NOUVEAUX OUVRAGES

DE MONSIEUR

L' ABBÉ BOSCOVICH

APPARTENANTS PRINCIPALEMENT

A' L' OPTIQUE, ET A' L' ASTRONOMIE

EN CINQ VOLUMES

DÉDIÉS

AU ROI.

TOME TROISIÈME.

A' BASSAN MDCCLXXXV.

& se vendent

A' VENISE, CHEZ REMONDINI.

Avec Approbation, & Privilége.

ROGERII JOSEPHI
BOSCOVICH
OPERA PERTINENTIA

AD OPTICAM, ET ASTRONOMIAM

Maxima ex parte nova, & omnia hucusque inedita,

IN QUINQUE TOMOS DISTRIBUTA

LUDOVICO XVI.

GALLIARUM REGI POTENTISSIMO DICATA.

TOMUS TERTIUS.

BASSANI MDCCLXXXV.

PROSTANT

VENETIIS APUD REMONDINI.

Superiorum Permissu, ac Privilegio.

INDEX

DES OPUSCULES, MÉMOIRES, PARAGRAPHES &c.

De ce Volume.

OPUSCULE I.

De la détermination de l'orbite d'une Comète par trois observations peu éloignées entr'elles. Pag. 1

MÉMOIRES CORRELATIFS.

OPUSCULE II.

avec

E X T R A I T

OPUSCULE I.

DE LA DÉTERMINATION DE L' ORBITE D' UNE COMÈTE PAR TROIS OBSERVATIONS PEU ÉLOIGNÉES ENTRE ELLES.

PRÉFACE.

I. LE sujet de cet ouvrage est la détermination de l' orbite d' une comète supposée parabolique par trois observations qui ne soient pas trop éloignées entre elles : on y parvient par une méthode très-simple, & d' une exécution très-facile : elle donne d' abord une approximation très-satisfaisante, & facilite la correction à faire après à l' aide des observations plus éloignées pour arriver à l' exactitude. Les Astronomes savent bien la longueur rebutante, & la difficulté des méthodes communes, ce qui rend très-intéressant par soi-même un traité de cette nature. Le problême pris dans toute sa généralité, qui propose la recherche de l' orbite par trois observations quelconques, est déterminé en lui-même, & il n' est pas supérieur aux méthodes de l' Algèbre finie : mais l' équation générale, qu' on peut espérer d' en tirer, est si compliquée que je n' espérerois jamais d' en voir tirer aucun parti pour la pratique.

II. Je donne dans cet ouvrage la méthode d' y parvenir, qui me paroît la plus simple dans la théorie : parceque pour en comprendre le procédé, il suffit d' avoir des connoissances tout-à-fait élémentaires de la Géométrie, & du calcul trigonométrique, & algébrique ordinaire ; mais l' exécution de ce calcul seroit d' une longueur immense, & tout-à-fait impraticable : personne n'aura jamais l'envie d'en entreprendre l'exécution en entier : d'ailleurs si l'on pouvoit à la fin arriver à une équation finale, elle seroit absolument telle, à n'en pouvoir tirer aucun avantage pour l'usage de l'Astronomie pratique. J'avois donné cette méthode d'une manière peu différente de celle-ci dans une Dissertation, que j'ai publiée à Rome en latin l'an 1746 sous le titre *Dissertatio de Cometis* à l'occasion des exercices annuels de mes écoliers en Mathématique : elle ne sert qu'à faire voir, que par sa nature ce probléme ne surpasse pas les forces de l'Algèbre finie : il en est de même de tant d'autres méthodes sublimes données depuis pour la réduction de ce probléme, proposé généralement, à des formules algébriques.

III. Pour cela je me suis pris dans la même Dissertation d'une autre manière pour rendre quelque service à l'Astronomie. Je m'étois aperçu, qu'en considérant un petit arc des deux orbites de la terre, & de la comète, comme rectilignes, & les deux mouvements dans ces arcs comme uniformes, on pouvoit réduire l'équation au sixième degré. J'en ai donné la méthode, qui dans cette supposition est fondée sur un rapport, qui doit y avoir entre les distances raccourcies à la terre, donné par les temps, & les mouvements en longitude, & sur un autre, que la corde de l'arc parcouru par la comète, qui est liée avec les temps, & avec ces mêmes distances, doit avoir avec le chemin parcouru par la terre, qui est connu. J'y ai fait remarquer que dans cette substitution du mouvement rectiligne au curviligne on négligeoit certaines petites quantités, & j'ai indiqué une méthode, qu'on pourroit employer pour en tenir compte. Dans la même Dissertation j'ai fait voir, qu'une méthode employée par M. Bouguer dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, qui est appuyée sur la petitesse de l'arc seul de la comète considéré comme ligne droite parcourue d'un mouvement uniforme, étoit fautive : par la faute de la méthode même, à la place d'une parabole, il y avoit trouvé une orbite hyperbolique. J'y ai développé le défaut de cette méthode, & j'ai fait voir la différence essentielle,

tielle, qui passoit entre celle-là, & la mienne, puisque j'y ai fait entrer dans la résolution du problême la relation de la longueur de la corde à la distance, & à l'intervalle du temps dont lui ne faisoit aucun usage.

IV. Dans le même ouvrage j'ai examiné une autre méthode, que le grand Newton avoit donnée dans son Arithmétique universelle, & dans son ouvrage immortel des Principes, pour trouver la distance d'une comète à la terre dans la supposition d'un mouvement rectiligne, & uniforme. Cette hypothèse avoit été adoptée pars plusieurs Astronomes, & suivant elle, deux autres Géomètres du premier ordre avoient déjà donné la solution du même problême. Cette méthode se réduit à faire passer une ligne droite entre quatre autres données de position, de manière que ces trois segments interceptés entre ces lignes soient dans une raison donnée. Les quatre lignes données de position sont les directions des longitudes observées, & la raison est celle des intervalles du temps écoulés entre les observations. L'orbite de la comète n'est pas rectiligne, mais très-approchante de la parabole, & sa vîtesse est bien différente dans des différentes distances, Newton même l'ayant trouvé réciproquement proportionnelle à leurs racines quarrées: pour cela on ne peut pas s'aviser aujourd'hui de s'en servir autrement, qu'en employant des observations peu éloignées entre elles, pour pouvoir supposer rectiligne le petit segment de l'arc de la comète, et son mouvement uniforme. Un des premiers Astronomes de l'Italie venoit d'employer cette supposition, & ayant appliqué le calcul numérique à la solution donnée par Newton, il avoit trouvé à son grand étonnement le résultat infiniment éloigné du véritable: la position de la comète dans les lignes visuelles y venoit diamétralement opposée à celle, dans laquelle on l'avoit observée.

V. Pour expliquer ce phénomène il avoit dit qu'apparemment son arc n'étoit pas assez petit pour pouvoir en négliger la courbure, & l'inégalité de la vîtesse: pourtant il étoit réellement très-petit. En examinant plus attentivement cette solution je me suis aperçu, que la nature même du problême, & son applica-

A 2 tion

tion à un petit arc de la comète étoient la vraie source du faux résultat. Il arrive très-souvent en Géométrie, que le problême, dont on trouve une solution générale déterminée bien exacte, devient indéterminé dans certains cas particuliers. J'ai fait voir dans cette Dissertation, que cela justement arrivoit à ce problême dans certaines positions des quatre droites données, & que cette indétermination tomboit exactement sur le cas, dans lequel les deux chemins de la terre, & de la comète seroient supposés rectilignes, & les deux mouvements uniformes. Si l'on prend deux lignes droites de deux directions, & grandeurs quelconques, & qu'on les coupe toutes les deux en trois segments dans une même raison prise à volonté; le quatre lignes droites tirées par les deux extrémités, & par les deux binaires des sections intermédiaires corréspondantes ont la position, qui entraîne l'indétermination du problême. J'ai démontré qu'alors en prenant dans une distance quelconque un point sur une des droites données, on peut tirer par ce point une autre droite, qui soit coupée par les quatre précédentes dans la même raison. On voyoit par là, qu'on ne pouvoit pas employer cette méthode à déterminer la distance de la comète; puisqu'on devoit supposer les lignes des deux mouvements coupées par les directions des deux longitudes intermédiaires en la même raison commune des temps. La solution du problême auroit manifesté dans le même calcul numérique l'indétermination par quelque valeur illusoire, s'il n'y avoit eu un petit écart de la direction, & de l'uniformité du mouvement, & quelque petite erreur dans les observations: ces petites quantités sont les seules, qui forment la détermination du problême. Comme elles n'ont aucune liaison avec la distance de la comète; on ne doit pas s'étonner, que le résultat du calcul donne une distance non seulement fautive, mais encore d'une direction diamétralement opposée à la veritable. J'ai démontré depuis la même indétermination de ce problême, en y employant une construction bien plus simple, & élégante donnée par Simpson, qui pourtant, comme les autres avant lui, ne s'étoit pas aperçu de ce cas, & M. Castiglioni a imprimé mon Mémoire sur cet ob-

jet

jet à la fin de l'édition, qu'il a donné de l'Arithmétique Universelle de Newton avec une quantité d'annotations très-savantes.

VI. Dans la même Dissertation il y a d'autres objets bien intéressants, comme des observations, qui indiquent la révolution des comètes sur leur axe, des réflexions sur l'origine, & la forme des leurs queues, & les grands avantages, que le noyau retire de l'immense atmosphère, qui l'environne. Comme il n'y a eu, qu'un très-petit nombre d'exemplaires de cette Dissertation imprimés dans le temps, & qu'on les a distribués à une Assemblée, qui ne se souciant guère des Mathématiques en général, en a déchiré la plus grande partie; il n'en est resté qu'un très-petit nombre, ce qui est arrivé à une grande quantité de mes premiers Opuscules publiés en des occasions pareilles. Pour cela j'en donnerai ici à la fin sa réimpression en latin comm' on l'a publiée alors.

VII. Plusieurs années avant mon dernier départ de l'Italie, que j'ai quitté à la suppression de mon Ordre, j'avois envoyé un bon nombre de Mémoires à Paris, qui ont été présentés à l'Académie par mon correspondant: on les avoit approuvés pour être imprimés dans les recueil des pièces, qu'elle reçoit des différents Savants. Parmi ces Mémoires il y a deux Opuscules sur le même sujet de cet ouvrage, qu'on a imprimé tout de suite de préférence, en les jugeant très-intéressants. Dans le premier de ces deux il y avoit la même réduction du problême à un équation du sixième degré, que j'avois mis dans l'ancienne Dissertation, tirée de la substitution des cordes aux petits arcs: mais je l'avois développée d'avantage, & j'y avois ajouté une manière extraordinaire de la construire à l'aide d'une seule parabole quelconque, d'un cercle, & d'un tour de compas très-facile à exécuter: on la trouvera ici aussi. J'y avois ajouté encore une autre manière de résoudre le problême par le moyen de la fausse position d'une seule distance raccourcie, que j'ai abandonné depuis. Dans le second de ces deux Mémoires il y avoit une autre méthode d'employer la fausse position beaucoup meilleure de la première, & une construction élégante tirée d'une

très-

très-belle proposition, que Newton a démontrée dans ses Principes. Elle donne avec toute la facilité la suite entière du mouvement apparent de la comète : probablement on n'avoit point connu cet excellent usage de ce problême : puisqu'on ne le voit pas employé dans les ouvrages des Astronomes.

VIII. Cette méthode de fausse position s' étendoit à des arcs beaucoup plus grands à l'aide d' un théorème, dont j'avois seulement indiqué la démonstration. Celle-ci, & les autres précédentes avoient pour fondement la proportion des distances raccourcies à la terre tirée des intervalles des temps, & des mouvements en longitude, qui est presqu' exacte, quand on substitue au mouvement par les arcs celui des intersections du rayon vecteur avec la corde : j' avois démontré une uniformité presqu' entière du mouvement de cette intersection, quand la flèche est encore petite par rapport au rayon ; mais j' avois déterminé même la loi de la petite inégalité de ce mouvement, & j' en avois tirée la vîtesse moyenne, & la distance dans laquelle la vîtesse de la comète est égale à cette vîtesse moyenne. J' y avois bien remarqué, que pour faire le passage de l' arc à la corde il y avoit un petit changement à faire à la seconde longitude observée ; mais j' y avois démontré des cas, où il n' y avoit rien à changer : ayant appliqué ma méthode aux orbites des dernières comètes, j' avois trouvé les éléments très-approchants de ceux, qu' on en avoit tiré par la méthode commune, qui s' approche de l' exactitude tant qu' on veut, mais qui est bien longue, & pénible : je n' avois pas développé davantage cette réduction, ayant donné ma méthode, comme une méthode d' approximation à corriger par des observations éloignées.

IX. A' mon arrivée en France, où les bienfaits du Roi m' ont fixé l' an 1773, il y a eu une comète, dont M. Messier eut la bonté de me donner trois de ses premières observations : je fis la construction de l' orbite par ma méthode : j' en tirai immédiatement la route apparente future, qui s' est trouvée très-peu éloignée de celle qu' on a observé depuis, quoique il y a eu de la différence un peu plus considérable dans quelqu' un des é-

lé-

léments, parceque je n' y avois pas employé aucune réduction, & le cas particulier de cette comète en exigeoit beaucoup plus, que généralement les autres. Alors je donnai la manière de faire cette réduction dans un petit papier à Monsieur le Président de Saron à présent membre de l'Académie, grand amateur de l' Astronomie, & excellent Astronome : c' est la même que j' ai donnée depuis à l' Académie, & qu' on verra aussi dans cet ouvrage : on la trouve très-aisément même par une construction graphique grossière, & en l'employant on peut se servir de toutes les méthodes que j' ai proposées, même dans des cas, où sans elle il y auroit le plus à craindre. Ayant employé cette réduction pour cette comète, & pour une autre postérieure, les éléments, qu' on en a tiré, se sont trouvés très-peu différents de ceux qu' on a trouvés par la méthode ordinaire : on le verra par rapport à cette dernière dans ce même ouvrage, où j' ai mis l' exemple de la construction graphique, & du calcul trigonomètrique dans le plus grand détail.

X. En attendant on avoit achevé l' impression du volume, dans lequel on avoit déjà mis mes deux Mémoires. La préface en a été faite après par un nouvel associé à l' ancien Sécretaire de l' Académie. On y trouve beaucoup d'expressions très-désavantageuses à ces Mémoires : on y dit, que l' idée de ma théorie est dûe à M. Bouguer : qu' elle exige des observations très-exactes : que les Astronomes, qui avoient voulu l' appliquer à la dernière comète, l' avoient trouvée très-fautive : on y ajoute, qu' elle ne peut être utile que pour un petit nombre de cas. Malheureusement on ne pouvoit pas s' éclaircir en lisant mes Mémoires. J' avois ajouté deux planches, à chacun les siennes : on avoit mis au premier une des deux appartenantes au second, & à celui-ci les deux de l' autre avec l' autre des siennes, en y gravant les pages en conséquence de cette faute essentielle. Comme les mêmes Mémoires se trouvent aussi dans le même volume à une très-grande distance l' un de l' autre, on ne peut pas s' apperçevoir de cette inversion des planches, & en lisant on n' y peut rien comprendre.

XI. Quand

XI. Quand le volume eut paru, plusieurs de mes amis ont été choqués des expressions de cette préface, & on m'a écrit d' Italie, qu' il falloit absolument y répondre. Je ne voulois pas entrer en contestation, quand un autre accident survenu m' a déterminé à faire quelque demarche. Il y eut quelqu' un, qui parla dans une séance de l' Académie avec le dernier mépris de tous mes ouvrages en général, & qui s' engagea à faire voir que la méthode exposée dans ces Opuscules étoit fondée sur un paralogisme. Alors j' envoyai à l' Académie un Mémoire, dans lequel je me plaignois de ce qu' on avoit mis dans cette préface, en faisant voir l' injustice qu' on m' avoit fait, & la fausseté de ce qu' on y avoit avancé. Je parlois de la position fautive des planches, qui rendoit inintelligibles mes deux Mémoires, & j' y fis mention de la nouvelle attaque. Comme je croyois que l' accusation porteroit sur le seul endroit, dont on pouvoit en prendre le prétexte avec quelqu' apparence de succès, c' est-à-dire sur la réduction de la seconde longitude que je n' avois pas assez détaillé, j' y fis voir dans combien d' occasions elle étoit nulle, & comment on pouvoit en tenir compte dans tous les autres cas. J' en exposois la méthode de la même manière que je l' avois donnée depuis long-temps, comme j' ai déjà dit. L' accusateur présenta à l' Académie un Mémoire, qui contenoit sa prétendue démonstration de mon paralogisme, qui partoit de tout autre principe beaucoup plus destitué de tout fondement. On m' en apporta son original paraphé par le Sécretaire, & envoyé par ordre de l' Académie. Je fis voir dans un second Mémoire avec la dernière évidence, que dans ce qu' il y avoit dans cet écrit, il n' y avoit la moindre preuve de ce qu' on avoit avancé contre moi. On nomma des Commissaires: l' accusateur fit une addition en changeant l' attaque: j' y répondis: il repliqua encore: je fis voir qu' il se trompoit une autrefois. Les Commissaires laisserent la chose assoupie long-temps, & ils ne firent leur rapport qu' après un an à l' occasion d' autres nouvelles contestations, qu' on excita contre moi sur un autre objet. J' ai en ordre toutes les pièces, pour les produire en cas de besoin: mais

pour

pour à présent je donnerai ici parmi les pièces que j'ajouterai comme correlatives à cette ouvrage seulement le premier Mémoire que je fis présenter alors à l'Académie, parcequ' il regarde plus immédiatement le sujet dont il s' agit ici, & il contient la réponse à ce qui a été déjà imprimé contre moi dans un monument publique, & qui peut paroître autorisé par un corps si respectable.

XII. Mais ma meilleure apologie (*) sera ce même ouvrage, dans lequel je mets en entier tout ce qu' il y a d' intéressant dans les précédents, en y ajoutant beaucoup d' autres objets, & méthodes, qui regardent tant la théorie, que la pratique: pour celle-ci je donne tout au long un exemple en exposant tout le détail des constructions graphiques, & des calculs numériques: je l' ai exposé tout entier dans plusieurs tables, dont j'ai expliqué tout le procédé ligne par ligne. Pour rendre ce volume plus intéressant & d' une utilité plus générale j' ajouterai comme je viens de l' indiquer, plusieurs pièces, qui ont de la correlation avec le corps de l'ouvrage, ou par l'usage qu' on peut en faire pour d' autres objets, ou parcequ' il y a quelque théorie plus générale, dont je fait usage ici en partie, ou pour donner des démonstrations plus simples que celles, qu' on employe communément de quelque théorème élémentaire, qui s' y trouve employé.

XIII. Ce qu'il y a de plus essentiel dans ma méthode c'est ma manière de simplifier & d' abréger les opérations en employant des observations peu éloignées entre elles, qui pourtant ne sont

 pas

(*) La première comète arrivée depuis, qui est celle de l' an 1779, a bien justifié ma méthode. Après les trois premières observations de M. Messier j' ai trouvé immédiatement, & je lui ai donné les éléments, & toute la route apparente & la réelle, que la comète devoit tenir dans le long temps de son apparition. Tout cela s' est trouvé très-peu éloigné du résultat de la méthode commune appuyée sur des observations éloignées, comme il l' a énoncé lui même à une séance publique de l' Académie. Ma détermination a délivré les Astronomes, qui ont pris la peine de la calculer, de tout le très-long, & très-ennuyeux travail des premiers tâtonnements.

pas resserrées entre de limites trop étroites. Voici un précis de mon procédé.

XIV. Premièrement il y a une règle beaucoup plus simple, & d'une exécution beaucoup plus facile, que les employées par les autres Astronomes pour former le premier jugement de la distance de la comète tel qu'on ne peut pas s'y tromper de beaucoup. Cette règle dépend d'un rapport, que la division de la corde de la comète doit avoir à la division de celle de la terre, & à celui, que la longueur de celle-là doit avoir à la longueur de celle-ci selon les différentes distances de la comète au soleil : à l'aide de cette règle il est bien aisé de voir au premier coup d'œil quelle est la distance, & la position de la corde, qui donnera à-peu-près ces rapports.

XV. Il y a ensuite un rapport, que les distances raccourcies à la terre doivent avoir entre elles, tiré des intervalles du temps écoulé entre les observations, & des mouvements en longitude, qui y répondent : il est fondé sur le mouvement de l'intersection du rayon vecteur avec la corde, qui comme je démontre, est presqu' exactement uniforme, quand la fleche est petite par rapport au même rayon. Quand la comète dans la seconde observation est ou en conjonction avec le soleil, ou en opposition, ou à une distance de lui égale à celle de la terre, on peut employer la seconde longitude telle, qu'on l'a observée : dans des circostances assez éloignées de celles-là, on doit y faire un petit changement de cette longitude, que l'on peut trouver aisément, même par une construction graphique grossière, & qui reste presque le même dans des différentes positions, lors qu'elles ne sont pas trop éloignées entre elles.

XVI. Il y a un rapport de la longueur de la corde de l'orbite de la comète multipliée par une valeur tirée des deux distances extrêmes au soleil à une valeur connue dépendemment de l'intervalle du temps écoulé entre les observations extrêmes. Ce rapport avec le précédent donne la manière de parvenir par une seule suite de fausses positions aux vraies valeurs, qui après donnent tous les éléments, tandis que dans la méthode commune on a besoin d'

une

une espèce de suite composée de différentes suites, ce qui est d' une longueur rebutante : on y parvient tant par une construction graphique très-simple, que par un calcul trigonométrique borné à la résolution de trois triangles obliquangles, & d' autant de rectangles. Ayant trouvé les distances, on y trouve par la même construction graphique, ou par un calcul trigonométrique bien simple tous les éléments de l' orbite.

XVII. Il y a une méthode, comme nous l' avons indiqué ci-dessus, pour parvenir directement à une équation exacte, & générale, qui s' étend à tous les cas de trois observations, même le plus éloignées entre elles, mais qui est impraticable dans l' exécution, à cause de la longueur immense du calcul, & de l' énorme élévation de son degré: il y en a une autre pour parvenir dans le cas des arcs moins longs à une équation de 16.^me^ degré, quand on veut y comprendre la réduction même de la seconde longitude par une valeur, qui dépend de l' inconnue: une troisième amène à une équation de 6.^me^ degré, quand on n' a pas besoin de cette réduction, ou qu' on la suppose déjà trouvée par une construction grossière. Mais à présent tout cela ne sert qu' à bien connoître la nature du problême, & à y exercer la Géométrie, & faire voir quelqu' adresse de calcul. Je ne me sers plus, pas même de cette dernière équation moins élevée. Pour celle-ci il y a la manière indiquée ci-dessus de la construire, qui est bien simple & élégante; mais après la méthode précédente des fausses positions, qui est incomparablement plus expeditive, & qui a tout le succès, tout cet appareil de calcul algébrique ne servira à rien pour l' usage pratique.

XVIII. Il y a la manière de voir d' un coup d' œil la suite des phénomènes par une construction graphique très-simple, & très-élégante tirée d' une très-belle proposition de Newton, que pareillement nous avons déjà indiquée : il a fait voir, que le centre d' un cercle, qui passe par le foyer, par le sommet de l' axe, & par le lieu de la comète, en marchant toujours dans la ligne droite, qui coupe la distance périhélie par le milieu à des angles droits, y va avec un mouvement uniforme, malgré la grande inégalité, & la courbure du mouvement du dernier de ces trois points. Il en résulte une manière d'une simplicité étonnante de trouver dans la parabole appliquée sur le plan de l'écliptique les lieux de la comète pour tel jour qu'on veut, & de diviser par-là la même parabole de dix en dix jours de tous les mois de son apparition: par le moyen de la parabole appliquée, on construit aisément l'autre projettée sur le même plan: mais il y a dans l'ouvrage un paragraphe entier qui donne plusieurs méthodes simples, & d'une construction élégante pour trouver le foyer, & la directrice de cette même parabole, qui par-là peut être construite immédiatement. Les divisions de la première donnent celles de la seconde: de la division de l'écliptique, qu'on fait à l'aide de la connoissance des temps, on tire celle de l'orbite de la terre: le tout ensemble donne les distances au soleil, & à la terre, les longitudes, & latitudes, que par le moyen d'une construction plane des triangles sphériques on réduit aisément aux ascensions droites & déclinaisons. Un chassis avec certaines lignes courbes fait voir d'un seul coup d'œil tout cela pour tout le temps de l'apparition, ce qui dirige l'Astronome après ces trois premières observations, pour trouver aisément la comète, quand encore elle est déjà très-foible, & que les nuages l'ont cachée plusieurs jours de suite.

XIX. Il y a l'usage des nouvelles formules différentielles de Trigonométrie, qui sont générales pour tous les cas, même pour ceux dans lesquels il n'y a rien de constant dans un triangle tant plan, que sphérique: par ce moyen on y évite le renouvellement d'une autre position. On y a l'exemple de tout ce calcul, & de toutes les opérations précédentes nécessaires pour trouver les éléments de l'orbite, & toute la suite des phénomènes, rédigé dans le plus grand détail en plusieurs tables, avec les explications de tout, ligne par ligne, ce qui en doit rendre très-facile l'imitation pour les comètes, qui surviendront.

XX. Il y a une autre méthode pour corriger les éléments trouvés par approximation, en employant les erreurs du résultat tiré de ces éléments, & comparé avec les deux observés, & avec les changements, qui dérivent dans ses mêmes résultats, quand

on

on change les mêmes éléments l'un après l'autre (*). On y fait voir, que par trois seuls entre eux, avec une longitude, & latitude observée, on peut déterminer les deux autres, & le lieu de la comète pour un temps donné: ainsi il suffit d'en changer trois seulement un par fois avec ce qui en dépend, & trouver les changements, qui en dérivent dans la longitude, & latitude d'un autre observation éloignée, & dans la seule longitude, ou seule latitude d'un troisième: on cherche par le moyen de tout cela les changements, que l'on doit faire tout à-la-fois à ces trois éléments, pour faire évanouir les trois erreurs du premier résultat: on y parvient par le moyen de trois équations du premier degré, qui ont les trois inconnues cherchées, & les ayant trouvées, on corrige les éléments, & on les accorde avec toutes les trois observations.

XXI. Mais cette exactitude pour l'ordinaire est inutile: il suffit de chercher les éléments par la construction, qui est si simple, & facile à exécuter. On les a par un à-peu-près, ce qui est assez pour voir, si la comète observée est une des anciennes déjà connues, ou toute nouvelle, & pour prévoir à-peu-près la route apparente, qu'elle tiendra dans tout le temps de son apparition, qui sont les objets, qu'on a communement en vue. Dans les orbites des planètes, que l'on voit habituellement, & dont les observations sont ordinairement plus exactes, on cherche tant qu'on peut l'exactitude dans la détermination de leurs éléments. Leurs orbites ont très-peu de changement d'une révolution à l'autre, & on doit les observer souvent dans les révolutions suivantes. Quant aux comètes l'Astronome, qui les a observées dans une apparition, ne les revoit presque jamais à leur retour. D'ailleurs leurs observations sont ordinairement bien peu exactes elles mêmes, ce qui empêche une entière exactitude dans la

(*) J'en ai trouvé après une autre beaucoup plus simple, qui se trouvera dans une des pièces correlatives ajoutées à l'ouvrage: elle n'exige, que le changement de deux seuls éléments, & est commune aussi aux orbites elliptiques tant des comètes, que des planètes.

la détermination des éléments. Il faut ajouter, qu'on y trouve au retour des changements occasionés par l' action des planètes. L'exactitude procurée par tous les moyens, que je propose, peut servir seulement, quand il s'agit de déterminer une ellipse dans le cas que l' orbite d' une comète s' éloigne beaucoup de la forme parabolique dans un grand arc observé : on en verra la méthode dans une des pièces correlatives qu' on trouvera après cet Opuscule.

§. I.

Idée générale de la méthode (*).

1. DANS la fig. 1. (Tab. 1) S est le soleil, T, T', T'' sont les lieux de la terre dans les trois observations, C, C', C'' les lieux correspondants de la comète, P, P', P'' leurs projections sur le plan de l' écliptique, t, c, p les intersections des rayons ST', SC', SP' avec les cordes TT'', CC'', PP'': CI est une droite parallèle & égale à la PP'', qui rencontrera la P''C'' prolongée, s' il le faut, en I. Je suppose les observations si peu éloignées entre elles, que les fleches T't, C'c, P'p, soient petites par rapport à ces rayons; mais non pas si peu éloignées, que le mouvement de la comète en longitude soit insensible, ou si petit, que les erreurs des observations soient considérables, par rapport à ce mouvement. Ordinairement on peut employer des observations faites dans 10, ou 20 jours : quelquefois on peut prendre celles de trois jours, & quelquefois celles de 30 encore.

2. On a par observation les trois longitudes de la comète déterminées par les directions TP, T'P', T''P'', & trois latitudes PTC, P'T'C', P''T''C'': par les tables astronomiques, ou par la connoissance des temps on a les trois longitudes de la terre déterminées par les directions ST, ST', ST'', avec ces mêmes distan-

(*) On répète ici & on répétera ensuite plusieurs choses, qui se trouvent dans la préface, qui a été faite après cet ouvrage de manière à donner d' avance une idée du contenu sans l' embarras de regarder les figures.

stances au soleil : on a aussi par les éléments de l' Astronomie, que l' orbite de la terre est presque circulaire concentrique au soleil, son excentricité n' étant que 0,017 de la distance moyenne, & par la théorie de la gravité générale de Newton on sait, que les aires terminées au soleil sont proportionnelles aux temps, & que le quarré de la vîtesse dans la parabole est réciproquement proportionnel à la distance au soleil étant le double de celui qu' on a dans le cercle à pareille distance. Par ces données, & par les propriétés géométriques de la parabole on déterminera celle, qui est décrite par la comète, & le point dans lequel elle doit se trouver sur son perimètre à un temps donné, sa distance au soleil, & à la terre, sa longitude & latitude géocentriques.

3. Le fondement principal de la solution sera la substitution d' un mouvement rectiligne, & uniforme au curviligne & inégal. Le mouvement de la comète considéré rectiligne & uniforme a été employé par Newton dans son Arithmétique Universelle, & dans le premier livre de ses Principes, & par M. Bouguer dans les Mémoires de l' Académie pour l'année 1733 : mais dans ma Dissertation *de Cometis* de l'année 1746 j' ai fait voir le défaut de ces méthodes & la différence de la mienne que j' ai ébauché alors, & que j' ai perfectionné après de manière à rendre très-facile, & très-approchante de l' exactitude cette recherche, qui en suivant les méthodes généralement employées par les Astronomes est très-longue, & pénible.

4. Premièrement je trouve, que quand les aires sont proportionnelles au temps, quoique la vîtesse du mobile dans la courbe soit très-inégale, la vîtesse de l' intersection du rayon vecteur avec la corde est très-approchante de l' égalité dans les arcs, qui ont la fleche petite par rapport au même rayon. De-là en substituant les intersections des rayons vecteurs de la comète, & de la terre dans la seconde observation aux points de leurs arcs, je tire la raison des distances raccourcies de la comète à la terre entre elles : ces distances, les vraies au soleil, & le rapport de leur somme, & de la corde de l' arc parabolique de la comète à l' espace que

la

la terre devroit parcourir dans le même temps par son mouvement moyen dans un cercle de sa distance moyenne au soleil. La substitution de ces intersections change la longitude observée par la droite T'P' en une longitude, qui seroit déterminée par la droite *tp*. Mais premièrement il est bien aisé de voir, que dans les conjonctions de la comète au soleil & dans leurs oppositions ces deux lignes ont la même direction, l' une tombant sur l' autre, & je démontre, que dans le cas de l'égalité des distances de la comète & de la terre au soleil ces deux lignes sont parallèles entr' elles : ainsi dans ces circonstances, qui ne sont pas rares, il n' y a aucune réduction à faire pour substituer une longitude à l' autre, & dans les positions peu éloignées de celles-là, la réduction, qui répond à cette substitution, est si petite, qu'on peut la négliger sans conséquence. Dans des positions encore beaucoup plus éloignées de ces circonstances on a très-souvent une approximation bien satisfaisante, même sans avoir fait cette réduction.

5. En second lieu j' ai une méthode bien simple & bien courte dans l' exécution, par laquelle à l' aide de la seconde latitude on trouve cette réduction de manière que sans aucune erreur sensible on peut employer le mouvement des intersections du rayon avec la corde aux points des arcs, & par-là le mouvement rectiligne & uniforme au mouvement curviligne & inégal. Pour trouver cette réduction j' employe la fleche de l' arc parabolique prise sur le second rayon vecteur, & je la trouve à l'aide de la fleche correspondante de l' arc de la terre : on trouve cette seconde aisément & elle est à la première à très-peu-près en la raison réciproque des quarrés des distances au soleil, puisque ces deux fleches sont à-peu-près les mesures des effets de la gravité générale.

6. Ayant réduit cette seconde longitude, quand il le faut, j'employe un théorème essentiel pour ma méthode, appuyé sur le mouvement rectiligne & uniforme, qu'on a substitué au curviligne & inégal. Ce théorème porte, que la raison d'une des trois distances raccourcies de la comète à la terre à un autre quelcon-

que

que est composée de la directe des intervalles des temps écoulés entre les deux observations y appartenantes & la troisième, & de la réciproque des mouvements en longitude qui répondent à ce temps: c'est de ce théorème que l'on tire toute la facilité de la solution du problême soit par une construction graphique bien simple, soit par la résolution d'un petit nombre de triangles, ou par une équation de sixième degré, qui a aussi une construction très-élégante: mais les deux premières méthodes sont beaucoup plus aisées pour la pratique que cette troisième.

7. A ce théorème j'en ajoute un autre qui répond à la longueur de la corde. Si l'on nomme a le quarré du double espace qui seroit parcouru par le mouvement moyen de la terre dans le temps écoulé entre la première & la troisième observation, b la somme des deux distances extrêmes de la comète au soleil, c la corde; on doit avoir $bc^2 = a$, quand l'arc parabolique est bien petit, & quand il est un peu plus grand, on y ajoute une petite correction au premier membre, par laquelle on doit trouver $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$. On tire cette correction de la petite inégalité qu'on trouve dans la vîtesse de l'intersection, en comparant cette vîtesse à la vîtesse de la comète dans l'arc. On détermine une petite inégalité de la première, & par-là on trouve la vîtesse moyenne de cette intersection, & le point de l'arc dans lequel la comète a la vîtesse égale à cette vîtesse moyenne. On trouve très-aisément la valeur a par un logarithme constant & le double logarithme du temps total réduit en minutes.

8. D'après ces principes on construit un cercle arbitraire, qui représente l'écliptique avec le soleil dans son centre, & ayant tiré trois de ces rayons dans la direction opposée à la longitude du soleil, qui répond aux trois observations, on y prend d'une échelle de 100 parties les trois distances de la terre au soleil qui marquent les trois positions de la terre: on tire de ces trois points trois lignes indéterminées dans la direction des trois longitudes observées de la comète, qui font avec chacun des trois rayons vecteurs de la terre un angle égal à l'élongation de la comète

au soleil, c' est-à-dire à la différence de leurs longitudes. On choisit pour la première position une seconde distance raccourcie de la comète à la terre, & pour ne pas la choisir trop éloignée de la vraie il y a un indice de sa longueur pris de la longueur & de la position de la corde CC'' de l' arc parabolique. Si la distance de la comète au soleil est double de la distance de la terre, cette corde doit être à-peu-près égale à la corde TT'' de l' arc terrestre qu' on a, ayant les trois positions de la terre : si cette distance en est la moitié, la corde parabolique sera double de celle de la terre, ce qui dérive de la raison des vîtesses dans la théorie de la gravité générale (num. 2). Ainsi le changement de la corde est beaucoup plus grand que celui des distances, ce qui rend beaucoup plus facile le jugement qu' on doit porter sur sa longueur correlative aux distances intermédiaires. La corde PP'' & la distance SP' réduite au plan de l' écliptique sont toujours plus petites que les vraies CC'', & SC' de l' orbite inclinée, & on juge aisément de cette différence par les latitudes, qui doivent élever les points de cette orbite perpendiculairement au dessus des points des projections P, P'' en C, C'' : cette élévation est plus grande ou plus petite en raison de la distance à la terre raccourcie & de la tangente de la latitude : le quarré de la distance SP' est augmenté par le quarré de l' élévation $P'C'$, & le quarré de la corde PP'' par le quarré de la différence, ou somme IC'' des deux élévations, selon que les latitudes seront conformes, ou contraires. La position de la corde réduite doit être telle que cette corde étant terminée par les deux directions des longitudes extrêmes de la comète soit coupée en raison des deux intervalles des temps écoulés entre l' observation du milieu & les extrêmes en un point, qui doit se trouver très-près de celle de la seconde longitude pour laisser sur le rayon vecteur solaire, qui la coupe en cette raison, un très-petit espace pour la flèche.

9. On approchera le limbe d' un morceau de papier (*) à la corde

(*) Ce papier n' est pas représenté ici dans la figure, mais son bord avec les points GpG', qu' on doit y marquer, quand il se trouve sur la corde TT'' est de de l' arc terrestre en y marquant trois points G, p, G' à côté des trois T, t, T'': on le promenera en avant & en arrière, de manière que le point p se trouve très-près de la ligne de la seconde longitude entr' elle & le soleil pour laisser du côté opposé à celui-ci le petit intervalle, qui doit répondre à la flèche de l' arc parabolique, & on fera toujours que les distances des ces deux points G, G' aux deux lignes des longitudes extrêmes soient à-peu-près en raison des intervalles pG, pG' en allant au de-là de ces lignes par rapport au même point p, ou restant au de-çà, selon que par les indices, que nous avons donnés dans le numéro précédent, on jugera que la corde réduite doit être plus petite, ou plus grande que la terrestre. On arrivera aisément avec un peu d' exercice à une position, qui ne soit pas trop éloignée de la véritable. Quand le mouvement diurne de la comète en longitude ne sera pas trop petit, en éloignant, ou approchant très-peu le papier de l' arc terrestre, sa partie interceptée entre les directions des longitudes extrêmes changera beaucoup sa longueur, & les limites de la probabilité de la vraie longueur de la corde rapportée à la distance au soleil seront bien étroites: dans la même première position on ne s' éloignera pas beaucoup de la véritable.

10. Mais à tout événement, quand on aura choisi cette position pour la première, ayant aussi le point S, on aura la distance raccourcie au soleil, & par le moyen des angles des latitudes qu' on aura préparés à part, comme nous le dirons ci-après, on trouvera aisément l' élévation de la comète sur le plan de l' écliptique dans cette position, & la distance entière au soleil, qui donneront les éléments pour la réduction de la seconde longitude. Cette réduction étant faite, on tirera de la seconde distance raccourcie à la terre avec un calcul numérique très-court les deux extrêmes, qui donneront les deux distances raccourcies au soleil,

 & à

est marqué sur la figure en HH', où il doit être transporté, pour former un jugement sur la position qu' il doit avoir d' après le jugement sur les distances, que les points G, G' doivent avoir aux droites TE, T''E'' selon ce qu' on propose ici.

& à l' aide des angles des latitudes on trouvera les élévations sur le plan de l' écliptique. De-là à l' aide d' un angle droit qu' on aura préparé avec ceux des latitudes comme on le verra aussi, on déterminera la première, & la troisième distance entière au soleil, & la corde, ce qui donnera les valeurs b, c pour la formule (num. 7) $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$. Si l' on trouve la valeur de la formule plus grande ou plus petite que la valeur a, on changera la seconde distance raccourcie, qui presque toujours devra être diminuée dans le premier cas, augmentée dans le second: les erreurs de la formule trouvées dans les deux positions donneront par la règle connue celle qu' on devra prendre, & ainsi par une seule suite de positions on arrivera à la vraie distance: très-souvent on s' en trouvera à la seule troisième position assez près pour pouvoir trouver l' orbite très-approchante de la vraie, & voir si la comète est une des comètes déjà connues, & quelle sera sa route apparente dans le reste de son apparition.

11. Les éléments de l' orbite seront tirés très-aisément de la construction même sur le même papier de la manière, que nous exposerons ci-après. La première & la plus facile à trouver sera la ligne des nœuds, & l' inclinaison de l' orbite: après on trouvera la directrice de la parabole, qui donnera la distance périhélie, & la distance du périhélie au nœud dans l' orbite: on trouvera aisément par la construction même le lieu du périhélie dans l' écliptique, & le temps dans lequel la comète y arrive: ayant encore la direction du mouvement direct, ou retrograde qu' on verra sur le même papier, on aura tous les six éléments cherchés.

12. Pour avoir le temps de l' arrivée au périhélie par construction, je fais usage d' un très-beau théorème, qui a été trouvé, & démontré par Newton dans le premier livre des principes, & qui sert admirablement bien pour diviser la parabole décrite selon les éléments trouvés de manière à y marquer les mois & les jours, dans lesquels la comète s' y trouvera, d' où l' on tire aisément par la seule construction les longitudes & latitudes géocentriques pour ces jours-là: à cet effet on préparera sur le même papier l' orbi-

te

te de la terre, qu' on peut prendre pour circulaire, en ayant égard seulement à la petite excentricité, & à la longueur du rayon égal à la distance moyenne de 100 parties de l'échelle choisie. Voici le théorème. *Tandis que la comète a un mouvement très-inégal dans le perimètre de la parabole, si l'on conçoit un cercle qui passe par son lieu variable, & par les lieux du soleil, & du périhélie, qui sont permanents; le centre de ce cercle a un mouvement uniforme dans la ligne droite qui coupe par le milieu perpendiculairement la distance périhélie*. On verra ci-après l'usage de ce beau théorème pour ces deux objets, c' est-à-dire pour déterminer l'arrivée au périhélie, & pour la division de la parabole par construction pour y marquer les mois & les jours de son arrivée aux points de cette division.

13. Ce qu' on a par construction, suffit pour reconnoître une comète, si elle a paru, & a été bien observée une autre fois, & pour avoir une idée de sa route apparente, pour laquelle j' employe la construction de certaines courbes, qui font tout voir d' un coup d' œil. Je prends les abscisses sur une ligne droite divisée en mois & jours de dix en dix, & pour les ordonnées j' employe des lignes droites proportionnelles aux longitudes, latitudes, distances au soleil, & à la terre, qu' on tire aisément de la construction indiquée dans le numéro précédent: la longueur de ces ordonnées est indiquée par des lignes parallèles à celle des abscisses tirées à des intervalles marqués à côté, comme on fait sur les cartes géographiques. On a pour ces quatre objets quatre courbes: on peut en ajouter deux autres pour les ascensions droites & déclinaisons tirées des longitudes & latitudes par un calcul trigonométrique, ou par une construction linéaire plane des triangles sphériques, que j'ai publiée il y a long-temps, & qu' on aura ici dans le premier des Mémoires correlatifs. Tout cela guide admirablement bien l'Astronome dans ses observations, quand les nuages ont caché sa comète plusieurs jours. Quand on sait à-peu-près les éléments de l'orbite, il n'est pas difficile de les corriger par des observations plus éloignées, & je donne des méthodes pour cela aussi.

14. Si

14. Si l'on veut une approximation beaucoup plus grande, on peut après deux ou trois positions employées dans la construction se servir du calcul trigonométrique. Pour la réduction de la seconde longitude, quand on la croit nécessaire, comme elle se réduit presque toujours à une quantité bien petite, on peut employer celle qu'on a tirée de la construction, parcequ'elle n'est pas changée sensiblement par le petit changement de la distance déjà trouvée par cette construction. Alors la solution de trois triangles rectilignes obliquangles & de trois autres rectangles donnera les distances au soleil & la corde, qui répondent plus exactement à la position, & ayant trouvé l'accord de la valeur de $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$ avec la valeur a, on en tirera aisément aussi tous les éléments de l'orbite par un calcul trigonométrique très-simple.

15. Quand on peut négliger la réduction de la seconde longitude, ou que l'ayant trouvée par construction on l'a employée pour avoir cette longitude réduite, on peut avoir aussi la solution du problême par une équation de sixième degré ; mais pour cela il faut avoir un arc beaucoup plus petit que dans la méthode des fausses positions. C'est la méthode que j'avois donnée la première : mais depuis j'ai simplifié beaucoup, & étendu la solution du problême en y substituant l'autre méthode que j'ai développée ci-dessus, & qu'on verra beaucoup mieux dans les paragraphes suivants & dans l'exemple que j'ajouterai à la fin de cet Opuscule.

§. II.

Du mouvement de l'intersection du rayon vecteur avec la corde.

16. Si l'on conçoit les cordes CC', $C'C''$, les segments interceptés entre ces cordes & les arcs seront très-petits par rapport aux secteurs CSC', $C'SC''$: ainsi la raison de ces secteurs sera sensiblement la même que celle des triangles CSC', $C'SC''$, qui n'en diffèrent que par ces segments : or les secteurs sont comme

les

les temps (num. 2), & les triangles comme Cc, cC'', qui sont les bases des triangles CSc, cSC'' terminés en S, & des triangles $CC'c$, $cC'C''$ terminés en C': donc les segments Cc, cC'' de la corde CC'', sont sensiblement comme les temps dans lesquels ils sont parcourus par son intersection avec le rayon vecteur SC': d'où l'on tire que le mouvement de cette intersection est sensiblement uniforme.

17. La division de la corde par cette intersection en raison des temps sera presqu'exacte vers son milieu, où les triangles seront égaux & les segments presqu'égaux. Il y a un point dans lequel cette raison est exacte; mais sans chercher ce point, on voit bien que dans les arcs, qui ont la flèche petite par rapport au rayon vecteur, comme on les suppose dans cet Opuscule, quand les deux temps seront à-peu-près égaux, les deux segments, qu'on néglige, déjà très-petits, & alors presqu'égaux laisseront dans cette raison une différence insensible.

18. On voit aussi que cette propriété de la division de la corde par son intersection avec le rayon vecteur en raison des temps dans les arcs pas trop grands a lieu dans toutes les orbites décrites par une force centrale, parceque toutes ont les aires proportionnelles aux temps. Ainsi dans la corde terrestre TT'' les deux segments Tt, tT'' seront aussi sensiblement en la même raison des temps.

19. On pourra déterminer la petite inégalité, qui pourtant se trouve dans la vîtesse de l'intersection du rayon avec la corde, ce qui sera utile pour pouvoir employer des arcs un peu plus grands en déterminant pour eux la correction $\frac{c^4}{12b}$ de la formule (num. 7). Soit CAC' (fig. 2) l'arc d'une courbe décrite avec la proportionalité des secteurs terminés en S aux temps: qu'on conçoive deux rayons vecteurs SA, Sa infiniment peu éloignés l'un de l'autre, qui rencontrent la corde CC' en B, b, avec la droite SG perpendiculaire à la même corde: on pourra considérer le triangle BSb & le secteur ASa comme deux triangles semblables, ou comme deux secteurs circulaires: ainsi le premier sera

au

au second comme SB^2 est à SA^2, & comme le premier est $=$ $Bb \times \frac{1}{2} SG$, le second sera $= \frac{\frac{1}{2} SG \times SA^2 \times Bb}{SB^2}$. Or la vîtesse de l' intersection B est comme l'espace Bb divisé par le temps y employé, qui est proportionnel au secteur ASa. Donc on aura la raison de la vîtesse cherchée en divisant Bb par la valeur de ce secteur, ce qui donne $\frac{2SB^2}{SG \times SA^2}$, & comme 2, & SG sont des valeurs constantes, cette vîtesse sera comme la fraction $\frac{SB^2}{SA^2}$.

20. Dans les deux points extrêmes d' une corde quelconque A, A' parallèle à CC', cette vîtesse sera la même, puisqu' on aura $\frac{SB'^2}{SA'^2} = \frac{SB^2}{SA^2}$.

21. Si l' arc est décrit par des forces toujours dirigées vers le centre S, il sera par tout concave vers le même point, & si cet arc n'est pas trop grand, il y aura une tangente KDK' parallèle à la corde CC' placée au de-là d' elle, de manière que le rayon vecteur terminé au contact D la coupera en un point F, & coupera les autres AA' parallèles en des points I. La vîtesse en question sera la plus grande en C, & C': elle ira continuellement en diminuant de C jusqu' à F, & en augmentant de F jusqu' en C', ayant un *minimum* en F: mais cette inégalité sera toujours petite, quand la flèche DF sera petite par rapport au rayon SD : car on aura toujours $\frac{SF^2}{SI^2} = \frac{SB^2}{SA^2}$, & comme SF est constante, la vîtesse de l' intersection B sera en la raison réciproque du quarré de la seule SI, qui sera la plus petite, quand les points A, A' iront en C, C', le point I tombant sur F, & sera d' autant plus grande que ces deux points seront plus près du point D, la droite SI ayant un *maximum*, quand ces mêmes points iront en D, ou elle deviendra égale à SD. Comme la grandeur de cette ligne n' aura jamais un changement plus grand que la flèche DF, sa variation & la variation de la vîtesse, qui lui est réciproquement proportionnelle, sera toujours petite.

22. Il

22. Il y aura une vîtesse moyenne, avec laquelle dans le même temps on décriroit la même corde par un mouvement uniforme : nous allons chercher le point Q de l'arc parabolique, dans lequel la comète a la vîtesse égale à cette vîtesse moyenne. La longueur du rayon SQ est l' objet principal de toutes ces considérations, parceque nous en tirerons la correction de la formule du num. 7 selon le num. 19. Nous trouverons cette longueur d'abord par rapport au rayon SD, & à sa flèche DF, d' où nous passerons à sa valeur par rapport à la corde $CC' = c$, & à la somme des rayons SC, SC', qui est $= b$.

23. Que l' on conçoive les trois lignes CH, DT, C'H' perpendiculaires à la directrice de la parabole, qui a en S le foyer, K, K' étant les rencontres des deux extrêmes avec la tangente tirée par D. On a par les propriétés de cette courbe les théorèmes suivants: 1°. ces trois lignes sont égales aux trois rayons SC, SD, SC', & parallèles à l' axe, d' où l' on tire que la perpendiculaire tirée du foyer à la directrice passe par le sommet de la parabole & est double de la distance de ce sommet au foyer : 2°. celle du milieu TD étant prolongée formera le diamètre qui a pour ordonnée la corde CC', & la coupera par le milieu en E : 3°. les deux droites DE, DF également inclinées à la tangente KDK', le seront aussi à cette corde, & par-là seront égales : 4°. le paramètre de ce diamètre sera $= 4SD$, & par-là on aura la valeur de ces deux lignes $= \frac{EC^2}{4SD} = \frac{c^2}{16SD}$: 5°. le paramètre de l' axe sera quadruple de la distance du sommet au foyer, & la demi-ordonnée à l' axe tiré par le foyer double de cette distance : 6°. la perpendiculaire ET sera la demi-somme des deux autres CH, CH', c'est-à-dire des deux rayons $SC, SC' = \frac{1}{2}b$, & par-là $SD = DT = ET - ED = \frac{1}{2}b - \frac{c^2}{16SD}$, ou en mettant $\frac{1}{2}b$ pour SD dans le second terme qui est petit, $SD = \frac{1}{2}b - \frac{c^2}{8b}$: 7°. l' espace du segment parabolique CDC' est égal à $\frac{2}{3}$ du parallélogramme CKK'C', d' où l' on tire que si l' on prend EN

=

$= \frac{2}{3}$ ED, & qu' on tire par N une droite parallèle à la corde CC', qui rencontre en O le rayon SD & en M, M' les perpendiculaires CH, CH', le parallélogramme CMM'C' sera égal au segment parabolique : si la même droite MM' rencontre en L, L' les rayons SC, SC', on pourra prendre ce même parallélogramme pour égal à l' espace quadriligne CLL'C' à cause de la petitesse des deux triangles CLM, C'L'M' : ainsi on pourra prendre le triangle LSL' pour égal au secteur parabolique.

24. Il suit de-là que si la droite MOM' rencontre le rayon SA, S*a* en R, *r*, le triangle RS*r* exprimera le temps du mouvement par B*b* avec la vîtesse moyenne, tandis que le secteur AS*a* l' exprime pour le mouvement actuel inégal. Puisque si l' on conçoit la corde CC' divisée en un nombre infini de particules égales B*b*, on voit aisément, que les aires de tous les triangles RS*r* seront égales entre elles, comme celles des triangles BS*b* $=$ $\frac{1}{2}$B*b* $\times$ SG, à cause de la raison constante, que celles-ci ont à celles-là, qui est celle de SB^2 à SR^2 ou SC^2 à SL^2 : ainsi ayant exprimé le temps employé dans la particule constante B*b* par le triangle RS*r*, on aura ce temps constant, & par-là une vîtesse constante : de l'autre côté le temps total exprimé dans ce mouvement par le triangle LSL' sera égal au temps total exprimé dans le mouvement actuel inégal par le secteur CSC', d' où il suit que ce premier mouvement sera le moyen, & sa vîtesse la vîtesse moyenne.

25. Or les vîtesses de ces deux mouvements la moyenne, & l' actuelle en B seront en la raison réciproque des temps employés dans le même espace B*b* : donc la vîtesse moyenne sera à l' actuelle comme le petit secteur AS*a* est au triangle RS*r*, c'est-à-dire comme SA^2 à SR^2. Quand le point A ira en D, la raison que la vîtesse moyenne aura à la vîtesse actuelle en F deviendra celle de SD^2 à SO^2. Mais alors la vîtesse actuelle de l' intersection B dans la corde sera à la vîtesse actuelle de la comète en D comme SF à SD, puisque la vîtesse actuelle de cette intersection est généralement à la vîtesse de la comète comme la petite droite B*b* au petit arc A*a*, qui en sont les espaces correspondants au même temps, & dans ce cas-là la corde du petit

arc

arc Aa prenant la direction de la tangente deviendra parallèle à la corde CC', c' est-à-dire à Bb, & on dira $Bb:Aa::SB:SA$, c'est-à-dire $::SF:SD$. Ainsi la vîtesse moyenne de cette intersection sera à la vîtesse actuelle de la comète en D, qui doit être composée de ces deux raisons, comme $SD^2 \times SF : SO^2 \times SD :: SD \times SF : SO^2$.

26. De-là on tirera à la fin la détermination du rayon SQ terminé au point Q, dans lequel la comète a sa vîtesse actuelle égale à la moyenne de l' intersection du rayon vecteur avec la corde (num. 22). Puisque le quarré de la vîtesse de la comète étant (num. 2) en raison réciproque de la distance au soleil, on dira $SD^2 \times SF^2 : SO^4 :: SD : SQ = \frac{SO^4}{SD \times SF^2}$. Comme DO est $\frac{1}{3}$ de la flèche DF (num. 23), on a par-là la valeur du rayon SQ cherché (num. 22) par le rayon SD, & par sa flèche DF.

27. La petitesse de cette flèche par rapport au même rayon donne une expression beaucoup plus simple du rayon cherché. Que l'on prenne SP troisième continuellement proportionnelle après SD, SO, & $SV = SQ$: la raison de la vîtesse moyenne de l' intersection à la vîtesse actuelle de la comète en D étoit composée des deux $SD^2:SO^2$, & $SF:SD$: la première étant $= SD:SP$, la composée restera $SF:SP$. Ainsi on dira $SD:SV = SQ :: SF^2:SP^2$: or on a cette proportion $SD:SO::DO:OP$: & comme SD est sensiblement égale à SO, on aura $OP = OD = \frac{1}{3}DF$, & par-là $= FP$. Ainsi SP sera sensiblement égale à la moyenne tant arithmétiquement que géométriquement proportionnelle entre SF, SO, d' où l' on tire que $SF:SO::SF^2:SP^2$, & par-là $SD:SV::SF:SO$, & $SD:DV::SF:FO$: comme on a sensiblement $SD = SF$, on aura aussi $DV = FO = \frac{2}{3}DF$. Voici donc une détermination beaucoup plus simple, & plus élégante du rayon cherché par rapport au rayon SD, & à sa flèche DF. *Ajoutez à ce rayon deux tiers de cette flèche, & vous aurez le rayon cherché, c' est-à-dire la distance au soleil, dans laquelle la comète aura la vîtesse actuelle égale à la moyenne de l' intersection du rayon vecteur avec la corde.*

 28. Un

28. Un petit calcul auroit tiré le même résultat de la formule $SQ = \frac{SO^4}{SD \times SF^2}$, en y négligeant les termes, qui ont les puissances supérieures de la valeur x, qui soit $= \frac{1}{3}DF$. Si l'on fait encore $SD = n$, on aura $DF = 3x$, & $\frac{SO^4}{SD \times SF^2} = \frac{(n-x)^4}{n(n-3x)^2} = \frac{n^4 - 4n^3x}{n^3 - 6n^2x} = n + 2x$. Mais j' aime beaucoup la Géométrie un peu trop méprisée, ou au moins négligée aujourd' hui.

29. Cette expression donne aussi la valeur de la même distance par la somme des rayons extrêmes SC, SC' $= b$, & par la corde CC' $= c$, ce que nous avons proposé d' en tirer (num. 22). C' est assez d' y employer la valeur (num. 23) $SD = \frac{1}{2}b - \frac{c^2}{8b}$, & $DF = \frac{c^2}{16SD} = \frac{c^2}{8b}$. On aura $SQ = SD + \frac{2}{3}DF = \frac{1}{2}b - \frac{c^2}{8b} + \frac{c^2}{12b} = \frac{1}{2}b - \frac{3c^2}{24b} + \frac{2c^2}{24b} = \frac{1}{2}b - \frac{c^2}{24b}$. Nous verrons dans le paragraphe suivant comment on tire de cette valeur la formule $b - \frac{c^2}{12b} = a$, & comment on trouve la valeur a.

§. III.

De la comparaison de la corde parabolique avec l' espace, qui répond dans le même temps à la vîtesse du mouvement moyen de la terre.

30. QUE l' on nomme u l' espace, qui répond au même temps, & à la vîtesse du mouvement moyen de la terre dans le cercle, qui a pour rayon sa distance moyenne au soleil $= 1$. Le quarré de l' espace, que la comète parcoureroit dans le même temps à la même distance au soleil, sera $= 2u^2$ (num. 2), & on aura cette proportion : $SQ = \frac{1}{2}b - \frac{c^2}{24b} : 1 :: 2u^2 : c^2$; parceque c' est l' espace, qui répond à la vîtesse de la comète en Q,

c' est-c' est-à-dire à la vîtesse moyenne que l' intersection a sur la corde CC'. Donc on a $\frac{1}{2}bc^2 - \frac{c^4}{24b} = 2u^2$, & faisant $a = 4u^2$, on aura $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$, qui est la formule du num. 7. Dans cette formule la valeur a est le quarré de $2u$, c' est-à-dire du double espace, qui répond au mouvement moyen de la terre dans le même temps. Il faut voir, comment on doit trouver cette valeur par le temps donné. Nous appellerons t, t' les intervalles des temps entre les deux premières observations, & entre les deux dernières réduites en minutes, en comptant toutes les six secondes pour des dixièmes, & nous ferons le temps total $t + t' = t''$.

31. Le temps de la révolution annuelle de la terre par rapport aux étoiles fixes réduit en secondes horaires soit $= p$, la raison du diamètre du cercle à sa circonférence $= 1 : q$: cette circonférence dans ce cercle de l' orbite terrestre, qui a le rayon $= 1$, sera $= 2q$: ayant fait cette proportion $p : 2q :: 1' = 60''$: $\frac{120''q}{p}$, ce sera l' espace qui répond à une minute de temps dans ce mouvement, & on aura $\frac{120''qt''}{p}$ pour le nombre de minutes $= t''$: le quarré de $\frac{240''qt''}{p}$ sera la valeur cherchée $= a$.

32. La révolution annuelle de la terre par rapport aux fixes est de $365^j.6^h.9'.10'' = 31558150'' = p$: la raison de la circonférence au diamètre très-connue donne $q = 3,1415927$: ainsi on a $\frac{240qt''}{p} = \frac{24 \times 3,1415927t''}{3155815}$. Et prenant le complément logarithmique pour le diviseur, on aura pour logarithme de cette fraction $1,3802112 + 0,4971499 + \bar{3},5008884 + \log. t'' = 5,3782495 + \log. t''$, & son double sera $\log. a = 0,7564990 + 2 \log. t''$. Voici donc la règle pour trouver a. *Prenez le double logarithme du temps total réduit en minutes, ajoutez-y le logarithme constant 0,7564990, & pour avoir la valeur cherchée en fractions décimales, mettez avant le nombre, qui répond*

pond

pond dans les tables au logarithme, que vous aurez indépendamment de sa caractéristique, autant de 0,00 *&c. qu'il y aura d'unités dans le complément de cette caractéristique à dix.*

§. IV.

De la réduction de la seconde longitude observée dans les arcs à celle, qu'on auroit observée dans les cordes.

33. Il s'agit de trouver (fig. 1) la différence de direction des deux droites $T'P'$, tp, puisque la première marque la longitude, qu'on a observée, la terre étant en T', & la comète en C', & la seconde celle, qu'on auroit observée, si la terre avoit été en t, & la comète en c. La différence de ces deux directions est la différence des deux petits angles $P'T'p$, $T'pt$, que nous trouverons de la manière suivante.

34. La solution dépend de la valeur de la petite ligne $T't$, qu'on trouve aisément. Dans le milieu de la corde elle ne diffère pas sensiblement du *sin. vers.* de la moitié de l'arc TT'', qui est sensiblement la mesure du mouvement du soleil en longitude, & dans les autres points on peut la prendre proportionnelle au rectangle $Tt \times tT''$, c'est-à-dire au produit des deux temps t, t'. Ainsi si l'on nomme v le *sin. vers.* de la demi-différence de la première longitude du soleil à la dernière, v' la ligne $T't$, en disant $\frac{1}{4}t''^2 : tt' : : v : v' = \frac{4tt'v}{t''^2}$; on aura la valeur cherchée de la ligne $T't = v'$.

35. Alors on aura les sinus des deux angles cherchés par les proportions suivantes.

I. $SC'^2 : ST'^2 = 1 : : T't : C'c = \frac{T't}{SC'^2}$ (num. 5).

II. $SC' : SP' : : C'c = \frac{T't}{SC'^2} : P'p = \frac{SP' \times T't}{SC'^3}$.

III. $SP' : ST' = 1 : : sin.\,ST'P' : sin.\,SP'T' = \frac{sin.\,ST'P'}{SP'}$.

IV. $tp : T't : : sin.\,ST'p : sin.\,T'pt = \frac{sin.\,ST'p \times T't}{tp}$.

V. $T'p : P'p = \frac{SP' \times T't}{SC'^3} : : sin.\,SP'T' = \frac{sin.\,ST'P'}{SP'} : sin.\,P'T'p = \frac{T't \times sin.\,ST'P'}{T'p \times SC'^3}$.

36. La

36. La quatrième donne le sinus d'un des deux angles cherchés, & la cinquième le sinus de l'autre, & comme on a la valeur $T't$ la même dans les expressions de ces deux sinus, & les valeurs $sin.ST'P'$, $T'p$ de la seconde sont presque les mêmes que $sin.ST'p$, tp de la première, on aura cette seconde en divisant la première par SC'^3.

37. Voici donc la manière très-simple de trouver la réduction cherchée. On a l'angle $ST'P'$, qui est l'élongation de la comète du soleil en longitude, c'est-à-dire la différence de la seconde longitude de la comète observée, & de la seconde du soleil calculée, & on peut le prendre pour l'angle $ST'p$: on aura aussi $T't = \frac{4tt'v}{t''^2} = v'$: ayant pris $T'P'$ pour une position quelconque on aura le premier angle $T'pt$ par son sinus $= \frac{sin.ST'P' \times T't}{tp}$, puisqu'on pourra mettre $T'P'$ pour tp. On aura aussi aisément par la construction, ou par un calcul trigonométrique simple, que nous indiquerons ci-après, la distance au soleil SC', & ôtant du logarithme du sinus de ce premier angle le triple logarithme de cette distance, on aura le log. du *sin.* du second. Si dans l'expression du premier on veut employer la ligne tp plutôt que la $T'P'$; on l'aura aisément par construction, en prenant sur la ligne SP' la $P'p = \frac{SP' \times T't}{SC'^3}$: cela vaudra beaucoup mieux, quand le temps t'' étant un peu plus long les flèches $T't$, $P'p$ ne seront pas assez petites par rapport à la $T'P'$: nous parlerons encore de ce cas ci-après.

38. On voit bien, que le premier angle sera plus grand ou plus petit que le second, selon que la distance SC' au soleil sera aussi plus grande ou plus petite que l'unité, qui est la distance de la terre : dans le cas de l'égalité de ces deux distances les deux angles seront égaux, & la réduction, qui en est la différence, sera $= 0$. Elle sera nulle aussi, quand la seconde observation aura été faite dans une conjonction ou opposition, parceque l'angle $ST'P'$ alors sera $= 0$, ou $= 180°$, & dans ces deux

cas

cas son sinus sera $= 0$, ce qui rendra tous les deux angles $= 0$. Dans le voisinage de cette position la réduction sera ordinairement très-petite, & on pourra la négliger par rapport à la petitesse du coefficient $sin. ST'P'$, ou $1 - \frac{1}{SC'^3}$. Ces cas sont très-fréquents, parceque si la comète se trouve plus près du soleil que la terre, très-souvent on la voit à cause de sa latitude dans la conjonction même, quand elle se plonge dans les rayons du soleil, ou quand elle s' en dégage : si elle en est plus éloignée que la terre, très-souvent on la voit en opposition avec lui, & dans les autres cas très-souvent elle se trouve dans une distance, qui s' éloigne peu de l' égalité. C' est la raison pour laquelle j' avois négligé cette réduction dans mes premiers Opuscules. Dans les deux premiers cas on peut choisir parmi les observations celles, qui sont faites près de la conjonction, ou opposition, & trouver par interpolation celle, qui répond à ce moment. Mais il vaut mieux changer la seconde longitude observée, en employant la réduction, puisque le calcul en est si facile.

39. La grande facilité de ce calcul est évidente. Pour le premier angle dans la valeur de son sinus $= \frac{sin. ST'P' \times T't}{tp}$ le numérateur est constant : ainsi ayant trouvé une fois son logarithme, on y ajoutera à chaque position le complément du logarithme de tp, c' est-à-dire de la distance $T'P'$, qu' on aura choisi, & pour la seconde on devra trouver la seule SC' pour faire la soustraction du triple de son logarithme : on n' aura besoin de faire cette opération, que deux ou trois fois au commencement, & pour ce qui regarde SC', qui est la seule ligne à trouver, on la trouvera assez bien par la seule construction, parceque une erreur, qui ne soit pas trop grande dans les valeurs tp, SC', ne changera que très-peu une quantité petite par elle même. La réduction trouvée, quand on s' est approché de la véritable valeur de la distance, servira pour toutes les positions suivantes, & pour l'équation de sixième degré, si on a envie de l'employer.

40. La formule de la réduction pourroit devenir très-défectueuse,

se dans le cas, qui est très-rare, que la distance de la comète à la terre soit trop petite, dans lequel cas le diviseur tp devenant trop petit, la valeur du sinus devient trop grande, & cette valeur pourroit devenir absurde, devenant plus grande que l' unité qui est le rayon. Cela arrive dans certains cas à toutes les méthodes, qui négligent les quantités non infiniment, mais physiquement petites : dans les formules différentielles de M. Cotes pour la Trigonométrie l' erreur va souvent à l' infini, quand on a des côtés, ou des angles de 90 degrés. On s' apercevra bien du cas, dans lequel la distance de la comète à la terre est trop petite par plusieurs indices, que nous proposerons ci-après : un de ces indices sera la grande vîtesse de son mouvement apparent. Comme en parité des distances de la comète, & de la terre au soleil, la vîtesse réelle de la première est à la vîtesse de la seconde comme $\sqrt{2}$ à 1, c' est-à-dire en une raison plus grande que de 14 à 10, leur vîtesse respective y sera toujours très-grande, ce qui laisse une vîtesse apparente très-grande dans le cas de la distance mutuelle trop petite : mais dans ce cas-là on peut déterminer aisément la réduction de cette autre manière.

41. Ayant pris la distance $T'P'$, on aura dans le triangle $ST'P'$ les deux côtés ST', $T'P'$, avec l'angle T'. On y trouvera par la Trigonométrie l' angle $T'SP'$, & le côté SP'. On a aussi la seconde latitude $P'T'C' = l'$, d' où on tirera aisément la valeur de $P'C' = T'P' \times tan.l'$, & dans le triangle rectangle $SP'C'$, on aura la distance SC'. Alors on trouvera $P'p = \frac{SP' \times T't}{SC'^3}$ (numér. 35. II) : ôtant $T't$, $P'p$ de ST', SP', on aura St, Sp, qui avec l' angle tSp donneront l' angle Stp : sa différence de l' angle $ST'P'$ donné sera la réduction cherchée.

42. On pourra se dispenser du calcul trigonométrique, & trouver l' angle $T'SP'$, & les distances SP', SC' par construction, & ayant pris la valeur $P'p$ de la formule tirer tp, ce qui donnera aussi par construction l' angle Stp. Mais dans le cas de la distance $T'P'$ petite, pour lequel principalement cette méthode doit

servir, il vaudra beaucoup mieux trouver par le calcul trigonométrique l' angle T'SP', & la distance SP': une petite erreur dans la distance SC' ne changera pas sensiblement la valeur de la petite ligne P'*p* employée pour avoir le côté S*p* du triangle S*tp*. Quand la distance T'P' n' est pas petite, la première méthode de la différence des deux petits angles donnera la correction avec une précision plus grande que celle qu' on peut espérer des observations communes, comme on verra aisément, si l' on fait usage de toutes les deux.

43. Les lignes T'*t*, C'*c* ne sont pas exactement les effets des deux gravités de la terre, & de la comète vers le soleil: on auroit ces deux effets, si l' on concevoit les tangentes menées par les deux extrémités T, C des arcs, & par les autres extrémités T'', C'' des lignes parallèles aux rayons ST, SP. Mais dans l' orbite de la terre cette ligne est presque exactement le double de la flèche du milieu, c' est-à-dire du *sin. vers.*, que nous avons employé, & la proportion du rectangle T*t*×*t*T'' pour la variation de la ligne T'*t* dans les autres points *t* est aussi presque exacte, le point S étant très-près du centre de l' orbite presque exactement circulaire. Dans l' arc parabolique le point S étant éloigné du centre du cercle osculateur, il y a un peu plus d' erreur dans la supposition qu' on a fait, de prendre la flèche C'*c* au milieu de la corde pour un effet de la gravité correspondant à celui qu'on a pour la terre, & en considérant la même ligne dans les autres positions comme proportionnelle au rectangle C*c*×*c*C'' pour faire par-tout les deux T'*t*, C'*c* réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances ST', SC': mais cette différence ne sera pas considérable, si la distance au soleil étant trop petite, l' arc parabolique n' est pas trop grand à cause de la grande vîtesse. D' ailleurs dans ce cas, on ne voit pas la comète plongée dans les rayons du soleil. On pourroit dans ces cas encore corriger la valeur de la ligne P'*p* plus exactement: mais on en évite la nécessité, si l' on employe des observations faites dans des temps beaucoup moins éloignés, qui avec un petit arc parabolique donneront un mouvement assez fort, pour pouvoir l' em-

plo-

ployer à la détermination de l' orbite, où l' on peut choisir des observations faites dans une plus grande élongation du soleil. La trop grande proximité du soleil sera indiquée par le voisinage des rayons trop vifs du crépuscule, par la trop grande vivacité de la lumière de la comète, par le mouvement trop fort réuni à cette vivacité: mais on la connoîtra beaucoup mieux par le premier effet de la détermination de la distance faite après avoir employé la réduction de la seconde longitude trouvée par les méthodes de ce paragraphe, qui ne peut pas porter une grande erreur dans la distance.

§. V.

De la proportion des trois distances raccourcies à la terre.

44. LES points T, t, T'': P, p, P'' dans la fig. 3 soient les mêmes, que dans la fig. 1: qu' on conçoive la ligne P''D parallèle & égale à la T''T, & la PD rencontrée en d par la pd parallèle à P''D, avec les deux lignes TD, Td. La droite PD sera l'orbite relative du mouvement par les cordes pour la terre considérée comme immobile en T. La ligne TD sera parallèle, & égale à la T''P'', puisque ces deux lignes enferment les deux TT'', DP'' parallèles, & égales, & la ligne Td sera parallèle, & égale à tp par une raison semblable; parceque on aura les deux TT'', Tt, & les deux PP'', Pp proportionnelles aux mêmes temps d'où l'on tire ces proportions, DP'': dp :: PP'': Pp :: TT'': Tt: & puisque on a DP'' $=$ TT'', on aura aussi $dp =$ Tt, c'est-à-dire deux lignes parallèles, & égales enfermés par les deux Td, tp.

45. Donc TP, Td, TD sont les directions des trois longitudes, les extrêmes observées, & la moyenne réduite à la corde, & les angles PTd, dTD, PTD seront les mouvements en longitude, qui répondent au temps t, t', t''. Qu' on nomme ces mouvements m, m', $m'' = m + m'$, & on aura les valeurs, & proportions suivantes.

I. $\frac{TP}{sin.TdP} = \frac{Pd}{sin.PTd}$, & $\frac{TD}{sin.TdD} = \frac{dD}{sin.dTD}$; & comme les sinus des deux suppléments TdP, TdD sont égaux, & qu'on a $TD = T''P''$, on dira.

$$TP : T''P'' :: \frac{Pd}{sin.PTd} : \frac{dD}{sin.dTD} :: \frac{t}{sin.m} : \frac{t'}{sin.m'}.$$

II. $\frac{Td}{sin.TDd} = \frac{Dd}{sin.DTd}$, & $\frac{TP}{sin.TDP} = \frac{DP}{sin.DTP}$; & comme TDd est le même angle, que TDP, & on a $Td = tp$, on dira.

$$tp : TP :: \frac{Dd}{sin.DTd} : \frac{DP}{sin.DTP} :: \frac{t'}{sin.m'} : \frac{t''}{sin.m''}.$$

III. $\frac{Td}{sin.TPd} = \frac{Pd}{sin.PTd}$, & $\frac{TD}{sin.TPD} = \frac{DP}{sin.DTP}$; & comme TPd est le même angle, que TPD, & on a $Td = tp$, $TD = T''P''$ on dira.

$$tp : T''P'' :: \frac{Pd}{sin.PTd} : \frac{DP}{sin.DTP} :: \frac{t}{sin.m} : \frac{t''}{sin.m''}.$$

46. En comparant ensemble ces trois proportions, on verra, qu'ayant pris deux des trois distances raccourcies telles qu'on veut, l'une sera à l'autre en raison composée de la directe des temps écoulés entre les observations, qui leur appartiennent, & la troisième, & de la réciproque des sinus des mouvements en longitudes, qui répondent à ces temps. Ainsi, si l'on a les temps t, t', t'', & les mouvements en longitude m, m', m''; ayant une distance quelconque connue, ou prise par la méthode des fausses positions, on connoîtra les deux autres : & comme dans chacun des triangles DTd, dTP, DTP on a l'angle en T, & en mettant TD, Td à la place de $T''P''$, tp, on y a la raison des côtés ; on aura aussi par la Trigonométrie les angles à la base, & la raison des côtés à la même base.

§. VI.

§. VI.

De la division de l' orbite terrestre, & de la parabole d' une comète en mois & jours par construction.

47. POUR l'orbite de la terre on fera aisément cette division par le moyen de la connoissance des temps, où l' on a les longitudes géocentriques du soleil pour tous les jours de l'année, qui sont diamétralement opposées aux héliocentriques de la terre. C' est assez de réflechir, que la différence entre les axes de cette orbite est tout-à-fait insensible, d' où il suit, qu' on peut lui substituer dans la construction un cercle, ayant seulement l' attention de bien placer son centre par rapport au soleil, qui est le centre de l' écliptique. L' excentricité de l' orbite terrestre est 0,017 de sa distance moyenne : ainsi le petit demi-axe de son ellipse est $\sqrt{(1-(0{,}017 \times 0{,}017))} = \sqrt{0{,}999711} = 0{,}99986$, qui diffère du grand de $\frac{14}{100000}$, quantité tout-à-fait insensible dans la construction.

48. Que l' on prenne d' une échelle un peu plus de 100 parties destinées (*) au rayon de l' orbite terrestre $= 1$, comme 120, & qu' on tire avec ce rayon appliqué en S le cercle (fig. 4) 0, 2, 4 &c, qui représentera l'écliptique avec le soleil S dans son centre : ayant porté successivement le même rayon sur la circonférence depuis un point arbitraire 0 en 2, 4, 6 &c, on aura la division de ce cercle en signes de deux en deux. On prendra un arc de 20 degrés depuis 10 vers 8, c' est-à-dire un tiers de leur intervalle, en y marquant le point *a*, qui sera à-peu-près le lieu de l' aphélie de la terre, puisque l' apogée du soleil est très-près de 10°. du quatrième signe. On portera du centre S vers le point *a* le petit espace $1\frac{7}{10}$, prenant les dixièmes à l' œil : mais il sera

(*) Il seroit mieux d' employer pour le rayon de la terre une échelle de 1000 parties, & alors pour le rayon de l' écliptique on en prendroit 1200, & pour l' excentricité 17.

ra plus aisé de prendre dans le rayon aS le nombre des parties 118,3, parcequ'il est très-difficile de prendre exactement des lignes trop petites. Alors on tracera le cercle de l'orbite terrestre du centre s avec le rayon de 100 parties.

49. On fera la division de ce cercle de la manière suivante. Pour le temps du commencement de l'apparition de la comète, & pour quelque temps avant, & plusieurs mois après, on trouvera dans la connoissance des temps les longitudes du soleil. On prendra ces longitudes pour le 10 de chaque mois, pour le 20, & pour le 30 ou 31, & y ayant ajouté ou ôté *6* signes, on aura les longitudes héliocentriques de la terre : on appliquera la règle au centre S, & aux points de l'écliptique, qui répondent à ces longitudes, qu'on trouvera aisément à l'aide d'un compas de proportion, ayant les commencements de chaque binaire des signes : on marquera les points dans lesquels cette règle rencontrera l'orbite de la terre, qui seront les lieux de la terre pour ces jours-là. On pourroit de même les trouver pour les jours intermédiaires : mais on fera, si l'on veut plus aisément cette subdivision, en supposant le mouvement de la terre uniforme dans 10, ou 11 jours, & prenant sur un compas de proportion les parties égales des arcs qu'on doit subdiviser.

50. Pour l'orbite de la comète, on la décrira aisément, quand on a le foyer, & la directrice, comme on l'aura ici. Il y a un instrument bien connu pour cela d'une règle, une équerre, & un fil avec une pointe. M. le Marquis de L'Hopital part de cette description pour donner la propriété essentielle de la parabole ; mais il est beaucoup plus aisé de la construire par un bon nombre de points, par lesquels on tire à la main une courbe continuelle, qui par ce moyen vient aussi plus exacte. Voici une manière bien simple de trouver ces points. Soit (fig. 5) S le foyer, DD' la directrice : ayant tiré sur elle la perpendiculaire, & l'ayant coupé par le milieu en V, on aura son sommet V, & l'axe VS que l'on prolongera indéfiniment du côté du foyer. On tirera par plusieurs points C de l'axe peu éloignés entre eux des lignes parallèles à la directrice, comme BB'. Du centre S avec l'

in-

intervalle AC on trouvera dans chacune de ces lignes les points E, E', qui seront à la parabole cherchée ; parceque ayant tiré sur la directrice les perpendiculaires EF, E'F', qui seront parallèles, & égales à CA, elles seront égales à SE, SE', ce qui est la propriété essentielle de la parabole.

51. Si l'on fait VK vers le foyer S égale à la ligne AS, ou un peu plus grande ; on pourra tirer un arc circulaire assez considérable de deux côtés de V du centre K avec le rayon KV, ce qui formera l'origine de la parabole ; parceque le rayon du cercle osculateur en V est égal à la moitié du paramètre double de AS, & que les rayons suivants sont plus longs : on tirera le reste à la main en suivant les points déterminés, ou l'on fera passer des arcs de cercles par des points qui se suivent, comme par deux des précédents, & un nouveau. On aura une courbe, qui ne s'éloignera pas sensiblement de la parabole cherchée.

52. Sans tirer tant de lignes perpendiculaires à l'axe, on peut se servir d'un rectangle BB'G'G de gros papier assez long en BB', & peu large, en y tirant vers le milieu de sa longueur une ligne CH parallèle au côté BG, & en l'appliquant successivement de manière que les points C, H soient sur l'axe : les lignes BB', G'G lui seront perpendiculaires, & épargneront celles qu'on devoit tirer. Mais pour pouvoir s'en servir au dessus du foyer S, il faut, que la largeur CH ne soit pas plus grande que la ligne SV, pour empêcher ce papier de cacher le point A, & quand le point C surmontera le sommet A, on se servira de la seule GG'.

53. Pour s'assurer de la position du papier perpendiculaire à l'axe, on pourra tirer la directrice, & examiner avec le compas, si les points B, B' en sont éloignés du même intervalle ; comme aussi pour la partie inférieure au foyer S, on pourra allonger la partie BCHG, en BCII' pour avoir une ligne CI plus longue tombante sur l'axe : mais alors on n'aura pas la ligne GG' pour une des parallèles, qui déterminent les points de la courbe des deux côtés, & il vaudra mieux employer la seule BB'.

54. Pour diviser la parabole, on se servira du beau théorème

de

de Newton, que nous avons énoncé au num. 12. Soit (fig. 6, 7) MVM' la parabole décrite par une comète placée dans un point mobile C, l'angle VSC étant aigu dans la première, obtus dans la seconde de ces deux figures. Si l'on tire la droite BB' perpendiculairement à la distance perihelie SV par son point du milieu A, & qu'on conçoive un cercle, qui passe par les trois points V, S, C; son centre O sera toujours dans cette droite, ce qu'il est très-aisé de voir, & son mouvement sur la BB' sera uniforme, ce qui fait la beauté, & l'utilité du théorème avancé.

55. La démonstration n'en est pas trop compliquée. Qu'on conçoive l'ordonnée CE, qui soit rencontrée en F par OF parallèle à l'axe, en faisant $VE = x$, $CE = y$, $AO = EF = z$, $VA = AS = e$. Le paramètre de l'axe sera (num. 23) $= 4SV = 8e$, & l'on aura par la nature de la parabole $y^2 = 8ex$. Par les découvertes d'Archimède l'aire parabolique VEC est $= \frac{2}{3} VE \times EC = \frac{2}{3} xy$, & le triangle $SEC = \frac{1}{2} EC \times ES = \frac{1}{2} y (\pm VS \mp VE) = \pm ey \mp \frac{1}{2} xy$. Par-là on aura l'aire du secteur parabolique $VSC = VEC \pm SEC = \frac{2}{3} xy + ey - \frac{1}{2} xy = \frac{1}{6} xy + ey$.

56. On aura de même $OF = \pm AV \mp VE = \pm e \mp x$, $CF = CE - EF = y - z$, & puisque le quarré OC^2 est $= OV^2$; on aura $OF^2 + CF^2 = AV^2 + AO^2$, c'est-à-dire $e^2 - 2ex + x^2 + y^2 - 2yz + z^2 = e^2 + z^2$, ou $x^2 - 2ex + y^2 - 2yz = 0$. Mais $-2ex + y^2$ est $= -2ex + 8ex = 6ex$: donc $x^2 + 6ex = 2yz$, & $x^2 y + 6exy = 2y^2 z = 16exz$, c'est-à-dire $xy + 6ey = 16ez$, ou $\frac{1}{6} xy + ey = \frac{8}{3} ez$. Or le premier membre est la valeur que nous avons trouvée pour le secteur parabolique, qui est proportionnel au temps: donc le second aussi, qui à cause de la valeur $\frac{8}{3} e$ constante est proportionnel à z, c'est-à-dire à la ligne AO parcourue par le centre O, doit être proportionnel au temps, & par-là le mouvement de ce centre uniforme.

57. Quand le point C (fig. 6) sera infiniment près du sommet V, le secteur VSC sera $= \frac{1}{2} VC \times SV = VC \times VA$, & comme sa valeur $= \frac{8}{3} ez$ sera $= \frac{8}{3} \times AV \times AO$; on aura $VC = \frac{8}{3} AO$, c'est-

c'est-à-dire la vîtesse de la comète dans son périhélie à la vîtesse de ce centre comme 8 à 3.

58. Quand l'angle VSC (fig. 8.) sera droit, le centre O du cercle, qui passe par V, S, C, sera au milieu de l'hypothénuse VC : ainsi on aura $AO = \frac{1}{2} CS = SV$ (num. 23) c'est-à-dire la ligne parcourue par ce centre dans le temps, que la comète parcourt 90 degrés d'anomalie, égale à la distance périhélie.

59. De-là on tirera aisément l'échelle des jours de ce temps. On sait dans la théorie commune du mouvement des comètes dans les paraboles, que quand la distance périhélie est égale à la distance moyenne de la terre au soleil, l'anomalie de 90° répond à un peu plus de 109 jours & $\frac{6}{10}$ (le logarithme de ce nombre en jours est 2,0398717) (*), & que dans les autres paraboles les quarrés des temps pour les mêmes anomalies sont comme les cubes des distances périhélies, ce qui répond dans les paraboles toutes semblables entre elles à la troisième loi de Kepler pour

les

(*) Voici comme on trouve ce logarithme. La vîtesse de la comète dans la distance au soleil égale à celle de la terre, qui est $= 1$, est à la vîtesse de la terre (num. 2) comme $\sqrt{2}$ à 1, & c'est aussi la raison de l'aire du secteur parabolique infiniment petit dans le périhélie, au secteur du cercle de ce même rayon : ainsi la même sera aussi la raison des aires dans cette parabole, & dans le cercle après un temps fini quelconque. Or l'aire parabolique jusqu'à l'anomalie de 90°. est $= \frac{2}{3}$ du produit de l'abscisse, & de l'ordonnée (numér. 23) & à l'anomalie de 90 degrès l'abscisse est la distance du sommet au foyer $= 1$; & l'ordonnée son double $= 2$: ainsi cette aire est $= \frac{4}{3}$. Donc l'aire du secteur circulaire de la terre sera $\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Cette aire divisée par la moitié du rayon $= \frac{1}{2}$ donnera l'arc circulaire $= \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Nous avons trouvé (num. 32) le logarithme du double espace parcouru dans une minute avec le moyen mouvement de la terre $= 5,3782495$. Si l'on fait cet espace $= h$; on aura le nombre des minutes pour cet arc $= \frac{8\sqrt{2}}{3h}$, & le nombre des jours $= \frac{8\sqrt{2}}{3 \times 24 \times 60h} = \frac{\sqrt{2}}{9 \times 60h} = \frac{\sqrt{2}}{540h}$. Son logarithme, en prenant les compléments logarithmiques pour les diviseurs, sera $= 0,1505150 + \bar{7},2676062 + \bar{4},6217505 = 2,0398717$.

les ellipses. Ainsi en faisant la somme de ce logarithme, du logarithme de la distance périhélie, & de la moitié de celui-ci, on aura le logarithme du nombre des jours qui répond à un mouvement de ce centre égal à la distance périhélie, ce qui donnera l' échelle de son mouvement, quand on aura cette distance.

60. Si l' on a par construction un point C (fig. 6) tiré d' une observation; on trouvera aisément son point O, en déterminant avec les centres S, C, & un intervalle quelconque deux intersections N, N': la règle appliquée à ces points donnera dans la droite BB' le point O. Alors ayant appliqué dans un compas de proportion la distance périhélie SV au nombre des jours trouvé ci-dessus, on en prendra ce qui répond au temps écoulé depuis le commencement du mois jusqu' au temps de cette observation, & on le portera sur la ligne BB' dans la direction contraire au mouvement de la comète: mais comme il arrive souvent, que le nombre des jours, qui répond à la distance périhélie, n' est pas grand; on pourra alors pour chaque jour prendre 6 ou 4 parties pour avoir les heures de 4 en 4, ou de 6 en 6. Portant l' intervalle de 10 ou 11 jours de côté, & d' autre, on aura dans la ligne BB' les 10, 20, 30 ou 31 des mois. Avec le centre dans chacune de ces divisions, & la distance du point S, on trouvera les points correspondants de la parabole, qui restera divisée en mois, & jours par la subdivision des arcs de 10, ou 11 jours.

61. On verra alors le temps de l' arrivée au périhélie par la division même de la parabole, en marquant le jour, qui répond au point V, ou par la division de la droite BB', en marquant celui, qui répond au point A. Mais on aura plus exactement le temps de l' arrivée au périhélie, si l' on prend dans une échelle de 100 parties la distance périhélie, & l' intervalle AO, en disant, comme le nombre trouvé pour la première est au nombre trouvé pour la seconde, ainsi le nombre des jours trouvé (numér. 59) avec ces décimales est au nombre qu' il faudra ajouter au temps de l' observation, ou en ôter pour trouver le temps du passage par le périhélie: les fractions décimales des jours seront réduites facilement en heures, & minutes, en les multipliant

pliant premierement par 24, & après par 60 ; mais la construction ne pourra pas donner les minutes avec exactitude.

62. Quand le point O sera près du point A, le cercle & la parabole auront une inclinaison si petite, qu' on ne pourra pas en déterminer avec exactitude l' intersection : alors on prendra $VC = \frac{8}{3} AO$ (num. 57).

63. Ayant deux observations, qui donnent deux points C, C', on aura deux points O, O', qui pourroient donner l' échelle des jours pour la division de la droite BB' sans faire le calcul du num. 59, & on diroit comme OO' est à AO, ainsi le temps écoulé entre les deux observations est au temps qu' on doit ajouter, ou retrancher, pour avoir l' arrivée au périhélie. Mais comme dans ma méthode, les observations ne seront pas bien éloignées, la ligne OO' sera petite : ainsi ce calcul étant bien court, il vaudra mieux le faire pour avoir un intervalle SV plus grand, qui déterminera mieux cette échelle : d' ailleurs cela servira pour vérifier le résultat de la construction, parceque dans l' échelle ainsi déterminée la ligne OO' devra répondre au temps écoulé entre ces deux observations.

§. VII.

Des valeurs à préparer pour la construction.

64. Je mettrai ici toutes les valeurs, qui seront nécessaires dans tout le procédé de cette opération. On fera bien à les trouver avant de commencer l' opération graphique sans s' arrêter à les chercher, quand on en aura besoin, & interrompre l' opération. On pourra former une table, qui contiendra toute la méthode du petit calcul numérique qu' il faut y employer : on en aura l' exemple dans la première des tables, qu' on trouvera à la fin du §. 28, dans lesquelles il y aura l' application des règles générales à une comète particulière avec tous les exemples du procédé pour avoir les valeurs finales, qu' on aura trouvé, dans toute la suite des opérations graphiques aidées par les calculs numériques.

65. L'observation donne immédiatement le temps vrai en jours, heures, minutes, & secondes, l'ascension droite, & la déclinaison de la comète: les tables astronomiques donnent la longitude du soleil pour le même temps, & sa distance à la terre. Le fondement de toutes les constructions graphiques, & de tous les calculs numériques, qui aident ces constructions, sont trois ascensions droites, & trois déclinaisons de la comète pour trois temps vrais avec trois longitudes du soleil, & ses distances à la terre correlatives. Les observations fourniront ce qui appartient à la comète, & on pourra tirer ce qui appartient au soleil des Éphémérides, ou de la connoissance des temps, où on le trouve dejà calculé pour le midi de chaque jour: on le tirera de-là pour les trois temps des observations à l'aide des parties proportionnelles à l'ordinaire. On mettra ces éléments au commencement de cette table.

66. On trouvera à l'aide des mêmes Éphémérides, ou de la connoissance des temps les temps moyens, qui répondent à ces temps vrais, & à l'aide de la Trigonométrie sphérique les longitudes & latitudes de la comète, qui répondent à ces ascensions droites, & déclinaisons en employant l'inclinaison de l'écliptique de l'année, en appellant l, l', l'' ces latitudes. On ajoutera à la même table ces autres valeurs, qui sont les employées immédiatement avec les deux éléments solaires.

67. On tirera des trois temps moyens les trois valeurs t, t', t'' en ôtant le premier temps du second, & le second du troisième, & en prenant pour t'' la somme $t+t'$. On prendra ces valeurs seulement en minutes, ce qui suffit, en comptant toutes les six secondes pour une dixième de minute, & comptant ce qui reste aussi pour un dixième de minute, s'il va au de-là de 3''.

68. On trouvera de même les trois valeurs m, m', m'' en prenant la différence de la première longitude à la seconde, & de la seconde à la troisième, avec la somme de ces deux.

69. On trouvera trois valeurs e, e', e'', qui seront les trois élongations de la comète au soleil, en longitude, en ôtant chaque longitude du soleil de la longitude de la comète: si celle-ci est plus petite, on y ajoutera 12 signes, c'est-à-dire un cercle entier.

70. On

70. On trouvera la valeur constante a, en ajoutant au logarithme 0,756499 le double logarithme de la valeur t'' prise déjà ci-dessus en nombre des minutes, & leurs dixièmes. On trouvera aussi la valeur $v' = \frac{4vtt'}{t''^2}$, où on a déjà les valeurs t, t', t'', & on trouve la valeur v, qui est le sinus verse de la moitié de l' arc terrestre entier. On trouve cet arc en ôtant la première longitude du soleil de la troisième, & son sinus verse en ôtant le cosinus de sa moitié du rayon $= 1$.

71. On trouvera trois valeurs $L = v' sin.c'$, $L' = \frac{t''}{t' sin.m''}$, $L'' = \frac{t''}{t sin.m''}$. La première servira pour trouver la réduction de la seconde longitude de la comète, & les deux autres pour trouver sa première, & troisième distance raccourcie à la terre par la seconde prise par position, & par les valeurs m, m', corrigée après la réduction susdite.

§. VIII.

Détermination de la distance de la comète par la construction graphique.

72. ON prendra sur une échelle 120 parties (*) (num. 48) pour rayon du cercle (fig. 4) 0, 2, 4 &c, qui représentera l' écliptique, & aura le soleil S pour centre: on prendra un point arbitraire o pour le premier point du premier signe, & on mettra *6* dans le point diamétralement opposé: du centre o, & *6* avec le même intervalle, on trouvera à droite & à gauche du premier les points 2 & 10, & du second 4 & 8 sans marquer les inter-

(*) On propose de prendre pour rayon de l'écliptique plutôt 120 parties que 100, pour ne pas confondre les points, qu' on devra prendre après sur ce cercle avec ceux, qu' on devra prendre sur l' orbite de la terre, ce qui arriveroit facilement à cause du voisinage.

intermédiaires 1, 3 &c, qui ne sont pas nécessaires parcequ' on pourra prendre après avec assez de précision toutes les longitudes en ajoutant aux binaires ce qui avance à l' aide des cordes, qui sont le double des sinus de la moitié (*). Plus le rayon sera grand, plus on aura d' exactitude dans la construction : un rayon d' un demi-pied seroit bien à propos : mais un de quatre ou encore de trois pouces peut suffire pour une assez bonne approximation.

73. Ayant les trois longitudes du soleil (num. *66*) & ayant ajouté ou ôté *6* signes, on aura les longitudes héliocentriques de la terre, pour lesquelles on trouvera les trois points Q, Q', Q'', qui répondront dans l' écliptique à ces trois longitudes. On appliquera successivement la règle au centre S, & à ces trois points, & on y marquera les trois points T, T', T'' des trois lieux de la terre à la distance du centre S, qui pour chaque observation répond à celle du soleil à la terre prise sur la même échelle. Si on trouve le point *a* (num. 70) sur l' écliptique à la distance de 20° du point 10 vers 8, & qu' ayant pris dans la direction S*a* l' excentricité S*s* = 1, 7 on décrive un cercle du rayon = 100, qui sera l' orbite de la terre, & aura beaucoup d' usage encore après ; on déterminera plus aisément les points T, T', T'' par la rencontre de ce cercle avec la règle appliquée aux points Q, Q', Q''. A' la place de prendre S*s* = 1, 7, on fera mieux (num. 48) de prendre *as* = 118, 3. Ce cercle épargnera même la peine de prendre les distances du soleil à la terre, & cette détermination sera bien suffisante pour la méthode graphique.

74. Ayant tiré les trois rayons ST, ST', ST'', on fera les trois angles STE, ST'E'; ST''E'' correlatifs aux *e*, *e'*, *e''* de trois élongations

(*) On prendra aisément dans la même échelle les arcs par les cordes, si au nombre donné par la table des sinus on ajoute un cinquième, puisque le rayon de ce cercle à la place d' avoir 100 parties de la même échelle en aura 120 : au contraire pour avoir la valeur des arcs en degrés, & minutes on portera les cordes sur l' échelle, on ôtera le sixième du nombre trouvé : on prendra la moitié du reste : on verra dans la table, quel est l' arc qui a cette moitié pour sinus, & le double de cet arc sera la valeur cherchée.

gations de la comète au soleil (num. *69*) à l' aide des cordes prises sur des cercles tirés des centres T, T', T'' avec le rayon = 100, pour lesquelles on prendra sur la même échelle les doubles des sinus de la moitié de l' arc qu' on doit prendre, sans y ajouter le cinquième, qu' on a ajouté pour les arcs de l' écliptique à cause de son rayon = 120 : & on fera la même chose toutes les fois qu' on prendra les arcs par les cordes, ou la valeur des cordes par les arcs sur l' orbite de la terre, qui a le rayon = 100 sans ajouter le cinquième, ou ôter le sixième. Si la valeur *e* est moindre que 180°, l' angle ira selon l' ordre des signes : si elle en est plus grande, on prendra contre l' ordre de signes son reste à 360° : mais si cette valeur est entre le 90°, & 270°, on fera mieux de prolonger la ligne ST & de faire l' angle de la ligne TE avec cette prolongation égal à la différence de la valeur *e* à 180° dans l' ordre des signes ou contre, selon que la valeur *e* en sera plus grande ou plus petite, parceque on prend moins exactement les arcs plus grands que les plus petits par ses cordes (*).

75. On tirera la corde TT'', qui rencontrera le rayon ST' en un point *t* : alors ayant appliqué le limbe d' un morceau de papier à cette corde on y marquera (num. *9*) à côté de T, *t*, T'' les trois points G, *p*, G' qu' on voit sur la ligne PP'' déjà transportés avec le même papier, dont le limbe seul est indiqué par la ligne HH'. On doit promener ce papier entre les lignes TE, T''E'' avec les conditions exprimées au même num. *9*. On doit tenir le point *p* de ce limbe toujours très-peu éloigné d' un point I de la

(*) Sans tous ces différents préceptes on pourra prendre sur l' écliptique les points, qui répondent aux longitudes de la comète, comme on a pris les points Q, tirer du centre S les rayons à ces points, & des points T, T', T'' les lignes TE, T'E', T''E'' parallèles à ces rayons : même on peut appliquer simplement la régle au centre S, & à ces points, prendre avec le compas la distance de chaque point T à cette règle, & transporter le compas pour trouver le point de l' écliptique, qui a la même distance à la régle, ce qui est très-aisé pour la pratique sans tirer ni les rayons, ni les lignes parallèles.

la ligne $T'E'$ vers la même partie, vers laquelle se trouve par rapport à elle le point S, de manière que si l'on conçoit la ligne SpP' terminée sur la même $T'E'$ en un point P', la petite partie $P'p$ réponde à la flèche de la parabole projettée. Il n'est pas nécessaire de connoître cette partie avec quelque précision : c'est assez de songer, qu'elle doit rester de ce côté-là, & être bien petite : pour s'en former une idée grossière il suffit de considérer, que la flèche $P'p$ dans la fig. 1 doit être plus petite que la $C'c$ avec une différence plus petite ou plus grande, selon que la seconde latitude $P'T'C'$ plus petite ou plus grande produira moins ou plus d'élévation du point C', & de la ligne SC' sur le plan de l'écliptique, & que la même flèche $C'c$ doit être plus petite ou plus grande que l'autre $T't$, qu'on a sous les yeux selon que lè quarré de SC' doit réussir plus grand ou plus petit que le quarré de ST'. Cette considération suffit pour former un jugement conjectural de sa grandeur, sans qu'on soit obligé de s'y arrêter beaucoup pour avoir aucune précision.

76. On sera dirigé par un pareil jugement conjectural sur l'inclinaison, qu'on doit donner à ce limbe de papier mobile, & la distance à laquelle on doit l'arrêter. Pour son inclinaison il faut faire que les deux points G, G' soient toujours ou tous les deux entre la ligne $T'E'$ & les lignes TE, $T''E''$, ce qui doit arriver quand la corde PP'' doit réussir plus grande que la TT'', ou tous les deux en dehors, ce qu'on doit avoir, quand celle-là devra être plus petite; mais les distances GP, $G'P''$ devront avoir entr'elles la même raison que les deux Gp, $G'p$, & on formera plus aisément ce jugement, quand les deux intervalles de temps t, t', qui doivent avoir le même rapport entre eux, seront égaux. Pour la distance il faut considérer la variation, que la partie PP'' de ce limbe de papier interceptée entre les lignes TE, $T''E''$ doit subir par la variation de sa distance. Le jugement sur la distance seroit très-facile, si la PP'' devoit être égale à la CC''; parceque celle-ci doit être égale à celle-là, quand la distance du soleil S à un point peu éloigné de son milieu est double de la distance ST' (num. 8), & elle en doit être double, quand la première de

ces

ces deux distances est la moitié de la seconde : à parité de ces deux distances, la première corde doit être à la seconde comme $\sqrt{2}$ à 1, c'est-à-dire comme 14 à 10. Mais il faut considérer que l'obliquité de la corde CC'', qu'on ne voit pas à la fig. 4, mais qu'on peut s'imaginer sur la fig. 1, la rend plus grande que l'autre PP'' qu'on y voit sur la partie de ce limbe de papier HH' interceptée entre les lignes TE, T''E'', & on peut former une conjecture sur la quantité de cette obliquité, qui dépend de la différence des deux élévations PC, P''C'' égales aux deux distances raccourcies TP, T''P'' multipliées par les tangentes des deux latitudes extrêmes. La somme, ou la différence de ces deux élévations ainsi estimées, selon que les deux latitudes sont de la même dénomination ou de deux contraires, rapportée à la longueur de la même PP'', que l'on voit sur le limbe HH' du papier promené, donnera une idée de la quantité de cette obliquité, & par-là de l'excès de la corde CC'' qu'on ne voit pas, sur la PP'' qu'on voit, & qu'on compare sur le même limbe de papier avec la GG' = TT''. Ce n'est pas un jugement exact; mais les considérations exposées avec un peu d'exercice le feront former bien peu fautif: on obtiendra ainsi une distance bien propre pour la première position, qui avec bien peu de tâtonnement amenera par la méthode de fausses positions, que nous allons exposer à la détermination, qu'on cherche.

77. Pour comparer la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$ (num. 7) avec la valeur a préparée (num. 70) il faut avoir la somme des deux rayons vecteurs SC + SC'' = b, & la corde CC'' = c, & on le trouvera partie par la construction, & partie par un petit calcul numérique. Il faut auparavant trouver les deux TP, T''P'', ce qui sera d'abord très-aisé, quand il n'y aura pas besoin de la réduction de la seconde longitude, c'est-à-dire, quand la seconde longitude sera égale à celle du soleil, ou éloignée d'elle de 6 signes, ou bien peu éloignée d'une de ces deux quantités. On prendra par position la TP sur la fig. 4 selon le jugement conjectural exposé, & ayant pris sa valeur numérique sur l'échelle, on

on en tirera la valeur de $T''P''$, qui par la proportion I du num. 45 sera $= \frac{t' sin.m}{t\, sin.m'} \times TP$. On a les valeurs t, t' au num. 67, m, m' au num. 68. Mais comme souvent on aura besoin de la réduction susdite, & presque toujours elle sera utile, on commencera par la détermination de cette réduction, pour laquelle & pour des opérations suivantes, on préparera à part dans la fig. 9 les angles BTF, BTF', BTF'' égaux aux trois latitudes (num. 66), & on prendra par position, non la première distance raccourcie TP, mais la seconde T'P', de laquelle après par la réduction qu' on aura trouvée on tirera les deux TP, T''P''.

78. On portera cette distance dans la fig. 9 sur la TB en TP': on appliquera sur cette ligne une équerre (on en fait une très-aisément en pliant une feuille de papier, pour avoir une ligne bien droite, & en repliant ce papier de manière, qu'une partie de cette ligne aille sur sa continuation pour avoir un angle droit), & on marquera, dans la droite TF', le point C' de sa rencontre avec l'autre côté de celle-ci (*). On prendra aussi SP' dans la fig. 4, & on la portera sur la droite TB de la fig. 9 en P'S' d'un côté, ou de l'autre du point P'. On voit bien que les lignes P'C', S'C' de cette figure seront égales aux P'C', SC' de la fig. 1: car dans le triangle P'TC' de celle-ci, & P'T'C' de celle-là, rectangles en P' l'angle en T & T', & les côtés TP', T'P' seront égaux, & dans les triangles C'P'S' de la première, C'P'S de la der-

(*) On aura plus aisément, & plus exactement le point C' avec les autres C, C'' qu' on devra trouver après, si l'on élève une fois avec exactitude la ligne TA perpendiculaire à la ligne TB. On portera une des deux pointes du compas ouvert à cet intervalle égal à la T'P' de la fig. 4, qui doit être la TP de la ligne TF de la fig. 9 sur un point qu' on jugera placé vis-à-vis le point P', & tournant l'autre on verra, si elle arrive juste à la ligne TA sans aller au de-là dans son mouvement circulaire. Si cette pointe n' y arrive pas, on éloignera un peu la première pointe du point T: si elle dépasse, on l'approchera un peu jusqu' à ce qu' on trouve un tel point C pour la première, que la seconde ne dépasse pas: C' sera le point cherché. C' est une espèce de tâtonnement, mais avec tant soit peu d' habitude on y parvient très-promptement, & on trouve le point C' beaucoup plus exactement, que par le moyen de l'équerre, dont la moindre inclinaison produit une erreur considérable.

dernière, rectangles en P' les côtés P'C', P'S' de celle-ci seront égaux aux côtés P'C', P'S de celle-là. Alors de la manière qu' on va voir on trouvera à l' aide du logarithme du nombre L (num. 71) pour chaque position la réduction de la seconde longitude, on réduira les valeurs m', m, on trouvera les distances raccourcies TP, T''P'', les rayons SC, SC'', & la corde CC'', pour comparer la valeur $bc^2 - \frac{c^3}{12b}$ avec la valeur a. On fera tout cela dans une seule colonne qu' on mettra dans une autre table, pour y placer à côté les autres colonnes tout-à-fait semblables, qui répondront aux positions suivantes. Voici l' ordre de toutes ces opérations. Il y aura dans chaque colonne trois parties: la première pour trouver les deux angles T'pt, P'T'p (fig. 1), qui donnent la réduction par leur différence, que nous appellerons y, la seconde pour en tirer les valeurs des distances TP, T''P'' d'après la position de la distance T'P', & la réduction trouvée, la troisième pour avoir les rayons SC, SC'', & la corde CC'', & en faire la comparaison avec la valeur a.

79. Pour la première partie, on a les expressions des sinus des deux angles T'pt, P'T'p au num. 35. On tirera les valeurs, qui y entrent, en partie des valeurs préparées dans le paragraphe précédent, & en partie des figures 4, & 9, & un peu d'ordre dans le petit calcul qu' on doit y employer rendra l' opération très-facile. Le premier sinus est $= \frac{sin.\text{ST}'p \times \text{T}'t}{tp}$, & on a le sinus du second en divisant celui-là par SC'^{3}. Si l'on prend $sin.$ST'P' pour $sin.$ST'p, c'est la seconde élongation e' trouvée au num. 69, & T't est $= v'$ trouvée au num. 70: ainsi on a le numérateur du premier sinus $sin.$ST'$p \times$ T't, qui divisé par la distance T'P' substituée pour tp donne le sinus cherché du premier angle. On a trouvé dans la fig. 9 la ligne S'C' égale à la SC' de la fig. 4, dont on aura la valeur numérique sur l'échelle pour faire la division par SC'^{3}, & avoir le second sinus. Le calcul sera bien facile par le moyen des logarithmes, & les sinus donneront les angles pour avoir la réduction y, qui est leur différence.

 80. Il

80. Il y a des cas, dans lesquels on ne pourra pas prendre la ligne $T'P'$ pour la tp, & dans lesquels la formule même n'est pas assez exacte selon le num. 40, qui sont très-rares. On a au num. 41 la manière de suppléer par un calcul trigonométrique, & au num. 42 par la construction graphique, & pour toutes les deux méthodes il faut auparavant prendre la valeur de la petite ligne $P'p = \frac{SP' \times T't}{SC'^3}$ (num. 35 II), où $T't$ est $= v'$, & la valeur numérique pour ce petit calcul se trouve en portant sur l'échelle les lignes $S'P'$, $S'C'$ de la fig. 9. Alors pour la méthode de la construction, on prendra sur l'échelle la petite ligne $P'p$, & on la portera dans la fig. 4 de P' vers le centre S. Si l'on veut employer la formule du sinus du premier angle $= \frac{sin. ST'p \times T't}{tp}$, on prendra la tp avec le compas, & on en prendra la valeur numérique sur l'échelle, employant la valeur e' pour l'angle $ST'p$ considéré comme égal à l'angle $ST'P'$, ou en prenant la valeur de l'angle $ST'p$ même pris par le moyen de son sinus déterminé par la construction, ce qui est aisé : il suffit d'allonger les deux côtés, de marquer sur ces côtés deux points à la distance du rayon $= 1000$, & prendre avec le compas la distance d'un de ces deux points à l'autre côté : cette distance sera le sinus, dont la valeur prise sur l'échelle donnera dans les tables des sinus l'angle cherché. Mais pour l'ordinaire il y aura trop peu de différence dans le résultat de la substitution de l'angle ainsi trouvé à l'angle $ST'P'$. Si le temps total n'est pas très-court, on fera bien de trouver la $P'p$, l'employer, & prendre la tp avec sa valeur numérique sur l'échelle, en employant avec elle la valeur e' de l'angle $ST'P'$ à la place de l'angle $ST'p$, hors des cas très-rares, dans lesquels il faudra trouver l'angle Stp par la Trigonométrie, selon le numér. 41. Ayant employé SC'^3 pour avoir $P'p$, on s'en servira pour trouver le second sinus.

81. Ayant trouvé la réduction dans la première partie de la table, on passera dans la seconde à la détermination des valeurs des lignes TP, $T''P''$, pour lesquelles il faut corriger les valeurs

m, m'

m, m' par la réduction, qu' il faudra ajouter à l' une des deux, & ôter de l' autre, la valeur m'' restant la même. Si la droite $S'C'$ trouvée dans la fig. 9 est plus grande que le rayon $= 1$ de l' orbite de la terre dans la fig. 4, & que le mouvement de la comète se fasse en suivant l' ordre des signes, mais l' angle $P'T'p$ a la direction contraire à cet ordre; il faudra ajouter cette réduction à m, & l' ôter à m': car en passant de $T'P'$ à $T'p$, on diminuera la longitude, & par conséquent en passant de $T'p$ à tp, on l' augmentera, & cette augmentation sera plus grande, parceque la division par SC'^3 fera alors l' angle $P'T'p$ plus petit que tpT': ainsi la seconde longitude sera augmentée par la réduction, & par-là elle sera plus éloignée de la première, que dans l' observation. La même chose arrivera, si deux de ces trois conditions se trouvent contraires: mais si l' on trouve contraire une seule, ou toutes les trois; on devra ajouter la réduction à m', & l' ôter de m. Ayant ainsi corrigé les valeurs m, m' on trouvera aisément les distances TP, $T''P''$. Leurs valeurs tirées des proportions II, & III du num 45 sont $\frac{t'' sin.m'}{t' sin.m''} \times tp$, & $\frac{t'' sin.m}{t\, sin.m''} \times tp$. On a fait (num. 71) $L' = \frac{t''}{t' sin.m''}$, & $L'' = \frac{t''}{t\, sin.m''}$, ainsi on aura $TP = tp \times sin.m' \times L'$, & $T''P'' = tp \times sin.m \times L''$. On trouvera aisément les valeurs numériques de ces expressions, ayant L' & L'' préparées, tp prise sur l' échelle, & m, m' corrigées: on prendra sur l' échelle les lignes correlatives, & on les portera dans la fig. 4 en TP, $T''P''$. Dans les positions suivantes, pour la seconde colonne on changera seulement les valeurs tp, m, m' avec leurs logarithmes, & on se servira des mêmes valeurs L', L''.

82. Pour la troisième partie, on aura besoin des rayons vecteurs SC, SC'' de la fig. 1. dont la somme doit être $= b$, & de la corde $CC'' = c$ pour comparer la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$ avec la valeur a. On trouvera les rayons SC, SC'' dans la fig. 9 par les lignes TP, $T''P''$ trouvées, comme on y a trouvé la SC' par la $T'P'$. On portera ces deux lignes sur la fig. 9 en TP, TP'': on trou-

trouvera dans les TF, TF'' les points C, C'' qui répondent perpendiculairement sur les points P, P'': on prendra sur la fig. 4 les intervalles SP, SP'', & on les portera sur la fig. 9 en PS, P''S'': on prendra les intervalles SC, S''C'', & on les portera sur l'échelle : ainsi on aura leurs valeurs numériques & leur somme $= b$.

83. Pour avoir la CC'', on portera la plus courte des deux PC, P''C'' de la fig. 9, qui dans le cas de cette figure est la PC, sur la plus longe en C''I vers la droite TP, ou du côté opposé, selon que les deux latitudes extrêmes seront conformes, ou contraires : on y portera aussi en P''E sur la TB la PP'' de la fig. 4, & alors la EI sera $=$ CC'' de la fig. 1, à cause des P''E, P''I de cette figure 9 égales aux PP'' $=$ CI, & C''I de la même fig. 1. On prendra sa valeur sur l'échelle, qui sera $= c$. Le double de son logarithme avec le logarithme de b donnera le logarithme du premier terme bc^2, & la somme des logarithmes de b & de 12 ôté du double de ce double, donnera le logarithme du second terme $\frac{c^4}{12b}$ à ôter du premier pour avoir la valeur à comparer avec a trouvé au num. 70. Si l'on trouve l'égalité, la position aura été juste : autrement on prendra la différence, qu'on fera $= g$ positive ou négative, selon que la valeur trouvée sera plus grande ou plus petite que la valeur a.

84. Alors on changera la position, & pour l'ordinaire il faudra prendre une distance T'P' plus grande ou plus petite, selon que l'erreur trouvée sera négative ou positive : on jugera de la quantité, qu'il faut ajouter ou retrancher, par la grandeur de l'erreur, en faisant un changement plus grand ou plus petit, selon qu'on aura trouvé cette erreur grande ou petite. On fera l'opération du num. 78, en employant les mêmes angles de la fig. 9 : on trouvera la correction nouvelle avec la même valeur L, & après avoir fait toutes les mêmes opérations par la même méthode dans la seconde colonne pareille à la première, on trouvera la nouvelle erreur g'. Si l'on appelle h la différence des deux positions positive ou négative, selon qu'on a augmenté, ou diminué la distance dans la seconde position, on ajoutera

ra à la distance de la seconde position la valeur $\frac{g' h}{g - g'}$, selon la règle de la fausse position, & on continuera l' opération jusqu' à ce que l' erreur g devienne petite : mais très-souvent on l' aura petite à la troisième position.

85. Quand l' erreur sera petite, on pourra se dispenser de refaire toute l' opération d' une position nouvelle : on trouvera les nouvelles valeurs des lignes TP, T''P'', SC, SC', CC'', en appellant g, g' les deux erreurs dernières, h l' augmentation d' une de ces quantités quelconque (sa valeur sera négative si elle a été diminuée), & ajoutant $\frac{g' h}{g - g'}$ à la dernière valeur de cette quantité. On trouveroit de même la nouvelle réduction, & une autre quantité quelconque : mais c' est assez de trouver ces cinq, qui viendront en usage dans le §. suivant pour déterminer les éléments de l' orbite par construction. Tout cela est tiré de la règle commune des fausses positions par deux erreurs trouvées dans deux positions : elle a lieu presque toujours. Il y a des cas, dans lesquels on est à côté d' un *maximum*, ou *minimum* de l' erreur, dans lesquels cas il faut employer trois positions, & quelque fois on ne peut pas faire évanouir l' erreur. Ce dernier cas n' arrivera pas, quand il s' agit des observations, qui appartiennent à l' orbite d' une comète, qui a réellement existé : on s' apercevra du cas rare, qui demande trois erreurs par le peu de succès, qu' on trouvera dans l' usage de deux seules pour les détruire. Ces réflexions, & la nécessité des méthodes subsidiaires, sont nécessaires dans certains cas pour toutes les recherches, qui employent les fausses positions.

§. IX.

Détermination des éléments de l' orbite, par les distances déterminées.

86. Les éléments de l' orbite sont au nombre de six, & nous les trouverons avec cet ordre : 1°. le lieu du nœud : 2°. l' inclinai-

naison de l'orbite à l'écliptique, 3°. la distance périhélie, 4°. le lieu du périhélie dans l'orbite (*), 5°. le temps de l'arrivée au périhélie, 6°. la direction du mouvement autour du soleil.

87. Pour le premier, on prendra comme au num. 83 dans la fig. 4 les lignes TP, $T''P''$, PP'' de la dernière détermination, & on les portera sur la ligne TB de la fig. 9 en TP, $T''P''$, $P''E$, ayant appliqué le côté d'une équerre sur la même ligne avec l'angle en P, & P'', on tirera les deux perpendiculaires PC, $P''C''$ jusqu'aux lignes TF, TF'', & ayant pris $C''I = CP$, dans la même direction avec $C''P''$, ou dans la direction opposée, selon que les deux latitudes extrêmes seront conformes ou contraires, on tirera IE, & par C'' la $C''R$ parallèle à cette ligne, qui rencontre en R la TB: on portera $P''R$ dans la fig. 4 sur la $P''P$ prolongée autant qu'il le faut en PR dans la direction opposée au point P'', ou vers ce point, selon que la même $P''R$ l'aura eu dans la fig. 9. On tirera alors par S, & R une ligne, qui sera la ligne des nœuds, & déterminera leur position sur l'écliptique en N, & N'. Pour reconnoître celui, qui est ascendant, c'est-assez de concevoir le point, dans lequel la direction SP rencontre l'écliptique. Si la première latitude est boréale, le nœud ascendant sera celui, qui dans l'ordre des signes reste en arrière; si elle est australe, ce sera l'autre, qui se trouve en avant, parceque dans le premier cas la comète a passé en dernier lieu de l'hémisphère austral au boréal, & dans le second du boréal à l'austral.

88. La démonstration de cette construction n'est pas compliquée. Les lignes $P''I$, $P''C''$, $P''E$ de la fig. 9 seront égales aux lignes IC'', $P''C''$, IC de la fig. 1, parceque $P''I$ dans celle-là, & IC'' dans celle-ci sont la différence des deux $P''C''$, PC, & $P''E$ dans celle-là, IC dans celle-ci sont égales à la même $P''P$ de la fig. 4, les deux $P''C''$, PC étant, comme on voit bien, les mêmes dans la fig. 9, & 1. Or on a ces deux proportions dans la fig. 9, $P''I : P''C :: P''E :$

(*) On peut trouver aussi aisément le lieu du périhélie dans l'écliptique; mais le lieu dans l'orbite est celui, qui vient en usage pour tous les calculs, dans lesquels on employe les éléments de l'orbite.

$P''E : P''R$, & dans la fig. 1 $IC'' : P''C'' :: IC : P''R$. Les trois premiers termes étant égaux, les derniers le seront aussi. Par-là la ligne $P''R$ de la fig. 4, qu'on a fait égale à la ligne $P''R$ de la fig. 9, sera égale à la $P''R$ de la fig. 1, & la ligne SR dans la première, & dernière de ces deux figures sera la même, c'est-à-dire l'intersection des deux plans, qui est la ligne des nœuds.

89. Pour avoir l'inclinaison de l'orbite, on tirera PD dans la fig. 4 perpendiculaire à la ligne des nœuds, & on la portera dans la fig. 9 sur la ligne TB en PD vers le point T, & on tirera CD. L'angle PDC sera l'inclinaison cherchée : parceque si dans la fig. 1 on conçoit un plan perpendiculaire à la ligne SR tiré par C ; ses intersections CD, PD avec les deux plans SRC, SRP, seront perpendiculaires à la même ligne, l'angle en D donnera l'inclinaison des deux plans, & cet angle sera le même que l'angle D de la fig. 9, car CP est la même dans les deux figures, & PD sera aussi la même, étant la même que dans la fig. 4.

90. Si l'on tire de même la perpendiculaire $C''D''$ dans la fig. 4, & qu'on la porte dans la 9 en $P''D''$; on aura en D'' le même angle. La détermination sera plus sûre, si l'on employe la plus longue des deux $CD, C''D''$, & on fera bien de les employer toutes les deux pour avoir plus de sureté, en prenant une valeur intermédiaire. On peut encore trouver cet angle, en appliquant PD de la fig. 4 à 100, ou plutôt à 200, sur un compas de proportion, & voyant le nombre des parties, qui répond à la ligne PC de la fig. 9, ce nombre, ou sa moitié donnera dans les tables des sinus la tangente de l'angle cherché. On peut la trouver encore en employant les lignes de la seule fig. 4 par la proportion suivante, $PD : TP :: tan.PTC = tan.l : tan.PDC = tan.\ inclin.$ tirée du côté PC commun aux triangles TPC, DPC.

91. On peut aussi se servir d'un petit calcul numérique pour trouver PR. Si l'on prend sur une échelle quelconque les deux lignes $CP, C''P''$ de la fig. 9, & la ligne $P''P$ de la fig. 4 ; on dira comme (fig. 1) la différence des deux premières, qui est égale à la $C''I$ de la fig. 4, ou leur somme dans le cas des latitudes

contraires, est à CP, ainsi P''P est à PR, que l' on aura en multipliant le second & le troisième terme, & divisant le produit par le premier : on épargnera, ou facilitera la division, si l' on met C''I à 100, ou 200 parties sur un compas de proportion. Ce sera aussi le meilleur parti à prendre, si dans le cas des latitudes de la même dénomination on trouve trop petite la différence des deux C''P'', CP : dans ce cas-là la ligne PR doit être trop longue, & si ces deux lignes sont égales, leur différence devenant = 0, le point R va à l' infini : on ne peut pas le trouver par construction, ni dans l' un, ni dans l' autre cas. Mais dans le second on tirera N'SN parallèle à P''P, & dans le premier on trouvera par la règle de trois la valeur de la quatrième proportionnelle après les P''C'', PC de la fig. 9, & la SP'' de la fig. 4 : on la prendra dans une échelle, qui aura servi pour les trois précédentes : on la portera dans la fig. 4 sur la SP'' en SZ : on tirera PZ, & la ligne NSN' parallèle à celle-ci sera la ligne des nœuds. Parceque si l'on conçoit le même point Z dans la fig. 1 ; on y aura les proportions suivantes, P''S : SZ : : P''C'' : PC : : P''R : PR, la première par la proportion employée pour prendre PZ, & la seconde par les triangles semblables : on voit par-là que ZP est parallèle à SR : ainsi on n' aura qu' à tirer dans la fig. 4 par S la ligne NSN' parallèle à PZ.

92. Dans ce cas pour avoir plus exactement dans la fig. 4 le point Z, qui sera trop peu éloigné de P'', on pourra trouver la valeur numérique des lignes PC, P''C'' (fig. 1 & 9) : on prendra les logarithmes des valeurs numériques des distances TP, T''P'', & ayant fait la somme de la première avec le *log. tan. l*, & de la seconde avec le *log. tan. l''*, on aura les logarithmes des valeurs numériques des deux PC, P''C''. Tous ces petits calculs arithmétiques sont si courts, qu' on peut bien s' en servir dans tous les cas pour trouver plus exactement ces lignes, le point R (fig. 4), la ligne des nœuds, & l' inclinaison de l' orbite.

93. Pour les autres éléments on commencera par porter les deux lignes DC, D''C'' de la fig. 9 dans la fig. 4 sur les deux DP, D''P' prolongées en C, C'', & ayant marqué deux arcs de cercle en F',

F' avec

F' avec les centres C, C'', & les rayons CS, C''S, on tirera une tangente FF' commune à ces deux arcs, ce qu'on fait très-aisément par construction, en appliquant une règle, qui le cotoye: on tirera SX perpendiculaire à cette ligne, & l'ayant coupée par le milieu en V, on aura la distance périhélie SV.

94. Car si l'on conçoit que le plan de l'orbite (fig. 1) SRC tournant sur la ligne SR soit appliqué au plan de l'écliptique; la parabole y sera appliquée de manière que si le point C représente un de ces points quelconque, chaque droite DC s'en ira sur la DP prolongée, & comme les DC, D''C'' de la fig. 9 sont les mêmes que dans la fig. 1, les points C, C'' de la fig. 4 appartiendront à la parabole appliquée. Si l'on conçoit les rayons SC, SC'', & les lignes CF, C''F' tirées aux deux contacts, qui seront perpendiculaires à la tangente FF'; ces dernières seront égales aux rayons respectifs, ce qui est la propriété (num. 23) de la directrice. Ainsi FF' sera la directrice de cette parabole, & SV, qui en est la moitié, sera la distance du sommet au foyer S, c'est-à-dire la distance périhélie. L'échelle des parties de la distance moyenne de la terre au soleil = 1 donnera sa valeur numérique relative à cette unité (*).

 95. La

(*) Dans le num. 93 nous avons employé la tangente commune FF' (fig. 4) des deux cercles, qui ont le centre en C, C'', pour déterminer la direction de l'axe SX, & la distance périhélie SV. Or ces deux cercles ont deux tangentes communes, comme on voit dans la fig. 10 en FF', & *ff'*. La première détermine l'axe SX avec la distance périhélie SV, & la seconde l'axe S*x*, avec la distance périhélie S*u*. Cela arrive, parceque le problême de faire passer une parabole par deux points donnés, le foyer étant donné, a deux solutions, deux différentes paraboles pouvant remplir cette condition. Mais on ne doutera jamais, quelle des deux il faut prendre: les deux cercles auront une intersection en S, & une autre dans un autre point *s*, qui reste du côté opposé au soleil par rapport à la corde CC''. Il faut prendre la tangente, qui reste du côté du point S. L'arc de la première parabole seroit trop long, & exigeroit beaucoup plus de temps pour faire un grand tour derrière le soleil. Mais il y a une raison décisive contre la première, qu'on ne pourra employer jamais: le soleil étant compris dans le segment C*u*C'', le second rayon vecteur passeroit par le soleil: ainsi la flèche non seulement ne seroit pas petite par rapport à ce rayon, comme cette théorie l'exige; mais elle en

95. La rencontre de l'axe SV avec l' écliptique en ♈ donnera ce qu' on appelle la longitude du périhélie dans l'orbite, ou encore absolument la longitude du périhélie. Si l'on veut sa longitude dans l'écliptique, on la trouvera de la manière suivante. Ayant tiré dans la fig. 9 TG parallèle aux lignes DC, D''C'', & dans la fig. 4 VV' perpendiculaire à la ligne des nœuds SR, on appli-

---

en seroit beaucoup plus longue : la seconde observation aussi ne pouvant s' accorder avec toutes les deux paraboles, décideroit la question, & ôteroit le doute.

Quand la flèche par la petitesse de l' arc est insensible, on peut prendre la corde CC'' pour une tangente, qui a son contact dans son milieu : alors on peut déterminer la position de l' axe plus aisément. Ayant coupé (fig. 11) la corde CC'' par le milieu en E, du centre S avec l' intervalle SE, on trouvera sur la même corde prolongée le point E' : l' axe sera SE' : & si l' on coupe EE' par le milieu en A ; en tirant la perpendiculaire AV sur l' axe SE', on aura le sommet V de la parabole avec la distance périhélie SV.

Cette construction dépend d' une belle propriété de la parabole par rapport à ses tangentes. Si le point E' est la rencontre d' une tangente tirée par un point E quelconque de son périmètre avec l' axe ; le triangle ESE' terminé au foyer S sera isocèle, la perpendiculaire SA tirée du foyer sur cette tangente, en coupant EE' par le milieu en A, rencontrera dans ce point la tangente perpendiculaire à l' axe tirée par son sommet V.

Nous ferons usage de cette propriété encore dans la suite, comme aussi d' un théorème, qui en dérive, & qui est un des principaux fondemens de la théorie du mouvement des comètes dans les paraboles. Chaque rayon vecteur est à la distance périhélie, comme le quarré du rayon des tables des sinus est au quarré du co-sinus de la moitié de l' anomalie, c' est-à-dire de la moitié de l' angle, que ce rayon contient avec la distance périhélie. Parceque ESV sera l' anomalie du rayon vecteur SE, & ASV sa moitié : les deux triangles rectangles EAS, AVS seront semblables à cause des angles en S égaux, & on dira ES : SA : : SA : SV : : 1 : *cos.* ASV, & ES : SV : : 1 : $cos.^2$ ASV.

Quand la flèche sera plus sensible, il y aura une petite correction à faire à cette construction. Si l' on conçoit la flèche ED dans la direction du diamètre, qui a la corde CC'' pour ordonnée, la tangente au point D sera parallèle à cette corde. Si le rayon SD rencontre la même corde en F, on aura DF = DE à cause des inclinaisons, que le rayon vecteur SD, & le diamètre tiré par D ont à la tangente, & par conséquent à la corde qui lui est parallèle : la droite SD' parallèle au diamètre DE sera la direction de l' axe, & rencontrera cette tangente tirée par D en un point D', de manière que le triangle DSD' devra être isocèle : ainsi la ligne SA prolongée devra couper par le milieu à angles droits encore la base DD' du triangle isocèle DSD', & la A'V' tiré appliquera cette dernière dans la fig. 9 sur la ligne TG en TV, & on tirera VL perpendiculaire à TB (*): on prendra TL, & on l'appliquera dans la fig. 4 sur la V'V, en V'u, & appliquant la règle aux points S, u, on marquera le point x' de sa rencontre avec l'écliptique du côté du point u. On aura en x' la longitude du périhélie dans l'écliptique. Parceque si dans la fig. 1 on conçoit Vu perpendiculaire au plan de l'écliptique tiré du sommet V de la parabole C''C'CV, & le plan VuV' perpendiculaire à la ligne des nœuds en V'; l'angle VV'u sera égal à l'inclinaison de l'orbite, & pour cela égal à l'angle VTL de la fig. 9: dans la même figure la TV est égale à la VV' de la fig. 4, c'est-à-dire à la VV' de la fig. 1: donc la V'u de la fig. 4, qui est égale à la TL de la fig. 9, sera égale à la V'u de la fig. 1, & la Su de la fig. 4 répondra à la Su de la fig. 1, laquelle donne la direction de la longitude du périhélie: ainsi la direction de la ligne Su dans la fig. 4 donnera cette longitude en x'.

96. On trouvera le temps de l'arrivée au périhélie par la méthode expliquée dans le num. 63, & encore mieux par celle du num.

---

tiré perpendiculairement sur la SD' devra déterminer la distance périhélie SV'. On trouvera la valeur ED, qui doit être à la flèche de la terre $= v$ trouvée au num. 68, comme 1 est à SD^2, & prenant SE pour SD dans la valeur de la flèche, qui est petite, on aura sa valeur $= \frac{v}{SE^2}$. On pourra la placer parallèlement à l'axe SE' non encore corrigé, qui a presque la même direction, que le corrigé SD', & tirer la DD' parallèle à la EE'. Ayant trouvé le point D' avec le centre S & l'intervalle SD, & coupé la base DD' par le milieu en A', la A'V' perpendiculaire à la SD' donnera la distance périhélie SV'.

On pourra, si l'on veut, se servir de toutes les deux méthodes, pour prendre un milieu entre les déterminations qu'on en aura tirées, si elles ne sont pas tout-à-fait d'accord.

(*) Si l'on a tiré une fois la ligne TA perpendiculaire à la TB, comme on a déja proposé ci-dessus, on aura la longueur de TL, sans tirer VL, en appliquant une pointe du compas en V, & en l'ouvrant de manière à toucher cette perpendiculaire, sans que la seconde pointe tournée autour de la première déborde au de-là. Cette méthode de Géométrie pratique vient en usage très-souvent, & viendra plusieurs fois ci-après encore.

num. 61. Par deux interse&ions des cercles tirés avec les centres S, V, on tirera la ligne BB', qui coupera SV à angles droits par le milieu en A. On trouvera dans cette ligne les points O, O'' des deux cercles, qui passent tous les deux par S, & V, & de plus l'un par C, l'autre par C'', ce qui se fait très-aisément, en appliquant la règle aux deux interse&ions d'arcs, qui auront les centres en S & C, & en S & C''; & si l'un de ces deux points est trop près du sommet V, comme le point C, on prendra (num. 62) AO $= \frac{3}{8}$VC. Alors ayant pris sur une échelle le nombre des parties des lignes OO'', AO, en multipliant ce second par le temps total t'', & en divisant le produit par le premier, on aura par la méthode du num. 63 le temps qu'il faudra retrancher de celui de la première observation, pour avoir le temps de l'arrivée au périhélie: il faudra retrancher le temps trouvé, ou l'ajouter, selon que la dire&ion CV sera contraire à la dire&ion CC'', ou conforme, la comète arrivant en V dans le premier cas avant d'arriver en C, & dans le second après. On évitera, ou facilitera la division, si on applique OO'' dans le compas de proportion à 100 parties, ou à 200, & on évitera la multiplication aussi, si on applique dans le compas de proportions OO'' au nombre des jours du temps t''; pour avoir les heures, au moins de deux en deux, on pourra employer ce nombre de jours multiplié par 12.

97. Ayant trouvé la valeur numérique de la distance périhélie SV par la méthode du num. 94 on prendra la moitié de son logarithme, le logarithme constant 2,0398718, & le logarithme de la valeur numérique de la ligne AO prise sur la même échelle des parties du rayon de l'orbite terrestre = 1: la somme de ces trois nombres logarithmiques sera le logarithme du temps qu'on doit retrancher, ou ajouter à celui de la première observation pour avoir l'arrivée au périhélie.

98. Si l'on ajoute aux deux premiers nombres le logarithme de la valeur SV, on a (num. 59) le logarithme du temps, qui répond à 90 degrés d'anomalie pour cette parabole, c'est-à-dire au mouvement du centre O égal à la distance périhélie; on fera bien de la trouver pour avoir plus exa&ement l'échelle de ce

mou-

mouvement (num. 61) à employer pour les temps plus éloignés dans le paragraphe suivant : l' ayant trouvé, on devroit en faire usage dans la proportion suivante, comme la distance périhélie SV est à la ligne AO, ainsi le temps, qui répond à cette distance, est au temps cherché, qui répond à cette ligne : cela demande la soustraction du logarithme de la première, & l' addition de celui de la seconde: on épargne l' addition, & la soustraction du même logarithme de la valeur SV, quand on ne cherche pas cette échelle, mais immédiatement les derniers temps, comme nous avons fait dans le num. précédent.

99. Ainsi on a les 5 premiers éléments de l' orbite de la comète : on voit aisément, si son mouvement autour du soleil est direct ou rétrograde, en voyant dans la fig. 4, si la direction PSP'' va selon l' ordre des signes 0, 2, 4, ou contre, ce qui donne le dernier de six éléments cherchés de la théorie.

§. X.

Détermination du lieu de la Comète pour un autre temps quelconque de son apparition.

100. On se préparera à cette détermination par la description de l' orbite parabolique repliée sur la ligne des nœuds, & appliquée sur le plan de l' écliptique : cette description se fera facilement par la méthode, que nous avons expliquée (num. 50) sur la fig. 5, puisqu' on a ici aussi dans la fig. 4 le foyer S, & le sommet V : on se servira de la directrice FF', qu' on a déjà, & de la propriété essentielle, que chaque point d' une parabole doit avoir les distances au foyer, & à la directrice égales entre elles. On aura l' origine de l' orbite de deux côtés du sommet V, en prenant sur l' axe VS un rayon VK tant soit peu plus long que la distance SX, & en traçant avec le centre K un arc de cercle : on aura le reste continué autant que l' on veut en MM' par la construction de ce numéro, par laquelle on voit bien, que la courbe passera par C, C''. Nous appellerons la courbe ainsi construite parabole appliquée, comme nous l' avons déjà fait au numéro

méro 94, tandis que nous appellerons parabole projettée la projection hortogonale de la même orbite sur le même plan de l' écliptique, qui est aussi une parabole, comme on sait par les éléments coniques, & qu' on le démontrera ci-après. La ligne des nœuds NN' rencontrera ces deux orbites dans un point n commun à ces deux paraboles, & si elle n' est pas parallèle à l' axe dans un autre aussi : dans ces points la latitude de la comète sera nulle. Les points C, C'' appartiendront à la parabole appliquée, les P, P'' à la projettée, & tout autre point de la première, comme C''' aura son correspondant P''' dans la seconde, que l' on déterminera aisément ci-après par la raison constante des deux distances C'''D''', P'''D''' à la ligne des nœuds, qui est celle du rayon au co-sinus de l' inclinaison, comme on le verra ci-après.

101. Si on demande le lieu de la comète pour un autre moment quelconque ; on prendra la différence de ce temps, au temps de l' arrivée au périhélie, & dans la ligne BB' on prendra le segment AO''', qui répond à cette différence : on trouvera ce segment ou dans l' échelle, qu' on aura formée pour le mouvement du point O, en appliquant SV sur le compas de proportion au nombre des jours, qui répondent à l' anomalie de 90 degrés déjà trouvée (num. 98), ou disant comme ce nombre de jours est à cette différence de ces deux temps, ainsi la distance périhélie SV est au segment cherché AO''', que l' on prendra sur la même échelle formée pour les parties du rayon de l' orbite terrestre, ou faisant la somme du logarithme constant pour toutes les paraboles 2,0398718, & de la moitié du logarithme de la distance périhélie SV, desquels termes on aura déjà fait usage au num. 97, & en prenant son complément logarithmique, qui avec la valeur de l' intervalle du temps trouvé donnera le logarithme de la valeur du segment cherché ; parceque la somme de ces deux premiers logarithmes & du logarithme de ce segment doit donner le logarithme de ce temps (num. 97)

102. Le complément de la somme de ces deux premiers logarithmes une fois trouvée servira pour tous les temps, pour lesquels on cherchera le lieu de la même comète : en y ajoutant le

loga-

logarithme de la différence du temps donné au temps de l'arrivée au périhélie, on aura le logarithme du segment AO''', qui lui répond.

103. Ayant trouvé le point O''', on trouvera le point C''' de la parabole appliquée en fixant une pointe du compas en O''', & ouvrant jusqu'en S pour la porter sur cette parabole : ce sera le lieu de la comète dans son orbite pour ce temps-là. Pour en tirer la longitude, & latitude géocentriques, on tirera dans la (fig. 4) la $C'''D'''$ perpendiculaire à la ligne des nœuds, & on la portera dans la fig. 9 sur la TG en TH : on y tirera HM (*) perpendiculaire à TB, & on portera la TM dans la fig. 4 sur la $D'''C'''$ en $D'''P'''$. On voit bien, que P''' sera la projection du point C''', parceque l'angle HTM de la fig. 9 étant égal à l'inclinaison de l'orbite, son triangle HMT répondra au triangle CDP de la fig. 1, & sa ligne TM à la PD de la même figure.

104. On prendra dans la connoissance des temps la longitude du soleil pour le même temps, à laquelle ayant ajouté, ou ayant retranché 6 signes, on aura la longitude géocentrique de la terre, qui donnera dans l'écliptique le point Q''': la règle appliquée aux points S, Q''' donnera le lieu T''' de la terre, ou par sa rencontre avec le cercle de l'orbite terrestre, ou par la distance ST''' du soleil à la terre tirée aussi de la connoissance des temps. On tirera la ligne $T'''P'''$, & une règle appliquée en S dans une direction parallèle à cette ligne donnera dans l'écliptique le point Y, qui sera la longitude géocentrique de la comète ; parcequ'on voit bien, que la direction de son lieu réduit à l'écliptique est déterminée par la ligne SY parallèle à la $T'''P'''$.

105. On trouvera très-aisément le point Y par cette pratique de compas qu'on a proposée dans la note au num. 74 en l'ouvrant depuis S jusqu'à la ligne $T'''P'''$, & en cherchant après l'

(*) A' la place de tirer cette ligne il suffira, comme on a dit ci-dessus aussi, de fixer une pointe du compas en M, & l'ouvrir jusqu'à ce que la seconde pointe arrive à la ligne TA sans dépasser au de-là en la tournant : l'ouverture du compas sera égale à la ligne TM, qu'on doit transporter.

avoir prolongée, s'il le faut, avec la même ouverture le point Y de l'écliptique, qui en est distant du même intervalle: on trouvera aussi la longueur D'''P''' immédiatement en prenant avec le compas dans la fig. 9 la distance perpendiculaire HM' du point H à la ligne TA. La même distance portée en TM donnera le point M pour le numéro suivant sans la perpendiculaire HM.

106. Pour la latitude géocentrique on prendra dans la fig. 9 sur la ligne TB le segment MQ égal à T'''P''' de la fig. 4: on tirera QH, qui déterminera l'angle MQH égal à la latitude cherchée: car à cause de l'angle HTM de la fig. 9 égal à l'inclinaison de l'orbite, le triangle HMT de cette figure répondra au triangle CPD (*) de la fig. 1, & le triangle HMQ de celle-là au triangle CPT de celle-ci.

107. On voit bien, que la distance de la comète à la terre sera = QH, qui répond dans le même triangle HMQ à l'hypothénuse TC du triangle CPT de la fig. 1. La distance au soleil sera (fig. 4) SC''', & la longitude héliocentrique sera déterminée par la rencontre *y* d'une règle appliquée en S & P''' avec l'écliptique.

108. Si après avoir décrit la parabole appliquée, on veut déterminer tout cela sans le secours de la fig. 9, on appliquera sur le compas de proportion la ligne C'''D''' au num. 100, & on y prendra pour la D'''P''' le co-sinus de l'inclinaison de l'orbite pris dans les tables des sinus relativement au rayon 100: la direction T'''P''' transportée en S donnera, comme auparavant, en Y la longitude géocentrique, & la règle appliquée en S, & C''' donnera, comme auparavant, en *y* la longitude héliocentrique. Du centre P''' avec le rayon = D'''C''', on trouvera sur la ligne des nœuds le point *b*, & on portera la T'''P''' sur la D'''C''' prolongée, s'il le faut, en D*c*: ayant tiré *bc*, l'angle D'''*cb* sera la latitude géocentrique, & *bc* la distance à la terre, la distance au soleil étant SC'''

(*) Pour ne pas multiplier les points, & les lignes, on prend ici le point C de la fig. 1 pour correspondant au C''' de la fig. 4.

SC''' comme auparavant. La démonstration de tout cela dépend de ce que dans la fig. 1 DC est à DP comme le rayon au co-sinus de l'inclinaison PDC, d'où l'on tire que D'''P''' dans la fig. 4 sera bien déterminé par ce co-sinus, & alors son triangle *bc*D''' répondra au triangle CTP de la fig. 1, puisque sa ligne *c*D''' = T'''P''' répond à TP de la fig. 4, & sa D'''*b* à la PC de la même fig. 1.

109. Les constructions, que nous avons données ici, serviront pour trouver le lieu de la comète pour quelques temps déterminés: mais il y a une manière d'exposer tout le mouvement entier, & la suite des phénomènes d'un seul coup d'œil: nous la donnerons dans le paragraphe suivant.

§. XI.

Manière de faire voir toute la suite des phénomènes d'un seul coup d'œil.

110. On peut employer pour cet objet la même feuille de papier, qui a servi pour trouver les éléments; mais pour éviter la confusion de tant de lignes, il vaudra mieux le faire sur un autre papier, sur lequel on portera seulement les deux cercles de la fig. 4 avec le centre S, & la division de l'écliptique; la parabole MSM' avec son sommet V, & sa projection *u*, la ligne BAB', & la ligne des nœuds NN'.

111. On ouvrira le compas de proportion de manière, que la distance périhélie SV y soit appliquée au nombre des jours, qui lui répond, trouvé à cet effet au num. 98, & sur cette échelle, on fera la division de la ligne BB' conformément au num. 60; mais on pourra commencer par prendre depuis A dans la direction contraire au mouvement de la comète le nombre de parties, qui répond au nombre des jours du mois marqué par le temps de l'arrivée au périhélie, & ainsi on aura le commencement de ce mois, le marquant par une petite ligne, & y écrivant à côté le nombre 30, ou 31 selon le nombre des jours du mois précédent: si c'étoit le mois de février, on y écriroit 28, & dans l'année bis-

sextile 29. On y prendra pour les mois précédents & suivants le nombre de parties, qui répond au nombre des jours de ce mois, & on en aura des commencements, que l' on marquera par une pareille petite ligne, en y écrivant à côté par-tout le nombre des jours du mois précédent. Le même compas donnera l' intervalle de 10 jours pour les 10 & 20 de chaque mois, qu' on écrira à côté des petites lignes, qui marqueront cette division : on pourra alors faire la subdivision des dizaines intermédiaires mettant une ligne plus courte pour le 5, & des points pour les autres unités ; mais cette subdivision généralement ne sera pas nécessaire. On pourra écrire le nom du mois entre les petites lignes qui en marqueront le commencement & la fin.

112. On passera à la division de la parabole appliquée, qui ne souffrira plus aucune difficulté. Ayant mis une des deux pointes du compas sur les divisions de la ligne BB', qui répondent aux commencements des mois, & des dizaines de jours, on portera l' autre sur le point S, laquelle tournée autour de la première donnera les points correspondants de la même parabole : on pourra faire la subdivision, en supposant la vîtesse de la comète uniforme dans 10, ou 11 jours, ayant égard à quelque inégalité de vîtesse, là où une diminution considérable de distance au soleil forme quelqu' accélération sensible. Dans ce cas on pourroit bien se servir de la subdivision de la ligne BB' au moins de 5 en 5 jours. Quand le point de la ligne BB' sera trop près du point A, on prendra dans la parabole un arc $= \frac{8}{3}$ de cette petite distance selon le num. 57. On marquera le 10, 20, 30 ou 31 des mois à côté des divisions correspondantes, & les noms des mois entre le commencement & la fin de chacun.

113. Ayant divisé la parabole appliquée, on trouvera pour les divisions principales les points correspondants de la parabole projettée, en tirant comme au num. 103. de chacun des points de la première représentés par le point C''' de la fig. 4 sa C'''D''' perpendiculaire à la ligne des nœuds NN' : ayant porté la ligne C'''D''' dans la fig. 9 en TH, on tirera HM perpendiculaire à la TB, & on portera la TM dans la fig. 4 sur la D'''C''' en D'''P''', ou

selon

selon la pratique du num. 105, on prendra immédiatement dans la fig. 9 avec le compas la distance HM' perpendiculaire à la ligne TA, pour la porter sur la fig. 4 en D'''P'''. On pourra encore, sans employer la fig. 9, appliquer selon le num. 108 la C'''D''' sur le compas de proportion au nombre 100, & y prendre la ligne, qui répond au co-sinus de l'inclinaison de l'orbite.

