interposé de manière à tomber sur une partie du même objectif , ce qui fera qu'à parité de lumière dans les deux objets le plus éloigné paroîtra moins clair . En éloignant l'autre , on verra diminuer la confusion des limites , & si on arrive à une distance , ou que dans le cas du cercle noir plus grand mis avant un mur bien blanc & bien éclairé , on arrive à une bonne distinction ; on pourra déterminer quelle est la partie de la pénombre qui reste insensible & qu'ici par une simple supposition quoique raisonnable j'ai pris pour un dixième . Mais pour cela il faudra diminuer beaucoup l'ouverture de l'objectif , puisqu'autrement la distance nécessaire pour faire évanouir la pénombre & avec elle la confusion de la tache dans ces limites , seroit trop grande , ce qui rendroit difficile ou même impossible l'opération .

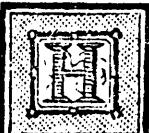
32. Par tout ce que je viens de détailler dans cette lettre devenue trop longue par la multiplicité des objets & des remarques nécessaires pour expliquer tout ce qui appartenoit à votre observation , on voit bien qu'elle méritoit toute l'attention . Vous ferez très-bien à la publier , puisqu'elle donne l'occasion de faire des recherches curieuses bien utiles & bien intéressantes pour l'Optique .

OPU-



## O P U S C U L U M VII.

### DE REFRACTIONIBUS ASTROLOGICIS.

1.  OC ego Opusculum conscripsi ante meam transmigrationem in Galliam, & transmisi jam tum ad Regiam Scientiarum Academiam Parisiensem, quæ ipsum typis destinaverat. La-Landius ejus compendium quoddam inseruit suæ Astronomiæ, annuncians editionem Opusculi ipsius, in qua deberent perspici omnia fusius, & luculentius exposita. Editio illa dilata est initio, fuit autem cur paullo post meum adventum Parisios repetendum censuerim tam hoc Opusculum, quam alia multa, quæ habebuntur in Tomis sequentibus, quæ itidem fuerant ab eadem Academia typis destinata: rationem innui in uno e præcedentibus Opusculis: ea omnia nunc demum hinc prodeunt. Mutavi, vel adjeci nonnulla admodum pauca in hoc Opusculo ad ubiorem explicationem, vel expressionum exactitudinem, ac arithmeticis calculis diligentius subductis obvenerunt pluribus in locis numeri accuratiores, quos veteribus illis substitui. Suppressi tamen partem postremi scholii, partem mutavi: suppressi etiam postremum paragraphum, pro cuius argumento uberius evolvendo substitui bina Opuscula separata, quæ hoc immediate subsequentur.

2. In hoc Opusculo post definitiones, & consectaria nonnulla, quæ exhibent formulas quasdam generales, persequor naturam, & proprietates curvæ descriptæ a radio intra atmosphærā, ac immoror potissimum in ea, quæ oritur a vi refringente vel accurate, vel saltem satis proxime constanti in omnibus distantiis a superficie Terræ. Eam suppositionem adhibuit Simpsonus, & ex ipsa eruit suam regulam pro comparandis inter se refractionibus respondentibus diversis distantiis a zenith: ostendo, quo pacto Bradleyus ex eadem derivaverit suam, deductis coefficientibus per binas refractiones observatas, quorum ope omnis refractionum tabula

com-

computatur, qua quidem regula Astronomi utuntur passim, ut consentiente cum observationibus, licet innitatur principio non solum non demonstrato, sed etiam minus probabili.

3. Porro illud invenio, ea omnia, quæ non tantum ii duo celeberrimi Auctores proposuerunt huc pertinentia, sed etiam quæ Bouguerius, quæ Cassinus protulerunt, consequi omnia ex eodem principio vis refractivæ proxime constantis, in qua hypothesi arcus a radio per atmosphærām descriptus debeat esse saltem proxime circularis. Reservavi sequentibus binis Opusculis methodum inquirendi in refractiones astronomicas per observationes idoneas, supponendo in priore regulam Bradleyi deductam hic ex hypothesi vis refractivæ proxime constantis, cum observationibus, quas demum obtinui ad rem idoneas, & accuratas, pro adjicienda methodi applicatione, in posteriore sine ulla alia suppositione physica præter æquabilitatem motus diurni intra horas 24, quam ego quidem arbitror omnino certam. Priorem methodum in eo paragrapho non satis evolveram, nec habueram observationes pro applicacione, posteriorem ne indicaveram quidem: nusquam autem habetur, quod sciam, instrumentum satis magnum, quod requiritur pro instituendis ejusmodi observationibus necessariis ad ejus methodi applicationem, quod quidem esset summæ per totam Astronomiam utilitatis: id indicabo in eo ipso posteriore Opusculo, quod erit hujusce Tomi postremum, habebitur autem integrum Opusculum de eodem in Tomo IV.

### §. I.

*De refractionum proprietatibus, quæ non dependent ab ulla hypothesi circa legem virium refringentium.*

1. RADIUS ab astro adveniat (fig. i Tab. X) per rectam DF usque ad atmosphærām, tum incurvatus a vi refractiva adveniat ad oculum in A. Erit directio DF tangens curvæ, quæ tangens continuata occurret alicubi in I rectæ AB ipsam curvam tangentem in A: erit AB directio visa astri ipsius. Recta Ad tendens ad astrum ab A, erit ad sensum parallela rectæ FD ob immanem

astri

astri distantiam . Hinc ductâ a centro terræ rectâ CAZ , quæ tangenti DF occurrat in E , & ductis CH , CG perpendiculis in eas binas tangentes , erit ZAd distantia vera ipsius astri a zenith , ZAB = CAG distantia apparet , adeoque dAB = DIB = GIH , nimimum angulus binarum tangentium , erit refractio astronomica .

2. Motus per curvam FA fiet secundum leges curvarum , quæ describuntur viribus tendentibus ad centrum C , & pendentibus a distantiis ab eodem centro , ita ut in pari distantia sint eadem : nam vires refractivæ diriguntur ad sensum ad ipsum figuræ centrum ob figuram ad sensum sphæricam sive telluris , sive superficerum terminantium strata atmosphæræ homogenea . Supponemus hinc legem illam notissimam , quæ profluit ab æquabili descriptione arearum terminatarum ad commune centrum virium C , quod nimimum velocitas in quavis ejusmodi curva sit in ratione reciproca perpendiculi ducti a centro in tangentem . Erit ergo velocitas in F ad velocitatem in A , ut CG ad CH . Quare si fiat CA = 1 ; celeritas in quovis puncto curvæ =  $c$  , perpendiculum ex centro ductum in tangentem transeuntem per idem punctum =  $y$  . Celeritas finalis in A =  $c'$  . Angulus CAG =  $\alpha$  , adeoque CG =  $\sin \alpha$  : erit  $c = \frac{c' \sin \alpha}{y}$  . Alias proprietates hinc nobis usui futuras demonstrabimus .

3. Sit FA (fig. 2) arcus infinitesimus (\*) cum rectis FC , AC , ductis ad centrum C , ac binis tangentibus FIH , AI , quarum priori occurrat in L recta ex A parallela CF : tum rectæ CF occurrat in Q arcus circuli ductus centro C , intervallo CA , & recta FN perpendicularis ad tangentem FH sit diameter circuli osculatoris . Concipiatur autem recta NR perpendicularis ad CF ,

tum

(\*) Satis patet ex hac ipsa expressione , hunc arcum non esse nisi particulam infinitesimam ejus , qui habetur in figura 1 . Solum centrum C hujus figuræ est idem , ac illud præcedentis : puncta A , F , I , H hujus sunt tantum analogæ punctis iisdem illius , ut & puncta N , R hujus punctis N' , R' illius analogæ , non eadem .

tum chorda FA cum perpendiculari QO in ipsam, & CH sit perpendicularum in tangentem FIH.

4. Si in fig. 1 angulus ACF dicatur  $\alpha$ , & refractio HIG dicatur  $r$ ; erit in fig. 2  $FCA = dx$ , &  $LIA = dr$ , cum ille sit differentia anguli in centro C, & hic inclinatio tangentis sequentis ad antecedentem, quarum inclinationum summa est inclinatio (in fig. 1) postremæ tangentis AI ad primam FI. Sit præterea  $dt$  tempusculum, quo in fig. 2 percurratur arcus FA, recta CA =  $z$ , adeoque  $FQ = dz$ , ac demum vis refractiva in F =  $u$ . Erit autem  $CH = y$  celeritas in F =  $c = \frac{c \sin \alpha}{y}$ .

5. In primis poterit poni spatiolum FA proportionale celeritati, & tempusculo =  $cdt$ , ac LA effectus vis acceleratricis, nimirum spatiolum respondens vi continuo agenti, proportionale ipsi vi, & quadrato tempusculi ipsius =  $udt^2$ . Porro vis secundum  $FQ$ , nimirum vis refractiva absoluta  $u$ , ad vim respectivam secundum FA erit, ut  $FQ$  ad FO, sive ut FA ad  $FQ$ . Erit igitur  $cdt : dz :: u : \frac{udz}{cdt}$ , qui erit valor vis respectivæ. Porro incrementum celeritatis est, ut vis respectiva, & tempusculum, adeoque erit  $dc = \frac{udzdt}{cdt} = \frac{udz}{c}$ , nimirum  $cdc = udz$ . Est autem  $cdc$  dimidium incrementum quadrati velocitatis, unde habetur hujusmodi theorema: *Incrementum quadrati velocitatis in singulis curvæ arcibus exiguis est, ut vis absoluta, & accessus ad centrum ibidem: hinc autem consequitur & illud: Si binæ particulæ luminis pertinentes ad binos radios semel habuerint in paribus a centro distantiis velocitates æquales; habebunt eas itidem æquales in aliis omnibus itidem paribus.* Habebunt enim in singulis accessibus æqualibus sequentibus vires æquales respondentes æqualibus distantiis, adeoque æqualia incrementa quadratorum velocitatum æqualium, quæ quadrata erunt proinde semper æqualia, adeoque & velocitates simplices pariter æquales erunt.

6. Jam vero radii omnes homogenei adveniunt ad summam atmosphærā cum velocitatibus æqualibus, adeoque omnes, qua-

cumque directione veniant, & progrediantur, paribus a centro terræ distantiis habebunt velocitates æquales. Valor c' velocitatis finalis erit constans pro radiis omnibus homogeneis, ac in fig. i eadem pro omnibus ratio CH ad CG, nimirum (num. 2) ratio celeritatis finalis ad initialem.

7. Porro ea ratio erit proxima rationi æqualitatis, cum nimis velocitas luminis ingredientis in atmosphærā sit ingens, & vis refractiva atmosphæræ ipsius perquam exigua, unde fit, ut curvatura radii ipsam permeantis sit itidem perquam exigua, & positio tangentis IAG parum abludat a positione alterius FIH. Verum illud idem constat ex observationibus astronomicis, quæ refractionem exhibent semper exiguum. Cum sit sinus CIA ad sinum CAI, sive ad sinum distantiæ apparentis a zenith ZAI: = CAG, ut est CA ad CI, & ob exiguum atmosphæræ altitudinem ea ratio sit proxime ratio æqualitatis; erunt proxime æquales ipsi anguli CIA, CAG, existente semper exiguo angulo ACI, qui est eorum differentia, ob angulum externum CAG æqualem binis internis oppositis CIA, ACI. Hinc refractio GIH, cum sit exigua respectu distantiæ apparentis a zenith ZAI, sive CAG, erit exigua etiam respectu ipsius anguli CIG, adeoque ratio sinuum angulorum CIG, CIH, quæ est ratio perpendicularium CG, CH, parum abludet a ratione æqualitatis, sicut & velocitas finalis ab initiali, unde fiet, ut parum admodum inter se differant velocitates omnes ejusdem radii per totam atmosphærā, quæ omnes sunt intermediæ inter initialem, & finalem.

8. Quæcumque mutatio fiat in constitutione atmosphæræ, dummodo constitutio in A fuerit eadem; velocitas luminis ibidem erit eadem: nam incrementum quadrati velocitatis erit, ut summa omnium productorum e viribus agentibus per omnia strata, & crassitudinibus eorumdem stratorum, nimirum (num. 5) omnium *udz*. Concipiatur atmosphæra divisa in plurima strata ejusdem crassitudinis, & vis, qua stratum quodcumque urgebit in accessu particulam luminis versus centrum terræ, erit æqualis, & contraria illi, qua idem stratumurgebit ipsam versus partem contrariam in recessu, adeoque hæc nova actio contraria elidet effectum illius

præcedentis, & remanebit in quovis strato solus effectus ejus vis, qua id stratum egit in eam particulam in accessu ad ipsum, tanquam si immediate eadem particula transisset ex æthere in illud stratum. Generaliter habetur, & rite demonstrari potest hoc theorema: *Ubi lumen levioris ad certum quoddam medium, ut immediate ex æthere, vel post transitum per quocumque, & quæcumque media factum sub angulis quibuslibet; semper in eo postremo medio habebit velocitatem eandem.* Et ob eam causam, si lumen delatum ad vitrum post transitum ex aere per quævis media, egrediatur ex eo in dato angulo obliquo, habet eandem refractionem, quam si immediate transisset in ipsum vitrum. Verum hinc nobis usui erit tantummodo theorema, quod demonstravimus, velocitatis in A pendentis pro radio quovis a sola constitutione atmosphæræ ibidem, quæcumque mutatio accidat in stratis superioribus, quæ nimirum velocitas pendebit a sola constitutione atmosphæræ in A, a qua idcirco pendebit ratio CH ad CG.

9. Quoniam pro radiis omnibus altitudo atmosphæræ eadem est; erit eadem pro omnibus recta CF: atque adeo eadem erit pro omnibus ratio sinus anguli CFH, qui æquatur angulo incidentiæ in summam atmosphæræ ad verticem opposito, ad sinum anguli CAG refracti in A. Sunt enim sinus illi  $= \frac{CH}{CF}, \frac{CG}{CA}$ ; nimirum si velocitas in A ad velocitatem in F, sive CH ad CG fiat, ut  $i + b$  ad  $i$ , & altitudo atmosphæræ dicatur  $e$ ; ea ratio erit  $\frac{i+b}{i+e}$  ad  $i$ . Fiat  $\frac{i+b}{i+e} = m$ , & erit  $i:m::\sin.CAG = \sin.a:\sin.CFH = m \sin.a$ . Cum vero in quadrilineo CFIA tam quatuor anguli interni, quam bini cum suis externis in A, & I æquentur simul quatuor rectis; demendo binos illos internos, erunt bini externi æquales reliquis binis internis, nempe CFI + ACF = CAG + GIH, adeoque CFI, sive CFH = CAG - ACF + GIH =  $a - (x - r)$ . Quare erit primo  $m \sin.a = \sin.(a - (x - r))$ , sive  $i:m::\sin.a : \sin.(a - (x - r))$ . Deinde cum summa sinuum sit ad differentiam, ut tangens semisummæ angulorum ad tangentem semidifferentiæ; erit  $i + m : i - m :: \tan.$

$\tan(a - \frac{1}{2}(x - r)) : \tan(\frac{1}{2}(x - r))$ , quæ ratio cum sit constans ; erit  $\tan(\frac{1}{2}(x - r))$ , sive ipse angulus exiguus  $x - r$ , ut  $\tan(a - \frac{1}{2}(x - r))$ , sive ut tangens distantiæ apparentis a zenith imminutæ per angulum exiguum  $\frac{1}{2}(x - r)$ .

io. Si  $x$  ad  $r$  habent rationem constantem ; erit ipsæ refractio  $r$ , ut tangens prædictæ distantiæ imminutæ quodam multiplio refractio-  
nis. Simpsonus (\*) invenit, haberi eam rationem constantem in hy-  
pothesi vis refractivæ constantis per totam atmosphærā, ac ex bi-  
nis refractionibus per observationes Astronomicas determinatis e-  
ruit  $r = \frac{2}{11}(x - r)$ , sive  $11r = 2x - 2r$ , &  $x = 6\frac{1}{2}r$ . Bradle-  
yus valori  $\frac{2}{11}$  substituit  $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ , unde prodit  $x = 7r$ , adeoque  
 $a - \frac{1}{2}(x - r) = a - 3r$ . Inde autem ortum duxit regula, quam  
paulo ante obitum invenit teste La-Landio (\*\*), quod nimirum  
refractio sit, ut tangens distantiæ apparentis a zenith imminutæ  
per triplam refractionem ipsam. Bouguerius (Acad. Paris. an. 1749)  
eandem proportionalitatem quantitatum  $x$ , &  $r$  invenit pro hypo-  
thesibus, quæ, ut infra videbimus, reducuntur ad vim con-  
stantem. Cassinus (Acad. Paris. an. 1714) assumpsit formam curvæ  
circularem, quam infra ostendemus provenire itidem ab eadem  
hypothesi vis constantis. Evolvemus ordine suo, & methodo  
quammaxime licebit simplici, eorum auctorum comperta, quæ,  
quod haud scimus, an ab alio quopiam fuerit animadversum, pen-  
dunt omnia ab eadem communi lege virium proxime æqualium per  
totam atmosphærā : addemus autem & ea, quæ nobis præterea  
sese obtulerunt in eadem perquisitione. Interea hīc persequemur  
illa, quæ non pendent ab ulla hypothesi circa legem virium re-  
fringentium.

ii. Si concipiatur, punctum C abire in infinitum, manente  
finitâ distantiâ superficiei supremæ ab infimâ, ratio CF ad CA  
fiet ratio æqualitatis. Fiet autem angulus CFH æqualis angulo  
incidentiæ, CAG angulus refractus, & ratio eorum sinuum eva-  
det

(\*) Simpson mathematical dissertations 1743.

(\*\*) Astronom. par M. de La-Lande première Edit. p. 822.

det sola ratio perpendicularium CH, CG. Is casus obtinet, ubi radius transit ex uno medio in aliud trans superficiem refringentem, quæ illa dirimit, agentibus viribus refringentibus hinc, & inde in exigua distantia ab ea superficie, secundum directiones ipsi perpendicularares. Inde pro refractionibus omnibus eruuntur sequentia theorematum: *Sinus incidentiae ad sinum anguli refracti erit in ratione constante pro radiis homogeneis utcumque transuentibus per superficiem dirimentem bina media heterogenea,* illa ratio erit inversa velocitatis in primo medio ad velocitatem in secundo.

12. Si angulus ACI dicatur  $\alpha'$ ; erit CIG sive CIA =  $a - \alpha'$ ; CIH =  $a - \alpha' + r$ , quorum sinus cum sint, ut CG, CH, sive ut velocitates 1,  $1 + b$ ; erit  $(1 + b) \times \sin.(a - \alpha') = \sin.(a - \alpha' + r)$ . Porro e formulis trigonometricis sinus anguli compositi e binis æquatur binis productis ex sinu prioris in cosinum posterioris, & e sinu posterioris in cosinum prioris. Hinc considerando angulum  $a - \alpha' + r$  divisum in duos  $a - \alpha'$ , &  $r$ , erit  $\sin.(a - \alpha' + r) = \sin.(a - \alpha') \times \cos.r + \sin.r \cos.(a - \alpha')$ , sive cum ob exiguitatem anguli  $r$  possit sumi radius pro ejus cosinu, & is ipse pro suo sinu, erit  $= \sin.(a - \alpha') + r \cos.(a - \alpha')$ , adeoque erit  $(1 + b) \sin.(a - \alpha') = \sin.(a - \alpha') + r \cos.(a - \alpha')$ , ac dividendo per  $\sin.(a - \alpha')$ , & ponendo  $\cot.\propto \frac{\cos.}{\sin.}$ , erit  $1 + b = 1 + r \cot.(a - \alpha')$ , sive  $b = r \cot.(a - \alpha')$ . Ad eruendos plures usus hujus formulæ notandum illud, valorem  $\alpha'$  debere esse satis exiguum respectu  $a$ , potissimum, ubi ipse  $a$  non nimis accedit ad quadrantem. Est enim  $\sin.CAG = \sin.a : \sin.CIG = \sin.(a - \alpha') :: CI : CA$ , quæ ratio parum abludit ab æqualitate ob exiguum altitudinem atmosphæræ: exigua autem mutatio in sinu inducit exiguum mutationem in angulo, ubi non nimis acceditur ad rectum.

13. Hinc primo quidem haberi poterit valor  $b$  pertinens ad incrementum velocitatis satis proxime per unicam etiam refractionem  $r$  datam pro distantia a zenith =  $a$  ex observationibus astronomicis, & rite assumptam, sumendo  $b = r \cot.a$ . Bradle-

yus

yus (*connoissance des mouvements célestes* 1768) pro  $\alpha = 60^\circ$  habet  $r = 1.38''$ , 4. Hinc assumendo  $\sin r$  pro  $r$ , ut reducatur ad numeros, in quibus unitas est radius (\*), erit  $b = 0,0002755$ : pro  $\alpha = 50^\circ$  habet  $r = 1.7''$ , 9, unde  $b = 0,0002762$ , qui valentes satis congruant inter se, ut oportebat. Simpsonius pro  $\alpha = 60^\circ$  habet  $r = 1.30''\frac{1}{2}$ , unde provenit  $b = 0,0002533$ . Caillius pro  $\alpha = 60^\circ$  habet  $r = 1.54''$ , 4, unde profluit  $b = 0,0003202$ : at idem pro distantia a zenith  $50^\circ$  habet  $r = 1.17''$ , 9, unde prodit  $b = 0,0003169$ .

14. Porro valorem  $b$  immediate ex opticis observationibus diligentissime institutis coram Regiae Societatis Praeside, jam olim determinavit Hauxbeius ope theorematis numeri 11 de celeritate reciproce proportionali illis sinibus: notata nimurum refractione radii in transitu e vacuo Boyliano in aerem cum inclinatione graduum 45, invenit eum valorem  $= 0,000264$ , quod facile fit ex illo theoremate, ex quo habetur valor  $1+b$  dividendo sinum incidentiarum per sinum anguli refracti. Erat tum altitudo barometri pollicum Londinensium  $29\frac{1}{2}$ , adeoque Parisiensium 27. lin. 8. Eundem autem valorem  $b$  mutata intra machinam aeris densitate, invenit proportionalem altitudini barometri densitatem eandem indicantis. Ea determinatio est fere accurate media inter valores Bradleyanum, & Simpsonianum. Caillianus valor est nimis magnus, licet omissio illa valoris  $\propto$  reddat illum potius tantillo minorem, ob cotangentem anguli majoris  $\alpha$  minorem, quam minores

(\*) Facilius reducentur valores arcuum ad partes unitatis æqualis radio, si ipsi reducantur ad secunda, & logarithmo numeri secundorum addatur logarithmus constans 4,685575, qui est complementum arithmeticum logarithmi 5,314425 numeri 206264, 8 secundorum contentorum in radio: est enim ut hic numerus ad numerum secundorum in arcu quovis, ita radius ipse  $\equiv 1$ , ad ejus partes contentas in eodem arcu: nam nec arcus est accurate æqualis sinui, nec sine usu partium proportionalium obtinetur sinus arcus habentis præter secunda fractiones secundorum: accedit, quod differentiarum logarithmorum sinuum exiguorum non sunt proportionales differentiis arcuum, ut idcirco debeant prius determinari sinus numerici per partes proportionales, tum horum numerorum logarithmi: usque adeo est simplicior, & tutior ea alia methodus.

ris  $\alpha - \pi'$ . Bini etiam ejus valores paullo minus inter se con-  
gruunt, quam bini Bradleyani. Jamdudum dubitatur de refra-  
ctionibus Caillianis, quæ videntur omnes majores justo. Is qui-  
dem suam tabulam computavit ex immenso numero observationum  
diligentissime institutarum, combinationibus adhibitis sane inge-  
niosissimis: at timetur, ne ejus sector non satis tutâ methodo,  
vel non satis accurate verificatus continuerit arcum totalem mino-  
rem justo, qui idcirco omnes angulos exhibuerit in eadem ratio-  
ne justo majores. Optandum esset, ut iterum verificaretur ille  
sector accuratissime, & observationes opticæ pro valore quanti-  
tatis  $b$  iterum diligenter instituerentur, factis novis inquisitioni-  
bus in refractiones per observationes astronomicas; cum usque  
adeo differant tabulæ duorum primi ordinis Astronomorum Cail-  
lii, & Bradleyi.

15. Ex eadem formula num. 12. habetur hoc theorema: *Refra-  
ctiones in distantiis a zenith non nimis proximis quadranti  
sunt, ut tangentes ipsarum distantiarum quamproxime.* Sunt  
enim hic, ut  $\frac{b}{\cot.(\alpha - \pi')} = b \tan.(\alpha - \pi')$ . Idem exhibet & Bra-  
dleyana regula, quæ (num. 10) facit eam proportionalem tangen-  
ti  $\alpha - 3r$ . Nam ea tangens parum admodum mutatur, addito  $3r$ ,  
donec angulus  $\alpha$  satis distat a recto. Verum illa Bradleyana re-  
gula innititur hypothesi vis refractivæ constantis, dum hic habe-  
tur independenter a quavis hypothesi.

16. Patet ex eadem formula, refractionem in distantiis a ze-  
nith non ita proximis quadranti debere esse quamproxime con-  
stanter easdem, ubi sit eadem constitutio atmosphæræ in A, quæ  
cunque accidat mutatio in stratis atmosphæræ superioribus, &  
mutatâ eâ constitutione in ipso loco observatoris, debere muta-  
ri in ratione valoris  $b$ , qui ex Hauxbeianis observationibus est  
proportionalis altitudini barometri; pendet autem etiam a statu  
thermometri: at prope horizontem debebit esse admodum varia-  
bilis, positâ etiam eâdem barometri, & thermometri constitutio-  
ne. Nam variatio, quæ accidit in superioribus atmosphæræ stra-  
tis, cum mutet formam curvæ, mutat positionem intersectionis

I bi-

I binarum tangentium in recta AB determinante apparentem distantiam a zenith, adeoque mutat angulum ACI =  $\alpha'$ . Porro, ut diximus, is totus in distantia non nimis accedente ad quadrantem est exiguis, & parum mutat valorem  $\tan.(\alpha - \alpha')$ , si totus etiam omittatur, adeoque multo minus ejus mutatio turbabit valorem  $\frac{b}{\cot.(\alpha - \alpha')}$ , sive  $b \tan.(\alpha - \alpha')$ . At prope quadranten, & is multo major mutatur magis, & exigua etiam ejus mutatio mutat plurimum valorem ejus tangentis, cum nimirum tangens quadrantis sit infinita, licet tangens arcus utcumque parum ab eo differentis finita sit. Et hæc quidem est vera ratio discriminis summi, quod observatur in refractionibus horizonti proximis, non illa, quæ vulgo adduci solet, discriminis inter refractions cælestes, & terrestres. Quivis radius, qui appellit ad oculum, permeat omnia superiora atmosphæræ strata, & sentit omnes omnium vires refractivas, quanquam non æque diu, ob variam itineris longitudinem: sed variatio anguli  $\alpha'$  detrahendi & est multo major prope horizontem, & multo magis ibidem mutat valorem tangentis, quæ ducta in  $b$  debet exprimere refractionem.

17. Ex illa proportione (num. 12)  $1 + b : 1 :: \sin.(\alpha - \alpha' + r) : \sin.(\alpha - \alpha')$  eruitur etiam, fore  $2 + b : b :: \tan.(\alpha - \alpha' + \frac{1}{2}r) : \tan.(\frac{1}{2}r)$ ; assumendo nimirum summam, & differentiam sinuum, & tangentem semisummæ, ac semidifferentiæ arcuum. Quare cum ratio  $2 + b : b$ , sit constans, &  $\tan. \frac{1}{2}r$  sit, ut  $r$ ; erit refraction ut  $\tan.(\alpha - (\alpha' - \frac{1}{2}r))$ , sive ut tangens distantiae apparentis a zenith imminutæ per angulum exiguum  $\alpha' - \frac{1}{2}r$ , quod num. 9 inventum fuerat ope valoris  $\frac{1}{2}(\alpha - r)$  itidem exigi.

### §. II.

*De natura curvæ a radiis descriptæ, & refractionum proprietatibus pendentibus a lege virium, potissimum earum, quæ sint constanter eadem per totam atmosphærā.*

18. INQUIRENDO in ipsam naturam curvæ, quam radius describit per atmosphærā, resumendi sunt in fig. 2 valores numero-

merorum 2, 4, 5. Cum ibi sit  $AF = cdt$ , ac binæ tangentes AI, FI assumi possint in eo arcu infinitesimo pro æqualibus inter se, & simul æqualibus ipsi AF; erit  $AI = \frac{1}{2}cdt$ : angulus autem ALH æqualis interno, & opposito CFH assumi poterit pro æquali CFA ob AFH infinitesimum, & ipsius CFA sinus erit  $\frac{AQ}{AF}$  ob angulum AQF rectum. Cum autem arcus AQ sit, ut angulus ACF  $= dx$ , & radius CA  $= z$ ; is poni poterit  $= zd\alpha$ , adeoque ob  $AF = cdt$  erit is sinus  $= \frac{zd\alpha}{cdt}$ . Jam vero est  $AI = \frac{1}{2}cdt$ :  $AL = udt^2 :: \sin. ALI = \sin. ALH = \frac{zd\alpha}{cdt} : \sin. AIL = \sin. dr = dr$ , cum nempe angulus infinitesimus poni possit pro suo sinu. Quare multiplicando terminos extremos & medios habebitur  $\frac{1}{2}cdr dt = \frac{uzd\alpha dt}{c}$ , sive  $dr = \frac{2uzd\alpha}{c^2}$ . Ea æquatio exprimit naturam curvæ, sive rationem, quam habet incrementum  $dr$  refractionis, sive flexus tangentis respondens cuivis arcui FA, ad angulum ACF  $= dx$ , quem arcus idem subtendit ad centrum: ea relatio est  $\frac{dr}{dx} = \frac{2uz}{c^2}$ . Si vis  $u$  detur per distantiam  $z$  a centro C; dabitur ipsa ratio per eandem, cum (num. 5) sit  $c dc = u dz$ , adeoque  $\frac{1}{2}c^2 = S.udz$ , assumptâ constanti e quadrato velocitatis initialis summæ atmosphæræ.

19. Verum cum pari distantiâ  $z$  a centro C, sit eadem & vis  $u$ , & celeritas  $c$ ; jam habetur hoc theorema: *Pari a centro distantia, incrementa refractionum pro binis radiis quibuslibet sunt inter se in arcubus æque accendentibus ad centrum ipsum, ut anguli, quos subtendunt in centro iidem arcus.* Cum enim sit pro utraque idem valor  $\frac{dr}{dx}$ , erunt bini  $dr$  inter se, ut bini  $dx$ .

20. Quoniam mutatis etiam distantiis, celeritates mutantur parum admodum (num. 7), & ob exiguum altitudinem atmosphæræ ratio distantiarum itidem sit quamproxime ratio æqualitatis; haberi poterit pro constanti valor  $\frac{2z}{c^2}$ , adeoque erit  $\frac{dr}{dx}$ , ut vis  $u$ .  
Tom. I I. Fff Quod

Quod si vis refractiva  $\alpha$  sit, ut  $\frac{c^2}{z}$ , nimirum etiam ipsa ad sensum constanter eadem in quavis altitudine atmosphæræ; in ea hypothesi ratio  $\frac{dr}{dx}$  erit constans, sive eadem pro omnibus radiis homogeneis.

21. Hæc autem est illa hypothesis numeri 10, & theorema Simpsonianum ex eadem fluens, quod h̄ic sponte consequitur ex æquatione illâ adeo simplici, & deductâ methodo adeo expeditâ: ipse multo complicatiorem adhibuit. Nos h̄ic, aliis hypothesisibus omissis, persequemur tantummodo consecaria hujus, in qua vis refringens sit proxime constans, nimirum accurate, ut  $\frac{c^2}{z}$ . Vis erit constans, si densitas materiæ refringentis crescat uniformiter in descensu versus superficiem terræ, cum ea debeat esse excessus actionis cuiusvis strati inferioris supra stratum superius, & idcirco is quidem eam proportionalitatem eorum angulorum ponit pro hypothesi densitatis ipsius crescentis uniformiter. Ratio sinus distantiae apparentis a zenith, sive anguli CAG (fig. 1) =  $a$ , ad sinum anguli CFH =  $a - (x - r)$  est constans pro radiis omnibus, & valor  $x - r$ , qui est eorum angulorum differentia, est in hac hypothesi Simpsoniana quoddam multiplum refractionis  $r$ , ob  $x$  proportionalem ipsi  $r$ . Porro docebimus inferius, quomodo ii duo valores constantes inveniri possint e binis refractionibus observatis, quorum alter exprimit rationem angulorum, & est (numer. 9)  $\frac{1+b}{1+e} = m$ , alter exprimit illud multiplum, qui si dicitur  $n$ , erit  $m \sin.a = \sin.(a - nr)$ .

22. Eandem rationem constantem valoris  $x$  ad  $r$ , sive anguli subtensi in centro ad refractionem, invenit & Bouguerius ( Acad. Paris. an. 1749 ) ex hypothesis virium, quas ipse censuit admodum varias, & generales, sed ut num. 10 innuimus, facile ostenditur, omnes recidere in vim proxime constantem. Pendet enim apud ipsum vis ab ordinatis ad curvam quandam, quas ponit proportionales perpendiculo demisso e centro in tangentem; & id perpendiculum est quamproxime constans. Eas ipse assumit e gene-

genere parabolarum ad habendam ejusmodi proportionalitatem valorum  $x$ , &  $r$ : verum cujuscumque naturæ sint ex curvæ, dummodo ordinatæ ipsarum parum admodum mutantur a summa atmosphera ad imam, vires remanent ad sensum constantes, & habebitur ejusmodi proportionalitas, ut hic est demonstratum. Hic autem juxta numerum 10, cum (num. 9)  $x - r$  sit, ut tangens distantiæ apparentis a zenith imminutæ per angulum exiguum  $\frac{1}{2}(x - r)$ , erit ipsa refractionis ratio, ut tangens ejus distantiæ imminutæ per angulum exiguum, & quidem multiplum refractionis ipsius. Demonstratum est (num. 17), eam esse, ut est tangens ejus anguli imminuti per  $x' - \frac{1}{2}r$ . Id quidem haberi posset etiam sine æqualitate valorum  $x' - \frac{1}{2}r$ , &  $\frac{1}{2}(x - r)$ . Nam pro binis  $x$  habentur bini valores  $x$ , & bini  $x'$ , quorum priores duo possunt adhuc minuere illas tangentes, ad quas pertinent, in eadem ratione, ac posteriores duo. Adhuc tamen facile ostendemus, eos fore proxime æquales inter se, ubi determinatis circulis curvam nostram osculantibus, invenerimus, eam in hac virium hypothesi esse proxime circularem. Ad ejusmodi perquisitionem faciemus gradum.

23. In triangulis AFL, FAR fig. 2 angulus FAL æquatur alterno AFR, & angulus AFL chordæ cum tangente angulo FRA insistenti in alterno segmento. Hinc est  $AL:AF :: AF:FR = \frac{AF^2}{AL}$ . Tum in triangulis rectangulis FRN, CHF ob rectas NF, CH perpendiculares eidem FH angulus NFR erit æqualis alterno FCH, adeoque ea triangula similia, &  $CH:CF :: FR = \frac{AF^2}{AL} : FN = \frac{CF \times AF^2}{CH \times AL}$ . Jam vero est  $CF = z$ ,  $AF = cdt$  (numer. 5),  $AL = udt^2$ , & cum (num. 2) sit  $c = \frac{c \sin. a}{y}$ , &  $CH$  hujus figuræ  $= y$ , erit ipsa  $CH = \frac{c \sin. a}{c}$ . Hisce valoribus substitutis, habetur diameter circuli osculatoris  $FN = \frac{c^3 z}{u c \sin. a}$ , ex quo valore diametri circuli osculatoris æquatio ad curvam deducitur per formulas cognitas.

24. Ob  $c^3$  constantem pro radiis omnibus,  $\sin.a$  pro unico quovis radio, erit diameter circuli osculatoris, generaliter ut  $\frac{c^3 z}{u \sin.a}$ , pro quovis radio ut  $\frac{c^3 z}{u}$ . Quod si comparentur inter se bina binorum radiorum puncta assumpta in eadem distantia a terra; erit in iis idem valor  $c$ ,  $z$ ,  $u$ , adeoque habebitur hujusmodi elegans theorema: *diameter circuli osculatoris in punctis radiorum quorumvis æque remotis a superficie terræ est in quavis virium hypothesi reciproce, ut sinus distantiae apparentis a zenith objecti per eos radios visi.* Quod si in fig. 1 sit AR' semidiameter circuli osculantis in A radium horizontalem, & recta ex R' perpendicularis ad AC, occurrat in N' rectæ perpendiculari ad tangentem IAG ductæ per A; erit angulus R'N'A complementum R'AN', adeoque æqualis CAG, & R'A ad AN', ut  $\sin.R'N'A$  ad radium. Quare AN' erit semidiameter circuli osculantis in A radium FA, ac omnium circulorum omnes radios osculantium in A jacebunt centra in eadem recta infinita perpendiculari rectæ AC ducta per R'.

25. Quoniam vero  $c$ , &  $z$  parum admodum mutantur; erit ipsa semidiameter proxime in punctis diversis ejusdem radii, reciproce ut vis. Et, si vis sit ad sensum constans, erit ubique proxime eadem: adeoque in hypothesi vis proxime constantis, *forma curvæ erit proxime circularis, & omnium ejusmodi circulorum centra jacebunt in illa eadem recta R'N'*. Si u sit, ut  $c^3 z$ , nimirum si vis sit in ratione composita ex directa triplicata celeritatis, & simplici distantiae a centro terræ; curva radii cuiusvis erit accurate circularis. Porro cum celeritas  $c$  crescat decrescente distantia  $z$ , vis proportionalis valori  $c^3 z$  eo magis ad constantem accedet. Numero 20 assumpta est vis proportionalis valori  $\frac{c^2}{z}$ , adeoque in eâ hypothesi, ex qua accurate profluxerunt regulæ Simpsoniana, & Bradleyana, est  $\frac{c^3 z}{u}$ , ut  $cz^2$ : nimirum diameter circuli osculatoris in eodem radio directe ut

ut celeritas , & quadratum distantiae . Ea ratio non exhibet valorem accurate constantem , cum , ut patebit inferius (num. 39) , magis mutetur distantia , quam celeritas : adhuc tamen ob exiguum utriusque mutationem forma curvæ parum abudit a circulare etiam in ea hypothesi .

26 Ejusmodi theoria exhibet formam curvæ circularem , quam jam olim assumpserat Cassinus (num. 10) . Porro forma ipsa circularis præbet etiam demonstrationem ejus , quod proposuimus num. 18. Erunt enim æquales ex natura circuli tangentes FI , AI . Est autem CI : FI :: sin . CFI : sin . FCI , & CI : AI :: sin . CAI = sin . CAG : sin . ACI , quæ ratio erit utrobique eadem : adeoque cum sit sin . CAI = sin . CAG = sin .  $\alpha$  , & sin . CFI = sin . ( $\alpha - \omega + r$ ) (num. 9) , qui sinus sunt proxime æquales ; erunt proxime æquales & sinus angulorum FCI , ACI : adeoque erit FCA = 2ACI , sive  $\omega = 2\omega'$  , &  $\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}r = \omega' - \frac{1}{2}r$  . Videbimus inferius , ex eadem forma circulari profluere etiam regulam a Bouguerio adhibitam pro refractionibus horizontalibus pertinentibus ad diversas elevationes supra superficiem terræ : sed interea regrediemur ad regulas Simpsoni , ac Bradleyi , & methodum eruendi ex aliquot observatis refractionibus valores constantes ad eas regulas pertinentes , & plura earum consequaria .

### §. III.

*De deductione , determinatione , & mutua comparatione regularum  
Simpsoni , & Bradleyi .*

27. IN primis , comparando inter se regulas Simpsoni , & Bradleyi facile est ab altera transire ad alteram , retinendo etiam valores generales , qui deinde determinentur per binas refractiones observatas . Simpsoni regula (num. 10) huc reducitur : *Fiat in quadam ratione data sinus distantiae apparentis a zenith ad sinum cuiusdam anguli ; & hujus differentia ab illo erit ad refractionem quæsitam in alia quadam ratione data .* Erit nimirum (num. 21)  $m \cdot \sin . \alpha = \sin . (\alpha - nr)$  . Est ibidem  $m = \frac{1+b}{1+e}$  ,  
sed

sed & is, & n erui debent ex binis refractionibus observatis. Simpsonus habet  $m = \frac{\sin.86^\circ.58\frac{1}{2}}{\sin.90^\circ}$ , sive = 0,99861;  $n = \frac{11}{2}$ , quos eruit ex refractione horizontali  $\alpha - hr$ . & in distantia a zenith  $60^\circ = 1.30\frac{1}{2}$ . Bradleyana regula sic habet: *refractio est proportionalis tangentie distantie apparentis a zenith imminutae per quoddam multiplum refractionis ipsius*; nimurum  $r$ , ut  $\tan.(\alpha - hr)$ , existente  $h$  quodam numero constanti. Ea deducitur e Simpsoniana adhibendo methodum numeri 9. Bradleyus adhibet  $h = 3$ , quod respondet valori  $n = \frac{12}{2} = 6$  substituto valori  $\frac{11}{2}$ , ut innuimus numero 10, & mox videbimus.

28. Exponemus hic primo, quomodo Bradleyanus numerus eruatur e Simpsonianis, vel Simpsonianus uterque ex Bradleyano: tum eorum regulas inter se comparabimus, ad eligendam commodiorem: deinde docebimus, quomodo illi ipsi eorum numeri inveniri possint ex binis observatis refractionibus: ac demum ostendemus, quomodo inde deduci possit altitudo totius atmosphæræ refringentis in F. Transibimus deinde ad refractiones pro locis elevationibus, & regulam Bouguerianam pro horizontalibus locorum eorundem, ac exponemus phænomena refractionum infra horizontem locorum eorundem, & refractiones terrestres pro locis intra atmosphærā sitis.

29. Cum sit juxta Simpsonum  $1 : m :: \sin.\alpha : \sin.(\alpha - nr)$ ; erit  $1 + m : 1 - m :: \sin.\alpha + \sin.(\alpha - nr) : \sin.\alpha - \sin.(\alpha - nr)$   $:: \tan.(\alpha - \frac{1}{2}nr) : \tan.\frac{1}{2}nr$ : cumque  $\frac{1}{2}nr$  sit, ut sua tangens ob suam exiguitatem; erit is valor, adeoque & ejus coefficiens variabilis  $r$ , ut  $\tan.(\alpha - \frac{1}{2}nr)$ , & idcirco Bradleyanus valor  $h = \frac{1}{2}n$ . Sic ex  $n = 6$  deducitur  $h = 3$ , ut Bradleyus posuit. Si retineatur valor Simpsonianus  $n = \frac{11}{2}$ ; erit  $h = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ ; & tum distantia a zenith minuenda esset per  $2\frac{3}{4}$  refractionis ipsius. Simpsonianus numerus  $n$  e contrario statim eruitur e Bradleyano  $h = \frac{1}{2}n$ , cum sit  $n = 2h$ . Tum ad inveniendum  $m$  requiritur præterea una quæpiam refractione  $r$  cognita pro una data distantia  $= \alpha$ , qui valor fiet cognitus per formulam  $m = \frac{\sin.(\alpha - nr)}{\sin.\alpha}$  con-

formem proportioni positæ initio hujus numeri: & si  $r$  sit refractio horizontalis; existente  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\sin.\alpha = 1$ ,  $\sin.(\alpha - nr) = \cos.nr$ , fit  $m = \cos.nr$ .

30. Regula Bradleyana est elegantior, & primo aspectu simplicior, sed esse multo maius apta ad efformandam tabulam refractionum ex data aliqua refractione: si enim refractio quæsita pro alia distantia data  $= a'$  dicatur  $r'$ ; erit  $\tan.(\alpha - hr) : \tan.(a' - hr') :: r : r'$ , ubi cum etiam secundus terminus contineat valorem  $- hr'$  incognitum, nihil directe erui potest, nisi jam cognoscatur saltem proxime valor  $r'$  substituendus in secundo termino, ut is habeatur abludens  $a$  vero per quantitatem exiguum respectu sui, adeoque quartus  $r'$  exiguus per se obveniat diversus a vero, prorsus insensibiliter. Id autem est incommodum, & ad habendam exactitudinem indiget restitutione calculi. Hinc satius est transire a Bradleyana ad Simpsonianam numeris rite aptatis: sumetur semel

$$n = 2h, \text{ tum } m = \frac{\sin.(\alpha - nr)}{\sin.\alpha}, \text{ vel pro refractione } r \text{ horizontali, } m = \cos.nr.$$

Inventis  $n$ , &  $m$ , invenietur pro quavis alia distantia apparente a zenith  $= a'$  refractio  $r'$  ex formula  $\sin.(a' - nr') = m \sin.a'$ ; ubi valor  $a' - nr'$  inventus, & substratus ab  $a'$ , relinquet  $nr'$  dividendum per  $n$  ad habendum  $r'$ .

31. Si pro distantia apparente a zenith  $= \alpha$ , libeat potius assumere altitudinem apparentem supra horizontem  $= p$ ; poterit assumi  $\cos.q = m \cos.p$ , tum  $r = \frac{q-p}{n}$ . Nam erit  $p$  complementum  $\alpha$ , adeoque  $\cos.q = m \cos.p = m \sin.\alpha = \sin.(\alpha - nr)$ , & proinde  $q$  complementum  $\alpha - nr$ . Hinc  $\alpha = 90^\circ - p$ ,  $q = 90^\circ - (\alpha - nr) = p + nr$ ,  $nr = q - p$ ,  $r = \frac{q-p}{n}$ .

32. Applicatio numerorum erit admodum expedita. Ut enim hic formula priore, quæ exhibet valorem  $\alpha$ . Bradleyana refractio horizontalis  $r$  est eadem, ac Simpsoniana  $33'$ , & pro Bradleyo  $n = 6$ , hinc  $m = \cos.nr$  (num. 29)  $= \cos.3^\circ.18' = 0,9983418$ . Pro Simsono est  $n = 5\frac{1}{2}$ , adeoque habebitur  $m = \cos.3^\circ.1\frac{1}{2}' = 0,9986066$ . Ipse pro  $\cos.3^\circ.1\frac{1}{2}'$  posuit  $\sin.86^\circ.58\frac{1}{2}'$ , quod idem

idem exprimit. È ratione adhibitâ, ex.gr. pro distantia a zenith  $\alpha' = 60^\circ$ , habebitur novi anguli sinus  $= \cos.3^\circ.18' + \sin.60^\circ$ , & ipse angulus  $= 59^\circ.50'.9''$ , cuius differentia a  $60^\circ = 9'.51''$ ; divisa per 6 exhibet refractionem quæsitam  $1'.38''$ , 5, quæ in tabula Bradleyanarum refractionum (*Conn. des mouv. Céles. an. 1768.*) habetur  $1'.38''$ , 4 fere accuratissime eadem, cum nimirum computata sit ex iisdem principiis. Ex Simpsonianis numeris innixis etiam refractioni horizontali  $33'$  angulus quæsusitus obvenisset  $59^\circ.51'.11''$ , cuius differentia a  $60^\circ = 8'.49''$ , &  $\frac{2}{11}$  hujus  $= 1'.36''$ , 2 refractio paullo minor Bradleyanâ ob  $m$ , &  $n$  diversa.