114. Il y auroit un autre moyen de déterminer les points D''' correlatifs aux points C''', qui est de construire auparavant la parabole projettée : la rencontre de la perpendiculaire C'''D''' avec cette courbe donneroit les points cherchés. On peut construire cette parabole de mille manières différentes. J'en donnerai dans le paragraphe suivant plusieurs bien simples tirées de la Géométrie linéaire ; mais les méthodes, que nous avons proposées ici pour trouver les points P''' par les points C''', donnent aussi une méthode de construire la parabole projettée dépendamment de l'appliquée, & la plus facile est celle d'employer dans la fig. 9 l'angle BTG de l'inclinaison de l'orbite dans l'angle BTA droit, tirer un bon nombre de perpendiculaires C'''D''' dans la fig. 4, les appliquer en autant de TH dans la fig. 9, prendre pour chacune la distance HM' à la droite TA, & la transporter en D'''P''' dans la fig. 4.

115. A' la division des deux paraboles il faut ajouter celle de l'orbite terrestre, que l'on fera selon le num. 49, en prenant dans la connoissance des temps les longitudes du soleil, pour les commencements, les 10, les 20 des mêmes mois : après y avoir ajouté, ou en avoir ôté 6 signes pour avoir les longitudes héliocentriques de la terre, on prendra dans l'écliptique les points Q''', qui y répondent : la règle appliquée à ces points, & au centre S donnera les lieux T''' de la terre. On aura ainsi la division de l'orbite terrestre en mois, & dizaines de jours : la subdivision se fera en parties égales, & celle-ci sera beaucoup plus exacte, que celle de la parabole à cause de la très-petite inégalité de vîtesse dans le mouvement de la terre presque circulaire, qui ne laisse aucune inégalité sensible dans des arcs de 10, ou de 11 jours : on y écrira de même les mois, & les dizaines de jours le long des arcs appartenants à chaque mois.

116. On

116. On verra alors d'un coup-d'œil le mouvement de la comète dans sa parabole appliquée, la projection des points de l'orbite sur l'écliptique, qui avec le mouvement de la terre sur son orbite fera voir en gros les phénomènes, qu'on doit observer de la terre: pour en juger par un à-peu-près, il faudra concevoir la parabole appliquée comme élevée sur le plan de l'écliptique de manière, que chacun de ses points reste perpendiculairement sur les points correspondants de la projettée avec l'inclinaison de son plan, qu'on connoit déjà dans le second de six éléments (num. 90). Mais pour voir d'un coup d'œil les phénomènes, on déterminera, & exprimera dans une autre figure les distances au soleil & à la terre, puisque la clarté de la lumière dépend d'elles, étant en une raison réciproque du quarré de l'une, & de l'autre, comme aussi les longitudes & latitudes géocentriques.

117. On déterminera ces quatre éléments des phénomènes observés sur la surface de la terre, comme au num. 108. Chaque ligne SC''' donnera la distance au soleil: ayant trouvé par le compas fixé en P''' avec l'ouverture $= D'''C'''$ sur la ligne SN le point b, & appliqué la $T'''P'''$ sur la $D'''C'''$ en $D'''c$, on aura la distance à la terre $= bc$: la règle appliquée en S avec la direction $T'''P'''$ donnera en Y sur l'écliptique la longitude géocentrique, & l'angle bcD''' sera la latitude géocentrique.

118. Pour les voir d'un coup d'œil, on peut employer les courbes, que nous avons indiquées au num. 13: on en fera la délinéation de la manière suivante. On prendra (fig. 12) d'une échelle quelconque sur une ligne droite AB les jours des mois, pour lesquels on a fait la construction, marquant les 10, 20, 30 ou 31, & écrivant à côté les noms de ces mois: sur la ligne perpendiculaire AA', on marquera les parties centièmes de la distance moyenne de la terre de dix en dix, en y marquant à côté 10, 20, 30 &c: par tous les points marqués dans les lignes AB, AA', on tirera des lignes parallèles respectivement aux mêmes AB, AA', ce qui sera facile, si l'on tire deux autres A'B', BB' parallèles, & égales à ces lignes, & divisées également: les

autres

autres parallèles seront déterminées par les nombres correspondants.

119. Pour chaque jour marqué on prendra la distance au soleil trouvée ci-dessus, & on la portera sur la ligne parallèle à la AA' depuis le point de la AB, qui répond à ce jour, comme S, jusqu'à un point C. Ayant marqué ces points de 10 en 10 jours, on tirera à la main une courbe, qui suive leurs directions; & si l'on ne voit pas bien dans quelque endroit la direction, qui doit aller d'un point à l'autre, on pourra trouver ces distances par la même construction pour un, ou plusieurs jours intermédiaires. On écrira le long de cette ligne courbe *ligne des distances au soleil*.

120. On fera de même sur le même chassis une autre courbe pareille pour les distances à la terre: on en fera la troisième pour les longitudes, & une autre pour les latitudes géocentriques: mais alors les parties marquées sur les côtés AA', BB' serviront pour exprimer les degrés, & les dixièmes de ces unités exprimeront les minutes de six en six. Seulement si la longitude qui répond au premier point A est déjà grande, on pourra commencer par quelque autre signe, & ayant marqué sur le côté opposé 10, 20, 30, 10, 20, 30 &c. écrire le nom de ce même signe dans son intervalle, ou le caractère qu'on employe en Astronomie, & dans les almanachs, pour l'exprimer. Si le mouvement apparent est direct, la courbe des longitudes ira en montant vers A'B', & s'il est rétrograde, elle descendra. Dans le cas des latitudes, s'il y en a des boréales, & des australes, on peut tirer ces dernières du côté opposé au dessous de la AB, ou compter pour l'équateur la ligne du milieu, qui va parallélement à la AB de 50 à 50, & prenant les dizaines des degrés de latitude boréale au dessus, & des australes au dessous de cette ligne intermédiaire.

121. Ayant écrit à côté de chaque courbe à quoi elle appartient, on verra d'un coup d'œil pour chaque jour la distance de la comète au soleil, & à la terre, comme aussi sa longitude & latitude géocentrique. On pourroit de même tracer deux autres courbes pour les ascensions droites, & les déclinaisons. Ces courbes

bes ne pourront pas donner une espèce de précision, si la figure n'est pas très-grande, puisque il y aura trop peu d'espace pour un degré entier; mais elles serviront beaucoup pour avoir une idée de la suite des phénomènes, qui devront paroître dans le temps de l'apparition, & pour diriger l'Astronome à la chercher dans le ciel, quand elle aura déjà une lumière foible, & aura été cachée plusieurs jours par les nuages. Les lignes des distances feront voir les temps, & la quantité de la plus petite distance au soleil, & à la terre, comme aussi donneront le fondement pour juger du temps, dans lequel elle ne sera plus visible, à cause de la foiblesse de la lumière.

§. XII.

Détermination des principaux éléments de la parabole projettée. (*)

122. Nous avons vu dans le paragraphe précédent plusieurs manières de trouver autant de points de la parabole projettée, qu'on

(*) Tout ce paragraphe ne contient qu'une contemplation géométrique: on y trouve des constructions simples tirées par des combinaisons de plusieurs propriétés élémentaires de la parabole. Ceux qui n'aiment pas de s'exercer dans les évolutions géométriques pourront le laisser là sans s'y arrêter. Seulement j'ajouterai ici le résultat de ces recherches en proposant plusieurs déterminations de la parabole projettée dépendamment de l'appliquée. On suppose toujours d'avoir le foyer S (Fig. 13) de cette dernière MVM', son sommet V, la direction de la ligne des nœuds NSN', & l'inclinaison de l'orbite: on cherche la première *mum'*. Ayant tiré VF perpendiculaire & égale à VS, on tirera VV', FF' perpendiculaires à la ligne des nœuds: on y prendra V'*u*, F'*f* vers V, & F, qui soient à ces deux lignes en raison du co-sinus de l'inclinaison de l'orbite au rayon: on tirera *uf*, & S*u*: on prolongera S*u*, en y prenant *ux* troisième continuellement proportionnelle après *u*S, *uf*: on tirera *x*L perpendiculaire sur la *fu* prolongée, & on la prolongera autant en *s*. Ce point-ci sera le foyer de la parabole cherchée, & on aura sa directrice, en tirant par *x* une ligne perpendiculaire à la ligne S*x*. Même on trouvera la ligne *ux* par une construction très-simple: il suffit de faire l'angle *uf*K = *u*S*f* en mettant K sur la ligne *u*S prolongée, s'il le faut, & prendre *ux* = *u*K, parceque celle-ci sera la troisième après S*u*, *uf*.

Les

qu' on en veut. Nous donnerons ici la détermination immédiate des principaux éléments de cette courbe, qu'on pourra alors construire aussi par le mouvement continuel de l'instrument dont nous avons fait mention au num. 50, ou par la construction générale du même numéro. Les éléments de cette courbe, que nous trouverons les premiers, seront le foyer, & la directrice, qui sont les seuls employés au même num. pour la construction d'une parabole soit par le mouvement continuel à l'aide d'un instrument, soit par un bon nombre de points géométriquement déterminés.

123. Le sommet V avec le foyer S, & le point X, qui est la rencontre de l' axe avec la directrice, soit le même dans la fig. 13, que dans la fig. 4, comme aussi la ligne des nœuds NSN', & *u* projection du sommet V tiré de la raison de VV' à V'*u*, qui est celle du rayon au co-sinus de l' inclinaison de l' orbite. Que l'on conçoive deux lignes perpendiculaires à l' axe tirées l'

 une

Les lignes FV, *fu* sont tangentes des deux paraboles, & si la ligne des nœuds est inclinée à la directrice, elle est rencontrée par ces deux tangentes dans un même point E: la ligne EA perpendiculaire à la même ligne des nœuds doit toucher toutes les deux paraboles dans deux points T, *t* de manière, que les deux tangentes ET, E*t* aient la même raison du rayon au co-sinus de l' inclinaison: la même ligne des nœuds rencontre toutes les deux courbes dans les mêmes point *n*, *n*', de manière, que si l'on conçoit la parabole comme une ellipse infinie coupée en deux parties par la corde *nn*', une finie, & l' autre infinie, les parties finies *n*V*n*', *nun*' de ces deux paraboles n'ont aucune autre rencontre, & les infinies en ont une dans un point *p* entre les deux contacts T, *t*, où elles se coupent, & une autre dans l'infini, où elles sont censées se couper de nouveau: la première courbe entière seroit *n*'V*np*TM∞M'*n*', & la seconde *n*'*untpm*∞*m*'*n*', avec quatre intersections en *n*', *n*, *p*, ∞: cette dernière seroit une vraie intersection, si à la place de comparer deux paraboles, l' appliquée, & la projettée, on comparoit deux ellipses.

Si l'on a (fig. 14) les deux intersections *n*', *n* de la ligne des nœuds avec la parabole projettée, la construction devient beaucoup plus facile. Ayant trouvé le point *u* comme auparavant, on coupera la corde *nn*' par le milieu en A: on tirera les lignes A*u*, *u*S, & on les prolongera, en y prenant *ux*, *us* égales à la troisième continuellement proportionnelle après A*u*, AV. Le point *s* sera le foyer de la parabole cherchée, & la ligne perpendiculaire à la A*x* tirée par *x* sera sa directrice. On trouvera cette troisième proportionnelle, en faisant l' angle AVK = A*u*V, le point K étant sur la A*x*.

On

une par le sommet V, qui rencontre la ligne des nœuds en E, l'autre par un point G du même axe, qui rencontre la parabole appliquée en C, C', & la ligne des nœuds en H avec les deux CD, C'D' perpendiculaires à la même ligne des nœuds, en outre la droite E*u*, & H*g* sa parallèle, qui rencontre la S*u* en *g*, & les DC, D'C' en *c*, *c'*: qu'on y ajoute la G*g*, qui étant prolongée rencontre la ligne des nœuds en G'.

124. On voit bien que VE sera tangente, & la corde CC' étant parallèle à cette tangente sera ordonnée à l'axe, qui la coupera par le milieu en G, & puisque le paramètre de l'axe est $= 4SV = 4VX$, on aura $VX = \frac{GC^2}{4VG}$.

125. Les VE, GH, & *u*E, *g*H parallèles donneront ces proportions SV : SG :: SE : SH :: S*u* : S*g*, d'où l'on tire, que G*g*G', V*u*V' sont parallèles, & que la raison de GG' à G'*g*, qui par la construction est la même que celle de CD à D*c*, & de C'D' à D'*c*', est la même que la raison de VV' à V'*u*, qui est celle du rayon

---

On peut ajouter ici, que si la ligne des nœuds fait un angle si petit avec l'axe qu'un des deux points *n*, *n'* aille trop loin, il suffira de tirer une corde CC' quelconque de la parabole appliquée parallèle à cette ligne, tirer les deux CD, C'D' perpendiculaires à la même ligne, y prendre D*c*, D'*c'* vers C, C', qui soient aux DC, D'C' en raison du co-sinus de l'inclinaison au rayon, tirer la *cc'*, la couper par le milieu en *g*, tirer les *gux*, *u*S*s*, & y prendre les *ux*, *us* égales à la troisième continuellement proportionnelle après *ug*, & $\frac{1}{2}gc$. Parceque les cordes CC', *cc'* seront des ordonnées aux diamètres VG, *ug*, & la distance du point *u* au foyer, & à la directrice sera un quart du paramètre, qui est troisième après *ug*, *gc*.

Dans les fig. 15, & 16 il y a les deux cas, où la ligne des nœuds soit perpendiculaire à l'axe, ou tombe sur l'axe même. Dans le premier (fig. 15) *n*, *n'* sera l'ordonnée de toutes les deux paraboles coupée par le milieu en S. Ayant pris S*u* vers V, qui soit à SV en raison du co-sinus de l'inclinaison au rayon, on prendra sur le même axe les *us*, *ux* égales à la troisième après *u*S, & $\frac{1}{2}Sn$. Dans le second cas (fig. 16) ayant tiré SA perpendiculaire à l'axe, qui soit à SV en raison du co-sinus de l'inclinaison au rayon, on fera l'angle VAB droit, le point B étant sur le même axe, & on prendra les V*s*, V*x* égales à la SB.

rayon au co-sinus de l'inclinaison : ainsi les points c, c' sont les projections des points C, C', comme P, P'' des C, C'' dans la fig. 1, & ils appartiennent à la courbe projettée, qui aura la cc' pour corde. Par le parallélisme des trois Cc, Gg, $C'c'$ on a cette proportion $CG : GC' :: cg : gc'$: ainsi les deux premières étant égales, les dernières le seront aussi, & par-là toutes les cordes cc' parallèles à la même droite uE seront coupées également par la droite uS en g, d'où l'on tire, que uS est un diamètre de la courbe projettée, & uE sa tangente.

126. Or on a aussi les proportions suivantes $GC^2 : gc^2 :: GH^2 : gH^2 :: VE^2 : uE^2$, & $GV : gu :: SV : Su$, d'où l'on tire $\frac{GC^2}{GV} : \frac{gc^2}{gu} :: \frac{VE^2}{SV} : \frac{uE^2}{Su}$. Donc si l'on prend dans la Su prolongée ux, qui soit à la donnée VX dans la raison donnée du quatrième terme au troisième, on dira $\frac{GC^2}{GV} : \frac{gc^2}{gu} :: 4VX : 4ux$: le premier terme étant égal au troisième, le second le sera aussi au quatrième, & on aura $gc^2 = gu \times 4ux$, ce qui fait voir, que la courbe projettée est réellement aussi une parabole, qui a pour sa tangente uE, pour un de ses diamètres uS, & pour paramètre de ce diamètre $4ux$.

127. La ligne perpendiculaire à la ux tirée par x sera la directrice, & si l'on tire xL perpendiculaire à la tangente uE, & qu'on la prolonge autant en s, ce point sera le foyer de cette parabole. La première partie vient de la propriété de la parabole, que la distance perpendiculaire du sommet de chaque diamètre à la directrice est égale à sa distance au foyer, qui est $\frac{1}{4}$ du paramètre de ce diamètre. On voit la seconde, parceque les triangles rectangles xLu, sLu seront égaux, & par-là $us = ux$, & l'angle xuL $= su$L, c'est-à-dire (si l'on prolonge la tangente Eu en f) $= fu$S, comme il le falloit, parceque le rayon du foyer doit faire avec la tangente le même angle, que le diamètre, ce qui a donné le nom au foyer même, & doit être égal à $\frac{1}{4}$ du paramètre de ce diamètre.

128. Voici donc une construction bien élégante, & qui donne une relation complette de ces deux paraboles. Comme on a les points V, S, X de la parabole appliquée avec la ligne des nœuds NSN', on trouvera le point u sommet de la parabole projettée, en tirant VV' perpendiculaire à la ligne des nœuds, & prenant $V'u = VV' \times$ *cos. inclin.*, ce qu'on avoit déjà fait par construction (num. 95). On tirera par V une droite perpendiculaire à l'axe, qui rencontre la ligne des nœuds en E, & ayant pris une ligne, qui soit la troisième continuellement proportionnelle après SV, VE, & une autre après Su, uE, on trouvera la quatrième proportionnelle après ces deux lignes, & la VS = VX, on la portera sur la Su prolongée en ux, & on l'appliquera encore en us à un angle $Eus = Eux$, ce qu'on peut faire aussi en tirant xL perpendiculaire sur uE, & la prolongeant autant en s. Le point s sera le foyer, & une droite perpendiculaire à ux tirée par x sera la directrice de la parabole projettée.

129. Ayant le foyer, & la directrice, on a l'axe en tirant par ce foyer une ligne perpendiculaire à la seconde, le sommet en la coupant par le milieu, le paramètre de l'axe en la doublant : ainsi on en a tous les éléments cherchés. On voit bien qu'ayant le point S, on n'a pas besoin du point X ni pour l'analyse géométrique, ni pour la construction : on l'a introduit seulement pour mieux voir l'analogie des deux points x, s, aux X, S, & de toutes les autres lettres minuscules aux majuscules.

130. On simplifiera la construction, si dans la perpendiculaire à l'axe tirée par V on prend d'un côté, ou d'autre VF = VS, en tirant FF' perpendiculaire à la ligne des nœuds, qui rencontre la Eu en f; parceque dans la proportion, qui donne le rapport de VX = SV à la cherchée ux, on peut mettre VF, uf à la place de VE, uE; & alors on aura cette proportion $\frac{VF^2}{SV} = SV : \frac{uf^2}{Su} :: SV : ux = us$, où l'on voit que les deux ux, us sont égales à $\frac{uf^2}{Su}$: ainsi pour la construction il suffira de trouver la troisième proportionnelle après Su, uf. Comme le point

E em-

E employé pour déterminer la position de la ligne E*uf* pourroit aller si loin, que la construction ne pourroit pas le trouver ; on peut s'en débarrasser tout-à-fait, en prenant $F'f = FF' \times cos.incl.$ On pourra la trouver aussi dans la fig. 9 par construction, en y portant cette FF' sur la ligne TG, & en prenant la distance de son bout à la ligne TA. On aura alors la droite *uf* sans le secours du point E. Pour avoir la troisième proportionnelle après S*u*, *uf* il suffit de faire l'angle *uf*K = *u*S*f*, le point K étant dans la *u*S prolongée ; puisqu'on aura les deux triangles *u*S*f*, *uf*K semblables, & *u*K troisième proportionnelle après S*u*, *uf* : cette ligne portée en *ux*, & *us* achevera la construction.

131. Voici alors la construction entière. Ayant les points V, S, & la ligne des nœuds, on tirera VV' perpendiculaire à la même ligne, & on y prendra $V'u = VV' \times cos.incl.$: on tirera aussi VF perpendiculaire, & égale à VS, & FF' perpendiculaire à la ligne des nœuds, & sur cette dernière on prendra $F'f = FF' \times cos.incl.$ ayant tiré *uf*, on fera l'angle *uf*K = VS*f* le point K étant dans la ligne *u*S prolongée s'il le faut : on prendra du côté opposé *ux* = *u*K, & on tirera par *x* une ligne perpendiculaire à la même *ux*, qui sera la directrice : on tirera *x*L perpendiculaire à la *uf*, & on la prolongera autant en *s*, & ce point sera le foyer.

132. On peut trouver aussi, & avec plus d'exactitude la ligne *ux* par la Trigonométrie, ayant seulement SV que nous appellerons 1, l'inclinaison de l'orbite que nous ferons $= a$, & l'inclinaison VSE de la ligne des nœuds à l'axe que nous dirons b. L'angle VSE sera = EVV' à cause des angles SVE, VV'E droits, & on aura $VE = tan.b$, $SV' = cos.b$, $VV' = sin.b$, $V'u = sin.b\ cos.a$, $V'E = tan.b\ sin.b$. Si l'on fait les angles $V'Su = x$, $V'Eu = z$, on trouvera ces angles par leurs tangentes ; parceque on dira $1 : cos.a :: VV' : V'u :: tan.V'SV = tan.b : tan.V'Su = tan.x = cos.a\, tan.b :: tan.V'EV = cot.b : tan.V'Eu = tan.z = cos.a\, cot.b$. Alors on aura $Su = \dfrac{SV'}{cos.V'Su}$

$= cos.$

$= \frac{cos.b}{cos.x}$, & $uE = \frac{V'E}{cos.V'Eu} = \frac{tan.b\, sin.b}{cos.z}$. On appliquera ces expressions à la proportion trouvée au num. 128, qui fait $us = ux$ quatrième proportionnelle après deux lignes, dont une est troisième après SV, VE, & l'autre après Su, uE. Ainsi on dira $\frac{VE^2}{SV} : \frac{uE^2}{Su} :: SV : us = ux = \frac{uE^2 \times SV^2}{VE^2 \times Su} = \frac{sin^2.b\, cos.x}{cos^2.z\, cos.b} = \frac{tan.b\, sin.b\, cos.x}{cos^2.z}$.

133. Si l'on ne veut pas chercher les angles x, z; on aura $Su^2 = SV'^2 + V'u^2 = cos^2.b + sin^2.b\, cos^2.a$, $uE^2 = EV'^2 + V'u^2 = tan^2.b\, sin^2.b + sin^2.b\, cos^2.a = sin^2.b\,(tan^2.b + cos^2.a)$. Alors on a $us = ux = \frac{uE^2 \times SV^2}{VE^2 \times Su} = \frac{sin^2.b(tan^2.b + cos^2.a)}{tan^2.b\, \surd(cos^2.b + sin^2.b\, cos^2.a)}$. Or à la place de $\frac{sin.^2}{tan.^2}$ on peut mettre $cos.^2$, & employant cette substitution dans le second terme du numérateur, après avoir divisé le premier par $tan^2.b$, on aura à la fin $ux = us = \frac{sin^2.b + cos^2.b\, cos^2.a}{\surd(cos^2.b + sin^2.b\, cos^2.a)}$. Cette formule est assez simple, & élégante; néanmoins en employant la substitution des nombres tant ici, que quand on se sert des angles x, z, on trouvera une opération beaucoup plus longue, que dans les constructions géométriques, que nous avons proposées ci-dessus, & d'ailleurs la précision donnée par ces constructions est assez grande pour pouvoir les employer à la construction de la courbe, pour laquelle on cherche ici ses éléments.

134. Mais j'ai une autre construction plus simple encore à plusieurs égards, qui donne les points x, & s en faisant usage de deux autres points de la parabole, & de la directrice, pour lesquels pourtant nous employerons les mêmes lettres pour conserver une espèce d'analogie de cette construction avec la précédente. Qu'on tire (fig. 14) du foyer S une ligne perpendiculaire à la ligne des nœuds, qui rencontre la directrice en X, & XA perpendiculaire à la directrice, qui rencontre la ligne des nœuds en

en A : l'ayant coupée par le milieu en un point V, on tirera VV' aussi perpendiculaire à la ligne des nœuds, & on prendra $V'u = VV' \times cos. incl.$: on prolongera A*u* en *x*, de manière, que la ligne *ux* soit la troisième continuellement proportionnelle après A*u*, AV, on tirera *u*S, & l'ayant prolongée, on y prendra $us = ux$. Le point *s* sera le foyer, & on tirera par *x* la directrice perpendiculaire à la même *ux*.

135. La démonstration dépend d'une propriété, qui est générale à toutes les sections coniques, comme je l'ai démontré dans mes éléments de ces courbes : on le démontre encore plus facilement pour la seule parabole : la droite tirée du foyer à la rencontre d'un diamètre avec la directrice est perpendiculaire à toutes les ordonnées de ce diamètre. Ainsi le diamètre, qui a pour ordonnées les cordes parallèles à la ligne des nœuds, passera par X, & comme dans la parabole tous les diamètres sont parallèles à l'axe, & par-là perpendiculaires à la directrice, XA sera le diamètre des cordes CC' parallèles à la ligne des nœuds, qui en seront coupées par le milieu en G. En tirant SV au milieu de l'hypothénuse AX du triangle rectangle ASX, on aura $SV = VX$, d'où il suit que le point V est le sommet de ce diamètre, $AV = VS = \frac{1}{4}$ de son paramètre, $GC^2 = 4AV \times VG$.

136. Si l'on conçoit les CD, C'D', GG' perpendiculaires à la ligne des nœuds, la dernière coupant A*u* en *g*, & par *g* une ligne parallèle à la ligne des nœuds, qui rencontre les CD, C'D' en *c*, *c'*; on aura les lignes *cg*, *c'g* égales aus lignes CG, C'G, & pour cela égales aussi entr' elles, & les trois CD, GG', C'D' égales entr' elles, les *c*D, *g*G', *c'*D' entr' elles : ainsi la raison des CD, C'D' aux *c*D, *c'*D' sera égale à la raison de GG' à *g*G', c'est-à-dire de VV' à *u*V', qui est celle du rayon au co-sinus de l'inclinaison. Ces trois points *c*, *u*, *c'* appartiendront à la courbe projettée, *u*A sera un des diamètres, qui aura pour ordonnées toutes les cordes *cc'* parallèles à la ligne des nœuds, & comme on a les proportions suivantes $gu : GV :: Au : AV :: AV : ux$ (*), on aura

(*) On a la première par les G*g*, V*u* parallèles, la seconde par construction.

aura $4ux \times gu = 4AV \times GV = GC^2 \pm gc^2$, ce qui fait voir, que la courbe projettée est réellement une parabole, qui a pour diamètre Au, pour paramètre $4ux = 4us$.

137. Par-là on voit, que la droite perpendiculaire à la ux tirée par x en sera la directrice, & s le foyer : car la tangente ue, qui doit être parallèle aux ordonnées cc' du diamètre uA, sera parallèle aussi à la corde nn', & ce diamètre uA, & le rayon uSs auront la même inclinaison à cette tangente : car à cause du triangle AVS isocèle, & de la ligne VuV' perpendiculaire à sa base AS, le triangle AuS sera aussi isocèle, & ses côtés uA, uS inclinés également à la même base, qui est parallèle à cette tangente. Ainsi le rayon us aura la direction, & la longueur qui l'amène au foyer.

138. Pour avoir le point x, on fera l'angle AVK $=$ AuV en mettant K sur la Au prolongée, ce qui donnera cette proportion $Au : AV :: AV : AK$: ainsi on prendra ux, & $Vs = AK$: on trouveroit le foyer s encore, en tirant la tangente ue parallèle à la ligne des nœuds avec xL perpendiculaire sur elle, & en prolongeant cette perpendiculaire autant en Ls.

139. Si l'on a déjà la parabole projettée avec son axe, la ligne des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite, la construction sera beaucoup plus simple. On aura les points n, n', dans lesquels la ligne des nœuds rencontre le périmètre de la parabole appliquée : on coupera par le milieu la corde nn' en A : on tirera par A une ligne parallèle à l'axe, qui rencontrera le périmètre en un point V : on tirera VV' perpendiculaire à nn', & on y prendra $V'u = VV' \times \cos.\, incl.$: on tirera Au, & on la prolongera en x de manière, que ux soit le troisième terme continuellement proportionnel après Au, & la moitié de An : par u & S on tirera $us = ux$, & on aura ainsi le point x pour la directrice, & le point s pour le foyer. La démonstration en est visibile ; car $n'n$ étant une ordonnée au diamètre uA : son paramètre sera troisième continuellement proportionnel après uA, An, & son quart le sera après uA, $\frac{1}{2}$An.

140. Si la ligne des nœuds est parallèle à la directrice ; le point

point E de la fig. 13 va à l' infini, le point V' de toutes les deux figures 13, & 14 va en S, & le point u va dans la ligne VS : ainsi le diamètre de la parabole projettée va sur l' axe de l'appliquée, & devient son axe, puisqu'il est perpendiculaire à ses ordonnées cc' : la construction devient par-là beaucoup plus simple : dans la fig. 15, on prendra sur l' axe de la parabole appliquée Su vers $V = SV \times cos.incl.$, us vers S, & ux vers V troisième après Su, SV, c' est-à-dire $= \frac{SV}{cos.incl.}$ pour avoir le foyer s, & la directrice, qu' on doit tirer par x. La démonstration en est claire; parceque les Su, SV ici succèdent aux Au, AV de la fig. 14. On l'a aussi directement : Sn (num. 23) est double de VS : ainsi le paramètre étant troisième après Su, Sn, son quart le sera après Su, SV.

141. Si la ligne des nœuds n' est pas inclinée à l'axe; elle sera l' axe même, & un des points n, n' allant en V, l'autre ira à l' infini. Mais alors la construction sera aussi aisée, sans employer d' autres points de la parabole appliquée, que son foyer S, & son sommet V, avec son inclinaison. On tirera (fig. 16) SA perpendiculaire à $VS = 2VS \times cos.incl.$: & ayant tiré VA avec sa perpendiculaire AB, le point B étant sur l' axe, on prendra Vx, & $Vs = SB$, qui donneront la directrice à tirer par x, & le foyer s.

142. Car si l'on conçoit une droite quelconque CD perpendiculaire à l'axe; elle sera perpendiculaire à la ligne des nœuds, & rencontrera la courbe projettée dans un point c de manière, que Dc aura à DC la raison du co-sinus de l' incl. au rayon, c' est-à-dire de BS à SA, & de SA à SV. Par-là on dira $Dc^2 : DC^2 :: BS : SV :: 4BS \times VD : 4SV \times VD$: & comme on a $DC^2 = 4SV \times VD$; on aura aussi $Dc^2 = 4BS \times VD$. Donc le point c sera à une parabole, qui a le sommet en V, l'axe VD, & son paramètre 4BS : ainsi les deux Vs, Vx, qui sont égales à la BS, sont égales à un quart du paramètre, comme il le falloit pour avoir le foyer s, & la directice.

143. Dans ce cas, dans lequel la ligne des nœuds concourt avec l' axe, la parabole projettée mVm' touchera l' appliquée MVM'

en V, & la première restera toute dans la seconde: dans tous les autres cas, la première coupera la seconde dans les deux points n, n', dans lesquels elles seront coupées par la ligne des nœuds, & elles mêmes s' y entrecouperont de manière, qu' une partie de la projettée restera dans l' appliquée, & une autre en sortira dehors.

144. Dans le cas de la fig. 16 les deux paraboles auront communs & l'axe, & le sommet: dans celui de la fig. 15 le sommet ne sera pas commun, mais l'axe le sera bien. Dans tous les autres cas les deux axes seront inclinés l'un sur l'autre, & ils auront deux différentes inclinaisons à la ligne des nœuds, les tangentes desquelles seront entre elles, comme le rayon est au co-sinus de l'inclinaison de l'orbite; car l'axe de la parabole projettée (fig. 13) est parallèle à son diamètre uS, & les tangentes des deux inclinaisons VSV', uSV' sont, comme VV' est à uV'.

145. Dans tous ces cas il y a un point E, dans lequel la ligne des nœuds rencontre la tangente VE de la parabole avec deux points n, n', dans lesquels elle rencontre son perimètre, le premier entre S, & E, le second du côté opposé, par rapport à S: il y a aussi une tangente AT de la même parabole perpendiculaire à la ligne des nœuds, laquelle tangente passe par E; & ayant tiré la droite EA perpendiculaire à cette ligne, on trouve le point du contact T, en faisant l'angle $EST = ESV$ relativement à la propriété de la parabole rapportée ci-dessus dans la note du num. 94. Ainsi si l' on met M dans une production indéfinie de l'arc Vn, & M' dans celle de l'arc Vn'; le point T tombe toujours sur l'arc nM.

146. On pourroit démontrer tout cela très-aisément par les éléments connus des sections coniques, comme aussi ce qui suit. Si l'on met m & m' sur la production de la projettée correlativement aux points M, M'; tout l'arc $m'n'$ de la seconde prolongé jusqu'à l' infini sortira hors de l' appliquée: en n' il y aura une intersection: tout l'arc $n'un$ restera dedans: en n il y aura une autre intersection, après laquelle la projettée sortira dehors une autrefois, & ira toucher la tangente ET dans un point t tel,

tel, que Er aura à ET la raison commune du co-sinus de l'inclinaison au rayon : après ce contact elle restera dehors jusqu'à un point p, dans lequel elle aura une troisième intersection, & rentrera de manière, que tout l'arc pm jusqu'à l'infini sera toujours dedans. Si l'on considère la parabole comme une ellipse infinie, il y a aussi une quatrième intersection à la réunion des arcs $n'm'mn$, & N'M'MN dans l'infini, puisque $n'm'$ qui étoit dehors se trouve après dedans en mn. On pourroit déterminer géométriquement le point p, & les angles, & les directions des deux arcs forment dans les trois intersections n', n, p; mais nous nous sommes déjà trop arrêtés sur cet objet, qui n'intéresse point la théorie du mouvement des comètes, & que nous avons proposé sans démonstration, seulement pour indiquer quelqu'un des rapports, qu'on trouve entre les deux paraboles, l'appliquée, & la projettée, qui lui doit son origine ; on peut faire usage d'un arc de cette courbe pour l'objet du paragraphe précédent ; mais on peut encore s'en passer, en n'employant seulement, que des points déterminés par la construction, que nous y avons proposée.

§. XIII.

Détermination des distances de la comète par le calcul trigonométrique.

147. Nous avons donné dans le §. 8 la manière de trouver la distance par la construction graphique : nous en donnerons ici l'autre, qui fait la même chose par le calcul trigonométrique, qui toujours donne les résultats plus exacts ; mais comme il exige plus de temps & de travail, on pourra commencer toujours par la construction, & si on veut plus d'exactitude, employer la Trigonométrie seulement après avoir approché de la vraie valeur par l'autre méthode : dans tous ces calculs on peut négliger les secondes, ou quand leur nombre passe 30, ajouter aux minutes une unité ; parceque les observations des comètes sont presque toujours incertaines d'une minute, & très-souvent de deux.

 148. Si

148. Si l'on ne veut pas s'en tenir au résultat de la construction pour la réduction de la seconde longitude ; on peut la trouver par le calcul trigonométrique de la manière exposée au numér. 41. Ayant trouvé la valeur de $T'r = v' = \frac{4tt'v}{t'^{3}}$ (numér. 34, fig. 1), & pris par position tirée des constructions précédentes $T'P'$, on résoudra le triangle $ST'P'$, dans lequel, outre ce côté on a ST', qui est la seconde distance du soleil à la terre, mais qu'ici on peut prendre pour $= 1$, & l'angle $ST'P' = e'$ (num. 69), qui est la seconde élongation de la comète au soleil. On aura l'angle $T'SP'$, & le côté SP': on trouvera aussi $P'C' = T'P' \times tan.\,l'$ ayant l' au num. 66, ce qui donnera dans le triangle rectangle $SP'C'$ le rayon SC'. Alors on trouvera $P'p = \frac{SP' \times T't}{SC'^{3}}$ (num. 35), & ayant retranché $T't$, $P'p$ de ST', SP', on aura les côtés St, Sp du triangle tSp: comme on a son angle en S le même que l'angle $T'SP'$, on trouvera aussi son angle Stp: la différence de cet angle, & de l'angle donné $ST'P' = e'$ sera la correction cherchée. Dans le même triangle on trouvera la valeur de tp.

149. Ayant réduit la seconde longitude, on aura (num. 81) les valeurs m, m' réduites : on a (num. 71) les valeurs L', L'', ainsi on aura (num. 81) les valeurs $TP = L' \times sin.\,m' \times tp$, $T''P'' = L'' \times sin.\,m \times tp$. Mais si l'on veut se servir de la réduction déjà trouvée, & considérée comme constante ; on prendra TP par position, & ayant trouvé les valeurs m, m' déjà corrigées par la réduction, on trouvera $T''P'' = \frac{t'sin.\,m}{t\,sin.\,m'} \times TP$, comme au num. 77 : on prendra aussi $PC = TP \times tan.\,l$, $P''C'' = T''P'' \times tan.\,l''$. Alors on aura à résoudre 6 triangles, trois obliquangles TSP, $T''SP''$, PSP'', & trois rectangles SPC, $SP''C''$, CIC''.

150. Dans le premier on aura le côté ST première distance du soleil à la terre (num. 65), le côté TP déjà trouvé, & l'angle $STP = e$ (num. 69) : on en tirera l'angle TSP, & le côté SP.

Dans.

Dans le second on aura de même ST'' troisième distance du soleil, T''P'' déjà trouvée, & l'angle ST''P'' $= e''$, d'où l'on tirera l'angle T''SP'', & le côté SP''. On a l'angle TST'' différence de la première & troisième longitude du soleil déjà employé (num. 70) pour avoir la flèche v de l'arc TT'', qui dans le cas exprimé par la figure, ôté du T''SP'' laissera TSP'', & celui-ci ôté du TSP laissera P''SP. Dans d'autres cas il faudra employer l'addition à la place de la soustraction; mais toujours on tirera l'angle PSP'' des trois TST'', TSP, T''SP'', & la figure quoique grossiérement dessinée guidera le calcul, que l'on pourroit encore guider par des expressions des signes $+$, & $-$ employés, qui embrasseroient tous les cas différents. Ayant l'angle PSP'', avec les côtés SP, SP'', on trouvera dans le troisième triangle le côté PP''.

151. Alors dans le triangle rectangle SPC ayant les côtés SP, PC, on aura l'hypothénuse SC, & de la même manière dans le second SP''C'' les côtés SP'', P''C'' donneront SC'': dans le dernier CIC'' ayant les côtés CI $=$ PP'', C''I $=$ P''C'' $\pm$ PC (le signe $+$ a lieu quand les latitudes l, l'' sont de dénominations contraires) on trouvera l'hypothénuse CC''.

152. Ainsi on aura la valeur SC $+$ SC'' $= b$, CC'' $= c$, & ayant trouvé la valeur a au num. 70 par le calcul détaillé au numér. 32, on lui comparera la valeur $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$, pour en retirer l'erreur de la première position. La seconde position tirée de la qualité, & quantité de cette erreur (num. 84) donnera la seconde erreur: si l'on s'est trouvé par les constructions précédentes déjà peu éloigné de la vraie distance, les erreurs trouvées seront si petites, qu'on pourra employer les valeurs tirées de la comparaison de ces deux erreurs seules, pour trouver (num. 85) les distances, & les cordes, qu'on devra employer à la détermination des éléments de l'orbite.

153. La méthode commune pour trouver les erreurs de la position fait usage du théorème, que nous avons énoncé dans la note du num. 94, par lequel on trouve deux anomalies des rayons SC, SC'', & par leur moyen la distance périhélie: de-là on

on tire les temps, qui répondent à ces anomalies, & on compare la différence de ces temps avec le temps t'' donné par observation. Le défaut, ou l'excès de la différence trouvée est l'erreur employée dans le calcul des fausses positions. Cette méthode est plus exacte; mais le calcul en est beaucoup plus long & pénible, que ma comparaison de la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$ avec la valeur a, & ma méthode ne laisse pas de donner une très-bonne approximation. Comme dans cette méthode il s'agit de trouver deux des éléments de l'orbite, qui sont la position du périhélie, & sa distance au soleil par les lignes, que nous trouvons dans ce paragraphe, nous en parlerons dans les paragraphes suivants.

§. XIV.

Détermination des éléments de l'orbite par le calcul trigonométrique.

154. AYANT PC, P''C'' (num. 149), & PP'' (num. 150), on dira comme au num. 91 C''I $=$ P''C'' $\pm$ PC : PC :: PP'' $=$ CI : PR : le signe $+$ servira dans le cas des deux latitudes de dénominations contraires, le $-$ quand elles sont de la même dénomination. On aura alors P''R : on a encore SP (num. 150), & dans la résolution du triangle PSP'' pour trouver PP'', on aura trouvé l'angle SP''P. Ainsi on aura l'angle P''SR : comme on avoit l'angle T''SP'' (num. 150), la somme de ces deux angles dans le cas exprimé par la figure retranchée de la troisième longitude héliocentrique de la terre, qui étoit indiquée par le rayon ST, donnera la longitude du nœud N indiquée par la ligne SR. L'angle P''SR donnera aussi l'inclinaison de l'orbite, en le faisant entrer dans l'expression de sa cotangente $\frac{P''D''}{P''C''}$, qui à cause de P''D'' $=$ SP'' $\times$ *sin*. P''SR sera $= \frac{SP'' \times sin. P''SR}{P''C''}$.

155. Si les latitudes sont de dénominations contraires, le point R tom-

R tombera entre les points P, P'': si elles sont conformes, il tombera sur la PP'' prolongée du côté de P, ou P'', selon que P''C'' sera plus grande, ou plus petite que PC, & pour avoir la longitude de la ligne SR, si les deux SR, ST vont du même côté de la ligne SP'', il faudra prendre la différence des deux angles TSP'', P''SR, & l'ôter de la longitude de ST, quand l'angle T''SP'' a la direction contraire à l'ordre des signes, l'ajouter quand il la suit. Si la somme ou la différence à ôter est plus grande, que le terme du quel on doit l'ôter, il faudra lui ajouter 360 degrés, & quand dans l'addition, on passe ces 360, il faudra le retrancher, comme par-tout ailleurs dans l'Astronomie. La figure réglera bien le calcul pour les additions, & soustractions. On verra quel des deux N, N' est le nœud ascendant, comme au num. 87.

156. On trouvera la distance périhélie, & la position du périhélie, à l'aide de l'anomalie C''SV du rayon SC'' (fig. 10), & celle-ci à l'aide du triangle CSC''. On y a (num. 151) les trois côtés SC, SC'', CC'': ainsi on y trouvera l'angle SC''C. Si l'on conçoit CB perpendiculaire à C''F', on aura C''B différence des deux C''F', CF, c'est-à-dire des deux rayons SC'', SC, qui divisée par CC'' donnera le co-sinus de l'angle CC''B. Or la somme des deux angles SC''C, CC''B forme l'angle SC''F' dans le cas exprimé par la figure, dans lequel SC'' est plus grand que SC, & cette somme sera le supplément de l'angle C''SV, qui est l'anomalie du rayon SC''. Si le premier rayon est plus grand, on prendra le SC'' pour celui de la première observation, SC pour celui de la dernière, & à l'aide des mêmes triangles, on aura cette règle pour tous les cas. *Qu'on trouve dans le triangle des deux rayons, & de la corde l'angle opposé au rayon plus petit, & l'angle, qui a pour co-sinus la différence des deux rayons divisée par la corde. Le supplément de leur somme sera l'anomalie du rayon plus grand.*

157. Alors on aura la distance périhélie par le théorème énoncé dans la note du num. 94, par lequel cette distance est égale au produit du rayon par le quarré du co-sinus de la moitié de

son

son anomalie. Ce co-sinus est le sinus de la demi-somme des deux angles trouvés dans le numéro précédent. Ainsi le double logarithme du sinus de leur demi-somme ajouté au logarithme du plus long des mêmes rayons, donnera le logarithme de la distance périhélie cherchée.

158. Si l'on tire Cb perpendiculaire à C''f', on aura aussi C''b $=$ C''f' $-$ Cf $=$ SC'' $-$ SC; ainsi l'angle CC''b sera égal au trouvé CC''B, & ce seroit la différence de deux angles trouvés celle qui donneroit l'angle SC''f' $=$ CC''f' $-$ SC''C, supplément de l'anomalie uSC'' de l'autre parabole, d'où l'on tireroit le périhélie Su. On trouvera l'angle CC''B toujours plus grand, que l'angle SC''C, parceque si l'on prend sur le rayon SC'' le segment SB' $=$ SC, on aura C''B' $=$ C''B, & si l'on conçoit la ligne CI perpendiculaire au même rayon SC'', elle tombera dans l'angle aigu CB'S, & par conséquent C''I sera plus grande que CB', & que CB: ainsi le co-sinus de l'angle CC''S $= \frac{\text{C''I}}{\text{CC''}}$ sera plus grand, que le co-sinus de CC''B, lesquels angles étant aigus tous les deux, le second sera plus grand, que le premier. Communément la différence de ces deux angles sera beaucoup plus petite, que la somme; ce qui donnera Su beaucoup plus petite que SV. On pourroit bien trouver très-peu d'inégalité entre la différence, & la somme, ce qui doit arriver quand l'angle SC''C est petit, & CC''B grand: alors il y auroit peu de différence entre les deux paraboles. L'angle SC''C sera petit seulement, quand le foyer S sera bien près de la corde CC'' prolongée, s'il le faut, & l'angle CC''B ne sera petit, que quand le rayon SC'' surpassera de bien peu la somme de l'autre SC, & de la corde CC'', dans lequel cas CB sera presque égale à CC'', & alors toutes les deux distances périhélies SV, Su seront petites. Mais celle, qui est donnée par la différence des angles CC''S, CC''B ne peut servir jamais, comme on l'a dit à la note du num. 94.

159. Pour le lieu du périhélie à tirer de la même anomalie, on a déjà (fig. 1) l'angle P''SR (num. 154) & sa tangente est à la tangente de C''SR, comme D''P'' est à D''C'', puisque ces tangen-

gentes sont les mêmes, que celles des angles D''SP'', D''SC'' au rayon commun SD'', & c'est la raison du co-sinus de l'inclinaison au rayon : ainsi on aura $tan.\,C''SR = \frac{tan.\,P''SR}{cos.\,incl.}$. On a l'anomalie C''SV (num. 156), & par conséquent on aura VSN, qui sera la distance du périhélie au nœud dans l'orbite : on pourroit avoir aussi l'angle *u*SR, parceque sa tangente est à la tangente de VSR comme V'*u* est à V'V, c'est-à-dire comme le co-sinus de l'inclinaison est au rayon; mais on n'en a pas besoin. Ayant la longitude du nœud N, & l'angle VSN, qui est la distance du périhélie au nœud, on aura la longitude du périhélie dans l'orbite. La figure quoique grossiérement dessinée fera voir, s'il faut employer la soustraction, ou l'addition, pour trouver l'angle VSR par les deux C''SR, C''SV, & pour trouver le lieu du périhélie par le lieu du nœud N, & par l'angle VSN, comme aussi une délinéation grossière fera voir les différentes positions des lignes, qui terminent les angles employés dans ces calculs, la variation desquelles positions peut faire changer ces angles en leurs suppléments, les sommes en additions, & vice-versa. Il faut faire réflexion pour ce qui appartient au périhélie V, que quand on l'a trouvé par l'anomalie C''SV, s'il ne tombe pas sur le plus court des deux rayons SC, SC'', il tombe vers le plus court par rapport au plus long : pour ce qui regarde la position de la ligne des nœuds SR, on l'a déterminée au num. 154.

160. La distance périhélie, & l'anomalie donneront le temps de l'arrivée au périhélie. On en tire aisément ce temps par les tables, que nous a laissées Halley, & qui sont employées par tous les Astronomes pour les calculs des comètes dans les orbites paraboliques. Cette table contient les anomalies données en degrés, avec les temps, qui leur répondent dans la parabole, qui a la distance périhélie égale à la distance moyenne de la terre au soleil = 1 : ainsi si on a une anomalie, on en tire le temps, qui y répond dans cette parabole, & vice-versa : or pour les différentes paraboles les quarrés des temps, qui répondent à une même anomalie quelconque, sont comme les cubes des distances

périhélies (num. 59): ainsi pour la parabole, qu'on vient de déterminer, on aura la règle suivante.

161. On trouvera dans la table le temps, qui répond à l'anomalie trouvée : on fera la somme de son logarithme, du logarithme de la distance périhélie trouvée, & de la moitié de ce même logarithme, & on aura le logarithme du temps, qui répond à cette anomalie : on ôtera ce temps du temps moyen de l'observation, qui répond au rayon plus long des deux SC, SC'', ou on lui l'ajoutera, selon que cette observation sera la dernière ou la première : le temps trouvé sera le temps moyen de l'arrivée au périhélie, qu'on peut réduire, si l'on veut, aisément en temps vrai : mais pour trouver ensuite le lieu de la comète dans d'autres temps, ce qui sera le sujet du paragraphe suivant, on retiendra le temps moyen de cette arrivée : on fera bien aussi de faire à part une fois pour toujours la somme du logarithme de la distance périhélie, & de sa moitié, que nous appellerons logarithme de réduction, puisqu'il servira toujours pour passer de la comète trouvée à celle qui a la distance périhélie $= 1$, & vice-versa. La raison de la règle pour soustraire, ou ajouter le temps trouvé au temps de l'observation, qui répond au rayon plus long, est manifeste. Cette observation est celle pour laquelle on a trouvé l'anomalie employée dans ce calcul : or comme le rayon vecteur avant le périhélie va toujours en diminuant, & après en augmentant, le dernier rayon ne peut être le plus grand, qu'après le passage par le périhélie, & le premier ne peut l'être, qu'avant d'y arriver.

162. Ainsi on aura les cinq premiers éléments, & la position de l'angle PSP'' fera voir, si le mouvement va selon l'ordre des signes, ou contre, c'est-à-dire si la comète est directe, ou rétrograde.

§. XV.

Remarques sur les recherches du paragraphe précédent.

163. POUR l'arrivée au périhélie, je viens de proposer l'usage de la table générale du mouvement des comètes dans les paraboles;

les ; mais on peut s'en passer par le moyen d' un calcul numérique, qui n'est pas trop long, & ce même calcul est celui, qu' on employe pour former cette table : j'ajouterai ici ce qui appartient à cette méthode, puisque dans les paragraphes précédents nous avons tous les matériaux nécessaires pour une telle opération. Cette table sert immédiatement pour la distance périhélie égale à la distance moyenne de la terre $= 1$, & on en fait l'application à toutes les orbites par l'usage de la puissance $\frac{3}{2}$ de leur distance périhélie, c' est-à-dire à l' aide du logarithme de réduction (num. 161). Elle donne la connexion entre les anomalies dans cette première parabole, & les temps, qui y répondent : ainsi elle donne la solution de deux problêmes, 1°. ayant l'anomalie, trouver le temps, 2°. ayant le temps trouver l'anomalie. La solution du premier sans le secours de la table déjà calculée ne demande qu'un calcul simplement numérique dépendant de la table des sinus avec les logarithmes, le second problême exige la solution d'une équation du troisième degré, quoique bien simple : ainsi la solution du premier sert pour calculer la table, & c'est-elle, qui vient en usage pour l'objet de ce paragraphe : celle du second servira dans le paragraphe, qui viendra après, où la table vient beaucoup plus à propos pour abréger le calcul.

164. Pour la solution du premier problême, soit (fig. 6) la distance périhélie $SV = 1$, l'anomalie $VSC = a$: on aura (not. num. 94) le rayon vecteur $SC = \frac{1}{\cos^2.\frac{1}{2}a}$: la ligne CE, que nous avons appellée y (num. 55) sera $= SC \times \sin.VSC = \frac{\sin.a}{\cos^2.\frac{1}{2}a}$, & on aura la ligne $VE = x = \frac{CE^2}{4SV} = \frac{1}{4}y^2$. On a trouvé dans le même numéro l'aire du secteur $VSC = \frac{1}{6}xy + ey$ $= \frac{1}{24}y^3 + \frac{1}{2}y$, puisqu'on y a fait $VA = e = \frac{1}{2}VS = \frac{1}{2}$, dans la note du num. 59 on a, que l'aire, qui dans cette parabole répond à l'anomalie de 90°, est $= \frac{4}{3}$, & dans ce numéro même, que le nombre de jours, qui lui répond, est de 109 jours, & environ $\frac{6}{10}$, ayant son logarithme $= 2{,}0398718$. Si l'on fait ce nombre

de jours $= p$, & le nombre, qui répond à l'anomalie $a = p'$, on aura la proportion suivante entre les aires, & les temps $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{24}y^3 + \frac{1}{2}y :: p : p' = \frac{1}{32}py^3 + \frac{3}{8}py$. Ayant le $log.p = 2,0398718$, & $log.y = log.sin.a - 2\,log.cos.\frac{1}{2}a$, on trouvera aisément les deux termes de la valeur du temps p', qui sera la même que la valeur tirée des tables num. 161.

165. Si à la place de a on employe successivement 1, 2, 3, &c., on aura les temps pour toutes les anomalies, & on formera la table, qui aura pour argument l'anomalie, & pour le second terme le temps. On pourra, si l'on veut, en tirer par interpolation une autre, qui aura pour argument les temps, & pour second terme les anomalies : mais la première seule suffit non seulement pour tirer les temps des anomalies, mais encore les anomalies des temps, comme une seule table suffit pour tirer les sinus des angles, & les angles des sinus. On calculeroit directement la seconde table par la solution du second problême, qui se réduit à l'équation $p' = \frac{1}{32}py^3 + \frac{3}{8}py$, c'est-à-dire $y^3 + 12y - \frac{32p'}{p} = 0$. Le temps p' étant donné, on en tireroit la valeur de $CE = y$, & de $VE = x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$, ce qui laisseroit $SE = 1 - x$, & l'anomalie VSC par sa tangente $= \frac{CE}{SE} = \frac{y}{1-x}$. Mais ce long détour même fait voir l'utilité de la table.

166. Communément on trouve le lieu des nœuds, & l'inclinaison d'une autre manière, qui employe la Trigonométrie sphérique, faisant usage des deux latitudes héliocentriques PSC, P''SC'' (fig. 1). On trouve ces latitudes par la proportion suivante SP : TP :: $tan.$PTC $= tan.l : tan.$PSC $= \frac{TP \times tan.l}{SP}$, & on a de même $tan.$P''SC'' $= \frac{T''P'' \times tan.l''}{SP''}$. Soit (fig. 17) NPP'' l'écliptique de la sphère céleste héliocentrique, NCC'' l'intersection du plan de l'orbite avec la surface de la même sphère, N étant le nœud : CP, C''P'' seront les deux latitudes, & l'angle N sera l'inclinaison de l'orbite : on aura dans les triangles sphériques rectangles en

P, P''

P, P'' la raison du *sin*.NC au *sin*.CP, & du *sin*.NC'' au *sin*.C''P'' la même, c'est-à-dire celle du rayon au *sin*.N. Donc *sin*.PC : *sin*.P''C'' : : *sin*.NC : *sin*.NC'': ainsi dans les deux premiers sinus la différence sera à la somme, comme dans les deux derniers, d'où l'on tire cette proportion $tan.\frac{1}{2}(C''P'' - CP) : tan.\frac{1}{2}(C''P'' + CP) :: tan.\frac{1}{2}(NC'' - NC) : tan.\frac{1}{2}(NC'' + NC)$. On a les deux premiers termes, ayant les deux latitudes, & le troisième, qui est $\frac{1}{2}CC''$, puisque CC'' ici est la mesure de l'angle CSC'' de la fig. 1, qu'on trouve en faisant la résolution du triangle CSC''. Donc on aura aussi le quatrième terme, qui est la demi-somme des deux arcs NC, NC'', qui ajoutée à la demi-différence $= \frac{1}{2}CC''$ donnera le plus grand de ces deux arcs, & ôtée de lui donnera le plus petit.

167. Si les latitudes sont de dénominations contraires, la somme passe en différence, & vice-versa, mais on a le même raisonnement : on peut encore retenir le même nom de somme, & différence, en considérant les arcs NC, CP comme négatifs.

168. Ayant NC'', & C''P'' on aura $sin.N = \frac{sin.C''P''}{sin.NC''}$, ce qui donnera l'inclinaison N. Dans le même triangle sphérique NC''P'' on aura $cos.NP'' = \frac{cos.P''C''}{cos.NC''}$, & comme on a la longitude du point C'', on aura aussi celle du nœud N. L'arc NP'' est la mesure de l'angle P''SR de la fig. 1, que nous avons trouvé (num. 154) par la Trigonométrie plane avec un calcul plus court, employant les lignes PC, P''C'' de la même fig. 1, à la place des deux latitudes héliocentriques PSC, P''SC''.

169. La méthode commune de trouver l'anomalie, qui donne la distance périhélie, & le lieu du périhélie, est aussi différente de celle, que j'ai proposée ici, & a quelque analogie avec celle, que nous venons de voir pour l'inclinaison, & le lieu des nœuds. On employe à cet effet le même théorème de la note du num. 94 appliqué aux deux rayons SC, SC'' (fig. 1), avec l'angle CSC''. Comme on a par ce théorème $SV = SC \times cos.^2\frac{1}{2}VSC = SC'' \times cos.^2\frac{1}{2}VSC''$; les co-sinus de ses deux demi-anomalies seront en rai-

raison des racines quarrées des rayons pris réciproquement: ainsi la différence de ces racines sera à la somme, comme la différence de ses co-sinus est à la somme, c'est-à-dire comme la tangente de la demi-différence des deux demi-anomalies est à la cotangente de la demi-somme. Les premiers deux termes sont donnés, & le troisième l'est aussi, puisque la différence des deux anomalies est l'angle CSC'', & pour cela la différence des demi-anomalies sera la moitié de cet angle, & la demi-différence sera son quart. On trouvera par-là le quatrième, qui ajouté à la demi-différence, c'est-à-dire à $\frac{1}{4}$CSC'', donnera la moitié de la plus grande de ces anomalies, qui appartient au rayon plus long, & ôté donnera la moitié de celle, qui appartient au plus court.

170. Voici donc la règle pour trouver les deux anomalies. On dira comme la différence des racines des deux rayons est à la somme, ainsi la tangente d'un quart de l'angle CSC'' est à la tangente d'un angle, qui étant ajouté, & ôté de ce quart donnera la moitié des deux anomalies, qu'on trouvera en doublant ces deux termes trouvés. Cette solution suppose que le sommet V tombe hors de l'angle CSC''; parceque s'il tombe dedans, l'angle CSC'' n'est pas la différence, mais la somme des deux anomalies, alors il faut prendre pour premier terme la somme des deux racines, pour second la différence, & dans le troisième prendre la co-tangente d'un quart de l'angle CSC'', qui seroit la demi-somme des deux anomalies, pour avoir dans le quatrième la tangente de la demi-différence, & c'est le cas, dans lequel la comète allant de C en C'' passe par le périhélie. Il faut avoir des règles, pour voir quelle des deux proportions convient aux trois données, qui sont les deux rayons, & l'angle compris. Si l'on a employé la proportion, qui convient au cas de l'axe tombant dans l'angle CSC'', & par la valeur de la demi-somme, & de la demi-différence on le trouve dehors, ce qui peut arriver par la valeur négative de la demi-différence, il faut employer l'autre, qui le suppose dehors, & la même chose peut arriver à la proportion, qui le suppose dehors, & le fait tomber dedans. Il faut aussi avoir égard au cas, dans lequel la somme, ou la différen-

férence des deux anomalies ne donne pas l' angle CSC'', mais son reste à 360 degrés, comme il arrive dans la fig. 10 aux anomalies CS*u*, C''S*u*. Comme les racines quarrées ont deux valeurs une positive, & l'autre négative, la somme porte en soi-même avec elle le second cas de la différence, quand on prend pour une des deux racines la valeur négative, & pour l'autre la positive, à la place de les prendre toutes les deux du même signe.

171. Mais laissant à part toutes ces considérations, la méthode, que j'ai proposée dans la fig. 6 porte un calcul numérique plus facile, puisque la somme, & la différence des racines porte un détour, quand on employe les logarithmes pour éviter leurs extractions. Quand on a trouvé dans cette figure l'anomalie C''SV, on peut aussi trouver l'autre CSV, qui appartient au rayon plus court, par une méthode peu différente; mais alors il faudroit donner des règles pour déterminer, si l'anomalie trouvée doit être prise vers le rayon plus long dans l'angle CSC'', ce qui arrive, si le périhélie tombe entre les deux, ou du côté opposé; tandis que l'anomalie appartenante au plus long, doit aller toujours vers le plus court dans la parabole (fig. 10) MCM' déterminée par la somme des deux angles SC''C, CC''B, quoique l' anomalie C''S*u* dans la parabole *m*C*m*' aille vers la partie opposée: on verra, si le périhélie est entre les deux rayons, en comparant l' anomalie trouvée avec l'angle C''SC, qui dans ce cas sera plus grand, que l'anomalie même. La différence de ces deux angles donnera toujours la seconde anomalie, si on la veut trouver; quoique dans la méthode, que nous avons suivie, on n'a pas besoin de cette seconde, la première seule suffisant pour trouver & la position, & la longueur de la distance périhélie.

172. Les deux anomalies sont nécessaires, quand on veut employer la méthode, que nous avons indiquée au num. 153 pour trouver l' erreur de la fausse position. Ayant les deux anomalies, & la distance périhélie on trouve les temps, qui leur répondent par la méthode, que nous avons exposée au num. 164, & de laquelle nous faisons usage dans le paragraphe suivant, pour voir si la somme de ces deux temps dans le cas, dans lequel la distan-

ce

ce périhélie tombe entre les deux rayons, ou la différence dans le cas opposé est égale au temps t'' donné par les observations, & si elle ne l'est pas, en marquer l'erreur. Mais comme ici on a un arc, qui n'est pas trop grand, nous évitons ces calculs, qui sont plus longs, par la comparaison de la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$ avec la valeur a, comme nous l'avons déjà dit dans ce numéro, & cette petitesse nous débarrasse de toutes les autres considérations des différents cas, sur-tout, quand on s'est déjà approché de la vraie valeur par une construction graphique, qui est beaucoup plus expéditive.

§. XVI.

Détermination du lieu de la comète pour un autre temps par le calcul.

173. ON pourroit se servir pour cet objet de l'équation du troisième degré, avec le reste, que nous avons exposé ci-dessus (num. *164*); mais il faut se servir plutôt des tables, qui ont été déjà imprimées dans tous les éléments d'Astronomie. On commencera par réduire le temps vrai donné en temps moyen: on ôtera ce temps de celui de l'arrivée au périhélie, ou vice-versa: on réduira ce temps au temps de la parabole de la table en ajoutant à son logarithme le complément du logarithme de réduction (num. *161*) formé du logarithme de la distance périhélie, & de sa moitié: il faut toujours ajouter le logarithme de réduction, quand on doit réduire le temps de la table au temps d'une autre parabole, & son complément arithmétique, quand on doit réduire celui-ci à celui-là, parceque dans la proportion, qui laisse le temps cherché en dernier lieu, on commence dans le premier cas par l'unité, & dans le second par la puissance $\frac{3}{2}$ de la distance périhélie. On trouvera dans la table l'anomalie, qui répond à ce temps: le quarré du co-sinus de sa moitié divisé par la distance périhélie (not. num. *94*) donne le rayon vecteur: ainsi on trouvera son logarithme en faisant la somme du double logarithme

rithme de ce co-sinus, & du complément du logarithme de la distance périhélie.

174. Le reste de l'opération pour la comète est le même, que pour toutes les planètes. On a la distance du nœud au périhélie (num. 159), qui dans la fig. 17, est l'arc NV : on aura trouvé l'anomalie, qui sera l'arc VC, & si le mouvement est direct, & le temps postérieur à l'arrivée au perihélie, ou toutes ces deux conditions contraires, VC suivra l'ordre des signes, autrement il ira en sens contraire. Par les deux arcs NV, VC avec leur direction on saura l'arc NC, qui avec l'angle N donnera l'arc CP, qui est la latitude héliocentrique, & NP, qui est la distance du nœud N au lieu de la comète réduit à l'écliptique, par laquelle combinée avec la longitude du nœud, on connoîtra la longitude héliocentrique de la comète : la Trigonométrie sphérique donne pour le premier $sin.\mathrm{CP} = sin.\mathrm{NC} \times sin.\mathrm{N}$, & pour le second $tan.\mathrm{NP} = tan.\mathrm{NC} \times cos.\mathrm{N}$.

175. On pouvoit trouver tout cela dans la fig. 1 par la seule Trigonométrie plane ; mais cette application de la sphérique est très-simple, & elle est déjà en usage dans l'Astronomie pour les planètes. En portant ces éléments dans cette figure, on y aura la direction de la ligne SP déterminée par la longitude géocentrique, le rayon SC, la latitude héliocentrique CSP : on en tirera la distance raccourcie $\mathrm{SP} = \mathrm{SC} \times cos.\mathrm{CSP}$. On tirera de la connoissance des temps, ou des tables astronomiques la longitude du soleil pour le temps donné, & sa distance ST à la terre. La première en y ajoutant, ou en ôtant 180° donne la longitude héliocentrique de la terre déterminée par la direction du rayon ST : la différence des deux longitudes donne l'angle TSP, qui avec les deux côtés ST, SP donnera l'angle STP, & la distance TP raccourcie à la terre. Le premier est l'élongation en longitude de la comète au soleil, qui bien combinée avec la longitude de celui-ci donnera la longitude géocentrique de la comète, & la tangente de sa latitude géocentrique sera $\frac{\mathrm{SP} \times tan.\mathrm{PSC}}{\mathrm{TP}}$, valeur correlative à celle du num. 166, dans laquelle on a la latitude hé-

liocentrique PSC déjà trouvée, & les deux distances raccourcies SP, TP.

176. Ainsi on trouve la longitude, & la latitude géocentrique. On trouvera aussi la distance TC de la comète à la terre, & son élongation au soleil dans l'orbite, qui est leur distance angulaire TSC. Pour la première on aura $TC = \frac{TP}{cos.PTC}$, & on tirera la seconde du triangle STC, dans lequel on aura déjà tous les trois côtés. Mais on trouvera plus facilement cette dernière, qui a son co-sinus égal au co-sinus de l'élongation en longitude multipliée par le co-sinus de la latitude géocentrique ; parceque si l'on conçoit que (fig. 17) NP soit l'écliptique géocentrique, N le lieu du soleil, P de la comète sur l'écliptique, PC sa latitude géocentrique ; l'élongation cherchée sera l'hypothénuse NC du triangle sphérique NPC, où l'on a $cos.NC = cos.NP \times cos.PC$.

177. On aura besoin de renouveller tous ces longs calculs numériques pour trouver avec exactitude le lieu de la comète, qui répond à un temps donné quelconque, tandis que la détermination de tout cela par la construction des paragraphes 10, & 11 est un simple amusement, & on y trouve une approximation suffisante pour plusieurs objets, comme par exemple, pour trouver la comète, quand les nuages l'ont cachée plusieurs jours d'un mouvement rapide, ou pour voir en gros sur un globe les signes, par lesquels elle a passé, ou elle passera, & pour s'assurer d'avoir bien déterminé les éléments de la comète en gros par les trois premières observations, & découvrir par-là, si c'est une comète nouvelle, ou une des anciennes, qui ont déjà été déterminées dans d'autres apparitions. La construction même peut donner assez bien les erreurs de la théorie dans des observations éloignées pour corriger les éléments trouvés : mais pour avoir une correction exacte par ce moyen, il faut faire le calcul numérique. Nous donnerons dans le paragraphe suivant la méthode pour cet objet.

§. XVII.

§. XVII.

Méthode pour corriger les éléments de l'orbite par des observations éloignées (*).

178. La méthode, que nous avons proposée en faisant usage de trois observations pas trop éloignées entr'elles, presque toujours donne assez exactement la distance de la comète par la position, & la longueur de la corde comparée avec la valeur constante a dans la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$: une petite erreur dans sa direction ne change pas considérablement la distance, mais l'écart de la continuation de ses points, & de sa rencontre avec d'autres lignes, qui s'augmente par son prolongement, rend un peu plus fautifs les éléments., qu'on en tire : ainsi pour corriger

N 2 l'or-

(*) Après avoir achevé cet Opuscule avec la méthode proposée dans ce paragraphe pour corriger les éléments de l'orbite par des observations éloignées, j'ai trouvé une autre méthode plus simple pour obtenir le même objet. Pour ne pas déranger l'ordre des numéros, & les citations, j'ai jugé à propos de retenir ici ce paragraphe, qui pourtant peut être utile sur-tout dans certains cas, où l'autre méthode peut devenir fautive : ainsi j'en ai fait un Opuscule séparé, qui sera l'huitième du dernier volume à côté de deux autres analogues, dont un sert aussi pour trouver les orbites elliptiques des comètes, & l'autre pour corriger celles des planètes. Ici je suppose d'abord exacte la première distance déterminée par la méthode exposée, parcequ'une seule des trois distances avec deux autres éléments & une observation éloignée détermine le reste, de manière à y employer la fausse position par les petits changements de ceux-là : après je change aussi cette distance avec les mêmes deux éléments, ce qui introduit trois changements, & trois équations de premier degré pour déterminer les corrections cherchées. Dans l'autre méthode je n'ai besoin de faire du changement, qu'à la seule position des nœuds, & inclinaison de l'orbite trouvées, qui avec deux seules observations déterminent tous les éléments. Ainsi l'orbite déterminée par eux, & par deux observations éloignées, comparée avec la longitude, & latitude d'une troisième, détermine les changements nécessaires pour la correction totale par deux seules équations. La méthode est simple, & beaucoup plus facile à exécuter, que celle de ce paragraphe-ci, mais elle est sujette à devenir fautive, quand une latitude est petite, & il y a eu des comètes qui les ont toutes petites.

l'orbite par des observations éloignées, si elles ne s'accordent pas avec le résultat du calcul fondé sur les éléments, qu'on a trouvés, on peut retenir une des distances trouvées avec la longitude, & la latitude observée, qui lui répond, & avec le dernier élément du mouvement direct, ou rétrograde, sur lequel on ne peut pas se tromper: heureusement si l'on prend deux autres des éléments, en le changeant un peu, on peut trouver les trois autres, ce qui donne la facilité de faire la correction cherchée à l'aide d'une observation éloignée, en se servant de sa longitude, & latitude, & en les comparant avec celles, qu'on aura eu par le calcul avant le premier changement, après celui-ci, & après le second.

179. La plus à propos pour être retenue seroit la seconde distance, qui est plus à l'abri de l'effet de l'erreur de la direction de la corde; mais quoique au commencement on ait pris par position sa distance raccourcie à la terre; pour l'avoir après les changements, qu'on aura fait aux deux autres, il faudroit faire de nouveaux calculs, tandis que pour ces autres, on a déjà les valeurs employées dans la déduction des éléments: ainsi nous retiendrons ici la première. Les éléments à changer les plus commodes pour en tirer les autres, seront la longitude des nœuds, & du périhélie: nous proposerons d'abord la méthode de cette déduction, & après son usage pour faire la correction.

180. Nous supposons ici d'avoir la direction (fig. 1), & la longueur des lignes ST, TP, l'angle PTC $= l$, la direction du mouvement selon, ou contre l'ordre des signes, que nous avions déjà, & la longitude du nœud n, & du périhélie u déterminées par les directions Sn, SV, desquelles une est retenue, & l'autre changée, & on doit en tirer l'inclinaison de l'orbite, qui est l'angle PDC, la distance périhélie SV, & le temps de l'arrivée au périhélie: voici comme on pourra s'y prendre.

181. Dans le triangle TSP on a les côtés ST, TP, & l'élongation STP $= e$: ainsi on en tirera SP, & l'angle TSP. On a aussi PC $=$ TP$\times tan.l$, ainsi dans le triangle rectangle SPC on aura SC. Ayant la longitude héliocentrique de la terre, & l'angle TSP, on aura par leur somme, ou différence la longitude de

de SP, qui combinée avec la longitude du nœud, c'est-à-dire de Sn, donnera l'angle PSn distance de la comète au nœud dans l'écliptique : on en tirera l'inclinaison de l'orbite par sa tangente $= \frac{PC}{PD} = \frac{TP \times tan. I}{SP \times sin. PSn}$; ou si l'on veut, en employant les seuls angles du triangle STP, on peut mettre $\frac{sin. TSP}{sin. STP}$ à la place de $\frac{TP}{SP}$.

182. On trouvera la distance de la comète au nœud dans l'orbite, qui est l'angle nSC en considérant SD comme rayon dans les deux triangles rectangles SDP, SDC, qui fait les deux côtés DP, DC tangentes des angles DSP, ou nSP, & DSC, ou nSC, ce qui donnera les proportions suivantes $cos. incl. : 1 :: DP : DC :: tan. nSP : tan. nSC = \frac{tan. nSP}{cos. incl.}$. On aura la différence des longitudes du nœud, & du périhélie, qui est l'angle nSu, d'où l'on tirera l'anomalie du nœud nSV, par cette proportion $cos. incl. : 1 :: V'u : V'V :: tan. nSu : tan. nSV = \frac{tan. nSu}{cos. incl.}$. La somme, ou différence de ces deux angles donnera l'angle CSV anomalie de la comète, qui donnera la distance périhélie $SV = SC \times cos^2. \frac{1}{2} anom.$ L'anomalie même donnera dans la table parabolique le temps pour la parabole de cette table, & en faisant la somme du logarithme de ce temps, de celui de la distance périhélie SV, & la moitié de ce second, on aura le logarithme du temps dans cette orbite, qui ajouté ou ôté du temps de la première observation, laissera le temps de l'arrivée au périhélie. Ainsi on aura tous les éléments de l'orbite, qui répond au changement qu'on aura fait.

183. On pouvoit chercher la formule du changement des trois autres éléments tiré du changement d'un seul par les formules différentielles : mais ces formules auroient été beaucoup plus compliquées que le calcul proposé, qui devient encore plus simple, si l'on tire les angles du triangle STP, & la ligne SC des calculs, qu'on aura déjà faits pour trouver les éléments de l'orbi-

te : au moins, quand on aura employé ces valeurs pour le premier changement, les mêmes serviront pour le second.

184. Voici à présent la méthode pour faire la correction. Après la première détermination de l'orbite on trouvera la longitude, & la latitude, qui leur répondent pour le temps de l'observation éloignée, & on écrira la différence des calculées aux observées, qui sera l'erreur : on appellera ces erreurs e, e', & on y mettra le signe positif, ou négatif, selon que la calculée aura été plus grande, ou plus petite, que l'observée. On ajoutera à la longitude du nœud une quantité un peu plus petite, ou un peu plus grande, selon qu'on aura trouvé les erreurs plus, ou moins considérables, qu'on appellera m. On calculera les nouveaux éléments, & on en tirera de même la longitude, & la latitude pour le même temps, en marquant sa différence de celle, qu'on avoit trouvée avant : on appellera p, & q ces différences avec les signes $+$, ou $-$ selon que le changement aura été en plus, ou en moins. On ajoutera aussi une petite quantité à la longitude du périhélie, en retenant celle du nœud comme elle étoit avant son changement, & on appellera m' cette nouvelle quantité : on calculera les éléments nouveaux, & en ayant tiré la longitude, & latitude pour le même temps, on en prendra la différence de celles, qu'on avoit trouvées avant le premier changement, & on l'appellera p', q'.

185. Que l'on conçoive à présent un nouveau changement de la longitude du nœud, & du périhélie, qui doit faire disparoître les deux erreurs e, e', qu'on avoit avant le changement, & on l'appellera x, x'. Comme on suppose les premiers éléments peu éloignés des véritables, on supposera les changements de la longitude, & de la latitude calculée proportionnels aux changements du même élément, ce qui est le fondement de toute méthode de fausse position : ainsi par la proportion $m : p :: x : \frac{px}{m}$, on aura le changement de la longitude de la comète correlatif au changement x de la longitude du nœud, & on aura de même $\frac{qx}{m}$, pour le changement de la latitude introduit par le même x : les changements des mê-

mêmes introduits par le changement x' du lieu du périhélie seront $\frac{p'x'}{m'}$, $\frac{q'x'}{m'}$.

186. Comme la somme des deux changements de la longitude doit détruire l'erreur e; elle doit lui être contraire, & égale, & le même doit arriver à la somme des changements de la latitude par rapport à l'erreur e': donc on aura deux équations $\frac{px}{m} + \frac{p'x'}{m'} = -e$, $\frac{qx}{m} + \frac{q'x'}{m'} = -e'$, d'où l'on tirera les changements x, & x' qu'on devra faire aux deux longitudes du nœud & du périhélie, & on devra les y ajouter, ou les en soustraire, selon que ces valeurs seront positives, ou négatives. A' la place d'ajouter les premiers changements m, m' à ces longitudes on pourroit bien en ôter plutôt un, ou tous les deux, & très-souvent par la qualité des erreurs e, e', & la position de l'orbite déterminée par approximation, on pourra bien juger, s'il faut augmenter, ou diminuer ces longitudes, pour s'éloigner moins des vraies valeurs; mais alors pour retenir les mêmes formules on fera les valeurs m, m' négatives.

187. Ayant trouvé les changements, qu'il faut faire à ces deux éléments, on pourra trouver les autres par la même méthode, par laquelle on les a trouvés après le premiers changements; & en calculant de nouveau la longitude, & la latitude pour le temps de l'observation éloignée, on verra, si réellement les erreurs e, e' sont bien détruites, comme elles le seront assez bien hors de certains cas, dans lesquels les petits changements ne seront pas assez proportionnels entr'eux, ce qui arrive à la méthode de la fausse position sur-tout à côté de quelque maximum, ou minimum, dans lesquels il faut revenir à d'autres positions, & employer plusieurs erreurs.

188. Si ayant fait le calcul pour les temps des autres observations, on y trouve assez d'accord, on peut s'en tenir là, & une, ou deux minutes d'erreur, qui restent, pourront être attribuées à l'incertitude des observations mêmes, qui dans les méthodes,

qu'

qu' on employe actuellement dans les observations des comètes, en les comparant avec des fixes pas toujours bien déterminées, & ayant égard à la foiblesse de la lumière, à la chevelure nuancée, qui environne le noyau, ne peuvent pas donner l' exactitude nécessaire pour une détermination plus exacte, & un accord total, & presque toujours on verra, que les différences vont en sautant du plus au moins irréguliérement.

189. Si l' on voit une espèce de régularité dans les erreurs, qu'on trouve après avoir corrigé l'orbite par une seule observation éloignée; on pourra soupçonner d' inexactitude la distance, qu' on a conservée: alors on trouvera une nouvelle erreur e'' de la première orbite pour la longitude d' une autre observation éloignée des deux précédentes (on pourroit se servir de même de sa latitude, à la place de sa longitude) avec deux autres changements introduits dans la même longitude, par les deux changements x, x' des premiers éléments, en appellant ces changements de cette longitude r, r': on changera un autre élément, comme la distance, qu' on avoit retenue; mais pour conserver mieux l' homogénéité de tous les changements, il vaudra mieux changer l' angle TSP, qu' on avoit trouvé correlatif à cette distance, quand on a cherché les éléments de l' orbite correlatifs au changement du lieu du nœud. On ajoutera à cet angle une petite quantité m'', & ayant retenu le nœud, & le périhélie de la première orbite, on trouvera encore plus aisément les côtés TP, SP dans le triangle TSP, dans lequel on aura les angles en T, & P: mais il n' y aura pas besoin de trouver le côté TP, parceque, pour pousser en avant le calcul, & trouver les éléments, qui répondent à ce nouveau changement, on aura la tangente de l' inclinaison (num. 181) $= \frac{PC}{PD} = \frac{sin.TSP \times tan.l}{sin.STP \times sin\,PSn}$, dans laquelle formule l' angle PSn sera déterminé par le nouveau TSP, l' ancienne longitude ST de la terre, & l' ancienne longitude du nœud Sn. Le reste pour les autres éléments ira comme auparavant.

190. De ces nouveaux éléments on tirera trois nouveaux changements p'', q'', r'' de la longitude, & latitude qui répond au temps

de

de la première des deux observations choisies pour la correction des éléments, & de la longitude, qui répond au temps de l' autre de ces deux observations correlative au changement x'' de l' angle TSP. On aura alors trois équations pour déterminer les trois changements x, x', x'', c' est-à-dire par la somme des trois changements 1°. de la première longitude, 2°. de la latitude, 3°. de la seconde longitude.

$$\frac{px}{m} + \frac{p'x'}{m'} + \frac{p''x''}{m''} = -e.$$

$$\frac{qx}{m} + \frac{q'x'}{m'} + \frac{q''x''}{m''} = -e'.$$

$$\frac{rx}{m} + \frac{r'x'}{m'} + \frac{r''x''}{m''} = -e''.$$

191. Dans ces équations e, e', e'' sont les erreurs de la première parabole correlatives à la longitude de la première nouvelle observation choisie pour faire la correction à sa latitude, & à la longitude de la seconde observation, c' est-à-dire les différences de ces quantités données par le calcul fondé sur la première parabole à ce qu' on a tiré de l' observation: m, m', m'' sont les petits changements de la longitude du nœud, de la longitude du périhélie, & de l' angle TSP, faits l' un après l' autre sans en employer les deux autres, quand on en fait un, par lesquels changements on trouve trois nouvelles paraboles l' une après l' autre: p, p', p'' sont les changements de la première nouvelle longitude calculée dans les trois nouvelles paraboles, c' est-à-dire les différences de ce que celles-ci ont donné, à ce qui a été donné par la première: q, q', q'' les changements de la latitude: r, r', r'' les changements de la seconde longitude correlatifs aussi aux changements m, m', m'', qui ont donné les trois paraboles changées: x, x', x'' sont les changements à faire, pour avoir la correction, & calculer d' après eux les éléments corrigés.

192. On pourroit faire cette correction par le moyen de la construction, par laquelle on trouveroit les trois erreurs e, e', e'', & dans laquelle on feroit les trois changements m, m', m'' pour avoir les valeurs $p, p', p'', q, q', q'', r, r', r''$, & employer après les

trois équations pour déterminer les trois changements x, x', x''; mais premiérement il est trop difficile d' employer avec exactitude, & d' apercevoir au juste dans la construction graphique les quantités trop petites, & après il y a l' embarras de la délineation de quatre différentes paraboles, que, pour éviter la confusion, on devroit construire dans des papiers différents, avec tant d' autres lignes, & divisions, qui allongeroient beaucoup le travail, avec trop peu d' utilité.

193. La construction peut servir plutôt pour avoir la première parabole peu éloignée de la véritable, après laquelle, sans employer la méthode du calcul trigonométrique pour déterminer mieux les distances, & les éléments de cette première, on pourroit choisir trois observations éloignées entr' elles, une desquelles seroit celle, qui a servi pour la construction, & employer immédiatement la longitude, & la latitude de cette première, & d' une des deux nouvelles, & la longitude, ou latitude de l' autre nouvelle, pour faire la correction, selon la méthode de ce paragraphe.

194. La dernière méthode des trois changements m, m', m'' ne suppose rien d' exact dans la détermination de la première parabole, & peut être employée pour arriver à la plus grande précision, quand les erreurs e, e', e'' ne sont pas trop grandes, au moins en supposant les trois observations choisies bien exactes, & en répétant l' opération plusieurs fois. Comme elles ne le sont presque jamais, il seroit bien de se servir de toutes les observations, qu' on a, en les divisant en trois classes selon l' ordre du temps, dans lequel on les a faites : dans chacune des classes on pourroit trouver pour un temps intermédiaire par interpolation, qui employeroit toutes les observations de cette classe, une longitude, & latitude, qu' on employeroit après avec les deux autres également déterminées par interpolation dans leurs classes.

195. Mais pour écarter encore les plus fautives, on peut employer une construction semblable à celle de la fig. 12. On prendra dans la ligne AB les temps de toutes les observations recueillies, & pour chacune on prendra dans une échelle une ordonnée

née SC proportionnelle à sa longitude, & une autre à sa latitude observée . Les points C des observations moins fautives se trouveroient rangés dans une courbe régulière à l' œil : on rejettera celles , qui s' écarteront trop de cette régularité . On pourroit aussi tirer à la main une espèce de courbe régulière , qui passeroit entre tous les points placés tant-soit-peu irréguliérement , en laissant les uns à droite , les autres à gauche , avec l' attention de compenser les distances des uns à cette ligne par celle des autres . Cet artifice m' a très-bien réussi dans la recherche de la figure de la terre par les degrés , qui se trouvent assez irréguliérement différents entr' eux , quoique on ait employé la plus grande exactitude dans les observations , à cause de l' inégale disposition de la matière sur la surface de la terre , & au-dessous d' elle , qui détourne par l' attraction irrégulière le fil à plomb dans les secteurs , & par-là les positions des zéniths . Dans cette occasion j' ai trouvé le moyen d' y appliquer aussi un calcul numérique , comme on voit dans la traduction de mon ouvrage de *Litteraria Expeditione* réimprimé à Paris en françois sous le titre de *Voyage Astronomique , & géographique* : mais dans ce cas-là on devoit tirer une ligne droite entre les points donnés . Ici où l' on a une courbe , & de nature inconnue par sa trop grande élévation , on ne pourroit faire autre chose , que de se servir d' une estimation grossière , & pour en tirer quelque avantage , il faudroit faire la figure trop grande, pour apercevoir au moins les minutes .

§. XVIII.

Détermination de la distance par une équation du sixième degré.

196. LE problême de l' invention de l' orbite parabolique d' une comète par trois observations est susceptible d' une solution algébrique . On peut parvenir à une seule équation finale , qui contiendroit une seule inconnue . Dans ma première Dissertation *de Cometis* de l' année 1744 j'ai donné une méthode d' y parvenir

nir très-aisée à comprendre, mais qu'on ne pourroit pas mettre en exécution à cause de l'immense longueur du calcul qu'elle demande, & qui meneroit à une équation d'un degré trop élevé, pour pouvoir être suivie, & écrite. On n'a jamais trouvé jusqu'à présent rien de praticable sur ce sujet, & qui puisse être utile pour la pratique de l'Astronomie. On voit bien la sublimité & difficulté du problême encore dans le savant ouvrage, qui a été publié sur ce sujet par M. de Sejour rempli de calcul, qui répond à la célébrité d'un grand Géomètre, & Analyste, mais qui ne peut avoir aucun usage pour remplir les vœux des Astronomes, qui voudroient avoir une solution générale, complette, & praticable pour l'exécution.

197. Dans le cas de trois observations peu éloignées entr'elles, qui est le sujet de cet Opuscule, on trouve beaucoup moins de difficultés, en négligeant la réduction de la seconde longitude des arcs aux cordes, que nous avons développée ici dans le §. 4. J'ai fait voir dans la même Dissertation, que le problême se réduit à une équation du sixième degré, que j'ai développée depuis plus amplement dans le premier de mes deux Opuscules publiés dans le volume des Mémoires présentés à l'Académie des Sciences. Cette méthode prise, comme je l'ai fait alors, ne pouvoit servir, que pour des observations très-peu éloignées entr'elles : & comme je n'y employois pas la réduction de la seconde longitude, l'exactitude en étoit beaucoup moindre : cette méthode pouvoit devenir beaucoup plus fautive, quand dans la seconde observation la comète étoit trop éloignée des trois circonstances, dans lesquelles il n'y a aucun besoin de réduction, qui sont la conjonction de la comète avec le soleil, son opposition à lui, & l'égalité des distances de la comète, & de la terre à lui même. Comme j'ai développé ici, & perfectionné les méthodes de la construction graphique, & du calcul trigonométrique, que j'avois données dans le second de ces deux Opuscules; ainsi je ferai la même chose pour la méthode de l'équation algébrique, que j'avois proposée dans le premier.

198. On tirera l'équation d'un theorème très-connu, que si dans

dans un triangle on a deux côtés B, & C avec l'angle intercepté A ; le quarré du troisième côté sera $B^2 + C^2 - 2B \times C \times cos.A$. Car si (fig. 3) les deux côtés sont $DP'' = B$, $DP = C$, & l'angle $PDP'' = A$, & qu' on conçoive P''E perpendiculaire à DP ; on aura $DE = P''D \times cos.P''DE = B \times cos.A$, & $PP''^2 = P''D^2 + PD^2 - 2\ PD \times DE = B^2 + C^2 - 2B \times C \times cos.A$. Si l'angle A est obtus, le point E va dans le côté PD prolongé au de-là de D, & la soustraction passe en somme ; mais cette somme sera donnée par la même formule ; puisque le co-sinus d'un angle obtus est négatif : ainsi la même formule sert pour tous les cas.

199. Dans la même figure on aura la raison de TP à TD, qui (num. 45. I) est celle de $\frac{t}{sin.m}$ à $\frac{t'}{sin.m'}$ donnée, quand on a les mouvements m, m' en longitude sans besoin de réduction, ou qu'on les a réduits ; en y employant la réduction trouvée par une construction, qui donnant une approximation grossière l'a rendue déjà sensiblement constante (num. 39). On a aussi dans le triangle PTD l'angle T, qui est le mouvement total de la comète, en longitude $= m''$: donc on trouvera par la Trigonométrie les deux autres angles, & la raison de TP à PD, qui est celle du $sin.$PDT au $sin.$PTD, d' où l'on tire $PD = \frac{TP \times sin.PTD}{sin.PDT}$. On trouvera aussi l'angle PDP'', parcequ'il est la somme, ou la différence de l'angle PDT trouvé, & de l'angle $TDP'' = TT''P''$, qu'on peut trouver aisément dans la fig. 1, où on a les côtés ST, ST'' du triangle TST'' avec l' angle en S égal au mouvement du soleil en longitude dû au temps t'', ce qui donne l'angle ST''T, d'où l'on tire TT''P'' somme, ou différence du même ST''T, & de $ST''P'' = e''$. Dans le même triangle TST'' on aura le côté TT'', qui est égal dans la fig. 3 à P''D, & on peut le nommer h.

200. Que l'on fasse dans la fig. 1 $T'P' = x$, & qu' on la mette à la place de tp en faisant $n = \frac{t''sin.m'}{t'sin.m''}$, $n' = \frac{t''sin.m}{t\,sin.m''}$, on

aura

aura (num. 81) $TP = nx$, $T''P'' = n'x$, & celle-ci sera aussi dans la fig. 3 celle de $TD = T''P''$. Que l'on fasse de plus dans celle-ci la valeur $\frac{n\,sin.PTD}{sin.PDT} = r$, & l'angle $PDP'' = d$, on y aura $PD = rx$, $PP''^2 = r^2x^2 - 2rhx\,cos.d + h^2$, & cette même formule sera dans la fig. 1 la valeur de $CI^2 = PP''^2$. Dans la même figure 1, on aura $T''P'' = n'x$, $PC = nx\,tan.l$, $P''C'' = n'x\,tan.l''$, $C''I = (n'tan.l'' - n\,tan.l)x$, qui sera $= fx$ en faisant $n'tan.l'' - n\,tan.l = f$. Donc on aura $CC''^2 = CI^2 + C''I^2 = (r^2 + f^2)x^2 - 2rhx\,cos.d + h^2$.

201. Dans la fig. 1 ayant l'élongation e', & la latitude l' de la seconde observation, on aura l'angle $ST'C'$, qui a pour mesure la distance de la comète au soleil dans un grand cercle de la sphère concentrique à la terre : cet arc est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, qui a pour côtés les deux arcs e', l'; & pour cela si on le nomme p, on aura $cos.p = cos.e'\,cos.l'$. On a (num. 198) $SC'^2 = T'C'^2 + ST'^2 - 2ST' \times T'C' \times cos.ST'C'$, & $T'C' = \frac{T'P'}{cos.PT'C'} = \frac{x}{cos.l'}$: ainsi si l'on fait encore $ST' = g$, on aura $SC' = \sqrt{(\frac{x^2}{cos^2.l'} - \frac{2gx\,cos.p}{cos.l'} + g^2)}$.

202. De-là on tirera l'équation, si l'on prend SC' pour la distance, dans laquelle la vîtesse de la comète est égale à la vîtesse moyenne de l'intersection du rayon vecteur à la corde, qui dans la fig. 2 étoit SQ (num 22) peu éloignée de la moitié de l'arc, & par conséquent peu éloignée de la même SC'. Le produit de cette distance multipliée par le quarré de la corde est égal au produit de la distance moyenne de la terre au soleil $= 1$ multipliée par le double quarré de l'espace parcouru dans le même temps avec la vîtesse du moyen mouvement de la terre. Ce double quarré est égal à la moitié de la valeur a trouvée au num. 70; puisque dans le num. 29 on avoit $a = 4u^2$, & u y étoit cet espace. Ainsi on aura $((r^2 + f^2)x^2 - 2rhx\,cos.d + h^2) \times \sqrt{(\frac{x^2}{cos^2.l'} - \frac{2gx\,cos.p}{cos.l'} + g^2)} = \frac{1}{2}a$. Si l'on fait les quarrés

pour

pour ôter l'irrationalité avec la multiplication actuelle, l'équation ira au sixième degré.

203. J'ai donné dans le même Opuscule plusieurs remarques sur cette équation, & une espèce de construction linéaire pour elle. On peut construire les équations déterminées du troisième, & quatrième degré à une section conique associée à un cercle : pour avoir une construction déterminée des équations d'un degré plus haut, on a besoin des courbes plus élevées. Mais pour une construction à tâtonnement, faite par un usage pratique d'une règle, une équerre, & un compas, je n'y ai employé, qu'un cercle, & une parabole. Comme ici j'ai changé un peu les dénominations, je changerai aussi le calcul, qui prépare cette équation pour cette espèce de construction, avec l'ordre de la construction même, & plusieurs remarques.

204. Premiérement je ferai $T'C' = \frac{x}{cos.l'} = z$, d'où on tirera $x = z\,cos.l'$, & si après cette substitution on divise les deux membres par $\frac{1}{2}a \times \surd(z^2 - 2gz\,cos.p + g^2)$, & qu'on les multiplie par $g^2 sin^2.p$; on aura $\frac{2g^2 sin^2.p}{a} \times ((r^2 + f^2)z^2 cos^2.l' - 2rhz\,cos.l'\,cos.d + h^2) = \frac{g^2.sin^2.p}{\surd(z^2 - 2gz\,cos.p + g^2)}$. Si on fait le premier membre $= y$, on aura l'équation à une parabole que l'on construira très-aisément, & l'ordonnée y de cette parabole devra être égale au second membre, qu'on construira beaucoup plus facilement encore de la manière suivante.

205. Ayant pris (fig. 18.) dans une droite indéfinie M'M, un point T, on y fera l'angle MTS égal à l'angle C'T'S de la fig. 1 $= p$, & on y prendra TS égale aussi à T'S de la même figure $= g$: on tirera SA perpendiculaire à M'M, & on décrira un cercle, qui aura cette ligne pour diamètre. On construira de la manière, que nous développerons ci-après, la parabole P'VP de l'équation indiquée, qui aura le point A pour origine des abscisses positives vers M, négatives vers M', & ses ordonnées perpendiculaires, & positives dans la direction AS, négatives dans

la

la direction opposée. On appliquera une règle en S en la tournant autour de ce point, jusqu'à ce que rencontrant le cercle en B, & la droite MM' en C, elle arrive à une position, dans laquelle l'ordonnée de la parabole $CD = y$ soit égale à la corde SB. Alors on aura $TC = z$, & le triangle STC le même que S'T'C' de la fig. 1.

206. Car TS étant $= g$, & l'angle $STC = p$, on aura $AS = g \sin.p$. Si on appelle z la ligne TC; on aura $SC^2 = z^2 - 2gz\cos.p + g^2$; & comme les triangles rectangles CAS, ABS semblables donnent cette proportion, $SC : SA :: SA : SB = \frac{SA^2}{SC}$; on aura d'un côté $SB = \frac{g^2 \sin^2.p}{\sqrt{(z^2 - 2gz\cos.p + g^2)}}$, & de l'autre par l'équation à la parabole on aura $CD = \frac{2g^2 \sin^2.p}{a} \times ((r^2 + f^2)\cos^2.l' z^2 - 2rhz \cos.l' \cos.d + h^2)$: l'égalité de ces deux lignes donnera l'égalité de ces deux membres; & si on les divise par $g^2 \sin^2.p$, & multiplie par $\frac{1}{2} a \sqrt{(z^2 - 2gz\cos.p + g^2)}$, en mettant $\frac{x}{\cos.l'}$ à la place de z, on aura l'équation du num. 202, qu'il falloit construire.

207. Il reste à déterminer les éléments de la parabole, qu'on doit employer. Premiérement dans l'équation $\frac{2g^2.\sin^2.p}{a} \times ((r^2 + f^2) z^2 \cos^2 l' - 2rhz \cos.l' \cos.d + h^2) = y$: il n'y a qu'une seule ordonnée y pour une abscisse z quelconque, ce qui fait voir, que chaque ligne perpendiculaire à M'M ne rencontre la parabole, que dans un seul point : ainsi son axe OO' doit être perpendiculaire à la même ligne, laquelle en sera rencontrée dans un point E, & la parabole dans son sommet V. Mais pour chaque ordonnée y où il y aura deux abscisses z inégales, ou une seule dans le sommet V, dans lequel les abscisses mêmes en se réunissant, formeront la racine double de l'équation, qui restera déterminée par $y = EV$, ou il n'y en aura aucune, ces racines devenant imaginaires.

208. Or on sait, que pour trouver les racines doubles, il suffit

fit de multiplier chaque terme par l' exposant de la puissance de son inconnue, par laquelle opération le dernier terme de l' équation s' évanouit, & l' avant dernier reste sans elle : ainsi notre équation divisée de plus par le coëfficient $\frac{2g^2 sin^2.p}{a} \times cos.l'$, qui devient commun, se réduira à une grande simplicité devenant $(r^2+f^2)z\,cos.l' - rh\,cos.d = o$, d' où l' on tire TE $= z = \frac{rh\,cos.d}{(r^2+f^2)cos.l'}$, que l' on trouve aisément, puisque les valeurs $r, f, cos.l'\,cos.d$ sont des nombres donnés, & h est la corde du mouvement actuel de la terre, c' est-à-dire TT''' de la fig. 1. En substituant cette valeur dans l' équation de la courbe, on aura la valeur de y, qui dans ce cas sera $=$ EV. Ainsi on a la position de l' axe, & son sommet V. On auroit obtenu le même résultat, si dans l' équation même on avoit cherché un maximum, ou minimum de l' ordonnée, en différentiant les valeurs z, & y : la valeur $dy = o$ auroit donné la même chose, que la multiplication des termes par les exposants de z.

209. On trouvera un point I de la parabole dans la TI perpendiculaire à M'M, en faisant dans la même équation $z = o$: on aura alors $y = \frac{2g^2 sin^2.ph^2}{a} =$ TI. Cette valeur est presque la même que $g^2 sin^2.p$, parceque le mouvement actuel de la terre est très-peu différent du moyen, & la corde très-peu différente de l' arc dans notre cas : ainsi la valeur $2h^2$ est très-peu différente de la valeur a. Comme encore TS est la distance actuelle du soleil à la terre presqu' égale à la moyenne $= 1$, la valeur $g^2 sin^2.p$ sera la troisième continuellement proportionnelle après TS $= 1$, & SA $= g\,sin.p$: si l' on met L dans la rencontre de la ligne TS avec le cercle, cette valeur sera SL, & on aura TI $=$ SL.

210. Si l' on tire IK perpendiculaire à l' axe, le paramètre sera la ligne troisième après VK abscisse de l' axe, & KI son ordonnée : ainsi si l' on prend sur l' axe VF vers le point K, & VZ dans la direction opposée, qui soient égales à la troisième

après VK, $\frac{1}{2}$KI, on aura le foyer F, & le point Z, par lequel en devra tirer la directrice. Le point K fera voir de quel côté va la parabole, qui doit aller dans la direction VK. Les deux TI, EK ont toujours la direction positive : si EV l'a aussi, & en est plus grande, c' est-à-dire plus grande que SL, la parabole ira à l' infini vers la partie négative : si celle-ci est égale à celles-là, la parabole devient une droite parallèle aux abscisses : dans les autres cas, c' est-à-dire, quand elle est positive, mais moindre que SL, ou qu' elle est = zero, ou négative d' une grandeur quelconque ; la parabole va à l' infini vers la partie positive.

211. Si l'on élève par tout l'ordonnée CD égale à la corde SB, qui y répond, on formera une autre courbe NSN', qui sera asymptotique tant du côté de NM, que de N'M', montant toujours de N jusqu'en S, & après descendant toujours. C' est la rencontre de cette courbe avec la parabole, qui réellement fait la solution du problême, & on ne peut en avoir que deux en D, D' : il y en aura toujours deux, quand la EV sera négative, ou zero, ou positive, & assez plus petite que le diamètre du cercle AS, pour ne pas le laisser à côté sans y entrer dedans : si cette ligne est positive, & plus grande que la ligne AS, la parabole va à l' infini du côté positif au de-là de la ligne QQ' parallèle à la MM', tandis que la courbe NSN' reste en de-cà : elle ne peut sortir de l' intervalle compris entre les deux parallèles QQ', MM' : ainsi toute la partie de la parabole, qui ne reste pas dans cet intervalle, est inutile, & EV étant une valeur positive, & plus grande que AS, il n' y aura aucune rencontre de la parabole avec la courbe NSN' : c' est le cas, dans lequel l' équation doit avoir toutes les racines imaginaires : mais cela ne pourra pas y arriver, quand les valeurs, qu'on employe dans l' équation du troisième degré, sont prises du mouvement réel d' une comète. Elle n' en aura jamais plus de deux, qui pourront servir pour les deux paraboles, qu' on voit dans la fig. 10.

212. J' ajouterai seulement, qu' on peut faire servir une parabole quelconque construite une fois pour tous les cas. Quand on

aura

aura trouvé les points T, I, K, V, E, A, S avec le paramètre, à la place de construire la parabole nouvelle on peut prendre sur l'axe de la parabole, qu'on a déjà, les lignes VE, EA, AS, AT plus grandes, ou plus petites que celles qu' on avoit trouvées, en raison du paramètre de la parabole, qu' on a au paramètre, qu' on avoit trouvé. Alors on fera le cercle du diamètre AS, & le reste de la construction : on n'aura fait autre chose, que d'employer une autre échelle. On ouvrira le compas de proportion de manière, qu' une des lignes trouvées quelconque soit appliquée transversalement au nombre, qui lui convenoit, & en y portant de même celles qu' on trouvera par le moyen de cette parabole ancienne, on trouvera le nombre, qui leur convient, comme si l'on avoit construit la parabole nouvelle sur son échelle.

213. Pour parvenir à l' équation, que j' ai donnée ici, j' ai fait usage de toutes les trois longitudes, & d' autant de latitudes, tandis que le problême est déterminé par cinq seuls de ces six termes donnés dans les trois observations. Dans ma Dissertation ancienne, & dans le premier des deux Opuscules imprimés par l' Académie, je n' avois fait usage que des deux latitudes, de la première, & dernière ; mais alors pour ne pas élever l' équation beaucoup plus haut, il m' a été nécessaire de supposer la vîtesse de la comète uniforme dans tout l' arc, en supposant la longueur de la corde telle qu' elle auroit été, si on l' avoit parcourue avec la vîtesse, que la comète a dans le premier point, c' est-à-dire qu' alors je prenois la première distance SC (fig. 1) pour celle, qui répond à la vîtesse moyenne de l' intersection du rayon vecteur avec la corde, & qui dans la fig. 2 est le rayon SQ.

214. On voit bien, qu' alors sans avoir besoin de la seconde latitude, on parvient à la même équation. Si l' on fait TP $= x$, $n'' = \dfrac{t' \sin. m}{t \sin. m'}$; on a T''P'' $= n''x$ (num. 77), où la valeur n'' ne dépend que des trois longitudes, par lesquelles on a les deux différences m, m': ainsi on a PC $= x \tan. l$, P''C'' $= n''x \tan. l''$, C''I $= x(n'' \tan. l'' - \tan. l)$, ou en faisant $n'' \tan. l'' - \tan. l = f$ à la

 pla-

place de $n'tan.l'' - ntan.l$ du num. 200, on a tout ici comme là. La raison de TP, à T''P'', c'est-à-dire à TD de la fig. 3 restera ici la même que dans le num. 199 avec tout le reste de ce numéro sans autre changement, que dans les coëfficients n & avec la valeur PD $= \frac{TP \times sin.PTD}{sin.PDT}$: comme ici TP est $= x$, T''P'' $= n''x$ & non $= nx$, & $n'x$, on fera $r = \frac{sin.PTD}{sin.PDT}$, en mettant par-tout 1 & n'' à la place de n & n', & conservant l'angle PDP'' $= d$, TT' $= h$, on aura de même PD $= rx$, $PP''^2 = r^2x^2 - 2rhx cos.d + h^2$, $CC''^2 = (r^2 + f^2)x^2 - 2rhx cos.d + h^2$. De l'autre côté on trouvera l'angle STC ici, comme on a trouvé ST'C' au numér. 201, parceque le nommant p, on aura $cos.p = cos.e cos.l$, & faisant ST $= g$ à la place de ST' on aura SC $= \surd(\frac{x^2}{cos^2.l} - \frac{2gx cos.p}{cos.l} + g^2)$, d'où l'on tirera la même équation, qu'au num. 202.

215. J'ai changé dans cet Opuscule la route, en nommant x la seconde distance raccourcie T'P'; parceque par-là j'ai pour la valeur du terme radical le second rayon vecteur SC' à la place du premier, & ainsi je puis prendre un arc beaucoup plus grand, sans endommager beaucoup l'approximation: le second rayon s'approche beaucoup plus de la distance, qui répond à la vîtesse moyenne de la corde, sur-tout si les deux temps t, t' sont peu inégaux, puisque dans la fig. 2 SQ n'excède la SD, que de $\frac{2}{3}$ de la petite flèche (num. 27). D'ailleurs la seconde latitude aide beaucoup à trouver la réduction par une méthode aussi simple. Pour la trouver sans en faire usage, il faudroit faire du détour, & avec le détour même perdre quelque chose de plus du côté de l'exactitude.

216. Dans les cas du voisinage de la conjonction, ou opposition, ou de l'égalité des distances de la comète & de la terre au soleil dans la seconde observation, la méthode de cette équation avec la construction que j'ai donnée ici peut être utile pour dé-

déterminer la distance sans faire usage des fausses positions, & on l'aura par cette méthode : on juge bien de la première, & de la seconde de ces deux circonstances par l'observation même, & de la troisième par les indices, qui (num. 76) font choisir la première position : pour les autres cas il faut commencer par une construction, qui après deux ou trois positions donne une distance peu éloignée de la véritable, qui puisse déterminer la réduction déjà sensiblement constante : cette distance peut servir alors pour résoudre l'équation du sixième degré par les méthodes usitées, qui employent la racine peu éloignée de la véritable, pour trouver sa valeur plus exacte par l'omission des puissances supérieures de la petite différence, qu'il faut y ajouter, ou en retrancher.

217. Avec tout cela cette méthode, qui employe l'équation du sixième degré, est beaucoup moins exacte, quand même il n'y a pas besoin d'employer la réduction, que celle de la fausse position, que nous avons employée dans cet Opuscule, parcequ'en prenant le second rayon vecteur pour la distance de la vîtesse moyenne dans la corde, on peut s'éloigner de l'exactitude beaucoup plus, qu'en employant la valeur de cette distance, qui donne $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$. On pourroit ici aussi employer la somme de SC + SC'' à la place de b, & la seconde, & quatrième puissance de la corde pour c^2, c^4; mais ce second terme feroit élever l'équation de quatrième degré portant x^4 dans c^4, qui en faisant les quarrés pour ôter l'irrationalité iroit à x^8 à la place de x^4 : & de plus les valeurs de SC, SC'' portant deux radicaux, on auroit dans la valeur b ces radicaux : on feroit bien $12b^2c^2 - c^4 = 12ab$; mais il y auroit un radical dans b^2, & deux dans b^4, ce qui pour ôter l'irrationalité feroit monter beaucoup plus haut l'équation aussi, & la rendroit impraticable par la hauteur même, & la multiplicité des termes sans beaucoup d'avantage, à cause de la petitesse de l'erreur, qu'on éviteroit par ce moyen. Pour toutes ces raisons j'ai abandonné cette méthode, & dans le même volume j'y ai substitué celle des fausses

po-

positions, que j'ai proposée dans le second Opuscule, & perfectionnée dans celui-ci.

218. Si dans la seconde observation la comète se trouve en opposition, & sans latitude, étant dans un nœud (elle ne peut pas se trouver dans la seconde observation en conjonction, & sans latitude, ni même avec une latitude petite; parcequ' elle y seroit cachée par les rayons du soleil); la construction n' aura pas lieu, parceque l' angle $ST'C' = p$ sera $= 180°$: ainsi le diamètre $AS = g\,sin.p$ s' évanouiroit avec toutes ces cordes. Non seulement la courbe N'SN, qui a pour ordonnées les $CD = SB$, tomberoit sur la droite M'M; mais la parabole aussi se confondroit avec elle; car dans son équation (num. 204) la valeur de l' ordonnée y est multipliée par $sin^2.p$, qui s' évanouit de même. Mais dans ce cas il n' y a pas besoin de cette espèce de construction, l' équation du sixième degré se réduisant à une du troisième. Alors dans la valeur (fig. 1) de $SC' = \sqrt{\frac{x^2}{cos^2.l'} - \frac{2gx\,cos.p}{cos.l'} + g^2}$ (num. 201) le $cos.p$ devient ± 1, & on y peut faire l' extraction de la racine : on y a $SC' = \frac{x}{cos.l'} - g$ (*): comme la latitude s' évanouit aussi, on y aura $cos.l' = 1$, & $SC' = \sqrt{(x^2 \mp 2gx + g^2)} = x \mp g$: on prendroit $-g$ dans les conjonctions, ou C' tombant en P', & l' angle ST'P' s' évanouissant, SC' deviendroit la différence des deux $T'P' = x$, $T'S = g$: il faudra prendre $+g$ dans les oppositions, dans lesquelles SC' en est la somme. L' équation devient $(r^2+f^2)x^3 - (2rh\,cos.d \pm g(r^2+f^2))x^2 + (h^2 \pm 2rhg\,cos.d)x \mp h^2g - \frac{1}{2}a = 0$. On pourroit la construire à deux sections coniques, ou à une section conique, & un cercle; mais la résolution numérique d' une équation du troisième degré n' est pas difficile, & elle est plus exacte. Si la comète n' est pas exactement dans une de ces deux positions, mais

(*) Il y auroit aussi la racine négative $-(x \mp g)$; mais elle ne change rien que la position de la figure, portant la direction de la ligne T'S à la partie opposée, & avec elle les deux autres T'P', SP'.

mais qu' elle en soit peu éloignée ; le cercle devenant trop petit, & la partie de la parabole enfermée entre les lignes $Q'Q$, $M'M$ trop peu éloignée de cette seconde avec un changement trop petit dans la longueur de ses ordonnées, la construction ne pourra donner rien d' exact : mais comme alors le $sin.p$ étant trop petit, son co-sinus doit être trop peu éloigné de l' unité, on pourra y employer la même équation du troisième degré. Ces remarques serviront pour le cas de l' opposition, parceque, comme j'ai déjà dit, dans la conjonction, si l'angle $ST'C'$ est petit, la comète plongée dans les rayons du soleil ne sera pas visible.

§. XIX.

Méthode pour arriver à une équation plus haute, qui contiendra en elle même la réduction de la seconde longitude.

219. On peut parvenir aussi à une équation déterminée, qui aura la seule inconnue x, & contiendra en elle même la réduction de la seconde longitude, sans avoir besoin de l' appliquer avant aux valeurs m, m', pas même dans le cas, où elle n' est pas assez petite par rapport aux autres termes, pour qu' on puisse la négliger. L' équation sera beaucoup plus élevée ; mais le calcul en est praticable, & on peut en déterminer le degré : elle ne servira pas, pour en faire usage en Astronomie, mais seulement pour bien connoître la nature du problême, & de la méthode, qui réduit le mouvement curviligne & inégal dans les arcs petits au rectiligne uniforme, sans négliger aucune quantité, qui par soi-même, & non par des circonstances particulières, ou par une préparation indépendante de la solution du problême, ne soit d' un ordre inférieur aux autres, qu' on retient.

220. Voici la route pour y parvenir. Dans la fig. 1 on trouvera en x les sinus des angles $T'pt$, $P'T'p$, la différence desquels est la réduction de la seconde longitude, & à cause de leur petitesse la différence de leurs sinus sera le sinus de cette correction : par son moyen on trouvera en x les valeurs $sin.m, sin.m'$

cor-

corrigées, qui entrent (num. 200) dans les valeurs $n = \frac{t'' \sin . m'}{t' \sin . m''}$, $n' = \frac{t'' \sin . m}{t \sin . m''}$, pour lesquelles la correction ajoutée ne sera pas trop compliquée, n'y ayant qu'une seule valeur à corriger dans chacune. Ainsi on aura en x les deux distances raccourcies TP $= nx$, T''P'' $= n'x$ (num. 200).

221. Après la détermination de ces valeurs, sans faire usage de la fig. 3, & de l'orbite relative, mettant L dans la fig. 1 à l'intersection de TP, T''P'' on y considérera les deux triangles TLT'', PLP''. Dans le premier on aura le côté TT'', que nous avons nommé h (num. 199), & les angles : parceque on a trouvé les deux STT'', ST''T dans la résolution du triangle TST'', qui a donné au même numéro la valeur de TT'', & on a les angles STP $= e$, ST''P'' $= e''$, qui combinés avec les deux précédents, le premier avec le premier, & le second avec le second, donneront par leur somme, ou différence les angles LTT'', LT''T : par-là on aura aussi l'angle TLT''; mais on l'a encore, & plus aisément par les deux longitudes de la comète, qui répondent aux directions TP, T''P'': la différence de ces longitudes est l'angle PLP'' $=$ TLT''. Ainsi on aura par la résolution de ce triangle les deux autres côtés LT, LT'', qu'on peut nommer q, q' en nommant d l'angle PLP''.

222. Alors dans le triangle PLP'' on aura PL $= nx - q$, P''L $= n'x - q'$ avec l'angle en L $= d$: ainsi on aura (numér. 198) $PP''^2 = PL^2 + P''L^2 - 2PL \times P''L \times \cos . PLP'' = (nx - q)^2 + (n'x - q')^2 - 2 \cos . d (nx - q) \times (n'x - q') = CI^2$, la valeur $C''I^2$ restera $= f^2 x^2$, comme au num. 200, & $SC' = \sqrt{\left(\frac{x^2}{\cos^2 . l'} - \frac{2gx \cos . p}{\cos . l'} + g^2\right)}$, comme au num. 201. Ainsi ayant les valeurs n, n' en x, on aura en x tout le premier membre de l'équation $CC''^2 \times SC' = \frac{1}{2} a$, puisque on aura $CC''^2 = CI^2 + C''I^2$.

223. Si on a les valeurs n, n' connues, comme dans les cas, dans lesquels la réduction de la seconde longitude est nulle, ou telle, qu'on puisse la négliger par sa petitesse, ou trouvée par une

une construction grossière peu éloignée de la véritable, & employée à la réduction des valeurs m, m'; on auroit une équation du sixième degré, parceque dans les valeurs CI^2, $C''I^2$ l'inconnue x ne monteroit qu'au second degré, qui seroit aussi son degré dans leur somme $= CC'''^2$: ainsi en faisant son quarré pour ôter l'irrationalité de SC', on y auroit seulement x^4, qui multiplié par x^2 de la valeur SC'^2 donneroit dans le premier membre la puissance x^6, tandis que le second seroit $\frac{1}{4}a^2$. Par-là on arriveroit à l'équation du sixième degré sans avoir aucun besoin des recherches du paragraphe 4. Mais supposant la réduction nécessaire, & inconnue, il faut trouver les valeurs n, n' en x, & voici la manière de s'y prendre.

224. On a (num.35 fig.1) $sin.T'pt = \frac{T't \times sin.ST'P'}{T'P'} = \frac{v'sin.e'}{x}$, en y mettant $ST'P'$, $T'P'$ pour $ST'p$, tp : on a aussi $sin.P'T'p =$ (num.36) $\frac{sin.T'pt}{SC'^3} = \frac{v'sin.e'}{x \times SC'^3}$. La réduction est la différence de ces deux angles, qui a été nommée y (num.79). Comme les petits angles sont proportionnels à leurs sinus, on pourra prendre la différence des leurs sinus pour les sinus de la réduction même, & on aura $sin.y = \frac{v'sin.e'}{x} \times (1 - \frac{1}{SC'^3})$. Or on a $m + y$, & $m' - y$ à la place de m, m' dans les formules $n = \frac{t''sin.m'}{t'sin.m''}$, $n' = \frac{t''sin.m}{tsin.m''}$, & mettant l'unité pour le $cos.y$ à cause de la petitesse de y, on aura $sin.(m + y) = sin.m + cos.m\,sin.y$, & $sin.(m' - y) = sin.m' - cos.m'sin.y$: cela donne la valeur $n = \frac{t''sin.m'}{t'sin.m''} - \frac{t''cos.m'sin.y}{t'sin.m''}$, où y est $= \frac{v'sin.e'}{x} \times (1 - \frac{1}{SC'^3})$: ainsi faisant $\frac{t''sin.m'}{t'sin.m''} = M$, $\frac{t''v'cos.m'sin.e'}{t'sin.m''} = N$; on aura $nx = Mx - N + \frac{N}{SC'^3}$: de la même manière on aura $n'x = M'x - N' + \frac{N'}{SC'^3}$.

225. De-là on tirera la valeur CI^2, qui en faisant (num. 222)

 les

les deux quarrés, & le rectangle pour avoir $CI^2 = PP'''^2$ devient $n^2x^2 + n'^2x^2 - 2\cos.dnn'x^2 - 2qnx - 2q'n'x + 2\cos.dq'nx + 2\cos.dqn'x + q^2 + q'^2 - 2\cos.dqq'$. Chacun des trois premiers termes après la substitution pour n^2x^2, n'^2x^2, $nn'x^2$ se réduira à la même forme $Ax^2 + Bx + C + \frac{Dx}{SC'^3} + \frac{E}{SC'^3} + \frac{F}{SC'^6}$, les valeurs A, B, C, D, E, F étant données, & la même forme restera dans la somme de tous les trois. Les quatre suivants auront trois termes chacun, de la forme $Bx + C + \frac{D}{SC'^3}$, & les trois derniers à la forme C, étant tous connus : la valeur $C''I^2$ a la forme Ax^2. Donc dans la somme de tous ces termes, c'est-à-dire dans la valeur de $CC'''^2 = CI^2 + C''I^2$, on aura la même forme de la somme des trois premiers. En la multipliant par SC', on aura l'équation de la forme suivante $Ax^2 \times SC' + Bx \times SC' + C \times SC' + \frac{Dx}{SC'^2} + \frac{E}{SC'^2} + \frac{F}{SC'^5} = \frac{1}{2}a \times SC'$. Pour ôter les diviseurs affectés de l'inconnue x, on multipliera par SC'^5, & on aura $Ax^2 \times SC'^6 + Bx \times SC'^6 + C \times SC'^6 + Dx \times SC'^3 + E \times SC'^3 + F = \frac{1}{2}a \times SC'^6$. Pour ôter l'irrationalité, il faudra mettre dans un membre toutes les puissances à exposant pair de la valeur radicale SC', avec F, & dans l'autre celles, qui l'ont impair, & on aura $(Ax^2 + Bx + C = \frac{1}{2}a) \times SC'^6 + F = -(Dx + E)SC'^3$. En faisant le quarré, l'irrationalité s'en ira : le terme, qui aura la puissance de l'inconnue x la plus haute, sera $A^2x^4 \times SC'^{12}$, dans laquelle SC'^{12} aura la puissance la plus haute x^{12}, puisque SC'^2 a la plus haute x^2. Ainsi l'équation aura x^{16} dans son premier terme, & pour cela elle sera du 16.^me degré.

226. Ainsi l'équation, qui exprimera la réduction même de la seconde longitude observée sur les arcs à celle, qui auroit été observée sur les cordes, & en laissant par-là toute la liberté d'employer dans les cas des petits arcs un mouvement rectiligne & uniforme, ne monte qu'au 16.^me degré. Elle aura un trop grand nombre de termes, qui exigeront trop de calcul numérique, & la résolution d'une équation du seizième degré en demande trop aussi, pour pouvoir en

faire

faire usage, sur-tout de préférence à la méthode des fausses positions incomparablement plus simple, & plus facile pour l' exécution. Mais cette équation fait voir, qu'on peut faire généralement la substitution de la ligne droite à un petit arc de la parabole, & cela encore sans supposer la réduction de la seconde longitude, ou nulle, ou assez petite pour pouvoir être négligée, ou connue par une construction précédente, qui la détermine au moins approchante de la véritable: elle fait voir, que cette méthode sans être ni illusoire, ni erronée dans la Géometrie, simplifiera incomparablement le problême général, & qu' on fera cette simplification sans avoir la moindre connoissance du rayon du cercle osculateur de la courbe qu' on cherche, & de la loi individuelle de l' inégalité du mouvement dans ses arcs, contre ce qu' on a prétendu d'avoir démontré lors des contestations sur cet objet, dont j' ai fait mention dans la préface, & dont je parlerai dans le cinquième des Mémoires correlatifs qu' on aura ici après cet Opuscule. Des Géomètres du premier ordre ont affirmé aussi l' impossibilité d' abaisser l' équation de ce problême par la substitution de la ligne droite à un arc même infiniment petit, ce qui n'étoit pas impossible, que par les méthodes, qui se sont présentées à leur esprit. S'ils se donnent la peine d'examiner ce paragraphe, ils verront, que cela est très-possible, & réellement exécuté ici par ma méthode.

§. XX.

Méthode de parvenir à une équation déterminée dans le cas général de trois observations quelconques.

227. On peut parvenir à une équation déterminée par beaucoup de routes différentes, & en n' employant que 5 des *6* valeurs données par les trois observations, c' est-à-dire de trois longitudes, & trois latitudes, & en laissant de côté celle qu' on veut; mais la complication des termes & la longueur du calcul immense les rendent toutes impraticables, si l' on veut pousser ce calcul jusqu' à l' équation finale d' une seule inconnue, comme

 je

je l' ai déjà dit au num. 196. Avec tout cela comme c' est une satisfaction, que de voir au moins une des routes, qui amenent au terme désiré, quoique sa longueur, & les embarras qu' on y voit de loin, ne permettent pas d' en entreprendre le voyage, j' en indiquerai une, qui a de la correlation à ce que nous avons vu dans cet Opuscule : & puisque les trois observations donnent généralement toutes les six valeurs nommées ci-dessus, je ferai usage de toutes les six : je prendrai trois inconnues, & je ferai voir la manière d' en tirer quatre équations différentes, quoique trois suffisent, pour trouver les trois inconnues : la quatrième répond à la nature du problême, qui devient plus que déterminé par une donnée de plus.

228. Que l' on nomme x, x', x'' les trois distances raccourcies TP, T'P', T''P''; on aura $PC = x \cos . l$, $P'C' = x' \cos . l'$, $P''C'' = x'' \cos . l''$: on trouvera, comme au num. 181, les trois angles STC, ST'C', ST''C'', qu' on nommera p, p', p'' en nommant g, g', g'' les trois distances de la terre au soleil ST, ST', ST'' : on aura dans le triangle rectangle TPC l' hypothénuse $TC = \frac{TP}{\cos . PTC} = \frac{x}{\cos . l}$, & de-là on tirera les valeurs des trois rayons vecteurs, comme au même numéro $SC^2 = \frac{x^2}{\cos^2 . l} - \frac{2gx \cos . p}{\cos . l} + g^2$, avec ses compagnons, qui pour SC'^2, SC''^2 ajouteront seulement les accents aux mêmes lettres.

229. On trouvera aussi les quarrés des cordes CC', C'C'' par la méthode exposée depuis le num. 221, comme on y a trouvé celui de CC'', en se servant de deux autres points L', L'' appartenants aux intersections de la distance T'P' avec les autres deux TP, T''P'' moyennant deux autres binaires des lignes TP, T'P', & T'P', T''P''. On appellera K, q; K', q'; K'', q'' les trois binaires des côtés des triangles TLT'', TL'T', T'L''T'', que l' on résoudra de la même manière, de laquelle on a résolu le triangle TLT'' au num. 221, & on nommera d, d', d'' les trois angles en L, L', L''. Alors dans la valeur de PP'' du num. 222 on mettra K, q à la place de q, q', & x, x'' à la place de $nx, n'x$, ce qui donnera la va-

valeur de PP'''^{2}: on y ajoutera le quarré de $P''C'' - PC$, qui sera le même $C''I = P''C'' - PC$, qu' on avoit là, mais ici il deviendra $x\,tan.\,l' - x\,tan.\,l$, pour avoir le quarré de CC''. La même formule donnera CC'^{2}, & $C'C''^{2}$, en y changeant seulement les accents des mêmes lettres : pour CC'^{2} on mettra x, x', l, l', K', q', d', pour x, x'', l, l'', K, q, d, & pour $C'C''^{2}$ à leur place on mettra $x', x'', l', l'', K'', q'', d''$.

230. Ayant dans chacun des triangles CSC'', CSC', $C'SC''$ la valeur analytique de tous les côtés, on passera à la détermination des équations, pour laquelle nous ferons voir auparavant la manière de tirer la valeur analytique, que chaque triangle donne pour la distance périhélie, & pour l' aire du secteur d' une parabole, qui ayant le foyer dans un de ses angles, comme en S, passe par deux autres comme C, C'': ces deux expressions donneront les équations cherchées.

231. Pour la distance périhélie on a par le num. 156, que dans la fig. 10 l' angle $SC''F'$ étant d' un côté $= SC''C + CC''F'$, & de l' autre le supplément de l' anomalie VSC'', la distance périhélie SV est $= SC'' \times sin^2.\frac{1}{2}(SC''C + CC''F')$. Or ayant la valeur analytique des trois côtés A, B, C d' un triangle, on a le quarré du sinus de la moitié d' un de ses angles quelconque : pour l' opposé au côté C, c' est $\frac{(A+C-B)\times(B+C-A)}{4A\times B}$, ainsi on aura l' expression du quarré du $sin.\frac{1}{2}SC''C$, d' où l' on tire le quarré du co-sinus $= 1 - sin^2$. On aura le co-sinus de l' angle $CC''F' = \frac{C''B}{CC''} = \frac{SC''-SC}{CC''}$, d' où l' on tire le quarré du sinus de sa moitié $= \frac{1-cos.}{2}$, & le quarré du co-sinus de la même moitié $= \frac{1+cos.}{2}$. Les racines de ces 4 valeurs sont les sinus, & les co-sinus de ces moitiés : ainsi la moitié de l' angle $SC''F'$ étant leur somme, on aura le sinus de cette moitié, en prenant la somme des deux produits du sinus de l' une par le co-sinus de l' autre. Le quarré de ce sinus multiplié par SC'' donnera selon ce numéro la valeur analytique de la distance périhélie SV. Ainsi

à l'

à l' aide des trois côtés de chacun des trois triangles CSC'', CSC', C'SC'' de la fig. 1, on aura une expression analytique de la distance périhélie, qui lui répond.

232. Pour avoir l'expression de l'aire du secteur parabolique, qui répond à chacun de ces trois triangles, on considérera d'abord dans la même fig. 10 le secteur CSC'' comme infiniment petit: les lignes CB', CI s'y confondront avec un arc circulaire infiniment petit, qui en coupant $C''B' = C''B$, formera le triangle $CB'C''$ rectangle, & égal à CBC'', & CB' sera $= CB$. Le secteur infiniment petit CSC'' pourra être considéré comme $= \frac{1}{2}SC'' \times CB'$, & l'espace quadriligne $CFF'C'' = C''F' \times CB$; ainsi le premier sera la moitié du second, & $\frac{1}{3}$ du pentagone SCFF'C''. Comme cela arrive à tous les secteurs infiniment petits, le secteur fini CSC'' sera aussi la moitié de l'espace enfermé entre l'arc CC'', & les droites CF, FF', F'C'', & $\frac{1}{3}$ du pentagone SCFF'C''. Ce pentagone est la somme du triangle CSC'', & du quadriligne CFF'C'': celui-ci est $\frac{1}{2}(CF + C''F') \times CB = \frac{1}{2}(SC + SC'') \times \sqrt{(CC''^2 - (SC'' - SC)^2)}$, ainsi on l'a par les valeurs des trois côtés: par les mêmes on a la valeur de l'aire du triangle, puisqu'on sait, que si les trois côtés sont $2B, 2C, 2D$, le quarré de l'aire est $2B^2C^2 + 2B^2D^2 + 2C^2D^2 - B^4 - C^4 - D^4$. Ainsi on a l'aire du secteur par les côtés du triangle (*)

233. A'.

(*) Cette formule est bien à propos ici où l'on a les valeurs non des côtés, mais de leurs quarrés, ce qui ôte l'embarras des radicaux: mais elle peut-être réduite à une autre, qui pour l'usage, qu'on en fait ici, viendroit beaucoup plus à propos. Car si l'on fait le quarré de $B^2 + C^2 - D^2$, & qu'on l'ôte de $4B^2C^2$, on trouvera la même formule, ainsi pour le quarré de l'aire du triangle CSC'', on aura $\frac{1}{4}SC^2 \times S''C^2 - \frac{1}{16}(SC^2 + SC''^2 - CC''^2)^2$. La forme de la valeur de chaque quarré de ces côtés est la même $Mx^2 + Nx + P$, M, N, P étant des quantités données, qu'on peut réduire en nombres: alors on feroit la somme des deux quarrés des rayons SC, SC'', on en ôteroit le quarré de CC'', on feroit le quarré du reste: on multiplieroit les deux quarrés des deux rayons l'un par l'autre, & après avoir divisé le premier résultat par 16, le second par 4, il suffiroit de soustraire celui-là de celui-ci, ce qui seroit facile, ces deux résultats étant aussi de la même forme.

Cet-

233. A présent il faut ajouter la détermination du quarré de l' aire d' une parabole, qui a la distance périhélie $= 1$, correlative

Cette seconde formule est plus à propos pour ce cas-ci, mais la précédente a plus d'élégance : pour avoir le quarré de l'aire, il faut faire la somme des trois produits des trois binaires des quarrés des deux demi-côtés, & ôter la somme de leurs trois quatrièmes puissances de la moitié de cette somme. On peut présenter la même valeur sous une autre forme : on fera la demi-somme des trois côtés : on en ôtera l'un après l'autre les mêmes côtés : le produit de ces trois restes, & de la demi-somme sera le quarré de l'aire du triangle. C'est la forme ordinaire, sous laquelle on exprime communément la manière de trouver l'aire d'un triangle rectiligne par les trois côtés, & si on l' exprime par les valeurs, & signes algébriques, on trouve une autre expression bien simple aussi : ôtez chaque côté de la somme des deux autres, le produit de la multiplication des trois restes avec la somme de tous les trois ensemble, divisé par 16 donnera le quarré de l'aire.

La formule, qui exprime le quarré de l'aire dans cette idée ordinaire des éléments, est $((B + C + D) - 2B) \times ((B + C + D) - 2C) \times ((B + C + D) - 2D) \times (B - C + D)$, dans laquelle formule les côtés sont $2B$, $2C$, $2D$. Si l'on y fait la multiplication actuelle, on trouvera après toutes les élisions la formule, que nous avons proposée dans ce numéro $2B\,C^2 + 2B^2D^2 + 2C^2D^2 - B^4 - C^4 - D^4$. Mais cette formule, qui exprime l'idée commune, donne une autre expression simple, que l' on voit au premier coup d' œil, en réduisant les trois premiers termes à la forme plus simple, qui sera $(C + D - B)\times(B + D - C)\times(B + C - D)\times(B + C + D)$, en doublant toutes les valeurs pour employer les côtés mêmes à la place des moitiés, & divisant par $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, on tirera ce beau théorème. *Si l' on ôte chaque côté de la somme des deux autres ; le produit de trois restes, & de la somme de tous les trois, divisé par 16 donnera le quarré de l' aire.*

La démonstration commune des théorèmes qui sont la source de tout cela ne laisse pas d'être compliquée ; comme aussi il y a bien de la complication dans la démonstration, qu'on donne communément de l'autre formule pour trouver le quarré du sinus de la moitié de l'angle par les trois côtés, que nous avons employée ici au num. 231. J'ai une démonstration très-simple de ces deux objets, c'est-à-dire de la manière de trouver l'angle, & de trouver l'aire d'un triangle par les formules, que nous avons employées ici : elle se sert de la simple Géométrie synthétique, & puise dans une source commune les principes pour ces deux objets, en employant la même figure, les mêmes phrases pour le premier objet tant dans les triangles plans, que dans les sphériques : j'y ai ajouté la mesure de l'aire d'un triangle sphérique, qui est donnée, non par les côtés, mais par les angles. J'ajouterai à la fin du dernier volume un Opuscule sur tout cela, puisque son objet très-utile en lui même est une espèce de pièce justificative de ce qu'on trouve ici.

ve à un temps donné t. Nous avons trouvé (num. 31, & 32), que le double espace linéaire, qui répond à une minute dans le mouvement fait avec la vîtesse, que la terre auroit dans un cercle du rayon $= 1$, a pour son logarithme 5,3782495. Pour avoir celui d'une minute il faut le diviser par 2 : pour réduire celui-ci à l'espace linéaire de cette comète dans son périhélie, il faut le multiplier par $\sqrt{2}$ (num. 23), & ce dernier multiplié par la moitié de la distance périhélie $= 1$, c'est-à-dire divisé par 2, donnera l'aire d'un secteur d'une minute pour cette comète. Donc il faudra multiplier ce premier espace linéaire par $\sqrt{2}$, & le diviser par 4, c'est-à-dire le diviser par $\sqrt{8}$: ainsi pour le secteur d'une minute appartenant à cette parabole, il faudra ôter du logarithme trouvé $\frac{1}{2} log. 8 = 0,4515450$, & pour avoir le logarithme du secteur du temps t réduit en minutes, il faudra y ajouter $log. t$: on aura alors $4,9267045 + log. t$: le logarithme de son quarré sera le double de celui-là $= 9,8534090 + 2 \, log. t$. On trouvera de même les logarithmes des t', t'', & ayant appellé ces trois quarrés a, a', a'', on aura $\sqrt{a''} = \sqrt{a} + \sqrt{a'}$, ce qui peut faire encore trouver la troisième valeur par les deux précédentes.

234. Après ces préparatifs, on verra aisément la manière de parvenir à plusieurs équations différentes avec trois seules inconnues x, x', x''. Ayant trouvé les trois valeurs de la distance périhélie par les côtés des trois triangles, on aura trois équations en faisant la première égale à la seconde, la seconde à la troisième, la première à la troisième : mais une des trois quelconque est contenue dans les deux autres par le principe *quæ sunt æqualia eidem, sunt æqualia inter se* : ainsi par-là, on n'en a que deux différentes. On en tirera trois autres, en faisant le produit de la multiplication du quarré de l'aire du secteur, qui répond à chaque triangle, par sa distance périhélie ; parceque les vîtesses dans les périhélies de différentes paraboles étant (numér. 23) en raison réciproque de la racine des distances, & les aires des secteurs infiniment petits étant comme ces vîtesses multipliées par les mêmes distances, qui sont les hauteurs de ces secteurs ; les aires seront en raison directe des racines des distan-

ces

ces périhélies, & pour cela on dira, comme l' unité est à la distance périhélie d' une parabole quelconque, ainsi le quarré de l' aire de celle-ci est au quarré de l' aire de celle, qui a la distance $= 1$, c' est-à-dire à la valeur a, a', a''.

235. Mais ici aussi une de ces trois équations est déterminée par les deux autres réunies aux deux précédentes, qui déterminoient l' égalité des distances périhélies : parceque dans ces quatre équations on a déjà une telle liaison des angles en S, & des trois rayons avec les anomalies, la distance périhélie, les aires, qu'il en résulte l'identité d' un plan passant par les trois rayons, & d' une parabole, qui doit passer par leurs extrémités : par-là la troisième aire doit être égale à la somme des deux premières, comme $\sqrt{a''}$ est supposée $= \sqrt{a'} + \sqrt{a}$ à cause de $t'' = t + t'$: ainsi l' équation, qui énonce cette aire multipliée par la racine de la même distance périhélie égale à $\sqrt{a''}$, n' énonce rien de nouveau.

236. On pourroit exprimer l'identité du plan par une équation nouvelle, qu' on pourroit substituer à une des quatre précédentes, c' est-à-dire des deux données par la distance périhélie commune, & deux par le rapport des quarrés des aires aux valeurs a, a' : elle viendroit de la supposition de l' angle $CSC'' = CSC' + C'SC''$, égalité, qui n' auroit pas lieu, si les trois rayons n' étoient dans un même plan. On a (num. 231) l' expression du quarré du sinus de la moitié d' un angle par les trois côtés : on en tire le quarré du co-sinus par l' expression $cos^2. = 1 - sin^2.$ Ainsi on a, en prenant leurs racines, l' expression des sinus, & co-sinus de toutes les trois moitiés de ces angles : la somme des deux produits du sinus de chacune multipliée par le co-sinus de l' autre égalée au sinus de la troisième moitié donneroit cette nouvelle équation.

237. Trois seules de ces équations donneroient la solution du problême : mais comme on les a tirées en employant une donnée de plus, qui rend le problême plus que déterminé ; on rencontreroit presque toujours toutes les racines imaginaires, si on avoit pris ces données à volonté ; parceque le hazard ne feroit

 pas

pas tomber le choix de la sixième donnée surabondante sur celle, qui convient aux 5 autres, par lesquelles elle est déterminée : mais il n'y aura point de danger de cette impossibilité, quand on aura pris toutes les six données dans les observations faites sur une orbite parabolique réellement décrite par une comète. Chaque combinaison de trois équations parmi les racines de la finale, qu'on en tireroit, auroit celle, qui répond à cette parabole. On pourroit craindre une autre racine pour une autre parabole de la fig. 10, comme on la eue dans l'équation du sixième degré dans le paragraphe précédent; mais on peut croire, qu'elle ne seroit pas commune à l'équation finale tirée d'un autre combinaison pareille.

238. Toutes ces considérations, & les méthodes, que nous avons données ici pour parvenir à une équation finale déterminée, & même à plusieurs, ne sont à propos, que pour avoir une idée de la nature du problême, mais on voit bien, que tout cela ne peut pas servir pour la pratique. On s'aperçoit aisément au premier coup d'œil de l'immense multiplicité, & complication des termes, qu'on devroit trouver en route ; si l'on vouloit pousser le calcul jusqu'à la fin, en ôtant les irrationalités, & les diviseurs affectés des valeurs inconnues, pour nettoyer chaque équation, & en réduisant les trois équations à une seule inconnue par la successive élimination des deux autres. Les méthodes pour faire tout cela sont très-connues ; mais l'exécution du calcul en est impraticable à cause de la longueur immense, & de cette multiplicité de termes, qui est tout-à-fait inconcevable.

239. On voit seulement par-là combien le problême est simplifié dans les petits arcs par la substitution du mouvement rectiligne, & uniforme sur les cordes, au curviligne, & inégal sur les arcs, pour en tirer ou l'équation du seizième degré, qui comprend la réduction même de la seconde longitude, ou celle du sixième employée, quand il n'y a aucun besoin de cette réduction, parcequ'elle y est ou nulle, ou telle qu'on puisse la négliger à cause de sa petitesse, ou parcequ'on l'a déjà trouvée auparavant par une opération différente, c'est-à-dire par une ap-

pro-

proximation faite par la méthode des fausses positions dans une construction grossière, & qu' on l' a employée avant de faire le calcul pour avoir cette équation.

240. Mais tout cela sert incomparablement mieux à voir l' utilité de la méthode des fausses positions, que nous avons exposée ici, & détaillée, soit par le moyen de la construction graphique aidée d' un petit calcul numérique, soit par celui du calcul trigonométrique abrégé de beaucoup par la réduction à six seuls triangles plans dans chaque position, pour déterminer la distance, après laquelle détermination tout le reste est bien facile. Dans ma méthode il n' y a qu' une seule suite de positions, & deux, ou trois suffiront pour avoir une approximation assez satisfaisante à plusieurs égards, tandis que la méthode communément employée par les Astronomes exige une suite de différentes suites, chacune des quelles est nécessaire, pour accorder les temps, & les anomalies avec deux observations, ayant besoin de recommencer toujours l' accord des deux, pour les accorder avec la troisième.

§. XXI.

Application de la méthode graphique à la comète de 1774 en commençant par la détermination des distances raccourcies à la terre.

241. JE prendrai la comète de 1774 pour donner un exemple de ma méthode, quoique la grande inclinaison de son orbite presque perpendiculaire à l' écliptique rend plus difficile une détermination bien exacte: j' y employerai trois observations de cette comète faites à Paris avec le plus grand soin, dont on a tiré les temps moyens, les longitudes, & les latitudes. J' en ai tiré les éléments de sa théorie par construction graphique, & par le calcul trigonométrique selon la méthode de cet Opuscule, que j' exposerai à la fin avec ceux qu' on a trouvé par le calcul exact, qui est employé communément par les Astronomes, ce qui

servira d'un côté pour mieux saisir la méthode, même en suivant l'ordre des opérations, qu'on verra dans cet exemple détaillé, & de l'autre pour voir dans le même exemple sa bonté, & l'avantage, qu'on y a par la facilité de trouver les éléments cherchés bien peu éloignés de l'exactitude, & voir d'un coup d'œil toute la suite des phénomènes de la manière exposée dans le même Opuscule.

242. Je donnerai dans ce paragraphe l'application de tout ce que j'ai proposé depuis la préparation des valeurs, qu'on voit au paragraphe 7, jusqu'à la détermination des distances raccourcies à la terre faite par la méthode de la construction graphique.

243. Pour cette première partie j'employerai deux tables, qu'on trouvera à la fin de cet Opuscule avec d'autres, qui appartiendront aux opérations suivantes, & j'en donnerai l'explication détaillée, qui rendra plus facile l'imitation de toutes les opérations, & des calculs pour toute autre occasion, qui se présente. Au num. 64 j'ai proposé cette espèce de tables, & on pouvoit, selon ce que j'y ai dit, commencer dans la première par les temps vrais, les ascensions droites, & les déclinaisons, qu'on a immédiatement par les observations. Mais comme la méthode d'en tirer les temps moyens, les longitudes & latitudes, appartient à l'Astronomie en général, & non à mes méthodes particulières, je supposerai ici ces opérations faites, & je commencerai par ces trois résultats de ces calculs astronomiques. Ces résultats sont la base des opérations relatives à la fig. 19, & 20, que je donne de la même grandeur que j'ai employée. Le rayon de l'orbite terrestre y est de 100 parties de mon compas de proportion, qui ne font qu'à-peu-près deux pouces, & demi. Il est un peu petit, & pourtant il suffit pour une assez bonne approximation : d'ailleurs dans cette comète, qui a une distance périhélie bien grande, on ne pouvoit pas aisément employer une échelle considérablement plus grande. Dans la seconde table j'ai mis les valeurs employées dans la construction même, & les données par elle, & par le petit calcul, qui l'accompagne.

244. La

244. La première table a trois divisions (*), dont les deux premières ont chacunes quatre colonnes, & la troisième trois. Dans les colonnes de la première division on a les temps moyens, les longitudes de la comète, & ses latitudes calculées d'après les observations, avec les longitudes du soleil tirées de la connoissance des temps : dans la première colonne de la seconde division on a les distances du soleil à la terre en parties de la distance moyenne $= 1$: la seconde colonne a les valeurs t, t', t'', dont les deux premières sont la différence du premier temps moyen au second, & du second au troisième, réduite en minutes, ayant mis les secondes en décimales de six en six selon le num. 67. La somme des valeurs t, t' donne t''. La troisième colonne contient les valeurs m, m', m''. Les deux premières sont la différence de la première longitude de la comète à la seconde, & de la seconde à la troisième, on les a ici en ôtant la seconde de la première, & la troisième de la seconde, parceque le mouvement apparent est rétrograde. Pour faire la première soustraction, il faut ajouter à la première longitude 12 signes, c'est-à-dire un cercle entier à l'ordinaire. On y a la troisième valeur $m'' = m' + m$. La quatrième colonne a les trois valeurs e, e', e'', qui sont les trois élongations de la comète au soleil : on les trouve en ôtant cha-

(*) J'appelle divisions de cette table ses parties, qui sont séparées l'une de l'autre par des lignes, qui la traversent toute entière de droite à gauche : ces divisions sont subdivisées en plusieurs colonnes par des lignes simples perpendiculaires aux précédentes, qui vont de haut en bas, & je forme toujours les colonnes des différentes divisions, ou parties de la table, par des lignes de cette dernière direction : mais quelquefois je conçois toute une colonne, qui va de haut en bas dans toute la longueur de la page, partagée en plusieurs divisions : ainsi quelque fois je dirai la telle colonne de la telle division, & quelquefois la telle division de la telle colonne.

On fera bien de copier chaque table pour l'avoir toujours sous les yeux, quand on en lit l'explication, ou quand dans le texte postérieur on y renvoye le lecteur, sans être obligé toujours à tourner les feuilles, & regarder en deux endroits éloignés à la fois. On pourroit même imprimer la forme des mêmes tables avec tous les titres pour y ajouter toujours les nombres correlatifs à chaque nouvelle comète, ce qui guideroit beaucoup mieux le travail, & rendroit plus difficiles les méprises.

chaque longitude du soleil de la correspondante de la comète: il faut ajouter aussi 12 signes à la première longitude de celle-ci: les signes sont ici réduits en degrés: on sait bien qu' il faut compter chacun pour 30°. Dans tout cela il n' y a pas la moindre difficulté.

245. Dans la troisième division on trouve les valeurs a, v', L, L', L'' des num. 70, & 71. Dans la première ligne de sa première colonne on a le logarithme trouvé au num. 32, & répété au num. 70, dans la seconde le double logarithme de t'' (*): on y a mis avant $2.t''$, parceque c' est le logarithme de t''^2, & quand j' aurai à mettre le logarithme d' une puissance, précédé de cette puissance, & séparé par des points sans le signe d' égalité, j' indiquerai toujours cette puissance en mettant l' exposant avant la valeur avec un point intermédiaire, qui servira pour exprimer le double, ou triple, non de cette valeur, mais de son logarithme. Ici par $2.t''$ avec un logarithme mis après & séparé de lui par des points, j' exprime, que c' est le double du logarithme de t'', & non le logarithme du double de t'', le quel j' indiquerois en le faisant précéder par $2t''$, sans le point entre les 2, & t''. Quand à la place du logarithme d' une quantité il y aura un complément arithmétique, j' y mettrai avant un point: ainsi à la ligne 5 de la seconde colonne de la troisième division ce $.2.t''$ exprime qu' on a après dans la même ligne le complément arithmétique du double logarithme de t'': de même dans la troisième colonne le point mis avant les $sin. m''$, t', t exprime que ces valeurs sont suivies du complément arithmétique de leurs logarithmes,

(*) J' ai déjà expliqué dans le Tome I ma manière d' indiquer dans les tables par des points & des lignes les valeurs, qu' on employe pour diviseurs, & de marquer les compléments arithmétiques des leurs logarithmes, qu' on doit faire entrer dans les sommes de ceux des coëfficients du numérateur, comme aussi d' indiquer les puissances qui entrent dans le calcul. J' ai employé cette méthode dans les deux premiers volumes, qui appartenoient à l' Optique. Comme ce n' est pas la manière commune, je la répète ici pour ceux, qui laissant à part les sujets appartenants à l' Optique voudront s' appliquer à ceux de celui-ci, & aux autres des volumes suivants, qui appartiennent à l' Astronomie.

mes, & non des logarithmes mêmes. Mais pour dénoter mieux ces compléments arithmétiques, je mets aussi une petite ligne pardessus la caractéristique, qui n'est pas inclinée comme un accent, mais couchée parallélement à la ligne écrite. La troisième ligne de cette première colonne a la somme des valeurs logarithmiques des deux précédentes précédée par a avec sa valeur numérique tirée de ce logarithme.

246. La première ligne de la seconde colonne de cette troisième division contient v avec sa valeur numérique, & son logarithme. Cette valeur est trouvée par le num. 70. On ôte dans la seconde colonne de la seconde division la première longitude du soleil de la troisième, ce qui donne $29°.24'.32''$ pour le mouvement du soleil dans le temps t'': le co-sinus de sa moitié $14°.42'.16''$ est $= 0,96725$, qui ôté du rayon $= 1$ laisse son sinus verse $= 0,03275 = v$: la seconde & la troisième ligne ont t, t' avec les logarithmes, qui répondent aux valeurs des temps trouvées dans la seconde division: la quatrième ligne a 4 avec son logarithme, la cinquième $.2.t''$ avec le complément du double logarithme de t'', qu'on trouve à la seconde ligne de la première colonne de cette division: la somme de ces cinq quantités logarithmiques donne dans la sixième ligne le logarithme de $v' = \frac{4tt'v}{t''^2}$: la septième ligne a $sin.e'$ avec son logarithme tiré des tables relativement à la valeur de l'angle e', qu'on a trouvé dans la dernière colonne de la division précédente: la somme des deux derniers logarithmes donne dans la dernière ligne le $log.$L. De la même manière on trouve dans la dernière colonne de cette même division les logarithmes des valeurs $L' = \frac{t''}{t'\,sin.m''}$, $L'' = \frac{t''}{t\,sin.m''}$: à la troisième ligne on a le logarithme de la fraction commune $\frac{t''}{sin.m''}$ par la somme du logarithme de t'', & du complément arithmétique du $log.sin.m''$, qu'on a dans les deux lignes précédentes: on y ajoute dans les deux dernières les compléments des $log.t'$, $log.t$, qu'on voit à la quatrième, &

cin-

cinquième. Le *log.*t'' est la moitié de 2 *log.*t'', qu' on a dans la première colonne, & on a dans la seconde les *log.t*, *log.*t', pour en tirer les compléments : on tire des tables le logarithme du sinus de la valeur m'', qu' on a dans la troisième colonne de la division précédente.

247. La seconde table est relative aux fig. 19 & 20, qui répondent aux fig. 4, & 9, mais je les ai tournées un peu différemment pour les appliquer à ce cas particulier. Dans la fig. 19 le soleil S est le centre du cercle plus grand, qui a (num. 73) le rayon de 120 parties de mon compas de proportion, dont un pied contient 473. Il représente la moitié de l' écliptique, & on a dans la circonférence des petites lignes, qui lui sont perpendiculaires : une de ces lignes est marquée o pour le premier point du bélier, & les autres à gauche 2, à droite 10, & 8 à l' intervalle du rayon pour avoir sa division en trois binaires de signes, qu' on trouvera les seuls nécessaires pour la construction dans ce cas-ci. On pouvoit placer le point o arbitrairement où on auroit voulu ; mais je l' ai mis de manière à faire entrer la directrice dans la même feuille, dans laquelle j' ai tracé depuis dans la fig. 21 le cercle entier, & la directrice, qui doit y aller bien loin, quoique pour l' impression j' en ai après retranché une partie. Ordinairement la distance périhélie est plus petite, ce qui rend les figures beaucoup moins allongées.

248. Une petite ligne tirée en dedans à un tiers de l' intervalle entre 10, & 8 avec *a* à côté marque la direction de l' aphélie de la terre : ayant appliqué la règle en S, & *a* on y a pris l' intervalle $as = 118,3$, qui a donné le centre *s* de l' orbite de la terre à la distance $Ss = 1,7$ de ces parties. Cette orbite est le cercle plus petit, qui a pour rayon 100 parties : ainsi les mêmes parties seront les centièmes de la distance moyenne de la terre au soleil : cette distance ayant été prise pour unité dans la première table, & dans toutes les autres, qui viendront ci-après, les premières deux chiffres après la virgule, qui sépare les entiers des fractions décimales, exprimeront toujours les unités de ces parties, qui sont très-visibles dans le même compas,

& la

& la troisième les dixièmes de ses unités, c'est-à-dire les millièmes de la distance moyenne. On ne voit celles-ci, que par une espèce d'estime, dans laquelle on peut aisément se tromper de deux ou trois de ces particules.

249. On voit dans l'écliptique les trois points Q, Q', Q'', qui répondent aux trois longitudes de la terre vue du soleil selon le num. 74. En ajoutant 6 signes aux trois longitudes du soleil, qu'on a dans la quatrième colonne de la première division de la table I, ôtant dans les deux dernières sommes le cercle entier de 12 signes, & négligeant les secondes, ou les comptant pour 1', quand on en a plus de 30, on a pour ces longitudes héliocentriques de la terre 11ˢ. 17°. 8'; 0ˢ. 2°. 44'; 0ˢ. 16°. 32'. On doit prendre ces deux dernières après 0 selon l'ordre des signes à gauche, pour trouver les points Q', & Q''. Pour le point Q il faut prendre à droite le complément de la première à 12ˢ, qui reste 12°. 52'. J'ai pris ces arcs à l'aide de leurs cordes les doubles des sinus de leurs moitiés au rayon = 1 sont 0,224; 0,047; 0,287. Pour avoir les cordes au rayon de notre écliptique = 1,2, il faut ajouter à chacun de ces nombres sa cinquième partie, qui est 0,045; 0,009; 0,057; d'où l'on tire ces trois cordes 0,269; 0,056; 0,344, qui par rapport aux parties de notre échelle sont 26,9; 5,6; 34,4.

250. Les intersections des rayons SQ, SQ', SQ'' avec l'orbite de la terre ont donné les trois points T, T', T'' pour les lieux de la terre, & l'intersection de la corde TT'' avec le rayon ST' a donné le point *t*. J'ai prolongé ces rayons en *e*, *e'*, *e''* de manière, que chaque ligne T*e*, T'*e'*, T''*e''* est de 100 parties, & en prenant pour centre chacun des points T, T', T'' j'ai tiré les arcs des cercles *e*E, *e'*E', *e''*E'' pour déterminer les trois directions TE, T'E', T''E'' de la longitude observée de la comète, qu'on tire des trois valeurs *e*, *e'*, *e''* de la quatrième colonne de la seconde division de la table I, qui donnent l'élongation de la comète au soleil prise sur l'écliptique : pour avoir les arcs *e*E, *e'*E', *e''*E'', il falloit dans ce cas selon le num. 74 prendre la différence de ces trois valeurs à un demi-cercle, ce qui a donné

$37^{\circ}.49'$; — $9^{\circ}.56'$; — $38^{\circ}.25'$. Les doubles sinus des moitiés de ces arcs ont donné les cordes 0,648 ; 0,173 ; 0,658 : avec ces cordes j' ai trouvé l' arc *e*E à gauche selon l' ordre des signes, & les arcs *e*'E', *e*''E'', à droite, & j' ai tiré les trois TE, T'E', T''E''.

251. Pour commencer les fausses positions de la seconde distance raccourcie de la comète T'P', j' ai marqué sur le côté d' un papier (num 75) trois points correlatifs aux points T, *t*, T'', qui dans la fig. 4 sont G*p*G' sur la ligne droite HH': on voit ici ces points sur la ligne ponctuée HH', & j' ai fait les réflexions suivantes. La comète étant vers l'opposition devoit être plus éloignée du soleil, que la terre, ce qui devoit rendre sa corde plus petite que $TT'' \times \sqrt{2}$ (num. 76). La lenteur du mouvement qui n' étoit pas de deux degrés par jour, comme on voit aisément dans la table I par la valeur *m*'', & par les trois latitudes, fait voir, que l' excès de la distance de la comète sur celle de la terre n' étoit pas petit, & la grande latitude des deux premières observations, que l' on voit dans la même table I, fait encore augmenter la même distance de manière, que l' on devoit bien voir, que la corde de l' arc parabolique de la comète, ne pouvoit pas être considérablement plus grande que TT''. La grande diminution de la latitude faisoit bien entrevoir une grande inclinaison de la même corde au plan de l' écliptique, ce qui devoit raccourcir de beaucoup dans la fig. 1 sa projection PP'', c' est-à-dire la corde de la parabole projettée, qui pour cela devoit bien être plus petite que TT''. L' éloignement de la comète plus grand que celui de la terre, faisoit voir aussi, que la flèche C'*c* devoit être plus petite que T'*t*, & la flèche P'*p* plus petite encòre à cause de la grande latitude.

252. J' ai promené dans la fig. 19. le bord du papier HH' de manière, que le point *p* fût très-peu éloigné de la ligne T'P', puisque la ligne P'*p* devoit être très-petite, & presque couchée sur elle à cause de sa direction vers le soleil S. La ligne HH' mobile devoit couper les deux lignes TE, T''E'' en P, P'' de manière, que le point *p* restât toujours entr' eux, les deux points

G, G'

G, G' débordant au de-là de ces deux points par rapport au point p par les intervalles PG, P''G' proportionnels à l'œil aux segments pP, pP'', dont le premier devoit être tant-soit-peu plus grand, que le second, à cause du tT un peu plus grand que tT''. En mettant trois points L, L', L'' dans les rencontres des trois binaires des lignes TP, T''P''; TP, T'P'; T''P'', T'P', on voyoit bien que l'on ne pouvoit pas descendre avec le point p au-dessous du point L', parceque dans son voisinage on auroit eu la PP'' trop petite, tandis que l'approche de l'orbite de la terre doit augmenter la vîtesse de la comète, & la longueur de la corde de son mouvement, & la lenteur du mouvement observé n'en permettoit pas un éloignement considérable vers T'. On voyoit aussi aisément, que l'on ne pouvoit pas aller au-dessus du point L'', parceque le point P auroit dû tomber sur la ligne L'E', par la raison suivante. Comme le point p doit se trouver très-près de la seconde direction T'P', & entre les points P, P'', le premier de ces deux points auroit dû tomber sur la ligne LE', & le second sur la ligne L''E'', ce qui ajoutant la nécessité de faire rester ces deux points à des distances peu inégales du point p auroit exigé une telle position du bord du papier, qui auroit trop allongé la corde PP'', tandis que l'éloignement de l'orbite par rapport au soleil devoit rendre plus petite la vîtesse, & avec elle cette corde. Ainsi il falloit se renfermer dans l'intervalle L'L'' pour le point p, & il étoit bien aisé de voir, que l'on ne pouvoit s'approcher trop près de ces points: toutes réflexions faites je me suis fixé à une position, en prenant un nombre rond de parties de mon compas de proportion, dont 100 font la grande unité égale à la distance moyenne de la terre, & j'ai fait la distance T'P'1 de la première position de 55 parties de cette échelle $=$ 0,55 du rayon de l'orbite terrestre $= 1$. Je suis bien sûr, qu'en employant des réflexions semblables dans les cas particuliers avec le mouvement de la ligne HH' avec ses points G, p, G' on prendra toujours une position peu éloignée de la véritable.

253. Pour continuer l'opération j'ai fait selon le num. 78 sur la même feuille dans la fig. 20, qui répond à la fig. 9, l'angle

droit ATB avec les angles BTF, BTF', BTF'' égaux aux trois latitudes : cette figure-ci est tournée pour mieux l'adapter à la planche, & au cas présent. Par la troisième colonne de la première division de la table I ces latitudes sont 55°. 4'; 31°. 19'; 5°. 37', & leurs cordes 0,925; 0,540; 0,098, & il n'y a rien à ajouter ici aussi, où on peut employer pour la mesure des angles, qui y répondent, un rayon arbitraire de 100 parties. Je les ai prises du même compas de proportion pour faire avec ce rayon le quart de cercle A*b* du centre T, sur lequel j'ai pris les arcs *b*F, *b*F', *b*F'', qui mesurent ces latitudes.

254. J'ai pris sur mon échelle la distance 0,55 choisie (numér. 252), & je l'ai appliquée dans la fig. 19. sur la ligne T'E', en T'P'1, & dans la figure 20 sur la ligne TB en TP'1 : j'ai déterminé sur la ligne TF' le point C'1 de la perpendiculaire P'1C'1, qu'il n'est pas nécessaire de tirer : il suffit de placer une équerre sur la ligne TB avec l'angle en P'1, & la distance du point C'1 à la ligne TA, qui doit être égale à la ligne TP'1, en vérifie la justesse à l'aide de la même ouverture du compas, qui l'a portée en TP'1. Même sans l'équerre on détermine très-aisément le point C'1 en glissant une des deux pointes du compas le long de la ligne TA de manière, que la direction des deux pointes soit à l'œil parallèle à la ligne TB : une petite obliquité ne change pas sensiblement la distance : mais on la vérifie, & s'il faut, on la corrige. Ayant fixé une des deux pointes sur le point C'1, on fait tourner l'autre, & si celle-ci ne déborde pas, le point C' est juste. S'il déborde, on verra les deux points, dans lesquels elle y aborde, & on la fixera vers le milieu de cet intervalle, qui sera petit, pris à l'œil : alors l'autre pointe déterminera le point C'1 avec beaucoup plus de facilité, & d'exactitude, que le côté d'une équerre, dans la position de laquelle si l'on commet une petite erreur, on aura le point C'1 assez inexact. Lorsqu'on s'est une fois bien assuré de la perpendicularité de la ligne TA sur la TB, la méthode proposée ici détermine assez aisément, & avec toute la précision le point C'1 de la perpendiculaire P'1C'1. C'est la même pratique de compas, que j'ai indiqué ailleurs ci-

des-

dessus : je m'en sert habituellement pour cette espèce d'opérations, ce qui les abrège beaucoup, sur-tout quand il y a occasion de trouver sur une même ligne oblique plusieurs points semblables ; & j'en aurai beaucoup d'occasions dans les constructions suivantes.

255. J'ai pris avec le compas dans la fig. 19 la distance SP'1, & j'en ai trouvé dans mon échelle la valeur numérique 154, qui étoit juste sans aucune décimale sensible de reste : l'ayant porté dans la fig. 20 sur la TB en P'1S'1, j'ai pris avec le compas l'intervalle C'1S'1, & j'ai l'ai trouvé dans la même échelle de 158 aussi sans reste. On voit ces valeurs dans la première des trois divisions de la première colonne de la table II relativement au num. 80. Dans ses deux premières lignes on a les valeurs L, & v' avec ses logarithmes tirés de la seconde colonne de la dernière division de la table I. Dans la troisième ligne j'ai mis la valeur T'P', que nous avons choisie, & qui est la base de cette première position : dans la quatrième, & cinquième ligne on a les valeurs SP', SC' trouvées, & réduites à la grande unité, qui sont 1,540, & 1,580 : j'y ai mis le dernier o, qui est inutile dans les fractions décimales, seulement pour marquer plus expressement, que j'ai n'avois trouvé aucune fraction sensible à ajouter aux unités de mon échelle, qui sont les centièmes de la grande unité, ce que je ferai dans plusieurs autres occasions ci-après. A'côté de la valeur SP' il y a son logarithme, & à côté de celle de SC' le supplément du triple logarithme de sa valeur. La petite ligne mise au-dessus de la caractéristique $\bar{9}$ fait voir, que c'est un complément, ce qui est indiqué aussi par le premier point mis dans la valeur .3.SC', avant le nombre 3, tandis que le second point mis après fait voir, qu'il ne s'agit ici du triple de la valeur SC', mais de son cube relativement à ce que nous avons dit au num. 244 par rapport à la valeur .2.r'' de la seconde colonne de la dernière division de la table I.

256. Relativement au même num. 80, on trouve la réduction de la seconde longitude par le procédé suivant. La somme des trois nombres logarithmiques précédents donne dans la ligne 6 le logarithme de $P'p = \frac{SP' \times T't}{SC'^3} = \frac{SP' \times v'}{SC'^3}$, & dans les tables on le

le trouve $=$ 0,0127. J'ai pris cette petite quantité, qui dans mon échelle vaut à peu-près $1.\frac{1}{4}$, & je l'ai porté dans la fig. 19 en $P'p$ dans la direction P'S, pour y avoir la ligne tp, que j'ai trouvée dans mon échelle 0, 570. Dans ce cas, où l'angle ST'P' est très-obtus, on trouve la valeur tp plus aisément, & même plus exactement en la faisant $= T'P' + T't - P'p$: on a $T't = v'$ $=$ 0,0326 dans la colonne 2 de la dernière division de la table I : ainsi on aura $T't - P'p = 0,0326 - 0,0127 = 0,0199$, & $tp = 0,55 + 0,0199$, qui n'employant, que les premières trois chiffres décimales les seules sensibles dans la construction, se réduit à 0,570. On voit cette valeur dans la ligne 7 à côté de tp avec le complément de son logarithme. La somme de ce nombre logarithmique avec celui de la première ligne donne dans la ligne 8 le logarithme du sinus de l'angle 0°. 33', 9, & la somme de ce dernier logarithme, & de celui de la ligne 5 donne dans la ligne 9 le logarithme du sinus de l'angle 0°. 8', 6, qui ôté du précédent laisse dans la dernière ligne de cette partie la réduction $y = 0°. 25', 3$.

257. Ici il faut ôter cette réduction de la valeur $m = 32°. 8', 5$, qui se trouve dans la troisième colonne de la seconde division de la table I, & l'ajouter à la valeur $m' = 14°. 40', 8$; (j'ai réduit les secondes en dixièmes d'une minute), parceque dans ce cas nous avons une des trois conditions du num. 81 changée. SC' est plus grande que l'unité, & l'angle $P'T'p$ va contre l'ordre des signes, comme il est aisé de s'apercevoir dans la figure 19; mais le mouvement géocentrique de la comète se fait contre l'ordre des signes, comme on voit bien dans la seconde colonne de la première division de la table I. Ainsi les valeurs corrigées des m, m' sont 31°. 43', 2, & 15°. 6', 1, comme on les voit à la ligne 5, & 2 de la seconde division de cette première colonne de la table II.

258. Cette seconde division a dans la première ligne, conformément au num. 82, tp avec son logarithme, que l'on tire de la ligne 7 de la première division en prenant le complément de ce complément, qu'on y a déjà mis : dans la seconde on voit la valeur m' réduite avec le logarithme de son sinus : dans la troisiè-

me

me L' avec son logarithme tiré de la dernière colonne de la dernière division de la table I, d'où l'on tire aussi L'' avec son logarithme pour la ligne *6*. La ligne 5 contient la valeur *m* réduite avec le logarithme de son sinus. La quatrième ligne a la somme des trois nombres logarithmiques précédents, qui donne la valeur TP, & la dernière ligne a la somme des nombres logarithmiques des lignes 1, 5, *6*, qui donne la valeur T''P''.

259. J'ai pris selon le même num. 82 les deux TP, T''P'' dans l'échelle, & je les ai portées dans la fig. 19 sur les lignes TE, T''E'' en TP1, T''P''1, & dans la fig. 20 en TP1, TP''1. Les trois points P1, *p*1, P''1 dans la première de ces deux se sont trouvés en ligne droite, comme il convenoit. J'ai pris dans la même fig. 19 avec le compas les distances SP1, SP''1, & je les ai portées dans la fig. 20 sur la ligne TB en P1S1, P''1S''1. J'y ai déterminé sur les lignes TF, TF'' les points C1, C''1 des perpendiculaires, P1C1, P''1C''1, & ayant pris avec le compas les intervalles P1S1, P''1S''1, j'en ai trouvé les valeurs numériques sur l'échelle, qui sont les deux valeurs des deux SC, SC'' de la fig. 1 : & on les voit dans les deux premières lignes de la troisième division de cette première colonne. Dans la troisième on a leur somme, qui est la valeur *b*, avec son logarithme.

2*6*0. Pour la ligne 4 il falloit trouver la valeur *c*, qui est la corde CC'' de la fig. 1. Je l'ai trouvé selon le num. 83 en prenant avec le compas dans la fig. 19 la corde P1P''1 de la parabole projettée, & la portant dans la fig. 20 sur la droite TB en P1E1 : j'ai porté aussi la distance P''1C''1 en C1I vers P1, parceque les deux latitudes étant de la même dénomination il falloit la soustraire de la CP pour avoir PI égale à la C''I de la fig. 1 égale à la différence des deux PC, P''C'' (*). La distance I1E1 de

(*) Dans la fig. 1 la ligne PC est plus petite que la ligne P''C'', & dans la fig. 20 P1C1 plus grande que P''1C''1 : ainsi dans celle-là pour avoir la différence de ces deux lignes on a ôté dans celle-là la première de la seconde, & dans celle-ci la seconde de la première, & cette différence a été là C''I, ici P1I1 ; mais les deux côtés des triangles rectangles CIC'' de celle-là, & E1P1I1 de celle-ci étant égaux, l'hypothénuse CC'' de la première doit être égale à l'hypothénuse E1I1 de la seconde.

de la fig. 20 est la corde cherchée CC'' de la fig. 1 ; on voit à la ligne 4 sa valeur numérique tirée de l'échelle. Il y a avant cette valeur $2.c$, & après le double de son logarithme indiqué par le point mis après le nombre 2. Dans la ligne 5 il y a $4.c$ avec le double de ce double, qui est le $log.c^4$: dans la ligne 6 on voit 12 avec son logarithme. La ligne 7 a la somme du premier, & dernier de 4 nombres logarithmiques précédents, qui est le $log.12b$. Dans la ligne 8 on a la somme du premier, & second des cinq précédents, avec sa valeur numérique à côté, qui est la valeur de bc^2, & dans la 9 le reste de la soustraction, qu'on fait en ôtant le cinquième du troisième, ce qui donne la valeur $\frac{c^4}{12b}$, & on y voit cette valeur numérique à côté : dans la ligne 10 il y a la différence des deux valeurs numériques précédentes, qui devroit être égale à la valeur a, qu'on voit dans la ligne suivante, & qui est tirée de la dernière ligne de la première colonne de la dernière division de la table I. Comme il en est plus grand, on voit la différence g dans la dernière ligne avec le signe +, parceque c'est une erreur par excès donnée par la première position.

261. Comme la première position a donné une erreur par excès, qui n'est pas trop petite, mais aussi n'est pas trop grande; j'en ai changé la position selon le num. 84, en prenant la T'P' un peu plus petite = 0,50, comme on la voit à la troisième ligne de la seconde colonne : dans la première, & seconde ligne on y voit les mêmes logarithmes de L, & v' de la première colonne, parceque on en doit faire le même usage pour cette seconde position. L'opération dans la seconde colonne est tout à fait la même, que dans la première. On a pris sur l'échelle la longueur 0,50, & on l'a portée dans la fig. 19 en T'P'2, dans la fig. 20 en TP'2 : on a fait tout le reste de l'opération en trouvant de la même manière dans la fig. 20 les points P'2, C'2, & $p2$ dans la 19, d'où l'on a tiré la seconde réduction des valeurs m, m', & de-là les valeurs TP, T''P'', que l'on a porté dans la fig. 19 en TP2, T''P''2, dans la fig. 20 en TP2, TP''2 dans

la-

laquelle on a trouvé de la même manière les points P2, P''2, C2, C''2, E''2, & après le même calcul on a trouvé la valeur de la formule, qui est venue plus petite, que la valeur *a* répétée dans l'avant-dernière ligne: dans la dernière on a mis la différence négative, qui est la nouvelle erreur g' donnée par la seconde fausse position.

262. On voit bien par la contrarieté des signes des deux différences, que la vraie valeur de la ligne T'P' doit être entre les 0,55, & 0,50, & la vraie valeur des lignes TP, T''P'' entre les nombres, qu'on a trouvés aux lignes 4, & 7 des secondes divisions des deux colonnes.

263. Si la différence des deux positions étoit plus considérable, ou les deux erreurs du même signe, on songeroit à corriger seulement la distance T'P', pour employer une troisième fausse position: mais comme il ne s'agit, que de la différence de cinq parties de l'échelle, & les signes des deux erreurs sont contraires; on voit bien, que la correction sera bien petite de manière, que le doute de son exactitude ne pourra tomber, que sur des particules insensibles à la construction. C'est pourquoi j'ai cherché ici les corrections des toutes les trois distances raccourcies. La seconde T'P' n'est d'aucun usage pour la continuation des opérations par construction, mais je l'ai corrigée ici avec les deux autres, pour m'en servir de base dans la méthode du calcul trigonométrique, & voir si les deux autres données par cette méthode moins inexacte s'accordent assez avec celle qu'on a trouvée ici d'après la construction mêlée du petit calcul numérique. Pour trouver ces corrections il faut prendre la différence des deux valeurs, que nous avons prises pour la T'P', & des deux, que nous avons trouvées pour les TP, T''P'' dans les deux premières positions, qui seront les valeurs h', h, h'' de la formule $\frac{g'h}{g-g'}$ du numéro 85, à ajouter à la valeur de ces trois distances, qu'on a dans la seconde position. Nous appellerons *d*.T'P', *d*.TP, *d*.T''P'' la valeur de cette formule appliquée à ces trois distances.

264. On a ces valeurs, & tout ce calcul dans la troisième colonne de la table II. Dans sa première ligne on a g avec sa valeur tirée de la dernière ligne de la première colonne, dans la seconde g' tirée de la dernière de la seconde, dans la troisième la valeur $g-g'$, qui à cause de g' négative est la somme des deux nombres précédents : on a à côté de la seconde son logarithme, à côté de la troisième son complément logarithmique : dans la quatrième on a la somme des deux nombres logarithmiques précédents, qui devient le logarithme de $\frac{g'}{g-g'}$. Dans les trois suivantes on a les valeurs h', h, h'', qui sont tirées des valeurs T'P', TP, T''P'', des deux colonnes précédentes en prenant leurs différences : on y a mis le signe négatif, parceque la seconde position a donné les nombres plus petits : à côté de chacune il y a son logarithme. Dans les trois lignes suivantes on a la somme de chacun des trois logarithmes précédents avec celui de la ligne 4. On voit bien, que ces trois sont les logarithmes des trois valeurs de la formule $\frac{g'h}{g-g'}$ pour les trois valeurs d.T'P', d.TP, d.T''P'', qu'on doit ajouter aux trois valeurs T'P', TP, T''P'' de la seconde colonne, à cause des signes des g', & h négatifs, du $g-g'$ positif, pour avoir leurs valeurs corrigées : on les voit dans les trois dernières lignes de cette table.

§. XXII.

Application des distances trouvées à la détermination des éléments des l'orbite par construction.

265. CETTE application est relative au §. 9. On pouvoit continuer l'opération sur la même figure, & je l'avois fait : mais comme les deux fausses positions multiplient les lignes, & les points à marquer par des lettres, il y auroit eu de la confusion dans la figure imprimée : j'ai refait dans les fig. 21, & 22 les deux cercles de la fig. 19, & ses lignes STQe, ST''Q''e'', TE, T''E'', & les lignes TB, TA, TF, TF' de la fig. 20. La planche

che si l'on y gravoit la figure entière, comme je m'étoit proposé, quand je l'ai dessinée, deviendroit trop longue à cause de la grandeur de la distance périhélie, qu'on trouvoit ici, qui dans d'autres comètes ordinairement est beaucoup plus petite, ce qui a éloigné la directrice, & m'a obligé à choisir, comme au num. 247 pour la fig. 19, le zero de l'écliptique de manière à faire tomber l'axe sur la longueur de la page. Comme on a besoin de transporter des lignes d'une de ces deux figures à l'autre, on fera toujours bien de les réunir dans la même feuille de gros papier, sur laquelle on fait la construction, & j'ai profité ici pour placer la fig. 22 du grand espace, que l'on voyoit devoir rester vide entre la directrice, & la parabole. On peut refaire dans les figures 21, & 22 la même construction pour avoir ces lignes, qu'on doit employer pour trouver par construction les éléments de l'orbite, ou on peut marquer en pressant avec la pointe d'un compas les points S, *s*, T, T'', E, E'', & la division de l'écliptique de deux en deux signes de la fig. 19, comme aussi les points A, T, *b*, F, F'' de la fig. 20, sur le papier destiné pour les 21, & 22, tout le reste devenant inutile pour continuer l'opération: on peut aussi se passer des rayons ST, ST'', & de l'alongement du rayon T*b* dans la fig. 22 en alongeant la TA, dont on aura besoin ci-après. Quand on ne prévoit pas à quoi la construction doit aboutir, il suffit de prendre une grande feuille de carton mince, & prolonger les lignes à mesure, qu'on en a besoin, ou le tirer d'abord bien longues par la seule pression d'une pointe de compas, sans les noircir.

266. J'ai commencé selon le num. *86* par les lignes TP, T''P'', que j'ai pris sur l'échelle de 0,410, & 0,725, la quatrième chiffre des nombres, qu'on a trouvé dans la dernière colonne de la table II, n'étant sensible dans la construction, tandis qu'on ne peut prendre la troisième, que par estime, ou dans une échelle du rayon de l'orbite terrestre divisée en 1000 parties: on ne trouve aucune différence sensible en ajoutant à cette troisième chiffre, ou en ôtant une unité, si ce rayon n'est pas trop excessivement grand, ce qui rendroit la figure immense, & trop incommode. J'ai porté ces intervalles dans la fig. 21 sur les lignes TE, $T''E''$ en TP, $T''P''$, & dans la fig. 22 sur la ligne T*b*, en TP, TP''. J'ai trouvé dans celle-ci les points C, C'' sur les lignes TF, TF'', comme au num. 254. J'ai tiré la perpendiculaire CP, & j'ai porté l'intervalle $P''C''$ sur cette ligne en CI vers P, à cause que les deux latitudes étoient de la même dénomination, ce qui demande dans la fig. 1 pour la $C''I$ la différence des deux CP, $C''P''$.

267. J'ai pris dans la fig. 21 la distance PP'', & je l'ai portée dans la fig. 22 sur la PT en PE : ayant tiré la IE, j'ai tracé sa parallèle CR, ce qui m'a donné sur la même PT la PR, que j'ai transportée dans la fig. 21 en PR sur la ligne PP'' prolongée du côté de P'', à cause que les deux PC, $P''C''$ de la fig. 22 étoient de la même direction, & la seconde plus petite que la première. Par S & R j'ai tiré la ligne des nœuds, qui a rencontré l'écliptique dans deux points. Comme les deux latitudes étoient boréales, & la dernière plus petite que la première, on voit bien, que la comète en continuant son chemin a passé depuis de l'hémisphère boréal à l'austral : ainsi le nœud, qui se rencontre depuis S vers R, doit être le descendant : j'y ai ajouté un accent, en laissant N simple sans accent du côté opposé pour le nœud ascendant. Pour déterminer la position de ces nœuds sur l'écliptique en signes, degrés, & minutes, j'ai pris sur l'échelle la distance du point o de l'écliptique au rayon SN', qui est le sinus de l'arc oN'. Je l'ai estimée d'une partie & $\frac{7}{10}$. Ainsi sa valeur est 0,017 : pour la réduire au rayon de l'écliptique, qui est de 120 parties, pris pour unité, il faut ôter $\frac{1}{6}$ de cette valeur, qui est 0,003, le reste étant 0,014, qui donne cet arc $= 0°. 48'$. Ainsi on a la longitude du nœud $N = 6^s. 0°. 48'$.

168. Dans la construction je n'ai jamais égard aux secondes, que pour prendre une minute de plus, quand il y en a au de-là de 30. J'ai pris encore la distance du point 10 de l'écliptique à la même ligne des nœuds, que j'ai estimée 1,048 : en ôtant 0,175, qui en est $\frac{1}{6}$, on a 0,873, ce qui donne l'arc $10N'$ $= 60°. 49'$, & $oN' = 0°. 49'$, une seule minute de plus qu'au-

pa-

paravant : c'est un hazard, parcequ'on pouvoit trouver une différence plus grande dans un cercle si petit : un dixième d'une partie de l'échelle, ou une précision dans le sixième à soustraire poussée à la chiffre suivante, que j'ai négligée, comme insensible dans la construction, donneroit une différence de quelques minutes dans la valeur de l'arc.

269. Pour trouver l'inclinaison de l'orbite, j'ai pris selon le num. 89 dans la fig. 21 la distance PD du point P à la ligne SN', & l'ayant portée dans la fig. 22 sur la ligne PT en PD, j'ai cherché l'angle PDC, qui est l'inclinaison de l'orbite. J'ai porté aussi la distance P''D'' de la fig. 21 sur la DT de la fig. 22, mais je n'ai pas fait usage de l'angle P''D''C'' pour en tirer l'inclinaison, à cause de la petitesse de ses côtés. Pour trouver la valeur de l'angle PDC de la fig. 22 j'ai appliqué la ligne CP de cette dernière figure aux nombres 200 de mon compas de proportion, & j'y ai trouvé la valeur de la ligne PD de $24\frac{1}{2}$: ainsi la co-tangente de l'angle cherché reste 0,1225, qui donne l'inclinaison $= 83^{\circ}.1'$.

270. Pour trouver la distance périhélie, & le lieu du périhélie dans l'écliptique, j'ai commencé par déterminer la directrice selon le num. 93. Ayant tiré dans la fig. 21 par P, P'' des lignes perpendiculaires à la ligne SN', qui en est rencontrée en D, D'', j'ai appliqué sur ces lignes les DC, D''C'' de la fig. 22, toutes les deux vers le même côté à cause de la conformité des deux latitudes de la même dénomination. Ayant pris pour centres les points C, C'' avec les intervalles CS, C''S, j'ai tracé deux arcs de cercle en F, & F' (*), & en appliquant la règle de manière à les toucher tous les deux, j'ai tracé la directrice, sur laquelle j'ai tiré la perpendiculaire SX, que j'ai coupée par le milieu en V, & j'ai marqué sa rencontre avec l'écliptique en x. Le point V est le sommet de la parabole, SV la distance périhélie, x la longitude du périhélie dans l'orbite. Je n'ai pas cherché sa longitu-

(*) Les points F, F' avec la directrice ont été rapproché aux deux cercles dans la planche pour la raccourcir.

gitude réduite à l' écliptique, qui n' est d' aucun usage pour les opérations suivantes. J' ai trouvé dans mon échelle la distance périhélie SV = 1,430.

271. Pour la longitude du périhélie j' ai pris la distance du point 10 de l' écliptique au rayon Sx, que j' ai trouvé de $35\frac{1}{2}$ = 0,355 : en ôtant un sixième = 0,059, on a le sinus de cet arc = 0,296, qui reste = 17°. 13'. Ainsi on a le lieu du périhélie dans l' orbite = 10^s. 17°. 13'.

272. Pour trouver le temps de l' arrivée au périhélie selon le num. 96, j' ai tiré la ligne BB', qui a coupé la distance périhélie SV perpendiculairement par le milieu en A : à l' aide des intersections de deux couples d' arcs de cercle tracés sans encre avec les centres S, C, & un même rayon arbitraire, j' ai trouvé dans cette ligne le point O, qui est le centre du cercle, qui passe par les points S, V, C, & de la même manière j' ai trouvé le centre O' du cercle, qui passe par les points S, V, C''. J' ai appliqué l' intervalle OO' dans le compas de proportion au nombre des jours du temps total multiplié par 6, chaque partie valant 4 heures. La différence du premier temps de la première colonne de la seconde division de la table I au troisième est de 30 jours moins une heure. En le multipliant par 12 selon ce que j' ai proposé dans ce numéro pour faire valoir chaque partie 2 heures, on auroit 360, ce qui passe la force de la division des compas de proportion ordinaires : pour cela je me suis borné à la multiplication par 6, qui donne 180. J' y ai trouvé l' intervalle AO = 149, qui divisé par 6 donne 24^j, avec 5 de reste, c' est-à-dire 20^h. En comptant depuis le commencement d' Août jusqu' à 9^j. 8^h de Septembre, on a 40^j. 8^h, dont on doit ôter ce 24^j. 20^h, & on a pour le temps du passage par le périhélie Août 15^j. 12^h.

273. Cette méthode seroit suffisante ici, où l' intervalle OO' n' est pas trop petit, & même il est plus grand que l' intervalle AO, qu' on doit convertir en temps pour avoir le passage par le périhélie. Si l' on veut employer la méthode du num. 98, qu' on sera obligé d' employer toujours, quand l' intervalle du

temps

temps entre les observations 1, & 3 sera beaucoup plus court; on doit prendre la valeur de AO sur la même échelle, qui a pour unité la distance moyenne de la terre au soleil, sur laquelle on a trouvé la distance périhélie = 1,430. J'ai trouvé cette valeur = 0,190, dont le logarithme est 9,278754. Ce logarithme ajouté à la moitié du logarithme de 1,430, qui est = 0,077668, & au logarithme constant 2,039872 donne le logarithme du nombre des jours, qui répond à l'intervalle AO. On a ce logarithme 1,396294, dont le nombre est — 24,90 = $24^j. 22^h$, qui diffère de la détermination précédente de 2 heures : c'est une différence insensible dans cette construction, où 19 parties répondant à $24^j. 22^h = 598^h$, une seule répond à 31^h, & une seule dixième a 3 heures. En prenant un milieu entre les deux, nous aurons ici $24^j. 21^h$, & pour le temps de l'arrivée au périhélie Août $15^j. 11^h$.

274. On voit bien, que la construction ne peut pas donner ici le temps de l'arrivée au périhélie, que avec une approximation, qui laisse le doute de plusieurs heures. De même on ne peut pas en tirer les autres éléments, que nous en avons tirés, que jusqu'à un certain point d'approximation. Mais, comme on verra après, cette approximation, qui se trouve avec tant de facilité, suffit bien pour reconnoître la comète, voir si elle est nouvelle, ou une de celles, qu'on a déjà observées autrefois, & diriger l'Astronome pour la chercher dans le ciel, quand après les premières observations les nuages l'auront cachée pour un temps considérable. On verra cet avantage dans le § suivant, où nous appliquerons la même construction à la détermination du lieu de la comète pour quelqu'autre jour, dans lequel elle a été observée.

275. On a cette méthode dans le § 10; mais auparavant nous déterminerons le nombre des jours, que cette comète doit avoir employé pour aller depuis la périhélie jusqu'à l'anomalie de 90°, ce qui sert à avoir pour la division de la ligne BB' en jours une échelle plus exacte que celle, qui pour un temps considérable, comme de plusieurs mois, pourroit résulter de la seule longueur

OO'

OO' comparée au temps écoulé entre la première, & la troisième observation. Cette détermination appartient au num. 99, qui est le dernier du §. 9. Il faut faire la somme des deux derniers des trois logarithmes, dont nous avons pris la somme au numér. 273, c'est-à-dire 0,077668, & 2,039872 avec le logarithme entier de la distance périhélie 1,430, qui est 0,155336. On aura 2,272876, qui répond au nombre 187,5.

§. XXIII.

Application de la même construction à la détermination du lieu de la comète pour le temps de deux observations éloignées.

276. J'AI choisi pour cette comparaison une des premières, & une autre des dernières observations que j'ai eu de cette comète, & j'en ai tiré les temps moyens, les longitudes, & latitudes, que j'ai mis dans la petite table suivante avec la longitude héliocentrique de la terre, mais en employant ces données j'ai négligé les secondes, ou je les ai prises pour une minute, quand elles dépassoient 30. Voici cette table

T. M.	long. ☄	lat. ☄	long. ♁
Août. 23.10. 1.21	56.49.42	60.31.55.B	11.0.42.54
Oct. 25. 7.23.34	331.38.32	11.33.13.A	1.2.27.53

277. J'ai commencé relativement au §. 10 par tracer la parabole appliquée MVM' à l'aide du foyer S, & de la directrice FF' selon la méthode exposée au num. 50, & 51. Pour éviter la multiplicité des accents j'ai employé dans la fig. 21 les lettres q, t, o, c, p à la place des Q''', T''', O''', C''', P''' de la fig. 4 : pour donner deux exemples il auroit fallu employer quatre accents. L'opération est relative au §. 11 num. 100. Pour le premier exemple j'ai pris dans l'écliptique depuis 10 jusqu'à 9 l'arc $= 30^{\circ}.43'$, qui répond à la longitude héliocentrique de la terre en y mettant q,

& a-

& ayant appliqué une règle en S, & q j'ai trouvé le point t lieu de la terre dans son orbite. J'ai pris dans la ligne BB' le segment Ao = 48, qui répond à $7^j.23^h$ temps écoulé depuis le 15 Août 11^h, qui est le temps de l'arrivée au périhélie, jusqu'à $23^j.10^h$ temps de la première observation en tirant cet intervalle de l'échelle formée après l'intervalle OO' = 180 (numér. 272). Avec le centre o, le rayon oV j'ai trouvé le point c dans la parabole, & en portant sur la ligne N'S en Dd la distance du point c à la ligne DC prolongée, j'ai déterminé le point d, qui seroit déterminé par une ligne cd perpendiculaire à la même N'S. Ayant tiré dans la fig. 22 le rayon TG parallèle à la DC, j'y ai porté en TH la distance cd de la fig. 21 en appliquant dans celle-ci une règle en c, & d. J'ai porté en dp la distance HM du point H de la fig. 22 à la ligne TA, ce qui m'a donné le point p, qui est la projection du point c. Ayant appliqué la règle en t & p j'ai pris la distance perpendiculaire du point S à cette règle, & promenant le compas selon la direction tp, j'ai trouvé dans l'écliptique le point Y, qui en est également éloigné de manière que le rayon SY doit être parallèle à la même ligne. Le point Y détermine la longitude géocentrique de la comète pour ce temps-là.

278. Pour la déterminer j'ai porté sur mon échelle la distance de ce point au point 2 de l'écliptique, & l'ayant trouvée un peu plus petite, que de 7 parties, je l'ai jugé de 6,8, ainsi la corde de ce petit arc est = 0,068 : en ôtant un sixième = 0,0113 pour la réduire au rayon de l'écliptique, on a 0,0567, qui pris pour le sinus de ce petit arc le donne = 3°. 15'. En l'ôtant de 2^s = 60 on a la longitude de 56°. 45', qui diffère de l'observée moins, que de 5', tandis qu'une seule partie de l'échelle dans la position du point Y répondroit ici à 29, puisque 0,78 par le même procédé donneroit 3°. 44'. Pour la latitude, sa tangente est la distance perpendiculaire du point H (fig. 22) de la ligne TB, au rayon tp de la fig. 21. En mettant cette seconde ligne dans le compas de proportion à 100, j'ai trouvé la première $176\frac{1}{2}$ de ces particules = 1,765 de la grande unité, ce qui

donne la latitude $=$ *60°. 28'* avec la différence moindre de 4'.

279. De la même manière j' ai trouvé pour le second de ces deux temps dans la fig. 21 les points *q'*, *t'*, *o'*, *c'*, *d'*, dans la 22 H', dans la 21 *p'*, Y', ce qui m' a donné la corde de l' arc depuis 10 jusqu'à ce dernier point *65,6* dans l'échelle $=$ 0,*656*, & en ôtant le sixième, $=$ 0,547, dont la moitié $=$ 0,2735 est le sinus de 15°. 52': ainsi l'arc depuis 10ˢ $=$ 300° jusqu' au point Y' qui est son double, reste $=$ 31°. 44', & la longitude $=$ 331°. 44', avec une différence moindre de *6'*, tandis qu' ici une partie de mon échelle en vaut 30' puisque la corde de *666* donne par le même procédé 31°. 14'. Pour la latitude ayant appliqué la *t'd'* de la fig. 21 à 200 dans le compas de proportion, j' y ai jugé la distance du point H' de la fig. 22 à la ligne T*b* de 41,0: ainsi la tangente cherchée est $\frac{41,0}{200} = 0,205$, ce qui donne 11°. 35' pour la latitude cherchée avec la différence de 2' seulement de l' observée, qu' on a dans la petite table précédente $=$ 11°. 33', ce qui est un hazard, parcequ' on ne peut pas éviter, que par hazard l' erreur beaucoup plus grande dans plusieurs points qu' il faut marquer, & ligne, qu' on est obligé de transporter, & évaluer. La construction donne beaucoup mieux les éléments d' après les longitudes, & latitudes observées, que celles-ci, qu' on doit observer, d' après les éléments, comme on pourra s' assurer en réfléchissant sur tout le procédé, & on ne peut pas avoir par ce moyen ces mêmes avec quelque précision, au moins si l'on ne fait les figures beaucoup plus grandes. Mais on voit bien, que la construction aussi donne des valeurs assez approchantes pour trouver immédiatement à l'aide d' une machine parallactique la comète, quand on l' a perdue pour un temps considérable à cause des nuages. A' cet effet il faut changer les longitudes, & latitudes, que l' on trouve immédiatement, en ascensions droites, & déclinaisons, qui sont plus commodes pour cet objet, sur-tout quand on a une machine parallactique. Nous parlerons dans le paragraphe suivant de la manière de faire ce changement aussi à l' aide d' une construction graphique.

§. XXIV.

§. XXIV.

Application de la construction aux méthodes proposées pour voir toute la suite des phénomènes d' un coup d' œil .

280. On a proposé ces méthodes au même §. 11 . Il faut pour cela diviser la ligne BB' de la fig. 21 , la parabole , l' écliptique , & l' orbite de la terre relativement aux mois de l' apparition de la comète . J' ai fait dans la même figure 21 cette division en déterminant les points de ces quatre lignes pour les 10, 20, 30 , ou 31 de chaque mois depuis le 31 Mai jusqu' à la fin de Novembre de la même manière , que j' ai fait dans le § précédent pour les deux temps , que j' y ai choisis.

281. Pour la ligne BB' c' est bien aisé . Il faut trouver le point, qui répond à la fin du mois de Juillet, par le moyen du segment , qui répond à 15 jours 15^h temps écoulé depuis cette fin, jusqu' à l' arrivée au périhélie : on le prend sur la même échelle comme au num. 277 , & on le porte en arrière contre la direction du mouvement de la comète . Alors on porte en avant , & en arrière les segments pour les 10, ou 11 jours pris sur la même échelle . A' l' aide des points de cette ligne on divise la parabole , en y fixant une pointe de compas , & portant l' autre jusqu' au sommet V , pour trouver le rayon , qui donne le point cherché de la parabole . J' ai pris dans la connoissance des temps les longitudes de la terre pour les mêmes jours , en ajoutant 6 signes à celles du soleil , ce qui a donné la division de l' écliptique . La règle appliquée à son centre S , & aux points de cette division a donné celle de l' orbite de la terre .

282. Pour chacun de ces temps j' ai trouvé la longitude , & la latitude tout-à-fait comme dans les § précédents . J' ai déterminé aussi par la méthode du num. 108 les distances au soleil , & à la terre : il y restoit le changement de la longitude , & latitude en ascension droite , & déclinaison pour faire les figures indiquées au num. 118, 119, 120 , qui mettent sous les yeux la suite des phénomènes . Comme pour cet objet on n' a pas besoin d' une grande exactitude, on peut se servir d' un globe, dans lequel ayant mar-

qué la position de la comète par sa longitude, & latitude, on en tire aisément l' ascension droite, & la déclinaison en portant ce point au méridien. Mais comme on n' a pas toujours à la main un globe assez grand pour y reconnoître un dixième, ou un sixième de degré, & le calcul trigonométrique ne laisse pas d' avoir sa longueur, on peut se servir de la méthode, que j' ai donnée l' an 1737 pour résoudre tous les problêmes de la Trigonométrie sphérique par une construction graphique plane, ce qui est incomparablement plus utile dans ce cas-ci, dans lequel on a un grand nombre de changements à faire de cette espèce. On a imprimé dans le temps un très-petit nombre d' exemplaires de ce Memoire latin à l' occasion d' une thèse annuelle, & on en a perdu une grande partie de manière, que c' est un ouvrage inconnu : pour cela je donnerai dans ce même volume cette méthode en françois immédiatement après cet Opuscule dans un Mémoire, qui sera le premier de ceux, que j' appelle Mémoires correlatifs. En attendant je donnerai ici son application à cet objet.

283. Dans la fig. 23. P, P' sont les pôles de l'équateur ADB, & de l' écliptique AEB: PP'DE est le colure des solstices, A, E, B étant les premiers points du bélier, de l'écrevisse, & de la balance : F le lieu de la comète dans les cas, dans lesquels la longitude, & l' ascension droite sont moindres de 90°, & la latitude, & la déclinaison sont boréales, comme on en a ici un bon nombre au commencement. Dans le triangle PP'F on aura l' angle en P', qui est le complément de l' angle AP'H, c' est-à-dire de la longitude AH, le côté P'F, qui est le complément de la latitude HF, & le côté PP', qui est la mesure de l' inclinaison de l' écliptique = 23°. 28', qui sera commune à tous les cas. Par ces trois données on trouvera le côté PF, qui est le complément de la déclinaison GF, & l' angle P'PF supplément de FPE mesuré par DG complément de l' ascension droite AG. Ainsi la solution du problême se réduit au cas, dans lequel deux côtés avec l' angle intercepté étant donnés, on cherche le troisième côté, & un des deux autres angles. Dans tous les autres cas le problême se réduit aisément au même triangle FP'P, dans le-

lequel le côté PP' est toujours le même, le côté $P'F = 90^\circ \mp$ *lat.* le côté $PF = 90^\circ \mp$ *decl.*, l'angle P' est donné par la longitude, & l'angle en P donne l'ascension droite.

284. Or à la place du calcul trigonométrique, qui est toujours long, & ennuyeux, on peut résoudre ce triangle par une construction graphique, qui sera suffisamment exacte ici, où on cherche un à-peu-près, & y viendra beaucoup plus à propos à cause du grand nombre de longitudes, & latitudes, qu' on doit changer en ascensions droites, & déclinaisons, pour voir d' un coup d' œil les positions de la comète, que l' on trouve aisément avec une machine parallactique, quand on a les ascensions droites, & les déclinaisons : ce qui rend encore plus utile la construction, c' est l' arc PP', qui est constamment le même pour toutes les positions. Voici ma construction pour ce cas, dans lequel on a deux côtés avec l' angle intercepté, & on cherche le troisième côté, & un des deux autres angles.

285. Ayant décrit un cercle du centre C (fig. 24) avec un rayon quelconque, je prend l' arc AB égal au côté intercepté entre l' angle donné, & le cherché, BD égal à l' autre côté donné : je tire les deux diamètres BE, DF avec la corde AG perpendiculaire au premier, qui la coupera par le milieu en H. Avec le centre H & le rayon HA je fais le demi-cercle GIA, sur lequel je prend l'arc GI mesure de l'angle donné, & ayant tiré IK perpendiculaire au diamètre AG, je tire par K la corde LM perpendiculaire au diamètre DF, mettant L dans le demi-cercle DEF, & M dans le DBF. L'arc DL sera égal au troisième côté. Ayant pris dans le premier cercle l' arc BO = BM, & tiré la corde LO, qui rencontre le diamètre AG en P, j'élève PQ perpendiculaire au même diamètre : GQ sera la mesure de l' angle cherché.

286. Je donnerai ici la démonstration de ce cas particulier pour ne pas la tirer de ce premier Mémoire correlatif, où on aura la théorie générale pour tous les cas. Pour ce qui appartient au côté, on en voit très-aisément la démonstration. Si l' on conçoit le demi-cerle ARG érigé perpendiculairement sur le plan du premier cercle, on voit bien, qu' il restera sur la surface

face d' un hémisphère, qui a ce cercle pour base : son pôle sera en B, & la ligne KI sera perpendiculaire au plan de ce même cercle. Les arcs BA, DL tournés autour des diamètres BE, DF seront toujours sur la même surface les demi-cordes HA, NL décrivant deux plans perpendiculaires au même plan : ainsi les points A, & L arriveront au point I, & y formeront un triangle, qui aura les trois côtés BA, BD, DL, la mesure de l' angle en B étant l'arc GI. Ce triangle ayant les côtés BA, BD avec l'angle en B égaux aux donnés, aura le troisième côté DL égal au cherché. Pour l' autre angle aussi la démonstration n' est pas compliquée, comme on verra dans ce Mémoire sur cet objet ajouté à cet ouvrage. On y verra aussi, qu' ayant pris Kn = KN sur la KG prolongée, s' il le faut, & ayant tiré la In, on aura le troisième angle, dont nous n' avons pas besoin ici, qui sera égal à l' angle InK, ou à son supplément, selon que le point K se trouvera sur la demi-corde NM, ou sur la NL. On trouvera dans le même Mémoire la solution de tous les cas de la Trigonométrie sphérique tirée d'une seule figure (quoique les lettres n' y seront pas les mêmes, qu' ici) en changeant seulement les cherchées en données, & *viceversa*.

287. Quand il s' agit de la construction d' un seul triangle; on fera bien de prendre pour BA le côté le plus grand, pour avoir la mesure des angles dans un demi-cercle plus grand : mais ici, où il y aura un grand nombre de triangles, qui ont le même côté PP' de la fig. 23 commun, tandis que l' autre PF varie, on fera mieux de prendre pour BA de la fig. 24 ce même côté, qui donnera toujours le même demi-cercle : il ne sera pas nécessaire de tirer les lignes IK, LM, LO, PQ. En employant un compas de proportion, & la table des sinus, on pourra exécuter aisément la construction de la manière suivante.

288. On prendra pour le rayon CB 100 parties du même compas, & le double sinus de la moitié des arcs BA, BD donnera sur la même échelle les cordes de ces arcs : avec la première on trouvera les points A, & G, & on tirera la corde AG avec les deux diamètres BE, DF. La rencontre du premier avec cette

corde

corde donnera le point H. Sans tracer le demi-cercle on appliquera une fois pour toujours la demi-corde HA sur le compas de proportion aux numéros 100, & ayant pris sur la table des sinus le co-sinus de l'angle donné en centièmes de rayon, on trouvera sur le même compas la ligne HK, que l'on appliquera vers G, ou vers A, selon que l'angle donné sera aigu, ou obtus. On fera glisser le long du diamètre DF un côté d'une équerre, que l'on peut faire de papier, jusqu'à ce, que l'autre côté passe par K: ce même côté donnera alors le point M, ou L, selon que le point K sera tombé par rapport au diamètre DF vers B, ou vers E. La règle appliquée à ce point, & au point K donnera l'autre extrémité de cette corde. On prendra BO = BM, & la règle appliquée en L, & O donnera le point P. On aura sur la première échelle longitudinale du compas de proportion le sinus LN, ou la corde LD du côté cherché, & sur l'échelle des transversales le co-sinus HP de l'angle cherché, qu'on prendra aigu, ou obtus, selon que le point P sera tombé dans le rayon HG, ou HA. Ainsi sans tracer le demi-cercle, ni aucune autre ligne, que les diamètres BE, DF, & la corde AG, on obtiendra le côté, & l'angle cherché, à l'aide des deux échelles qui seront les mêmes pour toutes le positions trouvées en longitude, & latitude.

289. Il y a des cas dans lesquels on ne pourra pas employer cette construction avec succès : cela arrive, quand les deux côtés étant peu différents entr'eux, l'angle donné n'est pas assez grand, & quand HP diffère peu du rayon HA, ou HG. Dans le premier cas les points D, G, K, L, M se trouvent trop près l'un de l'autre, ce qui rend l'angle de la ligne LPO avec la ligne GA très-petit, & par-là la position du point P trop incertaine: le voisinage des points P, A rend encore plus incertaine la quantité de l'arc GQ, ce qui retombe au second des deux cas. Comme les sinus varient très-peu, quand l'arc approche du quart de cercle, une erreur très-petite dans la position du point P en tire après elle une bien grande dans l'arc AQ, quand HP s'approche du rayon HA, ou HB.

290. J'avois commencé l'application de ma méthode du premier point,

point, qu'on voit dans la parabole de la fig. 21, qui répond au 31 Mai, & j'avois déterminé pour tous les jours, qu'on y voit marqués, la distance de la comète au soleil, & à la terre, avec sa longitude, & latitude géocentrique. Les deux premières donnent l'idée de la force de sa lumière, qui dépend de ces distances, & les deux dernières font, qu'on puisse marquer aisément sur un globe céleste sa route apparente parmi les constellations & ces mêmes objets trouvés pour tous ces jours devoient servir pour la délinéation des courbes énoncés ci-dessus. Pour y ajouter aussi les courbes, qui répondent aux ascensions droites, & aux déclinaisons, j'avois proposé la méthode, que j'ai exposé jusqu'ici pour tirer aussi par la construction graphique ces deux objets de la longitude, & latitude déjà trouvées. Mais dans le premier commencement de cette opération, je me suis aperçu, que la méthode de ma construction plane des triangles sphérique pour plusieurs jours dans cette comète tomboit dans le cas énoncé dans le numéro précédent, où elle ne peut pas être employée, & il faut recourir à d'autres méthodes, comme au calcul trigonométrique, ou à l'usage du globe, par lequel on tire l'ascension droite, & la déclinaison de la longitude, & latitude: ainsi je me suis déterminé à donner seulement un exemple du résultat de la même opération pour la huitième de ces journées, qui tombe sur le 10 du mois d'Août, où déjà ce procédé commence à être moins fautif, & ajouter des réflexions sur la même méthode, qui pourra servir dans un très-grand nombre d'autres cas.

291. Pour ce jour-là j'avois trouvé la longitude $= 69^{\circ}.\ 4'$, la latitude $= 60^{\circ}.40'$, en employant l'inclinaison de l'écliptique $=23^{\circ}.\ 28'$, le calcul trigonométrique m'a donné l'ascension droite $= 22^{\circ}.\ 28'$, la déclinaison $= 79^{\circ}.\ 5'$, tandis que j'ai tiré d'une construction pour la première $22^{\circ}.\ 20'$, & pour la seconde $78^{\circ}.\ 59'$, avec la différence d'un nombre de minutes mediocre: mais comme j'y ai trouvé les points D,G,K de la fig. 24 encore trop peu éloignés entr'eux, & l'angle LPK trop petit, en répétant plusieurs fois la construction, j'ai trouvé des différences assez considérables dans la détermination de l'ascension droite.

292. Pour-

292. Pourtant si l'on veut s' exercer dans la construction, & en employer depuis le résultat pour la fig. 25, après avoir fait le calcul trigonométrique pour les huit premiers jours on peut employer la construction pour le reste : il y aura des erreurs dans les résultats, mais ils ne seront pas sensibles dans la délinéation de la courbe : on pourra prendre 100 parties longitudinales pour le rayon du grand cercle : on aura pour le rayon HG du demi-cercle 39,8 de ces parties : ayant appliqué cet intervalle dans l'ouverture du même compas de 100 en 100, les distances transversales donneront l'échelle pour ce rayon. Il sera un peu petit, mais il y aura l'avantage d' avoir le même demi-cercle pour tous les triangles : ainsi on pourra faire toute l'opération sur une seule figure.

293. Pour ce, qui appartient aux côtés AB, & BD de la fig. 24, sans en chercher la corde, on le trouve aisément par leurs sinus pris dans l'échelle longitudinale du compas de proportion, qui donnent la distance des points A, & D au diamètre BE. Si on tire une fois pour toujours le diamètre TS perpendiculaire au premier, on aura TD égal à la latitude, vers B, ou vers E, selon qu'elle est boréale, ou australe. Quand elle a plus de 45 degrés, on déterminera mieux le point D par son co-sinus, qui donne la distance de ce point au diamètre BE, & quand elle en a moins, on la déterminera mieux par son sinus, qui donne la distance du même point au diamètre TS. Pour le point K on le déterminera en prenant sur l'échelle transversale HK égal au sinus de la longitude, puisque RI complément de GI, qui est complément de la longitude, doit être égal à la longitude même. Après le 20 Septembre on aura trouvé la longitude de la comète dans le dernier signe. Alors dans la fig. 23 l'arc PF ira derrière le colure P'A en tombant sur l'hémisphère opposé, & l'angle PP'F deviendra obtus. L'arc GI de la fig. 24 deviendra alors plus grand, que GR, le point K tombera dans le rayon HA, & l'arc RI étant l'excès de 360° sur la longitude, il suffira de porter le sinus HK de cette excès vers A sur la même figure. Pour le 30 Septembre, qui aura la longitude $= 346°.22'$, on en prendra le reste à 360, qui est $13°.38'$, son sinus $= 0,235$, &

on le placera depuis H vers A : on fera de même pour toutes les journées postérieures, tandis que pour les journées précédentes il falloit porter le sinus de la longitude même vers G. La Géométrie par elle-même guide la construction appliquée à un cas pour les autres, & on sait bien dans la Géométrie générale, que le sinus d'un arc est le même, que celui de son reste à un cercle entier, mais négatif par rapport à lui, c'est-à-dire d'une direction opposée.

294. La Géométrie même ayant guidé la construction pour prendre les données, la guidera aussi pour donner les cherchées. Comme GQ donne l'angle P'PF de la fig. 23, AQ donnera son supplément GPD, qui est le complément de l'ascension droite AG. Ainsi RQ de la fig. 24 donnera cet arc, & HP sera son sinus. Tandis que le point P tombera dans la fig. 24 entre H & A, comme dans le cas qui y est exprimé, l'angle P'PF dans la fig. 23 sera obtus, si l'on conçoit l'arc PA, on voit bien qu'il devient un quart de cercle, & P'PA un angle droit, le point G tombera par rapport au point A vers D, & l'arc AG étant alors la mesure de l'excès de l'angle P'PF sur 90°, donnera l'ascension droite même : ainsi celle-ci sera mesurée par l'arc RQ de la fig. 24, qui est aussi l'excès de l'arc GQ sur 90°. Comme celui-ci a pour sinus la ligne HP, on prendra alors pour l'ascension droite l'arc, qui répond au sinus déterminé par cette ligne dans l'échelle transversale, qui aura le rayon NG = 100. Quand le point P dans cette même figure tombera en H, l'ascension droite sera = o : mais quand par la petitesse des arcs BM, BO il ira entre G, & H; l'arc GQ devenant moindre de 90°, l'angle P'PF dans la fig. 23 deviendra aigu, & l'angle DPG obtus, ce qui portera le point G au de-là de A : la ligne PH devenue négative par rapport à sa position précédente avec son arc RQ, & l'arc AG de la fig. 23 allé au de-là du point A, sera le sinus de l'excès de 360° sur l'ascension droite. Pour la déclinaison on prendra le complément de l'arc DL, c'est-à-dire la différence à 90° soit par défaut, ou par excès, & elle sera boréale dans le premier cas, australe dans le second. Le point N indiquera, quel

des

des deux cas on a, selon qu'il tombera dans le rayon CD, ou CF. Comme CN est le co-sinus de l'arc DL au rayon CD, si l'on fait ce rayon dans la construction égal a 100 parties du compas de proportion, il suffira d'appliquer la ligne CN à cette échelle pour avoir la valeur de ce sinus, en comptant à l'ordinaire ces unités pour centièmes du rayon. Le même compas de proportion avec ces parties longitudinales donnera l'échelle pour le rayon GD = CB, du cercle entier, qui a les côtés, & l'autre pour le rayon HG du demi-cercle, dans lequel on a les angles. La corde LM par sa position distinguera la dénomination de la déclinaison, qui sera boréale, ou australe, selon qu'elle passera entre C & D, ou entre C, & F.

295. La Géométrie par la direction de ses lignes donne tous les cas, comme l'Algèbre par ses signes positifs, & négatifs. Il suffit de la bien suivre, & bien entendre son langage, que j'ai expliqué au long dans le troisième volume de mes éléments, en développant tout ce, qui appartient à la transformation des lieux géométriques, où j'ai donné des règles générales pour transporter la solution d'un problême faite pour un cas particulier à tous les autres cas de la même espèce, en faisant voir aussi, comment dans mon traité des sections coniques, qui est dans le même volume, j'avois suivi ces règles, pour donner les démonstrations communes de toutes les propriétés communes des trois espèces de ces courbes.

296. Il n'y reste à présent, que de donner les courbes analogues à celle, qui est indiquée à la fig. 12, ce qui est très-aisé après avoir trouvé par les méthodes expliquées les distances au soleil, & à la terre, & les longitudes, & latitudes géocentriques : on peut en faire une table, & je l'avois préparée avec six colonnes, dont je n'en conserve ici à la table III, que trois : dans la première on voit les jours de cette année depuis le commencement du mois du Juin jusqu'à la fin de Novembre de dix en dix jours, ou 11 à la fin du mois quand il en a 31 : la seconde les longitudes héliocentriques de la terre prises de la connoissance des temps pour l'an 1774 en ajoutant *6* signes aux longitudes du soleil, qu'on y trouve déjà calculées pour tous les jours : celle-ci sert pour diviser l'écli-

ptique en jours : les deux suivantes ont les distances de la comète au soleil, & à la terre tirées de la fig. 21, qui doivent servir pour les deux premières de ces courbes : comme dans ces objets une détermination faite encore à la hâte pour ne pas perdre trop de temps dans un plus grand nombre de mesures est moins sujette à des erreurs sensibles relativement au total, je donne la table de ce, que j'y ai trouvé : je supprime les colonnes des longitudes, & latitudes, où pour eviter les erreurs beaucoup plus sensibles à l'œil il faut employer beaucoup plus de soin, & répéter les mesures : mais ces erreurs dérangent beaucoup moins la régularité apparente des mêmes courbes, qui suffit pour un exemple pour lequel je les ai données dans la planche d'après la détermination grossière, l'intervalle de 10 degrés étant ici bien petit, comme on va le voir, même les demi-degrés n'y sont pas sensibles. Les lignes AB, A'B' sont divisées en six intervalles, qui répondent à *6* mois, depuis le 31 Mai jusqu'à la fin de Novembre : le premier, quatrième, & cinquième sont de 30 parties de mon compas de proportion, les autres trois de 31, selon les nombres des jours de chaque mois. Chacun de ces intervalles est subdivisé en trois, qui ont tous 10 parties à l'exception des derniers des mois de Juillet, Août & Octobre, qui en ont 11. Les jours sont marqués en bas sur la ligne AB de 10 en 10, ou 11.

207. Les lignes AA', BB' sont divisées en 15 intervalles dont chacun contient 10 des mêmes parties : celle-ci expriment pour les distances au soleil, & à la terre les centièmes de la distance moyenne de la terre au soleil, & pour les longitudes & latitudes les degrés. Dans le premier cas les millièmes, qui ont la troisième place dans la même Table III après la virgule, seront les dixièmes de ces parties, & dans le second ces dixièmes seront les minutes prises de *6* en *6*. On voit les distances marquées à côté de la ligne A'A en dehors en montant de bas en haut : on commence en bas par *60*, parceque la plus petite distance est *61* le 30 Sept. à la colonne 4, & on finit en haut par 210, parceque la plus grande est 206 à la fin de la colonne 3. Les degrés pour les latitudes sont marqués à côté de la même ligne

au dedans. On a adapté la largeur de la figure à la largeur des pages de l' édition, & au temps dans lequel la distance au soleil, & à la terre n'étoit pas telle à rendre invisible la comète: quand elle est plus éloignée, ordinairement elle disparoît, tandis que les planètes brillent dans des éloignements bien plus grands, & les étoiles fixes à des distances immenses; parceque les fixes ont une immense vivacité de lumière probablement analogue a celle du soleil, & le planètes probablement ont des atmosphères très-minces par rapport à leur diamètre comme la terre, qui n' interceptent qu' une partie de la lumière réfléchie médiocre par rapport au total, tandis que les comètes sont environnées d'une atmosphère énormément étendue, qui absorbe les rayons de manière à ne laisser le passage vers le globe, & au retour qu'à un très-petit reste, ce qui les rend si pâles, & généralement les fait évanouir dans des distances considérablement plus petites, que le double de la distance de la terre au soleil. On verra dans le dernier des Mémoires correlatifs l'usage de cette énorme atmosphère pour les comètes qui convenoit à la grande ellipticité des leurs orbites. La longueur de six mois & la petitesse de la largeur de la page ont rendu petit l'intervalle de dix jours: j'ai pris le même intervalle pour les dizaines des degrés de longitude, & latitude, & des centièmes parties de la distance de la terre au soleil, & j'ai combiné de manière les zero des échelles de ces deux dernières par rapport aux nombres de celle des deux premières à ne pas trop étendre la largeur du chassis. Par le moyen des longitudes, & latitudes de la table trouvées si aisément au moins en gros, on peut bien facilement marquer avec un crayon sur la surface d'un globe céleste la route apparente de la comète, qui y donnera une seule courbe beaucoup plus régulière, & fera voir par quelles constellations elle a passé avant les premières observations, qui ont servi pour base à la construction, & par quelles elle passera après. On en tirera plus aisément, & plus exactement les ascensions droites, & les déclinaisons qui sont celles, qui dirigent immédiatement la position de la lunette de la machine parallactique pour chercher la comète, quand on l'a perdue pour

pour plusieurs jours à cause des nuages, ou par la proximité au soleil, & quand elle est déjà si affoiblie par l'éloignement, qu' on ne la voit plus à la vue simple : d'ailleurs si le globe n'est pas trop petit, on y verra bien distinctement les minutes de six en six, qui sont les dixièmes parties du degré, ce qui fera tomber la comète cherchée très-près du centre du champ de la lunette, où on voit beaucoup mieux les objets.

298. La première des courbes de cette figure 25, qui appartient aux distances au soleil est assez simple, & bien régulière, ces distances étant prises immédiatement dans la figure 21 des distances des points d'une parabole, courbe très-simple, à son foyer. Les trois autres sont beaucoup plus compliquées, & s'il y a quelque irrégularité apparente dans la continuation de leur allure, elle peut être produite au moins en partie par la nature de la courbe bien compliquée en elle même, & en partie par quelque inexactitude de l' opération graphique, qu' on a faite avec une attention seulement médiocre, ce qui suffit pour donner un exemple. On voit assez plus clairement l' application de la théorie, quand il y a un exemple quoique moins exactement exécuté, & on voit mieux le procédé pour l'imiter dans d'autres occasions. D'ailleurs par le moyen des deux dernières courbes dessinées même un peu grossiérement on trouvera aisément son ascension droite, & sa déclinaison peu éloignée de la vraie, ce qui suffit pour la trouver sur-tout par le moyen de la machine parallactique. En considérant les deux premières on voit bien, qu' au commencement du mois de Juin la distance au soleil étant presque 180, & à la terre au de-là de 190, sa lumière devoit être foible en elle même ; puisque les comètes sont affoiblies beaucoup par la cheveleure : une grande distance à la terre rend cette lumière plus foible encore par rapport à nous : elles ne sont pas visibles dans des distances, dans lesquelles nous voyons briller Jupiter, & Saturne. La même chose devoit arriver vers la fin de Novembre, vers lequel temps on ne l' apercevoit plus. On voit bien, qu' elle s'est approchée de la terre, jusque vers le 20 de Septembre, sa distance devenant alors à-peu-près de 60, c' est-à-dire moindre

que

que deux tiers de la distance de la terre au soleil, & qui après ce temps-là elle est allée en s'éloignant continuellement.

299. Cette comète, à cause principalement de la grande inclinaison de son orbite, ne s'est jamais trouvée plongée dans les rayons du soleil, n'ayant eu jamais une distance optique à celui-ci assez petite pour cet effet: mais si l'on veut avoir aussi sous les yeux dans une courbe cette distance apparente, on pourra la dessiner de la même manière, qu'on a dessiné les quatre autres à la fig. 25: on pourroit pour cela ajouter une autre colonne à la Table III pour y marquer ces distances pour les mêmes jours. On les détermineroit aisément; parceque cette distance est l'hypothénuse d'un triangle sphérique rectangle, dont les côtés sont la latitude de la comète, & la différence de sa longitude à celle du soleil.

§. XXV.

Application du calcul numérique à la méthode trigonométrique proposée au paragraphe XIII.

300. On a donné dans ce paragraphe après le num. 147 la méthode de déterminer les distances de la comète par le calcul trigonométrique, nous en donnerons ici dans la table IV le calcul numérique appliqué à la fig. 26, qui est la même, que la fig. 1, transformée selon les trois données, que nous avons pris pour cette comète, avec les changements relatifs à ceux, qui sont venus par eux mêmes en suivant la construction, & qu'on trouveroit de même en faisant réflexion à ces données, & en suivant immédiatement le seul calcul. Pourtant on a augmenté l'angle TST''', & on a fait beaucoup d'autres changements aux positions, & grandeurs des lignes, qui représentent celles qu'on a dans les figures précédentes, pour rendre plus sensible le procédé du calcul, outre le changement exigé par la transformation de la figure première en celle-ci relativement a ce cas particulier. Mais on y reconnoîtra aisément tous les points, & les lignes, qui ont rapport aux figures 19 & 21, & à la fig. 1, qui a été tournée d'une manière différente plus propre à faire voir d'abord la

théo-

théorie prise avec toute la généralité. La ligne P''C'', qui dans la fig. 1 étoit plus longue que la PC, en est plus courte ici, comme je l'ai déjà indiqué ci-dessus dans la note au num. 260. Cette différence fait, que le point I tombe sur la P''C'' prolongée, & le point R sur la PP'' prolongée aussi du côté de P'', tandis qu'à la figure 1 il tomboit du côté de P. L'arc PP'' se trouve dans l'angle TST'' à cause de l'opposition de la comète au soleil dans le temps de ces observations, ce qui fait, que l'angle PSP'' soit = TST'' − TSP − T''SP'', tandis que dans l'autre figure il étoit = TSP + TST'' − T''SP''. Pour ne pas allonger trop la figure non seulement j'ai supprimé ici la directrice, mais j'ai fait la ligne SV plus courte : il faut concevoir V, comme le point du périhélie, qui tombe sur l'arc C''C'C prolongé du côté de C.

301. Les valeurs préparatoires sont ici les mêmes, qu'au §. XII : on les trouve dans la table I. La table IV est employée pour trouver la réduction de la seconde longitude selon la méthode du num. 148 un peu plus longue, mais moins inexacte. On y prend la valeur T'P' = 0,5165, comme on l'a trouvé dans la dernière colonne de la table II, où on devoit déjà l'avoir bien peu éloignée de la véritable.

302. Dans la première division de la première colonne on prépare la résolution du triangle ST'P' par la proportion de la somme, & différence des côtés, avec les tangentes de la demi-somme, & de la demi-différence des deux autres angles, on y a les deux côtés T'P', T'S avec l'angle ST'P'. On a le premier au numér. 301 par position, & on tire le seconde, qui est la distance du soleil à la terre, & le troisième, qui est l'élongation e' de la comète, à la ligne 2 de la colonne 4 de la seconde division de la table I (*). Dans la première ligne on a la valeur T'P' avec

(*) Le calcul sera beaucoup plus court & aisé, si l'on néglige les secondes dans les angles en y ajoutant une minute, quand il y en a plus de 30, & qu'on se borne à quatre chiffres dans les lignes ; mais il sera beaucoup moins exact sur-tout où le nombre commence par l'unité.

avec son logarithme, qui doit servir après : dans la seconde ST' : dans la troisième, & quatrième leur somme, & différence, avec le complément logarithmique de la première, & le logarithme de la seconde : dans la cinquième l' angle ST'P' : dans la sixième son supplément, qui est l' angle externe égal à la somme des deux angles à la base SP' : dans la septième sa moitié avec le logarithme de sa tangente : la somme de ces trois nombres logarithmiques donne dans la dernière ligne le logarithme de la tangente de la demi-différence des ces deux angles avec la valeur à côté.

303. On acheve la résolution de ce triangle dans la division seconde : la première ligne contient l' angle T'P'S, qui est la somme des deux précédents, puisque le côté T'S, qui lui est opposé, est le plus grand : on y a ajouté le complément logarithmique de son sinus, pour avoir le côté SP' dans la quatrième ligne par la proportionalité des côtés avec les sinus des angles opposés : pour cela on a à la seconde, & troisième ligne les logarithmes du sinus de l'angle ST'P', & du côté ST', que l'on a dans la division précédente. La somme des trois nombres logarithmiques précédents donne dans la quatrième le logarithme du côté cherché SP' avec sa valeur numérique.

304. La troisième division est destinée pour avoir dans sa dernière ligne la valeur de $P'p$, qui est $= \frac{SP' \times T't}{SC'^3}$ (num. 35). On a le logarithme de SP' à la dernière ligne de la division précédente, & le logarithme de $T't = v'$ à la ligne *6* de la seconde colonne de la troisième division de la table I, que l' on met ici à la première ligne. Il faut trouver la valeur SC', ce qu' on fait dans les cinq lignes suivantes. Dans la seconde ligne il y a le logarithme de la tangente de l' angle P'T'C', qui est la seconde latitude de la comète (lig. 2, col. 3, divis. 1 Tab. I). La somme de celui-ci avec le logarithme de T'P', qu' on avoit préparé à la première ligne de la première division, donne à la ligne 3 le logarithme de $P'C' = T'P' \times tan. P'T'C'$. En ôtant de celui-ci le *log*. SP', qu'on a à la dernière ligne de la division 2, on a à la ligne 4 le logarithme de la tangente de l'angle P'SC' =

$\frac{P'C'}{SP'}$, avec la valeur du même angle : à la ligne 5 on a mis le complément logarithmique de son sinus : la somme de celui-ci avec celui de P'C' de la ligne 3 donne à la fin à la ligne 6 le logarithme de la $SC' = \frac{P'C'}{sin. P'SC'}$. Dans la ligne 7 il y a son triple, & dans la 8 le complément arithmétique de ce triple, qui est le logarithme $\frac{1}{SC'^3}$. On fait à la dernière ligne la somme de celui-ci & des logarithmes de SP' & v', qui se trouvent à côté à la ligne dernière de la division précédente, & à la première de celle-ci : cette somme est le logarithme de la $P'p$: & on a sa valeur cherchée.

305. Dans les deux premières divisions de la seconde colonne on trouve la réduction y, qui est la différence des deux angles ST'P', Stp (num. 148). On a le premier à la ligne 5 de la division 1 de la colonne précédente, & la résolution du triangle Stp donne le second. Pour celle-ci il faut trouver les côtés Sp, St, & l' angle tSp : Sp est la différence des deux SP', $P'p$, qu' on a aux dernières lignes des deux dernières divisions de la colonne précédente : St est la différence des T'S, $T't = v'$, qu'on a à la ligne 2 de la division 1, & 1 de la division 3 de la même colonne. On les voit aux deux premières lignes de la colonne 2, & on a aux deux suivantes leur somme, & différence avec le complément logarithmique de celle-là, & le logarithme de celle-ci. L' angle tSp est le même, que T'SP', le plus petit des deux angles à la base ST' du triangle ST'P', qu'on a résolu dans la colonne précédente : ainsi on l' a en prenant la différence des deux angles des lignes 7, & 8 de la même colonne. On le voit à la ligne 5 de la colonne 2, & à la ligne 6 on a son supplément, qui est la somme des deux angles en t, & p du triangle tSp internes & opposés. Ainsi on a mis à la ligne 7 la moitié du même supplément avec le logarithme de sa tangente. La somme des trois nombres logarithmiques précédents donne à la dernière ligne de cette première division le logarithme de la demi-

dif-

différence des deux angles à la base tp, avec sa valeur à côté.

306. La somme de ces deux derniers angles donne dans la première ligne de la seconde division l' angle Stp, qui est opposé au côté Sp le plus grand, & on y a mis à côté son complément logarithmique, dont on aura besoin dans la division suivante : dans la seconde ligne on a l' angle $ST'P'$, qu' on avoit à la cinquième ligne de la première colonne. La différence de ces deux derniers angles donne dans la derniere ligne de cette division la valeur de la réduction y cherchée. On la trouve $= 0^{\circ}.26'.18''$, c' est-à-dire $0^{\circ}.26',3$, ce qui tombe entre les deux valeurs trouvées par construction à la fin des deux premières divisions des colonnes de la table II.

307. On auroit pu tirer la réduction même beaucoup plus aisément de ces deux valeurs données par la construction en disant, comme la différence des deux positions faites pour la $T'P'$ dans les mêmes colonnes de la table II $= 0,05$ est à la différence de la seconde position $T'P' = 0,50$, & de sa valeur $0,5165$ employée ici, $= 0,0165$, ainsi la différence des deux valeurs y trouvées dans les mêmes colonnes $= 1',4$ est à $0^{\circ},46$: cette valeur ôtée de la seconde de $y = 26',7$ auroit donné $26',24$, qui diffère insensiblement, de $26',3$, qu' on a trouvé par le calcul trigonométrique : on voit par-là, qu' on pourroit bien aussi s' épargner la peine de chercher la réduction par le calcul trigonométrique, en la tirant assez exacte de la construction, & en l' employant dans les calculs suivants, & même dans la méthode, qui aboutit à l' équation du sixième degré. On pourroit trouver la même réduction assez exacte par un calcul moins long à l' aide des formules du §. 4 selon la méthode du num. 39. Mais par rapport à tout cela on doit avoir avant les yeux toutes les réflexions, que nous y avons faites après ce numéro.

308. Il falloit ajouter, selon le num. 257, la réduction y dans notre cas à la valeur $m' = 14^{\circ}.40'.47''$, & l' ôter de la valeur $m = 32^{\circ}.8'.32''$ (Tab. I) pour trouver les deux distances $TP, T''P''$, ce qu' on a fait dans la troisième division de la même seconde colonne, où l' on a ces deux valeurs réduites à la

ligne 4, & 7 avec les logarithmes des leurs sinus. Pour avoir ces distances, il faut ajouter (num. 81) ensemble les logarithmes des sinus de ces valeurs réduites, les logarithmes L', L'' de la table I, & pour chacune le logarithme de la même valeur *tp*. On commence par trouver *tp*, qui par la proportionalité des côtés avec le sinus des angles opposés est $= \frac{Sp \times sin.tSp}{sin.Stp}$. Ainsi à côté de l'angle S*tp* à la première ligne de la division précédente on a mis le complément logarithmique de son sinus : à la première & seconde de cette troisième division on a mis les logarithmes du sinus de l'angle *tSp*, & de la ligne S*p*, dont on a les valeurs aux lignes 5, & 1 de la division 1, & on tire les logarithmes des tables. La somme de ces trois nombres logarithmiques donne dans la troisième le logarithme de la *tp* : dans les deux suivantes on a les logarithmes du *sin.m'*, & de L' : dans la ligne 7, & 8 les *log.sin.m*, & *log*.L'': ainsi la somme des nombres logarithmiques des lignes 3, 4, 5 donne à la ligne 6 le logarithme TP, avec sa valeur numérique, & celle des 3, 7, 8 le *log*.T''P'' avec sa valeur.

309. Ces valeurs à la fin de cette table sont 0,40971, & 0,72429. Si on les compare avec celles, qu'on avoit trouvé dans la dernière colonne de la table II par la proportionalité des différences tirées de la construction, qui étoient 0,4100, & 0,7249, on n'y trouve des différences que dans les dix millièmes, c'est-à-dire 0,00029, & 0,00061. Comme on n'a eu les millièmes dans la construction que par estime, la rencontre des deux résultats fait voir d'un côté la bonté des méthodes, & de l'autre c'est une raison pour croire, qu'il n'y a eu des fautes essentielles ni dans la même construction, ni dans le calcul. Mais comme les deux distances trouvées ici sont relatives à la valeur de T'P' prise de la construction, qui sert pour la première position de la méthode trigonométrique; il faut voir combien elle est fautive, pour passer à la seconde position, si l'on en a besoin, ou les corriger encore plus par d'autres méthodes avant de les employer à la détermination des éléments. On fait cette recherche par la

mé-

méthode exposée depuis le num. 149, qui employe la résolution de *6* triangles, dont trois sont obliquangles, & trois rectangles : en réunissant ensemble un de premiers avec un des derniers on aura les trois binaires TSP, SPC : T''SP'', SP''C'' : P''SP, CIC'' : on fait ce calcul dans les trois colonnes de la table V.

310. La première division de la première colonne commence par les deux côtés TS, qui est la première des trois distances de la terre au soleil (Tab. I, divis. 2, col. 1, lign. 1) & TP (Tab. IV, col. 2, divis. 3, lign. *6*) : dans les deux lignes suivantes on en a la somme avec son complément logarithmique, & la différence avec son logarithme : dans la cinquième l'angle STP $= e$ (Tab I, divis. 2, col. 4, lign. 1) : dans la sixième son supplément, dans la septième la moitié de celui-ci avec le logarithme de sa tangente, dans la dernière la somme des trois nombres logarithmiques précédents, avec l'angle, dont elle est tangente. La première ligne de la seconde division donne l'angle TSP, qui est la différence des deux précédents, parcequ'il est opposé au côté TP, qui est le plus petit. On y a ajouté le complément logarithmique de son sinus, & dans les deux lignes suivantes le *log. sin.* STP (divis. 1, lign. 5), & le *log.* TP. La somme de ces trois nombres logarithmiques donne dans la ligne 4 le logarithme SP avec sa valeur numérique. On voit que la ligne PC est $=$ TP $\times$ *tan.* PTC, & cet angle est la première latitude $= l$, qu'on a à la Tab I, divis. 1, col. 3, lign. 1 : ainsi pour avoir la même PC on a mis cette latitude à la ligne 5 avec son *log. tan*, & la somme de ce logarithme avec celui de la ligne 3 a donné dans la lign. *6* le logarithme de PC, avec sa valeur numérique, qui doit servir pour la troisième colonne. Dans la ligne 7 on ôte le *log.* SP (lign. 4) de ce dernier, ce qui donne le *log. tan.* PSC, dont la valeur dans le triangle rectangle SPC est $= \frac{\text{PC}}{\text{SP}}$: ayant trouvé sa valeur on a mis à la ligne 8 le complément logarithmique de son sinus, qui ajouté au *log.* PC (lign. *6*) donne dans la dernière ligne le *log.* SC $= \frac{\text{PC}}{\textit{sin.}\,\text{PSC}}$ avec sa valeur numérique.

311.

311. Dans la colonne 2 on a tout-à-fait le même procédé pour les deux triangles $T''SP''$, $SP''C''$: on prend ce qui appartient aux côtés $T''S$, $T''P''$, à l' angle $ST''P''$, & à la lat. l'', dans les mêmes colonnes, & divisions de la Table I, & IV, & on y trouve les SP'', $P''C''$, SC'', qui entrent dans la résolution de la dernière couple de triangles : dans la troisième colonne, où on fait cette résolution, le procédé pour les deux premières divisions est presque le même, mais il falloit auparavant trouver l' angle PSP'', ce qu' on a fait dans la troisième partie de la première colonne relativement à la fin du num. 300. On y voit dans les deux premières lignes les deux angles TSP, $T''SP''$ pris dans les premières lignes de la seconde division de la colonne 1, & 2 : dans la troisième ligne on a leur somme, dans la quatrième l' angle TST'', qui est le mouvement total de la terre : on trouve celui-ci en ôtant dans la quatrième colonne de la première division de la Table I la première longitude du soleil de la troisième. Alors dans le triangle PSP'' on a les deux côtés, SP, SP'' avec l' angle en T. On voit dans les deux premières lignes ces deux côtés tirés de la quatrième ligne de la seconde division des deux colonnes précédentes: on y a ajouté leur somme, leur différence, l'angle PSP'', son supplément, la moitié de celui-ci, avec les logarithmes analogues à ceux des colonnes précédentes.

312. La différence des deux angles des deux dernières lignes de la première division donne à la première ligne de la seconde l' angle $SP''P$ opposé au côté SP, qui est le plus petit, & on y a ajouté le complément logarithmique de son sinus. La seconde ligne a le logarithme du sinus de l' angle PSP'', que l' on a à la cinquième ligne de la partie précédente, la troisième a le logarithme de la SP, que l' on tire de la quatrième ligne de la seconde division de la première colonne. La somme des trois derniers nombres logarithmiques donne dans la quatrième ligne le *log*. PP'', avec sa valeur, qui vient en usage après. Dans la ligne suivante il y a CI'' différence des deux PC, $P''C''$, qu' on a à la ligne *6* de la seconde division des deux colonnes précédentes, avec son logarithme à côté. En ôtant de celui-ci l' au-

tre,

tre, qui le précède, on a à la ligne 6 le $log.tan.C''CI = \frac{C''I}{CI}$ la CI étant $= PP''$. On y a aussi la valeur de cet angle, & dans la ligne suivante on a le complément logarithmique de son sinus : la somme de celui-ci & du $log.C''I$, qu' on a à la ligne 5, donne à la dernière ligne la valeur de $CC'' = \frac{C''I}{sin.C''CI}$.

313. Le calcul de la troisième division de cette colonne est le même, que celui de la dernière division des deux premières colonnes de la Table II, qu'on a expliqué au num. 83. Il s' agit de trouver la valeur de la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$ à comparer avec la valeur a. La valeur b est la somme des deux SC, SC'', qu' on a à la fin de la seconde division des deux colonnes précédentes : on l' a ici à la première ligne avec son logarithme : on a à la seconde le double logarithme de $CC'' = c$, qu' on voit à la fin de la division précédente : la troisième a le double de ce double, la quatrième $log.12$: la somme de celui-ci avec le logarithme de la première ligne donne dans la ligne 5 le $log.12b$. La sixième ligne a la somme des logarithmes des deux premières lignes avec son nombre, qui est $= bc^2$, la septième la différence de ceux de la cinquième, & de la troisième avec son nombre, qui est $= \frac{c^4}{12b}$: la différence de ces deux derniers nombres, qu' on a à la ligne 8, comparée avec la valeur a de la dernière ligne de la première colonne de la division 1 de la Table I donne à la fin l' erreur $+ 0,00902$, qui est déjà bien petite.

314. Pour anéantir cette erreur il faudroit faire une autre position en prenant pour T'P' une valeur tant-soit-peu plus petite, que celle de la première ligne de la table précédente : mais pour ne pas refaire tout le calcul, qui est un peu trop long, & demande l' usage des parties proportionnelles pour les secondes dans les angles, & plus de quatre chiffres dans les lignes, on peut se servir de la méthode différentielle, puisque les corrections à employer doivent être assez petites. Nous expliquerons cette méthode, & en donnerons l' application dans le paragraphe suivant.

§. XXVI.

§. XXVI.

Application de la méthode différentielle à la correction des valeurs trouvées.

315. En faisant un petit changement à la ligne T'P', on doit avoir des changements correlatifs dans toutes les lignes & angles, qui se trouvent dans la table précédente, & qui entrent dans la détermination des valeurs SC, SC'', CC'' nécessaires pour la comparaison du dernier résultat avec la valeur a, & dans celle des éléments de l'orbite. On peut déterminer ces changements par la méthode différentielle transportée des quantités infiniment petites aux quantités très-petites. Newton nous a donné des formules pour tirer des différences, qu'on suppose dans les quantités simples, les différences des leurs puissances, des leurs racines, des leurs produits, des fractions, qui les ont dans leurs dénominateurs. Cotes a donné des formules pour les triangles, qui ont été étendues depuis, & appliquées à l' usage de l' Astronomie. M. l'Abbé de la Caille en a donné un grand nombre sans démonstration, & M. de La-Lande dans son Astronomie y a ajouté les démonstrations pour chacune à part.

316. Toutes ces formules supposent dans un triangle constant deux de ses six termes, c' est-à-dire de trois côtés, & de trois angles, & donnent le changement, que chacun de quatre autres changé fait éprouver aux trois autres, ce qui en multipliant le cas multiplie trop le nombre des formules, & démonstrations particulières. Il y a long temps, que j'ai envoyé d'Italie à M. de La-Lande un Mémoire latin, dans lequel j' avois traité ce sujet généralement, en concevant tous les six termes changés, & en liant ensemble les changements de chaque combinaison de quatre de manière, qu' ayant les différences de ces trois termes on y trouve le changement du quatrième. Alors toute cette multitude de formules se réduit à quatre seules qui renferment tous les cas des deux termes constants, & de plus ceux d' un seul constant, & ceux de tous les six changés. On a lu

ce

ce Mémoire à l' Académie, & on l' avoit approuvé pour l'impression parmi les Mémoires présentés : il y en a bien d'autres, que j' avois envoyés, & qui ont été de même destinés par elle pour l' impression. Mais comme à mon arrivée en France on n' en avoit imprimé que deux seuls appartenants à l' objet de cet Opuscule-ci, & de manière, que je ne pouvois pas en être content; j'ai retiré tout, & je le donnerai dans ces volumes. Il y aura dans le Tome IV en françois la théorie de ces variations avec ces quatre formules, dont chacune forme une équation de quatre termes très-simples, chaque terme ayant une de quatre variations liées ensemble. J'ai quatre Mémoires écrits en latin, qui par des méthodes différentes arrivent à ces mêmes formules, dont j'ai tiré ce qui m' est paru le plus à propos pour former celui, que j' ai écrit après en françois, & que je donnerai dans le quatrième volume. On y trouvera ces formules comme je les ai appliquées d' abord aux triangles sphériques : j'en ai tiré d'autres pour les triangles plans, en concevant le rayon infini, ce qui le rend plus simple. Ici je donnerai seulement ces dernières, qui viendront seules en usage, & sans démonstration : on verra les autres, leur démonstration, & la déduction de celle-ci dans le même Mémoire.

317. Voici les quatre combinaisons, dont chacune a son équation après la dénomination des côtés, & des angles, que l' on applique aux différents triangles selon les termes, que l'on doit comparer ensemble.

DÉNOMINATIONS.

Côtés	Angles opposés	différences
x, y, z	p, q, r	dx, dy &c.

COMBINAISONS.

I. Les trois côtés avec un angle . . . . x, y, z, p
II. Deux côtés avec deux angles dont un intercepté . . . . x, y, p, r
III. Deux côtés avec deux angles opposés . . . . . x, y, p, q
IV. Un côté avec trois angles . . . . x, p, q, r

ÉQUATIONS.

$$\text{I. } dx - dy\cos.r - dz\cos.q - dpz\sin.q = 0$$
$$\text{II. } dx\sin.q - dy\sin.p - dpz - drx\cos.q = 0$$
$$\text{III. } \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - dp\cot.p + dq\cot.q = 0$$
$$\text{IV. } dxy\sin.r - dp - dq - dr = 0$$

318. Toutes les fois, qu'on a les variations de trois termes, & qu'on cherche la variation d'un des trois autres quelconque, nécessairement on trouvera ces quatre termes dans une de ces combinaisons, & dans l'équation, qui lui répond, on n'aura d'inconnu, que la variation cherchée, qu'on y trouvera. S'il y a un terme constant, on fera sa variation $= 0$, & s'il y en a deux, on fera $= 0$ toutes les deux variations de ces termes. Nous allons en donner l'application à notre objet dans la table VI.

319. Mais à la place de chercher les variations relatives à toutes les deux tables IV & V en commençant par la variation de la ligne T'P', pour avoir la variation de la réduction y déjà assez connue telle qu'on l'a trouvée dans le calcul précédent, on commencera par la variation de la ligne TP; parceque cette réduction restant la même, la raison des deux TP, T''P'' restera aussi avec la raison des leurs variations: ainsi on trouvera la variation de la seconde par celle de la première, & par ces deux tout le reste, dont on aura besoin. On doit faire cette première variation négative jusqu'à la variation de la valeur de la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$. Cette valeur ainsi corrigée sera la même, qu'on auroit eu en répétant tous les calculs des tables IV, & V: sa différence à la valeur a seroit la nouvelle erreur, qu'on devroit employer avec la précédente trouvée à la fin de la table V, comme on a employé les deux erreurs tirées de la construction pour trouver les valeurs corrigées, qu'on puisse employer pour trouver les éléments cherchés.

320. Mais on doit trouver immédiatement la variation de la ligne

ligne TP, qui doit diminuer l'erreur de manière à pouvoir la négliger. On la fera négative, puisque l'erreur trouvée a été positive, & toutes les autres variations, qui en seront déduites resteront négatives de même, si quelque coëfficient négatif ne les force à changer son signe. Ainsi il y a l'apparence, que la variation aussi de la formule sera négative: & réellement la diminution de la position dans la méthode graphique a donné une diminution de la valeur de la formule. Nous trouverons immédiatement la première variation cherchée, en supposant la différence des deux erreurs provenantes de la construction, & celle des deux valeurs de la distance TP, proportionnelles à l'erreur, que nous avons trouvée par le calcul, & à la variation de la même distance, qui doit la corriger. Quoique la construction ne doit pas avoir donné ces erreurs bien exactes; la grandeur de la différence de ces erreurs, & des deux valeurs de la TP, qui en dépendent, ne laisse aucune crainte par rapport aux petites différences, que nous leur supposerons proportionnelles. La différence des deux erreurs étoit à la troisième ligne de la troisième colonne de la table II $g - g' = 0,2208$, la différence des deux valeurs de la TP dans les quatrièmes lignes des secondes divisions des colonnes précédentes est $0,4358 - 0,3974 = 0,0384$, l'erreur à corriger à la fin de la dernière colonne de la table V 0,00902. Pour cela on a ces trois nombres dans les trois premières lignes de la première division de la première colonne de la table VI avec le complément logarithmique du premier, qui est le premier terme de la proportion, & les logarithmes des deux autres: dans ces logarithmes j'ai pris quatre seules chiffres après la caractéristique à cause de la petitesse, que doit avoir le quatrième terme $d.$TP, que l'on cherche. On a ce terme à la quatrième ligne avant son logarithme, qui est la somme des trois précédentes.

321. Comme la réduction de la seconde longitude doit être sensiblement la même, que celle, qu'on a trouvé par le calcul trigonométrique, la raison de la TP à la T''P'' doit être sensiblement la même, & il n'y a absolument rien à craindre pour la très-petite valeur de la $d.$T''P'', si on la tire de la $d.$TP par

cette proportion : pour cela j' ai mis dans la cinquième ligne la différence de deux logarithmes des valeurs TP, T'''P''', qu' on a à la troisième ligne de la seconde partie des deux premières colonnes de la table V, & l' ayant ajoutée au logarithme de *d*.TP de la ligne precédente, j' ai eu à la sixième ligne le logarithme de *d*.T'''P''', qui m' a donné sa valeur : j' ai pris cette valeur seulement jusqu' à la cinquième ligne des décimales, parceque je n' ai pas pris les distances mêmes du soleil à la terre dans la table I, que jusqu' à ces chiffres, & d' ailleurs une plus grande exactitude seroit inutile pour une méthode d' approximation comme celle-ci. Les *d*.TP, *d*.T'''P''' multipliées par les tangentes de la première, & dernière latitude, doivent donner les *d*.PC, *d*.P'''C''', puisque les PC, P'''C''' sont données par un telle multiplication des TP, T'''P'''. Pour cela j' ai mis aux lignes 7, & 9 les logarithmes de ces tangentes, qu' on a à la cinquième ligne de la même seconde division des deux premières colonnes de la table V, & à la ligne 8 j' ai fait la somme des logarithmes des lignes 4, & 7, à la ligne 10 ceux des lignes 6, & 9, ce qui m' a donné les valeurs *d*.PC, *d*.P'''C'''.

322. Ici je commence à faire usage de mes formules différentielles de la Trigonométrie plane. Dans le triangle STP le côté ST, & l' angle STP restent sans variation : TP est changé par la valeur *d*.TP, & je dois trouver la différence du côté SP, & de l' angle TSP, dont j' aurai besoin après : la même chose arrive par rapport au triangle T'''SP'''. Je trouve les deux *d*.SP, *d*.SP''' dans la seconde division de cette première colonne, & *d*.TSP, *d*.T'''SP''' dans la troisième.

323. Les termes, dont la variation est $=0$, doivent entrer toujours dans la combinaison, qu' on doit employer, avec ceux, dont on a la variation, & celui, dont on la cherche : ainsi j' employe pour le premier objet la première combinaison des trois côtés ST, TP, SP avec l' angle STP, que je dois faire $=p$, n' y ayant dans cette combinaison, que l' angle p, le côté opposé SP doit être $=x$: on peut faire ST $=y$, TP $=z$, & on aura les angles opposés SPT $=q$, TSP $=r$: dans la premiè-

re

re équation on aura $dy = o$, $dr = o$ à cause des termes y, & r constants : alors l'équation se réduit aux deux termes $dx = dz \cos. q$, c' est-à-dire $d.SP = d.TP \times \cos. SPT$. Pour cela j' ai mis à la première ligne de la seconde division le logarithme du co-sinus de SPT, en tirant la valeur de cet angle de la somme des deux, qu' on a dans les deux dernières lignes de la première division de la première colonne de la table V, parceque c' est l' autre angle du triangle TSP opposé au côté ST le plus grand. De même à la troisième ligne de la même seconde division j' ai mis le logarithme du co-sinus de l' angle SP''T'', en tirant cet angle de la somme des deux angles des deux dernières lignes de la première division de la seconde colonne de la même table V. La somme du logarithme de $d.TP$, qu' on a à la quatrième ligne de la première division, & de ce logarithme de la première ligne de la seconde division m' a donné dans la seconde ligne le logarithme de $d.SP$, & la somme du $\log. d.T''P''$ de la ligne 6 de la première division, & du logarithme de la troisième ligne de la seconde division m' a donné à la ligne 4 le $\log. d.SP''$.

324. Pour le second objet j' employe la seconde combinaison des côtés ST, SP, avec les angles STP, TSP. Pour me débarrasser du second & quatrième terme de la seconde équation, qui ont deux coëfficients de la différence dy, & dr, j' ai fait le côté constant $ST = y$, & l' angle constant $STP = r$: ainsi le côté SP doit être $= z$, le troisième côté $TP = x$, les angles $TSP = p$, $SPT = q$. Comme on a $dy = o$, & $dr = o$, l' équation devient $dx \sin. q = dpz$, ou $dp = \frac{dx \sin. q}{z}$, c' est-à-dire $d.TSP = \frac{d.TP \times \sin. SPT}{SP}$. Pour cela on voit à la première ligne de la troisième division le logarithme du $\sin. SPT$, dont on avoit le logarithme du co-sinus dans la partie précédente : dans la seconde ligne on a le complément du $\log. SP$, que l' on avoit à la ligne 4 de la seconde division de la première colonne de la table V. La somme des logarithmes de $d.TP$, qui se trouve à la quatrième ligne de la première division, & de ces

ces deux derniers nombres logarithmiques donne dans la troisième ligne de cette troisième division le logarithme de *d.*TSP. On fait la même chose pour *d.*T''SP'': le logarithme du sinus de SP''T'', dont on a le co-sinus dans la partie précédente, & le complément logarithmique de SP'' tiré du logarithme, qu' on a à la quatrième ligne de la seconde division de la seconde colonne de la table IV, sont ici dans les lignes 4, & 5: leur somme avec le logarithme *d.*T''P'' de la ligne *6* de la première division donne dans la ligne dernière le *log.d.*T''SP''.

325. Jusqu' à présent il y a eu deux constantes dans les triangles, que nous avons employés. Pour trouver *d.*SC, & *d.*SC'' nous n' en aurons, qu' une seule dans les triangles SPC, SP''C'', qui est l' angle droit en P, & P'', & on cherchera la différence d' un côté par celles des deux autres: ainsi on reviendra à la première combinaison: ayant fait dans le premier triangle l' angle droit en P $= p$, on aura SC $= x$ en cherchant dx: on pourra mettre à volonté les deux autres côtés PC $= y$, SP $= z$, ce qui donnera PSC $= q$, SCP $= r$: dans la première équation ayant fait $dp = 0$, on en tirera $dx = dy\cos.r + dz\cos.q$, c'est-à-dire $d.\text{SC} = d.\text{PC} \times \cos.\text{SCP} + d.\text{SP} \times \cos.\text{PSC}$: à cause de l' angle droit en P on pourra mettre *sin.*PSC à la place de *cos.*SCP, pour n' employer, qu' un seul angle; & on a le même procédé pour la *d.*SC''. On voit tout le calcul pour la *d.*SC à la quatrième division de la première colonne, & pour la *d*SC'' à la première de la seconde. On trouve les *d.*PC, *d.*P''C'' à la première division de la première colonne, les *d.*SP, *d.*SP'' à la seconde, les angles PSC, P''SC'' à la ligne 7 de la seconde division des deux premières colonnes de la table V: la somme des deux logarithmes de la *d.*PC, & du *sin.*PSC donne à la ligne 3 le logarithme du premier terme de la valeur cherchée: la somme des deux, de *d.*SP, & de *cos.*PSC donne à la ligne *6* le logarithme du second terme: la somme des deux termes donne à la dernière ligne la valeur cherchée *d.*SC: on fait la même chose pour la *d.*SC''.

326. Il nous reste à chercher les différences des cordes PP'',

& CC'', ce que nous ferons à l'aide des triangles PSP'', & CIC'', dont le second a un terme constant, qui est l'angle droit en I, mais le premier n'en a aucun. Il s'agit dans celui-ci de déterminer la variation du côté PP'' dépendamment des variations des côtés SP, SP'', & de l'angle en S; ainsi il faut employer la première combinaison de trois côtés, avec un angle. On devra faire l'angle PSP'' $= p$: ainsi on aura PP'' $= x$, & on cherchera dx: nous ferons SP $= y$, SP'' $= z$, & nous aurons SP''P $= q$, SPP'' $= r$. Dans la première équation il faudra employer tous les termes, & on aura $dx = dy\, cos.r + dz\, cos.q + dpz\, sin.q$, c'est-à-dire d.PP'' $= d$.SP $\times$ *cos*.SPP'' $+$ d.SP'' $\times$ *cos*.SP''P $+$ d.PSP'' $\times$ SP'' $\times$ *sin*.SP''P.

327. La somme des angles des deux dernières lignes de la première division de la dernière colonne de la table V donne l'angle SPP'', qui est opposé dans le triangle PSP'' au côté SP'' le plus long. On voit ici cet angle à la seconde ligne de la seconde division de la seconde colonne : la première ligne a le logarithme de d.SP, qu'on tire de la seconde ligne de la seconde division de la colonne précédente, on y a aussi le logarithme de d.SP'' à la quatrième ligne, que l'on porte ici de même sur la quatrième : à la cinquième on a le logarithme du co-sinus de SP''P : on trouve cet angle à la première ligne de la seconde division de la dernière colonne de la table V. La somme des nombres logarithmiques des deux premières lignes donne dans la troisième le logarithme du premier des trois termes cherchés : la somme de ceux des deux suivantes donne dans la sixième le logarithme du second : le premier passe de négatif en positif à cause du coëfficient *cos*.SPP'', qui est négatif, l'angle étant obtus.

328. Le troisième terme a besoin de la différence de l'angle PSP''. On la trouve aisément. On a (num. 300) PSP'' $=$ TST'' $-$ TSP $-$ T''SP'': ainsi on aura d.PSP'' $= - d$.TSP $- d$.T''SP'', l'angle TST'' étant constant. On a ces deux valeurs dans la troisième division de la colonne précédente : en y changeant les signes on trouve la somme $= + 0,00118$, comme on la voit à la septième ligne de cette seconde division avec son logarithme:

dans

dans les deux suivantes on a le logarithme du *sin*.SP''P , & de la SP''. Pour trouver le premier on a l' angle SP''P ici à la ligne 5 , & le second se trouve à la tab. V , colon. 2 , divis. 2 , lign. 4. La somme de ce trois derniers nombres logarithmiques donne dans la ligne 10 le logarithme du troisième terme. Ainsi la valeur de la formule pour *d*.PP'' dans la dernière ligne est 0,00134 — 0,00250 + 0,00043 = 0,00177 — 0,00250 = — 0,00073.

329. Pour avoir *d*.CC'' dans le triangle CIC'' dépendamment des deux *d*.CI , & *d*.C''I on aura la combinaison des trois côtés avec l' angle droit en I , qui a la différence = 0. Ainsi nous avons aussi la première combinaison des trois côtés avec un angle. Il faudra faire celui-ci $= p$: on aura CC'' $= x$, & en faisant CI $= y$, C''I $= z$, on aura l'angle CC''I $= q$, l' angle C''CI $= r$: ayant fait dans la première équation $dp = 0$, on aura $dx = dy \cos.r + dz.\cos.q$, ou en mettant $\sin.r$ pour $\cos.q$, à cause de l' angle droit en I , on aura *d*.CC'' = *d*.CI × *cos*.C''CI + *d*.C''I × *sin*.C''CI . On a l' angle C''CI (tab. V , colon. 3 , divis. 2 , lign. 6) pour en tirer des tables les logarithmes du sinus, & co-sinus . Comme CI est = PP'', on a *d*.CI = *d*.PP'' à la fin de la seconde division de la col. 2 de cette Tab. VI : pour *d*.C''I on voit bien , que sa valeur sera *d*.PC — *d*.P''C'', puisqu' on a C''I = PC — P''C'': ainsi on tire la valeur *d*.C''I des deux *d*.PC , *d*.P''C'' de la première division de la première colonne de cette même table. On voit ces valeurs dans la troisième partie de cette colonne avec les deux termes de la valeur cherchée à la ligne 3 , & 6 , & leur somme à la dernière, qui donne *d*.CC''.

330. En retranchant les trois valeurs *d*.SC , *d*.SC'', *d*.CC'' des trois valeurs SC , SC'', CC'', que l' on avoit à la dernière ligne de chaque seconde division des trois colonnes de la table précédente ; on les corrige dans les trois dernières lignes de cette même colonne . Ainsi on a ici des exemples de l' usage , que l' on peut faire de mes formules différentielles appliquées non seulement au cas de deux termes constants , comme chez Cotes , & habituellement chez les Astronomes ; mais encore pour les autres

d' un

d'un seul terme constant, ou de la variation de tous les six. L'usage de cette méthode en Astronomie est plus fréquent pour la Trigonométrie sphérique, pour laquelle on les trouvera dans l' Opuscule indiqué du Tome IV. On croira en jugeant après le premier coup d'œil, que l' application de ces formules dans le cas présent allonge l'opération, & qu'il seroit mieux de refaire le calcul dépendamment d'une position nouvelle, sur-tout en retenant la réduction de la seconde longitude déjà trouvée, pour tirer la valeur de la T''P'' par la variation d.T''P'' telle, qu'on l'a trouvée ici à la ligne 6 de la première colonne. Il est bien vrai, qu'on éviteroit par-là le calcul de la table V, qui en renouvellant la réduction ne donneroit rien de plus exact, puisque un petit changement de cette réduction ne peut porter aucune erreur sensible dans une quantité aussi petite, que la d.T''P''. On n'auroit alors, que le calcul des 6 triangles de la table V, qui au premier coup d'œil peut paroître plus court, que celui-ci de la table VI. Mais on s'apercevra aisément du contraire, si l'on fait réflexion à la petitesse des valeurs, qu'on y cherche, qui n'exige jamais des parties proportionnelles, & au grand nombre des valeurs employées, qu'on a déjà dans la table précédente.

331. Ayant les nouvelles valeurs des trois lignes SC, SC'', CC'' avec les autres, qui entrent dans la détermination des éléments de l'orbite, que l'on peut corriger par les différences déjà trouvées, on pourroit s'en servir, & passer à cette détermination: mais il vaudra mieux les employer avant, pour voir, si l'erreur finale est assez corrigée. J'ai fait cela à la première division de la troisième colonne, où il y a la même opération, que nous avons déjà vu trois fois: on a la dernière selon le num. 313 à la dernière division de la table précédente. La somme des deux SC, SC'' prises de la fin de la seconde colonne donne la valeur b, & on y a CC'', qui est $= c$: on voit le double de son logarithme à la seconde ligne de cette colonne. Le reste va comme dans le cas énoncé ci-dessus. On a à la fin l'erreur négative $-0{,}00013$, qui fait voir, que la correction a été tant-soit-peu plus forte, qu'elle devoit être.

332. On pourroit bien négliger cette petite différence : mais j'en ai tenu compte, en réduisant dans les deux demi-colonnes suivantes toutes les différences des valeurs, qu'on devra employer pour les éléments. On avoit à la fin de la table V l'erreur positive 0,00902, & on a la négative 0,00013 : ainsi l'effet des corrections trouvées, qui est leur somme, a été 0,00915 : en le divisant par 13 on a 70 : donc l'erreur 13, qu'il faut corriger, en est une 70me partie : ainsi nous pourrons ajouter à chacune des différences trouvées autant d'unités dans la dernière place, que des fois sa valeur contient 70, ce qu'on voit d'un coup d'œil. Cette petite augmentation a donné la première demi-colonne, qui contient toutes les différences. La dernière de ces différences, qui est celle d'un angle exprimée en parties du rayon = 1, doit être réduite à la valeur de minutes, & secondes, ce qu'on fait aisément, en cherchant dans la table des sinus l'arc, qui a pour sinus ce nombre : pour ne pas chercher les parties proportionnelles pour les secondes, à la place de 0,00052, que l'on a trouvé, on peut en prendre le centuple, qui est 0,052 : son angle est $2^{\circ}.59'$ $= 179'$, qui divisé par 100 donne $1',79 = 1'.47''$. Ayant retranché toutes ces corrections des quantités respectives de la table précédente, j'ai formé la seconde partie de cette colonne, qui doit servir pour les déterminations suivantes.

§. XXVII.

Application du calcul numérique à la détermination des éléments de l'orbite.

333. On a la méthode de cette détermination au §. XIV numér. 154, le calcul numérique à la table VII, où la première colonne entière est employée à la détermination du nœud : mais pour m'adapter mieux au cas présent, où le point R tombe du côté de P'', & où la P''R doit être trop petite, comme on a vu dans la construction à la place du triangle SP''R, j'y ai résolu le triangle SPR, ayant déterminé l'angle SPP'' dans la résolution du triangle PSP'', & j'ai commencé par cette résolution trouvant après

à la

à la place de la P''R la PR. On a la résolution de ce triangle dans la première division de la première colonne, où l'on trouve l'angle en P par le trois côtés trouvés dans la table VI, SP, SP'', PP'' aux lignes 5, 6, 7 de la seconde demi-colonne à la fin de la table précédente. J'y employe la méthode commune du beau théorème élémentaire : *le produit de deux côtés est au produit de l'excès de la demi-somme de tous les trois sur ces mêmes côtés, comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de la moitié de l'angle intercepté*. J'ai une démonstration de ce théorème beaucoup plus simple que celles, qu'on trouve communément dans les éléments : elle est tout-à-fait commune aux triangles plans, & sphériques, si l'on y employe les sinus de la somme, & différence, & des deux excès, à la place des valeurs numériques des côtés : on s'y sert de la même figure avec les mêmes lettres : on y a de plus par la même figure, & par une suite de la même démonstration le cercle inscrit, & l'aire des triangles plans. J'ai fait un petit Mémoire sur tout cela, dans lequel il y a aussi une démonstration très-simple de la manière connue, mais trouvée par des méthodes plus sublimes, de calculer l'aire du triangle sphérique par ses trois angles. On le trouvera dans le Tome V, où il sera le dernier de ses Opuscules. Il ne contient, que de vérités connues & élémentaires : mais il a de la relation aux objets de ces volumes comme une pièce justificative de cet Opuscule-ci, & il a quelque mérite par la simplicité & généralité des démonstrations, qui pourront lui faire donner la préférence parmi les faiseurs des éléments.

334. On voit ces trois côtés aux trois premières lignes de la première colonne de cette table avec les compléments logarithmiques des deux SP, PP'', qui comprennent l'angle cherché SPP'' : dans les deux lignes suivantes il y a la somme, & la demi-somme de tous les trois : dans les deux autres le reste de la soustraction des mêmes deux côtés retranchés de cette demi-somme : on a la somme de ces quatre nombres logarithmiques à la ligne 8, & sa moitié à la suivante, avec l'angle, dont elle est le sinus. Le double de cet angle donne à la ligne 10 l'angle cherché.

335. Dans la seconde division on a la détermination de la valeur PR, & la résolution du triangle SPR, pour en tirer l'angle en S. La valeur de PR est tirée de la proportion suivante $C''I = PC - P''C'' : PC :: CI = PP'' : PR$. On voit les trois premiers termes dans les premières lignes de la seconde colonne avec le complément logarithmique du premier, & les logarithmes des autres : ils sont tirés de la dernière demi-colonne de la table VI : le premier est la différence des deux PC, P''C'' des lign. 3, & 4 : les deux autres sont aux lign. 3, & 7. Ainsi on a ici à la lign. 4 leur somme, qui donne le logarithme, & la valeur de la PR : la ligne suivante a la SP, qu'on avoit à la lign. 1, & les deux après ont la somme, & la différence de ces deux côtés avec le complément logarithmique de la première, & le logarithme de la seconde : à la ligne 8 on a le supplément de l'angle SPP'' trouvé à la fin de la première division, parcequ'il est le même, que l'angle SPR : à la ligne 9 on a la moitié de ce supplément avec le logarithme de sa tangente, à la dernière ligne la somme des derniers trois nombres logarithmiques, avec l'angle, dont elle est tangente. La différence de ces deux derniers angles donne dans la première ligne de la division suivante l'angle PSR opposé au côté PR, qui est le plus petit. Dans la seconde il y a TSP tiré de la dernière ligne de la table VI, dans la troisième la longitude du point T, qui est la première longitude du soleil (tab. I, divis. 1, colon. 4, lign. 1) augmentée de 6^s. La somme des trois angles précédents donne à la dernière ligne la longitude du nœud descendant N'. En y ajoutant 6^s, on aura le nœud ascendant $6^s.0^\circ\ 49'.39''$.

336. On a bien aisément l'inclinaison de l'orbite d'après l'angle PSR, dont la co-tangente (num. 154) en supprimant les accents des lettres P, R, C, comme on peut, est $= \frac{SP \times sin.PSR}{PC}$: on voit le sinus logarithmique de cet angle à la seconde ligne de la première division de la seconde colonne : la première a le logarithme de SP : on le tire de la première ligne de la colonne précédente, où il y avoit le complément de son logarithme : ainsi il suffit de prendre le complément de ce complément, qu'on y voit à côté à gau-

à gauche. Dans la troisième ligne il y a le complément logarithmique de PC, que l'on tire de son logarithme (col. 1, divis. 2, lign. 2). La somme de ces trois nombres logarithmiques donne à la ligne 4 la co-tangente de l' inclinaison CDP, & sa valeur, qui est $= 83^\circ.1'.7''$.

337. Le reste de la seconde colonne est employé pour trouver la distance périhélie. On la trouve à l'aide d'une des deux anomalies C''SV, CSV : nous employerons ici cette seconde, que nous trouverons dans la fig. 10 analogue en ceci à la notre 26 : elle est $=$ SCH $=$ SCB $-$ HCB $=$ SC''C $+$ C''CB $-$ HCB. On trouve l' angle SC''C dans le triangle CSC'', dont on a les trois côtés : on trouve le seconde dans le triangle CBC'', qui est rectangle en B, & par conséquent le *sin*.C''CB est $= \frac{C''B}{CC''}$, où C''B est la différence des deux CF, C''F', c'est-à-dire des deux rayons SC, SC'': le troisième HCB est droit $= 90^\circ$. J'ai donné au num. 156 le procédé pour employer l' anomalie du rayon plus long, qu'ici, comme dans notre cas aux figures 19, 21, 26, est SC'': mais alors il faudroit employer selon ce procédé dans la continuation du calcul pour le lieu du périhélie l'angle P''SR, que nous avons évité à cause de sa petitesse, en y substituant PSR. Ainsi pour faire le calcul numérique j'ai substitué ici l'anomalie CSV, & le procédé, que je viens de proposer.

338. On commence dans la seconde division de cette colonne par la résolution du triangle CSC'', en y déterminant l'angle SCC'', par ses trois côtés, que l'on tire de la fin de la dernière colonne de la tab. VI précédente. Le calcul est presque tout-à-fait le même que celui de la première division de cette table : il n'y a autre différence, que celle de l'ordre employé en écrivant les trois côtés, les deux qui contiennent l'angle cherché étant ici le second, & le troisième. On y voit les trois côtés, avec les compléments logarithmiques des deux derniers, leur somme, & demi-somme : le deux restes de la soustraction des ces deux côtés retranchés de la demi-somme avec leurs logarithmes, la somme & demi-somme de quatre nombres logarithmiques avec l' angle, qui a cet-

a cette dernière pour logarithme de son sinus : il y a dans la dernière ligne le double de celui-ci, qui est l'angle SCC'' cherché.

339. Dans la troisième division on commence par la C''B, qui est la différence des côtés SC, SC'', qu'on a aux deux premières lignes de la division précédente, avec son logarithme : on a à la seconde ligne CC'' avec son complément logarithmique, qu'on trouve aussi dans la division précédente : à la troisième on a la somme de ces deux nombres logarithmiques, qui est le logarithme du sinus de l'angle $C''CB = \frac{C''B}{CC''}$. On fait la somme de cet angle avec SCC'' en retranchant 90°, & on voit à la ligne 4 le reste, qui est la valeur de l'anomalie cherchée $= a$. Comme la somme des deux angles SCC'', C''CB = SCB a donné l'angle SCB obtus, on voit, que l'axe SV parallèle à la ligne HC tombe hors du triangle C''SC du côté de SC, comme on a exprimé dans la figure 10, & que par conséquent on y a bien substitué la figure 26 de la manière que nous avons fait.

340. Dans le reste de cette division on trouve la distance périhélie SV, qui selon le num. 157 est $= SC \times cos^2. \frac{1}{2} a$. On voit le logarithme de ses deux valeurs aux lignes 5 & 6, & leur somme à la ligne 7 avec la distance périhélie SV = 1,42901, dont elle est le logarithme.

341. Dans la première division de la dernière colonne on trouve le lieu du périhélie, que l'on a en trouvant (fig. 26) l'angle CSR, qui ajouté à l'anomalie CSV, donnera l'angle RSV à ôter dans notre cas de la longitude de la direction SR, qui est celle du nœud N' trouvée à la fin de la colonne précédente. Or selon le num. 159 on a $tan. C''SR = \frac{tan. P''SR}{cos. incl.}$, & de la même manière ici $tan. CSR$ est $= \frac{tan. PSR}{cos. incl.}$. On a à la première ligne le complément du logarithme du *cos.incl.* en tirant l'inclinaison CDP = 83°. 1'. 7'' de la fin de la première division de la seconde colonne : à la seconde ligne on a le logarithme de la tangente de l'angle PSR, que l'on prend à la première ligne de la

troi-

troisième division de la colonne 1. Par la somme de ces deux logarithmes on a à la troisième ligne celui de la tangente de CSR : l'anomalie a est répétée à la quatrième, ce qui donne à la cinquième l'angle RSV leur somme. On voit la longitude du point N' tirée de la dernière ligne de la même troisième division. On y ajoute 12 signes pour en soustraire l'angle RSV, & le reste laisse à la dernière ligne la longitude du périhélie V dans l'orbite $= 10^s. 17^\circ. 25'. 42''$.

342. Il n'y reste, que le temps de l'arrivée au périhélie, que l'on trouve dans la seconde division de cette dernière colonne, selon la méthode expliquée au long dans le §. XV, sans faire usage des tables paraboliques de Halley pour trouver le temps, qui répond à notre anomalie a, & à la distance périhélie SV, que nous avons trouvée. Si l'on appelle p' comme au num. 164 le temps, qui répond à cette anomalie dans la parabole, qui a la distance périhélie $= 1$, & T le temps, que nous cherchons; on aura (num. 161) $T = p' \times SV^{\frac{3}{2}}$: la valeur p' (num. 164) est $= \frac{1}{32}py^3 + \frac{3}{8}py$, où on a $log.p = 2{,}039872$, & $y = \frac{sin.a}{cos^2.\frac{1}{2}a}$.

343. Comme le coëfficient du second terme $\frac{3}{8}py$ multiplié par $\frac{1}{12}y^2$ donne le premier $\frac{1}{32}py^{\frac{3}{2}}$, j'ai commencé par trouver ce second terme, & l'ayant trouvé j'ai ajouté à son logarithme le logarithme de $\frac{1}{12}y^2$ pour avoir le premier : la somme de ces deux termes m'a donné le temps écoulé depuis l'arrivée au périhélie jusqu'au moment de la première observation. Pour avoir ce premier terme j'ai mis au commencement de la seconde division de cette troisième colonne le $log.sin.a = 19^\circ. 50'. 29''$; j'ai mis à la seconde ligne le complément arithmétique du double logarithme du $cos.\frac{1}{2}a$, c'est-à-dire le complément du logarithme, qu'on avoit déjà à la cinquième ligne de la dernière division de la colonne précédente. La somme de ces deux nombres logarithmiques m'a donné à la troisième ligne le logarithme de y. J'ai mis à la quatrième le logarithme de $\frac{3}{8}p$, qui est formé du $log.p = 2{,}039872$, du $log.3 = 0{,}477121$, & du complément logarithmique de $8 = \bar{9}{,}096910$, dont la somme est $1{,}613903$: j'ai ajou-

ajouté à la cinquième le *log*.SV pris de la dernière ligne de la colonne précédente, & à la sixième sa moitié, la somme de ces deux derniers étant $= log.SV^{\frac{3}{2}}$. La somme des derniers quatre logarithmes m'a donné à la ligne suivante le logarithme du premier de deux termes cherchés, & sa valeur numérique. Dans les deux lignes suivantes j'ai mis le double du *log*.*y* de la troisième ligne, & le complément logarithmique de 12. La somme des trois nombres logarithmiques précédents m' a donné dans la ligne 9 le logarithme du second terme avec sa valeur numérique. La somme des valeurs de ces deux termes m' a donné à la ligne 10 le nombre des jours entiers avec quatre chiffres décimales: celles-ci multipliées par 24 m'ont donné les heures par ces deux premières chiffres, avec quatres décimales aussi, qui multipliées par 60 m'ont donné de même les minutes, & le reste multiplié aussi pas 60 m'a donné les secondes avec le reste à négliger.

344. Ainsi j' ai eu le temps écoulé depuis l' arrivée au périhélie jusqu'au moment de la première des trois observations choisies, qui est à la première ligne de la table I, où on trouve pour le temps de la première observation Sept. $9^j. 8^h. 12'. 33''$. En y ajoutant 31^j du mois d' Août, on a $40^j. 8^h. 12'. 33''$ depuis le commencement de ce mois, comme on le voit à la ligne avant-dernière. Dans la dernière on a ôté de ce temps celui de la ligne précédente, ce qui a donné le temps cherché de l' arrivée au périhélie Août $15^j. 12^h. 41'. 50''$, ou $15^j. 12^h. 42'$.

§. XXVIII.

Conclusion de l' Opuscule, avec quelque réflexion sur des objets y appartenants ou correlatifs

345. J'AI mis à la table VIII les éléments trouvés par les deux méthodes proposées dans cet Opuscule, la graphique, & la trigonométrique, avec ceux qu' on a tirés des mêmes observations par la méthode communément employée par les Astronomes, & poussée jusqu'à la dernière précision, pour comparer ensemble ces trois résultats, & voir d' un coup d' œil combien peu

ma

ma méthode d'approximation fondée sur la substitution du mouvement uniforme sur la corde à l'inégal sur l'arc, qui est si simple, & si facile à exécuter, s'éloigne de l'exactitude, quand elle est bien employée, en faisant usage de la réduction de la seconde longitude, même dans une comète, qui paroît la moins propre à cause de l'inclinaison énorme, & dans laquelle on avoit prétendu, & debité, que la même méthode se trouvoit très-fautive.

346. On a dans la première colonne les éléments trouvés par la construction graphique au §. XII, dans la seconde ceux, qu'on a eu par le calcul trigonométrique aux §. XVII, dans la dernière les éléments de la méthode exacte. J'ai fait une pareille application de la méthode graphique aux comètes postérieures de plusieurs années, & j'y ai trouvé toujours le même accord. Cette méthode, qui est, comme je viens de dire, si simple, & expéditive, doit avoir la préférence sur toutes les autres, pour avoir d'abord après trois observations quoique peu eloignées entr'elles, s'il y a un mouvement en longitude un peu considérable, la distance de la comète au soleil, & à la terre, savoir si c'est une des comètes observées autrefois, ou une nouvelle, quelle est à-peu-près la route apparente qu'elle doit tenir parmi les constellations, & la durée de son apparition, l'annoncer, & diriger l'Astronome dans ces observations, sur-tout quand elle aura été cachée plusieurs jours par les nuages, ou par la trop grande proximité au soleil, & quand le trop grand affoiblissement de sa lumière vers la fin de son apparition l'aura rendue invisible à la vue simple. Pour avoir les éléments plus exacts on pourra employer depuis les observations les plus éloignées en rectifiant les trouvés par cette première approximation selon la méthode, que j'ai proposée au paragraphe XVII, ou selon une autre plus simple encore, qu'on trouvera dans le dernier volume.

347. Je ne suivrai la méthode proposée ici pour cet objet en y applicant le calcul numérique, qui seroit assez long, sur-tout si ne supposant rien d'exact dans la première détermination des éléments faite par la construction graphique, comme on y a supposé d'abord exacte une des trois distances relative à une des trois observations, qui ont servi de base à la même détermina-

 tion,

tion, on vouloit employer les trois changements, j' ai proposé depuis au num. 189, ce qui est nécessaire pour s' assurer d' une exactitude suffisante, comme aussi je ne donnerai pas l' application de la méthode de l' équation de sixième degré, qui doit bien s' éloigner encore plus de l' exactitude, & qui exige beaucoup de calcul numérique avec la délinéation d' un cercle, & d' une parabole, & un tâtonnement, ou la délinéation d' une autre courbe beaucoup plus haute, quoique d' une construction très-facile. Il me suffit d' avoir donné au long l' exemple numérique de deux méthodes proposées dans cet Opuscule pour trouver par une assez bonne approximation les éléments de l' orbite d' une comète supposée parabolique par trois observations pas trop éloignées entr' elles, la première très-simple, & très-facile à exécuter, qui employe la construction graphique, & la seconde par le calcul trigonométrique un peu plus long, mais encore incomparablement plus facile dans l' exécution, que le communément employé par les Astronomes. J' ai fait voir ici, comme je l' ai énoncé ci-dessus, un accord bien peu éloigné de l' exactitude entre les éléments trouvés par ces deux méthodes, & ceux, qui ont été donnés par la méthode commune poussée jusqu' à l' exactitude, & cela dans la même comète, qu' on avoit portée pour un exemple de leur éloignement énorme de l' exactitude, & du paralogisme, qu' on prétendoit y avoir trouvé.

348. D' ailleurs pour ce, qui appartient aux comètes il suffit d' avoir des éléments approchants des vrais, pour les reconnoître, quand elles reviennent, premiérement parcequ' elles reviennent très-rarement, & après parcequ' en revenant n' ont pas l' orbite exactement la même, mais seulement par un à-peu-près. Pour ce qui appartient au premier article, il n' y a eu jusqu' à présent, qu' une seule comète, qui soit revenue après son retour prévu, & annoncé. On avoit reconnu dans le catalogue des comètes calculées par Halley (& il avoit calculé toutes celles, dont il y avoit eu des observations astronomiques en donnant leurs éléments) trois de leurs systêmes tant peu différents entr' eux, avec des intervalles de temps peu différents aussi, qu' avec raison on les a jugés appartenants à une même comète. Ces interval-

les

les étoient de 75 à 76 ans, ainsi on a annoncé son retour : elle est revenue l'an 1758 : mais elle a retardé beaucoup ce retour, & les éléments se sont trouvés plus changés, qu'on ne peut pas craindre d'éloignement de l'exactitude dans l'orbite déterminée par la méthode d'approximation proposée ici. On voyoit aussi la même différence parmi les éléments des apparitions précédentes. Pour ce qui appartient au temps périodique dans ce dernier retour, il a été allongé de 19 mois par rapport au dernier précédent. M. Clairaut ayant calculé l'effet des aberrations causées par l'action de Jupiter, & de Saturne, qui sont le plus gros, & agissent, où déjà l'action du soleil est diminuée par l'éloignement beaucoup plus grand, qu'ici bas plus près de nous, où les comètes sont visibles, sans avoir eu le temps d'achever tout le calcul, avoit annoncé le retardement de 20 mois, en prévenant les Astronomes, qu'on pouvoit attendre son retour vers la moitié du mois d'Avril, mais qu'il ne pouvoit pas s'assurer de ce temps avec toute la précision à cause de quelques termes, qu'il devoit encore faire entrer dans le calcul, & de l'action des autres planètes inférieures : que pourtant il étoit sûr, que la petitesse de ces termes, & de ces actions omises ne pouvoit porter, qu'environ sur un mois. La prédiction a été justifiée par l'événement : à la place de la moitié du mois d'Avril, elle est arrivée à son périhélie vers la moitié du mois de Mars.

349. C'est, comme j'ai dit, la seule comète, dont on a vu le retour après l'annonce. Il y en a une autre seule parmi les orbites déterminées par Halley, dont on a cru la période de 129 ans, & on l'attendoit pour l'an 1790 : mais l'Académie l'ayant proposé pour sujet d'un de ses prix, M. Mechain a trouvé dernièrement, que les observations, quoique bien grossières dans la première des deux apparitions faites avant le retablissement de l'Astronomie, avoient été forcés intolérablement pour déterminer ces éléments, & qu'absolument ces-là devoient avoir été deux comètes différentes. Il y a eu dernièrement le phénomène singulier découvert par M. Lexel de l'orbite de la comète de l'an 1770, qui ne s'accordant pas avec aucune parabole de manière, qu'on trouvoit toujours des erreurs beaucoup supérieures à tout ce qu'

on pourroit supçonner aujourd' hui dans les observations : il a trouvé un accord admirable de toutes ces observations avec une ellipse d' une période très-courte de cinq ans, & demi, & il a remarqué, qu' elle avoit passée si près de Jupiter dans son périhélie, que l' action de celui-ci devoit avoir changé tout-à-fait son orbite. La découverte avoit été faite à la fin de cette période, & elle avoit passé alors derrière le soleil, & dans le temps, que les nuits sont très-courtes, ce qui avoit empêché de l' apercevoir: à la fin de la période suivante on ne l' a pas revue: elle s' étoit trouvée après 11 ans de nouveau très-près du même Jupiter, qui doit l' avoir dérangée aussi, & changée totalement sa route.

350. Ce dérangement si considérable est non seulement bien extraordinaire, mais peut-être unique: pour avoir un si grand approche à Jupiter, il faut que l' inclinaison de l' orbite soit très-petite, & que, quand la comète arrive à la distance au soleil égale à cette de Jupiter, cette planète se trouve dans cette partie de son orbite, circonstances, dont l' accord a une quantité énorme de cas contre un. Ordinairement le dérangement de la forme de l' orbite doit être assez petit: mais par ces exemples on voit bien, que le retour de la même comète est très-rare, comme j' ai dit, & qu' il présente des différences telles, qu' on ne peut pas se servir des éléments déterminés par les apparitions précédentes pour déterminer la route apparente qu' une comète tiendra à son retour, comme on fait les éphémérides pour la révolution suivante d' une planète par les tables formées sur les révolutions précédentes. Même on ne peut pas avoir sa route apparente pour le retour par un à-peu-près, qu' à l' aide d' une observation de la nouvelle apparition, ce que j' ai pratiqué au retour de celle du 1758. En sachant en gros la forme, la grandeur, la position de l' orbite, il suffit, mais il est nécessaire, d' avoir une nouvelle observation, pour déterminer le temps de son arrivée au périhélie, ce qui donne les positions respectives par rapport aux lieux, où la terre doit se trouver dans son orbite. On verra cette méthode dans le second des Mémoires correlatifs.

351. Dans le troisième j' ajouterai la méthode pour déterminer l' orbite elliptique, quand les observations ne s' accordent pas avec

aucune parabolique, les écarts étant plus forts que ce qu'on peut rejetter sur les observations, & sur-tout quand la suite des erreurs présente certaine régularité. Ce troisième Mémoire donne cette méthode, & il y en aura une autre dans le Tome V, qui sera son Opuscule VI.

352. J'avois pensé d'abord, qu'on pourroit résoudre le problême de la manière suivante. Ayant trouvé deux paraboles, dont une seroit déterminée par mes méthodes en employant trois des premières observations, & l'autre en employant trois des dernières, on chercheroit une ellipse, qui auroit ces deux paraboles pour osculatrices. La solution seroit très-facile, même en supposant chacune des deux paraboles en simple contact avec l'ellipse. Comme le centre des forces doit être le foyer de la section conique décrite autour de ce centre, le soleil seroit le foyer tant de cette ellipse, que de chacune des deux paraboles : si par la méthode de cet Opuscule on avoit trouvé les deux paraboles, on auroit la position, & la longueur d'un rayon vecteur tant de la première, que de la seconde de ces déterminations, & l'angle que chacun d'eux contiendroit avec la tangente, qui a été un des fondements de la recherche des éléments dans ma méthode : on tireroit de la différence des longitudes de ces rayons l'angle, qu'ils contiendroient entr' eux : celui-ci avec leur longueur donneroient la corde de l'ellipse base du triangle, dont on auroit les deux côtés, & l'angle intercepté : on y auroit aussi les angles à cette base formés par elle, & par les rayons vecteurs : en sachant l'angle, que chacun des mêmes rayons contient avec la tangente, on sait celui, qui est contenu par la même tangente prolongée avec la ligne, qui va du point du contact à l'autre foyer de l'ellipse, qui lui doit être égal, cet angle combiné avec les précédents donne celui, que chacune de ces lignes contient avec la même corde, ce qui donne les deux angles à la base d'un autre triangle appuyé sur cette même base, & terminé à l'autre foyer. Ainsi on trouve chacune de ces deux lignes, qui en est un côté: elle avec son rayon vecteur forme la longueur de l'axe de l'ellipse, dont on trouveroit aussi très-aisément la position, & la distance des deux foyers, qui a la double excentricité.

353. Ce

353. Ce raisonnement étoit bien séduisant, & j'avois commencé à en faire quelqu' application, quand je me suis aperçu d' un défaut essentiel, qui y étoit caché. Pour trouver la distance de la comète au soleil j'avois employé l'accord de la formule $bb - \frac{c^4}{12b} = a$, & cette valeur a étoit tirée de la vîtesse de la comète, qui a été prise du beau théorème appartenant au mouvement dans les paraboles, qu'à parité de distance le quarré de la vîtesse dans la parabole est double du quarré dans le cercle. Comme la vîtesse dans l'éllipse n'est pas la même, il faut pour une méthode analogue avoir égard à cette différence de vîtesse, ce que j'ai fait depuis, & j'ai employé aussi d'autres détours pour parvenir à une solution dégagée de tout le danger de quelque paralogisme, comme on le verra dans le Mémoire, & Opuscule indiqués.

354. Je suis bien persuadé, que si nous avions des observations des comètes bien exactes jusqu'à très-peu de secondes, nous trouverions parmi le grand nombre de celles, que la perfection des instruments, & la diligence infaticable des Observateurs tels, qu'un Messier, & un Mechain à Paris, un Pigot en Angleterre nous ont données (on en a trouvé une à la fin de l'année dernière, & une autre au commencement de celle-ci) nous en trouverions plusieurs, dont l'apparition seroit d' assez longue durée pour en voir un écartement de la route parabolique suffisant pour parvenir à en déterminer l' ellipticité : mais comme j' ai déjà indiqué cidessus, les observations des comètes aujourd' hui sont incertaines, même dans les limites d'une, & encore de deux minutes, comme on voit par l'irrégularité des erreurs, qu'on trouve dans la comparaison des lieux calculés d'après les éléments, avec les observés, qu'on est accoutumé d' imprimer avec ces éléments. On est bien content, quand il n' y a des erreurs, qui aillent au de-là de deux minutes, & très-souvent on les voit sautiller irréguliérement, tandis que pour cet objet on auroit besoin de s' assurer de très-peu de secondes.

355. L'inexactitude de ces observations provient en partie de la difficulté, que la chose a en elle même, & en partie de la nature des instruments, qu'on y employe, & de la méthode, qu' on

on suive en les employant. Les comètes ont toujours ce contour nébuleux, qui environne le noyeau sans laisser ni un disque circulaire tranché, ni aucun point bien distinct à pouvoir le suivre toujours le même dans toutes les observations. Il faut prendre par une estimation vague le milieu de ce noyeau. La méthode, qu' on employe est de faire entrer successivement dans le champ d' une lunette fixée immobilement la comète, & une étoile fixe pour en déterminer la différence en ascension droite, & en déclinaison. Ordinairement on ne trouve pas des fixes bien connues, & déjà bien déterminées à portée, & il faut en employer des inconnues, pour en déterminer depuis la position en les comparant avec d'autres, ce qui multiplie les erreurs inévitables dans chaqu' observation.

356. Il faut ajouter les erreurs, qu' on trouve dans les catalogues des fixes les plus estimés. On en trouve par tout: mais il est incroyable, combien on en trouve dans celui de Flamsteed. On en verra même de dix minutes, & même dans les déclinaisons, qui sont capables d' une exactitude beaucoup plus grande, dans le catalogue des boréales, qu' à présent fait avec tout le soin possible M. Cagnoli à Paris avec un quart de cercle excellent, & tirant chaque détermination de plusieurs observations: soit que ces erreurs se soient glissées dans les observations mêmes, ou dans les copies, ou dans l' impression, soit qu'il y eut eu des changements arrivés depuis ce temps-là. Ell'est bien remarquable l' expression excellente, que l' Abbé de la Caille a employé dans son ouvrage sur ce même objet en disant, *quo enim fixas magis observamus, eo minus fixas invenimus*.

357. Les erreurs, qui proviennent des observations mêmes de la comète, pourroient être corrigées en les multipliant beaucoup: mais la méthode, que nous venons d' exposer, ne le permet pas. Il s' écoule un temps très-souvent considérable entre le passage de la comète, & de la fixe, ce qui empêche de répéter l' opération bien de fois, & très-souvent il arrive, qu' après le passage d' un des deux astres par le champ de la lunette, un petit nuage empêche d' y voir celui de l' autre, ce qui rend inutile ce premier essai. Pour éviter cet inconvenient il faudroit avoir un instrument, qui sans comparaison avec les fixes done-

ne-

neroit la position de la comète immédiatement par lui-même.

358. On peut employer pour cet objet deux espèces d' instruments, une machine parallactique fixée immobilement, & bien vérifiée, qui donneroit à la fois l' ascension droite, & la déclinaison de l' astre observé, & un instrument azimutal, & vertical, qui en donneroit à la fois l'azimuth, & la hauteur sur l' horizon. Le secteur équatorial est une espèce de machine parallactique, qui donne dans un arc d' un cercle beaucoup plus grand, que ceux des machines parallactiques ordinaires, les déclinaisons: mais il ne sert ordinairement, que pour comparer les planètes, & comètes avec des fixes plus connues, qui se trouvent plus aisément à une différence plus grande de déclinaison: la mobilité du même secteur en déclinaison, & la petitesse de son arc le rend peu propre à aucun autre usage. Une machine parallactique toute d' une seule espèce de métal, qui auroit bien grands les deux cercles, un pour l' ascension droite, & l' autre pour la déclinaison, avec l' axe fixé immobilement, seroit bien plus utile, & pourroit remplir cet objet, s' il étoit bien solide, & inflexible, & bien vérifié dans ces divisions, dans la position respective de ses axes, & dans la collocation du total de la machine. On verra la méthode de cette vérification dans l' Opuscule XIV du Tome IV. Mais un instrument de la seconde espèce seroit incomparablement plus propre pour le même objet. J' en ai parlé à la fin du Tome II en indiquant ce même usage entre les autres très-grands avantages de cet instrument pour toute l' Astronomie: on le verra beaucoup mieux dans l' Opuscule VI du même Tome IV, où il y aura aussi la manière de le placer, & de le vérifier, avec ces principaux usages. Par cet instrument on pourroit avoir dans une couple d' heures plus de 40 observations, dont chacune donneroit le lieu de la comète indépendamment des positions des étoiles fixes. Le milieu entre tant de résultats éviteroit absolument l' erreur même de deux, ou trois secondes, & je suis sûr, qu' alors par les méthodes, que j' ai proposées dans cet Opuscule, nous pourrions trouver les éléments des orbites elliptiques d' un bon nombre de comètes, & prévoir, & annoncer d' avance leur retour.

TAB.

TAB. I.

1774. T. M.	Long. ☄	Lat. ☄	Long. ☉
Sep. $9^{j}.\ 8^{h}.\ 12'.\ 33''$	$0^{s}.\ 24^{\circ}.\ 56'.\ 12''$	$55^{\circ}.\ 3'.\ 41''$	$5^{s}.\ 17^{\circ}.\ 7'.\ 38''$
25 . 7 . 7 . 16	11 . 22 . 47 . 40	31 . 19 . 14	6 . 2 . 43 . 34
Oct. 9 . 7 . 3 . 30	11 . 8 . 6 . 53	5 . 37 . 4	6 . 16 . 32 . 10

Dist... ☉... ♁			
1,00603	t = 22974,7	$m = 32^{\circ}.\ 8'.\ 32''$	$e = 217^{\circ}.\ 48'.\ 34''$
1,00155	t' = 20156,2	m' = 14 . 40 . 47	e' = 170 . 4 . 6
0,99754	t'' = 43130,9	m'' = 46 . 49 . 19	e'' = 141 . 34 . 43

	v = 0,03275 . . 8,515211	t'' 4,634789
0,756499	t 4,361250	. $sin.m''$ . . $\bar{0}$,137135
	t' 4,304408	4,771924
2 . t'' 9,269577	4 0,602060	. t' . . . . . . $\bar{5}$,695592
a = 1,06188 . . 0,026076	. 2 . t'' . . . . . . $\bar{0}$,730423	. t . . . . . . $\bar{5}$,638750
	v' = 0,03254 . . 8,512352	L' 0,467516
	$sin.e'$ 9,236723	L'' 0,410674
	L 7,749075	

TAB. II.

L 7,749075	 7,749075	g = 0,1481
v' 8,512352	 8,512352	g' = − 0,0727 . . 8,861534
T'P' = 0,55	0,50	. g − g' = 0,2208 . . $\bar{0}$,656001
SP' = 1,540 . . . 0,187521	1,493 . . . 0,174060	9,517535
. 3 . SC' = 1,580 . . . $\bar{9}$,404029	1,526 . . . $\bar{9}$,449337	h' = − 0,05 . . . 8,698970
P'p = 0,0127 . . 8,103902	0,0137 . . 8,135749	h = − 0,0384 . . 8,584331
. tp = 0,570 . . . $\bar{0}$,244125	0,519 . . . $\bar{0}$,284833	h'' = − 0,0695 . . 8,841985
sin. 0°. 33', 9 . . 7,993200	0°. 37', 2 . . 8,033908	d.T'P' = 0,0165 . . 8,216505
sin. 0 . 8, 6 . . 7,397229	0 . 10, 5 . . 7,483245	d.TP = 0,0126 . . 8,101866
y = 0 . 25, 3	0 . 26, 7	d.T''P'' = 0,0229 . . 8,359520
tp 9,755875	 9,715167	T'P' = 0,5165
sin.m' = 15°. 6', 1 . . 9,415862	15°. 7', 5 . . 9,416517	TP = 0,4100
L' 0,467516	 0,467516	T''P'' = 0,7249
TP = 0,4358 . . . 9,639253	0,3974 . . 9,599200	
sin.m = 31°. 43', 2 . . 9,720759	31°. 41', 8 . . 9,720509	
L'' 0,410674	 0,410674	
T''P'' = 0,7715 . . . 9,887308	0,7020 . . 9,846350	
SC = 1,508	1,453	
SC'' = 1,670	1,608	
b = 3,178 . . . 0,502154	3,061 . . . 0,485863	
2 . c = 0,618 . . . 9,581977	0,569 . . . 9,510225	
4 . c 9,163954	 9,020450	
12 1,079181	 1,079181	
12b 1,581335	 1,565044	
1,21376 . . 0,084131	0,99103 . . 9,996088	
0,00382 . . 7,582619	0,00285 . . 7,455406	
1,20994	0,98918	
a = 1,06188	1,06188	
g = + 0,14806	− 0,07270	

T A B. III.