33. Pro inveniendis numeris Simpsonianis, & Bradleyanis ex observationibus requiruntur binæ refractiones  $r$ , &  $r'$ , quibus aptabimus formulas notissimas trigonometriæ. Est  $\sin.(a - nr) = \sin.a \cos.nr - \sin.nr \cos.a$ : sed  $\cos.nr = 1 - \sin.\text{vers}.nr = 1 - 2(\sin.\frac{1}{2}nr)^2$ , sive, posito  $nr$  pro suo sinu,  $= 1 - \frac{1}{2}n^2r^2$ . Quare erit  $\sin.(a - nr) = \sin.a - \frac{1}{2}n^2r^2\sin.a - nrcos.a$ , & cum sit (num. 21)  $m\sin.a = \sin.(a - nr)$ ; dividendo per  $\sin.a$ , & ponendo  $\cot.a$  pro  $\frac{\cos.a}{\sin.a}$ , erit  $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r^2 - nrcot.a$ . Cum idem valor habeatur pro  $a'$ , &  $r'$ , ablato communi 1, erit  $\frac{1}{2}n^2r^2 - \frac{1}{2}n^2r'^2 = nrcot.a' - nrcot.a$ , &  $\frac{1}{2}n = \frac{r'\cot.a' - r\cot.a}{r^2 - r'^2}$ , & si  $r$  sit refractionis horizontalis, erit  $\frac{1}{2}n = \frac{r'\cot.a'}{r^2 - r'^2}$ , factâ  $\cot.a = 0$ . Facile huic formulæ aptari poterunt logarithmi ob  $r^2 - r'^2 = (r + r') \times (r - r')$ . Verum ad servandam homogeneitatem unitatis, nam habentur  $r$ , &  $r'$  in secundis peripheriæ, &  $\cot.a$  in partibus radii, præstabit, redactis  $r$ , &  $r'$  ad secunda, concipere totum valorem ductum in  $\frac{60}{\sin.1}$  (\*). Sive pro denominatore adhibere log.  $(r + r')$

(\*) In valore  $\frac{1}{2}n = \frac{r'\cot.a'}{(r + r')(r - r')}$  habentur  $r, r'$  in iis particulis, in quas concipiatur divisa peripheria habens secunda  $360 \times 60 \times 60$ , &  $\cot.a$  in iis, in quas con-

$(r + r') + \log. (r - r') + 4,6855749$ , qui postremus valor logarithmicus est =  $\log. (\sin. i' - \log. 60^\circ)$ . Invento  $n$  per e-  
iusmodi formulam, habebitur  $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r'^2 - nr' \cot. a'$ ; ubi, si  $r'$  sit refractio satis distans ab horizontali, ut  $\cot. a'$  non  
si valor nimis exiguis, omitti poterit  $\frac{1}{2}n^2r'^2$ , & assumi  $m = 1 - nr' \cot. a'$ ,  $1 - m = nr' \cdot \cot. a'$ . Sed pro  $r$  horizontali, fa-  
cilius invenietur valor  $m$  ex formula finali numeri 29, ubi habe-  
tur  $m = \cos. nr$ .

34. Simpsonus (num. 27) pro  $a = 60^\circ$  adhibuit  $r' = 1'.30''\frac{1}{2}$ , & pro refractione horizontali  $r = 33'$ . Bradleyana autem refra-  
ctionum tabula habet pro iisdem distantiis a zenith  $r' = 1'.38'', 4,$

Tom. II.

G g g

 $r =$ 

concipitur divisus radius. Ad servandam homogeneitatem earum partium po-  
test concipi is valor divisus in duos coefficientes fractionarios  $\frac{r'}{r+r'}$ , &  $\frac{\cot. a'}{r-r'}$ . Pro priore fractione possunt in  $r$ , &  $r'$  retineri numeri secundorum, & pro  
posteriore videndum erit, qui valor respondeat arcui habenti numerum secun-  
dorum  $r - r'$  in his partibus radii. Habentur in tabulis sinuum communibus  
logarithmi sinus, & tangentium usque ad septem notas decimalium, & ta-  
men logarithmus sinus, qui est minor arcu, & tangentis, quae est ipso major,  
non differunt ne per unicam quidem unitatem postremæ notæ. Hinc logarith-  
mus is idem est etiam logarithmus arcus unius minutus assumptus in iis parti-  
bus. Porro arcus unius minutus ad arcum  $r - r'$  reductum ad secunda est, ut  
60 ad eum numerum  $r - r'$ . Quare valor arcus habentis numerum secundorum  
 $r - r'$  erit  $= \frac{(r - r') \sin. i'}{60}$ , eritque  $\frac{1}{2}n = \frac{r' \cot. a'}{(r + r')(r - r')} \times \frac{60}{\sin. i'}$ . Redu-  
ctis ad secunda valoribus  $r$ ,  $r'$ , assumentur e tabulis logarithmi numerorum  
 $r$ ,  $r + r'$ ,  $r - r'$ , 60, &  $\log. \cot. a'$ ,  $\log. \sin. i'$ . Pro numeratore poterit  
assumi  $r' \cot. a'$ , & pro denominatore  $(r + r') \times (r - r') \times \frac{\sin. i'}{60}$ , cuius po-  
stremæ fractionis habebitur logarithmus constans  $= \log. \sin. i' - \log. 60 =$   
 $6,4637261 - 1,7781512 = 4,6855749$ , qui valor habetur in textu, ubi cha-  
racteristica 4 non indicat, quinque notas integras in numero correspondente,  
sed primas quinque decimalium notas habere zero. Is logarithmus constans  
addendus erit logarithmis  $r + r'$ , &  $r - r'$ .

Porro hic numerus logarithmicus constans est ille idem, quem, posito in fine 5  
pro 49, proposuimus in annotatione ad numerum 13 pro reductione secundorum  
ad partes radii petita a numero secundorum in ipso radio. Hic adhibuimus  
logarithmum sinus unius minutus, qui cum congruat cum logarithmo tangentis,  
tuto adhiberi potuit pro logarithmo arcus secundorum 60 reducto ad partes ra-  
dii.

$r = 33'$ . Si ii numeri substituantur in superioribus formulis, invenitur pro Simpsono  $n = 5,5$  sive  $\frac{11}{2}$ , &  $m = \cos. 3^\circ. 1'. \frac{1}{2} = 0,9986066$ , & pro Bradleyo  $n = 5,992$ , sive quamproxime illud 6, vel  $\frac{12}{2}$ . Tum  $m = \cos. 3^\circ. 17', 74 = 0,998346$ . Cassinus (Acad. Paris. an. 1714) habet  $r = 31^\circ. 30''$ , &  $r' = 5^\circ. 34''$ , pro  $a' = 80^\circ$ . Inde obtinetur  $n = 6,452$ ,  $m = \cos. 3^\circ. 28', 62 = 0,998159$ .

35. Facile jam est ex hisce numeris computare tabulas refractionum : pro quavis alia distantia a zenith  $= a'$  habebitur quisvis valor  $r'$ , inveniendo angulum  $a' - nr'$ , cuius sinus  $m \cdot \sin. a'$ ; & dividendo per  $n$  ejus differentiam ab  $a'$ . Calculo inito inveniuntur numeri satis conformes tabulæ Bradleyanæ, quæ nimirum ex hisce ipsis principiis est computata : sed non habetur idem consensus cum tabula Cailliana. Illa quidem exhibet refractiones maiores

dii. Poterat hlc adhiberi immediate illa reductio, sed hanc retinuimus, quam posueramus in veteri hujus dissertationis textu, illâ ibi substitutâ multo post ipsam dissertationem conscriptam.

En autem specimen ejus calculi tam pro numeris Simpsonianis, quam pro Bradleyanis, neglectâ ultimâ decimalium notâ : possent autem negligi etiam plures, cum satis sit invenire valorem  $n$  usque ad partes decimas, vel ad summum centesimas ob exiguitatem refractionum, de quibus agitur.

| Formulæ                                         | Pro Simpsono                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Pro Bradleyo<br>numeri logarithmi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{2}n = \frac{r' \cot. a'}{r^2 - r'^2}$ | $r = 33' = \dots 1980''$<br>$r' = 1. 30'', 5 = 90,5$<br>$r + r' = \dots 2070,5 \dots 3,316075$<br>$r - r' = \dots 1889,5 \dots 3,276347$<br>constans addendus . . . . . 4,685575<br>log. denominatoris . . . . . 1,277997<br>complem. arithmet. . . . . 8,722003<br>$r' = \dots \dots \dots \dots 1,956649$<br>$\cot. a' = 60^\circ = \dots \dots \dots 9,761439$<br>$\frac{1}{2}n = 2,75 = \dots \dots \dots 0,440091$<br>$n = 5,5 = \dots \dots \dots \dots \dots 5,99$ | $33' = \dots 1980$<br>$1. 38,4 = 98,4$<br>$\dots \dots \dots 2078,4 = 3,317729$<br>$\dots \dots \dots 1881,6 = 3,274528$<br>$\dots \dots \dots \dots \dots 4,685575$<br>$\dots \dots \dots \dots \dots 1,277832$<br>$\dots \dots \dots \dots \dots 8,722168$<br>$\dots \dots \dots \dots \dots 1,992995$<br>$\dots \dots \dots \dots \dots 9,761439$<br>$2,996 = \dots \dots \dots \dots \dots 0,476602$<br>$5,99$ |
| $m = \cos. nr'$                                 | $nr' = 5,5 \times 33' = 181', 5 = 3^\circ. 1', 5$<br>$m = \cos. 3^\circ. 1', 5 = 0,9986066$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $5,992 \times 33' = 196' = 3^\circ. 17', 74$<br>$3. 18', 74 = 0,998159$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

jores Bradleyanis, nec in eadem ratione majores: nam pro distantia a zenith =  $60^\circ$  habet  $1'.54'',4$  majorem per  $16''$  Bradleyanā  $1'.38'',4$ ; & pro distantia  $84^\circ$  habet  $8',42''$ , majorem tantummodo per  $14'',2$  Bradleyanā  $8'.27'',8$ , quod jam indicat, hujusmodi theorematum cum tabula Cailliana non consentire.

36. Dissensus erit multo magis manifestus, si querantur numeri  $m$ , &  $n$  ex binis refractionibus desumptis e tabula Cailliana. Ipse quidem omisit postremos 6 gradus horizonti proximos, cum ibi observationes expertus sit incertas admodum, & varias, adeoque non habet horizontalem. Potest assumi ejus refactio  $r' = 1'.54'',4$  pro  $\alpha' = 60^\circ$ , &  $r = 8'.42''$  pro  $\alpha = 84^\circ$ , & adhiberi formula integra numeri 33, nimirum  $\frac{r'\cot.\alpha' - r\cot.\alpha}{r^2 - r'^2} = \frac{1}{2}n$ . Si in ea formulā substituantur valores Bradleyani  $r' = 98'',4$ , pro  $\alpha' = 60^\circ$ ,  $r = 8',27'',8 = 507'',8$  pro  $\alpha = 84^\circ$ ; inventur  $\frac{1}{2}n = 47,22 - 44,36 = 2,86$  satis proximus valori 3 numeri 34, ubi  $n = 6$ . Verum adhibitis Caillianis  $r' = 114'',4$ ;  $r = 8',42'' = 522''$ , habetur  $52,52 - 43,63 = 8,89$ , unde  $n = 17,78$ , tum  $m = 0,994307 = \cos.6^\circ.7'$ . Ii numeri satisfaciunt quidem iis binis refractionibus: sed postremæ horizonti proximæ inde obveniunt e contrario multo minores, & horizontalis evadit pro nostris hisce regionibus manifesto nimis erronea. Si ea dicatur  $r$ ; habetur ex formulā  $m = \cos.nr$ . Cum enim inventum sit  $\cos.nr = \cos.6^\circ.7'$ , erit  $r = \frac{6^\circ.7'}{n} = \frac{367'}{17,78} = 20'.38''$ . Excessus refractionum Caillianarum supra Bradleyanas in exiguis distantiis a zenith perquam exiguis, initio quidem perpetuo crescit, tum decrescit (num. 35) ita tamen, ut adhuc ultima pertinens ad distantiam  $84^\circ$ , sit major; sed si tabula reliqua computetur ex iisdem principiis, ita decrescit ille excessus, ut ante finem quadrantis evanescat, tum abeat in defectum.

37. Ipse quidem Caillius suam tabulam computavit ex immenso numero observationum post ingeniosissimas combinationes, ut diximus num. 14: sed, ut ibi innuimus, dubium superest de ve-

rificatione sectoris ab ipso adhibiti, & jam ibidem vidimus, e refractionibus ipsius erui valorem illum & justo majorem. Valor ipse  $b$  potest facile erui etiam hinc ex valore  $m$  jam invento. Est enim (num. 13) pro distantiis non nimis proximis quadranti  $b = r \cot. \alpha$ , & (num. 33) omissis accentibus, qui ibi adhibentur pro hisdem,  $1 - m = nr \cot. \alpha$ , adeoque  $1 - m = nb$ , &  $b = \frac{1 - m}{n}$ , sive Bradleyo ob  $m = 0,998346$  (num. 34),  $b = \frac{0,001654}{5,992} = 0,0002760$ . Simpsono ob  $m = 0,998607$ ,  $b = \frac{2}{11} \times 0,001393 = 0,0002527$ . Valor Bouguerianus satis congruit cum inventis numero 13 per unicam refractionem, nimirum 0,0002755, & 0,0002761, ac valor Simpsonianus penitus cum invento ibidem itidem = 0,0002533, ut hinc. Pro Cassino ob  $m = 0,998159$ , &  $n = 6,452$  obvenit  $b = 0,0002853$ .

38. Sub zona torrida ex Bouguerianis observationibus habitis in ipsa superficie terræ ad mare hi omnes numeri evadunt admodum diversi. Ipse ibidem (Acad. Par. an. 1749) observavit refractionem horizontalem 27°, quæ idcirco minorem debet exhibere valorem  $b$ : observavit autem immediate refractiones pro solis 7 gradibus elevationis supra horizontem, quarum postrema debita ipsis, sive valori  $\alpha = 83^\circ$  est 5'.30". Ex iis invenietur  $n$  per formulam num. 33,  $\frac{1}{2}n = \frac{r' \cot. \alpha'}{r^2 - r'^2}$ , positis  $r' = 5'.30"$ ,  $r = 27'$ ,  $\alpha' = 83^\circ$ , eritque  $\frac{1}{2}n = 3,3225$ , adeoque  $n = 6,645$ . Tum  $m = \cos. nr = \cos. 2^\circ. 59', 4 = 0,998636$ ,  $b = \frac{1 - m}{n} = 0,0002053$ .

39. E valoribus  $m$ ,  $b$  profluit altitudo atmosphæræ refringentis  $e$ , cum sit (num 9)  $m = \frac{1 + b}{1 + e}$ , adeoque  $e = \frac{1 - m + b}{m}$ , sive ob  $b = \frac{1 - m}{n}$ ,  $e = \frac{(n+1)b}{m} = \frac{(n+1)(1-m)}{mn}$ , ubi interea constat id, quod num. 25 affirmavimus, magis mutari distantiam, quam velocitatem: nam illius mutatio  $e$  ad hujus mutationem  $b$  est, ut  $n+1$ , quod superat usque adeo unitatem, ad  $m$ , quod ea

P A R A G R A P H U S III.

421

et tantillo est minus. Potest autem assumi pro earum mutacionum ratione  $n+1$  ad 1. Ad inveniendum valorem e habentur pro Bradleyo, Simpsono, Cassino, valores  $n$ , &  $m$  num. 34,  $b$  num. 37, pro Bouguerio omnes tres num. 38: ii cum ipso valore e proveniente ex applicatione eorum numerorum ad formulam  $\frac{(n+1)b}{m}$  continentur in sequenti tabula, ubi pro  $m$  assumuntur sola quatuor notæ.

| Pro | Bradleyo  | Simpsono  | Cassino   | Bouguerio |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $n$ | 5,992     | 5,5       | 6,452     | 6,645     |
| $b$ | 0,0002760 | 0,0002527 | 0,0002853 | 0,0002053 |
| $m$ | 0,9983    | 0,9986    | 0,9982    | 0,9986    |
| $e$ | 0,001933  | 0,001645  | 0,002130  | 0,001573  |

Ii valores respondent radio terræ = 1. Is ex gradu hexapedarum proxime 57000 eruitur proxime 3266000, per quem numerum multiplicati superiores valores exhibent hexapedas 6313, 5373, 6957, 5137. Bouguerius ibidem adhibet altitudinem atmosphæræ tantillo majorem, nimirum 5158, quam, ut infra etiam videbimus, deducit partim e refractionibus horizontalibus habitis in diversis altitudinibus, partim e theoria, quæ itidem recidit in vim proxime constantem (num. 22). Cassinus (Acad. Par. an. 1714) invenit 6918 parum itidem discrepantem ab hinc inventâ, licet is ibi adhibens arcum circularem pro figura a radio descripta, utatur tam pro hoc valore eruendo, quam pro refractionibus computandis methodo indirecta, & minus accurata, quam sint formulæ directæ hinc a nobis adhibitæ, & pertinentes ad illam ipsam hypothesis formæ circularis, quæ sine proxima æqualitate virium refringentium haberi non potest.

40. Posset in hac theoria altitudo atmosphæræ inveniri e singulis refractionibus una cum altitudine puncti I pro eo radio, cui ea refractione respondet, ope valorum  $x$ ,  $x'$ . Est enim (num. 9) CFI =  $a - (x - r)$ , & (num. 12) CIA =  $a - x'$ , cui addito AIH =  $r$ , fiet CIH =  $a - (x' - r)$ . Est autem  $\sin. CIA = \sin.$

$$\begin{aligned} \sin.(a - x') : \sin.CAI &= \sin.CAG = \sin.a :: CA = 1 : CI \\ &= \frac{\sin.a}{\sin.(a - x)} : \text{tum } \sin.CFI = \sin.(a - (x - r)) : \sin.CIF = \\ &\quad \sin.CIH = \sin.(a - (x' - r)) :: CI : CF = \frac{\sin.a \times \sin.(a - (x' - r))}{\sin.(a - x) \times \sin.(a - (x - r))}. \end{aligned}$$

Porro ex num. 9, & 17 facile colligitur, illos valores  $\frac{1}{2}(x - r)$ ,  $x' - \frac{1}{2}r$  esse illum ipsum valorem Bradleyanum  $hr$  adhibitum numer. 27, existente  $h = \frac{1}{2}n$  (num. 29): inde autem profluit  $\frac{1}{2}(x - r) = \frac{1}{2}nr$ , &  $x - r = nr$ : tum  $x' - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}nr$ , &  $x' = \frac{1}{2}(n + 1)r$ ,  $x' - r = \frac{1}{2}(n - 1)r$ . Datis autem  $x - r$ ,  $x'$ ,  $x' - r$  per  $r$ , habentur per  $a$ , &  $r$  toti valores  $CI$ ,  $CF$ . E formula  $x - r = nr$  habetur  $x = (n + 1)r$ , unde profluit theorema, quod erit usui inferius: *Refractio ad angulum subtensum a radio in centro terræ est, ut 1 ad  $n + 1$ .* Est enim  $r : x :: 1 : n + 1$ .

41. Si radius sit horizontalis; formulæ evadunt multo simpliciores, cum fiat  $\sin.a = 1$ , & in reliquis terminis, omissa  $a$ , satis sit ponere cosinum residui pro sinu, nimirum  $\cos.(x' - r)$ ,  $\cos.x'$ ,  $\cos.x - r$  pro  $\sin.(a - (x' - r))$ ,  $\sin.(a - x')$ ,  $\sin.(a - (x - r))$ . Si radius satis elevatus adveniat supra horizontem, poterunt formulæ reddi simpliciores ope formularum differentialium, & ope divisionum, in quibus omittantur potentiae superiores exigui multipli valoris  $r$  jam exigui. Sic erit  $CI = \frac{\sin.a}{\sin.a - x'\cos.a} = 1 + \frac{x'\cos.a}{\sin.a} = 1 + x'\cot.a$ : hinc, ablato radio  $= 1$ , erit altitudo puncti I  $= x'\cot.a = \frac{1}{2}(n + 1)r\cot.a = \frac{1}{2}(n + 1)b$  (num. 37).

42. Cum is valor sit constans, erit constans elevatio interseptionis I binarum tangentium in omnibus radiis satis remotis ab horizonte: est autem is valor quamproxime dimidius valoris  $e = \frac{(n + 1)b}{m}$  (num. 39): nam valor  $m = \frac{1 + b}{1 + e}$  parum abludit ab unitate ob valores  $b$ , &  $e$  exiguo respectu unitatis ipsius, ut eum invenimus ubique num. 34, & 38. Atque id quidem ita esse debuit: nam ob exiguum radii curvaturam binæ tangentes confunduntur ad sensum cum chorda, & in hac virium constantium hypothesi, punctum I jacet in ipsius medio ob formam arcus prope circ-

pe circularem. Si autem CI, CF occurant arcui terrestri in L, M, & AIF habeatur pro unica recta; FAM haberi poterit pro triangulo, & IL, FM pro parallelis in radio quovis satis erecto supra tangentem terræ ductam per A, adeoque erit  $IL = \frac{1}{2}FM$ . Si radius IP esset horizontalis; AIF esset tangens arcus ALM: tum esset proxime  $IL : FM :: AI^2 : AF^2$ , sive illa hujus subquadrupla. Et hæc quidem invenientur itidem, si formulis superioribus applicentur numeri.

43. Usque ad quem terminum possint assumi refractiones, ut proportionales tangentibus distantia a zenithi nihil immutatae, id quidem pendet a magnitudine valoris  $\alpha'$ , cum debeat contemni  $\alpha' - \frac{1}{2}r$ . Apud Bradleyum id licet usque ad distantiam graduum  $70^\circ$ . Ibi refractio apud ipsum est  $2^\circ 35''$ , r, adeoque  $\alpha' - \frac{1}{2}r = 3r = 7^\circ 45''$ , 3: eo dempto a  $70^\circ$ , residui  $69^\circ 52'.14''$ , 7 tangens  $272998$  a tangente  $70^\circ = 274748$  differt per  $1570$ . Quare ibi negligitur  $\frac{1}{174}$  totius, dum refractio ibi est  $= 155, 1$ ; adeoque committitur error adhuc paullo minor uno secundo. Caillius illam proportionalitatem admittit usque ad  $48^\circ$ . tantummodo.

44. Ex num. 39 collato cum 20 invenitur ratio diametri circuli osculatoris in ima radii parte in A ad eam, quæ habetur in summa atmosphæra, in ea hypothesi vis, quæ indicata est numero 20, ex qua profluxerunt accuratè regulæ Simpsoniana, & Bradleyana, ut innuitur numero 25. Nam in ipso numero 25 inde eruitur, esse diametrum circuli osculatoris in ratione composita ex directa simplici celeritatis, & duplicata distantia a centro terræ. Celeritas in ima atmosphæra est ad celeritatem in summa (num. 9) ut  $1 + b$  ad 1, & distantia in ima atmosphæra est 1, in summa  $1 + e$ . Hinc ea ratio est  $1(1+b)$  ad  $(1+e)^2 \times 1$ , sive 1 ad  $\frac{(1+e)^2}{1+b} = 1 + 2e - b$  ob  $b$ , &  $e$  quantitates exiguae, quæ cum (num. 39) sint Bradleyo 0,0002760, & 0,001933; erit ea ratio 1 ad 1,00359: discrimen est  $\frac{1}{280}$  totius: hinc is arcus assumi potest pro circulari. Si vis sit constans accurate; in valore

nu-

numeri 24 remanet  $c^3z$ , cumque in imo, & summo rationes  $c$ , &  $z$  sint 1 ad  $1+b$ , &  $1+e$  ad 1, fiet ratio 1 ad  $\frac{1+e}{(1+b)^3} = 1+e-3b$ , nimirum adhibitis numeris Bradleyanis,  $\approx 0,0095993$  multo magis ad aequalitatem accedens.

45. Potest autem pariter erui absoluta curvatura cuiusvis radii determinando ejus semidiametrum pro uno ex ipsis. Sit (fig. 3) AF radius horizontalis, cuius binæ tangentes FIH, AI cum chorda AF, quæ superficie terræ occurrat in P, ducaturque radius CP, recta CF, & FQ perpendicularis ad tangentem FI, cuius concursus cum semidiametro AC producta determinabit proxime centrum circuli osculatoris in Q ob angulos ad A, & F rectos in quadrilineo AIFQ anguli ad I, & Q erunt simul duo recti, adeoque simul æquales binis interno, & externo ad I, ac dempto interno, erit AQF  $\equiv$  AIH refractioni horizontali. Hinc ob angulos internos, & oppositos simul huic æquales in triangulo isoscelio AIF erit IAF  $\equiv \frac{1}{2}r$ . Demum in triangulis isosceliis ACP, AQF habentibus angulum communem in A, adeoque æquales etiam angulos in P, & F, erit & ACP  $\equiv$  AQF, ac PC parallela FQ, & AC : AQ :: AP : AF.

46. Porro rectæ AP, AF erunt quamproxime, ut anguli ACP, ACF, qui sunt exigui: si enim concipiatur CD perpendicularis ad AP; erunt DA, DP, DF tangentes angulorum DCA, DCP, DCF, quæ assumi possunt pro arcubus eos angulos subtendentibus: sunt enim exigui, cum ACP æquetur refractioni horizontali  $r$ , & (num. 40) sit  $n$ , nimirum hinc ACF  $\equiv (n+1)r$ . Hinc AP : AF :: 1 :  $n+1$ , adeoque & radius terræ AC ad semidiametrum circuli, ad quem pertinet radius horizontalis, ut 1 ad  $n+1$ , sive ille ad hanc, ut 1 pro Bradleyo ad 6,992, pro Simpsono ad 6,5, pro Bouguerio (num. 38) in zona torrida ad 7,645. Accuratius inveniri potest ratio AC ad AP notando, esse AP chordam arcus metientis refractionem horizontalem, quæ Bradleyo, & Simpsono est 33°, Bouguerio sub zona torrida 27°, adeoque ut calculum instituamus pro Bradleyo, erit AP duplum sinus  $16\frac{1}{2} \equiv 0,0095993$ . Invenietur autem AF ex datis in triangulo

Io ACF lateribus  $AC = 1$ ,  $CF = 1 + e = 1,001933$ , ac angulo CAF complemento dimidiæ refractionis  $16^{\circ}\frac{1}{2}$ : unde profluit angulus ACF =  $3^{\circ} 50' 42''$  per sola 2<sup>o</sup> discrepans a  $6,992$   $\times 33' = 3^{\circ} 50' 44''$ , tum AF = 0,067188, quæ divisa per AP = 0,0095993 exhibet 6,999, qui valor consentit penitus cum eo, qui inveniri debebat =  $(n+1) AC = 6,992$ . Idem consensus habebitur in reliquis binis hypothesibus.

## §. IV.

*De refractionibus cælestibus pro locis elevationibus, & de terrestribus objectorum, quæ sunt intra atmosphærā.*

47. QUÆCUNQUE dicta sunt de natura curvæ a radiis descriptæ, & relatione ad se invicem refractionum, quæ pertinent ad diversas distantias apparentes a zenith, sunt communia puncto cuivis utcumque elevato supra superficiem terræ intra atmosphærā, cum punctum A possit concipi ubicumque intra ipsam. Forma curvæ circularis inventa est num. 23 ex sola vi proxime constanti independenter ab altitudine atmosphæræ supra punctum A, & ab eadem sola pendet deductio regularum Simponi, & Bradleyi. Pendet ab ea sola & magnitudo absoluta diametri circuli osculan- tis curvam in puncto elevatiore, quæ manente eodem angulo  $\alpha$ , manebit proxime eadem. Nam in formula generali  $\frac{c^3 z}{u c \sin.a}$  (nu-  
mer. 23) si comparentur eæ diametri pro radiis advenientibus in eodem angulo ad puncta diversæ elevationis, erit  $\sin.a$ , &  $c^3$  va-  
lor idem pro omnibus. Quod si sit vis  $u$ , ut  $c^3 z$ , in quo solo ca-  
su curva radii est accurate circularis, erit constans etiam valor  
 $\frac{c^3 z}{u}$ , adeoque in ea hypothesi habetur hujusmodi theorema: Com-  
parando loca omnia, & quoscumque radios homogeneos, dia-  
meter circuli osculatoris erit reciproce ut sinus distantiae apparen-  
tis a zenith, adeoque in radiis advenientibus in eodem angulo  
cum recta verticali erit accurate idem. At in hypothesi, ex qua  
profluxerunt accurate regulæ Simponi, & Bradleyi, est (num. 25)

" ut  $\frac{c^2}{z}$ , hinc diameter ipsa, ut  $\frac{cz^2}{\sin \alpha}$ : adeoque in radiis advenientibus in eodem angulo cum recta verticali erit directe ut celeritas, & quadratum distantiae loci, ad quem devenit, a centro terræ conjunctim. Patet autem ob adeo exiguum discrimen ejus distantiarum a centro terræ, eas posse assumi pro æqualibus etiam in ea hypothesi: nam tota atmosphæræ altitudo e numeris Bradleyanis, existente semidiametro terræ = 1, est 0,001933, adeoque in loco elevato per dimidium hujus altitudinis, elevatio esset proxime  $\frac{1}{1000}$  semidiametri terræ. Ejus distantia quadratum ab hujus quadrato non differet nisi  $\frac{1}{500}$  sui parte, cuius contemptus nihil ad sensum turbabit refractiones inde erutas. Cum igitur decrementum velocitatis in ascendendo adhuc minuat discrimen ipsum; poterunt pro locis utcunque elevatis assumi circuli radiorum advenientium in eodem angulo cum verticali (exhibitum scilicet easdem distantias apparentes a zenith) pro æqualibus. Idem autem licebit in quavis hypothesi, in qua vis sit proxime constans, cum, ea constante, habeatur  $c^3$ , qui valor per totam atmosphæræ altitudinem non mutatur parte sui  $\frac{1}{1000}$ . Id tamen non illud præstat, ut refractiones radiorum advenientium ad loca diversam elevationem habentia in iisdem angulis debeant esse æquales: pendent enim non solum a magnitudine totius circuli, sed etiam a magnitudine arcus ipsius, qui intra atmosphærā refringentem cadit. Adhuc tamen earum magnitudinem facile determinabimus.

48. Et primo quidem exæ definiuntur per constructionem geometricam: sit (fig. 4) ZN diameter atmosphæræ refringentis, CA semidiameter terræ, A' punctum quodvis utcunque elevatum supra ipsius superficiem, ad quod deveniat radius F'A' cum ultima directione BA' data exhibente datam distantiam apparentem a zenith ZA'B, & quæratur refractionis ipsi respondens. Hoc est utique problema generale huc pertinens, & habet solutionem itidem gene-

generalem, & elegantissimam. In ipsa  $ZC$  producta assumatur  $AQ$  ad terræ semidiametrum  $CA$  in ratione  $n + 1$  ad  $1$ , nimurum pro Bradleyo  $= 6,992 \times CA$ . Ducantur per  $Q$ , &  $A'$  rectæ perpendiculares rectis  $A'Q$ ,  $A'B$ , quæ sibi invicem occurrant in  $R$ . Centro  $R$  radio  $RA'$  ducatur arcus circuli  $A'F'$ , qui superficie atmosphæræ occurrat in  $F'$ , & recta  $F'R$ : tum angulus  $A'RF'$  exhibebit refractionem quæsitam.

49. Ea determinatio erit accurata pro hypothesi exhibente circum accuratum, & satis proxima pro quavis hypothesi vis proxime constantis. Potest autem haberi refractio nihil ad sensum abludens a vera ex solo arcu  $ZF'$  diviso per  $n + 1$ , cum (numer. 40) sit refractio  $= r$  ad angulum  $ACF'$  in centro  $= \alpha$ , ut  $1$  ad  $n + 1$ . Porro is angulus inveniri potest etiam per calculum trigonometricum. In triangulis rectangularibus  $RQC$ ,  $RQA'$  est  $A'Q : CQ :: \cot.RA'Q : \cot.RCQ$ . Est autem, ob  $CA$ ,  $CA'$  quamproxime æquales,  $A'Q : CQ :: n + 1 : n$ , &  $RA'Q$ , ob angulum  $RA'B$  rectum, est complementum  $ZA'B = \alpha$ : hinc erit  $\cot.RCQ = \frac{n}{n+1} \times \tan.\alpha$ . In triangulo  $RQC$  dato latere  $CQ$ , & angulo ad  $C$ , invenietur  $RC$ . Tum in triangulo  $RCF'$ , datis jam omnibus lateribus, invenietur angulus ad  $C$ , adeoque habebitur duorum angulorum ad  $C$  jam cognitorum supplementum, nempe angulus  $F'CZ$ , qui divisus per  $n + 1$  dabit refractionem quæsitam. Si refractio ipsa supponatur jam proxime cognita, habebitur angulus  $F'A'B$ , qui æquatur dimidio angulo  $A'RF'$  ad centrum, nimurum dimidiæ refractioni. Hinc habebitur  $CA'F'$  supplementum  $ZA'F' = \alpha + \frac{1}{2}r$ , ex quo, & lateribus  $CA'$ ,  $CF'$  notis habebitur angulus  $A'CF'$ . Ea methodo utitur Bouguerius loco citato: sed ea habet idem incommodum, quod Bradleyana, quæ (num. 30) supponit pariter refractionem jam proxime cognitam.

50. Hinc optimum factu est, adhibere regulam Simpsoni ritte aptatam, quæ etiam per formulas numeri 31 calculum reddit expeditiorem. Ex formulæ adhibent valores  $n$ , &  $m$ : valor  $n$  est saltem quamproxime idem pro quavis elevatione supra

superficiem maris, valor  $m$  pro aliis elevationibus est alius, & oportet determinare illum, qui convenit elevationi, in qua observationes instituuntur. Valor  $n$  est quamproxime idem, qui in ipsa terræ superficie: nam semidiameter circuli, ad quem pertinet radius horizontalis est (num. 46) ad semidiametrum terræ, ut  $n + 1$  ad 1, quæ ratio non pendet ab elevatione loci, & semidiameter ipsa circuli est (num. 47) ejusdem magnitudinis pro locis omnibus, qui inventus semel per duas observationes cum valore  $m$ , ut numer. 34, in loco quovis retinebitur pro elevationibus aliis quibuscumque. Deinde invenietur valor  $m$  e data quavis elevatione A'Z atmosphæræ refringentis supra locum A' (\*). Si enim ea dicatur  $e'$ ; erit (num. 39)  $e' = \frac{(n+1)(1-m)}{mn}$ , unde eruitur  $m = \frac{n+1}{(n+1)+e'n} = 1 - \frac{e'n}{n+1}$ , contemptis nimirum ulterioribus po-

(\*) Valor  $m$  pro dato loco inveniri potest etiam sine ulla refractione ibi observata per solam altitudinem  $e'$  atmosphæræ supra eum locum, & valorem  $b$  inventum, ut num. 37, ex observationibus institutis ubicumque alibi. Is est  $= \frac{i+b}{i+e'}$  (num. 9). Hinc si ponantur accentus iisdem litteris pro eo loco erit  $m' = \frac{i+b'}{i+e'} = i + b' - e'$ , instituta nimirum divisione, & neglectis terminis habentibus potentias superiores valoris exigui  $e'$ , vel factum  $e'b'$ . Porro si celeritates in ima atmosphæra, & in loco superiore quovis dicantur  $e'$ ,  $c$  ut prius, ac celeritas in summa atmosphæra  $c''$ ; erit (num. 9)  $i : i+b :: c' : c' = c'' + bc''$ , & eodem pacto  $c = c'' + b'c''$ .

Porro e formula (num. 5)  $cde = udz$  eruitur, ut ibi, in hypothesi vis  $u$  constantis incrementum quadrati velocitatis debere esse idem in paribus accessibus ad centrum, adeoque erit  $c^{12} - c^{112} : c^2 - c^{112} :: e : e'$ . Porro, ablato  $c^{112}$  a  $c^{12} = c^{112} + 2bc^{112} + b^2c^{112}$ , & neglecto  $b^2c^{112}$ , evadit  $c^{12} - c^{112} = 2bc^{112}$ , & eodem pacto  $c^2 - c^{112} = 2b'c^{112}$ . Quare fiet  $e : e' :: 2bc^{112} : 2b'c^{112} :: b : b' = b \times \frac{e'}{e}$ , adeoque habetur etiam  $b'$  per  $b$ ,  $e$ ,  $e'$ , ubi possunt assumi  $e$ ,  $e'$  etiam in hexapedis: sed pro habendo deinde valore  $m' = i + b' - e'$  oportet valorem  $e'$  reducere ad partes radii.

In exemplo numeri sequentis est in hexapedis  $e = 5137$ ,  $e' = 2749$ , tum  $b = 0,0002053$  (num. 38), adeoque  $b' = 0,0001098$ : est autem ibidem  $e'$  in partibus semidiametri terræ  $= 0,0008417$ , adeoque evadit  $m' = 1,0001098 - 0,0008417 = 0,9992681$ , fere penitus idem valor, qui aliâ illâ methodo evasit ibidem  $= 0,0002684$ .

potentiss valoris  $e'$  exigui respectu  $1$ , &  $n$ . Eo pacto habetur etiam  $m$  ex iisdem datis  $e'$ ,  $n$ , e quibus pendet constructio superior geometrica.

51. Exemplum desumi potest ex observationibus Bouguerianis habitis in zona torrida in monte Chimboraco, cuius elevationem supra superficiem maris is invenit hexapedarum 2388. Invenimus autem (num. 38) ex ejus observationibus habitis ibidem prope ipsam maris superficiem valorem  $n = 6,645$ , & (num. 39) altitudinem atmosphæræ e hexapedarum 5137: hinc residua altitudo A'Z supra eum montem erit  $e' = 2749$ , quæ divisa per 3266000, numerum hexapedarum in semidiametro terræ, exhibebit A'Z =  $e' = 0,0008417$ , ubi ea semidiameter = 1: hinc habetur  $m = 1 - \frac{e'n}{n+1} = 0,9992684$ , qui valor cum sit =  $\cos.nr$ , existente  $r$  refractione horizontali (num. 29), erit  $nr = 2^{\circ}.11'.30''$ ,  $r = 19^{\circ}.47''$ , 4. Is valor est fere accurate medius inter tres ab ipso ibidem observatos, qui habentur in tabella sequentis numeri, ac evadit  $19^{\circ}.18''$ , 5.

52. Inde jam ex formulis num. 31  $\cos.q = m\cos.p$  (existente  $p$  elevatione apparente supra horizontem, qui valor idcirco erit negativus, ubi pro elevatione habeatur depressio), &  $r = \frac{q-p}{n}$ , habebitur quævis alia refractione tum pro objectis elevatis supra horizontem, tum pro depressis infra, cuiusmodi observationes occurunt in montibus editis, ex quibus in horizontem physicum depresso patet despectus. In sequenti tabella habentur aliquot refractiones inde erutæ, & comparatæ cum observatis a Bouguerio. Prima columna habet elevationes, & depressiones, apposito his signo negativo, secunda refractiones erutas ex hoc calculo, tertia observatas a Bouguerio, ubi cum plures ponuntur, institutæ sunt diebus diversis. Patet autem, computatas vel cedere inter observatas, vel ab ipsis differre minus, quam nonnullæ ex iis ipsis inter se differant.

| Altit. | Refr. comp. | Refr. observ.                             | Altit.   | Refr. comp. | Refr. obs. |
|--------|-------------|-------------------------------------------|----------|-------------|------------|
| 7°     | 3° 1"       | { 3° 51" }<br>{ 3° 24" }                  | - 0° 31' | 25° 0"      | 24° 20"    |
| 1°     | 12. 43      | { 14° 32" }<br>{ 13° 46" }<br>{ 13° 23" } | - 1° 0"  | 30° 47      | 30° 1"     |
| 0°     | 19. 47      | { 20° 17" }<br>{ 19° 34" }<br>{ 19° 35" } | - 1° 17' | 34° 43      | 34° 47     |

53. Hic autem notandum illud, in ea Bouguerii dissertatione (Mem. Acad. Par. an. 1749 pag. 79) irrepsisse errorem in serie depressionum apparentium, positâ 0°. 31" pro 0°. 31', qui quidem error occasionem præbuit historico (pag. 153) dicendi, *Bouguerium summopere miratum refractionem, quæ in horizonte fuerat 19° 1'*, inventam  $24\frac{1}{3}$  immediate infra, tum deinde crevisse regulariter, tanquam si saltum quendam haberit in ipso transitu ex hemisphærio superiore in inferius. Bouguerius ibidem vocat utique subitum incrementum, sed intelligit tantummodo admodum celerem: nam pro exemplo non afferit illam  $24\frac{1}{3}$ , ut debitam 0°. 31", quod omnino præstitisset, sed reliquas binas pro 1°, & 1°. 17', ac explicatio ejus phænomeni desumpta ex sua theoria, quam adhibet, & quæ cum nostris etiam principiis congruit, inducit mutationem utique celerem, sed regularem. Ea pendet ex ipsa illa eadem formula  $r = \frac{q-p}{n}$ , posito  $\cos.q = m \cos.p$ : augmentur refractions plurimum infra horizontem, quia illa, quæ prius fuerat differentia binorum angulorum  $q, p$ , jam evadit summa, ubi in ipso transitu per horizontem mutatur  $p$  ex positivo in negativum, & auctâ depressione, augetur uterque valor. Nam  $p$  decrescit regulariter usque ad zero, tum crescit ex parte negativa, & eidem positivo, ac negativo ejusdem magnitudinis respondet idem  $q$  valoris semper positivi, cum nimirum sinus anguli  $a - nr = m \sin.a$  semper minor, quam  $\sin.a$  crescat, donec hic fiat æqualis radio, ubi ille fit maximus, tum decrescat, quin unquam

eva-

evadat sinus totus, ut idcirco  $\sin.(\alpha - nr)$  retrocedat, aucto iterum valore  $q$ , qui evaserat quidem minimus, sed non evanuerat.

54. Porro facile perspicitur ex ipsa etiam constructione numeri 48, debere augeri plurimum refractionem in transitu per horizontem. Id ibi accidit idcirco, quod longitudo viæ radii intra atmosphäram, a qua pendet magnitudo refractionis, mutatur plurimum ibidem. Concipiatur motus circa punctum A' chordæ A'F', quæ est ad sensum æqualis suo arcui: ejus angulus cum recta verticali A'Z est distantia apprens a zenith ZA'B aucta angulo BA'F', qui æquatur dimidiæ refractioni (num. 49). Ubi is angulus erit nullus, recta A'F' congruet cum A'Z: eo aucto, augebitur, sed initio parum admodum, ita, ut eo existente  $= 60^\circ$ , nondum sit dupla ipsius A'Z, quod admodum facile demonstrari potest. Ubi eo existente recto, ea evaserit horizontalis, jam erit media geometrice proportionalis inter A'Z, & A'N: nimurum cum AN major, quam 2, contineat A'Z  $= 0,0008417$  (num. 51) vicibus fere 2400, ipsa A'F eam ibi continebit fere 50 vicibus. Crescente adhuc magis illo angulo, crescit plurimum ea chorda, adeoque & arcus. Longitudo arcus cuiusvis facile invenitur, inventâ per superiores regulas refractione pro quavis distantia apparente a zenith  $= \alpha$ , sive ab horizonte  $= p$ : nam semidiameter circuli pro radio horizontali est  $n + 1$  (num. 46.), adeoque pro quovis alio  $= \frac{n+1}{\sin.\alpha} = \frac{n+1}{\cos.p}$ . Arcus autem est angulus ad centrum ductus in semidiametrum, & is ipse angulus æquatur refractioni  $r$ . Igitur arcus ipse erit  $= \frac{(n+1)r}{\cos.p}$ , qui valor ductus in 3266000 exhibebit valorem ipsius arcus per numerum hexapedarum.

55. Pro radio horizontali est  $r = 33'$ , &  $\cos.p = 1$ . Assumpto sinu 33', ut reducatur ad unitatem eandem, & posito  $n = 6$  (\*) cum Bradleyo, habetur radii via hexapedarum 219456, qui

nu-

(\*) Hic jam adhibetur pro  $n$  numerus 6, ut adhibitus est a Bradleyo, non ille 5,992 ipsi proximus, quem deduximus num. 34 ex ejus refractione.

numerus si dividatur per 33, exhibebit longitudinem viæ 6650 respondentem refractioni unius minuti. Nam in circulo flexus est proportionalis longitudini arcus : adeoque si in quovis alio radio longitudo viæ dicatur  $l$ ; pro quovis numero minutorum  $r$  erit  $l = 6650 \sin. \alpha$ : crescit enim arcus in ratione directa numeri minutorum  $r$ , & reciproca semidiametri circuli, nimirum & directa  $\sin. \alpha$ , adeoque  $r = \frac{l}{6650 \sin. \alpha}$ , unde dabitur refractio per longitudinem viæ, & vice versa. Porro cum arcus terræ respondens uni minuto sit  $= \frac{1}{60} \times 57000 = 950$ , & via radii  $= 6650$ , invenitur hæc illius accurate septupla, ut sane debuit, cum (num. 40) angulus, quem via radii subtendit ad centrum terræ, sit ad refractionem, nimirum  $n : r :: n + 1 : 1$ .

56. Hæc quidem pertinent ad comparandas vias radii, & refractiones pro diversis radiorum directionibus respectu loci ejusdem: sed si comparentur eadem pertinentes ad diversas elevations; habebuntur theoremeta nihilo minus elegantia, & utilia in hac eadem theoria virium proxime æqualium. Persequemur id, quod pertinet ad refractiones, & arcus radiorum horizontalium.

Positâ ea refractione  $= r$ , est (num. 50)  $m = 1 - \frac{e^n}{n+1}$ , qui valor ibidem erutus est e valore  $\sin.(a - nr) = m \sin. a$ , ubi pro  $a = 90^\circ$ ,  $\sin. a$  est 1, &  $nr$  complementum  $a$ , adeoque  $m = \cos. nr$ .

Erit igitur  $\cos. nr = 1 - \frac{e^n}{n+1}$ , adeoque  $\frac{e^n}{n+1} = 1 - \cos. nr = \frac{1}{2} n^2 r^2$  (num. 33). Quare  $r^2 = \frac{2e^n}{n(n+1)}$ : unde ob

$n$  communem omnibus elevationibus in eadem regione, erit  $r^2$ , ut  $e^n$ , sive  $r$ , ut  $\sqrt{e^n}$ . Nimirum erit refractio horizontalis, ut radix altitudinis atmosphæræ refringentis supra locum. Id theorema continet regulam, quam eodem loco tradidit Bouguerius, quæ est hujusmodi: subtrahatur elevatio loci ab altitudine tota atmosphæræ (ipse exhibet pro hac hexapedas 5158), & refractio horizontalis erit ut radix residui.

57. Idem theorema facile deprehenditur, si via radii intra atmosphäram habeatur pro rectilinea ob exiguum curvaturam. Tum enim  $A'F$  (fig. 4) habebitur pro recta perpendiculari ad diametrum  $ZN$ , cuius quadratum cum sit  $= A'Z \times A'N$ , ac  $A'N$  sit proxime constans, erit ipse arcus, & refractio ipsi proportionalis, ut radix ipsius  $A'Z$ . Sed quoniam curvatura radii non est ita exigua respectu curvaturæ terræ, & atmosphæræ, qua est tantummodo septuplo minor, sic etiam per geometriam idem theorema accuratius demonstrabitur: sit  $QE$  æqualis, & opposita  $QA'$ , & concipiatur chorda  $A'F$  cum sinu suo  $FO$ . Cum sit  $ZO \times ON = OF^2 = A'O \times OE$ ; erit  $ZO : A'O :: OE : ON$ , sive quamproxime  $:: A'E : ZN$ , vel sumptis dimidiis  $:: AQ : CZ$ , quæ ratio est constans, cum sit constans semidiameter circuli  $A'Q$  pro omnibus elevationibus  $AA'$  (num. 47). Erit igitur  $A'O$  ut  $OZ$ , adeoque ut residua altitudo  $A'Z$ , & chorda  $A'F$  ad sensum æqualis suo arcui, quæ ob diametrum constantem est in ratione subduplicata sui sinus versi  $A'O$ , erit in ratione subduplicata altitudinis  $A'Z$ .