Mai.	Long. ♅	Dist. au ☼	Dist. à la ♅
31.	8ˢ. 9°. 58'.	1, 790.	1, 935.
Juin.			
10.	8. 19. 32.	1, 715.	1, 899.
20.	8. 29. 5.	1, 638.	1, 840.
30.	9. 8. 37.	1, 580.	1, 751.
Juil.			
10.	9. 18. 9.	1, 520.	1, 674.
20.	9. 27. 41.	1, 487.	1, 542.
31.	10. 8. 12.	1, 450.	1, 390.
Août.			
10.	10. 17. 48.	1, 436.	1, 216.
20.	10. 27. 25.	1, 436.	1, 036.
31.	11. 8. 3.	1, 450.	0, 844.
Sept.			
10.	11. 17. 46.	1, 480.	0, 691.
20.	11. 27. 32.	1, 520.	0, 599.
30.	0. 7. 21.	1, 579.	0, 612.
Octob.			
10.	0. 17. 14.	1, 638.	0, 750.
20.	0. 27. 10.	1, 709.	0, 939.
31.	1. 8. 9.	1, 790.	1, 208.
Novem.			
10.	1. 18. 13.	1, 880.	1, 430.
20.	1. 28. 18.	1, 973.	1, 689.
30.	2. 8. 26.	2, 060.	1, 932.

TAB. IV.

$T'P' = 0,51650 \ldots\ldots\ldots \underline{9,713070}$	$Sp = 1,49960$
$T'S = \underline{1,00155}$	$St = \underline{0,96898}$
$1,51805 \ldots\ldots \bar{9},818714$	$2,46858 \ldots\ldots \bar{9},607553$
$0,48505 \ldots\ldots 9,685786$	$0,53062 \ldots\ldots 9,724783$
$ST'P' = 170°.\ 4'.\ 6''$	$tSp = 3°.\ 22'.\ 32''$
$\underline{9 . 55 . 54}$	$\underline{176 . 37 . 28}$
$tan.\ 4 . 57 . 57 \ldots 8,938959$	$tan.\ 88 . 18 . 44 \ldots 1,530682$
$tan.\ 1 . 35 . 25 \ldots 8,443459$	$tan.\ 82 . 11 . 40 \ldots 0,863018$
$.sin.\ T'P'S = 6 . 33 . 22 \ldots \bar{0},942425$	$.sin.\ Stp = 170 . 30 . 24 \ldots \bar{0},782692$
$sin.\ ST'P' \ldots\ldots\ldots 9,236723$	$sin.\ ST'P' = 170 .\ 4 .\ 6$
$ST' \ldots\ldots\ldots \underline{0,000673}$	$y = 0 . 26 . 18$
$SP' = 1,51294 \ldots\ldots 0,179821$	
$v' = 0,03257 \ldots\ldots \underline{8,512352}$	$sin.\ tSp \ldots\ldots\ldots 8,769971$
$tan.\ P'T'C' = 31°.\ 19'.\ 14'' \ldots 9,784261$	$Sp \ldots\ldots\ldots \underline{0,175976}$
$P'C' \ldots\ldots\ldots \underline{9,497331}$	$tp \ldots\ldots\ldots \underline{9,728639}$
$tan.\ P'SC' = 11 . 44 .\ 8 \ldots 9,317510$	$sin.\ m' = 15°.\ 7'.\ 5'' \ldots 9,416322$
$.sin.\ P'SC' \ldots\ldots\ldots \underline{\bar{0},691660}$	$L' \ldots\ldots\ldots \underline{0,467516}$
$SC' \ldots\ldots\ldots 0,188991$	$TP = 0,40971 \ldots\ldots \underline{9,612477}$
$3 \cdot SC' \ldots\ldots\ldots \underline{0,566973}$	$sin.\ m = 31 . 42 . 14 \ldots 9,720597$
$\bar{9},433027$	$L'' \ldots\ldots\ldots \underline{0,410674}$
$P'p = 0,01334 \ldots\ldots 8,125200$	$T''P'' = 0,72429 \ldots\ldots 9,859910$

TAB. V.

TS = 1,00603	T''S = 0,99754	SP = 1,35324
TP = 0,40971	T''P'' = 0,72429	SP'' = 1,62843
. 1,41574 . . . . $\bar{9}$,849017	. 1,72183 . . . . $\bar{9}$,764010	. 2,98167 . . . . $\bar{9}$,525540
0,59632 9,775480	0,27325 9,436560	0,27519 . . . 9,439633
STP = 217°. 48'. 34''	ST''P'' = 141°. 34'. 43''	PSP'' = 2°. 40'. 1''
37 . 48 . 34	38 . 25 . 17	177 . 19 . 59
tan. 18 . 54 . 17 . . 9,534621	*tan.* 19 . 12 . 38 . . 9,542136	*tan.* 88 . 39 . 59 . . 1,633015
tan. 8 . 12 . 30 . . 9,159118	*tan.* 3 . 9 . 54 . . 8,742706	*tan.* 75 . 50 . 35 . . 0,598188
*sin.*TSP = 10 . 41 . 47 . . $\bar{0}$,731411	*sin.*T''SP'' = 16 . 2 . 44 . . $\bar{0}$,558460	*sin.*SP''P = 12 . 49 . 24 . . $\bar{0}$,653754
*sin.*STP 9,787487	*sin.*ST''P'' 9,793399	*sin.*PSP'' 8,667734
TP 9,612477	T''P'' 9,859910	SP 0,131375
SP = 1,35324 0,131375	SP'' = 1,62843 . . . 0,211769	PP'' = 0,28370 9,452863
tan.l = 55 . 3 . 41 . . 0,155764	*tan.l''* = 5°. 37'. 4''. . 8,992836	C''I = 0,51522 9,711993
PC = 0,58646 . . . 9,768241	P''C'' = 0,07124 . . . 8,852746	*tan.*C''CI = 61 . 9 . 39 . . 0,259130
*tan.*PSC = 23 . 25 . 51 . . 9,636866	*tan.*P''SC'' = 2 . 30 . 18 . . 8,640977	*sin.*C''CI . . . . $\bar{0}$,057507
*sin.*PSC . . . . $\bar{0}$,400508	*sin.*P''SC'' . . . . $\bar{1}$,359454	CC'' = 0,58817 9,769500
SC = 1,47486 0,168749	SC'' = 1,63005 . . . 0,212200	
TSP = 10°. 41'. 47''		*b* = 3,10491 0,492049
T''SP'' = 16 . 2 . 44		2 . *c* 9,539000
26 . 44 . 31		4 . *c* 9,078000
TST'' = 29 . 24 . 32		12 1,079181
PSP'' = 2 . 40 . 1		12*b* 1,571230
		1,07411 0,031049
		0,00321 7,506770
		1,07090
		a = 1,06188
		+ 0,00902

.0,2208

T A B. VI.

0,2208 . . $\bar{0}$,6560
0,0384 . . 8,5843
0,00902 . . 7,9552
d.TP = − 0,00157 . . 7,1955
0,2474
d.T''P'' = − 0,00277 . . 7,4429
tan.*l* 0,1558
d.PC = − 0,00225 . . 7,3513
tan.*l''* 8,9928
d.P''C'' = − 0,00027 . . 6,4357

cos.SPT = 27°. 7'. . 9,9494
d.SP = − 0,00140 . . 7,1449
cos.SP''T'' = 22 . 23 . . 9,9660
d.SP'' = − 0,00256 . . 7,4089

sin.SPT 9,6588
.SP . . . . $\bar{9}$,8686
d.TSP = − 0,00053 . . 6,7229
sin.SP''T'' 9,5807
.SP'' . . . . $\bar{9}$,7882
d.T''SP'' = − 0,00065 . . 6,8118

d.PC 7,3513
sin.PSC = 23°. 26'. . 9,5995
− 0,00089 . . 6,9508
d.SP 7,1449
cos.PSC 9,9626
− 0,00128 . . 7,1075
d.SC = − 0,00217

d.P''C'' 6,4357
sin.P''SC'' = 2°. 30'. . 8,6397
− 0,00001 . . 5,0754
d.SP'' 7,4089
cos.P''SC'' 9,9996
− 0,00256 . . 7,4085
d.SC'' = − 0,00257

d.SP 7,1449
cos.SPP'' = 164°. 31'. . 9,9839
+ 0,00134 . . 7,1288
d.SP'' 7,4089
cos.SP''P = 12 . 49 . . 9,9890
− 0,00250 . . 7,3979
d.PSP'' = 0,00118 . . 7,0719
sin.SP''P 9,3460
SP'' 0,2118
+ 0,00043 . . 6,6297
d.PP'' − 0,00073

d.CI = *d*.PP'' . . . 6,8633
cos.C''CI = 61°. 10'. . 9,6833
− 0,00035 . . 6,5466
d.C''I = − 0,00198 . . 7,2967
sin.C''CI 9,9425
− 0,00173 . . 7,2392
d.CC'' = − 0,00208

SC = 1,47269
SC'' = 1,62748
CC'' = 0,58609

b = 3,10017 0,491386
2.*c* = 0,58609 9,535930
4.*c* 9,071860
12 1,079181
12*b* 1,570567
1,06492 0,027316
− 0,00317 7,501293
1,06175
a = 1,06188
− 0,00013

d.TP = − 0,00155	TP = 0,40816
d.T''P'' = − 0,00273	T''P'' = 0,72156
d.PC = − 0,00222	PC = 0,58424
d.P''C'' = − 0,00027	P''C'' = 0,07097
d.SP = − 0,00138	SP = 1,35185
d.SP'' = − 0,00253	SP'' = 1,62590
d.PP'' = − 0,00072	PP'' = 0,28298
d.SC = − 0,00214	SC = 1,47272
d.SC'' = − 0,00254	SC'' = 1,62751
d.CC'' = − 0,00205	CC'' = 0,58612
d.TSP = { − 0,00052 ; − 1'. 47'' }	TSP = 10°. 40'. 0''

TAB. VII.

.SP $=$ 1,35185	$\bar{2}$,860070
SP'' $=$ 1,62590	
.PP'' $=$ 0,28298	$\bar{0}$,548245
3,26073	
1,63036	
0,27851	9,444841
1,34738	0,129490
	9,991646
sin. 82°. 4'. 0''	9,995823
SPP'' $=$ 164 . 8 . 0	
.C''I $=$ 0,51327	$\bar{0}$,289654
PC $=$ 0,58424	9,766592
PP''	9,451755
PR $=$ 0,32211	9,508001
SP $=$ 1,35185	
.1,67396	$\bar{9}$,776254
1,02974	0,012727
*sup.*SPP'' $=$ 15°. 52'. 0''	
tan. 7 . 56 . 0	9,144121
tan. 4 . 53 . 59	8,933102
PSR $=$ 3 . 2 . 1	
TSP $=$ 10 . 40 . 0	
T $=$ 11ˢ. 17 . 7 . 38	
N' $=$ 0 . 0 . 49 . 39	

SP	0,130930
sin. PSR	8,723635
.PC	$\bar{0}$,233408
*cot.*CDP $=$ 83°. 1'. 7''	9,087973
.SC $=$ 1,47272	$\bar{9}$,831880
SC'' $=$ 1,62751	
.CC'' $=$ 0,58612	$\bar{0}$,232013
3,68635	
1,84317	
0,37045	9,568730
1,25705	0,099352
	9,731975
sin. 47 . 15 . 51	9,865987
SCC'' $=$ 94 . 31 . 42	
C''B $=$ 0,15479	9,189743
.CC''	$\bar{0}$,232013
*sin.*C''CB $=$ 15 . 18 . 47	9,421756
a $=$ 19 . 50 . 29	
2.*cos.* $\frac{1}{2}a$ $=$ 9 . 55 . 14	9,986914
SC	0,168120
SV $=$ 1,42901	0,155034

.*cos.* CDP	$\bar{0}$,91,236
tan. PSR	8,724243
tan. CSR $=$ 23°. 33'. 28''	9,639499
a $=$ 19 . 50 . 29	
RSV $=$ 43 . 23 . 57	
N' $=$ 0 . 49 . 39	
V $=$ 10ˢ. 17°. 25'. 42''	
sin. a	9,530734
.2 . *cos.* $\frac{1}{2}a$	$\bar{0}$,013085
y	9,543819
$\frac{3}{8}p$	1,613903
SV	0,155034
$\frac{1}{2}$.SV	0,077517
24,5625	1,390273
2 . y	9,087638
.12	$\bar{8}$,920819
0,2505	9,398730
24,8130 $=$ 24ʲ. 19ʰ. 30'. 43''	
40 . 8 . 12 . 33	
Août . . . 15ʲ. 12ʰ. 41'. 50''	

Élé-

TAB. VIII.

Éléments.	Construction.	Calcul trigon.	Méthode exacte.
Lieu du nœud	$6^s.\ 0^\circ.48'$	$6^s.\ 0^\circ.49'.39''$	$6^s.\ 0^\circ.48'.47''$
Inclinaison	83 . 1	83 . 1 . 7	83 . 1 . 20
Lieu du périhélie	10 . 17 . 13	10 . 17 . 25 . 42	10 . 16 . 57 . 14
Passage par le périhélie	T. M. Août $15^j.\ 11^h$	$15^j.\ 12^h.41.50$	$14^j.\ 23^h.28.\ 0$
Distance périhélie	1,430	1,42901	1,42597
Directe			

MÉ-

MÉMOIRES CORRELATIFS.

MÉMOIRE I.

Construction plane de la Trigonométrie sphérique.

PRÉFACE.

La Trigonométrie sphérique donne la résolution de tous les cas des triangles sphériques, quand trois des six termes, c'est-à-dire de trois angles & trois côtés, étant donnés, on cherche les autres. Elle se sert du calcul numérique à l'aide des tables des sinus, ce qui donne toute la précision, qu'on cherche: mais il arrive très-souvent, que la dernière exactitude n'est pas nécessaire, ou n'est pas possible, parceque les données même ne sont pas exactes à la rigueur: alors il est très-utile d'avoir une méthode générale pour résoudre les mêmes problêmes par une construction graphique, qui est très-avantageuse, même dans les cas, où l'on cherche l'exactitude, pour reconnoître les erreurs du calcul, parceque ces erreurs sont ordinairement grossières, & la construction donne des valeurs approchantes.

On se sert très-souvent, & très-aisément de la construction dans les cas de la Trigonométrie plane en faisant usage du rapporteur, c'est-à-dire d'un demi-cercle divisé en degrés pour mesurer les angles, & d'une échelle de parties égales, ou du compas de proportion: mais il n'est pas également facile de trouver une construction simple dans la Trigonométrie sphérique, qui a ses côtés dans des plans différents. C'est pourquoi on rendra service à la Géométrie pratique, si l'on en donne une, qui soit générale & simple. Celle qu'on verra ici, peut être goûtée par sa simplicité, & par l'uniformité de sa marche. Elle a déjà été imprimée la même, quant au fond, en latin à Rome l'année 1737.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES

1. Soit le triangle (fig. 1 Tab. VIII) sphérique AQD, & le cercle du côté AD soit rencontré en G, & en F par les demi-cercles des côtés AQ, DQ. Si l'on conçoit QI (*) perpendiculaire au plan du premier cercle, & par le point I deux cordes KB, NE perpendiculaires aux diamètres AG, DF en L, H, en plaçant K dans le demi-cercle ADG, & N dans le demi-cercle DAF; les sections de l'hémisphère faites par les plans, qui passent par les trois points K, Q, B, & par les trois autres N, Q, E, seront des demi-cercles, qui auront leurs pôles en A & D. C'est pourquoi les arcs AK, AQ, AB seront égaux entr' eux, de même que les trois arcs DN, DQ, DE; & l'arc KQ sera la mesure de l'angle A, l'angle D sera égal au rectiligne QHN.

2. Si dans le plan du premier cercle on fait un demi-cercle KMB avec l'ordonnée perpendiculaire IM, & qu'on prenne sur la corde BK prolongée, s'il le faut, $Ih = IH$; en tirant Mh on aura l'angle $MhI = QHI$, parceque dans les deux triangles MIh, QIH rectangles en I on aura $Ih = IH$ par construction, & $IQ = IM$ par l'égalité des deux demi-cercles KQB, KMB. L'angle QHI sera le même, que l'angle QHN, ou son supplément, selon que I tombera sur HN, ou sur HE, & par-là l'angle MhI sera dans le premier cas égal à l'angle ADQ, dans le second son supplément, & dans le premier IE sera la somme de IH, & de $HE = HQ$, dans le second la différence.

3. On voit aussi, que ADE sera la somme, AN la différence des deux côtés AD, DE, & pour cela le point E devra toujours être dans l'arc BGK, N dans l'arc BAK: parceque si E tomboit dans AK, la somme des deux côtés AD, DE seroit moindre du troisième, & s'il tomboit dans AB, la somme des trois BA, AD, DE seroit plus grande, qu'un cercle.

4. Si

(*) La figure est forcée pour rendre visibles les lignes. Le point Q se trouve sur la surface de la sphère dans la rencontre des deux demi-cercles AQG, DQF perpendiculairement sur le point I, qui est la rencontre des cordes BK, EN: un demi-cercle passe par les points K, Q, B, & il est égal au demi-cercle KMB.

4. Si en formant la figure on place l' arc AD à gauche par rapport au diamètre AG, & la ligne Ih à gauche par rapport à la ligne MI dans le premier cas, & à droite dans le second; toujours celui des deux angles, que la ligne Mh fera avec la corde BK, qui se trouvera à droite, sera égal à l'angle sphérique ADQ, & prenant toujours à gauche $he = h$M, on aura Ie = IE, parceque hM étant = HQ = HE, tant Ie, que IE sera dans le premier cas la somme, & dans le second la différence des lignes IH, HQ.

PROBLÊME I.

Les trois côtés d' un triangle sphérique étant donnés, trouver les trois angles.

5. Qu' on prenne dans un cercle quelconque (fig. 2) les trois arcs BA, AD, DE égaux aux trois côtés du triangle donné, en allant de droit à gauche, & qu' ayant tiré les deux diamètres ACG, DCF, on leur mene perpendiculairement les deux cordes BK, EN, qui en seront coupées par le milieu en L, & H, & qui doivent se rencontrer en un point I.

6. Qu' on décrive le demi-cercle KMB du point L comme centre, & qu' on élève l' ordonnée perpendiculaire IM : l' arc KM sera la mesure de l' angle compris entre les côtés AB, AD, ce qui est évident par la comparaison de la figure 2 avec la figure première.

7. Par cette construction on peut avoir l' angle, qu' on veut, parcequ' on peut prendre pour AB, & AD les côtés, qui le comprennent : mais on pourra avoir les trois angles sur la même figure de la manière suivante. Qu' on prenne l' arc AN' = AN, & qui ayant tiré EN', qui rencontre KB en I', on élève l' ordonnée I'M' : l' arc KM' sera la mesure de l' autre angle adjacent au côté AB compris entre celui-ci, & l' autre DE. Si l' on prend Ih = IH, & que l' on tire Mh, on aura le troisième angle égal à l' angle MhI, ou à son supplément, selon que le point I se trouvera dans la demi-corde HN, ou dans la HE. C' est-

à-dire si l' on prend Ih dans le premier cas à gauche, & dans le second à droite, l' angle cherché sera toujours égal à celui des deux angles formés par la ligne Mh, avec la corde BK prolongée s' il le faut, qui restera à droite.

8. On démontre la première partie de la manière suivante. Pour trouver avec la même construction l' angle compris entre les côtés AB, DE, il faudroit placer ce dernier en AD', ce qui laisseroit D'E égal au côté AD, puisque l' arc AE est la somme de ces deux. On tireroit le diamètre D'F', la corde EN' perpendiculaire à ce diamètre, qui en seroit coupée par le milieu en H', & rencontreroit la corde BK en I': on éléveroit la perpendiculaire I'M', & on auroit l' arc KM' pour mesure de l' angle cherché. Or il est clair, que les arcs DN, D'N' sont égaux aux arcs DE, D'E. Ainsi l' arc AN différence des arcs DA, DN, & l' arc AN' différence des arcs D'A, DN' sont égaux chacun au même arc DD', qui est la différence des deux côtés AD, DE, ou D'E, AD', & par conséquent ils sont égaux entr' eux. Donc sans faire usage du point D' il suffira de prendre AN' = AN, mener la corde EI'N', & la perpendiculaire I'M', pour avoir la mesure KM' de l' angle cherché. Pour la seconde partie il suffit de comparer la seconde figure avec la première.

9. Si ayant tiré la corde EN' on la coupe par le milieu en H', & qu' on prenne $I'h' = I'H'$ vers le même côté; on aura une seconde détermination du même troisième angle en h', comme en h, & les lignes Mh, $M'h'$ seront parallèles, & si l'on prend à gauche $he = hM$, & $h'e' = h'M'$: on aura $Ie = IE$, & $I'e' = I'E$, selon ce, que nous avons vu au num. 4.

PROBLÊME II.

Deux côtés avec l' angle intercepté étant donnés, trouver le reste.

10. Si on prend dans la même figure 2 les arcs BA, AD égaux aux deux côtés donnés; on aura comme ci-devant les deux diamètres AG, DF, la corde BK avec le demi-cercle KMB: on prendra KM mesure de l' angle donné: on abaissera la perpendicu-

diculaire MI : par I on tirera la corde NHE perpendiculaire à DF, & on aura le troisième côté DE. On aura les deux autres angles en prenant Ih = IH, AN' = AN, & en faisant la même construction, qu' on a fait dans le premier problême (numér. 7). La démonstration est claire : on ne fait, que changer les données en cherchées, & vice-versa.

PROBLÊME III.

Deux côtés avec l' angle opposé à l' un des deux étant donnés, trouver le reste.

11. Dans la même figure on prendra BA pour côté adjacent; & on aura le diamètre AG, la corde BK, le demi-cercle KMB, & l' arc KM mesure de l' angle donné avec la perpendiculaire MI. On aura aussi le côté, qui doit être égal à l' arc DE sans avoir les points D, & E, qu' il faut trouver. Si l' on prend GF égal à ce côté, & qu' on tire FR perpendiculaire au diamètre AG; on aura cette ligne, qui doit être égale à la ligne EH = hM = he, d' où l' on tirera la construction suivante. Après avoir tiré la perpendiculaire MI, du centre M avec l' intervalle = FR, on trouvera le point h : du centre h avec le même intervalle on trouvera le point e : du centre I avec l' intervalle Ie on trouvera le point E : on prendra ED = GF, qui laissera l' arc AD égal au troisième côté cherché. On trouvera les deux autres angles comme ci-dessus.

12. Il paroît que la construction puisse donner quatre solutions; parceque 1°. FR peut être porté en Mh à gauche, & en Mh'' à droite, & après cela on peut trouver deux points dans la circonférence du cercle avec le centre I & l' intervalle Ie, & deux autres avec l' intervalle Ie'. Chacun de ces quatre points doit donner une corde pareille à la corde EN : mais ces quatre solutions se réduisent à deux. Comme de ces deux intervalles un donne la somme des deux Ih, hM, & l' autre la différence, & Ih est = IH, hM = HE = HN, l' un donnera le point E par IE, l' autre le point N par IN. Ainsi le second de ces deux intervalles

valles donnera les mêmes cordes, que le premier. Donc sans faire usage du point h'' on pourra prendre toujours Mh, & he à gauche, & avec l'intervalle Ie trouver une des deux extrémités de chaque corde : on y mettra E, ou N, selon que cette extrémité tombera dans l'arc BGK, ou dans le BAK, & le troisième angle cherché sera égal à l'angle qui se trouvera en h à droite, ou à gauche, selon que le point I sera tombé dans HN, ou dans HE.

13. Si FR est plus petite, que MI, le cas sera impossible : si elle est égale à MI, la droite IN deviendra = IE, la HI s'évanouira, & le diamètre DF passera par I : ainsi le côté AD sera déterminé plus aisément en tirant une droite par les points C, & I, & l'angle en D sera droit. Si FR est plus grande, on pourra avoir les deux cas, ou un, ou aucun, selon que le cercle décrit du centre I avec l'intervalle Ie coupera le cercle BAKG, ou le touchera, ou n'y arrivera pas. Si l'arc DE qui résulte de la construction ne se trouve de la même espèce avec FG par rapport à 90 degrés, on doit rejetter cette solution.

PROBLÊME IV.

Deux angles, & un côté intercepté étant donnés, trouver le reste.

14. Si l'on prend AB pour le côté donné, on aura la corde BK, le demi-cercle avec KM, KM' mesures des deux angles, & le point I, I' : il faudra dans l'arc BGK trouver le point E de manière, qu'ayant mené les cordes EIN, EI'N', les arcs AN, AN' soient égaux.

15. Pour le trouver, qu'on conçoive la corde AE, qui coupe l'autre BK en O : on voit, que l'angle NEN' en sera coupé en deux parties égales, d'où l'on tire la proportion suivante IO : OI' :: EI : EI' : on voit aussi, que la corde NN' doit être parallèle à la corde KII'B, parceque l'arc AN' étant = AN, l'arc NK sera = N'B : par conséquent on dira EI : EI' :: IN : I'N', & EI × IN = KI × IB = $\overline{\text{IM}}^2$: EI' × I'N' = KI' × I'B =

$= \overline{I'M}'^2 :: \overline{EI}^2 : \overline{EI'}^2 :: \overline{OI}^2 : \overline{OI'}^2$, & OI : OI' :: IM : I'M': ainsi pour avoir la solution du problême, on n' aura qu' à couper la ligne II' en raison des lignes données IM, I'M', & tirer par le point O la corde AOE. Cette construction sera très-aisée.

16. Après avoir trouvé les points I, I', on prolongera la ligne M'I' autant en I'm', & on tirera la ligne m'M, qui coupera la corde BK dans le point O cherché, parcequ' on aura la proportion suivante IO : OI' :: IM : I'm' = I'M'. Ayant tiré les cordes AOE, EIN, on coupera l' arc EN par le milieu en D, & on aura les deux autres côtés AD, DE: on trouvera en h le troisième angle comme dans le premier problême.

17. La construction sera plus aisée, si l' on fait (fig. 3) sur la corde KB le cercle entier: on y prendra vers les parties opposées les arcs KM, Km', qui mesurent les angles donnés: on tirera la ligne Mm': sa rencontre avec la BK donnera le point O: car on voit bien, que le point m' sera le même, qu' auparavant. Ayant abaissé la seule ligne MI on aura la corde EIN, & le point D au milieu de l' arc EN.

PROBLÊME V.

Deux angles, & un côté opposé à un des deux étant donnés, trouver le reste.

18. Ayant pris (fig. 2) AB pour le côté donné, on aura le diamètre BK avec le demi-cercle, l' arc KM mesure de l' angle adjacent à ce côté, & le point I. On fera l' angle IMh égal au complément du second angle donné, à gauche, ou à droite, selon que cet angle sera aigu, ou obtus, & ayant pris $he = h$M toujours à gauche, avec le centre I de l' intervalle Ie, on trouvera le point E dans l' arc BGK. Si l' on tire la corde EIN; on aura le point D au milieu de l' arc EN, qui donnera le côté AD adjacent, & DE opposé à l' angle A: l' arc AN' = AN déterminera le point I', & l' arc KM' mesure du troisième angle. La démonstration est conforme à celles des problêmes précédents.

19. Le cercle, qui aura le point I pour centre, & la ligne Ie pour

pour rayon pourra rencontrer l'arc BGK dans deux points, qui donneront deux solutions. Il pourra arriver qu'un de ces points tombe dans l'arc BGK, & l'autre dans le BAK, ou qu'il y ait un contact avec l'arc BGK, & alors on aura une seule solution. Si toutes les deux rencontres tombent dans l'arc BAK, ou s'il n'y a aucune rencontre avec le cercle ABGK; le problême est impossible.

PROBLÊME VI.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés.

20. On commencera par faire le demi-cercle KMB sur un diamètre arbitraire KB, & on y prendra les arcs KM, KM' mesures de deux des trois angles donnés; on fera les angles IMh, I'M'h' égaux au complément du troisième angle à gauche, ou à droite, selon que ce troisième angle sera aigu, ou obtus. On prendra toujours à gauche $he = h$M, $h'e' = h'$M': en prenant les points I, I' pour centres avec les intervalles Ie, I'e' on trouvera une intersection E vers la partie inférieure par rapport au diamètre KLB: par les trois points K, E, B on décrira un cercle: par son centre, & par le point L on tirera le diamètre AG: on prendra D au milieu de l'arc EN: on aura alors les trois côtés AB, AD, DE: le premier sera l'intercepté entre les deux premiers angles, qui sont mesurés par les arcs KM, KM', & les autres opposés à ces mêmes angles. On voit bien la démonstration qui est conforme à celles des problêmes précédents.

21. C'est toujours la même figure, qui présente la relation des données avec les cherchées, & dans chaque problême on commence par ce, qui est donné.

SCOLIE I.

22. On trouvera la manière d'abreger les constructions dans plusieurs cas; comme si quelque angle, ou quelque côté est égal à 90°. Si l'angle en D est droit, H tombera en I: ainsi si le diamètre DF passe par I, on voit sans autre construction, que l'an-

l'angle D est droit. Si l'angle A est droit, le point I tombe en L, & sans le secours de l'arc KM, on aura la corde EN, en la tirant par L. Si le côté AB est un quart de cercle, le point L tombera en C, & pour lors le cercle originaire servira pour le demi-cercle KMB.

23. On pourra très-souvent se passer du demi-cercle KMB, même quand AB n'est pas égal à 90°: comme dans le premier problême pour trouver l'angle A sans l'arc KM, on pourra (fig. 4) tirer le rayon KC, qui soit rencontré en P par la ligne IP parallèle au diamètre AG, & l'ordonnée PQ perpendiculaire à ce diamètre: l'arc KQ sera la mesure de l'angle cherché: parceque si l'on conçoit les lignes LM, CQ, on aura la proportion suivante CQ = CK : LK = LM :: CP : LI, & par-là dans les triangles CPQ, LIM rectangles en P, & I les angles C, L seront égaux, & les arcs KQ, KM seront semblables.

SCOLIE II.

24. On pourroit donner une très-grande quantité d'exemples pour faire voir l'utilité de cette méthode dans la Géographie, & dans l'Astronomie: on n'en donnera, qu'un seul.

25. Si dans un catalogue on a la longitude, & latitude de deux villes, & qu'on en cherche la distance, on aura un triangle, dans lequel deux côtés seront les deux compléments des deux latitudes, l'angle au pôle intercepté sera la différence des longitudes, & le troisième côté sera la distance cherchée.

26. Ce cas n'exige pas toute l'exactitude à cause de la grandeur des deux villes. On pourra le résoudre par construction faisant usage du second problême: on prendra (fig. 2) les arcs AB, AD égaux aux deux compléments des latitudes, & l'arc KM mesure de la différence des longitudes: ayant abaissé MI, & tiré la corde NIE perpendiculaire au diamètre DF, on aura l'arc DE pour la distance cherchée. On verra combien de degrés il contient avec une fraction décimale prise à l'œil, & en donnant 25 lieues à chaque degré on aura la distance.

MÉMOIRE II.

De la manière de déterminer par une seule observation faite au retour d' une comète toute sa nouvelle route apparente.

1. QUAND on connoît l'orbite d' une comète par ses apparitions précédentes, on y trouve les autres éléments, mais on ne sait pas le temps de son arrivée au périhélie, parceque les temps périodiques des comètes sont changés assez considérablement par l'action des planètes, sur-tout par celle de Jupiter & de Saturne, quand elles ne s'en trouvent trop éloignées dans leur passage par les régions planétaires. La comète, qu'on avoit observée la dernière fois l'an 1682 étoit attendue l'an 1757: M. Clairaut avoit trouvé par une théorie sublime, & par des calculs numériques immenses, que les actions de Jupiter, & de Saturne devoient en retarder le retour à-peu-près de 20 mois, sans pourtant pouvoir répondre d' un mois de plus ou de moins, parceque il n'avoit pu achever ces calculs, ni calculer les effets des actions des autres planètes; mais il étoit sûr, qu' il n' y auroit plus d' un mois d' erreur dans sa prédiction : il annonça ce retard aux Astronomes par un Mémoire qu'il lut à l' Académie Royale des Sciences. La comète reparut après un retard de 19 mois. On en savoit les autres éléments, qui ne changent pas beaucoup d' une apparition à l' autre; mais on ne savoit pas avec une approximation suffisante le temps de l'arrivée au périhélie, dont dépend la position contemporaine de la terre, & par conséquent la nouvelle route apparente de la comète.

2. On attendoit aussi pour l'année 1790 le retour d' une autre comète, dont la période avoit été jugée de 129 ans; parcequ' on voyoit peu différents entr'eux les éléments des comètes de 1552, & 1661 déterminés par Halley. Mais, comme j'ai indiqué à la fin de l'Opuscule, M. Mechain dans un excellent Mémoire, qui a remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris l'année dernière 1782 un peu avant d'y être admis, après un long examen

men de tout ce, qu'on a sur la première, a trouvé, que tout cela non seulement est très-grossier, mais qu'il s'éloigne énormément en sens contraires des éléments, qu'on en a tiré, d'où il s'ensuit, que selon la plus grande probabilité ces deux comètes sont bien différentes l'une de l'autre. J'avois préparé ce Mémoire pour le retour de cette comète, que je croyois aussi la même, en y exposant le procédé, que j'avois déjà employé en 1758 avec tout le succès à la première apparition de l'autre en marquant sur un globe céleste toute la route, qu'elle devoit tenir jour par jour. Je ne puis pas la revoir d'ici à 50 ans (*) à cause de mon âge de 72; mais quelqu'un de jeunes Astronomes vivants à présent pourra bien profiter de cette méthode.

3. Les perturbations causées par les planètes changent très-peu les autres éléments (**); mais le changement du temps périodique laisse très-incertain le temps de son arrivée au périhélie. Ainsi on ne peut pas savoir, dans quelle partie du ciel elle sera observée, quels signes, & constellations elle traversera par rapport à l'observateur placé sur notre globe; parceque selon la dif-

(*) Cette époque est relative au temps où j'ajoutois ce passage à mon texte écrit quelques années avant, non au temps de l'impression.

(**) Il n'y a que la comète du 1770, dont les éléments doivent avoir été changés d'une manière énorme avant cette apparition. La partie de l'orbite observée ne s'accordant pas avec aucune parabole, M. Lexel a cherché une ellipse, & avec un étonnement commun il a trouvé un accord presque exact avec une ellipse, dont le temps périodique n'est que de cinq ans & demi, & la distance aphélie égale à-peu-près à la distance de Jupiter. Comment donc on n'a pas vu cette comète dans toutes les périodes précédentes si courtes, dans lesquelles à tant de reprises elle devoit s'approcher de nous, si son orbite a été toujours la même? La solution de cet énigme dépend de la position même de son aphélie. Jupiter, comme on a calculé sur ses tables, s'est trouvé si près d'elle dans ce lieu-là, que sa force étoit incomparablement plus grande, que celle, qu'il exerce envers les autres comètes, qui en sont généralement bien éloignées. Cette force doit avoir changé la direction de sa route précédente de manière, que ce qui étoit toute autre chose auparavant, est devenu l'aphélie d'une orbite elliptique très-différente. Après cinq ans & demi on l'auroit découverte de nouveau, si à son arrivée au périhélie la terre se fût trouvée dans le même lieu de son orbite; mais elle devoit être férente position de la terre, son orbite réelle doit être projettée sur des différentes parties de la surface du globe céleste. Mais à sa première apparition on peut fixer par une seule observation ce temps, & annoncer toute la nouvelle route apparente, & toute la suite des phénomènes, en employant une partie des méthodes, que je viens de proposer dans cet Opuscule. Je développerai ici ce qui appartient à cet objet, & qui peut servir au retour d'une comète, dont on sait les éléments.

4. On peut préparer dans la fig. 1 d'avance l'écliptique, l'orbite de la terre, la parabole appliquée, & l'autre projettée comme dans l'Opuscule dans ses figures 4 & 9. Alors une seule longitude suffira pour trouver le temps de l'arrivée au périhélie, & pour achever la division de l'orbite de la terre, & des deux paraboles correlativement aux mois, & jours; & on trouvera tout ce qui appartient à la détermination de toute la suite des phénomènes.

5. On employera ici pour la construction deux figures de la planche IX qui se rapportent aux 21, & 22 de l'Opuscule I; mais celles-ci en sont plus simples, n'en employant que seulement,

du côté opposé à cause de cette demi-année: la comète a passé derrière le soleil dans un très-grand éloignement par rapport à la terre, & ce passage est arrivé dans l'été, lorsque les nuits dans nos climats sont bien courtes. Si cette découverte s'étoit faite avant; on l'auroit attendue, & sachant son orbite, on l'auroit cherchée avec de bonnes lunettes; mais comme on n'en savoit rien, personne n'a usé des soins particuliers, ainsi elle s'est échappée sans être aperçue.

Après cette découverte si singulière beaucoup de mond s'est appliqué à la chercher vers la fin de sa seconde période; mais j'avois dit à tous mes amis à Paris, que je ne l'attendois pas. Après 11 ans du premier passage à côté de Jupiter elle devoit se trouver dans son aphélie, où son mouvement devoit se rallentir de manière, que Jupiter en achevant une révolution en moins de 12 ans devoit l'avoir rattrapée, & dérangée une autre fois autant, & peut-être encore plus. Il y auroit la manière de calculer l'un, & l'autre de ces dérangements en partant en arrière, & en avant de cette orbite elliptique connue, & on pourroit bien employer pour cet effet la méthode, que j'ai imprimée dans mon Ouvrage des perturbations mutuelles de Jupiter, & de Saturne; mais la suite des calculs numériques nécessaires pour cet objet seroit trop longue, & pénible.

ment ce qui est nécessaire ici. On tracera dans la première, comme au num. 72 de l'Opuscule I, le cercle extérieur, qui représente l'écliptique, & a pour centre le soleil S, & pour rayon 120 parties d'une échelle assez grande. On y placera les signes du zodiaque de deux en deux, en mettant le zero pour le commencement du bélier, où l'on veut. A' un tiers de distance du nombre 10 vers le 8 on mettra le point *a*, qui indiquera l'aphélie de la terre, & appliquant la règle en *a*, & S on prendra *as* = 118,3, ce qui laissera l'excentricité de la terre S*s* = 1,7. On fera le cercle intérieur, qui sera l'orbite de la terre avec le centre *s*, & le rayon = 100. On placera le nœud ascendant N sur l'écliptique selon sa longitude donnée par un des éléments de l'orbite.

6. Ayant tiré la ligne des nœuds NSN', on prendra sur l'écliptique le point *x* de la longitude du périhélie dans l'orbite. Ayant tiré S*x*, on prendra sur cette ligne pour SV sa distance périhélie tirée des mêmes éléments : on la prolongera autant en VX, & on tirera par X la ligne perpendiculaire à la SX, qui sera la directrice de la parabole. On prolongera VS en SK, qui en soit tant-soit-peu plus longue : avec le centre K ; & le rayon KV on tracera un arc de cercle, qui sera sensiblement celui de la parabole : on trouvera un bon nombre d'autres points d'un côté, & de l'autre, comme C, par la propriété des distances égales au soleil S, & à la directrice conformément au num. 50 de l'Opuscule I : on fera dans la fig. 2 conformément à son num. 95 l'angle ATG égal au complément de l'inclinaison de l'orbite. Dans la fig. 1 on appliquera un côté d'une équerre sur la ligne des nœuds de manière que l'autre côté passe par C, & ayant pris sur ce même côté avec un compas la distance CD : on la portera dans la fig. 2 sur la TG en TH : on y prendra avec le compas la distance HM à la ligne TA, & on la portera sur le côté de l'équerre dans la fig. 1 en DP. On tirera par tous les points C à la main la parabole appliquée, & par les points P la parabole projettée.

7. On tirera aussi dans la même fig. 1 la ligne B'B, qui doit

cou-

couper la distance périhélie SV par le milieu, & à angles droits en A. On préparera le nombre de jours, qui répond à l' anomalie de 90°, comme dans l' Opuscule à son num. 59, qui est nécessaire ici pour déterminer l' échelle des temps relatifs aux parties de la ligne B'B. Cette échelle doit donner le mouvement du centre d' un cercle, qui passe par le points S, V, C, & qui se trouve toujours sur cette ligne. Le nombre de jours trouvé répond à une partie de la ligne B'B égale à la même distance périhélie donnée. En plaçant cette distance, ou sa moitié, ou son quart dans le compas de proportion transversalement aux nombres égaux à celui, qu'on a trouvé, multiplié par 3, ou 4 on aura une échelle pour les jours, ou de huit en huit heures, ou de six en six.

8. Ayant fait cette disposition on trouvera aisément par une seule longitude observée le temps de l' arrivée de la comète au périhélie dans cette nouvelle apparition de la manière suivante. On prendra sur l' écliptique le point Q, qui répond à la longitude héliocentrique de la terre pour le moment de l' observation, qui est celle du soleil augmentée, ou diminuée de 6^s: on en prendra un autre Y, qui répond à la longitude observée de la comète: on tirera le rayon SQ, qui déterminera le lieu T de la terre dans son orbite, & ayant tiré l' autre SY, on tirera par T la ligne TP parallèle a ce rayon vers la même partie en déterminant le point P, dans lequel elle rencontre la parabole projettée.

9. Une ligne droite, qui soit parallèle à l' axe, doit couper nécessairement la parabole dans un seul point. Si elle est inclinée à l' axe, & menée par un point placé dans son intérieur, la coupera nécessairement dans deux: si elle doit être tirée par un point de son périmètre, ou elle la touchera dans ce même point, ou la coupera dans celui-là, & dans un autre après: mais si on la tire par un point, qui soit dehors, elle pourra la couper dans deux, ou toucher dans un seul, ou ne la rencontrer jamais. Ce dernier cas ne peut pas arriver ici, où la longitude observée va réellement à un point de la parabole projettée. Dans le cas, dans

lequel

lequel le point T reste dans l'intérieur de la parabole on ne peut pas douter, quelle des deux intersections il faut prendre ; parceque l'une se trouvera dans la direction de la longitude, & l'autre dans la direction opposée. Quand le point se trouve dehors, il pourra y avoir de doute, parceque toutes les deux seront dans la même direction : mais très-souvent on donnera l' exclusion à l'une des deux, qu' ira trop loin, où la comète ne sera pas visible, ce qui arrivera toujours, quand la ligne ne sera assez voisine de la tangente. Dans le cas de ce voisinage, & dans celui du contact la solution sera douteuse : elle pourroit même devenir très-fautive par une petite faute de l'observation, ou par un petit changement des éléments : alors il faudra attendre une autre observation, pour pouvoir déterminer ce qu'on cherche.

10. Pour le point P on tirera une ligne perpendiculaire à la ligne NN', & on marquera le point C, dans lequel elle rencontre la parabole appliquée. A' l'aide des deux intersections des arcs de cercle tracés avec les centres S, C, & la même ouverture du compas, en y appliquant une règle, on trouvera dans la ligne B'B le centre O d'un cercle, qui passeroit par les points S, C, V. La ligne AO appliquée à l'échelle formée par le nombre de jours trouvé ci-dessus, déterminera l'intervalle de temps entre le moment de l'observation, & l'arrivée au périhélie.

11. On verra aisément s'il faut ajouter ce temps à celui de l'observation, ou le retrancher. On sait, si le mouvement de la comète est direct, ou rétrograde, & on voit où le point C tombe par rapport au sommet V de la parabole : ainsi on saura, si elle a déjà passé par le périhélie, ou si elle y doit passer après : dans ce second cas il faut employer l' addition, & dans le premier la soustraction.

12. Il ne sera pas nécessaire de tirer les lignes CD dans la construction de la parabole projettée pour trouver les points P : ayant appliquée un côté d'un papier coupé à angle droit, sur la ligne NN' de manière, que l'autre passe par C, on portera sur celui-ci avec le compas la distance DP, qui doit déterminer le point P. De même il n' est pas nécessaire de tirer les rayons

SQ,

SQ, SY, & la ligne TP pour trouver les points T, P dans le numéro précédent : il suffit d'appliquer la règle en SQ pour avoir T, & en SY pour avoir le point P de la parabole projettée déjà dessinée, qui soit éloigné de la règle autant que le point T.

13. Ayant trouvé le temps de l'arrivée au périhélie, on achevera tout le reste, comme dans l'Opuscule depuis le num. 110. On trouvera à l'aide de la même échelle le point de la ligne B'B, qui répond au commencement de ce mois, dans lequel on a eu l'arrivée au périhélie, & par-là toute la division de la même ligne pour les mois suivants : cette division donnera celle de la parabole appliquée par l'ouverture du compas, dont une pointe reste sur les points de cette ligne, & l'autre arrive au sommet V. Une équerre appliquée avec un côté à la ligne des nœuds, l'autre passant par les divisions de la parabole appliquée déterminera sur la projettée les points correspondants. On trouvera la division de l'écliptique pour les mêmes mois suivants par le moyen des longitudes héliocentriques de la terre tirées de la connoissance des temps : à l'aide de la règle appliquée à ces divisions & au centre S, on fera la division correspondante de l'orbite de la terre. Par ces divisions, & par celles des deux paraboles on trouvera les distances de la comète au soleil, & à la terre pour les deux premières lignes analogues à celles de la fig. 25 de l'Opuscule, & les longitudes, & latitudes géocentriques, dont on tirera les ascensions droites, & les déclinaisons pour deux autres.

14. On a fait ici la solution du problême, qui cherche le temps de l'arrivée au périhélie, en employant la construction de deux paraboles, une intersection d'une ligne droite avec la projettée, pour trouver le point P, & celle d'un autre avec l'appliquée pour trouver le point C. Pourtant c'est un problême, qui ne surpasse pas les forces de la Géométrie Euclidéenne : on peut le résoudre par les intersections des lignes droites entr'elles, & avec des cercles, & on peut en faire le calcul numérique par la seule Trigonométrie plane. J'ai commencé par donner la méthode précéden-

cédente, parcequ'elle est plus facile dans l'exécution, & que d'ailleurs pour avoir toute la suite des phénomènes il est nécessaire de dessiner les deux paraboles: ainsi il vaut mieux de les tracer d'abord pour s'en servir aussi à la détermination du temps de l'arrivée au périhélie.

15. S'il ne s'agissoit, que de trouver ce temps; on pourroit le faire encore en s'épargnant la délinéation de la parabole appliquée à l'aide de la seule projettée dessinée immédiatement. Il suffit pour cet objet de trouver son foyer, & sa directrice: voici la construction de ce problême tirée de ce, qu'on a démontré dans le §. XII de l'Opuscule relativement à sa fig. 13. Ayant fait ici (fig. 3) comme dans la fig. 1 les deux cercles on trouvera de même le point T par la longitude de la terre en Y, & le point V par celle du périhélie en *x*, & par la distance périhélie, on tirera la ligne NSN' déterminée par la longitude du nœud. Tout cela est commun aux deux figures : mais ici de plus on tirera par V une ligne perpendiculaire à la SV, dont la rencontre avec la NN' soit E: dans la EV prolongée on prendra VF égale à la VS. On tirera la VV' perpendiculaire à la NN', & ayant porté VV' dans la fig. 2 sur la TG en TH on portera la distance du point H à la ligne TA dans la fig. 3 sur la même VV' en V'*u*. On tirera la ligne FF' perpendiculaire à la NN', & la ligne E*u*, qui prolongée la rencontrera en un point *f* (*). On prendra dans la S*u* prolongée *uz* troisième continuellement proportionnelle après S*u*, *uf*, & on tirera par *z* une ligne, qui lui soit perpendiculaire : celle-ci sera la directrice de la parabole projettée : ayant fait l'angle E*us* = E*uz* on prendra *us* = *uz*: le point *s* sera le foyer de la même parabole : ayant le foyer, & la directrice on pourra dessiner cette courbe selon la méthode du num. 50 de l'Opuscule. On trouvera sur elle le point P, comme

ici

(*) On a mis dans deux endroits de cette figure la même lettre *f* à cause de certaine analogie : ici on doit employer celui, qui se trouve dans la ligne FF' : pourtant on y a mis *z* à la place de *x* de la fig. 4 de l'Opuscule, parcequ'il y a un autre *x*.

ici au num. 8 : on tirera la PD perpendiculaire à la ligne NN', & on trouvera dans la fig. 2 le point H de la ligne TG, qui a cette distance à la ligne TA : on portera la ligne TH de cette figure sur la DF prolongée de la fig. 3, & on fera le reste de l'opération comme à la fig. 1 au num. 10, & suivants.

16. Mais on peut trouver le point P encore sans avoir dessiné cette parabole, en employant seulement la Géométrie Euclidéenne ; puisque la détermination de la rencontre d'une ligne droite donnée de position avec une parabole, dont on a le foyer, & la directrice, n'excède pas les forces de la Géométrie plane : en voici la construction. Ayant menée du foyer *s* une ligne droite au point I intersection de la ligne TI tirée par T dans la direction de la longitude avec la directrice *z*I, on prendra sur la même TI un point *e* à volonté, & on tirera *ed* perpendiculaire à la directrice : avec le centre *e*, & le rayon *ed* on tirera un cercle, qui rencontrera la *s*I dans deux points *b*, *b'*, si la droite donnée rencontre la parabole en deux points : on trouvera ces points en tirant deux lignes parallèles aux deux rayons *eb*, *eb'*, comme dans cette figure la *s*P est parallèle au rayon *eb* : leur rencontre avec la ligne donnée TI, comme ici le point P, sera à la parabole : l'autre point ici iroit trop loin.

17. La démonstration en est simple. Si l'on conçoit la ligne PR perpendiculaire à la directrice ; on aura les deux proportions suivantes *s*P : PI : : *eb* : *e*I, & PI : PR : : *e*I : *ed*. Donc on a aussi cette troisième *s*P : PR : : *eb* : *ed* : ces deux dernières lignes étant égales entr'elles, les deux premières le seront aussi, & pour cela le point P sera à la parabole. Si celle-là étoit un autre section conique, on prendroit un rayon *eb*, qui seroit à la *ed* en la raison constante, qui convient à cette courbe particulière, & on auroit la rencontre d'une droite donnée quelconque avec cette courbe. C'est dans mon ouvrage sur les sections coniques le germe général de toutes les propriétés de ces courbes. Dans le développement de la solution de ce problême, je trouve dans cet ouvrage toutes ces propriétés. Ayant trouvé le point P, on trouve le reste comme auparavant : dans ce reste il n'y

a rien,

a rien, qui ne puisse être exécuté par la simple Géométrie Euclidéenne.

18. On peut encore appliquer, si l'on veut, le calcul trigonométrique pour la solution du même problême, qui donneroit le temps de l'arrivée au périhélie avec plus de précision, & d'exactitude. Voici le procédé, qui est un peu long, mais très-praticable. Pour ce qui est des éléments de l'orbite, que l'on connoît, on a la distance périhélie SV en parties de la distance moyenne de la terre au soleil, l'angle VSE différence de la longitude du périhélie & du nœud ou son supplément, l'angle STP différence des deux longitudes déterminées par les TS, TPI, & à la fin la raison de la VV' à la V'u, qui est celle du rayon au co-sinus de l'inclinaison de l'orbite. Par le temps de l'observation on a la distance ST de la terre au soleil, & sa longitude, qui comparée avec celle du nœud donne l'angle TSN: avec ces données on trouvera le reste de la manière suivante.

19. On a les proportions suivantes, $1 : cos.incl :: VV' : uV' :: tan.VSV' = tan.VSN : tan.uSV' :: tan.VEV' = cot.VSV' : tan.uEV'$. On en tirera les angles uSV', uEV'. La somme de leurs compléments donnera l'angle SuE, son supplément Euz, le double de celui-ci suz, & son supplément Sus.

20. Ces mêmes angles donneront les valeurs des Su, us, parcequ'on aura les proportions suivantes, $sin.SuV = cos.uSV' : sin.SVu = cos.VSV' :: SV : Su = \frac{SV \times cos.VSV'}{cos.uSV'}$, & $sin.EuV = cos.uEV' : sin.EVV' = sin.VSV' :: EV : Eu :: VF = SV : uf = \frac{SV \times sin.VSV'}{cos.uEV'}$, d'où l'on tire $us = uz = \frac{uf^2}{Su}$

$$= \frac{SV \times sin^2.VSV' \times cos.uSV'}{cos.VSV' \times cos^2.uEV'} = \frac{SV \times sin.\times tan.VSV' \times cos.uSV'}{cos^2.uEV'}.$$

Alors dans le triangle Sus on aura aussi la base Ss, & les angles uSs, usS.

21. Ayant la longitude de la direction SN, & l'angle uSV le même, que l'angle uSN, ou son supplément, on aura la longitude de la Suz, & comme on a aussi la longitude de la direction

ST, on aura l'angle TSz par la différence de ces deux longitudes: comme on a aussi les deux côtés ST, & Sz = Su + uz, on trouvera la base Tz, & les deux angles SzT, STz.

22. Par ces deux angles avec l'angle droit SzI, & l'angle STI, qui est la différence des longitudes de la comète, & du soleil, on trouvera les angles TzI, zTI. Il suffit dans le cas de la figure ajouter ceux-là à ceux-ci. Le supplément de la somme de ces deux angles est l'angle TIz le même que PIR, ou son supplément. Ayant trouvé le côté Tz, & les angles du triangle TzI, on trouvera aussi le TI.

23. Dans le triangle TSs on a ST, Ss, & l'angle TSs = TSz — uSs: ainsi on y trouvera la base sT, & l'angle STs, qui ajouté à l'angle STI donnera l'angle sTI.

24. On aura alors dans le triangle sTI les côtés sT, TI avec l'angle en T, d'où l'on tirera la base sI, & l'angle TIs, qui sera ou le même, que PIs, ou son supplément.

25. Dans le triangle sPI on aura l'angle en I: on a aussi cette proportion, *sin*.PIR : 1 :: PR = Ps : PI :: *sin*.PIs : *sin*.PsI: ainsi ce dernier sinus sera connu, ce qui donnera deux valeurs de l'angle PsI, qui seront les suppléments l'un de l'autre, & appartiendront aux deux rencontres de la droite TI donnée de position avec la parabole. La base sI étant donnée avec les deux angles PIs, PsI, on aura le côté sP.

26. Dans le triangle PSs on aura les côtés PS, Ss, & on trouvera l'angle SsP = TsI — PsI — SsT: on en tirera sP, & l'angle PSs, dont on ôtera sSV' = sSu — uSV' pour avoir PSV' supplément de PSD, ou le même que lui.

27. On a la proportion suivante, *cos.incl.* : 1 :: DP : DC :: *tan*.DSP : *tan*.DSC: ainsi on trouvera ce dernier angle, & l'anomalie CSV = 180° — DSC — VSV'.

28. Par l'anomalie, & la distance périhélie SV on trouve l'intervalle de temps entre l'observation, & l'arrivée au périhélie selon la méthode expliquée au num. 342 de l'Opuscule.

29. Cette manière de trouver le temps de l'arrivée au périhélie par une seule longitude observée est bien exacte; mais elle demande

mande la solution de 6 triangles *Sus*, TS*z*, TI*z*, TS*s*, TI*s*, PS*s*, avec tant d'autres calculs, ce qui est trop long, & inutile, quand on peut remplir son objet en trouvant si aisément ce qu'on cherche par construction, sur-tout n'ayant pas les éléments, que par un à-peu-près, à cause des variations, qui s'y introduisent par l'action des planètes : ainsi cette recherche ne sert, qu'à exercer la Géométrie, & employer les adresses des détours trigonométriques appliqués à une construction géométrique.

30. Si l'on avoit par observation plutôt une latitude, le problême seroit plus élevé, qu'un de ceux, qu'on appelle solides : en employant la construction il se résoudroit naturellement par l'intersection de la parabole projettée, avec une autre des trois sections coniques, ellipse, parabole, ou hyperbole, selon que la latitude comparée avec l'inclinaison de l'orbite en seroit ou plus grande, ou égale, ou plus petite ; mais qu'on peut réduire encore à l'intersection d'un cercle avec la même parabole projettée, ou à une équation déterminée de quatrième degré, qui fourniroit des valeurs numériques exactes pour la solution du problême. Je développerai la première construction, & je donnerai le procédé de tout le reste, qui donne l'occasion d'employer des méthodes simples, & élégantes pour la résolution de certains problêmes indéterminés, & pour la construction de certains autres déterminés.

31. Dans le cas présent, on n'aura pas la direction de la ligne TP, mais la raison, qu'elle a à la PD, qui est celle de la tangente de l'inclinaison de l'orbite à la tangente de la latitude. On le voit bien dans la fig. 1 de l'Opuscule, où les tangentes de deux inclinaisons une de l'orbite PDC, & l'autre de la latitude PTC sont $\frac{PC}{PD}$, & $\frac{PC}{PT}$, qui restent comme PT à PD. Or on sait, que la propriété essentielle d'une section conique est, que la distance de chaque point de son périmètre à sa distance perpendiculaire à une ligne droite est en raison donnée, & la section conique sera un'ellipse, ou parabole, ou hyperbole, selon

que

que le premier terme de cette raison sera plus petit, que le second, ou égal, ou plus grand : ce point en est un des deux foyers, & cette ligne droite sa directrice. Je suis parti de cette propriété pour en tirer toutes les autres le plus essentielles de ces courbes dans le journal des Savants de Rome beaucoup avant M. l'Abbé de la Caille, & je pris cette même propriété pour définition dans mes éléments des sections coniques, dans lesquels j'ai employé la seule Géométrie à la manière des Anciens, même pour démontrer avec toute la rigueur ce qui appartient à leurs cercles osculateurs sans aucun besoin ni des calculs, ni de la Géométrie des infiniment petits. M. l'Abbé de la Caille s'est servi après de la même définition pour les traiter analytiquement.

32. Dans mon traité j'ai appellée cette raison donnée la *raison déterminante*, & j'ai donné des méthodes très-simples pour construire une section conique par tant de points, que l'on veut, quand on a le foyer, la directrice, & cette raison. Ainsi on voit bien que si l'on décrit une section conique, qui ait le point T pour foyer, N'N pour directrice, & pour raison déterminante celle de la tangente de l'inclinaison de l'orbite à la tangente de la latitude, la rencontre de cette courbe avec la parabole projettée en P donnera la solution du probléme.

33. Mais à l'aide du calcul algébrique on peut trouver le point P par l'intersection de cette même parabole avec un cercle. Voici la méthode pour déterminer le centre, & le rayon de celui-ci. Soit f le sommet de l'axe de la parabole, g la rencontre du même axe avec la ligne N'N, G celle de la ligne PD avec une parallèle à la N'N tirée par T : que l'on tire les lignes fr, TA perpendiculaires à cette même N'N, & que l'on conçoive la ligne PB perpendiculaire à l'axe gs, le point K étant sa rencontre avec la ligne N'N.

34. On fera $gA = a$, $AT = DG = b$, $gr = c$, $rf = d$, $gf = e$, $gB = x$, $BP = y$. On aura les proportions suivantes. 1°. $gr = c : rf = d :: gB = x : BK = \frac{dx}{c}$; 2°. $gr = c : gf = e :: gB = x : gK = \frac{ex}{c}$; 3°. $gf = e : rf = d : PK =$

$y -$

$y - \frac{dx}{c}$: KD $= \frac{cdy - d^2x}{ec}$; 4°. $gf = e : gr = c ::$ PK $= y - \frac{dx}{c}$: PD $= \frac{cy - dx}{e}$. Ainsi on aura AD $=$ TG $= g$A $- g$K $-$ KD $= a - \frac{ex}{c} - \frac{cdy - d^2x}{ec} = \frac{aec - (e^2 - d^2)x - cdy}{ec}$, & PG $=$ PD $+$ DG $= \frac{cy - dx}{e} + b = \frac{c^2y - cdx + ecb}{ec}$. On en tirera la valeur de TP^2 $=$ TG^2 $+$ PG^2, & la proportion TP^2 : PD^2 :: $m^2 : n^2$ fournira un'équation, qui en transposant les termes, & divisant le tout par le coëfficient de y^2, se réduira à la forme $y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = 0$, où les coëfficients B, C, E seront des quantités données.

35. Cette équation appartient à une section conique, & il se pourroit bien faire, que ce fût un cercle : une autre équation est fournie par la nature de la parabole, qui donne BP$^2 = 4sf \times f$B, c'est-à-dire $y^2 = 4p(x - e)$, ou $y^2 - 4px + 4ep = 0$. En éliminant l'y de ces deux équations indéterminées on arriveroit par les méthodes connues à une déterminée du quatrième degré, qui pourroit être résolue par un calcul numérique, ou réduite à deux autres indéterminées, dont une fût à un cercle, & l'autre à une section conique même à une parabole donnée quelconque, qui pourroit être la même parabole projettée. Sans ce long détour, on pourroit bien réduire la même équation du numéro précédent au cercle par une couple de quantités arbitraires, qu'on y introduiroit. En prenant un point g' dans la rg, & f' dans la rf, on feroit PB' perpendiculaire à $g'f'$, en la faisant $= y$, & la g'B' $= x$. Retenant la dénomination précédente par rapport à g' mis à la place de g, & faisant seulement A$r = a$, à la place de Ag, on auroit la même équation précédente avec le seul changement de $a + c$ mis à la place de a. On auroit alors dans les coëfficients A, & B deux arbitraires c, & d, la valeur e étant $= \sqrt{(c^2 + d^2)}$. On les détermineroit en faisant A $= 0$, B $= -1$; ce qui réduiroit l'équation à la forme $y^2 - x^2 + D'y + E'x + F = 0$, qui est nécessairement à un cercle.

36. On

36. On trouveroit aisément le centre, & le rayon de ce cercle. On tire de cette équation la valeur $y = -\frac{1}{2}\mathrm{D}' \pm \sqrt{(x^2 - \mathrm{E}'x - \mathrm{F} + \frac{1}{4}\mathrm{D}'^2)}$. Les deux valeurs y seront égaux, quànd on a $x^2 - \mathrm{E}'x - \mathrm{F} + \frac{1}{4}\mathrm{D}'^2 = 0$, ce qui arrivera, quand l'ordonnée perpendiculaire à la ligne $g'f'$ des abscisses touche le cercle. Cette dernière équation fournira les deux valeurs x, dont chacune donnant une des deux tangentes, leur demi-somme, qui doit être $-\frac{1}{2}\mathrm{E}'$ donnera l' abscisse x, dont l' ordonnée passera par le centre : & comme dans toutes les deux précédentes on avoit la même valeur $-\frac{1}{2}\mathrm{D}'$; il est clair, que le centre cherché sera aussi à la même distance de la ligne gf. Ainsi si l'on prend sur la $g'f'$ le segment $g'h = -\frac{1}{2}\mathrm{E}'$, & qu' on tire la perpendiculaire $hi = -\frac{1}{2}\mathrm{D}'$, on aura le centre en i. En mettant la valeur $-\frac{1}{2}\mathrm{E}'$ à la place de x dans la valeur radicale de y, on aura les deux il, $il' = \pm \sqrt{(\frac{1}{2}\mathrm{E}'^2 + \mathrm{F} + \frac{1}{4}\mathrm{D}'^2)}$. Ceux-là seront les deux rayons un positif, & l'autre négatif. On ne peut pas y craindre un imaginaire ; parcequ' on tire l' équation d' un cas réel, dans lequel il doit y avoir un point P réel, & pour cela une valeur y réelle y doit répondre à un x réel, ce qui fait voir la réalité de la courbe exprimée par cette équation : & comme cette courbe ne peut être, qu' un cercle ; la détermination de son centre, & de son rayon tirée immédiatement de la même équation ne peut être que réelle.

37. Mais toutes ces méthodes sont trop compliquées, & inutiles ici, où par la seule longitude on arrivera facilement au même but. Il y a à remarquer de plus, que l'on ne détermine pas la longitude immédiatement par une observation, mais dépendamment de la déclinaison, & de l'ascension droite observée : on a besoin de toutes les deux tant pour avoir la seule latitude, ou la seule longitude, que pour les avoir toutes les deux : ainsi on n'a pas l'occasion de recourir à la latitude toute seule.

38. Si l'on veut les employer toutes les deux ensemble, on trouvera le point P tant par construction, que par le calcul numérique avec une facilité non seulement incomparablement plus grande, que par la seule latitude, mais aussi beaucoup plus, que

par

par la seule longitude, & non seulement sans supposer la parabole projettée déjà construite, mais même sans supposer, que le mouvement se fait dans une parabole, ou dans une section conique. On le fera, en n'employant de tous les éléments, que le lieu du nœud, & l'inclinaison de l'orbite. Il ne s'agira, que de déterminer la rencontre de la ligne visuelle donnée, qui part du point T connu, avec le plan de l'orbite donnée par ces deux éléments : il n'y a même aucune ambiguité, parceque cette rencontre ne peut être, qu'un seul point.

39. Soit L la rencontre de la ligne TP donnée de position avec la ligne N'N. On aura le point L avec les proportions suivantes, *tan.incl.* : *tan.lat* :: TP : PD, & PD : PL :: AT : TL : on en tire TP : PL :: *tan.incl.* $\times$ AT : *tan.lat.* $\times$ TL, & *tan.incl.* $\times$ AT $-$ *tan.lat.* TL : *tan.incl.* $\times$ AT :: TL : TP, ce qui donne la TP. On trouve aisément encore les valeurs numériques des AT, TL : on a les angles TSA, TLA, qui sont donnés par la différence de la longitude du nœud à deux longitudes, l'héliocentrique de la terre, & la géocentrique de la comète : on a $TA = ST \times sin.TSA$, & $TL = \dfrac{TA}{sin.TLA}$.

40. La construction géométrique devient aussi bien simple. On fera l'angle ATQ égal à l'inclinaison de l'orbite, Q étant sur la ligne N'N, & l'angle AQY' égal au complément de la latitude, Y' étant sur la ligne AT. On prendra sur la ligne AY' le segment AO = TL, & on fera TP égale à la quatrième proportionnelle après les trois lignes Y'O, Y'A, TL. On voit aisément la justesse de cette construction. La ligne Y'A sera à la TA, comme la co-tangente de la latitude QY'A à la co-tangente de l'inclinaison QTA, c'est-à-dire comme TP devoit être à PD : TA sera à TL, comme PD à PL : ainsi Y'A sera à TL = AO, comme TP est à PL, & Y'O : Y'A :: TL : TP, ce qu'il falloit faire.

41. La ligne TP déterminée par cette méthode servira encore pour voir d'abord, s'il y a eu du changement considérable dans les éléments de l'orbite. Si ces éléments sont les mêmes, en fai-

sant la construction de la parabole projettée comme ci-dessus le point P devra tomber sur son périmètre : on trouvera probablement quelque petite distance, & on jugera par-là de la quantité de ce changement, que l'on déterminera après par trois observations.

42. La solution, que j'ai donnée ici, m'a servi encore pour un objet très-différent. Dans le §. IV de l'Opuscule il y a la réduction de la seconde des trois longitudes observées pour pouvoir substituer les mouvements rectilignes de la comète, & de la terre par les cordes aux curvilignes par les arcs des leurs orbites. Je l'ai adaptée à la position de la seconde distance raccourcie, en la dérivant par approximation de la supposition, que les deux petites lignes T't, C'c de la fig. 1 de l'Opuscule sont les effets de la gravité dans les distances ST', SC' réciproquement proportionnels aux quarrés de ces distances, en y ajoutant la substitution des lignes peu différentes entr'elles les unes aux autres dans les coëfficients de deux petits angles, dont la différence donne la réduction cherchée. J'ai réduit cette longitude, & la seconde distance raccourcie par une proportion appuyée aux temps, & aux mouvements en longitude, j'en ai tiré lex deux distances extrêmes. Je trouve cette manière la plus commode, & je l'ai suivie dans l'Opuscule.

43. Autrefois dans des anciens Mémoires j'avois proposé l'usage des mêmes proportions employant la seconde longitude telle, qu'elle étoit donnée par l'observation, & indiquant seulement la réduction, qui pourtant n'étoit point nécessaire dans un grand nombre d'occasions, que j'ai développée depuis. Alors je faisois la position de la première distance raccourcie, & j'en tirois la troisième. Un amateur (*), qui connoît bien, & cultive

(*) C'est M. le Président de Sarron à présent membre de l'Académie, homme du plus grand mérite à tous égards : c'est à lui, que peu après mon arrivée à Paris j'avois donné par écrit ma méthode de faire la réduction de la seconde longitude, & qui l'a employée de ce temps-là, & toujours après pour son amusement avec tout le succès.

tive l'Astronomie en grand Astronome ayant de la bonté pour moi, & pour mes méthodes, m'a demandé, si en employant les deux distances extrêmes exactes, comme elles sont données dans une parabole déjà exactement calculée, on ne pourroit trouver par un calcul exact la correction, qu'il faut employer à la seconde longitude pour faire cette réduction. Je l'ai trouvé telle qu'on pourroit bien l'appliquer aussi au mouvement des planètes dans une ellipse, & à toute autre espèce d'orbite. Par les deux longitudes, & latitudes extrêmes on trouve l'inclinaison du plan de cette orbite, & la direction de la ligne des nœuds: alors il n'y reste, que de trouver le point, dans lequel la ligne visuelle de la seconde observation rencontre ce plan: je le trouve tout-à-fait, comme je l'ai fait ci-dessus, & par son moyen je trouve la réduction cherchée de la manière suivante, que je propose ici à cause de la grande affinité avec l'objet, que j'y ai traité: je donnerai tout cela, tel, que je l'ai mis dans une lettre, que je lui ai adressée dans le temps sur cet objet. J'y employe la même figure, qui sera ici la fig. 4. Elle est adaptée à l'orbite de la comète de 1773, à laquelle il avoit appliqué ma méthode avec tout le succès.

„ 44. On a les deux TP, $T''P''$ avec les longitudes, & les la-
„ titudes correspondantes, & la longitude, & latitude de la se-
„ conde position en C': on cherche la différence des angles $ST'P'$,
„ Stp, dont le premier répond à la longitude de la position,
„ qu'on a sur l'arc déterminée par la ligne $T'P'$, & le se-
„ cond à celle, qu'on auroit sur la corde, déterminée par la li-
„ gne tp.

„ 45. Par les latitudes connues on aura les deux $PC =$
„ $TP \times tan.l$, $P''C'' = T''P'' \times tan.l''$, & comme on a aussi les
„ longitudes du soleil, on aura les angles TSP, $T''SP''$: on con-
„ noît aussi les rayons ST, ST''. Ainsi dans les triangles SPT,
„ $SP''T''$ on aura les lignes SP, SP'', & les angles TSP, $T''SP''$:
„ celles-là avec les PC, $P''C''$ donneront les SC, SC'': ceux-ci
„ avec l'angle TST'' donneront l'angle PSP''.

„ 46. Dans les triangles TST'' ayant les côtés ST, ST'' avec

 „ l'an-

„ l'angle en S, on aura l'angle STT'', qui est le même, que
„ l'angle ST*t*, & ayant aussi le TS*t* on aura la S*t*: dans le triangle PSP'' on aura les côtés SP, SP'' avec l'angle PSP'': ainsi
„ on aura PP'' avec l'angle SPP''.

„ 47. Soit R la rencontre des cordes CC'', PP'', & D, D', D''
„ celles de la SR avec trois plans tirés perpendiculairement à
„ cette ligne par les PC, P'C', P''C'': on aura $PR = \frac{PP'' \times PC}{P''C'' - PC}$.

„ 48. Ayant les SP, PR avec l'angle SPR supplément de SPP''
„ on aura l'angle PSR, & par-là la tangente de P''D''C'' = PDC,
„ qui est $= \frac{PC}{PD} = \frac{PC}{SP \times sin.PSR}$.

„ 49. L'angle PSR ôté ici de la première longitude, & y a-
„ joutée dans d'autres cas, donne la longitude de la ligne SR,
„ qui est celle des nœuds, & l'angle PDC est l'inclinaison de
„ l'orbite. Ainsi on trouve ces deux éléments indépendamment de
„ la nature de l'orbite. Si l'on met E dans la rencontre des li-
„ gnes SR, T'P' prolongées, s'il le faut; la différence de la
„ longitude de la SR, & de celle de la T'P' donnera l'angle
„ D'EP', qui sera égal à l'angle SET', ou le même, ou son
„ supplément.

„ 50. Ce dernier angle avec l'angle ST'P', qui est égal à la
„ différence de la seconde longitude du soleil, & de la comète,
„ ou à son supplément, & avec le rayon ST' donnera la ligne
„ $T'E = \frac{ST' \times sin.ST'P'}{sin.SET'}$.

„ 51. On aura les deux proportions suivantes, EP' : D'P' :: 1 :
„ *sin*. D'EP', & D'P' : T'P' :: *tan*. P'T'C' : *tan*. P'D'C', parceque
„ ces deux tangentes sont $\frac{P'C'}{P'T'}$, & $\frac{P'C'}{D'P'}$: en composant les rai-
„ sons on en tire cette troisième EP' : T'P' :: *tan*. P'T'C' : *sin*. D'EP'
„ × *tan*. P'D'C'. Cette raison sera donnée, P'T'C' étant la se-
„ conde latitude de la comète, & les deux autres angles étant
„ déjà trouvés : ainsi on aura la raison de la T'E différence de

„ ces

„ ces deux termes, ou leur somme à la T'P', qui est le second, „ & celle-ci restera connue (*).

„ 52. Dans le triangle ST'P' on a encore le côté ST', & l'angle ST'P': ainsi on y trouvera l'angle T'SP', qui est le même que *tSp* : celui-ci étant ajouté à la longitude héliocentrique de la terre déterminée par le rayon ST', ou en étant ôté „ donnera la longitude de la SP'.

„ 53. Dans le triangle SP*p* on a l'angle en P, qui est le même, que SPP'', & le côté SP déjà trouvé, & on trouvera „ l'angle PS*p*, qui est la différence des longitudes des SP, SP': „ ainsi on y trouvera la S*p*.

„ 54. Dans le triangle *tSp* on aura déjà trouvé les côtés S*t*, „ S*p* avec *tSp* : ainsi on aura l'angle S*tp*. La différence de celui-ci, & de l'angle ST'P', qu'on avoit déjà, donnera la réduction cherchée.

„ 55. Cette méthode ne supposant ni la nature de la courbe, „ ni la loi de la gravité, n'est pas particulière privativement „ aux comètes : mais elle peut servir pour les planètes, & généralement pour toute autre orbite. La première (c'est celle, que j'ai employée ici dans l'Opuscule, & indiqué ci-dessus ; je l'avoit détaillée au commencement de cette lettre) suppose la „ loi de la gravité réciproquement proportionnelle aux quarrés des „ distances ; mais non la nature particulière de la parabole ; ainsi „ elle peut servir aussi pour les planètes ; mais elle n'est pas „ aussi générale que celle-ci. Pourtant on voit, que par toutes „ les deux on peut faire le réduction du mouvement curviligne, & inégal dans l'arc au rectiligne, & uniforme dans la „ corde sans avoir aucune connoissance de la nature particulière „ de la courbe, & cela dans la première en faisant seulement la „ position de la seconde distance raccourcie.

„ 56.

(*) C'est ici la même détermination de T'P', que celle de TP de la fig. 3 ci-dessus au num. 39 fondée de même sur la rencontre de la ligne visuelle avec le plan de l'orbite déjà connu. Il n'y a de la différence, que dans la manière de trouver celle, qui est ici T'E, & là haut TL', qui pourtant réellement revient au même.

„ 56. Cette méthode-ci, si l'on se donne la peine d'en faire le „ calcul, peut servir à voir, que la seconde distance T'P' trouvée „ ici s'accorde avec celle, qu'on peut tirer de la parabole exa- „ ctement accordée avec les trois observations, ou pour chercher „ la réduction par l'autre méthode en y employant cette secon- „ de distance, comme si on l'avoit prise par position, & la trou- „ vant sensiblement la même, que l'autre donnée par cette mé- „ thode-ci, voir la bonté de toutes les deux. Cela serviroit à „ employer avec moins de scrupule la première, qui est incom- „ parablement plus simple, & qui ne suppose pas la raison des „ deux distances déjà trouvée par les mouvements pris de la se- „ conde longitude non encore réduite ".

57. Jusqu'ici dans cette lettre sur cet objet, qui devoit bien m'intéresser, comme on peut s'en apercevoir, par ce que j'en ai dit dans la préface de l'Opuscule, & par ce qu'on verra ci-après dans le Mémoire V.

MÉMOIRE III.

Application de la méthode, proposée dans cet Opuscule pour l'orbite parabolique, à la recherche d'une elliptique, quand les observations bien éloignées ne s'accordent pas avec une même parabole.

1. Si l'on a des observations d'une comète bien éloignées entr'elles, qu'on ne puisse accorder avec aucune parabole, sur-tout si les unes ont été faites avant, & les autres après le périhélie, & qu'on trouve une espèce de régularité parmi les différences des lieux observés aux lieux tirés d'une courbe de cette éspèce déterminée par trois observations éloignées bien exactes; on peut chercher une ellipse, puisqu'on croit, que réellement l'orbite d'un comète est elliptique, & l'arc observé s'écartant sensiblement dans un cas pareil de l'arc d'une parabole fait voir, que l'excentricité de l'ellipse n'est pas si grande à n'en pouvoir déterminer les éléments. Or je trouve, que l'on peut adapter à cet-

cette recherche la même méthode, que j'ai employée pour chercher la parabole, avec un petit changement, qui répond à la différence des vîtesses dans ces deux courbes. Je développerai ici cette application, & j'ajouterai des moyens pour la même recherche indépendants de la théorie exposée dans l'Opuscule, & correlative à la parabole, en y ajoutant des méthodes plus générales, qui pourront servir aussi pour rectifier les éléments des orbites des planètes.

2. Pour cette application j'employe un beau théorème, que j'ai démontré de différentes manières dans différents ouvrages : je l'ai publié l'an 1743 dans une Dissertation sur le mouvement d'un corps attiré vers un centre immobile par des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances. Cette Dissertation a été réimprimée dans les Mémoires de l'Académie de Bologne tom. II. part. III. Je l'ai tiré du résultat d'une recherche, qui paroissoit bien éloignée de cet objet, dans une Dissertation imprimée à Rome l'an 1749, qui a pour titre *De invenienda orbita planetæ ope Catoptricæ*. Mais j'en ai donné une démonstration directe, & très-simple dans mon ouvrage des aberrations de Jupiter, & Saturne produites par leur attraction mutuelle, que j'ai imprimé à Rome l'an 1756. Voici le théorème.

3. Soit (fig. 1 Tab. X) S le centre des forces, qui pour les planètes, & les comètes est le soleil, G le lieu d'un de ces astres, GK la direction de la tangente, GB dirigée au point S, SB la hauteur, qui répond à la vîtesse de son mouvement, c'est-à-dire à la hauteur, de laquelle ce corps en tombant vers le même point S avec un mouvement uniformement accéléré par une force constante égale à celle, qu'il a en G, acquereroit la vîtesse de son mouvement actuel. Si l'on prolonge SG de manière en A, que SA soit la ligne troisième continuellement proportionnelle après SB, SG; cette ligne sera égale au grand axe de la section conique, que ce corps décrira : par conséquent si l'on tire AR perpendiculaire sur GK, & qu'on la prolonge autant en O; celui-ci sera l'autre foyer; parcequ'on voit aisément, que GO sera $=$ GA, & SG $+$ GO $=$ SA, c'est-à-dire égale au grand

axe.

axe. Ainsi quand GB sera = GS, SB devenant = o, l'axe SA deviendra infini, & la courbe sera une parabole : dans le cas de l'ellipse elle sera plus petite, que GS, dans l'hyperbole plus grande. Si la force étoit répulsive, GB iroit du côté opposé au centre S, & la courbe seroit toujours une hyperbole.

4. Comme dans un mouvement uniformément accéléré les espaces sont proportionnels aux quarrés des vîtesses ; on voit bien, que le quarré de la vîtesse dans la parabole sera au quarré de la vîtesse dans l'ellipse comme SG à GB, c'est-à-dire comme SA à AG = OG ; puisque dans trois termes continuellement proportionnels le premier doit avoir la même raison à la différence des deux premiers, que le second à la différence des deux derniers.

5. Voici donc la manière d'appliquer la même méthode proposée dans l'Opuscule pour une parabole à la recherche d'une ellipse. On commencera par chercher la parabole en cherchant dans la fig. 4 de l'Opuscule (Tab. I) la position de la ligne T'P' telle, qu'ayant trouvé à l'aide de la fig. 9 les deux SC, SC'' de la fig. 1 (*), ayant fait leur somme = b, & la CC'' trouvée à l'aide des mêmes figures = c, soit $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$, qui est la valeur trouvée au num. 32 du même Opuscule. Ayant trouvé cette position, & ayant déterminé par son moyen la parabole, comme dans l'Opuscule, on en tirera la longitude pour le temps d'une observation éloignée : si l'on trouve une différence assez considérable ; on prendra la SP' un peu plus petite de manière que la valeur $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$ soit égale à une valeur a' plus petite, que a, & on cherchera, quelle est l'ellipse, qui convient à cette nouvelle valeur a'. Comme cette valeur dépend de la vîtesse du mouvement dans l'orbite ; nous ferons voir à l'aide du théorème

(*) Les points C, C'' de la fig. 1 Tab. X de ce Mémoire répondent aux mêmes deux points de la fig. 1 Tab. I : on a omis dans cette table-ci le point C' pour ne pas surcharger la figure : on n'en a besoin, que pour la réduction de la seconde longitude à faire de la même manière que dans l'Opuscule, auquel on se remettra tant pour la méthode, que pour la figure.

me énoncé, comment on peut trouver cette ellipse. L'ayant trouvée, on cherchera, si une observation éloignée s'accorde avec cette ellipse, & j'exposerai la méthode de cette recherche: si elle ne s'accorde pas; on changera la position, & par une seule suite de fausses positions on perviendra à l'accord, que l'on cherche.

6. Ainsi pour l'application, qui est l'objet de ce Mémoire, il y a deux problêmes à résoudre: 1°. trouver l'ellipse, qui répond à la nouvelle valeur a': 2°. trouver, si l'observation éloignée s'accorde avec cette ellipse, & si elle ne s'accorde pas, trouver la quantité de la différence, qu'on doit employer dans la règle des fausses positions. Le fondement de la première recherche sera le théorème énoncé, avec lequel pour la seconde on pourra se servir de la seule longitude éloignée; mais on pourra simplifier beaucoup le problême en employant la longitude, & la latitude ensemble.

7. Ce qui appartient à la manière, que nous avons employée dans l'Opuscule pour trouver la raison de la distance SP' aux distances SP, SP'', ne dépend en rien de la nature de la parabole, mais seulement de la proportionalité des aires aux temps, qui est commune aussi au mouvement elliptique. La réduction de la longitude T'P' de sa fig. 1 (Tab. I) à la longitude tp dépend aussi seulement de la raison des effets T't, C'c de la gravité de la terre, & de la comète vers le soleil, & par conséquent elle est aussi commune à ces deux mouvements. Ainsi quand on aura pris par position la distance SP', la manière de trouver les SP, SP'', SC, SC'', CC'', & par conséquent aussi la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$ restera la même. Toute la recherche se réduira à sa comparaison avec la valeur a.

8. On en a trouvé l'égalité en cherchant dans la figure 2 de l'Opuscule la distance, dans laquelle la vîtesse parabolique est égale à la vîtesse moyenne de l'intersection B dans la corde, & en déterminant son rapport à la demi-somme $\frac{1}{2}b$ des deux rayons SC, SC', avec une correction, qui a introduit le second terme de la for-

mule, & celui-ci est très-petit, quand l'arc CC' est petit. Comme l'ellipse d'une comète ne diffère jamais d'une parabole de manière à introduire une différence sensible dans les autres propriétés d'un arc assez petit, on peut retenir cette même formule, en changeant seulement la valeur a, qui devoit l'égaler, à proportion de la différence des deux vîtesses, l'elliptique, & la parabolique, qui est assez considérable, quand même les deux petits segments de ces deux courbes sont très-peu différents entr' eux. Il suffira de changer la valeur a relativement à ce changement, qui se fait dans la vîtesse par la substitution d'une ellipse, qui a le même foyer, & la même corde. On voit bien, que la vîtesse moyenne dans un petit arc tant parabolique, que elliptique ne peut pas différer sensiblement de la vîtesse moyenne du point B de la même fig. 2 de l'Opuscule dans la corde, ni de celle, qui répond à une distance moyenne arithmétique entre les deux distances extrêmes SC, SC', les mêmes que les SC, SC'' de sa fig. 1, ce qui donneroit $bc^2 = a$, sans la diminution du terme $\frac{c^4}{12b}$, qui réellement, quand l'arc est assez petit, se trouve presqu'insensible par rapport au premier bc^2. Mais pour avoir plus d'exactitude, & pouvoir employer des observations plus éloignées, nous donnerons ci-après une petite correction correlative aux suppositions, que nous ferons d'abord fondées sur la considération de la grande petitesse de l'arc, comme aussi une autre, qui regarde la raison de la distance T'P' de la fig. 1 Tab. I de l'Opuscule aux distances TP, T''P'', qui donnent les rayons SC, SC'', & la corde CC''. Cette seconde correction regarde les deux petits segments PP', P''P', que j'ai négligés par rapport aux secteurs PSP', P''SP' pour prouver l'uniformité du mouvement de l'intersection p du rayon vecteur avec la corde. Alors on pourra employer des arcs un peu plus grands.

9. La valeur a est tirée au paragraphe 3 du même Opuscule du rapport, que le quarré de la vîtesse de la comète dans une distance donnée a au quarré de la distance moyenne de la terre, & les hauteurs correlatives aux vîtesses sont comme leurs quarrés.

rés. Donc ayant pris G vers le milieu de l'arc CC'' de la fig. 1 (Tab. X) de ce Mémoire il suffira de faire $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a'$, & prendre GB quatrième après a, a', & SG, en employant ainsi pour la raison des hauteurs la raison des quarrés des vîtesses.

10. Pour déterminer l'ellipse, qui répond à la vîtesse de la nouvelle hauteur $= a'$, nous supposerons, que cette vîtesse répond à l'extrémité G du rayon, qui coupe par le milieu la corde CC'' en F; parceque dans un arc assez petit ce point ne peut pas s'éloigner sensiblement de celui, qui a été employé dans la recherche de l'orbite parabolique. Pour sa longueur on pourroit bien prendre la demi-somme des rayons SC, SC'', mais on peut le déterminer de cette autre manière. On trouvera dans le triangle SCC'' l'angle en C, qui est le même que SCF, par ses trois côtés: celui-ci avec les deux côtés SC, & CF $= \frac{1}{2}$CC'' donnera l'angle SFC, & on trouvera la petite flèche GF en divisant la valeur v trouvée au num. 34 de l'Opuscule, qui est la flèche du milieu de l'arc de la terre, par le quarré de SF. Parcequ'en considérant ces deux flèches, comme des effets des deux gravités, & le rayon terrestre étant $= 1$, on auroit GF en divisant v par SG^2: la substitution de SF à sa place ne change pas sensiblement la valeur d'une quantité si petite. Alors on aura aussi GB par cette proportion, $a : a' :: SG : GB$, & par conséquent on aura aussi SB, & le grand axe SA troisième continuellement proportionnel après SB, SG (num. 3).

11. Pour trouver la position de ce grand axe, & l'excentricité, on pourra considérer la tangente GK comme parallèle à la corde C''C: ainsi ayant trouvé dans le triangle SFC l'angle en F, qui sera = SGK, son excès sur le droit ARG donnera l'angle A, qui avec l'hypothénuse AG = SA − SG donnera AR, & son double AO. Finalement dans le triangle ASO ayant l'angle A, & les côtés AS, AO, on aura l'angle ASO, qui donne la position du même axe, & le côté SO double de l'excentricité: en coupant par le milieu SO en I, ce point sera ce centre, & SI cette excentricité, qui restera connue. On trouvera sur la SO

prolongée les deux sommets du même axe, en portant du centre I la moitié de SA d'un côté pour le périhélie V, & de l'autre pour l'aphélie M (*).

12. Il faut à présent résoudre l'autre problême, en cherchant l'accord de cette ellipse avec une observation éloignée. Premiérement on trouvera la ligne des nœuds N'SN, & l'inclinaison de l'orbite de la même manière, que dans l'Opuscule aux paragraphes 9, & 14; parceque cette détermination ne dépend pas de la nature de la courbe. Elle dépend dans la fig. 1 du même Opuscule de la position, & longueur des lignes SP, SP'', PP'', PC, P''C'', que l'on trouve dépendamment de la seule position de la distance SP', de sa raison aux rayons SP, SP'', & des longitudes, & latitudes observées.

13. Si l'on a fait la construction sur une feuille de papier assez grande pour y avoir la ligne SA troisième continuellement proportionnelle après SB, SG; & que l'on vèuille faire tout le reste par une construction graphique; la solution du problême sera très-facile, en employant ensemble la longitude, & la latitude. On trouvera sur la fig. 1 de ce Mémoire, comme dans l'Opuscule sur sa fig. 4 le lieu de la terre dans son orbite, & on tirera dans la direction de sa longitude la ligne T'''E d'une longueur arbitraire: on pourra la faire égale à l'unité de la construction, qui est la distance moyenne de la terre au soleil: on tirera du point E une ligne perpendiculaire à la ligne N'N, & on y prendra EH quatrième proportionnelle après la tangente de l'inclinaison de l'orbite, celle de la latitude observée, & la ligne T'''E. La valeur à prendre sur l'échelle pour la EH sera $\frac{tan.lat.}{tan.incl.}$. On trouvera T'''H, & ayant mis D à son intersection avec la ligne des nœuds, on tirera par D une ligne parallèle à la HE, c'est-à-dire perpendiculaire à la ligne N'N, jusqu'à la T'''E prolongée en P'''.

14. Ce

(*) On verra dans un Opuscule du Tome V une manière de déterminer la grandeur de l'axe, sa position, & l'excentricité par le rayon vecteur, son angle avec la tangente, & la hauteur de la vîtesse, indépendamment de toute résolution de triangle par des valeurs algébriques très-simples.

14. Ce point sera le lieu de la comète réduit à l'écliptique ; parcequ'on aura la proportion suivante : $T'''P''' : P'''D :: T'''E : EH :: tan.incl. : tan.lat.$: & dans la fig. 1 (Tab. I) de l'Opuscule (même selon la théorie générale des planètes) c'est la raison de chaque TP à sa PD, qui sont les dénominateurs des valeurs de ces deux tangentes $\frac{PC}{PD}$, & $\frac{PC}{TP}$. On trouvera ici le point C''' de l'orbite elliptique en prolongeant la DP''' en C''' de manière, que C'''D soit $= \frac{P'''D}{cos.incl.}$. On verra alors, si ce point répond à l'ellipse trouvée ; parcequ'on trouvera dans l'échelle la valeur des deux lignes SC''', OC''', dont la somme devroit être égale à la longueur de l'axe = SA. Si on ne trouve pas cette égalité ; il faut marquer la différence, & changer la position. On pourroit remplir le même objet sans avoir besoin de la nouvelle position P''', & C''', en comparant de la manière, que nous verrons ci-après, l'aire du secteur CSC'' à l'aire totale de l'ellipse, que l'on trouve par l'axe VM, & l'excentricité SI, puisque leur raison doit être la même, que celle du temps écoulé entre les observations C, C'', au temps périodique, & on trouve ce temps par le grand axe de l'ellipse, & par le temps périodique de la terre : mais l'usage exposé d'une nouvelle observation éloignée est plus simple, & moins dangereux.

15. La longueur de l'axe devra toujours être très-grande ; si l'ellipse ne s'écarte beaucoup de la forme parabolique vers le périhélie V, ce qui doit arriver à toutes les comètes ; & pour cela il ne faudra pas prendre la seconde distance à la terre trop différente de celle, qui avoit été donnée par la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$. Pour la même raison on pourra se servir pour le même effet plutôt de la directrice, que l'on trouvera aisément à l'aide d'un peu de calcul numérique. Ayant trouvé la valeur des lignes SA, SO, dont les moitiés sont IV, IS, on trouvera sa distance SX au foyer, qui sera $= \frac{IV^2}{IS} - IS$, parceque par la

natu-

nature de l'ellipse on a la proportion suivante IS : IV :: IV : IX, & c'est aussi la raison de SV à VX, & des distances de chaque point de l'ellipse au foyer, & à la directrice. Cette raison dans la parabole est celle de l'égalité : ainsi dans une ellipse très-allongée elle ne doit pas s'en écarter trop : par conséquent SX ne pourra pas excéder de trop le double de SV = IV — IS, & celle-ci ne peut pas être une quantité trop longue dans l'orbite d'une comète, qui a descendu de manière à se rendre visible. Comme on aura trouvé l'angle ASO, on fera l'angle GSX égal à son supplément, & ayant pris la longueur SX trouvée, on tirera par X la directrice, qui lui est perpendiculaire. On prendra avec le compas la distance perpendiculaire du point C''' à cette ligne, & on verra, si elle est égale à la valeur $\frac{IV \times SC'''}{IS}$. Si elle ne l'est pas, il faudra marquer la différence, & faire une autre position.

16. Mais cette recherche est trop délicate, pour la faire par le moyen de la construction graphique ; ainsi il vaudra beaucoup mieux d'employer le calcul trigonométrique. Nous aurons trouvé en nombres la longueur de la ligne SA : nous trouverons sa position avec la position de l'axe VSM de la manière suivante. Dans la résolution du triangle SCF (num. 10) on trouvera l'angle CSF, & dans le num. 11 nous avons trouvé par un calcul trigonométrique l'angle ASO, & la ligne SO. Donc on saura l'angle GSV supplément de l'angle ASO, & CSV sa différence au CSF, ce qui donne la position de l'axe par rapport à la ligne SC : on sait la longitude de la ligne SN', & dans la fig. 1 de l'Opuscule on trouvera l'angle CSN', qui est le même qu'ici, parceque pour trouver la position du nœud on y aura trouvé l'angle PSN' dans la même fig. 1 de l'Opuscule, & on a cette proportion, *cos.incl.* : 1 :: DP : DC :: *tan.*PSN' : *tan.*CSN'. Ainsi on aura ici la longitude de la ligne SC dans l'orbite appliquée sur le plan de l'écliptique, qui donnera ici celle des lignes SV, SM, c'est-à-dire leur position.

17. La ligne T'''P''' étant la direction de la longitude de la comète, & DC''' perpendiculaire à la ligne des nœuds, ce qui donne sa longitu-

gitude éloignée de trois signes de celle du nœud, on saura l'angle $DP'''T'''$, qui est la différence de ces deux longitudes, & comme on sait aussi la raison des côtés $T'''P'''$, $P'''D$, on trouvera les angles $P'''T'''D$, $P'''DT'''$, on résoudra alors le triangle $DT'''S$; parcequ' on sait l' angle $P'''T'''S$ différence des longitudes de la comète, & du soleil, & on a trouvé $P'''T'''D$, ce qui donne $DT'''S$: on sait aussi $T'''SD$ différence des longitudes du soleil, & du nœud, & on sait ST''' distance du soleil à la terre : donc on y trouvera les côtés SD, $T'''D$. Ce dernier est la base du triangle $T'''P'''D$, dont on a déjà les angles : donc on y trouvera le côté DP''', & par-là aussi $DC''' = \frac{P'''D}{cos.incl.}$. Le triangle SDC''' rectangle en D donnera par les côtés SD, DC''' connus l' hypothénuse SC''', & l'angle $C'''SD$.

18. Finalement dans le triangle OSC''' on sait les côtés SO, SC''', & on trouvera l' angle $C'''SO$, parcequ' on a déjà trouvé l'angle $C'''SD$, & l'angle $OSD = NSV$ différence des longitudes du nœud, & du périhélie : donc on aura $C'''O$, & on verra, si $SC''' + C'''O$ fait la longueur SA, que l'on avoit trouvé pour l'axe. Si l'accord n'y est pas; on marquera la différence pour l'employer après, & on fera une nouvelle position. L'opération se réduit à la résolution de cinq triangles CSF, $T'''P'''D$, $ST'''D$, $C'''SD$, $C'''SO$ outre la position du nœud, & l'inclinaison de l' orbite, qu' on aura trouvé, comme dans l' Opuscule pour la parabole.

19. Pour employer la longitude seule il faut faire entrer la raison de l' aire des secteurs elliptiques CSC'', CSC''', qui doivent être comme les temps écoulés entre les observations C, C'', & C, C''', ou la raison de l' aire du secteur CSC'' à l' aire totale de l' ellipse : celle-ci devroit être celle du temps employé par l' arc CC''' au temps périodique, qu' on trouve par le rapport du demi-axe IV à la distance moyenne de la terre $= 1$: il est égal au temps périodique de la terre multiplié par $IV^{\frac{3}{2}}$. Mais alors pour déterminer le point C''' nous aurons besoin d' une équation

de

de second degré ; puisqu' on ne peut pas se servir de la raison de T'''P''' à P'''D, & il faut supposer le point C''' sur l'ellipse, pour avoir cette détermination.

20. Voici comment on peut s'y prendre. Que la rencontre de la ligne C'''L''' perpendiculaire à l'axe, & de la P'''T''' avec la N'N soit Y & Z : celle de la ligne P'''D avec l'axe *a*. On aura l'angle MSN', qui est égal à VSN', par les trois angles CSN', CSF, VSF, dont le premier aura été trouvé en cherchant la position de la ligne des nœuds par rapport à la ligne SC, le second, & le troisième, qui est le même, que GSV, ont été trouvés au num. 16. Le même MSN' est $=$ YC'''D; parceque les lignes C'''Y, C'''D sont perpendiculaires aux VS, NS. On saura aussi l'angle ST'''Z, qu' est la différence de la longitude de la comète, & du soleil, & l'angle T'''SZ, qui est la différence de la longitude héliocentrique de la terre, & de la ligne des nœuds, ce qui fera connoître l'angle P'''ZS, qui dans le cas de la figure, en est la somme, & par conséquent le côté SZ du triangle ST'''Z, dans lequel on connoît encore le côté ST'''.

21. On fera alors les dénominations suivantes IV $= a$, SI $= b$, SZ $= c$, IL''' $= x$, L'''C''' $= y$, *sin.* VSN' $= d$, son *cos.* $= e$, sa *tang.* $= f$, *tan.* P'''ZD $=$ *tan.* P'''ZS $= g$, le co-sinus de l'inclinaison $= h$.

22. On aura L'''Y $=$ SL''' $\times$ *tan.* L'''SY $=$ SL''' $\times$ *tan.* VSN' $= f(b-x)$, C'''D $=$ C'''Y $\times$ *cos.* YC'''D $=$ C'''Y $\times$ *cos.* VSN $= e(y+f(b-x))$, qui se réduit à $ey + d(b-x)$, parceque généralement ef est $= d$, c'est-à-dire *cos.* $\times$ *tan.* $=$ *sin.* Ainsi P'''D $=$ C'''D $\times$ *cos. incl.* sera $= hey + dh(b-x)$: on aura aussi L'''$a = fy$: par conséquent Sa $=$ SL''' $-$ L'''$a = b - x - fy$, SD $=$ Sa $\times$ *cos.* aSD $=$ Sa $\times$ *cos.* VSN' $= be - ex - efy = be - ex - dy$. De-là on tire DZ $=$ SZ $-$ SD $= c - be + ex + dy$, & P'''D $=$ DZ $\times$ *tan.* P'''ZD $= cg - beg + egx + dgy$. Mais on avoit sa valeur $= hey + dh(b-x)$: donc on aura $y = \dfrac{(eg+dh)x + cg - beg - bdh}{he - dg}$. Par la nature

de

de l'ellipse on a $y^2 = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - x^2)}{a^2}$. L'égalité de cette valeur avec le quarré de la précédente valeur de y donnera l'équation, qui sera du second degré ayant x^2, x, & des quantités connues.

23. Si cette équation a les valeurs imaginaires, cela fera voir, que la ligne T'''E ne rencontrera en aucun point l'ellipse projettée, à laquelle devroit appartenir le point P''', dont l'impossibilité sera prouvée par l'équation imaginaire. S'il y a des valeurs réelles, & que les deux racines soient égales ; cette ligne touchera cette courbe en un point : si celles-ci sont inégales, il y aura deux intersections. Mais il faudra continuer l'opération pour voir, si aucune de ces deux solutions s'accorde avec le temps, qui doit répondre à l'aire CSC''', ce qu'on fera de la manière suivante.

24. Si l'on conçoit CL perpendiculaire à l'axe VM, & le cercle du rayon IV, qui rencontre les lignes LC, L'''C''' en *b*, *b*''' avec les lignes I*b*, I*b*''', S*b*, S*b*''', on sait bien, que les aires VSC''', VSC auront aux aires VS*b*, VS*b*''' la même raison, que l'aire de l'ellipse a à l'aire du cercle circonscrit, qui est la raison constante des ordonnées L'''C''', LC aux ordonnées L'''*b*''', L*b*. Ainsi il faudra voir, si l'aire de tout ce cercle a à l'aire du secteur *b*S*b*''' la raison du temps périodique au temps, qui répond à l'arc CC''' (num. 19). Or on trouve aisément l'aire du cercle, qui est au quarré du rayon IV, comme la circonférence de tout cercle est à son diamètre. On trouvera l'aire du secteur *b*S*b*''' en calculant les aires des secteurs VS*b*''', VS*b*, dont la première est la différence du secteur VI*b*''', & du triangle SI*b*''', & la seconde du secteur VI*b*, & du triangle SI*b*.

25. Pour la première ayant trouvé IL''' $= x$ par l'équation, on trouvera l'angle VI*b*''', dont le co-sinus est $= \frac{\text{IL}'''}{\text{I}b'''} = \frac{\text{IL}'''}{\text{IV}}$. Le sinus de celui-ci multiplié par IV $= a$, & par la moitié de SI donnera le triangle SI*b*''', tandis que le quatrième terme proportionnel après 360 degrés, l'angle VI*b*''', & l'aire de tout le cer-

cle donnera le secteur VIb'''. Pour la seconde ayant SC avec l' angle CSL on aura CL, qui multipliée par $\frac{a}{\sqrt{(aa-bb)}}$ donnera bL par la nature de l' ellipse. On aura l'angle bSV, c'est-à-dire bSL par la proportion suivante $\sqrt{(aa-bb)} : a :: CL : bL :: tan.CSL : tan.bSL$. Cet angle donnera de la même manière le secteur circulaire VSb, & $bL \times \frac{1}{2} b$ le triangle SIb. La différence de ces deux aires dans le cas exprimé par la figure, ou leur somme dans d' autres cas, sera le secteur bSb'''. Le quatrième terme proportionnel après l' aire de tout le cercle, l' aire de ce secteur, & le temps périodique donnera un temps, qui doit être comparé avec le temps, qui réellement s' est écoulé dans le mouvement par l' arc CC'''. Si on le trouve égal, la position a été juste: autrement on pourra faire la même opération pour l'autre valeur x: mais si l'on a fait avant la construction graphique, qui donne le point C''' peu éloigné du véritable; on verra d' abord quel des deux valeurs x est celle, qu'on doit prendre; parcequ' ayant tiré $C'''L'''$, on aura VL''', qui ôté de la valeur a donnera la valeur, qui doit être à-peu-près égale à cette x, qu'on doit employer. Si le temps calculé ne se trouve pas égal à celui, qui s'est écoulé entre ces deux observations; il faudra marquer la différence, & faire une position nouvelle.

26. Mais si on veut employer l'aire d' un secteur pour comparer le temps, qui lui répond, avec le temps de l' observation, on peut se dispenser de la nouvelle observation correlative au point C''', sans en employer ni la longitude, ni la latitude. Ayant trouvé l' ellipse, qui convient aux points C, C'', & à la hauteur GB, on pourra de la même manière trouver l' aire du secteur bSb'' à la place de bSb''', & le temps, qui lui répond, pour le comparer avec le temps observé. Alors sans aucun besoin du long calcul nécessaire pour trouver l' équation, la résoudre, & employer la valeur x trouvée, on aura immédiatement la suite des fausses positions, qui donneront à la fin la vraie, qui détermine l' ellipse cherchée. Mais la détermination sera plus sûre, si l'on employe une autre observation éloignée, parceque la même

me quantité d'erreurs commises dans l'observation, & les quantités négligées feront moins d'effet, quand il s'agira d'un intervalle de temps plus long.

27. Pourtant pour ce, qui regarde les quantités négligées, comme il s'agit ici d'une recherche beaucoup plus délicate, que quand on cherchoit par une approximation pas si scrupuleuse l'orbite parabolique; il faudra diminuer tant que l'on peut leurs effets: voici ce qu'on peut faire pour diminuer celui de deux, qui sont les plus considérables: 1°. on a supposé dans l'Opuscule, que dans sa fig. 1 Tt, $T''t$, & Pp, $P''p$ sont comme les temps: 2°. on a supposé ici, qu'en coupant CC'' (fig. 1) par le milieu en F, & en tirant SG par F, le point G se trouve là, où la tangente est parallèle à la corde, & où la vîtesse parabolique est égale à la vîtesse moyenne de l'intersection du rayon vecteur avec elle: cette seconde supposition peut porter une erreur plus grande encore dans la direction de la ligne ARO, & dans sa longueur, outre l'erreur, que cela porte dans la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$.

28. Pour diminuer la première erreur nous employerons un théorème, qui est général pour tous les petits arcs des courbes hors de certains points, où il n'y a pas de cercle osculateur. *Les petits segments sont comme les cubes de leurs cordes, si l'on y néglige des quantités d'un ordre inférieur*. Voici la démonstration pour les secteurs circulaires. Si C (fig. 2) est le centre du petit arc ADB, dont la corde AB est coupée par le milieu par le rayon CD en E; la flèche DE, comme on sait, est égale au quarré de la corde AD divisé par le diamètre: ainsi elle est proportionnelle à ce quarré: celui-ci pourra être pris pour proportionnel au quarré du sinus AE, parceque leur différence, qui est égale au quarré de la même flèche, sera du quatrième ordre, la même flèche devenant du second. Ainsi le triangle ADB, qui est $= AE \times ED$ sera proportionnel au cube du sinus AE, & par conséquent au cube de la corde AB, qui en est double. On aura de même un triangle isocèle ayant pour ba-

se chacune des deux cordes AD, BD, & le sommet au milieu de son arc, qui seront proportionnels aux cubes des mêmes cordes, & par conséquent au cube des sinus AE, BE, & de toute la corde AB. De la même manière on auroit quatre triangles sur les quatre cordes des quatre moitiés des arcs AD, BD proportionnels aux cubes des leurs cordes, qui seroient tous proportionnels à celui de la corde AB. En suivant la même considération, on aura la suite des triangles 1, 2, 4, 8 &c., qui en négligeant les quantités d'ordres inférieurs seront de même tous proportionnels au cube de la même première corde AB, & leur somme formant l'aire du segment ADB, ce segment sera proportionnel au même cube.

29. Or si l'on conçoit (*fig.* 3) les cordes PP'', TT'' divisées exactement en p', t' en raison de temps; nous trouverons à l'aide de ce théorème les petites lignes pp', tt', pour substituer la direction $t'p'$ à tp, qui avoit été substituée à T'P' par la première réduction dans l'Opuscule. Nous appellerons c, c', $c'' = c + c'$ les lignes Pp, P''p, PP'' = Pp + P''p, & en prenant la proportion des trois segments PP', P''P', PP'', nous substituerons les lignes Pp, P''p aux cordes PP', P''P', qui n'en diffèrent, que par des quantités plus petites, que la P'p, quantité d'un ordre inférieur. On a la ligne, T't = v' (num. 34 de l'Opuscule), & P'p = $\frac{\text{SP}' \times v'}{\text{SC}'^3}$, que nous appellerons ici e, & nous ferons le quadriligne PSP''P' = a, la ligne SP' = r. On voit aisément, que le triangle PP'P'' sera $= \frac{ae}{r}$, parcequ'il est à ce quadriligne comme P'p à SP'. Ce triangle est la différence du segment PP'P'', aux deux PP', P''P', & ces trois segments sont entr'eux comme les cubes des trois cordes, c'est-à-dire comme $c''^3 = (c + c')^3$, c^3, c'^3; ainsi $(c + c')^3 - c^3 - c'^3 = 3c^2c' + 3cc'^2 = 3cc'(c + c') = 3cc'c''$ est au c^3, comme le triang. PP'P'' $= \frac{ae}{r}$ au segment PP' $= \frac{ac^3e}{3cc'c''r}$: de la même manière on aura le segment P''P' $= \frac{ac'^3e}{3cc'c''r}$, & leur somme sera =

$\frac{ae(c^3 + c'^3)}{3cc'c''r}$: ainsi on aura le secteur PSP''P' $= a + \frac{ae(c^3 + c'^3)}{3cc'c''r}$ $= \frac{3acc'c''r + ae(c^3 + c'^3)}{3cc'c''r}$.

30. On voit aussi, que le quadriligne PSP''P' $= a$ sera au triangle PSP', comme PP'' $= c''$ à Pp $= c$: ainsi ce triangle sera $= \frac{ac}{c''}$, & le secteur PSP' $= \frac{ac}{c''} + \frac{ac^3e}{3cc'c''r} = \frac{3ac^2c'r + ac^3e}{3cc'c''r}$.

Mais les secteurs sont comme les temps; donc $\frac{3acc'c''r + ae(c^3 + c'^3)}{3cc'c''r}$: $\frac{3ac^2c'r + ac^3e}{3cc'c''r}$: : PP'' $= c''$: Pp' $= c + pp' = \frac{3c^2c'c''r + c^3c''e}{3cc'c''r + e(c^3 + c'^3)}$. En ôtant c, on aura la valeur de la petite ligne pp', qui se réduira à une très-grande simplicité de la manière suivante. Premiérement en réduisant c au même dénominateur, le premier terme du numérateur $3c^2c'c''r$ s'en ira par la soustraction, & on aura $pp' = \frac{c^3c''e - ec(c^3 + c'^3)}{3cc'c''r + e(c^3 + c'^3)}$: mais dans le dénominateur on pourra effacer le second terme, qui est d'un ordre inférieur, puisque la valeur e est du second ordre, & r une quantité finie : dans le numérateur en mettant $c + c'$ pour c'', on aura $c^4e + c^3c'e - c^4e - cc'^3e = c^3c'e - cc'^3e = cc'e(c^2 - c'^2)$. Ainsi on aura $pp' = \frac{e(c^2 - c'^2)}{3c''r}$, & comme $\frac{c^2 - c'^2}{c''} = \frac{c^2 - c'^2}{c + c'}$ est $= c - c'$; on aura à la fin la valeur très-simple $pp' = \frac{e(c - c')}{3r}$. De la même manière on aura la valeur de tt'; mais à la place de P'p $= e$ on mettra T't $= v'$, à la place de SP' $= r$ on aura ST' $= 1$, & les valeurs c, c' exprimeront les parties Tt, T''t de la corde terrestre TT''.

31. En considérant cette formule on voit bien la petitesse de ces deux lignes : outre la petitesse des P'p $= e$, & T't $= v'$, qui entrent aussi dans la réduction de la seconde longitude, que nous avons développée dans l'Opuscule, il y a encore un tiers de $c - c'$, qui doit être une quantité bien petite, puisque toute la

la corde $c'' = c + c'$ est supposée petite. Ainsi ces quantités seront assez petites, même quand la corde ne le sera pas tant. Comme les deux parties c, c' sont proportionnelles aux temps, on voit bien, que quand ces temps, qui sont les intervalles entre les moments des trois observations, seront égaux, la valeur des deux lignes pp', tt' sera $= 0$. Elle ne le sera pas exactement, à cause des quantités, que nous avons négligées; mais comme ces quantités sont d'un ordre inférieur, elle le sera aussi: & pour cela quand les deux temps seront à-peu-près égaux, on pourra négliger tout-à-fait la correction, qui en dérive.

32. Pour trouver cette correction il faudra prendre la différence, ou la somme des angles tpt', $pt'p'$, selon que les deux lignes pp', tt' se trouveront vers le même côté par rapport à la ligne pt, ou vers les côtés opposés: pour en avoir la valeur on dira $tp : tt' :: sin.pt't$, pour lequel on pourra substituer $sin.ptT$: $sin.tpt' = \frac{tt' \times sin.ptT}{tp}$, & d'une manière semblable on trouvera $sin.pt'p' = \frac{pp' \times sin.tpP}{tp}$. Pour ce qui appartient à leur direction, premiérement on voit, que les points p', t' iront par rapport aux points p, t vers les points P'', T'', ou vers les P, T, selon que le premier temps sera plus grand, ou plus petit, que le second, parceque le calcul tiré de la figure, qui représente le premier cas, donne la valeur $c - c'$ positive, ou négative, selon que le premier terme est plus grand, ou plus petit, que le second, & ces deux termes sont proportionnels à ces deux temps. Dans le cas exprimé par la figure, où le premier temps étant plus grand, que le second, la direction tt' va vers T'' selon l'ordre des signes, & le point p par rapport à la ligne TT'' tombe du même côté avec le soleil S; le premier de ces deux angles tpt' augmente la longitude, qui de la direction tp va en $t'p$. Si ces deux conditions se trouvent contraires toutes les deux; la longitude sera augmentée de même par ce premier angle: elle sera diminuée, quand une seule de ces deux conditions se trouvera contraire. Le second angle l'augmentera, ou diminuera de mê-

même, que le premier, quand selon la condition exposée la correction sera la somme de ces deux angles, & il fera l'effet contraire, quand elle en sera la différence.

33. Pour employer cette correction on aura déjà la valeur Tt, & les Tt, T''t dans la première construction, qui donneront pour toutes les positions les valeurs v', c, c' à employer dans les formules pour le premier angle : ayant fait la position SP' $= r$, & trouvé la P'p $= e$ avec la réduction de la seconde longitude par la méthode expliquée dans l'ouvrage, & par son moyen les deux TP, T''P'', on aura PP'', qui doit passer par p. Ainsi on aura encore les deux Pp, P''p, qui sont les valeurs c, c' pour le second angle. La construction aura donné aussi les angles ptT, tpP. Ainsi on aura en partie par construction, & en partie par un calcul numérique simple, tout ce, qui entre dans les formules pour les deux angles, dont la somme, ou la différence appliquée à la correction de la seconde longitude donnera les valeurs m, m' des mouvements en longitude plus corrigées, & par leur moyen on trouvera une autre fois la raison de T'P' aux TP, T''P'', qui par-là resteront plus exactes.

34. Si l'on veut faire tout par un calcul trigonométrique, on le pourra bien. On a déjà eu dans l'Opuscule la résolution des triangles PSP'', TST'' pour avoir les cordes TT'', PP''. On y trouvera l'angle SPP'', & STT'', c'est-à-dire les angles SPp, STt. En prenant le quatrième terme proportionnel après le temps total t'', le premier t, & la corde PP'', ou TT'', on aura les Pp, Tt, ce qui fera connoître les angles PpS, TtS dans les triangles, dans lesquels on a aussi les côtés SP, ST. On a dans l'Opuscule la résolution du triangle pSt, qui donne les angles Spt, Stp : par-là on aura aussi ptT, tpP. Ainsi on peut trouver par un calcul toutes les valeurs, qu'on doit employer.

35. On pourroit se servir de cette seconde correction de la seconde longitude encore, quand on cherche la parabole ; mais l'opération est un peu longue, & quand l'intervalle de temps n'est pas bien grand, elle doit être assez petite pour ne pas être obligé à l'employer dans une méthode d'approximation, surtout

tout

tout quand les deux temps ne sont pas trop inégaux. On fera mieux encore, quand il s' agit de chercher l' orbite elliptique, d' éviter cette correction en choisissant des observations faites à des intervalles de temps à peu-près égaux, ce qu' on fera aisément, parcequ' il s' agit de faire une telle recherche à la fin de l' apparition de la comète. On fera bien d' éviter aussi la première réduction de l' Opuscule, en trouvant, quand on peut, au moins par interpolation la longitude du moment de la conjonction, ou opposition, qui employée pour la seconde des trois observations fait évanouir tout-à-fait la même réduction. Avec ces deux précautions on aura presque tout-à-fait exactes les TP, T'''P''' correspondantes à la T'P' prise par position.

36. Pour la seconde supposition, qui est double, on a besoin d' une double correction. Les lettres S, C, Q, C'', K, E, F, P, V sont les mêmes ici dans la fig. 4, que dans la fig. 2 de l' Opuscule : G ici est à la place de D de l' autre : B ici est la même que dans la fig. 1 de ce Mémoire : E est le point du milieu de la corde, & nous l' avons pris à la place de F pour trouver l' angle SGK = SFC, l' angle CSF, & le côté SF. Pour faire la correction, nous déterminerons la ligne EF, en supposant le triangle EGF isocèle, comme il est dans la parabole, & par conséquent prèsque tel dans une ellipse très-allongée, & en supposant l' angle EFG égal à celui, que nous avons trouvé, & qui étoit réellement SFC. Ces deux suppositions ne changeront la petite ligne FE, que d' une quantité petite par rapport à elle même. En concevant GI, qui lui soit perpendiculaire, on aura FI = FG $\times$ *cos*. SFC, & nous avons trouvé FG (num. 10) : ainsi on aura aussi FE, qui en est le double, & par conséquent CF. Alors on pourra résoudre comme au num. 11 une autre fois le triangle SFC pour trouver les angles en S, & F corrigés, & s' en servir dans les calculs postérieurs.

37. Pour ce, qui est de la vîtesse, nous avons trouvé au numér. 27 de l' Opuscule, que SQ = SV étant la distance, dans laquelle la vîtesse par l' arc est égale à la vîtesse moyenne par la corde, l' arc DV dans sa fig. 2 est = $\frac{2}{3}$FD, c' est-à-dire ici (fig.

(fig. 4) GV $= \frac{2}{3}$FG. Le quarré de la vîtesse en Q est au quarré de la vîtesse en G comme SG à SQ $=$ SV. Ainsi il faudra réduire GB, qui est proportionnelle au quarré de la vîtesse, en GB' en raison de SG à SV. On aura cette proportion, SV, à la place de laquelle on peut prendre SG, est à GV $= \frac{2}{3}$FG, comme GB à BB' $= \frac{2FG \times GB}{3SG}$, & il faudra ôter cette dernière valeur de SB trouvée auparavant pour trouver dans la fig. 1 SA troisième proportionnelle après la nouvelle SB & SG.

38. Avec ces corrections la méthode sera beaucoup moins défectueuse. Mais il y a un autre moyen de se passer de la supposition de la vîtesse trouvée par la valeur $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$, & de la direction de la tangente, & n'employer que la raison de la T'P' de la fig. 1 de l'Opuscule aux deux TP, T''P'' avec les longitudes, & latitudes des deux observations correlatives, & les longitudes, & latitudes de deux autres longitudes éloignées accompagnées de ses latitudes : la méthode en est beaucoup plus expéditive, & évite toutes les erreurs, qui dans la précédente résultent dans la longueur, & position de l'axe par les petites quantités négligées, puisqu'elle ne suppose ni l'une, ni l'autre.

39. On trouvera comme dans l'Opuscule les deux SC, SC'' (fig. 1), la position de la ligne des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite, qui y répondent. On employera la nouvelle correction de la seconde longitude du num. 27, si on ne l'évite par l'égalité des temps (num. 35) : on trouvera par la méthode graphique (num. 13, & 14) deux différents points C''' appartenants à deux différentes observations éloignées. Nous continuerons ici le reste de l'opération sur la fig. 5, qui représentera les points S, C, C'' de la fig. 1, avec son premier C''', le périhélie V, l'aphélie M, le centre I, & les lignes C''L'', C'''L''' perpendiculaires à l'axe. Plusieurs lignes de la même fig. 1 sont inutiles par rapport à cette nouvelle méthode.

40. En prenant sur les lignes SC'', SC''' les lignes SA, SA' égales aux SC, SC'', on tirera AC, A'C'', & parallélement à ces

lignes les lignes SB, SB', qui rencontrent en B, B' les cordes $C''C$, $C'''C''$ prolongées. On tirera la ligne BB', & ayant pris dans l' échelle les valeurs de la distance du point C à cette ligne, & des distances du second point C''', qui n' est pas exprimé dans la figure, au point S, & à la même ligne, on verra si cette dernière divisée par son SC''' donne le même quotient, que la distance du point C à la même ligne divisée par SC. Si ces deux quotients ne sont pas égaux, il faut marquer la différence, & faire une position nouvelle.

41. La démonstration en est très-simple. Si l' on conçoit les lignes $CR, C''R'$ perpendiculaires à la directrice encore inconnue, & que B soit la rencontre de la directrice avec la corde $C''C$ prolongée, CA parallèle à BS, on aura les proportions suivantes, $C''R' : CR :: C''B : CB :: C''S : AS$, par le parallélisme des CA, BS. Mais encore par la nature de l' ellipse $C''R' : CR :: C''S : CS$: donc $AS = CS$, & par conséquent si l' on fait $SA = SC$, & qu' on tire SB parallèle à AC jusqu' à la rencontre avec la corde prolongée, le point B sera à la directrice, & la démonstration étant la même pour le point B', la ligne BB' tirée comme ci-dessus sera la directrice, & la distance d' un autre C''' quelconque de l' ellipse à la même directrice doit avoir à sa distance au foyer S la même raison, que la CR à SC : ainsi si la position a été juste, il faut, que les deux fractions, qui expriment ces deux raisons, soient égales entr' elles.

42. Quand après les différentes positions on aura trouvé cet accord, on trouvera aisément les autres éléments de l' ellipse : on tirera SX perpendiculaire à la directrice trouvée, on la coupera en V en raison de SC à CR, on prendra $SM = \frac{SV \times SX}{VX - SV}$, parcequ' alors on aura la proportion suivante, $SV : VX :: SM : MX$. Ainsi on aura la position, & la grandeur de l' axe : celle-ci donnera le temps périodique : on aura le centre I au milieu de l' axe VM, qui laissera l' excentricité IS. On trouvera dans la fig. 1 l' aire du secteur VSb, comme ci-dessus (num. 26), & le temps, qui lui répond quatrième proportionnel après l' aire du

du cercle du rayon IV, l' aire de ce secteur, & le temps périodique. Ce temps avec le moment de l' observation C donnera le temps de l' arrivée au périhélie, & en y ajoutant la moitié du temps périodique, on aura le moment de l' arrivée à l' aphélie.

43. Si l' on veut appliquer le calcul trigonométrique à la même construction, ce qui vaudroit mieux dans une recherche de cette nature; on pourra le faire aisément. On a dans l' Opuscule la manière de trouver par le calcul trigonométrique les lignes SC, SC'', CC'' avec l'angle CSC'' (fig. 5): celui-ci avec les côtés CC'', SC donnera l'angle $SC''C$. On a vu ici (num. 17) comment on peut trouver aussi la SC''' avec l'angle CSC'''. Les angles CSC'', CSC''' feront connoître $C''SC'''$, & celui-ci avec les côtés SC'', SC''' donnera $C''C'''$, & l'angle $SC'''C''$, qui avec $C''SC'''$ fera connoître leur somme $SC''B'$, & $BC''B'$ sa différence à l' angle $SC''C$. On aura les lignes $C''B, C''B'$, dont la valeur est $\frac{SC'' \times CC''}{SC'' - SC}$, & $\frac{SC'' \times C''C'''}{SC''' - SC''}$. Ainsi on trouvera l' angle $C''BB'$, dont le sinus multiplié par $C''B$ donnera $C''R' = L''X$: son complément $BC''R'$ avec l' angle $SC''C$ donnera l' angle $SC''R'$ supplément de CSX, qui restera connu, avec $SL'' = SC'' \times cos. C''SX$: comme on aura trouvé la ligne $L''X$, on aura aussi la SX. Finalement pour une nouvelle SC''' on aura par les méthodes expliquées sa longueur, & son angle avec les lignes SC, SC''', d' où l' on tirera le nouvel angle $C'''SV$: son co-sinus multiplié par SC''' donnera SL''', & par-là on aura $L'''X$, qui doit être egale à la distance du point C''' à la directrice XB. Ainsi on pourra voir, si sa raison à SC''' est la même, que celle de $C''R'$ à SC''.

44. Nous avons adapté ici la solution au cas représenté par la figure : mais on verra ce qu' il faut faire dans toutes les positions des points R, X, L'', L''' par rapport aux points B, B' avec un peu de réflexion sur les conséquences de la transformation de la figure dans tous ces cas. Pourtant j'ajouterai ici, qu' on pourra achever le calcul pour trouver l' ellipse par la règle des fausses positions sans employer une nouvelle observation, qui donne un nouveau point C'''. A' la place de la raison des distan-

ces de celui-ci au foyer S, & à la directrice, on peut employer le temps, qui répond au secteur CSC''' dans la fig. 1. Ayant trouvé la directrice par les points C, C'', C''', on trouvera l'axe de l'ellipse comme auparavant, & on pourra déterminer la valeur de l'aire bSb''', ou par le simple calcul, ou par le calcul mêlé avec la construction graphique, & le temps, qui lui répond, comme au num. 25 : la différence de ce temps au temps donné par les observations servira pour la règle des fausses positions.

45. On pourra rectifier les éléments, qu'on aura trouvés, par une méthode semblable à celle, que j'ai donnée dans l'Opuscule au §. XVII, mais encore plus simple. On employera deux autres observations éloignées différentes de celles, qu'on aura employées pour trouver la directrice de l'ellipse, qui donneront deux nouveaux points C''' de la même manière, qu'on a trouvé le premier. On verra combien la raison des distances de chacun de ces points au foyer S, & à la directrice diffère de celle de la SC à la CR (fig. 5). On appellera e, e' les deux erreurs, qu'on aura trouvées, c'est-à-dire, les différences de la raison de la distance, que ces nouveaux points auront à la directrice, à celle, qui devroit y avoir selon la proportion tirée des SC, CR. On changera la première distance TP de la figure 1 de l'Opuscule, & on appellera m le changement qu'on y aura fait. Ayant trouvé de nouveau la ligne des nœuds, l'inclinaison, les trois points C''' d'ici, & par le moyen du premier la directrice, on trouvera la distance, que les deux derniers auront à la nouvelle directrice, & la diminution des erreurs e, e', que ce changement aura produit : on les appellera p, q. S'il y a une augmentation, on considérera ces valeurs comme négatives. En retenant la première TP on changera la troisième T''P'' de la même fig. 1 de l'Opuscule d'une quantité m', & en répétant les mêmes opérations sur la seconde observation éloignée choisie, on appellera p', & q' les deux nouvelles diminutions des mêmes erreurs. On appellera x, & x' les changements, qu'on devra faire aux mêmes distances pour anéantir les deux erreurs, & en supposant les différences proportionnelles, le changement x en fera deux

px

$\frac{px}{m}$, $\frac{qx}{m}$, & l' autre x' deux $\frac{p'x'}{m'}$, $\frac{q'x'}{m'}$. En faisant $\frac{px}{m} + \frac{p'x'}{m'} = e$, & $\frac{qx}{m} + \frac{q'x'}{m'} = e'$, on trouvera les deux changements x, x', qu' on fera aux deux distances, & par leur moyen on trouvera les éléments de l' ellipse.

46. Si les erreurs e, e', ou les diminutions trouvées sont trop grandes de manière, qu'on puisse craindre une inexactitude considérable dans la proportion des différences; on employera les deux distances corrigées, comme on avoit employé les autres. On trouvera les nouvelles erreurs e, e', qui leur répondent, & on cherchera les diminutions, qui répondent à deux nouveaux changements en répétant l' opération, jusqu' à ce, que les erreurs deviennent assez petites. Mais si l' on trouve auparavant par la méthode de l' Opuscule même par la seule construction graphique, les deux distances TP, T''P'' de sa fig. 1; il n' y aura aucun danger de ce côté-là; parceque cette méthode donne une parabole, qui ne peut pas s' éloigner trop considérablement de celle, qui répond aux trois premières observations, & cette dernière de l' ellipse.

47. On peut employer cette méthode immédiatement après qu' on aura trouvé le premier point P''' de la fig. 1 d' ici, & par son moyen la directrice, ce qui abrégera les opérations. Mais j' espère, que si l' on fait la nouvelle correction de la seconde longitude expliquée ci-dessus, & que l' on prend les observations pour le premier P''', ou pour les deux, assez éloignées des trois premières employées dans l' Opuscule, qui donnent les deux distances raccourcies TP, T''P'' par la seule seconde T'P', on trouvera qu' il n' y a besoin d' aucune correction après la première détermination. La déduction des deux extrêmes TP, T''P'' de la moyenne T'P' sera suffisamment exacte, & même presque totalement, si la position de la comète dans l' arc observé est telle, qu' on puisse par interpolation en trouver une pour le moment de la conjonction ou opposition avec le soleil, pour s' en servir pour la seconde des trois premières avec les deux inter-

val-

valles de temps égaux, dans lequel cas les réductions de la seconde longitude s' évanouissent.

48. Quand on aura trouvé par construction la parabole, on pourra choisir trois bonnes observations les plus éloignées, que l' on pourra, & on en prendra deux les plus propres pour la détermination de la ligne des nœuds, & de l' inclinaison (on sait, que les moins propres sont celles, qui sont près de la distance aux nœuds de trois signes) : on tirera de la même construction les deux distances TP, T'''P''' pour les corriger après : on déterminera par leur moyen la ligne des nœuds, & l' inclinaison : on déterminera la directrice à l' aide de la troisième observation, comme ci-dessus, & on trouvera les erreurs e, e' des deux temps, qui répondent aux deux secteurs interceptés entre les trois rayons vecteurs. On fera successivement les deux changements m, m' aux deux distances, en retenant toujours, quand on en change une, l' autre telle, qu' on l' avoit prise d' abord, & on trouvera les deux diminutions p, q, & p', q' de ces erreurs pour les employer dans les équations $\frac{px}{m} + \frac{p'x'}{m'} = e$, & $\frac{qx}{m} + \frac{q'x'}{m'} = e'$. J' espère beaucoup de cette méthode, qui ne suppose rien, & qui employe seulement les principes communs des fausses positions, qui sont toujours beaucoup plus simples, que les méthodes directes, & qui très-souvent sont préférables, & ordinairement préférées par les Astronomes, par la raison, que il y a déjà des petites erreurs dans les données, puisque les observations sont faites par des instruments, & des yeux humains.

49. On peut appliquer les mêmes méthodes à la perfection des orbites des planètes. Ayant trois observations de la plus grande exactitude possible, comme celle du passage au méridien observé avec un grand quart de cercle mural bien sûr dans ses divisions, & une excellente pendule, on prendra par le moyen des tables astronomiques deux distances raccourcies pour les temps des deux de ces trois, & on en tirera la ligne des nœuds, & l' inclinaison de l' orbite. On trouvera le point P''', qui répond à la troisième :

me : alors on sera en état de déterminer la directrice : on employera deux autres observations éloignées pour avoir deux autres points P''', & les deux C''' correspondants. Les distances de ceux-ci au foyer, & à la directrice donneront les deux erreurs, qui serviront à corriger les deux distances raccourcies, qu' on avoit tirées des tables. A' la place des deux derniers points P''' on pourra se servir des aires des secteurs interceptés entre les trois premiers rayons vecteurs rapportées à l' aire totale de l' ellipse. On aura alors la position de la ligne des nœuds, l'inclinaison, la position de la directrice, qui donnera la direction de l' axe, & la raison, qui doit déterminer (fig. 1) les deux points V, & M, c' est-à-dire sa grandeur, & l' excentricité SI. La grandeur de l' axe donne le temps périodique : on peut tirer le temps de l' arrivée à l' aphélie par le secteur bSV comparé avec l' aire de tout le cercle.

50. A' la place de chercher par les tables les deux distances raccourcies, & s' en servir pour trouver la ligne des nœuds, & l' inclinaison, on peut s' y prendre de la manière suivante, que je crois la plus propre pour perfectionner la théorie de toutes les planètes, dont on sait déjà par un à-peu-près la position des nœuds, & l' inclinaison de l' orbite, ce qui dispensera de tous les tâtonnements. En supposant ces deux éléments, on trouvera les trois points P chacun pour une de ses observations de la manière, dont on s' est servi depuis le num. 14, 16, 17, 18 pour déterminer le point P''' à l' aide de la longitude, & latitude. Ayant trouvé ces trois points, on en tirera les trois C, C'', C''' pour la fig. 5 : on y déterminera la directrice, comme au numér. 40, & l'axe, & le centre, comme au num. 42 &c. Par-là on sera en état de calculer la raison des aires des secteurs CSC'', $C''SC'''$, à celle du cercle circonscrit, pour avoir les deux temps qui répondent à ces secteurs. On le comparera avec les deux temps observés, & on marquera les deux erreurs. On changera un peu l' un des deux éléments supposés, & en refaisant la même opération on marquera la diminution des mêmes erreurs. On changera le second élément, en retenant le premier sans chan-

ge-

gement : on marquera la diminution, qui en résultera pour les mêmes erreurs : & alors on aura deux équations comme au numér. 45, par lesquelles on corrigera ces deux éléments, & on trouvera tous les autres comme au num. 42.

51. Les méthodes précédentes appliquées à l'orbite parabolique abrégeront beaucoup la correction proposée au §. XVII de l'Opuscule par le moyen de deux seules équations à la place de trois. Comme je suis tombé sur cette manière après avoir achevé, & fait copier l'Opuscule, j'y ai laissé l'autre plus longue, & plus compliquée, & j'ai mis ici en détail cette nouvelle, dont on pourra se servir là. Ayant approché de l'égalité de la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$ avec la valeur a, on déterminera la directrice de la manière suivante : On trouvera son point B (fig. 5) comme ici en prenant $C''B = \frac{CC'' \times C''S}{C''A}$, & on tracera un cercle du centre C'' avec le rayon C''S, sur lequel on tirera la tangente du point B. Comme ici la distance à la directrice doit être égale à C''S, on voit bien, qu'il n'y a pas besoin du point C''' pour déterminer cette ligne. Deux de ces points trouvés par deux observations éloignées donneront les deux corrections des deux distances, & avec cela on aura même par construction une orbite bien peu éloignée de l'exactitude. On pourra aussi pour la correction employer un seul troisième point C''', & le temps, qui doit répondre au secteur compris entre deux des trois rayons SC, SC'', SC'''; mais alors il faut trouver la distance périhélie, pour tirer les temps, qui répondent à cette distance, & aux deux rayons, par la formule, que j'ai employé dans l'Opuscule pour trouver le temps de l'arrivée au périhélie, ou par les tables paraboliques.

52. J'avois immaginé une autre manière d'appliquer ma méthode parabolique à la recherche de l'ellipse, comme j'ai exposé à la fin de l'Opuscule, en déterminant une parabole par trois observations peu éloignées entr'elles prises au commencement de l'apparition d'une comète, & trois autres à la fin, & considérant ces paraboles comme osculatrices de l'ellipse ; mais j'y ai déjà

fait

fait voir, qu'on ne peut pas employer cette méthode, & j'en ai donné la raison. Ainsi je finirai ici, & dans le Mémoire suivant je proposerai un objet, qui pour la théorie du mouvement elliptique a le même usage, que le beau théorème de Newton, que j'ai, pour ainsi dire, déterré, & employé pour le mouvement parabolique, en divisant par une construction graphique la parabole en jours. Je proposerai une méthode pour diviser en jours l'arc elliptique d'une comète pris aux environs du périhélie (par où seulement elle est visible), quoique ses axes, & son excentricité soient d'une longueur excessive, ce qui empêche d'avoir sur une même feuille de papier sa construction entière. J'y joindrai aussi une manière de faire la délinéation de cet arc par des points, quand on en a un, avec le foyer & sa directrice, qui dans cette ellipse ne s'en éloigne pas excessivement. Cette construction peut servir pour comparer par une opération graphique le résultat donné par l'ellipse avec une longue suite d'observations sans le grand travail du calcul numérique rigoureux. Quand on a une fois l'arc dessiné avec la ligne des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite, on trouvera l'arc de l'ellipse projettée, & la longitude, & latitude géocentrique pour un temps donné de la même manière, que dans le cas de l'orbite parabolique, que j'ai développé dans le Mémoire présent.

53. La délinéation d'une ellipse par des points est bien aisée, quand on a le centre, & les deux axes, si elle n'est pas allongée de manière, qu'une feuille médiocre de papier puisse recevoir toutes les lignes nécessaires, & on peut aussi la dessiner par un mouvement continu à l'aide d'un instrument connu: mais on ne peut pas employer ces méthodes pour l'arc visible de l'ellipse d'une comète, dont le centre, & l'aphélie vont toujours trop loin. Heureusement la directrice y reste très-peu plus éloignée du périhélie, que le foyer, qui a le soleil, & alors il y a pour la délinéation de cet arc une construction par des points très-simple, & facile à exécuter, qui est générale à toutes les sections coniques, que j'ai donnée dans mes éléments de ces courbes: je le donnerai dans une Appendice, que j'ajouterai au même Mémoire suivant.

MÉMOIRE IV.

Méthode pour diviser en jours une ellipse d'une planète, ou comète par construction.

1. NEWTON dans le premier livre des Principes a démontré, qu'on ne peut pas faire la division d'une ellipse de manière, que les aires de ses secteurs terminés à un foyer soient coupées en une raison donnée quelconque par aucune formule algébrique, & pas même les aires des secteurs d'aucune courbe, qui revienne en elle même, par des secteurs terminés à un point quelconque. Ainsi pour la construction d'un tel probléme on ne peut pas se dispenser d'employer une courbe transcendente. C'est correlatif au fameux probléme de Kepler sur le passage de l'anomalie moyenne à l'anomalie vraie. Newton en donne la solution par une série assez convergente, & par la cycloïde allongée. Voici une analyse géométrique pour l'invention de cette courbe, & la manière de s'en servir en pratique pour avoir à un moment donné le lieu d'une planète, ou comète dans une orbite elliptique, dont on ait trouvé les éléments, pour la diviser en jours, & en former les éphémérides par une approximation graphique aidée de très-peu de calcul numérique.

2. Soit (Tab. XI fig. 1) ACP le grand axe de l'ellipse, DCE le petit, S le foyer, ou un point quelconque dans le demi-axe CP. Il s'agit de trouver dans le périmètre de l'ellipse un point M tel, que le secteur ASM soit à l'aire totale de l'ellipse en une raison donnée.

3. Si l'on conçoit le cercle du diamètre AP, qui rencontre en G, & F le petit axe DE, & en N l'ordonnée IM de l'ellipse; on sait, que MI est à NI, toujours en raison constante de CE à CF = CA, & par conséquent l'aire mixtiligne AMI est à l'aire ANI, & l'aire totale de d'ellipse à celle du cercle circonscrit en la même raison: c'est aussi la raison des triangles MSI, NSI, dont MI, NI sont les hauteurs sur la base commune SI: donc les aires des secteurs ASM, ASN sont en cette même raison, & le

le secteur elliptique sera à l' aire de toute l' ellipse, comme le circulaire à celle de tout le cercle.

4. Le secteur circulaire ACN, est le produit de l' arc AN multiplié par la moitié du rayon CA, & le triangle SNC = $\frac{1}{2}SC \times NI$. Ainsi le secteur $ASN = \frac{1}{2}AN \times CA + \frac{1}{2}SC \times IN = \frac{1}{2}SC \times AN \times \frac{CA}{SC} + \frac{1}{2}SC \times IN$, ce qui le rend proportionnel à la valeur $AN \times \frac{CA}{SC} + IN$ à cause de la valeur constante $\frac{1}{2}SC$. Si l' on prolonge l' ordonnée IN en H de manière, que NH soit $= AN \times \frac{CA}{SC}$, ce secteur sera proportionnel à la ligne IH. Si NH étoit égale à l'arc AN, le point H seroit à la cycloïde ordinaire décrite par le point A dans le mouvement du cercle AFPG sur la ligne XPY perpendiculaire à la ligne AP: mais comme NH est plus grande que cet arc en raison constante de CA à SC, ce point est à une cycloïde allongée, dont on trouve aisément le cercle roulant, & son mouvement. Si l' on prend CL dans le rayon CP prolongé, qui soit le troisième terme continuellement proportionnel après CS, & CP = CA; le cercle du rayon CL roulant sur la ligne *xLy* perpendiculaire à la ligne CL décrira par le point A de son plan la cycloïde allongée, dans laquelle NH sera à l' arc AN toujours, comme CL est à CP, c'est-à-dire comme CP à CS. C'est la propriété connue de cette espèce de cycloïde.

5. Si le point S est le foyer, la ligne *xy* sera la directrice de l' ellipse. On peut faire facilement une machine, qui décrira cette courbe pour toute espèce d' ellipse, dont la distance CL du centre à la directrice sera constante avec le cercle LRBQ du rayon CL, qui roule, & ayant l'espèce de l'ellipse, qui donne la raison de l'excentricité au grand demi-axe, on prendra les lignes CP, CA en cette raison à la ligne CL, pour avoir le grand axe AP, & CS, CS' en la même raison à la CP, pour avoir les foyers S, S'.

6. On verra bien, que cette cycloïde arrivera à la ligne XY

dans un point A' tellement, que PA' étant à la demi-circonférence AFP comme le rayon CL est au rayon CA, cette ligne sera égale à la demi-circonférence BQL : la même courbe rencontrera la ligne IN prolongée en un point H de manière, que IH aura à PA' la raison de l'aire du secteur ASM à l'aire de la demi-ellipse, & ayant tiré HT perpendiculaire à PA', le secteur ASM sera au secteur PSM comme la ligne PT à la ligne TA'. Ainsi pour couper l'ellipse de manière, que les secteurs ASM, PSM soient en une raison donnée, il suffit de couper la ligne PA' en cette raison en T, & de tirer TH parallèle à l'axe AP jusqu'à la courbe, & HM perpendiculaire au même axe jusqu'à l'ellipse : pour avoir le secteur ASM en une raison donnée à l'aire totale de l'ellipse, il suffira de prendre PT en cette raison au double de la droite PA'.

7. Sachant la grandeur du demi-axe CA $= r$, on trouve le temps périodique de la planète, ou comète, qui parcourt cette ellipse ; parceque la distance moyenne de la terre étant $= 1$, & l'année périodique $= a$, on aura ce temps $= ar^{\frac{3}{2}}$: la valeur a en jours est $= 365,256$: ainsi si l'on sait le temps de l'arrivée à l'aphélie, ou au périhélie, on trouvera le point M pour un moment donné, en prenant PT, ou A'T quatrième proportionnelle après $\frac{1}{2} ar^{\frac{3}{2}}$, la distance temporaire de ce moment au temps de cette arrivée, & la ligne PA', & tirant les TH, HM.

8. Pour diviser l'ellipse en jours, on ouvrira le compas de proportion de manière, que PA' soit adaptée transversalement aux nombres, qui répondent à celui des jours de la moitié du temps périodique, ce qui donnera l'échelle, par laquelle on trouvera PT, qui répond au nombre des jours écoulés entre l'arrivée à l'aphélie A, & le commencement du mois, ou A'T, qui répond à l'intervalle de temps, qui se trouve entre le commencement du mois, & l'arrivée au périhélie. En partant de-là on trouvera sur cette échelle les points pour les commencements de tous les mois, & on poussera la division tant qu'on voudra.

9. Si l'on veut décrire la courbe par des points, on pourra

le

le faire aisément. On divisera le cercle BQLR de dix en dix degrés : on tirera par chaque division N une ligne perpendiculaire à l'axe AP, & on y prendra NH égale à la valeur de l'arc AN multipliée par la valeur $\frac{AC}{SC}$ vers la partie opposée au point I. On trouvera aisément la valeur de cet arc par rapport au rayon AC, qu'on fera ici $= 1$. La circonférence entière sera $= 6{,}28319$, dont la sixième partie 1,04720 donne 60 degrés : on en tire aisément la valeur pour les arcs de 10 en 10, & pour tel nombre qu'on veut, & la valeur du produit de sa multiplication par $\frac{AC}{SC}$. Alors il suffit d'adapter dans le compas de proportion CL transversalement à 100, & y prendre la ligne transversale qui répond aux centièmes du rayon $= 1$, qu'on aura dans la valeur trouvée : on peut en former la première colonne d'une table. Si l'on ajoute la ligne trouvée à la ligne IN en NH, on aura l'ordonnée IH.

10. Si l'on veut se passer du cercle, & de la directrice pour la délinéation de la courbe par des points, on pourra ajouter une seconde colonne pour les sinus IN, & une troisième pour les sinus verses AI : ceux-ci donnent les abscisses, & jusqu'à 90 degrés sont égaux à la différence du rayon, & du co-sinus, & après à leur somme. Les sinus IN avec les arcs multipliés par $\frac{CA}{CS}$ donnent les ordonnées IH. Si l'on forme une colonne pour les valeurs des arcs de l'autre multipliées par cette fraction, on pourra se servir d'une seule échelle, qui répondra à l'unité $=$ CA : si l'on veut s'épargner la peine de cette multiplication, on se servira de deux échelles, dont une répondra à l'unité $=$ CA, qui donnera les sinus verses AI, & les sinus IN, & l'autre répondra à l'unité CL $= \frac{CA^2}{SC}$. En prenant dans cette seconde échelle les valeurs des arcs telles, qu'on les avoit trouvées avant la multiplication, on aura immédiatement les lignes NH à ajouter aux IN pour avoir les ordonnées entières IH.

11. On

11. On peut se servir d' un seul compas de proportion pour les deux échelles, en l' ouvrant d'abord de manière, que le demi-axe AC y soit adapté de 100 en 100 pour en prendre les centièmes des valeurs relatives à la première unité pour les sinus verses AI, & pour les sinus IN : on l' ouvrira après de manière à y adapter CL, & en tirer les NH, qu' on doit ajouter à chaque sinus pour avoir les IH. Au moins on peut faire cette manœuvre, quand les CA, CL ne vont au de-là de la force du compas de proportion.

12. Dans les ellipses des comètes ces lignes sont toujours beaucoup plus longues : comme dans celles-là on a besoin seulement d' un arc peu éloigné du périhélie P, à la place de la cycloïde AHA', qui part de l' aphélie A, on peut employer celle, qui part de ce périhélie, qui est PHP', ou AP', & BL' sont parallèles, & égales aux lignes PA', LB' : les lignes HI' y sont la différence des arcs $PN \times \frac{AC}{SC}$ aux sinus IN, & expriment l' aire PSN ; parcequ' on voit aisément, que la ligne $II' = PA'$ exprimant l' aire du demi-cercle, & la IH celle du secteur ASN, le reste HI' doit exprimer l' aire de ce secteur, qui est égal au secteur $PCN - SCN$. Pour cet effet ayant trouvé le point N sur la première échelle de $CA = 1$ par les sinus verses Pb, & les sinus IN de l' arc PN, & la valeur de cet arc sur la seconde, on appliquera ceux-ci sur la ligne NI prolongée en NH'', & on prendra $IH' = IH''$, ce qui donnera les points H', H'' pour les deux branches de la seconde cycloïde correlatives aux arcs de l' ellipse avant, & après le périhélie. On voit bien, que IH'' est la différence des $NH'' = PN \times \frac{AC}{SC}$, & NI, qui devoit donner IH', & que les deux branches d' un côté, & de l' autre de l' axe doivent être égales entr' elles dans la position inverse. Cette seconde branche est celle, qui seroit décrite par la continuation du mouvement du cercle au de-là de l' axe PA.