58. Ope hujus regulæ ex binis refractionibus horizontalibus observatis in satis magno elevationis intervallo potest determinari altitudo atmosphæræ refringentis factis, ut *differentia quadratorum refractionum observatarum ad quadratum majoris, ita differentia elevationum ad altitudinem supra locum inferiorem*. Pro instituendo calculo adhibeantur binæ refractions horizontales, altera  $r$  inventa in superficie maris, ubi altitudo atmosphæræ refringentis quæsita sit  $e$ , altera  $r'$  inventa in elevatione supra ipsam superficiem  $d$ , ac erit  $e' = e - d$ : habebitur  $r^2 - r'^2 : r^2 :: e' : e$   
 $= \frac{r^2 e'}{r^2 - r'^2} = \frac{r^2 e'}{(r + r')(r - r')}$ .

59. Bouguerius habet quatuor refractions horizontales, unam pro superficie maris, & reliquas tres pro tribus diversis elevationibus, quæ habentur in sequenti tabella. Columna prima continet elevationes, secunda refractions, tertia altitudines atmosphæræ refringentis, quarum prima est illa  $e$  inventa postremo loco pro Bouguerio num. 39, reliquæ tres erutæ, comparando sequentes refractiones

nes cum prima : quoniam autem eæ altitudines proveniunt non penitus æquales , additur quarta columnæ , in qua habentur sequentes refractiones erutæ per eam regulam e prima , positâ altitudine totâ e mediâ inter eas quatuor columnæ tertiae , quæ est 5123 . Formula pro deducenda refractione r e datis e , e' evadit r =  $r \sqrt{\frac{e'}{e}}$  . Computatæ , quæ habentur in quarta columnæ , differunt ab observatis columnæ primæ , tantummodo per 4", 8", 1" , licet Bouguerius ( Acad. Paris. an. 1739. ) affirmet , ad mare in zona torrida sibi obvenisse admodum variabilem refractionem horizontalem intra limites admodum laxos , nimirum a 25' ad 29' .

| Elevat. | Refract. | Altit. comp. | Refr. comp. |
|---------|----------|--------------|-------------|
| 0       | 27'. 0"  | 5137         |             |
| 1479    | 22. 50   | 5193         | 22'. 46"    |
| 2044    | 20. 48   | 5028         | 20. 56      |
| 2388    | 19. 45   | 5136         | 19. 44      |

60. Numero 54 exposita est ratio incrementi refractionis in transitu per horizontem desumpta a longitudine radii intra atmosphærā . Sit ( fig. 5 ) MAN recta horizontalis : videatur astrum per radium FA'OA cum directione finali AB depresso infra horizontem AM angulo MAB unius gradus : sit autem integra via radii per atmosphærā FA'OAF' , cuius punctum O medium maxime accedat ad terram . Centro C intervallo CA inveniatur in eodem radio punctum aliud A' , & tangens RA' occurrat in I tangentī BA , quæ producatur ex parte opposita in B' . Refractione objecti visi per AB uno gradu infra horizontem erit ea , quæ oritur a curvatura totius arcus AO A' F , refractione autem respondens reliquo arcui AF' erit ea , quæ debetur elevationi apparenti NAB' unius gradus supra horizontem : ea respondet etiam arcui A'F pro objecto viso ex A' cum directione A'R itidem elevata supra horizontem puncti A' uno gradu , cum sit respectu A' prorsus ut AB' respectu A . Excessus refractionis pro depressione unius gradus supra refractionem pro elevatione unius gradus est refractione respondens curvaturæ arcus AO A' , quam Bouguerius vocat

eat refractionem terrestrem, appellatā cælesti illâ, quæ respondet arcui A'F, quia nimirum totus arcus AOA' est inferior puncto A, sive propior superficie terrestri, ut idcirco is patiatur refractionem a materia, quæ respectu puncti A est propior terræ, adeoque quodammodo velut terrestris. In tabella num. 32 refraction debita uni gradui elevationis est  $12^{\circ}43''$  pro uno depressionis  $30^{\circ}47''$ , a qua si dematur illa, habetur  $18^{\circ}4''$ : hæc debetur arcui AOA', dum arcui A'F debetur tantum  $12^{\circ}43''$ , ut idcirco in hoc casu terrestris sit major cælesti. Porro terrestris hæc non additur cælesti, nisi in objectis depressis infra horizontem: in iis, quæ apparent in horizonte, vel supra ipsum, omnis via radii est elevatior ipso oculo. Verum quæ refraction est terrestris, in eo sensu pro oculo posito in A, esset cælestis pro eodem posito in O: ibi enim objectum visum per eundem radius appareret in horizonte, & tota ejus radii via esset superior oculo, nimirum jacens versus cælum, non versus terram respectu ipsius oculi. Porro cum toti viæ FOF' debeatur refraction  $31^{\circ}3'' + 12^{\circ}40'' = 43^{\circ}43''$ ; hujus dimidius  $21^{\circ}51\frac{1}{2}''$  esset refraction horizontalis pro puncto O, major utique horizontali in A ob minorem elevationem ipsius O.

61. Refraction terrestris potiore jure appellari potest ea, quæ habetur, ubi observatur elevatio, vel depressione objecti terrestris siti intra ipsam atmosphærā, & visi per radius curvatum a via refractiva. Ea refraction erit dimidium curvaturæ arcus a radio descripti. Sint bina loca A, A' utcumque etiam inæqualiter elevata supra superficiem terræ, quorum alterum esse potest etiam in superficie ipsa. Si spectetur A'-ex A; directio apprens erit AI, directio vera AA', refraction, demenda elevationi, vel addenda depressioni, A'AI: ea erat dimidia anguli A'IB externi in triangulo isoscelio A'IA, qui totus exhiberet refractionem cælestem. Porro (num. 40) ipse A'IB est pars  $\frac{I}{n+1}$  anguli A'CA, quem radius A'OA subtendit in centro terræ, adeoque ea refraction terrestris erit pars  $\frac{I}{2n+2}$ . Totus valor  $\frac{I}{n+1} \times A'CA$  sumi debet,

bet, ubi ex triangulo A'CA inquiratur in magnitudinem gradus terrestris per observationem angulorum A', & A. Eorum summa demitur a  $180^\circ$ , & residuum habetur pro angulo ACA', qui obvenit minor vero per binos angulos A'AI, AA'I, quorum summa est BIA', pars ipsius  $\frac{1}{n+1}$ , adeoque pars  $\frac{1}{n}$  illius residui erronei. Si valor  $n$  satis accurate esset cognitus; posset ea methodus ad hujusmodi perquisitionem adhiberi: at is incertus est, nam, ut vidimus, apud Bradleyum est = 6, apud Simpsonum =  $5\frac{1}{2}$ , & quidem varius etiam pro varia constitutione atmosphæræ. Idcirco pro mensura graduum adhibentur potius observationes fixarum, quæ sint proximæ zenith, ubi refractiones sunt per quam exiguae, & certo cognitæ.

62. Ex observationibus institutis pro graduum mensura, cuiusmodi multæ jam habentur passim editæ, licet inquirere in ipsum valorem  $n$ . Nam pro reductione polygoni ad superficiem regularem terræ habentur mutuæ elevationes, ac depressiones singulorum stationum observatarum ex aliis, cum intervallo, cui respondet angulus in centro. Eo eruto ex iisdem elevationibus, & depressionibus erroneis, apparebit quota pars veri anguli sit error ipse: ea deberet esse  $\frac{1}{n+1}$ , a quo valore innotescet, quantum differat. In Bouguerianis observationibus debet esse  $\frac{1}{7\frac{2}{3}}$ , cum ipsi sit  $n = 6,645$  (num. 38). Is aliquando invenit etiam  $\frac{1}{9}$ , discrimine aliquo quidem, sed non immanni, ut in refractionibus radiorum, qui permeant imam, & crassam, & instabilem atmosphæræ partem, timeri posset.

## SCHOOLIUM.

63. Huc usque evolvimus ea, quæ pertinent ad hypothesim virium refractivarum proxime æqualium: superesset inquisitio in alias, ut possent earum conjectaria conferri inter se, & cum observationibus: verum ex altera parte huic uni convenient, quæ Cassinus, Simpsonus, Bradleyus, Bouguerius adhibuerunt ad ex-

colen-

colendam refractionum theoriā , & suas tabulas condendas , quæ quidem vel cum observationibus plane congruunt , vel ab iis parum admodum dissentiant : ex parte altera in aliis hypothesibus nihil nobis huc usque occurrit satis simplex , & elegans , & quod cum ipsis observationibus satis congruat . Hinc in ipsa hypothesi virium proxime æqualium diutius immorati sumus , & quidem ipse hujus hypotheseos consensus cum eorum hominum inventis ad id ipsum nos impulit . Resumpseramus in hoc scholio h̄c paucis præcipua eorum , quæ per totam dissertationem dispersa sunt : sed eam synopsim h̄c modo etiam suppressimus reservando ipsam , juxta ea , quæ dicemus inferius , synopsi totius voluminis addendæ in ejus fine .

64. Inprimis autem notandum illud , considerari h̄c a nobis radius luminis , ut constantem particulis progredientibus , in quas agunt vires materialia cujusdam , quæ ob inæqualem ejus densitatem , vel agendi modum ipsas detorqueant , & refractionem pariant . Eam Newtonus assumpsit , & est sane mirum in modum opportuna ad explicandas methodo simplici , & expeditâ omnes luminis proprietates . Hypothesis , quæ naturam luminis collocat in undis fluidi elastici , ut sonum , theoriā requirit in immensum magis sublimem , & compositam , & nobis quidem videtur omnino falsa ob rationes , quarum exponendarum non est h̄c locus (\*). Eandem particularum progredientium , & virium eas refringentium suppositionem adhibuerunt & Simpsonus , Bradleyus , Bouguerius , & plerique omnes , qui egerunt de refractionibus astronomicis .

65. In ea hypothesi habetur illud , celeritatem omnium luminis particularum in primo ingressu in atmosphærā eandem esse ,

ean-

(\*) Ea de re mentio est injecta in Opusculo III hujus Tomi , quod est conscriptum post hoc jam olim ad Academiam Parisiensem transmissum , & ab ipsa typis destinatum . Observations institutæ ope telescopii aquei ibi propositi pro determinanda ratione velocitatis luminis in aere ad velocitatem in aqua , & multo magis adhibitis aliis fluidis diaphanis , si eam exhibeant conformem rationi sinuum , quam requirit theoria Newtoni , qua de re ego quidem nequaquam dubito , ejusmodi qnæstionem omnino diriment .

eandem itidem communem omnibus , licet diversam a priore in appulso ad oculum . Sermo est de particulis homogeneis , quæ ad oculum adveniant in directionibus utcumque diversis , & per vias itidem utcumque diversas : quæcumque enim dicuntur de uno radiorum genere , eadem communia sunt reliquis omnibus , ubi agitur de regulis ad comparandas inter se refractiones , & totum discri men est in absoluta earum magnitudine , quod quidem , ubi agitur de observationibus astronomicis , quæ ipsæ exiguæ sunt , est perquam exiguum , & in paullo majoribus ab horizonte altitudinibus prorsus insensibiles , potissimum si comparentur radii extremi cum mediis , quibus aptantur quæcumque diximus de absoluta magnitudine ipsarum refractionum , & arcuum , qui a radiis describuntur intra atmosphæram . Porro utrumque pendet a proprietate luminis nota per observationes opticas , juxta num. 8 , quod nimirum particulæ luminis homogeneæ in eodem medio feruntur semper eâdem celeritate , per quæcumque media prius transierint . Prima autem pars patet etiam ex eo , quod radii ad atmosphæram concipientur delati sine ulla refractione sensibili , & secunda consequitur ( num. 5 ) ex prima , & ex alia suppositione , quæ adhibetur in hac perquisitione , quod nimirum vis refractiva dirigatur ad centrum , & paribus a centro distantiis sif eadem pro omnibus radiis homogeneis .

66. Ea suppositio oritur a figura telluris ad sensum sphærica , & æquilibrio fluidorum , quæ componuntur in sphæram circa ipsam ita , ut strata homogenea sint ad sensum sphærica . Vis enim refractiva est excessus virium , quibus in particulas luminis progredientes agunt strata inferiora supra vires , quibus agunt superiora . Est quidem nonnihil compressa ad polos ipsa terræ figura : sed hæc compressio est satis exigua , & multo minus a sphærica figura abludit ea terrestris superficie pars , cui imminet radius , qui ad oculum devenit . Sic ubi inquiritur in ipsam telluris figuram , dum polygonum terminatum in summis montibus altitudinis utcumque inæqualis reducitur ad superficiem regularem , assumitur ille tractus trium etiam , vel plurium graduum , ut portio cuiusdam superficie sphæricæ , ejus nimirum sphæræ , quæ in medio sphæ-

sphæroidicam illam superficiem oscularetur. Aliquam inæqualitatem virium paribus a centro distantiis potest inducere etiam inæqualitas caloris in eo omni tractu, ubi potissimum in radiis horizontali proximis longior est via per atmosphæram, at id ipsum potissimum in radiis non penitus horizontalibus exiguum discri- men pariet, cum illud tantummodo præstet, ut intersectio binarum curvæ tangentium mutetur nonnihil.

67. Considerando ejusmodi curvam habentur quædam, quæ sunt generalia pro quavis virium refringentium lege. Cætera sunt propria hypothesi virium proxime æqualem in omnibus distantiis a superficie terræ. Generaliter ipsa habet omnes proprietates trajectoriarum, quæ describuntur viribus centralibus, quarum una notissima est, celeritatem esse in ratione reciproca perpendiculari dueti e centro in tangentem: ab ea proprietate pendent præcipua e theoremati sparsis per totum Opusculum, quorum seriem exhibet Synopsis Gallica, quam addemus in fine etiam hujuscemodi, uti præstitimus in fine præcedentis, distinguendo communia a pertinentibus ad legem illam peculiarem vis saltem ad sensum constantis.

68. Contra ejusmodi legem habentur binæ difficultates, quarum proxima petitur a lege continuitatis, quæ observatur ubique in Natura, & quæ videretur ab ea lege vis refringentis violari debere. Radius delatus per lineam rectam usque ad eam distantiam, in qua incipit actio vis refringentis, deberet per saltum quendam transire ad motum in curva quadam circulari, vel proxima circulo magnitudinis cujusdam finitæ, habente curvaturam quandam determinatam in ipso illo initio: vis ipsa, usque ad eum limitem nulla, deberet momento temporis transire ibidem ad vim magnitudinis cujusdam finitæ. Dici posset, id quidem non fieri momento temporis, nec haberi immediatum transitum a linea recta ad arcum circularem, sed in intervallo perquam exiguo vim quidem a nihilo transire per omnes gradus ad magnitudinem quandam, quæ deinde perseveret proxime constans per totam atmosphæram, in quo exiguo intervallo per continuam curvaturæ mutationem deveniat radius a recta linea ad eum arcum circularem. Sic dum radius delatus per unum

unum medium uniforme, in quo ejus motus habetur pro æquabili, ad aliud itidem uniforme, in cuius superficie refringitur, & detorquetur ad aliam rectam, actio vis refringentis incipit paullo ante eum appulsum, & desinit paullo post ita, ut ab eis reæta transeatur ad aliam per curvam quandam brevissimam, sed continuam, cuius illæ binæ rectæ concipiuntur tangentes, & vero etiam osculatrices.

69. Ibi concipitur actio vis refringentis incipiens in aliqua distantia perquam exigua ante novam superficiem, & desinens in alia æquali post ipsam, crescens per omnes gradus, tum per eosdem decrescens: hic conciperetur incipiens paullo ante appulsum ad superficiem supremam atmosphæræ, & crescens per omnes gradus usque ad magnitudinem quandam exiguum, sed finitam, quæ deinde perseveraret per totam atmosphærā, adeoque dum ibi concipitur transitus ab una recta ad aliam, hic conciperetur transitus a motu rectilineo ad curvilineum curvaturæ finitæ per curvam quandam, cuius curvatura itidem a directione rectilinea abiaret per omnes gradus ad curvaturam illam finitam curvæ illius proxime circularis. Et quidem & hic, & ibi, & ubique in natura nusquam re ipsâ fieret transitus a vi nulla, vel a motu rectilineo, qui nusquam haberi potest accurate talis: nam vel sola generalis attractio, quæ gravitatem generalem gignit, & in puncto materiæ quovis variatur mutatione continua per omnes distancias a puncto materiæ quovis ad quodvis aliud, inducit mutationem & vis, & directionis motus continuam, & potissimum in ea lege virium generali, ad quam unicam & uniformem in mea sententia reducitur theoria Philosophiæ Naturalis, punctum quodvis materiæ motum habuit semper, & habebit in curva quadam continua naturæ uniformis determinataæ a prima projectione, & a vi resultante e compositione virium omnium, quas determinant omnes positiones, & distantiae, quas id punctum habuit, & habebit respectu omnium aliorum materiæ punctorum.

70. Verum ea huc non pertinent, & habemus pro viribus novis incipientibus in aliqua positione determinata vires, quæ inducunt mutationes sensibiles tempusculo perquam exiguæ in spatiolo

tiolo fere punctuali, quo pacto concipitur actio vis refringentis incipiens in quadam exigua distantia a superficie refringente, in qua incipiat flexus viæ a motu concepto rectilineo per rectam præcedentem usque ad sequentem. Sic posset hinc etiam concipi mutatio vis, & flexus facta in accessu ad supremam superficiem atmosphæræ terrestris per spatum exiguum tempore exiguo a motu præcedente habito pro rectilineo ad sequentem proxime circularem circuli cuiusdam magnitudinis finitæ. Sed hanc explicationem videtur respuere natura atmosphæræ terrestris, quæ debet attenuari paullatim ita, ut per gradus insensibiles fiant mutationes sensibiles in ejus densitate, differentiis ipsis stratorum; a quibus pendent vires, decrescentibus sensim per longa intervalla usque ad evanescentiam. Aer comprimitur in ratione ponderum comprimentium, & refractiones juxta experimenta Hauxbeyi sunt proportionales densitati ipsius, ex quibus principiis determinatâ curvâ, quæ exprimat densitates aeris in diversis elevationibus, longe alia obvenit lex virium refringentium, quas debeant parere differentiæ stratorum, longe remota ab uniformitate constanti, & longe alia curva a radio describenda per aerem.

71. Eadem progressio densitatis aeris orta a compressione massæ superioris ipsam comprimentis parit secundam difficultatem contra theoriam vis proxime constantis, & motus proxime circularis radii per atmospharam. Illa requirit altitudinem multo majorem atmosphæræ habentis densitatem adhuc satis magnam, quam hæc requirit nimis exiguum. Ipsa prodiit numero 39 minor, quam septem millium hexapedarum, & quidem pro Bradleyo, & Bouguerio paullo major quinque millibus: accedit, quod huic sub zona torrida obvenit minor, quam illi in climate usque adeo boreali, dum omnino videtur sub zona torrida debere esse major tum ob majorem vim caloris, tum etiam ob vim centrifugam motus diurni.

72. Nihil video, quod ad hasce difficultates reponi possit, si admitti debeat vis refractiva constans, cui refractiones observationibus deprehensæ respondeant, nisi vim refractivam non pendere ab omnibus atmosphæræ particulis, sed a particulis substantiæ.

tiæ cujuspiam ipsi admixtæ , quæ ascendat ad altitudinem multo minorem , & addensetur hic quidem prope superficiem terræ in eadem ratione , ac addensatur aer , cum refractiones ex observationibus Hauxbeyi ipsius sint proportionales densitati aeris compressi , vel rarefacti in machine Boyleiana , sed in distantiis majoribus recedat plurimum ab ea ratione addensationis , quæ quidem suppositio videtur admodum improbabilis . Quamobrem videtur omnino argumentum hoc omne mereri perquisitionem ultiore , cuius instituendæ ratio optima videtur ea , quæ adhibeat comparationem refractionum deductarum e theoria exposita , cum iis , quæ deducentur ex observationibus immediatis .

73. Proposueram ego quidem methodum pro ejusmodi comparatione in postremo paragrapho hujus dissertationis tum transmiso ad Academiam , cui erat titulus : *De determinatione refractionum astronomicarum per observationes* . Ea methodus erat petita a proportionalitate refractionum cum tangentibus distantiæ apparentis a zenith , quam juxta num. 43 admittit tabula Cailliana usque ad gradus 48 , Bradleyanâ , quæ censemur magis conformis observationibus , admittente usque ad 70 .

74. Formulam ibidem proposueram erutam ex hac suppositione , cuius ope habitis distantiis apparentibus a zenith supra , & infra polum invenitur sine ulla alia suppositione valor refractionum pertinentium ad illas quatuor distantias apparentes , & vera poli altitudo , cuius ope deinde ex aliis observationibus deduci possunt refractiones pro aliis omnibus distantiis : innui ibidem , determinatis semel refractionibus per eam suppositionem , posse ipsas corrigi calculo restituto cum usu tangentium pertinentium ad distantias a zenith imminutas juxta regulam Bradleyanam per triangulum refractionum ita primo inventarum . Id argumentum ego reservo sequenti Opusculo separato , ut enunciavi hic in præfatione . Si altitudo poli inventa per plura fixarum binaria obveniat magis diversa , quam pro erroribus , qui possint supponi commissi in observationibus institutis per instrumenta satis perfecta ; etæ observationes ostendent , falsam esse legem vis refractivæ proxime constantis . Si etæ altitudines poli congruant , & reliqua , quæ

ex

ex observationibus aliis eruentur ope ejus altitudinis poli ita inventæ pro refractionibus aliis , belle omnia convenient cum iis , quæ eruentur e formulis , quas in hoc Opusculo deduximus ab ea lege virium refringentium , id quidem favebit plurimum legi ipsi , sed illas veritatem nequaquam demonstrabit : consensus hypotheseos cum phænomenis demonstrat felicitatem quidem maximam hypotheseos ipsius , veritatem ejusdem nequaquam demonstrat . Idcirco aliam methodum proponam in alio Opusculo immediate adjecto , quod erit postremum hujusce Tomi , quæ refractiones exhibeat innixas soli suppositioni æqualitatis motus diurni terræ , de qua arbitror dubitari non posse .

75. Hic demum addam tantummodo , independenter a lege vis refringentis proxime constantis erui illud , quod proposuimus numero 8 , refractionem in altitudinibus supra horizontem non nimis exiguis pendere a sola constitutione atmosphæræ in strato infimo : adeoque pro habenda variatione refractionum , quæ pendeat a variatione ejus constitutionis , barometrum , ac thermometrum , & vero etiam hygrometrum , si refractiones pendent etiam ab aeris humiditate , non est exponendum extra fenestram , sed prope locum observationis , ut haud procul ab objectivo telescopii quadrantis muralis .





## OPUSCULUM VIII.

**DE REFRACTIONIBUS ASTRONOMICIS, ET ALTITUDINE POLI  
DETERMINANDIS PER DISTANTIAS APPARENTES BINA-  
RUM FIXARUM SUPRA, ET INFRA POLUM.**

1.  N Opusculo superiore vidimus (num. 23) refractiones Astronomicas in hypothesi vis refractivæ proxime constantis debere esse ut tangentes distantiarum apparentium a zenith imminutarum per angulum exiguum, qui angulus habeat rationem constantem ad refractiones ipsas: is autem angulus juxta Bradleyanam regulam deductam ex eo theoremate applicato ad ejus observationes est (num 33) triplus refractionis cuiuslibet. Vidimus autem & illud (num. 43), posse omitti subtractionem ejusmodi tripli citra errorem unius secundi in refractionibus Bradleyanis usque ad distantiam a zenith gradu 70, quamvis in Caillianis id non liceat nisi usque ad gradus 48, quæ tamen videantur omnino maiores justo. Promisiimus pro hoc Opusculo innixam hisce principiis methodum determinandi refractiones ipsas, & altitudinem poli ex observationibus distantiarum apparentium a zenith supra, & infra polum binarum fixarum ex ejusmodi principiis.

2. Id h̄c præstabimus, exponendo methodum ipsam, eruendo formulas, & illas applicando ad observationes plurium binariorum, quas, adhibito quadrante pedum tantummodo trium, sed egregio, & habente telescopium acromaticum ingentis aperturæ, & augmenti, instituit Parisiis in suo Observatorio præstantissimus Astronomus, & diligentissimus Observator Antonius Cagnolius, ac ad me humanissime transmisit. Ne exigui errorculi, qui nunquam penitus evitari possunt in verificatione divisionum quadrantis, & micrometri, in observationibus ipsis, in reducendis iisdem observationibus, quando institutæ sint diebus diversis, ad eandem

dem epocham , & ad eandem atmosphæræ constitutionem , nimis noceant exactitudini valorum , qui e formulis deduci debent , oportet , altera e binis fixis multo magis a polo distet , quam altera : oportet autem , illa prior non ita distet , ut , dum descendit infra polum , accedat ad horizontem multo magis , quam per gradus 20 , si adhibendæ sint formulæ , in quibus negligatur illa diminutio per triplum refractionis incognitæ , quæ diminutio formulas reddit complicatiōes , & calculum exigit operosiorē . In accessu majore ad horizontem diminutio ipsa omitti non potest , quia refractio ita crescit , ut illud triplum , quod deberet subtrahi , jam non sit satis exiguum respectu distantiaæ a zenith : præterea prope horizontem omissio subtractionis etiam exiguae ab arcu multo magis mutat valorem tangentis . Tangens quadrantis est infinita , dum tangens ipsius imminuti per arcum utcumque parvum est finita .

3. Hæ conditiones habentur in observationibus transmissis : eæ pertinent ad bina ternaria fixarum , quarum priores tres multo magis distant a polo , quam tres posteriores , ne priorum distantiaæ a zenith pertingant ad gradus 72 : accedunt autem ad eam mensuram quamproxime , quod itidem requiritur , ne numeri , qui in applicatione formularum adhibentur , sint nimis exigui , quod noceret exactitudini valorum , qui ex ipsis sunt eruendi . Per ea bina ternaria fixarum habentur novem binaria ad hunc usum idonea , conjungendo nimirum singulas e tribus prioribus cum singulis e posterioribus , quod nobis exhibebit uberem applicationem cum novem diversis determinationibus ejusdem altitudinis poli .

### §. I.

#### *Deductio formularum.*

4. EN formulas pro tangentibus distantiarum apparentium a zenith integrarum . Sint distantiaæ a zenith observatae intra , & supra polum pro altera e binis fixis  $a$  , &  $a'$  , pro altera  $b$  , &  $b'$  , & refractions ipsis respondentes  $x$  ,  $x'$  ,  $z$  ,  $z'$  . Erunt distantiaæ veræ  $a+x$  ,  $a'+x'$  ,  $b+z$  ,  $b'+z'$  . Distantia poli a zenith debet

debet esse æqualis semisummæ distantiarum ab ipso cuiusvis fixæ, quæ in appulsu superiore ad meridianum non abeat ad plagam oppositam ipsi polo, cum ipsius distantia ab hoc tantum addat distantiae poli a zenith in appulsu inferiore, quantum aufert in superiore. Hinc summæ ejusmodi distantiarum pertinentium ad binas fixas debent esse æquales inter se, nimurum  $a + x + a' + x' = b + z + b' + z'$ , sive  $x + x' - z - z' = b + b' - a - a'$ . Porro e proportionalitate refractionum cum tangentibus distantiarum apparentium integrarum erunt  $x' = \frac{x \tan.a'}{\tan.a}$ ,  $z = \frac{x \tan.b}{\tan.a}$ ,  $z' = \frac{x \tan.b'}{\tan.a}$ . Iis valoribus substitutis, & factâ multiplicatione per  $\tan.a$ , habebitur  $x(\tan.a + \tan.a' - \tan.b - \tan.b') = (b + b' - a - a') \tan.a$ , &  $x = \frac{(b + b' - a - a') \tan.a}{\tan.a + \tan.a' - \tan.b - \tan.b'}$ . Habitâ refractione  $x$ , habebuntur etiam  $x'$ ,  $z$ ,  $z'$ , e valoribus ipsarum, & inde dupla distantia poli a zenith  $a + a' + x + x'$ , vel  $b + b' - a - a'$ .

5. Inventis hoc pacto valoribus  $x$ ,  $x'$ ,  $z$ ,  $z'$  vero proximis, poterit restituī calculus subtrahendo a singulis valoribus  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ , valores  $3x$ ,  $3x'$ ,  $3z$ ,  $3z'$ , & appellando residua  $m$ ,  $m'$ ,  $n$ ,  $n'$ , invenietur valor correctus  $x = \frac{(b + b' - a - a') \tan.m}{\tan.m + \tan.m' - \tan.n - \tan.n'}$ ,

unde profluet  $x' = \frac{x \tan.m'}{\tan.m} = \frac{(b + b' - a - a') \tan.m'}{\tan.m + \tan.m' - \tan.n - \tan.n'}$ ,

& dupla distantia poli a zenith, ut prius,  $a + a' + x + x'$ .

6. Ubi agetur de unico binario, factis  $b + b' - a - a' = c$ , &  $\tan.a + \tan.a' - \tan.b - \tan.b' = c'$ , fiet  $x = \frac{c \tan.a}{c'}$ .

Hinc  $x' = \frac{x \tan.a'}{\tan.a}$  erit  $= \frac{c \tan.a'}{c'}$ , & eodem pacto  $z = \frac{c \tan.b}{c'}$ ,

$z' = \frac{c \tan.b'}{c'}$ . Quare invento semel  $\log.c - \log.c'$ , addendo huic

eidem logarithmo successive logarithmos valorum singulorum  $\tan.a$ ,

$\tan.a'$ ,  $\tan.b$ ,  $\tan.b'$  habebuntur valores  $x$ ,  $x'$ ,  $z$ ,  $z'$ , quorum tripla

abla-

ablata a valoribus  $a, a', b, b'$ , exhibebunt  $m, m', n, n'$ , unde eruentur corum tangentes, & novus valor  $c' = \tan.m + \tan.m' - \tan.n - \tan.n'$ , ac novi valores  $x = \frac{c \tan.m}{c'}, x' = \frac{c \tan.m'}{c'}$ , & distantia poli a zenith complementum quæsitæ altitudinis poli  $= \frac{1}{2}(a + a' + x + x')$ , ubi si quis velit hanc distantiam sine novis valoribus  $x$ , &  $x'$  inventis singillatim; pro  $x + x'$  adhibebit  $\frac{c(\tan.m + \tan.m')}{c'}$ , quod itidem locum habebit, ubi neglegta illâ subtractione, ponatur  $a$ , &  $a'$  pro  $m$ , &  $m'$ .

7. Calculus reddi potest multo facilior, evitatâ primâ determinatione refractionum per formulas, assumendo e tabulis, quæ sunt in usu, eas, quæ respondent distantiis apparentibus a zenith, quarum tripla ablata ab ipsis distantiis exhibeant residua  $m, m', n, n'$  adhibenda pro tangentibus formulæ numeri præcedentis: nam eæ etiam debent esse parum abludentes a veris: at libuit proponere methodum, quæ nihil aliunde petitum requirat. Cæterum ex ipso neglectu subtractionis ejus tripli pro tangentibus oritur discriminem valorum ita exiguum, ut omnino negligi possit, quod satis patebit in exemplo proferendo in sequenti paragrapho pro unico binario. Hinc pro novem binariis desumptis a binis illis ternariis adhibebimus in exemplis ipsius paragraphi sequentis pro tangentibus distantias a zenith nihil curtas, & quidem neglectis etiam secundis, vel computatis pro uno minuto, quod itidem mutationem inducit multo adhuc minus sensibilem. Qui velit, poterit instituere calculum primi binarii pro reliquis omnibus: sed inveniet discriminem multo minus illo, quod habebitur inter valores erutos e diversis binariis: accedit, quod in majore numero valorum ita erutorum errorculi debent se mutuo elidere, saltem magna ex parte, ubi accipiatur medium inter omnes ita inventos.

8. Porro formulæ evadent commodiores pro instituendo eo calculo, & efformandâ tabulâ ad eum enunciandum idoneâ, adhibitis sequentibus substitutionibus. Fiat  $a + a' = p, b + b' = p', \tan.a = d, \tan.a' = d', d + d' = q, \tan.b = e, \tan.b' = e'$ ,

$= e'$ ,  $e + e' = q'$ , dupla distantia poli a zenith  $zD$ , altitudo poli A: tum erit  $x = \frac{(p' - p)d}{q - q'}$ ,  $x' = \frac{(p' - p)d'}{q - q'}$ ,  $x + x' = \frac{(p' - p)q}{q - q'} (*) = h$ ,  $zD = p + h$ ,  $A = 90^\circ - D$ .

9. Fixæ, quæ in appulso superiore ad meridianum non accedant ad horizontem magis, quam per  $18^\circ$ , erunt ex, quæ non habent distantiam a polo, seu complementum latitudinis borealis in nostro hemisphærio boreali, australis in australi, majorem altitudine poli imminutâ per  $18^\circ$ , sive majorem  $A - 18^\circ$ , quas idcirco facile erit seligere, cum altitudo poli innotescat satis proxime ad eam rem per latitudines locorum cognitas in Geographia; proderit autem, ut jam monuimus, assumere fixam alteram non multo minus distantem a zenith, quam pro ea mensura, & alteram non nimis distantem a polo. Per hyemem multo commodius, & cum multo minore errandi periculo res perficitur unicâ nocte: initio noctis directo quadrante in plano meridiani versus suum polum, & telescopio ad distantiam a zenith proximam  $70^\circ$ , vel ad plures parum remotas ab ea positione alias post alias, Observator determinabit tempus appulsi ad meridianum plurium fixarum utcumque incognitarum, & assumet distantiam apparentem a zenith uniuscujusque. Determinatio distantiae apparentis a zenith debet esse, quammaxime fieri potest, accurata, quod facile obtinebitur ope micrometri, sed positio quadrantis in plano meridiani poterit assumi tantummodo non nimis remota a vera: nam exiguis error in ea positione nihil ad sensum turbabit distantiam apparentem a zenith, & parum admodum erronea obveniet determinatio temporis, quod requiritur tantummodo ad dignoscendam fixam eandem post horas 12 in appulso superiore ad meridianum. Paullo ante intervallum horarum 12 dirigetur telescopium quadrantis relicti ibi per totam noctem, vel iterum collocati in

plano

$$(*) \text{ Nam est } p' - p = b + b' - a - a', \& x + x' = \frac{(p' - p)d}{q - q'} + \frac{(p' - p)d'}{q - q'} \\ = \frac{(p' - p)(d + d')}{q - q'} = \frac{(p' - p)q}{q - q'}.$$

plano meridiani ad distantiam a zenith æqualem excessui duplæ distantiarum poli ab ipso zenith supra distantiam fixæ cujusvis observatam vespere: tempus appulsus, & distantia ita præcognita, parum admodum abludent ab iis, quæ habebuntur in illo reditu ad meridianum, sumniovebunt omne periculum erroris in cognoscenda fixa eadem: ipsa vero tum erit multo magis visibilis, trans atmosphærā nimirum multo minus crassam, & vaporosam in altitudine tanto majore.

10. Assumptis eodem pæcto primo vespere pluribus fixis non nimis remotis a polo utut incognitis, & observatis tum, ac deinde iterum post horas 12, habebuntur intra unicam noctem plurium fixarum utriusque generis distantiarum tam infra polum, quam supra, nec ulla reductione opus erit ad eandem epocham, quod magnam laboris partem evitat, & vero etiam plerumque nullam, vel aliquando perquam exiguum requiret reductionem ad eandem atmosphæræ constitutionem, quæ post horas 12 ejusdem noctis in initio, & fine, fere nullam, vel perquam exiguum mutationem habebit in barometro, thermometro, hygrometro, quod multo tuitorem determinationem reddet valoris quæsiti. Licebit autem pluribus noctibus instituere observationes easdem adhibitis iisdem vel diversis fixis, ut pro singulis binariis in calculo quovis possint assumi observationes utriusque fixæ habitæ eadem nocte, ac plures haberi pro eodem etiam fixarum binario valores adhibendi.

11. In locis parum remotis ab æquatore, vel polo terrestri hæc methodus usui esse non poterit, cum in illis fixæ etiam polo proximæ in appulso inferiore ad meridianum nimis parum distent ab horizonte, & in his differentia distantiarum a zenith sit nimis exigua. In locis intermediis, ut Parisiis, res optime procedet, ob diurnitatem noctium hyemalium, & satis, sed non nimis magnam poli altitudinem, quæ exhibet differentias distantiarum satis magnas, ut mox patebit, & idcirco idoneas: nam ab iis differentiis res tota pendet. Si in locis minus remotis ab æquatore assumantur eodem modo primo vespere fixæ per 18 circiter gradus elevatae supra horizontem, advenient post horas 12 ad quadrantem meridiani oppositum polo: tum satis erit di-

stantiam ejus appulsus, & tangentem, quæ ipsi respondet, habere pro negativa in formulis propositis. Idem accidet etiam in regionibus aliquanto magis remotis ab æquatore, si adhibeantur fixæ adhuc remotiores a polo, quæ in appulso inferiore distent ab horizonte per numerum graduum nimis exiguum: sed eo casu pro tangentibus subtrahenda erunt tripla refractionum erutarum e tabulis, nam tangentes distantiarum integrarum majorem habebunt differentiam a tangentibus earundem imminutarum per ea tripla, quam ut adhiberi possint per se solæ, vel ad habendam primam determinationem refractionum pro calculi restitutione, saltem pro unica.

## §. II.

*Applicatio calculi arithmeticæ ad formulas, in quibus habetur ratio triplæ refractionis subtractæ a distantiis apparentibus a zenith.*

12. FUNDAMENTUM totius applicationis sunt bina illa ternaria distantiarum a zenith eruta ex observationibus ad me transmissis, quæ idcirco proponam hinc in tabella adjecta in fine hujus numeri. Ex observationes institutæ sunt a diligentissimo Observatore non methodo, quam hinc propono, nimirum eadem nomine pro singulis binariis, sed ex occasione conficiendi amplum, & accuratum catalogum fixarum borealium, qui jamdiu ab Astronomis desideratur, diversis diebus pro singulis fixis, pro non nullis binæ tantum, pro aliis, ubi minor habebatur consensus, sex vel etiam octo, quæ idcirco requirebant reductiones ad eandem epocham, & ad eandem atmosphæræ constitutionem, assumptâ pro epocha die 1 Januarii ejusdem anni 1783, quo ipsæ observations sunt institutæ, & pro constitutione atmosphæræ statu ejus medio indicato per barometrum, & thermometrum: nondum enim moris est apud Astronomos, ut hygrometri habeatur ratio pro refractionum determinatione, quod jam in Patavina Specula præstat rerum meteorologicarum in primis peritissimus, ac diligenterissimus observator, & combinator Toaldus, qui cum præstans-

tissimo itidem sororis filio Cominellio, & in eadem Specula adju-  
tore nuper præmium retulit ab Academia Manhemensi inter eos  
divisum pro dissertationibus a singulis seorsum transmissis de opti-  
ma constructione hygrometri.

13. Nouelle ex iis observationibus consentiebant intra unicum  
etiam secundum, quas deinde aliis adjectis suspectas habuit intra  
tria, vel quatuor: sunt quæ dissentiant intra sex vel septem, sed  
admodum paucæ, quod tribui debet partim difficultati determi-  
nandi secunda singula in quadrante pedum trium, partim redu-  
ctionibus ipsis potissimum ad eandem atmosphæræ constitutionem,  
in quibus nulla habita est ratio hygrometri. Quamobrem ego qui-  
dem præferrem observationes eadem nocte institutas, licet optimum  
factu sit, si pluribus noctibus, ut innui, instituantur pro iis-  
dem, vel etiam pro diversis fixis, ut medium e magno determi-  
nationum numero assumptum sit accuratius, & tutius. Media hæc  
exhibeo, uti habentur in primis schedis ad me transmissis, quo-  
rum aliqua pro primo binario nonnihil immutata adhibui in sche-  
diasmate ea de re ad ipsum Observatorem transmisso, & is in cal-  
culis nonnullis in eandem rem institutis adhibuit pro prima e fixis  
in hac tabella positis majus per tria secunda. Sed cum deinde bi-  
nariis tribus reductis ad novem, calculos numericos instituerim illis  
primis mediis innixos, quos in scheda separata conservaveram,  
censui retinendos eosdem numeros potius, quam omnem eum cal-  
culum repetendum. Discrimen inter media adhibita provenit ab  
omissione aliarum ex observationibus, potius quam aliarum: in  
hisce hæc exhibitis adhibentur omnes. In primis numerus ipse bi-  
niorum novem auget correctionem mutuam errorculorum: deinde  
hæc abunde sunt pro specimine calculi instituti ad illustran-  
dam methodum. Ipse doctissimus, & laboriosissimus Observator  
promisit mihi per litteras, se adhibitum ingentem numerum  
biniorum, quorum multiplicitate discrimina observationum, as-  
sumto omnium medio, compensabuntur. Priorum trium binario-  
rum, quæ hæc proponuntur, fixæ notantur de more litteris græ-  
cis, in postremo altera est 42.<sup>a</sup> Ursæ Majoris, altera Ursæ Mi-  
noris fixa, cuius Ascensionem rectam is notat = 243°: declina-

tio ex his ipsis observationibus deduci facile potest : sed methodus admittit , ut supra monui , fixas quascumque , utcumque incognitas , quarum tantummodo requiritur distantia a zenith supra , & infra polum .

| Fixæ                              | Distantiæ apparentes a zenith<br>infra , & supra polum .    |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| " Draconis . . . . .              | { infra . . . 69°. 5'. 2", 4"<br>{ supra . . . 13. 8. 27, 2 |
| θ Ursæ Minoris . . . .            | { infra . . . 53. 2. 57, 2<br>{ supra . . . 29. 11. 23, 2   |
| ι Draconis . . . . .              | { infra . . . 71. 21. 26, 8<br>{ supra . . . 10. 51. 49, 1  |
| ζ Ursæ Minoris . . . .            | { infra . . . 52. 39. 42, 8<br>{ supra . . . 29. 34. 43, 2  |
| 42. <sup>a</sup> Ursæ Majoris . . | { infra . . . 70. 37. 33, 4<br>{ supra . . . 11. 35. 43, 9  |
| Fixa Ursæ Minoris . .             | { infra . . . 53. 44. 56, 7<br>{ supra . . . 28. 29. 26, 5  |

14. Applicabimus calculum numericum formulis numerorum 4, 5, 6 pro primo binario tabulæ præcedentis in tabula sequenti , in qua habentur tres divisiones , quarum prima habens tres columnas exhibet primum calculum pro valoribus numericis refractionum  $x$ ,  $x'$ ,  $z$ ,  $z'$  determinandis per tangentes distantiarum integrarum a zenith juxta num. 4, & 5, secunda subtractionem triplæ refractionis a quavis distantia ad inveniendos valores  $m$ ,  $m'$ ,  $n$ ,  $n'$  juxta numerum 6, tertia restitutionem calculi pro inveniendis novis valoribus  $x$ , &  $x'$ , ac eorum ope duplā distantiam poli a zenith , & altitudine poli , quæ est complementum dimidii ejus valoris . En ipsam tabulam .

|                                |                           |                                |                            |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
|--------------------------------|---------------------------|--------------------------------|----------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|---------------------------------------------------|--------------------|
| $a = 69^{\circ} 5' 21''$       | $a' = 13^{\circ} 8' 27''$ | $b = 53^{\circ} 2' 57''$       | $b' = 29^{\circ} 11' 23''$ | $\tan.a = 2,616 \dots$ | $\tan.a' = 0,233 \dots$ | $\tan.b = 1,329 \dots$ | $\tan.b' = 0,558 \dots$ | $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ | $0,417714$         |
| $a + a' = 82^{\circ} 13' 28''$ |                           |                                |                            | $2,887$                |                         |                        |                         | $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ | $9,367953$         |
| $b + b' = 82^{\circ} 14' 20''$ |                           |                                |                            |                        | $1,887$                 |                        |                         | $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ | $0,123674$         |
| $c = 0.0.50,8$                 |                           |                                |                            | $c^1 = 0,962 \dots$    | $0,016825$              | $x = 138,2 \dots$      | $2,140403$              | $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ | $9,747023$         |
|                                |                           |                                |                            | $c = 1,705864$         |                         | $x^1 = 12,3 \dots$     | $1,090642$              | $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ | $1,711083$         |
|                                |                           |                                |                            | $c : c^1 = 1,722689$   |                         | $z = 70,2 \dots$       | $1,846363$              | $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ | $z^1 = 29,5 \dots$ |
|                                |                           |                                |                            |                        |                         | $z^1 = 1,469712$       |                         |                                                   |                    |
| $a = 69^{\circ} 5' 21''$       | $a' = 13^{\circ} 8' 27''$ | $b = 53^{\circ} 2' 57''$       | $b' = 29^{\circ} 11' 23''$ |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
| $3x = 0.6.54,6$                | $3x^1 = 0.0.36,9$         | $3z = 0.3.30,6$                | $3z^1 = 0.1.28,5$          |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
| $m = 68.58.7,8$                | $m^1 = 13.7.50,3$         | $n = 52.59.26,6$               | $n^1 = 29.9.54,7$          |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
| $\tan.m = 2,6009$              | $c = 1,705864$            | $a + a' = 82^{\circ} 13' 28''$ | $82^{\circ} 11' 23''$      |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
| $\tan.m^1 = 0,2333$            | $0,9495 \dots$            | $0,022505$                     | $x + x^1 = 0.2.31,7$       |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
| $\tan.n = 1,3266$              | $c : c^1 = 1,728369$      |                                | $82.16.1,3$                |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
| $\tan.n^1 = 0,5581$            | $\tan.m = 0,415117$       |                                | $41.8.0,6$                 |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
| $2,8342$                       | $\tan.m^1 = 0,367861$     |                                | $Alt. Poli. 48.51.59,4$    |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
| $1,8847$                       | $x = 139,2 \dots$         | $2,143486$                     |                            |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |
| $c^1 = 0,9495$                 | $x^1 = 12,5 \dots$        | $1,096230$                     |                            |                        |                         |                        |                         |                                                   |                    |

15. Prima, & secunda linea columnæ i divisionis i habet distantias a zenith fixæ remotioris  $a$ , &  $a'$ , tertia, & quarta fixæ propioris  $b$ , &  $b'$ , quæ habentur in primis quatuor numeris tabulæ præcedentis, quinta summam binarum priorum  $a + a'$ , sexta summam posteriorum  $b + b'$ , septima differentiam binarum præcedentium, qui est valor  $c = b + b' - a - a'$ . Secunda columnæ habet in prioribus quatuor lineis tangentes naturales arcuum  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  ad radium 1000, qui ex una parte sufficit ad usum præsentem, & ex altera cum non exhibeat valores abeuntates ultra quartam notam, non exigit usum partium proportionarium pro logarithmis eruendis e tabulis communibus. Porro in assumendis hisce tangentibus neglecta sunt secunda juxta numerum 7, vel, ubi erant plura, quam 30, computata pro uno minuto. Quinta linea habet itidem, ut in prima columnæ, summam priorum binarum linearum, sexta binarum posteriorum, septima harum differentiam, nimirum valorem  $c^1 = \tan.a + \tan.a' - \tan.b - \tan.b'$ . Valori  $c^1$  adscribitur complementum arithmeticum sui logarithmi, valori  $c$  suus logarithmus: eorum summa in linea

linea 7 est logarithmus fractionis  $\frac{c}{c'}$ , quæ exprimitur per  $c:c'$ : ea summa in linea 5 columnæ 3 habetur post logarithmos tangentium valorum  $a, a', b, b'$ , quæ tangentes duæ in eam fractionem debent exhibere juxta num. & refractiones  $x, x', z, z'$ : hinc summa valoris logarithmici lineæ 5 cum singulis quatuor linearum præcedentium exhibit in quatuor sequentibus logarithmos singulorum ex ipsis  $x, x', z, z'$ , quibus adscripti sunt horum valores numerici exprimentes numerum secundorum. Logarithmi priorum quatuor linearum columnæ tertiae non respondent accurate numeris columnæ secundæ, quia utriusque assumpti sunt e tabulis pro suis arcibus, & quidem cum negleguntur secundorum: hinc ii sunt veris proximi, non accurati ob neglegendum fractionum inferiorum.

16. Secundæ divisionis calculus patet e suis titulis: tripla valorum  $x, x', z, z'$  inventorum in fine divisionis primæ, quæ habentur in lineis secundis columnæ cuiusvis, subtrahita a valoribus  $a, a', b, b'$ , quæ habentur in columna prima ejusdem divisionis primæ, relinquunt in lineis tertiiis valores  $m, m', n, n'$  adhibendos in divisione tertia. In prima columna hujus habentur tangentes horum valorum erutæ e tabulis paullo accuratiores, nimirum pro radio 10000, & adhibitis etiam secundis, quod requirit partes proportionales, sed facili calculo. Habetur itidem in linea quinta summa priorum duarum e quatuor præcedentibus, in linea sexta summa duarum posteriorum, quorum numerorum differentia, nimirum novus valor  $c'$  habetur in linea 7. In secunda columna habetur valor  $c$ , qui remanet idem cum suo logarithmo, novus  $c'$  cum suo complemento logarithmico, e quorum logarithmorum summa oritur in tertia linea logarithmus novæ fractionis  $\frac{c}{c'}$ : in binis sequentibus lineis habentur logarithmi tangentium valorum  $m, m'$ , quorum singulorum summa cum eo linea tertiae exhibit in binis lineis sequentibus logarithmos valorum  $x, x'$  correctorum cum iis ipsis valoribus. In columna postrema hujus divisionis habetur valor  $a+a'$  e linea 5 columnæ 1 divi-

divisionis 1, cui adjunguntur valores inventi  $x$ , &  $x'$  reducti ad minuta, & secunda: summa eorum trium valorum exhibet in linea quarta duplam distantiam poli a zenith, cui subjungitur ipsius dimidium, ac demum complementum hujus, quod est ipsa poli altitudo quæsita.

17. Comparando inter se valores  $x$ , &  $x'$  inventos in columna 2 divisionis 3 post calculi restitucionem cum inventis in tertia divisionis 1 per calculum usque adeo faciliorem, patet, priorem non esse mutatum, nisi per unicum secundum, posteriorem nonnisi per  $\frac{3}{10}$  unius secundi, unde in dupla distantia poli a zenith non provenit nisi discriminus  $= 1", 3$ , quod in ejus dimidio, adeoque & in altitudine poli, reducitur ad  $0", 6$ . Quamobrem supervacuum videtur adeo prolixiore calculo uti pro tam levi discrimine, potissimum ubi plura binaria adhibenda sint, quæ multitudo ipsa majores fere semper inducit errorum compensationes. Ratio exiguae differentiæ valoris provenientis e mutatione tangentium est duplex: in primis, quia, ut supra etiam innuimus, illa tripla refractionum sunt exigua respectu arcuum, a quibus demenda sunt pro calculi restituzione, adeoque & differentiæ tangentium exiguae respectu tangentium ipsarum, ubi non nimis acceditur ad quadrantem: deinde, quia mutatio omnium maxima fit in distantia maxima  $a$ , & ejus tangente: ipsa autem in valore  $x = \frac{ctan.a}{c'}$  dum mutatur in numeratore, mutatur simul in denominatore ob  $c' = tan.a + tan.a' - tan.b - tan.b'$ . Cura maxima collocanda est in determinatione distantiarum apparentium a zenith, quæ exhibet valorem  $c = b + b' - a - a'$ . Error unius secundi in eo valore secum trahit in exemplo hujus paragraphi errorem  $1\frac{1}{2}''$  in altitudine poli: nam is est in tabula superiore  $= 50''$ , & summa valorum  $x + x'$ , qui per ipsum multiplicantur, est  $= 150''$ : cum ea addenda sit valori  $a + a'$  ad habendam duplam distantiam poli a zenith, inducitur in ipsam error  $= 3''$  per errorem  $= 1''$  valoris  $c$ , adeoque ejus dimidium in distantiam simplicem, & in altitudinem poli: is autem error potest tam augeri, quam minui a reliquis valoribus adhibitis in toto calculo. Ex distantiae

majoribus instrumentis haberi possunt etiam intra unum secundum, & vero etiam intra fractionem unius secundi, potissimum si omnes quatuor distantiae assumantur eadem nocte, ut nulla reductione sit opus. Tum vero etiam unicum binarium exhibebit valores parum ab ludentes a veris etiam sine ulla calculi restitutione: ingens autem binariorum numerus, assumpto valore medio, avertet omne periculum erroris sensibilis. Si observentur quinque fixae remotiores a polo, & totidem propiores; habebuntur 25 binaria: denique fixae praebebunt 100 cum totidem determinationibus eadem methodo, qua hic ternae exhibebunt calculo expeditissimo determinationes 9 in paragrapho sequenti, ad quem jam progredimur.

### §. III.

*Applicatio calculi numerici ad formulas simpliciores, in quibus ea subtractio negligitur.*

17. FORMULE pro hac methodo habentur num. 8. Retinentur in ipsis valores  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ , quorum priores duo pertinent ad fixam remotiorem a polo, duo reliqui ad propiorem: sed ut combinari possit quaecumque e tribus remotioribus cum quavis e tribus prioribus, posuimus ibi  $p = a + a'$ , &  $p' = b + b'$ : eo pacto valor  $b + b' - a - a'$ , qui erat  $= c$ , evasit  $= (p' - p)$ , tangentes priorum duarum appellatae sunt  $d$ ,  $d'$ , duarum posteriorum  $e$ ,  $e'$ , & illarum summa  $q$ , summa harum  $q'$ : sic denominator  $c'$ , qui erat  $\tan.a + \tan.a' - \tan.b - \tan.b'$ , evasit  $= q - q'$ . Hinc valor  $x = \frac{c \tan.a}{c'}$ , &  $x' = \frac{c \tan.a'}{c'}$ , evasit  $\frac{(p' - p)d}{q - q'}$ , &  $\frac{(p' - p)d'}{q - q'}$ , ac eorum summa  $x + x'$  facta  $= h$ , & addita summæ  $a + a' = p$ , reliquit duplam distantiam poli a zenith 2D  $= \frac{(p' - p)q}{q - q'}$ , unde profuit ejus dimidium D, & altitudo poli A, quæ est ipsius supplementum.

P A R A G R A P H U S III.

457

| P A R S I.                       |                          |                          |               | P A R S III. |           |             |          |
|----------------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------|--------------|-----------|-------------|----------|
|                                  | a, a', p                 | d, d', q                 | b, b', p'     | e, e', q'    |           | s2'. o'', o | + 3'', 9 |
| I                                | 69°. 5'. 2'', 4          | 2, 616                   | 53. 2. 57, 2  | 1, 329       | s1. 52, 4 | - 3, 7      |          |
|                                  | 13. 8. 27, 2             | 0, 233                   | 29. 11. 23, 2 | 0, 558       | s1. 54, 2 | - 1, 9      |          |
|                                  | 82. 13. 29, 6            | 2, 849                   | 82. 14. 20, 4 | 1, 887       | s2. 1, 8  | + 5, 7      |          |
| II                               | 71. 21. 29, 8            | 2, 563                   | 52. 34. 42, 8 | 1, 311       | s1. 55, 4 | - 0, 7      |          |
|                                  | 10. 51. 49, 1            | 0, 192                   | 29. 34. 43, 2 | 0, 568       | s1. 57, 0 | + 0, 9      |          |
|                                  | 82. 13. 15, 9            | 3, 155                   | 82. 14. 26, 0 | 1, 879       | s1. 58, 6 | + 2, 6      |          |
| III                              | 70. 37. 33, 4            | 2, 845                   | 53. 44. 56, 7 | 1, 364       | s1. 51, 9 | - 4, 2      |          |
|                                  | 11. 35. 43, 9            | 0, 205                   | 28. 29. 26, 5 | 0, 543       | s1. 53, 5 | - 2, 6      |          |
|                                  | 82. 13. 17, 3            | 3, 050                   | 82. 14. 23, 2 | 1, 907       | 504, 8    |             |          |
|                                  |                          |                          |               |              | s1. 56, 1 |             |          |
| P A R S II.                      |                          |                          |               |              |           |             |          |
| I . . . . . I                    | I . . . . . II           | I . . . . . III          |               |              |           |             |          |
| q = 2, 849. 0, 454692            | ... . . . . 0, 454692    | ... . . . . 0, 454692    |               |              |           |             |          |
| p' - p = 50'', 8 . . . 1, 705864 | 50'', 4 . . . 1, 751279  | 53'', 6 . . . 1, 729165  |               |              |           |             |          |
| q - q' = 0, 962 . . . 0, 016825  | 0, 970 . . . 0, 013228   | 0, 942 . . . 0, 025949   |               |              |           |             |          |
| h = 150'', 4 . . . 2, 177381     | 165'', 7 . . . 2, 219199 | 162'', 1 . . . 2, 209806 |               |              |           |             |          |
| p = 82°. 13'. 29'', 6            | 82°. 13'. 29'', 6        | 82°. 13'. 29'', 6        |               |              |           |             |          |
| h = 0. 2. 30, 4                  | 0. 2. 45, 7              | 0. 2. 42, 1              |               |              |           |             |          |
| 2D = 82. 16. 0, 0                | 82. 16. 15, 3            | 82. 16. 11, 7            |               |              |           |             |          |
| D = 41. 8. 0, 0                  | 41. 8. 7, 6              | 41. 8. 5, 8              |               |              |           |             |          |
| A = 48. 52. 0, 0                 | 48. 51. 52, 4            | 48. 51. 54, 2            |               |              |           |             |          |
| II . . . . . I                   | II . . . . . II          | II . . . . . III         |               |              |           |             |          |
| q = 3, 155 . . . 0, 498999       | ... . . . . 0, 498999    | ... . . . . 0, 498999    |               |              |           |             |          |
| p' - p = 64'', 5 . . . 1, 809560 | 70'', 1 . . . 1, 845718  | 67'', 3 . . . 1, 828015  |               |              |           |             |          |
| q - q' = 1, 268 . . . 0, 896881  | 1, 276 . . . 0, 894149   | 1, 248 . . . 0, 903785   |               |              |           |             |          |
| 160'', 5 . . . 2, 205440         | 173'', 3 . . . 2, 238866 | 170'', 1 . . . 2, 230799 |               |              |           |             |          |
| p = 82°. 13'. 15'', 9            | 82°. 13'. 15'', 9        | 82°. 13'. 15'', 9        |               |              |           |             |          |
| h = 0. 2. 40, 5                  | 0. 2. 53, 3              | 2. 50, 1                 |               |              |           |             |          |
| 2D = 82. 15. 56, 4               | 82. 16. 9, 2             | 82. 16. 6, 0             |               |              |           |             |          |
| D = 41. 7. 58, 2                 | 41. 8. 4, 6              | 41. 8. 3, 0              |               |              |           |             |          |
| A = 48. 52. 1, 8                 | 48. 51. 55, 4            | 48. 51. 57, 0            |               |              |           |             |          |
| III . . . . . I                  | III . . . . . II         | III . . . . . III        |               |              |           |             |          |
| q = 3, 050 . . . 0, 484300       | ... . . . . 0, 484300    | ... . . . . 0, 484300    |               |              |           |             |          |
| p' - p = 63'', 1 . . . 1, 800029 | 68'', 7 . . . 1, 836957  | 65'', 9 . . . 1, 818885  |               |              |           |             |          |
| q - q' = 1, 163 . . . 0, 934420  | 1, 171 . . . 0, 931443   | 1, 143 . . . 0, 941954   |               |              |           |             |          |
| 165'', 5 . . . 2, 218749         | 178'', 9 . . . 2, 252700 | 175'', 8 . . . 2, 245139 |               |              |           |             |          |
| p = 82°. 13'. 17'', 3            | 82°. 13'. 17'', 3        | 82°. 13'. 17'', 3        |               |              |           |             |          |
| h = 0. 2. 45, 5                  | 0. 2. 58, 9              | 2. 55, 8                 |               |              |           |             |          |
| 2D = 82. 16. 2, 8                | 82. 16. 16, 2            | 82. 16. 13, 1            |               |              |           |             |          |
| D = 41. 8. 1, 4                  | 41. 8. 8, 1              | 41. 8. 6, 5              |               |              |           |             |          |
| A = 48. 51. 58, 6                | 48. 51. 51, 9            | 48. 51. 53, 5            |               |              |           |             |          |

Tom. II.

M m m

18. Pro

18. Pro applicando calculo composita est tabula posita in pagina præcedente , quæ habet partes tres . Prima pro fixis remotioribus a polo continet in columna prima valores  $a$ ,  $a'$ ,  $p$ , & in columna secunda valores  $d$ ,  $d'$ ,  $q$ , ac pro fixis propioribus in columna tertia valores  $b$ ,  $b'$ ,  $p'$ , in quarta  $e$ ,  $e'$ ,  $q'$ : cum tres habeantur fixæ utriusque speciei , habentur pro quavis ex iis valores numerici respondentes iis tribus litteris in tribus lineis cuiusvis e tribus divisionibus designatis per numeros I, II; III. In secunda linea columnæ primæ, & tertiaræ cuiusvis divisionis habentur valores numerici pro  $a$ , &  $b$ , in tertia pro  $a'$ , &  $b'$ , qui valores desumuntur e prima columna primæ divisionis tabulæ numeri 13 , quarta eos habet pro  $p$ , &  $p'$ , qui obtinentur per summam præcedentium: secunda linea columnæ secundæ, & quartæ habet valores numericos tangentium assumptarum e tabulis pro arcubus  $a$ , &  $b$  ad radium 1000 , & negligendo eorundem arcuum secunda , vel ea computando pro uno minuto , tertia habet similes valores tangentium eodem modo erutarum pro arcubus  $a'$ , &  $b'$ : quarta demum habet  $q$ , &  $q'$  summas eorum , qui habentur in binis lineis præcedentibus .

19. Ope hujus partis primæ efformatur secunda , quæ habet divisiones novem : priores tres designatae per I.... I, I.... II, I.... III continent tres combinationes primæ e tribus fixis remotioribus cum tribus propioribus: tres sequentes designatae per II.... I, II.... II, II.... III continent tres alias secundæ e remotioribus cum iisdem tribus propioribus : postremæ tres designatae per III.... I, III.... II, III.... III continent tres combinationes postremas tertiaræ e remotioribus itidem cum tribus prioribus .

20. Prima linea in quavis divisione continet valorem  $q$  desumptum e secunda columna partis primæ: secunda linea habet valorem  $p' - p$  , qui efformatur subtrahendo valorem  $p$  respondentem illi combinationi erutum e columna prima tabulæ præcedentis a valore  $p'$  respondentे eidem combinationi in columna tertia ipsius: is autem, etiam ubi excedit minutum primum , reducitur ad numerum secundorum . Linea tertia habet valorem  $q - q'$  , qui efformatur subtrahendo valorem  $q'$  respondentem illi combinatio- ni

ni erutum e columna quarta ejus tabulæ a valore  $q$  ejus socio, qui habetur ibidem in columna secunda. Priorē bini valores habent sibi adscriptum suum logarithmum, tertius suum complementum logarithmicum, quod indicatur, ut in p̄æcedentibus Op̄usculis, per p̄æfatum p̄æfixum valori  $q - q$ , & lineolam superpositam characteristicæ ejus valoris logarithmici.

22. Summa numerorum logarithmicorum, qui habentur in p̄æcedentibus tribus lineis, exhibet in quarta logarithmum valoris  $x$   
 $+ x' = \frac{(p' - p)q}{q - q}$ , cuius numerus est  $h$  ipsi p̄æmissus in secundis, in quibus habebatur  $p' - p$ . In linea quinta habetur valor  $p$ , in sexta idem  $h$  reductus ad prima, & secunda, qui additus ip̄  $p$  efficit in septima valorem  $2D$ , cuius habetur in octava dimidium  $= D$ , & in nona demum A altitudo poli quæsita.

23. Eo pæcto habentur novem determinationes altitudinis poli, quæ omnes conveniunt in gradibus 48, & itidem omnes a numero minutorum 51 non differunt, nisi per pauca secunda. Singulæ ex iis determinationibus habentur in prima e binis columnis partis tertiarū hujus tabulæ, quæ adjecta est, ut unico intuitu apparet, quantum a se invicem differant, ac eruto medio arithmeticō, habeatur valor, qui censeri possit parum admodum discrepans a vero, ac eo invento in fine columnæ primæ, appareat in secunda, quantum singulæ determinationes differant ab ipso per differentias adscriptas singulis. Summa secundorum contentorum in novem valoribus inventis, adjectis 120 ob binas determinationes, primam, & quartam, habentes 52', nimirum 51' + 60", inventitur in linea decima, ubi ea est 504,8, quæ divisa per 9 exhibet 56", 1. Hinc altitudo poli deducta ex iis observationibus evadit in Observatorio Cagnoliano  $48^{\circ} 51' 56''$ , 1. Dissensus in columna secunda pertingit ex parte negativa ad 4", 2, & ex parte positiva ad 5, & 7. Is dissensus non est nimis magnus, adhuc tamen si distantiæ ejusdem fixæ a polo consentirent inter se intra unum, vel alterum secundum, redderent maxime suspectam regulam Bradleyanam, & æqualitatem vis refringentis: verum cum inter nonnullas ex observationibus ipsis habeatur dissensus.

etiam secundorum 8, huic ipsi dissensui tribui possunt differen-  
tiæ inventæ, & assumi illud medium interea, donec e multo  
majore binariorum numero, quem sibi Cagnolius proposuit, is  
ipse, calculis etiam accuratius subductis, accuratiorem, & magis  
certam determinationem predidicerit.

24. Porro id medium satis proxime congruit cum eo, quod de-  
ducitur e latitudine Observatorii Regii Parisiensis, & positione  
Observatorii Cagnoliani respectu ipsius. Id Observatorium per plu-  
res observationes terrestres consentientes intra unicum secundum  
is invenit borealius Observatorio Regio per  $1^\circ.40''$ , ut habeat  
ex ejus epistola diei 22 Junii hujusce ipsius anni 1783, & alti-  
tudo poli ejusdem Observatorii Regii censemur  $= 48^\circ.50'.1''$ .  
Inde eadem pro ipso Observatorio Cagnoliano esset  $48^\circ.51'.54''$ ,  
nonnisi duobus secundis discrepans ab inventa. Constatit aliquid  
multo certius per multo plura binaria, quorum ipse laboriosissimus  
Observator habere poterit, ut diximus, centum per observatio-  
nes decem exiguarum etiam fixarum remotiorum a polo, & to-  
tidem propiorum, quæ observationes omnes admodum commode  
haberi poterunt per hyemem impendendo unam horam vesperti-  
nam, & alteram matutinam. Semel enim collocato quadrante in  
plano meridiani, facile, adhibito etiam motu exiguō alidadæ ad  
variandas positiones, obtineri poterunt ope micrometri distantiæ  
a zenith stellularum temere advenientium ad telescopium per in-  
tervalla minora minutis tribus: telescopicis stellulis cælum ubique  
est confertum. Erutâ eo pacto altitudine poli, quæ satis certo  
respondeat hypothesi vis refringentis proxime constantis, poterit  
per methodum, quam proponemus in sequenti paragrapho, inqui-  
ri in refractiones reliquas, ut appareat, an omnia satis congruant  
cum hypothesi eadem.

## §. IV.

*De refractione tabula confienda, & ejus comparatione  
cum observationibus.*

25. STATIM occurrit primo intuitu, posse methodo paragraphi 2 determinari pro singulis binariis valorem cuiusvis e quatuor refractionibus  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  singillatim, quarum eæ, quæ pertinent ad unam quamvis e fixis remotioribus a polo, possunt habere tot determinationes, quot observatae sunt fixæ ipsi polo propiores, quæ determinationum multitudo, assumpto medio, tollit omne periculum erroris sensibilis in valore singularum respondentem hypothesi vis proxime constantis. Una ex ipsis semel determinata sufficit ad computandam totam tabulam adhibendo regulam Bradleyi, vel Simpsoni. Assumpto  $n = 6$ , vel  $= 5,5$ , haberetur  $m = \frac{\sin.(\alpha - nr)}{\sin. \alpha}$  juxta numerum 21 Opusculi superiores per  $\alpha$ , &  $r$  pertinentes ad eam distantiam a zenith: tum pro alio quovis valore  $\alpha$  haberetur  $\sin.(\alpha - nr) = m \sin. \alpha$ , & facto  $f = \alpha - nr$ , esset  $r = \frac{\alpha - f}{n}$ . Omnium aptissimus ad eam rem esset valor  $\alpha$  refractionis maximæ e sic inventis, cum error refractionis assumptæ minuatur quidem, dum ex ea deducuntur refractiones minores, sed augeatur, dum deducuntur majores. Sine suppositione valoris  $n$ , posset & is, &  $m$  inveniri per binas refractiones ita accurate determinatas methodo numeri 33 ejusdem Opusculi, tum erui valor  $r$  pro quovis alio  $\alpha$  ex eadem formula  $\sin.(\alpha - nr) = m \sin. \alpha$ .

26. Ad minuendum errorem potest pro refractione, e qua eruantur cæteræ ope valoris  $n$  suppositi, vel pro altera e binis, per quas determinentur valores  $m$ , &  $n$ , adhiberi ea, quæ pertinet ad distantiam a zenith multo majorem iis, quæ adhibitæ sunt pro determinanda altitudine poli, quæ nimirum non excedebant gradus 72, & vero etiam refractionis horizontalis. Nam determinatâ

nata semel per tot combinationes duplā distantia poli a zenith  
 $= 2D$ , e qua profluxit altitudo poli A, potest determinari quævis ex iis refractionibus majoribus, & ipsa refractionis horizontalis sine metu erroris novi præter eum, qui committatur in observatione fixæ ad eam determinationem adhibendæ, ejus nimirum, quæ in appulso inferiore ad meridianum descendat ad eam distantiam a zenith. Habitâ ejus distantia ibi, & in appulso superiore, ac appellatis  $\alpha$ , &  $\alpha'$  iis distantias,  $\alpha$ , &  $\alpha'$  refractionibus, quæ ipsis respondent, erit itidem  $2D = \alpha + \alpha' + \alpha + \alpha'$ : hinc  $\alpha = 2D - \alpha - \alpha' - \alpha'$ . In valore  $\alpha'$  refractionis pertinentis ad distantiam  $\alpha'$ , quæ erit paucorum omnino graduum, nullus error sensibilis timeri poterit, sive ipsa desumatur e tabula refractionum quacunque, sive determinetur methodo numeri superioris ex iis, quæ sunt inventæ in determinanda poli altitudine. Quin immo si occurrat fixa, quæ in appulso superiore ad meridianum ascendat ad ipsum zenith, evanescet pro ea tam  $\alpha'$ , quam  $\alpha$ , reliæ  $\alpha = 2D - \alpha$ . Sed non nisi casu fortuito in immensum improbabili inveniri potest accuratus appulus ad ipsum zenith: potest facile haberi accessus ad distantiam minorem uno gradu, in qua tota refractionis  $\alpha'$  sit minor uno secundo. Pro distantias  $\alpha$  majoribus, quam  $2D$  fixa in appulso ad meridianum superiore abibit ad partes oppositas polo respectu zenith, adeoque valores  $\alpha$ , &  $\alpha'$  habendi erunt pro negativis. Verum satis patet, posse eam methodo haberi admodum accuratum valorem refractionis pertinentis ad altitudines supra horizontem utcumque exiguae, & ipsam refractionem horizontalem, quod si fiat pluribus vicibus tam in diversis atmosphæræ constitutionibus, quam in eadem, licebit videre variationes ejusmodi refractionum admodum magnas, & assumere medium pro ea, quæ censi debeat horizontalis, ac deprehendere variationes, quas in ejusmodi refractiones inducit diversa constitutio stratorum superiorum atmosphæræ, dum pro altitudinibus majoribus supra horizontem refractionis, ut vidimus in Opusculo superiore, pendet tantummodo a constitutione atmosphæræ prope telescopium, ad quod radius appellit. Verum variationes ejusmodi facilius invenientur per solam determinationem

distan-

distantiæ  $\alpha'$  apparentis a polo ejusdem fixæ factam diversis diebus, quæ sine ejusmodi variatione deberet esse semper eadem.

27. Potest igitur computari methodo numeri 25 tota refractio-  
num tabula ex unica refractione accurate determinata, vel e bi-  
nis. Sed potest itidem ~~ut totum~~, determinando per observa-  
tiones respondentes plurimis distantiis a zenith parum a se invi-  
cem differentibus refractiones, quæ ipsis conveniunt, methodo nu-  
meri 26, & inde computando tabulam ordinatam per interpola-  
tionem. Potest itidem computari tabula integra per observatio-  
nes in excursu ab appulsu inferiore ad meridianum usque ad ap-  
pulsum superiore binarum fixarum, quarum altera accedit pro-  
xime ad horizontem in appulsu priore, altera ad zenith in po-  
steriore. Determinatis earum refractionibus  $x'$  per appulsum ad  
meridianum, habebitur earum distantia vera à zenith =  $\alpha' + x'$ ,  
adeoque distantia vera a polo =  $D - \alpha' - x'$ . Expeſtando ad-  
ventum ipsius ad quemvis numerum graduum, vel graduum, & de-  
norum minutorum a zenith, habebitur momentum ejusdem ad-  
ventus, adeoque intervallum temporis ab appulsu ad meridianum  
usque ad id momentum. Quodvis ex his intervallis exhibebit an-  
gulum in polo trianguli terminati ad ipsum polum, ad zenith,  
& ad eam fixam. In eo triangulo habebuntur præterea bina la-  
tera, nimirum distantia poli a zenith, & ejus fixæ a polo, a-  
deoque invenietur & tertium latus, quod est distantia ejusdem fi-  
xæ a zenith: ea collata cum observata exhibebit refractionem,  
quæ est earum distantiarum differentia. Hoc etiam pacto poterit  
haberi integra refractionum tabula, exhibente priore ex iis binis  
fixis refractiones debitas altitudinibus ab horizonte usque ad dif-  
ferentiam duplæ altitudinis poli a quadrante, quæ differentia erit ejus  
minima distantia a zenith in suo appulsu superiore ad meridia-  
num, & exhibente reliquas posteriore inde usque ad zenith, præ-  
ter plurimas altitudinum utrique communium: & quidem ita res  
habebitur per unicam distantiam apparentem a zenith pro quavis  
refractione, dum pro priore methodo requirebatur duplex appul-  
sus infra, & supra polum. Conferendo hanc tabulam cum præ-  
cedentibus binis, innotescet, an phænomena respondeant conse-

ctariis

Etariis deductis ex illa suppositione , e qua derivavimus ea omnia .

28. Ea suppositio est hypothesis illa vis refractivæ constantis obnoxia difficultatibus , quas exposuimus in fine præcedentis Opusculi , quæ quidem sunt non ita leves . In sequenti Opusculo proponemus , uti promisimus , methodum determinandi refractiones innixam soli suppositioni æquabilitatis motus diurni fixarum in intervallo unius conversionis integræ , & figuram atmosphæræ ita proxime sphæricam , ut refractiones non agant ad sensum nisi elevando astra in plano verticali , de quibus nullum dubium videtur haberi posse . Id autem Opusculum erit brevissimum , reservatâ descriptione , collocatione , verificatione instrumenti ad id requisiti alii volumini .



## O P U S C U L U M I X.

**METHODUS DETERMINANDI REFRACTIONES ASTRONOMICAS SINE  
ULLA SUPPOSITIONE PHYSICA, QUÆ NON VIDEATUR OMNI-  
NO CERTA, OPE INSTRUMENTI HABENTIS UTILITA-  
TEM GENERALEM IN TOTA ASTRONOMIA.**

1.



NSTRUMENTUM, quod in hoc titulo innuitur, erit argumentum Opusculi VI Tomi IV, ubi id sic exprimitur: *De collocatione, & verificatione ingentis quadrantis verticalis mobilis circa axem verticalem cum aliada, quæ in ingenti circulo horizontali notet azimutha.* Habentur quidem ejusmodi quadrantes verticales mobiles circa axem verticalem cum circulo horizontali pro azimuthis: sed in omnibus ejusmodi instrumentis, quæ ego vidi, circuli horizontales sunt nimis exigui. Jam a longo tempore pluribus occasionibus proposui ingentia commoda instrumenti ejus generis, quod habeat & quadrantem verticalem, & eum horizontalem circulum ejus magnitudinis, quæ possit exhibere tam altitudines, quam azimutha intra unum secundum, quod quidem censeo facile obtineri posse, si radius circuli utriusque sit pedum octo, vel ad minimum sex, & constructio, divisio, verificatio fiat methodis idoneis, quas etiam propono nec pretiosas plus æquo, nec operosas. Pluribus itidem in locis ejus constructionem proposui cum spe successus, qua tamen huc usque semper frustratus sum. Summam ejus utilitatem pro hac refractionum determinatione hic exponam, in qua ipsa expositione patebunt alia ipsius commoda sane ingentia: paucis autem me expediam ita, ut hoc potius breve schediasma futurum sit, quam justum Opusculum.

2. Suppositiones physicæ, quibus methodus proponenda innititur, sunt exæ, quas innui in fine paragraphi præcedentis, æqualitas motus diurni fixarum saltem intra tempus unius conversionis, & figura atmosphæræ proxime sphærica, qua fiat, ut astra per re-

*Tom. II.*

N n n

fra-

fractionem non dimoveantur ad sensum a plano verticali, sed tantummodo eleventur intra ipsum id planum, de quibus binis theorematis nemo sane dubitare potest cum probabili fundamento. Accedit æqualitas horologii saltem intra unam conversionem diurnam, quod pertinet ad qualitatem instrumentorum: habentur autem passim in observatoriis, quæ eam conditionem impleant, ex quo effetus dilatationis virgæ penduli corrigi cœpit per conjunctionem binorum metallorum diversæ dilatabilitatis.

3. Ope ejusmodi instrumenti determinabuntur refractiones post determinatam independenter a refractionibus distantiam poli a zenith, & distantiam saltem binarum fixarum a polo methodo, quam proponemus, qua poterit haberi vera distantia ab ipso fixæ cuiusvis itidem independenter a refractionibus. Sit in fig. 6 (Tab. X) AZB meridianus cum zenith Z, & polo P, ac semicirculus DGH descriptus motu diurno vero a fixa quapiam notabili non nimis proxima polo, qui semicirculus occurrat ipsi meridiano supra polum in D, infra ipsum in G. Adducatur quadrans mobilis primo ad meridianum in ZB, & notetur momentum transitus ejus fixæ ad ipsum meridianum in D: tum idem quadrans adducatur ad positionem quapiam ZC, in qua is ita secet ipsum semicirculum in punctis E, F, ut absindat ejus arcum EHF non nimis exiguum, & ad evitandos magis errorculos subdivisionum terminetur ad certum quempiam numerum graduum in punto C indicato ab aliada horizontali, nec nimis proximo punto B: notetur momentum appulsus ad eum quadrantem in E, & regressus ad ipsum in F: status autem horologii haberi poterit vel per appulsum ejusdem fixæ ad punctum meridiani G factum eodem die, qui exhibebit tempus horologii ipsius respondens semicirculo, vel per regressum ad punctum D factum die sequenti, ex quo habebitur tempus ipsius pro integro circulo, vel per telescopium fixum collocatum alibi, & directum ad fixam quapiam, vel per transitum unius, aut plurium fixarum per telescopium meridianum vulgo *instrument des passages*, ut multiplicitas observationum tutiorem reddat determinationem temporis notati ab horologio pro conversione diurna integra: quanquam abunde erit unica ejusmodi

modi determinatio, si horologium sit satis accurate isochronum.

4. Tum vero, factis de more, ut tempus indicatum ab horologio pro integra conversione diurna, ad tempus notatum pro arcibus DE, DF, ita  $360^\circ$  ad quartum, habebuntur anguli ZPE, ZPF, adeoque & eorum semisumma, cui erit æqualis angulus ZPI contentus arcu PZ, & arcu PI perpendiculari ad basim EF trianguli EPF isoscelii secantis bifariam tam ipsam basim, quam angulum EPF, ut idcirco ipse angulus ZPI sit medius arithmeticus proportionalis inter ipsos angulos ZPE, ZPF. In triangulo ZPI habebuntur omnes tres anguli, nimirum in P per illa tempora notata ab horologio, in Z per circulum horizontalem cum angulo in I recto. Hinc habebitur arcus ZP distantia poli a zenith per formulam, quæ sponte fluit e theorematis Trigonometriæ sphæricæ,  $\cos.PZ = \cot.PZ \times \cot.ZPI$ , atque id independenter a refractionibus: nam eæ non afficiunt tempus appulsus ad circulum verticalem, adeoque tempora, a quibus solis pendet determinatio anguli ad P notata in observatione, sunt illa ipsa, quibus astrum appellit ad veram intersectionem parallelī motu vero descripti, quem circulum figura exprimit, non ad curvam apparenti motu diurno descriptam, quæ per refractionem deflectitur a forma accurate circulari.

5. Invento arcu PZ, habetur tam in triangulo PZE, quam in triangulo PZF angulus ad P, cum quo, & angulo ad Z, ac eo latere habetur independenter a refractionibus duplex determinatio distantiarum verarum PE = PF fixarum a polo. Habentur etiam distantiarum verarum a zenith ZE, ZF: possunt autem determinari per ipsum quadrantem mobilem distantiarum apparentes, quarum differentiarum ab iis veris inventis per calculum trigonometricum exhibebunt duas refractiones. Sed integra refractionum tabula habebitur adhibendo duas fixas, quarum altera appellat ad horizontem, altera ascendat proxime ad zenith. Si determinentur tempora, quibus eæ transeunt per meridianum, tum ea, quibus eæ appellunt ad diversas distantias apparentes ad zenith, pro quibus quadrantur refractiones adhibendæ pro tabula; in primis habebuntur earum distantiarum verarum a polo independenter a refractionibus, atque id

quidem per totidem determinationes , quot habebuntur observationes appulsum ad eas distantias apparentes . Nam in quovis triangulo ZPF habebitur arcus PZ jam inventus , tum angulus ad Z per circulum azimuthalem , & P per tempus horologii , uterque independenter a refractionibus . Quare invenietur latus PF distantia vera fixæ a polo , & ZF distantia vera a zenith , cuius differentia ab apparente exhibebit refractionem . Et quidem inventa semel distantia earum fixarum a polo per ingentem numerum determinationum , quæ eas assumpto medio exhibebunt satis accuratas , refractions invenientur multo accuratius independenter ab angulo ad P per sola latera PZ , PF cum angulo ad Z , qui multo accuratius determinatur per circulum azimuthalem : unde erutæ distantia verâ ZF obtinetur refractione .

6. Hinc ut in Opusculo præcedente per alteram ex iis fixis habebuntur refractions ab horizonte usque ad minimam ejus distantiam a zenith , per alteram a zenith usque ad maximam ejus distantiam ab ipso , ubi maxima earum pars habebitur per utraque fixam : & quidem ubi altitudo poli est major dimidio quadrante , ut Parisiis , fixa , quæ ascendat ad zenith , vel prope ipsum , non poterit pertingere ad horizontem , & quæ pertingit ad horizontem , abibit ultra zenith ad partem oppositam polo , nec accedit ad ipsum zenith , nisi per excessum suæ distantiaæ a polo ipso supra distantiam poli a zenith , adeoque ad habendam totam tabulam necessario adhibenda erunt binæ fixæ . At ubi altitudo poli est æqualis semiquadranti , vel minor , fixa , quæ ascendat ad ipsum zenith , pervenit etiam ad horizontem , ac proinde unica fixa ibi satis erit pro habenda tabula tota refractionum .

7. Non debet adhiberi pro invenienda per methodum expositam numero 2 , & 3 altitudine poli arcus BC nimis exiguus , ne angulus ad Z , cuius adhiberi debet cotangens , evadat exiguus : nam exigua differentia anguli parum distantis a quadrante inducit differentiam nimis magnam in tangentem , adeoque error exiguus in determinatione ejus arcus per observationem inducit errorem nimis magnum in valore per ipsum determinato : nec vero arcus idem debet accedere nimis ad quadrantem , quia cotangens evadit

exi-

exigua , adeoque differentia tangentis inducta ab errore arcus habet rationem nimis magnam ad ipsam tangentem . Omnia aptissimus est arcus graduum 45 . Nam e formulis trigonometricis , & ex ipsa geometria linearis habentur sequentes formulæ : factò arcu  
 $= x$  , est  $\sin.x \cos.x = \frac{1}{2} \sin.2x$  ,  $\tan.x = \frac{\sin.x}{\cos.x}$  ,  $d\tan.x$   
 $= \frac{dx}{\cos.x^2}$  . Hinc  $\frac{d\tan.x}{\tan.x} = \frac{d\tan.x \times \cos.x}{\sin.x} = \frac{dx}{\sin.x \cos.x} =$   
 $\frac{2dx}{\sin.2x}$  . Quare pro eodem errore  $dx$  ratio erroris , qui habetur in tangente , ad tangentem adhibendam evadit minima , ubi sinus dupli arcus  $x$  evadit maximus , nimis ubi is arcus evadit quadrans . Porro pro valore  $\cos.ZP = \cot.PZI \times \cot.ZPI = \frac{\cot.ZPI}{\tan.PZI}$  , adhibetur tangens ipsius anguli ad Z , sive ipsius arcus BC , cuius error idcirco inducet errorem minimum , ubi is erit  $= 45^\circ$  .

8. Hinc non potest adhiberi fixa parum remota a polo , quia si ipsa esset minor , quam arcus perpendiculari PI ducti in id azimuthum , semicirculus DHG non pertingeret ad ipsum . Debet autem adhiberi fixa multo magis remota , ne arcus EHF existat nimis exiguus , adeoque nimis oblique incurrat in arcum EIF : nam eo casu nimis lente per ipsum transiret , quod redderet minus exactam determinationem momenti ejus transitus . Angulus , quem tangens arcus ED continet cum radio PE , est complementum anguli PEI , adeoque æqualis angulo EPI , sive FPI . Porro is angulus eo erit major , quo fuerit major hypothenus PF , maximus autem , ubi punctum F abierit in C . Tum vero PF evadit hypothenus trianguli rectanguli , cuius latera erunt arcus BC  $= 45^\circ$  , & BP altitudo poli . Est autem e formulis trigonometricæ sphæricæ cosinus hypothenusæ æqualis producendo e cosinibus laterum : adeoque fixa omnium aptissima ad eam rem erit ea , cuius distantiæ a polo cosinus , sive sinus latitudinis , erit æqualis cosinui altitudinis poli , sive sinui distantiæ poli a zenith , ducto in cosinum anguli semirecti , qui æquatur ejus sinui  $= 0,7071$  , nisi præstet adhibere fixam aliquanto propiorem polo ad evitandos

nimios vapores horizontis, & ipsorum irregularitatem, quæ inducit etiam motus irregulares, & tremorem in astris horizonti proximis.

9. In locis habentibus altitudinem poli majorem  $35^{\circ}.16'$  pro fixa, quæ adveniat ad horizontem in C, punctum E abibit ultra zenith Z. Nam ibi, ubi distantia ejus fixæ a polo evadet jam = PZ, quo casu abibit E in Z, fiet  $\cos.BC \times \cos.BP = \cos.PZ$   
 $= \sin.BP$ , adeoque  $\cos.BC = \frac{\sin.BP}{\cos.BP} = \tan.BP$ , nimirum  $\tan.BP$

$= 0,7071$ , &  $BP = 35^{\circ}.16'$ . In altitudine poli paullo majore abibunt ultra zenith fixæ etiam aliquanto propiores polo. Poterunt autem adhiberi etiam ipsæ cum hoc solo discrimine, quod oportebit quadrantem pro appulsibus ad E, & F dirigere ad puncta horizontis e diametro opposita, & pro angulo ZPI assumere non semisummam, sed semidifferentiam angulorum ZPE, ZPF.

10. Etiam adhibito arcu BC =  $45^{\circ}$ , & fixâ satis distante a polo, oportebit instituere ingentem numerum ejusmodi observationum, & assumere medium, nam in singulis determinationibus committetur error non exiguus ob angulum ZPI deductum a tribus observationibus appulsum fixæ ad D, E, F. In singulis facile committitur error dimidii secundi temporis, qui secum trahit errorem secundorum  $7\frac{1}{2}$  in angulo, & error ipse augetur, ubi ad determinandum arcum PZ adhibetur ejus cosinus æqualis facto e cotangentibus ipsius anguli ZPI, & anguli Z. Sed cum & observatio, & calculus sit usque adeo facilis, & simplex, possunt utique etiam eodem die adhiberi plurimæ fixæ, & pluribus mensibus haberi etiam mille determinations, quæ multiplicitate sua tollant omne dubium de mensura accuratissima altitudinis poli, quod est præcipuum elementum pro maxima parte observationum instituendarum, præter determinationem refractiōnum debitārum loco Observatorii, ac id elementum semel accurate determinatum remanet semper idem, nec ullâ indiget novarum observationum, & calculorum repetitione.

11. Porro eo semel accurate determinato, potest per exiguum numerum observationum methodis supra expositis inveniri admodum accurata distantia vera a polo fixarum quotcumque libuerit,  
& ope

& ope uniuscujusque ex iis, vel duarum in altitudinibus poli majoribus, determinari tota tabula refractionum independenter ab angulo ad P, inveniendo ope intervallorum temporis per sola latera PZ, PF cum angulo ad Z distantias veras ZF comprehendendas cum apparentibus observatis simul eodem instrumento ad habendam refractionem, quæ est earum distantiarum differentia. Quin etiam determinatio accurata semel facta in uno loco distantiaæ veræ a polo aliquot fixarum exhibebit modum obtinendi ope hujus instrumenti in aliis locis quibuscumque altitudinem poli ope singularum ex ipsis independenter a refractionibus habito latere PF ex determinatione facta in illo priore loco, & angulis ad Z, & P' determinatis in hoc novo: tum refractiones omnes ope unius fixæ, vel duarum, & quidem etiam sine determinatione anguli ad P, per sola nimirum latera ZP, ZF cum angulo ad Z.

12. Cum possint institui satis commode plurimis temporibus intra annum observationes pro determinationibus refractionum notando statum barometri, thermometri, hygrometri, poterit per observationes definiri nexus inter eum statum atmosphæræ, & refractiones adhibendus deinde pro refractionibus, per quas corrigi debebunt altitudines supra horizontem definitæ per sequentes observationes.

13. Ex iis, quæ diximus, satis patet, quantæ utilitatis esse debeat in universa Astronomia instrumentum ejus generis satis magnum, affabre constructum, & satis accurate verificatum, tam quod pertinet ad divisiones, quam quod pertinet ad collocacionem axium, & plani quadrantis in situ verticali. Ejus ope haberri potest altitudo poli sine ulla hypothesi physica, de cuius veritate dubitari possit, & independenter a refractionibus, tum distantia a polo, adeoque etiam declinatio fixarum quotcumque independenter & a refractione, & ab angulo in polo determinando per mensuram temporis: earum ascensio recta obtineri potest ope quadrantis ejusdem instrumenti collocati in plano meridiani per differentias temporum, quibus aliæ post alias appellunt ad ipsum, & quidem inventâ semel accuratâ altitudine poli in uno loco, & ope ipsius distantiaæ veræ a polo exigui numeri fixarum parum distantium ab æquatore, ut idcirco conspicuæ sint ubique

alibi,

alibi , & distantium a se invicem per quadrantem circiter ipsius æquatoris , ut quovis anni tempore saltem una ex ipsis commode observari possit , invenietur , itidem independenter a refractionibus , altitudo poli ejusvis alterius loci independenter ab angulo in polo , & tota tabella refractionum pro eo loco , cum variacionibus , quæ respondeant diversæ constitutioni atmosphæræ . Ope autem ejusdem tabulæ multo facilius definiri possunt declinationes fixarum in earum appulso ad meridianum . Verum ipsarum catalogus accurate factus in uno loco inserviet pro locis omnibus . Maximus autem usus instrumenti ipsius erit in determinandis locis planetarum , & potissimum cometarum . Satis erit videre cometam tempore utcumque brevi , quo ad ipsum dirigi possit telescopium , ut habeatur observatio completa . Nam' in triangulo ZPF habebitur latus PZ complementum altitudinis poli : tum alidada quadrantis exhibebit distantiam apparentem a zenith , cui additâ refractione jam cognitâ per tabulam jam computatam , & constitutionem atmosphæræ indicatam a barometro , thermometro , hygrometro , habebitur distantia vera , nimirum latus alterum ZF : arcus autem BC exhibebit angulum ad Z . Inde eruetur arcus PF complementum declinationis , & angulus ad P , ex quo , & horâ observationis , deducetur per notas methodos differentia ascensionis rectæ ipsius cometæ , & solis , adeoque ipsa ascensio recta illius . Nunc oportet expectare appulsum ad telescopium fixæ alicujus cognitæ , & multo sæpius fixæ incognitæ comparandæ deinde cum cognita , quod ipsum exigit moram majorem : sæpe autem ante appulsum fixæ nubecula superveniens reddit inutilem observationem præcedentem , ut idcirco sæpe vix obtineri possit unica determinatio loci toto vespere , aliquando nulla , licet cometa pluribus vicibus videndum se præbeat . Ope hujus instrumenti possunt commode momento temporis haberi determinationes completæ , adeoque intra unam horam etiam viginti , quarum redactarum ad eandem horam medium erit accuratissimum : tanta est hujusce instrumenti utilitas per totam Astronomiam , quam hic proposuimus occasione ejus utilitatis maximæ pro determinandis refractionibus , quod est postremum ex argumentis hujus collectionis pertinentibus ad Opticam .

EX-



E X T R A I T  
D E C E S E C O N D V O L U M E.

---

§. I.

*Notice générale de son sujet.*

**C**E volume contient neuf Opuscules : le premier , qui fait lui seul avec son supplément la moitié de son total , est une continuation de l'objet de la seconde partie du premier appartenante à la perfection de la théorie des lunettes particulièrement des acromatiques : dans celle-là l' objet principal étoient les objectifs , & il y avoit très-peu sur les oculaires mis à l' occasion des formules relatives généralement aux lentilles acromatiques : dans celui-ci l' objet principal sont les oculaires , & il n' y a qu' une petite addition sur les objectifs . Là les formules pour les lentilles étoient beaucoup plus composées & tirées d' une théorie plus compliquée par un calcul plus long , parcequ' on y a embrassé à la fois ce qui appartient à l' erreur de réfrangibilité & de sphéricité pour faire la correction dans les objectifs de tous les deux ensemble : ici on traite séparément ce qui appartient à ces deux erreurs : ainsi la théorie des lentilles pour en tirer ce qui appartient particulièrement à la correction de l' erreur de réfrangibilité dans les oculaires , est tiré de celle des prismes à petits angles , & devient beaucoup plus simple . Ici on se borne à la diminution seule de l' erreur de sphéricité dans la combinaison des oculaires , & à la correction totale dans les seuls objectifs , & on y emploie les formules trouvées dans le premier volume par rapport à cette erreur dans une seule lentille , ou dans deux lentilles contigues , la correction pour une seule simple étant impossible , & pour le système des oculaires détachés exigeant des formules trop compliquées .