13. Pour la partie, qui répond aux environs du petit axe, ni l' une ni l' autre de ces deux cycloïdes ne peut être en usage à cause

cause de la grande longueur des ordonnées, ni dans les ellipses des planètes, ni dans celle des comètes; parceque dans les premières le multiplicateur $\frac{CA}{SC}$, & dans les secondes le rayon CA est trop grand. Pour les ellipses des planètes on peut se servir de la première cycloïde aux environs de l' aphélie A, & de la seconde aux environs du périhélie P. Pour les ellipses des comètes la seconde peut servir seulement aux environs du périhélie, dans lesquels lieux seulement elles sont visibles. On appliquera la distance périhélie réduite en parties de l' unité égale au grand demi-axe CA transversalement sur le compas de proportion en faisant, que les unités de celui-ci répondent aux centièmes, ou millièmes, ou encore à des moindres fractions de cette grande unité. La réduction se fera en divisant le nombre, qui exprime la distance périhélie, qu' on aura eu rapportée à une unité quelconque, comme à la distance moyenne du soleil à la terre, par le nombre, qui exprime le grand demi-axe trouvé en nombres de la même unité commune à lui, & à la distance périhélie, le quotient donnera cette distance périhélie réduite à l' unité de ce grand demi-axe: on fera représenter les centièmes de ce nombre par les unités du compas de proportion, & on y aura les abscisses, les ordonnées, les arcs multipliés par $\frac{CA}{SC}$ dans le même compas, le tout étant rapporté à la même unité du grand demi-axe.

14. Mais ayant pris les abscisses PI égales aux sinus verses, rapportés à la même unité, on pourra augmenter, ou diminuer, comme on veut, les ordonnées IH' dans une proportion quelconque: en les prenant sur une autre échelle quelconque, on aura une autre espèce de courbe, mais elle servira de même pour échelle aux temps. Il suffira de faire, que le temps total périodique soit représenté par le double de la nouvelle PA', qui répondra à cette augmentation, ou diminution. Cette considération donne le moyen de construire des arcs des courbes, qui ne s' éloigneront pas beaucoup d' un arc quelconque de l' ellipse, qu'

qu' on suppose dessiné, pour y trouver par construction les points M du même arc pour un temps donné. Mais l' usage de la construction (*) ne sera avantageux, que dans le cas de l' ellipse d' une comète, dont on aura par construction le foyer S, le point L de la directrice, & le point P du périhélie pour trouver par approximation le lieu m par le point h, qui répond au point H', & doit se trouver en prenant Pt troisième continûment proportionnelle après le temps périodique, le temps, qui répond à l'arc Pm, & 2AP'. On en tirera en nombres le grand demi-axe CP, qui sera $= \frac{PS \times PL}{PL - PS}$, & servira d' unité pour les arcs Pn, sinus in, & sinus verses Pi. On aura CS = CP — PS, & par-là la fraction $\frac{CP}{SC} = \frac{CA}{SC}$, que nous appellerons c: on aura les ordonnées ih analogues aux IH' en ôtant les sinus in des arcs Pn multipliés par c pour les arcs de la branche PhH à employer dans les environs du périhélie P: ces ordonnées répondront aux sinus verses de la table, qui seront les abscisses correspondantes, le tout réduit à la même unité = CA.

15. Pour déterminer l'échelle des jours on aura en nombres de la même unité le double de la ligne PA' égal à la circonférence entière 6,28319 multiplié par la même fraction c: ce produit répondra au temps périodique $= ar^{\frac{3}{2}}$, où a est l' année périodique, qui en jours est = 365,256, & r le demi-axe CP. Delà on tirera le nombre des parties de la même unité pour un jour, qui sera $= \frac{6{,}28319c}{365{,}255}$. Mais quand on aura deux points de l' orbite m, m' déterminés par la construction, qui a donné les éléments de l' ellipse, on pourra trouver l' échelle en tirant les lignes ht, $h't'$ perpendiculaires à XY, & adaptant la tt' trans-

(*) La construction ne donne, qu' une approximation, & pour celle-ci on en a une plus simple dans les ellipses des planètes, qui ont une excentricité assez petite: c' est de prendre pour égal le mouvement angulaire autour de l' autre foyer.

transversalement sur le compas de proportion au nombre des jours écoulés entre ces deux observations.

16. J'ajoute ici deux tables : la première servira pour la délinéation de la cycloïde entière, qui peut servir d'amusement pour les cycloïdes correlatives à des ellipses, dont l'axe n'est pas excessivement grand, ni l'excentricité trop petite : la seconde pourra servir pour les arcs des ellipses des comètes pris aux environs du périhélie. Voici leurs explications, & l'usage pratique.

17. Pour le premier usage on divisera par des points N le cercle AFPG de 10 en 10 degrés : on tirera les lignes IN perpendiculaires à l'axe AP, & ayant mis $CB = \frac{CA^2}{SC}$ sur le compas de proportion transversalement de 100 en 100, on y prendra les nombres de la seconde colonne pour les lignes NH, ce qui donnera les points H de la cycloïde allongée, que l'on cherche. Pour le second usage ayant réduit la distance périhélie SP en parties de l'unité $= CA$, on ouvrira le compas de proportion de manière à y adapter transversalement cette ligne aux nombres des centièmes de la valeur trouvée, ce qui formera l'échelle pour les abscisses à en prendre transversalement des nombres relatifs aux centièmes des valeurs de la seconde colonne de la seconde table, qui contient les sinus verses des arcs exprimés dans la première en degrés, & minutes, & dans la dernière en parties du rayon : on prendra sur une échelle quelconque les sinus de la troisième colonne : on en formera une cinquième en multipliant les arcs de la quatrième par la valeur $\frac{CA^2}{SC}$, & en prenant pour ses termes les excès de ces produits sur les sinus de la troisième, on tirera de la même échelle les lignes, qui répondent à ces termes, pour les ordonnées *ih* : ou encore en retenant les mêmes abscisses P*i* on prendra sur une échelle quelconque les nombres de cette nouvelle colonne pour les mêmes ordonnées *ih*. J'ai formé la seconde table de manière, que les abscisses de la colonne 2 vont sensiblement dans la proportion de 1, 2, 3, 4 &c.

TAB. I.	
Deg.	Arcs
10	0,1745
20	0,3491
30	0,5236
40	0,6981
50	0,8727
60	1,0472
70	1,2217
80	1,3963
90	1,5708
100	1,7453
110	1,9199
120	2,0944
130	2,2689
140	2,4435
150	2,6180
160	2,7925
170	2,9671
180	3,1416

TAB. II.			
Deg.	Sin. vers.	sin.	Arcs
2°. 0'	0,00061	0,03490	0,03491
2 . 49	0,00121	0,04920	0,04917
3 . 27	0,00181	0,06018	0,06022
3 . 58	0,00240	0,06917	0,06923
4 . 27	0,00301	0,07759	0,06766
4 . 52	0,00361	0,08484	0,08494
5 . 16	0,00422	0,09179	0,09192
5 . 37	0,00480	0,09787	0,09803
5 . 58	0,00542	0,10395	0,10414
6 . 20	0,00610	0,11031	0,11054
6 . 36	0,00663	0,11494	0,11519
6 . 53	0,00721	0,11985	0,12014
7 . 10	0,00781	0,12476	0,12508
7 . 26	0,00840	0,12937	0,12973
7 . 43	0,00906	0,13427	0,13468
7 . 57	0,00961	0,13831	0,13875
8 . 12	0,01022	0,14263	0,14312
8 . 26	0,01081	0,14666	0,14719

APPENDICE.

Méthode pour construire par des points un' ellipse dont on a le foyer, la directrice & un point quelconque.

18. SOIT S le foyer fig. 2, *xy* la directrice, C le point donné. On tirera SL perpendiculaire, & CB parallèle à la directrice, qui rencontre la LS en B : on prendra sur celle-ci la BD égale à la SC, & on tirera la LD indéfinie, avec autant de lignes para-

rallèles à la directrice, que l' on veut, qui rencontreront la LD en autant de points D, D', & LS en autant de points B, B': dans chacune de ces lignes on trouvera les points C, C' avec le centre S, & l' ouverture du compas égale à sa BD. Parceque si l' on tire CR perpendiculaire à la directrice, celle-ci sera = BL, & la raison de chaque SC à sa CR sera la même que la constante de la BD à la BL. Si l' on prend sur la directrice LG = LS, & qu' on tire GS, la rencontre de celle-ci avec la LD en M, & la ligne MP perpendiculaire à la LS déterminera un sommet du grand axe en P. Ayant tiré par S une ligne parallèle à la directrice, qui rencontre LD en E, & l' ayant prolongée du côté de S autant en E', l' ellipse passera par les points E, E', où elle sera touchée par les lignes LE, LE': la ligne EE' sera le paramètre du grand axe, & la rencontre des lignes GS, LE' en N avec la perpendiculaire NA tirée sur la LS déterminera son second sommet en A.

19. Cette construction est tirée de mes éléments des sections coniques, & est générale, comme je viens d' indiquer, à la parabole, & à l' hyperbole: mais l' angle ELE' se trouvera aigu dans l' ellipse, droit dans la parabole, obtus dans l' hyperbole, & le point N dans la seconde ira à l' infini: dans la troisième il ira sur les lignes SG, EL prolongées vers les côtés opposés, & déterminera le sommet de la branche opposée de l' hyperbole. Sans tirer les lignes DB on pourra employer un papier peu large, qui ait une ligne perpendiculaire à un de ses deux côtés opposés tirée vers le milieu de sa longueur. En promenant ce papier de manière, que cette ligne réponde toujours à l' axe LS, le même côté marquera ces lignes, & en plaçant le même papier de manière, que le foyer S reste toujours découvert, on prendra le long des mêmes côtés les points C, C' avec le centre en S, & l' ouverture BD déterminée par le même côté.

MÉMOIRE V.

Sur les orbites des comètes, présenté à l' Académie Royale des Sciences de Paris le 28 Juin 1776 (*).

1. DANS le VI volume des Mémoires présentés à l' Académie Royale des Sciences on trouve deux des mes Opuscules sur les orbites des comètes, l'un à la page 191, l'autre à la page 401. J' avois envoyé deux planches pour chacun, sans y mettre des numéros, mais les figures se suivoient dans les deux planches de chaque Opuscule. Dans l'impression, qu'on en a faite avant mon arrivée en France, on a très-mal arrangé ces planches de manière, qu'étant très-difficile d'en deviner l'ordre véritable, & les Opuscules étant éloignés l'un de l'autre, ils deviennent presque inutiles. La première planche du second Opuscule se trouve à la fin du premier toute seule : les deux premières, qui se trouvent à la fin du second, sont celles, qui appartiennent au premier, & celle, qui après ces deux est marquée du num. III, doit être la seconde de ce second Opuscule. Pour rendre ma méthode utile aux Astronomes, qui par-là ne peuvent commodément faire usage des deux premières, je donnerai dans un autre Mémoire à part (**) la seule pratique sans les démonstrations, en y ajoutant le détail d' une petite correction, que je n' avois fait qu' indiquer au num. 20 du second Opuscule, parceque elle n' étoit pas nécessaire dans un très-grand nombre de cas. J' en donnerai ici la formule, & la démonstration. Ce sera le complément de ma réponse aux objections, qu'on peut faire contre mes méthodes, & qui sont relatives à cette correction.

2. Dans la préface de ce VI volume on a dit (pag. 22) *la métho-*

(*) On voit dans la préface, qui se trouve avant l' Opuscule I, l' occasion à laquelle ce Mémoire a été présenté à l' Académie.

(**) A' la place de ce petit détail j' ai jugé à propos de traiter ce sujet en entier dans le premier Opuscule de ce Volume.

thode de M. l' Abbé Boscovich, dont l'idée est due à M. Bouguer, paroît avoir l'inconvénient d'exiger des observations très-exactes : aussi les Astronomes, qui ont voulu l' appliquer à la dernière comète, l'ont ils trouvée très-fautive. Elle ne peut donc être utile, que pour un petit nombre de cas : un autre Géomètre, sans réflechir à ce que j'avois dit sur cette correction dans le second Opuscule, a affirmé, que la méthode en elle même étoit fautive, & illusoire, & que dans mes Opuscules il y avoit un paralogisme. Je dirai ici deux mots sur ces différents objets.

3. Si j'avois borné ma méthode à des observations presqu' infiniment peu éloignées les unes des autres; elle auroit exigé dans les observations une exactitude bien supérieure à ce, que l' on peut espérer de nos instruments, & de la foiblesse de nos sens: c'est un des défauts de la méthode de M. Bouguer. Mais, comme j'ai démontré dans le second Opuscule au num. 1, que dans l'étendue d'un arc beaucoup plus grand, le mouvement de l'intersection du rayon vecteur avec la corde a une égalité de vîtesse presque tout-à-fait exacte; en substituant cette intersection aux lieux de la terre, & de la comète dans l'arc, on peut employer des observations beaucoup plus éloignées : ainsi l' exactitude ordinaire des bonnes observations suffit pour avoir une détermination de l'orbite assez satisfaisante.

4. Mais la méthode de M. Bouguer a un autre défaut beaucoup plus essentiel, que j'ai développé, il y a déjà trente ans, dans ma dissertation *de Cometis* imprimée à Rome en 1746 (*). On peut y voir ce défaut au num. 27. Il a donné une construction de son problême, dans laquelle la détermination dépend de l' intersection de deux lignes droites menées par deux points; & j'y fais voir, que ces deux points doivent tomber l'un sur l'autre: si l' on en tire quelque résultat, il dérive uniquement de ce, que la méthode néglige, & qui n'a aucun rapport avec les conditions du problême, & c'est la raison pour laquelle M. Bouguer a trouvé

(*) A' présent on la verra réimprimée dans ce Volume-ci, où elle formera le dernier de ces Mémoires correlatifs.

vé hyperbolique l'orbite de la comète de l'année 1730, & bien éloignée de la véritable. J'avois donné dans cette même dissertation du 1746 tout le fond de ma méthode répétée dans le premier de mes deux Opuscules, que l'Académie a publiés, j'y avois marqué une autre différence très-essentielle entre celle de M. Bouguer, & la mienne, qui consiste dans la détermination de la longueur de la corde, ou plutôt de sa liaison avec la distance : je tire cette liaison de la théorie générale de l'attraction Newtonienne, & je m'en sers pour déterminer la distance, tandis que M. Bouguer la cherche dépendamment de sa méthode. C'est cette longueur de la corde, qui est le fondement principal de ma solution, & qui en fait la plus grande différence marquée, & démontrée depuis si long temps.

5. Dans le premier Opuscule je prends pour rectiligne l'arc même de l'orbite de la comète, & le mouvement pour uniforme, comme l'a fait aussi M. Bouguer. Mais premiérement il y a une différence très-grande entre sa méthode, & la mienne, en ce que lui fait cela pour le seul arc de la comète, tandis que moi je le fais aussi pour celui de la terre : cette omission est la principale cause du défaut de sa méthode. Dans le second Opuscule je démontre, que le mouvement de l'intersection du rayon vecteur avec la corde est presque tout-à-fait uniforme sans aucune inégalité, qui ne soit d'un ordre à négliger, & je me sers de sa vîtesse pour avoir l'expression de la grandeur de la même corde. Ainsi en substituant cette intersection aux lieux de la terre, & de la comète, on a un mouvement réellement rectiligne, & uniforme. J'y fais voir, que cette substitution dans plusieurs cas ne porte avec elle aucune erreur. Hors de ces cas, il y a une quantité négligée ; mais elle est presque toujours très-petite, de manière à ne pas tirer à conséquence, quand il s'agit d'une approximation. J'y parle de la correction, qui y répond, & j'en donne le fondement.

6. En second lieu l'idée de substituer la ligne droite à la courbe n'est pas de M. Bouguer : elle est de Newton même, qui l'a donnée dans son Arithmétique Universelle au probl. 56. Il y prend

prend les quatre lignes droites, qui passent par quatre lieux de la terre, & déterminent la direction d'autant de longitudes géocentriques de la comète, & cherche la distance, & la position d'une ligne droite coupée par les 4 données dans une raison donnée, qui pour le mouvement d'une comète rectiligne, & uniforme seroit la raison des intervalles des temps compris entre les observations. Wrenn & Vallis avoient déjà donné chacun une solution de ce ploblême géométrique, & Newton lui même en a donné deux autres différentes dans son grand Ouvrage des Principes au corollaire 27 du liv. 1^er. Avec tout cela, il n'a pas employé cette méthode à la recherche de la distance de la comète dans le 3.^me livre, où elle l'auroit bien aidé, si son application à cette recherche n'étoit pas tout-à-fait fautive. M. Eustache Zanotti s'en étant servi pour la comète du 1739, quoiqu'il eut employé quatre observations choisies, de l'exactitude desquelles il étoit bien sûr, il trouve une conclusion tout-à-fait absurde : il avoit observé la comète vers le soleil, & le calcul la donna dans la partie du ciel opposée. Ayant publié dans le temps ses observations il soupçonna, que le mauvais succès venoit des intervalles des temps trop longs entre les observations, qui pourtant n'étoient prises que de trois en trois jours, comme si l'arc de l'orbite décrit en douze jours n'étoit pas assez approchant de la ligne droite pour y appliquer cette méthode.

7. Mais dans la même dissertation de l'année 1746, j'ai fait voir le défaut de la méthòde en elle même. Il y a des positions des quatre droites données combinées avec la raison, dans laquelle la droite cherchée doit être coupée, qui rendent le problême indéterminé tellement, qu'ayant pris dans une de ces lignes un point à volonté dans une distance quelconque, on pourra toujours tirer par ce point une ligne droite, qui en sera coupée en cette raison. On peut déterminer aisément une infinité de cas, dans lesquels cette indétermination aura lieu. C'est assez de tirer deux lignes droites dans des positions arbitraires quelconques, & de prendre dans chacune trois segments, ou vers le même côté dans toutes les deux, ou vers les côtés opposés, qui

soient

soient entr' eux en une même raison quelconque. Si l'on mene par le point correspondant de ce segment des lignes droites prolongées d'un côté, & de l'autre à l'infini; non seulement on aura déjà deux droites coupées par ces quatre dans cette même raison; mais, comme je le démontre dans la dissertation citée, on pourra toujours en avoir une infinité d'autres: parceque ayant pris dans une d'elles un point quelconque, on pourra en tirer une par une construction très-simple, que j'y ai donnée.

8. Si l'orbite de la comète étoit réellement une ligne droite, & le mouvement uniforme sur cette ligne; on pourroit bien, en employant des observations fort éloignées les unes des autres, déterminer par la solution de ce problême la ligne cherchée sans tomber dans le cas de son indétermination. Comme l'orbite est parabolique, & non rectiligne, & que la vîtesse est inégale; on ne peut recourir à cette méthode, qu'en employant des observations peu éloignées les unes des autres, pour laisser peu de courbure, & d'inégalité de vîtesse, & de ce côté-là les douze jours de M. Zanotti n'auroient pas donné un arc trop long. Mais on tombe par-là dans le cas de l'indétermination du problême, parcequ'alors l'arc de l'orbite terrestre devient aussi presque exactement rectiligne, & le mouvement de la terre presque uniforme, & par-là divisé par les quatre directions de longitude en la raison des intervalles des temps, en laquelle étant aussi divisée la partie de l'orbite de la comète prise pour rectiligne, on aura les deux droites coupées pas les quatre positions en la même raison, ce qui donne l'indétermination du problême. La valeur déterminée par M. Zanotti ne vient pas des conditions du problême, mais de ce qu'on y a négligé, en supposant rectiligne, & uniforme le mouvement de la comète, ce qui pour cela peut donner une détermination encore infiniment éloignée de la vraie (*).

9. J'a-

(*) C'est la découverte de la nouvelle planète faite par M. Herchel, qui a donné l'occasion d'employer la solution de ce problème pour déterminer une orbite, & c'est la première, & peut être la dernière fois, qu'elle vient en usa-

9. J' avois déjà publié tout cela en 1746 dans cette Dissertation, dans laquelle on voyoit bien la différence essentielle entre ces méthodes tout-à-fait fautives, & inutiles, & la mienne. Pour ce qu' il y a d' appartenant à la méthode proposée par Newton dans son Arithmétique Universelle, M. Castillon me l' avoit demandé pour en faire usage dans la belle édition, qu' il en a faite avec tant de notes savantes en deux vol. in 4°. A' cette occasion j' ai fait un Mémoire exprès, qu' on peut voir à la fin de son second volume, & comme M. Simpson avoit donné une très-belle construction du même problême, je m' en suis servi pour déterminer dans cette construction les conditions des données, qui rendent le problême indéterminé, en faisant voir aussi, que cela arrive justement dans le cas d' un petit arc de la parabole d' une comète considérée comme ligne droite, pour en déduire la distance par cette méthode. Ainsi j' avois bien pris de Newton l' idée d' employer la ligne droite pour un arc parabolique, mais je l' ai employée d' une manière très-différente de celle de M. Bouguer, en y ajoutant le rapport de la longueur de cet arc avec la distance, comme je l' ai déjà dit ci-dessus.

10. Ce rapport donne presque toujours au premier coup d' œil jetté sur une construction graphique très-simple une idée de la distance renfermée dans des limites assez étroites : mais comme sa direction y entre pour déterminer ces limites, j' ai ajouté la direction qui est déterminée par la raison de la première distance à la troisième. Pour cette détermination j' ai employé ce théorème : *deux distances raccourcies à la terre dans un arc, qui n' est pas trop grand, sont entr' elles en raison directe des intervalles des temps écoulés entre les deux observations correlatives, & la troisième, & réciproque des sinus des mouvements en longitude, qui y répondent*. Je l' ai énoncé, & démontré avec cette généralité dans la Dissertation du 1746, &

usage. La planète a parcouru un arc très-petit par rapport à l' orbite entière, tandis que la terre a fait une révolution entière dans son ellipse presque circulaire. On verra dans la seconde partie de ce volume le succès de l' application, que j' ai fait de ce problême à cette recherche.

j' en ai fait usage dans les deux Opuscules, pour comparer la première de ces distances à la troisième.

11. Ce théorème n' est pas toujours vrai à la rigueur, parce-qu' on y néglige un effet de la courbure de l' arc, & l' inégalité des vîtesses. Mais l' effet de cette inégalité est ordinairement très-petit même dans des arcs de 20, & 30 jours, & s' évanouit tout-à-fait, quand les deux intervalles de temps sont à peu-près égaux : dans les petits arcs elle est toujours d' un ordre inférieur, de manière à pouvoir être négligée sans conséquence. L' effet de la courbure s' évanouit tout-à-fait dans plusieurs cas sans avoir besoin d' aucune correction, & alors on peut considérer ma méthode comme exacte. Cet effet est absolument nul, quand la comète est en conjonction, ou en opposition au soleil, comme aussi, quand sa distance, & la distance de la terre au soleil sont égales. Il est égal à la différence des deux petits angles, qui répondent l' un à la flèche de la terre, l' autre à celle de la comète : dans la conjonction, & opposition ces deux angles s' évanouissent tous les deux, dans les distances égales ils sont égaux & contraires. Quand la distance de la comète est plus grande, que la distance de la terre, l' angle de sa flèche est plus petit, & réciproquement il est plus grand, quand elle est plus petite ; mais c' est toujours la différence de ces deux petits angles à laquelle se réduit tout l' effet de la courbure négligée, une partie du quel est toujours beaucoup diminuée par l' autre. Dans le second Opuscule j' ai démontré avec toute l' exactitude géométrique le parallélisme des deux lignes, qui forme l' égalité de ces deux angles pour le cas de l' égalité des distances, & donne une compensation exacte : on y voit aisément par la même figure, que dans la conjonction, & opposition les deux angles deviennent nuls tous les deux. J' y ai ajouté, qu' on peut corriger dans les autres cas cet effet, en indiquant les éléments, dont cette correction dépend, & j'en avois déjà parlé dans mon ancienne Dissertation.

12. Si l'on prennoit le problême géométriquement, & si l'on considéroit un arc infiniment petit, la solution prise dans toute

sa

sa genéralité seroit fautive, parceque la différence de ces deux angles négligés hors de l' opposition, & de la conjonction avec le soleil, & de l' égalité des distances seroit du même ordre, que l' inégalité des mouvemens en longitude rapportée aux intervalles des temps, qui pourtant entre dans la détermination du problême. Si on avoit besoin pour l' usage physique d' observations aussi peu éloignées entr' elles, que la différence des longitudes ne fût pas assez grande par rapport aux erreurs des observations; la solution, que je donne, seroit inutile. Mais ma méthode est proposée pour avoir une approximation à l' aide d' un arc assez sensible, & en conséquence non seulement on ne peut pas dire, qu' elle ne peut être utile, que pour un petit nombre de cas, comme on le lit dans la préface du VI volume de l' Académie; mais encore il y a bien peu de cas, dans lesquels elle ne soit très-utile, même sans y employer aucune correction; & sur-tout la méthode du second Opuscule est toujours susceptible d' une très-grande perfection par le moyen d' une correction très-simple, & aisée à y employer. Que la méthode soit donnée pour une approximation, on le voit dans les Opuscules mêmes, dans lesquels j' ai parlé de cette correction, & j' ai donné à la fin du second une manière de corriger l' orbite déterminée par cette méthode. Son utilité dans un très-grand nombre de cas, même sans cette correction, provient de ce que très-souvent on a des observations peu éloignées de la conjonction, ou de l' opposition, ou de l' égalité des distances au soleil. Quand la distance de la comète est plus grande que la distance de la terre, on la voit très-souvent vers l' opposition: quand elle sort des rayons du soleil, ou qu' elle y entre, elle est en conjonction, & pourtant visible à cause de la latitude, où elle n' en est pas trop éloignée: en s' éloignant de cette position, elle s' approche de l' égalité des distances: dans tous ces cas la correction approchant du point, où elle s' évanouit, est très-petite même par rapport à ce, qui entre dans la détermination du problême. Pour ce qui appartient à l' élongation du soleil en longitude, si elle n' est pas de 90 degrés, tous les deux petits angles sont diminués en raison

son du sinus de la même élongation, & quand l' inégalité des distances au soleil n' est pas trop grande; ces deux angles approchant de l' égalité, leur différence est diminuée de manière à pouvoir être négligée sans conséquence. Pour faire sentir, que ce second cas d' une inégalité des distances pas trop grande arrive très-souvent, j' ai marqué exprès au num. 20 du second Opuscule, que ce dernier cas avoit été celui des trois dernières comètes. *Id quidem accidit proxime omnibus tribus postremis cometis, eo tempore, quo observati sunt; quam ob causam hic neglectus in iis multo minus est erroneus.*

13. Mais il y a une autre raison, pour laquelle presque toujours l' omission de cette correction ne tire pas à conséquence, pour ce, qui appartient à la recherche de la distance: elle porte principalement sur la raison des distances raccourcies à la terre, de laquelle dépend presque toujours beaucoup plus l' inclinaison de la corde de l' orbite projettée sur l' écliptique, que sa grandeur, qui dans ma méthode est le premier élément pour la détermination de la distance. Tout ce que nous avons dit jusqu' à présent de cette correction, fait voir les droits, que j' avois de la négliger dans les méthodes des deux Opuscules, qui sont appuyées sur le même principe.

14. Ce n'est pas seulement pour la comète de l' année 1770, de laquelle j' ai parlé au num. 15 du premier Opuscule, que j'ai trouvé l' orbite très-approchante de la vraie, sans employer la correction indiquée (*): mais encore dans plusieurs autres comètes j' ai trouvé le même succès de ma méthode, & j' en ai envoyé dans le temps des résultats à M. de La-Lande, parceque ce n' est pas la seule position de la terre indiquée dans ce numéro,

(*) J' ai appellé ici vraie l' orbite, qui a été tirée des mêmes observations par la méthode commune exacte: on a trouvé depuis, que les observations postérieures à l' arrivée au périhélie ont donné une parabole trop différente pour pouvoir rejetter cette différence sur l' imperfection des observations: on n' a pu les bien concilier toutes avec aucune orbite parabolique, & c' est la comète, pour laquelle, comme j' ai exposé dans le Mémoire II, M. Lexel a trouvé depuis l' ellipse, dont le temps périodique étoit de cinq ans & demi.

ro, qui en ôte la nécessité ; mais comme je l'ai déjà dit, & je ne saurois le répéter trop souvent, c'est aussi le voisinage de la conjonction, & opposition au soleil, & de l'égalité des distances, qui fait le même effet. Pour ce qui appartient à la comète même du 1773, à laquelle on a fait allusion dans la préface de ce sixième Volume, on y a dit, que les Astronomes ayant appliqué ma méthode à la dernière comète, l'ont trouvée très-fautive. J'en tirai cependant après les observations des premiers jours un très-grand avantage, pour connoître la position de son orbite, & la route apparente, qu'elle devoit tenir. M. Messier voulut bien me les envoyer à Fontainebleau, où je me trouvois en arrivant d'Italie. Je lui écrivis tout de suite qu'elle avoit déjà passé le périhélie, & en venant à Paris je fis voir la construction de l'orbite, & des deux autres courbes tirées de cette construction, qui mettoient sous les yeux les distances à la terre, & au soleil, qu'elle avoit eu, & devoit avoir après. Elle a suivi la route indiquée de manière, que pendant plus de deux mois les erreurs des résultats comparés aux observations n'ont été que de quelques minutes. La première détermination de ces éléments avoit une différence assez sensible de la véritable : mais c'étoit déjà un grand avantage pour l'Astronomie, que d'avoir par une méthode aussi simple sa route approchante de la vraie pour en diriger l'observateur, quand après plusieurs jours de nuages, il devroit la chercher dans le ciel. D'ailleurs on pouvoit bien corriger ces éléments par la méthode, que j'ai développé à la fin du second Opuscule, en employant trois observations plus éloignées, pour faire disparoître les erreurs des trois résultats comparés par les changements des trois données liées avec tous les éléments, d'où l'on tire trois équations du premier degré, qui remplissent l'objet.

15. Cette méthode est beaucoup moins expéditive, que l'autre d'employer dans le progrès même de la détermination de l'orbite la correction de l'effet de la courbure, que j'avois négligée, de laquelle nous avons parlé ci-dessus. On pourroit l'adapter même à la première des deux méthodes de mes deux Opuscules,

mais

mais il vaut mieux se servir de la seconde, que j'ai ajoutée à la première tout exprès pour rendre beaucoup plus facile cette recherche. J'ai réduit la formule de cette correction pour les flèches des arcs parcourus à une très-grande simplicité dans le temps, & j'en ai donné par écrit tout le détail à plusieurs personnes, & entre autres à un amateur des plus respectables, qui cultive beaucoup l'Astronomie. Je la donnerai ici adaptée à la figure 2 du second Opuscule (*), en y ajoutant seulement une ligne droite. Je suis bien sûr qu'en l'employant, on aura toujours une détermination très-peu éloignée de l'exactitude par le moyen d'une construction linéaire, & d'un calcul numérique très-simple. La méthode, que j'ai indiquée ci-dessus, & qu'on trouve à la fin du premier Opuscule, donnera le complément de toute l'exactitude, qu'on peut désirer. Je suis bien persuadé, que dans peu de temps elle deviendra la pratique générale des Astronomes. Je donnerai, comme je l'ai déjà dit dans un autre Mémoire, tous les préceptes pour l'usage de ma méthode sans les démonstrations, qui se trouvent dans les deux Opuscules. En attendant voici ce, qui appartient à la correction en question.

16. Dans cette figure (**) S est le soleil, T, T', T'' sont trois lieux de la terre, C, C', C'' trois lieux de la comète dans son orbite, P, P', P'' ces trois lieux rapportés au plan de l'écliptique, *t*, *c*, *p* sont les intersections des rayons ST', SC', SP' avec les cordes TT'', CC'', PP'', L est l'intersection des lignes TP, T''P''. Les lignes TP, T'P', T''P'' sont les directions des trois longitudes observées de la comète. J'ai fait voir dans mon second Opuscule, que les mouvements des points *t*, *c*, *p* sont très-près d'être uniformes, quand l'arc n'est pas bien grand, quoique les mouvements des points C', P' soient bien inégaux : dans

(*) Dans l'exemplaire présenté à l'Académie je me rapportois à la fig. 2 du second des deux Opuscules imprimés. Pour ne pas multiplier ici inutilement les figures je lui ai substitué la fig. 1 de la planche I de ce Volume-ci : il a suffi pour cet effet de changer dans le numéro suivant les lettres T', *t*, *t'*, C', *c*, *c'*, P', *p*. *p'* en T'', T', *t*, C'', C', *c*, P'', P', *p*.

(**) On en trouve la démonstration ici aussi dans l'Opuscule.

dans un arc infiniment petit l'inégalité de la vîtesse dans l'arc introduit des différences du premier ordre, tandis que l'inégalité dans la corde n'en donne que du second, ainsi on peut prendre les lignes Pp, pP'', & les Tt, tT'' comme proportionnelles au temps : j'ai démontré aussi, qu'en substituant la longitude marquée par la direction tp à la longitude $T'P'$, la raison de TP à $T''P''$ est composée de la raison directe de Tt à tT'', & de la raison réciproque des sinus de la différence des deux premières longitudes, & de la différence des deux dernières; d'où j'ai conclu que la première distance raccourcie est à la troisième, comme le premier intervalle de temps divisé par le sinus de la différence des deux premières longitudes observées au second intervalle divisé par le sinus de la différence des deux dernières (*) : c'est cette raison, qui fait le fondement de mes méthodes.

17. L'erreur, que l'inégalité de la vîtesse des deux points T', P' produit sur la proportionalité avec le temps, toujours d'un ordre inférieur s'évanouit tout-à-fait vers l'égalité de ses deux intervalles : l'autre erreur, qui provient de la substitution de la direction tp à la place de $T'P'$, est celle, dont il s'agit ici. Il est bien clair, que dans la conjonction avec le soleil, & dans l'opposition les directions SP', ST', $T'P'$, tp tombent exactement les unes sur les autres, & qu'ainsi cette erreur n'y a pas lieu. Quand la SC est égale à la ST, la même erreur aussi n'a pas lieu; parcequ'alors la petite ligne $C'c$ doit être égale à la $T't$, ces deux lignes étant correlatives à l'effet de la gravité générale de la comète & de la terre, vers le soleil, qui sont en raison réci-

(*) On trouve dans l'Opuscule I de ce Volume la démonstration de ce rapport & d'autres, qui appartiennent à toutes les trois distances raccourcies à la terre : mais je la répète ici pour donner en entier cette pièce telle, qu'elle fut présentée à l'Académie pour la justification de ce, que je lui avois offert dans les deux Opuscules imprimés par son ordre, qui avoient été si maltraités tant dans la préface de ce Volume, que de vive voix dans une de ses assemblées, comme j'ai déjà exposé dans la préface de l'Opuscule, où un de ses membres s'étoit engagé à faire voir, que tout cela ne valoit rien, & que même ma méthode n'étoit fondée que sur un paralogisme.

réciproque des quarrés des distances. Or on aura $SP' : Sp :: SC' : Sc :: ST' : St$, & par-là $T'P'$, tp seront parallèles, c'est-à-dire avec la même direction, ce qui fait voir, que l'erreur de la substitution d'une longitude à l'autre est $= 0$. Dans toutes les autres positions, ces deux lignes auront une différence de direction, qu'il faut trouver pour faire la correction cherchée. Elle sera la différence des deux angles $T'pt$, $P'T'p$.

18. On aura les proportions, & valeurs suivantes

$$\text{I.}\quad T'p : T't :: \sin.ptT' = \sin.Stp : \sin.T'pt = \frac{T't \times \sin.Stp}{T'p}$$

$$\text{II.}\quad SP' : ST' :: \sin.ST'P' : \sin.SP'T' = \frac{ST' \times \sin.ST'P'}{SP'}$$

$$\text{III.}\quad SC'^2 : ST'^2 :: T't : C'c = \frac{ST'^2 \times T't}{SC'^2}$$

$$\text{IV.}\quad SC' : SP' :: C'c : P'p = \frac{SP' \times C'c}{SC'} = \frac{SP' \times ST'^2 \times T't}{SC'^3}$$

$$\text{V.}\quad T'p : P'p :: \sin.pP'T' = \sin.SP'T' : \sin.P'T'p = \frac{P'p \times \sin.SP'T'}{T'p}.$$

Si dans cette valeur de $\sin.P'T'p$ on met à la place de $P'p$ sa valeur de la quatrième proportion, & à la place de $\sin.SP'T'$ la valeur de la seconde, en ôtant SP', qui se trouvera dans le numérateur, & le dénominateur; on aura $\dfrac{ST'^3 \times T't \times \sin.ST'P'}{T'p \times SC'^3}$.

Or en prenant l'angle $ST'P'$ de cette valeur pour l'angle Stp, on changera cette dernière valeur de $\sin.P'T'p$ dans la suivante.

$$\text{VI.}\quad \sin.P'T'p = \frac{ST'^3}{SC'^3} \times \sin.T'pt.$$

19. On voit dans cette dernière expression, que l'angle $P'T'p$ devient égal à $T'pt$ dans le cas de la distance ST' égale à SC', ce qui répond au parallélisme des deux lignes $T'P'$, tp démontré ci-dessus au num. 16: dans l'inégalité des distances ces deux angles, qui par leur petitesse sont comme leurs sinus, ont la raison de SC'^3 à ST'^3, c'est-à-dire le second, qui appartient à la flèche de la terre, est au premier, qui appartient à celle de la comète, en raison triplée réciproque de celle que la distance de la terre au soleil a à la distan-

distance de la comète au même soleil : dans la valeur du sinus de l'angle $T'pt$, qu'on a au num. I, on voit, que cette valeur dépend du sinus de l'angle Stp, qui est l'élongation géocentrique de la comète au soleil en longitude, étant proportionnel à ce sinus. Ainsi dans la conjonction, & dans l'opposition, ce sinus devenant $= 0$, cet angle s'évanouit ; & par-tout ailleurs hors de l'élongation de $90°$ ils sont diminués par le sinus de l'élongation même, comme nous l'avons dit ci-dessus. La même formule fait voir, que dans la conjonction, & opposition, & dans l'égalité des distances de la comète & de la terre au soleil ma méthode n'a besoin d'aucune correction, & que quand la comète n'est pas trop éloignée d'une de ces trois positions, ce qui arrive très-souvent, cette correction doit être assez petite, pour qu'on puisse la négliger. Elle est alors dans la rigueur géométrique du même ordre que les quantités, qui entrent dans la détermination du problême, mais assez petite pour que son omission fasse peu d'effet sur le résultat. Il arrive ici tout le contraire de ce, qui arriva à M. Clairaut à l'occasion de la recherche du mouvement des apsides dans l'orbite lunaire. Il avoit négligé un terme, qui paroissoit d'un ordre inférieur, mais il étoit élevé à l'ordre supérieur par la grandeur de son coefficient, tandis qu'ici la correction, qui paroît d'un ordre supérieur, est abaissée dans ces circonstances à un ordre inférieur par le sien, de manière à pouvoir être négligée sans nuire à l'approximation.

20. Pour tenir compte de cette correction dans tous les cas, quand on employe ma seconde méthode, il faut déterminer les deux angles $T'pt$, $P'T'p$. On aura le premier par son sinus (num. 18. I) $= \frac{T't \times sin.Stp}{T'p}$. On trouvera aisément la valeur $T't$. Si les deux intervalles de temps sont égaux, on pourra prendre pour elle le sinus verse de la moitié de l'arc TT'' au rayon $= 1$, en considérant cet arc comme circulaire avec le centre en S, & le rayon égal à la distance moyenne de la terre au soleil ; parcequ'alors cet arc est coupé par le milieu en T'. On démontre très-aisément, qu'en s'éloignant du milieu la ligne $T't$ est diminuée presqu'exactement en raison du rectangle $Tt \times tT''$: l'arc TT'' est la mesure de la différence de la première longitude du soleil à la troisième : ainsi si l'

on appelle e le sinus verse de la moitié de cette différence, t, t', t'' les trois intervalles de temps de la première observation à la seconde, de la seconde à la troisième, de la première à la troisième, on aura pour valeur de cette petite ligne $\frac{4tt'e}{t''^2}$, qui dans le cas de $t' = t$ se réduit à la valeur simple e, à cause de $t + t' = t''$. Pour le $sin.Stp$ on pourra employer l'angle ST'P', élongation de la comète au soleil dans la seconde observation, & pour T'p une valeur, qu'on prendra par position pour la ligne tp à employer ci-après; parceque ces deux substitutions ne pourront produire qu'une erreur très-petite par rapport au total, qui est petit lui même.

21. Pour trouver le second angle P'T'p il suffira de trouver la distance SC', & diviser le premier T'pt par son cube; parceque son sinus (num. 18. VI) est $= \frac{ST'^3 \times sin.T'pt}{SC'^3}$, où on peut faire ST' $= 1$, & comme les petits angles sont proportionnels à leurs sinus, on aura immédiatement l'angle P'T'p en divisant T'pt par SC'^{3}. Or pour SC' on pourra prendre Sc, & on trouvera celle-ci de la manière suivante. Dans le triangle Stp on aura le côté tp pris par position, & on pourra considérer l'autre côté St comme égal à ST' $= 1$. Pour l'angle Stp on pourra prendre le même angle ST'P': ainsi on y trouvera le côté Sp. Si l'on conçoit la ligne tc, on pourra considérer l'angle ptc comme égal à l'angle P'T'C', qui est la seconde latitude, & par conséquent on aura $pc = tp \times tan.ptc = tp \times tan.lat.$ Ainsi dans le triangle Spc rectangle en p ayant les deux côtés on aura l'hypothénuse SC, qui employée pour SC' donnera l'angle P'T'p.

22. Mais comme il s'agit d'un angle si petit, on pourra employer la valeur de la ligne SC' tirée beaucoup plus aisément d'une construction graphique, que j'ai développée dans le second Opuscule, ce qui suffira pour un angle si petit. Ainsi ayant préparé une fois la valeur T't, on trouvera avec la plus grande facilité pour chaque position ces deux angles, dont la différence sera la correction à ajouter à la longitude de la T'P' observée, ou l'en ôter, pour avoir la longitude de la tp corrigée, qu'il faudra employer. On verra très-aisément par l'inspection seule de la figure dans les différents cas, si cette correction doit être additive, ou soustractive.

23. Si

23. Si l' on nomme m, m', m'' les sinus de la différence de la première longitude observée à la seconde longitude corrigée, de cette seconde corrigée à la troisième observée, & de la première observée à la troisième observée; on aura par le théorème, que nous avons indiqué au num. 10, $TP = \frac{m't''}{m''t'} \times tp$, $T''P'' = \frac{mt''}{m''t} \times tp$, & par ces deux distances raccourcies, on fera tout le reste comme dans le second Opuscule.

24. Je donnerai dans le Mémoire indiqué (*) ci-dessus tout le procédé avec des exemples pris des observations de plusieurs comètes, & nommément de celle de l' année 1773, après avoir donné les seuls préceptes pour la pratique. On y verra bien & la facilité, & l' exactitude de ma méthode, qui la rendent incomparablement préférable à toutes celles, qu' on a employé jusqu' à présent.

(*) On aura le procédé dégagé des démonstrations dans l' extrait de tout ce Volume, qu' on trouvera à la fin, comme dans les Volumes précédens. Dans l' Opuscule de ce Volume-ci on a l' exemple bien détaillé. A' la place de la comète du 1773 j' y ai choisi celle du 1774, dont M. Mechain avoit calculé l' orbite avec la dernière exactitude en employant trois observations choisies de M. Messier, dont les extrêmes étoient éloignées entr' elles d' un mois entier, ce qui m' a paru plus à propos pour voir la bonté de mes méthodes. J' ai trouvé, comme j' ai déjà remarqué ci-dessus, le même succès dans plusieurs autres exemples, que je ne mets pas ici, pour ne pas surcharger le Volume inutilement: parmi ces exemples il y a encore celui de la comète du 1773, comme je l' ai remarqué ci-dessus. On s' apercevra de la bonté de la méthode, si on se donne la peine de faire l' application à d' autres comètes à l' imitation de celle, qui est si détaillée dans l' Opuscule de ce Volume.

MÉMOIRE VI.

Sur l'orbite d'une comète, dont on a les observations dans les deux nœuds.

1. PROBL. I. *Ayant le temps employé par une comète dans un arc parabolique, dont la corde passe par le foyer, trouver la valeur de la même corde.*

2. Soit (fig. 1 Tab. XII) le soleil dans le foyer de l'arc parabolique CPC' sous-tendu par la corde CSC', B le milieu de cette corde, BV sa flèche dans son diamètre, SP la distance périhélie dans l'axe parallèle à BV. On sait par la nature de la parabole, que le triangle SVB sera isocèle, & que par conséquent sa base SB sera coupée en deux parties égales par la perpendiculaire VD : CC' sera le paramètre du diamètre VB, & par conséquent $SP = \frac{SC \times SC'}{CC'}$, $BV = \frac{CB \times BC'}{CC'} = \frac{1}{4}CC' = \frac{1}{4}(SC' + SC)$: SB sera la demi-différence des rayons SC', SC, & BD sa moitié $= \frac{1}{4}(SC' - SC)$, $VD^2 = BV^2 - BD^2 = (BV + BD) \times (BV - BD) = (\frac{1}{2}BC' + \frac{1}{2}SB) \times (\frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}SB) = \frac{1}{2}SC' \times \frac{1}{2}SC$, & $VD = \frac{1}{2}\sqrt{SC \times SC'}$. L'aire du segment CVC', qui est $= \frac{2}{3}CC' \times VD$ (*), sera $= \frac{1}{3}CC' \times \sqrt{SC \times SC'}$.

3. Que l'on nomme m l'année périodique, t le temps employé dans l'arc CVC', c la circonférence d'un cercle, dont le diamètre est $= 1$, qui est $= \frac{355}{113}$. L'aire du cercle dont le rayon est SP, sera $= c \times SP^2$, & en faisant la distance moyenne de la terre au soleil $= 1$, le quarré du temps périodique dans ce cercle sera $m^2 \times SP^3$ par la troisième loi de Kepler. Comme le quarré de la vîtesse en P dans la parabole est double du quarré de la vîtesse dans le cercle ; le quarré de l'aire dans ce cercle, qui ré-

(*) Parceque par la nature de la parabole est égal à deux tiers du parallélogramme circonscrit formé entre la base CC', la tangente tirée par V, & deux droites parallèles & égales à la flèche BV, & ce parallélogramme a la CC' pour base, & la VD pour hauteur.

répond au temps t, sera la moitié du quarré de l'aire parabolique du segment CVC', qui est $\frac{1}{9}CC'^2 \times SC \times SC'$, & par conséquent le quarré de cette aire circulaire sera $\frac{1}{18}CC'^2 \times SC \times SC'$.

4. Or on a la proportion suivante, le quarré du temps périodique dans ce cercle $= m^2 \times SP^3$ est au quarré du temps $t = t^2$, comme le quarré de l'aire totale du même cercle $= c^2 \times SP^4$ est au quarré de l'aire de celui-ci, qui répond au temps $t = \frac{1}{18}CC'^2 \times SC \times SC'$. Ainsi on aura $\frac{1}{18}m^2 \times SP^3 \times CC'^2 \times SC \times SC' = t^2c^2 \times SP^4$; c'est-à-dire $CC'^2 \times SC \times SC' = \frac{18t^2c^2}{m^2} \times SP = \frac{18t^2c^2}{m^2} \times \frac{SC \times SC'}{CC'}$, ce qui donne $CC'^3 = \frac{18t^2c^2}{m^2}$. La racine cubique de cette valeur, qui est donnée, donnera la valeur de la corde CC', que l'on cherchoit, correlative à l'unité égale à la distance moyenne de la terre au soleil.

5. *Scolie* 1. C'est une expression très-simple de la valeur cherchée de la corde, qu'on trouvera très-aisément dans tous le cas particuliers, en ajoutant deux tiers du logarithme du temps t à un logarithme constant, qui est un tiers du logarithme de la quantité $\frac{18c^2}{m^2}$. Pour trouver ce logarithme constant on fera la somme du logarithme de 355, & des compléments arithmétiques de 113, & de la valeur m: on doublera cette somme : on ajoutera à ce double le logarithme de 18, & on prendra un tiers du total. On peut réduire l'année m, & le temps t en minutes en y ajoûtant pour toutes les 6 secondes un dixième. La valeur m dans l'Astronomie de M. de La-Lande est de $365^j.6^h.9'.10'' = 525969',2$, dont le logarithme est $= 5,7209603$. Voici le calcul.

Log.	355	2,5502284
Compl. log. . . .	113	7,9469216
Compl. log.	m	4,2790397
Somme		4,7761897
Son double		9,5523794
Log	18	1,2552725
Somme		0,8076519
Son tiers		0,2692173

Ce

Ce dernier est le logarithme constant cherché, qu' il faut ajouter à $\frac{2}{3}$ du logarithme du temps t réduit en minutes pour avoir la valeur de la corde cherchée relativement à la distance moyenne du soleil à la terre prise pour l'unité.

6. *Scolie* 2. Quand on a les observations d' une comète dans ses deux nœuds, qui est un cas très-rare, mais qui est arrivé quelque fois, & qui peut revenir; on peut trouver à l' aide de ce scolie 1 très-aisément tous les éléments de sa théorie exceptée l' inclinaison, qu' on pourra trouver après par la méthode, que nous proposerons au problême 7 à l'aide d' une autre observation. On a par les longitudes, & distances du soleil connues la longueur, & la direction des deux lignes, qui vont du soleil à la terre, & par les deux longitudes de la comète observées la direction des deux autres qui vont des extrémités des deux premières aux deux lieux de la comète, c' est-à-dire au bout d' une corde de son orbite, laquelle corde passe par le soleil placé toujours dans la ligne des nœuds entre ces deux points : il ne s' agit alors, que de placer entre les deux lignes, qui ont les directions des deux longitudes de la comète données par les observations, une ligne égale à la valeur de cette corde, qu' on trouve par le scolie précédent en y employant pour le temps t celui, qui s' est écoulé entre les deux observations. On trouve par-là la direction de la ligne des nœuds, qui en donne la longitude, & deux rayons vecteurs, qui sont les deux parties de la même ligne coupée par le soleil, d'où l'on tire très-aisément les éléments cherchés.

7. Si les deux directions nommées ne sont pas parallèles, ce qui est un seul cas entre une infinité de cas possibles, ces deux directions prolongées, s'il le faut, vers le côté opposé ont une intersection avec 4 angles, qui y forment, & il faut tirer par le lieu du soleil, qui est un point donné, une ligne, dont la partie comprise entre ces deux lignes dans l' angle, dans lequel se trouve ce point, soit égale à une ligne donnée. Mais le calcul algébrique, & la solution géométrique ne peut pas se borner à la condition, que la partie de la ligne indéfinie à tirer soit comprise plutôt dans un, que dans un autre de quatre angles formés par les deux di-

re-

rections prolongées des deux côtés. C' est pourquoi le problême, qui cherche d'appliquer une ligne donnée dans un angle donné par un point quelconque donné dans cet angle, qui paroîtroit beaucoup plus simple, est un de ceux, qu' on appelle problêmes solides dans la Géométrie élémentaire, parceque pris généralement (*) il ne peut pas avoir une solution géométrique par la règle, & le compas, mais il exige pour la construction au moins une section conique avec un cercle, & dans l'Algèbre élémentaire une équation du quatrième degré.

8. Le problême est très-connu, & il est plus propre pour exercer un écolier, & saisir l'esprit de la Géométrie dans la généralité de ses solutions, que pour employer cette équation du quatrième degré dans l'Astronomie pratique, pour déterminer les éléments de la théorie d'une comète. Il vaut beaucoup mieux d' employer pour cet objet une construction graphique, qui par une pratique de compas devient très-facile, & donne la position de la ligne cherchée, & les autres éléments avec toute la précision, dont les yeux sont susceptibles. Pour pousser l'exactitude autant qu'on veut, on peut après employer la fausse position pour déterminer la vraie. En employant la position trouvée par la construction graphique, qui ne suppose rien d'inexact, & qui donne un éloignement insensible de la vraie valeur, on trouvera immédiatement la véritable avec autant d'exactitude, qu' on pourroit en avoir par la résolution de l' équation, & même autant que par l'extraction d'une racine, ou pour une division, qui exige l'approximation en fractions décimales. La considération de la solution générale par l' équation du quatrième degré conjointement avec la construction géométrique pourra servir pour avoir une

(*) Il est si haut, quand on le prend généralement : mais si l'angle donné est droit, & le point donné dans la ligne, qui coupe cet angle par le milieu, il devient plus bas : il appartient alors à la Géométrie plane, & il y a le moyen de réduire son équation au second degré. J' ai un Mémoire sur cet objet, qui contient des réflexions très-essentielles pour bien comprendre la nature de la Géométrie, que je donnerai ailleurs.

une idée claire, & nette du nombre des solutions possibles, & l'exclusion de celles, qui ne peuvent pas s'accorder avec le cas particulier, qu'on a. Celui-ci met le point donné entre les deux bouts de la ligne donnée, & répond à une observation faite dans un point déterminé de chacune des deux directions, qui en se croisant forment les 4 angles, de manière qu'on doit rejetter les positions, qui font tomber un des deux bouts de la ligne appliquée par rapport au lieu de la terre dans celle des deux parties de la ligne de la longitude prolongée à l'infini des deux côtés, qui a non la direction observée, mais la contraire.

9. Pour cela je commencerai par la construction graphique du problême avec la détermination des éléments tirés de la construction : je passerai après au calcul numérique, & trigonométrique appuyé à la détermination plus exacte de la position de la ligne des nœuds, faite par la méthode de la fausse position, & je finerai par l'équation du quatrième degré, & par la construction du problême à l'aide d'un cercle, & d'une hyperbole entre les asymptotes avec la considération des différents cas, & des maximum, & minimum, de la ligne qu'on peut appliquer entre les deux directions indéfiniment prolongées des deux côtés en la faisant passer toujours par le point donné.

10. *Probl. 2. Ayant les observations d'une comète dans les deux nœuds, trouver les éléments de sa théorie exceptée l'inclinaison, par la construction graphique.*

11. Ayant pris d'une échelle un rayon arbitraire assez grand on fera (fig. 1) un cercle qui représentera l'écliptique avec le soleil dans son centre S, & un point pris à volonté sur sa circonférence pour le zero des longitudes, en marquant avec la même ouverture du compas les signes de deux en deux : on marquera sur la même circonférence les points des deux longitudes du soleil $\pm$ *6* signes, & de celles de la comète : on prendra les deux distances du soleil à la terre sur les rayons des deux premières lougitudes en ST, ST', en les tirant d'une échelle, dont les 1000, ou les 100 parties expriment la distance moyenne du soleil à la terre. On tirera des points T, T' deux lignes indéfinies

finies TE, T'E' parallèles aux deux rayons, qui vont de S aux deux points marqués pour les longitudes de la comète : on prendra avec le compas sur la même échelle la longueur de la corde CC' déterminée par le num. 5 en employant pour t le temps écoulé entre les deux observations réduit en minutes ; & ayant appliqué au point S le côté NN' d'une règle, on la tournera autour de ce point jusqu'à ce qu'on trouve, que sa partie CC' comprise entre les lignes TE, T'E' soit égale à cette ouverture du compas : dans cette position on tirera là ligne NN', qui sera celle des nœuds, & donnera la position de la corde CC', de l'orbite parabolique : cette ligne prolongée jusqu'à l'écliptique donnera la longitude des deux nœuds, & on ne saura que par une troisième observation, quelle est celle du nœud ascendant. Voici la manière.

12. On coupera la corde CC' par le milieu en B, & sur la base SB avec l'ouverture d'un quart de la même corde on trouvera une intersection de deux arcs de cercle en V : on tirera BV, & du point S la ligne SP parallèle à la ligne BV, qui dans l'écliptique marquera la longitude du périhélie, ou la contraire, ce qui sera décidé après par une autre observation, qui en déterminant l'inclinaison de l'orbite déterminera vers quel des deux demi-cercles de l'écliptique l'orbite est inclinée. On prendra sur la même échelle la valeur numérique d'un des deux rayons vecteurs SC, SC', dont le reste à la valeur de la corde entière déjà trouvée donnera l'autre : on divisera leur produit par la valeur de toute la corde CC', & le quotient sera la distance périhélie SV : on tirera la ligne CG perpendiculaire à la ligne PS prolongée s'il le faut, & on prendra sur l'échelle la valeur numérique des lignes CG, PG, & on aura aussi $SG = SP \mp PG$: on aura alors la valeur de l'aire parabolique $PSC = CG \times (\frac{2}{3}PG \pm \frac{1}{2}SG)$. On prendra aussi la valeur numérique (numér. 2) du segment parabolique CVC' ou par sa valeur $= \frac{1}{3}CC' \times \sqrt{SC \times SC'}$, ou par l'autre $\frac{2}{3} \times CC' \times VD$ plus simple après avoir pris sur l'échelle la valeur de la distance VD du point V trouvé à la corde CC' : le secteur PSC multiplié par le temps

total t, & divisé par ce segment, donnera le temps écoulé entre la première observation, & l'arrivée au périhélie, qui restera connue; & on l'ajoutera au temps de la première observation pour avoir celui de cette arrivée.

13. *Scolie*. Si l'on n'employe pas un exemple arbitraire, mais qu'on le prend d'après les deux observations dans les deux nœuds; il y aura toujours une position de la droite CC' terminée aux lignes TE, T'E', & égale à celle, qu'on a trouvé au num. 5; mais il peut arriver qu'on en trouve deux, ce qui laisse une incertitude sur le choix. La longueur de la corde détermine la parabole; mais elle peut avoir toute cette infinité de positions, qui répondent à la révolution de son plan autour de la ligne des nœuds. Comme l'orbite peut être inclinée vers l'un, ou vers l'autre des deux demi-cercles de l'écliptique coupée par la ligne des nœuds, on peut avoir tant l'une, que l'autre des deux longitudes diamétralement opposées, & c'est, comme je viens de dire, une autre observation, qui en déterminant l'inclinaison détermine aussi ce choix, l'une des deux fera que le mouvement soit direct, & l'autre qu'il soit rétrograde.

14. Si l'on prend un exemple arbitraire, on peut trouver impossible cette application de la ligne égale à une donnée entre les lignes TE, T'E', qui au moins prolongée passe par un point donné. Si l'on conçoit ces lignes prolongées à l'infini du côté opposé vers e, e'; on trouvera toujours deux positions entre les lignes Ee, E'e' infinies; mais qui ne peuvent servir pour cordes de la parabole cherchée. Quelque fois il y en aura trois, & dans une infinité de combinaisons il y en aura quatre; mais je développerai tous les cas après deux constructions, que j'ai indiquées au num. 9. Pour à présent je passerai à la méthode d'une détermination plus exacte de la position de la corde par la fausse position, & des éléments cherchés après cette position déterminée.

15. *Probl.* 3. *Trouver plus exactement les mêmes objets du problême précédent en employant le calcul numérique d'après la fausse position fondée sur la détermination graphique.*

16. Si

16. Si les lignes TE, T'E' étoient parallèles, la solution seroit incomparablement plus facile; mais comme ce cas unique contre une infinité de positions inclinées est infiniment improbable, j'appliquerai la solution au cas de l'intersection de ces lignes, au moins prolongées en A, qui va à l'infini dans le cas unique du parallélisme. On aura les deux distances ST, ST' de la terre au soleil, & l'angle TAT', qui est la différence des deux longitudes de cet astre, & on aura les angles STC, ST'C', qui sont les différences des longitudes du soleil, & de la comète. Dans le triangle TST' ayant les deux côtés avec l'angle intercepté, on trouvera la base TT' avec les angles en T & T', qui avec les deux autres STC, ST'C' donneront les angles ATT', AT'T : ceux-ci avec la base TT' donneront les côtés TA, T'A. L'angle STA est connu par l'angle STC, & dans le triangle STA on connoît déjà les côtés ST, TA : ainsi on aura le côté AS avec l'angle SAT, qui fera connoître l'angle SAT', puisqu'on a l'angle TAT'.

17. Alors on prendra l'angle ASC tel, que la construction l'a donné, & dans le triangle SAC on aura le côté SA avec les angles SAC, ASC, qui donneront le troisième ACS, & le rayon $SC = \frac{AS \times sin.SAC}{sin.ACS}$: ayant l'angle ASC on aura aussi son supplément ASC', qui avec SAC' donnera AC'S, & le rayon SC' $= \frac{AS \times sin.SAC'}{sin.AC'S}$. On verra, si la somme de ces deux rayons est égale à la valeur trouvée de la corde CC'. On ne pourra y trouver qu'une très-petite différence à cause de la construction graphique si aisée faite avec soin: cette différence avec l'autre, qu'on trouvera après la nouvelle position de l'angle ASC, donnera par la règle des fausses positions la vraie valeur de cet angle, dont dépend la solution totale du problême.

18. Car on y trouvera, comme auparavant, l'angle ACS = ECN, qui est la différence de la longitude de la ligne du nœud N à celle de la comète déterminée par la direction CE : on y trouvera la valeur du rayon SC, qui donnera SC' sa diffé-

rence à la corde entière CC'. On aura alors la distance périhélie $SP = \frac{SC \times SC'}{CC'}$ (num. 2) : on aura l'angle $CSP = DBV$, dont le sinus est $= \frac{VD}{VB} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{SC \times SC'}}{\frac{1}{4}CC'} = \frac{2\sqrt{SC \times SC'}}{CC'}$ (numér. 2), & cet angle est la différence de la longitude du nœud N à la longitude du périhélie dans l'orbite. On aura CG, & SG en multipliant SC par le sinus, & co-sinus de l'angle CSP, ce qui donnera aussi $GP = SP \mp SG$, & l'aire $CSP = CG \times (\frac{2}{3}PG \pm \frac{1}{2}SG)$, qui avec l'aire du secteur $CVC' = \frac{1}{3}CC' \times \sqrt{SC \times SC'}$ (num. 2) & le temps total t donnera (num. 12) le temps écoulé entre la première observation, & l'arrivée au périhélie : celui-ci ajouté au temps de cette observation, ou ôté, si l'on trouve, que le lieu donné par la première observation est postérieur au passage par le périhélie, donnera le temps de cette arrivée. Une autre observation déterminera l'inclinaison de l'orbite, le choix de l'une des deux longitudes opposées pour le nœud ascendant, & celui de l'un des deux demi-cercles de l'écliptique pour avoir la détermination de la longitude du périhélie entre les deux différentes, & la direction du mouvement direct, ou rétrograde, comme nous verrons dans le dernier problême : une quatrième observation déterminera la corde qu'il faudra prendre quand la construction aura donné deux positions entre les lignes TE, T'E'.

19. *Scolie*. L'opération préparatoire à la fausse position se réduit à la résolution des triangles TST', TAT', AST pour avoir AS, & les angles SAC, SAC'. La fausse position donne les angles ACS, AC'S avec la valeur si simple des rayons SC, SC', qui est la seule opération à répéter à chaque position. Cette opération préparatoire est nécessaire aussi pour avoir la résolution de l'équation algébrique, qui étant du quatrième degré, comme on verra dans le problême suivant, exige un calcul numérique incomparablement plus long, & pénible.

20. *Probl. 4. Trouver par un' équation algébrique la position exacte de la corde déjà trouvée.*

21. Que

21. Que l'on conçoive les lignes CI, SF perpendiculaires à la ligne AC', & ayant fait l'opération préparatoire on aura l'angle TAT', la ligne AS, & l'angle SAF, dont le co-sinus, & le sinus multipliés par AS donneront les lignes AF, SF, qu'on appellera a, b, en appellant c la corde CC', n la tangente de l'angle TAT', x l'inconnue AI, qui donnera la valeur $CI = nx$. Si l'on conçoit SH perpendiculaire à CI, on aura $CH = CI - SF = nx - b$, & $SH = FI = AF - AI = a - x$. Ainsi on aura $SC^2 = CH^2 + SH^2 = n^2x^2 - 2nbx + b^2 + a^2 - 2ax + x^2$. Alors on aura tous les termes de la proportion suivante : $CH^2 = n^2x^2 - 2nbx + b^2 : CI^2 = n^2x^2 :: SC^2 = (n^2 + 1)x^2 - 2(nb + a)x + a^2 + b^2 : CC'^2 = c^2$. La multiplication des moyens, & des extrêmes donnera l'équation cherchée, que l'on voit devenir de quatrième degré.

22. Quand on aura trouvé la valeur de l'inconnue x, on voit bien, qu'on aura la valeur du rayon SC, qui est donnée par x, & de l'autre $SC' = CC' - SC$, qui donneront tout le reste, comme dans le problême précédent.

23. *Scolie*. Cette équation aura toujours deux racines réelles : mais elles ne serviront pas pour une orbite de comète, parceque le point S ne se trouvera pas dans une des lignes CC' déterminées par ces racines entre C, & C', mais hors de leur intervalle : une de ces lignes le laissera en dehors, comme nous verrons après, du côté de C, l'autre du côté de C' : les deux autres dans le cas donné par les observations seront réelles inégales, ou égales, qui comme je l'ai dit ci-dessus, est un cas infiniment improbable, & l'une de ces deux donnera la valeur appartenante à la vraie orbite observée : dans un exemple arbitraire elles pourront être réelles & utiles, imaginaires, réelles & inutiles. Il seroit bien difficile de déduire tout cela de l'équation même : il y faudroit bien des détours pour le démontrer : on le verra bien aisément par la construction géométrique, que je vais proposer dans le problême suivant.

24. *Probl.* 5. *Donner la construction géométrique du même problême.*

25. Si

25. Si les deux lignes eE, $e'E'$ (fig. 2) sont parallèles, qui est, comme nous avons dit, un cas infiniment improbable; on aura la solution par la Géométrie plane. On tirera par S une ligne QQ' perpendiculaire aux mêmes lignes, qui les rencontrera en R, R'. On y prendra $R'O = RS$ dans la même direction, & on tirera par O la ligne MM' parallèle aux deux premières : avec le centre S, & un rayon égal à la ligne donnée on fera un cercle, qui coupera cette parallèle en deux points $I1$, $I2$, ou la touchera en O, ou n'y arrivera pas. Dans le premier cas on tirera par chacun des deux points I & par S une ligne, qui rencontrera les lignes Ee, $E'e'$ chacune en deux points C, C', qui seront les points cherchés; parceque dans chacune des lignes IS leurs parties $C'I$, CS seront égales entr' elles comme les lignes $R'O$, RS, & par conséquent les lignes CC' égales au rayon du cercle SI, qui est égal à la ligne donnée : dans le second cas on voit, que RR' sera la ligne cherchée, & dans le troisième le probléme sera impossible.

26. Le point S pourra se trouver entre les lignes Ee, $E'e'$, comme on le voit dans cette figure, ou en dehors du côté de Q, ou de Q'. Toujours la ligne $R'O = RS$ prise dans la même direction, la ligne MOM', & le cercle donneront la même solution. Si l'on cherchoit l'équation dans ce cas-ci, on la trouveroit de second degré; mais il faudroit changer l'inconnue x, qui dans la figure précédente deviendroit infinie, le point A allant à l'infini.

27. Si les lignes Ee, $E'e'$ ne sont pas parallèles, on aura leur rencontre en A dans la fig. 3, comme dans la fig. 1. On tirera par S une ligne parallèle à la ligne Ee, qui rencontrera la ligne $E'e'$ en D : on prendra DF égale, & contraire à la ligne AD : on tirera par F une ligne Gg parallèle à la ligne Ee : on construira les deux branches $M'Sm'$, Mm d'une hyperbole, qui passe par S, & a pour asymptotes les lignes $E'e'$, Gg, ce qu'on fait facilement en faisant tourner une règle toujours appliquée au point S, qui les rencontre en C', & K, & en y prenant toujours $C'I = SK$ dans la même direction : on tirera deux lignes

con-

continues par tous les points C ainsi déterminés, qu'on trouvera courbes, & placées dans les deux angles GF*e*', ÈF*g*. Avec le centre S, & le rayon égal à ligne donnée. On fera un cercle du rayon égal à la ligne donnée, dont la rencontre avec l'hyperbole en des points I résoudra le problême : en tirant par S, & I la ligne, qui rencontrera les lignes E*e*, E'*e*' en des points C, C', chaque ligne CC' sera égale à la ligne donnée.

28. La démonstration en est facile. On aura toujours C'I = SK = SC, comme on a C'D = AD, & par conséquent CC', qui est la somme, ou la différence des lignes SC', SC, sera égale au rayon SI, qui est de même la somme, ou la différence des lignes SC', SC.

29. *Scolie* 1. Dans le cas exprimé par la figure 3, où l'angle EAE' est aigu, & la ligne donnée assez grande, le cercle coupe chacune des deux branches dans deux points I, & donne la position de quatre CC', qui répondent aux quatre racines de l'équation, qui dans de cas pareils doit avoir toutes les racines réelles.

30. La branche M'*m*', qui passe par le point S, doit toujours être coupée en deux points par un cercle quelconque, qui passe par S, comme on voit très-clairement. Quand l'angle EAE' est obtus, & le point S assez éloigné du point A, & assez près d'une des deux lignes E*e*, E'*e*', il peut arriver, que le cercle coupe cette branche dans quatre points, comme on le voit dans la fig. 4, & alors le cercle n'arrivera pas à l'autre branche M*m* : car toutes les quatre racines de l'équation qui contient la solution générale, & qui n'en a que quatre, seront épuisées par ces quatre intersections : mais aucune de ces racines ne servira pour une orbite de comète, parceque le point S ne se trouvera pas entre les points C, C', comme il se trouve dans la fig. 3 entre C1, C'1, & C2, C'2. C'est une condition nécessaire pour avoir la corde d'une parabole, dans laquelle la ligne CC' doit être la somme des deux rayons SC, SC', & non la différence, comme elle est par rapport aux points C3, C'3, & C4, C'4 dans la fig. 3, & par rapport à toutes les quatre CC' dans la fig. 4. C'est une condition essentielle : mais ni l'équation algébrique, ni la constru-

struction géométrique générale ne peut pas omettre aucune de ces différentes solutions en se bornant à celles, qui donnent cette position du point S placé entre les points C, C': les racines positives, & négatives y sont comprises toutes ensemble avec tout ce qui en dérive.

31. Dans le cas de la fig. 3, un cercle un peu plus petit arriveroit à toucher la branche M*m*, & les deux points I1, I2 en se réunissant répondroient à une racine double: mais un cercle encore plus petit n' y arriveroit pas, & alors l' équation auroit deux racines imaginaires. Je détaillerai ces différens cas dans le scolie suivant.

32. *Scolie* 2. Pour avoir une idée des différents cas, on peut considérer dans la fig. 1 une ligne infinie NSN', qui tourne autour du point S immobile, & rencontre les deux lignes infinies EA*e*, E'A*e*' en deux points C, C': on suivra avec l' imagination ces deux points, & la ligne CC' dans une révolution entière en commençant du parallélisme de la ligne NSN' avec la ligne E*e*, dans lequel le point C va à l' infini, & la ligne CC' devient infinie. Si elle s' incline de manière, que l' extrémité N aille dans l'angle EA*e*', & l'autre N' reste dans l'angle E'A*e*; le point C se trouvera sur la ligne AE, & l'autre C' sur la ligne AE', & la ligne CC' diminuera d' abord, & sans s' évanouir jamais augmentera de nouveau devenant infinie une autre fois, quand la ligne NN' devenant parallèle à la ligne *e*'E' le point C' ira à l' infini. Ainsi dans cet angle il y aura au moins un minimum pour cette ligne.

33. Après ce parallélisme le point C continuera son mouvement vers le point A sur la ligne AE; mais le point C' se trouvera sur la ligne A*e*' en revenant de l' infini, & la ligne CC' se trouvera dans l' angle EA*e*', & depuis la grandeur infinie diminuera de manière, qu' à la fin elle s' évanouira, quand la ligne NN' passera par A, où les points C, C' se réuniront ensemble. Après le passage par A le point C passera dans la ligne A*e*, le point C' dans la ligne AE', & la ligne CC' se trouvera dans l' angle E'A*e* en passant par toutes les grandeurs depuis zero jusqu'

à l'

à l' infini, au quel ira de nouveau dans le parallélisme primitif de la ligne NN' avec la ligne E*e*.

34. Il est évident, que si la ligne donnée est plus grande que la ligne CC' du minimum de cet angle EAE', dans lequel le point S se trouve, celle-ci y arrivera à sa grandeur au moins deux fois, une avant d' arriver à ce minimum, & l' autre après : si elle est égale, elle y arrivera au moins une fois dans le cas du minimum., & jamais elle ne pourra y arriver, quand la ligne donnée est plus petite que la CC' du minimum. Mais dans chacun des angles EA*e*', E'A*e*, elle y arrivera toujours au moins une fois, puisque la ligne CC' y passe par toutes les longueurs, qui se trouvent entre le zero & l' infini.

35. Mais il faut voir, si dans l'angle EAE' la diminution jusqu' au minimum, & dans l' angle EA*e*' jusqu' à zero, l' augmentation dans celui-là depuis le minimum, & dans l' angle E'A*e* depuis le zero jusqu' à l' infini est continuée de manière qu' il n' y ait pas aucune alternation de diminution, & d' augmentation, qui porte plusieurs réprises de minimum, & maximum. Cela se fera par la résolution du problême, où on cherche la position de la ligne NN', qui donne quelque minimum, ou maximum. Ordinairement on cherche ces positions en prenant la valeur analytique de la ligne variable, en la différentiant, & en mettant la différence $=0$, parceque une quantité variable doit venir immédiatement après un maximum, ou minimum à la même grandeur, qu' elle avoit immédiatement avant. Mais souvent une analyse purement géométrique donne des solutions plus simples, & élégantes, que les formules algébriques, comme on voit dans la solution du probl. 5 comparée avec celle du probl. 4. Cette méthode nous en donnera une dans celle du problême suivant, qui achevera de mettre sous les yeux tous les cas de l' égalité de la ligne CC' avec la donnée.

36. *Problême 6. Déterminer tous les cas du maximum, & minimum de la partie* RR' (fig. 5, & 6) *d' une ligne, qui passant toujours par un point donné* S *tourne autour de lui, & rencontre les côtés* AD, AD' *d' un angle* DAD' *en* R, R'.

37. Dans la fig. 5 nous considérerons le point S placé dans l'angle DAD', & dans la fig. 6 hors du même angle, avec deux positions infiniment peu éloignées de celle d'un maximum, ou minimum, qui donnent les deux RR', rr' égales entr' elles : on y ajoutera deux arcs RB, R'B' du centre S terminés à la ligne rr' prolongée, autant qu' il le faut. Les petites lignes Br, B'r' devront être égales entr' elles à cause de l' égalité des lignes RR', rr', & des rayons SR, SB, & SR', SB', & on pourra considérer ces petits arcs comme des lignes droites perpendiculaires à la ligne rr' de manière, que si l' on conçoit la ligne AT perpendiculaire à la même rr', on aura les triangles ATr, RBr, & les autres ATr', R'B'r' semblables entr' eux; tandis que les arcs RB, R'B' seront proportionnels aux rayons SR, SR'.

38. Ainsi on aura les proportions suivantes, AT : Tr :: RB : Br, & AT : Tr' :: R'B' : B'r'. Comme le premier terme de ces deux proportions est le même, & les derniers sont égaux entr' eux; les deux rectangles des intermédiaires le seront aussi, & par conséquent on dira Tr : Tr' :: R'B' : RB :: SR' : SR, & Tr $\pm$ Tr' $=$ rr' : Tr :: SR' $\pm$ SR $=$ RR' : SR'. Comme le premier terme est égal au troisième, le second le sera aussi au quatrième : quand à la fin on réunit les deux lignes RR', rr' à celle du maximum, ou minimum, la ligne AT lui reste perpendiculaire, & on aura le théorème suivant. *Ayant tiré du sommet de l' angle une ligne perpendiculaire à celle du maximum, ou minimum prolongée, s' il le faut, la partie contenue entre la même perpendiculaire, & l' un des deux côtés sera égale à la partie contenue entre le point donné, & l' autre côté, & de direction opposée.*

39. La construction de ce probléme appartient aussi a la Géométrie solide : on y trouveroit une équation algébrique du troisième degré : mais voici une construction très-simple à l' aide d' un cercle, qui a pour diamètre la distance AS du point donné au sommet de l' angle, & d' une hyperbole tirée par le même point donné S, entre les côtés de l' angle prolongés à l' infini d' un côté, & d' autre, & pris pour asymptotes. Nous l' appliquerons aux mêmes figures 3, & 4, qui nous donneront le déve-

veloppement de tous les cas appartenants aussi au probléme 5. Que l' on tire le cercle du diamètre AS, & les deux branches HSH', hh' de l' hyperbole, qui passe par S, & a pour asymptotes les côtés EAe, E'Ae' de l' angle donné : leur rencontre en T donnera la solution du probléme : parcequ' ayant tiré par S & T une ligne, qui rencontre les deux asymptotes en R, R', la ligne AT sera perpendiculaire à la ligne RR' à cause du demi-cercle ATS, & la ligne TR' sera égale à la ligne SR, & de direction opposée par la propriété de l' hyperbole.

40. On voit bien, que le cercle du diamètre AS rencontrera la branche HSH' dans un point T, qui sera le seul outre le point S sur cette branche, ou il tombera sur ce même point, ce qui arrivera, quand l' angle EAE' étant coupé par le milieu par la ligne AS, la ligne RR' deviendra tangente du cercle, le triangle RAR' devenant isocèle : ainsi dans ce cas-là une ligne perpendiculaire à la ligne AS résoudra le probléme, & donnera le minimum cherché. De même dans toutes les autres positions de la ligne AS, on aura une seule ligne RR' déterminée par le point T dans la fig. 3, & par T1 dans la fig. 4, qui déterminera le seul minimum de l' angle EAE', dans lequel se trouve le point S : ainsi dans cet angle la diminution de la ligne CC' depuis l' infini jusqu' au minimum, & l' augmentation depuis le minimum jusqu' à l' infini sera toujours continuée sans aucun autre, ni minimum, ni maximum.

41. Dans le cas de l' angle EAE' aigu qu' on a dans la fig. 3, on voit bien que le cercle ne pourra pas entrer dans l' angle *eAe'* pour y rencontrer l' autre branche *hh'* : mais dans le cas de la fig. 4, où l'angle EAE' est obtus, si l'angle, que le diamètre AS fait avec un des deux côtés AE, AE', est aussi obtus, alors un des deux demi-cercles entrera dans l' angle, que la prolongation de ce côté forme avec l' autre ; & si ce diamètre est assez grand ; ce demi-cercle peut rencontrer l' autre branche, qui se trouve dans cet angle, en deux points, & donner un autre minimum, & un maximum.

42. C' est le cas de la fig. 4, où l' angle EAE' est obtus de

manière, que l' angle E'AS l' est aussi, & un des deux demi-cercles du diamètre AS rencontre la branche *hh'* en deux points T2, T3. Si le point S étoit un peu plus éloigné de la ligne E*e*, ou le diamètre AS plus petit; la branche *hh'* seroit plus éloignée de son asymptote *e*E, ou le cercle plus petit, de manière qu' il n' y auroit qu' une rencontre avec un contact, qui réuniroit les deux points T2, T3, & répondroit à une racine double réelle, ou il n' y auroit point de rencontre, ce qui répondroit à deux racines imaginaires. Dans les deux cas derniers la ligne CC', qui a diminué continuellement, & après continuellement augmenté dans l' angle EAE', diminueroit continuellement dans l' angle EA*e'* jusqu' au zero, augmenteroit dans l' angle *e*AE' jusqu' à l' infini sans interruption: mais dans le premier cas des deux rencontres en T2, T3 il y auroit une diminution continuelle jusqu' à la position R2, R'2, ou il y auroit un autre minimum, une augmentation jusqu' à l' autre R3, R'3, ou il y auroit un maximum: une diminution nouvelle continuelle jusqu' à zero, & une augmentation continuelle dans l' angle *e*AE' sans interruption jusqu' à l' infini.

43. On voit bien la suite de ce changement par la nature de la solution même. La condition trouvée de l' égalité de la ligne TR' avec l' autre SR, & de l' angle en T droit fait voir, que la construction épuise le problême, & comme le cercle ne peut pas rencontrer une section conique en plus de quatre points, il ne peut pas y avoir, que trois rencontres outre le point S. La solution ne fait pas voir, que ce qu' on a trouvé soit plutôt un minimum, qu' un maximum; mais on voit bien, que la ligne R1R'1, qui se trouve seule dans l' angle EAE', doit appartenir à un minimum, qui y est nécessaire à cause de l' augmentation, qui dans cet angle succede à la diminution sans passer par le zero. Pour les deux R2R'2, & R3R'3 de l' angle EA*e'*, on voit bien, que celle-là, qui se rencontre la première après la diminution, doit donner un minimum suivi d' une augmentation jusqu' à l' autre, après laquelle y ayant une nouvelle diminution jusqu' à zero on voit bien, qu' elle doit donner un maximum.

44. Dans

44. Dans le cas du contact il y a un accident, qui mérite toute l' attention. Il paroît que la solution doit donner un maximum, ou un minimum, & pourtant il n'y en a pas. Ces sont des cas singuliers, qui arrivent aussi quelque fois, quand dans le calcul on met la différence = o. Comme en prenant cette différence on néglige des quantités d' ordres inférieurs; il arrive quelque fois, que la différence n' est pas nulle, mais qu' elle, formée alors par la somme des quantités négligées, devient d'un ordre inférieur: cela arrive ici: elle reste, quoique d' ordre inférieur, & on a trouvé dans la fig. 5, & *6* les deux RR', *rr'* égales entr' elles déterminées par la propriété, qui a donné la solution du problême, non parcequ' elles le sont réellement, mais parcequ' on y a pris les petits arcs pour des lignes droites en les confondant avec leurs sinus, & en négligeant les sinus verses, qui sont des quantités d' un ordre inférieur. J' ai développé toute cette théorie dans ma Dissertation *de Natura & usu infinitorum*, *& infinite parvorum* publié l' an 1740, & plus amplement encore dans le second Volume de mes éléments, en parlant des variations des quantités variables exprimées par une formule algébrique.

45. *Scolie* 1. On voit par cette solution ce qui doit arriver à la solution du problême 5 dans le cas de la fig. 4. Si la ligne donnée est d' une longueur intermédiaire entre R2R'2 du minimum, & R3R'3 du maximum; le cercle du centre S, qui a le rayon égal à cette ligne, rencontrera la branche M'S*m'* en quatre points I1, I2, I3, I4, qui donneront les quatre solutions correlatives aux quatre racines réelles, par les lignes C1C'1, C2C'2, C3C'3, C4C'4 égales à la ligne donnée. Si cette ligne est égale à l' une des deux R2R'2, R3R'3; le cercle touchera cette branche dans le premier cas sur son intersection avec la ligne ST2, & dans le second sur son intersection avec la ligne ST3: dans celui-là il y aura la réunion des points I1, I2, & les lignes C1C'1, C2C'2 tomberont sur la ligne R2R'2: dans celui-ci il y aura la réunion des points I2, I3, & les lignes C2C'2, C3C'3 tomberont sur la ligne R3R'3: dans tous les deux il y aura trois solutions, qui répondront à trois racines réelles, dont une sera dou-

double. Si la ligne donnée est plus petite, que la R2R'2, ou plus grande, que la ligne R3R'3, mais plus petite que la ligne R1R'1, il n'y aura que deux rencontres avec cette branche en I3, I4, ou I1, I4 sans aucune rencontre avec l'autre branche: ces intersections donneront deux solutions correlatives à deux racines réelles, qui dans ces cas seront les seules réelles, & les deux autres seront imaginaires.

46. Dans tous les cas exposés jusqu'ici, le cercle n'arrivera pas à l'autre branche, qui doit se trouver dans l'angle, E'A*e*: mais dans l'égalité de la ligne donnée avec la ligne R1R'1, le cercle arriveroit à cette branche en la touchant en un point, où on commenceroit à avoir des racines réelles correlatives à cette branche; mais d'abord il n'y en auroit qu'une seule double. Si la ligne donnée est encore plus grande; il y aura deux intersections avec cette branche analogues à celles de I1, I2 de la fig. 3, & correlatives à deux autres racines réelles de l'équation.

47. Ainsi la ligne donnée plus grande, que celle du minimum de l'angle, dans lequel se trouve le point S, donne quatre solutions réelles, dont deux déterminées par la branche qui passe par S placent ce point entre les deux C, C', & peuvent donner la corde de l'orbite parabolique: les deux autres déterminées par l'autre branche, qui ayant le point S hors de ces limites ne peuvent pas servir à cet usage. La ligne donnée égale à celle de ce minimum donne trois seules solutions, les deux, qui peuvent être utiles, se réunissant en une seule. Quand dans les angles contigus on n'a pas l'autre minimum, ni le maximum, il n'y aura que deux seules solutions donnés par la branche inutile, ce qui arrivera aussi dans le cas, où on a ce minimum, & ce maximum, si la ligne donnée est intermédiaire entre celle du minimum de l'angle EAE', & celle du maximum de cet autre angle: dans tous ces cas l'équation du quatrième degré aura deux racines imaginaires. On aura de nouveau trois racines réelles, dont une double, si la ligne donnée est égale à celle du minimum ou maximum, & toutes les quatre seront réelles, si elle

est

est intermédiaire entre ces deux dernières : mais aucune des positions déterminées par celles-ci, ne pourra servir pour avoir la corde d' une parabole. Les positions qui tombent dans l'angle EAE' seront inutiles, si un des points C, C' porté sur la fig. 1 tombe sur une de ces lignes T*e*, T'*e*' à la place de tomber sur les TE, T'E'. Elles pourroient servir pour une orbite parabolique, mais non pas pour celle de la comète, qui a été observée dans les directions TE, T'E', & non dans les opposées T*e*, T'*e*'. Dans un cas d'une comète réellement observée dans ces directions, il y aura au moins une position utile par les rayons SC, SC', qui rempliront toutes les conditions nécessaires : mais quand il y en a deux, il pourra se faire, que l' une des deux soit exclue ou par la longueur d' un des rayons SC, SC', qui ne soit pas assez grande, ou par la position d' un des points C, C' dans la ligne T*e*, ou T'*e*' de la fig. 1.

48. Ainsi on a une idée très-claire de tous les cas, où le point S se trouve dans l' angle EAE' : mais la direction des lignes TE, T'E' pourroit porter le point A dans une position, qui laisseroit le point S dans un des trois autres angles formés par les lignes E*e*, E'*e*'. Pourtant on peut appliquer facilement à ces trois autres cas tout ce que nous avons dit pour celui-là. Toujours il n' y aura, que deux solutions, qui puissent être utiles se trouvant dans l' angle, où le point S se trouve, dont une le sera toujours dans le cas des observations réelles, & l' autre pourra être rejettée par les deux conditions, que nous avons rapportées, ou laisser un doute à vérifier par une autre observation, & on n' aura ces solutions, que quand la ligne donnée sera plus grande, que celle du minimum de cet angle, qui se réuniront dans une seule, quand il y aura l' égalité avec celle de ce minimum. Il y en aura deux autres dans un des deux autres angles, ou une, ou même trois dans un seul, une dans l' autre, mais inutiles, sans aucune dans l' angle EAE'.

49. Tout cela ne sert, que pour un amusement géométrique : pour l' usage pratique il n' y a, que l' invention de la valeur de la corde, qu' on a dans la solution du premier problême, la

con-

construction graphique du second, & si l'on veut plus d'exactitude, la méthode de la fausse position du troisième.

50. *Scolie* 2. On peut trouver la position des maximum, & minimum sans l'hyperbole, que nous avons employé dans la construction du dernier problême par une pratique de compas très-simple. Ayant coupé la distance AS (fig. 3) par le milieu en Q, on tournera la règle autour du point S jusqu'à ce qu'on trouve avec le compas les distances QR, QR' égales. Parceque si l'on conçoit une ligne tirée de Q perpendiculaire à la base RR' du triangle, qui auroit le sommet en Q, & qui seroit alors isocèle, elle la coupera par le milieu : en tirant AT perpendiculaire à la même base, elle sera parallèle à cette ligne, & par conséquent celle-ci coupera par le milieu aussi la ligne ST, comme la ligne AS est coupée par le milieu en Q. Ainsi les lignes SR, TR', qui seront les différences de ces deux moitiés, seront égales entr'elles, comme il falloit faire.

51. *Scolie* 3. Si l'on considère dans la rigueur géométrique le problême de trouver les éléments de l'orbite d'après les deux observations faites dans les deux nœuds, on ne le trouvera pas de quatrième degré, mais transcendant, parceque sa solution exige, qu'on prenne la valeur de l'aire d'un cercle par rapport à son rayon, qui est la distance moyenne de la terre au soleil, c'est-à-dire la quadrature du cercle, & c'est elle, qui nous a fourni dans le premier problême la valeur c, qui revient à la moitié de sa circonférence : mais puisqu'on considère cette valeur, comme un nombre déjà donné, le problême dans cette considération devient algébrique. Pourtant il n'est pas dans la rigueur de quatrième degré à cause de l'extraction d'une racine cubique de la valeur trouvée pour la corde, que dans l'équation du quatrième problême nous avons fait $= c$. Si dans les dénominations du premier problême on met un accent sur la lettre c, qui est répétée dans celle du quatrième, on aura $c = \sqrt[3]{\frac{18c'^2t^2}{m^2}}$, & pour ôter cette irrationalité il faudroit faire le cube de la valeur c tirée de la proportion du num. 21, ce qui porteroit l'équation au douzième degré.

Mais

Mais comme par l'extraction de la racine cubique on considère cette valeur aussi comme donnée, le probléme vient à être baissé au quatrième. En Géométrie l'extraction cubique ne peut se faire, que par la rencontre d'un cercle avec une section conique, & on connoît la construction très-simple, qui la donne par la rencontre d'un cercle avec une hyperbole entre les asymptotes, analogue à celle du point T de la fig. 3. C'est le problême des anciens de trouver les deux lignes moyennes continuellement proportionnelles entre deux données.

52. On fera un angle EAE' droit, & on prendra sur un de ses côtés, comme AE' la ligne AD égale à la première des deux données : on tirera DS parallèle à l'autre côté, & égale à la seconde des mêmes données: on fera passer par S une hyperbole entre les asymptotes AE, AE', & on tirera un cercle, qui ait pour diamètre la ligne AS : sa rencontre avec cette hyperbole en T donnera la solution du problême. Pour l'avoir on tirera l'ordonnée de l'hyperbole TV parallèle à la ligne SD, & les deux moyennes cherchées seront la ligne VT, AV.

53. Parceque premiérement par la nature des asymptotes on aura RS = TR', & par conséquent RT = SR', & AV = DR'. Ainsi on aura les proportions suivantes par les triangles R'VT, R'DS semblables, VR' = AD : VT :: DR' = AV : DS ; & par les triangles R'VT, TVA rectangles, & par-là semblables, VR' = AD : VT :: VT : AV :: AV : DS. On voit par-là, que les lignes AD, VT, AV, DS sont en proportion continue.

54. Dans le cas présent on prendra AD égale à la distance moyenne du soleil à la terre, que nous avons prise pour unité dans le premier problême : on fera DS égale à la quatrième proportionnelle après les nombres donnés m^2, $18c'^2t^2$, & la ligne AD = 1, ce qui la rendra $= \frac{18c'^2t^2}{m^2}$. On aura alors VT $= c$, parceque la ligne AV sera $= c^2$, & DS $= c^3 = \frac{18c'^2t^2}{m^2}$, ce qui donne $c = \sqrt[3]{\frac{18c'^2t^2}{m^2}}$.

55. *Probl. 7. Trouver à l'aide d'une autre observation l'inclinaison de l'orbite, & déterminer quelle des deux longitudes opposées doit convenir au nœud ascendant, quelle au périhélie dans l'orbite, avec la direction du mouvement direct ou rétrograde.*

56. On trouvera tout cela aisément par une construction graphique de la manière suivante. Soit (fig. 1) t le lieu de la terre dans le temps de la nouvelle observation, c celui de la comète dans la parabole appliquée sur le plan de l'écliptique, c' le même dans l'orbite inclinée à ce plan. Sachant la longitude héliocentrique de la terre, opposée à la géocentrique du soleil, & la distance St, on tirera la ligne St de cette longueur dans cette direction, comme aussi la ligne tn dans la direction de la longitude observée: puisqu'on a déjà le temps de l'arrivée au périhélie, & celui de la nouvelle observation avec la distance périhélie SP, on trouvera dans les tables paraboliques l'anomalie PSc, qui convient à cet intervalle de temps avec le rayon vecteur Sc: ainsi on pourra tirer la ligne Sc à cet angle, & de cette longueur. On tirera par c la ligne cd perpendiculaire à la corde CC', & on la prolongera des deux côtés en m, m' mettant m du même côté avec t par rapport à la même corde. Cette ligne rencontrera la direction tn en un point a.

57. Premiérement le point a sera le lieu c' réduit au plan de l'écliptique par la ligne perpendiculaire $c'a$. Ainsi on saura vers quel des deux demi-cercles de l'écliptique l'orbite sera inclinée: ce sera vers celui du point t, si le point a tombe sur la ligne dm, & vers l'opposé, s'il tombe sur la ligne dm', ce qui déterminera la longitude du périhélie. On a trouvé le point V (num. 12) par une intersection de deux cercles, qui ont les centres en S, B, & le rayon égal à $\frac{1}{4}$CC'. Or on trouve deux de ces intersections en V, & V'. On déterminera la longitude du périhélie par celles des lignes SP, SP' parallèles aux lignes BV, BV', qui par rapport à la ligne CC' se trouvera du même côté avec le point a.

58. On déterminera le nœud ascendant par la dénomination de la latitude de la nouvelle observation. Si elle tombe entre les deux observations des nœuds, étant boréale indiquera, que la dire-

ction

ction SN est celle du nœud ascendant, & étant australe, indiquera, que la direction du nœud ascendant est la diamétralement opposée. Cela sera tout le contraire, si la nouvelle observation tombe hors de cet intervalle de temps.

59. Comme on aura trouvé la longitude héliocentrique du périhélie, le mouvement sera direct, ou rétrograde, selon qu'elle tombe par rapport à celle de la ligne CN selon l'ordre des signes ou contre.

60. Pour l'inclinaison on trouvera dans l'échelle la valeur des lignes ad, at, & on aura la proportion suivante, $ad : ta :: tan.atc' = tan.lat. : tan.adc' = tan.incl.$; parceque ces tangentes sont égales à $\frac{ac'}{at}$, & $\frac{ac'}{ad}$. Comme on sait la première, on trouvera la seconde.

61. On trouvera les mêmes objets par un calcul trigonométrique très-simple. Comme on a les angles PSC', PSc, on trouvera l'angle cSd, qui donnera $Sd = Sc \times cos.cSd$. Dans le triangle tSd on a aussi la ligne St, & l'angle tSd, qui dans le cas de la figure est la différence des longitudes de la direction St de la terre, & Sd : ainsi on trouvera l'angle tdS, dont le sinus est le co-sinus de l'angle tda, à cause de l'angle Sda droit : l'angle tad sera aussi connu, la direction ta étant celle de la longitude de la comète, & la direction da ayant pour longitude celle de la ligne des nœuds $\pm 90°$. On aura $\frac{ta}{da} = \frac{sin.tda}{sin.dta} = \frac{cos.tdS}{sin.dta}$, & par conséquent $tan.incl. = \frac{cos.tdS \times tan.lat.}{sin.dta}$, ce qui donne la solution du problême par la détermination trigonométrique du seul angle tdS. Le point a tombera sur la ligne dm', ou sur la dm, selon que dans le cas de la figure l'angle Sta sera plus petit, ou plus grand, que l'angle Std. Une figure, même grossière, dirigera le calcul pour tous les cas.

62. *Scolie*. Quand il y aura deux cordes CC' appliquées entre les lignes TE, T'E', la nouvelle observation pourra s'appliquer à toutes les deux, quoiqu'elle y donnera une inclinaison diffé-

rente. Pour savoir quelle des deux il faut prendre, il faudra employer une quatrième observation, & la simple construction graphique déterminera assez bien le choix. On fera pour un autre point la même opération, & on déterminera l' inclinaison de l' orbite par la valeur $tan.incl. = \frac{ta \times tan.lat.}{ad}$. Si l' on trouve à-peu-près la même inclinaison qu' auparavant en faisant cette opération sur une des deux cordes, on pourra bien s' assurer, que c' est la corde de la parabole de cette comète: autrement il faut prendre l' autre. On s' assurera mieux en faisant l' opération pour toutes les deux: on trouvera un des deux résultats bien différent de celui, qu' on avoit eu pour la troisième observation, & l' autre autant conforme, que la construction le peut donner. Un calcul plus exact assureroit bien mieux; mais il est inutile, parceque la construction graphique remplira bien le même objet.

MÉMOIRE VII.

DISSERTATIO DE COMETIS

Habita a PP. Soc. Jesu in Collegio Romano Anno 1746 mense Septembri die 5.

1. Si quæcunque hactenus de cometis dicta sunt, quæcunque adhuc supersunt dicenda, commemoranda hic nobis essent; non unius Dissertatiunculæ, sed justi etiam voluminis mensuram excederent. Quamobrem plurimis omissis, innuemus tantum pauca quædam, quæ nobis postremum cometam diligentius observantibus duobus ab hinc annis, atque ejus occasione, de cometarum theoria, de caudis, de caudarum phænomenis quibusdam, quæ ad revolutionem circa proprium axem detegendam per observationes, atque determinandam pertinent, sæpius cogitantibus ita occurrerunt, ut & Astronomis, & universæ Naturæ indagatoribus non injucunda fore censuerimus.

2. Quod

2. Quod ad theoriam attinet, pro certo habemus, cometas esse astra quædam perennia, quæ generales motuum leges cum planetis observant, quanquam etiam in multis discrepant, idque juxta theoriam Newtonianam, quæ cum omnium cometarum motibus huc usque rite determinatis ita consentit, ut multo minor consensus in planetarum theoria habeatur. Newtonus quidem terram movet. At (*) nos sacrarum litterarum testimonia venerati,

(*) Hic hujus Dissertationis locus, ut & quæcumque inferius proferentur pertinentia ad motum terræ, exigit, ut animum advertat Lector ad locum, & tempus primæ impressionis hujus Dissertationis, quæ pro annua thesi proposita fuit Romæ anno 1746, antequam ex Indice novo librorum prohibitorum impresso post Congregationem ad ejus examen peculiariter deputatam, re ad trutinam diligenter revocata, expunctus est titulus, qui in præcedentibus aderat, *libri omnes qui affirmant Telluris motum*.

Et quidem illud est omnino falsum, quod nunc vulgo affirmari solet, Copernicanum systema nunc demum haberi pro vero ab omnibus Academiis, ab omnibus in Astronomia mechanica, in Physica genuina vel leviter initiatis. Illud, quod nunc habetur pro vero, nec Tychonicum est, nec Copernicanum, sed Newtonianum, in quo sol ipse motum habet non solum circa axem proprium immoto centro, sed translatitium, minorem quidem quam planetæ minores, sed adhuc satis ingentem, cum gravitas generalis non permittat quietem, nisi soli centro gravitatis communi planetarum omnium, & cometarum, a quo sæpe solis centrum distat multo magis, quam luna a terra. In eo systemate multo adhuc melius explicantur in sensu non tantum vulgari, sed etiam admodum proprio sacrarum litterarum loca, quæ quidem etiam independenter ab eo solis motu translatitio, terrâ etiam motu absoluto translatâ, satis commodam explicationem admittunt in sensu proprio, & respondente significationi, quam institutio humana tribuit vocibus quietis, & motus: ea enim non absolutum respexit spatium infinitum immobile, quod sub sensus hominum non cadit, sed respectivum, in quo nunc etiam Astronomi in suis tabulis accipiunt solis motum & annuum, & diurnum.

Verum in hanc ipsam quæstionem diligentius inquirens ego quidem jam eo tempore prospexeram rationem conciliandi cum absoluta quiete telluris omnia Astronomiæ phænomena, & causas ipsas phænomenorum omnes repetitas a vi inertiæ, & gravitate Newtoniana generali, quam in hac Dissertatione proposui, ut patebit a numero 15, in alia autem posteriore evolvi multo uberius, & propugnavi multo fusius, & singillatim, propositis iis, quæ contra ipsam proferri possunt, & nisi me mea fallit opinio, evidentissime dissolutis. Si corpora omnia vim inertiæ habeant non absolutam respectu spatii absoluti infiniti immobilis, sed respectivam respectu spatii cujuspiam mobilis, ut cujuspiam orbis immensi, in quo ea omnia inclusa sint, ita, ut vel a natura sua, vel a libeti, & Sacræ Romanæ Inquisitionis decretis obsequentes immotam statuemus, ejusque motum nonnisi in speciem tantum retinemus facilioris delineationis gratia, illud simul demonstrantes, sive terra circa solem moveatur, sive cum sole cometarum orbitæ circa terram immotam circumferantur, eadem prorsus phænomena provenire, easdemque motuum causas, ac vires corporum perseverare.

3. Ge-

libera lege lata a Supremo Mundi Conditore, determinentur ad perseverandum in eodem statu quietis, vel motus respectivi respectu ejus spatii, id autem spatium per liberam itidem ejusdem Supremi Naturæ Auctoris voluntatem habeat motum contrarium, & æqualem illi, quem eo spatio immoto haberet tellus in ipso Newtoniano systemate; ea ipsa translata quidem respectu ejus spatii circa solem motu annuo, circa se ipsam motu diurno cum motibus reliquis omnibus, quos in Newtoniana jam communi theoria habet absolutos, reipsa utique absolute quiescet.

Res eo pacto reducitur ad duas quæstiones, alteram, ut ita dicam, juris philosophici, alteram facti. Prior est, an vis inertiæ, quæ in corporibus admittitur, sit absoluta, nimirum respiciens spatium absolutum, infinitum, immobile, an relativa respectu spatii cujusdam mobilis, ut illius orbis indicati; posterior vero an id spatium moveatur motu contrario, & æquali ei, quo terra moveretur intra ipsum, si id quiesceret.

Quod pertinet ad primum caput, inquisivi in ea Dissertatione posteriore in ea omnia, quæ afferri solent pro demonstranda vi inertiæ absoluta, & luculenter ostendi, ea nihil omnino evincere: posse quidem vim ipsam inertiæ admitti ut consentientem cum omnibus phænomenis, sed directe probari non posse, nec, ut ajunt, a priori e metaphysicis principiis, nec a posteriori per observationes. Credo ego quidem, ibi me evidentissime demonstrasse, nihil omnino evincere, quidquid Eulerus in eam rem congessit initio suæ Mechanicæ ad probandam eam vim a priori, nihil aliorum argumenta, ut illa, quæ desumuntur a simplicitate rectæ lineæ, ubi deprehenso unico quodam totius Geometriæ fundamento, ostendisse me arbitror, cur nostræ humanæ menti simplicissima videatur recta linea, cum singulæ ex infinitis curvarum generibus naturam habeant in se ipsis simplicissimam, quæque suam: nec vero ex observationibus quidquam pro ea vi deduci posse, demonstravi evidentissime: nam in illa hypothesi vis inertiæ respective respectu ejus spatii translati, motus ipsi, qui nobis apparerent rectilinei, & æquales, non essent tales, nisi respectu ejus spatii ejusdem, reipsa autem & curvilinei essent, & inæquales: nec vero etiam aliunde ullum unquam habemus in experimentis motum accurate rectilineum, & æquabilem, quo uti possimus pro fundamento ad ejusmodi inertiæ vim demonstrandam a posteriori: plura ibidem congessi in eandem rem,

3. Generales planetarum leges, a Keplero primum detectæ, sunt: 1 planetas moveri in sectionibus conicis circa solem ita, ut singularum focum sol occupet: 2 areas, quas describit, & quodammodo verrit recta conjungens planetam cum sole, sive quod idem est, sectores clausos rectis lineis ductis ab extremis punctis arcus descripti, & arcu ipso esse proportionales temporibus, quibus ii arcus describuntur: 3 quadrata temporum periodicorum, quibus nimirum absolvuntur integræ revolutiones, esse ut cubos distantiarum mediarum a sole, sive semiaxium transver-

rem, quæ mihi videntur evidentissime evincere illud, vim inertiæ absolutam posse quidem assumi ut hypothesim felicissimam, nullâ satis solidâ ratione evinci posse. In quæ, & quot absurda inciderent microscopici vermiculi caseo quiescenti inclusi, si ratione uterentur, & e vitæ suæ brevissimæ observationibus respectivis de absolutis, ac æternis totius Naturæ legibus judicarent!

Quod pertinet ad caput secundum, jam illud facile deducitur e primo, æque potuisse Naturæ Opificem sancire legem inertiæ absolutam, ac respectivam respectu spatii cujusdam mobilis, & ei spatio præbere motum, quem voluerit, adeoque & illum, qui esset æqualis, & contrarius motui, quem intra ipsum quiescens haberet terra. Si autem quæratur, an hunc ipsum motum ei spatio tribuerit; statim occurrit, eum casum esse unicum inter alios numero infinitos æque possibiles, quorum unus esset itidem quies ejus spatii, tum unici singuli e motibus contrariis, & æqualibus motui, quem planeta quivis haberet intra ipsum spatium immotum, vel ei, quem haberet quodvis materiæ punctum: in iis casibus is planeta, vel id materiæ punctum absolute quiesceret: si autem ei spatio datus fuisset alius motus quicunque, tum nullum punctum materiæ esset sine motu absoluto. Hinc telluris quies, casus unicus inter infinitos æque possibiles, esset infinite improbabilis: sed ea improbabilitas statim concideret; si ipse Naturæ Auctor hominibus in sua revelatione enunciasset, se illum ipsum selegisse.

Eo pacto reducitur ea secunda quæstio ad expositionem enunciationis ejusdem propositæ in sacris litteris, quæ tota pertinet ad Theologos: Philosophus, ac Mathematicus inquiret in motus respectivos respectu ejus spatii, qui erunt absoluti, si id spatium quiescat. Ego ubi motum telluris appellabam, intelligebam de eo, qui esset respectivus respectu ejus spatii, qui cum multo minus respectivus sit, quam alii respectivi, ut motus in navi respectivus respectu ipsius navis, potest appellari absolute motus. Sic illæso obsequio, quod omnino debebam meo statui hominis Christiani, Catholici, Religiosi, philosophicas quæstiones a Christiano-Polemicis sejunxeram. Hæc autem omnia hic modo præmitto correlativa iis, quæ occurrunt in hac Dissertatione veteri, quam hic censui reimprimendam integram. Si ea hic modo imprimeretur primò, nihil eo pertinens in ipsa haberetur.

versorum. Hæc autem lex fluit ex alia generaliore, quod nimirum areæ eodem tempore descriptæ in diversis orbitis, sint in ratione subduplicata laterum rectorum principalium.

4. Generales has leges observant cometæ, in quo cum planetis consentiunt. Consentiunt autem etiam in eo, quod dum ejusmodi orbibus feruntur circa solem, convertuntur (ut nos quidem ex nostris observationibus deduci posse arbitramur) circa proprium axem: & ut id in Venere, Marte, Jove, Sole, ac Luna innotescit ex maculis, ita in hoc postremo cometa nos colligimus ex sulcis quibusdam obscuris observatis in cauda, & mutantibus positionem respectu axis ejusdem caudæ, ut inferius videbimus. Pariter & planetæ, & cometæ sunt corpora opaca proprio lumine destituta, & mutuantia lumen suum a sole.

5. Discrepant autem in eo, quod planetæ describunt orbitas ellipticas parum abludentes a forma circulari: at cometæ feruntur in orbitis plurimum oblongis, quarum arcus soli, & nobis proximus nihil, aut fere nihil ad sensum differt ab arcu parabolæ. Norunt sane quicunque sectionum conicarum elementa evolverunt, quanta sit inter ellipsim satis oblongam, parabolam, atque hyperbolam affinitas: dum enim sectio gradatim magis inclinatur, & ellipsis oblongatur ultra quoscunque limites; eadem migrat primum in parabolam, tum in hyperbolam: & si sectionum inclinatio insensibili angulo differat a sectione parabolica; arcus ejusdem circa verticem, nihil ad sensum differet a parabolico, licet vere ellipticus sit, aut hyperbolicus: unde etiam constat, arcus infinitarum ellipsium, quarum aliæ aliis sint duplo, decuplo, centuplo infinities longiores, non differre ad sensum inter se in ipsa origine, & prope verticem hinc, & inde. Quamobrem arcus ille, qui nobis videretur parabolicus, potest esse hyperbolicus, & potest pertinere ad infinitas ellipses alias aliis utcumque longiores. Censemus autem, ellipticas esse eorum orbitas, & ex longo demum intervallo redire, sed redire tandem. Hinc autem fit, ut dum planetas telescopio semper, nudis oculis fere semper aspicimus; cometæ in exigua tantum suæ revolutionis parte conspicui sint.

6. Dif-

6. Differunt etiam in eo, quod planetæ gyrant in planis exiguo angulo ad se invicem inclinatis, unde fit, ut a nobis sub eodem Zodiaco, nec nimis lato videantur, cometæ in omnes cœli plagas liberrime excurrant: planetæ omnes moveantur motu directo in eandem plagam, in quam sol circa proprium axem convertitur, & atmosphæram suam secum rapit, in qua ipsi, ut inferius videbimus, semper & omnes innatant, cometæ alii directo, alii retrogrado cursu ferantur in plagas oppositas: planetæ exiguâ, & vix, aut ne vix quidem nobis sensibili atmosphærâ cingantur, nec caudas habeant ullas, cometæ & immensis cingantur atmosphæris, & longissimas caudas emittant.

7. Ut hæc theoria cum phænomenis conferatur, & innotescat, an cum iis consentiat, duo problemata solvenda sunt: 1 Ex aliquot observationibus determinanda est orbita, quam datus planeta describit: 2 Ex orbita determinata inveniendus est locus e terra visus ad datum tempus. Referat in fig. 1 S solem, MTR orbitam, quam in hypothesi terræ motæ describit ipsa terra, jacentem in plano eclipticæ, QPq arcum parabolicum proximum illi, quem cometa describit, P perihelium, NE lineam nodorum, sive illam rectam lineam, in qua planum eclipticæ secatur a plano orbitæ cometæ, ac proinde debet concipi totus arcus QPN elevatus supra chartam, in qua orbita terræ jacet, & reliquus Nq depressus infra eandem, & majoris distinctionis causâ lineæ omnes, quæ jacent in plano eclipticæ per puncta tantum notatæ sunt, quæ in sublimi elevatæ supra id planum continuo ductu sunt designatæ.

8. Determinanda est igitur positio orbitæ QPq respectu plani eclipticæ, & ejus magnitudo. Magnitudo definitur, definitâ distantiâ SP, quam habet parabolæ vertex a sole S, & quoniam eadem SP est omnium distantiarum minima, dicitur P perihelium, & ipsa dicitur distantia perihelia. Positio determinatur determinatâ directione lineæ nodorum SN in ecliptica, inclinatione plani orbitæ ad planum eclipticæ, angulo NSP, quo perihelium distat a linea nodorum; ac præterea, ut etiam cum terra conferatur ea orbita, determinandum est tempus, quo cometa

pervenit ad perihelium, & an directus sit, & moveatur secundum ordinem signorum, an contra retrogradus.

9. Ea pertinent ad solutionem primi problematis. Ad solutionem secundi pertinet, definire directionem plani CTD perpendicularis eclipticæ transeuntis per cometam dato tempore, ex quo definitur longitudo cometæ visa e terra, quæ dicitur geocentrica, & exhibetur a directione TD rectæ transeuntis per punctum D, cui perpendiculariter cometa imminet, definire angulum DΓC, sive elevationem rectæ TC supra planum eclipticæ, quæ dicitur latitudo geocentrica, & distantias CT, CS a terra, & a sole.

10. Antequam de iis dicamus aliquid, concipiatur primum in fig. 1 sol immotus in S, & sint immota plana QN*q*, TMR, in quorum primo cometa moveatur per QC*c*, & in secundo terra per T*t*MR: tum concipiatur terra immota in T, dum interea sol totam orbitam QN*q* secum rapiens circa ipsam gyrat motu contrario directioni T*t*MR in orbita ipsi æquali, & posita situ contrario. Cometa vero interea per suam orbitam sic translatam moveatur ut prius. Facile demonstrabitur, loca geocentrica cometæ, & solis, & distantias futuras prorsus easdem, ac si sole S, & orbita QN*q* immotis, terra T gyraret per T*t*MR. Quo id manifestius appareat, concipiatur, punctum T, & arcum S*s* contrarium, & æqualem arcui T*t* non esse in eadem charta, in qua est reliqua tota figura, quæ lineas refert in ecliptica positas, sed prope ipsam hærere in aere: lineæ autem continuo ductu designatæ, quæ supra idem planum elevantur, sint tanquam quædam fila ferrea ipsi chartæ crassiori infixa. Rectæ S*s*, T*t* erunt parallelæ, & æquales. Quare si sol, dum describit arcum S*s*, circumfert secum motu parallelo totam chartam; punctum *t* chartæ abibit in T. Venerit interea cometa ex C in *c*. Manifestum est, rectas omnes, quæ ducuntur ex T ad C, *c*, S, & ad quodvis punctum spatii cum sole translati, fore easdem, ac eas, quæ ducuntur ex *t* ad eadem puncta: ac proinde easdem directiones, & longitudines rectarum, easdem apparentias motuum, quæ fuissent, si terra ex T abiisset in *t*. Si dum charta movetur ex S in *s*, teneatur in T immotus vertex styli cujusdam; idem describet in charta or-

bitam

bitam eandem TMR situ contrario positam, & æqualem ei, quam describit S, & cum eo quodvis aliud punctum: ac vertex styli jam congruet cum *t*, jam cum M, jam cum R, & respectu omnium objectorum, quæ sunt in charta, vel cum ea translata, perinde omnino est, vel styli vertex, seu terra T successive accedat ad puncta *t*, M, R, & motu suo describat arcum in charta, vel puncta *t*MR successive accedant ad verticem styli, seu terram T. In utroque casu stylus in charta describet eandem prorsus orbitam, & objecta quævis eodem modo spectabuntur e terra in utroque casu.

11. Hinc superius diximus, nos retinere motum terræ in speciem tantum. Est enim motus respectivus respectu spatii, quod concipimus translatum cum sole. Quando dicemus „ terram abiisse e T in *t*, intelligemus punctum *t* spatii cujusdam, quod concipimus moveri cum sole, abiisse in T. Porro si hoc pacto intelligamus, transferri orbitas omnium cometarum, & planetarum demptâ lunâ, immo & fixarum omnium sphæram, profecto, quod ad phænomena attinet, perinde omnia evenient, sive moveatur terra, sive stet (*).

12. Si autem præterea vel terra revolvatur circa proprium axem, vel circa eundem axem revolvatur in partes contrarias charta cum filis ferreis referens spatium illud, quod concipimus cum sole transferri; phænomena quoque motus diurni eadem prorsus erunt in utroque casu. Illud unum hìc cavendum, quod etiam monuimus in Dissertatione *de observationibus astronomicis* edita anno 1742, totum hoc negotium a sola luminis propagatione rectilinea, & successiva turbari posse. Nam si ad nos deferatur lumen 8 minutis a sole, ac a cometa duplo remotiore minutis *16*;

(*) Omnia phænomena procederent eodem modo in utraque hypothesi, si lux propagaretur momento temporis: sed propagatio successiva luminis pervertet omnia, ut mox patebit, nisi ipsæ etiam luminis particulæ eundem habeant communem motum: sola hypothesis proposita in adnotatione superiore conciliat omnia, & reddit communia prorsus phænomena, communes phænomenorum causas mechanicas, sive terra stet, sive moveatur.

sol erit eo tempore, quo ipsum cernimus, jam binis gradibus in suo parallelo occidentalior, quam nobis appareat, & cometa gradibus 4. Quare si ibi a nobis cernitur, ubi requirit orbita solem habens pro foco; erit in orbita habente pro foco punctum binis gradibus occidentalius, & existens in eodem parallelo. Orbita autem ipsa debebit nutare hinc, & inde a sole, prout cometa accesserit ad terram, vel ab ea recesserit. Debebit enim ipsa esse tanto promotior circa axem æquatoris in Occidentem, vel in Orientem, quantum requiritur a differentia temporis, quo lux pervenit a cometa, & a sole in terram, conversa in partes æquatoris; ut nobis in ea hypothesi hinc spectantibus cometam, & solem ille appareat in orbita habente pro foco solem ipsum, retractis nimirum a mora luminis & cometâ, & sole inæqualiter pro inæquali tempore, quo lux defertur ad oculum.

13. Et hinc quidem hæc propagatio luminis maximam telluris quiescentis sententiæ difficultatem primo aspectu videtur parere. Nam vel propagatio successiva neganda erit, quam phænomena satellitum Jovis, & Bradleyana annua fixarum aberratio comprobant, & testimonio nimis conformi evincunt, vel hæc importuna orbitarum omnium nutatio admittenda, præter plurima incommoda, quæ ex fixarum positione ad se invicem in recessu, vel accessu ad polum non immutatis proveniunt, quæ in ea ipsa Dissertatione exposuimus. At hoc demum pacto difficultas omnis removetur. Motus ille annuus cum sole, & diurnus circa axem æquatoris, qui in sententia terræ quiescentis ponendi sunt necessario communes omnibus cælestibus corporibus, ponantur communes etiam particulis luminis ita, ut sicut planetarum, & cometarum orbitæ transferuntur, & inclinantur, dum ii per eas excurrunt, sic rectæ lineæ, secundum quas eæ progrediuntur, transferantur, & inclinentur juxta leges annui, & diurni motus. Sic illæ translationes omnium & corporum, & motuum generaliores fient, & motus ille annuus eosdem prorsus effectus pariet in oculo, quos tellure motâ pareret lumen per rectam immobilem successive propagatum, nimirum obliquam impressionem respectu oculi ipsius, ac proinde aberrationem Bradleyanam, quæ inde pro-

fluit;

fluit ; motus vero diurnus id efficiet , ut directio viæ luminis semper spectet id punctum , ex quo semel emissum est , ac proinde ut corpora non in eo loco videamus , in quo erant , cum lumen emiserunt , sed secusâ illâ obliquâ impressione , in eo , in quem is locus motu diurno , atque annuo translatus est .

14. Verum hìc etiam ne aberrationem Bradleyanam cogamur admittere in corporibus quoque terrestribus , quam licet nemo investigarit , quod sciamus , directo immobili telescopio in objecta terrestria ; tamen omnino nullam esse arbitramur ; oportet lumen ipsum , ubi in terram impegerit , iis spoliari motibus , ac recto deinceps tramite ad oculum devenire (*) .

15. Hæ hypotheses licet prima fronte videantur plus æquo implexæ , & minus simplices nobis , qui ex nostris viribus , & ex nostræ mentis tenuitate metimur omnia ; Supremo Naturæ Opifici infinita vi prædito , & vastissima mentis immensitate pollenti æque simplices sunt , & expeditæ . Quin immo & mechanicæ motuum causæ illæ ipsæ , quas Newtonus cum tanta omnium admiratione protulit , vis inertiæ , & gravitas universalis , ex quibus & planetarum , cometarumque motus cum Keplerianis legibus , & perturbationes orbis lunaris , & præcessio æquinoctiorum , & compressio figuræ Jovis , ac terræ , & alia ejusmodi tam feliciter deducuntur , retineri poterunt ; dummodo ipsis alia lex unica omni materiæ generalissima adjiciatur . Nimirum concipiatur quoddam ingens spatium , in quo ea omnia corpora conclusit Deus , quæ nos intueri possumus , mobile in infinito immobili spatio eo

(*) Hìc etiam habetur progressus eorum , quæ tum mihi in mentem venerant ad amovendas difficultates , quas contra immobilitatem terræ parit propagatio luminis successiva , quas quidem nusquam vidi propositas ab iis , qui impugnarunt telluris quietem , nec indicatas , & solutas ab iis , qui eam propugnarunt , & vero etiam illud mihi omnino persuasum est , nulla alia ratione easdem dissolvi posse , nisi per omnem illam theoriam indicatam in prima adnotatione , cujus hìc habetur prima idea , primum germen jam fere penitus evolutum .

Quod autem pertinet ad aberrationem luminis Bradleyanam pro objectis terrestribus , videnda sunt ea , quæ habentur in Opusculo III Tomi II , ubi ostendi , eam fore nullam , si instituatur observatio per telescopium habens aerem in tubo , fore aliquam , & sensibilem , si adhibeatur tubus plenus aqua inter objectivum , & locum micrometri .

eo pacto, quo Geometræ plana, & solida mobilia concipiunt: statuerit, in hoc spatio corpora perseverare in eo statu quietis, & motus uniformis in directum, in quo semel sunt posita, nisi quatenus a viribus impressis cogantur cum statum mutare: tum gravitatem universalem Newtonianam, & vires reliquas omnes, quas in natura habemus, adjecerit. Si planetas, & cometas in hoc spatio projecisset cum datis velocitatibus; eas orbitas describerent, quas describunt: cum planetis ferretur tellus circa commune gravitatis centrum nostri systematis. Accedat hæc alia lex. Illud omne spatium moveatur iis omnibus motibus, quibus deberet moveri tellus in partes tamen oppositas, & corpora omnia eorumque motus servent per vim inertiæ, & mutent per alias vires statum suum non respectu spatii infiniti immobilis, sed respectu hujus mobilis spatii.

16. Hac posita generali lege, positis autem prorsus iisdem omnibus reliquis, eadem prorsus phænomena omnia provenire necesse est, tellure stante, quæ haberentur, si spatio illo quiescente gyraret terra. Projectio telluris, & lunæ facta ab initio, quæ cum gravitate in solem, produxisset earum motum circa solem, eadem cum ipsa nunc translationem impediet. Idem accidet motui, quem terra haberet circa commune gravitatis centrum cum luna, idem motui diurnæ vertiginis, qua cum omnibus cælestibus corporibus rotari deberet. Perturbationes autem orbitæ lunaris, maris æstus, inæqualitas ponderum, compressio figuræ telluris, universa mechanica Astronomia eadem perseverabit tellure quiescente, quæ nunc habetur in eorum sententia, qui terram movent. Nam terra quiescet quidem quiete absoluta, & reali respectu spatii immobilis; movebitur tantum motu respectivo, & apparenti respectu hujus spatii mobilis. Perseverantia motus, vel quietis in natura erit sancita per vim inertiæ non respectu spatii absoluti immobilis, sed respectu hujus spatii mobilis, & mutatio ab aliis viribus fiet respectu ejusdem. Quare eædem vires requirentur pro motibus respectivis respectu hujus spatii, quæ in communi mechanica pro motibus absolutis, & iidem effectus ab iisdem viribus provenient motuum hìc respectivorum, ibi absolutorum.

17. So-

17. Solum si ob defectum aberrationis Bradleyanæ lumen reflexum a corporibus terrestribus rectà ad oculum pertingit : illud addendum, ut dum lumen e terrestri particula reflectitur, eam ibi projectionem accipiat, quam tellus initio mundi, contrariam & æqualem illi, quam tum habet punctum spatii mobilis, in quo ipsa reflexio fit. Simile quid ponendum esset etiam in lumine a luna reflexo, si ipsa caret Bradleyana aberratione : verum id quidem contemni potest, cum theoria lunæ intra paucula secunda, ad quæ Bradleyana ipsa aberratio reducitur, perfici omnino non possit.

18. Hæc quidem lex generalis esset, & omni materiæ communis. Si & inertiæ vis, & impenetrabilitas, & gravitas, & aliæ hujusmodi sunt leges prorsus liberæ Supremo Naturæ Opifici, in quam sententiam maxime inclinamus; hæc quoque lex ipsi pariter libera nihil profecto difficultatis habebit. Neque enim ipsi difficilius fuit motum hunc spatii secundum lineam certam, & determinatam ipsi notissimum sancire æterna lege, quam in spatio hoc immoto sancire perseverantiam motuum omnium in rectis lineis per vim inertiæ. Eadem autem phænomenis contraria esse non potest, nec experimentis, aut confirmari omnino, aut infirmari. Nam omnia experimenta instituimus in hoc spatio, ac proinde motus tantum relativos deprehendimus. Innotescat ex experimentis, corpus pergere moveri rectà, si nulla vis obstet. Experimentum profecto ostendit, rectam esse lineam respectu spatii, in quo hæc omnia sunt sive mobilis cum omnibus, sive immobilis : esse rectam respectu spatii immobilis, & non transferri communibus quibusdam motibus æterna lege sancitis, nullo sane experimento deprehendi potest.

19. At arbitraria prorsus est, & ad retinendam telluris quietem conficta. Esset illa quidem; si sacra non adesset auctoritas: verum eâ positâ, ex ipsa, & e phænomenis naturæ directâ ratiocinatione colligitur. Ex una parte tam multa, ac tam præclara inventa, quibus hæc nostra ætas Astronomiam ditavit, & Mechanicam, suadent, pulcherrimum hunc rerum ordinem tam belle compactum, sibique cohærentem ex paucis generalibus principiis de-

derivatum, vi nimirum inertiæ, & gravitate universali, ex iisdem revera pendere. Ex aliâ sacra auctoritas docet telluris quietem, quæ sine hujusmodi translatione, & circumrotatione communi, servato illo rerum ordine, illo effectuum omnium nexu, haberi omnino non potest: in corporibus autem cælestibus diurna rotatio, in omnibus planetarum orbitis translatio ita etiam sine Newtonianis inventis necessaria est sententiæ telluris quiescentis, ut ex ea manifestissime deducatur. Eam igitur legem non ex arbitrio confingimus, sed ad eam ab iis, quæ a naturæ phænomenis innotescunt, & ab iis, quæ a sacra auctoritate impulsi pro veris agnoscimus, rectâ ratiocinatione deducimur. Si sacram hanc auctoritatem contemneremus, sentiremus aliter, & nostram hanc legem, licet generalis sit, & omnia conciliet, ut arbitrariam respueremus. At ei obsequimur: ei uni mentem submittimus. Qui ipsam non curant, sentiant, quod volunt: nobis ab ea vel latum unguem discedere nequaquam licet.

20. Verum plus æquo fortasse evagatos fas est eo regredi, unde digressi sumus. Primum illud problema determinandi orbitam facile solveretur, si liceret in fig. 1 (Tab. XIII) determinare binas distantias TD, *td* locorum D, *d* cometæ reductorum ad eclipticam per rectas CD, *cd* ipsi perpendiculares, quæ distantiæ dicuntur distantiæ curtatæ. Nam ob datas latitudines geocentricas DTC, *dtc* ex observatione, darentur etiam DC, *dc*, & quia dantur puncta T, *t*, seu loca terræ in orbita sua, & directiones TD, *td*, quæ determinant longitudines cometæ geocentricas, darentur puncta D, *d*, ac proinde, & puncta C, *c*, & per ea puncta duci posset parabola habens focum in S per prop. 19 lib. 1 Principiorum Newtoni. Productis D*d*, C*c*, donec concurrant in B, recta per B, & S ducta determinaret lineam nodorum. Et ea quidem nullo negotio ad calculum etiam reducuntur. Ex tertia lege Kepleriana posita num. 3, quod areæ, temporibus æqualibus descriptæ, sint ut radices quadratæ laterum rectorum, inventâ areâ PSC, ac distantiâ SP, cujus quadruplum est latus rectum, inveniretur area, quam eodem tempore deberet describere planeta gyrans in distantia mediocri solis a terra, ac inde posset erui tempus inter appul-

pulsum ad C, & ad perihelium P, ex quo tempus idem appulsus ad P innotesceret: demum ducto plano CXD perpendiculari ad lineam nodorum, angulus X, qui facile, & per constructionem, & per calculum invenitur, exhiberet inclinationem planorum.

21. At illas duas distantias TD, *td* invenire, *hoc opus*, *hic labor est*. Illas Newtonus ope tertiæ observationis intermediæ per attentationem investigat, methodo, quam ipse fuse persequitur Principiorum libro 3, & quam David Gregorius in sua Astronomia fusius explicat libro 5. At ea quidem methodus satis implexa, & prolixa est, nisi eædem distantiæ sub initium innotescant proxime saltem. Si enim primæ sumantur nimis remotæ a veris; operatio nimis multis vicibus est iteranda.

22. Præscribit Gregorius prop. 26, ut investigentur illæ distantiæ proximæ veris ope problematis celeberrimi, quo inter quatuor rectas positione datas quæritur recta, quæ ab iis secetur in ratione data, quod aliter a Wrennio, aliter a Vallisio solutum Newtonus inseruit Arithmeticæ universali probl. 56, & binis aliis methodis solvit in coroll. lem. 27 lib. 1 Princ. Et eo quidem problemate Newtonus utitur ad inveniendam trajectoriam cometæ in hypothesi, quod is moveatur motu uniformi in recta linea. Sint (in fig. 2) T, A, B, *t* quatuor loca terræ in quatuor observationibus TH, AI, BK, *t*L exprimant directiones longitudinum geocentricarum cometæ, cujus loca ad eclipticam reducta D, F, G, *d* (*) jacebunt in directum, & erunt DF, FG, G*d*, ut temporum intervalla. Si igitur possit determinari recta DFG*d*, quæ ab iis TH, AI, BK, *t*L positione datis secetur in data ratione temporum, quod eo problemate invenitur; dabuntur puncta D, *d*, sive illæ binæ distantiæ TD, *td*, ex quibus, & ex datis in figu-

(*) In prima illa hujus Dissertationis impressione habetur eadem littera D posita in binis hujus figuræ 2 punctis, quod confusionem parit. Ea confusio hic non habetur: nam ibi relicta fuerat per errorem productio lineæ DT, quæ fuerat delenda, ut inutilis, in qua occurrit ea ejus litteræ repetitio, qua productione hic omissa, error ipse evanescit.

ra 1 angulis DTC, *dtc*, habebuntur rectæ DC, *dc*, & puncta C, *c*, per quæ ducta recta linea, exhibebit trajectoriam cometæ rectilineam motu descriptam æquabili.

23. Gregorius, quod pro rectilinea trajectoria, & motu æquali propositum fuerat, ad orbem parabolicum transtulit; quia nimirum non magnus parabolæ arcus haberi possit pro recta linea quam proxime, & motus in eo pro æquabili. At illud nobis hanc semper methodum suspectam reddidit, quod Newtonus, qui ipsâ vel maxime indigebat in libro 3, nusquam ibi ejus mentionem injecit, licet in libro 1 de planetarum, & cometarum orbitis agens duplici solvisset methodo. Verum nobis rem ipsam perpendentibus patuit manifesto, ad motum parabolicum eam transferri non posse, & pro veris distantiis, quascunque etiam prorsus oppositas obventuras; quin immo si tempus inter quatuor observationes sit tam exiguum, ut arcus interea a terra descriptus in orbita sua haberi possit pro rectilineo, ne in hypothesi quidem motus rectilinei habere locum. Sit enim arcus a terra descriptus TAB*t* rectilineus; erunt etiam (fig. 2) TA, AB, B*t* ut tempora ob motum terræ etiam in magnis arcubus fere uniformem. At in eo casu, quo binæ T*t*, D*d* ab iis quatuor rectis secantur in eadem ratione, secantur pariter in eadem aliæ infinitæ in quavis distantia ductæ. Nam pro complendo parallelogrammo T*td*O ducantur *d*O, & TO, ac ex quovis puncto P rectæ TD, ducatur PS parallela DO, occurrens TO in S, tum SZ parallela O*d* occurrens *td* in Z; & recta PZ secabitur in eadem ratione ab iisdem illis quatuor rectis, in qua T*t*, & D*d*.

24. Id facile demonstratur. Ductis GN, FM parallelis *d*O, rectæ TN, TM secent PS in R, Q, & ducantur RX, QV parallelæ SZ occurrentes rectæ PZ in X, & V (*). Erit ZS ad XR ut

(*) Figura exprimit hos concursus harum parallelarum cum recta PZ incidentes in rectas BG, AF, quod quidem accidit, & requiritur ad demonstrationem theorematis propositi in fine numeri præcedentis: id vero ipsum non hîc arbitrarie assumitur in ipsa constructione, sed in progressu positive demonstratur, quod nisi fieret, tota demonstratio esset fallax. Verum aliam hujus theout SP ad RP, ut OD ad ND, ut *d*O ad GN, nimirum ut *d*D ad GD, ut *t*T ad BT. Cum igitur *d*O, & ZS æquales T*t* lateri opposito parallelogrammi, eandem rationem habeant ad GN, XR, quam ea ad BT; erunt GN, XR æquales BT, cui cum etiam parallelæ sint; erunt & BG, BX parallelæ eidem TN, ac proinde congruent positione, & erit X in recta BG. Eodem argumento erit & V in recta AF. Sunt autem PV, VX, XZ ut PQ, QR, RS, ut DM, MN, NO, ut DF, FG, G*d*. Igitur in eadem ratione secatur PZ, in qua D*d*. Quamobrem ex ratione, in qua secatur ipsa D*d*, in eo casu ejus distantia a T*t* inveniri non potest.

25. Patet inde, si arcus parabolæ assumatur ita exiguus, ut haberi possit pro recta, & motus pro æquabili, distantiam veræ proximam ea methodo non inveniri. Nam etiam arcus descriptus a terra erit proxime rectilineus, & TA, AB, B*t* in eadem ratione temporum secabuntur. At si arcus parabolæ, & terrestris orbitæ sumantur aliquanto ampliores ita, ut arcus terrestris jam sit T*abt*; imprimis ipsæ TA, AB, B*t*, tam parum abludent a ratione temporum, nisi arcus ipse sit immanis, ut recta PZ, variatâ plurimum distantiâ, parum admodum rationem suorum segmentorum mutet, ac proinde determinatio evadet nimium incerta etiam in casu orbitæ vere rectilineæ. Deinde ipsa curvitas arcus parabolici, immo multo magis inæqualitas celeritatis in accessu ad solem mutabit rationem rectarum DF, FG, G*d*, quæ jam

 non

theorematis demonstrationem multo elegantiorem, & directam protuli in ea Dissertatione, cujus mentionem feci in præfatione, quæ habetur ante hujus Voluminis problema primum numero V, quam Castillonius addidit ad calcem Arithmeticæ Universalis Newtoni suis Commentariis illustratæ. Ipsum autem theorema huc reducitur. Problema, quo quæritur recta linea, quæ quatuor rectas positione datas ita secet, ut tria ejus segmenta sint invicem in ratione data, evadit aliquando indeterminatum ita, ut per quodvis punctum cujusvis ex iis quatuor rectis duci possit recta, quæ ei conditioni faciat satis: habetur autem ea indeterminatio, quoticscumque binæ rectæ in quatuor punctis sint sectæ in communi ratione quavis, & per sectionum puncta analoga transeant quatuor illæ rectæ.

non erunt in ratione temporum, ac si supponantur in ea esse, removebunt rectam Dd in immensum, & aliquando etiam ad partes oppositas rejicient.

26. Id quidem expertus est in cometa anni 1739 Eustachius Zanottus peritissimus Academiæ Bononiensis Astronomus, & diligentissimus observator occasione quærendi distantiam a terra ejus cometæ, ut constat ex historia observationum, quam tum edidit. Cum selegisset quatuor observationes, quas præ cæteris exactissimas esse noverat, & quæ trium dierum intervallis distabant a se invicem, & eâ methodo distantiam investigaret, invenit absurdam prorsus conclusionem, cometam nimirum, qui ad easdem partes cum sole conspectus fuerat, ad oppositas rejectum; & culpam ipsi methodo debitam conjecit in nimiam observationum distantiam a se invicem, tanquam si arcus parabolæ 12 diebus descriptus pro rectilineo haberi non possit. At ex hac nostra demonstratione illud patet, licet prorsus rectilineus ille arcus extitisset, methodum tamen non esse parem distantiæ determinandæ: accedit, quod minimis observationum erroribus, qui nec sub sensum cadant, errorem ipsum in immensum augeri necesse est.

27. Simili prorsus incommodo laborat methodus alia, quam in commentariis Acad. Paris. ad annum 1733 protulit D. Bouguer; & qua ex tribus longitudinum, & latitudinum observationibus non multum a se remotis determinat arcum sectionis conicæ finitimum rectæ lineæ, & descriptum Keplerianis legibus a cometa, ejusque a terra, & a sole distantiam, ac ex ejus positione, quæ haberi potest pro positione tangentis, ex ejus longitudine, quæ celeritatem determinat, & ex distantia a sole, definit speciem, & magnitudinem sectionis conicæ ipsius. In elegantissima problematis constructione, quam adhibet, si arcus a terra descriptus sit ita exiguus, ut etiam ipse haberi possit pro recta motu æquabili descripta; problematis solutio fit irrita: nam in ejus figura (*) in eo casu punctum 2A cadit in K, & cum AK ad KL sit

(*) Fuisset prorsus inutile exhibere hic ejus figuram, nisi & omnis constructio ipsius, & demonstratio repeteretur. Qui velit & vitium ejus methodi, & vim sit in ratione temporum, abit L in 3A, adeoque & M, & N eodem abeunt, & punctum Q pariter in K, congruentibus ita punctis 2A, & Q, ex quibus ducebantur rectæ, quarum concursus debebat determinare punctum 2B. Si arcus augeatur; dum ratio segmentorum chordæ arcus terrestris recedit a ratione temporum; recedit etiam ratio segmentorum chordæ arcus cometici, ac proinde determinatio a vera abludit plurimum. Hinc nihil mirum, quod in cometa anni 1730 orbitam invenerit pro parabolica hyperbolicam, & quidem etiam remotissimam, distantiâ plus æquo productâ, & celeritate plus æquo auctâ. Magnitudo chordæ, vel arcus descripti non est hisce methodis investiganda (*), sed in ipsa investigatione eorum magnitudo quoque involvenda, sive nexus, quem magnitudo habet cum distantia: sunt enim in parabolis celeritates in ratione reciproca subduplicata distantiarum a sole (per coroll. *6* prop. *16* libri 1 Princ. Newtoni); & id quidem ipse Newtonus præstat.

28. Eum nexum adhibentes invenimus distantias illas TD, *td* (fig. 2) posse obtineri æquatione gradus sexti ex tribus observationibus non multum inter se remotis ita, ut arcus a terra, & a cometa descriptus non multum abludat a recta linea, & motus ab uniformi, ac eæ æqualibus circiter a se invicem intervallis distent, sed præmittenda sunt bina lemmata.

29. *Lemma* 1. *Si in quodam triangulo bina latera sint* $= p$, *&* =

---

vim hujus loci hujusce nostræ Dissertationis perspicere, habeat simul præ manibus hunc locum ipsum, & eum Tomum Monumentorum Academiæ Parisiensis, in quo perlegat ipsam Bouguerii Dissertationem, & conferat cum iis, quæ hìc proponuntur, ac demonstrantur. Videbit autem, quantum illa ejus fallacissima methodus differat a mea hìc primo adumbrata, tum uberius exposita in Opusculo hujus Voluminis primo.

(*) Id quidem non licet ubi agitur de orbitis cometarum, ut hìc patet: licuit autem in investiganda orbita novi planetæ detecti duobus ab hinc annis ab Herchelio in Anglia, ut patebit in secunda parte hujus Voluminis, quia arcus ejus orbitæ requirentis plures quam octoginta annos pro periodo integra, respondens anno etiam integro est quam proxime rectilineus, dum terra eo tempore non arcum rectilineum ad sensum, sed circulum totum percurrit.

& = q, & co-sinus anguli intercepti ad radium = 1 sit = m, erit quadratum tertii lateris = $pp + qq - 2mpq$.

Nam si in fig. 3 sit TS = p, TC = q, co-sinus anguli T = m, & demittatur CG perpendicularis ad ST; erit GT = mq, & per prop. 12 lib. 2 Euclidis (*) erit $SC^2 = TS^2 + TC^2 - 2ST \times TG = pp + qq - 2mpq$. Q. E. D.

30. *Lemma 2. Si fuerint tria loca terræ* T, B, *t proxime in directum, & tria loca cometæ reducta ad eclipticam* D, G, *d*; *erit distantia media* BG *ad utramvis extremam* TD *in ratione composita ex directa temporis inter ipsam, & alteram extremam td ad tempus inter binas extremas, & sinus motus in longitudinem e terra visi debiti tempori secundo ad sinum debiti primo.*

Demonstratur. Cum sint (fig. 2) rectæ TN, TO parallelæ rectis BG, *td*, & æquales juxta num. 24; erunt anguli DTN, DTO ii motus in longitudinem spectati e terra, & erit TN ad TD, ut BG ad eandem TD: rectæ autem DO, NO sunt ut D*d*, DG, sive ut eorum temporum intervalla. Est TN ad TD, in ratione composita ex rationibus TN ad NO, NO ad OD, OD ad TD. Prima est ratio sinus TON ad NTO, secunda temporis inter observationem mediam, & extremam *td* ad tempus inter extremas, tertia sinus OTD ad sinum ejusdem anguli TOD. Quare iis rationibus compositis, remanent ob sinum auguli TON, vel

(*) In prima hujus Dissertationis impressione pro quadratis rectarum SC, TS, TC, posui SCq, TSq, TCq, adjecto sæpe etiam puncto post q: vitandæ confusionis causa postea adhibui exponentes scribendo $\overline{SC}^2$, vel etiam tantummodo SC^2, ubi patet ex contextu, binas litteras S, C non indicare binas quantitates, sed unicam lineam. Mutationes plures ejus generis in hac reimpressione adhibeo, ut in scribendis fractionibus per lineolam positam infra numeratorem, & supra denominatorem, quas ibi designaveram per duo puncta posita post illum, & ante hunc, quod est commodius pro impressione, sed sæpe parit ambiguitatem, potissimum ubi proportio designatur per duo puncta interposita inter binos singularum rationum terminos: ea discrimina hic semel indicanda censui, ne primo aspectu videantur inductæ hic mutationes pertinentes ad rem, non ad scribendi formam: mutatiunculæ occurrent etiam nonnullæ, quæ corrigant scriptionis, vel impressionis errorculos, vel textum reddant clariorem.

vel TOD communem solæ rationes temporum eorum, & sinuum eorum motuum, quæ in lemmate exponuntur, nimirum ratio temporis inter observationes G, & d ad tempus inter D, & d; & sinus anguli DTO motus debiti secundo tempori ad sinum NTO motus debiti primo. Q. E. D.

31. Referat jam in fig. 1 C primo quidem locum debitum observationi intermediæ, & fiat TD $= z$, secans latitudinis geocentricæ DTC $= g$ ad radium $= 1$, co-sinus anguli CTS, qui datur, cum sit distantia loci solis a loco cometæ visa e terra in circulo sphæræ maximo $= s$; distantia ST pariter data $= d$. Erit TC $= gz$. Ac in triangulo TCS per num. 29, posito d pro p, & gz pro q, ac s pro m, erit $CS^2 = dd + ggzz - 2dsgz$.

32. Referat deinde C locum primum, c locum tertium, & ratio BG ad TD in fig. 2, quæ datis temporibus, & longitudinum differentiis, datur per num. 30, sit ut 1 ad m, ratio autem ejusdem ad td sit 1 ad n, eritque in fig. 1 TD $= mz$, $td = nz$. Sit co-sinus anguli A (fig. 1), quem continent rectæ TD, td datæ $= r$, TA $= a$, tA $= b$, recta data ST $= c$, S$t = e$, tangentes latitudinum geocentricarum DTC, $dtc = h, l$, ut sint DC $= hmz$, $dc = lnz$, ductâque cI parallelâ dD, quæ abscindet a CD partem ID $= cd$, erit CI $= hmz - lnz$, seu posito $hm - ln = i$, erit IC $= iz$. Erunt autem AD $= a + mz$, A$d = b + nz$, & ob co-sinum A $= r$, substitutis iis valoribus pro p, q, & m in num. 29, erit $Dd^2 = aa + 2amz + mmzz + bb + 2bnz + nnzz - 2abr - 2anrz - 2bmrz - 2mnrzz = cI^2$. Addito communi $IC^2 = iizz$, & factis $mm + nn + ii - 2mnr = A$, $2am + 2bn - 2bmr - 2anr = B$, $aa + bb - 2abr = C$, erit $Cc^2 = Azz + Bz + C$.

33. Jam vero cometa in distantia mediocri terræ a sole percurreret singulis diebus partes 2432747 (*) earum, quarum distan-

(*) Si hi numeri non penitus congruant cum iis, qui eruerentur ex adhibitis in Opusculo I hujus Dissertationis, id provenit ex eo, quod tabulæ astronomicæ circa ipsum solis motum post Newtoni tempora redditæ multo accuratiores numeros continent nonnihil immutatos.

stantia ipsa continet 100000000 per cor. 3 prop. 40 lib. 3 Princ. Newt., & quovis alio dato tempore t, posita die $= 1$, percurreret $2432747t$. Multiplicetur hoc spatium per radicem ipsius distantiæ medioeris $= 10000$, & sit t tempus inter primam, ac tertiam observationem, & $24327470000t$, quod provenit, dicatur f: debebit ff æquari quadrato spatii Cc ducto in illam distantiam a sole, quam habebat circa medium arcum Cc, in illa nimirum observatione intermedia. Sunt enim quadrata celeritatum in ratione reciproca distantiarum in cometis (per coroll. 6 pr. 16 lib. 1 Princip.), ac proinde quadrata spatiorum eodem tempore descriptorum ducta in distantias æqualia. Erit igitur $(Azz + Bz + C) \times \sqrt{(ggzz - 2dsgz + dd)} = ff$. Hæc æquatio reducta tollendo irrationalitatem assurgit ad gradum sextum. Extractâ radice proximâ per notas methodos, habetur z, & habentur $TD = mz$, & $td = nz$. Q. E. F.

34. Duplici correctione (*) indiget hæc methodus in arcu aliquanto majore: 1°. ob curvitatem arcus orbitæ terrestris: 2°. ob inæqualitatem celeritatis, & curvitatem arcus cometæ. Sit in fig. 4 arcus terræ Tbt, arcus cometæ Dgd, recta ex loco medio b ducta ad solem S occurrat chordæ Tt, in B, & orbitæ iterum in s. Erit proxime TB ad Bt, ut primum temporis intervallum ad

(*) Quod pertinet ad correctiones, eæ multo commodiore, & accuratiore methodo exhibentur in eodem Opusculo hujus Voluminis primo, ubi motus fere accurate æquabilis, quem habet intersectio radii vectoris cum chorda ob arearum æquabilitatem, quem deinde deprehendi, multo melius ostendit, posse substitui motum æquabilem per chordam motui inæquali per arcum, excludit necessitatem correctionis respondentis inæqualitati celeritatis, ubi agitur de approximatione pro orbita parabolica, & exhibet rationem multo magis idoneam, & multo accuratiorem determinandi illam, quam ibi appellavi reductionem, & applicavi immediate post assumptam primâ positione distantiam curtatam secundam a terra. Nullius jam usus erunt ea, quæ hìc subjiciuntur eo pertinentia, nisi quod ex iis patet, me jam tum de hisce reductionibus cogitasse, & eas innuisse. Ubi agitur de investigatione delicatiore, ut de determinanda orbita elliptica cometæ, vel de novo planeta, occurrunt in hoc Volumine multa ad ejusmodi reductiones pertinentia multo aptiora, & accuratiora hisce hìc ante tot annos propositis, quæ tum mihi venerant in mentem.

ad secundum. Quare si inveniatur longitudo, quam cometa haberet, si spectaretur e B; primus error corrigeretur, adhibendo pro longitudine observata eam longitudinem. Oportet igitur invenire angulum BGb differentiam directionum bg, BG determinantium positiones (*).

35. Sit distantia mediocris terræ a sole $= a$, arcus descriptus uno die sit $= c$, qui est proxime unius gradus, tempus per $Tb = R$, per $bt = r$ in diebus, & diei partibus, eritque Tb, seu $TB = cR$, bt seu $Bt = cr$, $Bs = 2a$, $Bb = \frac{ccRr}{2a}$. Sinus anguli SbG differentiæ longitudinum solis, & cometæ sit n: erit BG, vel $bG = z : Bb = \frac{ccRr}{2a} :: sin.bBG = n$ (**) $: sin.BGb = \frac{nccRr}{2az}$. Cum in ea formula posito $a = 1$, sit $c = 0{,}01720212$ (per cor. 3 prop. 40 *lib.* 3 Prin.) habitâ z proximâ veræ distantiæ, habebitur sinus correctionis, qui per logarithmos expeditissime invenietur. Immo quoniam c est proxime unus ejus circuli gradus, & sinus anguli exigui BGb est æqualis arcui; erit $2z$ ad $ncRr$, ut unus gradus c ad angulum quæsitum. Is autem semper subducendus est ab angulo GbS differentiâ longitudinum solis, & cometæ in secunda observatione, ut habeatur eadem differentia primo correcta.

36. Porro si ex inventis TD, td inveniatur orbita, & per methodos, quas jam innuemus, inveniatur longitudo debita tempori secundæ observationis, quam exprimat directio bE; ejus differentia EbG ab observata bG, addatur longitudini primo corre-

 ctæ,

(*) Multo melius, & accuratius res perficitur in Opusculo hujus Voluminis toties indicato, in cujus methodo ducenda esset recta Sg, & ponenda littera G in ejus intersectione cum chorda Dd: tum motus punctorum B, & G evaderet quam proxime æquabilis, & longitudini observatæ bg substituenda longitudo BG, quod ibi præstatur adhibitâ reductione, pro cujus valore invenitur ibi formula admodum simplex, quæ pendet ab utraque sagitta Bb, Gg. Sed hæc sunt prima meæ methodi vetera tentamina ad multo meliorem formam redacta posterius, & ad facilem usum accommodata.

(**) Quia sinus bBG est idem ac sinus SBG, qui angulus potest assumi pro æquali SbG.

ctæ, si inventa erat major quam observata, secus auferatur; & habebitur secunda correctio debita inæqualitati motus cometæ. Si enim cometa, qui in hypothesi motus rectilinei, & uniformis ponebatur visus in G, in hypothesi motus difformis, cui hæc inventio innititur, inventus est in E; ut in hypothesi motus difformis habeatur in G, oportet in hypothesi motus uniformis, ponatur alicubi in *e* fere in eadem distantia a G; & rectæ EG, *e*G proxime æquales spectabuntur e punctis *b*, B proximis sub angulis proxime æqualibus. Terra igitur mota uniformiter, & cometa pariter uniformiter a TD, ad *td*, in secunda observatione fuissent in B*e*; ac proinde duplici illâ correctione adhibitâ longitudini mediæ observationis, habebitur ratio *z* ad TD, & ad *td* jam correctior, & veræ multo proximior, sive novi valores *m*, & *n* adhibiti num. 31 correctiores, quibus substitutis in æquatione inventa jam multo correctior *z*, & veræ proxima proveniet: & si distantia cometæ *z*, sit utcumque cognita; poterit initio prima correctio fieri: potest utcunque cognosci distantia ex positione ad solem, & lumine (*). Semel autem inventâ illa prima correctione, si calculus esset iterandus, satis est eam augere, vel minuere in ratione reciproca distantiæ *z*, quæ sola mutatur in formula inventa.

37. Hæc methodus multa communia habet cum methodo proposita a D. de Chescaux (**) in eo Opusculo, quo postremi cometæ observationes protulit duobus ab hinc annis suas, Cassia-

(*) In eodem toties indicato hujus Voluminis Opusculo habetur methodus multo tutior pro ferendo primo judicio de distantia chordæ D*d* a chorda T*t*, & vero etiam ejus positione, ope marginis rectilinei frustuli chartæ applicati primo ad chordam TB*t*, notatis in eo iis tribus punctis, tum translati inter rectas *TD*, *td* certa lege ibi exposita, quo motu ad veram distantiam deprehendendam maxime acceditur.

(**) Omnis hæc comparatio methodi hìc propositæ cum methodo adhibitâ ab Auctore hìc nominato exigeret integrum fere ipsius Opusculum, & multo minus idonea est post mutationes, quibus meam ego methodum perfeci in Opusculo hujus Voluminis toties indicato, quæ nunc ab ejus methodo multo magis distat. Eam comparationem omisissem, nisi mihi proposuissem integram ejus Dissertationis reimpressionem uti primo prodiit.

nianas, Calandrinianas. Sed ipse distantiam TC (fig. 1) assumit utcumque ad arbitrium: ejus rationem ad *tc* ponit eam, quæ componitur ex ratione directa temporis inter primam observationem, & secundam, ad tempus inter hanc, & tertiam, & ex reciproca motus in longitudinem debiti primo ad motum debitum secundo tempori, quod theorema demonstrari etiam potest eadem methodo, qua nostrum demonstravimus lemma num. 30 (*). Inventâ ita *tc*, quærit rectas SC, *Sc*, C*c*, (fig. 1) tum inquirit in aream sectoris CS*c* divisam per radicem lateris recti 4SP, cujus logarithmum affirmat haberi, si logarithmo C*c* addatur $\frac{1}{4} log. SC + \frac{1}{4} log. Sc - log. 4$. Hæc area debet æquari areæ a terra eodem tempore descriptæ divisæ per radicem sui lateris recti, per legem Kepleri tertiam. Si æqualis non sit; notat differentiam logarithmorum, tum aliam assumit distantiam TC, & eâdem methodo iterum quærit, an logarithmi ii æquentur, ac per regulam falsæ positionis per attentationem quærit illam TC, quæ satisfaciat. Correctiones easdem adhibet, sed primam sub initium ipsum præscribit adhibendam, assumptâ distantiâ cometæ a terra tanquam æquali distantiæ a sole, secundam sub finem, inventâ jam ea TC, quæ logarithmos illos æquales præstet.

38. Nos illam ipsam distantiam TC definimus molestiore quidem æquatione, sed tamen determinata: utimur ipsis distantiis TD, *td*, pro quibus demonstratio lemmatis, ac theorematis est facilior, & immediate fluit ex longitudinum, & temporum differentiis, ex quibus etiam aliquanto facilius inveniuntur SC, *Sc*, C*c*, quam ex ipsis TC, *tc*, quanquam exiguum sane est id lucrum: utimur non comparatione areæ cum area telluris, sed celeritatis cum ejus celeritate, quæ & facilius demonstratur, & simplicior etiam in ejus methodo esset nonnihil. Nam inventis SC, *Sc*, C*c*, statim patet, C*c* describi celeritate debita cuidam distantiæ mediæ inter SC, *Sc*, quæ potest sumi pro $\sqrt{SC \times Sc}$.

 Qua-

(*) Verum ea ratio accedit utique plurimum ad accuratam, si adhibeantur distantiæ curtatæ TD, *td*, quæ adhibitis distantiis integris TC, *tc* recedit ab ipsa multo magis, & nonnunquam enormiter.

Quare erit Cc ducta in radicem illius mediæ, sive $Cc \times \sqrt[4]{SC} \times Sc$ æqualis illi quantitati f erutæ num. 32, ac proinde $log.Cc + \frac{1}{4}log.SC + \frac{1}{4}log.Sc = log.f$. Quæ demonstratio est expeditissima, & ubi non est semper demendum $log.4$, quanquam eam perpetuam subtractionem poterat etiam ipse vitare facile. Demum expeditiorem primæ correctionis formulam habemus, quæ per logarithmos immediate, & facile eruitur; nam ipse & longiore ambitu utitur, & subtractionem adhibet in media operatione, qua fit, ut immediate per logarithmos ea correctio non habeatur: præterea illud minus nobis arridet, quod in ea correctione investiganda ponat distantiam cometæ a terra æqualem distantiæ solis; posset enim eodem eam jure prorsus omittere; cum ex ea positione possit & duplo, & triplo major, vel minor debitâ obvenire (*).

39. Et hac quidem methodo inveniri possunt binæ illæ distantiæ TD, *td* ex tribus observationibus proximis; & quidem proximæ distantiis veris. At ex tribus observationibus quibuscunque possunt eædem determinari sine ulla attentatione, aut approximatione per solam Algebram finitam Cartesianam. Verum æquatio, quæ inde proflueret, esset tam alti gradus, ut solutio in praxi nullius usus futura sit. Adhuc tamen eam exercendæ Geometriæ gratia exponemus, ostendendo quo pacto ad æquationem deveniri possit. Præmittenda sunt tamen duo lemmata.

40. *Lemma* I. *Si rectâ* SP (fig. 5) *productâ in* B, *ut sit* PB = PS, *ducantur* BH *ipsi perpendicularis*, & *ch*, CH *eidem parallelæ*, *usque ad hanc*, *erit sector parabolicus* CS*c subtriplus areæ rectilineæ* HCS*ch*.

41. Nam ex puncto A infinite proximo ipsi C ductâ AS, & AE normali ad BH, erunt CS, CH, & AS, AE, ac *c*S, *ch* æquales inter se per ipsam Hospitalii definitionem parabolæ. Quare

(*) In eodem Opusculo hujus Voluminis demonstravi, in casu distantiarum cometæ a sole, & a terra æqualium in secunda observatione correctionem ipsam evanescere, quæ evanescit etiam si in secunda observatione cometa sit vel in conjunctione cum sole, vel in oppositione.

re si ducatur AN parallela BH, & arculus An centro S, qui potest haberi pro recta ipsi SC perpendiculari, erit & CN $=$ Cn, ac ob basim quoque CA communem triangulis CNA, CnA rectangulis ad N & n, erunt & AN, An æquales, ac proinde sector ASn, qui æquatur producto ex dimidio An, & AS, dimidius rectanguli AH producti ex AN, & AE. Idem valet in omnibus sectoribus, si continuentur usque ad c, & trilinea nAC, NAC infinite parva respectu ASn, AH contemni possunt. Ergo sector parabolicus CSc erit dimidius quadrilinei parabolici CHhc, & proinde idem sector subtriplus areæ totius HCSch. Q. E. D.

42. *Lemma 2. Datis analyticè* Sc, cC, SC, *datur analyticè & area* CSc, *& latus rectum quadruplum* SP.

Recta ipsi BH parallela ducta per c occurrat rectis SB, CH in o & M, & sint Sc $= ch = x$, SC $=$ CH $= x + 2y$, Cc $=$ z, erit CM $= 2y$, cM $= \sqrt{(zz - 4yy)}$, rectangulum cH $=$ $x\sqrt{(zz - 4yy)}$, triangulum CcM $= y\sqrt{(zz - 4yy)}$: demissâ CI perpendiculari ad Sc, erit per prop. 12 lib. 2 Euclidis SI $=$ $\frac{(SC^2 + Sc^2 - Cc^2)}{2Sc}$, quæ proinde dabitur, & ob $CI^2 = SC^2 - SI^2$ datur IC, & area trianguli CSc dimidium productum ex Sc, & CI dabitur. Quare dabitur analyticè & tota area HCSch, & ejus triens, sive area sectoris CSc. Quod erat primum.

Sinus angulorum CcM, CcI ad radium $= 1$ sunt ex Trigonometria $\frac{CM}{Cc}$, $\frac{CI}{Cc}$, & cosinus $\frac{cM}{Cc}$, $\frac{cI}{Cc}$, sinus autem totius ScM habetur, si alterius partis sinus ducatur in cosinum alterius, & vice versa, ac productorum capiatur summa. Quare dabitur etiam is sinus analyticè, qui cum sit idem ac sinus Sco, si is ducatur in Sc, exhibebit So, cui addita oB $= ch =$ Sc, habebitur SB dupla SP, & dimidia lateris recti, quod proinde innotescet.

43. *Probl. Observatis tribus cometæ locis, invenire parabolam a cometa descriptam legibus Keplerianis.*

Sint bina e locis observatis in fig. 1 C, c, & dicatur AT $=$ a, At $= b$, TD $= x$, $td = y$, cosinus anguli A $= s$ ad radium

dium $= 1$, ac proinde per num. 29 in triangulo ADd posito $a + x$, pro p, & $b + y$ pro q, ac s pro m, erit $Dd = aa + 2ax + xx + bb + 2by + yy - 2sab - 2say - 2sbx - 2sxy$; positâ præterea tangente latitudinis $CTD = h$, $ctd = l$, erit $DC = hx$, $dc = ly$, ac proinde $CI = hx - ly$, cujus quadratum $hhxx - 2hlxy + llyy$ additum quadrato Dd, seu cI exhibebit quadratum Cc, quod proinde dabitur analyticè. Eodem pacto si ponatur secans anguli $CTD = d$, & anguli $ctd = e$, erit $TC = dx$, $tc = ey$, ac posito cosinu anguli $CTS = f$, $ctS = g$, $TS = m$, $tS = n$, erit in triangulo CTS per numer. 29 $SC^2 = mm + ddxx - 2mdfx$, & pariter $Sc^2 = nn + eeyy - 2engy$.

44. Dabuntur hoc pacto analyticè SC, Sc, Cc. Quare per numer. 42 dabitur analyticè & area sectoris CSc, & latus rectum quadruplum SP, quod dicatur $4u$. Jam vero per corol. 4 prop. 40 lib. 3 Princip. Newtoni, cometa gyrans in parabola, cujus latus rectum quadruplum distantiæ mediocris terræ a sole, positâ ipsâ distantiâ partium 10000, earum partium quadratarum perficit singulis diebus $1216373\frac{1}{2}$. Si ea area dicatur r, & tempus inter binas observationes in diebus, & partibus diei t; erit area, quam eo tempore in ea parabola describeret cometa $= rt$, & per idem corol. Newtoni erit ut latus rectum 40000, ad latus rectum parabolæ $CcP = 4u$, ita quadratum areæ illius $rrtt$, ad quadratum sectoris CSc descripti tempore t in parabola CcP, quod quadratum erit $= \frac{rrttu}{10000}$. Si hic valor ponatur æqualis valori quadrato areæ sectoris inventæ ex lateribus SC, Sc, Cc; habebitur una æquatio continens x, & y.

45. Eodem modo si tertia distantia a terra loci cometæ reducti ad eclipticam dicatur z, habebitur, ex comparatione secundæ observationis cum tertia, secunda æquatio continens y, & z. Nondum autem assumptum erit, jacere tria loca cometæ in eodem plano cum sole, nec parabolam, quæ transit per prima duo puncta, esse eandem cum ea, quæ transit per postrema duo, ac proinde nondum determinata erit area sectoris parabolæ transeuntis

tis per 1^{um}, & 3^{um} locum. Quodlibet ex his reliqua secum trahit, & quodlibet potest exhibere tertiam æquationem. Sic area parabolæ transeuntis per 1^{um}, & 3^{um} locum dabit eâdem methodo æquationem constantem ex x, & z, vel æqualitas laterum rectorum inventorum in prioribus parabolis æquationem constantem ex x, y, & z. Habitis tribus æquationibus, & tribus incognitis, potest æquatio reduci ad unicam continentem solam x, ex qua innotescet y & z, ac reliqua omnia, quæ parabolam determinant. Q. E. F.

46. Verum æquatio, ut diximus, tam est alta, & implexa, ut hæc solutio nullum alium usum habeat, hoc dempto, quod innotescat methodus reducendi problema ad veram suam sedem.

47. Hæc quidem ad primi illius problematis solutionem pertinent de orbita determinanda per aliquot observationes: secundum, quo ex orbita determinata locus cometæ quæritur ad datum tempus, pronum est, & expeditum, ac sive constructione uti libeat, nihil sane elegantius proferri potest eo, quod Newtonus protulit Princ. lib. 1, prop. 30 (*); seu calculo expediendum sit, nihil pariter simplicius, aut elegantius Halleyana tabula, quæ prostat etiam ad calcem Astronomiæ Davidis Gregorii, quæ licet unica, omnium tamen cometarum motibus computandis, quarum orbitæ elementa inventa sint, methodum exhibet sane expeditissimam.

48. Et hæc quidem de theoria parabolica: jam aliquid de theoriæ consensu cum phænomenis, & de causis physicis motuum brevissime dicendum. Et quidem, quod ad consensum attinet, is tantus est, ut major desiderari omnino non possit. Licet cometarum motus sint prima fronte maxime implexi; adhuc tamen loca ex hac theoria deducta cum observatis mirum in modum consentiunt. Id in eo maxime cometa innotuit, qui anno 1680 ad solem descendit, Novembri mense, ac Decembri, Januario, Februa-

(*) Hanc in Opusculo hujus Voluminis fuse evolvi, exemplis etiam adjectis, petitam a motu rectilineo, & uniformi centri circuli transeuntis per focum, perihelium, & locum cometæ.

bruario, & Martio ascendit iterum, caudâ in immensum protensâ. Qui quidem a multis pro duplici cometa habitus, ubi per hanc theoriam innotuit, utriusque loca ad eandem parabolam pertinuisse ita, ut cum tanto phænomenorum discrimine, cum tanta motuum inæqualitate loca per calculum eruta ab observatis nunquam discreparent magis, quam ipsæ observationes paterentur crassiore aliquando methodo peractæ, tum vero & ipse pro uno, eodemque agnitus est, & theoria ipsa ex tanto illo consensu plurimum comprobata. Descripsit enim is cometa e terra visus signa 9 motu maxime inæquali, & celeritate jam imminuta, jam aucta, jam iterum imminuta per vices. Porro, ut habet Newtonus ipse Princ. lib. 3 pag. 464 editionis 2, *theoria, quæ motui tam inæquabili per majorem cæli partem tam probe respondet, quæque easdem observat leges, quas theoria planetarum, (& quidem tam arcte inter se connexas) & cum accuratis observationibus astronomicis accurate congruit, non potest non esse vera.* Nam hypotheses quidem si veræ non sint, eo difficilius cum phænomenis congruunt, quo plures nexus habent, & arctius phænomena ipsa inter se invicem conjungunt.

49. Quid, quod Halleyus undique conquisitis Astronomorum observationibus, cometas 24, nimirum omnes eos, quorum loca rite determinata fuerant, iisdem legibus omnes moveri ostendit, & infinito propemodum calculo singulorum orbitas definivit, cum phænomenis apprime consentientes? Idem alii subinde in posterioribus cometis præstiterunt. Postremi cometæ orbitam hìc Romæ P. Christophorus Maire Soc. nostræ Collegii Anglicani Rector, vir in omni litterarum genere excultissimus, & summus Astronomus (*) definivit, ac edidit, cum comparatione instituta inter loca observata, ac ex theoria eruta, ubi error duorum minuto-

(*) Is post annos quatuor meus fuit comes in dimetiendis Meridiani gradibus, & corrigenda Status Ecclesiastici mappa geographica. De summa ipsius in rebus astronomicis scientia hæc ego habeo deinde in meo poemate de Eclipsibus jam ter edito

Mairius Astrorum cultor, quem prima receptum
Diva sinu mille Uranie dans oscula fovit,
Atque altum erudiit, perque ardua sidera vexit.

torum occurrit ter tantum in longitudinem, in latitudinem bis, ac plerumque intra paucula secunda continetur consensu, qui in planetis ipsis desiderari vix possit.

50. Nostræ observationes, quarum unam ibidem ipse edidit, cum iis æque consentiunt. Eas hìc non exhibemus, tum quod cum pleræque institutæ sint per comparationem cum minoribus stellulis, harum loca determinanda simul hìc essent, & iconographia etiam proponenda, tum quia orbitâ jam ab aliis determinatâ minoris momenti sunt, nec ullius usus, præter novum consensum, quem affirmamus, novum theoriæ comprobandæ suffragium. Edemus olim cum aliis nostris observationibus astronomicis, illis tantum hìc modo commemoratis, quæ majoris momenti videbuntur, aut novi aliquid continebunt. Sunt autem orbitæ determinationes hujusmodi. Nodus ascendens in Tauri gr. 15 min. 51 sec. 0: inclinatio orbitæ gr. 47 min. 18 sec. 0: perihelium in libræ gr. 17 min. 17 sec. 30: distantia perihelia a sole partium 22156, quarum distantia mediocris terræ a sole = 100000: appulsus ad perihelium hìc Romæ die 1 Martii hor. 8 min. 49 sec. 30. Motus vero directus.

51. Ex hisce elementis, quicunque ejusdem cometæ accuratas observationes habet, ad eadem tempora computando loca per Halleyanam tabulam, consensum ipsum statim deprehendet. Sane observationes nonnullæ huc transmissæ Parisiis a summo viro, nobisque amicissimo, P. Francisco Jaquier tum ibi agente ad summum pariter virum P. Thomam le Seur (*), quorum uterque tam præclaris Newtonianis Commentariis in universa Rep. litteraria notissimus, æque ac nostræ Romanæ conspirant. Idem de suis Clarissimus Eustachius Zanottus & in litteris ad nos datis, & publico documento in observationibus ejusdem cometæ a se editis testatum voluit, ubi expositis suis in orbita exquirenda laboribus, sic habet vocibus ipsis summa fide latine redditis: *interea editæ fuerunt observationes Romæ habitæ in Collegio Anglicano a celeberrimo Patre Christophoro Maire, qui præterea calculos sub-*

(*) Solus prior vivit adhuc, & viget Romæ, pluribus aliis operibus illustris.

duxerat ex Newtoniana theoria, & hi observationibus ita respondent, ut nullus ulterioribus perquisitionibus superesse locus videatur. Tum æqualem suarum observationum consensum exhibet cum iis locis, quæ ex iisdem elementis proveniunt. Eadem elementa vix quidquam ad sensum discrepant ab iis, quæ ex suis observationibus primo ipso paucorum dierum cursu definito eruit D. De Cheseaux, & jam tum una cum reliquo cursu prænunciato ad amicos transmisit, ac postea per postremas observationes correcta edidit, si Perihelii locum demas, in quo discrepant aliquanto.

52. Illud aliquando contigit, ut in majoribus a sole distantiis orbita, constantis alicujus, licet exiguæ, observationum aberrationis indicio, ad axem accedat, & a parabola in ellipsim degeneret. Sic cometa anni 1680, & 1681 accuratius aliquanto ex Halleyi computatione orbitæ ellipticæ, licet admodum oblongæ, satisfecit, quam parabolicæ, & ex tertia Kepleri lege deduxit Halleyus ipse, ejus periodicum tempus esse annorum circiter 500. At eæ conjecturæ sunt perquam incertæ, cum ob tantam affinitatem arcus parabolici atque elliptici, & infinitorum ellipticorum inter se, quam num. 5 ostendimus, minimus observationis error rem totam plurimum perturbet. De reditu cum solidiore fundamento affirmari aliquid potest ex orbitæ descriptæ a pluribus cometis æqualitate, & æqualibus temporum intervallis. Si enim pluribus vicibus per æqualia intervalla temporum eandem proxime orbitam cometa percurrerit; erit id quidem indicio, cometam illum unum, eundemque esse, potissimum si cætera quoque consentiant, ut magnitudo nuclei, quæ deducitur ex diametro apparente, ac distantia, & color capitis, & caudæ.

53. Hujusmodi fortasse sunt cometæ annorum 1456, 1531, 1607, 1682, ut jam olim Halleyus animadvertit. Primi observationes accuratæ nullæ extant: reliquorum orbitas parum admodum abludere a se invicem, patet eas in Halleyana tabula comparanti; nusquam enim discrimen deprehenditur binorum graduum, & plerumque intra minuta aliquot continetur. Intervalla autem temporum differunt quidem nonnihil, sed nec ita multum: sunt enim annorum 75, vel 76. Fieri quidem potest, ut plures orbi-

tæ

tæ in apheliis a se invicem plurimum recedant ; &, ut vidimus, in periheliis nihil etiam ad sensum discrepent. At binos ejusmodi orbes a binis cometis describi, videtur minus vero simile. Videntur enim idcirco in omnes cæli plagas cometæ reliqui fere omnes quaquaversus diffusi, & in diversis distantiis nodos habere; ne possent unquam nimis prope ad se invicem accedere, & mutua gravitatis vi motus suos turbare plus æquo. Ab ipsa autem mutua gravitate exiguum illud orbitarum, & majus aliquanto temporum periodicorum discrimen oriri facile potuit (*).

54. Nam horum motuum causam esse gravitatem illam universalem a Newtono detectam, qua singula corpora in alia singula gravitent in ratione reciproca duplicata distantiarum, videtur omnino jam certum; cum ex ea tam multa phænomena deducantur eorum, quæ cernimus, & ipsa a phænomenis naturæ satis solida ratiocinatione deducatur. Nam cometarum, & planetarum motus oriri a gravitate ejusmodi in solem, ex ipsa forma orbium, qui sunt sectiones conicæ habentes pro foco solem, & areas clausas radiis habentibus ipsum solem pro centro temporibus proportionales, directe deducitur: quod a Newtono primum detectum, & ex generalioribus formulis deductum, ita in alia Dissertatione *de motu corporis attracti in centrum immobile viribus decrescentibus in ratione reciproca duplicata distantiarum*, ex ipsa conicarum sectionum definitione fere immediate deduximus, ut eadem hic iteranda non sint. Illud satis erit innuere, corpora omnia

 hu-

(*) Is ipse cometa regressus anno 1758 & totam hanc Newtonianam cometarum theoriam, & hasce perturbationes ortas a planetarum attractionibus ita confirmavit, ut nemo jam Astronomiæ peritus de iis dubitare possit. Clairautius computatis aberrationibus ortis ab actione Jovis, & Saturni, quantitatem ipsam immensa calculorum arithmeticorum serie definivit, ac retardationem reditus per menses 20 prænunciavit in antecessum, illud adjiciens, dubium superesse ob exiguos quosdam serierum terminos nondum calculis submissos, & omissas minorum planetarum actiones, de uno ejus temporis mense, quæ tamen totius temporis periodici annorum 75 non est nisi pars $\frac{1}{900}$: verum sibi omnino constare, discrimen ab enunciata mensium 20 retardatione non fore majus uno mense, quod vaticinium eventus cum summa omnium admiratione comprobavit.

hujusmodi gravitate prædita, & projecta secundum directionem per centrum virium non transeuntem, debere describere conicam sectionem, ellipsim, parabolam, vel hyperbolam cum Keplerianis legibus, prout celeritas projectionis fuerit minor, æqualis, vel major respectu ejus, quam idem corpus ibidem, ubi projicitur, sibi relictum, illâ gravitate, perpetuo manente, & motum perpetuo accelerante uniformiter, acquireret in descensu usque ad centrum, quod erit sectionis descriptæ focus. Et vice versa corpora, quæ cum Keplerianis legibus describunt sectiones conicas, præter motum per vim inertiæ perpetuo conservatum impelli perpetuo ipsum centrum versus, vel attrahi, vel tendere viribus, quæ sint in ratione reciproca duplicata distantiarum ab ipso illo foco.

55. Ex hac secunda parte Newtonus per analysim deduxit, planetas omnes, quos legibus Keplerianis circa solem in foco positum moveri, compertum erat, gravitare in ipsum ubique in ratione reciproca duplicata distantiarum, eandemque gravitatem per analogiam naturæ transferens in cometas deduxit, eos quoque moveri in sectionibus conicis. Quoniam autem videbat jam magis ad solem accedere, jam recedere plurimum cum ex phænomenis luminis, tum ex eo, quod exiguo totius revolutionis tempore conspicui essent; intulit, eorum orbitas esse maxime oblongas ita, ut pro parabolicis haberi possint: atque eo per analysim delatus, motus eorum omnes per synthesim in orbibus parabolicis explicavit, definivitque, consentientibus phænomenis, ut vidimus, & theoriam ipsam demonstrantibus.

56. Halleyanus cometa circa annum hujus sæculi 58 redire posset, si idem fuit (*). At posset nec fuisse idem, ut vidimus (licet id minus vero simile), & idem fuisse, ac non regredi ad id tempus, & regredi, sed inobservatus. Quoniam enim celeritas in orbe elliptico nimis oblongo nihil ad sensum differt a celeritate, cum qua in parabolam mutatur orbis; exiguis etiam planetarum actionibus circa perihelia, & remotiorum quoque come-

ta-

(*) Rediit utique juxta adnotationem ad num. 54., atque id post retardationem interea submissam calculo a summo Geometra Clairautio, & publice prænunciatam in antecessum.

tarum circa aphelia potest ea ita augeri, ut axis etiam in infinitum excrescat. Quanquam huic etiam malo Sapientissimus Naturæ Opifex paravit remedium nimiam brevitatem moræ in perihelia, & distantiam a se invicem in apheliis, quibus actiones virium plurimum attenuantur. Potest autem etiam ita cometa idem, potissimum is, cujus perihelium soli proximum, circa solem transire, ut tellure per id tempus versante ex parte perihelii circa axem orbitæ productum, sub solis radiis, & in descensu delitescat, & in ascensu.

57. Duo hic notanda: primò ex mutua gravitate fieri, ut etiam sol debeat moveri circa commune gravitatis centrum suum, & cometæ; quin immo etiam totum planetarium systema moveri circa centrum gravitatis commune. Inde, cometâ procul versante, nulla sensibilis perturbatio oritur motuum relativorum, cum vires æquales ad sensum, & parallelæ, ut in eo casu sunt, motus respectivos ad sensum non turbent, sed totum systema æque promoveant. Sed eo accedente, & jam inter planetas versante, horum motus perturbari nonnihil necesse est, ut & ex propriis mutuis actionibus nonnihil perturbantur: & inde fortasse factum est, ut nullæ tabulæ astronomicæ, licet aliquandiu cum cælo utcumque conformes, longo annorum intervallo æque accuratæ perseverent. Quanquam huic malo & illa brevitas moræ in hac nostra vicinia medetur plurimum, & illa ipsa tot cometarum dispersio in omnes cæli plagas perturbationem minuit aliorum actione ab aliis oppositis compensata.

58. Secundò cavendum, ne statim pro æqualibus orbitis assumantur eæ, quæ e terra spectatæ eundem sub fixis cursum teneant, & eadem exhibeant apparentium motuum phænomena. Potest idem cometa eandem orbitæ partem percurrens spectari in partibus sphæræ cælestis maxime diversis, & arcus maxime diversi, & a se invicem remoti diversissimarum orbitarum spectari possunt in eadem cæli plaga e terra. Pendet nimirum semita cursus e terra spectati a positione orbitæ respectu terræ, & phænomena alia sunt, eâ versante ad partes perihelii, vel nodi, alia ad partes aphelii, & e regione lineæ nodorum. Eo errore

pro-

prolapsi sunt multi, & imprimis irritæ fuerunt Cassini conjecturæ, qui cometam anni 1577, & 1680 pro eodem haberi posse est arbitratus. Nam veræ eorum orbitæ fuerunt maxime diversæ: inclinationes enim orbitarum fuerunt proxime graduum 65, & 61: perihelia in gradu virginis 8, & sagittarii 27: nodi ascendentes in arietis 26, & capricorni 2: distantiæ a sole in periheliis 18432, & 612, qualium distantia mediocris terræ a sole est partium 100000. Unde apparet, nihil profecto habuisse commune eos cometas, nec unicum extitisse. Pariter cometæ annorum 1665, 1672, 1677, licet viam non adeo diversam iniisse visi sint, ut pro eodem haberi potuerint, orbitas tamen respectu spatii planetarii, & solis habuerant admodum diversas.

59. Hinc & Zodiaco quodam, si non omnes, plurimos tamen cometas contineri, Cassinus censuit, quem quidem iis expressit veluti versibus *Antinous*, *Pegasusque*, *Andromeda*, *Taurus*, *Orion*, *Procyon*, *atque Hydrus*, *Centaurus*, *Scorpius*, *Arcus*; cum tamen eorum orbitæ revera quascunque inclinationes habeant ad se invicem, & ad planum æquatoris solaris ita, ut media inter Halleyanas 24 parum abludat ab angulo semirecto, quod Bernoullius adnotavit. Et hic quidem idcirco planetas, censuit, eodem contineri, nec nimis lato Zodiaco, & omnes directo cursu moveri secundum ordinem signorum, quod eo paulatim delati sunt a solari fluido circa axem revoluto, a quo olim, licet motu fere insensibili, in illud ipsum planum sint transferendi. Nos autem, qui tantam præteritorum sæculorum seriem, quanta ad eam rem opus fuisset, ut sacris litteris adversantem respuimus, censemus potius id sapientissmo Supremi Opificis consilio tribuendum, qui cum eos intra ejusmodi fluidum moveri voluerit, ut resistentiam ex eo ortam, licet ob ejus tenuitatem exiguam, adhuc minueret, directionem motus ipsis dederit ab ejus directione parum admodum abludentem; cum cometas exiguo tempore in ea versaturos in omnes cæli plagas liberrime diffuderit potissimum ob finem supra expositum numero 56.

60. Hoc aliorum errore edocti, conjecturas omnes circa postremi hujus cometæ alias apparitiones, & tempus periodicum

pror-

prorsus respuimus. Eum D. De Cheseaux suspicatur, eundem esse cum alio, qui anno 1301 conspectus est, at ex conjecturis nimis levibus. Unde periodum annorum circiter $441\frac{1}{3}$, & orbitæ majorem axem determinat axe terrestris orbitæ vicibus 58 majorem. Nos quod ignoramus penitus, ignorari etiam penitus a nobis ingenue profitemur. Elementa orbitæ omnia ab iis, quas Halleyus computavit, & a posterioribus, quas quidem computatas novimus, plurimum discrepant; & inde videmur inferre posse, cometam hunc ab iis omnibus diversum esse. De aliis, quorum ignoratur cursus, judicium ferre non possumus.

61. Ad theoriæ consensum cum observationibus pertinet etiam diurnæ parallaxeos defectus. Hic nimirum eos post restitutam Astronomiam supra lunam evexit primus, & procul a nobis in planetarum regionem ablegavit. Postremus hic cometa, qui ad solem circiter duplo magis accessit in perihelio, quam Mercurius, & a terra semper plus distitit, quam Mercurius ipse perigeus, debuit parallaxim habere 15 secundis minorem, quo vix ullæ observationes pertingunt (*). Nos quidem eum pluribus vicibus diu conferentes cum iisdem fixis sibi proximis tum in maxima adhuc elevatione, tum horizonti proximum, nullum unquam parallaxeos vestigium invenimus, eo tantum deprehenso motu, qui ex motu ipso in orbita debebatur; & 5ª potissimum Februarii conferentes cum φ Pegasi pluribus vicibus in maxime diversis distantiis ab horizonte, semper deprehendimus mutationem ascensionis rectæ proportionalem intervallis temporum, & motui proprio uni diei debito, saltem intra paucorum secundorum limites, ultra quos observationibus ipsis non est fidendum.

62. Pertinent etiam lucis, & caudarum phænomena. At horum quoque, ut in cometis cæteris, sic in postremo hoc mirus sane cum Newtoniana theoria consensus. Cum adhuc a sole distaret plurimum ante medium Decembrem, nondum tertiæ magni-

(*) Pertingunt nunc utique multa observationum genera, post instrumenta astronomica cum observandi methodis multo magis perfecta post ipsam primam hujus Dissertationis editionem: sed cometarum observationes ob causas, quas in superioribus Voluminibus protuli, adhuc incertæ sunt intra limites multo etiam ampliores.

gnitudinis stellas æquabat, & caudam habebat exiguam solo telescopio conspicuam, ut testatur toties nominatus D. De Cheseaux. Nos hìc Romæ eum nonnisi 10 Januarii conspeximus. Jam tertiæ magnitudinis stellas lumine superaverat, & circa finem Januarii æquabat fixas magnitudinis primæ. Cauda interea augebatur in dies cum lumine, & ubi ad perihelium accessit, tantus exarsit, ut non solum Venerem longe superaverit splendore, sed diu post ortum solis, postremâ potissimum Februarii die, & prima Martii, a nobis nudo oculo conspectus sit. Erat tamen lumen ipsum nuclei pallescens ob densiorem atmosphæram, qua involvebatur.

63. Illud fortasse theoriæ contrarium videri possit, quod in eo phases, quæ in Venere, & Mercurio, ac luna apparent, nullæ sint visæ; licet sub exitum Februarii rectæ, quæ ipsum jungebant cum sole, & cum terra, debuerint angulum efficere satis obtusum, maximâ parte frontis a sole illustratæ nobis aversâ. Zanottus subdubitat vi hujus phænomeni, cometas vel solis lumine non illustrari, vel ita accendi, ut propriâ jam luce splendeant. At primum etiam ipse rejicit, cum a tanto luminis incremento in accessu ad solem, oppositum sane demonstretur: secundum omnino vero simile non est in eo cometa, qui ad solem accessit ad distantiam duplo tantum minorem distantiâ Mercurii, & lucis solaris vim sensit in ipso perihelio tantum 4 vicibus majorem quam Mercurius, & 25 vicibus circiter quam nos, idque tam brevi tempore, & eo ex frigidissimis locis delatus.

64. At nos phænomenum inde ortum existimamus, quod nucleum ipsum cometæ solidum nunquam aspicimus, sed densiorem illam atmosphæram, qua cingitur undequaque. Immensas esse cometarum atmosphæras patet. Nam nucleus ipse postremi cometæ nobis apparens atmosphæræ illius rarioris, per quam stellæ translucent, & quæ ad plagam soli oppositam in caudam desinit, ne sexagesimam quidem partem æquabat utrumque simul comparantibus per micrometrum saltem sub initium: nam deinde, ut mox dicemus ex ea parte, qua solem respicit, plurimum imminuta est atmosphæra. Majorem illam tantam atmosphæram, antequam ad solidum nucleum deveniat, excipit crassior sensim alia

ita

ita solis lumine illustrata, ut nucleum ipsum videre non sinat. Ea radiis solis imbuitur tota, & ob ingentem refractionem, & reflexiones plurimas umbra ad partem oppositam plurimum arctatur statim, immo & tota tollitur crepusculo perpetuo, & ita vivido, ut illud excedat lumen pluribus vicibus, quod nos interdiu in cubiculo habemus solis radiis impervio, reflexum a nostra tanto minore, & tenuiore atmosphæra. Secus accidit in planetis ob atmosphæram tanto minorem.

65. Hinc patet, nullam habere vim argumentum illud, quo Cassinus cometam anni *1680* idcirco supra solem extulit, quod in distantia graduum 22 pleno orbe effulserit, quod ipsum notaverat in cometa anni *1665*; licet David Gregorius lib. 5 prop. 1 eam distantiam certo inde deduci affirmet. Patet etiam, sulcos illos, qui quandoque in cauda conspecti sunt post nucleum, non fuisse nuclei ipsius umbram, quod, ut mox videbimus, multi falso crediderunt: quanquam ipsa etiam ipsorum & latitudo, & protensio satis evincit, non oriri eos ab umbra nuclei tam exigui, quæ in tanto majore solis vicinia, in hoc postremo cometa potissimum, etiam seclusâ refractione, vix debuit extendi ad 24 ipsius nuclei diametros circa perihelium: nam ibi diameter solis apparens e cometa fere quintuplo propiore, debuit esse quintuplo major nostrâ, nimirum graduum circiter $2\frac{1}{2}$, ac proinde nuclei diameter cum lateribus umbræ debuit continere triangulum isoscelium, cujus angulus diametro oppositus esset graduum $2\frac{1}{2}$ circiter, ut idcirco ejus trianguli altitudo debeat continere basim suam vicibus proxime 24. Eadem autem & in apicem desinens, & ad nostras plagas directa, ac transversim conspecta, seclusâ etiam reflexione, & refractione, vix tres aut quatuor diametros apparentes nuclei æquare videretur.

66. Hanc autem tantam atmosphæram videtur cometis omnibus tribuisse Naturæ Opifex, ob plurimos egregios usus, qui cum in tellure, & planetis multo minorem atmosphæram requirerent, multo illis minorem dedit. Inter alios quamplurimos usus, hos duos atmosphæra nostra habet sane præstantissimos. Vim radiorum solarium in iis locis, quæ ipsi immediate feriunt, retundit,

 & ca-

& calorem defert ad ea loca, quæ ipsis non exponuntur, & ad ea tempora, quibus sol latet. Nullam aliam ob causam radios solis tanto vehementiores sentimus per meridiem quam primo mane, per æstatem quam per hyemem, nisi quod breviorem viam percurrunt in atmosphæra, adeoque minus disperguntur in primis casibus quam in secundis. Sub zona torrida, ubi sol verticaliter imminet, ac proinde brevissimam in atmosphæra viam percurrit, immediatus radiorum impetus circa meridiem est prorsus intolerabilis cælo sereno, & puro. Quid si nulla adesset atmosphæra? Contra vero in locis, quæ umbram habent, nullus adesset calor, & per noctem gelu rigidissimo torperent omnia. Atmosphæra calorem excipiens dividit, ac conservat. Hinc multo minor interdiu, noctuque caloris, ac frigoris vicissitudo, & quidem etiam multo minor per hyemem ac per æstatem, in zonis temperatis ac torrida, atmosphærâ calorem transferente ab uno tempore ad aliud, ex uno in alium locum, quod ad conservationem globi, ejusque superficiei quantum conducat, nemo non videt. Quid autem in cometis? Descendunt ii plerumque infra planetas omnes: tum ultra ipsos in immensum recedunt. Quanta esset radiorum vis, quam immensus calor in primo casu, nisi vastissima illa atmosphæra vim proximi solis retunderet? Quo gelu torperent omnia in secundo, nisi nucleo cum temperie quadam digresso, ac solis jam remotissimi viribus in immensum imminutis, atmosphæra ipsa fervorem in minore distantia conceptum usque ad regressum ex apheliis conservaret?

67. Quod de calore diximus, idem dicendum de lumine, qui est alter usus. Atmosphæra lumen excipiens dispergit, & dividit. In locis, quæ radiorum immediato incursui non sunt exposita, densissimis obruta tenebris sorderent omnia, nisi lumen ab atmosphæra potissimum reflexum irrumperet. Dies ipsa per plures horas producitur in binis crepusculis sola reflexione radiorum facta in atmosphæra. Hinc nos conjicimus, in immensa illa distantia a sole in apheliis nihilo minus illustrari cometæ nucleum, quam nostram hanc superficiem interdiu nubeculâ solem tegente. Nostra atmosphæra lumini reflectendo apta, ut ex crepusculis constat,

stat, ad 50 milliaria non assurgit, & fortasse ne ad 15 quidem pertingit, ut credimus. Postremi cometæ atmosphæra erat protensa ad majorem distantiam, quam luna distet a terra, sive ultra bis centum millia milliariorum: erat enim plusquam sexagecuplo amplior nucleo ipso, qui telluris, ac Veneris magnitudinem æmulabatur. Quantum luminis per tantum spatium collectum ab atmosphæræ particulis detorquebatur in nucleum? Quod nucleus nobis tanta luce coruscans non appareat in minore distantia, quanta planetæ cæteri in majore, illud in causa est, quod luce ipsa intra tantam atmosphæram irretita, & reflexionibus plurimis demum restincta, minor ejus copia reflectitur in apertum ætherem, cum potissimum per maximum intervallum atmosphæra remotior a nucleo tenuis, & pellucida parum reflectat luminis. At licet a singulis ejus partibus ad nostrum oculum tam remotum parum reflectatur; summa omnium particularum, quæ detorquentur ad nucleum tam proximum, non est sane tam exigua. Facile ista omnia ad calculum etiam revocari possent, sed properamus ad alia.

68. Hinc nos quidem minus verum arbitramur calculum illum, quo Newtonus immensum ardorem colligit cometæ anni *1680*, quem vicibus bis mille majorem censuit calore ferri candentis lib. 3 Princ. pag. *466* editionis 2. Tantum calorem immensa atmosphæra impedit in ipso perihelio. Si ut in eo calculo assumit ardorem, quem terra arida excipit ex calore æstivi solis, assumpsisset calorem, quem excipit per hyemem, vel primo mane, si dempsisset totum præcedentis caloris effectum, computasset discrimen inter vim radiorum percurrentium longiorem tractum in atmosphæra primo mane, & breviorem in meridie, tum quæsivisset, quantum imminui deberet vis ab atmosphæra tam in immensum assurgente; invenisset profecto in nuclei superficie quandam velut temperiem. Atmosphæra ipsa per gradus altior fervet magis, sed remotissimam & sua ipsa tenuitas calori excipiendo, conservandoque minus apta, & copia exhalationum assurgentium, quæ, ut mox dicemus, in caudam abeunt, satis protegit, propiorem obumbrat remotior. Concipitur calor quidem in ipsa atmosphæra satis magnus, & in locis quibusdam intermediis maximus est, qui diutissime conservatur, & ad nucleum sensim transmittitur. In nucleo ejus etiam cometæ fuit multo minor, quam Newtonus censuit: in cæteris autem cometis multo minus ad solem accedentibus multo etiam minor calor concipitur.

69. Hoc calore ipsa quidem cometæ atmosphæra nequaquam dissipatur tota: nam & multo tenacioribus eam constare partibus est verosimile, quam solis atmosphæram, & ea multo minus incalescit ob brevitatem moræ in perihelio, quam ipsa atmosphæra solaris ibidem perpetuo manens. Abit tamen pars aliqua in vapores tenuissimos, & multo magis in vapores abeunt, & in caudas assurgunt particulæ solaris atmosphæræ in majore distantia a sole collectæ, & ipsi immixtæ, quod & Mairanius sentit, & Newtonus etiam innuit, pag. 472, siquidem is ipsam tenuiorem solis atmosphæram nomine auræ æthereæ, quam ibi nominat, intelligit. Hinc in accessu ad solem atmosphæra, ut & in hoc potissimum postremo cometa observavimus, fere semper minuitur. Quamquam imminutio atmosphæræ ex parte anteriori, qua ipse cometa atmosphæram solis perrumpit, hujus etiam resistentiæ tribuenda est magna ex parte, qua fit ut illa levior, & tenuior ejus regio, quæ longius a nucleo recedit, repellatur ad latera, & ad partes posticas; quod in eo potissimum cometa fieri oportet, qui ad solem descendit, ut in hoc postremo vidimus, in quo ex anteriore parte in accessu ad solem fere omnis illa tenuior aura ex parte antica recesserat, & nucleus densiore tantum atmosphæra albicans prominebat primus, caudæ in immensum protensæ ad partes posticas quædam veluti cuspis.

70. Quod vero ad caudas pertinet, imprimis eas non dubitamus ortas esse ab exhalationibus, quæ ex ipso cometa, ejusque atmosphæra erumpunt, & ab atmosphæra solis in solem gravi truduntur sursum nostrorum fumorum instar. Sententiam, quæ caudas derivat a lumine trans pellucidum nucleum permeante, ut in phialis aqua plenis, jure Newtonus notat pag. 467, & eorum esse ait, *qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum opticarum*, ut & alteram, quæ ipsas repetit a refractione lucis, dum a capite cometæ

ad

ad nostrum oculum propagatur, plurima argumenta falsam evincunt. Sed ea ut vulgo notiora consultò omittimus. Prima sententia, quæ jam communis est, & quam amplectimur, causam profert, quæ & vere existit, & phænomenis omnibus caudarum satisfacit.

71. Patet nimirum, cur in accessu ad solem augeantur perpetuo, & post appulsum ad perihelium longiores sint, quam ante appulsum essent; aucto nimirum calore, quo vapores, & exhalationes excitantur, & auctâ densitate atmosphæræ solaris, quæ eos sursum protrudat. Patet, cur semper dirigantur in partes soli oppositas. Nam ut nostra hæc atmosphæra fumos nostros leviores propellit ad partes oppositas centro terræ, in quod gravitat; ita solaris atmosphæra vapores cometæ propellit ad partes oppositas centro solis. Patet, cur declinent a directione soli opposita semper in eas partes, quas cometa relinquit, & cur hæc declinatio sit multo major in minore distantia a sole. Nam si cometa staret, dum fumus ascendit, columna fumi appareret in ea recta, quæ solis centro opponitur. At si progreditur interea cometa, columna fumi dirigetur a loco, quem nunc cometa occupat, ad locum verticaliter imminentem illi puncto, in quo cometa erat, cum ex eo egressa est extrema pars caudæ. Sit sol (fig. *6*) in S, cometa in C, extrema cauda in D: ducatur recta SD secans orbitam in A. Dum pars fumi D egressa e cometa in A ascendit per AD, cometa progreditur per AC, & fumi tractus extenditur oblique per CD.

72. Hinc jam ex dato angulo declinationis DCE, & longitudine caudæ CD, pótest determinari etiam tempus, quo fumus ascendit, ductâ rectâ SD a sole ad extremam caudam, definiendo angulum CSD, seu punctum A, in quo erat cometa, quando fumus cœpit ascendere. Id tempus erit illud, quo cometa percurrit arcum AC. Hæc methodus a Newtono proponitur pag. 471. Sed is addit, potius ducendam esse rectam S*c* parallelam CD, & sumendum tempus *c*C, eo quod fumus egressus in *c*, dum ascendit, moveatur simul motu, quem habebat cum cometa, adeóque deveniat non ad *d*, sed ad D motu composito, immo ulterius etiam excurrat, ob motum cometæ curvilineum, minorem motu

recti-

rectilineo per tangentem accepto in c; unde punctum c magis etiam putat removendum a C. Nobis autem hic Newtonus videtur prorsus oblitus resistentiæ, quam in atmosphæra solari vapores habent, qua motum, quo cum capite ferebantur, statim amittunt. Si ascendunt eo quod ab atmosphæra solari trudantur sursum, ut in camino fumus, quo eodem exemplo ipse utitur, profecto rariores sunt ipsâ atmosphærâ: globus autem in medio æque denso ex formula, quam idem Newtonus habet sub finem prop. 40 lib. 2, tempore, quo in vacuo percurreret $\frac{8}{3}$ suæ diametri, amitteret velocitatis suæ dimidium, & velocitas, quæ remaneret quovis alio tempore, ad velocitatem, quam habebat, esset ut tempus illud, quo percurreret $\frac{8}{3}$ suæ diametri, ad summam ejus, & illius alterius temporis. Quoniam vero tam exigua est singularum fumi particularum moles, momento temporis percurruntur $\frac{8}{3}$ earum diametri; ac proinde post unum secundum temporis, jam de tota illa velocitate, quam habebant vapores cum capite, nihil relinquetur ad sensum, & solus manebit ascensus rectilineus acceptus a continua sollicitatione auræ gravioris in solem, quod quidem Newtonum non vidisse, satis mirari non possumus. Hinc autem in cometa anni 1680, & 1681 invenit vaporem, qui erat in termino caudæ die 25ª. Jan. insumpsisse 45 dies in ascensu; quæ quidem mora nimia nobis semper est visa. At ea, hoc errore correcto, minuenda est magis, quam in ratione distantiæ verticis D a sole ad longitudinem caudæ. Nam est DS ad DC ut sinus anguli DCS, seu sinus anguli DCE, qui æquatur angulo dSC, ad sinum DSC, sive proximè ut ii anguli, vel proximè ut tempus per cC ad tempus per AG, ac proinde si positio caudæ adhuc etiam magis inclinavit lineam Scd, quam ut esset parallela CD, debet adhuc magis, quam in ea ratione id tempus minui, quod profecto reducetur ad paucos dies.

73. Unum illud nonnihil turbat methodum expositam, & tempus; quod vapores, dum ascendunt, simul a motu vertiginis atmosphæræ circa axem solis abripiuntur nonnihil, quod quidem, si cometa movetur secundum ordinem signorum, minuit nonnihil inclinationem: si contra ordinem, auget: nam in primo casu vapores

pores promovet secundum directionem motus nuclei, in secundo secundum oppositam. Idem e contrario curvaturam caudæ in primo casu auget, & in secundo minuit. Nam curvatura ejusdem caudæ ex eo provenit, quod fumus initio ascendit multo celerius ob majorem inæqualitatem densitatum atmosphæræ, & fumi, tum priore motu per resistentiam eliso semper, & novis impulsibus semper minoribus factis, in fine in D ferme quiescit, ac proinde puncta fumi circa finem caudæ in D semper humiliora sunt, quam requireret motus proportionalis motui nuclei: hinc curvatur tractus fumi, & convexitas semper obvertitur illi parti, in quam cometa tendit. Porro si præterea atmosphæra solis movetur a *c* versus C; in eandem plagam promovetur cum ea etiam fumus, sed celerius in locis puncto C propioribus, tardius in remotioribus, ob vertiginem circa axem eo celeriorem, quo ea est soli propior: hinc in eo casu curvatura augetur, in opposito ob oppositam rationem minuitur. Præterea curvatura ex utroque capite major erit, quando cometa est circa perihelium, ubi ejus orbita est perpendicularis ad rectam, quæ ipsum cum sole jungit, & secundum quam ascendit fumus. Nam si cometa rectà ascenderet a sole, aut descenderet; columna fumi ex primo capite ascensus retardati non incurvaretur, ex vertigine atmosphæræ solaris incurvaretur nonnihil.

74. Hinc autem causa redditur immensæ sane curvaturæ, & dispersionis per ætherem caudæ postremi cometæ. Eam sub finem Februarii, & initium Martii vidimus immane quantum declinantem, & incurvatam, & expansam. Cum hìc nobis in Collegio Romano oriretur mane post tholum cujusdam templi; videbatur quasi in parabolam se flectere, & quidem satis arctam: per dimidium gradum circiter apparebat utcunque recta, tum quasi in angulo acuto flectebat sese, & incurvabat. Nimirum cometa tum erat in perihelio, & erat directus, & intra densiorem solis atmosphæram soli tam proximus. Ea omnia & curvaturæ favebant, & dispersioni. Quid quod & curvaturam, & dispersionem tum spectabamus totam? Si enim oculus sit in plano curvaturæ ipsius, sive in plano orbitæ cometæ, & orbita ipsa cum plano revolutionis solaris fere consentiat; curvitas a nobis non videbitur, ut

patet,

patet, nimirum transversim conspecta. At & ob tantam inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ (erat enim graduum 47), & terrâ versante e regione lineæ nodorum, (cum ad nodos nonnisi post duos fere menses pervenerit) debuit & caudæ curvatura, ac distractio per atmosphæram solarem esse maxima, & tota fere videri a nobis e regione positis extra ejus planum. Nec mirum si cum & ad dispersionem, & ad curvaturam videndam in hoc potissimum cometa omnia convenerint, maxima in hoc & dispersio conspecta fuerit, & curvatura. Dispersionis autem, curvaturæ, & declinationis exemplum appositissimum habemus in thuribuli translati fumo, potissimum vento exiguo flante, quo inclinatio columnæ fumi vel augetur, vel minuitur pro plaga, in quam is dirigitur.

75. Hæc ipsa curvatura nos docet, falsam esse eorum sententiam, quam amplectuntur quamplurimi, & Newtonus ipse non improbat, a Keplero primum invectam: trudi vapores ad partem soli oppositam a particulis luminis in eos impingentibus. Longe major est luminis particularum tenuitas, quam ut vapores promoveat, & vincat gravitatem illam, qua perpetuo urgentur in nucleum, a quo eos debet avellere. At eo omisso, curvatura haberetur ad partes oppositas. Fumus enim ab A ascenderet semper motu accelerato. Nam præter magnam partem celeritatis acquisitæ prioribus impulsionibus, semper novæ impulsiones validius agerent. Intensio enim lucis ex aucta distantia a sole parum minueretur, longitudine caudæ non habente magnam rationem ad distantiam a sole: gravitas vero in caput cometæ decrescens in ratione reciproca duplicata distantiarum ab ipso nucleo multo magis minueretur, ut patet, & resistentia quoque medii in recessu a sole decresceret in ratione multo majore, quam intensio luminis. Ex ascensu autem accelerato nemo non videt debere oriri curvam semitam fumi curvitate obversa partibus relictis.

76. Atque hinc aliud circa solis atmosphæram eruimus veluti corollarium, illam nimirum diffundi longe ultra eam solarem atmosphæram, quæ lucem reflectit, & lumen zodiacale parit, ac graviorem, & densiorem ibi etiam fumis cometæ. Nam illa solaris atmosphæra, ut Mairanius ex lumine zodiacali demonstra-

vit

vit in suo Opere de Aurora Boreali, sæpe infra Venerem continetur, vix unquam ultra terram protenditur. At cometæ caudas habent etiam cum primo vel ultimo videntur in multo majoribus a sole distantiis, & quidem longissimas : nam breves nobis apparent, tum ex eo, quod obversæ in partes soli oppositas, etiam a nobis eo tempore spectantur oblique, tum ex eo, quod tanta distantia adhuc magis minuit angulum opticum, quo earum longitudinem metimur. At tum quoque eæ ascendunt unice, quia a densiore atmosphæra solis sursum truduntur : nam ascensus ille non oritur ex impulsu lucis, ut vidimus. Nec vero illud esse potest verum, quod semper mirati sumus a Newtono affirmatum pag. 472, caudas in majore solis vicinia exhalatas, pergere moveri cum capitibus in orbibus similibus usque ad aphelia, & fortasse inde etiam cum iis redire. In superiore loco ipsi exciderat consideratio resistentiæ medii, hìc duo omisit, resistentiam medii, & gravitatem in nucleum. Si vapores in majore vicinia ob levitatem suam ascendunt, ut fumus noster in camino; profecto rariores sunt, quam medium, in quo ascendunt; ac proinde, ut supra demonstravimus, motus omnes statim amittunt præter eos, qui oriuntur ex continua sollicitatione fluidi gravioris, donec ascendant ad regionem ejusdem densitatis cum sua, ibique solis omni solari atmosphæræ communibus motibus moveantur. Fac tamen ex ipsis emergant cum nucleo. Si purum ætherem nanciscantur, qui ipsorum motibus non resistat; recident in nucleum gravitate in ipsum perpetuo urgente. Gravitatem in solem consideravit ibi Newtonus, quam elidi affirmavit a motu in orbe elliptico, in quo movetur & nucleus, gravitatem in nucleum ipsum omisit. Profecto Jovis satellites si circa Jovem non converterentur, moveri non possent cum eo circa solem in eadem semper positione, sed in ipsum reciderent motu composito ex communi circa solem, & ex alio orto a gravitate in Jovem. Idem caudis contingeret. Id Newtonum non vidisse, miramur sane. At nos fortasse hallucinamur, quanquam hæc nostra ratiocinatio nobis videtur evidentissima.

77. Hinc ut in terra nostra alià est atmosphæra radios reflectens, quæ ad 50 milliaria non assurgit, &, ut nos credimus,

ne ad 15 quidem; alia, ad quam terrestres vapores non ascendunt, levior, sed magis densa, quam solaris atmosphæra, qua cingimur, & ex qua delatæ ipsius particulæ illæ densiores, quæ lumen zodiacale pariunt, sistuntur in hac juxta Mairanii sententiam, & aliquando fermentatæ borealem auroram exhibent sexcentis etiam, & septingentis milliariis a terra distantem: sic alia erit solaris atmosphæra lumini reflectendo par, quæ ad Venerem, ac ad terram etiam aliquando pertingit, alia lumini reflectendo impar longissime ultra Saturnum ipsum protensa.

78. Censemus igitur, caudas in maximis etiam distantiis, licet cometa ex remotissimis, & frigidissimis aphelii locis descendat, oriri ex exhalationibus ab hac atmosphæra solari sursum protrusis, hoc nimirum pacto. Dum cometa a sole recedit, magna pars atmosphæræ hujus ex ea fronte, qua in eam incurrit atmosphæra cometæ, & ab utroque latere insinuatur intra ipsam, immisceturque, & ad nucleum etiam ejus motu intestino descendit. Hæc delata ad aphelia magis etiam frigescit, & addensatur. Redeunte cometa, & calore sensim aucto, rursum expanditur, evolat, & secum rapit cometicas particulas, ut aer ex aqua calefacta cum aqueis particulis erumpit, & ascendit. Ii vapores protrusi a reliqua atmosphæra solis graviore eo ascendunt, ubi in cometam inciderant, immo etiam ultra eos limites, magis nimirum calefacti.

79. Hinc ratio redditur, cur cometæ omnes caudas habeant, planeta nullus caudam emittat. Planetæ moventur in orbibus parum admodum abludentibus a forma circulari. Quare versantur semper in atmosphæra fere æque densa, & multo minorem sentiunt caloris inæqualitatem. Si quæ in iis particulæ adessent, quæ attenuari possent eo calore, quem habent, cum habent maximum, ultra tenuitatem solaris atmosphæræ ipsis circumfusæ; eæ omnes jam ab initio evolassent. Nunc in quodam veluti æquilibrio perstant omnia. Secus in cometis e tenuissima atmosphæræ parte, & frigidissima ad densiorem descendentibus, & calidiorem, quæ quidem licet calidior, adhuc tamen pressa pondere superincumbentis atmosphæræ est multo densior.

80. Hinc etiam alius Newtoni calculus irritus evadit, quo tenui-

nuitatem medii ætherei in immensum auget pag. 470, ita ut unus digitus nostri aeris, redactus ad tenuitatem fluidi existentis in distantia unius semidiametri terrestris a terra, occupare debeat totam sphæram a terra longe ultra Saturnum protensam; quam ipsam tenuitatem in Optica quoque affirmat deduci ex iisdem principiis, quod aer addensetur in ratione ponderis comprimentis, & gravitas decrescat in ratione reciproca duplicata distantiarum. Inde enim eruit, æqualibus sumptis altitudinum intervallis, fore densitates in progressione geometrica. At ea progressio pergeret in infinitum; si solaris atmosphæra undique circumfusa non adesset, & superioris aeris vices compressione sua non expleret. Ubi attenuando ad eam devenitur tenuitatem, quam ipsa habet in hac nostra a sole distantia; attenuatio omnis sistitur, & progressio illa abrumpitur. Sic in occluso cubiculo parietes, & fornex externi aeris vices explent, & eandem progressionem statim abrumpunt.

81. Hisce circa caudas generaliter expositis, exponemus nunc phænomenum, ex quo nos conjectati sumus motum cometæ postremi circa proprium axem, & ex quo, si diligentius cæteri observentur, theoriam hanc perfici posse arbitramur. Utinam vel sub initium apparitionis postremi cometæ ea nobis in mentem venissent, quæ nonnisi paullo ante medium Februarium occurrerunt, vel cælo usi essemus æquiore, ut diutius, & diligentius phænomenum ipsum observaremus. Exponemus primum observationes ipsas.

82. Sub initium observavimus in cauda quandam velut texturam tenuem filorum secundum caudæ longitudinem, sed ne adnotavimus quidem in nostro commentariolo, in quo quidquid quotidie occurreret, notabamus, & cometæ nucleum, & caudam, ac positionem respectu stellularum propiorum: 11mâ Februarii notavimus ad partes limbi australis sulcum quendam nigricantem, quem exprimit in fig. 7 *ab*, secundum tenuissimorum filorum directionem. Is incurvabatur in morem limbi caudæ, & prodibat ex ipso nucleo a latere. Typus expressus est, ut a telescopio objecta invertente repræsentabatur: & sulcus eandem respectu caudæ positionem ad sensum retinuit usque ad occasum. Erat eo die cauda, & longior quam ante, & vividior; nam per triduum præ-

cedens post nubes cometa latuerat. Die 12 prope ipsum horizontem emersit e nubibus cauda vaporum interpositione languidior, at sulcus, utut & ipse minus vivax, adhuc tamen maxime distinctius apparuit: erat autem axi caudæ aliquanto propior. Die 13 per nubes observare non licuit: die 14 vividissima cauda, & longe protensa sese diffuderat: sulcus aderat tam distinctus, quam die 11, & in ipso caudæ axe apparebat. Jam a primis diebus, ut testes haberemus, communicaveramus rem cum pluribus Collegii hujus Romani Patribus, & in primis cum P. Petro Lazzaro publico Historiæ Ecclesiasticæ Professore, & cum in cæteris Mathematicis disciplinis, tum in Astronomia quoque versatissimo, quo semper in observationibus omnibus astronomicis adjutore usi sumus (*). Eo autem die & externorum multi confluxerant, quibus sulcum illum ostendimus interrogantes, num quandam veluti umbram nuclei viderent in medio: ipsis eam enim vero videri manifesto affirmantibus, plura telescopia optimæ notæ produximus, ut de phænomeno ipso constaret certius.

83. Et quidem umbram nominavimus, ne statim consilium nostrum omnibus vulgaremus. Cæterum post primam observationem videramus, nec tam longam esse posse umbram, & tam latam atque in apicem non desinentem, nec eam, quæ tum ab axe caudæ plurimum abludebat, positionem habere, & rem cum Patre le Seur communicaveramus, ac in pagella quadam ab ipso transmissa Parisios ad amicos inter cætera illud adjeceramus, sulcum quendam obscuriorem a nobis observatum, velut hiatum caudæ vaporibus vacuum ab aliqua cometæ parte non emissis, iis emittendis minus apta. Subinde autem in mentem venit, potius oriri phænomenum a crassiore fumo emisso ab aliqua parte atmosphæræ ipsius

(*) Vivit adhuc, & viget Romæ, licet aliquanto me senior, vir optimus, atque doctissimus, in summa omnium ordinum existimatione, plurimis etiam editis Operibus illustris, & ad humaniores litteras, & ad profanam, & ad sacram pertinentibus eruditionem, ac potissimum ad solidam Theologiam, in primis Dogmaticam, quæ tanta doctrinæ fama plura ipsi honorificentissima munera a summis Pontificibus sæpissime consulto delata, dum adhuc vigeret Societas, in ipso ejus Ordinis interitu illæsa omnia conservavit.

ipsius cometæ, vel ejus nuclei pinguiore. Nam hiatus quidem, qui a vacuitate oriretur, brevior esset, reliquo fumo se expandente ad latera. Cum autem videremus, cometâ circa axem revoluto, debere sulcum comitari motum ejus partis, ex qua crassior ille fumus erumperet, & ad axem caudæ accedere; summam phænomeni utilitatem sensimus ad hanc ipsam revolutionem determinandam.

84. Continuandæ sulcorum observationi inhiabamus: at usque ad 21 cælo semper nubilo cometa nusquam apparuit. Eo die per nubjum intercapedines ampliores cometam sæpius observavimus. Bini aderant in cauda sulci, qui in tres circiter æquales partes latitudinem caudæ ipsius diviserant, ut in fig. 8: quanquam ea intervallum sulcorum exhibet aliquanto majus justo. Insequenti die 22 antequam cælum nubibus obduceretur, vividissimo lumine fulgebat cauda, & sulcus quidem apparebat, sed unicus, prope ejus axem. Die 23, per nubes observare non licuit, & insequentibus diebus tam cito occidit, ut crepusculi nimia luce, & horizontis vaporibus obruta cauda langueret, nec quidquam discerni posset. Interea cum die 26ª Februarii cometa occidisset fere cum sole ipso, & ex eodem loco, unde occidentem cometam observaveramus, orientem observare non liceret, ac locum commodiorem continuandis observationibus diu incassum quæreremus, sub ipsum templi tectum translatis instrumentis 29ª Februarii primo mane sub crepusculi initium surgentem cometam conspicati cælo admodum sereno observavimus in cauda, quæ vividissimo lumine emicabat, & plurimum flectebatur ad boream, ejusmodi sulcos, quos fig. 9 exprimit. De iis ita in commentario nostro. *Primus tenebrosior ex ipso nucleo ortus: secundus tenuior, & dilutior: tertius dilutior, sed latior, & incipiens nonnihil procul a nucleo: quartus erat in ipso limbo, ubi post intercapedinem exiguam apparebat aliud nebulæ filum, hiatu inter ipsum, & caudam interposito.*

85. Insequenti die videri cometa non potuit, nisi crepusculo jam vividiore, & caudâ admodum pallente, & confusâ. Visa sunt quidem quædam sulcorum vestigia, & mutatio aliqua, sed indicio nimium levi, nec jam ulla spes continuandi observationes superfuit. Porro telescopia plura adhibuimus optimæ notæ, unum im-

imprimis ab Hugenio ipso elaboratum palmorum 20. Micrometro positiones accurate determinare non potuimus, eo enim utebamur, quod filis constat se ad angulos semirectos secantibus, ejusque usum perfecimus quoque instrumento novo parato e solidis lamellis circulo adnexis, cujus utilitatem, & usum alibi proponemus. Idcirco delineavimus typos singulis diebus, quorum aliquos hìc exscripsimus.

86. Porro phænomeni, ut diximus, plurimos habemus testes. Die 23 Februarii, qua die a nobis cometa videri non potuit, umbram quandam circa medium secundum longitudinem caudæ protensam, & quæ nuclei ipsius partem aliquam obscuraret, se vidisse affirmat D. De Cheseaux, & eandem umbram Calandrinus in litteris ad eum datis a se visam testatur, quam & umbram nuclei esse censebat. Ipse autem D. De Cheseaux se potius arbitrari affirmat, fuisse umbram vaporum, quorum alii aliis lumen interciperent. De præcedentibus sulcis nihil affirmat: quod sane non miramur, qui enim non in idipsum oculos defigeret, facilius rem non animadvertebat, dilutiores enim erant sub initium quam sub finem. At sulcorum quinque, quos die 29 Februarii nos vidimus, magnum apud ipsum de Cheseaux vestigium, & effectus sane singularis in tab. 5.

87. Nam vidit 7$^{\text{mâ}}$ Martii veluti quinque ingentes caudas quatuor nigris hiatibus interpositis divisas, ex horizonte emergentes, & sextæ quoddam initium in ipso horizonte: ipsæ autem caudæ erant aliis veluti fasciis intertextæ diversi luminis, ac ea erat ipsarum positio, quam eâ horâ latentis cometæ cauda habere debuit. Has nimirum caudæ divisiones sulcorum a nobis visorum, vel similium continuationes ex eadem causa ortas, quam num. 83 innuimus, non dubitamus. Nam & unicum illum sulcum, qui nobis 11$^{\text{â}}$, 12$^{\text{â}}$, 14$^{\text{â}}$ Februarii apparuit, & eos, qui 21$^{\text{â}}$, & eum, qui 22$^{\text{â}}$ nobis visus, ac ab aliis die 23$^{\text{â}}$ Februarii pro umbra capitis est habitus, ejus umbram esse non potuisse, manifestum est ex iis, quæ num. 65 demonstravimus. At ea nec vaporum umbra esse potuit, quæ nimirum minus etiam longe diffunditur, nisi ipsorum vaporum series quædam constituatur reddendo lumini minus apta, ac a reliqua cauda discrepans, sive quod idem est, filum quoddam exhalationum a reliquis discrepantium, ac proinde exhalatum

a co-a cometæ parte a reliquis discrepante, in quo & nos consentimus.

88. Cæterum eosdem sulcos, & hiatus ab aliis quoque in aliis cometis visos, & pro umbra nuclei habitos constat. Nam Hevelius in cometa anni 1665 umbram nuclei se vidisse testatur, & idem a pluribus aliis observatum fuisse tradidit lib. 8 Cometographiæ. At Hookius, teste Gregorio Astronomiæ lib. 5 prop. 4, umbram hanc negat. Quin immo cum idem Hookius præterea affirmet, cometæ caudam lucere fortius in ea parte, in qua umbra, si qua esset, appareret; videtur nigricantis fumi tractus aliquos vidisse hinc, & inde ab axe caudæ. Sed in futuris cometis res ipsa diligentius observata ab initio, judicium hoc nostrum vel confirmabit, vel infirmabit (*).

89. Interea tamen nobis rem ipsam considerantibus admodum verisimile videtur, cometarum capita, & atmosphæras non ejusdem generis fumum emittere, & quidem e pluribus locis in majore solis vicinia debere fumum erumpere nigricantem. Porro si ea pars, quæ multo obscuriorem cæteris emittit fumum, sit exigua; filis quibusdam tenuibus apparebit intertexta cauda: si autem sit multo amplior, amplior etiam in cauda sulcus apparebit, & eo plures erunt, quo propius ad solem acceditur, & calor augetur magis. Horum autem sulcorum alii, pinguiore materia cessante, & exhausta, cessabunt, alii, eâ magis exardescente, orientur. Cometas gyrare circa proprium axem, etiam ex planetarum analogia est admodum verisimile. Iis gyrantibus gyrabit, ut diximus, sulcus respectu axis, ad quem jam propius accedet, jam recedet. Hæc omnia cum observationibus nostris consentiunt. Initio tenuioribus filis intextam caudam conspeximus, tum præterea sulcos adnotavimus eo plures, quo propius ad solem accedebatur, & ipsorum sulcorum

---

(*) Nulla mihi se deinde occasio obtulit cometæ, ad ejusmodi phænomena exhibenda idonei, qui a me vel aliis curis distracto, vel frequentibus itineribus impedito, vel instrumentis astronomicis carente ibi, ubi tempore apparitionum idonearum morabar, commode observari posset; licet tam multi advenerint hisce 40 annis, qui ab ejus cometæ tempore effluxerant. Spero equidem Astronomos in futuris cometarum apparitionibus ad hæc phænomena observanda se diligentius applicaturos.

rum motum respectu axis. Ut sulcus, qui die 11ª Februarii erat limbo propior, 12ª accessit ad axem, & 14ª erat in axe ipso; ita alter ex iis, qui 21ª Januarii distabat sexta parte circiter crassitudinis caudæ ab axe, ad axem accessit sequenti die, nec 23ª a D. De Cheseaux procul ab axe conspectus est. Conspirant igitur eæ observationes in exhibenda vertigine. Alter autem ex iis sulcis, qui die 21ª conspecti sunt, jam evanuerat antequam ad limbum perveniret, ut quinque novi emerserant die 29ª, & quinque saltem 7ª Martii conspiciebantur.

90. Tempus integræ revolutionis definire non audemus; neque enim constat, an alter ex iis sulcis, qui visi sunt die 21ª, fuerit idem, ac ille, qui die 11ª conspectus est, nec constat, in quo circulo motum suum peregerit pars illa nuclei, ex qua is fumus erumpebat. Fac axis nuclei nobis obvertatur, & sit ea pars polo propior: nutabit tantum sulcus hinc, & inde ab axe. Fac nobis obvertatur æquator, & pars in ipso æquatore sit: manebit sulcus semper in ipso axe.

91. Exhibet tamen hoc phænomenum & Astronomis, & Geometris fœcundissimum campum ingeniis in theoria perficienda exercendis. Quærenda curva, in quam componetur columna fumi erumpentis e dato puncto globi fumantis in medio densiore, & gravi. Problema arduum potissimum in nostro casu, ob incognitas densitates atmosphæræ solis, & cometæ, & velocitatem, cum qua fumus e priore atmosphæra egressus in secundam irrumpit. Quærenda eadem curva, si globus ille præterea moveatur datis motibus. Quærenda ejus projectio in plano, & distantia visa ab axe. Tum vice versa, datâ curvâ visâ, quærendum globi punctum, e quo emergit, quærendum, quot observationes exhibere possint ejusmodi puncta determinata, quot ad axem revolutionis determinandum requirantur. Quærenda alia sane multa, & difficillima, & ad theoriam perficiendam necessaria. Quantus hìc exercendis ingeniis, & excolendæ Mechanicæ, ac Geometriæ campus! At nos nimium jam evagatos, & in immensum diffusos fas demum consistere, & aliquando Dissertationem plus æquo productam abrumpere.

OPU-

OPUSCULE II.

SUR LA NOUVELLE PLANÈTE.

PRÉFACE.

I. LA première partie de ce Volume a eu pour objet les comètes, dont on a traité jusqu' ici, en exposant dans l' Opuscule premier la méthode de déterminer leur orbite supposée parabolique par trois observations, & en y ajoutant des pièces correlatives : l' objet de la seconde partie, qui commence ici, sera la nouvelle planète découverte par M. Herchel vers le commencement de l' an 1781 : c' est le nom, que je lui ai donné ici dans le titre, & je l' appellerai de même ci-après. Je comprend sous le nom d' Opuscule II tout ce qu' il aura sur ce sujet divisé en plusieurs Mémoires.

II. Comme on l' avoit prise d' abord pour une comète, j' ai commencé les recherches sur son orbite en la supposant parabolique, & j' y ai appliqué la méthode du premier Opuscule. Cette application a donné des phénomènes inattendus. La parabole déterminée par trois des premières observations, qui donne ordinairement des lieux très-peu éloignés de ceux, qu' on trouve après, s' en est trouvée immédiatement bien éloignée : trois autres observations ont donnée une autre parabole bien différente, & celle-ci aussi a été bientôt abandonnée de même par les observations suivantes. L' orbite, que j' avois trouvée par trois autres tirée de ma méthode d' approximation, étoit aussi bien différente. J' étois à la campagne, & M. de La-Lande m' écrivit, que M. Mechain s' étoit à la fin rebuté, que je rendrois un grand service à l' Astronomie, si je m' appliquois à déchiffrer cet énigme. Je le fis, & je lui écrivis une lettre très-longue, qui contenoit toute la suite de mes recherches, dont j' ai tiré ce qu' il y a de plus essentiel pour former le Mémoire, qui sera ici le premier.

III. J'ai trouvé que dans certaines circonstances pareilles à celles, qu'on avoit alors, on pouvoit trouver deux, & même quatre paraboles conformes aux mêmes trois observations, deux dans des distances ordinaires, & deux dans un très-grand éloignement, & ayant abandonné les deux premières, j'avois déterminé celle des deux dernières, qui pouvoit être à propos : son arc dans cet endroit faisoit avec le rayon vecteur un angle à-peu-près demi-droit, & je vis, que cette position d'un petit arc parabolique par rapport à ce rayon dans la théorie de la gravité générale Newtonienne doit donner les lieux apparents presque les mêmes, que l'arc d'une orbite circulaire placé à la même distance assez grande.

IV. Déjà le soupçon d'un grand éloignement, qui rend les comètes invisibles, & le défaut d'une chevelure, qui leur a donné ce nom, avoit fait soupçonner, que cet astre n'étoit pas une comète, mais un'espèce de planète, & comme les orbites de celles-ci s'éloignent bien beaucoup de la forme parabolique en s'approchant de la circulaire, on avoit cherché le cercle correlatif aux premières observations : pour moi j'avois commencé à être prévenu pour la forme approchante de la circulaire plutôt, que pour la parabolique par la même réflexion, que j'avois fait sur le rapport de l'arc parabolique incliné à un angle demi-droit avec l'arc circulaire. Comme il y a un nombre infini d'inclinaisons différentes contre une seule de l'angle demi-droit, je voyois, que, si l'orbite étoit approchante de la parabole, il y auroit eu un très-grand excès de probabilité pour croire, qu'à la place de tomber sur une inclinaison peu éloignée d'un angle demi-droit, on auroit trouvé quelqu'autre bien différente, tandis que si cette orbite étoit à-peu-près circulaire, son arc devoit nécessairement s'accorder avec un arc parabolique incliné de cette manière. Ainsi dans la même lettre à la fin j'avois cherché la distance de l'arc circulaire correlatif aux mêmes observations, & je l'avois déterminée par une application de la même méthode, que j'avois employée pour chercher celle d'une orbite parabolique.

V. La distance d'un arc circulaire reste déterminée par deux seules observations, & il y a une méthode pour la trouver plus sim-

simple que l'autre tirée de cette application. Pour cela j'en ai fait un petit Mémoire, qui sera ici le second. Par cette méthode, ou par quelqu'autre pareille (parcequ'en supposant l'arc exactement circulaire autour du soleil placé dans le centre des forces réciproquement proportionnelles au quarré des distances, qui est son centre, le problême, qui cherche sa distance, est très-simple) on avoit déterminé le cercle, & M. de La-Lande, qui en avoit fait le calcul, & comparé les lieux calculés, qu'on devoit trouver, avec ceux qu'on observoit, n'avoit trouvé au commencement que la différence de très-peu de secondes, qu'on pouvoit rejetter sur les observations mêmes, dont l'exactitude ne peut être poussée, que jusqu'à un certain point, & comme cet accord s'est soutenu un temps considérable, cela a fait voir, que la distance trouvée à-peu-près double de celle de Saturne, devoit être peu éloignée de la véritable, & que cet astre n'étoit pas une comète, mais une véritable planète, qui destitué de chevelure brilloit d'une lumière assez vive même dans ce grand éloignement, mais que sa petitesse, & la distance même en rendant son diamètre apparent insensible aux meilleures lunettes employées par les Astronomes, qui ont fait les catalogues des étoiles fixes, en le confondant avec les rayons dispersés par l'aberration de sphéricité, & de réfrangibilité, l'avoit fait croir une fixe, & même à présent il paroît tel même en le comparant avec des fixes, qui se trouvent dans le même champ de la lunette avec lui. On le prend pour une fixe de sixième grandeur: on ne s'est pas aperçu de la différence, que par le changement de position par rapport aux autres étoiles voisines: Mayer l'a crue telle, & il l'a mise dans son catalogue, en ayant pris la position une fois seule l'an 1756, comme on s'est aperçu après avoir déterminé l'orbite elliptique de cette nouvelle planète, puisqu'on ne trouve plus dans cet endroit du ciel l'étoile, qu'il y avoit marquée, & on trouve que cette même planète de ce temps se devoit trouver dans ce lieu-là: ainsi la planète n'est pas nouvelle, mais elle a été nouvellement reconnue pour telle. Si Mayer l'avoit observée seulement deux fois dans un court intervalle de jours, c'auroit été lui, qui auroit fait cette découverte intéressante, & il peut se faire, que parmi les étoiles télescopiques il y ait quelqu'autre planète beaucoup plus éloignée, ou plus petite, que par un hazard on reconnoîtra pour telle avec le temps.

VI. L'hypothèse d'une orbite circulaire quoique un peu plus tard, pourtant même après quelque mois elle avoit commencé à être abandonnée par les observations avec des différences plus grandes, qu' à pouvoir les rejetter sur les erreurs des observations. D' ailleurs cette hypothèse étoit purement arbitraire, & on savoit bien que toutes les orbites des planètes sont elliptiques avec une excentricité sensible; mais tandis que les calculs, qu' on auroit pû employer par des méthodes connues pour chercher cette ellipticité, étoient très-compliqués, le problême me devint bien simple par une réflexion, que je fis sur une méthode appliquée mal-à-propos à la recherche des orbites paraboliques des comètes, dont j' ai parlé dans plusieurs endroits de la première partie de ce Volume: c'est celle de considérer l' arc de cette orbite comme rectiligne, & le mouvement de la comète comme uniforme, à fin de déterminer la distance, & position de cet arc par quatre observations, en cherchant une ligne droite coupée par les quatre directions des longitudes observées en raison donnée des trois intervalles des temps écoulés entre ces quatre observations.

VII. J' avois déjà démontré dans ma Dissertation ancienne imprimée l' an 1746, qui réimprimée ici forme le dernier des Mémoires correlatifs de l' Opuscule I, que quand les quatre lignes données de position passent par les points homologues de deux lignes droites coupées en quatre couples de points de manière, que les segments interceptés soient entr' eux en une même raison, le problême devient indéterminé tellement, qu' ayant pris dans une de ces lignes un point à volonté dans une distance quelconque, on peut tirer par ce point une ligne droite, qui soit coupée par ces mêmes lignes en cette même raison. Comme on ne peut pas prendre un arc de l' orbite parabolique d' une comète pour rectiligne avec un mouvement uniforme, si on ne le prend bien petit de manière, que l' arc parcouru dans le même temps par la

terre

terre soit aussi approchant de la ligne droite, & parcouru par un mouvement encore plus uniforme, on tombe sur cette indétermination, & la valeur qu' on trouve par l' application de la méthode ne provient que des petites erreurs des observations, & de la différence qu' il y a entre les valeurs qu' on a pour données, & celles qu' on auroit, si les mouvements de la comète étoient réellement rectilignes, & uniformes : comme les quantités négligées par ces deux articles n' ont rien à faire avec l' objet du problême, ainsi ce qu' on trouve n' a rien à faire aussi avec ce qu' on cherchoit. Mais on voyoit bien, que l' arc parcouru par une planète si éloignée dans plusieurs mois, & même dans une année entière ne pouvoit pas s' éloigner que très-peu d' une ligne droite, & son mouvement du mouvement uniforme, tandis que le mouvement de la terre avoit une courbure très-grande, & même d' un cercle entier, ce qui en ôtant cette indétermination donnoit lieu à la solution du problême, & à la détermination de la distance, & de la position de la corde de cet arc, dont on tire tous les éléments de l' ellipse de cette planète, & de son mouvement dans cette orbite.

VIII. C' étoit la première fois, que la solution de ce problême venoit en usage en Astronomie, ainsi j' en fis l' application à cette recherche en employant quatre observations, qu' on m' avoit envoyé de Paris, dont les extrêmes étoient assez éloignées entr' elles, & je vis par la nature des valeurs appliquées à une formule très-simple, que l' inconnue, dont dépendoit tout le reste, devoit se trouver très-peu fautive. J' envoya toute ma méthode dans une lettre à M. Mechain en lui indiquant aussi la manière de faire une petite correction correlative à la petite courbure de l' arc : cet excellent Astronome, & Géomètre, qui peu de temps après fut élu membre de l' Académie des Sciences, l' appliqua à des observations encore plus éloignées avec tout le succès, & c' est la première détermination qu' on a eu des éléments de son orbite elliptique, qui se sont trouvées conformes aux observations de ce temps avec une différence de peu de secondes, & avec un assez petit éloignement même de l' ob-

ser-

servation de Mayer éloignée de tant d' années. J' en fis un Mémoire en latin, où il y a toute la méthode développée en détail. Je l' envoya à mes amis en Italie, qui en ont publié une version Italienne dans la collection, qu' on a appellé *Memorie di Matematica, e Fisica della Società Italiana*, dont il n' y a jusqu' à présent que le premier Volume. J' en donnerai ici son original latin, qui formera le troisième Mémoire de ce second Opuscule.

IX. Je donnerai dans le quatrième une autre méthode, que j' avois imaginé pour déterminer les mêmes objets, tirée des observations faites avant, & après la première conjonction avec le soleil, & la première opposition, toujours dans la supposition d' un mouvement rectiligne, & uniforme dans cet intervalle d' une demi-année, en m' empressant d' avoir quelque chose de satisfaisant le plus-tôt, que je pouvois. En y appliquant les nombres j' ai trouvé la distance totale bien peu éloigné de la véritable, qu' on a trouvé après par des observations plus éloignées, mais assez fautive la différence des deux distances que la planète avoit dans les temps de la conjonction, & de l' opposition, qui étant assez petite, ne peut pas être bien déterminée par cette méthode plus dérangée par les petites erreurs des observations: mais je crois toujours utile la considération de plusieurs méthodes, & la comparaison de leurs résultats, & de leurs succès.

X. C' est pour cela, que je propose dans le Mémoire, qui sera le cinquième, d' autres méthodes de la même recherche faite par quatre observations choisies de différentes manières: mais il est plus intéressant le sixième Mémoire, qui contient une méthode pour déterminer, & corriger l' effet de la courbure de l' arc, & de l' inégalité du mouvement, qui rend susceptible ma méthode d' être appliquée aux observations de plusieurs années. Dans le dernier je donnerai la détermination finale tirée par mes méthodes des observations d' un intervalle moindre de deux ans, & pourtant assez d' accord avec les observations, où il y aura des remarques intéressantes sur la petite différence qui se trouve entre son résultat, & l' observation éloignée de Mayer.

MÉ-

MÉMOIRE I.

Premiers essais sur l' orbite de la nouvelle planète en la supposant une comète.

1. J'ai tiré ce Mémoire, comme je l'ai dit ci-dessus dans la Préface, d'une longue lettre, que j'avois écrit à M. de La-Lande après trois autres, dans lesquelles je lui avois envoyé les résultats de l'application de ma méthode exposée dans l'Opuscule I de ce volume pour la recherche de l'orbite parabolique des comètes à quelques combinaisons de trois observations de cet astre, dont le mouvement par rapport aux étoiles fixes, qui l'environnoient, avoit été découvert le mois précédent en Angleterre par M. Herchel, ce qui l'avoit fait prendre d'abord pour une comète. Je l'appellerai dans ce Mémoire avec le nom d'*astre*, qui est commun aux planètes, & aux comètes. En examinant les résultats, que je lui avois envoyés dans ces lettres précédentes, j'avois découvert des fautes de calculs numériques, qui m'échappent toujours (sur-tout dans cet âge-ci), dont je fait mention dans cette lettre, pour laquelle j'ai fait un plus grand effort d'attention : pourtant en examinant les calculs numériques à présent pour faire ce Mémoire, j'ai dû faire encore des nouveaux changements à leurs résultats.

2. Je l'ai commencé par un abrégé de ma méthode, qui n'est pas nécessaire à présent ici, où il y a toute cette théorie dans le premier Opuscule de ce Volume avec un exemple exposé dans le plus grand détail. J'y ai donné après l'application de la même méthode à une combinaison de trois observations choisies parmi celles, qu'on m'avoit envoyé de Paris à des intervalles de temps presqu'égaux, ce qui rend plus approchante de l'exactitude la supposition du mouvement uniforme de l'intersection du rayon vecteur avec la corde.

3. Je mettrai dans la table suivante les données, qu'on en tire avec les valeurs correlatives qu'il faut préparer selon le §. VII de cet Opuscule. Cette table répond aux deux premières divisions de

la

la première de celles, qu' on trouve à la fin du même Opuscule pag. 201, dont on a l' explication au §. XXI. On y a à la première division les temps moyens, les longitudes & latitudes de l' astre, que je marquerai ici par A, & les longitudes du soleil, dans la seconde les distances du soleil à la terre, les intervalles des temps t, t', t'' entre les observations 1 & 2, 2 & 3, 1 & 3, les mouvements m, m', m'' en longitude de l' astre, qui sont les différences de ses longitudes 1 & 2, 2 & 3, 1 & 3, & les élongations e, e', e'' de l' astre au soleil, qu' on a en ôtant chaque longitude de l' astre de celle du soleil. Dans la troisième division sans tout le calcul numérique de cette table de l' Opuscule I j' ai mis la valeur de la constante a, dont le logarithme est $0{,}756499 + 2\, log.t''$, la valeur v', qui à cause de la très-petite inégalité de temps ne diffère pas sensiblement de v, flèche de l' arc terrestre, sinus verse de la moitié du mouvement total du soleil, c' est-à-dire du sinus verse de la demi-différence des deux longitudes extrêmes du soleil, qui est ici $= 5°.50',7$: j' y ai mis après les logarithmes des valeurs $L = v'\, sin.e'$, $L' = \frac{t''}{t'\, sin.m''}$, $L'' = \frac{t''}{t\, sin.m''}$; mais à la place du sinus du petit angle m j'ai employé sa valeur en minutes pour employer après les nombres des minutes aussi à la place des leurs sinus.

Avril 1781 T.M.	Long. A	Lat. bor. A	Long. ☉
$10^j.\ 9^h.\ 16',3$	$2^s.\ 25°.\ 4',7$	$0°.\ 6',4$	$0^s.\ 21°.\ 19',6$
16 . 9 . 8, 2	2 . 25 . 17, 1	0 . 7, 0	0 . 27 . 11, 1
22 . 8 . 46, 3	2 . 25 . 31, 0	0 . 7, 3	1 . 3 . 1, 0
Dist. ☉ . . . ♁			
1,00344	$t = 8631{,}9$	$m = 12',4$	$e = 63°.45',1$
1,00512	$t' = 8618{,}1$	$m' = 13,9$	$e' = 58.\ 6{,}0$
1,00679	$t'' = 17250{,}0$	$m'' = 26,3$	$e'' = 52.30{,}0$

$a = 0{,}1699$	$v' = 0{,}0052$	L . . 7,644872	L' . . 8,881422	L'' . . 8,880727

4. Ayant ces valeurs j'ai fait la construction selon la méthode exposée dans le même §. XXI : ici je ne donne dans la fig. 1 (Tab.

(Tab. XIV), qu' une représentation en petit d' une partie de celle, qui a été employée dans cet Opuscule (Tab. IV fig. 19), & sans la vraie mesure des angles, sans le vrai rapport des longueurs des lignes, mais de manière, qu' il y ait une ressemblance de ce qui est essentiel pour comprendre les raisonnements en satisfaisant aux excès & défauts, aux additions, & soustractions: ainsi je n' ai pas exprimé ici l' arc de l' écliptique, sur laquelle ayant marqué selon ma méthode les commencements des signes de deux en deux j'ai pris les points de la longitude géocentrique du soleil augmentée, ou diminuée de six signes pour avoir l' héliocentrique de la terre, & déterminer la direction des rayons vecteurs ST, ST', ST'', ni l' arc de l' orbite de la terre pour en déterminer la longueur par sa rencontre avec ces directions: d' ailleurs on peut déterminer cette longueur en la prenant de l' échelle correspondante aux valeurs de la première colonne de la seconde division. J' ai fait les angles STE, $ST'E'$, $ST''E''$ égaux aux élongations e, e', e'' de la dernière colonne de la même seconde division du côté exigé par la direction des mêmes longitudes par rapport aux rayons ST, ST', ST'', & à la direction de l' ordre des signes. La petitesse des mouvements m, m', m'' a rendu les directions TE, $T'E'$, $T''E''$ dans la construction faite en grand, & en mesure exacte presque parallèles entr' elles: ici j' y ai donné beaucoup plus de convergence pour rendre plus visibles plusieurs lignes, & angles, mais en conservant en gros les positions respectives nécessaires pour saisir l' esprit des opérations, & des résultats.

5. Après ce préparatif commun à toutes les fausses positions à employer depuis, j' ai cherché la distance, & position de la corde PP'', qui me devoit donner la distance $T'P'$ pour la première position selon la règle, qui donne un jugement conjectural exposée dans le même premier Opuscule au num. 75, & pratiquée à son num. 251, à l' aide du limbe d' un morceau de papier, qui avoit trois points correspondants aux T, t, T'', promené sur les lignes TE, $T'E'$, $T''E''$, & j' ai trouvé, que je pouvois prendre $T'P' = 1,25$. Ce jugement étoit ici encore plus aisé, parcequ'

on voyoit bien , que la petitesse extrême des latitudes de l' astre devoit approcher les points de l' orbite même , qui ne se trouvent pas dans la fig. 1 d' ici, mais répondent aux points C , C'', qu' on a dans celle de la planche I , des leurs projections P , P'' de manière que la corde PP'' de l' orbite projettée , qu' on voit ici , devoit être sensiblement égale à la corde CC'' de la parabole parcourue .

6. Cette position , la valeur $T't = v'$, qu' on a dans la troisième division de la table, & $ST'P' = ST'E' = e'$, m' ont donné la réduction de la longitude de la direction T'P', qui répond aux arcs , à celle de la *tp* , qui répond aux cordes . Cette réduction est la différence des deux petits angles $T'pt$, $P'T'p$, dont le premier selon le num. 37 du premier Opuscule a son sinus $= \frac{sin.ST'P' \times T't}{tp}$, où on peut mettre T'P' pour *tp* , & par conséquent il sera $= \frac{L}{P'T'}$: on a le sinus du second en divisant celui-ci par SC'^3, pour lequel on peut prendre ici SP', ce qui rend cette détermination encore plus facile , puisque sans avoir besoin d' une figure correspondante à la fig. *9* de la planche I , pour trouver la distance SC' dépendamment de la SP', on se sert immédiatement de celle-ci , qu' on a ici dans la fig. 1 par ses points S , & P'. Ces valeurs m' ont donné le premier angle $= 12',2$, le second $9',0$, dont la différence $3',2$ a été la réduction cherchée, que j' avois appellée *y* dans le même premier Opuscule .

7. On voyoit bien par la seule figure , que le second angle $P'T'p$ va contre l' ordre des signes indiqué par la direction du mouvement TT'T'' de la terre , & le premier $T'pt$ selon cet ordre : ainsi la substitution de la direction *tp* à la T'P' augmentera la seconde longitude , quand le premier de ces deux angles sera plus grand que le second, comme il arrive ici , & par conséquent les longitudes suivantes de l' astre étant dans la table plus grandes que les précédentes , il faudra ajouter la réduction au premier mouvement *m* , & l' ôter du second *m'*, pour substituer le mouvement dans les cordes au mouvement dans les arcs . La règle géné-

générale ici sera la suivante. *Si l' on prend la réduction* y *en ôtant le second de ces deux angles du premier, & on la trouve positive, il faudra l' ajouter à* m, *& l' ôter de* m', *& faire le contraire, si on la trouve négative.*

8. Alors les valeurs m, & m', qui dans la table étoient 12',4, & 13',9 sont devenues 15',6, & 10',7. Les valeurs primitives des mouvements m & m' indiquoient, que l' astre s' approchoit de la terre, & après la réduction on doit trouver un éloignement; parceque selon les rapports des distances raccourcies à la terre trouvés au num. 45 du premier Opuscule la raison de la première à la troisième est composée de la directe du temps t à t', & réciproque du $sin.m$ à $sin.m'$: ainsi les temps t, & t' étant ici presqu' égaux à la diminution de la distance indiquée par l' excès de m' sur m se change en augmentation par le défaut contraire. Ce changement arrive ici, où la différence des deux mouvements m, m' est si petite: il n' arriveroit pas si elle étoit assez grande; parceque la réduction, qui l' a produit, est presque toujours très-petite à cause de la petitesse des deux flèches des deux orbites. On voit bien, que même en cas d' un rapport quelconque des deux temps, & des deux valeurs m, m', le changement du rapport des deux distances, dont dépend principalement l' inclinaison de la corde PP'', & par-là sa longueur, doit être petit, quand ces valeurs sont assez grands, la réduction étant petite, comme elle est très-souvent, puisque, comme nous avons remarqué dans le premier Opuscule, elle s' évanouit dans le cas de la conjonction avec le soleil, de l' opposition, & de la distance au soleil égale à celle de la terre, & très-souvent il y a le voisinage d' une de ces trois positions, ce qui fait voir, que ma méthode de déterminer les orbites des comètes doit donner ordinairement une approximation assez satisfaisante, même en négligeant tout-à-fait la réduction: mais il étoit bien essentiel de l' employer ici, où non seulement la différence des valeurs m, m' s' est trouvée petite avec l' égalité prochaine des temps t, t', mais les mêmes valeurs m, m' aussi petites: la réduction en est à-peu-près un quart. Ces sont des réflexions utiles pour entrer

toujours mieux dans l'esprit de ma méthode pour la recherche des orbites des comètes, & sont correlatives à l' objet de ce premier Mémoire, qui contient mes premiers essais sur cet astre pris d' abord pour une comète.

9. Par le num. 81 de l' Opuscule I on a $TP = tp \times sin.m' \times L'$, $T''P'' = tp \times sin.m \times L''$, & ici à la place des $sin.m'$, $sin.m$, on doit mettre les valeurs m', & m en minutes, qu' après la réduction on a trouvé 10,7, & 15,6, puisqu' on a pris la valeur m'' en minutes pour avoir les valeurs L', L'': on pourroit mettre la $T'P'$, qu' on a pris par position, à la place de la tp : mais on peut avoir celle-ci même tirée de la construction en prenant sur la ligne SP' la petite flèche $P'p$, qui par le num. 35 du même Opuscule est $= \frac{SP' \times T't}{SC'^3}$, & ici, où on a $SP' = SC'$, devient $= \frac{T't}{SP'^2}$: on a la valeur $T't = v'$ dans la table, & on peut prendre SP' de l' échelle : ainsi on a cette flèche, qui donne le point p, comme aussi la valeur $T't$ donne le point t : alors on aura par l' échelle la tp, & par conséquence les valeurs des TP, $T''P''$, qui donnent les points P, P'', & par-là on peut prendre de la même échelle les valeurs SP, SP'', PP'' : celles-ci sont ici les mêmes, que dans l' Opuscule I les SC, SC'', dont la somme a été appellée b, & la corde CC'' appellée c. Ayant ces deux valeurs, il faut trouver par le num. 30 du même Opuscule la valeur de la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$, & la comparer avec la valeur a trouvée dans la table : la différence est la première erreur, qui doit être employée avec la seconde trouvée de même pour s'en servir selon les règles de la fausse position, pour trouver la vraie.

10. Selon cette méthode ayant pris pour la première position $T'P' = 1,25$, j' ai trouvé $TP = 1,010$, $T''P'' = 1,470$, $SP = 1,06$, $SP'' = 1,17$, $PP'' = c = 0,32$: la valeur b étant $1,06 + 1,17 = 2,23$, la valeur de la formule est venue $0,2284 - 0,0004 = 0,2280$, qui comparée avec $a = 0,1699$ donne l' erreur positive $= 0,0581$. Cet excès de la

pre-

première position $T'P' = 1,25$ m' a fait prendre dans la seconde $T'P' = 1,23$: j' ai trouvé avec le même procédé $SP' = 1,09$ $P'p = 0,0044$, $tp = 1,22$, les deux petits angles $12',4$, & $9',6$, la réduction $y = 12',4 - 9',6 = 2',8$: par-là les valeurs m & m' réduites ont été $15',2$ & $11',1$: j' en ai tiré $TP = 1,039$, $T''P'' = 1,42$, $SP = 1,07$, $SP'' = 1,11$, $b = 1,07 + 1,11 = 2,18$, $PP'' = c = 0,235$, la valeur de la formule $0,1203$, qui comparée avec la même valeur $a = 0,1699$ a donné la seconde erreur négative $= - 0,0496$.

11. Comme ces deux erreurs ont les signes contraires, il faut prendre le terme quatrième proportionnel après la somme des leurs nombres, la seconde de ces deux, & la différence des deux positions, qui est $= 0,02$: ce terme est $= 0,0092$, & il faut l' ajouter à la seconde, qui avoit la valeur $1,23$, ce qui donne pour la position nouvelle $T'P' = 1,2392$. Comme cette valeur est peu différente de la moyenne arithmétique entre les deux précédentes, qui est $= 1,24$, elle doit donner pour les deux TP, $T''P''$ des valeurs peu éloignées de celles, qui m' avoient été données par les deux positions précédentes, c' est-à-dire $1,024$, ou $1,025$, comme je l'avois prise, & $1,450$. La construction faite en conséquence m' avoit donné les éléments suivants : la distance périhélie $1,02$, le lieu du périhélie $5^s.15°.6'$, l' arrivée au périhélie le 3 d' Avril.

12. On voit bien, qu' une comète dans cette orbite avec ces éléments auroit dû passer vers le commencement du mois d' Avril derrière l' orbite de la terre peu loin d' elle, & comme le mois de Mai la terre ayant la longitnde héliocentrique de 6 signes, devoit se trouver de ce côté-là, cette comète auroit été peu éloignée de celle-ci, & très-visible vers ce temps-là, même dans son opposition par rapport au soleil, & par conséquent visible pendant toute la nuit. J' étois bien sûr, que ni les erreurs des observations, ni les quantités négligées ne pouvoient donner une différence capable d' ôter cet inconvenient. Alors je fis une réflexion sur la nature particulière de son mouvement apparent : il me tomba dans l' esprit, que la petitesse du mouvement apparent

pa-

parent en longitude combinée avec la grande petitesse des latitudes pourroit donner une autre corde PP'' tournée en sens contraire, comme dans la fig. 2, capable aussi de donner l'égalité de la formule avec la valeur a. Comme la réduction dans la distance $T'P' = 1$ devoit s'évanouir, & dans une distance encore plus petite devenir négative, elle auroit dans ces cas-là laissé le second mouvement m' plus grand que le premier m, ce qui devoit rendre au contraire la troisième distance $T''P''$ plus petite que la première TP, en donnant à la corde PP'' une inclinaison contraire, qui devoit approcher l'astre à la place de l'éloigner.

13. Pour faire cette recherche j'ai commencé par faire évanouir la réduction en trouvant le point P' dans la ligne $T'E'$, avec le centre S, & le rayon $= 1$. Cela m'a donné par construction la $T'P' = 1{,}06$, ou $1{,}07$: & comme alors il n'y a point de réduction, on trouve plus aisément les valeurs des distances TP, $T''P''$ en employant les valeurs m, m' primitives, qu'on a dans la table : après quelques fautes, qui s'étoient glissées dans les calculs des mes lettres précédentes, que j'avois découvertes, & corrigées, j'ai trouvé pour ces distances les nombres $1{,}118$, & $0{,}9893$, qui m'ont donné les valeurs $SP = 1{,}120$, $SP'' = 0{,}868$, $PP'' = 0{,}33$, & à la fin l'erreur de la formule $+ 0{,}0460$ positive, & un peu considérable.

14. Quoique la correction d'une erreur positive ordinairement exige une diminution de la distance $T'P'$, on voyoit aisément, qu'ici pour cet effet il falloit diminuer la différence des distances TP, $T''P''$, ce qu'on obtient en diminuant celle des valeurs m, m', & ceci avec une petite réduction positive, qu'on a en augmentant tant soit peu la distance $T'P'$. Je l'ai prise $= 1{,}08$, ce qui m'a donné $SP' = 1{,}003$, $P'p$ insensiblement différente de la valeur $v' = 0{,}0052$, les deux petits angles $14',2$, & $14',1$, avec la réduction $+ 0',1$: ainsi j'ai eu les valeurs m, & m' très-peu différentes des précédentes primitives, c'est-à-dire $12',5$, & $13',8$, d'où j'ai tiré $TP = 1{,}114$, $T''P'' = 1{,}024$, $SP = 1{,}118$, $SP'' = 0{,}888$, $b = 2{,}006$, $PP'' = c = 0{,}29$, la valeur de la formule $0{,}1683 - 0{,}0003 = 0{,}1680$, avec son

erreur

erreur $=$ 0,0019, qui n'exige aucun nouveau changement sensible de la distance $T'P'$. Une de ces fautes, qui s' étoient glissées dans mes calculs numériques, qui pourtant étoit bien petite, m' avoit donné des résultats presque insensiblement différents, & j'en avois tiré les éléments suivants : la distance périhélie 0,34, le lieu du périhélie $8^s.12^\circ.0'$, l'arrivée au périhélie le 23 Mai 12^h.

15. Ainsi je lui écrivis dans cette autre lettre, que j' étois bien persuadé, que si l'on faisoit par les méthodes ordinaires le calcul poussé jusqu' à la plus grande exactitude, on trouveroit surement deux orbites bien peu éloignées de ces deux trouvées ici aux numéros 11, & 14, bien d'accord avec ces mêmes trois observations, quoique leurs éléments étoient si différents. Comme dans cette dernière orbite la supposée comète alloit en s' approchant de la terre, je n' avois pas douté, que celle-là ne fût la vraie : mais comme il venoit de m'annoncer, que M. Mechain par trois autres observations avoit encore trouvé une orbite différente de celle-là abandonnée aussi par les observations suivantes, j' avois vu, qu'il falloit chercher la vraie beaucoup encore au de-là. Voici la continuation de ma recherche, que je lui communiquai.

16. Quand il y a une divergence considérable des directions TE, $T''E''$, on ne peut pas aller bien loin à chercher la corde, parcequ'elle devient bientôt excessivement grande, & la valeur de la formule augmentée encore plus par la somme des distances $= b$, va beaucoup plus encore excessivement au de-là de la constante a : la même chose arrive aussi, quand les latitudes extrêmes sont beaucoup différentes, & dans ces cas-là il est très-aisé de former un jugement sur la distance, qui doit donner une corde pas trop éloignée de la véritable. Ce jugement est un peu plus incertain, quand il y a une petite ou convergence ou divergence, pourtant ordinairement je le forme de manière à n'avoir besoin, que de deux, ou tout au plus de trois positions. Dans le cas d' une petite divergence & d' un parallélisme, on peut aller un peu plus au de-là, mais pas trop ; parceque la corde $= c$, ou augmente encore, ou reste la même, tandis que la somme des deux distances $= b$ fait augmenter trop la valeur bc^2, & surpasser bientôt,

tôt, & toujours après, la valeur π : même une grande convergence des directions TE, T''E'' empêche l'éloignement, parcequ'on arrive bientôt à l'intersection suivie d'une grande divergence. La position la plus remarquable, & susceptible de plus de cas, qui ont besoin d'être développés, est celle, qu'on avoit ici, où les latitudes sont très-petites, & le mouvement total en longitude est petit aussi, & porte une convergence. Il y a de plus la circonstance d'une différence petite des petites valeurs m, m' réunie à une très-petite inégalité des temps.

17. Je développai dans cette lettre-là tout ce qui appartient à cette combinaison de circostances, en considérant dans la fig. 3 la latitude comme nulle, les temps t, t' comme égaux : la figure 2 y est conservée plus en petit avec la prolongation des directions TE, T'E', T''E'' beaucoup au de-là des intersections de la première avec la troisième, & avec la seconde en A & D, & de la seconde avec la troisième en B. Ce trois points répondent aux points L, L', L'' de la fig. 19 de l'Opuscule I (Tab. IV). J'ai conservé ici les figures, que j'avois employées dans cette lettre en changeant seulement la direction d'une ligne, & retenant tout le fond : j'y ai ajouté les arcs TL, SI tirés du centre A avec les rayons AT, AS, qui couperont les segments T''L = AT'' — AT, & T'I = AT' — AS, & pourront être pris pour des lignes droites perpendiculaires aux lignes T''E'', T'E'. Nous y considérons la ligne T'P' d'abord petite, & après augmentée continuellement beaucoup au de-là des points D, B, avec le changement de la réduction T'pt — P'T'p, & celui, qu'elle devra produire dans la raison des distances TP, T''P'', & dans la direction de la corde PP''. Dans le cas de l'isocélisme du triangle PAP'' nous ferons aller les points P, P'' en O, Q, & après nous les considérerons changés en M, N avant d'arriver en A (*), en

(*) Quand ces points arriveront à la place de ceux de la fig. 1, les droites PP'', MN se croiseront, comme on les voit dans la fig. 3, parceque la TP dans la fig. 2 = 1,114 (num. 14) est plus grande que dans la fig. 1, où elle est = 1,024 (num. 11) : au contraire la T''P'' dans la fig. 2 est 1,024 plus pe-en M', N' depuis A jusqu'à l' isocélisme du triangle M'AN' en O'AQ', & au de-là en M''N''.

18. La raison des distances TP, T''P'', sera la même, que celle des mouvements m', m changés par la réduction, qui sont proportionnels à leurs sinus. Quand la distance T'P' commencera à être assez grande par rapport aux flèches $T't$, $P'p$ toujours bien petites, le premier des deux angles $T'pt$ aura le sinus $= \frac{L}{T'P'}$ (num. *6*). Comme le logarithme de la valeur L dans la table du num. 3 est $= 7{,}644896$, ce sera le sinus de cet angle dans la distance $= 1$: ainsi cet angle sera alors $= 15',18$, & en faisant cette valeur $= n$ il sera généralement $= \frac{n}{T'P'}$ à cause de la proportionalité des petits angles avec leurs sinus. Le second sera par le même numéro *6* égal au premier divisé par le cube du rayon SP'. Au commencement le point P' sera dans l' intérieur de l' orbite de la terre, & par conséquent SP' moindre du rayon de celle-ci, qui est $= 1$, ce qui rend le second angle moindre du premier, & la réduction négative. Celle-ci diminuant la valeur m, & augmentant m', qui déjà étoit plus grande par elle même, rendra toujours la TP plus grande, que la T''P''. La raison du second angle au premier ira en augmentant avec la diminution de la SP' jusqu'à ce que celle-ci devenue perpendiculaire à la ligne T'E' en I soit dans son minimum, & après elle diminuera: la réduction diminuera aussi jusqu' à devenir $= 0$, quand SP' sera $= 1$. Passera après à être positive; mais la valeur m' quoique diminuée restera encore plus grande que l' autre m, jusqu' à ce que la réduction augmentée d' abord après ce passage arrive à être égale à la moitié de la différence des valeurs primitives $m = 12',4$, $m' = 13',9$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2} \times 1',5 = 0',75$, ce qui doit arriver bien tôt, à cause de la petitesse de celle-ci.

 19. Le

petite que dans la fig. 2, où elle est 1,450: après cette ligne elle ira en mn en quittant la PP'', & s' avancera vers A allant successivement en M'N', en O'Q', en M''N''.

19. Le premier petit angle ira en diminuant toujours à cause de la distance T'P' toujours augmentée : le second diminuera aussi toujours au moins après le passage de la SP' par son minimum en SI, qui ajoutera à la diminution du premier l'augmentation du diviseur SP'^3 : mais on voit bien, que la réduction, qui est leur différence, doit augmenter d'abord, comme je viens de le dire, après son passage du négatif au positif par le zero dans la distance $SP' = 1$, & cette augmentation la fera aller bien au de-là de $0',75$, puisqu'en employant une construction en grand poussée au de-là de la distance $T'P' = 2$ je l'ai trouvée dans cette distance $= 4',2$: mais après quelque limite elle commencera aussi à diminuer ; puisque quand la distance sera bien grande, la division du premier angle par SP'^3 rendra celui-ci presque nul de manière, que la réduction totale sera presqu'égale au premier seul, qui diminue toujours, & elle passera avec lui par toutes les quantités le plus petites jusqu'à l'évanouissement total dans la distance infinie. Pourtant quand le rayon SP' ne sera encore excessivement plus grand que l'unité, la combinaison des valeurs des deux angles un positif, & l'autre négatif, pourra porter des alternations dans l'augmentation, & diminution de la réduction, qui en est la différence. Comme c'est de-là, que dépend principalement la direction de la corde PP', & par-là sa longueur, & la valeur de la formule qu'on doit comparer avec la valeur a ; il sera bien à propos de considérer les variations de la réduction même, en exprimant sa valeur par une formule algébrique, & en tirant de celle-ci l'expression de ses maximum, & minimum rapportée à la distance T'P'.

20. Soit $T'I = b$, $SI = c$, $IP' = x$, & on aura $T'P' = b + x$, $SP'^2 = c^2 + x^2$, & par conséquent le premier des deux petits angles sera (num. 18) $= \frac{n}{b+x}$, le second $\frac{n}{(b+x) \times (c^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. La réduction, que nous avons appellée y, sera $= n(b+x)^{-1} - n(b+x)^{-1} \times (c^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$, d'où l'on tire par la différentiation

tion $dy = - ndx(b+x)^{-2} + ndx(b+x)^{-2} \times (c^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3nxdx(b+x)^{-1} \times (c^2+x^2)^{-\frac{5}{2}} = ndx(b+x)^{-2} \times (-1 + (c^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x(b+x) \times (c^2+x^2)^{-\frac{5}{2}})$.

21. Or le point P' allant toujours vers E', la valeur dx sera toujours positive, & par conséquent toujours positif le premier coefficient de cette formule. Le second sera négatif, quand la somme de ces deux derniers termes sera plus petite que l'unité. Je me borne ici à faire voir, que cette somme en sera plus petite avant que la distance T'P' arrive à être $= 3$, & beaucoup plus quand elle y arrive, & quand elle va au de-là. Les valeurs $T'I = b$, $SI = c$ ne seront jamais plus grandes que le rayon ST', qu'on peut prendre ici pour l'unité en négligeant la petite excentricité : ainsi quand la distance $T'P' = b + x$ arrivera à être $= 3$, & beaucoup plus après, la valeur x ne sera pas moindre de 2. Or $c^2 + x^2$ sera plus grande que x^2, & par conséquent $(c^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$ plus grande que 8 : ainsi le premier de ces deux termes moindre de $\frac{1}{8}$. Dans le second la valeur $b + x$ sera moindre de $2x$: par conséquent $3x(b+x)$ moindre de $6x^2$: $(c^2+x^2)^{\frac{5}{2}}$ plus grande que x^5, & ce second terme moindre de $\frac{6}{x^3}$, ou de $\frac{6}{8}$: ainsi la somme de ces deux termes sera moindre de $\frac{1}{8} + \frac{6}{8}$, c'est-à-dire de $\frac{7}{8}$, moindre de l'unité. On voit par-là, que la formule doit devenir négative avant cette limite, & rester après toujours négative, & par conséquent la réduction commencera avant cette distance à diminuer de manière, que la diminution continuera toujours après jusqu'à l'infini.

22. En faisant cette expression de la différence $= 0$, on obtient une équation, qui doit donner tous les passages par les maximum, & minimum, où l'augmentation doit se changer en diminution, & viceversa. Cette équation deviendra $1 - (c^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x(b+x) \times (c^2+x^2)^{-\frac{5}{2}} = 0$, ou $(c^2+x^2)^{\frac{5}{2}} = (c^2+x^2) + 3x(b+x)$, & $(c^2+x^2)^5 = (c^2+x^2)^2 + 3x(c^2+x^2) \times (b+x) + 9x^2(b+x)^2$, qui va au dixième degré. Elle doit donner un maxi-

ximum, qui doit y avoir entre le passage du négatif au positif par le zero, & la diminution que nous avons trouvé au numéro 21 commencée beaucoup avant la distance $= 3$, & continuée après jusqu' à l' infini. Elle pourroit bien donner dix de ces passages, c' est-à-dire cinq maximum, & autant de minimum : mais elle pourra avoir des racines imaginaires, ou des racines doubles, qui en diminueroient le nombre de deux en deux. Parmi les réelles il y en aura bien aussi du côté opposé appartenantes à la ligne E'T' prolongée à l' infini du côté de T'.

23. Cette alternation d' augmentation, & diminution de la réduction donne une telle variation de la raison des deux valeurs m, m' réduites, & par-là des TP, T''P'', de la corde PP'', des rayons SP, SP'', de la valeur de la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$, que celle-ci deviendra, peut-être, à plusieurs reprises tantôt plus petite, tantôt plus grande que la valeur constante a, en lui devenant égale dans plusieurs différentes distances T'P'. J' avois suivi plusieurs de ces variations avec beaucoup de calculs numériques, dans lesquels il y aura même des fautes, puisque ni alors j' ai eu le temps de les refaire plusieurs fois, ni depuis j'ai eu l' envie de m' en occuper, sur-tout après qu' on a découvert, que ce n' est pas une comète, ni son orbite une parabole. Il suffit ici de faire voir la marche de cette recherche, & la théorie en générale, pour achever de développer le mystère de plusieurs orbites paraboliques, qui peuvent rester d' accord avec la combinaison des mêmes trois observations, ce qui m' avoit été proposé par M. de La-Lande. Nous avons déjà vu, comment on pouvoit avoir deux arcs paraboliques d' accord avec les mêmes trois observations dans l' éloignement ordinaire des comètes, que nous avons trouvées dans la fig. 1, & 2 : ce grand nombre de variations, qu' on a vu indiquée par l' équation de dixième degré, fait voir, qu' il pourroit en avoir plusieurs autres : il pourroit aussi s' en trouver dans les vraies comètes, quoique la combinaison des circonstances, que nous avons indiquée ci-dessus, rend ce cas pour elles immensement improbables. Je ferai voir ici, comment

ment dans les circonstances, que nous avions alors relativement à ce que j' avois mis dans cette lettre il devoit y en avoir deux autres très-éloignées, ce qui m' avoit engagé à en chercher, & déterminer une dans ces grands éloignements, toujours dans la supposition de la forme parabolique, après avoir rejettée les deux précédentes.

24. Premiérement j' ai cherché par le calcul trigonométrique la position, & distance des points A, B, D, ce qui ne pouvoit pas se trouver par construction à cause de la petitesse des angles formés dans ces points, dont la distance doit être changée immensement par les changements des mêmes angles presque tout-à-fait insensibles à la construction, & qui par cette même petitesse sont renvoyés à des distances, qui ont une raison trop grande aux rayons ST, ST', ST'', & deviennent d' une longueur trop plus grande que celle des feuilles de papier, si l' on ne prend ces rayons trop petits. Dans le triangle TST'' les deux rayons ST, ST'', qui sont les deux distances extrêmes du soleil à la terre, & l' angle TST'', qui est la différence de ses longitudes (on a tout cela dans la table), donnent la base TT'', & ses angles, qui comparés avec les élongations $STE = e, ST''E'' = e''$, qu' on a aussi dans la même table, donnent les angles $ATT'', AT''T$ par la différence de deux premiers, & des deux derniers. La base TT'' avec ces deux angles donne dans le triangle TAT'' les côtés $TA, T''A$: mais pour avoir moins d' inexactitude il faut employer l' angle $TAT'' = m''$, qu' on a dans la table : il doit être égal au supplément de ces deux : mais si on le prenoit par-là, les petites quantités négligées dans le calcul trigonométrique ordinaire le changeroient de manière, que la distance trop changée par ces changements quoique bien petits, viendroit trop fautive. De la même manière on trouve les distances $TD, T'D$ par les triangles TST', TDT', & les distances $T'B, T''B$ par les $T'ST'', T'BT''$, d'où l' on tire la forme & la position du triangle ABD. Ayant fait le calcul, j' ai trouvé $TA = 13,68$, $T''A = 13,86$, ce qui fait voir le grand éloignement du point A : ainsi on pourroit encore prendre leur demi-somme 13,77 pour la di-

distance du point T' au point A, & comme j'ai trouvé aussi les côtés AD, AB du triangle BAD bien petits par rapport à cette grande distance, & les angles en B, & D sont si petits, on peut considérer le point A comme placé dans la même ligne T'E'.

25. Le côté AP'' du triangle PAP'' reste plus grand, que l'autre AP tout le temps que la réduction est négative, nulle, ou positive plus petite, que la moitié de la différence des valeurs primitives des m, & m', qui est $= 0',75$, comme nous avons vu ci-dessus; parcequ' alors l' excès de la seconde sur la première conservé jusqu' à ce dernier terme fait, que la TP soit plus grande que la T''P'', & par conséquent beaucoup plus grande que la LP''. Dans tous ces cas le côté AP'' du triangle PAP'' est plus grand que le AP, & la base PP'' a l' inclinaison vers le point T'' exprimée par la figure. Après ce terme la réduction positive augmentée au de-là de cette moitié rend la valeur m plus grande que m', & par conséquent la T''P'' plus grande que la TP; mais le côté AP'' reste plus grand que le côté AP jusqu' à ce que la réduction positive augmentée toujours plus rende l' excès de la T''P'' sur la TP égale à la T''L. C' est alors, que la corde PP'' va en OQ base du triangle isocèle OAQ. La détermination de cette limite, c' est-à-dire des distances TO, T''Q, qui laissent AO, AQ égales, exigeroit trop de calcul fondé sur l' expression générale de la réduction donnée par la valeur $lP' = x$, qui détermine la réduction, & par son moyen la raison des distances TP, T''P'', & l' égalité de leur différence avec la T''L. Il suffit ici de faire la réflexion, que la base OQ de ce triangle devenu isocèle doit être assez petite à cause de la petitesse de l' angle OAQ $= m'' = 26',3$. C' est l' obliquité de la base PP'' du triangle APP'', qui l'a rendu capable dans la fig. 2 d' une longueur suffisante pour l' égalité de la formule avec la valeur a avant d' arriver à l' isocélisme, qui répond à la base OQ de la fig. 3. Après cet isocélisme il y a une inclinaison contraire en MN produite par l' excès de la T''P'' devenue T''N sur la TP devenue TM plus grand que la T''L, qui allonge la base MN du triangle AMN de manière à donner une autre corde capable d' égaliser la

for-

formule à la valeur a, comme on l'a trouvée dans la fig. 1. On pourroit chercher à des très-petits intervalles un très-grand nombre de valeurs de la corde PP'', & de la formule jusqu'au point A, pour voir s'il n'y a des variations successives dans cette dernière déterminée par la première $= c$, & par la somme b des distances SP, SP'', avec des rétours du triangle PAP'' à l'isocélisme après le premier OAQ antérieur au point A, & avant le premier O'AQ', qui se trouve après le passage par le même point, & de la même formule à l'égalité avec la valeur a: mais ce travail seroit énorme. J'ai suivi la valeur de la réduction en la déterminant pour plusieurs distances T'P': j'en ai tiré les autres TP, T''P'' avec la corde PP'', & en arrivant à la distance double, & triple du rayon de l'orbite de la terre, où les comètes ordinairement ne sont pas visibles, j'ai trouvé une longueur si grande de la même PP'' passée en MN, qu'elle ne me laissoit aucune espérance de trouver rien de satisfaisant plus au de-là.

26. Il semble au premier coup d'œil que la base MN devroit s'évanouir en arrivant en A, ce qui démontreroit une diminution précédente : mais cet évanouissement n'a pas lieu ; parceque les points M & N n'arrivent pas ensemble en A. Le point N y arrive avant, & alors le point M se trouvant encore bien en arrière, la base MN se trouve couchée sur la droite TA : le point N passe après sur la ligne AE'' en N', & le point M restant encore sur la ligne TA, la base MN se trouve dans l'angle TAE''. Le point M arrive après en A, & cette base se trouve couchée sur la ligne AE''. A' la fin le point M aussi franchit ce pas, & va dans la ligne AE en M'. La base se trouve en M'N' dans l'angle EAE'' avec une direction, qui répond à la première PP'', mais opposée, & conforme plutôt à la P''P. Après ce passage par le point A elle reste encore assez longue dans la grande obliquité à la ligne AE, sur laquelle elle venoit à se plonger ; mais bientôt après elle s'en détourne, & toujours plus, en diminuant de longueur jusqu'à ce qu'elle arrive en O'Q' à cet autre isocélisme du triangle O'AQ', où elle devient très-petite : en s'avançant elle prend en M''N'' une inclinaison opposée, qui ré-

répond à la NM, & s' allonge de manière, que bientôt sa longueur devient énorme.

27. Je n' avois pas cherché d' abord, où étoit le commencement de la diminution perpétuelle de la réduction, & je le soupçonnois bien éloigné; parcequ' en déterminant la réduction même par la construction faite en grand, je l'avois trouvée zero entre la distance $T'P' = 1$, & $= 2$, & augmentée jusqu' à $4',2$ dans la distance $= 2$, comme j'ai dit au num. 19, & $6',9$ dans la distance $= 3$, ce qui m' avoit donné les valeurs m, & m' réduites dans la première de ces deux distances $16',6$, & $9',7$, & dans la seconde $19',3$, & $7',0$, & par conséquent la TP'' dans celle-là presque double de la TP, & dans celle-ci presque triple avec une longueur énorme de la PP'', & une énorme augmentation de sa valeur depuis la distance 2 jusqu' à 3, & m' avoit déterminé à m' arrêter sans aller plus avant. Mais nous avons vu au num. 22, que cela est arrivé avant la distance $= 3$: ainsi cette seconde valeur trouvée dans cette distance venoit après ce commencement de diminution, & si j' avois continué la recherche en allant plus avant, je l' aurois trouvée non plus grande encore, comme cette augmentation trouvée de zero, $4',2$, & $6',9$ paroissoit annoncer, mais plus petite. Pourtant la PP'' pouvoit aller encore en augmentant, & voici la raison de tous ces phénomènes.

28. Que l' on conçoive les arcs MR, $M'R'$, $M''R''$ tirés avec le centre A, & terminés à la ligne $T''E''$, qui à cause de la petitesse de l' angle en A seront bien petits, & pourront être pris pour des lignes droites perpendiculaires à la même ligne: RN, $R'N'$, $R''N''$ seront les différences de la distance des points P, P'' au point A, & la différence des deux distances aux points T, T'' est déterminée par la ligne TL combinée avec ces trois. L' excès de la troisième $T''P''$ sur la première TP depuis OQ jusqu' à $O'Q'$ sera $T''L + RN$, & $T''L + R'N'$, & après $O'Q'$ elle sera $T''L - R''N''$, cette dernière ayant changé la direction devenue opposée. Cet excès dépend de la distance de la corde PP'' avancée au de-là de OQ de deux manières: 1°. par le changement

de

de la réduction, qui en changeant la raison géométrique des valeurs m, m' change celle de ces deux distances : 2°. parceque le même changement de la raison géométrique porte une différence des deux termes proportionnelle à leur grandeur absolue de manière que cette différence est beaucoup plus grande, quand la grandeur absolue est assez grande.

29. Or ici la réduction ne détruit la différence des deux distances $TP, T''P''$, qu' en réduisant les deux valeurs m', m à l' égalité, ce qui ne peut arriver, que quand la réduction devient positive, & égale à leur demi-différence primitive, que nous avons vu $= 0', 75$, & ne détruit la différence des distances au point A, que quand elle la rend $= T''L$. On a ce second effet en OQ, & O'Q' : le premier ne peut pas arriver tandis que la réduction est négative : il arrive bien, quand le point P' parvient à un point K de la ligne T'E' bien éloignée, ou la réduction positive diminuée arrive à une valeur si énormément petite. Dans cette grande distance la réduction peut être considérée comme égale au seul premier petit angle, le second devenant presque rien par la division du cube de la distance SP' devenue alors SK. On trouve aisément la distance T'K, dans laquelle le premier angle devient $= 0', 75$. Sa valeur (num. 18) est généralement $= \frac{15, 18}{T'P'}$: il suffit de faire cette valeur $= 0', 75$, & on aura $T'P' = \frac{15, 18}{0, 75} = 20, 25$. On voit bien qu' alors la SP' deviendra à peu-près $= 20$, & le second petit angle $= \frac{0, 75}{8000}$ ne changera la réduction trouvée en le négligeant que d' une quantité énormément petite, & la distance trouvée que de 0,0001.

30. Nous avons trouvé, que la base OQ du premier triangle isocèle OAQ formé par la destruction de la différence RN des distances AP, AP'' reste entre les deux PP'' de la figure 2, & 1, qui répondent ici aux deux PP'', MN, & la TP dans ces deux cas étoit $= 1, 114$, & $1, 024$ (num. 11 & 14), ainsi le point O se trouve entre ces deux limites qui sont peu éloignées entr' elles. La seconde base O'Q' doit se trouver avant le point K,

& en être peu éloignée, ce qu'on verra aisément par les réflexions suivantes.

31. En allant de la distance 2 à 3 j'ai trouvé (num. 27) la différence des deux réductions bien petite $6',9 - 4',2 = 2',7$: mais comme les valeurs primitives m, m' sont aussi petites & les réductions pas trop moindres des mêmes valeurs, celles-ci ont introduit des raisons géométriques entre celles-là réduites qui sont trop éloignées de l'égalité, avec une très-grande différence entre les deux résultats. Comme ces mêmes sont les raisons géométriques des distances $T''P''$, TP, & leur valeurs absolues sont déjà assez grandes, cet éloignement de l'égalité dans les raisons géométriques ont introduit des différences assez grandes dans les deux distances entr'elles, & la seconde différence s'est trouvée beaucoup plus grande que la première, ce qui a allongé très-fort la corde PP'' dans tous les deux cas, avec une très-grande différence de l'une à l'autre.

32. La première de ces deux réductions a rendu le second terme presque double du premier, & la seconde presque triple (num. 27). Comme la $T'P'$ arrive à la base OQ avant d'être égale à $1,24$, & nous l'avons dans ces deux cas égale à 2, & 3; la PP'' s'y trouve déjà dans tous les deux au de-là de cette base avec la position MN, où la différence des deux distances est $= T''L + RN$; mais à cause de la petitesse de l'arc $TT'T''$ la ligne $T''L$ est bien petite, la différence des deux TM, $T''N$ dans le premier cas sera presqu'égale à la TP, qui doit être plus grande que l'unité, & dans le second plus que 2: ainsi elle sera dans le premier cas plus grande que le rayon de l'orbite terrestre, & dans le second plus que son double, & ayant égard à la petitesse de la ligne $T''L$, qu'il faut ôter de cette différence pour avoir la RN, celle-ci restera au moins égale au rayon ST dans ce premier cas, & dans le second à son double. La corde MN en sera encore plus grande, tandis qu'à parité de distance au soleil S elle doit être à la petite corde TT'' en raison de $\sqrt{2}$ à 1, & encore plus petite dans un éloignement plus grand. On voit par-là que la longueur de la première distance TP devenue bien grande en TM,

& l'

& l' éloignement, que la raison géométrique a de l'égalité dans ces deux cas, a allongé trop fort la corde, & beaucoup plus dans le second cas, que dans le premier, quoique la réduction dans celui-ci n'a pas été plus grande que dans celui-là dans la même proportion.

33. En augmentant la distance T'P' on diminue la réduction, ce qui diminue l' éloignement de l' égalité, qu' on avoit trouvé dans la raison géométrique de la valeur m à m', & de la première distance à la troisième : mais l'augmentation de la valeur absolue peut augmenter encore la différence des mêmes distances, & la longueur de la ligne RN, & de la corde MN jusqu' à une limite, dans laquelle l'approche de cette raison à l' égalité produite par la diminution de la réduction l' emporte sur l' augmentation absolue des distances, & la corde commence à diminuer. Comme cette diminution se fait alors par la diminution de la différence des deux distances, & quand la M'N' arrive en O'Q', elle devient $=$ T'''L, & en K $= 0$; on voit bien qu' on doit avoir cet anéantissement après cette arrivée à la base O'Q', & que par conséquent celle-ci se doit trouver au de-là vers le point K, ce qui est un des deux articles, que j' avois proposés à la fin du num. 30.

34. L' autre article étoit, que cette base n' en pouvoit être que peu éloignée. La raison en est, parceque d' un côté l'excès de la troisième distance T'''N'' sur la seconde TM'' en O'Q' doit être égal à la ligne T'''L, qui est très-petite, & en K il doit s'évanouir, de l' autre un petit changement dans la raison géométrique des deux distances proportionnelles aux valeurs m', m doit porter un changement considérable dans la différence des mêmes distances allongées en K jusqu' à devenir vingt fois plus grand que le rayon ST, & cette raison est changée par le changement de la réduction formée déjà par le seul premier petit angle, qui est réciproquement proportionnel à la distance T'P' : ainsi ce petit changement de la réduction répondra à un petit changement de la distance.

35. C' est ce même changement, qui combiné avec la petitesse

de la base O'Q' produit une inclination considérable dans les deux cordes M'N', M''N'' peu éloignées de la même, & par-là les rend capables des former l'égalité de la formule avec la valeur a, & pouvoir servir pour les deux autres orbites paraboliques éloignées après les deux PP'', M'N' trouvées dans le voisinage. La petitesse de la base O'Q', qui répond à l'isocélisme du triangle PAP'' allé en O'AQ', étoit essentiellement nécessaire pour avoir ces deux cordes d'une longueur capable de rendre la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$. Dans ce grand éloignement le second terme peut être considéré comme nul. Si le produit du quarré de O'Q' $= c^2$ par la somme des distances SO' + SQ' $= b$ se trouvoit plus grand que la valeur a; on ne pourroit pas trouver ces deux cordes capables de cela, parceque l'obliquité les rendant encore plus grandes, & les distances ne s'augmentant pas en proportion, la valeur de bc^2 se trouveroit toujours plus grande que la valeur a: mais ici cette base s'est trouvée assez petite.

36. Or voici comment j'avois trouvé, qu'il y avoit cette petitesse. Nous avons vu ci-dessus au num. 24, qu'on peut considérer le point A comme placé dans la ligne DB, & prendre la T'A come égale à la demi-somme des lignes TA, T''A $= 13{,}17$: j'avois trouvé la T'K $= 20{,}24$ presque la même que celle, que nous avons trouvé ici au num. 29 par un calcul très-peu différent: cela a laissé AK $= 6{,}47$. Si l'on met les points H, H', H'' dans l'intersection de la ligne T'E' avec les O'Q', M'N', M''N''; la AH sera plus petite que la AK, & on pourra prendre pour O'Q' le sinus de l'angle O'AQ' $= m'' = 26', 1$: ainsi O'Q' est moindre de $6{,}47 \times sin. 26', 1$, & par conséquent moindre de $0{,}05$: ce seroit la valeur c. La somme des SO', SQ' $= b$ est moindre de 2T'K, c'est-à-dire de $40{,}48$: ainsi bc^2 reste moindre de $40{,}48 \times 0{,}0025$, c'est-à-dire de $0{,}1012$, tandis qu'on a la valeur $a = 0{,}1699$. Cela fait voir, que la base O'Q' est trop petite, & que par conséquent on doit trouver les deux M'N', M''N'' propres pour être aussi les cordes de deux autres paraboles.

37. On voit bien que la première étoit inutile, parcequ'elle don-

donne un éloignement de l' astre, qui auroit eu le passage par le périhélie bien avant ce temps-là avec une distance beaucoup plus petite indiquée par l' obliquité considérable nécessaire pour lui donner la longueur suffisante, ce qui l' auroit rendu beaucoup plus visible long-temps avant : ainsi il suffisoit de chercher la seconde seule. On pouvoit employer pour cet effet la fausse position, prendre une $T'H''$ un peu moindre de la $T'K$, en tirer la réduction, & trouver par un calcul trigonométrique simplifié beaucoup par l' éloignement la valeur bc^2, en la comparant avec la valeur a : on trouveroit les deux TP, $T''P''$ devenues TM'', $T''N''$, & on en tireroit les AM'', AN'', qui donneroient leur différence $R''N''$, & $M''R'' = AM'' \times sin.M''AR'' = c$. On trouveroit $T'I = ST' \times cos.ST'E' = cos.e'$, qui ôtée de la $T'H''$ laisseroit la $IH'' = SH''$, dont le double pourroit être pris pour la somme des distances SM'', $SN'' = b$. En changeant la position $T'H''$ on parviendroit à trouver les deux cordes $M'N'$, $M''N''$ requises. Mais j' ai vu que des erreurs bien petites commises dans les observations en auroient produit de très-grandes dans les résultats à cause de la trop grande petitesse des valeurs m, m' primitives, & beaucoup plus de celle de leur demi-différence $= 0',75$ énormément plus petite. Pour cela j' ai changé ces observations en d' autres plus éloignées, & pour rendre le calcul également facile, & m' éloigner moins de l' exactitude, j' en ai tiré par interpolation trois longitudes du même astre avec ses latitudes à deux intervalles de temps exactement égaux chacun de 17 jours : j' ai pris les longitudes & distances du soleil à la terre correspondantes, & on voit ces lieux dans la petite table suivante.

T. M.	Long. A.	Lat. A bor.	Long. ⊙	Dist. ⊙ − ♁
Avr. $3^j.7^h.37'$	$2^s.24^\circ.52',5$	$0^\circ.5,7$	$0^s.14^\circ.24',4$	1,00124
20.7.37	2.25.25,5	0.7,1	1.1.1,4	1,00612
Mai 7.7.37	2.26.12,3	0.8,6	1.17.30,6	1,00445

38. J' ai refait d' abord pour ces nouvelles données tout le calcul que j' avois employé pour les précédentes, & j' en ai

mis

mis au long les résultats qui sont inutiles à-présent : ainsi je supprimerai ici presque tout cela, en proposant ce qu'il y a d'appartenant à quelque nouvelle méthode employée dans cette partie de la lettre. Pour ce qui est des premiers résultats des valeurs à préparer, en voici une partie, qui fait voir combien il y avoit plus d'espérance de succès par ces nouvelles données. J'ai trouvé la valeur $a = 1,3681$: $e' = 54^\circ.24',1$: $v' = 0,04145$: $L = v'sin.e$, dont le logarithme vient $= 8,527677$, & son nombre n, qui est la réduction à la distance 1, $= 115,89$: $m = 33',0$: $m' = 46',8$: $m'' = 79,8$: la différence $m' - m = 13',8$, & la demi-différence $= 6',9$, qui dans les données précédentes n'étoit que $0',75$. Cette nouvelle demi-différence a donnée la distance $T'K = \frac{115,89}{6,9} = 16,79$ à la place de la précédente, qui étoit $20,25$ (num. 29) : pourtant cette seconde est très-peu éloignée de la vraie distance trouvée par des meilleurs méthodes indépendantes de la supposition d'une orbite parabolique comme nous verrons après.

39. La méthode indiquée n'emploie cette distance du point K placé un peu au de-là des deux cordes $M'N'$, $M''N''$, mais la distance de la base $O'Q'$, qui se trouve entr'elles, & pour cela en doit être moins éloignée, & plus propre pour trouver ce qu'on doit prendre pour la première position de la distance $T'P'$ parvenue en H'', & en tirer la réduction, & tout ce qui est nécessaire pour avoir la valeur de la formule à comparer avec a, & déterminer par la méthode des fausses positions la vraie distance, & position de la corde $M''N''$: ici j'ai donné deux méthodes avec les formules fondées sur la valeur analytique de la même réduction encore inconnue, mais donnée par la distance aussi inconnue faite $= x$, la première pour avoir la distance $T'H$ de la même base $O'Q'$ moins éloignée que la distance $T'H''$ objet de la recherche, l'autre pour avoir immédiatement cet objet par une équation, qui se trouve de troisième degré.

40. Pour la distance $T'H$ il faut trouver comme ci-devant les angles, & les côtés du triangle TAT'' & la ligne $T''L =$

TT''

$TT'' \times cos. TT''E'' = ST \times cos. e''$. On fera $TA = r$, $T''L = h$, $T'I = d$, $T'H = x$: & on aura la réduction $= \frac{n}{x}$, les valeurs m & m' réduites $= m + \frac{n}{x}$, & $m' - \frac{n}{x}$. Par les formules du num. 9 & 3 on doit avoir ici, où les temps sont égaux (*) $TO' = \frac{2m'x - 2n}{m''}$, $T''Q' = \frac{2mx + 2n}{m''}$, & comme on a $LQ' = T''Q' - T''L = TO'$, on aura $\frac{2mx + 2n}{m''} - h = \frac{2m'x - 2n}{m''}$, d'où l'on tire $2x(m' - m) = 4n - m''h$, & $x = \frac{4n - m''h}{2(m' - m)}$.

41. J'ai trouvé ici $TA = r = 13,77$, $T''L = h = 0,48$, qui combinées avec les valeurs m, m', n du numéro 38, m'ont donné $T'P' = x = 15,41$. On tire de-là aisément les valeurs TO', $T''Q'$, & AO', AQ' leur différence aux TA, $T''A$ avec la base $O'Q'$ très-petite (**), qui a fait voir, qu'il y avoit les deux cordes $M'N'$, $M''N''$ propres pour égaliser les formules à la valeur a. On les peut trouver par la méthode de la fausse position proposée ci-dessus, mais j'ai ajouté la méthode indiquée de les trouver en déterminant la distance $T'H$ par une équation directe, à laquelle on parvient aisément à l'aide des expressions trouvées ici pour les distances TO', $T''Q'$ dépendamment de la ré-du-

---

(*) TO', $T''Q'$ sont ici les cas particuliers des valeurs générales TP, $T''P''$ du num. 9, qui en mettant $T'P'$ pour tp deviennent $L' \times sin. m' \times T'P'$, & $L'' \times sin. m \times T'P'$. On a ici $T'H = x$ pour $T'P'$, & au num. 3 les valeurs L', L''; qui à cause de $t = t'$, $t'' = 2t$, & de la substitution des m, m', m'' à leurs sinus deviennent $\frac{2m'}{m''}$, & $\frac{2m}{m''}$: ainsi on a $\frac{2m'x}{m''}$, & $\frac{2mx}{m''}$: en mettant à la place de m' & m leurs valeurs réduites $m' - \frac{n}{x}$, & $m + \frac{n}{x}$, on obtient $\frac{2m'x - 2n}{m''}$, & $\frac{2mx + 2n}{m''}$, comme on a employé ici pour les TO', $T''Q'$.

(**) Elle est même trop petite, comme aussi la $T'K$ du num. 36, & j'en parlerai encore ci-après ; mais ce qui intéresse à-présent c'est la méthode, & elle ne peut pas avoir donné un si grand éloignement de la véritable distance.

duction exprimée par la même distance T'H'' faite $= x$. On aura TM'' à la place de $TO' = \frac{2m'x - 2n}{m''}$, & T''N'' à la place de $T''Q' = \frac{2mx + 2n}{m''}$, $LN'' = T''N'' - T''L = T''N'' - h$, $R''N'' = LR'' - LN'' = TM'' - LN''$(*) $= TM'' - T''N'' + h = \frac{2(m' - m)x - 4n}{m''} + h$: on aura aussi $AM'' = TM'' - TA = \frac{2m'x - 2n}{m''} - r$, $M''R'' = AM'' \times sin. M''AR'' = (\frac{2m'x - 2n}{m''} - r) sin. m''$. Ainsi on aura $M''N''^2 = M''R''^2 + R''N''^2$, c' est-à-dire c^2 de la formule à comparer avec a réduit à la forme $Px^2 + Qx + R$, où P, Q, R seront des quantités connues. On pourra prendre $IH'' = T'H'' - T'I = x - d$ pour SH'', & 2SH'' pour SM'' + SN'', c' est-à-dire pour b de la même formule qui restera $= 2x - 2d$, & le premier terme bc^2, qu' on doit prendre seul en négligeant le second $-\frac{c^4}{12b}$ à cause de la très-grande petitesse de c, & longueur de b, & faire $= a$, donnera une équation de troisième degré, la valeur c^2 ne contenant que x^2, & b que x (**).

42. Mais à la place de résoudre cette équation j' ai fait voir, qu' à l' aide des valeurs trouvées ici par x on pouvoit plus aisément trouver la même x, & tout ce, qui en dépend, & suffit pour trouver les éléments de l' orbite en employant la fausse position par une méthode plus aisée que l' autre indiquée ci-dessus au num. 37. Ayant trouvé la valeur T'H (num. 41) on peut pren-

(*) Car $LR'' = LA + AR''$ est $= TM'' = TA + AM''$ à cause des rayons LA, TA, & AR'', AM'' égaux.

(**) Par ce moyen le problème essentiel pour la détermination de la parabole des comètes est baissé dans les circonstances présentes jusqu' au troisième degré même en y comprenant dans l' équation la réduction inconnue. Dans l' Opuscule I en employant la réduction inconnue il avoit été réduit au 16.me, sans elle au sixième, & dans les cas des deux observations faites dans les deux nœuds au quatrième dans le Mémoire correlatif VI du même Opuscule.

prendre pour la première position de la $T'H'' = x$ un nombre un peu plus grand. On trouve alors en nombres les trois valeurs suivantes, $R''N'' = \frac{2(m'-m)x-4n}{m''} + h$, $M''R'' = (\frac{2m'x-2n}{m''} - r)\sin.m''$, $SH'' = x-d$: on fait la somme des quarrés des deux premiers, & on la multiplie par le double du troisième : on compare ce produit, qui est la valeur bc^2, avec la valeur a, & on prend la différence pour la première erreur. On change un peu la position de la valeur x, & en refaisant le calcul numérique on trouve la seconde erreur. On tire de-là par la méthode ordinaire des fausses positions la nouvelle valeur x, qu'on peut prendre pour la vraie, si les deux erreurs ont été assez petites, comme elles le seront, puisque le point H'' ne doit pas être trop éloigné du point H.

43. J'ai fait tous ces calculs, & j'en ai mis le résultat dans la même lettre, en y ajoutant la manière de tirer tous les éléments de l'orbite supposée parabolique, que je proposerai ici aussi, comme appartenante aux méthodes : je dirai seulement qu'ayant pris pour la première position $x = 16$ un peu plus grande que la valeur 15,41 trouvée (num. 41) pour la $T'H$, j'ai trouvé une erreur négative $-$ 0,0567, & ayant ajouté seulement 0,02 en prenant $x = 16{,}02$ je l'ai trouvée déjà positive $= 0{,}0266$, ce qui m'a donné la valeur à prendre 16,014, où j'ai négligé ce 0,004 en faisant $T'H'' = x = 16{,}01$.