*Tom. II.*

O o o

2. Son

2. Son supplément est très-intéressant : c' est une réimpression d' une de mes anciennes dissertations , mais avec des petits changements , & avec la correction de plusieurs fautes , qui s' étoient glissées dans la première impression faite à Vienne en Autriche en mon absence . Il s' y agit de la distribution de la lumière dans les petits cercles , qui contiennent tous les rayons dispersés par les deux erreurs de réfrangibilité , & de sphéricité : on y fait voir , que dans celui-ci la densité de la lumière , infinie au centre , après avoir diminué jusqu' à la distance dont le quarré est la moitié du quarré du rayon , où elle a son minimum , augmente de nouveau & redevient infinie à la circonférence , tandis que dans l'autre elle est bien infinie aussi au centre , mais en allant vers la circonférence diminue continuellement jusqu' à s'évanouir sur la circonférence même , ce qui rend l'effet de l' erreur de sphéricité beaucoup plus fort par rapport à l'autre de réfrangibilité , qu' on ne l' avoit pas cru d' après Newton , qui avoit déterminé les rapports de cette densité seulement dans celle-ci , & les seuls diamètres dans toutes les deux .

3. Dans le second Opuscule il y a la détermination de trois cercles dans lesquels se trouvent dispersés les rayons , qu' une grande lentille brûlante tend à réunir par trois causes particulières , l' erreur de réfrangibilité , celle de sphéricité , & le diamètre apparent du soleil , ce qui diminue beaucoup son effet : on en détermine les diamètres & on trouve celui de l' erreur de sphéricité bien peu inférieur à celui de réfrangibilité , tandis que dans l'exemple employé par Newton celui-là étoit plus que cinq mille fois plus petit que celui-ci .

4. Le troisième contient un objet nouveau , & autant curieux qu' intéressant : il y a la description d' une nouvelle espèce de lunette , qui dans son tube est remplie d' eau : on fait voir que l' aberration de la lumière , qui forme l' aberration annuelle des étoiles fixes , par cette espèce de lunette doit devenir plus grande ou plus petite en raison réciproque de la vîtesse de la lumière dans l'eau à la vîtesse dans l'air , ce qui doit décider , si la vîtesse de la même lumière est plus grande dans les milieux plus den-

denses , comme l' exige la théorie de Newton , qui y reconnoit une progression de particules lumineuses , ou si elle diminue , comme ils ont cru d'autres , qui la font consister en des ondes d'un fluide élastique . On fait voir comment en plaçant une lunette ordinaire avec une de cette espèce sur un même secteur on peut voir la différence , & décider cette question par des observations faites dans une seule nuit , ou au moins dans deux . Mais il y a de plus : l' aberration en fixant une lunette ordinaire sur un objet terrestre s' évanouit : mais en y fixant une lunette de cette espèce , on doit y voir un mouvement périodique de chaque jour dans un cercle , ou une ellipse , ou une autre ligne ovale , ou une droite , selon la différente position de l' axe de la même lunette , & les différents jours de l' année .

5. Le quatrième Opuscule a pour objet une espèce de micromètre , & mégamètre , qui étoit nouveau , & absolument inconnu tel qu' on le voit ici , quand j' ai fait les deux Mémoires qu' on y trouve . Il est formé par deux , que quoiqu' à base ronde on peut appeler , comme je le fais aussi , prismes circulaires , parcequ' ils ont les deux surfaces planes opposées inclinées l' une à l' autre : ils sont placés sur l' objectif de manière , qu' ayant le diamètre plus petit , ils ne couvrent , qu' une moitié de sa surface : l' une est fixe , l' autre mobile autour de son centre , & dans ce mouvement l' angle que la première surface contient avec la dernière devient variable : les rayons d' un point de l' objet quelconque qui passent par la partie découverte de l' objectif forment une image de l' objet à la même place , qu' elle seroit formée par l' objectif entier tout découvert , les autres qui tombent sur la première surface du prisme composé détournés par sa réfraction arrivent avec une autre direction à la partie de l' objectif couvert , & forment une seconde image qui par la variation de l' angle s' approche de la première & s' en éloigne . Il y a la description de la machine pour l' adapter à la lunette , le faire tourner , & en connoître les angles , & la valeur , comme aussi la manière de le faire servir pour la mesure des grands angles , ce qui le rend mégamètre : il y a encore ce qui doit servir pour avoir les divisions , & subdivi-

visions des angles observés. Cet instrument a excité de grandes contestations quand je l'ai proposé: j'en dis un mot dans l'Opuscule même; mais j'ajouterai sur cela une petite note ici dans son extrait.

6. Il y a dans le cinquième la théorie d'une lunette, qui donne deux images égales d'un même objet à la fois avec des mouvements opposés & égaux. On en fait voir l'imperfection nécessaire, & une totale inutilité: dans le sixième l'explication d'un phénomène observé par le très-célèbre Astronome M. Messier, d'une grande quantité de petites taches noires rondes, qui pendant un demi-quart d'heure ont traversé ce disque avec une grande vitesse en montant en apparence: on y fait voir, que ce devoit être absolument des grêlons d'une grandeur extraordinaire.

7. Jusqu'à présent tout étoit analogue aux lunettes: mais comme les réfractions astronomiques appartiennent aussi à l'Optique; on les a prises pour sujet des trois derniers Opuscules de ce volume. Dans le premier de ces trois il y a leur théorie d'après la considération de la courbe, que le rayon parcourt dans l'atmosphère: on détermine d'abord sa nature en général qui répond à une loi quelconque de la force réfringente: mais on s'arrête à la supposition des forces très-peu inégales, qui étoit celle de Simpson, & on trouve par une méthode beaucoup plus simple, & élémentaire, que dans cette hypothèse la courbe doit être sensiblement circulaire: on en tire la règle donnée par le même Simpson pour les réfractions astronomiques, & par un procédé bien simple on en déduit la règle de Bradley assez généralement adoptée par les Astronomes, qui les fait proportionnelles aux tangentes des distances apparentes au zenith diminuées du triple de la réfraction même: mais on trouve aussi, que tout ce qu'ont trouvé le premier Cassini, & Bouguer sur les réfractions astronomiques, tout cela dérive de l'égalité des forces réfringentes par toute l'atmosphère. On tire beaucoup de formules appartenantes à la comparaison des réfractions entre elles, & avec la distance apparente au zenith: on fait voir comment on trouve par deux réfractions données les coefficients numériques de ces formules, qui donnent

nent après les réfractions appartenantes à une distance apparente au zenith quelconque , pour former les tables .

8. On trouve que pour les hauteurs au-dessus de l' horizon pas trop petites , la réfraction dépend seulement de la constitution de l'atmosphère dans la dernière couche , qui est à côté de la lunette , par laquelle on voit l'astre indépendamment de son état intermédiaire , ce qui rend ces réfractions beaucoup moins variables , que les horizontales . On trouve aussi la hauteur de l'atmosphère , qui répond à cette hypothèse de l' égalité constante des forces réfringentes tant par le moyen de ces formules , qu' on en a tiré , que par le rapport entre les réfractions horizontales observées à différentes élévations au dessus de la surface de la mer , qu' on tire aussi de la forme circulaire de certe courbe . Mais ces hauteurs viennent trop petites , ce qui forme une difficulté contre cette loi des forces réfringentes constantes , comme aussi le passage brusque de la force nulle à une force finie constante , & d' un mouvement rectiligne hors de l' atmosphère à un circulaire d' une courbure finie , ce qui est contraire à la loi de continuité observée généralement dans la nature , en forme une autre : on indique le seul moyen qu'il y a de dissoudre ces difficultés , mais il ne paroît pas bien satisfaisant .

9. Pourtant comme la règle de Bradley est très-généralement adoptée , on donne dans le huitième Opuscule le moyen de trouver la hauteur du pole par les distances au zenith de deux étoiles fixes au-dessous , & au-dessus du pole dépendamment de cette règle , & même d'après la seule supposition de la proportion des réfractions avec les tangentes de la distance apparente au zenith diminuée d' une quantité quelconque , mais petite , ce qu' on tire aussi plus directement de la susdite supposition de la force constante : en négligeant cette diminution on trouve les formules beaucoup plus simples . Il y a l'application du calcul numérique à plusieurs binaires d' étoiles observées au-dessous , & au-dessus du pole , où la plus grande distance ne dépasse pas les 72 degrés , & dans une qui s' approche de 70 on trouve , qu' il n' y a pas une seconde entière de différence entre la hauteur du pole déterminée avec ,

avec , & sans cette diminution . Huit binaires ne s' accordent pas mal dans leurs résultats : on donne la manière de déterminer toutes les réfractions des différentes distances au zenith d' après deux trouvées , & d'en former les tables , ce qui donne le moyen de voir si réellement les observations sont d'accord avec cette supposition : si celles-ci se trouvent contraires , cela suffira pour démontrer la fausseté de l'hypothèse : si l'accord s'y trouve , ce lui sera bien favorable ; mais ne suffit pas pour la démontrer . L'accord d'une hypothèse avec les phénomènes n'en démontre jamais la vérité .

10. Pour cela il y a dans le dernier Opuscule une méthode pour déterminer indépendamment des réfractions la hauteur du pôle , & même la distance réelle au même pôle d'un nombre d'étoiles fixes quelconque , & cela dépendamment de deux seules suppositions physiques , dont il ne peut pas y avoir aucun doute , l'égalité du mouvement diurne des étoiles fixes , au moins dans une révolution de 24 heures , & la sphéricité sensible de l'atmosphère , qui fait que les réfractions ne font qu'élever les astres dans le cercle vertical , sans les pousser latéralement hors de son plan . Pour remplir cet objet , il faut avoir un instrument , qui exécuté en grand dans un Observatoire auroit une utilité immense dans toute l'Astronomie , mais le premier avantage qu'on en tireroit seroit celui d'établir sans aucune supposition arbitraire , ou incertaine cet élément qui est le fondement principal de cette science , la hauteur exacte du pôle de cet Observatoire , comme aussi les distances des étoiles fixes au pôle , & les réfractions locales , avec leurs variations correlatives aux changements de l'atmosphère . C'est un grand quart de cercle mobile autour d'un axe vertical avec une alidade , qui dans un grand cercle horizontal donneroit les azimuths , tandis que celui-là donneroit les hauteurs , mais cela avec une très-grande exactitude , à une seconde près , ou encore plus .

11. Par un instrument de cette espèce bien vérifié dans ses divisions , & dans la position verticale de cet axe & du plan de ce quart de cercle , & bien orienté , on pourroit placer exactement

ment l' alidade à un point bien connu du cercle horizontal , & prendre exactement l' heure de l' arrivée d' une étoile fixe assez éloignée du pole , même d' une inconnue , à l'azimuth marqué par cette position de l' alidade , & son retour au même azimuth : ayant ainsi l' arrivée au méridien de la même fixe , & l' état de la pendule par le retour au méridien de la même fixe , ou par l' instrument des passages , on auroit les angles au pole contenus par les deux arcs tirés du même pole aux deux intersections de cet azimuth avec le cercle du mouvement diurne de l' étoile , qui avec l' arc du même azimuth intercepté dans ce cercle formeroient un triangle isocèle : l' angle au pole de celui-ci , & cet arc de l'azimuth seroient coupés en deux parties égales par un arc tiré perpendiculairement sur cet arc , qui seroit la base de ce triangle isocèle . On auroit alors un triangle sphérique rectangle terminé au zenith , au pole , & à ce milieu de cette base , dans lequel on auroit l' angle au zenith marqué par la position de l' alidade , & l' angle au pole , qui seroit la demi-somme de ceux , que le méridien contient avec les deux côtés de ce triangle isocèle , qui seroient donnés par l' intervalle de temps entre les arrivées de l' étoile au méridien , & à l'azimuth . Ces deux angles avec l' angle droit donneroient dans un triangle rectangle l' hypothénuse , qui seroit la vraie distance du pole au zenith , qui est le complément de la hauteur du pole . Son cosinus seroit égal au produit des cotangentes de ses deux angles connus . Comme la réfraction ne change point le temps de l' arrivée de l' étoile au méridien , elle n' entreroit pour rien dans cette détermination , & n' en dérangeroit pas le résultat .

12. Comme il faut déterminer l' angle au pole par le temps , & une seconde d' erreur dans celui-ci porte 15 secondes d' erreur dans l' angle , une seule détermination seroit assez fautive : mais comme il s'agit d'un élément si essentiel , qui une fois bien déterminé sert pour toujours , & l' observation & ce calcul numérique sont si simples & aisés , on pourroit bien dans un , ou deux mois avoir même mille déterminations de ce même premier élément , dont le milieu donneroit toute l' exactitude . Après l'  
avoir

avoir bien déterminé une fois, on trouve très-aisément tout le reste par les méthodes exposées dans le même Opuscule, qui quoique très-court fait voir assez clairement les grands avantages de l'Instrument, & de cette méthode dans toute l'Astronomie.

### §. II.

#### *Premier chapitre du premier Opuscule*

13. L'objet de ce chapitre sont les couleurs produites par les oculaires, & leurs remèdes. Dans le paragraphe 1 on expose l'origine de ces couleurs. La fig. 1 de la planche I représente en ACA l'objectif, en BGB l'oculaire simple d'une lunette qui renverse les objets. Le rayon qui arrive par l'axe DC passe sans réfraction par sa continuation CGL, ceux qui arrivent à l'extrémité de l'ouverture de l'objectif par les lignes dA, dA parallèles au même axe sont détournés vers le milieu de manière qu'en faisant abstraction de l'erreur de sphéricité les moins réfrangibles comme les premiers rouges vont se réunir dans un foyer F le plus éloigné de l'objectif, & si le même point est le foyer de l'oculaire, ils arrivent à l'oculaire en H, H, & ils en sortent parallèlement au même axe par les lignes HM, HM : les plus réfrangibles, comme les derniers violets, ont un foyer f le moins éloigné : ils arrivent à l'oculaire en h, h & ils en sortent par des lignes hm, hm peu éloignées du parallélisme avec le même axe, à cause du voisinage des foyers F, f : mais le rayon qui arrive d'un point de l'objet éloigné de l'axe par une ligne oblique D'C, & sort de l'objectif par la même direction CF après être arrivé à l'oculaire en G en est détourné par la réfraction vers l'axe & divisé de manière, que la partie rouge moins réfractée va par la direction GIL moins inclinée, & la partie violette par la plus oblique Gil : les compagnons de celui-ci, qui arrivent par des lignes d'A, d'A parallèles à la ligne D'C, le suivent aussi, & leur partie rouge sort de l'oculaire par les lignes H'M', H'M', la violette par les h'm', h'm'. Cette division des rayons rouges, & violets est l'origine principale des couleurs, qu'on

on voit dans cette espèce des lunettes. Si l'on conçoit les rayons  $IG'$ ,  $iG'$  prolongés en  $N$ ,  $n$  l' angle  $NG'n$  est celui qui mesure la séparation des couleurs, & cet angle s'évanouit, quand le point  $G'$  va au centre  $G$ , c'est-à-dire quand le point de l'objet est au centre du champ de la lunette, & il augmente à mesure qu'il s'en éloigne. Par cette séparation de couleurs un petit objet bien lumineux, comme une planète, regardé par une lunette de cette espèce dans un fond obscur placé vers le bord du champ paroît coloré de manière, qu'il est rouge du côté tourné vers le centre du même champ, & violet sur son bord extérieur. L'acromatisme de l'objectif n'empêche pas cette espèce de couleurs. Si l'on conçoit l'acromatisme le plus parfait de manière que toutes les différentes espèces de rayons colorés soient rassemblés dans les mêmes points  $F$ ,  $F'$ , le rayon  $CF'$  sera décomposé par l'oculaire en  $G'I$ , &  $G'i$ , & feroit voir le même objet par les rayons rouges dans la direction  $G'N$ , par les violets dans la direction  $G'n$ .

14. La même chose arrive à une lunette à oculaire concave, qui répond à la fig. 2. Le rayon  $D'CG'$  est décomposé par l'oculaire en  $G'L'$ ,  $G'V$ . Pour radresser l'objet par des oculaires convexes on en emploie trois (fig. 3)  $BB$ ,  $HH$ ,  $MM$ , qui dans les lunettes les plus ordinaires sont égaux, & disposés de manière, que le point  $F$  est le foyer commun de l'objectif, & du premier oculaire,  $I$  des deux premiers,  $O$  des deux derniers. Le rayon  $D'CG'$  est décomposé par le premier oculaire en  $G'IL$ ,  $G'il$ : le second envoie le rayon rouge par la ligne  $LO'Q$  parallèle à l'axe, & le violet par une autre  $LO'q$  convergente, qui coupe la précédente en  $O'$ : le troisième les fait sortir par les lignes  $QR$ ,  $qr$ , & on voit l'objet par ses rayons rouges dans la direction  $QST$ , & par les violets dans l'autre  $qSt$ . Tout cela est beaucoup plus clairement détaillé dans l'Opuscule même, & il s'agit dans ce premier chapitre d'expliquer au long la théorie de tout cela, & de déduire les théorèmes nécessaires pour pouvoir y appliquer les remèdes. On ne peut pas suivre dans cet extrait tout ce procédé: j'indiquerai seulement ce qu'il y a de plus essentiel, & de plus remarquable.

15. Dans le paragraphe 2 il y a la théorie d'un rayon, qui passe avec une petite obliquité par un prisme à angle petit, qui est représenté à la fig. 4 (planche II), avec son application au passage par une lentille, qu'on voit à la fig. 5, par deux arcs de cercle, & à la fig. 6 par la seule corde BGB commune. On a donné dans le premier volume l'idée de la valeur  $m$ , qui exprime la raison du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle rompu,  $dm$  étant la différence des deux valeurs de cette espèce appartenantes aux rayons premiers rouges, & derniers violets, comme aussi on s'est servi des valeurs  $m$ ,  $dm$  pour le passage par le verre commun, qui a moins de force dispersive, & des  $m'$ ,  $dm'$  pour celui qui en a plus comme le flint, ou strass, & on emploie ici les mêmes expressions. Or on trouve, que pour le rayon, qui entre avec peu d'obliquité dans un prisme à angle petit, la réfraction est égale à-peu-près à cet angle multiplié par  $m - 1$ , & la différence des réfractions des rayons rouges & violets entrés avec la même direction dans ce prisme est égale aussi à-peu-près à la réfraction de la plus petite multipliée par  $\frac{dm}{m-1}$ . Cette valeur pour l'eau, & pour le verre commun est à-peu-près  $= \frac{1}{27}$ , & pour le flint  $= \frac{1}{18}$ .

16. Dans la fig. 5 on considère le rayon, qui traverse la lentille par la ligne EG'I, comme s'il passoit par un prisme qui auroit les surfaces réfringentes dans la position des tangentes EA, IA, avec l'angle EAI, qu'on appelle prisme équivalent, & en y appliquant ce qu'on avoit trouvé pour ce prisme, & le transportant à la fig. 6, on trouve ce théorème, qu'on avoit trouvé par une méthode plus compliquée dans le volume précédent, que si l'on conçoit la première surface convexe, la seconde concave avec les rayons de sphéricité  $a$  &  $b$ , & les rayons de lumière convergents vers un point éloigné de la lentille d'un intervalle  $p$ , & qu'on appelle  $x$  la distance de la lentille au point, vers lequel elle rend convergents les rayons qui en sortent, en faisant  $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$  on aura  $\frac{1}{x} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$ : comme pour les

les rayons parallèles, la distance  $p$  devenant infinie, on a  $\frac{1}{p} = 0$ , si l'on appelle distance focale ce qui devient  $x$  dans cette occasion, & on la nomme  $h$ , on aura  $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$ , & pour toutes les

valeurs  $p$  finies on a alors  $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ . Ce sont les valeurs primitives, dont on fait usage très-souvent. On déduit dans ce paragraphe beaucoup d'autres théorèmes appartenants aux réfractions des lentilles qu'on avoit déjà démontré dans le même premier volume par l'autre méthode.

17. Dans le paragraphe 3 on tire de ces valeurs les théorèmes qui appartiennent aux lentilles acromatiques composées de deux espèces de verre ayant égard à la correction de la seule erreur de réfrangibilité, & les formules pour en calculer les sphéricités. On voit déterminé tout cela par l'autre méthode dans le volume précédent, & il n'y a ici aucun résultat essentiellement différent, quoique il y a quelque petite différence dans les expressions des valeurs. On mettra ici le seul dernier résultat. Au num. 75 on a les théorèmes suivants : *Une lentille acromatique ne peut pas être simple : elle ne peut pas être composée des lentilles d'une même espèce de verre : elle exige deux verres, qui portent une séparation de couleurs pas petite à parité de réfraction, c'est-à-dire, qui aient assez différentes les valeurs  $\frac{dm}{m-1}$  : plus il y aura de différence entre les deux verres, & plus ils seront propres pour en composer une lentille acromatique : pour faire une lentille acromatique convexe il faudra faire la lentille convexe de ce verre qui fait moins de séparation de couleurs, comme du verre commun, & la concave de celui qui en fait plus, comme de flint ou stras, & employer les rayons de sphéricité des lentilles équivalentes (ce sont les lentilles, qui étant isocèles ont la même distance focale) proportionnels à leurs valeurs  $dm$ .* On a les dénominations & les formules au num. 84. On mettra ici aussi seulement le dernier résultat tiré du numero 85 pour

la lentille composée de verre commun & de flint en supposant leur rapport  $\frac{dm}{dm'} = \frac{2}{3}$ , comme on le trouve presque toujours au moins à-peu-près dans le verre commun, & le flint d'Angleterre, & il est assez pour l'effet dont il s'agit ici, de l'avoir par un à-peu-près : *La lentille de flint doit être isocèle concave de tous les deux côtés, & on doit faire son rayon de sphéricité égal à la moitié de la distance focale de la lentille composée qu'on veut avoir : la lentille de verre commun doit être convexe de tous les deux côtés : si l'on veut la composée seulement de deux & celle-ci aussi isocèle, on fera son rayon de sphéricité égal à  $\frac{2}{3}$  de celui de la concave,  $\frac{1}{3}$  de la distance focale : si l'on veut les surfaces internes en contact total, le rayon de sphéricité de la surface intérieure sera égal à celui de la lentille concave, & celui de la surface extérieure égal à la moitié de l'autre de la surface intérieure. Mais si l'on veut la composée de trois, on en fera deux convexes de verre commun, entre lesquelles on placera la même concave de flint : & pour celles-là, si l'on les veut isocèles, on fera chacun des quatre rayons de sphéricité égal à un quart de celui de la concave : si l'on veut les surfaces intérieures au contact total, on fera le rayon des surfaces internes des deux convexes égal au rayon de la concave, la moitié de la distance focale, & le rayon des externes égal au double de celui de l'interne.*

18. Si l'on veut une lentille acromatique concave, on retiendra le même ordre, & la même longueur des rayons de sphéricité en changeant seulement les concavités en convexités, & viceversa. Cet arrangement est excellent pour les oculaires de ces petites lorgnettes à la main qu'on emploie aux spectacles. Il n'y reste qu'à ajouter, que comme il ne s'agit ici, que de la seule combinaison des distances focales pour la correction de l'erreur de réfrangibilité sans égard à celle de sphéricité, on peut tourner ou chaque lentille, ou tout le système comme on veut sans aucun changement par rapport aux couleurs qui en seront corrigées toujours de même, mais pas exactement, parce que,

com-

comme on l'a vu dans plusieurs endroits du premier volume, deux seules substances ne peuvent réunir, que deux seules espèces de rayons colorés.

19. Dans la méthode proposée on a besoin de cette espèce de verre, qui fait plus de séparation à parité de réfraction moyenne comme du flint : presque dans tout le reste de cet Opuscule on peut faire tout avec une seule espèce de verre commun. On commence par corriger dans le paragraphe 4 l'erreur de sphéricité, & empêcher les couleurs par la combinaison de deux oculaires simples. Quand (fig. 7) le premier oculaire BB a séparé les rayons rouges des violet par les lignes  $G'I$ ,  $G'i$ , si on les fait tomber sur une autre lentille HH placée à quelque distance, le rayon rouge rencontrera cette lentille plus près de son bord en L, où l'inclinaison des deux surfaces forme un angle plus grand, & le violet en l plus vers le milieu, où cet angle est plus petit, & cette différence est d'autant plus grande, que la même seconde lentille est plus éloignée de la première. On a cherché, s'il n'y auroit quelque distance combinée avec les distances focales des deux lentilles, qui feroit une compensation de l'excès de réfrangibilité du rayon violet sur le rouge faite par l'excès de l'angle rencontré par le rouge, qui feroit sortir ces deux rayons par des lignes LM, lm parallèles, ce qui porteroit la même direction apparente de l'objet formée par ces rayons extrêmes, & on a trouvé d'abord par une analyse linéaire, qu'on auroit cet effet par une seconde lentille, dont la distance focale seroit égale à un tiers de celle de la première, placée à la distance de deux tiers de la même distance focale de la première lentille de manière, que le foyer de toutes les deux soit commun, dans lequel cas le grossissement devient double de celui qu'on auroit par la seule première lentille. C'est une combinaison très-commode pour les lunettes astronomiques communes, qui fait disparaître les couleurs produites par les oculaires, qui sont les sensibles, sans aucun secours de flint.

20. On y a cherché après par le calcul algébrique la solution générale même pour le cas, où le deux lentilles sont de différentes

tes substances : on a trouvé une formule , qui a deux quantités indéterminés pour la seconde lentille à ajouter à la première déterminée , c' est-à-dire la distance focale de cette seconde , & sa distance à la première , ce qui donne un nombre infini de solutions . En faisant les valeurs des deux substances  $m$  , &  $m'$  , la distance focale de la première lentille  $h$  , de la seconde  $h'$  , la distance de la seconde à la première  $z$  , on trouve  $\frac{zdm}{h'(m-1)}$

$$-\frac{dm}{m-1} = \frac{dm'}{h'(m'-1)} \times (h+h'-z) - \frac{dm'}{m-1}$$

. En employant la même espèce de verre la formule devient très-simple : on y a  $m' = m$  , les termes  $\frac{dm}{m-1}$  se détruisent , le diviseur  $h'(m-1)$  devient commun , & s' en va : il n' y reste que  $z = h + h' - z$  , ou  $2z = h + h'$  , d'où l'on tire ce beau théorème : *Les couleurs des oculaires seront corrigées , si l'on emploie la seconde lentille du même verre d'une distance focale quelconque en la plaçant à une distance de la première , qui soit égale à la demi-somme des deux distances focales* : mais il faut prendre garde , qu' une détermination arbitraire ne fasse approcher trop la première de ces deux lentilles de l' objectif , quand on détermine la position de ce système , qui est nécessaire pour en faire sortir parallèles les rayons partis du même point de l' objet par la méthode indiquée dans ce paragraphe , ce qui rendroit fausse la supposition , qu' on a fait d' un grand éloignement de la première lentille au même objectif , nécessaire pour pouvoir négliger plusieurs quantités devenues petites par cette supposition . Cet inconvenient n' arrive pas dans le système , qu' on avoit trouvé avant : celui-là est un cas particulier de cette solution générale , parcequ' en faisant  $h' = \frac{1}{3}h$  , on a  $2z = h + h' = \frac{4}{3}h$  , &  $z = \frac{2}{3}h$  , comme on avoit pris . On trouve , qu' alors il faut placer ce système de manière par rapport à l' objectif , que le foyer de celui-ci tombe au milieu entre les deux lentilles .

21. La lunette à deux oculaires , dont on a parlé dans ce paragraphe , renverse les objets : on peut en avoir une de même à deux

oculaires, qui les représente droits : on en fait mention à la fin du même paragraphe sur la fig. 8, où on fait voir ses imperfections très-grandes par rapport aussi aux couleurs, & on passe dans le paragraphe 5 aux lunettes à trois oculaires qui le redressent. On voit ces trois oculaires à la fig. 9 représentés par trois lignes droites BGB, HKH, MPM, puisqu'on y néglige l'épaisseur, & on n'y a aucun égard à l'erreur de sphéricité, mais seulement à l'autre de réfrangibilité qui dépend des seules distances focales, & distances mutuelles entre eux. Le foyer de l'objectif pour les rayons partis d'un point de l'axe est en F, de ceux qui partent d'un point pris hors de l'axe en F', & ceux qui ont passé par le milieu de l'objectif arrivent au premier en G, G' : on parle ici d'abord du cas de deux premiers oculaires simples, où le foyer des rayons rouges en F est commun pour l'objectif, & pour le premier oculaire : ainsi GF est la distance focale de celui-ci pour les rayons rouges, GI un peu plus grande, le point I étant celui, qui doit recevoir les rayons rouges passés par le centre de l'objectif, KI, KO les distances focales du second oculaire aussi pour les rayons rouges. Le rayon oblique F'G' se décompose comme à la fig. 1, & 3, & la partie rouge va par I au second oculaire en L, la violette par i en l : celle-là en sort parallèlement à l'axe par la ligne LO'Q, celle-ci par une ligne lq, qui s'incline vers l'axe, & coupe la première en O'. On y trouve ce beau théorème, que la distance LO' de cette réunion des rayons colorés, qui ont été séparés par le premier oculaire en G', sont réunis par le second de la même espèce de verre en O' à une distance égale à sa distance focale KO, & cela leurs distances focales étant ou égales, ou inégales.

22. De-là il s'en suit, que si l'on emploie le troisième oculaire MPM composé acromatique avec son foyer antérieur en O, les rayons LO'Q rouge, & lO'q violet en sortiront par des lignes QR, qr parallèles à la ligne O'P, & arriveront à l'œil avec une même direction : parceque comme les rayons de toute espèce, qui arriveroient à une lentille acromatique par des lignes parallèles à la ligne RP, devroient se réunir en O, & ceux qui arriveroient par des li-

gnes

gnes parallèles à  $PO'$  en  $O'$ , ce qui est porté par la nature de l'acromatisme , ainsi tous les rayons de toute espèce partis des points  $O$ ,  $O'$  doivent sortir de la lentille acromatique par des lignes parallèles aux lignes  $OP$ ,  $O'P$ . Ainsi en employant trois oculaires de distances focales quelconque égales , ou inégales , dont les deux premières soient simples d'une même qualité de verre quelconque , & la troisième composée acromatique , & en les plaçant de manière que la distance mutuelle tant des deux premières , que des deux dernières soit égale à la somme de leurs distances focales , on corrigera l'erreur de réfrangibilité , & empêchera l'apparence des couleurs .

23. Ici aussi il y a l'usage du flint réuni avec le verre commun pour empêcher les couleurs produites par les oculaires : dans tout le reste de cet Opuscule on donne le moyen d'obtenir la même correction sans aucun besoin de cette espèce de verre , employant seulement le verre commun : on l'a fait ci-devant pour la lunette à deux oculaires simples , ce qui est un grand avantage . Dans le paragraphe 6 on emploie à cet effet trois lentilles simples : voici le résultat le plus essentiel , & intéressant de toutes les recherches qu'on y trouve . Premièrement pour le système qu'on trouve ordinairement dans les lunettes communes de trois oculaires simples de même verre égaux , & placés à des distances respectives de la somme des leurs deux distances focales , on y fait la comparaison des angles (fig. 3 planche I)  $NG'n$  ,  $TSt$  , qui sont les divergences des couleurs extrêmes produites par la première lentille seule , & par le système des toutes les trois en employant  $\frac{1}{27}$  pour la valeur de  $\frac{dm}{m-1}$  : on trouve ce second angle plus petit que le premier d'un huitième du total . Cette diminution remarquée a donné l'espérance de pouvoir faire la correction totale pour les rayons extrêmes par des lentilles de la même espèce de verre , & en a fait faire la recherche , qui à la fin a donné des résultats bien satisfaisants .

24. Voici la règle qu'on en a tiré au num. 161 : *Pour avoir la destruction des couleurs on peut employer trois lentilles de la même*

même espèce de verre avec des distances focales quelconques : ayant placé les deux premières à la distance égale à-peu-près à la somme des leurs distances focales on placera la troisième à une distance de la seconde plus grande que la somme des leurs distances focales par un excès à-peu-près troisième continuelllement proportionnel après la distance des deux premières entre elles , & la distance focale de la seconde. On y ajoute dans les num. suivants d'autres déterminations , & au num. 164 les dénominations & les formules , qui répondent à tout cela. Si l'on nomme  $b$  ,  $h$  ,  $h'$  ,  $h''$  les distances focales de l'objectif , & des trois oculaires , on aura la distance de la première lentille à la seconde  $= h + h'$  , de la seconde à la troisième  $= h' + h'' + \frac{h'^2}{h + h'}$  , de la première au foyer de l'objectif placé entre ces deux  $= \frac{hh'}{h + h'}$  , le grossissement  $= \frac{bh'}{hh''}$  , la distance focale de la lentille simple , qui fera le même grossissement  $= \frac{hh''}{h'}$  , la distance de l'œil à la troisième lentille  $h''$  , la longueur du système total des oculaires  $h + 3h' + 2h''$  , la longueur de toute la lunette depuis l'objectif jusqu'à l'œil  $b + h + 3h' + 2h''$  . En appellant  $e$  ,  $e'$  ,  $e''$  les diamètres de l'ouverture des trois oculaires le premier étant plus grand ou plus petit selon la bonté de l'objectif , pour l'ouverture utile des autres on aura  $e' = e''$  ,  $e = \frac{he'}{h'}$  , l'ouverture du diaphragme  $a$  un peu plus petite que l'ouverture  $e$  , le champ  $= \frac{3438'a}{b}$  .

25. On tire de cette règle générale deux combinaisons bien simples : toutes les deux ont les deux premiers oculaires égaux avec la distance de l'une à l'autre égale à la somme de leurs distances focales , qui est le double d'une entre elles , & pour la distance du second au troisième la quantité à ajouter à la somme des leurs distances focales est la moitié d'une de ces mêmes distances : le troisième oculaire dans la première combinaison est aussi égal aux précédents , & par conséquent éloigné de la seconde à

Tome. II.

Qqq

deux

deux distances focales & demi : dans la seconde combinaison il a la distance focale égale à la moitié des précédentes , & sa distance au troisième doit être égale à celle des deux premiers . Dans cette seconde combinaison le grossissement est double , mais le champ doit être la moitié , parce que sa courbure plus grande rend l'ouverture qu'on peut lui donner au double plus petite , ce qui diminue de la moitié les ouvertures utiles des précédents.

26. Comme en mettant deux lentilles égales en contact , on diminue la distance focale de la moitié , & on forme un assemblage équivalent à une seule du troisième oculaire de la seconde des deux combinaisons précédentes pour la correction des couleurs & pour le grossissement , & pourtant susceptible d'une ouverture double , qui double le champ ; la meilleure combinaison sera celle de quatre lentilles de distances focales égales avec les distances de la première à la seconde , & de la seconde à la troisième double d'une seule de ces distances focales , la quatrième étant adossée à la troisième . Cette combinaison réellement de quatre , mais équivalente à une de trois , pour les objets terrestres , qui les fait voir droits , & l'autre des deux pour les lunettes astronomiques , qui les renversent , où la seconde a la distance focale égale à un tiers de celle de la première éloignée d'elle à la distance de deux tiers , sont les meilleures étant encore les plus susceptibles d'une très-grande diminution de l'erreur de sphéricité faite par une méthode aussi bien simple , comme on verra dans l'extrait du second chapitre , où on déterminera aussi leur forme la plus propre pour cet effet .

27. Dans le §. 7 il y a la recherche du remède aux couleurs par quatre oculaires simples : après tous les différents essais on ne trouve rien mieux que la combinaison qu'on vient de proposer du quatrième adossé au troisième . On tombe sur elle , quand ayant déterminé l'erreur de réfrangibilité , qui se trouve dans la combinaison de la figure 3 de trois oculaires de distances focales égales , on cherche par une méthode analogue à celle du paragraphe 4 un quatrième oculaire à ajouter aux trois premiers , capable de corriger cette erreur déjà connue . On passe après à faire la

re-

recherche de la quantité de l'erreur qui se trouve dans une combinaison donnée , en déterminant dans les figures 10 les ouvertures utiles , dont le rapport dépend de leurs distances focales , & de distances relatives de l'une à l'autre , ce qu'on fait en déterminant le concours avec l'axe d'un rayon , qui arrive à l'objectif parallélement au même axe : dans la fig. 11 on détermine l'angle qui contient en sortant du dernier oculaire la partie rouge avec la violette d'un rayon , qui arrive au centre de l'objectif avec une obliquité quelconque , pour pouvoir corriger cette divergence par le changement de la distance focale du quatrième oculaire , ou de sa distance au troisième .

28. On applique la méthode à une combinaison de quatre oculaires qu'on avoit proposée comme trouvée très-bonne par expérience pour un objectif de six pieds : les distances focales de ces oculaires sont de 14, 21, 27, 32 lignes , les intervalles 23, 44, 40 , les ouvertures 9, 13, 11, 12 . On trouve , que la troisième lentille est celle , à laquelle on doit donner toute l'ouverture qu'on peut ayant égard à sa courbure , & que la lui ayant donnée il y a dans les autres trop de superflu inutile : que son grossissement est = 55 , assez grand pour une lunette qui n'est pas acromatique , le champ = 22' un peu trop petit , & pourtant on y trouve une séparation de couleurs = 7", 16 . La distance focale d'un oculaire , qui étant seul donneroit le même grossissement , se trouve en lignes =  $15\frac{2}{3}$  . En lui donnant une ouverture égale à la moitié de sa distance focale , ce qu'on a pris pour convenable dans tous les calculs de ce chapitre , celle-ci seroit en lignes = 7, 83 , le champ seroit = 30'. 36" , & feroit une séparation de couleurs = 31", 14 : ainsi on voit que cette combinaison diminue beaucoup les couleurs , mais elle en laisse presqu'un quart .

29. En cherchant la correction de ce reste par des changements à faire à la seule quatrième lentille , on trouve qu'on auroit cette correction en lui donnant pour distance focale 19, 78 , avec la distance de la précédente = 27, 70 , ou en faisant cette distance focale = 19, 53 , & sa distance de la précédente = 27, 95 .

Le premier de ces deux changements donneroit pour le grossissement 89, ce qui seroit trop fort pour une lunette non acromatique. On y a toutes les formules détaillées au long, & la forme du calcul numérique couché sur la table mise à la fin de ce chapitre page 128, avec son explication ligne par ligne, ce qui peut servir pour l'application à un autre combinaison quelconque : mais le meilleur parti est celui de quatre lentilles à distances focales égales, les deux dernières contigues faisant le service de la troisième seule. Comme dans toutes ces recherches on a négligé beaucoup de petites quantités, il y a une méthode aisée pour suppléer à tout le défaut, qui peut en provenir. On peut placer dans un petit tube le premier oculaire, quand ils sont deux, ou les deux premiers quand ils sont trois, & le dernier dans un autre un peu plus étroit, qui entrera dans le premier. En poussant ce second dans celui-là en avant en arrière, tandis qu'on regarde un petit objet bien lumineux, comme une planète, placé sur le bord du champ, on verra les couleurs de manière que tantôt le rouge sera vers le centre du même champ, & le violet en dehors, les couleurs n'étant assez corrigées, tantôt elles passeront du côté opposé étant plus que corrigées : on prendra la position de ce passage pour fixer la distance de ce dernier oculaire au précédent, qui fera la correction autant juste qu'on peut l'avoir : un mouvement donné au premier petit tuyau approchera tout le système à l'objectif, ou l'en éloignera pour la distinction des différentes qualités des yeux.

30. Dans ce chapitre on a parlé aussi d'un inconvenient qu'on trouve dans des différentes lunettes, & on en parle aussi après. C'est que le petits grains de poussière, ou petits vices du verre, restent trop visibles & empêchent la netteté de l'image, quand le lieu où elle est formée par la réunion de tous les rayons qui appartiennent au même point de l'objet, se trouve trop près de la lentille suivante. Dans la fig. 1 ces rayons occupent sur l'oculaire l'espace  $hh'$ , ou  $hh''$ , qui est d'autant plus grand que le foyer  $Ff$  est plus éloigné de la lentille  $BB'$ . Quand le grain de poussière n'occupe pas tout cet espace, il y a

tou-

toujours une partie de ces rayons qui passent en avant, & arrivent à l'œil, & si l'excès de cet espace sur le grain est assez grand, on ne s'aperçoit pas de la perte de ceux qui sont interceptés : on voit ce défaut seulement, quand cet excès est petit, c'est-à-dire quand le foyer est trop peu éloigné de la lentille suivante. Dans la figure 3 il y a deux de ces images, une en F, l'autre en O, & la dernière est toujours au foyer antérieur du dernier oculaire, qui doit envoyer à l'œil ces rayons parallèles, ou peu éloignés du parallélisme. On ne peut pas diminuer cette distance, qu'en diminuant la distance focale de ce dernier oculaire, ce qui par l'ordinaire diminue le grossissement. Mais pour la distance de celle qui se forme au foyer de l'objectif, quand il y a plusieurs oculaires, s'il y en a une, il faut y avoir égard pour l'éviter, & on a déterminé ici plusieurs fois cette distance par un calcul qu'il y est expliqué aux occasions.

### §. III.

#### *Second chapitre sur l'erreur de sphéricité.*

31. **O**N a expliqué dans le Tome I en quoi consiste l'erreur de sphéricité. La figure sphérique ne réunit pas en un seul point tous les rayons ni les parallèles ni les divergents d'un même point, ou convergents à un même point, pas même les homogènes, qui tombent sur toute l'ouverture, mais plus près de l'objectif ceux qui arrivent à son bord; que ceux qui arrivent à côté de l'axe. Cela produit une confusion de l'image de l'objet par là dispersion, qui fait tomber les uns sur les autres les rayons appartenants à des différents points de l'objet, ce qui est commun tant aux oculaires, qu'aux objectifs : mais il y a un autre mauvais effet, qui appartient aux oculaires seuls, & qu'on voit dans certaines lunettes, quand il y a un grossissement trop grand réuni avec un grand champ, c'est de forcer l'objet en défigurant leur image par une courbure introduite dans ces lignes droites : l'un & l'autre défaut est varié selon la différente

rente combinaison des deux sphéricités dans des différentes lentilles, qui donnent une même distance focale. Comme ce qui appartient aux couleurs dépend seulement des distances focales des lentilles, & il y a un nombre infini de combinaisons des deux sphéricités, qui donnent la même distance focale, les mauvais effets de l'erreur de sphéricité sont tout-à-fait indépendants de l'acromatisme, & ils peuvent se trouver dans les lunettes les plus acromatiques.

32. Il est bien aisé de concevoir le premier effet de la confusion, qui dérive de la dispersion des rayons, même des homogènes, appartenants à un point de l'objet quelconque : mais il a plus besoin d'explication l'autre de la courbure des lignes droites de l'objet dans son image. Celui-ci est produit par les rayons appartenants aux différents points de l'objet, qui passent par le centre de l'objectif & arrivent aux différents points de l'image en y guidant, pour ainsi dire, leurs compagnons chacun ceux de son pinceau de tous les rayons partis ensemble du même point de l'objet. On fait voir l'origine de ce défaut dans le paragraphe 1 de ce chapitre sur les figures 12, & 13 (planche IV). Le rayon DC (fig. 12) qui part d'un point D de l'objet placé dans le centre du champ va par l'axe au centre C de l'objectif AA, & G de l'oculaire BB : un autre, qui part d'un point E de l'objet moins éloigné de ce centre du champ, va par la ligne CH au même oculaire, & il en est détourné vers un point I de l'axe moins éloigné du point G, que le rayon E'CH' parti d'un point E' plus éloigné, & détourné vers le point I'. Que les lignes Ie, Ie', Ih parallèles aux lignes CH, CH', IH' rencontrent l'oculaire en e, e', h : on voit bien que la ligne Gh sera plus grande que GH'.

33. Que le point G (fig. 13) soit le centre du champ, OO' le diamètre perpendiculaire à l'image qu'on auroit en regardant une ligne droite de l'objet directement du point I de la fig. 12 à l'œil simple par ses directions Ie, Ie' parallèles à CE, CE' de la même figure, & Ge, Ge', GH, GH', Gh de la fig. 13 soient égales aux lignes marquées par les mêmes lettres à la fig. 12 : l'

ima-

image de cette ligne renversée, & augmentée par la lunette à la place d'être une ligne droite  $MHH'N$  sera une ligne courbe  $mHhn$ , qui tournera la convexité au centre G. Parceque dans toutes les deux figures on aura cette même proportion  $Gc:Gc':= GH:GH'$ , & par conséquent les trois premières lignes étant les mêmes dans ces deux figures, la dernière le sera aussi : la ligne  $Gh$  étant plus longue que la  $GH'$  dans la première, le sera encore dans la seconde, & le point h ira au de-là du point  $H'$  de la ligne droite MN. Il est aisé de voir, & on le démontre dans ce paragraphe, que ce débordement de tous le points e' formera une ligne courbe qui aura la ligne droite MHN pour tangente. Ainsi cette courbure ne paroîtra pas, si le débordement est petit à cause de la petitesse du grossissement, ou du champ assez petit, parceque dans le premier cas la courbure sera petite en elle même, & dans le second on aura un petit arc, qui ne diffère pas sensiblement de la ligne droite, quand il est assez petit, quoiqu'il appartienne à une courbe d'une courbure assez grande.

34. Pour détruire, ou au moins diminuer beaucoup cette erreur, on employe, comme on a dit au §. 1, les formules du second Opuscule du Tome I, & dans le §. 2 on cherche ce qu'on peut faire avec une seule lentille. On trouve d'abord, qu'on ne peut pas détruire cette erreur, que pour les rayons divergents, ou convergents, qui ont les points de leur divergence ou convergence renfermés entre des limites bien étroites, mais un peu différentes selon la différente valeur  $m$  qui exprime leur qualité réfractive. Voici l'expression générale de ces limites : soit à l'ordinaire  $h$  la distance focale de la lentille,  $p$  la distance de la limite cherchée positive pour la convergence, négative pour la divergence,  $n = \frac{(m-1)p}{h}$  de manière que la raison  $\frac{p}{h}$  de la distance  $p$  à la distance focale  $h$  soit  $\frac{n}{m-1}$  : on aura  $n = -\frac{1}{2}(m-1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + 2m)}$ . Si l'on fait  $m = \frac{3}{2}$ , qui est à-peu-près la valeur pour les verres, sur-tout pour les communs, on trouve ce théorème au num. 25 de ce chapitre : Si la distan-

ce

*ce du point de la convergence des rayons qui arrivent à la lentille est plus grande que  $\frac{5}{9}$  de la distance focale , ou la distance du point de la divergence plus grande que  $\frac{5}{14}$  , la combinaison des deux sphéricités d'une lentille ne pourra pas détruire l'erreur de sphéricité . le pourra bien , quand ces distances lui seront égales , ou en seront plus petites .*

35. Comme il n'arrive presque jamais le cas d'une si grande convergence , ou divergence , on y fait la recherche de la combinaison des deux surfaces , qui donne l'erreur de sphéricité d'une seule lentille pour toutes les directions des rayons , de la quantité qui reste dans la lentille du minimum , & de la quantité de l'erreur d'une lentille quelconque . On y donne les formules générales réduites pour calculer tout cela numériquement , c'est-à-dire les rayons de sphéricité de la lentille qui donne l'erreur la plus petite , quand on a la convergence ou divergence des rayons , & la valeur  $m$  de la qualité du verre , la quantité de l'erreur qui reste dans le minimum , & de celle qui se trouve dans une lentille donnée quelconque . Pour l'application numérique on se borne à deux directions des rayons incidents les parallèles , & les convergents vers le foyer de la même lentille : ce sont deux cas , qui arrivent dans les deux combinaisons qu'on a choisi , un pour les lunettes astronomiques à deux oculaires qui renversent l'objet , & l'autre de quatre pour les terrestres , qui le redressent , à distances focales égales , le quatrième adossé au troisième . Dans toutes ces deux combinaisons on considère comme parallèles les rayons appartenants aux différents points de l'objet qui arrivent au premier oculaire divergents du centre de l'objectif , dont la distance est grande par rapport à la distance focale de la lentille , & à la dernière de toutes les deux ils arrivent rendus convergents au foyer de cette lentille par sa précédente : dans la première de ces mêmes combinaisons la troisième les reçoit rendus parallèles par la seconde qui les a reçus divergents de son foyer , & cette seconde qui les doit envoyer parallèles à la troisième est dans le cas contraire à celui , où elle les recevroit parallèles : ainsi sa position est dans la même condition , que celle de l'autre placée

cée en sens contraire. Pour cela ce sont les deux positions de rayons, dont on avoit besoin ici.