44. Pour trouver les éléments par les valeurs trouvées, on trouve l'angle $SH''T'$ par son sinus $= \frac{ST' \times \sin.ST'H''}{SH''} = \frac{ST' \times \sin.e'}{SH''}$: on trouve aussi l'angle $M''N''R''$ par sa tangente $= \frac{M''R''}{N''R''}$: on a alors l'angle $BH''N'' = M''N''R'' - H''BN''$, ce dernier étant le même que le $E'BE''$ second mouvement en longitude $= m'$: ainsi on a encore $SH''N'' = SH''T' + BH''N''$, celui-ci étant le même que $T'H''N''$. Comme on peut prendre la petite corde $M''N''$ pour tangente, & le point H'' pour celui du contact, l'angle $SH''N''$ est celui que le rayon vecteur SH'' fait avec la tangente, qui est

est le complément de la moitié de l'anomalie, comme on démontre aisément par les propriétés de la parabole, ce qui donne cette moitié, & par conséquent l'anomalie entière, & la distance périhélie, qui étant égale au rayon vecteur multiplié par le quarré du co-sinus de la même moitié sera $= SH'' \times \mathit{sin}^2.\, SH''N''$.

45. Le lieu du périhélie se trouve en conséquence de la manière suivante. On aura l'angle $T'SH''$ supplément de la somme des deux, $SH''T'$ trouvé, & $ST'H'' = e'$, & la longitude de la direction ST', qui est la seconde longitude héliocentrique de la terre opposée à la seconde des trois longitudes géocentriques du soleil, qu'on a dans la table du num. 37. En ôtant l'angle $T'SH''$ de cette longitude, on a celle qui répond à la direction SH', & ajoutant à celle-ci l'anomalie, on a la longitude du périhélie dans l'orbite. Ayant l'anomalie, & la distance périhélie, on trouve par les tables paraboliques le temps qui lui répond, & celui-ci ajouté au temps de la seconde observation donne celui de l'arrivée au périhélie.

46. Pour le lieu du nœud, & l'inclinaison de l'orbite on voyoit bien, que la petitesse des latitudes, & celle de leur différence devoit rendre leur détermination très-incertaine : mais pour un complément de la méthode, qui viendra aussi en usage dans une autre Mémoire, je les ai cherché. Les points M'', N'' sont ceux de l'orbite projettée, & il faut concevoir les points C, C'' de l'orbite inclinée en haut, les lignes $M''C$, $N''C''$ perpendiculaires à la corde $M''N''$, l'autre corde $C''C$ prolongée jusqu'à sa rencontre avec elle en Z, & la ligne SZ, qui sera celle des nœuds. En appellant l, & l'' la première, & dernière latitude, on a à l'ordinaire $M''C = TM'' \times \mathit{tan.}l$, & $N''C'' = T''N'' \times \mathit{tan.}l''$, où on peut prendre les nombres mêmes des mêmes latitudes, qu'on a dans la table, à la place de leurs tangentes, puisqu'à cause de leur petitesse ils sont proportionnels à ces tangentes, & on n'a besoin que de leur rapport : ainsi on aura $M''Z = \dfrac{M''C \times M''N''}{N''C'' - M''C}$, & y ajoutant $\frac{1}{2}M''N''$ prise pour $H''M''$, on aura $H''Z$. Le deux côtés SH'', $H''Z$ avec l'angle $SH''Z$ supplément du $SH''N''$, qu'on a trouvé, donneront l'angle ZSH'', qu'on ôtera de la longitude de

de la direction SH'' trouvée aussi pour avoir la longitude du nœud.

47. Si l'on conçoit le plan M''XC perpendiculaire à la ligne des nœuds, on aura l'inclinaison de l'orbite par sa tangente $\frac{M''C}{M''X} = \frac{TM'' \times tan.\, I}{M''Z \times sin.SZH''}$. Le mouvement sera direct. Ainsi on aura tous les éléments.

48. Ayant fait tous ces calculs, & beaucoup d'autres correlatifs j'avois trouvé les éléments suivants; mais en lui les envoyant je lui marquai qu'on ne pouvoit pas y conter: la petitesse du mouvement, qui donne le phénomène de quatre cordes capables de s'accorder avec les mêmes trois observations, empêchoit l'exactitude de leur détermination, qu'il falloit attendre des observations plus éloignées.

Lieu du nœud	2ˢ. 27°. 58'
Inclinaison de l'orbite	21 . 9
Lieu du périhélie	7 . 26 . 51
Distance périhélie	1,143
Arrivée au périhélie	23 Juil. 1786
Mouvement	Direct.

J'avois aussi fait quelqu'essai sur la corde M'N' en déterminant les M'R', R'N', & j'avois trouvé, que la direction N'M' se portoit presque directement vers le soleil de manière, que la distance périhélie auroit été bien petite, ce qui auroit fait voir la supposée comète long-temps avant, comme je l'ai remarqué au num. 37 sur la seule considération de sa direction prise en gros.

49. J'ajouterai la méthode, que j'ai proposé dans la même lettre pour appliquer à la recherche de l'orbite circulaire les figures, & les expressions employées ici pour la recherche de l'orbite parabolique. Pour celle-ci nous avions cherché une distance x telle que le quarré de la corde M''N'' multiplié par le double de la distance SH'' donne un produit égal à la valeur a correlative au quarré de la vîtesse du mouvement dans la parabole. Dans la même recherche de cette valeur on avoit supposé le théorème démontré par Newton, qu'à parité de distance le quarré

de la vîtesse dans la parabole est double de celui de la vîtesse dans le cercle : ainsi le quarré de la corde circulaire multiplié par le même double doit être égal à la moitié de la même valeur, & multiplié par la simple distance doit être égal à son quart, qui devient ici 0,342.

50. Si l'on conçoit un arc de cercle avec le centre S & le rayon SH ; on voit bien, qu'il sera sensiblement égal à la base O'Q' à cause de son éloignement, qui doit produire une inclinaison mutuelle très-petite : alors la détermination devient beaucoup plus simple. Soit L' la rencontre de l'arc TL avec la direction T'E', & qu'on conçoive la ligne SH à la place de la SH'' : on aura $T'L' = TT' \times cos.TT'E' = TT' \times cos.e'$, que l'on fera $= h'$, & ayant fait de même $T'H = x$, on aura $L'H = x - h'$, qui étant $= TO'$, on aura $AO' = x - h' - r$, & $O'Q' = (x-h'-r) sin.m''$ à cause de l'angle $O'AQ' = m''$. Le rayon SH sera $= IH = x - d$ comme auparavant, & par conséquent on aura $(x - h' - r)^2 sin^2.m'' \times (x - d) = a'$, ce qui donne aussi un' équation de troisième degré. Mais à la place d'en faire la résolution j'ai employé la fausse position. En faisant $T'H = x = 15,41$, comme je l'avois trouvée ci-dessus, la valeur O'Q' venoit trop petite : ainsi dans la première position j'ai pris $x = 18$, & j'ai trouvé une erreur négative un peu considérable : dans la seconde je l'ai prise $= 20$, & l'erreur est devenue positive, & petite : sa valeur à la fin m'est restée $= 19,73$, ce qui laisse la distance au soleil $SH = 19,14$.

51. Cette détermination donnoit la distance double de celle de Saturne, & très-peu différente de ce qui s'est trouvé depuis par des observations beaucoup plus éloignées entr' elles, & par des méthodes, qui ne supposent pas la forme circulaire : cela s'accorde encore suffisamment avec la valeur, que j'avois trouvé ici au num. 36 par les trois observations, que j'avois employées d'abord. J'ai trouvé peu de temps après par deux autres méthodes appliquées à des observations encore plus éloignées entr' elles la distance aussi peu différente de celle-là, comme on verra dans le Mémoire suivant. Mais comme en comparant la valeur

trou-

trouvée ici avec la seconde observation de la table du num. 37, qui n'étoit pas entrée dans la détermination présente, & que je croyois exacte, s'y trouvoit une différence beaucoup plus grande qu'à pouvoir la réjetter sur la difficulté d'arriver dans l'Astronomie pratique à l'exactitude au de-là de certaines limites, j'eus du soupçon sur la forme circulaire, comme je m'exprimai dans la même lettre. Pour cela j'y proposai des modifications à ma méthode pour les paraboles pour pouvoir l'appliquer à des observations éloignées au de-là des limites, dans lesquelles on peut l'employer telle que je l'ai proposée dans l'Opuscule I de ce Volume.

52. En attendant après avoir écrit cette lettre j'appliquai cette même méthode parabolique à trois observations du 3 Avril, 7 Mai, 17 Juillet, en employant la corde M''N'' la plus éloignée des quatre de la fig. 3. J'en ai donné l'application avec le résultat dans le Mémoire imprimé en Italien, dont j'ai parlé ici dans la préface. J'y ai mis la délinéation de la parabole avec l'orbite de la terre, petite pour y faire entrer la distance actuelle, qui étoit = 19,32, avec la division an par an, où l'arrivée au périhélie tombe dans l'an 1790. Les observations de ce temps-là s'accordoient avec cette parabole: mais je fis une réflexion, qui me fit revenir sur l'idée de la forme au moins à-peu-près circulaire. L'angle de la corde avec le rayon vecteur, qui dans la même fig. 3 est l'angle SH''N'', venoit à-peu-près de 45 degrés. Cet angle est égal à-peu-près à l'angle M''N''R'', où le quarré de la M''N'' devient alors double du quarré de la M''R'' de manière que ces deux lignes ont le même rapport entr'elles, que la vîtesse dans la parabole à la vîtesse dans le cercle à parité de distance, & par conséquent le mouvement dans la parabole par M''N'' devoit présenter à la terre placée en TT'T'' les lieux apparents à-peu-près les mêmes, que le mouvement dans le cercle par M''R''. Ainsi le mouvement circulaire devoit nécessairement s'accorder avec un arc parabolique de cette inclinaison unique, tandis que parmi le nombre infini d'arcs paraboliques différemment inclinés il n'y avoit qu'un seul d'une inclinaison capable de donner exactement l'accord avec le circulaire, & ceux

qui

qui pouvoient le donner par un à-peu-près étoient enfermés entre des limites bien étroites. On voyoit par-là que si le mouvement devoit être parabolique, la probabilité auroit été bien beaucoup plus forte pour un de ceux, qui n' auroient donné cet accord, que de ceux, qui l' auroient donné.

53. C'est pour cela, que je revins sur la forme au moins approchante de la circulaire, en la prenant en considération dans le Mémoire suivant. L' inflexion des continuations des arcs, circulaire, & parabolique, ont dérangé bientôt cet accord : ainsi les observations suivantes ont abandonné cette parabole, & ont confirmé la forme à-peu-près circulaire, comme elle est celle d' une ellipse à petite excentricité, qu' on a déterminé après : ainsi il faut soupçonner plutôt quelque faute dans la copie de la seconde observation : mais il est bien inutile de chercher l'origine de cette différence, qui certainement ne provient pas de la méthode employée.

54. J'espère toujours, que ce Mémoire-ci ne sera pas inutile, puisqu' il contient tant de différentes méthodes, & des détours pour parvenir au but proposé : il fait voir le progrès des connoissances, & il développe le mystère de tant de cordes, qui conviennent aux mêmes trois observations, avec autant de paraboles dans les circonstances que nous avions alors, & qui pourroient se trouver encore, au moins en partie, même dans quelque comète, ou dans quelqu' astre sans chevelure, & pour cela visible dans un bien grand éloignement, faisant sa route dans une ellipse bien allongée, & approchante de la parabole. Nous ne pouvons pas nous assurer, qu' il n' y ait aucune espèce de planètes très-éloignées qui aillent dans des orbites de cette nature, quoiqu' on n' a aperçu rien de pareil jusqu' à présent. Par combien de siècles cette nouvelle planète a été inconnue comme telle, avant d' avoir excité l' attention de tous les Astronomes !

55. En attendant je continuerai à proposer mes recherches, & dans le Mémoire suivant je donnerai, comme je viens d' indiquer, deux méthodes, que j' ai employées pour déterminer l' orbite circulaire, l' une moins dépendante, & l' autre tout-à-fait indépendante de ce qu' on a vu dans ce premier Mémoire.

MÉ-

MÉMOIRE II.

De la détermination de l'orbite de la nouvelle planète en la supposant circulaire.

1. Nous avons vu dans le Mémoire précédent l'application à cette recherche de la méthode, que j'avois employée pour celle de l'orbite supposée parabolique, qui exige trois observations, & à la fin j'ai promis deux méthodes pour la détermination de la circulaire, qui n'en exige que deux. Je les proposerai ici en commençant par la première, qui est analogue à celle-là, mais beaucoup simplifiée. Elle a besoin de l'espace, qui répond à une minute de temps dans une orbite circulaire, qui auroit pour rayon la distance moyenne de la terre au soleil faite = 1. Nous appellerons *n* cet espace, & nous avons trouvé au num. 32 du premier Opuscule de ce Volume son logarithme = 5,3782495. On n'aura pas besoin du nombre, qui y répond, mais il est bien de remarquer, que ce n'est pas un grand nombre, qui a *6* chiffres d'entiers, mais une petite fraction décimale de la grande unité égale à la distance moyenne de la terre au soleil, qui après le zero d'unités en doit avoir trois autres pour les dixièmes, centièmes, millièmes, & qui sera augmenté dans l'usage, qu'on doit en faire par le double coefficient du nombre de minutes de l'intervalle de temps entre les deux observations, & par le rayon du cercle cherché, qui sera beaucoup plus grand, que la distance de la terre au soleil prise pour unité.

2. Soit (fig. 4) S le soleil, T, T' deux lieux de la terre, P, P' ceux de l'astre, qui dans les cas de cette planète si éloignée se trouveront comme dans les figures du Mémoire précédent au delà de l'intersection des lignes TE, T'E', que nous marquerons avec la lettre A ici, où il n'y a que deux observations. Nous appellerons à l'ordinaire *t* le temps écoulé entre les deux observations réduit en minutes, & *m* le mouvement en longitude, qui sera l'angle TAT' = EAE'. On trouvera, comme dans le même Mémoire précédent, dans le triangle TST' la base TT', avec

les

les deux angles sur cette base, par les distances ST, ST' de la terre au soleil, & l'angle TST' égal au mouvement géocentrique du soleil dans le même temps, qui est la différence de ces deux longitudes : par ces deux angles ; & les angles STA, ST'A, qui sont les deux élongations de l'astre au soleil, on aura les angles ATT', AT'T, qui avec l'angle TAT' $= m$, & la base TT' donneront les deux côtés T'A, TA ; mais ici nous n'employerons que le seul premier, qui avec ST', & l'angle ST'A donnera le côté SA.

3. L'angle PAP' étant petit à cause de la petitesse du mouvement d'un astre aussi éloigné, l'arc PP' pourra être pris pour une ligne droite perpendiculaire au rayon SP'. Son grand éloignement doit rendre l'angle SP'T' de peu de degrès : ainsi pour un calcul d'approximation on pourra considérer le même arc comme perpendiculaire aussi à la ligne T'P', & sa valeur comme $=$ AP'$\times tan.$PAP'. Le même éloignement doit rendre bien obtus l'angle SAP', ce qui rendra le rayon SP' bien peu moindre de la somme des deux côtés SA, AP' : ainsi si l'on fait SA $= a$, AP' $= x$, on pourra prendre SP' pour $= a + x$. L'espace dans le cercle du rayon $= 1$ pour le temps t sera $= nt$: dans la théorie du mouvement circulaire avec des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances les quarrés de la vîtesse sont réciproquement proportionnels aux rayons des cercles : ainsi on aura la proportion suivante, $a + x : 1 :: n^2t^2 :$ PP'^{2}. La même ligne PP' prise pour $=$ AP'$\times tan.$PAP' sera $= x\, tan.m$, dont le quarré fait égal à la valeur précédente donnera l'équation de troisième degré $x^3 + ax^2 - \frac{n^2t^2}{tan^2.m} = 0$, & on en tirera la valeur x.

4. Mais on trouvera cette valeur plus aisément par la méthode des fausses positions. On substituera pour x la valeur estimée tant dans la formule $\frac{n^2t^2}{a+x}$, que dans l'autre $x\, tan.m$: la différence des deux résultats sera la première erreur : une nouvelle position en donnera une autre, & par le procédé ordinaire on vien-

dra bientôt à avoir la valeur x cherchée. Cette valeur ne sera pas exacte; mais on la trouvera par une autre fausse position, qui employera cette même valeur pour la première. Dans le triangle SAP' on aura les côtés SA, AP' avec l' angle SAP' supplément de SAT': ainsi on trouvera le côté SP', & l' angle SP'A: celui-ci avec SP'P droit donnera l' angle AP'P, qui avec l' angle PAP' $= m$, & le côté AP' donnera la PP': son quarré multiplié par SP devroit être $= n^2t^2$: leur différence sera l' erreur de cette première position: on en fera une autre, qui donnera la seconde erreur: le procédé ordinaire donnera à la fin la vraie AP' $= x$, dont on tirera la vraie distance SP'.

5. Cette méthode quant au fond est celle même, que j'ai proposée dans le Mémoire imprimé en Italien, dont j'ai fait mention dans la préface de ce second Opuscule: mais ici elle est corrigée de quelque faute, qui s'étoit glissée dans la copie, & rendue plus exacte. Je l' avois appliquée à deux observations de la même année 1781 du 3 Avril, & 17 Juil., comme je m' y suis exprimé, & j'avois trouvé le rayon du cercle $= 19{,}6$.

6. La seconde méthode est beaucoup plus simple, & il n' y a rien de négligé, mais elle employe d' abord la fausse position: ainsi elle exige la connoissance de la distance pas trop éloignée de la vraie, comme on la connoissoit déjà, quand je l' ai employée. Elle n' a pas besoin du point A. Ayant pris par la première position cette distance pour le rayon SP $=$ SP', on trouvera dans le triangle TSP l' angle en S par les côtés ST, SP avec l' angle en T, qui est la différence des longitudes du soleil & de l' astre. On trouvera de même l' angle T'SP': en ôtant dans le cas exprimé par la figure l' angle TST' de ce dernier on aura TSP', dont on tirera PSP' $=$ TSP $-$ TSP'. Dans tous les autres cas on tirera aisément l' angle PSP' des trois TSP, T'SP', TSP'. Celui-ci sera le mouvement héliocentrique. On comparera cet angle avec celui, qui doit répondre au même temps t dans un cercle du rayon égal à la distance supposée. La différence sera l'erreur de cette position: une seconde erreur pareille donnera la correction.

7. Qu' on appelle a l' année tropique, t le temps écoulé entre les deux observations, c les 360 degrés d' une révolution circulaire entière, x le rayon du cercle décrit par l' astre rapporté à la distance moyenne de la terre au soleil prise pour unité, z le temps périodique, qui lui répond, m l' angle PSP' trouvé par le calcul trigonométrique, m' la valeur, qui répond au temps t dans le cercle du rayon $= x$. Par la règle de Kepler des quarrés des temps proportionnels aux cubes des distances on aura cette proportion, $1 : x^3 :: a^2 : z^2 = a^2x^3$, d' où l' on tire $z = ax^{\frac{3}{2}}$: l' uniformité du mouvement en donne cette autre, $z : t :: c : m' = \frac{tc}{z} = \frac{tc}{ax^{\frac{3}{2}}}$: c' est l' angle, qui devroit être $= m$: la différence sera l' erreur, & on en trouvera une autre par une autre position. Les deux erreurs donneront à l' ordinaire la correction à faire pour avoir la distance cherchée, si elles étoient petites, autrement pour faire une position nouvelle. Quand on a trouvé la distance x, on trouvera le temps périodique $z = ax^{\frac{3}{2}}$.

8. Je pris trois observations de la table suivante, parcequ' en comparant la première d' abord avec la seconde, & après avec la troisième, on voit si la distance vient à-peu-près la même, comme elle doit l' être, si l' orbite est à-peu-près circulaire. J' ai fait tous les calculs numériques dans le temps avec ces deux binaires d' observations, & deux positions pour chacun. Pour ne pas multiplier les figures j' ai employé ci-dessus la même figure pour ce Mémoire, que pour le précédent; mais pour diriger mieux le calcul numérique, & substituer les sommes aux différences, & viceversa, j' avois adapté une autre figure changée selon les données de ces observations.

T. M.	Long. A	Long. ☉	Dist. ☉ ... ♅
1781 Avril 25^j. 9^h. 47	85°. 39'. 46"	35°. 58'. 43"	0,003196
Dec. 12 . 10 . 10	91 . 16 . 17	261 . 21 . 51	9,992993
1782 Fevr. 21 . 6 . 29	88 . 54 . 16	333 . 19 . 54	9,995634

9. Pour

9. Pour l'année tropique a j'ai employé selon l'Astronomie de M. de La-Lande $365^j. 5^h. 48'. 45'', 6 = 525948', 6$, & pour la première position j'ai fait $x = 18,9$, valeur, que j'avois trouvée par des calculs faits selon d'autres méthodes précédentes. Je ne mettrai pas ici que les derniers résultats. L'application au premier binaire m'a donné la valeur de la formule $\frac{tc}{ax^{\frac{3}{2}}} = m'$ presqu'égal à l'angle PSP' $= m$ trouvé par le calcul trigonométrique, n'y ayant qu'un excès du premier $= + 18'', 4$. Pour diminuer ce petit excès j'ai augmenté tant soit peu la distance x en la faisant $18,92$, & l'erreur a été négative $= - 8'', 4$, d'où l'on tire par la proportion ordinaire $18,914$. La première observation combinée avec la troisième a donné par un pareil procédé $18,892$. Le milieu entre les deux déterminations en négligeant les millièmes a donné le $18,90$, que j'avois pris par la première position, trouvé déjà par d'autres méthodes, & confirmé dans ce calcul par l'accord des résultats de deux binaires presqu'exactement conformes entr'eux.

10. Cette distance x donne le temps périodique par la formule $z = ax^{\frac{3}{2}}$, où prenant l'année $= a$ pour unité on trouve le nombre d'années $82,17$. La distance trouvée ici est un peu, mais bien peu, moindre de l'autre $19,6$ trouvée au num. 5 par la méthode précédente, mais elle s'accorde encore beaucoup plus avec celle, qu'on a dans le Mémoire précédent (num. 49), qui est $19,14$: tout cela s'accorde à donner à-peu-près le double de la distance moyenne de Saturne. Pourtant comme tout étoit fondé sur la supposition arbitraire d'un mouvement circulaire; j'entrepris de déterminer la distance, & la forme de l'orbite par une méthode indépendante de tout autre supposition, que celle d'un grand éloignement, dont on ne pouvoit pas douter, & je le fis par celle, dont j'ai parlé dans la préface, & que je m'en vais exposer dans le Mémoire suivant.

MÉMOIRE III.

De la détermination de son orbite supposée rectiligne dans un arc petit par rapport au total, & pourtant combiné avec un arc bien long, & courviligne parcouru dans le même temps par la terre.

1. ON est autorisé à supposer l' arc de l' orbite de la planète rectiligne, & uniforme dans un intervalle de temps beaucoup plus long par la lenteur apparente de son mouvement combiné avec la forme indiquée par les recherches précédentes, qui font croire une vraie petitesse par rapport au total, sans que celle du mouvement apparent soit produite par une grande obliquité par rapport aux lignes visuelles. Cette recherche est corrélative à ce que nous avons dit dans la préface de ce second Opuscule : elle exige quatre observations, dont les extrêmes soient éloignées entr' elles au moins de plusieurs mois. On verra dans le Mémoire VI la *méthode pour déterminer & corriger l' effet de la courbure de l' arc, & de l' inégalité du mouvement*, & on trouvera, qu' à cause du grand éloignement, & de la petitesse de la flèche, & de cette inégalité cet effet est insensible même dans une année entière, & qu' on peut déterminer cet effet même dans un arc de trois ans sans aucun danger de s' y tromper d' aucune quantité sensible. On commencera la recherche par le problême de chercher une ligne droite, qui soit coupée par quatre données de position en une raison donnée. Les quatre données sont les quatre directions des longitudes observées tirées des quatre lieux de la terre, & la raison donnée est celle des intervalles des temps.

2. C' est le problême, qui avoit été employée mal-à-propos à la théorie du mouvement parabolique des comètes, & qui vient en usage ici pour la première fois : il a eu beaucoup de solutions différentes : en voici une, qui est bien commode pour y appliquer le calcul. S est le soleil (Tab. XIV fig. 5), T, T', T'', T''' sont les quatre lieux de la terre, TE, T'E', T''E'', T'''E''' les quatre dire-

directions des longitudes observées rencontrées par la route de la planète en P, P', P'', P''': les points A, A', A'' sont les rencontres de la première avec les trois autres, B, B' les rencontres de la même première avec les lignes tirées par P''' parallélement aux deux intermédiaires E'T', E''T''. On cherche la distance, longueur, & position de la ligne PP''' supposée droite, par la condition, que ces parties PP', P'P'', P''P''' soient entr' elles en raison des intervalles des temps écoulés entre les observations, qui ont donné ces longitudes.

3. On trouvera le côté TA du triangle TAT' comme dans les figures précédentes : parceque dans le triangle TST' on aura les côtés ST, ST', qui sont les distances de la terre au soleil, & l' angle en S, qui est la différence des longitudes de celui-ci : on en tirera la base TT', & l' angle ST'T, qui combiné avec l' angle ST'E', différence de la longitude du soleil & de la planète, donnera l' angle TT'E', qui est le même, que TT'A. Dans le cas de la figure c' est leur différence : mais dans tout autre cas une figure dessinée même grossiérement indiquera l' opération, qu' il faut faire pour tirer la valeur de ce dernier par les deux précédents. On aura aussi l' angle TAT', qui est la différence de la première longitude de la planète à la seconde, & par-là on aura la $TA = \frac{TT' \times sin.TT'A}{TAT'}$. De même le triangle TST'' donnera la base TT'', & l' angle ST''T, qui avec le ST''E'', différence des longitudes du soleil, & de la planète, & avec TA'T'', différence de la première, & troisième longitude de la même planète donnera la TA' : c' en est de même pour le côté TA'' par le triangle TST''', par la différence ST'''E''' des longitudes de la planète & du soleil, avec l' angle TA''T''' différence de la première, & dernière longitude de la planète. Dans le triangle TA''T''' on trouvera aussi le côté A''T''' par la base TT''', & le troisième angle TT'''A'' excès de deux droits sur la somme des deux autres.

4. Que l' on appelle t, t', t'' les temps écoulés depuis la première observation jusqu' à la seconde, à la troisième, à la quatriè-

trième, & m, m', m'' la différence de la première longitude de la planète à la seconde, de celle-ci à la troisième, & de la même troisième à la dernière. On aura la valeur des deux angles $A''P'''B$, $A''P'''B'$, & des deux $A''BP'''$, & $A''B'P'''$. L'angle $A''P'''B$ compris entre $A''P'''$ direction de la dernière longitude, & BP''' parallèle à la direction $T'E'$ de la seconde sera égale à deux mouvements, le second, & le troisième $= m' + m''$: l'angle $A''P'''B'$ compris entre la même direction $A''P'''$ de la dernière, & $B'P'''$ parallèle à la $T''E''$ de la troisième sera $= m''$: l'angle $A''BP'''$ compris entre la BE direction de la première, & BP''' parallèle à la $T'E'$ de la seconde sera $= m$: l'angle $A''B'P'''$ compris entre la même $B'E$ de la première, & la $B'P'''$ parallèle à la $T''E''$ de la troisième sera $= m + m'$. Qu'on fasse les sinus de ces angles $a = sin.(m' + m'')$, $a' = sin.m''$, $b = sin.m$, $b' = sin.(m + m')$, les lignes $AA'' = c$, $A'A'' = c'$, $PA'' = x$.

5. On aura les proportions suivantes, $t : t'' :: PP' : PP''' :: PA = x - c : PB = \frac{t''x - ct''}{t}$, & par conséquent $A''B = \frac{t''x - ct''}{t} - x = \frac{(t'' - t)x - ct''}{t}$, $sin.A''P'''B = a : sin.A''BP''' = b :: A''B : A''P''' = \frac{(t'' - t)bx - bct''}{at}$. Employant les mêmes proportions, & substituant PA', $A''B'$ aux PA, $A''B$, c'est-à-dire a', b', c', t' aux a, b, c, t, on aura la valeur de la même $A''P''' = \frac{(t'' - t')b'x - b'c't''}{a't'}$: ainsi si l'on fait $\frac{(t'' - t)b}{at} = f$, $\frac{bct''}{at} = g$, $\frac{(t'' - t')b'}{a't'} = f'$, $\frac{b'c't''}{a't'} = g'$, on aura $A''P''' = fx - g = f'x - g'$, & par conséquent $x = \frac{g - g'}{f - f'} = A''P$. Ayant cette valeur du côté $A''P$ du triangle $PA''P'''$, l'autre $A''P''' = fx - g$, & l'angle $PA''P'''$, qui est le mouvement total de la planète en longitude $= m + m' + m''$, on trouvera tout le chemin PP''', avec les angles en P, & P''', qui en donnent la position par rapport aux directions TE, $T'''E'''$: on aura aussi les distances

PT,

TP, $T'''P'''$ en ajoutant aux $A''P$, $A''P'''$ les TA'', $T'''A''$ déjà trouvées : ainsi on aura tout ce qu' il falloit trouver.

6. C'est la même solution, que j' ai mis dans le Mémoire imprimé en Italien, dont j' ai fait mention dans la préface. Elle ira bien, si en substituant les nombres on ne trouve pas la valeur $g - g'$, trop petite, dans lequel cas les petites erreurs des observations produiroient des erreurs considérables par rapport à cette valeur devenue trop petite. Comme la valeur x doit venir ni trop petite, ni énorme, si l' un des deux termes de la fraction, qui forme la valeur x, n'est pas trop petit, comme le numérateur, l' autre qui est le dénominateur, ne pourra pas l' être ; puisque leur rapport ne peut pas donner un nombre ni trop grand, ni trop petit. Cette condition dépend du choix des observations. Si l'on trouve cet inconvenient dans les observations, qu'on auroit choisies ; on évitera cet inconvenient en les changeant en d' autres faites dans des temps éloignés de ceux-là.

7. J' ai appliqué la méthode à plusieurs combinaisons de quatre observations, en commençant toujours par une des premières, qui tomboit au commencement du mois d' Avril, & en changeant un peu la figure pour l' adapter à la position de la terre, par rapport au soleil, & à la planète, comme dans la dernière combinaison, où la dernière observation étoit du mois de Décembre avec un mouvement de la terre plus grand d' une demi-année, qui a porté la corde TT''' au de-là du soleil S, tandis que dans les précédentes, aux quelles j' avois adapté la figure faite pour le Mémoire susdit, d' où j' ai tiré cette solution de problême, le soleil S tomboit, comme dans cette figure-ci, au de-là de la même corde. Je ne mettrai pas ici le détail de tous ces calculs numériques : mais je dirai seulement, que dans cette espèce de changement des figures pour les adapter aux différents cas selon les loix de la transformation des lieux géométriques, que j'ai développés au long dans le troisième Volume de mes éléments, il faut prendre garde à l' ordinaire au changement de direction, qui peuvent avoir les lignes employées, qui alors passent des positives en négatives, & viceversa : les formules mê-

mes

mes des leurs valeurs bien appliquées donnent par elles-mêmes ces changements des signes de chacune de ces lignes, & leurs combinaisons peuvent changer les signes des résultats : la combinaison la plus heureuse est quand les valeurs f, f', & g, g' à la place d'avoir les mêmes signes, les ont contraires, la différence $f - f'$, & $g - g'$ se changeant en somme, ce qui éloigne le danger de la petitesse de ce dénominateur, & numérateur.

8. En commençant par le mois d'Avril j'ai trouvé toujours le numérateur, & dénominateur de la valeur x assez grand : il y a des temps de l'année, qui étant pris pour la première observation dans la position présente donneroient avec les mêmes intervalles entre les observations les mêmes deux valeurs très-petites, & même $= 0$, dans lequel cas le probléme seroit indéterminé, ce qui doit arriver toujours, quand on prend l'arc de la terre aussi pour rectiligne, & le mouvement pour uniforme, comme je l'ai déjà dit plusieurs fois : mais ici l'indétermination n'arrive, que dans un point, & le lieu pour la petitesse de ces valeurs est enfermée entre des limites assez étroites. On pourroit chercher les combinaisons les plus favorables par l'examen des valeurs particulières de la formule, & de l'effet de leur combinaison; mais cette recherche seroit trop compliquée, & d'ailleurs on tombe aisément sur des combinaisons assez favorables, & si par hazard on n'y réussit pas, un nouveau choix ôte l'embarras, comme j'ai dit ci-dessus, & la simplicité de la formule, & de tout le procédé, rend moins incommode cette restitution de calcul. L'avantage beaucoup plus grand on peut le tirer de l'intervalle entre les observations extrêmes augmenté, & nous verrons dans le dernier de ces Mémoires, que c'est la longueur de cet intervalle, qui a donné à M. Mechain la détermination, presque tout-à-fait la même que l'usage des méthodes les plus sublimes, & compliquées, quand il s'est servi de celle-ci très-simple, & facile à exécuter. Mais alors il faut ajouter une réduction, que nous verrons dans le Mémoire V. Je me bornerai ici à indiquer seulement la méthode de tirer la forme & la position de l'orbite par la distance, longueur, & position de la corde PP''', quand même elle soit

soit bien éloigné de la circulaire, beaucoup elliptique, & même parabolique, ou hyperbolique.

9. Pour plus de facilité nous considérerons d'abord les points P, P''' de l'orbite projettée sur le plan de l'écliptique, comme nous avons fait jusqu'à présent, comme s'ils appartenoient à l'orbite appliquée à cause de la petitesse des latitudes : la corde PP''', qui se confond avec son arc, doit avoir sensiblement la même longueur dans toutes les deux. Ces points-ci répondent aux points M'', N'' de la fig. 3, & la corde PP''' de cette fig. 5 à la corde M''N'' de l'autre, qui à cause de la petitesse des lignes M''C, N''C'' de la même fig. 3 est sensiblement égale à la corde CC'' de l'orbite inclinée, dont toutes les dimensions sont les mêmes que celles de l'appliquée au plan de l'écliptique par un mouvement autour de la ligne des nœuds SX. Nous nous servirons de la longueur de la corde PP''' de cette figure 5, que l'on aura déterminé par la méthode exposée, pour déterminer la vîtesse de cette planète dans son orbite, & nous considérerons sa direction comme celle de la tangente en prenant pour le point du contact le point H, qui la coupe par le milieu. Cette vîtesse, la distance de la SH, qui devient son rayon vecteur, & l'angle SHP''', que le même rayon fait avec la tangente, détermineront la forme, & la position de l'orbite à l'aide du beau théorème que j'ai proposé au num. 3 du Mémoire Correlatif III de l'Opuscule I.

10. Pour ce qui appartient à la vîtesse nous avons trouvé au num. 1 du Mémoire précédent la longueur n de l'espace, qui répond à une minute dans le cercle, qui a pour rayon la distance moyenne de la terre au soleil, & si nous appellons t le temps écoulé entre la première, & la dernière observation, réduit en minutes, & c la même corde PP''', la vîtesse dans ce cercle à la vîtesse de la planète en H sera comme nt à c. De-là on tirera la hauteur qui répond à cette vîtesse, c'est-à-dire celle, par laquelle un corps en tombant vers S avec un mouvement uniformément accéléré par la même force conservée sans aucun changement telle, qu'elle est en H, acquerroit la vîtesse qu'elle a

dans ce point de son orbite. Dans le cercle cette hauteur est égale à la quatrième partie du diamètre : ainsi dans ce cercle elle est $= \frac{1}{2}$: les hauteurs sont en raison composée de la directe du quarré de la vîtesse, & réciproque de la force, qui est réciproquement proportionnelle au quarré de la distance au soleil : ainsi en faisant SH $= r$, la hauteur cherchée doit être le quatrième terme proportionnel après t^2n^2, c^2r^2, & $\frac{1}{2}$, ce qui donne pour cette hauteur $\frac{c^2r^2}{2t^2n^2}$.

11. Dans le triangle T'''P'''H on aura le coté T'''P''' $=$ T'''A'' $+$ A''P''', P'''H $= \frac{1}{2}$ PP''', & l' angle en P''', qui est le A''P'''P déjà trouvé : ainsi on y trouvera les angles T'''HP''', P'''T'''H, & le côté T'''H : alors dans le triangle HT'''S on aura l' angle ST'''H par les deux P'''T'''H, ST'''P''', dont le premier est trouvé, & le second est la différence de la longitude du soleil déterminée par la direction T'''S, & de la planète par la direction T'''P''' : on y aura aussi le côté T'''H trouvé, & la distance ST''' du soleil à la terre : ainsi on aura le côté SH $= r$, & l' angle SHT''', qui combiné avec le T'''HP''' trouvé donnera l' angle SHP'''.

12. Soit à présent dans la fig. *6* la distance SH en petit la même que dans la fig. 5 avec l' angle SHK égal à l' angle SHP''' trouvé dans la fig. 5, & HB prise vers le point S égale à la hauteur de la vîtesse : si l' on prend dans la SH prolongée la SA troisième continuellement proportionnelle après SB, SH, celle-ci sera, selon le théorème indiqué, égale à l' axe de l' orbite, qui sera une ellipse, parabole ou hyperbole, selon que la hauteur HB sera plus petite que la distance SH $= r$, égale, ou plus grande, le point A allant à l' infini dans le second cas, & allant dans le troisième au de-là de S sur la HS prolongée. Mais ici nous nous arrêterons sur le cas de l' ellipse, qui se trouvera celui de la nouvelle planète.

13. En tirant AR perpendiculaire sur la tangente HK, & la prolongeant autant en RO, le point O sera le second foyer, & en coupant SD par le milieu en I on aura le centre. J' ai donné tout cela dans le Mémoire Correlatif III de l' Opuscule I, où

il y

il y a aussi le moyen de trouver par un calcul trigonométrique très-simple l' excentricité SI, & l' angle HSO, qui détermine l' anomalie (*). Celle-ci donne la longitude de l' aphélie : parcequ' en sachant dans la fig. 5 la longitude de la direction T'''P''', qui est la dernière de la planète, & l' angle P'''T'''H, on trouve la longitude de la direction T'''H, & en sachant l'angle SHT''' on trouve celle de la direction SH, & celle-ci avec l' angle HSO donne la longitude de la direction SO, qui est celle de l' aphélie. Le demi-axe $= \frac{1}{2}$SA, & l'anomalie déterminée par l' angle OSH déterminent le temps qui répond à cet angle, & ajouté au temps de l' arrivée en H, qui à cause du mouvement supposé uniforme dans la fig. 5 est au milieu entre celui de la première observation en P & dernière en P''', donne le temps de l' arrivée au périhélie.

14. Mais on peut tirer des trois données proposées à la fin du num. 8 plus aisément sans aucun nouveau calcul trigonométrique la forme de l' ellipse par des formules très-simples, qui en partie sont très-connues des Astronomes, & en partie j' ai simplifié par des démonstrations très-simples, que j' ai donné dans un autre, qui sera ici le Mémoire IV. On peut aisément tenir compte aussi de la petite inégalité de la corde de l' orbite projettée par rapport à l' inclinée, ce qui conviendra, quand on voudra appliquer cette méthode à des observations beaucoup plus éloignées, comme de deux ou trois ans, où cette différence sera un peu plus considérable. On voit ces deux cordes M''N'', & CC'' dans la fig. 3, où les points M'', N'' répondent aux points PP''' de la fig. 5 d' ici. Si l' on conçoit dans la même fig. 3 la ligne CG parallèle à la M''N'', qui coupe la différence GC'' des deux perpendiculaires M''C, N''C'', (ce seroit la somme, si les deux latitudes extrêmes étoient de dénominations différentes); on voit

 bien

(*) Il y a quelque fois des répétitions, parceque les Opuscules & Mémoires de ces Volumes ont été faits dans de temps différents, & à différentes occasions, en y retenant, quand je les ai réunis pour l' impression, tout le fond, & ordinairement le texte même.

bien que cette ligne sera égale à la corde M''N'', & le quarré de la corde CC'' égal aux deux quarrés de la même différence, & de la même corde. On a déjà employé cette expression bien de fois en commençant par la fig. 1 du premier Opuscule, où les points P, P'', I répondent aux M'', N'', G d'ici. On employera la valeur de la base CC'' à la place de la PP'' pour la faire $= c$ dans la détermination de la hauteur qui répond à la vîtesse. Si l'on conçoit aussi la ligne H''*h* parallèle aux deux M''C, N''C'', on trouvera aisément celle-ci, avec le rayon S*h* & l'angle S*h*C'' à substituer pour le SH'', SH''N'', avec tous les changements, qui doivent répondre à la substitution des points M'', N'' aux C, C''.

15. Le lieu du nœud, & l'inclinaison de l'orbite se trouveront par les latitudes, les distances TM'', T''N'', & la corde M''N'', comme ci-dessus dans le Mémoire I sur la même fig. 3. La distance moyenne, qui est la moitié de l'axe trouvé, donnera le temps de la révolution, par la troisième loi de Kepler, comme le rayon du cercle l'a donné dans le Mémoire précédent. Ainsi on aura tous les éléments de la théorie de cette planète. Je ne donne point les exemples des calculs, que j'ai fait dans le temps pour ne pas grossir d'avantage le Volume, & il faudroit plutôt employer des observations plus éloignées, & employer les réductions relatives à la courbure de l'arc, & inégalité du mouvement, que j'ai déterminé pour cet objet dans cet autre, qui sera ici le Mémoire VI.

ME-

MÉMOIRE IV.

Recherche de l' orbite [illegible] la même supposition par le temps, & lieu de la conjonction avec le soleil & opposition suivante.

1. Nous chercherons le temps, & le lieu de la conjonction, & de l' opposition par une observation faite avant, & une autre après chacun de ces points, & cette recherche nous donnera tout à la fois la distance au soleil dans ces temps : si on la trouve sensiblement la même, & que le mouvement héliocentrique, qui répondra au temps intermédiaire, s' accorde avec celui qu' on tire de la même distance ; on pourra croire, que l' orbite ne s' écarte pas sensiblement de la circulaire, & on aura le rayon de ce cercle, & le temps périodique. Mais si les deux distances se trouvent inégales ; on pourra déterminer l' espèce de l' orbite par les distances mêmes employées avec l' angle intercepté.

2. Comme la latitude trop petite a empêché de voir l' astre assez près de la conjonction, j' y ai employé les observations, que nous avons les moins éloignées. Pour l' opposition j' en ai employé deux moins éloignées, mais pourtant faites plusieurs jours avant, & après pour diminuer l' effet des erreurs, qu' on peut toujours craindre dans les observations mêmes, & qui dérangent moins un mouvement de plusieurs jours, qu' on emploie dans le calcul, que celui d' un seul jour. J'ai employé les observations de M. Messier pour la conjonction, & de M. Mechain pour l' opposition, avec les deux lieux du soleil, le tout dégagé de l' aberration, & nutation par ce dernier, qui a eu la bonté de me communiquer tous les éléments du calcul ; & pour avoir le mouvement absolu, j' ai eu égard à la rétrogradation du premier point équinoctial, qui doit être ôtée de la différence des longitudes. La petitesse des latitudes, qui ont été toujours de très-peu de minutes, fait aussi, que la différence même des longitudes puisse être considérée, comme le mouvement dans l' orbite.

3. Pour trouver le temps, & le lieu de la conjonction, & de l' op-

l' opposition, j' ai pris d' abord pour uniforme le mouvement géocentrique tant de l' astre, que du soleil dans tout le temps écoulé entre les deux observations, ce qui donnera la première approximation. Dans cette supposition il suffit de prendre le quatrième terme proportionnel après le mouvement respectif de l' astre par rapport au soleil, sa distance au même soleil dans l' observation précédente, pour la conjonction, au lieu opposé, pour l' opposition, & le temps écoulé entre les deux observations. On doit ajouter ce quatrième terme au temps de l' observation précédente pour avoir la première détermination du moment de la conjonction, & opposition.

4. Il faut corriger cette détermination à plusieurs réprises. Pour la première correction on prend pour uniforme le seul mouvement géocentrique de l' astre. On trouve par les tables, ou par la connoissance des temps le lieu du soleil pour le moment trouvé, & son mouvement en 24 heures pour ce jour-là. On trouve le lieu de l' astre pour le même moment en prenant le quatrième terme proportionnel après l'intervalle des temps entre les deux observations, celui entre l' observation précédente, & ce même moment avec la différence des deux longitudes de l' astre tirées des observations : on ajoute ce terme pour la conjonction, où l' astre étoit direct, à la longitude précédente, & on l' en ôte pour l' opposition, où il étoit rétrograde : on trouve aussi le mouvement de l' astre en 24 heures en prenant le quatrième terme proportionnel après l'intervalle des temps entre les deux observations, les 24 heures, & la différence des deux longitudes observées. La différence de celui-ci à celui du soleil pour la conjonction, & leur somme pour l' opposition est le mouvement respectif de l' astre en 24 heures. Alors on prend le quatrième terme proportionnel après ce mouvement respectif, la distance de l' astre au soleil, qui est la différence de leurs longitudes trouvées, & les 24 heures : on ajoute pour la conjonction ce terme au temps trouvé pour elle, si la longitude du soleil avoit été moindre de celle de l' astre, & on l' en ôte, si elle en avoit été plus grande, pour trouver le temps corrigé.

On

On trouve le lieu de la conjonction, & opposition en ajoutant dans le premier cas au lieu du soleil, & en ôtant dans le second le quatrième terme proportionnel après 24 heures, la correction des temps trouvée, & le mouvement du même soleil en 24 heures.

5. Avec ces données on va chercher la seconde correction, pour laquelle on suppose uniforme le seul mouvement héliocentrique de l' astre depuis la première des quatre observations jusqu' à la dernière, ce qui doit arriver non seulement dans l' hypothèse circulaire; mais aussi, au moins sensiblement, dans l' elliptique près des absides, & même par-tout, si l' ellipticité est petite.

6. Voici la méthode de cette seconde correction. La figure 7 Tab. XIV servira pour la conjonction, la fig. 8 pour l' opposition. S est le lieu du soleil, T, P sont les lieux de la terre, & de l' astre dans le moment de l' opposition, ou conjonction, B, C leurs lieux dans l' observation précédente, ou suivante, selon qu' on conçoit le mouvement fait vers un côté, ou vers l' autre, A la rencontre des directions SP, BC, I la rencontre de la direction SC avec l' orbite de la terre, Bb le sinus de l' arc TB.

7. Nous appellerons a l' angle PSC, qui est le mouvement héliocentrique de l' astre entre le lieu de l' observation, & le moment cherché, & qui est égal à l' angle TSI, m l' angle SAB, qui est son mouvement géocentrique, n l' angle TSB, qui est le mouvement héliocentrique de la terre égal au géocentrique du soleil, r la distance SB du soleil à la terre. L' angle SCB sera dans le premier cas la différence, & dans le second la somme des angles SAB, PSC, & par conséquent $= m \mp a$, & l' angle BSI $=$ TSB $-$ TSI $= n - a$. On aura la valeur de la distance BC quatrième proportionnelle après le sinus de l' angle SCB, celui de l' angle BSC, qui est le même que le sinus de BSI, & la distance SB, & par conséquent $= \frac{r\, sin.(n-a)}{sin.(m \mp a)}$: on a A$b$ $=$ AB $\times cos.$ BAb, & AP $=$ AC $\times cos.$ PAC, & par conséquent Pb $= (\text{AB} \pm \text{AC})\, cos.m = \text{BC} \times cos.m = \frac{r\, sin.(n-a)\, cos.m}{sin.(m \mp a)}$. En ôtant dans la fig. 7, ajoutant dans la fig. 8 Sb $=$ SB $\times cos.$ TSB

$= r\, cos.$

$= r\ cos.n$, on aura à la fin $SP = \frac{r\ sin.(n-a)\ cos.m}{sin.(m \mp a)} \mp r\ cos.n$.

8. On a la distance du soleil r, & sa longitude au moment de l'observation par les tables : cette longitude comparée à celle du soleil dans la conjonction, ou à son opposée dans l'opposition déterminée après la seconde correction donnera le mouvement n de la terre : on aura la valeur m, qui est celle du mouvement géocentrique de l'astre en comparant le lieu, qu'on aura trouvé pour la conjonction, ou opposition, avec la longitude observée. Il n'y reste, que le mouvement héliocentrique a, qui répondra à l'intervalle des temps entre l'observation, & l'époque trouvée par la seconde correction qu'on appellera t. On prendra les temps, & lieux trouvés par la première opération pour la conjonction & opposition, en appellant T, & A leurs différences : on aura alors $a = \frac{At}{T}$ à cause de l'égalité supposée dans le mouvement héliocentrique de l'astre.

9. On trouvera la distance cherchée x tant par l'observation précédente, que par la suivante, & pour celle-ci on pourra mettre un accent sur toutes les lettres A, B, C, I des figures, a, m, n, r, x du calcul. Si l'on trouve encore de la différence, on changera le temps de la conjonction supposé dans le premier calcul, & comme on a le mouvemeut du soleil pour les 24 heures de ce jour-là ; on trouvera le changement qu'on doit faire au lieu. On corrigera par-là les valeurs des formules $m, n, t, T, A, a = \frac{At}{T}$ & on refera l'opération. En appellant d le changement fait au temps, e la difference $x' - x$ des valeurs trouvées par le premier calcul, e' celle qu'on trouvera par le second, & le nouveau changement d' du temps sera $= \frac{ed}{e - e'}$.

10. On devroit refaire le calcul ; mais comme les différences seront petites, on pourra prendre le changement d pour exact, & la correction à faire à la distance trouvée par l'observation précédente sera $= - \frac{ed}{d - d'}$.

11. On

11. On cherchera alors la correction de l'opposition : on corrigera le temps, & le lieu de la conjonction, par la différence d trouvée, & par le mouvement, qui répond au mouvement du soleil, ou de l'astre de 24 heures pour ce jour-là, & on fera la correction au temps total T, & au mouvement total A, qui sera le même, qu'on aura trouvé pour le temps, & le lieu de la conjonction, mais prise en sens contraire, ôtée de la valeur précédente, ou y ajoutée, selon qu'on l'aura ajoutée ou ôtée au temps, & lieu de la conjonction trouvée auparavant. On employera les valeurs a, m, n, r appartenantes aux observations de cette seconde époque, & le procédé sera pareil à celui de la conjonction.

12. J'ai rédigé toutes les données tirées des deux observations, une antérieure à la conjonction de la même première année 1781, & l'autre postérieure, & deux autres prises avant & après l'opposition suivante, & tout le procédé du calcul avec les résultats dans sept tables, que j'y ai expliquées avec tout le plus grand détail, en suivant pas-à-pas toutes les opérations. En supposant d'abord les distances dans la conjonction, & opposition égales, le résultat des calculs faits dans cette supposition me les a données inégales 18,8741, & 18,9246 : les mêmes calculs m'ont donné le temps, & le lieu tant de la conjonction, que de l'opposition, d'où l'on tire l'intervalle du temps écoulé entre ces deux moments, & l'angle intercepté entre ces deux rayons du secteur, qui étoit le mouvement héliocentrique de l'astre depuis la conjonction jusqu'à l'opposition : celui-ci dans l'hypothèse des distances conservées les mêmes avec ce temps auroit donné celui d'une révolution entière, c'est-à-dire avec ce temps auroit donné le temps périodique, & la distance qui devoit lui répondre, on auroit dû se tenir-là, si on avoit trouvé les distances égales, comme on les avoit supposées, & cette dernière auroit dû être la même : mais comme on les avoit trouvé inégales, il falloit chercher quel rapport auroient donné à la fin du calcul deux distances du même rapport, qu'on avoit supposé. Cette recherche se pouvoit faire par une espèce de fausse position, en supposant d'

 abord

abord le rapport même, qui répondoit à ces distances trouvées, qui étoit celui de 1 à 1,00268. J'ai considéré ce secteur comme un triangle, qui auroit les deux côtés dans cette raison avec l'angle intercepté égal au mouvement angulaire, que j'avois trouvé, parceque je considérois cet arc comme une ligne droite.

13. En partant de cette nouvelle supposition, j'ai trouvé le moyen de refaire tout le calcul, en trouvant les distances tant pour la conjonction, que pour l'opposition, qui accorderoient l'observation précédente avec la suivante, & déterminant les corrections à employer au temps & lieu de chacune de ces deux positions. J'ai trouvé les deux nouvelles distances 18,8852 & 18,9373 dont le rapport est de 1,00276, qui ne diffère du précédent 1,00268 que de 0,00008, qu'on pouvoit négliger tout-à-fait : pourtant en tenant compte de cette petite différence, & employant les deux distances, qui y répondoient, & étoient presqu'insensiblement différentes des dernières, qui avoient donné l'accord presqu'exact avec l'angle intercepté, j'avois déterminé la forme de l'ellipse qui y répondoit.

14. Mais cette méthode a donné une augmentation de distance, tandis que la méthode beaucoup moins sujette à des petites inexactitudes exposée dans le Mémoire précédent, & appliquée depuis à des observations beaucoup plus éloignées a donné au contraire une petite diminution de distance, ce qui m'a fait voir, que la méthode proposée ici, & qui d'abord m'avoit donné beaucoup d'espérance, ne pouvoit pas donner la différence des distances, quand elle est petite par rapport au total, comme elle étoit dans un intervalle qui n'étoit que de six mois, qui passent entre la conjonction & opposition, quoiqu'elle donne suffisamment ce total, en donnant une distance toujours à-peu-près double de celle de Saturne, & peu éloignée de la véritable. En prenant le milieu entre les deux distances dernières trouvées au numéro précédent on trouve 18,91, qui n'est pas beaucoup éloigné de la distance trouvée depuis pour ce temps-là.

15. Ayant abandonné cette méthode, j'en ai cherché d'autres plus relatives à celle du Mémoire III, qui sont susceptibles d'

un

un intervalle de temps plus long, toujours dans la supposition du mouvement rectiligne & uniforme dans cet intervalle. On en trouvera deux dans le Mémoire suivant : mais pour pouvoir aller encore plus loin, j'ai cherché la réduction qu'il faut employer dans le cas d'un arc quelconque petit par rapport au total, pour corriger l'effet de la courbure de cet arc & de l'inégalité du mouvement, qu'on verra dans le Mémoire VI.

MÉMOIRE V.

Détermination de l'orbite par quatre observations choisies de deux différentes manières.

1. J'AI donné dans le Mémoire III la méthode générale pour déterminer l'orbite en déterminant par quatre longitudes tirées des observations la distance, position, & longueur de la corde d'un arc de cette orbite assez petit par rapport au total pour pouvoir y considérer le mouvement comme rectiligne, & uniforme, tandis que la terre en décrit un très-grand, qui peut être même d'un cercle entier. Dans le Mémoire IV j'en ai donné une particulière, qui emploie deux observations faites l'une avant, & l'autre après la conjonction avec le soleil, & deux autres pareilles par rapport à l'opposition suivante, & par conséquent elle est limitée à l'intervalle à-peu-près d'une demi-année. J'en donnerai dans deux paragraphes de ce Mémoire-ci deux, qui répondent à un intervalle au moins d'un an entier : mais on peut les appliquer aussi à un temps de deux ans, & même à un plus long. Comme en cherchant la réduction d'une longitude quelconque intermédiaire entre les deux extrêmes, qui répond aux deux suppositions du mouvement rectiligne & uniforme, je trouve dans le Mémoire, qui suivra immédiatement celui-ci, que cette réduction pour un arc d'un an dans les circostances de cette planète est tout-à-fait insensible, on pourra employer les longitudes pour l'intervalle d'un an telles, qu'on les a tirées des observations, & pour un intervalle plus long il suffira d'employer les

réductions, qu' on trouvera par la méthode du même Mémoire suivant.

§. I.

Solution pour les cas, où les quatre observations sont faites à des intervalles de temps égaux, & les extrêmes à l' intervalle d' une année sidérale.

2. Le lieu du soleil (Tab. XV fig. 1) est S, les lieux de la planète sont P, P', P'', P''', ceux de la terre T, T', T'', & de nouveau T: les point A, A' sont les rencontres de la ligne TP avec les lignes $T'P'$, $T''P''$, & B, B' avec les lignes tirées de P', P'' parallélement à la ligne TP'''.

3. L' uniformité du mouvement, & l' égalité des intervalles des temps rendent égales entr' elles les lignes PP', $P'P''$, $P''P'''$, & par conséquent aussi les lignes PB, BB', $B'T$: ainsi on aura $B'P'' = 2BP'$, & $TP''' = 3BP'$. Dans le triangle TST' on a les côtés ST, ST' avec l' angle en S, ce qui donnera la base TT', & l' angle $TT'S$: on a encore l' angle $ST'A$ différence des longitudes du soleil, & de la planète dans la seconde observation: ainsi on aura l' angle $TT'A$, qui dans le cas exprimé par la figure sera leur somme: celui-ci avec l' angle TAT' différence des deux premières longitudes, & la base TT' donnera TA. De la même manière on trouvera la base TT'', & l' angle $ST''T$, qui avec l' angle $ST''A'$ différence de la longitude du soleil, & de la planète dans la troisième observation donnera l' angle $TT''A'$ leur différence: celui-ci avec l' angle $TA'T''$ différence de la première, & troisième longitude, & avec la base TT'' donnera TA'.

4. Les quatre longitudes répondent aux directions TP, $T'P'$, $T''P''$, TP''', & dans la première se trouvent les points A, B, A', B', dans la seconde A, P', dans la troisième A', P'', la quatrième est parrallèle aux lignes BP', $B'P''$: ainsi si l' on nomme l, l', l'', l''' ces longitudes, on aura l' angle PAP' supplément de $BAP' = l' - l$, $PA'P''$ supplément de $B'A'P'' = l'' - l$, $AP'B = l' - l'''$, $A'P''B' = l'' - l'''$. Si l' on nomme r, r',

r'',

r'', r''' les sinus de ces angles, a, a' les lignes TA, TA', x la ligne BP; on aura les valeurs suivantes.

$$BP' = \frac{AB \times sin.BAP'}{sin.AP'B} = \frac{(a-2x)r}{r''}, \quad B'P'' = \frac{A'B' \times sin.B'A'P''}{sin.A'P''B'}$$

$$= \frac{(a'-x)r'}{r'''} = 2BP' = \frac{(2a-4x)r}{r''}.$$ On en tire $x = \frac{2arr''' - a'r'r''}{4rr''' - r'r''}$ (*). Alors on aura $TP = 3x$, $TP''' = 3BP' = \frac{(3a-6x)r}{r''}$ avec l' angle $PTP''' = l''' - l$, ce qui donnera presque tout-à-fait comme dans le Mémoire III sur la fig. 5 la distance, longueur, & position de l' orbite : parceque si l' on conçoit le point H, qui coupe par le milieu la corde PP''' avec deux lignes SP, SH; on aura dans le triangle STP''' les côtés ST, TP''' avec l' angle en T, qui est la différence des longitudes du soleil, & de la planète, ce qui donnera SP''' avec l' angle SP'''T. Les côtés TP, TP''' avec l' angle PTP''' donneront PP''', & l' angle TP'''P : ainsi on aura dans le triangle SP'''H les côtés SP''', & $HP''' = \frac{1}{2} PP'''$ avec l' angle $SP'''H = TP'''P - SP'''T$, qui donneront le rayon vecteur SH, & l' angle SHP''' de celui-ci avec la

---

(*) Si à la place des intervalles de temps égaux on employoit d' autres quelconques en retenant les observations extrêmes faites du même point de l' orbite terrestre; la formule pour la valeur de l' inconnue seroit très-peu plus compliquée : elle auroit seulement de plus des coefficients formés par les valeurs des trois intervalles, que nous appellerons t, t', t'', pris en des parties, dont l' unité soit l' année leur somme, & x toute la TP. On aura $TB = (t'+t'')x$, $TB' = t''x$. En faisant $TA = a$, $TA' = a'$, que l' on trouvera comme auparavant, on aura $AB = a - (t'+t'')x$, $A'B' = a' - t''x$, $BP' = \frac{AB \times sin.BAP'}{sin.AP'B} = \frac{ar}{r''} - \frac{(t'+t'')rx}{r''}$, $B'P'' = \frac{A'B' \times sin.B'A'P''}{sin.A'P''B'} = \frac{a'r'}{r'''} - \frac{r't''x}{r'''}$, & comme celui-ci sera $= \frac{PP''}{PP'} \times BP' = \frac{t+t'}{t} \times BP'$, on aura $\frac{a'r'}{r'''} - \frac{r't''x}{r'''} = \frac{ar(t+t')}{r''t} - \frac{(t+t')(t'+t'')rx}{r''t}$; $a'r'r''t - rr''tt''x = arr'''(t+t') - rr'''(t+t')(t'+t'')x$, & à la fin $x = \frac{arr'''(t+t') - a'r'r''t}{rr'''(t+t')(t'+t'') - r'r''tt''}$.

Cette formule, si l' on fait $t = t' = t'' = \frac{1}{3}$, & $x = 3x$, se réduit à $\frac{2arr''' - a'r'r''}{4rr''' - r'r''}$ qu' on avoit auparavant.

la tangente, qui se confond avec la corde PP''' au point H. On tirera ici la hauteur, qui répond à la vîtesse plus aisément que dans le Mémoire III; parceque la durée d' un an entier épargne la comparaison du temps écoulé entre les observations avec la durée d' un an. Si l' on appelle C la circonférence du cercle du rayon $= 1$, qui est $6,2831853$ la vîtesse cherchée sera $= \frac{PP'''^2 \times SH^2}{2C^2}$; parceque les hauteurs sont en raison composée des forces, & des quarrés des vîtesses. Les forces dans les mouvements autour du soleil sont en raison réciproque des distances, & la hauteur de la vîtesse dans le cercle du rayon 1 est $= \frac{1}{2}$: ainsi la hauteur cherchée est le quatrième terme proportionnel après C^2, PP'''^2, & $\frac{1}{2}$. On pourroit tirer ici la détermination de l'orbite de la même manière, que dans le même Mémoire III après le num. 13; mais il est plus aisé de la tirer des formules très-simples, dont j'ai fait mention dans le même Mémoire, & que j' ai démontrées dans le Mémoire qui viendra après celui-ci: on les verra ici dans la note suivante dégagées de leurs démonstrations (*).

6. Voici le résumé des valeurs.

Les quatre longitudes données .... l, l', l'', l''',

$r = sin.(l'-l)$, $r' = sin.(l''-l)$, $r'' = sin.(l'-l''')$, $r''' = sin.(l'-l''')$

Les valeurs à trouver .... $TA = a$, $TA' = a'$,

$$x = \frac{2arr''' - a'r'r''}{4rr''' - r'r''},\ TP = 3x,\ TP''' = \frac{(3a - 6x)r}{r''}.$$

7. Pour

(*) *Données*... rayon vecteur r... complément de son angle avec la tangente u... hauteur de la vîtesse h.

Cherchées... grand demi-axe $m = \frac{r^2}{2(r-h)}$... demi-paramètre $p = 2h\cos.^2 u$... excentricité $n = \sqrt{(m^2 - mp)}$... angle auxiliaire a, dont le sinus $= \frac{m \sin. u}{n}$... angle du rayon r avec le rayon du périhélie $z = a + u$.... nombre d' années pour une révolution entière $m^{\frac{3}{2}}$.

On prendra l' angle a obtus, ou aigu, selon que le rayon r sera plus grand, ou plus petit, que le demi-axe m. L' anomalie comptée de l' aphélie sera $180 \pm z$ en prenant $+$, quand l'angle du rayon r avec la tangente du côté de la direction du mouvement sera obtus, & $-$ quand il sera aigu.

7. Pour trouver TA, TA' on doit résoudre les triangles TST', TST'', où on trouvera les cordes TT', TT'' avec les angles TT'S, TT''S : ceux-ci avec les angles ST'A, ST''A' différences des longitudes du soleil, & de l'astre donneront les angles TT'A, TT''A': les angles TAT', TA'T'' sont $l' - l$, $l'' - l$. On aura $TA = a = \frac{TT' \times sin.TT'A}{r}$, $TA' = a' = \frac{TT'' \times sin.TT''A'}{r'}$.

8. La figure est adaptée à une combinaison de 4 observations, dont la première est du 13 Avril 1781, & ce cas est assez favorable. Dans d'autres cas la figure auroit bien du changement; mais la formule trouvée pour un cas sert pour tous les autres, si l'on a égard aux changements des signes correlatifs à la transformation des lieux géométriques.

9. On peut s'épargner la peine de trouver les valeurs a, a', en employant immédiatement les angles TT'A, TT''A', avec les cordes TT', TT'' dans les deux termes du numérateur de la valeur x, qui devient $= \frac{2r''' \times TT' \times sin.TT'A - r'' \times TT'' \times sin.TT''A'}{4rr''' - r'r''}$.

10. Comme on sait déjà par d'autres méthodes, que la distance TP n'est pas beaucoup éloignée de 19, la valeur x ne peut pas être beaucoup éloignée de $6\frac{1}{3}$: on voit par-là que le numérateur doit être un peu plus que 6 fois plus grand, que le dénominateur. Ainsi il faut choisir les observations de manière, que ces deux termes ne deviennent trop petits; parcequ'alors l'effet des petites erreurs des observations, qui rendent fautives les valeurs r, r', r'', r''', en pourroient produire des assez grandes dans la valeur x : mais comme celui-là ne peut pas devenir petit, sans que celui-ci le soit encore plus; il faut considérer principalement ce dernier.

11. Si ce dénominateur devient $= 0$, le numérateur le doit devenir aussi; parcequ'autrement la valeur x deviendroit infinie, ce qui ne pouvant pas arriver non seulement dans le cas de cette planète, mais dans ceux d'aucune autre, jamais le dénominateur de cette formule ne peut devenir $= 0$, sans que le numérateur le devienne aussi. Alors le problême reste indéterminé.

12. La

12. La solution générale pourroit s' appliquer à la recherche de ce cas particulier, & à un grand nombre d' autres pour choisir dans chacun les conditions nécessaires pour éviter par un choix convenable des quatre observations le cas d' indétermination, & même la trop grande petitesse du dénominateur : mais la trop grande multiplicité de cas rend embarrassante cette recherche générale. Pourtant en considérant la formule, qui est si simple, on fera aisément des réflexions utiles pour faire le choix du point de l' orbite terrestre convenable aux deux observations extrêmes, c' est-à-dire du temps de l' année propre pour la première & la dernière. La position exprimée par la figure ne sera pas la meilleure, mais elle est assez bonne, comme on l' a vu par l' application, que M. Mechain a eu la bonté de faire à mon égard de cette méthode, que je lui avois communiqué, à quatre observations, qu' on verra ci-après à la fin de ce paragraphe. On a commencé par une des premières faites par M. Maskelyne très-peu de temps après que M. Herchel avoit fait la découverte de cet astre, qui n' avoit pas frappé l' imagination des Astronomes avant lui, étant pris pour une petite étoile fixe. J' avois souhaité, qu' on commença par-là pour avoir le plus-tôt possible quelque connoissance moins incertaine de son orbite, au moins peu éloignée de la véritable, & heureusement cette combinaison a réussi, parceque le dénominateur $4rr''' - r'r''$ s' est trouvé assez grand, comme on verra par le résultat de l'application même pour le 13 Avril, ce qui fait que la troisième tombe peu loin du temps de l' opposition avec le soleil : ainsi je suis sûr, que si l' on veut employer de temps en temps cette méthode pour avoir par des intervalles de quelques années la distance actuelle de cette planète au soleil, en prenant pour commencer la période annuelle de cette combinaison une couple de mois avant la conjonction avec le soleil, qui ira tous les ans en rétardant un peu, on la trouvera toujours propre pour avoir un dénominateur assez grand, & éviter le voisinage de l' indétermination.

13. J' ajouterai seulement, que la solution donnée ici pour l' intervalle d' un an peut aisément s' adapter à un intervalle plus long,

long ; mais alors il faut employer la réduction , dont j' ai déjà parlé , qu' on pourra déterminer par la méthode qu' on aura dans le Mémoire suivant . Pourtant il faut éviter la combinaison de trois ans , dans laquelle toutes les quatre directions des longitudes partiroient d' un même point de l' orbite terrestre , ce qui rendroit le problême indéterminé par une autre raison . Le problême de tirer une ligne droite de manière , que ses deux parties interceptées entre trois lignes , qui passent par un point commun , soient entr' elles en une raison donnée , est indéterminé : on détermine aisément la direction de celle-ci , & on en peut tirer une par un point quelconque : toutes les autres parallèles à celle-là seront coupées par ces trois en la même raison : la quatrième ajouteroit une troisième partie , qui seroit aux précédentes en une raison toujours la même pour toutes les autres parallèles à la première : ainsi la direction , qui donneroit la raison des temps aux parties interceptées d' une ligne , donneroit la même à toutes ses parallèles . La combinaison , qui porte trois seules observations faites du même point de l' orbite de la terre , & une d' un autre point quelconque porte un problême déterminé : nous en verrons dans le paragraphe second le cas particulier , où cette autre observation est faite dans le point diamétralement opposé : sa solution est bien simple , mais elle exige au moins deux ans , & pour cela demande la réduction , qui pourtant n' est pas grande , & on la détermine avec sûreté . Mais avant je donnerai ici le résultat de l' application de M. Mechain : voici le passage d' une des ses lettres .

14. „ Les observations ci-jointes sont choisies de manière , qu' „ il y en a de faites précisément ces jours mêmes , ou à moins „ de 24 heures : elles sont interpolées sur les précédentes , & „ suivantes , & réduites à l' instant même indiqué dans la colon- „ ne du temps moyen : je les ai dégagées de la nutation , de l' „ aberration , & de la précession : les lieux du soleil sont de mê- „ me dégagés de la nutation , & de la précession . Le lieu du „ soleil du 13 Avril 1782 est venu de 6'' moins avancé , qu' en „ 1781 ; mais cette différence aux 360° justes vient des perturba-

„ tions des planètes, qui n' étoient pas les mêmes à chaque é-
„ poque: j' ai pris un milieu afin de compléter les 360°, ce
„ qui ne fait, que 3'' sur chaque extrême: les tables du soleil
„ ne sont point encore à ce degré de précision. Il en a été de-
„ même des logarithmes de la distance du soleil, & j' ai pris un
„ milieu entre celui du 13 Avril 1781, & celui de 1782. D'
„ ailleurs tout a été fait avec le plus grand soin, & deux, ou
„ trois fois". Il ajoute: „ Éléments pour quatre observations
„ du nouvel astre prises à des intervalles égaux, & dont les ex-
„ trêmes sont éloignées entr' elles de $365^j.6^h.9'.10''$, ou d'une
„ année sidérale.

	T. M.	Long. plan.	Lat. plan. B	Long. ☉	Log. Dist. ☉
1781 Avr.	$13^j.\ 9^h.\ 0'.\ 0''$	$85°.\ 11'.\ 41'',1$	$0°.\ 11'.\ 44''\frac{1}{2}$	$24°.\ 15'.\ 16'',0$	0,001784
Août	13 . 3 . 3 . 3	91 . 37 . 15 , 5	0 . 12 . 48	141 . 4 . 55 , 5	0,005359
Déc.	12 . 21 . 6 . 6	91 . 14 . 36 , 1	$0 . 15 . 0\frac{1}{2}$	261 . 49 . 6 , 7	9,992975
1782 Avr.	13 . 15 . 9 . 10	89 . 27 . 18 , 0	0 . 15 . 11	24 . 15 . 16 , 0	0,001781

15. Avant de faire le calcul exact, & même avant de dégager les observations, & de le réduire précisément aux moments exacts, on peut voir, si le diviseur $4rr''' - r'r''$ ne vient pas trop petit par un calcul grossier. Comme les mouvements sont assez petits, on peut prendre les angles mêmes pour leurs sinus, & employer pour unités les minutes avec leurs dixièmes: comme les mêmes valeurs rr''', $r'r''$ se trouvent aussi dans le numérateur, c' est égal quelconque unité on emploie: les valeurs l, l', l'', l''' sont les 4 longitudes de la seconde colonne.

On aura
$$r = sin.(l' - l) = sin.6°.25',6 = 385',6$$
$$r' = sin.(l'' - l) = sin.6.\ 2,9 = 362,9$$
$$r'' = sin.(l' - l''') = sin.2.10,0 = 130,0$$
$$r''' = sin.(l'' - l''') = sin.1.47,3 = 107,3$$

16. Ainsi on a $4rr''' - r'r'' = 165491,52 - 47177 = 118214,52$, ce qui est assez éloigné du zero, pour pouvoir se donner la peine de faire le calcul. Pourtant il doit y avoir des cas plus favorables, comme par exemple où il y auroit moins d' inégalité entre les deux valeurs r, r''': la petitesse de ce dernier est nuisible;

sible ; mais il faut avoir égard à tout le reste, & il mériteroit un examen particulier.

17. En attendant voici le résultat de son calcul correlatif à la fig. 1

$TT' = \ldots\ 1{,}71779$	$SHP''' = 85^\circ.\ 14'.\ 31'',\ 8$	$r = 18{,}93429$
$TA = a = \ldots\ 15{,}15482$	$HSP''' = 2.\ 11.\ 48,\ 8$	$h = 9{,}587146$
$TT'' = \ldots\ 1{,}742485$	$PSP''' = 4.\ 22.\ 47$	$u = 4^\circ.\ 25'.\ 28''$
$TA' = a' = \ldots\ 10{,}30009$	c' est le mouv. total	$m = 19{,}17739$
$TP = \ldots\ 19{,}47582$	héliocentrique	$p = 19{,}04237$
$TP''' = \ldots\ 19{,}28697$	$SPP''' = 83.\ 3.\ 35$	$n = 1{,}609099$
$SP = \ldots\ 19{,}00830$	$TPP''' = 80.\ 24.\ 45,\ 6$	$a = 81^\circ.\ 19'.\ 2''$
$SP''' = \ldots\ 18{,}8879$	$SP'''P = 92.\ 33.\ 9,\ 4$	$z = 86.\ 4.\ 30$
$PP''' = \ldots\ 1{,}453083$	$TP'''P = 95.\ 19.\ 37,\ 4$	Long. SH $= 90.\ 1.\ 27$
$HP''' = \ldots\ 0{,}726542$		Périhél. . . 176. 5. 57
$SH = \ldots\ 18{,}93429$		Révol. an. 83, 9816

18. Les deux premières colonnes sont calculées par la méthode proposée dans le §. I. Il y a de plus SP, & l' angle PSP''', qu' on trouve aisément. Si l' on conçoit SP, on a dans le triangle STP les côtés ST, TP & l' angle en T différence des longitudes du soleil, & de la planète : ainsi on y trouve le côté SP, comme dans le triangle STP''' on a trouvé SP''': dans ces triangles on a les angles SPT, $SP'''T$. En les ajoutant aux longitudes géocentriques des directions TP, TP''', qui sont l, l''', on a les longitudes héliocentriques des directions SP, SP''', dont la différence est l' angle PSP''' mouvement héliocentrique d' un an. La valeur TP est le triple de la valeur x de la formule du num. 5.

19. La troisième colonne est correlative à la note du même num. 5. Le rayon vecteur r est le même que SH de la première colonne : la hauteur h est trouvée par la formule du numér. 5 : l' angle u est le complément de l' angle SHP''' de la seconde colonne. Ce sont les trois données de cette note : on y trouve le grand demi-axe m, le demi-paramètre p, l' excentricité n, l' angle auxiliaire a, & l' angle z par les formules de la même note. Le lieu du périhélie se trouve, ajoutant l' angle z à la longitude de la direction SH, qui est égale à la longitude l'''

de la direction $TP''' + TP'''S - SPH$: parceque l' angle z est celui, que le rayon vecteur fait avec la distance périhélie, qui pour cela retranché de 180° donne l'anomalie comptée depuis l' aphélie ici, où l'angle SHP''' est aigu.

20. Si l'orbite étoit circulaire, le mouvement d' un an $= 4°. 22'. 47'' = 15767''$ donneroit pour le nombre d' années $360° = 1296000$ divisé par 15767, qui est $= 82,2$ peu différent de celui, qu'on voit à la troisième colonne $= 83,98$; parceque l' ellipticité n'est pas grande. Elle est donnée par le grand demi-axe m & une quelconque des deux valeurs p, & n de la même troisième colonne, qui sont le demi-paramètre, & l' excentricité. On peut aisément tirer des valeurs de cette table tous les autres éléments de la théorie de cette planète, mais ici je ne me suis proposé dans le même titre de ce Mémoire, que la détermination de l'orbite par la méthode exposée, & cet objet a été rempli. Nous passerons à présent à la seconde méthode, dont nous donnerons la seule théorie sans l' application à des observations correspondantes.

§. II.

Solution pour le cas où trois observations sont faites d'un même point de l'orbite terrestre & un autre du point diamétralement opposé.

21. Dans la fig. 2 P, P', P'' sont les lieux de la planète dans les trois observations faites du point T : p le lieu de l'autre faite du point T' opposé diamétralement : la figure répond au cas, où cette observation est faite à la fin de la première demi-année, mais on applique aisément la solution aux cas, dans lesquels elle est faite à la fin de la seconde, & même avant, ou après toutes les trois.

22. On a la proportion suivante $TP = \frac{PP' \times sin.TP'P}{sin.PTP'} : TP'' = \frac{P'P'' \times sin.TP'P''}{sin.P'TP''} :: sin.P'TP'' : sin.PTP'$; parceque l' égali-

té

té des deux années presqu' exacte fait PP' = P'P'', & les sinus des angles TP'P, TP'P'' supplements l'un de l'autre sont égaux. Ainsi les sinus des deux mouvements P'TP'', PTP' en longitude donnent immédiatement le rapport des deux distances TP, TP'', & font voir, si la planète s'approche ou s'éloigne, & en quelle raison sans autre calcul.

23. Si par les observations précédentes on a trouvé la distance SP ; on aura par cette raison aussi PP'', & par le procédé indiqué au num. 5 l'espèce, grandeur, position de l'orbite ; mais on trouvera aisément la distance TP par l'autre observation de la manière suivante.

24. Soit A l'intersection des lignes TP, T'p, & a, A' celle de Tp, TP'' avec une ligne tirée par A parallélement à la ligne PP'', & B l'intersection de T'p avec une autre tirée de même par T. Dans le triangle TAT' on aura l'angle en T par la différence des longitudes du soleil, & de la planète, & l'angle en A par la différence des deux longitudes de la planète appartenantes aux points P, p. Comme on a le diamètre TT', on aura le côté $TA = \frac{TT' \times sin.TT'A}{sin.TAT'}$.

25. Dans le triangle PTP'' la raison des côtés TP, TP'' avec l'angle en T, donnera les angles en P, P'', qui sont les mêmes, que les angles TAA', TA'A : ceux-ci avec l'angle en T & la ligne TA donneront la ligne AA', dont Aa sera un quart, & plus exactement, si l'on fait le temps de la demi-révolution de la terre, qui à cause de l'excentricité de son orbite ne sera pas exactement une demi-année, $= t$, & les deux ans $= t'$, cette ligne sera $\frac{t}{t'} \times AA'$. Dans le triangle ATB, on aura l'angle en $T = TPP''$, avec l'angle en A, & la ligne TA, qu'on avoit déjà ; ainsi on trouvera les côtés TB, AB. A' la fin on trouvera TP par les proportions suivantes TB : Aa :: Tp : ap, & TB $-$ Aa : TB :: T$p - ap =$ Ta : Tp :: TA : $TP = \frac{TA \times TB}{TB - Aa}$.

26. Sans chercher aucune des lignes, dont nous avons indiqué les

les valeurs, on abrégera le calcul à l'aide des angles seuls, & de la double distance de la terre au soleil TT'. Premiérement si l'on fait le complément de la moitié de l'angle PTP'' $=$ C, la demi-différence des angles PTP', P'TP'' $=$ D; on prendra un angle D' dont la tangente soit $= tan.D \times tan^2.C$: & les angles TPP'', TP''P seront $=$ C $\pm$ D' en prenant pour le premier le signe plus ou minus, selon que le mouvement PTP' de la première année aura été plus grand, ou plus petit, que celui de la seconde P'TP''.

27. Pour démontrer ce procédé il suffit de considérer, que la raison des côtés TP, TP'' est celle des sinus des angles PTP', P'TP'', dont la demi-somme est la moitié de l'angle PTP'', qui a pour compléмeut l'angle C, ainsi sa tangente est $= cot.C$: la tangente de la demi-différence de ces deux angles est $= tan.D$: la somme des angles TPP'', TP''P, est le supplément de l'angle PTP'', & par conséquent la demi-somme égale au complément de la moitié de celui-ci $=$ C. Or on a la proportion suivante: comme la somme des côtés TP, TP'' est à leur différence, c'est-à-dire la somme des sinus P''TP', PTP' à leur différence, ou la tangente de leur demi-somme $= cot.C$, à la tangente de leur demi-différence $= tan.D$; ainsi la somme des sinus des angles TP''P, TPP'' à leur différence, c'est-à-dire la tangente de leur demi-somme $= tan.C$ à la tangente de leur demi-différence $= \frac{tan.D \times tan.C}{cot.C} = tan.D \times tan^2.C$, qui étant appellée D' doit être ajoutée à la demi-somme C, & en être soustraite pour avoir ces deux angles. On doit l'ajouter pour avoir le plus grand: or le TPP'' sera le plus grand, quand le côté TP sera plus petit que le côté TP'', c'est-à-dire l'angle PTP' plus grand, que P'TP''.

28. Ayant de cette manière les angles TPP'', TP''P, on aura les valeurs suivantes $TBA = 180^\circ - ATB - BAT = 180^\circ - TPP'' - TAT'$, $AB = \frac{TA \times sin.ATB}{sin.TBA} = \frac{TA \times sin.TPP''}{sin.TBA}$, $TB = \frac{TA \times sin.TAB}{sin.TBA}$, $AA' = \frac{TA \times sin.ATA'}{sin.TA'A} = \frac{TA \times sin.PTP''}{sin.TP''P}$,

Aa

$Aa = \frac{t \times TA \times sin.PTP''}{t' \times sin.TPP''}$, $TP = \frac{TA \times TB}{TB - Aa} = \frac{TA}{1 - \frac{Aa}{TB}}$. Or la valeur $\frac{Aa}{TB}$ sera $= \frac{t \times sin.PTP'' \times sin.TBA}{t' \times sin.TPP'' \times sin.TAB}$: si on la fait $= E$, on aura $TP = \frac{TA}{1 - E} = \frac{TT'\times sin.TT'A}{sin.TAT' \times (1 - E)}$.

29. Voici le résumé pour le calcul.

Les trois longitudes observées du même point T . . . l, l', l''

La longitude observée du point opposé T' . . . . l'''

Les angles $PTP' = l' - l$, $P'TP'' = l'' - l'$, $PTP'' = l'' - l$,

$TAT' = TAB = l''' - l$

$C = 90° + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}l''$ (*), $D = l' - \frac{1}{2}(l + l'')$ (**),

$tan.D' = tan.D \times tan.C$,

$TBA = 180° + D' + l - C - l'''$ (***), $TT'A = lon.\odot - l'''$,

t' deux ans, t le temps entre les observations en P, & p

$E = \frac{t \times sin.PTP'' \times sin.TBA}{t' \times sin.TPP'' \times sin.TAB}$, $TP = \frac{TT' \times sin.TT'A}{sin.TAT' \times (1 - E)}$.

(*) Parceque $C = 90° - \frac{1}{2}PTP'' = 90° - \frac{1}{2}l'' + \frac{1}{2}l$.

(**) Parceque $D = \frac{1}{2}(PTP' - P'TP'') = \frac{1}{2}(2l' - l - l'')$.

(***) Parceque TBA est $= 180° - ATB - TAB$, & $ATB = TPP'' = C - D'$; $TAB = l''' - l$.

MÉMOIRE VI.

Méthode pour déterminer, & corriger l'effet de la courbure de l'arc & de l'inégalité du mouvement (*).

1. L'intersection p (Tab. XV fig. 3) du rayon vecteur SP' avec le corde PP'' d'un arc petit a un mouvement presqu'uniforme. C'est la base de ma méthode pour déterminer les orbites des comètes par trois observations. On le voit aisément. Les secteurs PSP', P'SP'', qui sont comme les temps, sont presque comme les triangles PSP', P'SP''; parceque les segments PP', P'P'', qui sont si petits par rapport à ces triangles, ne peuvent troubler ce rapport, que très-peu. Or ces triangles sont comme Pp à pP''; parceque tant les triangles PSp, pSP'', que les autres PP'p, pP'P'' sont dans le rapport de ces lignes, qui sont leurs bases. En appliquant dans un autre Opuscule cette considération à la théorie du nouvel astre pour en déterminer l'orbite par quatre observations, j'ai considéré son mouvement dans l'arc PP'P'' par les

(*) Ce Mémoire contient aussi plusieurs articles conformes à d'autres, qu'on trouve dans les Opuscules, & Mémoires précédents, où ils sont exprimés par des figures semblables, & démontrés par des démonstrations analogues. Mais comme d'un côté il contient des objets différents, & très-intéressants, qui sont liés avec ces articles, & le même Mémoire avoit été fait avant l'idée de faire cette collection générale, il y a des lettres différentes employées dans les figures analogues, & des dénominations différentes des valeurs correspondantes : ainsi pour ne pas refaire tout de nouveau, je l'ai laissé comme il étoit. Il n'est pas inutile de voir le même objet traité avec quelque différence, & j'ai aimé mieux m'occuper à d'autres recherches, qu'employer mon temps pour refondre toutes les pièces, qui avoient été faites séparément. Quand j'ai fait la collection, j'ai changé quelque chose par-ci par-là, en me remettant à des articles de ce, qui devoit se trouver dans les pièces précédentes, & j'ai laissé comme il étoit ce qui auroit exigé trop de changement. Ici à l'occasion de déterminer l'effet de la courbure, & de l'inégalité du mouvement dans un astre si éloigné, dont l'orbite diffère peu de la circulaire, & qui pour cela donne des résultats différents de ceux, qu'on avoit dans les orbites paraboliques, ou de forme peu différente, j'avois donné à la fin la démonstration des formules bien simples pour déterminer l'ellipse dépendamment du rayon vecteur, de l'angle qu'il fait avec la tangente, & de la haules points P'', comme s' il étoit fait dans la corde PP'' par les points p, & j' ai dit, qu' ainsi on peut lui appliquer la théorie du mouvement rectiligne, & uniforme en employant les observations de plusieurs mois, dans lequel temps le mouvement de la terre est bien éloigné d' être rectiligne, tandis que quand la terre a aussi un mouvement presque rectiligne, le problême devient indéterminé, comme je l' ai démontré dans plusieurs endroits, ce qui empêche d' employer cette méthode pour les comètes. J' ai dit, que même dans un arc de cet astre de 6 mois on ne peut pas craindre une erreur sensible de cette supposition à cause de la grande distance: en voici d' abord une démonstration grossière, qui alors j' avois en vue.

2. Soit la terre en T', l' erreur de la substitution du point p au point P' sera l' angle $P'T'p$. Or $P'p$ est l' effet de la gravité, qui ne peut pas être plus grand que la flèche Bb du rayon, qui coupe la corde par le milieu : celui-ci est l' effet, qui répond à la moitié du temps, c' est-à-dire à 3 mois : dans trois mois

hauteur de la vîtesse, j' avois mis avant la manière de trouver la vîtesse de la terre, celle de l' astre déterminée par la corde, & le temps, la manière d' en tirer la même hauteur, la manière de l' employer sans ces formules : tout cela avoit de la relation avec les mêmes formules : il y avoit tout cela dans les pièces précédentes, mais avec des figures, & lettres y appliquées, & des dénominations un peu différentes : pour cela je l' ai laissé ici comme il étoit : seulement j' en ai tiré les formules susdites, & je les ai mises dans une note du Mémoire précédent, parceque je les avois envoyés avec la méthode de ce Mémoire à M. Mechain, qui les avoit employées dans l' application du calcul numérique, qu' il avoit eu la bonté d' y faire, & dont j' ai mis le résultat dans le § I de ce Mémoire. Toutes ces répétitions & transpositions dérivent de ce que l' ordre dans la collection, où j' ai suivi autant que cela se pouvoit l' ordre des matières, n' est pas le même, que l' ordre des temps dans lesquels j' avois fait les mêmes pièces : mon âge si avancé m' a poussé à ne pas différer l' impression de tant d' objets, qu' on croyoit utiles, & intéressants, qui auroient peri, si j' eusse été obligé à refondre tout de nouvau : le temps, & les forces auroient manqué, & on me poussoit à donner au public ce que j' avois, & en partie depuis long-temps dans mes porte-feuilles. Une partie avec des additions faites à l' occasion de la rédiger se trouve dans la collection de ces cinq Volumes : il y a d' autres pièces, qui paroîtront ailleurs, si le temps, & les forces me le permettent.

la terre parcourt à-peu-près $\frac{1}{4}$ de son orbite, qui est à-peu-près égal à un rayon & demi. Si la gravité de la terre vers le soleil formoit un mouvement uniforme; celle-ci par les théorèmes connus en mécanique parcourroit vers le même soleil un espace, qui est le troisième terme continuellement proportionnel après le diamètre $= 2$, & cet arc $= 1,5$: ainsi cet espace seroit à-peu-près $\frac{2,25}{2} = 1,12$. On trouvoit par d'autres méthodes, que la distance SB ne s'éloignoit pas beaucoup de 20: dans cette distance on doit avoir l'espace Bb 400 fois plus petit $= 0,0028$. L'angle $P'T'p$ est à l'angle $SP'T'$ à-peu-près comme $P'p$ à $T'p$, ce qui rend ce nombre encore 20 fois plus petit, c'est-à-dire $0,00014$. L'angle $SP'T'$, lorsqu'il est le plus grand, c'est-à-dire quand l'angle en T' est droit, est à-peu-près de 3° dans la distance de 20, c'est-à-dire de $10800''$, & ce nombre multiplié par $0,00014$ donne à-peu-près $2''$. Cette erreur est insensible, puisqu'une seconde de temps en produit 15 dans la longitude; mais lui-même pourra se réduire à une seconde, & même à moins; si l'on considère, que $P'p$ sera presque toujours moindre que Bb, & lors qu'on employe quatre observations, beaucoup moindre; & que l'angle $SP'T'$ dans les positions obliques du rayon ST' sera beaucoup moindre que de 3°. On voit par-là, que pour des observations de 6 mois on peut négliger avec sûreté l'angle $P'T'p$ des deux intermédiaires. L'autre source d'erreur, qui dérive des deux petits segments négligés pour avoir l'uniformité du mouvement du point p doit être bien plus petite, comme on le voit par l'immense petitesse de ces segments, qui sont de deux ordres inférieurs aux secteurs PSP', $P'SP''$, & qui se corrigent en partie, puisqu'ils sont ajoutés tous les deux aux triangles, qui sont proportionnels aux temps.

3. Mais en connoissant à-peu-près la distance trouvée par d'autres méthodes, on pourra calculer très-aisément, & plus exactement ces deux erreurs, pour le corriger, lors même qu'on voudra employer les observations de deux, ou de trois ans. Voici la manière. Si l'on conçoit la corde PP'' coupée exactement

ment en p' en raison des temps, la correction à faire se réduira à la somme, ou à la différence de deux angles $P'T'p$, $pT'p'$: nous commencerons par le premier.

4. Que l'on nomme c la circonférence d'un cercle, qui a le diamètre $= 1$, qu'on sait être $= 3,141593$, a l'année sidérale autour du soleil, qui est de $365^j.6^h.9'.10'' = 31558150''$: l'espace parcouru autour du soleil dans une minute sur un cercle, qui a le rayon égal à la distance moyenne de la terre $= 1$, sera $= \frac{2c \times 60''}{a}$. Ainsi l'effet de la gravité à cette distance dans une minute sera $= \frac{4 \times 3600c^2}{2a^2} = \frac{7200c^2}{a^2}$. En appellant t, t', t'' les temps des arcs PP', P'P'', PP'', & r la distance SP', la flèche Bb, qui est l'effet pour la moitié de ce temps à cette nouvelle distance, sera ce nombre multiplié par $\frac{t''^2}{4r^2}$: mais dans les petits arcs les lignes Bb, P'p sont comme les rectangles $Pb \times bP''$, $Pp \times pP''$, c'est-à-dire comme $\frac{1}{4}t''^2$, à tt': ainsi on le multipliera par $\frac{tt'}{r^2}$, & on aura $P'p = \frac{7200c^2tt'}{a^2r^2}$. Pour le trouver on employera le logarithme constant de $\frac{7200c^2}{a^2}$, qui en employant les valeurs de c, & a se trouve $9,853410$: son nombre étant appellé b on aura $P'p = \frac{btt'}{r^2}$, où pour la valeur r on pourra employer $18,9$, ce qu'on trouve à-peu-près par d'autres méthodes, & son erreur ne pourra produire dans le nombre des secondes de cet angle, qui sera toujours petit, qu'une erreur insensible. Mais il faut faire attention, que le nombre b n'est pas $= 0,7135$; mais $0,00000000007135$, parceque le diviseur a^2 va à 17 chifres, tandis que c^2 n'a qu'une seule d'entières avec des décimales après lui.

5. On aura l'angle ST'P' différence des longitudes du soleil, & de l'astre, avec la distance ST' de la terre, & la distance SP', qu'on fera $= 18,9$: on en tirera l'angle SpT', qui a pour

 sinus

sinus $\frac{ST' \times sin.ST'P'}{SP'}$, & le côté T'P': ainsi on aura l' angle cherché P'T'p par son sinus $= \frac{P'p \times sin.SpT'}{T'P'}$.

6. Pour le second objet il faut trouver la petite ligne pp', ce qu'on fera de la manière suivante. Nous employerons pour cet objet deux théorèmes appartenants aux petits segments de toutes les courbes dans les arcs, qui n'ont la courbure ni infiniment petite, ni infinie. Le premier est, que le segment est égal à $\frac{2}{3}$ du parallélogramme circonscrit, ce qui est exact pour la parabole, & très-approchant pour les autres courbes : le second, qui dépend de ce premier, que les petits segments sont comme les cubes des cordes, qui partent d'un même point.

7. Le triangle PBP'' étant le quatrième terme proportionnel après SB, Bb, & le quadriligne SPBP'' sera $= \frac{SPBP'' \times Bb}{SB}$.

Or on aura Bb (num. 4) en multipliant $\frac{7200c^2}{a^2}$ par $\frac{t''^2}{4r^2}$, ce qui donne $\frac{7200c^2t''^2}{4a^2r^2} = \frac{bt''^2}{4r^2}$; & comme SB est $= r$, on aura le triangle PBP'' $= SPBP'' \times \frac{bt''^2}{4r^3}$: le segment PBP'', qui par le premier de ces deux théorèmes est égal à $\frac{2}{3}$ du parallélogramme circonscrit son double, sera $= SPBP'' \times \frac{bt''^2}{3r^3}$: par le second théorème on aura les valeurs des segments PP', P'P'', en multipliant cette quantité par $\frac{PP'^3}{PP''^3}$, $\frac{P'P''^3}{PP''^3}$, & comme il s' agit de quantités si petites, on pourra considérer ces cordes comme proportionnelles aux temps t, t', t'', en multipliant par $\frac{t^3}{t''^3}$, $\frac{t'^3}{t''^3}$, ce qui donnera $SPBP'' \times \frac{bt^3}{3t''r^3}$, & $SPBP'' \times \frac{bt'^3}{3t''r^3}$.

8. Ainsi les valeurs des secteurs PSP', P'SP'' seront PSP' + $SPBP'' \times \frac{bt^3}{3t''r^3}$, & P'SP'' + $SPBP'' \times \frac{bt'^3}{3t''r^3}$. Le triangle P'SP'', qui

est

est le quatrième terme proportionnel après Pp, pP'', PSP', est $= \frac{pP'' \times PSP'}{Pp}$, & les secteurs sont proportionnels aux temps ; ainsi on aura la proportion suivante $PSP' + SPBP'' \times \frac{bt'^3}{3t''r^3} : PSP' \times \frac{pP''}{Pp} + SPBP'' \times \frac{bt'^3}{3t''r^3} :: t : t'$, ou $1 + \frac{SPBP''}{PSP'} \times \frac{bt'^3}{3t''r^3} : \frac{pP''}{Pp} + \frac{SPBP''}{PSP'} \times \frac{bt'^3}{3t''r^3} :: 1 : \frac{t'}{t}$. On pourra mettre $\frac{t''}{t}$ à la place de $\frac{SPBP''}{PSP'}$ dans les deux petites quantités correlatives aux très-petits segments, ce qui en multipliant encore le premier terme par le dernier $\frac{t'}{t}$ donnera le second réduit à $\frac{pP''}{Pp} + \frac{bt'^3}{3tr^3} = \frac{t'}{t} + \frac{bt't^2}{3tr^3}$, d'où l'on tire $\frac{t'}{t} - \frac{pP''}{Pp} = \frac{bt'(t'^2 - t^2)}{3tr^3}$. Comme $\frac{t'}{t}$ est $= \frac{p'P''}{Pp'}$, & $t'^2 - t^2 = (t' + t)(t' - t) = t''(t' - t)$, on aura $\frac{p'P''}{Pp'} - \frac{pP''}{Pp} = \frac{bt't''(t' - t)}{3tr^3}$.

9. Or la valeur $\frac{p'P''}{Pp'} - \frac{pP''}{Pp}$ est la différence de la valeur $\frac{pP''}{Pp}$. Que l'on fasse $PP'' = e$, $Pp = x$, on aura $pP'' = e - x$, & $\frac{pP''}{Pp} = \frac{e - x}{x} = \frac{e}{x} - 1$, dont la différence est $- \frac{edx}{x^2}$, qui doit être $= \frac{bt't''(t' - t)}{3tr^3}$. On peut mettre $\frac{te}{t''}$ à la place de $Pp = x$ dans une quantité si petite, & on aura $- \frac{edx}{x^2}$, ou $- \frac{e^2dx}{ex^2}$, c'est-à-dire $- \frac{t''^2dx}{et^2} = \frac{bt't''(t' - t)}{3tr^3}$, & $dx = \frac{bett'(t - t')}{3t''r^3}$. C'est la valeur de la petite ligne pp', qui sera positive conformément à la figure, ou négative, selon que le premier temps t sera plus grand, ou plus petit, que le second t', & il s'évanouira

nouira dans leur égalité. Dans une quantité si petite on pourra prendre pour e l'espace, qui dans un cercle, dont le rayon est $= r$, répond au temps $= t''$. Comme l'espace pour une minute dans l'orbite terrestre est (num. 4) $= \frac{120c}{a}$, cet espace pour le temps t'' dans un cercle du rayon r sera $\frac{120ct''}{a\sqrt{r}}$, puisque les vîtesses dans les différents cercles sont en raison réciproque des racines des rayons. En substituant pour e cette valeur on aura $pp' = \frac{40bctt'(t-t')}{ar^{\frac{7}{2}}}$. Si l'on prend l'angle SpP'' pour droit dans une orbite, qui s'écarte peu de la circulaire; on aura l'angle $T'pp'$ complément de l'angle SpT', & le petit angle cherché $pT'p'$ aura pour sinus $\frac{pp' \times cos.\,SpT'}{T'P'}$, ou $\frac{pp'\,cos.\,SP'T'}{T'P'}$.

10. On pourroit donner des règles générales pour savoir, s'il faut ajouter chacun de ces petits angles à la longitude trouvée, ou l'en ôter; mais une figure dessinée bien grossiérement le fera voir très-aisément, ce qui épargne la multiplicité de règles appliquées au grand nombre de cas.

11. Dans ces formules l'unité des valeurs t, t', t'' est une minute de temps, & celle des lignes la distance moyenne de la terre au soleil. Ces unités employées dans le calcul ont ôté l'homogénéité apparente des termes. Quand on aura déterminé les rayons vecteurs SP, SP'' avec la corde PP'' par un premier calcul, dans lequel on a pris $18,9$ pour r, & l'angle Spp' pour droit; on pourra, si l'on veut, calculer ces deux valeurs, & refaire le calcul; mais si dans cet astre on se borne aux observations de deux, ou trois ans; on trouvera très-peu de différence dans le second résultat par rapport au premier.

12. Si l'on prend le temps t'' de trois ans, on aura $a = 20t''$, parceque la valeur a est celle de l'année en secondes, un an en minutes $= \frac{1}{60}a$, trois ans $= \frac{1}{20}a = t''$: ainsi $b = \frac{7200c^2}{a^2}$ sera $= \frac{18c^2}{t''^2}$, & au num. 4 pour le premier objet $P'p$, qui étoit =

$= \frac{btt'}{r^2}$, sera $= \frac{18c^2tt'}{t''^2 r^2}$: s' il y a quatre observations faites à des intervalles de temps egaux, & on cherche la réduction, qui convient à une des deux intermédiaires; on aura un de deux temps t, t' double de l'autre : ainsi l'un $= \frac{1}{3}t''$, l'autre $= \frac{2}{3}t''$, & tt' $= \frac{2}{9}t''^2$: la ligne P'p sera $= \frac{4c^2}{r^2}$. Si l'on fait SP' $= 18,9$, & l'angle en T' $= 90°$; on aura l'angle SP'T' $= 3°.2'$, T'P' $= 18,9$ $cos.3°.2'$: en prenant le même SP'T' pour SpT', on aura le sinus de l'angle P'T'p, qui à la fin du num. 5 étoit $\frac{P'p \times sin.SpT'}{T'P'} = \frac{4c^2 \times sin.3°.2'}{(18,9)^3 \times cos.3°.2'} = \frac{4c^2 tan.3°.2'}{(18,9)^3}$, en employant pour c sa valeur 3,141593 (num. 4), on trouvera l'angle même $= 1'.4''$.

13. Pour le second objet on a trouvé (num. 9) $pp' = \frac{40bctt'(t-t')}{ar^{\frac{7}{2}}}$: on a eu (num. 12) $b = \frac{18c^2}{t''^2}$, & $a = 20t''$, ce qui donne $\frac{40bc}{a}$ $= \frac{36c^3}{t''^3}$: on aura $tt'(t-t') = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times t''^3$: ainsi on aura

$pp' = \frac{8 \times 9c^3}{3 \times 9r^{\frac{7}{2}}} = \frac{8c^3}{3r^{\frac{7}{2}}}$. Le sinus de l' angle pT'p' étoit $=$ $\frac{pp' \times cos.SP'T'}{T'P'}$, & dans le cas de l' angle ST'P' droit T'P' est $=$ SP' $\times cos.$SP'T' $= r \times cos.$SP'T': ainsi ce sinus sera $= \frac{8c^3}{3r^{\frac{9}{2}}}$, ce qui en mettant 18,9 pour r revient à 31''.

14. On voit déjà, que cette correction n' arrive pas même à la moitié de la précédente, que nous avons trouvée $= 1'.4''$ $= 64''$: toutes les deux sont bien petites même par rapport à un arc de trois ans : en retenant ce temps elles ne peuvent pas être trop augmentées, par la variation des circonstances individuelles, que nous avons supposées ici ; & la diminution du temps les diminue très considérablement. Nous allons voir tout cela en examinant les variations, qu' on peut avoir dans les deux résultats par la variation de ces circonstances.

15. L'

15. L' un, & l' autre résultat sera toujours presqu' exactement proportionnel à son sinus, qui pour le premier objet est $\frac{P'p \times \sin.SpT'}{T'P'}$, ou $\frac{P'p \times \sin.SP'T'}{T'P'}$, & pour le second $\frac{pp' \times \cos.SP'T'}{T'P'}$. Ces valeurs auront un changement proportionnel réciproquement à la valeur de la ligne T'P', & de plus directement proportionnel la première à celle de la petite ligne $P'p$, & du sinus de l' angle SP'T', & la seconde à celle de la petite ligne pp', & du cosinus du même angle.

16. L' angle SP'T' peut diminuer jusqu' à devenir nul, ce qui arrive dans la conjonction, & opposition, & on peut avoir une observation dans la seconde, & peu loin de la première. Ainsi le premier objet peut diminuer beaucoup pour cet article, & même s' évanouir; mais il ne peut pas s' augmenter. L' angle SP'T' ne peut pas aller au de-là de 3°. 2', que nous avons employé, si l' on ne change la distance SP' assez sensiblement: son sinus ne peut varier, que depuis zero jusqu' à 0,062, & on ne peut pas le trouver par cet article plus grand, que celui, que nous avons trouvé. Le co-sinus ne peut varier que depuis 1 jusqu' à 0,998, ce qui ne peut augmenter le seconde effet, que d' une fraction de seconde.

17. La distance T'P' ne peut aller, que jusqu' à 19,9 dans la conjonction, & à 17,9 dans l' opposition, si la distance SP' $=$ r est $=$ 18,9, que nous avons employée comme presqu' égale à la véritable. Elle ne peut augmenter les deux effets qu' en proportion de la diminution de la distance la plus petite rapportée à la moyenne: cette diminution ne peut être que $\frac{1}{18,9}$ de la même moyenne: celle-ci donnoit 64'', & 31'', & par conséquent la diminution de la distance ne peut augmenter le premier effet, que de $\frac{64''}{18,9} = 3'',4$, & le second de $\frac{31''}{18,9} = 1'',6$: ainsi l' un reste moindre que 68'', & l' autre moindre que 33''.

18. Il n' y reste, que la variation des lignes $P'p = \frac{bctt'}{r^2}$

(num.

(num. 4), & $pp' = \frac{40bctt'(t-t')}{3r^{\frac{7}{2}}}$ (num. 9). La première varie en raison réciproque du quarré de la distance $SP' = r$, & la seconde en raison de la même quantité élevée à la puissance $\frac{7}{2}$. Nous en parlerons après que nous aurons vu les variations corrélatives aux temps t, t', t''.

19. En supposant constant le temps total t'', comme nous l' avons employé de trois ans, on peut changer les temps t, t': alors pour le premier objet on changera la valeur $P'p$ en raison de son coefficient tt'. Comme la somme $t + t' = t''$ est constante, on sait bien, que le maximum de tt' se trouve, quand ces deux valeurs sont égales, & alors on aura $tt' = \frac{1}{4}t''^2$: ayant supposé $t = \frac{2}{3}t''$, on a eu $t' = \frac{1}{3}t''$, & $tt' = \frac{2}{9}t''^2$, qui est au maximum $\frac{1}{4}t''^2 = \frac{2}{8}t''^2$ comme 8 à 9. Ainsi le premier résultat ne pourroit s' augmenter, que de $\frac{1}{8}$ du total, qui étoit $= 64''$, & ne pourroit s' augmenter par la diminution de la ligne TP', que de $4''$: le total de $68''$ augmenté de $\frac{1}{8}$ n' ajoutera que $8''$, ainsi on aura moins de $76''$.

20. Pour le second résultat on doit trouver le maximum de la valeur $= tt'(t-t')$: on peut faire ici $t'' = 1$: on aura $t' = t'' - t = 1 - t$, & $t - t' = 2t - 1$: ainsi $tt'(t-t')$ sera $= (t - t^2)(2t - 1) = 2t^2 - 2t^3 - t + t^2 = -2t^3 + 3t^2 - t$: sa différence donnera $-6t^2dt + 6tdt - dt = 0$, ou $t^2 - t + \frac{1}{6} = 0$, d' où l'on tire $t = 0,5 \pm \sqrt{(0,25 - 0,166667)} = 0,789$, ou $= 0,211$. Ce sont les deux valeurs du premier temps t pour le maximum; & comme leur somme reste $= 1$, on voit, que quand on en prend une pour t, l' autre doit servir pour t'. Quand t' est $= t$, on a la valeur proposée $= 0$: elle doit augmenter avec l' augmentation de t, & diminution de t', ou viceversa, jusqu' à ce que l' un devienne 0,789, & l' autre 0,211, & diminuer après jusqu' à ce que l' un devienne $= 1$, & l' autre $= 0$.

21. Dans le cas du maximum la valeur tt' sera le dernier terme de l' équation $= \frac{1}{6}$, qui multiplié par $t - t' = 0,578$ donnera 0,096. Dans le cas de $t = \frac{2}{3}$, $t' = \frac{1}{3}$ on avoit $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ =

$= \frac{2}{27} = 0,074$, ce qui augmenteroit les 33'' que nous avions trouvées en raison de 74 à 96, en les réduisant à 43''. Ainsi pour un arc de trois ans on ne peut pas avoir dans la distance supposée de 18,9 pour le premier objet plus de 68'', & pour le second plus de 43''.

22. Si l' on change le temps total t'', la ligne $P'p$ sera changée pour le premier objet en raison directe de son quarré, & pour le second de sa troisième puissance; parceque la valeur a, dont le quarré est le diviseur de la première formule, & la troisième puissance de la seconde, donnera au temps t'' un coefficient plus grand, ou plus petit en raison réciproque de sa longueur : on avoit trouvé $a = 20t''$ pour trois ans : on l' auroit $= 10t''$ pour 6 ans, & $= 60t''$ pour un an. Ainsi la valeur de la fraction sera variée en raison directe de la valeur t''. La seconde correction, qui dans trois ans n' étoit que de 43'', dans un an ne seroit, que de $\frac{43''}{27} = 1'',5$; parcequ' elle doit être diminuée (num. 13) en raison de t''^3. On voit par-là, qu' on peut négliger tout-à-fait cette correction dans un arc d' une année entière, & même dans celui d' un an & demi, où elle ne dépasseroit $\frac{43''}{8} = 5'',4$, ce qui dérive de la petitesse des segments négligés, que nous avons indiquée au num. 1. La première correction de 68'', n' arriveroit dans un an qu' à $\frac{68''}{9} = 7'',6$. On pourroit bien la négliger aussi; parceque cela ne répond, qu' a un demi-second de temps : mais dans un arc de 6 mois elle n' arriveroit pas à 2'', comme nous avions trouvé au num. 2 par un calcul grossier. Il faut ajouter à tout cela, que nous avons cherché ici pour chaque condition son maximum, qui ne se trouvera presque jamais dans aucune, & qui ne peut jamais se trouver dans toutes ensemble.

23. Il ne reste qu' à voir, de combien on peut se tromper dans l' évaluation de ces corrections par quelqu' erreur dans la distance r, que nous avons supposée $= 18,9$. Nous sommes dé-

jà

jà bien assurés, qu'on ne peut pas se tromper de 0,1 dans cette valeur, ce qui est à peu-près $\frac{1}{200}$ de ce total. La ligne $P'p$ a pour diviseur r^2, la ligne pp' a $r^{\frac{7}{2}}$, mais il y a encore le diviseur T'P' dans la valeur du sinus, qui en parité du reste varie presque aussi en raison de la ligne $SP' = r$. Ainsi la première correction variera en raison réciproque de r^3, & la seconde de $r^{\frac{9}{2}}$, & par conséquent même s'il y avoit le maximum dans les erreurs de tout le reste, & 0,1 dans la distance, l'erreur dans cela n'arriveroit pas à $\frac{3}{200}$ du total, qui étoit $68''$, c'est-à-dire à $1'',02$, & dans celle-ci à $\frac{9}{400} \times 48'' = 1'',02$. On voit par-là, qu'on peut espérer une détermination ou exacte, ou au moins très-approchante de la distance, grandeur, & position de la corde, en appliquant deux, & même trois ans d'observations à la théorie du mouvement rectiligne, & uniforme avec la réduction déterminée dans ce Mémoire, d'où l'on tirera les éléments de l'orbite. Il y aura quelque petite perturbation causée par l'inégalité des attractions de Jupiter, & Saturne sur le soleil, & cet astre, mais heureusement celui-ci se trouve actuellement en opposition par rapport à eux, & l'effet de ces perturbations ne peut pas trop déranger cette recherche. D'ailleurs leur action sur la nouvelle planète, qui même quand elle sera en conjonction avec elles, doit être incomparablement moindre, que celle du soleil, ne pourra troubler sensiblement les réductions du mouvement inégal sur l'arc à l'uniforme sur la corde, que nous avons trouvées ici avec des formules bien simples par une méthode bien assurée.

24. Par le moyen de cette réduction on peut employer une des solutions, qu'on connoît déjà en grand nombre, du problême proposé même par Newton dans son Arithmétique universelle, & dans ses Principes pour le mouvement d'une comète supposée rectiligne, & uniforme, en l'adaptant à quatre observations assez éloignées entr'elles, qu'on a déjà dans un arc assez grand cor-

relativement à ce que nous avons indiqué au num. 1 : la petitesse des latitudes fait, qu' on peut considérer pour cet objet son orbite, comme si elle étoit plongée sur l' écliptique ; mais il faut choisir les observations intermédiaires en évitant celles, qui sont capables de faire introduire un trop grand changement dans le résultat par les petites erreurs des observations. On trouve par ce moyen la distance, grandeur, & position de la corde PP'', qui peut être considérée comme la tangente de l' orbite dans son point b du milieu à cause de l' immense petitesse de la flèche Bb, qui reste insensible par rapport au rayon vecteur SB même dans l' intervalle de 3 ans. Cette flèche selon le num. 4 est $= \frac{7200c^2}{a^2} \times \frac{t''^2}{4r^2}$, & pour trois ans la valeur a est $= 20t''$ (num. 12), ce qui donne $Bb = \frac{72c^2}{16r^2} = \frac{9c^2}{2r^2}$, & $\frac{Bb}{SB} = \frac{9c^2}{2r^3}$, ou en faisant $r = 18{,}9$ on trouve pour la valeur de cette fraction seulement 0,0066 : dans l' arc d' un an on n' auroit, que $\frac{0{,}0066}{27} = 0{,}00024$.

25. Cette solution fait trouver les rayons SP, SP'' avec la corde PP'': on en tire l' angle SP''P, qui avec SP'' & la demi-corde P''b donne Sb qu' on peut prendre pour le rayon vecteur SB $= r$, & l' angle SbP'', qu' on peut considérer comme celui de ce rayon avec la tangente. La corde PP'' rapportée au temps t'' donne la vîtesse de l' astre, qui en faisant la corde $= e$ est exprimée par $\frac{e}{t''}$. En comparant cette vîtesse avec celle de la terre, qui a pour sa hauteur la moitié de son rayon, ou $\frac{1}{2}$, on trouve la hauteur de la vîtesse de l'astre. L'espace parcouru par la terre en un an est la circonférence $= 2c$, & l' an qu' en secondes nous avons fait $= a$, réduit en minutes est $= \frac{a}{60}$. Ainsi sa vîtesse sera $= \frac{120c}{a}$. Les hauteurs sont comme les quarrés des vîtesses ; ainsi si l'on fait la hauteur de la vîtesse de l'astre en B $= h$, on

aura

aura la proportion suivante $\frac{14400c^2}{a^2} : \frac{e^2}{t''^2} :: \frac{1}{2} : h = \frac{a^2e^2}{28800c^2t''^2}$.

26. Quand on a le rayon vecteur SB, la tangente BP'', & la hauteur de la vîtesse, on trouve aisément l'orbite de la manière suivante, comme je l'ai démontré dans plusieurs endroits. Premiérement l'orbite sera une ellipse parabole, ou hyperbole, selon que cette hauteur sera plus petite, égale, ou plus grande par rapport au rayon SB. On prend BD (fig. 4) vers le point S égale à la hauteur, & SE dans la direction de la ligne SD troisième continuellement proportionnelle après elle, & le rayon SB: l'axe principal de l'orbite est égal à cette ligne. On tire EG perpendiculaire à la tangente, & on la prolonge autant en F, qui est l'autre foyer de l'orbite, dont on a le centre en coupant SF par le milieu en C: on a l'axe AL en prenant des deux côtés CL vers S, CA vers F chacune sur la SF prolongée, égale a la moitié de la ligne SE, & on aura le périhélie en L, l'aphélie en A.

27. On y applique aisément le calcul numérique: on a $SD = r - h$, $SE = \frac{r^2}{r-h}$, $BE = \frac{r^2}{r-h} - r = \frac{rh}{r-h}$, & en faisant l'angle E complement de l'angle $EBG = SBP'' = u$, on a $EG = \frac{rh\cos.u}{r-h}$: le double de cette valeur donne EF, qui avec SE, & l'angle $E = u$ donne la ligne SF double de l'excentricité CS, & l'angle ESF, qui détermine la position de l'axe, & la longitude de l'aphélie A par le moyen de celle du rayon SB. La moitié de la ligne SE élevée à la puissance $\frac{3}{2}$ donne le temps périodique.

28. Mais sans employer la résolution d'aucun triangle on trouvera tout plus aisément par les dénominations, & formules suivantes. Le rayon vecteur SB étant comme auparavant $= r$, la hauteur de la vîtesse $= h$, le complément de l'angle $SBP'' = u$, soit de plus le demi-axe $CA = m$, le demi-paramètre $= p$, l'excentricité $CS = n$, l'angle $LFE = x$, $LSE = z$. On aura les valeurs suivantes, qu'on démontrera ci-après, avec l'ordre néces-

nécessaire pour la démonstration, tandis qu' ici elles sont mises dans l' ordre, qui répond à leur usage : $m = \frac{r^2}{2(r-h)}$, $p = 2h\cos^2.u$, $n^2 = m^2 - mp$, $\sin.x = \frac{m\sin.u}{n}$, $z = x + u$: le nombre des années du temps périodique $= m^{\frac{3}{2}}$. On trouvera par la première la valeur du demi-axe m, par la seconde le demi-paramètre p, ce qui donne déjà la grandeur, & l' espèce de l' orbite : la troisième donnera l' excentricité, qui donne la même chose : la quatrième l' angle x, qui dans la dernière donne l' angle z distance au périhélie. Pour l' angle x on le prendra obtus, ou aigu, selon que le rayon vecteur r sera plus grand, ou plus petit, que le demi-axe m.

29. On tire la première valeur $m = \frac{r^2}{2(r-h)}$ de la valeur de la ligne SE $= 2m = \frac{r^2}{r-h}$.

30. Pour la seconde on a besoin de plusieurs propriétés de l' ellipse toutes bien connues. Le rectangle des deux perpendiculaires tirées des deux foyers S, F sur la tangente tombent sur ses rencontres H, G avec le cercle circonscrit ; & comme ces lignes doivent être parallèles entr' elles, l' angle LSI sera $=$ AFG : on voit par-là, que les lignes SI, FG seront égales entr' elles : ainsi on aura $FG \times SH = SI \times SH = AS \times SL = AC^2 - CS^2 = m^2 - n^2$. C' est la valeur du second demi-axe, qui avec l' excentricité forme un triangle rectangle, dont l' hypothénuse est égale au grand demi-axe, & ce quarré est $= mp$.

31. Comme on a vu (num. 29) $\frac{r^2}{r-h} = 2m$, on aura $r^2 = 2mr - 2mh$, & $2mh = 2mr - r^2$. D' ailleurs FB est $=$ BE $= 2m - r$, & par conséquent $SB \times BF = 2mr - r^2 = 2mh$. Or l' égalité des deux angles, que les lignes SB, FB font avec la tangente, donne $\frac{FG}{FB} = \frac{SH}{SB} = \cos.u$, & par conséquent $\cos^2.u = \frac{SH \times FG}{SB \times FB} = \frac{mp}{2mh}$, d' où l' on tire $p = 2h\cos^2.u$.

32. On

32. On a déjà trouvé (num. 30) $mp = m^2 - n^2$, ce qui donne $n^2 = m^2 - mp$.

33. On a la proportion suivante SF $= 2n$: SE $= 2m$ :: $sin.E = sin.u$: $sin.SFE = sin.x = \frac{m\, sin.u}{n}$. Or on voit bien, que la tangente HG sera parallèle à l'axe, & l'angle SFE droit, quand SB $= r$ sera $=$ FB, dans lequel cas chacune est égale au demi-axe. Cet angle sera obtus, avant que le rayon SB parti de A, où il est plus grand que le demi-axe CA, arrive à l'égalité, & aigu après. Donc cet angle que nous avons nommé x, sera obtus, ou aigu, selon que le rayon vecteur r sera plus grand, ou plus petit que le demi-axe m.

34. L'angle LSE est égal aux deux SFE, SEF $= x + u$. Ainsi on a la démonstration de toutes le cinq valeurs proposées.

35. La fig. 4 exprime le cas, où l'angle SBP'' fait par le rayon vecteur avec la tangente du côté, où la planète s'en va, est aigu. S'il étoit obtus, on auroit la fig. 5, où tout va de même, avec la seule différence, que la planète dans le premier cas va vers le périhélie L, & dans le second vers l'aphélie A. Dans le premier cas l'anomalie comptée de l'aphélie est $= 120^\circ - z$, dans le second $= 120 + z$.

36. On auroit les mêmes valeurs, si l'orbite étoit une hyperbole, & la même démonstration en changeant quelque signe: dans la parabole l'axe devient infini, le cercle circonscrit une ligne droite LH (fig. 6) perpendiculaire à l'axe, le demi-paramètre $p = 2SL = 2h$, l'angle LSH $= \frac{1}{2}$ LSB, qui est la demi-anomalie, dont le quarré du cosinus est $= \frac{SL}{SB} = \frac{h}{r}$.

ME-

MÉMOIRE VII.

Son orbite avec le temps périodique déterminée par quatre observations d'un intervalle moindre de deux ans bien conforme avec toutes ces observations, & assez approchante d'une bien éloignée.

1. C'est M. Mechain, qui a eu la bonté de faire tous les calculs numériques pour l'application de ma méthode générale exposée ici dans le Mémoire III à quatre de ses observations, dont la première est éloignée de la dernière d'un intervalle de 594 jours. Je lui avois envoyé cette méthode avec les formules, & tout le procédé, pour en tirer tous les éléments de l'orbite dans une lettre du 4 Octobre de la même première année de la découverte du nouvel astre 1781, que je lui écrivis de Boynes, où je me trouvois à la campagne, en lui indiquant seulement une correction, qu'on auroit dû employer dans un intervalle de temps un peu long, correlative à la réduction du mouvement curviligne dans l'arc au rectiligne dans la corde, que j'avois déjà déterminé : je l'ai étendue après, & j'en ai exposé tout le procédé, & le détail avec les formules dans le Mémoire, qui précède celui-ci. Je lui avois communiqué successivement mes autres méthodes, & j'avois fait d'abord des applications de la même méthode générale à des premières observations moins éloignées entr'elles : il en avoit fait lui même, & celle, qu'on a ici dans le Mémoire V des quatre observations faites à des intervalles de temps égaux, dont la première, & la dernière à l'intervalle d'un an sidéral juste, lui avoit déjà fait voir avec toute la sureté l'ellipticité de l'orbite, & avoit donné des éléments bien conformes aux observations de ce temps, dont je parlerai à la fin de ce Mémoire-ci : mais nous attendions une détermination plus exacte & assurée d'un arc plus long, & celui-là de presque 20 mois a répondu encore mieux à nos espérances.

2. Voici les quatre observations, dont la seconde, & la dernière ont été réduites aux moments des deux oppositions. En me

les

les envoyant dans une de ses lettres il a ajouté ce qui suit : *ces observations sont dégagées de l' aberration , & de la nutation : elles sont de plus comptées sidéralement ainsi que le lieu du soleil à partir du 11 Mai 1781 :* il y parle de toute la suite des observations, qu' il avoit faites depuis le 25 d' Avril jusqu' alors, & il ajoute : *celles-ci ont été vérifiées par plusieurs précédentes, & suivantes : c' est la raison, qui me les a fait choisir pour établir les éléments.*

	T. M.	long. géoc. ♅	lat. géoc.	long. ⊙	log. dist. ⊙
1781. Mai 11	$8^h. 47'. 0''$	$86°. 25'. 13'', 3$	$0°. 11'. 45'', 7$	$51°. 24'. 54'', 0$	0,004797
Dec. 21	18 . 5 . 43	90 . 51 . 46 , 0	0 . 15 . 10 , 0	opposition	9,992714
1782. Mai 13	9 . 1 . 0	90 . 42 . 19 , 3	0 . 15 . 3 , 0	53 [illegible] 6 . 10 , 4	0,004977
Dec. 26	9 . 18 . 44	95 . 19 . 8 , 4	0 . 18 . 20 , 0	opposition	9,992670

3. Il m' envoya peu-après les éléments qu' il en avoit déduits : les voici :

Lieu du nœud ascendant . . . . $71°. 49'. 30''$
Inclinaison de l' orbite . . . . 0 . 43 . 36
Lieu du périhélie . . . . 172 . 13 . 17
Passage au périhélie . . . . le 7 Sept. 1799 à $1^h. 2'$
Demi-grand axe 19,07904
Excentricité 0,82034

Il en a tiré.

Le demi-petit axe 19,06140
Le rapport de l' excentricité au demi-grand axe . . 0,04300
La révolution sidérale . . . . 83^{ans}, 3364

4. Quand j' ai fait le Catalogue de tout ce qu' on devoit publier dans les cinq Volumes avec une notice abrégée du contenu, qu' on a imprimé après, j' avois cru qu' en tirant ces éléments de ma méthode il avoit employé la correction de la seconde, & troisième observation correlative à la réduction du mouvement inégal dans l' arc à l' uniforme dans la corde, que j' ai n' avois fait qu' indiquer dans ma première lettre, & je l' ai énoncé ainsi dans ce Catalogue en disant que cette détermination de l' orbite avoit été faite après cette correction : mais comme il a eu la

bonté de m' envoyer depuis tout le procédé de son calcul dans une lettre postérieure à l' édition de ce Catalogue, j'ai vu d' abord qu' il avoit employé les quatre observations ci-dessus telles qu' elles y sont sans aucune réduction, qu' il en avoit tiré l' orbite, qui ne donnoit pas avec assez d' exactitude les deux distances extrêmes telles qu' il les avoit tirées du calcul trigonométrique, ni le temps total, ni les quatre longitudes, ce qui devoit bien arriver, puisque la courbure d' un arc de 594 jours exige déjà une correction des longitudes intermédiaires pas grande, mais sensible, comme on voit bien par ce que j'ai déterminé dans le Mémoire qui précède celui-ci.

5. En voyant que les erreurs du résultat de ce premier calcul étoient assez petites, il a employé des corrections tirées des fausses positions. Il avoit déterminé par la méthode exposée ici dans l' Opuscule III les distances extrêmes de la planète à la terre TP, $T'''P'''$ (Tab. XIV fig. 5), avec la corde PP''' la distance SH du soleil au milieu de celle-ci, l' angle contenu entre ces deux lignes, & la hauteur de la vîtesse, & par la Trigonométrie les deux distances extrêmes SP, SP''' de la planète au soleil, qui sont les deux rayons vecteurs extrêmes. Il avoit trouvé par ce premier calcul ces deux rayons $SP = 18,959215$, $SP''' = 18,86002$, $SH = 18,87290$, la hauteur de la vîtesse $9,490025$, le complément de l' angle, que le rayon SH fait avec la corde $= 2°.\,24'.\,58'',7$. Il a commencé par faire varier le rayon SH en retenant son angle avec la corde jusqu' à ce que sa valeur $18,90927$ lui a donné ces deux rayons SP, SP''' les mêmes qu' auparavant.

6. Il en a tiré les éléments, qui pourtant donnoient encore $16''$ d' erreur sur le mouvement total héliocentrique, qui alloit jusqu' à $7°.\,8',45'' = 25725''$: ainsi cette erreur n' étoit que $\frac{1}{1608}$ du total. Pour ôter encore ce petit reste il a varié le paramètre, & par cette variation est parvenu à deux anomalies, dont la différence a répondu exactement au temps total, qui s' est écoulé entre les observations extrêmes. Par ce moyen il est arrivé à avoir les éléments du numéro 3, qui ont représenté exactement

la

la première, & la dernière des quatre observations employées, en donnant seulement 4'' de plus sur la seconde, & 8'' sur la troisième. Cet accord étoit bien suffisant, parcequ'on ne peut pas s'assurer dans les observations mêmes d'un petit nombre de secondes.

7. Après avoir trouvé les éléments peu éloignés de l'accord avec les observations employées, il y a beaucoup de moyens pour arriver à l'exactitude; mais on peut éviter tout ce tâtonnement en employant la réduction des deux longitudes intermédiaires, tirée des formules de ce Mémoire précédent, & qui même dans un arç de trois ans pourroient éviter la différence d'une seconde entre les longitudes calculées d'après les éléments établis par cette méthode, & les employées pour les établir : mais alors aussi une exactitude si rigoureuse dans le calcul seroit inutile, parcequ'en calculant d'après les mêmes éléments d'autres observations, même de celles des temps intermédiaires ou très-peu éloignés, on trouveroit toujours des différences d'un bon nombre de secondes : une seule demi-seconde négligée dans le moment du passage de la planète par le fil du micromètre, & une autre dans celui de la fixe comparée suffit, comme on sait, pour avoir 15'' de différence dans la longitude de la première.

8. Monsieur le Président de Saron dans le même temps s'est donné la peine de faire les mêmes calculs sur les mêmes données, & en suivant ma méthode, à ce que M. Mechain ajouta dans la même lettre, il a trouvé les éléments suivants

Le lieu du périhélie	172°. 15'. 17''
Le demi-grand axe	19,0764
Le demi-petit axe	19,0596
La révolution sidérale	83 ans, 3222.

Il ajoute, que la petite différence des siens a été produite par des petites fractions que M. le Président avoit négligées dans les calculs, & pourtant l'accord des leurs résultats avec les observations a été plutôt un peu plus grand. Ils ont donné la première longitude plus petite de 1'', la seconde plus forte de 1'', la troisième trop forte de $7''\frac{1}{2}$, la dernière trop petite de 1''.

9. M. de la Place avoit demandé à M. Mechain les mêmes

observations, pour *déterminer les éléments* d'après une théorie, qu' il avoit *établie par les grandes méthodes* analytiques, & il les a trouvés peu différents de ceux-ci à l'exception du rapport de l' excentricité au demi-grand axe, qui différoit un peu plus, comme on le verra ci-après. Pourtant à ce qu'on m'a écrit de Paris, les siens aussi ne s'accordoient avec les mêmes observations qu'a 3'' ou 4''. Il a changé un peu la position du nœud, & l'inclinaison de l' écliptique après la découverte de l' observation faite par Mayer en 1756. Il a donné ses éléments dans un Ouvrage, qui a pour titre *Théorie du mouvement, & de la figure elliptique des planètes*, que je n' ai pas pu voir dans cette petite ville de l'Italie, où je me trouve pour profiter de cette grande Imprimerie; mais je les ai trouvés dans la Connoissance des temps pours l'année 1786, où ils sont exprimés de la manière suivante.

Demi-grand axe de l'orbite	19,0818
Rapport de l' excentricité au demi-grand axe . .	0,047587
Ce rapport réduit en secondes	9815'', 5
Plus grande équation du centre	5°. 27'. 11''
Anomalie moyenne le 1.er Janvier 1782 temps moyen de Paris	102 . 59 . 31
Longitude de l'aphélie sur l'orbite à la même époque	353 . 22 . 59
Longitude du nœud ascendant au même instant. .	73 . 1 . 2
Inclinaison de l'orbite	0 . 46 . 12

Révolution moyenne de la planète 30445 jours, 75, ou 83 ans $\frac{1}{3}$.

10. Quant à l'observation de M. Mayer voici ce, que M. Mechain m' écrivit peu-après: „M. Bode Astronome de Berlin avoit „remarqué, que l'étoile num. 964. du Catalogue de Mayer ne se „trouvoit plus dans le ciel, & comme Mayer n'a observé cette „étoile qu'une seule fois tant en ascension droite qu'en déclinai- „son, & qu' elle étoit en 1756 à peu-près à l'endroit, où devoit „être le nouvel astre d'Herchel, on soupçonnoit que c'étoit vé- „ritablement cet astre. J'ai vérifié moi-même, qu' on ne trouve „plus cette étoile: mais il falloit avoir la date de l'observation de „Mayer. M. Lichtenberg l'a retrouvée dans ses manuscrits, &

„on

„ on l'a donnée dans les Éphémérides de Berlin pour 1785 : c'étoit
„ le 25 Septembre 1756. D'après cela j'ai réduit la position de
„ cette étoile prise dans le Catalogue de Mayer au 25 Septem-
„ bre 1756 : je l'ai rapportée à l'équinoxe moyen, & je l'ai dé-
„ gagée de l'aberration en la traitant, comme le nouvel astre : j'ai
„ trouvé que le temps moyen de son passage au Méridien de Go-
„ tingue réduit à Paris étoit $10^h.21'.18''$, sa longitude $346°.37'.41''$,
„ la latitude $48'.23''$ A., & j'ai calculé le lieu de l'astre par les
„ éléments, que j'ai eu l'honneur de vous envoyer : j'ai trouvé
„ qu'ils donnoient seulement $37'$ de moins sur la longitude : il y a
„ une petite erreur de calcul, qui pourroit donner quelques minu-
„ tes de plus ; mais je ne l'ai point recommencé, parceque M. de
„ la Place a trouvé que ces éléments réprésentoient ce lieu à $6''$ “.
J'ai su qu'en réfaisant le calcul sur ses éléments on a trouvé la différence de $11''$; mais cette différence aussi est si petite, que cet accord est étonnant, ces éléments ayant été trouvés avant la notice de l'observation de Mayer, qui lui a fait changer seulement le lieu du nœud, & l'inclinaison de l'orbite. Cet accord quoique seulement fortuit dans une telle justesse, comme je le ferai voir ci-après, & même l'autre, qui portoit une différence beaucoup plus grande, mais non pas excessivement plus, prouve assez, que c'est bien cette planète que Mayer a observée.

11. La première réflexion, qui me se présente à l'esprit sur cet objet, c'est que M. Herchel a été bien heureux de ce que M. Mayer, qui a observé plusieurs étoiles un bon nombre de fois, n'a fait, qu'une seule observation de celle-là : s'il l'avoit observée encore seulement une autre jour, il auroit remarqué son mouvement, & c'auroit été lui, qui après tant des siècles auroit enrichi l'Astronomie d'une nouvelle planète, en ôtant à M. Herchel l'occasion d'éterniser son nom, comme il a fait, par une découverte si heureuse, & intéressante.

12. Mais après je crois de pouvoir faire remarquer, qu'en comparant les éléments de M. de la Place trouvés par les grandes méthodes analytiques avec ceux de M. Mechain, & de M. le Président de Saron calculés d'après ma méthode si simple, &

cor-

corrigés par la règle des fausses positions, on y trouve peu de différence à l'exception de la seule excentricité, qui diffère un peu plus, comme je l'ai dit ci-dessus, & on y a un accord égal avec les quatre observations employées pour trouver les mêmes éléments. L'accord dans un demi-degré des éléments trouvés par ces Messieurs en suivant ma méthode avec une observation si éloignée auroit paru bien satisfaisant en considérant, que l'arc employé pour cette détermination n'arrive pas à un cinquantième du total, & il paroîtroit absolument tel, s'il n'y avoit cet accord singulier de ces autres de M. de la Place jusqu'à un si petit nombre de secondes. En considérant la chose bien au fond non seulement on trouvera un peu de hazard dans ce dernier accord; mais on verra avec la dernière évidence, que c'est tout-à-fait un accident fortuit. Les quatres longitudes données dans le cas d'une orbite si peu inclinée forment un problême déterminé pour trouver tous les éléments, à l'exclusion du lieu du nœud & de l'inclinaison. La solution complette & exacte de ce ploblême doit rendre un accord parfait des longitudes calculées d'après les éléments trouvés avec les employées dans cette recherche, & la petite différence qui est restée dans tous ces résultats ne provient que des petites quantités négligées dans la même solution. Il s'ensuit que si les observations avoient donné à M. Mechain les longitudes trouvées par son calcul, ou par celui de M. le Président à la place des observées, & la solution de M. de la Place avoit été poussée jusqu'à l'accord exact; celui-ci auroit trouvé nécessairement les mêmes valeurs qu'eux pour les éléments. Or c'est un hazard que les observations n'aient donné cette petite différence, & que d'avoir négligé des petites quantités cela ait corrigé l'effet de la différence des observations en amenant à l'accord plutôt que d'avoir porté sur la partie opposée: ainsi cet accord est un vrai hazard.

13. Cet hazard est bien flatteur, & bien heureux pour la réputation de l'Analyste: mais son mérite réel consiste dans l'invention d'une méthode capable de tirer des observations données des éléments ou parfaitement conformes, ou très-peu éloignés de

l'ac-l' accord parfait avec elles, & d' avoir exécuté son calcul assez bien pour parvenir à cet accord, non pas d' y avoir trouvé un si grand accord avec cette autre observation éloignée, qui est absolument un hazard. Celui-ci est, comme je l' ai dit, heureux pour lui; mais je ne crois pas qu' il soit heureux aussi pour l' Astronomie, en donnant les éléments de l' orbite, qui conviennent à cette planète dans ce temps-ci plus que les autres, qui ont un accord avec les observations de ces deux premières années égal à celui de ceux-là, qui l' ont donné aussi pour ce temps éloigné, & cela pour deux raisons, que je m' en vais développer.

14. Premierément il y a d' autres éléments, dont quelqu' un est beaucoup plus éloigné du correspondant de M. de la Place, que celui de M. le Président, & de M. Mechain, qui pourtant sont aussi bien d' accord non seulement avec les observations de ce temps-ci, mais aussi avec l' autre de Mayer, que les siennes, & encore plus: ce sont ceux, que M. Oriani excellent Géomètre & Analyste a donné dans les Éphémérides de Milan pour l' an 1785 imprimées l' an 1783. Il a employé aussi quatre longitudes, mais pour avoir à la fois les héliocentriques avec les géocentriques a pris les deux premières conjonctions, & les deux premières oppositions. Pour les oppositions on les a par des observations faites ces mêmes jours, ce qui en rend la détermination beaucoup moins fautive. Pourtant on trouve quelque différence pas grande, mais sensible entre sa détermination du temps & le lieu de ces deux oppositions, & celles de M. Mechain, même ayant égard pour le temps à la différence des Méridiens de Milan, & de Paris: pour la conjonction il faut employer des observations beaucoup plus éloignées, puisqu' une planète d' une lumière aussi foible, qui ne paroît que comme une petite fixe de sixième grandeur, & aussi peu éloignée de l' écliptique, reste trop long temps avant, & après la conjonction cachée par les rayons du soleil, & c' est la raison, pour laquelle ma méthode proposée dans le Mémoire IV de ce second Opuscule m' a bien donné la distance absolue assez peu éloignée de la véritable; mais elle a échoué dans la détermination de la petite différence des distances, dont dépend l' ellipticité, & la

posi-

position de l' ellipse comme j' ai remarqué dans ce même Mémoire. Pourtant M. Oriani a proposé dans son Mémoire plusieurs observations qu' il a employées pour la détermination des lieux, & des temps des conjonctions, avec la manière de s' en servir, qui lui ont donné des résultats très-peu différents entr' eux : voici ces longitudes avec leurs temps de l' Observatoire de Milan, qui est 27'. 25" plus oriental que celui de Paris.

		long. hélioc.	lat. hélioc.
1781. Juin	19j. 5h. 52'	88.38.21	0.12'.28"
Dec.	21.18.25	90.52.13	0.14.21
1782. Juin	24. 3.48	93. 5.48	0.16. 4
Dec.	26. 9.32	95.20.28	0.17.45

15. Il employe d' abord ces données pour déterminer en gros dans l' hypothèse circulaire le temps périodique, & la distance de la planète au soleil, ce qui lui suffit pour avoir le lieu du nœud, & l' inclinaison de l' orbite avec toute l' exactitude réquise pour réduire les longitudes de l' écliptique à l' orbite : les réductions ne sont qu' une addition de 4", 5", 6", 7", où la différence qui en résulte de 3" seulement sur le mouvement total fait voir qu' on peut bien aussi négliger cette réduction, les longitudes dans l' écliptique étant incertaines hors des limites moins étroites. Il se sert des longitudes ainsi réduites pour déterminer les éléments par une méthode, qu' il indique seulement en disant, qu' elle employe les différences finies, en promettant de l' exposer ailleurs. Il apporte l' exemple, qui peut bien donner des idées pour chercher une méthode de les employer, mais non pas pour voir celle qu' il a suivi principalement pour en trouver une, dont dépendent les autres, & de laquelle il dit seulement, je l' ai trouvée telle. Il détermine tous les éléments avec tout ce qui est nécessaire, ou utile pour former dans le plus grand détail les tables des mouvements de cette nouvelle planète avec toutes les formules algébriques, & la manière de s' en servir, les règles, les exemples, & le résultat du calcul appliqué aux temps d' un assez grand nombre

bre d' observations choisies parmi celles, qu' on avoit faites à l' Observatoire de Milan, dont il y a une longue suite dans ce Volume d'Éphémérides à ajouter à une autre aussi bien longue, qu' on avoit déjà publiées dans un Volume précédent. Parmi les observations comparées avec le résultat des ses éléments il y en a aussi deux des premières de M. Maskelyne, & même l'observation de Mayer avec les différences tant des longitudes que des latitudes calculées aux observées. Il y a dans tous les Volumes de ces Éphémérides beaucoup de pièces de sa façon du plus grand mérite; mais cet ouvrage seul le fait voir à la fois un grand Géomètre, grand Calculateur, grand Astronome pour tout ce qui appartient tant à la théorie qu' à la pratique.

16. Voici ces éléments tels qu' il les a proposés adaptés au midi de Milan du 31 Dec. 1781, où pourtant j'en laisse à part un bon nombre, qu' il y a ajoutés en les tirant de ceux-ci, à l' exception des deux, qui sont ici les derniers, & qu' on peut comparer avec les deux derniers rapportés parmi ceux de M. Mechain.

Epoque, ou longitude de la planète pour ce moment	$3^{s}.\ 6^{\circ}.28'.52''$
Longitude de l' Aphélie	11.25.11.30
Longitude du nœud ascendant	2.12.52. 0
Inclin. de l' orbite en supposant l' obliquité de l' écliptique $23^{\circ}.28'.2''$	0.46.25
Demi-grand axe	19,04596
Excentricité	0,92220
Son rapport au demi-grand axe	0,04842
Révolution sidérale	30360 jours

17. En comparant ceux-ci avec les précédents on y trouve quelque différence beaucoup plus grande, qu'entre ceux de M. Mechain, & de M. de la-Place: pourtant l' accord avec les observations il y est même beaucoup plus admirable: les différences tant des longitudes que des latitudes sont bien petites: il y en a 27 couples, & la différence des longitudes n' arrive qu' une seule fois à la demi-minute, une autre seule à 20'', six autres seules dépassent 10'': de celles de la latitude, qui ne dépendent pas du temps,

deux seules dépassent les 10'', & trois autres seules les 5'' : celle de Mayer, qu' il dit d' avoir examinée, discutée, réduite, ne diffère de la valeur tirée de ces tables que de 7'' en longitude, 4'' en latitude, accord plus grand encore que celui du calcul fait sur les éléments de M. de la-Place pour la comparaison avec cette même observation réduite par M. Mechain. Pourtant cet accord ne se trouvoit pas si exact par les premiers éléments de M. Oriani, qu' il avoit tirés directement de ses quatre observations: il avoit trouvé 32'' de différence en longitude, & 7'' en latitude. Ayant fait des petites corrections à ces premiers éléments il a réduit la différence de la longitude à 4'', & il a laissé le 7'' de la latitude pour une raison qu' il y rapporte.

18. Voici donc des éléments différents, qui s' accordent également tant avec les observations de ce temps-ci, qu' avec cette éloignée de Mayer. La plus grande différence, qu' on y trouve, est celle du demi-grand axe : elle est assez considérable, cette valeur étant chez M. de la-Place 19,0818, chez M. Oriani 19,04596, tandis que la longitude de l' observation de Mayer, que M. Oriani a trouvé dans les mêmes Éphémérides, est la même, que celle de M. Mechain rapportée ici au num. 10, confrontée avec le résultat de M. de la-Place: ainsi la même longitude a été presqu' exactement d' accord avec des éléments assez différents. Pour avoir cet accord avec les longitudes d' à présent, & cette autre si éloignée, il faut que la somme des autres différences de l' excentricité ait corrigée l' effet de celle du demi-grand axe. Pourtant cela fait voir, que l'accord avec cette observation ne prouve pas l' exactitude ni de l' un, ni de l' autre de ces deux systêmes d' éléments.

19. Mais il y a une raison pour croire tout au contraire, que cet accord si grand avec une observation si éloignée prouve plutôt, que tous les deux sont fautifs. L' action principalement de Jupiter, & de Saturne doit faire varier considérablement la forme, & la position de l' orbite d' une planète si éloignée du soleil, dont l' action est si affoiblie par la distance même. La théorie de la gravité générale, qui donne pour l' orbite une section conique autour du soleil placé dans son foyer, suppose le so-

soleil même centre des forces immobile dans un même point ; tandis que c' est le seul centre commun de gravité de toutes les planètes , & les comètes , qui peut rester immobile . Lorsque Jupiter & Saturne sont en conjonction , si l' on n' a égard qu' à eux-seuls , ce centre commun se trouve hors de la surface du soleil entr' elle , & ces planètes , & comme cette conjonction se fait tous les 20 ans , Saturne étant à peu-près à deux tiers de sa révolution ; à chaque révolution de la nouvelle planète il y a quatre de ces conjonctions , qui se font vers des parties du ciel si différentes , ce qui fait un changement si considérable de ce centre des forces : cela seul doit déjà déranger considérablement l' orbite : l' action de Jupiter , & de Saturne sur la planète même dirigée vers des parties du ciel si différentes dans plus de cinq révolutions de Jupiter , & presque trois de Saturne combien ne doit elle augmenter ce dérangement ? Si l' action d' une seule de ces deux planètes trouble l' orbite de l' autre de manière , que même ayant égard à cette action , autant que le problême de trois corps jamais assez bien résolu jusqu' à présent le permet , les tables calculées pour elles ne s' accordent encore assez avec leurs mouvements observés ; comment peut-on espérer l' accord dans peu de secondes des éléments , & des tables de celle-ci , qui est troublée par toutes les deux à la fois ? Si un accord si grand se trouve une fois dans une position , il est bien évident , que c' est un hazard , contre lequel il y auroit eu à parier plus d' un milion contre un , & cet accord même trouvé déjà par cet hazard très-extraordinaire fait présumer plutôt , que dans un autre temps éloigné du notre , & de celui-là on trouvera une différence bien considérable entre le lieu calculé sur ces mêmes éléments , qui s' y sont accordés , & le lieu observé .