36. On a mis dans la petite table du num. 37 tout le fruit de cette recherche dans le résultat des calculs numériques, dont on a dans plusieurs tables suivantes le long détail pour tout ce qui appartient aux rayons de sphéricité pour avoir le minimum de l'erreur & à l'erreur qui se trouve dans quatre espèces des lentilles tant pour les rayons de lumière qui arrivent parallèles, que pour ceux qui arrivent convergents au foyer de la lentille (\*): ces espèces sont la lentille du minimum, la plano-convexe le plan tourné à l'œil, l'isocèle, la plano-convexe le plan tourné à l'objet: il y a le résultat relatif à trois valeurs  $m$  pour trois différentes espèces de verre: ce sont  $m = 1,5, = 1,52, = 1,54$ . Les verres communs ne s'éloignent pas beaucoup de quelqu'une de ces valeurs, qui sont encore peu différentes entre elles, & ont des résultats peu différents de manière que si l'on veut plus de précision pour chaque verre dont on a la valeur  $m$ , on peut l'avoir aisément par interpolation. On verra tous ces résultats d'un seul coup d'œil dans cette table.

37. On y a à la première ligne les trois valeurs  $m$ , & dans la colonne qui répond à chacune il y a le résultat correlatif: on a aux lignes 2 & 3 les rayons de sphéricité des deux surfaces  $a$ , &  $b$  du minimum de l'erreur pour les rayons parallèles, aux deux suivantes les  $a'$  &  $b'$  pour les convergents au foyer. Le signe positif du premier rayon de sphéricité & le négatif du second indique la convexité de la surface, le contraire la concavité: ainsi la dernière seule de ces quatre surfaces exige la concavité: pour les rayons parallèles la lentille du minimum doit être convexe de deux côtés, pour les convergents au foyer convexo-concave, la convexité tournée à l'objet. Les nombres exprimés pour chaque rayon de sphéricité ont pour unité la distance focale.

(\*) On appelle ici quatre espèces de lentilles pour s'exprimer avec le même mot, quoique la quatrième n'a que la position différente: toutes les deux sont plano-convexes, le plan tourné dans celle-là à l'œil, dans celle-ci à l'objet.

le de la lentille : quand on la veut d'une mesure donnée , il faut réduire cette mesure en lignes , & multiplier ce nombre de lignes par la valeur marquée dans cette table : aux deux lignes suivantes il y a la raison du second rayon de sphéricité au premier pour ces deux directions des rayons de lumière incidents : dans les quatre binaires suivants la quantité des erreurs qui se trouvent pour les mêmes deux espèces de directions relativement aux quatre espèces de lentilles énoncées au numéro précédent .

38. On mettra ici les valeurs relatives aux verres de la réfrangibilité moyenne qui ont  $m = 1,52$  tirées de cette table . Pour les rayons parallèles la lentille qui donne l'erreur la plus petite doit être convexe de deux côtés : les rayons de sphéricité des deux surfaces seront  $0,596$  , &  $-4,072$  , le second étant plus long que le premier en raison de  $6,831$  à  $1$  : pour les rayons convergents à son foyer la lentille sera convexo-concave : les rayons de sphéricité seront  $0,3216$  , &  $0,8431$  , le second étant plus long que le premier en raison de  $2,621$  à  $1$  . Les erreurs de ces quatre espèces de lentilles pour les rayons parallèles sont  $0,274$  ;  $0,293$  ;  $0,434$  ;  $1,155$  , & pour les convergents au foyer  $0,039$  ;  $0,149$  ;  $0,400$  ;  $0,796$  . Les nombres dans la première , & troisième colonne de cette table qui répondent aux deux autres qualités de verre sont très-peu différents de ceux-ci : mais en comparant entre eux les nombres proposés ici pour les erreurs des différentes espèces de lentilles on voit que le  $0,293$  de la seconde espèce , qui est la lentille plano-convexe , le plan tourné à l'œil , diffère bien peu du  $0,274$  , qui est le minimum : l'erreur de l'isocèle  $0,434$  en diffère un peu plus : celle de la plano-convexe le plan tourné à l'œil  $1,155$  diffère beaucoup plus , étant quatre fois plus grande : mais il n'y a pas l'excès énorme qu'on voit dans la valeur de cette dernière espèce pour les rayons convergents sur celle du minimum , qui est  $0,039$  presqu'anéantie , parcequ'on s'y trouve peu éloigné d'une des deux limites de la correction totale : l'erreur de la seconde espèce  $0,149$  en est quadruple , celle de la troisième  $0,400$  dix fois plus grande , la dernière de la quatrième  $0,796$  vingt fois plus grande .

39. Ainsi

39. Ainsi il faut bien prendre garde de ne pas employer pour la seconde lentille du premier des deux systèmes , qu' on a proposé pour les lunettes astronomiques , ou par la quatrième du second proposé pour les terrestres en l' adossant à la troisième , une lentille plano-convexe avec le plan tourné à l' objet , ni même un isocèle . Il n' y aura pas gran mal , si l' on employe tant pour celles-là , que pour toutes les autres la lentille plano-convexe le plan tourné à l' œil . Le meilleur parti sera de bien connoître par la méthode du premier Opuscule du premier volume la qualité du verre par sa valeur  $m$  : faire le calcul sur les formules , ou par interpolation fondée sur les nombres de la table du num. 37 pour trouver les rayons de sphéricité , qui donnent le minimum de cette erreur tant pour les rayons parallèles , que pour les convergents au foyer : employer cette seconde forme de lentille pour la dernière de tous les deux systèmes , l'astronomique , & le terrestre , & la première forme pour la première lentille de tous les deux aussi : la même première forme pour les deux intermédiaires du second système , mais tournant la seconde lentille de manière que sa seconde surface y devienne la première tournée à l' objet .

40. Pour donner aux artistes une règle simple , & pas trop éloignée de la meilleure , on fera faire toutes les lentilles de verre commun plano-convexes , & l' exécution ne sera pas difficile , parcequ' il ne sera pas nécessaire de former un plan exactement tel , ce qui est très-difficile , il y suffit un à-peu-près : on tournera toujours le plan à l' œil à l' exception de la seconde lentille , dont le plan doit être tourné vers l' objet . Cela fera une correction de l' erreur de sphéricité assez suffisante . Pour y joindre la correction de l' erreur de réfrangibilité , & rendre les couleurs peu , ou point du tout sensibles , on donnera pour les lunettes astronomiques à deux oculaires au premier une distance focale triple de celle du second , & on placera celui-ci à une distance de celui-là double de cette même distance focale du second , qui est égale à deux tiers de celle du premier , & pour les lunettes terrestres à quatre oculaires on les fera tous les quatre égaux , &

on placera le second à la même distance du premier , & du troisième égale au double de la distance focale commune , en adossant le quatrième au troisième .

41. Après avoir examiné ce qui appartient à une seule lentille par rapport à une seule erreur de sphéricité il faudroit voir ce qui appartient à l' assemblage de plusieurs placés à des distances quelconques en prenant cet objet dans toute sa généralité on trouve des formules très-compliquées , & on ne parvient presque jamais par ce moyen à des résultats simples , & utiles pour la pratique qu'en négligeant un tel nombre de quantités pour sortir du labyrinthe des formules , qui remplissent des pages entières , dont les coefficients , & la multiplicité grossit les erreurs de manière que à la fin les résultats ne réussissent pas dans la pratique . Ici on s' est borné au §. 4 à voir comment on peut calculer la quantité de l' erreur finale en calculant celle de la lentille suivante d' après la précédente calculée par la méthode expliquée pour l' erreur appartenante à une lentille seule , & trouvant trop de complication dans les formules , qui embrasseroient l' erreur de plusieurs , & même de deux seules éloignées l' une de l' autre , pour déterminer le minimum possible de l' assemblage , on s' est borné précédemment au §. 3 à la recherche de la correction totale de l' erreur de sphéricité par deux lentilles contigues .

42. On avoit déjà déterminé ce qui appartient à cette correction dans le second Opuscule du premier volume même en réunissant cette erreur à celle de réfrangibilité pour les détruire toutes les deux à la fois par le moyen de deux espèces de verre . Ici on se borne à la destruction de l' erreur de réfrangibilité faite par deux lentilles seules contigues d' une seule espèce de verre commun , ce qui rend le problème plus indéterminé avec plus de liberté dans le choix du système des rayons de sphéricité , qui font le même effet . On trouve ces systèmes qui doivent être utiles pour les objectifs à verre commun en les composant de deux lentilles , & formant avec ce seul verre des lunettes beaucoup meilleures que les ordinaires : si l' on vouloit s' en servir pour chaqu' oculaire , on multiplieroit la perte de la lumière , & l' é-

pais-

paisseur qui est beaucoup plus grande dans les oculaires tant en soi même , que plus encore par rapport à leur distance focale , qui est toujours très-courte , éloigneroit trop le résultat de l'objet des formules .

43. On a d'abord dans ce §. 3 les formules générales pour cet objet , & après avoir essayé quelqu' autre détermination arbitraire on s'arrête à une qui fait la première lentille isocèle , & sa distance focale la moitié de celle de la seconde , qui par-là reste égale à celle du système des deux réunies : ce qui est commode aux artistes , & donne des rayons de sphéricité assez grands par rapport aux distances focales . On a à la table du num. 69 les quatre rayons de sphéricité avec les trois distances focales de chacune des deux lentilles en particulier , & du système des deux réunies : de même pour le trois valeurs  $m = 1,50 ; = 1,52 ; = 1,54$  . En prenant la valeur du milieu on trouve les quatre rayons de sphéricité  $0,52 ; - 0,52 ; - 0,4831 ; - 6,8063$  , où l'unité est la distance focale du système total , & de la seconde lentille double de la distance focale de la première . Ainsi la première lentille est isocèle convexe , & a le rayon de sphéricité tant soit peu plus long , que la moitié de la distance focale du total , la seconde concavo-convexe le rayon de sphéricité de la première surface concave étant un peu plus court que le rayon des convexités de la première , & la seconde convexe d'une convexité bien petite , dont le rayon est presque septuple de la distance focale commune .

44. Dans le §. 4 il y a des essais dont on a fait mention ci-dessus pour faire la correction par plusieurs oculaires , & n'ayant trouvé rien de mieux , que d'employer les deux systèmes , pour les lunettes astronomiques de deux , & pour les terrestres de quatre proposés ici aux num. 39 & 40 , & on se tient là . Si l'on fait l'objectif de la forme proposée dans le num. précédent , & les oculaires de cette forme , on aura avec le seul verre commun des lunettes beaucoup meilleures des ordinaires , & qui s'approcheront des acromatiques : elles seront bien plus proprement acromatiques , que celles où il y a seulement l'objectif acromatique sans une combinaison convenable d'oculaires . Celles-ci n'auront

aucu-

aucune couleur bien sensible à l'œil , parcequ'on aura empêché celles qui dérivent des oculaires , & qui sont les plus sensibles , & se trouvent très-souvent dans celles qu'on appelle acromati-ques , & ne le sont pas à cause des couleurs produites par ces oculaires : de l'autre côté l'erreur de sphéricité des oculaires qui fait de la confusion dans l'image , & qui la défigure dans les lunettes d'un grand champ , & grand grossissement , y sera dimi-nuée de manière à en rendre presqu'insensibles les effets : & de deux erreurs qui font tort aux lunettes communes celui de réfran-gibilité , & l'autre de sphéricité on y aura détruit ce second , qui n'est pas si petit , & même il est très-considerable par rapport au premier , comme on le verra dans l'extrait du Supplément à cet Opuscule .

45. Après le §. 4 il y a un *Appendix* : on y fait voir com-bien y reste pour avoir un traité complet sur les oculaires , dont la théorie n'est qu'entamée dans cet Opuscule . Il y a une énuméra-tion de huit conditions que il faudroit remplir , pour avoir un système accompli d'oculaires , ou le moins défectueux , avec dou-ze indéterminations dans le système de quatre lentilles : ainsi le problème est bien indéterminé : mais si l'on vouloit embrasser tout à-la-fois , il y auroit une complication tout-à-fait inextrica-ble avec la seule espérance de faire du chemin par la voie du tâtonnement .

#### §. IV.

##### *Du supplément de cet Opuscule.*

46. On a fait mention au §. 1 du supplément très-intéressant de cet Opuscule : on en donnera ici une légère idée . Il s'y agit de la distribution de la lumière par la surface de l'erreur circulaire de réfrangibilité , & son *Additamentum* a pour objet cette même distribution par la surface de cette erreur . Les deux recherches sont relatives aux figures de la planche V , où le six premières figures sont pour l'erreur de sphéricité , les deux dernières pour celle de réfrangibilité .

47. Pour

47. Pour la première on considère dans la fig. 1 les rayons qui arrivent parallèlement à l'axe AI au bord de l'ouverture en F, F', avec un quelconque intermédiaire, qui y arrive en P : la réfraction fait aller ceux-là à un point de l'axe en B après avoir touché en D, D' une courbe DCI, D'C'I, qui s'appelle caustique : le rayon intermédiaire la touche en T, & arrive à l'axe en L : la dernière limite des attouchements & des rencontres avec l'axe pour les rayons qui arrivent infiniment peu loin du point A de l'axe se fait en I, où la courbe touchée à la fois, & coupée par l'axe même a un point de rebroussement. La même courbe est coupée en C', C par les rayons extrêmes FB, F'B après l'attouchement D, D', & la rencontre B de l'axe : tous les attouchements T des rayons intermédiaires tombent sur les arcs DCI, D'C'I, & toutes les rencontres avec l'axe sur le segment BI du même axe : l'erreur longitudinale de sphéricité pour les rayons extrêmes est IB, pour l'intermédiaire IL, & on a tiré de son expression analytique (num. 99 supplém. II Opusc. II Tom. I) qu'elle est en raison directe du carré de l'ouverture, & réciproque de la distance focale, ce qui a lieu tant pour une lentille simple, que pour une composée : ainsi pour la même lentille n'y reste que la seule première raison.

48. On en tire à la fig. 2 les propriétés de cette courbe. Dans la partie qui approche infiniment du point I elle s'approche infiniment de la parabole de troisième degré, qui a les carrés des ordonnées TN comme les cubes des abscisses IN, & on peut considérer comme tel l'arc DID' de la fig. 1, où on a forcé la figure en le faisant si grand par rapport à la distance focale AI, pour y voir les contacts, & intersections nécessaires, tandis que l'abscisse IE, qui lui répond, doit être très-petite de manière à considérer même pour égales les lignes AE, AI : il faut suppler avec l'imagination au défaut de la figure. En tirant la ligne CC', qui coupe l'axe en O, on voit bien que ce sera le diamètre du plus petit des cercles dans lesquels sont dispersés tous les rayons passés par l'objectif, parceque en s'approchant de la lentille s'augmente la distance des arcs de la caustique,

& en

## EXTRAIT

& en s' éloignant s' augmente toujours plus l' ouverture de l' angle  $\text{CBC}'$  par le prolongement de ses côtés . Or on sait , & on le démontre encore ici , que dans cette courbe la subtangente  $\text{LN}$  est à l' abscisse  $\text{IN}$  comme  $2$  à  $3$  : ainsi  $\text{EB}$  est  $= \frac{2}{3}\text{IE}$  , & on trouve ici , que  $\text{BO}$  est  $= \frac{1}{4}\text{BI}$  , & par conséquent le diamètre de l'ouverture  $\text{FF}'$  , qui est au diamètre de l'erreur circulaire  $\text{CC}'$  comme  $\text{AB}$  censée  $= \text{AI}$  est à  $\text{BO}$  , sera comme  $4$  à  $1$  , tandis que dans la fig. 8 , où les rayons rouges arrivent à l' axe en  $\text{M}$  , & les violets en  $\text{L}$  , l' erreur longitudinale étant  $\text{ML}$  , & le diamètre de la circulaire  $\text{Aa}$  , qui rencontre l' axe en  $\text{C}$  , & coupe  $\text{ML}$  sensiblement par le milieu , cette raison est celle de  $\text{DE}$  à  $\text{Aa}$  , qu' comme  $\text{EC}$  , qu' on doit prendre pour égale à la distance focale  $\text{FM}$  , à  $\text{LC}$  , c' est-à-dire comme la distance focale à la moitié de l' erreur longitudinale , & c' est une des différences entre les erreurs circulaires de sphéricité & de réfrangibilité un peu désavantageux à la première , dont on s' étoit servi au Sup. II , Opus. I Tom. I en la supposant démontrée ici .

49. Pour faire la recherche de la distribution de la lumière dans le petit cercle du diamètre  $\text{CC}'$  , on a commencé par déterminer le point  $\text{P}$  de l' ouverture , qui envoie le rayon à un point  $\text{H}$  de ce cercle , & on le trouve par le moyen d' une équation de troisième degré , qui n' a pas son second terme , & a trois racines réelles , ce qui fait voir qu' à chaque point  $\text{H}$  de ce petit cercle arrivent trois rayons , qui passent par trois points  $\text{P}, \text{P}^{\prime}, \text{P}^{\prime\prime}$  , dont le premier y arrive après avoir touché l' arc  $\text{DCI}$  en  $\text{T}$  , le troisième avant de l' avoir touché en  $\text{T}^{\prime\prime}$  , & le second après avoir touché l' autre arc  $\text{D}'\text{C}'\text{I}$  en  $\text{T}'$  . On trouve ces trois rayons en construisant cette équation à la trisection de l' arc circulaire , & heureusement la construction s' est trouvée de la dernière simplicité , & élégance . Que dans l' axe on prenne  $\text{OR} = \text{OI}$  , ce qui laissera aussi  $\text{ER} = \text{RI}$  , qu' on trace un cercle avec le centre  $\text{C}$  & le rayon  $\text{OR} = \text{OI}$  , & qu' on y trouve le point  $\text{K}$  avec le centre  $\text{R}$  l' intervalle d' une ligne quatrième proportionnelle après  $\text{OH}', \text{OC}', \text{IR}$  : que l' on prenne l' arc  $\text{RM} = \frac{1}{3}\text{RK}$  , & avec

& avec le même centre R l'intervalle de la corde RM on trouve dans l'axe le point N : qu'on élève l'ordonnée NT à la courbe : la tangente HTP déterminera un des trois rayons cherchés : si l'on ne veut pas se servir de la courbe pour trouver le point I , on le trouvera par sa valeur , qui répond à la proportion des abscisses & ordonnées en prenant  $NT = \sqrt{\frac{OC^2 \times IN^3}{IO^3}}$ .

50. On sait par la nature de la construction de cette espèce d'équations de troisième degré , qu'en prenant MM' , MM'' égales à un tiers de la circonférence , les cordes RM' , RM'' seront les deux autres racines , qui transportées en RN' , RN'' donneront par les deux autres points T' , T'' les deux autres rayons P'H , P''H : on détermine dans le texte de ce Supplément quelles sont les racines positives , quelles les négatives , de quel côté on doit prendre les points M , M' , M'' , N , N' , N'' , quand il faudra prendre les points m , m' , m'' , n , n' , n'' , & dans une note on a tous les cas de la position du point H dans la ligne CC' , ou du point d hors d'elle , dans lequel cas l'équation a une seule racine réelle , & appartient non à la trisection de l'arc circulaire , mais à l'invention des deux moyennes continuellement proportionnelles entre deux données : on y joint le cas , où le point h est placé dans la fig. 4 dans une ligne perpendiculaire à l'axe , qui passe par I , ou le point H' dans une , qui passe au dessous du point I , & qu'il faut tirer par h , ou H' une tangente à la courbe . Dans la fig. 3 on avoit donné auparavant en général la construction de l'équation proposée de troisième degré , qui manque de son second terme , à la trisection de l'arc circulaire , quoique c'est une théorie élémentaire .

51. On sait que dans cette espèce d'équation une racine comme RM' dans le cas exprimé par la figure est égale à la somme des deux autres RM , RM'' : mais ici on s'est aperçu d'une autre propriété , qui a fait tout pour simplifier cette recherche , & qui peut être très-utile en beaucoup d'autres . Si l'arc RK est varié d'une petite quantité , la variation d'une des trois cordes RM , RM' , RM'' doit être égale aux variations des deux autres , & ce

n'est pas la variation de celle corde , qui est égale à la somme des deux autres : dans le cas de la figure 1 c'est la corde  $RM'$ , qui est égale aux deux autres cordes , & la variation égale aux deux autres est celle de  $RM$  , dont l'augmentation doit être égale à l'augmentation de  $RM'$  , & à la diminution de  $RM''$  prises ensemble ayant égard à la seule grandeur indépendamment des signes positifs , & negatifs . Or on trouve ici que le carré de  $AP$  , & par conséquent le cercle de ce rayon , est comme l'abscisse  $IN$  . Si l'on conçoit un point  $h$  infiniment peu éloigné de  $H$  , il y aura trois points  $p$  ,  $p'$  ,  $p''$  de l'objectif , qui envoieront les rayons au même point  $h$  : ainsi l'anneau , qui sera la différence des cercles des rayons  $OH$  ,  $O_h$  , recevra la lumière passée par trois anneaux de l'objectif , qui seront les différences des cercles des rayons  $AP$  ,  $AP'$  ,  $AP''$  aux cercles des rayons  $Ap$  ,  $Ap'$  ,  $Ap''$  . Les aires de ces cercles étant proportionnelles aux abscisses  $IN$  ,  $IN'$  ,  $IN''$  , ces anneaux , qui sont leurs variations , seront proportionnels aux variations de ces abscisses : les variations de celle-ci sont les mêmes que les variations des cordes  $RM$  ,  $RM'$  ,  $RM''$  égales aux parties  $RN$  ,  $RN'$  ,  $RN''$  variables des celles-là : ainsi la variation d'une de ces cordes étant égale aux deux autres prises ensemble , un de ces trois anneaux de l'objectif qui se trouve ici celui , qui répond à  $Pp$  , sera égal aux deux autres , & lui seul donnera autant de lumière à l'anneau  $Hh$  , que les deux autres .

52. Ainsi pour déterminer la quantité totale envoyée à l'anneau  $Hh$  , ce qui rendroit la recherche très-compliquée , il suffit de trouver celle , qui lui est envoyée par un seul . La densité de lumière en  $H$  ,  $h$  est proportionnelle directement à cette quantité , & réciproquement à l'aire de cet anneau , c'est-à-dire comme l'anneau de  $Pp$  divisé par l'autre de  $Hh$  : ces anneaux sont entre eux comme leur longueurs , qui sont les circonférences des cercles des rayons  $AP$  ,  $OH$  proportionnelles aux mêmes rayons ou aux lignes  $AL$  ,  $OL$  , & leurs largeurs  $Pp$  ,  $Hh$  proportionnelles aux lignes  $PT$  ,  $TH$  , ou  $AN$  ,  $NO$  . Après toutes les comparaisons des termes de ces raisons , qu'on ne peut pas suivre dans

cet

cet Extrait , on trouve à la fin les théorèmes suivants très-essentiels pour l' objet en question . *La densité de la lumière dans ce cercle est infinie au centre : elle diminue en s' en éloignant jusqu'à une distance , dont le carré est égal à la moitié du carré du rayon : après cette limite elle augmente de nouveau de manière qu' à la circonference elle redevient une autre fois infinie . Là où elle a son minimum , elle est encore bien forte étant égale à deux tiers de celle qu' il y auroit , s' il y avoit l'égalité totale par tout .*

53. Il y a dans ce Supplément plusieurs *scholium* bien intéressants même pour la Géométrie en général , mais sur-tout le dernier , où on expose en détail les longs détours , qui à la fin ont amené à cette solution si simple du problème : on y indique une méthode qui auroit pu suivre en employant un détour extraordinaire de calcul différentiel ; mais qui auroit été très-compliquée : la construction de l'équation du troisième degré à la trisection de l'arc du cercle , la propriété de la variation d'une de ses trois racines aux variations des deux autres , & quelqu'autre petit théorème de Géométrie linéaire ont réduit une recherche très-compliquée en elle même à une simplicité bien extraordinaire .

54. Dans l'*Additamentum* mis à la suite de ce Supplément il y a ce qui appartient à la distribution de la lumière par le cercle de l'erreur de réfrangibilité , où l'on démontre les théorèmes proposés sur cet objet par Newton : on fait voir que la densité infinie au centre diminue continuellement après jusqu'à la circonference , où elle s'évanouit . On fait voir par-là que l'effet de l'erreur de sphéricité a un rapport à celui de l'erreur de réfrangibilité incomparablement plus grand que celui des grandeurs des leurs cercles , par lesquels on les a comparé jusqu'à présent .

## §. V.

*Du second Opuscule qui a pour objet les effets des lentilles brûlantes.*

55. On appelle ici lentille brûlante celle qui est destinée pour le même usage que le miroir qu'on appelle ardent, & beaucoup plus proprement brûlant, & on a en vue principalement la grande lunette du Louvre, qui a quatre pieds de diamètre, qui a fait des effets étonnans: pourtant ces effets sont bornés par trois causes, qu'on développe dans cet Opuscule, & on en détermine l'étendue: ce sont, le diamètre apparent du soleil, l'erreur de sphéricité, & celle de réfrangibilité: cet objet vient à propos après l'Opuscule précédent, où on a tous les éléments relatifs. Les trois figures de la planche VI sont destinées pour ces trois objets.

56. En faisant abstraction des deux erreurs suivantes les rayons, qui étant partis du centre du soleil S (fig. 1), & des bords L, L de son diamètre passent par le centre C de la lentille, & vont jusqu'à son foyer en F, E, E y rassemblent chacun tous ces compagnons arrivés à toute la surface de la lentille: mais eux mêmes y sont séparés, & à la place de rassembler la totalité de la lumière du soleil en un point, ils la dispersent par un cercle, dont le diamètre EE est déterminé par l'angle ECE, qui exprime le diamètre apparent du soleil, & par la distance focale CF. Les rayons homogènes qui sont partis du centre du disque du soleil, qui est un seul point, sont dispersés à la fig. 2 par la surface d'un cercle du diamètre EIE, & dans la fig. 3 le foyer des rouges partis du même centre du disque étant en F, & des violets en F', il y a une dispersion par un cercle qui a pour diamètre EIE.

57. On trouve que dans une lentille, qui a 10 pieds de distance focale, le diamètre EFE (fig. 1) est en lignes = 12,98: ses 4 pieds de diamètre en y supposant  $m = 1,53$  comme on trouve à-peu-près dans beaucoup de verres communs, font (fig. 2) le diamètre EIE = 9,10: la valeur  $m = 1,60$ , qu'on trouve

ve à-peu-près dans le flint, le fait = 8,18 : les valeurs  $m = 1,60$ ,  $dm = 0,027$  pour le flint, &  $m = 1,53$ ,  $dm = 0,018$  pour le verre commun donnent (fig. 3) le diamètre EIE pour celui-là = 13, pour celui-ci = 9,78. Ce sont les valeurs pour ce cas particulier d'une si grande lentille tirées des formules générales, qu'on y trouve bien détaillées, & on peut les appliquer à tous les autres.

58. On peut remarquer premièrement, que quand il s'agit de grandes ouvertures comme ici, il y a peu de différence, même entre les diamètres des erreurs circulaires de sphéricité, & de réfrangibilité : celui-là s'est trouvé dans le verre commun 9,10, & celui-ci 9,78, avec une différence si petite : dans le flint la différence est un peu plus grande, mais bien éloignée de celle que Newton avoit trouvé dans l'exemple d'une petite ouverture : le premier y est 8,18, & le second 13 : ici il n'est pas double, tandis que là il étoit plus que cinq-mille fois plus grand.

59. La seconde chose à remarquer est que l'excès de l'erreur de réfrangibilité dans le flint sur celui pour le verre commun, qui est de 13 sur 9,78, est beaucoup plus grand que l'excès de l'autre de sphéricité pour le verre commun de 9,10 sur 8,18 pour le flint. Ainsi on voit qu'il étoit mal imaginé, ce qu'on avoit proposé, de faire la grande lentille de flint. Sa grande force dispersive fait que le flint est beaucoup moins propre pour cet objet, que le verre commun. On peut encore ajouter sa gravité spécifique tant plus forte, qui augmente trop excessivement le poids de la machine.

## §. VI.

*De l'Opuscule III, qui a pour objet les avantages d'une espèce nouvelle de lunette remplie d'eau dans son tube.*

60. La planche VII est destinée à cet objet : on fait voir dans cette Opuscule, que par son moyen on peut décider la question, si la lumière va plus vite dans un milieu plus dense, comme dans l'eau par rapport à l'air, ou plus lentement : on y voit mieux la

la nature , & les propriétés de l' aberration annuelle des étoiles fixes , & on doit voir un mouvement apparent journalier petit , mais bien sensible dans tous les objets terrestres regardés par une lunette de cette espèce .

61. La fig. 1. exprime deux petites lames DF , HK percées par deux petits trous M , N , & unies par une règle AB parallèle à la ligne MN , à l' usage des dioptres des anciens instruments d' Astronomie . Si l' on tourne cette règle vers un point d' objet dans la direction du rayon RM , qui arrive au premier trou , & qu' on conçoive la terre immobile avec l' instrument , le rayon entré en M passera par N , & frapperà l' œil appliqué à ce trou : mais si le mouvement de la terre transporte l' instrument dans la direction AA' avec une vîtesse , qui ait un rapport sensible à celle de la lumière , le rayon ne trouvant plus le trou transporté en N' ne pourra pas sortir & frapper l' œil . Pour le faire sortir il faut incliner la règle comme à la fig. 2. dans le plan MN'N de manière que la raison des lignes MN' , NN' soit celle de la vîtesse de la lumière à la vîtesse de la terre , & tandis que la direction du rayon visuel est MN' , la direction apparente de l' objet marquée par la règle dans les divisions de l' instrument astronomique sera N'M' , l' aberration est l' angle MN'M' qui se trouve dans la direction du mouvement de la terre , & dont le sinus est au sinus de l' angle N'M'M que la direction N'M' de sa position apparente fait avec MM' direction du mouvement de la terre , comme MM' est à N'M' , c' est-à-dire comme la vîtesse de la terre est à la vîtesse de la lumière .

62. C' est la plus simple & naturelle idée de l' aberration de la lumière conforme à celle que s' en étoit formée le grand , & heureux Astronome Bradley , qui l' a découverte : elle ne dépend point de la théorie de la vision , ni de toutes les contestations sur la manière de l' impression que l' œil en mouvement reçoive de l' impulsion du rayon : elle dépend uniquement du rapport de la vîtesse du mouvement de la terre à la vîtesse que la lumière a dans l' intervalle entre les deux trous . On le voit encore mieux dans les dioptres télescopiques , où le centre de l' objectif succède au

pre-

premier trou  $M$ , & l'intersection des fils du micromètre au second. Ceux-ci interceptent le rayon de manière qu'il n'arrive pas à l'œil, qui n'en reçoit aucun impression. Tout dépend de l'inclinaison qu'il faut donner à l'alidade qui porte la lunette, & marque dans les divisions de l'instrument la direction qu'on prend pour l'apparente, pour amener le rayon à l'intersection des fils, qui doivent cacher l'objet, & cette inclinaison nécessaire pour cet effet dépend du seul rapport de ces deux vitesses. Le temps que la lumière emploie pour aller du premier trou au second est immensément petit, & presque momentané, puisqu'elle n'emploie qu'un demi-quart d'heure pour parcourir tant de millions de lieues qu'il y a du soleil à la terre. Mais cela n'empêche pas, que le rapport de la vitesse du mouvement de la terre à celle de la lumière soit sensible. Celui du mouvement annuel est tel, que quand l'angle de la direction apparente de l'objet est perpendiculaire à celle de ce mouvement de la terre, l'aberration se trouve de  $20''$ , ce qui est d'accord avec la vitesse de la lumière, qu'on avoit déjà tiré des éclipses des satellites de Jupiter qu'on voit plus-tôt ou plus-tard, selon que la terre se trouve plus près ou plus loin de cette planète. Le mouvement diurne n'arrive à faire qu'un tiers de seconde d'aberration, qui n'est pas sensible. L'autre à cause du changement continu en tout sens, qui arrive à la direction de la tangente de l'orbe annuel de la terre, & de la vitesse presque tout-à-fait constante de son mouvement forme un mouvement apparent de toute étoile fixe, comme si réellement il se faisoit dans un petit cercle parallèle à l'écliptique, qui dans sa projection sur la surface de la sphère céleste devient une ellipse qu'on voit à la fig. 8 en  $GLG'L'$  dont le grand axe  $GG'$  est de 40 secondes, & le petit  $LL'$  est au même en raison des sinus de la latitude  $EF$  de la fixe au rayon.

63. On voit clairement par cette théorie, que si la vitesse de la lumière dans l'intervalle entre l'objectif & le foyer, où se forme l'image de l'objet, qui est le lieu du micromètre, est augmentée ou diminuée, l'inclinaison de la position de la lunette, c'est-

c'est-à-dire l'aberration sera au contraire plus petite , ou plus grande en la même raison indépendamment de la théorie sur la direction de l'impression de la lumière dans l'œil , & si l'augmentation ou diminution de cette vitesse est sensible , sera sensible son effet malgré la presqu'instantanéité du mouvement de la lumière dans l'intérieur du tube de la lunette . Selon Newton la vitesse de la lumière dans l'eau est à la vitesse dans l'air comme 4 à 3 : ainsi le mouvement total , qui dans l'intervalle de six mois par les deux aberrations en sens contraires dans le cas de la position perpendiculaire de la direction apparente de l'objet par rapport à celle du mouvement annuel de la terre doit être de 40" quand on l'observe avec une lunette ordinaire , qui a l'air dans le tube , doit devenir de 30" , si l'on fait l'observation avec une lunette remplie d'eau .

64. On ne peut pas déterminer avec exactitude l'effet de l'aberration par observation immédiate que dans la différence en déclinaison par la distance au zenith : pour l'avoir total il faut attendre six mois , & il faut faire des réductions par des autres mouvements des étoiles fixes , la précession des équinoxes , & la nutation : il faut encore avoir égard au changement de la réfraction : on évite ce changement , si l'on emploie des étoiles peu éloignées du zenith , où encore on peut déterminer beaucoup plus exactement les distances au zenith par des secteurs à grand rayon , ce qui a été pratiqué par Bradley , qui par ce moyen a fait cette grande découverte : alors on ne peut pas avoir l'effet entier de 40" beaucoup au deçà du cercle polaire : mais dans la plus grande partie de l'Europe on peut avoir 36 , & même 38 , & on développe tout cela à la fig. 9 d'après la théorie des aberrations exposée à la fig. 8 , en déterminant les fixes propres pour cet objet : on y détermine la courbe PFP' terminée aux deux pôles P , P' de l'écliptique , & de l'équateur qui passe par les points , où l'angle PFP' est droit , & les étoiles qui s'y rencontrent peuvent avoir l'aberration en déclinaison de 40" . Dans une surface plane ce sera un cercle , dans la surface sphérique c'est une courbe à double courbure , & on donne l'équation à l'autre MNS ,

qui

qui est sa projection sur le plan de l'écliptique : mais il suffit bien l'effet de 36" pour avoir très-sensible la diminution de 9", qu'on doit avoir dans la théorie de Newton , & beaucoup plus encore la différence entre les deux théories de la vitesse augmentée dans l'eau , ou diminuée , en ajoutant à la diminution de la première l'augmentation de la seconde .

65. Pourtant pour voir cette différence entière par la méthode ordinaire on devroit attendre six mois , & faire les réductions relatives aux autres mouvements : mais ici on donne la manière de déterminer dans deux nuits consécutives , & peut-être dans une même immédiatement la différence de l'aberration produite par deux lunettes , une ordinaire remplie d'air dans le tube , & l'autre remplie d'eau . Il suffit de les appliquer toutes les deux ensemble à un même secteur de la fig. 3 en AB & AB'. Ce secteur est pareil à celui , qui a été employé pour la mesure du degré de Méridien dans l'État Ecclésiastique , dont on a la description dans l'ouvrage latin de *Expeditione litteraria per Pontificiam Ditionem* , réimprimé à Paris en françois avec le titre *Voyage Astronomique , & Géographique* . La ligne droite KK' au milieu de la règle GFF'G' poussée en avant , en arrière par la vis L donne par ses divisions les tangentes OI des distances apparentes ZCS au zenith sans aucun besoin de mouvement micrométrique intérieur , où il n'y a que deux fils qui se croisent à angles droits . En tournant l'instrument le fil à plomb marquera du côté opposé la tangente OI' , & par la ligne droite II' on aura le double de la distance apparente au zenith . Cette distance sera la vraie augmentée ou diminuée de l'aberration : ainsi ne sachant pas ni la vraie distance au zenith , ni le total de l'une , & de l'autre aberration , par la seule différence de la ligne II' qui répondra aux observations faites par les deux lunettes marquée par l'index du micromètre extérieur on aura cette différence , qui dans une fixe bien choisie pour sa position , & le temps de l'année la donnera dans la théorie de Newton au moins de 9" très-sensible , malgré la presqu'instantanéité du mouvement de la lumière dans le tube .

## EXTRAIT

66. Il n'y a qu'à voir comment on peut faire une lunette, qui ait de l'eau dans le tube. On le voit à la fig. 4, où au lieu de l'image il y a une plaque de verre plane, qui peut avoir des lignes droites à l'usage de micromètre, ou avoir un micromètre filaire adossé par-dessous : l'eau sera renfermée entre l'objectif  $CC'$  & cette plaque, & pour ne pas laisser aucun vide entre l'eau & la surface intérieure de l'objectif, ce qui gâteroit tout, & pour empêcher tout l'effet de la dilatation de l'eau par la chaleur, il suffit d'avoir la communication de l'intérieur du tube avec un petit récipient  $ML'$  par le canal  $HIK$  : la surface de l'eau  $NN'$  s'élevera & baissera en tenant toujours l'eau en contact complet avec l'objectif. En passant du verre à l'eau la réfraction sera plus petite, qu'en passant à l'air, ainsi la distance du foyer sera diminuée d'une quantité, qui dépendra de la qualité du verre, & de la courbure de la surface qui touche l'eau. On en fait la recherche à la fig. 5. On y démontre que si la lentille est isocèle & la valeur  $m$  pour le passage de l'air à ce verre  $= \frac{3}{2}$ , & de l'air à l'eau  $= \frac{4}{3}$ , le foyer de  $Q'$  ira en  $Q$ , la distance  $SQ'$  devenant double de  $SQ$  : ainsi un objectif isocèle de 4 pieds deviendra d'huit. On y fait voir les inconvénients qu'on auroit, si l'eau n'arrivoit pas jusqu'à l'objectif, la surface horizontale  $RR'$  dans la position oblique du tube détournant le foyer en  $Q''$ . On cherche, si dans le cas du remplissage entier on peut rendre la lunette acromatique par les deux passages de l'air au verre dans la première surface, du verre à l'eau dans la seconde : on trouve, que non, si c'est un verre commun, qu'on n'auroit rien de satisfaisant, si cela étoit du flint, & même du strass : mais on s'aperçoit, qu'on peut se servir d'un objectif déjà acromatique en y laissant sa distance focale la même & son acromatisme par l'addition d'un autre verre convexo-concave, qui auroit le rayon de sphéricité égal à la distance focale du même objectif, & celui de la seconde diminué seulement de l'épaisseur du même verre, ainsi presque le même. Alors tous les rayons passeroient par les deux surfaces de ce verre, sans aucune réfraction, & iroient

iroient au même foyer comme s'il n'y avoit ni ce verre ni l'eau.

67. Comme il est nécessaire, que l' image tombe exactement sur les lignes tracées sur le verre plan DD' ou sur les fils du micromètre adossé , on avoit imaginé de placer l' objectif QQ' à la fig. 6 dans un tube séparé PQQ'P' qui entreroit dans un autre ABB'A' : en le poussant en avant en arrière , on feroit aller l' image à sa place , & on ôteroit par-là celle qu' on appelle parallaxe de l' œil . On avoit besoin de cela pour le passage immédiat de l' objectif à l' eau , où l' allongement du foyer dépendoit de la qualité du verre , de la courbure exacte de la dernière surface , & même de la qualité de l' eau : mais dans le cas de ce verre convexo-concave il n' y a besoin de cela , que pour le cas de quelque petit défaut dans les rayons de sphéricité de ce verre , qui sans changer sensiblement l' acromatisme changeroit la distance du foyer avec un peu de parallaxe de l' œil , qu' on corrigeroit par le mouvement de ce tube . Il faudra bien avoir le tube inférieur EFF'E' pour approcher l' oculaire GG' de la plaque DD' , ou l' en éloigner selon la différente constitution de l' œil .

68. A la fig. 7 on fait la recherche du changement qu' il y aura dans le grossissement produit par le passage de l' eau à l' air en traversant la plaque DD' , qui ne change point , comme on le démontre , ce qu' on auroit , s' il y avoit le passage immédiat . On trouve qu' à parité d' oculaire le grossissement qu' on aura ici sera à celui qu' on auroit en l' air par un objectif de la distance focale SQ' comme 4 à 3 , & à celui qui est employé ici en l' employant dans une lunette ordinaire , comme 2 à 3 . Par conséquent quand on emploie le verre convexo-concave , qui ne change pas la distance du foyer , il y aura la diminution du grossissement en raison de 4 à 3 : mais en changeant l' oculaire on pourra avoir le grossissement qu' on veut .

69. Tout cela étoit achevé , quand on s' est aperçu d' un objet le plus intéressant relatif aux observations à faire par cette espèce de lunette , & on y a ajouté le §. 4 sur l' aberration qu' elle doit produire en regardant des objets mobiles . Il y a deux aberrations produites par le mouvement progressif de la lumiè-

re , celle de l' inclinaison du tube à la direction du rayon qu' on a expliqué d' abord , & l' autre du mouvement de l' objet même dans le temps que la lumière emploie depuis son départ jusqu' à son arrivée à l' œil , qui fait que l' objet ne se trouve pas , quand on le voit , là où il étoit , quand la lumière en est partie . Or on trouve que ces deux aberrations se détruisent l' une l' autre , quand on regarde cet objet par une lunette remplie d' air , la première étant corrigée par la seconde : mais quand on emploie la lunette remplie d' eau , elle n' en est pas assez corrigée , si la vîtesse dans l' eau est plus grande , que dans l' air , & elle en est plus que corrigée y ayant encore un reste de son effet dans l' hypothèse contraire de la vîtesse diminuée dans l' eau .

70. Soient (fig. 2)  $R, r, R'$  les rencontres des lignes  $N'M, NM, N'M'$  avec la ligne parcourue par l' objet  $R$  attaché à la terre , qui doit être parallèle aux lignes  $MM', NN',$  & sa partie  $rR'$  doit être égale à celles-ci . La vîtesse de la lumière par l' air hors du tube , & dans son intérieur étant la même , dans le temps que les points  $M, N$  se sont avancés par les lignes égales  $MM', NN'$  l' objet  $R$  aura parcouru  $rR'$  après avoir passé par  $Rr$  dans le temps que la lumière aura employé par  $RM,$  puisque les lignes parcourues avec les deux vîtesses , celle de la terre & l' autre de la lumière continuée la même dans l' air , doivent être proportionnelles au temps , & les lignes  $RM, MN', Rr, rR'$  sont proportionnelles à cause du parallélisme des lignes  $Mr, NMR'$  . Ainsi l' objet au moment qu' on le voit du point  $N'$  se trouvera réellement dans la direction apparente  $N'M'$  . Mais si la vîtesse de la lumière est augmentée dans l' intervalle  $MN',$  le temps sera diminué , & le trou  $M$  ne sera pas arrivé en  $M'$  , mais à un point  $m$  par un intervalle  $Mm$  , qui sera plus petit , ou plus grand que l' autre  $MM'$  en raison inverse de la vîtesse dans l' air à celle dans l' eau , & la direction apparente sera  $N'm,$  l' aberration sera l' angle  $M'N'm$  différence de la direction vraie  $N'R'$  , & de la apparente , qui sera  $N'm$  , parcequ' en faisant  $nN' = Mm$  il faudra incliner la règle dans la direction des points  $nM$  pour voir l' objet

jet par le trou  $N'$ , qui alors ira de  $n$  en  $N'$ , tandis que  $M$  n'aura parcouru que  $Mm$ , & la ligne  $NM$ , qui sera devenue  $nM$  parallèle à la  $Nm$  sera la direction apparente. Cette différence sera à l'aberration précédente comme l'angle  $M'N'm$  est à l'angle  $M'NM$ , c'est-à-dire sensiblement comme  $M'M$  à  $M'm$ , ou dans la théorie de Newton, dont nous parlerons dorénavant, comme 1 à 4. Elle se fera dans le même plan de la précédente, mais du côté opposé, tandis que dans la supposition de la vitesse diminuée elle se feroit du même côté de la précédente : elle se fera dans le plan qui passe par l'axe de la lunette, & par la direction du mouvement de la terre, qui a la direction parallèle à la tangente de l'orbe annuel.

71. Quand la direction de la lunette sera parallèle à cette tangente l'aberration sera nulle, mais ce ne sera que dans un instant : le mouvement diurne de la terre, qui dans un jour change très-peu la direction du mouvement annuel de la terre, changera beaucoup celle de la position de la lunette, & en formant & augmentant l'angle de ces deux lignes fera naître, & augmentera l'aberration. Ce changement formera un mouvement apparent. Si l'on transporte le mouvement diurne au ciel, en concevant la lunette immobile, comme on fait dans la Gnomonique, où l'on conçoit immobile le style du quadrant solaire, c'est la direction de la tangente de l'orbe annuel, c'est-à-dire le rayon de la sphère dirigé au point de l'écliptique éloigné de trois signes vers l'Orient par rapport au lieu de la terre vue du soleil, & par conséquent vers l'Occident du lieu du soleil vu de la terre énoncé dans les éphémérides, qui fera son tour autour de l'axe de la terre, en décrivant un plan dans les solstices, où ce rayon se trouve dirigé vers un des deux points équinoxiaux & fait avec l'axe de l'équateur un angle droit, & dans les autres jours de l'année une surface conique, en faisant avec l'axe un angle mesuré par le complément de la déclinaison.

72. On voit bien que si l'axe de la lunette est parallèle à l'axe de l'équateur, son angle avec ce rayon sera sensiblement constant dans cette journée avec l'aberration, qui sera aussi con-

stan-

stante, & on aura le mouvement apparent circulaire, qui dans un micromètre réticulaire pratiqué ou imaginé dans le lieu de l'image se fera pour le point de l'objet, qui répond à l'axe de la lunette, autour du centre du champ, & aura pour rayon dans les solstices  $5''$ , & dans les équinoxes, où il sera le plus petit,  $4'', 58$  qui répond au cosinus de  $23^{\circ} 28'$ : ainsi le diamètre du cercle dans les solstices sera de  $10''$ , dans les équinoxes un peu au de-là de  $9''$ . Pour les autres positions de l'axe de la lunette on détermine la ligne de ce mouvement apparent dans la même figure 9, qui a servi pour l'autre précédent pour ne pas multiplier les figures: ainsi il faudra forcer un peu l'imagination pour la faire servir ici. Le point  $P'$  seul y reste pour le pôle de l'équateur comme auparavant: mais le cercle ABCD y est le parallèle décrit par le point E, qui est le point de l'écliptique éloigné du lieu du soleil de trois signes, c'est-à-dire celui qui répond à la direction du mouvement annuel de la terre, P le point qui répond à l'axe de la lunette, O'P'PO le cercle horaire qui passe par le point P placé entre  $P'$  & O'.

73. Si l'on fait  $\alpha = 5''$ , & qu'on prenne de P vers O'un petit arc  $PQ = \alpha \sin.PO$ , & vers O un autre  $PR = \alpha \sin.PO'$ , le lieu apparent se trouvera en Q, quand le point E sera en O, & en R, quand celui-là sera en O': ces arcs seront égaux dans les solstices, parcequ'alors le cercle ABCE sera l'équateur, & les arcs  $PO'$ ,  $PQ$  l'un supplément de l'autre auront les sinus égaux, dans les autres jours de l'année le point P ne tombera pas au milieu de l'arc QR. Si pour un autre point E quelconque du cercle ABCD on conçoit un arc de grand cercle EPE', qui passe par P, & qu'on prenne vers E' le petit arc  $PK = \alpha \sin.PE$ , le point K sera le lieu apparent. On fait voir dans l'Opuscule comme on peut trouver l'arc  $PP'$ , qui mesure l'inclinaison de l'axe de la lunette à celui de l'équateur, & la distance au méridien du point E' du cercle horaire dans le parallèle ABCD, & par-là l'heure de l'arrivée du point E en O, & K en R, & l'angle  $OP'E$  pour une autre heure quelconque: ainsi dans le triangle  $PP'E$  on sait l'arc  $PP'$  trouvé, l'arc  $P'E$  complément de la déclinaison que

le soleil aura après trois mois , & l'angle en  $P'$ , ce qui donnera l'arc  $PE$ , avec son sinus, qui multiplié par  $5''$  donnera l'arc  $PK$ , & l'angle  $P'PE = KPR$ , qui en donnera la position par rapport à l'arc  $PR$ . De-là on tirera la construction de la courbe, & le point du lieu apparent pour toute heure donnée. En considérant cette petite partie de la surface sphérique comme un plan, on prendra sur une ligne droite tirée sur le papier de l'un & de l'autre la valeur des deux arcs  $PR$ ,  $PQ$  en dixièmes de seconde tirée d'une ligne aussi grande que l'on voudra divisée en 50 parties, & à chaqu'angle  $RPK$  trouvé par cette heure on tirera une ligne droite, & on y prendra la valeur trouvée pour  $PK$  réduite en secondes. On aura ainsi pour une heure quelconque la quantité de l'aberration , & sa direction en dixièmes de seconde.

74. Mais on a cherché dans l'Opuscule la nature de cette courbe par son équation , & on l'a déterminée au num. 95 pour les jours des solstices par un calcul très-simple , & en la trouvant une ellipse, dont  $P$  est le centre ,  $RQ$  le petit axe , qui devient égal au grand, quand le point  $P$  va en  $P'$ , comme il devoit, la courbe alors devenant un cercle . Dans la note du num. 96 on donne deux équations , qui outre l'abscisse  $PL = x$  & l'ordonnée  $LK = y$  ont encore la  $PK = z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$  , d'où l'on peut tirer par les méthodes connues l'équation en  $x$  &  $y$  . On y voit, que cette équation doit être bien haute comme on pouvoit s'y attendre, le point  $P$  n'étant pas au milieu de l'arc  $RQ$ , qui est son axe : mais il est inutile de la chercher , quand par la construction qu'on a donnée , qui est si simple , on peut avoir les aberrations à un dixième de seconde , & si l'on veut même à un centième. Ce qu'on tire de ce calcul au num. 97 par une méthode très-simple est , que la plus grande ordonnée  $LK$  est généralement ici comme dans le cas de l'ellipse  $= 5'' \times \sin.PE$  , & son double , qui est la longueur totale,  $= 10'' \times \cos.\text{decl.}E$  : le petit axe  $RQ$  est à cette longueur , qui dans l'ellipse est son grand axe , en raison du cosinus de l'arc  $PP'$  au rayon.

75. Par-là on a toujours la même longueur , qui donnera dans les solstices un mouvement de  $10''$  , & dans tout le reste de l'année

plus

plus de 9°, ce qui est si sensible, & si l'on trouve plus ou moins, on verra quelle est la vitesse que la lumière a dans l'eau par rapport à celle qu'elle a dans l'air. L'axe RQ, qui est la largeur, sera d'autant plus petit, que l'inclinaison des deux axes mesurée par l'arc PP' s'éloignera plus de l'angle droit, & dans la position de la lunette perpendiculaire à l'axe de l'équateur cet axe s'évanouira, le périmètre de l'ellipse se changeant en ligne droite double : si dans le reste de l'année l'irrégularité de la courbe produit quelqu'écart de la ligne droite avec tout l'évanouissement de l'axe RQ, il ne pourra être que très-petit, à pouvoir prendre ce périmètre alors aussi pour une ligne droite.

76. Ainsi on aura tous les jours le moyen de faire une observation si facile, quand on aura une lunette d'un grand grossissement avec un bon micromètre à vis, ou réticulaire, & on pourra décider une question de physique si intéressante : on pourra choisir un petit objet terrestre bien illuminé, comme un petit cercle blanc sur un fond noir placé à une petite distance sans craindre les nuages ni les variations de la réfraction, en plaçant la lunette sur un appui bien ferme, ou si l'on craint quelque mouvement de cet appui avec toute la maison en y plaçant à côté une autre lunette ordinaire, qui indique ce mouvement pour en tenir compte, & savoir l'effet de l'eau par la différence des mouvements qu'on aura trouvé.

### §. VII.

#### *De l'Opuscule IV. Sur une nouvelle espèce de micromètre objectif.*

77. CET Opuscule commence par une préface latine, où il y a un récit abrégé de ce qui est arrivé à Paris à l'occasion d'un Mémoire que j'ai présenté l'année 1777 à M. de Sartine, qui étoit alors Ministre de Marine, sur un nouveau Micromètre & Mégamètre objectif, qui a excité des grandes contestations dans le temps, dont j'ai parlé avec tout le ménagement possible, & seulement je m'étois

m'étois borné à la narration très-fidelle, mais abrégée des faits principaux. Après cette préface il y a ce Mémoire en françois avec un autre que j'y avois promis, & que je fis d'abord, où il y a toute la théorie de cet instrument, & la description de la machine pour le monter. Quand ce volume étoit déjà préparé & donné aux Imprimeurs, on m'a annoncé qu'il y avoit un ouvrage de M. l'Abbé Rochon sur cet objet: mais ici à Bassano il n'y en avoit aucun exemplaire, ce que j'ai dit à la fin de la même préface, en y ajoutant que quand j'aurois pû le voir, je donnerois des éclaircissements, si je les croyois nécessaires pour le bien de la chose sans des récriminations relatives à ce qui me regarderoit personnellement. Cet Opuscule étoit déjà imprimé, lorsque cet ouvrage m'est arrivé. J'ai vu que pourtant il y avoit une nécessité absolue de donner des éclaircissements tant sur la narration de ce qui me regarde pour le fait, que sur des points qui appartiennent à la nature de mes instruments mal attaqués dans le même ouvrage. Mais il faut qu'auparavant je donne ici au moins une légère idée de mon instrument pour le micromètre objectif qui se trouve dans cet Opuscule. Les Mémoires sont si courts, qu'on peut aisément les lire en entier. D'ailleurs ils sont écrits en françois, ce qui rend moins nécessaire leur extrait parmi ceux qu'on fait dans ces volumes en cette langue, principalement pour ceux qui n'aiment en France ce qui est écrit en d'autres langues, & qui ont particulièrement aujourd'hui abandonné le latin.

78. Soit (fig. 1 planche VIII) DEF un objectif, BAC un prisme placé hors de la lunette de manière à ne pas couvrir toute l'ouverture du même objectif. Les rayons partis d'un point éloigné d'un objet placé dans la continuation de l'axe de la lunette prolongé en EL, qui passeront hors de ce prisme en tombant sur la partie découverte de l'objectif, iront en former l'image dans le foyer H placé sur l'axe: mais ceux qui tomberont sur le prisme, comme LMN en seront détournés par des lignes inclinées à l'axe en un angle déterminé par celui du prisme, & par la qualité de sa matière. Si l'on conçoit la

ligne HEK, tous ces rayons arriveront à l'objectif parallélement à cette ligne, & par conséquent iront former une seconde image de cet objet en K dans le même point qui recevra l'image du point de l'objet éloigné de même qui se trouve dans la continuation de la ligne EL éloigné de celui de l'axe par l'angle visuel  $\text{LEL}' = \text{HEK}$  égal à l'angle ENO qui répond à la force du prisme.

79. L'approche ou l'éloignement de ce prisme ne changera point l'angle ENO : ainsi il ne changera point le lieu de la seconde image K du point placé dans la direction de l'axe EL, ni de l'autre point placé dans la direction EL', dont l'image est réunie à celle de l'autre. Pour faire changer la seconde image K du point de l'axe & faire convenir celle-ci successivement à des images de différents points de l'objet, il n'y a que ces deux moyens, ou de changer l'angle A du prisme, ou de placer le prisme dans l'intérieur du tube en BAC', & le faire approcher du foyer H. Pour le premier objet j'ai suivi la méthode ingénieuse de M. l'Abbé Rochon, comme je lui ai rendu justice dans le premier des deux Mémoires de cet Opuscule, de former deux, qu'on peut bien appeler prismes à bases circulaires, puisqu'ils font le même effet, & que si l'on prend sur une des deux surfaces, qui forment un prisme, une base circulaire, & qu'on coupe le reste, on a cette figure. En faisant tourner un de ces deux prismes sur l'autre, on aura un angle formé par l'inclinaison de la première surface avec la troisième qui sera variable depuis la différence jusqu'à la somme de leur deux angles, ainsi, si ces angles sont égaux, depuis zero jusqu'au double d'un seul. J'ai donné dans la figure 4 la manière de le monter. Ils y sont placés en ONPQ dans un double anneau dont un est attaché à un des deux autres anneaux plus grands ABCD, IKLM, qui entourent le tube de la lunette, & celui-ci a un cercle plus grand EFGH, l'autre de ces deux premiers anneaux est attaché à l'autre prisme, qui doit tourner sur le premier, & à l'autre des deux anneaux contigus au tube de la lunette, & amener avec lui un nonius en G, ou encore un autre en

en E pour plus de sûreté. Ce second anneau sert pour varier l'angle en tournant autour du premier, & le premier pour faire tourner toute la machine autour du tube, & faire aller les deux images dans cette direction qu'on veut, comme il y a deux mouvements pareils dans le micromètre objectif ordinaire. J'ai donné aux figures 5, 6, 7 la solution du problème que j'avois promis de même dans ce premier Mémoire, où on a la quantité de l'angle du prisme composé par les angles des composants, & par leur position mutuelle, puisque son changement est bien éloigné de la proportionalité avec le mouvement circulaire du nonius: mais je n'ai pas manqué de faire remarquer qu'on n'aura jamais une mesure exacte par ce moyen: il faut déterminer la valeur des angles qui répondront aux divisions marquées par le nonius à l'aide des observations terrestres.

80. Pour le mouvement intérieur du prisme B'AC' (fig. 1) j'en ai donné la théorie, qui est pareille au second moyen employé aussi par M. l'Abbé Rochon dans sa seconde espèce de micromètre, dont j'ai parlé encore dans le premier Mémoire en lui laissant tout l'honneur de la primauté de la découverte, quoique j'avois des raisons, comme j'ai indiqué après les contestations dans le second Mémoire, de croire de l'avoir imaginé avant lui, & de soupçonner, qu'on lui avoit communiqué mon idée. J'y ai ajouté la difficulté qui se rencontre en éloignant trop ce prisme de l'objectif; parceque les rayons DH, FH, qui étant tombés aux bords D, F de l'objectif vont au foyer H, s'approchent entre eux, & le prisme restant toujours de la même grandeur, l'espace SB', A'V, qui laisse le passage libre aux rayons hors du prisme, se rétrécit, & leur image devient toujours plus foible jusqu'à ce qu'à la fin elle s'évanouit. Je trouve le remède à ce défaut par le moyen de deux anneaux de la figure 2 & 3, où les petits cylindres du second entrent dans les trous du premier. Ces trous étant numérotés on doit trouver la valeur de chaque position par les observations terrestres pour avoir les intermédiaires par un petit mouvement intérieur de l'autre prisme en avant en arrière. J'y ai ajouté la méthode de mesurer les grands angles

à l'aide de plusieurs binaires de prismes, dont un donnera les degrés, le second les minutes, le troisième les secondes, & encore les fractions des secondes, comme les différentes aiguilles donnent dans les montres ou pendules les heures, les minutes, & les secondes. On trouve tout cela beaucoup mieux détaillé dans le second Mémoire.

81. Pour ce qui appartient à l'ouvrage de M. l'Abbé Rochon je commencerai par une faute matérielle, qui s'est glissée dans la copie du texte de mon premier Mémoire, qui lui a servi dans l'impression qu'il en a donné, & comme on en a tiré plusieurs l'une de l'autre, elle se trouvera peut-être dans d'autres. Voici mon texte dans l'impression qui déjà avoit été faite ici avant que son ouvrage m'est arrivé avec cette faute, qui, comme je vois, a produit de l'embarras. Après avoir parlé du micromètre formé par le mouvement intérieur du cristal de roche le long de l'axe du tube j'ai dit : *Mais M. l'Ab. Rochon n'a employé pour son micromètre que la double réfraction du cristal de roche, & on m'a assuré, qu'il a dit, que son prisme ne pouvoit lui donner, que jusqu'à six minutes.* L'exemplaire imprimé dans son ouvrage met 6 degrés. On pourroit croire qu'il y a là une contradiction, parceque je dis que M. l'Ab. Rochon n'a employé que la double réfraction du cristal de roche, tandis que je ne pouvois pas ignorer que la petitesse de l'angle formé des deux réfractions du cristal de roche ne pouvoit pas donner 6 degrés. Quelqu'un encore au premier coup d'œil pourra tirer de-là, qu'alors je savois déjà, que M. l'Ab. Rochon avoit employé aussi les prismes de verre simple pour la mesure des angles. Mais l'on voit clairement, que je ne parlois que de son prisme de cristal de roche. On m'avoit assuré, qu'il avoit dit que son prisme ne pouvoit lui donner que jusqu'à 6 minutes, & je savois bien, que l'angle de la double réfraction du cristal de roche donne des angles toujours petits, mais différents de manière que quand les deux surfaces réfringentes sont également inclinées à l'axe de la forme naturelle hexagone de ces cristaux, cet angle s'évanouit. Il n'y avoit rien d'extraordinaire dans ce rapport. Tout l'embarras vient

vient de cette substitution fautive des degrés aux minutes. On peut voir dans mon Opuscule 7 de ce volume-ci, combien des faux raisonnements faits par M. Fontainelle dans les monuments de l'Académie & par d'autres après lui ont été produits par une faute matérielle de même, qui s'est glissée dans une observation de M. Bouguer, où voyant les secondes substituées aux minutes on a cru de découvrir un saut subit dans les réfractions horizontales en passant de l'élevation sur l'horizon à la dépression au-dessous. Cette faute matérielle a fait faire tant de distinctions entre les réfractions célestes & terrestres, qui pourtant appartiennent à une même courbe continuée à travers de toute l'atmosphère pour les unes & les autres.

82. Au reste lorsque j'ai fait mon Mémoire je n'avois rien vu parmi ce qui avoit été publié comme donné par lui à l'Académie appartenant à la mesure des angles sans l'usage du cristal de roche. Il y avoit dans un autre de ses ouvrages, que je n'ai vu qu'après toutes ces contestations, l'emploi du prisme à verre simple, mais d'une manière bien différente de la mienne, & point du-tout susceptible de l'exactitude requise dans un micromètre : je vois à présent qu'il avoit lu quelque chose d'analogue à la séance publique de l'Académie dans le temps que je mettois au net mon Mémoire à présenter au Ministre ; mais je n'avois pas assisté à cette lecture, m'étant déjà absenté de toutes les séances, même des hebdomadières, de ce corps très-respectable, dont j'étois déjà un de plus anciens Correspondants, & pour lequel j'ai tout le respect, à cause des désagréments extraordinaires que plusieurs de ses membres remplis de l'esprit soi-disant philosophique se sont empressés de me donner tout de suite après mon établissement en France, où j'avois été fixé par les Bienfaits du Roi d'une manière bien flatteuse, & par la protection des Ministres continuée toujours, même au milieu de tous les changements arrivés dans l'un & l'autre Regne. Mais ce qu'on lit au milieu du grand bruit des assemblées publiques frappe bien peu, & s'échappe. D'ailleurs cela aussi qu'il a proposé alors est si peu susceptible de l'exactitude susdite, & il est si différent de ce que j'ai détaillé

taillé dans mon Mémoire , que le même Ab. Fontana , dont je parlerois d'abord , & M. de La-Lande , aux quels je le fis voir avant de le présenter au Ministre , l'ayant examiné me l'approuverent positivement , sans y appercevoir la moindre chose dans tout le récit des faits , qui auroit eu besoin de changement . C'est M. de La-Lande mon ancien Ami , qui en ayant reçu de moi une copie jugea à propos de le lire à l'Académie , quand j'étois déjà à la Campagne , tant il est vrai qu'il n'y voyoit rien de contraire à ce qu'il connoissoit des découvertes de M. l'Ab. Rochon .

83. Mais bien avant ce temps-là j'avois communiqué mes idées sur ces objets à plusieurs de mes Amis , & j'en avois écrit particulièrement en Italie . C'est pour cela que dans le Journal de Pise en donnant la version du texte de l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris du Volume imprimé l'an 1780 pour les Mémoires du 1777 sur les découvertes de M. l'Ab. Rochon ajoute cette note marginale : *Il Signor Ab. Boscovich aveva anche prima di quel tempo imaginato strumenti simili , e noi ne avevamo fin' allora delle sicure notizie .* J'avois aussi communiqué à M. l'Abbé Fontana mes idées pour rendre incomparablement meilleur l'usage des prismes tant par le mouvement rectiligne d'un seul de cristal de roche dans l'intérieur du tube avec toute sa théorie pour en avoir une échelle , que par l'emploi du verre simple pour des prismes qui couvriraient une seule moitié de l'objectif , & cela tant avec le mouvement circulaire en dehors , que avec le rectiligne en dedans : je lui avois communiqué tout cela , quand encore il n'avoit rien entendu d'aucune part sur cet objet que le seul mouvement circulaire extérieur des deux prismes de cristal de roche . La conversation avec M. Turgot , dont il parle dans son certificat imprimé par M. l'Ab. Rochon , a été postérieure à mes entretiens avec lui sur les mêmes objets . C'est son ami que j'ai indiqué dans mon Mémoire sans le nommer . Je le trouvai en allant ce jour-là chez-lui : il se retira peu après , & alors M. l'Ab. Fontana me dit , que M. Turgot venoit de lui donner comme une nouvelle toute récente , que M. l'Ab. Rochon avoit aussi imaginé le mouvement intérieur de son prisme , & qu'il alloit le com-

muniquer à l'Académie à la première séance. Je lui dis, mais pourtant vous pouviez ajouter, que je vous avois déjà fait voir la théorie de ce mouvement. Je le vis un peu embarrassé : il me répondit à la fin, qu'il n'avoit pas voulu paroître de donner trop à l'amitié pour moi. Tout cela se passa avant toute contestation : pourtant dans le certificat qu'il a donné quelque temps après à M. l'Ab. Rochon en parlant de ce qui s'étoit passé ce jour-là, après avoir exposé comme M. Turgot lui avoit dit que M. l'Ab. Rochon lui avoit communiqué une lunette avec ce mouvement intérieur, il ajoute : *Ayant eu occasion par la suite de parler des découvertes physiques avec M. l'Ab. Boscovich, je lui communiquai celles de M. l'Ab. Rochon, comme étant déjà très-connues à Paris. M. l'Ab. Boscovich me dit qu'il avoit eu des idées analogues à celles-là, & que M. de La-Lande lui avoit déjà parlé des découvertes de M. l'Ab. Rochon, & de ce que ce dernier avoit lu à l'Académie des Sciences sur cette matière.* C'est le certificat, qui a fait tant de bruit & qui a donné l'occasion à un autre de M. de La-Lande.

84. M. l'Ab. Fontana ne dit rien de tous nos entretiens antérieurs en se contentant seulement d'ajouter que je lui dis alors, que j'avois eu des idées analogues, quand c'étoient non pas des idées analogues, mais le mêmes individuelles de ce mouvement intérieur, que c'étoit à lui même que bien antérieurement j'avois fait voir tout le détail de la théorie de son effet, que c'étoit lui, à qui j'avois fait voir sur sa lunette l'effet du prisme de verre simple, qui couvroit une partie de son objectif, sans se souvenir, ou sans réfléchir, que c'étoit lui même qui avoit vu & approuvé le récit que je faisois de tout cela dans le Mémoire présenté au Ministre. Il confond ce qui appartient à la conversation que nous eûmes ce jour-là après le départ de M. Turgot avec nos conversations bien antérieures faites au premier commencement des idées de M. l'Ab. Rochon d'employer le cristal de roche avec le mouvement circulaire. C'est dans ces entretiens antérieurs, & non pas ce jour-là que je lui dis, que M. de La-Lande m'avoit parlé de ces premiers essais de M. l'Ab. Rochon,

dont

dont il avoit entendu la lecture . C' est cette confusion d'époques qui fait paroître au premier coup d'œil le certificat de M. de La-Lande contraire à mon récit , que le même Académicien avoit vu dans mon Mémoire , avait approuvé , & lu à l' Académie lui même . Dans ces entretiens antérieurs entre M. de La-Lande & moi il ne s' agissoit que de ce mouvement circulaire . M. l' Ab. Fontana le jour de cette conversation avec M. Turgot ne me parla que de la manière que j' ai exposé ci-dessus : il me dit que celui-ci ve-noit de lui communiquer la découverte du mouvement rectiligne , comme toute nouvelle , en lui ajoutant qu' il alloit la porter à l' Académie à la séance prochaine . Je ne lui dis pas ce qu' il me fait dire , mais seulement je lui fis ce petit reproche à l' amiable de ce qu' il n' avoit pas dit à M. Turgot , qu' il avoit entendu an-térieurement tout cela de moi , & comme je le vis embarrassé pour sa réponse , j' eus le soupçon , que lui même auroit déjà parlé antérieurement de mon idée au même M. Turgot sans me nom-mer , & que pour cela il n' avoit pas pû dire alors , que c' é-toient mes idées . J' avois déjà non seulement achevé de prépa-rer tous le matériaux pour mon Mémoire , mais je l' avois écrit en grande partie , & lui montré . En étouffant mon soupçon , je lui dis , que je changetrai le texte en donnant à M. l' Ab. Ro-chon tout le mérite de cette découverte : je le fis avec toutes ces expressions si fortes qu' on voit dans le même Mémoire , ai-mant principalement ma tranquillité , & je lui fis voir ce chan-gement & ces expressions si favorables à l' honneur de M. l' Ab. Rochon . Le Mémoire fini , c' est lui qui le vit le premier en en-tier , même avant qu' il fût mis au net , & il l' approuva fort , en croyant que M. l' Ab. Rochon en seroit très-content : moi aussi j' étois persuadé que même celui-ci me resteroit obligé .

85. Mais je me trouvai bien trompé dans mon attente . Tout au contraire on m' écrivit de Paris le grand bruit , que la lec-ture de mon Mémoire faite à l' Académie par M. de La-Lande a-voit excité : on pressa M. l' Ab. Fontana pour avoir ce certifi-cat . Comme il y avoit confondu les époques & l' objet de mes entretiens avec M. de La-Lande , on en demanda un autre à ce-lui-ci .

lui-ci . On s' échauffa de manière à tâcher d' obtenir une députation au Ministre pour demander au nom de l' Académie qu' on m' otât les bienfaits du Roi . Ce corps si sage s' y refusa . Un de mes Amis tout épouvanté courut à la Campagne éloignée d' un bon nombre de lieues m' en avertir , & d' autres insisterent par plusieurs lettres sur le danger & sur la nécessité de prévenir l' orage . J' écrivis à M. de Sartine , qui me répondit avec des expressions pleines de bonté , que je n' avois rien à craindre , que mon caractère étoit très-bien connu . Comme on m' annonçoit aussi qu' on parloit de quelque certificat fait par M. l' Ab. Fontana contraire à mes assertions ; je lui écrivis en lui rappellant toutes les circonstances des nos entretiens , la communication que je lui avois fait de ce Mémoire & son approbation , en le priant de détromper ceux , qui sur son certificat auroient eu l' occasion d' être induits en erreur : il n' étoit point possible de ne pas se souvenir de tant de circonstances qu' on lui remettoit sous les yeux . Dans un bon nombre de lettres qu' il m' écrivit alors il n' a jamais dit qu' il n' en se souvenoit pas : il a même fait voir positivement le contraire : il s' est seulement excusé long-temps sous prétexte que son témoignage ne feroit pas une preuve légale . J' insistai toujours que ce n' étoit pas une preuve légale que je demandois pour avoir un jugement sur la primauté , à laquelle j' avois expressément renoncé : que je demandois seulement un témoignage pour la vérité de ce que j' avais avancé sur nos entretiens dans le Mémoire , que lui même avoit vu avant qu' il fut présenté : à la fin il m' avoit promis de faire cette démarche . J' ignore si M. l' Ab. Fontana a tenu sa parole , ou s' il a changé d' avis après . L' Académie avoit nommé des Commissaires à la requisition de M. l' Ab. Röchon , que pour moi je m' étois protesté dans une réponse que je donnai alors à une lettre de M. le Sécrétaire de l' Académie que je ne demandois rien d' eux , & que je n' avois pas donné la commission de lire mon Mémoire aux Assemblées . Ou M. l' Ab. Fontana n' a rien fait de ce qu' il avoit promis , ou MM. les Commissaires ont fait leur rapport avant cette nouvelle démarche de sa part , ou bien ils ont crû

devoir se tenir à son premier certificat donné par écrit : il faut dire dans le premier cas , que lorsque M. l' Ab. Fontana avoit été requis de donner ce certificat il ne se souvenoit point du détail de nos entretiens , & qu' après il a eu de la difficulté à faire voir ce manque de mémoire .

86. Je ne serois pas entré dans tout ce détail , si ce n'étoit ce certificat qui a fait tant de bruit alors , & que je vois ici pour la première fois , & je le trouve imprimé comme un monument authentique de la fausseté de mon récit , qui pourtant avoit été fait avant toute contestation . Il ne s' agit pas ici de réclamer l' honneur d' une découverte , espèce de gloire flatteuse à laquelle je n' affiche aucun prix , n'estimant que le vrai mérite de contribuer au bien public : il s' agit de circonstances qui intéressent trop l' honnêteté de mon caractère . Que ce soit M. l' Ab. Rouchon , ou M. Maskelyne , au moi l' inventeur , tout cela m' est égal . Il y a certainement au moins de la différence dans la manière d' adapter le prisme à un instrument que j' ai donné capable d' une très-grande exactitude : je serai très-content si cela porte quelque avantage à l' Astronomie .

87. Pour ce qui appartient à cette exactitude MM. les Commissaires n' en sont pas d' accord , parceque ils n' ont pas assez réfléchi sur la force de ma méthode . Ils ont dit par rapport à ma manière de combiner le mouvement rectiligne avec le circulaire ce qui suit : *d' ailleurs dans cette dernière construction de M. l' Ab. Boscovich le mouvement rectiligne ajoute-t-il de la précision au mouvement circulaire ? car qu' importe qu' on mesure exactement les secondes par l' un , si l' on n' a pas la mesure exacte des minutes par l' autre ?* Voici comment on peut obtenir la plus grande exactitude : par le mouvement circulaire on a la variation de l' angle : on amène le petit cylindre ou cône de la fig. 3 dans les différents trous de la seconde . On détermine par des observations terrestres la valeur de chaque position en minutes , secondes , & même fractions d' une seconde : on y ajoute la valeur donnée par le mouvement rectiligne en secondes & fractions de seconde . C' est comme dans l' usage des hauteurs cher-

cherchées par un quart de cercle : on a par le fil à plomb qui tombe exactement sur le point zero de la division , & par l' inversion de l' instrument à l'aide d'un micromètre filaire la mesure précise de ce qu'il faut ajouter à toutes les autres valeurs données par le même fil à plomb , lorsqu'il tombe exactement sur d'autres points de la division , en y ajoutant encore ou retranchant l' erreur de chaque division trouvée par la méthode de la vérification en secondes : par le micromètre filaire intérieur on a en secondes & fractions de seconde la mesure de la hauteur cherchée . Il suffit de remettre le fil à plomb toujours exactement sur le même point pour avoir avec exactitude ce qu'on cherche . Il y a une différence essentielle entre cette méthode & la mienne , c'est qu'on remet très-difficilement dans l' usage commun le fil à plomb sur le même point avec une exactitude si précise ; mais on y parvient par d'autres moyens comme dans mon secteur qui se trouve ici à la planche VII fig. 3 : on amène le point de la division au fil à plomb par le moyen de la vis L , comme j'ai exposé dans l' Opuscule III . L' index N avec la correction des divisions trouvées par une vérification exacte , & par l'inversion de l' instrument donne une précision jusqu' aux fractions d'une seconde . J'ai obtenu de cette manière les fractions d'une seconde dans les mesures des distances des étoiles fixes au zenith pour le degré d'un Méridien en Italie , & plusieurs autres en suivant ma méthode ont trouvé la même exactitude par des instruments pareils . Ici quand on a fait tomber le petit cylindre ou cône de la fig. 3 dans le trou de la fig. 2 , on revient toujours précisément au même : ainsi ayant une fois la précision par la vérification bien faite , on a par le mouvement rectiligne intérieur la valeur des angles avec des fractions d'une seconde .

88. Il y a dans le rapport de MM. les Commissaires & dans l' ouvrage de M. l' Ab. Rochon plusieurs autres articles ou expressions , qui mériteroient quelque réponse , ou auroient besoin de quelqu' éclaircissement ; mais comme cela me regarde personnellement sans avoir du rapport immédiat au bien des Sciences , je n' ennuyerai pas mon lecteur en suivant tout cela : par ce que

j' ai dit jusqu'à présent sur les points que j' ai éclairci ici , on peut juger du reste . Seulement j' ajouterai un article qui appartient à l' ouvrage de M. l' Ab. Rochon . Il y déprime au dernier point l'excellente idée du Père Abat pour le prisme composé de deux pièces , l' une piano-convexe , & l' autre piano-concave dont je me suis servi dans le premier Opuscule du premier Volume . Il ne savoit pas , que les deux pièces font un seul prisme à angle variable formé par deux surfaces planes qu' on compare avec un autre à angle fixe . On peut voir dans cet Opuscule l' exactitude à laquelle on peut arriver par son moyen dans la mesure de la qualité réfractive de chaque nuance de couleur en particulier , & de la distrautive , comme je l' appelle , d' un binaire quelconque , comme aussi l' inversion successive du spectre , qui démontre l' impossibilité de réunir par deux seules espèces de substances plus de deux couleurs à la fois . M. le Docteur Comparetti Professeur Publique de l' Université de Padoue , homme d' un très-grand mérite qui a fait un grand nombre d' observations avec mon instrument fondé sur cet excellent principe , donnera un long Mémoire sur cet objet , dont il a déjà les matériaux . Pour moi j' en ai assez de cette espèce de contestations ; je suis même déterminé à ne rien répliquer à quelque nouvelle attaque sur ces objets : j' aime trop ma tranquillité sur-tout dans ces derniers jours de ma vie passée dans tant de travaux utiles en tant de genres , qui ne sont pas seulement ceux qui appartiennent aux Sciences & à la littérature .

### §. VIII.

#### *Des Opuscules V. & VI.*

39. L'E volume étant déjà trop grossi me force à donner une idée très-légère de ces deux Opuscules , comme aussi de m' étendre moins de ce que j' aurois voulu dans celui qui vient après (\*).  
L' Opus-

---

(\*) Cela vient beaucoup plus à propos après que les nouvelles circonstances m' ont obligé à allonger excessivement l' extrait précédent , qui étoit préparé de même très-court .

L'Opuscule V a pour objet une lunette, qui donne deux images d'un même objet avec leurs mouvements égaux en sens contraire. Ce sont comme deux lunettes réunies, l'une à deux objectifs qui donne l'image directe, l'autre à un objectif percé qui la donne renversée avec l'oculaire commun. D'ailleurs ces deux Opuscules sont écrits aussi en françois, & il ne sont pas si longs qu'on ne puisse les parcourir aisément, si on en a l'envie, dans le texte. A la fig. 1 (planche IX) l'axe AH passe par les centres A, & B des deux premiers objectifs  $aa'$ , &  $bb'$  de la première lunette, C de l'objectif  $cc'$  de la seconde percé en  $ee'$ , & D de la lentille commune  $dd'$ . Les rayons  $m'a'$  qui étant partis d'un point de l'axe bien éloigné arrivent avec des directions sensiblement parallèles au même axe au premier objectif en  $a'$ , vont se réunir à un premier foyer sur l'axe en R, arrivent au second objectif en  $b$ , passent par le trou  $ee'$  du troisième, & après avoir formé un second foyer sur le même axe en F arrivent en  $n$  à l'oculaire, qui ayant le même foyer antérieur le renvoie à l'œil par des directions  $nh$  parallèles à l'axe. Les rayons  $mc$ ,  $pe$  du même point de l'objet, qui arrivent au second objectif en  $c$ ,  $e$  vont au même foyer F, arrivent à l'oculaire en  $n$ ,  $n''$ , qui les renvoie à l'œil par les directions  $n'h$ ,  $n''h''$  de même parallèles à l'axe.

90. Un rayon parti d'un point marginal du champ, qui arrive au centre du premier objectif par une direction oblique l'A, continue avec la même direction jusqu'au second en o, passe par le centre C du troisième, & arrive avec ses compagnons tombés sur toute la surface du premier objectif à former l'image de ce point en  $f'$  vis-à-vis le point F : il continue son chemin jusqu'à l'oculaire, qui l'envoie à l'œil par  $d'G$ , les compagnons y allant par des lignes parallèles. Un autre rayon  $IC$  du même point de l'objet passe par le centre C du trou du troisième objectif, & après avoir formé avec ses compagnons tombés sur toute la surface de cet objectif l'image du même point du côté opposé en  $f$ , arrive en  $d$  à l'oculaire, qui l'envoie à l'œil par la ligne  $dG$ , les compagnons y allant aussi par des lignes parallèles.

91. L'

91. L'œil placé en G voit à gauche par la lunette extérieure selon la direction GK l'objet placé à droite selon la direction GI parallèle à la direction AI, & il voit le même objet à droite par la lunette intérieure selon la direction GK'. Au num. 3 on a quatre conditions à remplir : on en tire plusieurs formules, & on en examine le résultat : mais après toutes les réflexions on trouve qu'on ne peut avoir par ce moyen, que des lunettes de la dernière imperfection & tout-à-fait inutiles.

92. Dans l'Opuscule VI il y a l'explication d'un phénomène extraordinaire observé par le très-célèbre Astronome M. Messier. On a l'observation & son explication dans une longue lettre au même Académicien, qui forme tout l'Opuscule. Le soleil étant au méridien à la hauteur de 64 degrés il a vu passer par son disque pendant plusieurs minutes de temps une quantité prodigieuse de globules obscurs, & distincts, si peu éloignés les uns des autres, que le disque en étoit rempli, & de temps-en-temps les taches du soleil en étoient couvertes. La lunette qui renversoit les objets représentoit une descente oblique, ainsi la direction Optique de leur mouvement étoit une montée : son inclinaison au fil horizontal du micromètre étoit de 22 degrés, le vent O.S.O indiqué par un nuage blanchâtre, qui s'avançoit sensiblement dans la même direction. Les globules employerent environ deux secondes de temps à traverser le diamètre du disque : le diamètre de l'ouverture de l'objectif de son excellente lunette étoit de 40 lignes. Cette lunette étoit disposée pour observer les taches du soleil, qui paroisoient bien distinctes, & pourtant on voyoit distincts aussi les globules : il a tourné sa lunette à des objets terrestres, dont il a marqué les distances, qui étoient connues, comme aussi combien il falloit allonger la lunette pour voir ces objets avec distinction.

93. Il y a trois articles principaux dans cet Opuscule. 1<sup>o</sup>. On fait voir, que chacune de ces trois conditions apparentes, la montée, l'horizontalité, la descente peut se combiner avec chacune des trois réelles, & on trouve que si la direction du vent & l'inclinaison de la montée apparente étoit exactement telle,

qu'

qu'on l'a estimé dans l'observation , il y auroit eu une montée réelle : mais comme la direction du vent a été estimée seulement par de rhombes de manière à pouvoir être différente de plusieurs degrés , & l'inclinaison de la montée apparente par un à-peu-près ; un petit changement dans ces données porteroit une descente réelle , qui est plus vraisemblable pour des masses , qui doivent être lourdes , ce qui appartient au second article , parceque on y démontre qu'un objet un peu plus petit que l'ouverture de l'objectif ne peut pas intercepter tous les rayons partis d'aucun point du disque du soleil : une partie en passe toujours de manière à tomber sur une partie du même objectif , & empêche de voir une tache noire dans le lieu de l'image de ce disque : comme l'ouverture de l'objectif étoit de 40 lignes , on voit bien que ce phénomène ne pouvoit pas être produit par des gouttes de pluie , que pour cela on ne voit jamais en forme de taches noires sur le disque du soleil même lorsqu'on l'observe à travers d'une pluie légère : on fait voir que ce ne pouvoit pas être produit par des oiseaux , qui ne pouvoient pas passer en si grand nombre , ni donner cette apparence de taches rondes : ainsi ce devoient être des grêlons d'une grandeur extraordinaire . Le troisième objet est la distance nécessaire pour voir ces taches d'une forme ronde assez distinctement tranchées sur le disque du soleil . On fait voir que la théorie de la distinction d'une tache formée par un corps obscur interposé entre la lunette & un fond bien éclairé beaucoup plus éloigné est très-différente de celle d'un objet éclairé lui même qu'on voit distinctement par une lunette . Celle-ci dépend de l'allongement du foyer des rayons partis d'un point de l'objet moins éloigné de l'objectif , & l'autre d'une espèce de pénombre qui se forme autour de la tache vue par la lunette & répond à cette partie de la surface lumineuse , dont on pourroit découvrir toute l'ouverture de l'objectif , & celle pour laquelle cette ouverture est cachée tout-à-fait : ainsi pour éviter cette pénombre il faut que le diamètre apparent de la même ouverture regardée de l'endroit où se trouve le corps interposé , qui doit former la tache , soit très-petit . Après plusieurs

sieurs considérations on trouve qu' on pouvoit avoir cette apparence par des grêlons éloignés environ de 860 toises d'une épaisseur au moins de trois pouces : mais la distance pouvoit encore être bien plus grande .

## §. IX.

*Des trois derniers Opuscules .*

94. CES Opuscules appartiennent aux réfractions astronomiques . Le premier , qui est le septième du volume , en contient la théorie avec les théorèmes , & les règles qui en dérivent . Pour la détermination de la courbe , que le rayon décrit dans l' atmosphère , on suppose avec Newton , que la lumière consiste en des particules , qui dans un milieu uniforme vont avec un mouvement rectiligne & uniforme , la réfraction étant produite par une force , qui agit perpendiculairement à la surface réfringente & courbe le rayon : cette force dans l' atmosphère , dont on conçoit les couches concentriques à la terre , est l' excès de la force attractive de la couche inférieure sur la supérieure . Simpson est parti de ce même principe , & est parvenu par une méthode beaucoup plus compliquée aux mêmes résultats , aux quels on arrive ici par un chemin beaucoup plus court & simple . Ainsi cette courbe a toutes les propriétés générales des trajectoires décrites par des forces centrales égales à des distances égales au centre . On considère ici une espèce quelconque de rayons colorés toujours la même .

95. On emploie deux de ces propriétés : on suppose la première très-connue , que la vîtesse dans les différents points d' un même rayon est réciproquement proportionnelle à la ligne tirée du centre de la terre perpendiculairement sur la tangente qui passe par chaque point : on démontre la seconde , qu' à pareille augmentation ou diminution d' une même distance au centre l' augmentation ou diminution du carré de la vîtesse sera toujours la même pour tous les rayons homogènes , dont on parle toujours dans cet Opuscule , ainsi leur vîtesse ayant été la même

avant

avant d' entrer dans l' atmosphère , quelque soit la direction avec laquelle ils y entrent , la vîtesse pour chacun d' eux à pareille distance du centre sera toujours la même . On suppose , comme connu d' ailleurs , que les réfractions sont petites par rapport à la distance apparente au zenith , & la hauteur de l' atmosphère par rapport au demi-diamètre de la terre .

96. La considération de la fig. 1. (planche X) donne plusieurs formules fondamentales pour les réfractions rapportées aux distances apparentes au zenith , & la fig. 2 la nature de la courbe par le diamètre de son cercle osculateur , dont on trouve d' abord l' expression générale pour toute hypothèse de la loi des forces , & on trouve que dans celle de la force sensiblement constante ; qui à été suivie par Simpson , & Bradley , la courbe est sensiblement circulaire , comme déjà l' avoit considéré le premier de MM.<sup>rs</sup> les Cassini , & comme on trouve , que toutes les hypothèses employées par Bouguer , qui paroisoient très-différentes entr' elles , se réduisent à une force sensiblement constante , on y trouve toutes les règles données par tous ces quatre Auteurs .

97. Dans la fig. 1 C est le centre commun de la Terre ALM , & de l' atmosphère réfringente rencontrée en Z par la ligne CA prolongée & en F par la direction rectiligne DF du rayon parti d' un point éloigné sensiblement parallèle à la droite dA , l' arc FA sa continuation courbée continuellement par la force réfractive : DFH , BAG sont ses deux tangentes en F , & A , qui se rencontrent en I : ainsi ZAd est la distance vraie au zenith , ZAB l' apparente ,  $BAd = BID = GIH$  la réfraction : CH , CG deux perpendiculaires tirées du centre C sur ces tangentes , qui doivent être comme les vîtesses en A , & F : AN est le diamètre du cercle osculateur en A perpendiculaire à la tangente AG , N son centre , NR , N'R' deux lignes perpendiculaires au rayon AC . Dans la fig. 2 C est le même centre , AF une particule quelconque infiniment petite de la courbe , FN le diamètre de son cercle osculateur en F perpendiculaire à la tangente FH avec les perpendiculaires NR , CH sur le rayon FC , & sur la tangente FH .

98. Si l' on prend pour unité (fig. 1) le demi-diamètre de la  
Tome II. Y y y terre

terre CA, & qu'on appelle  $e$  la hauteur de l'atmosphère AZ,  $x$  la distance apparente au zenith ZAB = CAG,  $r$  la réfraction BAd = BID = GIH,  $\alpha$  &  $\alpha'$  les angles ACF, ACI,  $i+b$ :  $i$  la raison de la vitesse finale en A à l'initiale en F, qui est = CH:CG; on trouve aisément ces trois valeurs CFH =  $a - (x - r)$ , & CIH =  $a - (x' - r)$ , CIG =  $a - x'$ , tandis qu'on a CAG =  $\alpha$ , & la raison CF:CA =  $i+e:i$ . Après avoir fait aussi  $m = \frac{i+b}{i+e}$ , on trouve les proportions suivantes  $\frac{i+b}{i+e}$

$$= m : i :: \frac{CH}{CF} : \frac{CG}{CA} :: \sin.CFH : \sin.CAG :: \sin.(a - (x - r)) : \sin.\alpha, \text{ & } i + b : i :: \sin.CIH : \sin.CIG :: \sin.(a - (x' - r)) : \sin.(a - x'),$$

d'où par la proportionalité de la somme & différence des sinus avec les tangentes de la demi-somme, & demi-différence des angles on tire ces deux autres,  $i+m:i-m::\tan.(a - \frac{1}{2}(x - r)):\tan.\frac{1}{2}(x - r)$ , &  $2+b:b::\tan.(a - (x' - \frac{1}{2}r)):\tan.\frac{1}{2}r$ .

99. Ces deux proportions avec la nature de la courbe, qu'on trouve après très-approchante du cercle dans l'hypothèse de la force constante donnent les deux règles de Simpson, & de Bradley: mais avant par le moyen des formules trigonométriques on tire de la seconde des mêmes proportions la formule  $b = r \cot.(a - x')$ . La petitesse de la hauteur AZ de l'atmosphère fait que l'angle ACI =  $x'$  soit assez petit par rapport à la distance apparente au zenith ZAB =  $\alpha$ , quand cette distance ne s'approche trop de  $90^\circ$ : ainsi ayant une seule réfraction on aura une valeur  $b$  très-approchante de la véritable, en la faisant =  $r \cot.\alpha$ . En employant des réfractions prises des tables de Bradley, de Simpson, de l'Ab. de la Caille, une pour chacune, on a trouvé au num. 13 la valeur  $b$  pour le premier = 0,000276, pour le second = 0,000253, pour le troisième = 0,000317. La réfraction du rayon à sa sortie du vide de la machine pneumatique à l'air libre sous l'angle de  $45^\circ$  trouvée dans les célèbres expériences d'Hauxbeil donne cette valeur = 0,000264 qui s'éloigne bien peu des deux premières, & tombe presque précisément au milieu entre elles: mais celle de l'Ab. de la Caille s'en éloigne assez

assez considérablement, & fait voir que ses réfractions sont trop fortes, comme on le croyoit déjà assez généralement.

100. L'expression  $b = r \cot.(\alpha - x')$  donne  $r = b \tan.(\alpha - x')$  d'où l'on tire, que la réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance apparente au zenith diminuée d'un petit angle, ce qu'on tire aussi de la dernière proportion du numéro précédent ; parceque la première raison y étant constante, le dernier terme  $\tan. \frac{1}{2}r$  doit être proportionnel au troisième  $\tan.(\alpha - (x' - \frac{1}{2}r))$ , & le petit angle  $r$  est proportionnel à sa tangente, tandis que la diminution  $x' - \frac{1}{2}r$  est aussi petite, & même plus petite que  $x'$ . On voit par-là, que dans les distances au zenith pas trop approchantes de  $90^\circ$  on peut considérer les réfractions comme proportionnelles aux tangentes de ces distances : mais ce ne va pas dans les petites élévation sur l'horizon, parcequ'à la fin du quart de cercle, la tangente augmente à l'infini : ainsi quand même les différences des arcs y sont petites, les différences des tangentes sont très-grandes. Dans la table des réfractions de Simpson, & de Bradley on trouve cette proportionalité jusqu'à  $70^\circ$  sans avoir une erreur, qui aille au delà d'une seconde. Dans les tables de l'Abbé de la Caille on ne le trouve, que jusqu'à  $48^\circ$ , mais on a déjà vu que ses réfractions sont trop fortes.

101. On voit aussi, que les réfractions dépendent généralement de la constitution de l'atmosphère seulement dans sa dernière couche qui se trouve où l'on observe ; parceque cela dépend de la hauteur  $e$  de l'atmosphère, & de la raison  $1 + b : 1$  de la vitesse finale, & initiale. Près de l'horizon la route du rayon est trop longue à travers des vapeurs, qui s'y trouvent répandues en très-grande quantité, distribuées avec une très-grande irrégularité, & agitées par des mouvements très-irréguliers, ce qui produit beaucoup d'irrégularité aussi parmi les réfractions.

102. Tout ce que nous avons vu jusqu'à présent est indépendant de la nature particulière de la courbe. On détermine celle-ci au §. 2 sur la fig. 2, en déterminant le diamètre FN du cercle osculateur par rapport à la loi de la force réfringente. Si l'on fait la distance CF du point F de la courbe au centre  $C = z$ ,

Y y y. 2 la

la vitesse en  $F = c$ , la vitesse finale sur la surface de la terre  $= c'$ , la force  $= u$ ; on trouve ce diamètre  $= \frac{c^3 z}{uc \sin.a}$ . La

vitesse finale  $c'$  est la même pour tous les rayons, la distance apparente  $a$  au zenith pour un rayon particulier quelconque, la distance  $CF = z$ , & la vitesse en  $F$  ont des variations très-petites par rapport au total, ainsi dans l'hypothèse que la variation de la force soit si petite, qu'on puisse la considérer comme constante, la variation du diamètre du cercle osculateur sera aussi très-petite, & on pourra considérer la courbe comme circulaire, comme elle a été considérée par Cassini, & c'est la forme, qui convient aux hypothèses de Simpson, Bradley, Bouguer, qui ont employé la force au moins sensiblement constante. Quoique cette hypothèse paroît tout-à-fait destituée de la vraisemblance (\*); comme on croit communément, que les règles qui en dérivent soient conformes aux observations, on poursuit ici ce qu'elle donne, mais on ne peut que l'indiquer.

103. On tire de la forme circulaire, que dans la fig. 1 la réfraction  $GIH = r$  doit être proportionnelle aux angles  $ACF = x$ , &  $ACI = x'$ , dont le premier doit être double du second. Ainsi la valeur  $x - r$  sera proportionnelle à la réfraction  $r$ , & on aura ce théorème: *La réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance apparente au zenith diminuée d'un petit angle multiple de la réfraction même, c'est-à-dire à la valeur  $\tan.(a - hr)$*  où  $h$  doit être un nombre constant, ce qui est la règle de Bradley, qui fait  $h = 3$ . La règle de Simpson se trouve dans cette formule  $m \sin.a = \sin.(a - nr)$ . Dans le §. 3 on compare ensemble

ces

(\*) Cette hypothèse a une très-grande difficulté dans le saut subit qu'elle exige de la force, & courbure nulle à une force & courbure finie: d'ailleurs on en tire, comme on le voit ci-après, une hauteur de l'atmosphère trop petite. Pour sauver le saut subit on peut dire seulement, que dans un très-petit espace la force, & la courbure passe du zero à une grandeur déterminée, qui après reste constante, & si réellement la hauteur de l'atmosphère est beaucoup plus grande, il faut, que la force réfractive ne soit pas répandue par toute l'atmosphère, mais seulement depuis certaine hauteur, ce qui pourtant ne paroît point du tout vraisemblable.

ces deux règles, & on fait voir comment l'une se tire de l'autre.

On démontre ces deux formules  $\frac{1}{2}n = \frac{r' \cot. \alpha - r \cot. \alpha}{r^2 - r'^2}$ , ou  $r'$  &  $r$  sont deux réfractions, qui répondent à deux distances au zenith  $\alpha'$  &  $\alpha$  quelconque, &  $m = \frac{\sin.(\alpha - nr)}{\sin. \alpha}$  : si la réfraction  $r$  est horizontale, les formules deviennent plus simples  $\frac{1}{2}n = \frac{r' \cot. \alpha'}{r^2 - r'^2}$ , &  $m = \cos. nr$  : on y ajoute les deux suivantes  $b = \frac{1-m}{n}$ , &  $e = \frac{(n+1)b}{m}$ .

104. À l'aide de la première en employant deux réfractions prises de chacune des quatre tables de Bradley, Simpson, Cassini, Bouguer, on trouve au num. 34. la valeur  $n$ , & au numér. 38. les valeurs  $b$ ,  $m$ ,  $e$ , qu'on voit dans la petite table du num. 39. La valeur  $n$  est venue pour Simpson exactement  $5,5 = \frac{11}{2}$ , & pour Bradley presqu'exactement  $= 6$ , qui pour celui-ci est double de sa valeur  $h$  : la valeur  $b$  est aussi venue pour Bradley & Simpson la même que celle, qu'on a eu ici au numér. 99 tirée d'une seule réfraction par la formule  $b = r \cot. \alpha$ . La hauteur de l'atmosphère  $e$  est venue beaucoup plus différente dans les quatre déterminations, comme aussi la valeur  $n$  à cause de la différence des réfractions employées, qui n'ont pas été déterminées que par des hypothèses, ce qui fait voir toujours mieux la nécessité des méthodes, ou moins dépendantes des suppositions non tout-à-fait sûres, ou tout-à-fait indépendantes, qu'on donne ici dans les Opuscules VII, & IX. Si l'on suppose les valeurs  $m$ ,  $n$  déjà trouvées, on forme aisément la table des réfractions par la règle de Simpson. On trouve pour chaque distance  $\alpha$  au zenith l'angle  $\alpha - nr$  par son sinus  $= m \sin. \alpha$ , qui ôté de  $\alpha$  laisse  $nr$ , dont on tire  $r$  en divisant ce reste par  $n$ . La règle de Bradley paraît plus simple, & n'a besoin que de la seule valeur  $h$ , mais on ne peut s'en servir immédiatement pour former la table des sinus.

105. Il y a plusieurs autres objets remarquables dans le même §. 3. On y donne la manière de déterminer la hauteur de l'atmosphère réfringente par une seule réfraction : on y remarque,

que

que la réfraction est à l'angle formé par les deux lignes tirées de deux extrémités d'un arc de la courbe quelconque au centre de la terre comme 1 à  $n+1$ , qui est la raison de  $r$  à  $x$ : on y détermine la très-petite inégalité des rayons des cercles osculateurs de la courbe à son premier point sur le sommet de l'atmosphère réfringente, & dernier sur la surface de la terre: on y détermine le rapport que le demi-diamètre de la terre a au rayon du cercle osculateur de la courbe, qui appartient au rayon de lumière horizontal, qui est comme 1 à  $n+1$ .

106. Dans le §. 4 on détermine ce qui appartient aux réfractions célestes qu'on a (fig. 4) dans les lieux  $A'$  élevés sur les lieux  $A$  de la surface de la terre pour les objets placés à une distance immense hors de l'atmosphère, & aux terrestres pour les objets placés dans l'intérieur de l'atmosphère, comme quand (fig. 5) on regarde le sommet  $A'$  d'une montagne du sommet  $A$  d'une autre par le rayon  $AOA'$  courbé dans son trajet. On y démontre, que le rayon du cercle osculateur de la courbe, qui appartient aux rayons de lumière également inclinés, est sensiblement le même dans tous les lieux élevés au dessus de la surface de la terre, étant pour les rayons horizontales généralement au demi-diamètre de la terre comme  $n+1$  à 1, & la valeur  $n$  par tout la même, & que ce rayon est généralement pour tous les rayons de lumière réciproquement proportionnel au sinus de l'angle qu'ils contiennent avec la ligne verticale, qui est l'angle de la distance apparente au zenith.

107. On trouve, que la valeur  $m$ , dont il y a l'usage dans les formules, est différente dans les différentes élévations au dessus de la surface de la terre, & on la trouve pour les différentes élévations dans lesquelles Bouguer a fait des observations sur les réfractions horizontales: pour les comparer avec les résultats des formules, on emploie ces deux valeurs  $\cos.q = m \cos.p$ , &  $r = \frac{q-p}{n}$ , où  $p$  est la hauteur apparente de l'astre au dessus de l'horizon, qui devient négative, quand on le voit abaissé au dessous, & au num. 53 il y a une petite table avec le résul-

résultat des observations faites par Bouguer sur la montagne de Chimboraco élevée sur la surface de la mer de 2388 toises : la première & quatrième colonne a les hauteurs au dessus de l'horizon, & les dépressions au dessous , la seconde & cinquième les réfractions calculées , qui s'accordent suffisamment avec les observées , qu'on a à la troisième , & sixième colonne . C'est l'élevation marquée ici  $0^{\circ}.31'$  à la première ligne de la quatrième colonne , qui étant marquée dans les Mémoires de l' Acad. des Sciences de Paris  $31''$  par une faute d'écriture , ou d'impression a donné lieu à tant de faux raisonnements sur le saut des réfractions dans le passage par l'horizon , & sur la différence des réfractions célestes & terrestres , dont on a fait mention dans l'extrait de l'Opuscule IV au num. 81 .

108. De-là on tire cette construction élégante pour la réfraction , qui répond à la distance apparente au zenith ZA'B , & dépend de la longueur de l'arc A'F' , & du rayon de son cercle osculateur . Que l'on prenne AQ dans le demi-diamètre de la terre AC prolongé , qui soit au même demi-diamètre AC comme  $n+1$  à 1 : que l'on tire par Q , & par A' deux lignes perpendiculaires , qui se rencontrent en R : ayant tiré aussi F'R , l'angle A'RF' donnera la réfraction cherchée . Cela donne pour les réfractions horizontales le beau théorème , que pour cette espèce de réfractions dans des lieux différemment élevés au dessus de la surface de la terre Bouguer a trouvé confirmé par les observations . Il se réduit à faire la réfraction horizontale proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur de l'atmosphère sur le lieu de l'observation . On le tire ici des formules appartenantes aux réfractions horizontales : mais on le voit d'un coup d'œil , si on considère l'arc A'F' comme une ligne droite perpendiculaire au diamètreZN , dont le quarré égal au rectangle de la hauteur A'Z , & du reste A'N , qui ne varie pas la raison , doit être sensiblement comme cette hauteur : ainsi cet arc , l'angle ACF , & la réfraction qui est au même angle comme 1 à  $n+1$  , seront comme la racine de la même hauteur .

109. Dépendamment de cette règle , on trouve la hauteur de l'atmosphère réfringente , en prenant le quatrième terme proportionnel après l'excès de la réfraction horizontale trouvée à la surface de

## EXTRAIT

la mer, sur celle qu'on a trouvée dans une élévation donnée, cette seconde réfraction, & la même élévation. On voit le résultat de ce calcul dans la petite table du num. 59 de l'Opuscule, où la première colonne a les élévations des lieux avec la première = 0, la seconde les réfractions observées, la troisième la hauteur de l'atmosphère tirée au num. 39 de deux réfractions du même Bouguer, & les trois déduites de la première réfraction horizontale de cette table-ci comparée avec les trois autres : on voit ces quatre résultats très-peu différents entre eux, ce qui est le plus fort appui de l'hypothèse de la force constante : mais cette hauteur est trop petite.

110. Dans ce qui appartient aux réfractions terrestres le plus remarquable, est que  $RIB$  égal à la somme des deux réfractions terrestres  $IAA'$ ,  $IA'A$  devroit être  $= \frac{1}{n+1} \times ACA'$ . C'est l'angle qu'on devroit soustraire de l'excès de  $120^\circ$  sur les deux angles  $CAI$ ,  $CA'I$  trouvés par les directions apparentes  $AI$ ,  $A'I$  à la place des vraies  $CAA'$ ,  $CA'A$  pour avoir l'angle  $ACA'$ , & en déduire le degré & la circonférence de la terre par son rapport à la distance des deux montagnes. Mais l'irrégularité des réfractions d'un rayon, qui passe par un long espace vaporeux près de la surface de la terre, empêche d'employer cette méthode. Selon la valeur  $n$  trouvée ci-dessus par les réfractions de Bouguer = 6,645, la valeur  $n+1$  devroit être  $7\frac{2}{3}$ ; mais dans les résultats des observations faites par le même Bouguer pour la mesure d'un degré de Méridien, on trouve quelque fois l'angle  $BIR = \frac{1}{9} ACA'$ , & on trouve ailleurs des différences encore plus grandes : ainsi pour cet objet on se sert plutôt des distances au zenith des étoiles fixes, qui n'en sont pas beaucoup éloignées, où la réfraction est très petite, & assez bien connue.

111. Il y a à la fin de cet Opuscule un *Scholium* avec des réflexions sur des différents objets de cet Opuscule : on a déjà indiqué les plus intéressantes dans cet extrait : il y reste seulement ce que j'ai indiqué à la fin sur deux méthodes pour déterminer les réfractions par les observations une dépendante de l'hypothèse de la force constante, & une autre dépendante seulement de l'éga-

l'égalité du mouvement diurne de la terre dans l'intervalle de 24 heures, & de la sphéricité sensible des couches de l'atmosphère, qui borne tout l'effet sensible des réfractions dans le plan vertical, dont on ne sauroit douter : mais je me suis aperçu en faisant ce même extrait, que la première méthode encore, telle que je l'employe dans les exemples, est aussi indépendante de cette loi de forces, qui paroît trop destituée de toute vraisemblance. Ces deux méthodes sont l'objet des deux derniers Opuscules.

112. On a la première dans l'Opuscule VIII : elle prise dans sa généralité dépendroit de la règle de Bradley, que la réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance apparente au zenith diminuée du triple de la réfraction même. Que la quantité, qu'il faut ôter de la distance apparente au zenith, soit un multiple de la réfraction, cela dépend de la supposition de la loi constante selon le num. 103 de cet extrait : mais qu'elle soit petite, c'en est indépendant, & on voit ici dans l'exemple, qu'en négligeant même tout-à-fait cette diminution jusqu'à 69 degrés de distance au zenith on a presque le même résultat. Voici cette méthode.

113. Que l'on prenne deux distances apparentes au zenith  $a, a'$ ,  $b, b'$  pour chacune de deux étoiles fixes au dessous, & au dessus du pôle : qu'on appelle  $x, x', z, z'$  leurs réfractions : en négligeant d'abord la diminution indiquée, on aura  $x' = \frac{x \tan.a'}{\tan.a}$ ,  $z = \frac{x \tan.b}{\tan.a}$ ,  $z' = \frac{x \tan.b'}{\tan.a}$ . Les distances vraies seront  $a+x$ ,  $a'+x'$ ,  $b+z$ ,  $b'+z'$ . Comme la distance du pôle au zenith doit être moyenne arithmétiquement proportionnelle entre les deux appartenantes à chaque fixe, une des deux distances au pôle lui ajoutant autant, que l'autre en ôte ; on aura  $a+x+a'+x'=b+z+b'+z'$  : & par conséquent  $b+b'-a-a'=x+x'-z-z' = x(\tan.a + \tan.a' - \tan.b - \tan.b')$  :  $\tan.a$ , &  $x = \frac{(b+b'-a-a')\tan.a}{\tan.a + \tan.a' - \tan.b - \tan.b'}$ . Ayant trouvé  $x$ , on aura  $x'$ , & la distance du pôle au zenith complément de la hauteur du pôle  $= \frac{1}{2}(a+a'+x+x')$ .

114. On peut employer la soustraction du triple de chaque réfraction

fraction ainsi trouvée par  $x$  pour corriger la première détermination, qui ne peut pas être que très-peu fautive, quand la plus grande distance au zenith ne s'éloigne pas trop de  $70^\circ$ , & que la distance au pôle de la seconde n'est pas trop peu différente de celle de la première : on pourroit encore employer d'abord à cet effet les réfractions correspondantes à ces distances apparentes, qui sont assez connues pour cet effet dans les tables, & on fera  $m = a - 3x$ ,  $m' = a' - 3x'$ ,  $n = b - 3z$ ,  $n' = b' - 3z'$ , & on prendra  $x = \frac{(b + b' - a - a') \tan.m}{\tan.m + \tan.m' - \tan.n - \tan.n'}$ , qui sera assez bien corrigée, comme aussi  $x' = \frac{x \tan.m'}{\tan.m}$ , & on aura le complément de la hauteur du pôle corrigée  $= \frac{1}{2}(a + a' + x + x')$ .

115. On a appliquée la méthode à plusieurs binaires d'étoiles fixes observées à Paris par l'excellent Astronome M. Cagnoli, & on a tout le procédé du calcul à la table du num. 14 : on n'y trouve qu'une seule seconde de différence entre les valeurs de la réfraction la plus grande, qui répond à la distance de  $69^\circ$ , déterminée par le premier binaire. On y avoit les observations pour trois fixes beaucoup moins, & trois autres plus éloignées du pôle : on y a 9 binaires de deux fixes prises une par espèce : le milieu de tous ces résultats n'est éloigné que de deux seules secondes de la hauteur du pôle de son Observatoire, trouvé par la différence que la position de cet Observatoire a par rapport à l'Observatoire Royal, & par la hauteur du pôle, qu'on donne à celui-ci. Cinq étoiles de l'une & de l'autre espèce donneroient 25 binaires, dix en donneroient 100, qui porteroient la plus grande exactitude en prenant le milieu.

116. On trouve par la valeur  $x'$ , qui étant petite doit être bien exacte, la vraie distance de son étoile au zenith : dans le triangle sphérique terminé au zenith, au pôle, & à la même fixe, en déterminant le temps de son arrivée à une distance au zenith quelconque intermédiaire entre ces deux du méridien, & l'arrivée au même méridien, on trouvera l'angle au pôle, qui sera assez exact, si l'on fait les observations dans des azimuths assez éloignés du méridien : cet angle avec les deux côtés donnés, qui

qui sont les distances du zenith , & de la fixe au pôle , donnera la vraie distance au zenith , dont la différence à l'apparente observée donnera la réfraction pour ces distances . A l'aide de ces réfractions on trouvera la distance vraie au pôle de deux fixes , dont une puisse arriver depuis l'horizon jusqu'à une certaine hauteur , & une autre depuis la même hauteur jusqu'à auprès du zenith : alors à l'aide de ce même triangle sphérique on trouvera toutes les distances vraies au zenith depuis l'horizon jusqu'au même zenith à comparer avec les apparentes pour compléter la table des réfractions . On trouvera aussi immédiatement la réfraction des étoiles , qui en arrivant au méridien s'approchent de l'horizon tant qu'on veut , & même la réfraction horizontale , à l'aide de la distance du pôle au zenith déjà trouvée . Si l'on prend sa distance apparente au zenith au dessous du pôle  $= \alpha$  , & au dessus  $= \alpha'$  , avec la réfraction  $\alpha'$  au dessus , dans laquelle on n'aura pas une erreur de 1" à cause de sa petitesse ; en ôtant  $\alpha + \alpha' + \alpha'$  de la double distance du pôle au zenith , on aura  $\alpha$  . On verra alors si les réfractions sont proportionnelles aux tangentes des distances apparentes au zenith diminuées du triple de chaque réfraction , où au moins d'un multiple de la réfraction même , jusqu'à l'horizon , comme exige l'hypothèse de la force réfractive constante .

117. La méthode exposée dans l'Opuscule IX suppose l'usage d'un instrument fait en grand pour avoir les distances apparentes au zenith , tournant autour d'un axe vertical avec son alidade pour avoir dans un cercle horizontal les azimuths avec une précision assez grande . Dans la fig. 6 ( planche X ) AZB est le méridien , qui passe par le zenith Z & le pôle P , ACB un demi-cercle de l'horizon rencontré en C par l'azimuth ZC , DHG le demi-cercle du mouvement diurne d'une étoile fixe , qui arrive au méridien en D & G au dessus , & au dessous du pôle , & à ce vertical en E & F . Si l'on détermine les moments de l'arrivée de cette étoile au méridien en D deux jours de suite , & au cercle vertical le même jour en E , & F , on aura les angles ZPE , ZPF : & si l'on conçoit l'arc PI perpendiculaire à la base EF du triangle EPF , qui coupera son angle en P par le milieu , on voit bien , que ZPI sera la demi-somme des angles ZPE , ZPF , & par

& par conséquent connu. L'angle PZI sera déterminé par l'ali-  
dade horizontale , qui donnera l'arc BC . Ainsi dans le triangle  
ZPI rectangle en I , on aura les deux angles en P & Z , qui don-  
neront l'hypothénuse PZ , dont le cosinus est égal au produit  
des cotangentes de ces deux angles .

118. C'est la vraie distance du pôle au zenith complément de  
la vraie hauteur du pôle , qu'on aura par-là indépendamment des  
réfractions . Il est bien vrai , que l' angle en P sera donné par  
le temps , où une seconde d'erreur dans la détermination du mê-  
me temps porte 15" d' erreur dans l' angle . Mais comme quand  
on a une fois cet instrument bien placé , & bien vérifié , on peut  
faire aisément autant d' observations qu'on veut , qui sont si fa-  
ciles , & le calcul numérique est aussi de la dernière simplicité ;  
on peut bien employer même cent , & encore mille détermina-  
tions pour un élément si intéressant , qui trouvé une fois sert  
toujours , & a un très-grand usage continual en Astronomie .

119. On démontre dans cet Opuscule que l'azimuth le plus a-  
vantageux est celui , qui fait un angle de 45° avec le méridien ,  
& que les fixes les plus avantageuses sont celles , qui sont le plus  
éloignées du pôle ; mais il faut éviter le trop grand voisinage de  
l'horizon , où il y a trop d'irrégularité dans les effets de l'agita-  
tion des vapeurs trop épaisses .

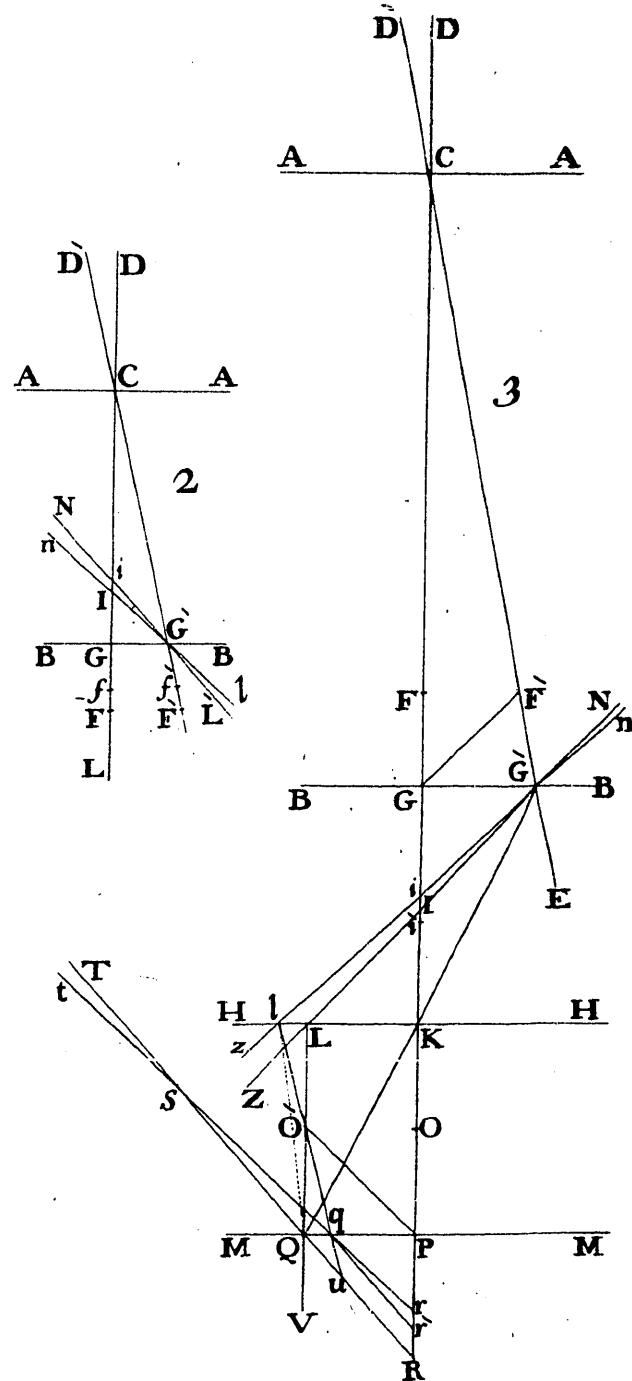
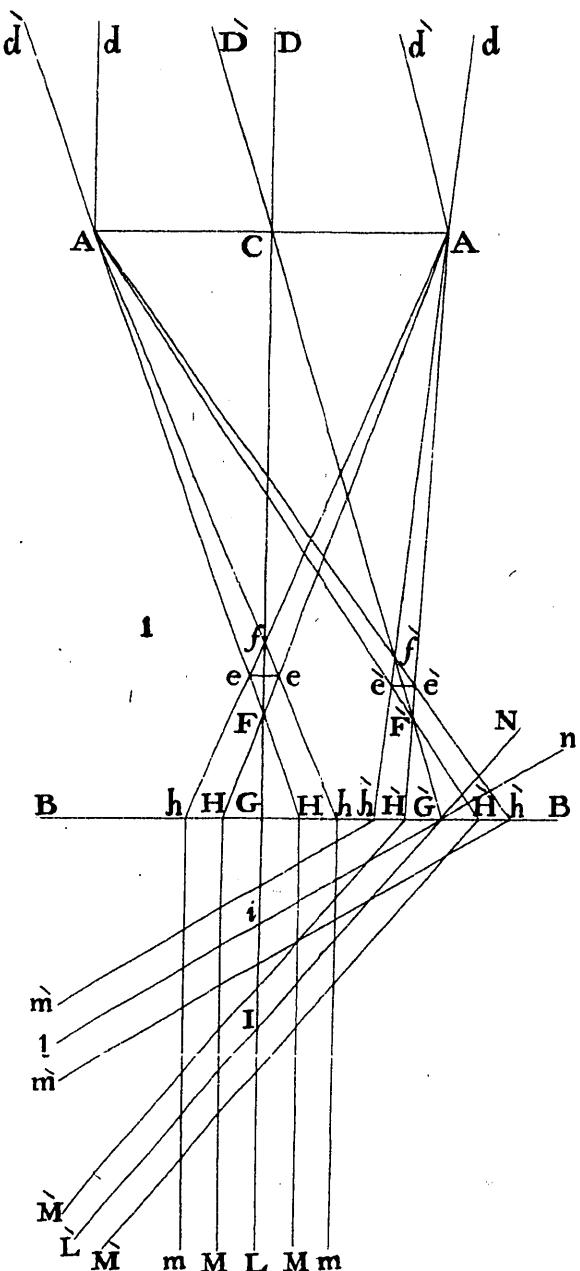
120. Ayant trouvé cet élément si essentiel , on peut avoir par le  
même instrument la vraie distance au zenith de tant d'étoiles fixes  
qu'on voudra , & la table entière des réfractions , & à l'aide de cette  
table la déclinaison , & ascension droite d'un astre quelconque par  
une seule observation momentanée , ce qui doit être d'un très-grand  
avantage sur-tout pour avoir un grand nombre de déterminations  
des lieux d'une comète dans une même soirée sans avoir besoin  
de comparer ses observations à celles des étoiles fixes ; mais il  
suffit ici d'indiquer seulement ces grands avantages de cette mé-  
thode , & de cet instrument , dont la collocation , la vérification ,  
& l'usage pour le bien de l'Astronomie feront le sujet d'un au-  
tre Opuscule , qui aura lieu dans le quatrième volume .

## ERRATA

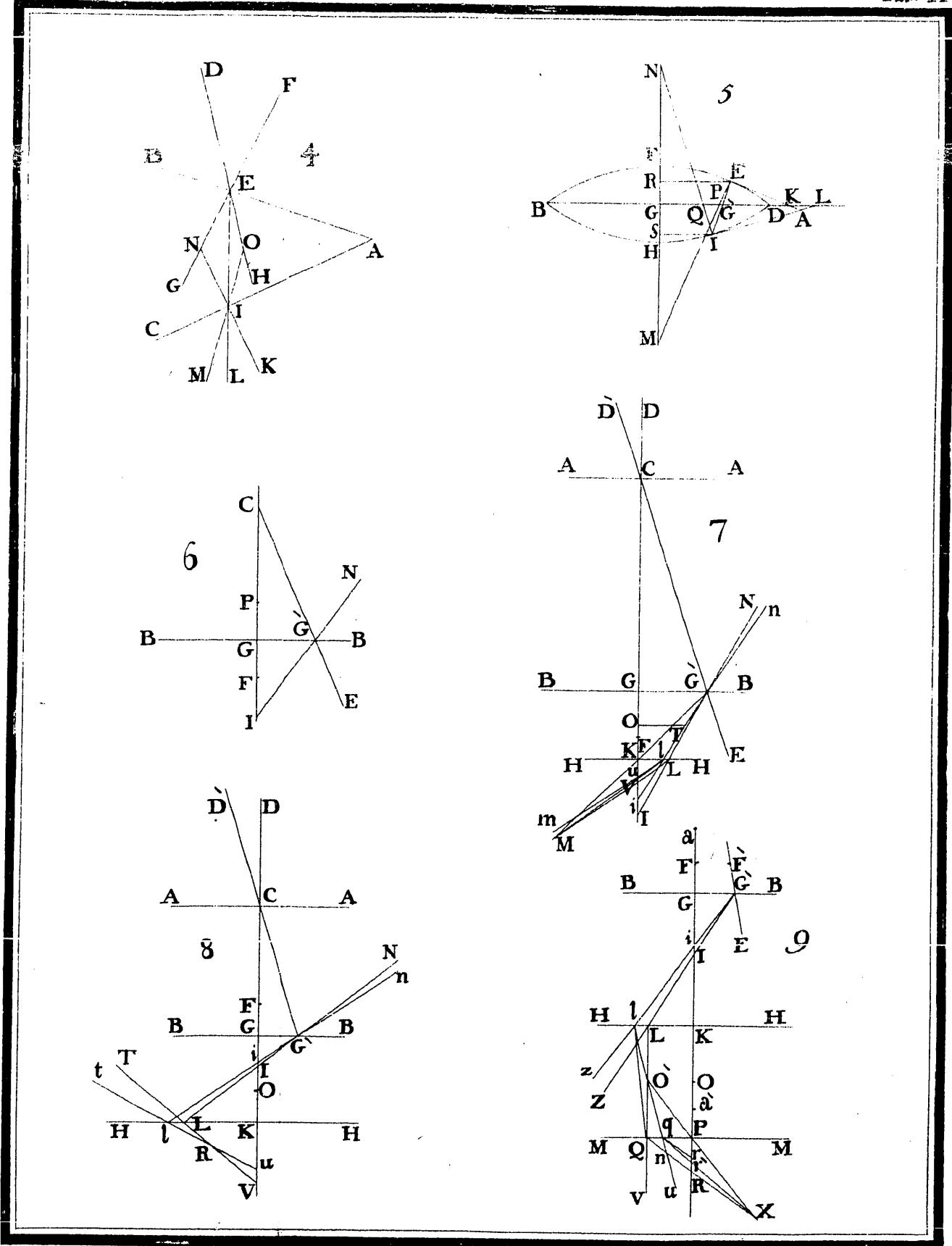
## CORRIGE.

| pag. | lin. |                            |                             |
|------|------|----------------------------|-----------------------------|
| 136  | 31   | cicellorum                 | cicellorum.                 |
| 157  | 14   | 11, & pro posteriore 13    | ac pro posteriore 11, & 13. |
| 390  | 21   | objetif                    | oculaire.                   |
| 450  | 25   | idirco                     | idcirco.                    |
| 456  | 27   | $\frac{(p' - p)q}{q - q'}$ | $p + h$ .                   |
| 469  | 14   | ipsa                       | ejus distantia.             |
| 522  | 1    | L'EK                       | L'EK parallèle à la NO.     |
| 533  | 19   | au second                  | au troisième.               |

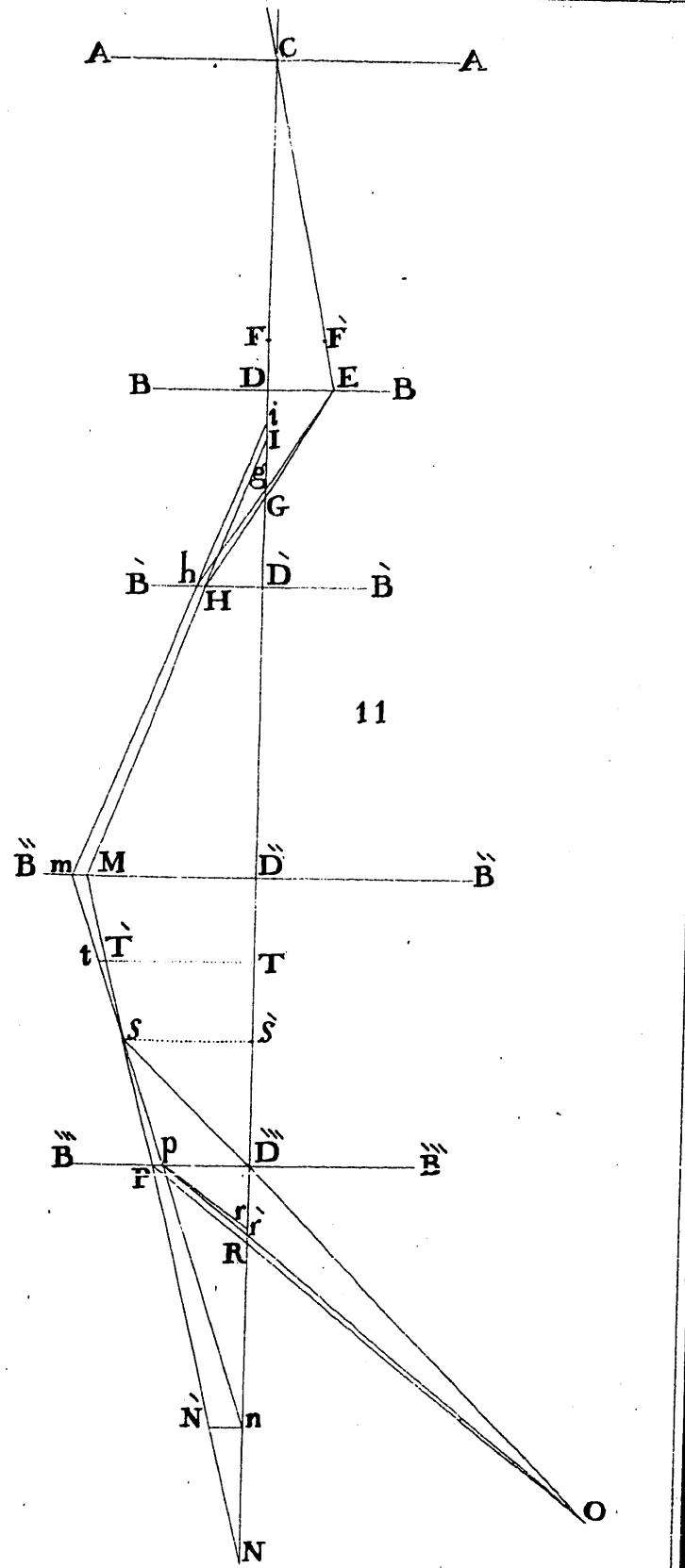
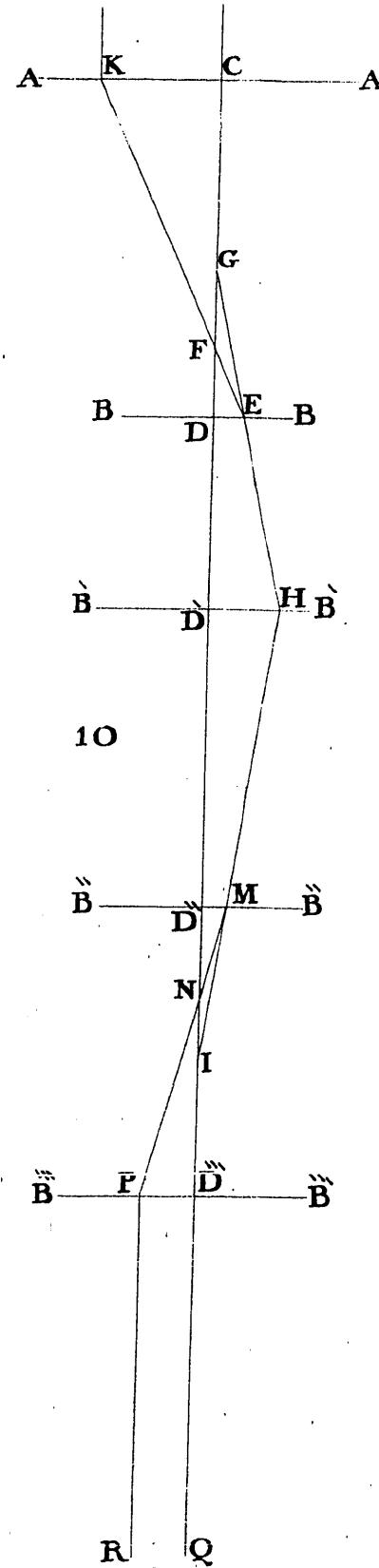




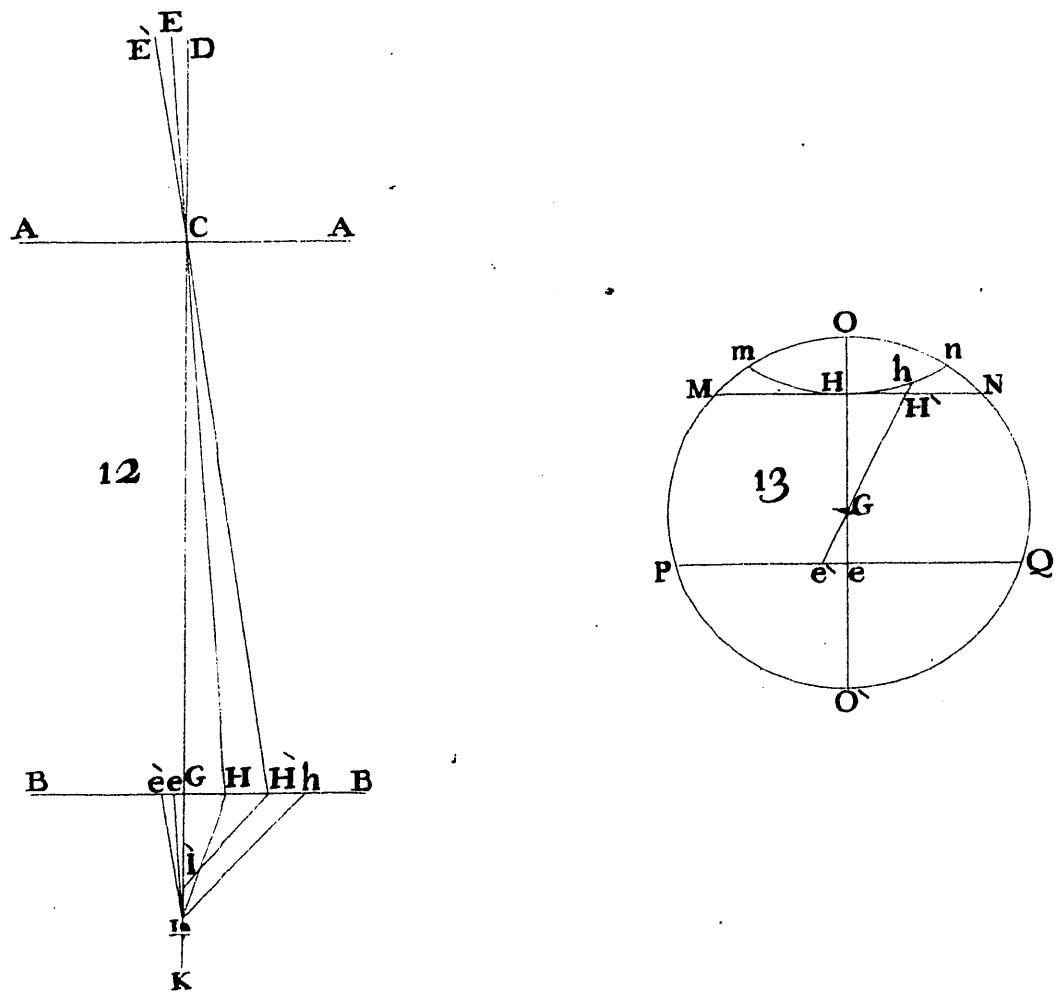




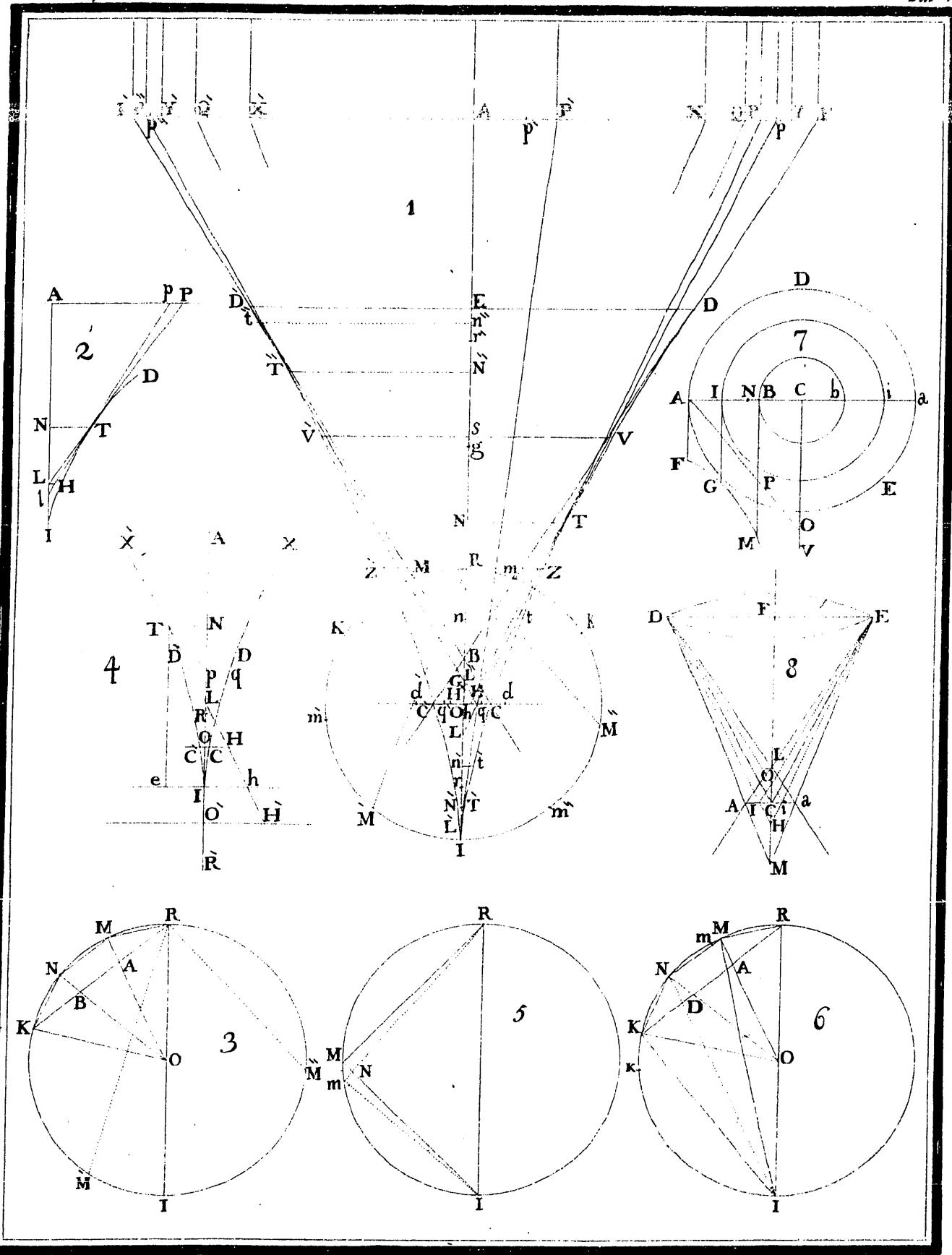




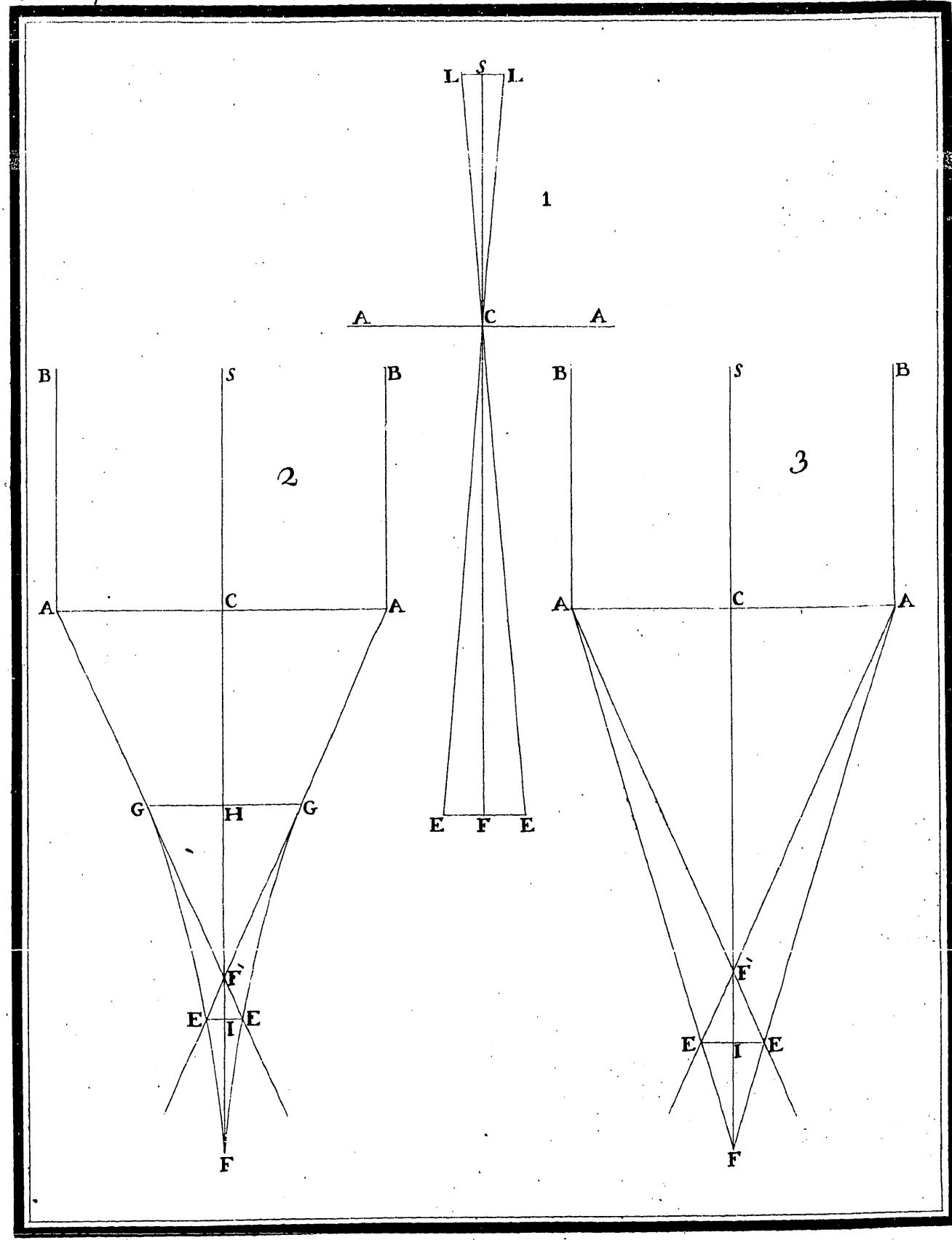














*Tabm. II. Opusc. III*

*Tab. VII*