20. Ainsi je crois , que le meilleur parti pour avoir une connoissance moins fautive de son mouvement sera celui de déterminer de temps-en-temps sa distance , & sa position , ce qu' on peut faire absolument par ma méthode appuyée au mouvement rectiligne , & uniforme , qui ne peut pas tromper , si l' on se sert d' un arc de deux ou trois ans en choisissant à propos les observations , &

on employe la réduction du même arc à la corde selon la méthode, que j' ai développée dans l' Opuscule précédent, où j'ai fait voir que dans cette réduction on ne peut pas se tromper de plus d' une seconde, même en employant un arc de trois ans. Le calcul de la réduction sera bien plus facile encore, si pour les deux observations intermédiaires on employe une opposition, & une conjonction ; mais l' emploi de deux oppositions sera beaucoup plus sûr, parcequ' on détermine beaucoup plus exactement celle-ci par des observations peu éloignées de ce moment (*). Quand la

(*) On peut bien employer deux, & même trois observations faites, la planète étant en opposition, ou en conjonction avec le soleil, pour y appliquer la méthode fondée sur le problême, qui cherche une ligne droite coupée en raison donnée par quatre droites données de position, mais non toutes quatres les observations faites dans ces circonstances, & cela par la même raison, par laquelle j' ai fait voir au num. 13 du Mémoire V de cet Opuscule II, qu' on ne peut pas employer quatre observations faites à trois intervalles égaux dont chacun seroit d' un an sidéral exact : c' étoit là, parcequ' alors les quatre lignes données auroient passé toutes par un même point, qui seroit celui de l' orbite terrestre, auquel la terre revient exactement après chaque an sidéral : ici il y auroit le même inconvenient. Les quatre lignes partiroient du même centre du soleil. Or toutes les lignes droites parallèles entr' elles sont coupées en la même raison par un nombre quelconque de lignes droites, qui partent d' un même point : ainsi quand il y a une ligne droite coupée par les quatres directions des longitudes données, qui passent par le centre du soleil, en la raison donnée des temps : il y a un nombre infini d' autres placées à des distances quelconques coupées en cette même raison, ce qui rend le problême indéterminé, & empêche d' avoir par-là celle qu' on cherche. La raison donnée des deux segments d' une ligne droite coupée par trois, qui partent d' un même point, en détermine la direction ; mais toutes les autres parallèles à celle-là en sont coupées aussi en cette même raison. Quand par la raison de deux segments on a déterminé la direction ; s' il y a une quatrième droite partie de ce même point, & le segment déterminé par celle-là n' a pas le rapport donné aux deux précédents, le problême est impossible : s' il a ce rapport, le problême sera bien possible, mais il sera indéterminé, parceque toutes les lignes parallèles à une seule déterminée par la raison donnée des deux premiers segments les aurons tous les trois en la même raison. Dans notre cas il y auroit non l' impossibilité, mais l' indétermination, qui rend inutile la recherche.

Pourtant on peut profiter de trois seules directions de cette espèce : en s' y prenant d' une autre manière on peut facilement par ces trois seules déterminer tout la longitude héliocentrique est la même, que la géocentrique, la ligne qui va de la terre à la planète tombant sur le rayon vecteur coupe la corde dans le même point, que lui : ainsi il n' y reste, que la seule réduction appartenante à la très-petite inégalité de la vîtesse, dont l' effet en sachant par un à-peu-près l' orbite se trouve très-aisément par la même méthode développée dans cet Opuscule. On pourra bien déterminer aussi l' orbite elliptique appartenante à ce temps-là, puisque le centre du soleil dans deux ou

---

tout ici, où la latitude est si petite, qu'on peut considérer l' orbite comme plongée sur l' écliptique, & où on a sa forme peu éloignée de la circulaire, & la distance au soleil assez grande pour pouvoir négliger la flèche au moins d' abord : j' indiquerai seulement la route, qu' on peut tenir pour cette détermination.

On pourra employer la fig. 4 de la planche X de ce Volume, en considérant, que les trois lieux de la planète soient C, G, C'', le soleil étant en S, & la rencontre du rayon vecteur SG avec la corde CC'' soit F. Ici il n' y a point de réduction pour la seconde longitude, parceque cette longitude appartient à la conjonction, ou à l' opposition : ainsi on a immédiatement par les observations les trois longitudes héliocentriques, & les deux mouvements CSG, GSC'', qu' on pourra nommer m, m', en faisant le total $CSC'' = m'' = m + m'$. On aura aussi la corde CC'', coupée en F en raison des temps t, t', le temps total étant $t'' = t + t'$, où même il n' y aura rien à craindre de la supposition du mouvement uniforme de l' intersection F, si l' on prend les trois positions à des intervalles de temps t, t' égaux : car si l' on conçoit les cordes CG, $C''G$; non seulement les segments CG, $C''G$ sont d' un ordre inférieur par rapport aux secteurs CSG, $C''SG$, mais leur différence doit être d' un ordre inférieur à eux mêmes, & par conséquent sans rien craindre on peut prendre pour égaux les triangles CSG, $C''SG$, qui sont entr' eux comme les lignes CF, $C''F$, ainsi celles-ci resteront comme les temps, & égales entr' elles, si ces temps sont égaux. Or ces temps seront très-peu éloignés de l' égalité, si l' on prend une conjonction entre deux oppositions, ou une opposition entre deux conjonctions, ce qui fera le temps total tant soit peu plus long d' un an ; mais il vaudra mieux de prendre trois oppositions consécutives, qui d' un côté peuvent être déterminées plus exactement, & de l' autre donneront un intervalle de temps double : à la place de l' égalité des lignes CF, $C''F$ on fera mieux de prendre leur rapport tel qu' il dérive des observations, qui le donneront tant soit peu différent de l' égalité.

On aura alors la raison des lignes SC, SF, SC'', comme on l' a trouvé aussi dans le premier Opuscule pour les distances raccourcies à la terre, par les va-ou trois ans a peu de mouvement, & l' effet des perturbations de Jupiter, & de Saturne y est petit aussi : on verra par la différence de ces ellipses trouvées à différents intervalles de temps l' effet même de ces perturbations ; mais la distance de la corde trouvée immédiatement par la même méthode sera toujours beaucoup plus sûre, & exacte, que les éléments qu' on en tirera, dans lesquels on aura des erreurs beaucoup plus considérables produites

---

valeurs t, t', t'', & $sin.m$, $sin.m'$, $sin.m''$. Les rayons SC, SC'' seront comme $\frac{t}{sin.m}$ à $\frac{t'}{sin.m'}$, ou $t sin.m'$ à $t' sin.m$, où l' égalité presqu' exacte des temps t, t' fera voir au premier coup d' œil, si la planète s' approche, ou s' éloigne : on trouvera un très-petit changement de distance. La même raison des rayons SC, SC'' avec l' angle CSC'' donnera l' angle SCC'', & comme on a l' angle CSF, on trouvera l' angle SFC, qu' ou pourra prendre pour l' angle SGK formé par le rayon vecteur SG avec la tangente GK, qui en négligeant la flèche FG se confond avec l' arc, & la corde ; mais il y a beaucoup moins à craindre, si l' on la considère seulement comme parallèle à la même corde.

Alors si l' on prend SF par position égale à-peu-près à la distance, qu' on aura trouvée par d' autres méthodes moins exactes, comme par l' hypothèse circulaire ; on aura $SC = \frac{SF \times sin.SFC}{sin.SCF}$, & $CC'' = \frac{SC \times sin.CSC''}{sin.SC''C} = \frac{SC \times sin.CSC''}{sin.(SCC'' + CSC'')}$. On pourra comparer la valeur de cette corde avec l' espace, qui répond au mouvement moyen de la terre dans le même temps t'', d' où l'on tirera le rapport de la vîtesse de la planète à la vîtesse moyenne de celle-ci, & de-là la hauteur de cette vîtesse, qui se trouve aisément ; puisque cette hauteur est à celle de la vîtesse de la terre, qui est la moitié de sa distance moyenne au soleil, en la raison composée de la directe des quarrés des mêmes vîtesses, & réciproque des forces accélératrices, qui sont en raison réciproque des quarrés des distances.

Ayant le rayon vecteur, son angle avec la tangente, & la hauteur de la vîtesse, on a par les formules de la note du numero 6 du Mémoire V de cet Opuscule démontrées à la fin du Mémoire VI, le demi-grand axe, l' excentricité, & le lieu du périhélie : le premier donne le temps de la révolution sidérale par son rapport à la distance moyenne de la terre au soleil : le dernier comparé avec les deux longitudes extrêmes donne leurs deux anomalies vraies : le demi-grand axe avec l' excentricité donne la distance périhélie & aphélie : avec très-peu de calcul on tire de l' anomalie vraie l' anomalie excentrique, & de celle-ci, & de l' excentricité l' anomalie moyenne : la différence des deux anomalies est le mouvement moyen, qui devroit être égal au quatrième terme proportionnel après le temps de la révolution sidérale entière, duites par des très-petites appartenantes à la petite différence des distances extrêmes.

21. Comme les effets de toutes les autres planètes sur le déplacement du centre du soleil par rapport au centre commun de gravité est beaucoup plus petit que l'effet de Jupiter & de Saturne, & on sait aujourd'hui cet effet, en sachant suffisamment bien leur masses par rapport à celle du soleil, on pourroit aussi déterminer la distance, & la position de la même planète nouvelle à ce centre commun considéré comme immobile; pourtant il y aura toujours une autre difficulté née de l'effet de l'action des comètes, qui doivent aussi déplacer le centre du soleil, & le cen-

---

re, du temps t'', & de 360°. La différence sera l'erreur de la position employée, qu'on corrigera par la méthode des fausses positions.

On parviendra bien-tôt à cette correction dans le cas de cette planète, si l'on prend pour la première position la distance SF $=$ 19,0. Si l'on veut y ajouter la petite flèche FG après avoir tiré la valeur de la corde CC'', & l'angle SGK $=$ SFC, pour employer la SG entière dans tout le reste; on le fera aisément: elle sera presque exactement $= \frac{CC''^2}{8SF}$, parcequ'elle sera presque exactement égale au rectangle CF×FC'' divisé par le diamètre du cercle bien peu éloigné de 2SF. L'erreur de cette détermination sera très-petite par rapport à cette quantité déjà si petite elle même, qu'on pourra bien la négliger toute entière dans un arc de deux ans: mais en faisant ce petit calcul numérique, on verra bien si cette petite quantité mérite d'en tenir compte; & il n'y a aucune autre correction à faire correlativement au Mémoire VI.

Pour trouver la hauteur de la vîtesse on peut employer la valeur a trouvée selon la règle proposée au num. 32 de l'Opuscule I, dont le logarithme est $0{,}756499 + 2\log.t''$. C'est (num. 30) le quarré du double espace parcouru avec le mouvement moyen de la terre dans le temps t'': ainsi le quarré de cet espace simple sera $\frac{1}{4}a$. Si l'on fait CC'' $= c$, SG $= r$; la raison des quarrés des vîtesses sera $\frac{1}{4}a$ à c^2, & la raison des forces r^2 à 1: ainsi on aura la hauteur cherchée qui sera le quatrième terme proportionnel après $\frac{a}{4r^2}$, c^2, $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{2c^2r^2}{a}$.

Quand on aura trouvé la distance, qui donne l'égalité de la différence des deux anomalies avec le mouvement, qui répond au temps t'', on aura par les mêmes formules, & par les méthodes connues tout le reste. L'impossibilité d'employer les quatre positions de l'espèce des oppositions, & conjonctions a donné l'idée d'en employer trois seules, qui doit réussir au moins également.

centre commun de gravité par la différence des leurs actions sur le même soleil, & sur toutes les planètes. Comme on a trouvé quelque irrégularité, quelque espèce de saut extraordinaire dans le mouvement de Saturne, dont on ne voit aucune apparence de raison dans la gravité mutuelle du système planétaire; il y a toute la probabilité, que ce soit l'effet de quelque comète de masse assez grande, qui en descendant vers son périhélie s'approche assez de cette planète pour en déranger le mouvement sans s'approcher assez du soleil, & de nous pour se rendre visible. Toutes ces irrégularités se trouvent principalement dans le mouvement de Saturne, parceque celle-là étant la planète la plus éloignée de toutes les anciennes, sa gravité vers le soleil est la plus foible, & que c'est la seule entr'elles, qui peut avoir chacune des autres placée entr'elle & le soleil, dans lequel temps son action sur le même soleil & sur elle se fait en sens contraire, ce qui fait pour l'effet du dérangement la somme des deux actions à la place de la différence. Combien ne faut il pas s'attendre à des irrégularités beaucoup plus fortes dans le mouvement de la nouvelle planète, qui étant éloignée du soleil le double de Saturne non seulement a la force de la gravité quatre fois plus foible que celui-ci, mais dans la conjonction avec lui a le dérangement, qui répond à la somme de ses actions aussi sur elle & sur le soleil!

22. C'est la raison qui me fait croire, & même voir avec la dernière évidence, que malgré ce grand accord d'autant plus admirable dans peu de secondes des éléments avec les observations de ce temps-ci, & avec cette autre éloignée d'un tiers de toute l'orbite, on n'aura jamais des éléments, qui s'accordent dans la suite des temps avec les observations, que par un à-peu-près seulement : mais cela aussi est plus que suffisant pour satisfaire notre curiosité sur les grands objets de la Nature : il suffit de connoître en gros le nombre, la grandeur, le mouvement de ces corps : l'exactitude scrupuleuse dans tout cela est tout-à-fait inutile à l'exception des mouvements de la Lune, de Jupiter, & de son premier, & au plus de son second satellite, qui intéressent

sent la Géographie, & la Navigation. Nous ne sommes plus dans les temps, où on faisoit tant de cas de tout cela pour l'Astrologie effacée aujourd'hui par l'Astronomie solide, ni à la Chine, où on est encore autant superstitieux de ce côté-là. Je ne sais pas quel effet aura produit dans ce vaste empire cette découverte, pour eux beaucoup plus grande que pour nous, d'une planète nouvelle. On ne saura pas s'y décider de si-tôt, si l'on doit la croire bienfaisante ou maligne, d'un pronostique bien ou malheureux : cette apparition doit déranger toutes leurs règles employées depuis tant de siècles pour diriger toutes les démarches non seulement religieuses & politiques, mais aussi les civiles & domestiques. Toutes les règles de nos anciens Astrologues seront aussi bien dérangées par cet agent nouveau de la même espèce. Pour nous il suffit, comme je viens da le dire, d'en avoir une connoissance en gros, & c'est la raison pour laquelle je crois bien inutile la grande peine qu'on se donne dans tant d'Éphémérides & des Almanacs, mêmes des astronomiques, comme dans la *Connoissance des temps*, & dans le *Nautical Almanac* pour avoir les lieux de toutes les planètes pour tous les jours avec tant d'exactitude après de si longs calculs. Je crois, qu'il suffiroit de les avoir en gros de temps-en-temps, à l'exception de ceux, qui intéressent la Géographie, & la Navigation. Les méthodes qui font voir comment on pourroit parvenir à cette exactitude, qui sont le fruit des méditations sublimes de Géométrie, & d'Analyse pour la théorie, & d'adresse pour l'imagination, & exécution des instruments propres pour cet effet, avec quelques exemples pour en voir la justesse me paroissent bien dignes de l'homme : l'exécution scrupuleuse journalière de tout cela me paroît une espèce de pédanterie Astronomique contraire à ce beau principe *ne quid nimis*.

23. Pour ce qui appartient à la grandeur de cette nouvelle planète je crois qu'on ne peut avoir rien non seulement de certain, mais même de tant soit peu probable. Elle dépend de la distance combinée avec le diamètre apparent : la première nous l'avons déjà beaucoup plus exacte qu'il n'est nécessaire pour cet

objet ; mais la seconde nous ne l' aurons jamais à cause de sa petitesse . M. Oriani a adopté la mesure , qu' on a proposée de 6" comme déterminée par les prodigieux effets des télescopes de M. Herchel : mais l' aberration des rayons partis d' un point de l' objet, qui ne sont jamais réunis dans un seul point du foyer, fait toujours une augmentation de l' imagè de quelques secondes , qui est & sera toujours incertaine : elle est aussi augmentée par l' action continuelle des petits globules des vapeurs interposées, dont l' interposition forme un piquotement continuel , & continuellement varié des rayons au fond de l' œil tant par une inégalité de réfraction , que par la soustraction de la lumière tantôt à une partie de la prunelle, tantôt à l'autre : ces deux causes réunies avec des imperfections dans la forme , & dans la densité des parties de l' humeur crystalline font aller les rayons reçus tantôt dans un point du même fond de l' œil, tantôt dans un autre , ce qui est la vraie cause de la scintillation des astres à petit diamètre apparent , comme est celui des étoiles fixes , qui autrement paroîtroient un seul point même dans les plus forts télescopes : tout cela empêchera toujours la détermination d' une diamètre apparente si petite .

24. Il ne me reste , que de faire quelque réflexion sur la manière , dont le travail de M. de la-Place est énoncé dans ce Volume de la Connoissance des temps. En lisant ce récit on croira que cet Académicien a été non seulement le premier , mais même le seul à s' occuper de la théorie de cette nouvelle planète, & cela tout de suite après la découverte faite par M. Herchel. Pourtant on voit bien que M. de la-Place n' a appliqué sa théorie aux observations qu' après la dernière des quatre observations de M. Mechain , & même après que celle-là à été confirmée par les observations suivantes de cet Astronome , & que celui-ci a pu achever les calculs nécessaires pour en tirer le temps , & le lieu de cette opposition, c' est-à-dire au commencement de l'année 1783, presque deux ans après la découverte de cet astre : M. Mechain, & moi , nous nous en sommes occupés des les premiers moments après que la nouvelle de cette découverte est arrivée à Paris

le

le mois de Mars 1781. Nous avons fait d'abord la recherche de son orbite dans l'hypothèse parabolique, comme nous étions accoutumés de faire à toute apparition d'une nouvelle comète, & M. le Président de Saron a eu la bonté de s'en occuper lui même en employant ma méthode sur les grandes planches, qu'il a fait graver avec l'écliptique divisée, & l'orbite de la terre pour avoir avec moins de nouvelles opérations graphiques ce qui devoit venir en usage pour se former la première idée de la distance, & position de l'orbite de la comète selon la théorie exposée dans le premier Opuscule de ce Volume-ci, & continuer plus aisément sur ces figures imprimées toute la construction que j'ai proposée pour déterminer les éléments. C'est à cette occasion que lui le premier, en voyant nos travaux réunis incapables de concilier les observations avec une orbite peu éloignée, c'est-à-dire seulement à des distances, dans lesquelles les comètes sont visibles, s'est apperçu, qu'il falloit la chercher beaucoup plus loin, ce qui a donné l'occasion à M. de La-Lande d'employer l'hypothèse circulaire, qui a réussi d'abord, mais qui après quelques mois c'est éloignée des observations beaucoup plus qu'à pouvoir rejeter la différence sur les erreurs des observations.

25. On voit dans le premier Mémoire de cet Opuscule une narration abrégée de nos travaux sur cet objet bien antérieurs aux calculs de M. de la-Place. La très-longue lettre, que j'écrivis à M. de La-Lande, dont j'ai donné un espèce d'extrait dans le même Mémoire, avoit sur son commencement la date du 16 Mai postérieure de deux seuls mois à la découverte, & je l'ai continuée à mesure que j'avançois dans mes recherches: pourtant je lui en avois déjà écrites trois autres avant celle-là sur le même sujet. C'est après ces premiers essais, que j'avois remarqué, que dans le cas d'un mouvement si lent en longitude réuni à une latitude très-petite on pouvoit trouver dans les distances, dans lesquelles les comètes sont visibles, deux cordes capables de satisfaire aux mêmes trois observations, & ayant su de M. de La-Lande le grand éloignement imaginé par M. le Président j'y ai ajouté les deux cordes éloignées tirées de ma théorie générale des orbites des comètes, & la détermination

de l'orbite circulaire tirée de la même théorie, que j'ai développée d'une manière plus simple dans le Mémoire II. J'y ai appliqué alors la solution du problême de la ligne droite coupée par quatre droites données de position en faisant remarquer que c'étoit la première fois, que ce problême pouvoit avoir usage en Astronomie, & j'ai donné la manière de s'en servir pour en tirer l'espèce de l'orbite, sa grandeur, sa position, avec tous les éléments soit paraboliques, soit elliptiques, & même une hyperbolique, que la solution auroit déterminée.

26. J'ai développée cette application en détail dans une lettre que j'écrivis de Boynes à M. Mechain, où je me trouvois à la campagne, qui est datée du quatre Octobre de la même première année 1781, & déjà j'en avois communiqué tout le procédé à un des Astronomes de Milan, comme aussi je leur avois envoyé l'Opuscule sur le même objet, qui fut traduit en Italien, & publié dans le premier Volume de la Société Italienne imprimé à Verone. Cette théorie a été le sujet du Mémoire III de ce second Opuscule, & le fondement de tous les suivants appuyés sur ce même principe. J'avois déjà fait de cette première année des calculs appliqués à des observations, qui n'étoient encore assez éloignées pour avoir de la précision dans les résultats, mais ils pouvoient donner des idées sur le mouvement de ce nouvel astre : M. Mechain s'en étoit déjà occupé en appliquant des calculs numériques à plusieurs des mes formules, même à celles des Mémoires II, & IV, en examinant les miens, & corrigeant des fautes, qui s'y étoient glissées par mes distractions continuelles : on peut voir ici dans le §. I du Mémoire V de ce second Opuscule une partie de ses calculs faits sur mes formules pour les quatre observations à des intervalles de temps égaux avec l'intervalle entre les extrêmes d'un an sidéral juste. Il les avoit appliqués à quatre de ces observations, qu'on voit dans le même paragraphe, dont la première est du 13 Avril 1781, & la dernière du pareil jour de 1782. Après quelque temps il examina ce premier travail, & dans une lettre du 19 Octobre 1782 m'envoya les nouveaux éléments qu'il avoit trouvés après a-

voir

voir eu égard à la petite flèche, qu' il avoit négligée dans ce premier calcul, & faite en conséquence une petite correction aux distances.

27. Après avoir exposé la manière de laquelle il s' étoit pris pour faire cette correction, & proposé les éléments trouvés, il y dit : *J' ai calculé avec ces nouveaux éléments le lieu de la planète pour le* 5 *d' Octobre* 1782 *à* $13^h.38'$ *temps moyen à Paris: je trouve la longitude géocentrique plus grande* $1'.7''$ *seulement que par mon observation . . . . . il résulte toujours que votre méthode d' un an, très-simple, & très élégante donne le lieu de la planète à* $1'$ *près maintenant, tandis que le cercle de M . . . . donne actuellement* $3'$ *d' erreur. Il faut dire encore qu' ayant été obligé d' employer une observation de Greenvich, qui étoit peut-être différemment réduite que les notres, & peut-être pas comparée avec la même étoile; il est très-possible qu' il y ait une petite erreur, ce qui influeroit un peu sur les éléments. Il ne faut pas compter pour rien dans les sources d' erreur celles des tables du soleil : car il peut y avoir dans des cas jusqu' à* $30''$ *de plus ou de moins dans les arcs de la terre parcourus, selon que les erreurs se seront compensées, ou auront concouru à donner un arc plus grand pour un intervalle que pour un autre. On verra par la suite comment cette ellipse se soutiendra avec les observations : mais par le peu d' erreur en* 18 *mois on peut déjà être certain que les éléments de l' ellipse sont dégrossis, & qu' on a des à-peu-près, qui ne sont pas trop éloignés.*

28. Or ces mêmes éléments non seulement se sont soutenus bien de temps après; mais ils se sont trouvés incomparablement plus d' accord avec les observations, de manière à faire soupçonner d' erreur celle du 5 Octobre qu' on avoit trouvée différente d' une minute. Voici le passage d' une lettre du même M. Mechain du 15 Janvier suivant : *Pour la Planète d' Herchel l' ellipse que j' ai trouvée par votre méthode satisfait maintenant à quelque secondes près aux observations : peut-être y avoit-il quelque petite erreur d' observation ou dans les tables du soleil en Octobre*

lors-

lorsque l'erreur a été près d'une minute. Voici donc un autre accord des observations du temps avec d'autres éléments, que je ne rapporte pas ici, mais qui ont de la différence de tous les quatre, que j'ai mis ci-dessus: quand il s'agit d'un petit arc, plusieurs qui sont presqu'en attouchement total entr'eux peuvent s'éloigner beaucoup les uns des autres dans leur continuation, comme il est bien aisé de concevoir. Mais pour ce qui appartient aux époques des découvertes sur ce nouvel astre, on voit bien ici qu'au mois d'Octobre, c'est-à-dire au de-là de deux mois avant que M. Mechain eut fait la dernière des observations employées par M. de la-Place pour l'application de ces théories à la détermination de l'orbite, on y avoit fait beaucoup de recherches, & d'applications d'autres méthodes, on en avoit trouvé & publié une, que M. Mechain a eu la bonté d'appeller très-simple, & très-élégante capable de bien déterminer non seulement la distance, mais les éléments entiers, on avoit reconnu & démontré l'ellipticité, on avoit calculé des éléments, qui ne s'éloignoient des observations de presque deux ans, que de quelques secondes, on avoit déjà fait presque tout: car quand on a trouvé par des observations peu éloignées des éléments pas encore tout-à-fait exacts, on sait bien, qu'il est aisé de les rectifier, & leur donner toute l'exactitude, dont elles sont susceptibles par des observations un peu plus éloignées, & on peut ajouter, que tout ce que j'ai dit ci-dessus laisse même douteux quels des éléments un peu différents entr'eux, qui se trouvent d'accord avec les observations du temps, soient les vrais éléments de l'orbite, qui convient au mouvement de ce temps-là, lesquels éléments continueroient toujours à être d'accord avec les observations, s'ils n'étoient dérangés après, & changés par les actions étrangères (*). M. de la-Place aura le mérite d'avoir

(*) Il n'y auroit point de doute, si on avoit des observations exactes jusqu'à des secondes, & si on pouvoit les avoir jusqu'aux fractions des secondes, les observations de peu de jours suffiroient pour avoir une exactitude, & un accord presque parfait qui se soutiendroit jusqu'à ce que le dérangement produit par les forces perturbatrices devenisse assez sensible: mais les petites er-avoir trouvé une théorie générale analytique sublime, que je dois supposer exacte, en sachant son talent pour le grand calcul; mais il est injuste de le faire le premier, & en apparence le seul Géomètre occupé d'une recherche si intéressante. Les travaux, dont j'ai parlé ci-dessus, l'ont prévenu, & M. Mechain en calculant sur mes méthodes a été le premier à déterminer avec assez de succès l'orbite elliptique de cet astre nouveau : ces travaux, ce succès, tout étoit déjà bien connu à Paris par tant de savants, même des membres de l'Académie, outre la notice de ma théorie présentée un an & demi avant au Directeur d'une compagnie savante pour l'impression en Italie.

---

erreurs des observations, qui ne font que très-peu d'effet sur un petit arc, peuvent, comme je l'ai dit dans le texte, en produire un énorme dans sa continuation. La plus petite divergence fait éloigner immensement une ligne droite de l'autre, quoique dans le commencement leur distance soit tout-à-fait insensible.

EX-

EXTRAIT

DE LA PREMIÈRE PARTIE DE CE VOLUME APPARTENANTE AUX COMÈTES.

§. I.

De la Préface de l' Opuscule I, & de sept premiers de ses paragraphes.

1. Le premier Opuscule commence par une Préface, qu' on peut lire en entier sans avoir besoin d' en avoir un extrait: elle est écrite en françois comme presque tout ce qu' il y a dans ce Volume, & il n'y a ni figures, ni calculs d' aucune espèce. Il y a une exposition abrégée de l' objet de ce premier Opuscule, & de ce qu' il contient: c' est ma méthode particulière de trouver l' orbite parabolique en substituant le mouvement rectiligne & uniforme dans la corde d' un petit arc, au curviligne & inégal dans l' arc même. J' avois envoyée cette méthode à l' Académie Royale des Sciences dans deux Opuscules, qui ont été imprimés par son ordre, mais dans cette impression on a commis une faute dans la position, & indication des planches en appliquant à l' un de ces deux Opuscules celles, qui appartiennent à l' autre de manière, qu' absolument on n' y peut rien comprendre. Dans la Préface du Volume, qui les contient, on les a beaucoup maltraités. Je fais voir dans cette Préface-ci le tort du censeur; mais l' Opuscule même, où il y a beaucoup d' éclaircissements, & d' additions avec des exemples numériques, qui ont eu tout le succès, en est l' apologie la plus complette, & la plus solide. On peut lire aisément en entier cette pièce, qui ne contient que treize pages.

2. On voit dans l' index la suite, & les titres des paragraphes: j' en

j'en ajouterai ici quelque detail en employant encore plusieurs des figures, qui en donneront quelque notion un peu plus particularisée ; mais on ne peut jamais connoître le total à fond sans suivre le développement qui se trouve dans le texte des paragraphes.

3. Dans le §. premier il y a une idée générale de ma méthode. Dans la fig. 1 S est le lieu du soleil, T, T', T'' sont les trois lieux de la terre dans le plan de l'écliptique, C, C', C'' les trois lieux de la comète, P, P', P'' leurs projections orthogonales sur le même plan de l'écliptique, t, c, p les intersections des rayons ST', SC', SP' avec les cordes TT'', CC'', PP'' : le point R est l'intersection des deux cordes CC'', PP'', & par conséquent SR la ligne des nœuds : D, D'' sont les rencontres de cette ligne avec les plans perpendiculaires à elle-même qui passent par les deux CP, C''P'', & par conséquent les angles CDP, C''D''P'' expriment l'inclinaison de l'orbite.

4. Le fondement principal de la méthode est, que quand la flèche C'c est petite par rapport au rayon SC', quoique la vîtesse du point C' dans l'arc parabolique soit assez inégale, étant en raison réciproque des racines quarrées de sa distance au soleil S, celle de l'intersection c est presque constante, comme je le fais voir par la propriété très-connue des aires parcourues par le rayon vecteur proportionnelles aux temps, & la même chose arrive aux points p, t. Or cela donne le rapport mutuel de deux distances raccourcies à la terre quelconques, qui sont, comme je le démontre, en raison composée de la directe des intervalles de temps entre leurs observations & la troisième, & inverse des sinus des mouvements de la comète en longitude, qui répondent à ces temps. Je démontre que ce rapport est assez juste, quand la comète dans la seconde observation est en conjonction avec le soleil, ou en opposition, ou dans la distance au même soleil égale à celle de celui-ci à la terre : hors de ces trois cas, la chose iroit de même, si l'observateur étoit en t, & la comète en c, & par conséquent la longitude de celle-ci déterminée par la direction tp à la place de la T'P'. La différence de la direction de

ces deux lignes exige une réduction de la longitude observée dans le mouvement par les arcs à celle qui auroit été observée dans le mouvement par les cordes, qui est très-petite dans le voisinage de ces trois circonstances : dans les deux premières une de ces deux lignes tombe sur l'autre, & je démontre que dans la troisième elles sont parallèles.

5. Or je trouve qu'en prenant par position la seconde de ces trois distances on détermine très-aisément la divergence de ces deux lignes par la seule valeur de la petite flèche T't de la terre, qui est connue, sans avoir aucune notion de la forme de la courbe, & par-là je trouve aisément tant par une construction graphique, que par un calcul trigonométrique les distances extrêmes TP, T''P'', SP, SP'', SC, SC'', les droites PC, P''C'', les cordes PP'', CC''. Si l'on nomme a le quarré du double espace, qui seroit parcouru par le mouvement moyen de la terre dans le temps écoulé entre la première & la troisième observation, b la somme des deux distances extrêmes de la comète au soleil, c la corde CC''; on doit avoir $bc^2 = a$ lorsque l'arc parabolique est bien petit, & quand il est un peu plus grand on y ajoute une petite correction au premier membre, par laquelle on doit trouver $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$. Si on ne trouve pas cette égalité; la différence est l'erreur, qu'il faut détruire par la répétition des fausses positions : après l'avoir détruite on trouve avec toute la facilité par une construction graphique très-simple, & encore plus exactement par un petit calcul numérique tous les éléments, ce qui fait voir d'abord, si c'est une comète nouvelle, ou une des anciennes connues, comme aussi par une construction graphique très-simple & même amusante tirée d'un beau théorème de Newton, qui n'étoit pas en usage, & que je l'ai déterré, & appliqué à cet objet, toute la suite des phénomènes, c'est-à-dire toute la route, que la comète doit tenir dans la surface de la sphère céleste, & les distances à la terre & au soleil jour par jour, ce qui fait connoître aussi par un à-peu-près la durée de son apparition.

6. Un grand avantage de ma méthode sur celle, qui étoit en usa-

usage avant, est qu' on n' y a qu' une seule suite de fausses positions, tandis que dans la méthode commune on a une suite de suites successives, ce qui alonge immensement le travail, & l' ennui des calculs numériques répétés en trop grand nombre de fois sur la même forme, sur-tout quand on n' a un moyen propre à choisir pour la première position une distance peu éloignée de la vraie. Or c' est un autre grand service, que j' ai rendu dans ma méthode aux Astronomes, en proposant une pratique très-simple pour ce choix. Presque toujours on se trouve par ce moyen après la seconde position à la destruction de l' erreur de la formule. Ayant appliquée ma méthode à plusieurs orbites, qu' on a vu en grand nombre depuis, que le grand dénicheur de comètes M. Messier a excité l'attention des Astronomes à leur recherche, très-rarement j' ai eu besoin de la troisième position, ce qui est arrivé à plusieurs autres, qui ont suivi ma méthode : ainsi malgré les contestations excitées d' abord contre elle, je suis bien persuadé qu' elle deviendra bien tôt commune, au moins pour avoir avec tant peu de travail l' orbite, & la suite des phénomènes par une approximation assez satisfaisante.

7. Dans le premier paragraphe il y a la démonstration de cette égalité du mouvement de l' intersection c tirée de ce que dans la fig. 1 les triangles CSC', C'SC'' sont comme les parties Cc, cC'' de la corde CC'', & les secteurs paraboliques CSC', C'SC'', qui sont comme les temps, diffèrent très-peu de ces triangles, n' y ayant que la différence des segments CC', C'C'', qui sont très-petits par rapport à ces secteurs, & troublent tant soit peu cette égalité. Dans le §. II je fais la recherche de cette même inégalité sur la fig. 2. Le point S est le foyer de la parabole CDC', B l'intersection du rayon vecteur SA avec la corde, HH' la directrice. Je compare la vîtesse de ce point, qui va en b, avec celle du point A de la courbe, qui va en a, & employant le rapport du triangle BSb au secteur ASa tant en général, que quand le point A va en D sommet du diamètre qui coupe la même corde par le milieu en E, tandis que le point B va dans le rayon SD en F, je cherche le point Q de la parabole, dans le-

quel la vîtesse de la comète est égale à la vîtesse moyenne de cette intersection. Je trouve que le rayon SQ excède le rayon SD par deux tiers de la flèche FD, ce qui me donne sa longueur $= \frac{1}{2}b - \frac{c^2}{24b}$.

8. A' l' aide de cette expression je trouve dans le paragraphe III la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$. J' employe pour cet objet plusieurs propriétés connues de la parabole, avec ceux du mouvement dans les orbites paraboliques, dont les deux qui viennent en usage sont, qu' à parité de distance au soleil le quarré de la vîtesse dans la parabole est le double de celle dans le cercle, & que les quarrés des vîtesses dans une même parabole sont en raison réciproque des distances au soleil, ce qui est vrai même généralement, si l' on compare la vîtesse dans deux points quelconques de deux différentes paraboles. Le rapport trouvé entre la vîtesse moyenne de la même intersection, & la vîtesse dans la parabole, & par-là dans le cercle, me donne celui de la corde de l'arc parabolique de la comète à l' espace parcouru dans le même temps avec la vîtesse moyenne de la terre, dont je tire une valeur a constante pour toutes les positions, & à la fin la formule proposée.

9. Dans le §. VI je donne la manière de diviser en mois, & jours l' orbite de la terre, & la parabole de la comète. Dans la fig. 4 S est le centre de l' écliptique, que je fais avec un rayon de 120 parties d' une échelle : j' y marque les signes de deux en deux avec la même ouverture du compas : à un tiers de distance du nombre 10 à 8 j' y marque le point a, & je prend Ss vers ce point $=$ 1,7 de ces parties pour le centre de l' orbite terrestre, qui est le cercle intérieur, tirée avec le rayon de 100 parties. Je prend de la Connoissance des temps les longitudes du soleil pour tous les commencements des mois pour les dix, & 20 de chacun, & ayant ajouté, ou ôté 6 signes j' ai les longitudes héliocentriques de la terre : pour chacune de ses longitudes je trouve dans l' écliptique son point Q, en ajoutant à chaque binaire de signes le surplus par la valeur de la corde, qui convient

à ce

à ce nombre de degrés & minutes : ayant appliqué la règle à S & à chacun des points Q je trouve les lieux T de la terre : on trouve aisément les points intermédiaires pour chaque jour des dizaines déjà marquées . Ainsi on a la division de l' orbite de la terre .

10. Pour la parabole, quand on a sa distance périhélie SV qu' on trouve dans un des paragraphes suivants en déterminant la directrice FF', on en fait aisément la description par des points à l' aide de la même directrice . Le beau théorème de Newton porte , que tandis que la comète parcourt la parabole MVM' avec une vîtesse continuellement variée , le centre du cercle , qui passe par son lieu , & par les points S, V , parcourt avec un mouvement uniforme la ligne droite BB', qui coupe perpendiculairement par le milieu en A la ligne SV : je démontre ce théorème, & je donne la manière de trouver les parties de cette ligne , qui répondent à un nombre de jours donné quelconque , & comme aussi d' y trouver les points , qui répondent aux commencements des mois , & aux dizaines des jours comme pour l' écliptique : Alors mettant une des deux pointes du compas dans chacun de ses points , & l' ouvrant jusqu' au point V on trouve avec cette ouverture le point de la parabole qui y répond , & on a la division cherchée .

11. Dans le §. VII je propose les valeurs , qu' il faut préparer pour la construction graphique , en indiquant la manière de les préparer .

§. II.

Des cinq paragraphes suivants.

12. Le paragraphe VIII est le plus essentiel : il contient la méthode pour déterminer la distance de la comète . Ayant trouvé les trois lieux de la terre T, T', T'', on tire les lignes $TE, T'E'$, $T''E''$ dans la direction des longitudes observées . Pour former un premier jugement de la distance, je fais les réflexions suivantes . Le quarré de la vîtesse dans la parabole est le double de la vi-

vîtesse dans le cercle à parité de distance, & dans les différentes distances elle est en raison réciproque des leurs quarrés : ainsi dans la fig. 1 la corde CC'' d'un petit arc est à-peu-près égale à la corde TT'', lorsque le rayon SC' est double de ST', & elle n'arrive pas à en être double que quand le premier devient égal à la moitié du second : ainsi la corde est changée beaucoup moins, que la distance, & un jugement sur la grandeur de celle-là dirige assez bien l'autre sur celle-ci. D'ailleurs la corde CC'' est égale à la PP'', dans le cas de l'égalité des lignes PC, P''C'', qui sont égales aux TP, T''P'' multipliées par les tangentes des latitudes observées PTC, P''T''C'', & dans le cas de leur inégalité la première excède la seconde plus ou moins selon la plus grande ou plus petite différence de ces lignes : ainsi le jugement sur les distances TP, T''P'', & sur les latitudes extrêmes sert à former celui sur cet excès : de plus le rayon SC' est plus grand que le SP', & l'excès est plus grand ou plus petit, selon que la ligne P'C', qui est égale à la T'P' multipliée par la seconde latitude, est plus grande ou plus petite : enfin la ligne PP'' est coupée par la ligne SP' en un point *p* peu éloignée de la ligne T'E' du côté du point S en la même raison des temps que la TT'' en *t*.

13. En conséquence de ces réflexions je place un côté droit d'un papier sur la corde TT'', & j'y marque en T, *t*, T'' trois points avec les lettres G, *p*, G', que l'on voit à la fig. 4, où ce côté de papier est transporté en HH' sur la ligne PP''; mais il doit être assez plus long pour pouvoir rencontrer les lignes TE, T''E'' en P, P'', le point *p* restant très-près de la ligne T'E' du côté de S : je lui donne une inclinaison, qui rend les distances PG, P''G' à l'œil en la même raison de *p*G, *p*G', qui est celle des temps, & je promène ce papier sur les lignes TE, T''E'' avec une inclinaison correspondante à ces conditions, en considérant toujours, que l'intervalle PP'' doit être plus petit que la ligne GG', ou plus grand selon les réflexions indiquées. Je l'arrête, quand je le vois arrivé à la longueur qui répond à ce jugement, & cela amène toujours à une position bien peu éloignée de la véritable.

Je

Je marque alors le point P', qui est le fondement de toutes les opérations suivantes.

14. Ayant fixé le point P' dans la fig. 4, on y a les lignes T'P', SP'. On les porte en TP', P'S sur la ligne TB de la fig. 9, qui a les angles BTF, BTF', BTF'' égales aux trois latitudes, on y trouve la perpendiculaire P'C' avec la S'C', qui répondent aux P'C', SC' de la fig. 1 : la flèche T'*t*, dont on trouve aisément la valeur numérique avec les valeurs des lignes T'P', SP', SC' tirées de l'échelle, entre dans une formule simple, qui donne la convergence, ou divergence des lignes T'P', *tp*, c'est-à-dire la réduction de la seconde longitude : alors le rapport indiqué ci-dessus entre la distance raccourcie T'P', & les deux autres TP, T''P'' donne ceux-ci : en les portant sur la ligne TB de la fig. 9 avec les SP, SP'', PP'' de la fig. 4, on y trouve des lignes égales aux PC, P''C'', SC, SC'', CC'' de la fig. 1 : par-là on a les valeurs numériques des lignes SC + SC'' $= b$, CC'' $= c$, & par conséquent la valeur de la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$, qui doit être $= a$. La différence en est l'erreur, qui étant détruite par la règle de la fausse position détermine d'abord la distance T'P' dans la fig. 4, & à son aide les distances TP, T''P''.

15. Dans le §. IX il y a le moyen de tirer tous les éléments par une construction graphique aidée, si l'on veut, d'un peu de calcul numérique. On commence par la ligne des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite. A' l'aide des lignes PC, P''C'', PP'' de la fig. 1 trouvées dans la fig. 9, on trouve la valeur de la PR de celle-là, qui est la quatrième continuellement proportionnelle après la CI de la même fig. 1 (différence ou somme des deux PC, P''C''), la PC & la PP'' : on l'applique en PR de la fig. 4, & on a SR, qui est la ligne des nœuds. On y tire la perpendiculaire PD, ou P''D'', qui portée dans la fig. 9 à pieds de la CP, ou C''P'' donne l'angle PDC, ou P''D''C'', qui doit être égal à ceux de la fig. 1, c'est-à-dire à l'inclinaison de l'orbite. On porte les DC, D''C'' de la même fig. 9 sur les DP, D''P'' prolongées en DC, D''C'', ce qui donne les points C, C'' appartenants à la parabole cométique tournée

au-

autour de la ligne des nœuds, & appliquée sur le plan de l'écliptique. Il y a le moyen de trouver tout cela plus exactement avec tant soit-peu de calcul numérique après l'usage de l'échelle. Des centres C, C'' avec les rayons SC, SC'' on tire deux arcs de deux cercles avec leur tangente commune FF', qui est la directrice de la même parabole appliquée. On tire la ligne SX perpendiculaire à celle-ci : elle est la position de l'axe, & coupée par le milieu en V, y donne le sommet de la parabole, & la distance périhélie SV : sa rencontre avec l'écliptique en x détermine la longitude de ce périhélie dans l'orbite. Alors on a la ligne BB, qui coupe la SV à angles droits par le milieu en A : on trouve dans celle-ci les points O, O'' centres des cercles, qui passent par S, V, & l'un par C, l'autre par C''. On trouve le quatrième terme proportionnel après les lignes OO'', AO, dont on prend la valeur sur l'échelle, & le temps entre la première & la dernière observation, & c'est la différence des temps entre la première observation, & le moment de l'arrivée au périhélie, qui reste connu : la position des points C, C'' par rapport à l'ordre des signes dans l'écliptique fait voir si la comète est directe, ou rétrograde : ainsi on a tous les éléments cherchés.

16. L'intervalle OO'' rapporté au temps total entre les observations extrêmes sert encore à former une échelle pour la division de la ligne BB' en mois & jours, & par son moyen celle da la parabole. Il y a une autre méthode pour déterminer cette échelle plus exactement par un petit calcul. Une partie de cette ligne égale à la distance périhélie répond à un nombre de jours égal à celui que la comète employe pour aller du périhélie à l'anomalie de 90°, & on trouve aisément ce nombre : mais il suffit ici d'avoir seulement indiqué cet objet.

17. Dans le §. X il y a la manière de trouver le lieu de la comète dans un autre temps quelconque. On trouve dans la ligne BB' le point O''', qui répond à ce temps, & avec ce centre, & l'intervalle O'''V on trouve le point C''' de la parabole, qui est le lieu de la comète sur cette courbe : on trouve dans l'écliptique le point Q''', qui répond à la longitude héliocentrique de

la

la terre, par lequel on a le lieu T''' de celle-ci. Après avoir trouvé les points T''', C''', on trouve aisément la longitude & latitude de la comète, sa distance au soleil & à la terre &c. par une construction simple exposée dans ce paragraphe. Dans le suivant il y a la méthode pour voir d'un seul coup d'œil toute la suite des phénomènes. Par la division de l'orbite de la terre & de la parabole en jours, dont j'ai fait mention ci-dessus, on trouve pour les dizaines de jours de chaque mois les longitudes, latitudes, ascensions droites, déclinaisons de la comète, ses distances au soleil, & à la terre. On fait pour chacun de ces objets une délinéation pareille à celle qui est indiquée à la fig. 12 (Tab. III) pour la distance au soleil. Dans la ligne AB on a les jours, dans sa perpendiculaire AA' les distances en parties centièmes de la distance moyenne de la terre au soleil. Pour chaque jour marqué en S on a la distance SC, & une ligne courbe tirée par tous les points C met sous les yeux toute la suite de ces distances rapportées à ces temps. Des courbes pareilles dessinées pour tous le autres objets susdits donneront toute la suite des phénomènes de cette espèce, qu'on y verroit d'un coup d'œil.

18. Le paragraphe XII n'est intéressant, que pour une espèce d'amusement géométrique. Les points P, P', P'' de la fig. 1, & 4 appartiennent à la parabole formée sur le plan de l'écliptique par la projection de celle, que la comète parcourt, faite par les lignes CP, $C'P'$, $C''P''$ perpendiculaires à ce plan. Les points C, C', C'' de cette dernière appartiennent, comme on l'a dit ci-dessus, à la parabole appliquée sur le même plan. Ayant la parabole appliquée, & la ligne des nœuds avec l'inclinaison de l'orbite, on trouve aisément les points de la projetée, & vice-versa. Pour la totalité des opérations on a besoin de toutes les deux, & on a eu dans les paragraphes précédents plusieurs occasions pour passer de quelques points de l'une à ceux de l'autre. Ici on considère le passage de l'appliquée à la projetée pris en général avec la détermination de tous les éléments de cette seconde. Il y a plusieurs méthodes pour y parvenir, avec plusieurs constructions géométriques, qui devroient faire du plaisir aux amateurs

de la Géométrie par leur simplicité: on les a aux figures 13, 14, 15, 16 de la même table III.

§. III.

Des paragraphes XIII . . . . XVII.

19. Dans le §. XIII, & XIV il y a l'application de la Trigonométrie aux mêmes objets. Après avoir pris par position la distance T'P', on trouve la valeur numérique de la petite flèche T't, & par un calcul trigonométrique la valeur de tout ce qui entre dans la détermination de la réduction de la seconde longitude: ayant réduit celle-ci on trouve par les formules préparées au §. VII les deux TP, T''P''. On employe la résolution des trois triangles obliquangles TSP, T''SP'', PSP'', & des trois rectangles SPC, SP''C'', CIC'' pour avoir les deux rayons SC, SC'' avec la corde CC'', ce qui donne le premier membre de la formule à comparer avec la valeur *a* pour avoir l' erreur, & par le même procédé de la fausse position parvenir à la détermination des distances. Le procédé pour en tirer par le calcul trigonométrique tous les éléments est assez simple, & il est exposé en détail au paragraphe XIV.

20. Dans le §. XV j' ai mis plusieurs considérations sur les méthodes proposées, j' en compare quelqu' une avec d' autres employées communement, comme pour trouver le lieu du périhélie, & du nœud par une autre espèce de calcul: dans le paragraphe précédent j'avois employé les tables d' Halley pour trouver le temps de l'arrivée au périhélie par l'anomalie: je donne ici une formule assez simple, tirée de la nature de la parabole, qui remplit le même objet. Dans le §. XVI il y a la manière de tirer des éléments trouvés la longitude, & latitude de la comète pour un autre temps quelconque: elle est conforme à la commune, qui employe les tables paraboliques déjà calculées, & par-là elle est très-simple: un calcul trigonométrique employé sur les figures précédentes seroit beaucoup plus long, & même il exigeroit la solution d' une équation de troisième degré.

21. L'

21. L'objet du paragraphe XVII est beaucoup plus essentiel : il s'agit de corriger par des observations éloignées les éléments trouvés par la méthode proposée, qui est une méthode d'approximation. J'ai énoncé dans la note, que j'ai trouvée depuis une autre méthode plus simple pour obtenir le même objet, qu'on la trouvera dans un Opuscule du cinquième Volume, mais que j'ai laissé ici la précédente, comme elle y étoit, pour ne pas déranger la suite des numéros avec toutes les citations, mais encore beaucoup plus, parceque cette autre n'est pas générale, ne pouvant pas servir, quand il y a quelque latitude trop petite.

22. Celle que j'ai retenu n'a pas cette restriction. Je me suis apperçu qu'il y avoit trois valeurs, dont tout le reste dépend de manière, qu'en prenant ces valeurs par position, on en peut tirer tous les éléments, & par-là le lieu de la comète pour un temps donné quelconque. J'ai employé ces trois valeurs pour comparer le résultat tiré des éléments trouvés avec la longitude & latitude d'une observation éloignée, & la seule longitude d'une autre, que j'ai choisie pour obtenir la rectification cherchée. Je prend ces trois valeurs telles, que je l'ai trouvées par les opérations précédentes, qui doivent être peu éloignées des véritables : j'en tire les éléments, & ces deux longitudes avec cette latitude : je compare le résultat de ce calcul avec les données par les observations, & je marque les différences, qui sont trois erreurs données par les éléments fautifs. Je change tant soit peu une de ces trois valeurs, & en trouvant de nouveau les éléments, & les mêmes longitudes avec la latitude, je vois de combien ce changement a changé les trois erreurs : je réprend la première valeur précédente, & je change un peu la seconde : je vois le nouveau changement produit dans les trois erreurs : je fais la même chose avec la troisième valeur, ce qui me donne le troisième changement des mêmes erreurs. Alors j'appelle x, x', x'' les changements qu'il faut faire à ces trois valeurs pour anéantir les trois erreurs par la somme des effets, qui doivent résulter de ces changements, dont chacun doit produire un effet, qui reste donné par son x, & par des quantités connues. Cela me donne trois

équations du premier degré, qui déterminent les trois valeurs x. On trouve toute la méthode exposée en détail dans ce paragraphe. Pour l'autre méthode on n'a besoin de chercher que deux seules valeurs, & par conséquent on n'a que deux seules équations pour x, & x': mais elle exige des latitudes pas trop petites, qu'on trouve pourtant presque toujours, puisque presque toutes les inclinaisons des orbites cométiques sont assez grandes.

§. IV.

Des paragraphes XVIII, XIX, XX.

23. LES paragraphes suivants contiennent beaucoup plus de Géométrie, & des calculs algébriques plus élevés. Je trouve dans le premier de ces trois paragraphes la distance raccourcie de la comète par une équation de sixième degré, dans la même supposition de trois observations peu éloignées entr' elles, & en y négligeant la réduction de la seconde longitude, ou en la supposant trouvée par les méthodes précédentes, qui la donnent assez juste, quoique la distance n' en soit donnée que par approximation. Mais pour arriver à cette équation je suppose les observations bien peu éloignées entr' elles de manière, qu' on puisse considérer la vîtesse moyenne dans la corde égale à celle que la comète a dans le lieu de la seconde observation. En appellant x la seconde distance raccourcie, je trouve la valeur analytique du second rayon SC' de la figure 1, & l' autre de la corde CC''. Je trouve ce qu'on voit aisément, que dans les suppositions faites la valeur $\frac{CC''^2}{SC'}$ doit être égale à la moitié de la valeur a, ce qui en se débarrassant des signes radicaux amène à la susdite équation.

24. On ne peut pas construire à un cercle, & à une section conique, que les équations de troisième, & de quatrième degré: pourtant je trouve le moyen de la construire à un cercle, & à une parabole, en y ajoutant seulement une pratique facile de compas. On voit à la fig. 18 (Tab. IV) le cercle du diamètre SA, & une

une parabole PVP''. Il suffit de trouver dans une ligne MEM' donnée perpendiculaire à son axe un point C tel, qu' en y appliquant une équerre en MC, & une règle en SC on trouve la corde SB de ce cercle égale à l' ordonnée CD de cette parabole : je trouve même qu' on peut employer à cet effet une parabole quelconque donnée, avec un cercle qui lui convient, & qu' on trouve aisément. Pour avoir la détermination de l' ordonnée CD sans tâtonnement il faudroit employer une courbe plus élevée. Je donne la construction, qui est très-simple, & facile de la courbe NSN', qui fait l' effet par sa rencontre avec la parabole en D.

25. On ne peut pas réduire généralement le problême au sixième degré par la méthode de ce paragraphe sans négliger des quantités du même ordre avec celles, qui sont essentielles pour la solution du problême, parceque hors des cas indiqués la réduction de la seconde longitude est de cette nature, & on la néglige, si on ne la suppose déjà connue, & employée : mais contre l' avis des Géomètres du premier ordre j' ai trouvé le moyen de simplifier beaucoup le problême dans le cas d' un arc bien petit, en réduisant l' équation au 16.me degré sans y négliger que des quantités d' ordres inférieurs. Je trouve cette équation au paragraphe 19. Au dernier de ces trois paragraphes je marque la route, qu' on peut tenir pour arriver à l' équation du problême général, qui cherche l' orbite d' une comète par trois observations quelconques. Je l'avois déjà fait dans une des mes anciennes Dissertations imprimée à Rome l' an 1746, où il y avoit les premiers fondements de ma méthode, que j' ai amplifiée, & rectifiée beaucoup plus depuis, & réduite à la forme exposée dans cet Opuscule-ci. Cette Dissertation, qui contient beaucoup d' autres objets intéressants relatifs aux comètes, réimprimée comme elle avoit été donnée alors en latin, forme ici le dernier des Mémoires Correlatifs de ce premier Opuscule. En exposant cette méthode dans ce paragraphe j' y ai fait des petits changements.

§. V.

§. V.

De tout le reste de cet Opuscule.

26. TOUT ce reste contient les exemples de toutes les opérations tant graphiques, aidées d' un peu de calcul numérique, que trigonométriques, hors du dernier paragraphe, qui contient la conclusion de tout l' Opuscule avec des réflexions correlatives. J' ai pris pour donner ces exemples la comète de 1774, qui a paru moins d' un an après mon établissement en France, & a été visible assez long temps, en parcourant une assez grande partie du ciel. J' ai mis à la fin de l' Opuscule même dans huit pages autant de tables, qui contiennent des nombres appartenants à ces applications, & dans ces derniers paragraphes il y a l' explication des mêmes tables faite avec le plus grand détail à mesure qu' elles viennent en usage : elles vont jusqu' à la détermination des éléments. Ce qui appartient à la construction graphique est exposée dans les paragraphes XXI, & XXII sur les deux premières de ces tables : les deux, qui viennent après, contiennent les exemples de l' usage que j' y fais de la construction graphique correlative aux éléments trouvés pour comparer son résultat avec deux observations éloignées, & pour voir d' un coup d' œil toute la suite des phénomènes : les paragraphes XXV, XXVI, XXVII contiennent l' explication de cinq tables suivantes, relatives aux opérations ttigonométriques, qui y sont détaillées : la dernière a les éléments trouvés par les deux méthodes avec ceux, qui ont été trouvés par la méthode exacte, où l' on voit la grande utilité des mêmes méthodes d' approximation par la proximité des leurs résultats avec le dernier.

27. Pour avoir une connoissance complette de l' application des méthodes proposées à cet exemple, & de la formation de ces tables pour en faire des pareilles à l' occasion d' appliquer les mêmes méthodes à d' autres comètes, il faut lire en entier ces paragraphes de l' Opuscule : on pourra s' en former quelqu' idée legère en lisant cet extrait.

28. Les

28. Les figures 19., & 20 de la planche IV correlatives aux figures 4, & 9 de la première sont le fondement de toutes les opérations graphiques, & des calculs numériques de ces deux paragraphes XXI, & XXII, mais elles y sont transformées conformement aux données de ce cas particulier. La table I contient les données qu' on employe pour la former, & s' en servir. On y voit dans la première l' arc de l' écliptique, qui vient en usage, celui de l' orbite de la terre avec son centre s, les points Q, Q', Q'', qui répondent aux longitudes héliocentriques de celle-ci, ses lieux T, T', T'' avec la flèche T't les directions TE, T'E', T''E'' des longitudes observées de la comète, qu' on a à la table I avec les temps, les latitudes, les longitudes géocentriques du soleil, dont on tire les héliocentriques de la terre. Dans la même figure on voit la position HH' du côté de papier avec ces points G, p, G' marqués avant sur les T, t, T'', & passés avec ce même côté pour former le premier jugement sur sa distance en P'1, & sur sa position P1P''2, qu' il a fallu prendre plus petite que l' intervalle GG' à cause de la grande différence des latitudes, qui indique une grande obliquité de la corde CC'' de la fig. 1, avec l' opposition de la comète, qui exige une diminution de vîtesse dans l' éloignement au de-là de l' orbite de la terre. Dans la fig. 20 on a les trois angles BTF, BTF', BTF'' égaux aux trois latitudes, & tout ce qui sert pour passer des distances raccourcies à la terre aux distances au soleil, & à la corde CC''.

29. On verra dans le paragraphe suivant qu' est ce que sont les autres valeurs de la table I: qui ne sont que préparatoires. Dans la table II les deux premières colonnes contiennent les valeurs tirées, partie de la construction, partie du calcul numérique pour deux positions de la seconde distance raccourcie T'P' jusqu' à l' erreur e de la formule comparée avec la valeur a. Elles ont trois divisions: la première pour trouver la réduction appellée y, la seconde pour avoir les deux extrêmes TP, T''P'', la troisième pour en tirer les SC, SC'', CC'', la formule même, & sa différence à la valeur a. La troisième colonne sert pour tirer par la règle des fausses positions la correction des

deux

deux TP, T'P''. Tout cela est expliqué en détail dans ce paragraphe.

30. Dans le paragraphe XXII il y a la déduction de tous les éléments faite d'après ces deux distances dans les figures 21, & 22 de la planche V. On y voit à la première l'écliptique, & l'orbite de la terre avec les mêmes points Q, Q'', T, T'', les lignes TE, T''E'' dans la direction des longitudes, avec les distances raccourcies TP, T''P'' trouvées à la fin de la table II. Sur la seconde de ces deux figures on a les trois angles des latitudes. On voit dans ce paragraphe la manière de s'en servir pour trouver la ligne des nœuds NN' sur la fig. 21, les points C, C'' de la parabole appliquée, les arcs F, F', qui doivent être tirés avec le centre en C, C'', & les intervalles CS, C''S, comme aussi la directrice, qui est leur tangente commune, mais j'ai rapproché ces arcs, & cette directrice, pour raccourcir la figure : on y a la perpendiculaire SX, qui est la direction de l'axe, le sommet de la parabole V, la parabole même MVM', la ligne BB', avec les centres O, O'' des deux cercles, qui passent par S, & V, & le premier par C, le second par C''.

31. Dans le §. XXIII il y a sur la même fig. 21 à la planche V la détermination de deux longitudes, avec leurs latitudes pour le 23 Août, & 25 Octobre, qu'on avoit par observation. Les longitudes se sont trouvées différentes des observées seulement de 5', & 6', & les latitudes de 4', & 2', accord même beaucoup plus grand que celui qu'on devoit espérer, ce qui fait voir l'utilité de la méthode pour avoir une assez bonne approximation.

32. Dans le paragraphe XXIV on a la suite des phénomènes tirée de la même figure. La division en jours de l'écliptique, de l'orbite de la terre, de la ligne BB', & par son moyen de la parabole, met à portée de déterminer pour tous les jours la distance de la comète au soleil, & à la terre, sa longitude, & latitude, d'où l'on tire aisément l'ascension droite, & la déclinaison ou par un calcul trigonométrique, ou par une construction graphique. La première de ces deux méthodes est expliquée sur la fig. 23 de la planche VI, la seconde sur la 24. A' la

table

table III on a les seules distances de la comète au soleil, & à la terre tirées de cette construction pour tous les 10 des mois, les 20, les fins, depuis le commencement du mois de Juin jusqu' à la fin de Novembre précedées des longitudes du soleil tirées de la connoissance des temps pour cette année, qui ont servi pour déterminer les lieux de la terre sur son orbite. Mais dans la figure 25 on a les courbes, qui expriment tant les deux espèces de ces distances, que les longitudes, & latitudes, dont on y voit les suites & les changements pour tout cet intervalle de temps.

33. Les exemples des calculs trigonométriques commencent au paragraphe XXV. On y employe la fig. 26, qui se trouve à la planche VII: le procédé du calcul se trouve à la table IV, & V. Comme j'ai pris pour la première position la valeur de la distance raccourcie T'P', qui avoit été trouvée par la construction graphique, l'erreur à la fin de la table V n'a été que de 0,000902. Pour cela à la place de recommencer tout ce calcul pour avoir la seconde erreur, & employer la règle des fausses positions, je me suis servi d'une autre méthode, que je ne puis ici qu' indiquer, & il faut la voir en entier dans le §. XXVI. J'avois depuis long temps des formules différentielles de Trigonométrie sphérique appliquables à la plane beaucoup plus générales que les employées auparavant par les Géomètres: on les trouvera avec les démonstrations, & plusieurs usages dans l'Opuscule XV du Tome IV. Je m'en suis servi ici pour détruire cette petite erreur, en changeant la distance raccourcie TP par une quantité quatrième proportionnelle après trois termes, dont le premier est le changement produit dans l'erreur provenante des deux positions de la table II, qui est la somme des deux erreurs de signes contraires, qu'on avoit à la fin des deux premières colonnes de cette table: le second est la première de ces deux erreurs: le troisième est le changement de la valeur TP produit par le même changement de position. En changeant la même TP de cette quantité on devoit avoir la correction de cette erreur restante. Cette différence me donnoit l'autre de la T''P'', & de ces deux

j'ai tiré par le moyen de ces formules différentielles les différences de toutes les lignes employées dans les triangles jusqu' aux trois dernières SC , SC'', CC'', qui étant corrigées ont donné la formule presqu' exactement égale à la valeur *a*. J'ai corrigé très-facilement encore ce petit reste . Alors j'ai employé les valeurs trouvées à la détermination des éléments par le calcul , dont on a tout le procédé , & le résultat au paragraphe XXVII , & à la table VII .

§. VI.

Des Mémoires Correlatifs I , & II.

34. Le premier de ces deux Mémoires contient une méthode de faire la résolution de tous les triangles sphériques par une construction graphique : il y a presque cinquant ans que j' ai publié cette méthode à Rome dans une Dissertation latine : j' avois ici l'occasion de m' en servir dans un ouvrage , où les constructions graphiques sont employées pour ce qui appartient aux orbites des comètes . Le second de ces Mémoires contient la manière de déterminer la route apparente d' une comète , dont on connoît l' orbite par une seule observation faite à son retour .

35. Toute la Trigonométrie sphérique se réduit à la solution de ce problême général : quand on sait trois de six termes , c' est-à-dire de trois angles & trois côtés , trouver les trois autres . Il y a six combinaisons des trois données : trois côtés : deux côtés & un angle intercepté entr' eux : deux côtés & un angle opposé à l' un des deux : deux angles & un côté intercepté entr' eux : deux angles & un côté opposé à un des deux : trois angles . Cela forme six problêmes , & il y a dans ce Mémoire la solution de chacun en particulier . Ici je proposerai seulement pour un essai la construction pratique du premier , & du cinquième .

36. On décrira (Tab. VIII fig. 2) un cercle avec un rayon arbitraire CA : on prendra sur sa circonférence trois arcs BA , AD , DE égaux aux trois côtés donnés : on tirera les deux diamètres AG , DF : on tirera la corde BK perpendiculaire au pre-

premier de ces deux, qui en sera rencontré en L : on fera le demi-cercle BMK avec le centre L : on tirera la corde EN perpendiculaire à l' autre diamètre DF, qui rencontrera ce même diamètre en H, & la corde BK en I : on tirera l' ordonnée IM perpendiculaire à la même corde : l' arc KM sera la mesure du premier angle intercepté entre les côtés BA, AD. On prendra sur le premier cercle l' arc AN' = AN : on tirera la corde EN', qui rencontrera la BK en I' : on tirera l' ordonnée I'M' perpendiculaire de même à la corde BK : l' arc KM' sera la mesure du second angle intercepté entre les côtés AB, DE. On prendra sur la corde BK prolongée, s' il le faut, Ih = IH, & on tirera Mh : l' angle MhI sera égal au troisième angle intercepté entre les côtés AD, DE, ou à son supplément, selon que le point I se trouvera sur la demi-corde HN, ou sur la HE.

37. La figure 1 sert seulement pour donner l' idée de cette construction, & en faire voir la justesse : pour tous les autres cinq problêmes on n' a qu' à changer dans la même fig. 2 quelques termes cherchés en donnés, & viceversa : la figure 3 sert pour avoir la construction du quatrième plus facilement : on prend AB pour le côté donné : on tire BK comme auparavant : on fait le cercle entier du diamètre BK, & on y prend les arcs KM, Km égaux aux deux angles donnés : on tire Mm, qui rencontre BK en O : on tire par O la corde AE : on tire l' ordonnée MI, & par I la corde EN : on coupe par le milieu l' arc NE en D : les arcs AD, DE seront les deux autres côtés, qu' on cherche : on trouvera le troisième angle dans la fig. 2 comme auparavant.

38. Dans la fig. 4 il y a aussi une manière de rendre plus facile quelque détermination en réduisant au seul premier cercle la mesure des angles, que selon la construction proposée on devroit avoir par le second demi-cercle. Dans le troisième, & cinquième problême il y a de l' ambiguité, parcequ' on peut y trouver deux solutions. La construction même fait voir tout cela. Ce qu' on a vu dans la construction proposée pour ces deux problêmes suffit pour voir la simplicité, & la facilité de la méthode :

tout y est démontré exactement dans ce Mémoire, & les démonstrations aussi sont assez simples & faciles.

39. Pour ce qui appartient au sujet du second Mémoire Correlatif, on avoit proposé dans l' Opuscule la détermination de l' orbite parabolique inconnue en employant trois observations: ici on suppose l' orbite connue par une apparition précédente, ce qui rend plus facile la détermination de la route apparente, mais il ne suffit pas, parceque selon la différente position de la terre dans son orbite, les lieux apparents sur la surface de la sphère céleste sont très-différents. L' apparition précédente détermine suffisamment presque toujours les autres éléments de l' orbite supposée parabolique par le trop peu de différence qu' il y a entre la petite partie de l' orbite réellement elliptique, quoique très-alongée, & l' arc parabolique qu' on peut y substituer à cause du même grand alongement de cette ellipse; mais elle ne peut pas déterminer le temps périodique, qui dépend de la longueur du grand axe de la même ellipse pour faire connoître le temps de l' année, dans lequel la comète doit arriver à son périhélie, & combiner par-là ses positions avec celle de la terre. Si l' on déterminoit l' orbite elliptique par les observations faites dans une seule apparition, on ne détermineroit jamais son axe avec assez d' approximation pour en tirer le temps périodique sans l' incertitude au moins de plusieurs mois, & même après deux apparitions, qui donneroient ce temps exactement, sans les perturbations causées par les planètes, qui en dérangeant peu les autres éléments & très-fort le temps périodique, rendroient très-incertain le temps précis de son retour.

40. Il y a une comète, dont on connoît au moins quatre apparitions avec des éléments de l' orbite considérée parabolique très-peu changés; mais les intervalles des temps entre ces apparitions, qui ont été de 75, ou 76 ans, ont été dérangés par les actions sur-tout de Jupiter & de Saturne de manière, que son retour a été retardé au de-là d' un an & demi, & prévu, & annoncé, mais avec l' incertitude d' un mois. C' est pour elle principalement qui peut servir ce Mémoire: il le pourra avec le temps

pour

pour d'autres. Il n'y a que la comète de 1770, qui par l'action de Jupiter a été dérangée de manière que son orbite a été réduite à une ellipse de cinq ans & demi de période, sans qu'on l'ait revue depuis, sur lequel sujet il y a une note très-intéressante ici au num. 3.

41. Ainsi la position respective de la terre & d'une comète à son retour reste inconnue: mais quand on sait par un à-peu-près les autres éléments, il suffit pour ôter cette incertitude d'avoir une seule observation, & c'est l'objet de ce Mémoire: il s'agit de déterminer cette combinaison des positions respectives, & il suffit de l'avoir dans un seul moment, pour l'avoir dans tous le temps de son apparition. Il y a pour obtenir cela plusieurs méthodes détaillées dans le texte.

42. La première méthode exposée d'abord est celle d'employer par une construction graphique la rencontre P (Tab. IX fig. 1) de la direction TP de la longitude connue par cette observation avec la parabole projetée *mnm'*. On y trouve la manière de construire l'appliquée M*n*VM' d'après les autres éléments connus, avec son axe SVX perpendiculaire à la directrice, & celle-ci, la ligne des nœuds NN', la ligne BB, qui coupe à angles droits par le milieu en A la distance périhélie SV, & détermine le mouvement uniforme du centre du cercle, qui passe toujours par les points S, V, & par le lieu C de la comète sur la même parabole appliquée: par le moyen de celle-ci on construit à l'aide de l'angle GTA de la fig. 2 égal à l'inclinaison de l'orbite la projetée *mnm'*: par le temps de l'observation on a le lieu T de la terre: par la longitude tirée de l'observation on a la direction TP avec le point P: on tire la ligne PD perpendiculaire à la ligne des nœuds: on la prolonge du côté de P jusqu'à la parabole appliquée en C: on trouve dans la ligne BB' le centre O du cercle, qui passe par S, V, C: comme par la distance périhélie SV on sait le temps, qui répond au mouvement du point O égal à cette distance, on trouve le temps qui répond à la ligne AO, qui est l'intervalle entre le moment de l'observation, & l'arrivée au même périhélie, qui reste connu.

43. Ce

43. Ce temps donne tout le rapport entre les lieux de la terre, & ceux de la comète : & même le point O trouvé donne immédiatement la division de la ligne BB' en mois, & jours, & par-là celle de la parabole, qui combinée avec la division de l'écliptique, & de l'orbite de la terre donne toute la suite des phénomènes comme dans l'Opuscule.

44. Comme le problême de trouver l'intersection d'une ligne droite avec une parabole ne dépasse pas la force de la Géométrie Euclidéenne, on donne sur la figure 3 la construction géométrique de ce problême pour trouver le point P sans la construction de la parabole projetée : on donne après une équation du second degré, qui donneroit le même point par le calcul. Cette équation employe la longitude donnée ; mais on peut se servir de la latitude : on donne l'équation pour cet objet, qui pourtant se trouve beaucoup plus compliquée.

45. Dans les solutions précédentes on peut avoir de l'ambiguité, parceque une ligne droite peut rencontrer la parabole dans deux points, & l'équation du second degré deux racines réelles : on fait voir comment on peut déterminer en certains cas un des deux points à préférence de l'autre ; mais après on donne une autre solution du même problême, qui en employant la longitude, & la latitude à la fois détermine la rencontre de la ligne visuelle donnée par elles avec le plan de l'orbite donnée par la ligne des nœuds, & l'inclinaison. La solution de ce problême ne laisse aucune ambiguité, & elle n'exige même la nature de la parabole pour avoir cette rencontre : il suffit d'avoir seulement la longitude du nœud, & l'inclinaison de l'orbite.

46. Cette solution est analogue à celle d'un problême relatif à la réduction de la seconde longitude employée dans ma méthode pour substituer le mouvement rectiligne sur la corde de l'arc parabolique au curviligne sur l'arc même, qui m'avoit été proposé par M. le Président de Saron : ainsi j'ajoute à la fin du même Mémoire la solution de ce problême, que j'ai eu l'honneur de lui présenter dans le temps, & dont il en avoit été content.

§. VII.

§. VII.

Des Mémoires Correlatifs III, & IV.

47. DANS le premier de ces Mémoires on cherche une ellipse, quand les observations d' une comète ne s' accordent avec aucune parabole : dans le second il y a une méthode pour diviser en jours une ellipse : cette seconde pourroit servir pour les opérations graphiques à employer dans le cas, qu' on ait trouvé par le Mémoire précédent une ellipse, comme dans l' Opuscule on a donné la méthode pour diviser ainsi la parabole. Ces deux méthodes sont tirées de Newton toutes les deux : cette seconde par la belle propriété découverte par lui du mouvement uniforme par une ligne droite du centre du cercle qui passe par le foyer, le sommet de l' axe, & le lieu de la comète : celle première par la nature de la cycloide alongée, courbe transcendante, dont il a été obligé à se servir après avoir démontré, que ce problême alloit au de-là de toute l' étendue de la Géométrie Cartesienne algébrique.

48. Pour le premier objet il y a plusieurs méthodes : la première est une ampliation de la méthode employée dans l' Opuscule pour les orbites des comètes. Là on appelloit b la somme des deux rayons vecteurs extrêmes d' un arc pas trop grand, c sa corde, & on avoit trouvé une valeur a par la comparaison des vîtesses dans le cercle, & dans la parabole, qui devoit être égal à la formule $bc^2 - \frac{c^4}{12b}$: on prenoit par position la seconde distance raccourcie à la terre, & ayant fait une réduction de la seconde longitude, pour en tirer les mouvements m, m' en longitude réduits, qui répondent aux temps t, t', on trouvoit par ses valeurs, par $m'' = m + m'$, & par $t'' = t + t'$ le rapport de cette seconde distance raccourcie aux deux extrêmes : on trouvoit ces mêmes distances, le lieu du nœud, & l' inclinaison de l' orbite, ce qui donnoit à la fin les rayons vecteurs extrêmes, & la corde, & par conséquent la valeur de la formule qui devoit être comparée avec cette valeur a : la difference trouvée é-

toit

toit l' erreur, qui devoit être détruite par une seule suite des fausses positions, dont deux ou trois suffisoient pour arriver à l' égalité réquise.

49. Or je trouve, que quand l' ellipse est encore alongée de manière, que les différences du résultat de l' orbite parabolique trouvée par trois observations, & appliquée aux autres n' est pas assez grande, cette même formule doit être égale à une autre valeur a', qui doit répondre à une distance un peu plus petite. On cherche d' abord la distance qui donne l' égalité avec l' a de la parabole : on diminue un peu cette distance, & on appelle a' la valeur de la formule tirée de cette nouvelle distance : on cherche l' ellipse qui répond à cette nouvelle valeur a' : on compare son résultat pour le temps d' une observation éloignée avec la valeur donnée par la même observation : on prend la différence pour l' erreur qu' il faut corriger, comme dans l' autre cas par une seule suite de positions de cette seconde distance raccourcie. Ainsi l' affaire est réduite au num. *6* à ces deux problêmes : 1°. *trouver l' ellipse, qui répond à la nouvelle valeur* a': 2°. *trouver si l' observation éloignée s' accorde avec cette ellipse, & si elle ne s' accorde pas, trouver la quantité de la différence qu' on doit employer dans la règle des fausses positions*.

50. Pour la solution du premier problême il y a un examen de tout ce qui est employé dans l' Opuscule pour la détermination des deux distances raccourcies extrêmes par la seconde prise par position, & de-là de la formule à faire $= a$, pour pouvoir appliquer tout cela à la recherche de l' orbite elliptique : à fin de pouvoir employer un arc un peu plus grand à la place de supposer uniforme le mouvement de l' intersection du rayon vecteur avec la corde, comme on l' a fait dans l' Opuscule, en négligeant les segments, qui répondent aux petits arcs par rapport aux secteurs, il y a une méthode pour avoir égard à cela aussi, avec un long calcul, qui donne une formule finale très-simple & élégante à employer pour la réduction de la seconde longitude. On détermine dans la fig. 1 (Tab. X) par des combinaisons,

qu'on

qu'on trouve heureuses l'ellipse cherchée à l'aide de la ligne des nœuds, & de l'inclinaison, déterminées par deux observations comme dans l'Opuscule ; & de la hauteur de la vîtesse, qui répond à la valeur a': en employant la longitude, & la latitude de l'observation éloignée, on trouve le point, qui doit être à l'orbite projetée, & par son moyen celui, qui devroit être à l'appliquée, & on cherche, s'il est à l'ellipse trouvée, en employant les méthodes suivantes: en comparant la somme des ses deux distances aux deux foyers avec la longueur de l'axe, en comparant la raison de la distance que ce point a au foyer à la distance qu'il a à la directrice avec celle d'un des deux points précédents, en comparant le rapport des aires des secteurs elliptiques avec le rapport des temps.

51. On fait plusieurs de ces déterminations, & comparaisons d'abord par la construction graphique, & comme cette recherche est très-délicate, on fait voir comment il faut s'y prendre pour y appliquer le calcul, & il y entre même une équation du second degré, qui détermine la rencontre de la direction de la nouvelle longitude avec l'orbite projetée. Il y a une méthode plus facile pour déterminer l'ellipse par la direction de la ligne des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite trouvées par un à-peu-près, & corrigées par la règle des fausses positions sans employer la nouvelle valeur a', ni les longs détours proposés avant pour l'employer. Il y a la méthode pour rectifier l'orbite trouvée par d'autres observations éloignées de celles, qu'on a employées pour la déterminer. On ne peut pas faire un extrait de tout cela, mais il faut le suivrè dans le texte entier. J'ajouterai seulement, qu'il y a l'application de la même méthode pour la correction des éléments des planètes, comme aussi l'application à la correction des orbites paraboliques beaucoup plus simple, & facile à executer que la proposée dans l'Opuscule. Je fais mention d'une méthode, que j'avois imaginée pour trouver l'ellipse, dont je me suis apperçu après, qu'elle ne devoit pas réussir en examinant la première méthode indiquée ici : c'étoit de trouver deux paraboles l'une par trois observations prises au commencement de

l'apparition, & trois autres à la fin, & une ellipse osculatrice de ces deux paraboles. La vîtesse, qui dans l'ellipse doit être différente de la vîtesse dans la parabole à pareille distance, empêche ce passage d'un de ces deux arcs presque contigus par tout à l'autre.

52. Pour l'objet du Mémoire IV la seule fig. 1 (Tab. XI) fait tout : la fig. 2 sert pour une petite Appendix ajoutée. Dans la première AEPD est une ellipse, AP le grand axe, DE le petit, C le centre, S, S' les deux foyers, dont le premier pour les ellipses planétaires est le lieu du soleil : ainsi A est l'aphélie, P le périhélie. Ayant la distance moyenne, qui est égale au demi-grand axe $= r$, on a le temps périodique, qui en faisant celle de la terre au soleil $= 1$, & l'année sidérale, qui en jours est 365,256, $= a$, est $= ar^{\frac{3}{2}}$. On suppose connu le temps de l'arrivée à l'aphélie A, & pour diviser l'ellipse en jours il faut y trouver pour un jour donné quelconque le point M tel, que l'aire de toute l'ellipse soit à l'aire du secteur ASM comme ce temps est au nombre de jours écoulé depuis cette arrivée jusqu'à ce jour : ainsi il faut résoudre le problême de couper indéfiniment l'aire de l'ellipse en une raison donnée quelconque par une ligne droite, qui part du foyer : c'est le problême, qui selon la démonstration de Newton exige une courbe transcendante, & la plus facile à concevoir, & même à construire, est la cycloide alongée, qui sert non seulement pour le foyer, mais pour un point quelconque S pris dans le grand axe.

53. Que l'on prenne CL troisième continuellement proportionnelle après CS, CP, & qu'on tire xy perpendiculaire à CL, qui dans le cas du foyer S sera la directrice. Si l'on fait rouler le cercle BQLR du rayon CL sur la ligne xy, le point A décrira cette cycloide, dont la moitié d'une branche, qui répondra au demi-cercle ANP, sera AHA', le point A allant en A', lorsque B va en B', P & L en P' & L' : les lignes LB', PA', AP', BL' seront égales à la demi-circonférence BQL de ce cercle. Or on démontre aisément, & on a la démonstration dans ce Mémoire, que si l'on prend PT, qui soit à PA' en une raison quelconque,

& qu'

& qu' on tire TH parallèle au diamètre PA jusqu' à cette courbe en H, & HI parallèle à la A'P jusqu' à l' ellipse en M, l'aire du secteur ASM sera à l'aire de la demi-ellipse en la même raison.

54. Le point P décrira un autre arc PH'P', & si l' on prend P*t* à PA' en une raison quelconque, on aura le secteur PS*m* en la même raison à la demi-ellipse : ainsi l' arc AHA' sert pour les aires comptées de l'aphélie, & PH'P' pour le périhélie, & on voit aisément comment à l'aide de ces arcs on peut parvenir à son but. On peut faire un instrument pour dessiner ces lignes : mais on peut plus aisément la tirer par des points, qu' on détermine en calculant les ordonnées IH, ou *ih*, qui répondent aux abscisses PI, P*i* à l' aide de la valeur des arcs AN, P*n* coupés par les mêmes ordonnées, & de leurs sinus. Il y a des tables dans le même Mémoire, qui donnent immédiatement ce qui serviroit pour la délinéation de la cycloide ordinaire, mais dont on tire aisément ce dont on a besoin pour celle qui répond à une excentricité CS donnée quelconque : comme aussi on fait voir, qu' on peut remplir le même objet par une autre courbe qui ira moins loin, en lui conservant les mêmes abscisses, & changeant les ordonnées en une raison, qui les diminue comme on veut, ce qu' on obtiendra aussi en conservant les mêmes nombres, & prenant les abscisses d' une échelle, & les ordonnées d' une autre.

55. Les ellipses des planètes ont la directrice trop éloignée ; mais pour elles on peut, au moins par un à-peu-près, obtenir le même objet par le théorème, que le mouvement angulaire autour de l' autre foyer est égal à très-peu-près au mouvement moyen. Pour les ellipses des comètes c' est l' axe PA, qui étant trop alongé envoye trop loin la directrice *xy* : ainsi on ne peut pas employer la construction de cette courbe par le mouvement du cercle : mais ayant construit à l' aide des tables indiquées le commencement de l' arc PH'P' ; on peut très-aisément faire la construction cherchée de la manière suivante : ayant trouvé deux points *m*, *m'*, qui répondent à deux observations, on tirera deux *mh*, *m'h'* parallèles à la tangente PA' jusqu' à l' arc de la courbe,

& *ht*, *h't'* perpendiculaires à la même, on aura les points *t*, *t'*, qui répondront à une échelle de parties égales formée sur la même tangente : l' intervalle *tt'* répondant à un intervalle de temps donné, on trouvera sur la même ligne les points *t*, qui répondront à des jours donnés quelconques : les droites *th* perpendiculaires à la même tangente donneront les points *h* de la courbe, & ceux-ci les points *m* de l' ellipse, qui restera divisée par une opération graphique, moins simple que celle de la parabole, qui est de la dernière simplicité, mais non pas excessivement embarrassante pour la pratique. Pourtant toute cette recherche sert beaucoup plus pour une contemplation géométrique, & un complément de la théorie que pour la pratique.

56. Dans la fig. 2 il y a une des mille manières qu' on a pour dessiner par des points une ellipse. Quand on a le foyer S, le sommet P, & la directrice *xy*, comme on l' auroit dans le cas de l' ellipse d' une comète déterminée par la méthode du Mémoire précédent, on fera très-aisément cette délinéation par une construction, qui est générale à toutes les sections coniques, & dont je me suis servi dans mes éléments. Qu' on tire SE, SE' parallèles à la directrice, qui soient à la ligne SL en raison de SP à PL, les LE, LE' indéfinies, qui seront tangentes de la courbe, & des lignes parallèles à la même directrice par des points B, B' quelconques de la ligne LS prolongée, qui rencontrent une de ces deux tangentes, comme LE, en D, D' : avec le centre S l' ouverture SD, ou SD' on trouvera dans ces mêmes lignes deux points C ou deux C', si l' on a pris les points B, B' dans le grand axe de l' ellipse, ou pour la parabole, & hyperbole dans l' axe prolongé à l' infini depuis le sommet de la branche vers son foyer.

§. VIII.

Des trois derniers Mémoires Correlatifs.

53. Le Mémoire V est une apologie présentée á l' Académie Royale des Sciences de ma méthode, & des mes Opuscules, qui avoient

avoient été imprimés par ordre de la même Académie, & pourtant on les avoit attaqués d'abord très-injustement dans la préface de ce même Volume, où ces Opuscules avoient été imprimés, & peu de temps après dans une séance de l'Académie d'une manière bien indigne. J'ai parlé de tout cela dans la préface de ce premier Opuscule de ce Volume-ci. J'ai promis cette pièce, en supprimant ce que j'y ai indiqué, & celle-ci n'est qu'une espèce de pièce justificative de ce que j'ai dit dans la même préface : elle peut servir d'extrait de ce Mémoire, & donner quelqu'idée de toutes ces tracasseries.

58. Le Mémoire VI est une pièce, qui peut intéresser beaucoup plus les amateurs de la Géométrie, que les Astronomes : il s'agit de la détermination de l'orbite parabolique d'une comète, dont on ait les observations faites dans son passage par les deux nœuds, ce qu'on n'a eu jamais jusqu'à présent, & qui peut bien arriver, mais dans presque toutes les orbites, qu'on a observées jusqu'à présent, n'est guere possible à cause de la trop grande distance d'un des deux nœuds, où la comète n'est pas visible, & il est bien improbable, qu'il soit pour arriver jamais. Dans ce cas le problême se réduit à une équation de quatrième degré au moins après l'extraction cubique d'un nombre tiré des valeurs numériques des lignes, réduits par la multiplication à la forme d'une seule dimension, sans laquelle réduction il seroit du 12me degré.

59. Dans la fig. 1 (Tab. XII) S est le soleil foyer de la parabole, TE, T'E' sont les deux directions données des deux longitudes, qui passent par les deux lieux inconnus C, C' de la comète placée dans la ligne des nœuds NN', CPV'C' est l'arc inconnu de la parabole, SP la distance périhélie, BV l'abscisse dans le diamètre, qui a pour ordonnée la corde CC' coupée par le milieu en B, & par les propriétés de la parabole cette corde est le paramètre de ce diamètre quadruple de cette abscisse, & du rayon SV. En comparant la vîtesse parabolique dans la distance SP à la circulaire, & l'aire du segment CPVC' à l'aire du cercle de ce rayon, qui répond au même temps, & combinant plusieurs pro-

propriétés de la parabole, je trouve à la fin l'expression suivante très-simple de la valeur de cette corde. En appellant m l'année sidérale, c la circonférence d'un cercle, dont le diamètre est $=1$, c'est-à-dire $\frac{355}{113}$, t le temps écoulé entre les deux observations, on aura $CC'^3 = \frac{18t^2c^2}{m^2}$, valeur qu'ayant le temps t dans les mêmes unités que l'année m on trouve très-aisément en nombre de parties de l'unité égale à la distance moyenne de la terre au soleil, & par conséquent on trouve une ligne droite de cette longueur.

60. Après avoir trouvé cette ligne, le problême se réduit à faire passer par un point donné S une ligne droite de manière, que sa partie CC' interceptée entre deux lignes droites ETe, E'T'e', données de position soit égale à une droite donnée. La solution en est très-facile par une opération graphique. On ouvrira un compas à l'intervalle de la ligne donnée, & on appliquera le côté d'une règle au point S en la faisant tourner jusqu'à ce qu'on trouve l'intervalle CC' égal à l'ouverture du compas. La construction géométrique en est encore très-simple, & facile dans le cas du parallélisme des deux droites données: on fait cette solution à la fig. 2: mais quand ces deux lignes prolongées indéfiniment se coupent en quelque point A, comme on les voit dans toutes les autres figures, le problême pris en général devient du quatrième degré, & il se baisse au second, lorsque la rencontre se fait en A à angles droits.

61. Ce problême se trouve mille part, même dans des ouvrages élémentaires de Géométrie, & d'Analyse. J'en donne une construction linéaire très-simple à la fig. 3 par l'intersection d'un cercle du rayon SI égal à la ligne donnée, avec une hyperbole qui a les deux branches MI2I1m, M'I4I3m' dont une passe par S: elle a une des deux lignes donnée pour une des deux asymptotes, & l'autre Gg est parallèle à l'autre donnée Ee, & éloignée également du point S. Quand on a les asymptotes & un point, on a très-aisément l'hyperbole par des points, comme on sait.

62. Je

62. Je considère toutes les variations de la ligne CC' dans sa révolution entière autour du point S. Je fais voir que dans celui des quatre angles formés en A, dans lequel se trouve le point S, comme EAE', elle vient de l'infini en diminuant jusqu'à un minimum, sans pouvoir s'évanouir, & va encore à l'infini : dans les deux, qui restent des deux côtés, elle vient de l'infini jusqu'à s'évanouir, & du zero à l'infini, & dans ce mouvement elle peut encore avoir un minimum, & un maximum : elle ne peut jamais se trouver dans l'angle opposé au premier : je détermine par une propriété, & une pratique de compas très-simple ses maximum & minimum, & tous leurs cas par les intersections d'un autre cercle avec les branches d'une autre hyperbole, en faisant voir que quelque fois il y a deux minimum, & un maximum, comme aussi je fais voir qu'il a toujours au moins deux solutions réelles du premier problême, quelque fois trois, & même quatre, pas plus. Je traite tout cela encore analytiquement, & je fais voir le grand accord entre l'Analyse, & la Géométrie linéaire. Parmi plusieurs solutions je fais voir qu'il y en a toujours deux, qui ne peuvent pas servir pour le cas dont il s'agit ici d'une comète observée dans les deux nœuds, le point S ne s'y trouvant pas entre les points C, C'. Les deux autres ou sont impossibles, l'équation donnant deux racines imaginaires, ou il y en a une seule réelle exprimée par une racine double, ou sont réelles toutes les deux. Il y a des cas, où toutes les deux pourroient servir, & la solution reste douteuse. Chaque CC' trouvée capable de servir peut avoir une infinité de paraboles égales chacune avec une inclinaison différente, que l'on détermine par une troisième observation. Je considère tout, & détermine tout ce qui en est susceptible : ainsi j'espère, qu'on sera satisfait des tous les détails qu'on trouvera dans ce Mémoire.

63. Le dernier Mémoire Correlatif est mon ancienne Dissertation sur les comètes écrite en latin, & imprimée il y a déjà presqu'un demi-siecle. Je l'ai réimprimée ici, parcequ'il y en a eu un très-petit nombre d'exemplaires imprimés alors, & qu'ils sont

péris

péris depuis très-long temps presque tous. D' ailleurs outre que c' est le germe de tout ce qui a été développé depuis dans cet Opuscule, il y a beaucoup d' autres objets intéressants pour l' Astronomie des comètes. Toutes les figures de la planche XIII appartiennent à cette Dissertation. Il y a d' abord la substitution du mouvement rectiligne, & uniforme dans la corde au curviligne & inégal dans l' arc, avec le rapport des deux distances raccourcies à la terre tiré de cette substitution, & donné par les temps, & les sinus des mouvements, qui répondent à ces temps : il y a l' équation du sixième degré tirée de la même substitution pour trouver la distance : il y a une réduction de la seconde longitude pour passer de l' arc à la corde, que j' ai perfectionnée depuis : il y a la méthode détaillée pour avoir la solution générale de la détermination de l' orbite parabolique par trois observations quelconques éloignées entr' elles comme on veut, avec tout le procédé pour arriver à l' équation, qui seroit d' une élévation immense, & tout-à-fait intraitable, mais toujours algébrique.

64. C'est dans cette pièce que je fis voir pour la première fois, qu' on ne peut pas appliquer à la recherche des orbites des comètes la solution du problême de faire passer entre quatre lignes droites données de position une droite qui en soit coupée en une raison donnée ; parceque ce problême devient indéterminé toutes les fois qu' il y a deux droites coupées en la même raison, ce qui arrive dans le cas des comètes, où l' arc de la terre s' approche de la ligne droite, & le mouvement de l' uniforme même plus que celui de la comète : j' y fis voir aussi le défaut d' une méthode de M. Bouguer bien différente de la mienne, que pourtant on m' a accusé tant d' années après d' avoir empruntée de lui.

65. Dans la même Dissertation il y a des considérations essentielles sur l' effet de la propagation successive de la lumière dans la théorie de l' immobilité de la terre, qui en seroit démontrée fausse sans une manière de concilier cette immobilité avec la même propagation successive, avec la gravité générale Newtonienne, & avec tous les phénomènes, manière que j' ai développée encore plus amplement dans d' autres ouvrages postérieurs.

66. Il

66. Il y a des remarques sur le mal prétendu zodiaque des comètes, sur leurs retours mal ou bien annoncés, sur les phases qu' on n' y voit pas, quoique quelqu' un a cru les y appercevoir, & je fais voir que l' immensité de leur atmosphère empêche ces phases en y produisant un crépuscule très-vif continuel, sur l' origine de leurs queues, en donnant la raison pour laquelle les planètes ne les ont pas comme les comètes, sur leur forme alongée avec quelque déviation considérable dans certaines circonstances de la direction opposée au soleil, & sur la cause de la courbure qu' on y voit quelque fois, sur beaucoup d' autres objets analogues, & intéressants.

67. Mais ce qu' il y a de plus remarquable c' est quelque indice de la révolution des comètes autour d' un axe comme nous la voyons dans plusieurs planètes, & nous la croyons dans les autres. J' y fis voir que certains longs traits noirâtres, qu' on a vu quelque fois au milieu de la queue, ne peuvent pas provenir de l' ombre du noyeau, en faisant voir que le grand crépuscule continuel empêche toute ombre, que s' il y en avoit une, elle seroit très-courte, que même si elle étoit longue, on ne pourroit pas la voir au milieu de l' immensité des vapeurs éclairés par le soleil, qui se trouvent dans la grande épaisseur de la même queue, dont la partie obscurcie par l' ombre seroit un rien par rapport au total. D' ailleurs je vis dans la comète de 1744 un trait pareil comme à la fig. 7, qui n' étoit pas au milieu, & qui changea de place, dans la fig. 8 deux, dans la fig. 9 cinq avec des changements pareils. Je les ai attribués plutôt à des vapeurs noirâtres sortis de certaines parties de la surface, comme de fumée bien noire, ce qui soit arrivé dans cette comète, qui s' approcha trop du soleil, & arrive rarement, mais il peut arriver encore dans un éloignement plus grand à cause de la différente constitution de la surface. J' ai pris pour un indice de la rotation sur un axe le changement de la position de ces traits par rapport à la queue même.

§. IX.

De la préface & des deux premiers paragraphes du second Opuscule, qui a pour objet la nouvelle planète.

68. DANS la préface de cet Opuscule, qui forme la seconde partie de ce Volume beaucoup plus courte que la première, il y a une notice abrégée de la découverte inattendue faite par M. Herchel en Angleterre l'an 1781 d'une planète nouvelle ajoutée aux anciennes : elle avoit été observée déjà par Mayer l' an 1756, mais une fois seule. Comme il ne pouvoit pas en connoître le mouvement propre par cette observation unique, & il la voyoit bien petite, il l' a prise pour une étoile fixe, & il l' a mise comme telle dans son catalogue. S' il l'avoit observée même seulement une autre fois, il l' auroit reconnue pour une planète, & il auroit eu le mérite, & l' honneur de cette découverte intéressante. Il y a dans la même préface une indication courte de mes premières idées, & des essais pour en découvrir la distance, & la forme de son orbite : c' est un espèce de très-petit extrait de cet Opuscule qui est divisé en plusieurs Mémoires.

69. Dans le premier il y a plus au long la suite de mes premiers travaux sur cet objet avec un extrait d' une lettre très-longue, que je commençai à écrire à M. de La-Lande de la campagne, où je me trouvois lorsque la nouvelle de la découverte arriva à Paris, & je continuai après à mesure que j' avançois dans mes recherches. Elles commencerent comme celles de M. Mechain dans la première idée qui se présenta à l' esprit, que ce fût une comète : voyant que l' orbite déduite par ma méthode ne s' accordoit pas avec les observations suivantes, je m' apperçus, que quand il y a très-peu de latitude, & un mouvement en longitude bien petit, ce qui arrivoit alors, à la place d' une corde, que ma méthode pour les orbites des comètes fait trouver très-aisément, on peut en avoir deux. Comme les paraboles, qui répondoient à ces deux cordes avoient été abandonnées toutes les deux des observations suivantes, M. le Président

de

de Saron, qui s' en occupoit aussi en employant ma méthode, comme il avoit déjà fait pour d' autres comètes, s' apperçut qu' il falloit chercher la route de cet astre dans des éloignements beaucoup plus grands que ceux dans lesquels les comètes ordinairement sont visibles : alors je trouvai, qu'on pouvoit avoir deux autres cordes bien plus éloignées.

70. Ce grand éloignement me fit voir qu' on pouvoit employer ici pour la première fois la solution du probléme qui détermine la distance & position d' une ligne droite coupée par quatre autres données de position, comme le sont les directions de quatre longitudes, l' arc circulaire de la terre pouvant être très-grand, même un cercle entier, tandis que celui d' un astre si éloigné restoit très-peu différent de la ligne droite. J' appliquai cette solution à cette recherche, & j' envoyai à M. Mechain ma méthode, qui est très-simple, & un Mémoire sur le même sujet en Italie, où il fut imprimé peu après. Cette solution étoit indifférente par elle-même à donner une section conique quelconque. J' y donnois l' orbite parabolique, qui d' abord ne répondoit pas mal aux observations, mais je m' apperçus, qu' une orbite peu éloignée de la circulaire devoit s' accorder presqu' également, & qu' il y avoit une raison pour donner la préférence à cette seconde. Déjà M. de La-Lande avoit employé l'orbite circulaire qui se soutint plusieurs mois ; mais elle s' en éloigna après à cause de l' ellipticité, que nous y découvrîmes.

71. Ce premier Mémoire roule sur tous ces objets : il y a cette orbite parabolique éloignée, que j' avois déterminée par trois observations, & je l' avois mise aussi dans le Mémoire imprimé en Italie. Il y a une méthode pour trouver l' orbite circulaire tirée de celle, que j'employe pour les orbites paraboliques des comètes, appliquée à cet objet : il y a une recherche analytique des distances dans lesquelles on peut chercher dans des cas pareils les quatre cordes, sur-tout les deux éloignées, ce qui dépend des recherches sur la réduction de la seconde longitude, que j' employe pour passer du mouvement de l' arc à celui de la corde. Le fruit principal que j' ai tiré alors de toutes ces recherches, outre

l' avantage qu'on trouve toujours, lorsqu' on suive des nouvelles méthodes, dans les vérités qui se rencontrent sur la route, & qui peuvent être utiles pour d' autres recherches, c' est d' avoir trouvé avec sureté, que la distance de cet astre devoit être à-très-peu-près double de celle de Saturne.

72. Le second Mémoire contient deux méthodes pour trouver la distance dans l' hypothèse du mouvement circulaire. La première donne une valeur déterminée par une équation de troisième degré, mais on y néglige plusieurs quantités : je m' en étois servi dans le Mémoire imprimé en Italie, dont je viens de faire mention, étant plus analogue à la méthode, que j' avois employée pour l' orbite parabolique. A' la fig. 4 (Tab. XIV) S est le lieu du soleil, T, T' sont deux lieux de la terre, TE, T'E' les directions des deux longitudes, qui se rencontrent en A, PP' l' arc de l' orbite pris pour une ligne droite. J' y trouve les distances T'A, & SA. Comme l' angle SAT' doit être petit à cause du grand éloignement qu' on trouve du point A par rapport à la ligne ST', je prend la ligne SP' pour égale aux deux SA connue & AP' inconnue, ainsi en le nommant a & x on a SP' $= a + x$: l' angle PAP' différence des deux longitudes égale au mouvement m étant petit, & l' angle SP'T' encore plus petit que SAT', je considère P'P comme une ligne droite perpendiculaire tant à la ligne AP' qu' à la ligne SP' : ainsi elle sera $= x \tan.m$. J'ai par x le temps périodique qui répond à la distance SP' $= a + x$: ainsi j' ai par x le mouvement PP', qui doit répondre au temps t écoulé entre les deux observations : en faisant cette valeur égale à l' autre de la même ligne PP' $= x \tan.m$ je trouve une équation, qui devient de troisième degré. Sa résolution donneroit l' inconnue x : mais on peut la trouver plus aisément en cherchant par la méthode des fausses positions une valeur x, qui donne l' égalité des deux expressions analytiques de la valeur de la ligne PP'.

73. La seconde méthode est beaucoup plus simple, & on n' y néglige rien ; mais on y employe d'abord la fausse position pour la valeur de la distance SP $=$ SP'. On a dans le triangle STP

le

le côté ST, & l' angle STP différence des longitudes du soleil & de la planète : ainsi en prenant une valeur pour SP on trouve aisément l' angle SPT par la raison des côtés égale à celle des sinus des angles opposés, ce qui donne aussi le troisième angle TSP. De la même manière on trouve l' angle T'SP', & comme on sait l' angle TST' égal à la différence des deux longitudes du soleil, on trouve TSP' : on en tire l' angle PSP', qui est le mouvement héliocentrique : on le compare avec celui, qui répond au temps t dans un cercle, dont on trouve le temps périodique par la valeur du rayon SP pris par position : la différence est l' erreur à corriger par le changement de la position.

74. La première méthode appliquée à deux observations avoit donné dans l' Opuscule imprimé alors en Italie la distance au soleil $= 19,6$, la distance moyenne de la terre étant $= 1$: trois observations, qu' on trouve dans ce Mémoire-ci, ont donné, en combinant la première avec la seconde 18,914, & la comparant avec la troisième 19,892 : ces deux déterminations sont encore plus d' accord entr' elles, & avec la valeur qui s' est trouvée après pour la distance dans la vraie théorie elliptique, qu' à cette première. Mais déjà en voyant le peu de différence entre les résultats de l' hypothèse circulaire appliquée à différents binaires d' observations faisoit voir, que l' orbite ne s' éloignoit trop de la circulaire, & on voyoit que la distance de cette nouvelle planète étoit à-peu-près double de celle de Saturne. Comme les observations avoient déjà commencé à s' éloigner sensiblement de l' orbite trouvée dans l' hypothèse circulaire, j' ai l' ai cherché indépendamment de cette hypothèse par d' autres méthodes qui ont été le sujet des Mémoires suivants fondés sur la substitution du mouvement sur la corde à celui sur l' arc.

§. X.

Du Mémoire III, & IV.

75. DANS le Mémoire III il y a la méthode fondée sur la solution du problême, qui détermine la ligne droite coupée par qua-

quatre autres données de position en raison donnée : les quatre droites sont les directions des quatre longitudes, la raison est celle des temps entre les observations consécutives, la ligne droite coupée est l'arc de l'orbite considéré comme une ligne droite à cause de sa petitesse par rapport au total. Dans le Mémoire VI, dont l'extrait viendra ci-après, il y a la détermination de l'effet de la courbure, & de l'inégalité de la vîtesse pour en tenir compte ; mais dans l'orbite d'un astre si éloignée, cette correction est si petite même dans l'intervalle d'un an, qu'en la négligeant on n'est exposé qu'à des erreurs bien petites.

76. Dans la fig. 5 (Tab. XIV) on voit le lieu du soleil en S, les quatre lieux de la terre T, les directions des longitudes TE, entre lesquels il faut faire passer l'arc PP'P''P''' de l'orbite projetée considéré comme ligne droite de manière, que ses segments PP', P'P'', P''P''' soient en raison des trois intervalles des temps entre les observations. Il y a un grand nombre de solutions de ce problême élémentaire : voici celle que j'ai trouvée pour ce cas, étant bien propre pour y adapter les nombres ici, où la distance trop grande par rapport au rayon de l'orbite terrestre, & la délicatesse de la recherche ne permet pas d'employer la construction graphique.

77. Il est aisé de voir comment par la valeur donnée de quatre distances ST de la terre au soleil, avec les angles qu'elles contiennent en S, & avec les directions TE, on peut trouver les cordes de l'orbite terrestre, & par-là les distances TA, TA', TA'' du point T aux intersections de la première TE avec les trois autres. Je conçois les lignes P'''B, P'''B' parallèles aux E'T', E''T'', qui rencontrent la ET en B, B', & tandis qu'on a les lignes AA'', A'A'' que j'appelle c, c', en appellant x la ligne PA'', je trouve la valeur analytique des lignes A''B, A''B' par x, par les valeurs c, c', & par d'autres qu'on tire des temps, & des mouvements de la planète en longitude, qui y répondent. J'appelle t, t', t'' les temps écoulés depuis la première observation jusqu'à la seconde, troisième, quatrième, m, m', m'' les différences de la première longitude observée à la seconde, de la se-

seconde à la troisième, de celle-ci à la dernière : je fais $a = sin.(m' + m'')$, $a' = sin.m''$, $b = sin.m$, $b' = sin.(m + m')$, $f = \frac{(t'' - t)b}{at}$, $g = \frac{bct''}{at}$, $f' = \frac{(t'' - t')b'}{a't'}$, $g' = \frac{b'c't''}{a't'}$: je trouve $A''P = x = \frac{g - g'}{f - f'}$ (*), & $A''P''' = fx - g$.

78. Alors j' ai la distance $TP = TA + AP$: les lignes $A''P$, $A''P'''$ avec l' angle $PA''P'''$, qui est le mouvement total en longitude $= m + m' + m''$, donnent la corde PP''', & l' angle $A''PP'''$, le même que TPP''', qui détermine la direction de la corde PP''' par rapport à cette première distance. On peut trouver également la distance $T'''P'''$, & l' angle $T'''P'''P$. Il n' est pas difficile de continuer les opérations jusqu' à la détermination de tous les éléments par la méthode exprimée dans ce même Mémoire III. On trouve aisément la distance SH du milieu de cette corde au soleil, l' angle SHP''' fait par cette ligne avec la tangente, dont la direction ne diffère pas sensiblement de la corde de l' orbite, qui se confond sensiblement avec sa projection PP'''. La longueur de la même PP''' parcourue dans le temps total comparée avec l' espace parcouru dans le même temps par le mouvement moyen de la terre donne le rapport des quarrés des vîtesses de la planète, & de celle-ci : on tire la hauteur de la vîtesse par ce rapport avec le rapport des forces donné par le rapport des distances au soleil : & dans une note au num. *6* du Mémoire suivant V on a les formules, d'où l' on tire les éléments de l' orbite. Cette méthode indiquée dans ce même Mémoire V est plus simple & facile, qu' une autre y exprimée, & empruntée du Mémoire I.

79. Il faut seulement avoir égard à éviter l' emploi de certains systèmes d' observations, qui pourroient éluder la recherche par

---

(*) Dans le Mémoire envoyé en Italie, & dans la lettre à M. Mechain j'avois appellé *m* & *n*, ce que j'ai appellé ici *f* & *g* après m' être apperçu de cette double appellation de la même *m*, qui faisoit une équivocation aisée à s' en garantir ; mais il étoit mieux de l' ôter.

par l' égalité des valeurs g, g', & f, f', qui donneroient $x = \frac{0}{0}$: il ne faut pas même employer cette formule, si le diviseur $f - f'$ venoit trop petit, dans lequel cas il faudroit changer une ou plusieurs des quatre observations : en commençant par celles du printemps, je n'ai jamais rencontré cet inconvenient dans la position présente de la Planète, qui se trouve peu éloignée du commencement de l' Écrevisse. Cette méthode a réussi très-bien avec une combinaison d'observations employées par M. Mechain, comme on verra dans l' extrait du Mémoire VII.

80. Dans le Mémoire IV il y a une méthode pour trouver les distances & la corde, ce qui donneroit les éléments de l' orbite pour les temps, & les lieux de la conjonction, & opposition suivante. Il y a tout le procédé pour trouver ces temps, & lieux, & les employer à la recherche des distances au soleil : j' y fais usage des observations précédentes, & suivantes à quelqu' intervalle, en supposant d' abord le mouvement uniforme dans une ligne droite avec la même vîtesse conservée, en introduisant depuis la différence des vîtesses, qui répondoient à une différence des distances, que cette méthode me donnoit pour les deux positions. Les formules, qu' on trouve dans ce Mémoire sont simples & exactes : j' en ai tiré les distances, qu' on voit dans le même Mémoire, qui sont peu différentes de ces qu' on a trouvé depuis par l' application d' autres observations plus éloignées entr' elles à des formules plus susceptibles de donner les vraies valeurs; mais leur différence est venue contraire à ce qu' on a trouvé postérieurement. Les petites erreurs des observations, & les petites quantités négligées ont donné des erreurs dans les résultats petites par rapport au total de la distance moyenne, mais assez grandes par rapport à la différence, qui dans un arc de six mois seuls est petite elle-même. Pourtant j' ai jugé à propos de ne pas supprimer ce Mémoire y ayant supprimé seulement le détail des calculs numériques, que j' avois faits en entier, & que M. Mechain avoit eu la bonté de revoir, & rectifier en les refaisant avec toute l' exactitude.

§. XI.

§. XI.

Des trois derniers Mémoires.

81. Il n'y reste que trois Mémoires, qui sont les derniers de cet Opuscule. Dans le premier de ces trois, qui en est le cinquième, on a deux combinaisons différentes de quatre observations, qui ont des solutions particulières. Dans la première l'intervalle de temps entier est d'un an sidéral juste, & les trois intermédiaires égaux: ainsi la première & la dernière observation sont faites du même point T (Tab. XV fig. 1) de l'orbite terrestre. On y voit l'arc PP'P''P''' avec les quatre directions des longitudes TP, T'P', T''P'', TP''', les rencontres de la seconde & troisième avec la première sont A, & A', celles des lignes parallèles à la dernière tirées de P', & P'' sont B, & B'. L'égalité des temps rend beaucoup plus simple la formule pour trouver l'inconnue x, qui est ici un tiers de la distance AP.

82. Il faut trouver ici aussi les distances TA, TA', qu'on trouve d'une manière analogue à celle qu'on a indiqué au paragraphe III pour la fig. 5 de la planche XIV: je les nomme a, & a'. Alors on a les dénominations, & valeurs qu'on trouve dans ce Mémoire au num. 6. En appellant l, l', l'', l''' les quatre longitudes, & en faisant $r = sin.(l' - l)$, $r' = sin.(l'' - l)$, $r'' = sin.(l' - l''')$, $r''' = sin.(l'' - l''')$, on aura $x = \frac{2arr''' - a'r'r''}{4rr''' - r'r''}$, $TP = 3x$, $TP''' = \frac{(3a - 6x)r}{r''}$.

83. Ayant les deux côtés TP, TP''' avec l'angle PTP''', qui est le mouvement total, on trouve la corde PP''' confondue avec l'arc, & l'angle TPP''', qui avec SPT, qu'on trouve aisément comme dans le §. III, donne l'angle SPP''', c'est-à-dire SPH, le point H étant au milieu de la même PP''': on en tire SH, & l'angle en H, & ayant trouvé la hauteur de la vîtesse aussi comme au Mémoire III, on a les trois valeurs qui donnent les éléments de l'orbite par les formules, dont on a fait mention là aussi, & qu'on a ici dans la note au num. 5.

84. On a dans une note du num. 5 des formules pour le cas, où l' intervalle entre les observations extrêmes seroit bien d' un an, mais les trois intervalles entre les observations ne seroient pas égaux. Ces formules aussi ne sont pas trop compliquées : il y entre seulement le surcroît des temps intermédiaires. M. Mechain avoit eu la bonté d' appliquer les formules précédentes à quatre de ses observations, & j' ai mis dans ce Mémoire une partie des résultats de son calcul, qu' il m' avoit envoyé d' abord : il en a tiré depuis les éléments, & en y employant une petite correction correlative à la petite flèche, qu' il avoit négligée d'abord, il les a perfectionnés depuis de manière, qu' ils se sont trouvés d' accord dans peu de secondes avec les observations d' un an & demi. Mais je n' ai parlé de ce succès que dans le dernier Mémoire.

85. La seconde méthode proposée dans ce Mémoire emploie trois observations faites d' un même point T, de l' orbite de la terre (fig. 2), & une du point T' diamétralement opposé. Je ne détaillerai ici toute cette méthode : on pourra voir au numér. 29 de ce Mémoire les dénominations & les formules, qui ne sont pas trop compliquées. J' ajouterai seulement une remarque, que j' y ai faite, qu' on ne peut pas employer quatre observations, qui soient faites toutes du même point T, comme ici il y en a trois ; parceque les formules y deviendroient illusoires, le problême étant indéterminé dans ce cas par des raisons que j' ai exposées ici & dans le Mémoire VII.

86. Dans le Mémoire VI il y a la détermination de l' effet de la courbure de l' arc, & de l' inégalité de la vîtesse de l' intersection du rayon vecteur avec la corde, qui sont les deux sources de l' erreur qu' on peut avoir dans mes méthodes par la substitution du mouvement rectiligne & uniforme dans la corde au curviligne, & inégal dans l' arc, & cette recherche y est faite par rapport à la nouvelle planète, dont on suppose ici la distance à-peu-près connue : je la prend de 18,9 par rapport à la distance moyenne de la terre au soleil $= 1$. S (Tab. XV fig. 3) est le soleil, PBP'' l' arc de l' orbite coupé en B en deux parties

ties égales par le rayon SB, qui coupe la corde par le milieu en b: P' est un lieu intermédiaire de la planète observée du lieu T' de la terre par la direction T'P': le rayon SP' coupe la corde en p. On a l' uniformité du mouvement du point p en négligeant les segments PP', P'P'' par rapport aux secteurs PSP', P'SP'', comme on a vu au commencement du premier Opuscule, & dans plusieurs Mémoires de tous les deux: on conçoit ici que le point p' soit celui qui coupe la corde en raison de ces deux secteurs, c' est-à-dire en raison des temps. Si la planète avoit son mouvement uniforme sur la corde; à la place de la direction T'P' on auroit la T'p'. L' erreur dans le cas exprimé par la figure est la différence des deux angles P'T'p, pT'p', ou la somme dans d' autres cas: le premier de ces deux angles est l' effet de la courbure de l' arc, qui répond à la flèche P'p bien petite, & regardée bien obliquement du point T', le second est l'effet de l'inégalité du mouvement de l' intersection du rayon vecteur avec la corde, qui produit la distance pp' regardée presque d' une position perpendiculaire, mais beaucoup plus petite.

87. Je commence par déterminer l' angle P'T'p dans un arc de six mois, & en prenant 1 pour ST', & 18,9 pour la distance SP', je trouve que même en considérant le point p au milieu de la corde en B, & l' angle ST'P' droit, qui sont les circonstances du maximum de cet angle, il n' est que de 2'': la petitesse immense des deux segments négligés fait bien voir, que l' autre effet sera encore plus petit: c' est insensible à l' observation surtout quand il s' agit comme ici de la longitude, dont la détermination dépend du temps: ainsi j' avois eu raison de négliger ces deux effets dans certaines applications à un arc de six mois. Mais comme ils doivent s' augmenter beaucoup plus qu' en raison des temps, j' ai fait la recherche de la quantité précise de l' un, & de l' autre en les déterminant pour un arc de trois ans coupé en trois parties égales, & en prenant la même distance: j' y ai ajouté la variation introduite par les variations des circonstances pour pouvoir les déterminer dans les cas particuliers, dont on auroit besoin.

88. En appellant t, t', t'' les temps réduits en minutes, qui répondent aux arcs PP', P'P'', PP'', r le rayon vecteur SP', c la circonférence d'un cercle qui a le diamètre $= 1$, a l'année sidérale, & en faisant $b = \frac{7200c^2}{a^2}$, je trouve $P'p = \frac{btt'}{r^2}$, & pour le premier angle $\sin. P'T'p = \frac{P'p \times \sin. SP'T'}{T'P'}$. Pour le second angle en ayant égard aux segments PP', P'P'', en employant un théorème, qui est général pour tous les arcs de courbes, qui ont un cercle osculateur, & que je démontre, que les aires des petits segments contigus sont comme les cubes de leurs cordes, & en faisant PP'' $= e$, je trouve par un tour de calcul pas si commun, la petite ligne $pp' = \frac{ett'(t-t')}{3t''r^3}$, qui sera positive conformément à la figure, ou négative, selon que le premier temps t sera plus grand que le second t', ou plus petit, en s'évanouissant dans le cas de leur égalité. Mais je trouve encore qu'on peut aussi se débarrasser de la valeur e en la faisant $= \frac{120ct}{a\sqrt{r}}$, ce qui donne $pp' = \frac{40bctt'(t-t')}{ar^{\frac{7}{2}}}$: alors on aura encore le petit angle $pT'p'$ par son sinus, qui sera $= \frac{pp' \times \cos. SP'T'}{T'P'}$. L'unité dans ces formules pour le temps sera une minute, & pour les lignes la distance moyenne de la terre au soleil.

89. Si l'arc est de trois ans, ce qui suppose les observations faites à des intervalles de temps égaux chacun d'un an, en supposant encore SP' $= 18{,}9$, & l'angle ST'P' droit, ce qui est le plus défavorable, je trouve le premier angle $P'T'p = 1'.4''$, & le second $pT'p' = 31''$, ce qui n'arrive pas tout-à-fait à la moitié de l'autre. Cela ne sert pas pour faire usage de quatre observations à trois intervalles égaux chacun d'un an; parcequ'alors le problême devient indéterminé, comme on a vu dans le Mémoire précédent, mais pour donner un exemple du calcul, & beaucoup plus pour en tirer aisément les valeurs pour un intervalle de temps moindre quelconque, en conservant les trois

in-

intervalles égaux par la considération de la variation des résultats qui répondent à la variation des données supposées.

90. On voit aisément tout cela en considérant les quantités employées dans la formule : je les examine toutes l' une après l' autre, & je détermine toute la liaison qu' il y a. On y voit, qu' en retenant la même distance au soleil, & le même intervalle de trois ans, la valeur de ces angles ne peut pas être augmentée par la différente position de la terre, que de peu de secondes, le premier peut bien diminuer jusqu' à s' évanouir. Mais pour ce qui appartient à la variation introduite par celle du temps, on voit aisément, que le premier de ces deux angles est varié en raison du quarré du temps total, & le second en raison du cube à parité de tout le reste. Je trouve que le premier angle dans son maximum en trois ans ne va pas au de-là de $68''$, & le second de $43''$, ainsi dans un an ce second ne va pas au de-là de $\frac{43''}{27} = 1'', 6$: le premier ne va pas au de-là de $\frac{68''}{9} = 7''\frac{1}{2}$, ce qui pourtant a pu exiger une correction dans la première méthode du Mémoire précédent, qui avoit l' intervalle d' un an.

91. J' examine après de combien on peut se tromper dans le résultat du valeur de cette réduction en calculant selon les formules, & je trouve que même en trois ans ce danger ne passe pas une seconde.

92. A' la fin de ce Mémoire il y a la manière de trouver les éléments de l' orbite, qui doivent devenir plus exacts après cette correction par des méthodes, que j' avois données dans d' autres Mémoires précédents ; mais ici je donne la démonstration des formules très-simples, que j' avois mise pour cet usage dans une note du Mémoire V, par lesquelles on tire ces éléments de trois données, qui sont le rayon vecteur, son angle avec la tangente, & la hauteur de la vîtesse. La démonstration est fondée sur des propriétés de l' ellipse, qui sont très-connues. Ce morceau mérite bien de trouver sa place parmi les Éléments de l' Astronomie.

93. Le dernier Mémoire contient la détermination de l' orbite

de

de cette planète faite par M. Mechain en appliquant ma méthode proposée dans le Mémoire III à quatre de ses observations, dont les extrêmes sont eloignées de 594 jours. On voit ces observations au num. 2, & au num. 3 les éléments que M. Mechain en a tirés. Il a employé d'abord la théorie du mouvement rectiligne, & uniforme selon les formules de ce Mémoire sans y employer, comme je croyois, les réductions, que je lui avois seulement indiquées, & que je n' ai pas développées en détail que dans le Mémoire précédent; ainsi ce premier calcul ne lui a donné qu' une approximation: il a employé des fausses positions par la méthode qu' il a eu la bonté de me communiquer, & que j' indique ici, pour rectifier ces éléments, qui se sont trouvés exactement d' accord avec la première & la dernière de ces quatre observations, & éloignés seulement de 4'' d' une des intermédiaires, de 7'' de l'autre. J'y ajoute les éléments trouvés par M. le Président de Saron par la même méthode également, & un peu plus d' accord avec les mêmes observations, quoiqu' il y avoit négligé quelque petite fraction.

94. M. Mayer a mis dans son catalogue une petite fixe, qui ne se trouve plus dans le lieu, où il l'avoit placée: on a reconnu, que cette planète devoit se trouver là dans le temps que cet Astronome avoit fait cette observation l'an 1756. On a trouvé dans ses manuscrits l'observation même: il n' en avoit fait qu' une seule. S'il en avoit ajoutée même seulement une autre, comme il a fait pour tant d'autres fixes; il se seroit apperçu de son mouvement, & nous aurions eu connoissance 25 ans plutôt de cette nouvelle planète. Je donne ici un passage d'une lettre de M. Mechain sur cette découverte, où il m'annonça le résultat de son travail sur cet objet. Les éléments, qu'il avoit trouvés, ne s'en éloignoient que de 34', mais il y avoit à faire quelque correction, qui auroit encore diminué cette différence de plusieurs minutes. Il n'a pas recommencé ses calculs, parceque M. de la-Place avoit aussi calculé l' orbite sur les mêmes quatre observations, que le même M. Mechain lui avoit communiquées, & il avoit trouvé des éléments pas beaucoup différents des siens, que je

pro-

propose ici, & ceux-là s'accordoient également avec les mêmes observations, mais qui se sont trouvés d'accord avec l'observation éloignée de Mayer dans très-peu de secondes.

95. Cet accord est surprenant; mais j'ai fait voir, que c'est un hazard, puisqu'il est un accident fortuit que parmi les éléments différents, qui se trouvent également peu éloignés des observations employées pour les trouver, plutôt les uns que les autres se trouvent d'accord avec une observation si éloignée. M. Oriani excellent Géomètre & Astronome de Milan en a trouvé d'autres, que je rapporte aussi, en employant une autre méthode à quatre de ces observations, & quelqu'un de ces éléments s'éloigne beaucoup plus du correspondant de M. de la-Place, que ceux de M. Mechain, & de M. le Président de Saron: pourtant on y voit un accord admirable avec un très-grand nombre d'observations de deux ans & demi, & un accord même plus grand que celui de M. de la-Place avec cette éloignée de Mayer. Il faut lire en entier tout ce que j'ai mis dans ce Mémoire sur cet objet, sur l'éloignement, que deux petits arcs presqu'exactement en attouchement entr'eux peuvent acquérir dans leur continuation, sur l'effet des perturbations produites par l'action des autres planètes sur-tout dans l'orbite de celui-ci, qui surement feront éloigner beaucoup plus tous les deux systèmes d'éléments trouvés d'accord avec cette observation de celles qu'on trouvera après. J'y ai ajouté la manière propre pour avoir des connoissances plus assurées du mouvement de cette planète, même par rapport aux perturbations que son orbite doit éprouver: j'ai ajouté aussi l'inutilité de pousser les calculs des lieux des planètes jusqu'à l'exactitude, à l'exception de ceux, qui intéressent la Géographie, & la Navigation, avec beaucoup d'autres réflexions analogues.

96. Ce que nous pouvons avoir à présent avec plus de sureté, c'est la distance & la forme de l'arc actuel, dont la continuation & le total des éléments, qui y répondent, ne peut pas être connu que par un à-peu-près, & qui même doit être troublé: nous savons que la distance au soleil est à-très-peu de chose près double de celle de Saturne, & la période de 83 ans.

97. M.

97. M. Oriani a employé quatre observations, dont deux faites dans le temps de deux oppositions, & deux dans celui de deux conjonctions. Celles des oppositions sont plus sûres ; mais je fais remarquer, qu' on ne pourroit pas employer quatre oppositions consécutives pour y appliquer ma méthode, en faisant voir, que le problême y deviendroit indéterminé : je trouve, qu' on peut bien déterminer tout par trois seules observations de cette espèce, & j' en donne dans une note la méthode analogue à ma réduction du mouvement dans l' arc au mouvement dans la corde.

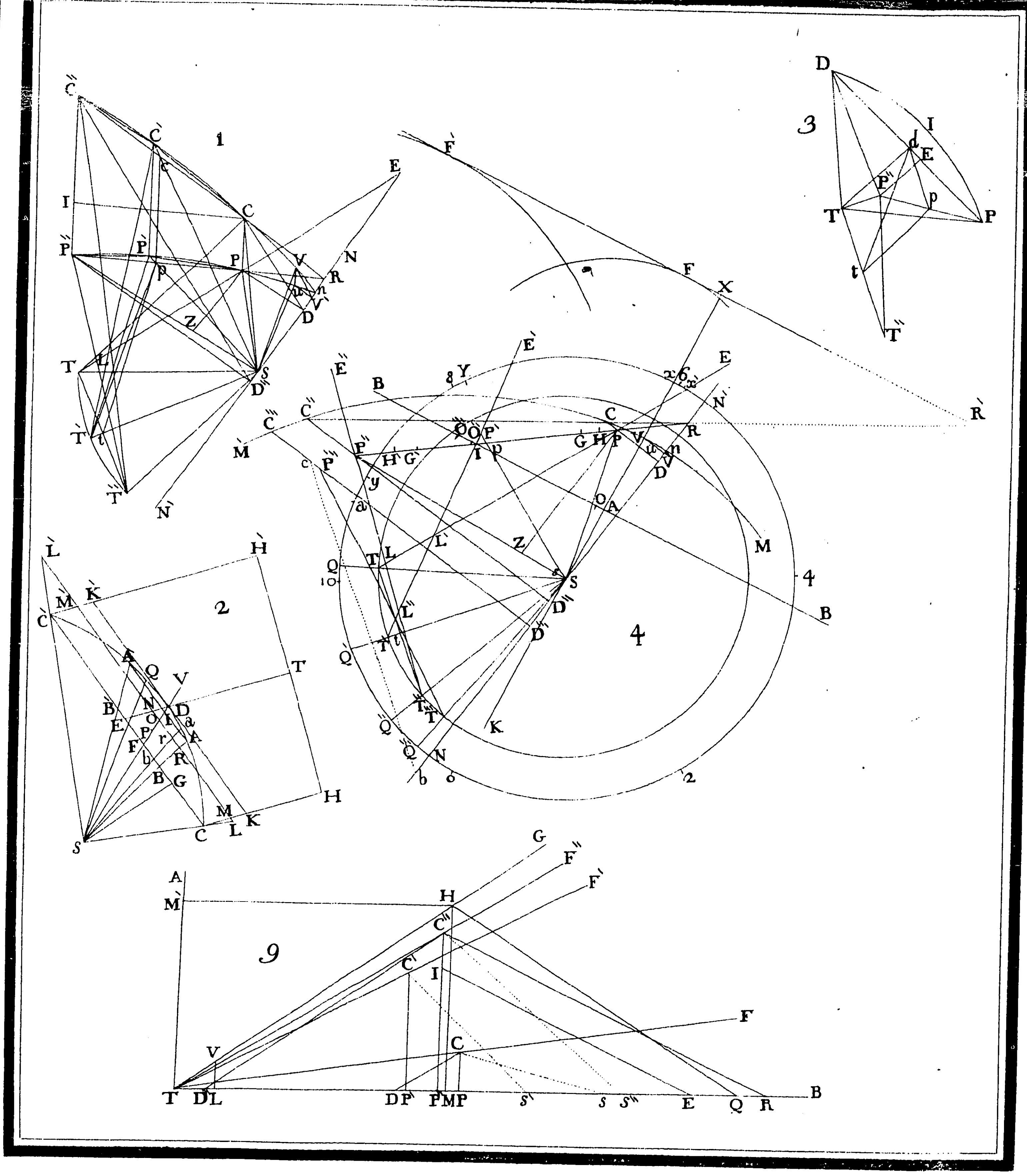
98. Je pris les éléments de M. de la-Place de la connoissance des temps pour l' an 1786. On les y a énoncés de manière à faire croire, que M. de la-Place a été le premier, & même le seul à s' occuper de cette planète en calculant son orbite. Je fais remarquer combien avant lui nous nous en étions occupés M. Mechain & moi avec tant de recherches faites tout de suite après sa découverte, comme on voit dans cet Opuscule. Au de-là de deux mois avant la dernière des observations employées par M. de la-Place pour commencer ses calculs M. Mechain avoit déjà trouvé par la première méthode de mon Mémoire V des éléments, qui s' accordoient avec les observations de presque deux ans dans peu de secondes. Ainsi M. de la-Place a bien été heureux de tomber sur des éléments, qui se sont trouvés si bien d' accord avec l' observation éloignée de Mayer, mais son vrai mérite est d' avoir trouvé par les grands méthodes analytiques une théorie générale propre à donner une orbite de cette planète assez bien d' accord avec les observations employées pour la déterminer, & d' avoir très-bien exécuté ses calculs : mais dans la détermination des éléments trouvés assez bien d' accord avec les observations du temps il a été prévenu par M. Mechain, qui les a déterminés avant lui en appliquant ses observations à mes méthodes.

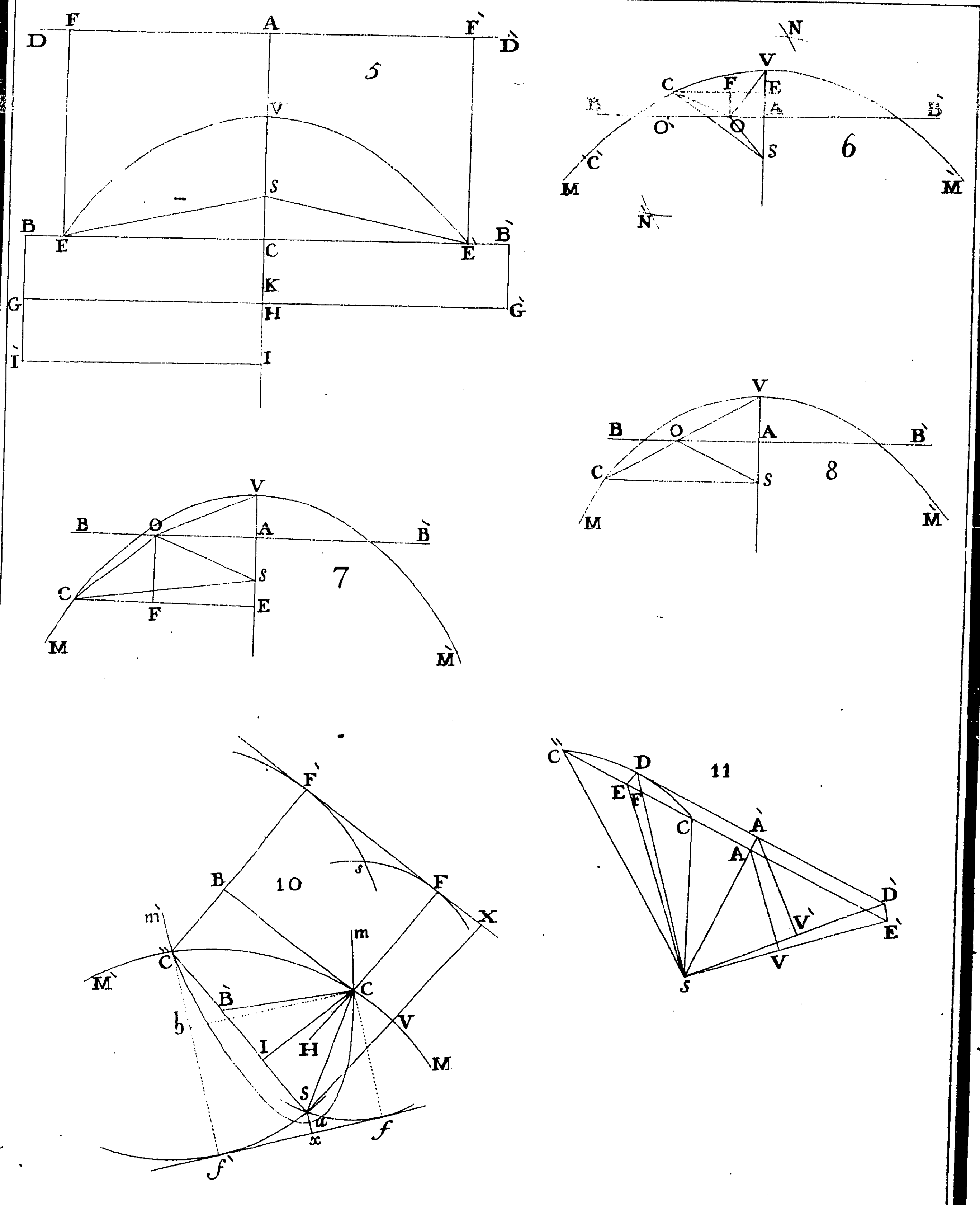
FIN DU TOM. III.

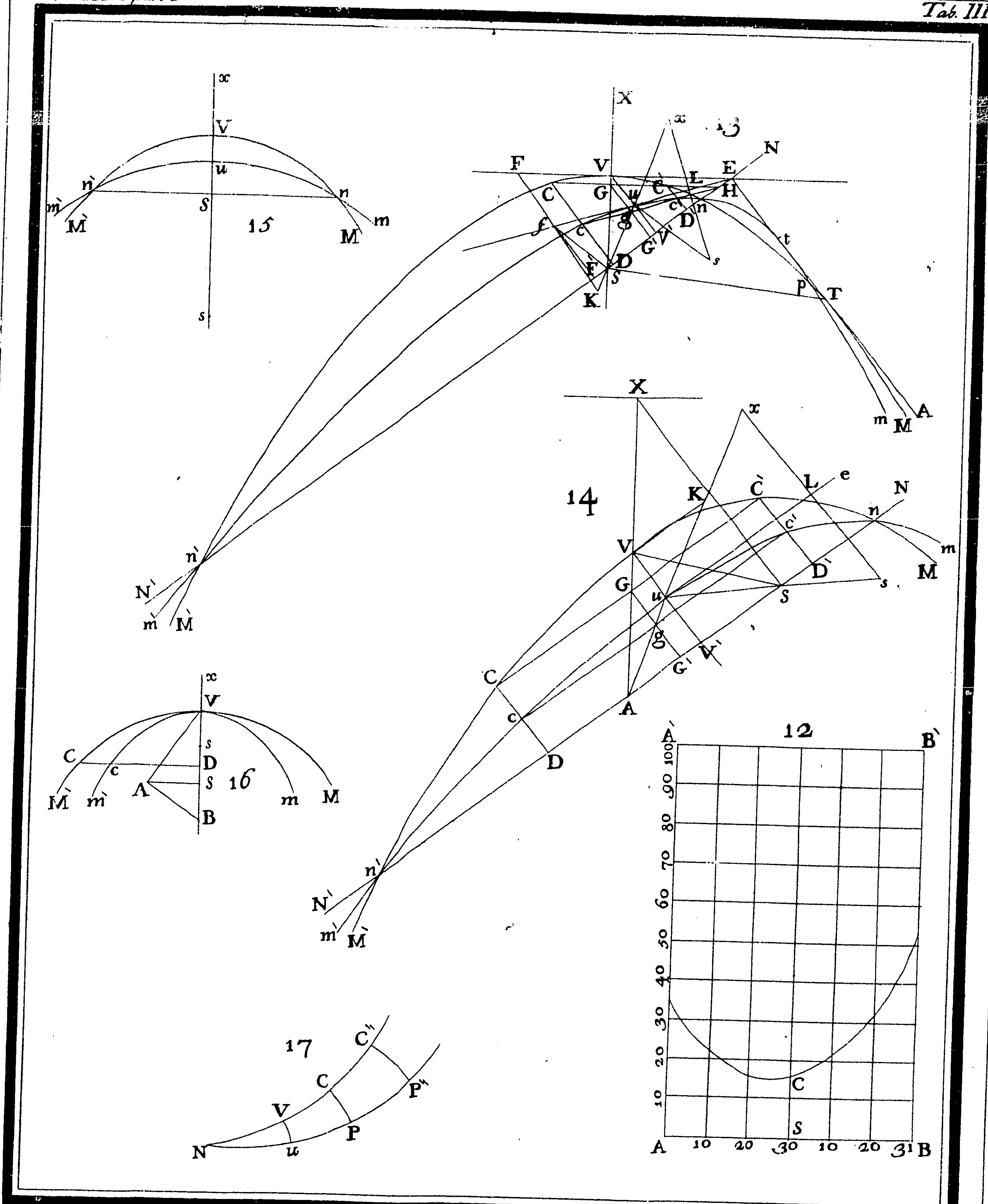
pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE.
28	15	$b - \frac{c^2}{12b}$	$bc^2 - \frac{c^2}{12b}$.
37	28	$1\frac{7}{10}$	$Ss = 1\frac{7}{10}$.
49	5	petite	grande
88	27	surpassera de bien peu	sera surpassé de bien peu par.
102	30	$1 : x =$	x :
135	11	seconde ... seconde	quatrième ... première.
182	9	*log.*	*log.d*.
188	5	colonne	division.
257	15	longitudes accompagnées de ses latitudes	observations.
321	16	fig. 1	fig. 1 Tab. XIII.
395	24	seconde	première.

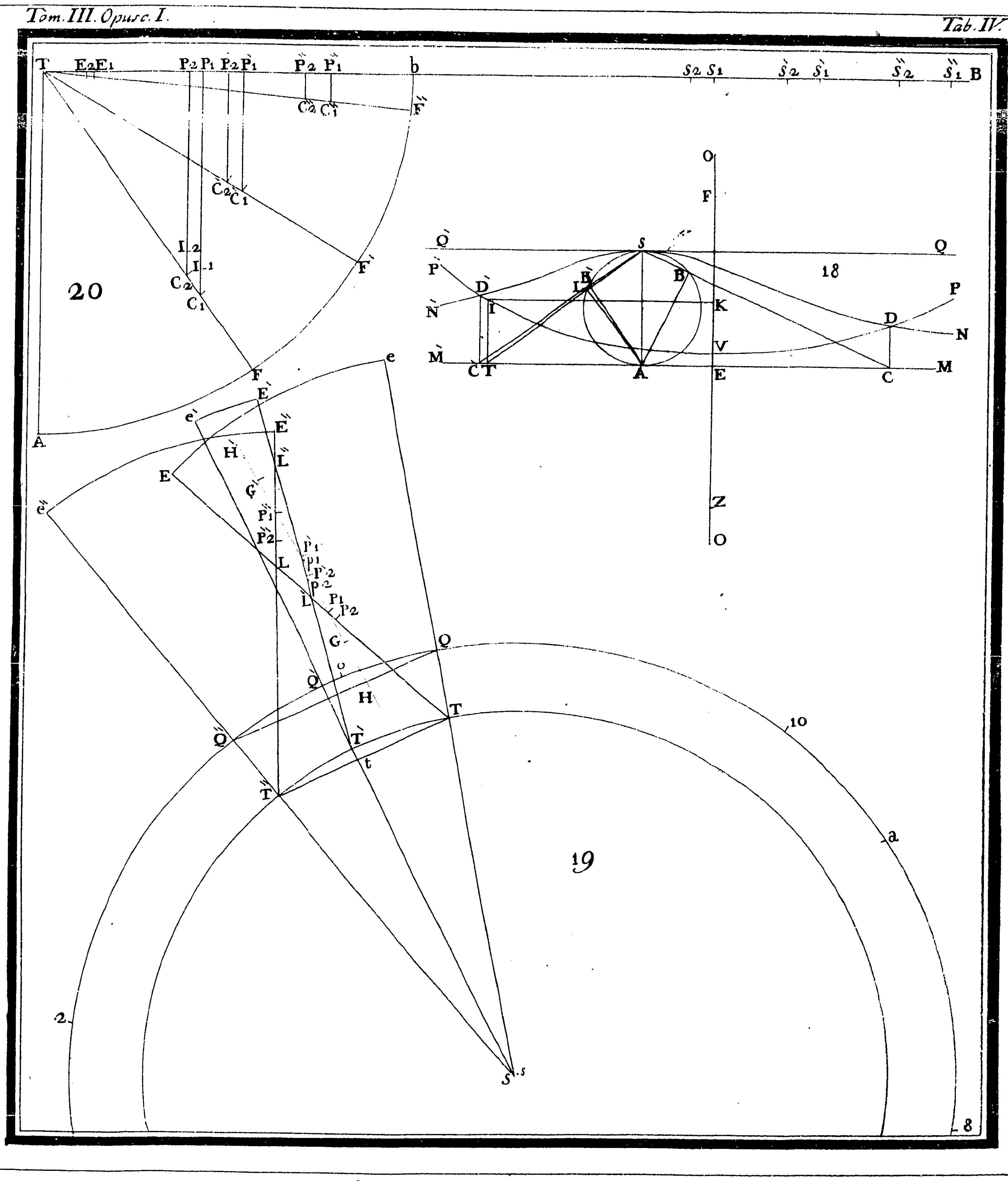
In Tabula I pag. 201 deprehensus est post impressionem errorculus sublapsus in logarithmo valoris v' divis. 3 colum. 2 lin. 6. Is erutus e summa quinque praecedentium debebat esse 8,513352, positus est autem 8,512352, omissâ in millesimis unitate, quæ fuerat adhuc addenda e summa notarum sequentium, & valor ipse v' positus est 0,03257, qui pro illo eodem logarithmo erroneo debebat esse 0,03254, & pro hoc correcto 0,03261, cum discrimine prorsus insensibili.

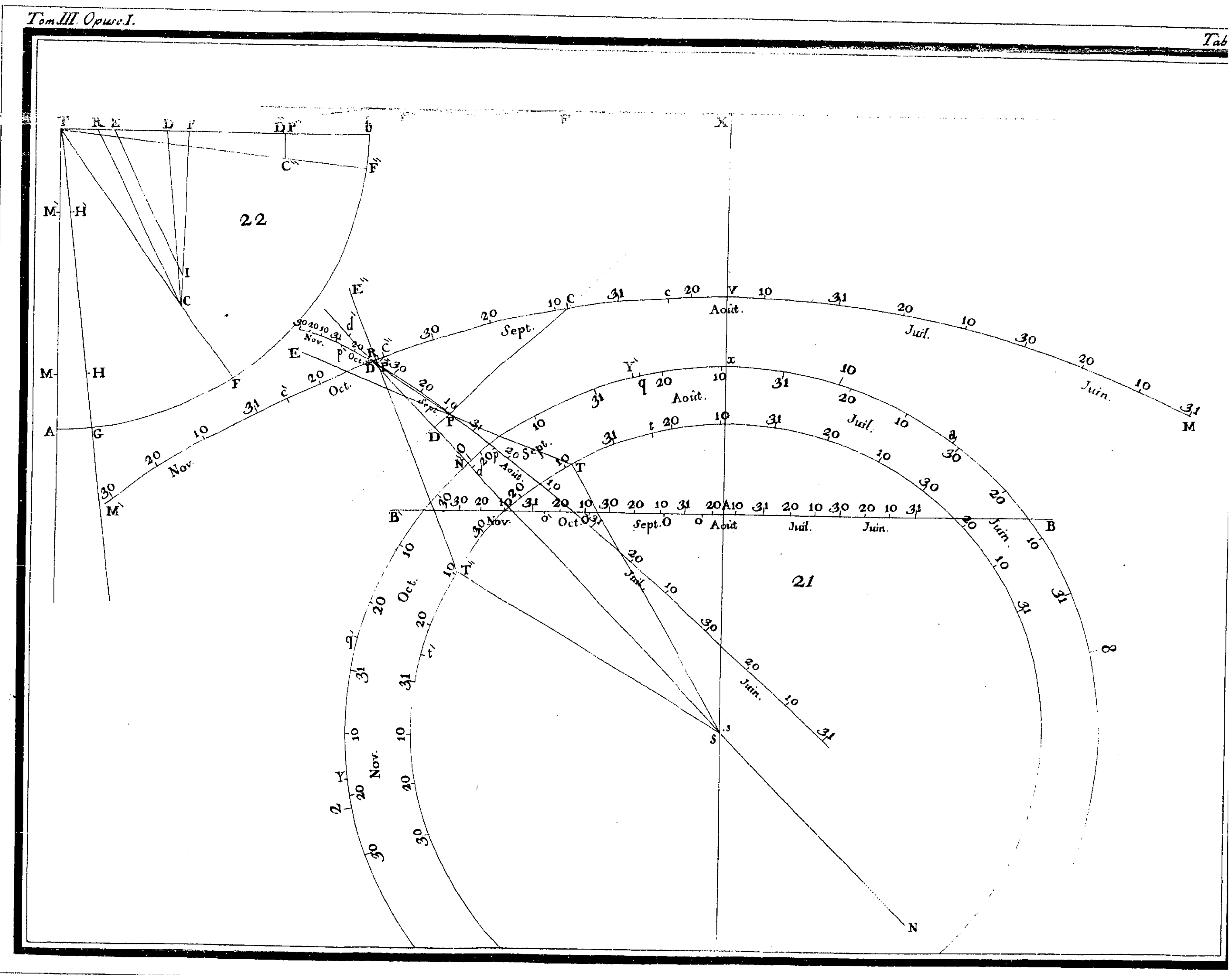
Valor ipse v' semel tantum occurrit repetitus pag. 204 in Tabula IV col. 1 divis. 3 lin. 1 sine ullo uspiam ejus numerici valoris usu: logarithmus ipsius recurrit in Tabula II bis, & in Tab. IV semel. Inde addenda esset unitas in millesimis logarithmi postremi columnæ 2 divis. 3 Tab. I, logarithmorum linearum 1, 2, 6, 8, 9 columnæ 1, & 2 divis. 1 Tab. II, ac in postremo colum. 1 Tab. IV, qui ibi pertinet ad $P'p$. Is debebat exhibere 0,01337, exhibuit autem 0,01334, mutatione itidem insensibili, cujus usus occurrit in columna sequenti, sed nullum ibi sensibilem errorem parit. Reliqui logarithmi erronei exhibuerunt valores numericos tam linearum, quam angulorum eosdem prorsus, quos accurati exhibuissent sine ullo errore ne in postrema quidem decimalium nota: quamobrem reliqua omnia remanent illæsa sine ulla mutatione tam in Tabulis, quam in toto textu paragraphorum omnium, in quibus eæ explicantur. In eo ibi fortuna favit, quod nihil eorum, in quorum gratiam ii calculi intermedii instituebantur, corruperit is error sublapsus, qui si alibi obrepsisset, poterat utique omnia pervertere.

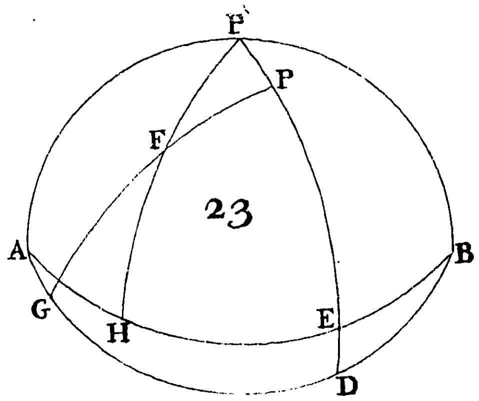

1
2
3
4
9

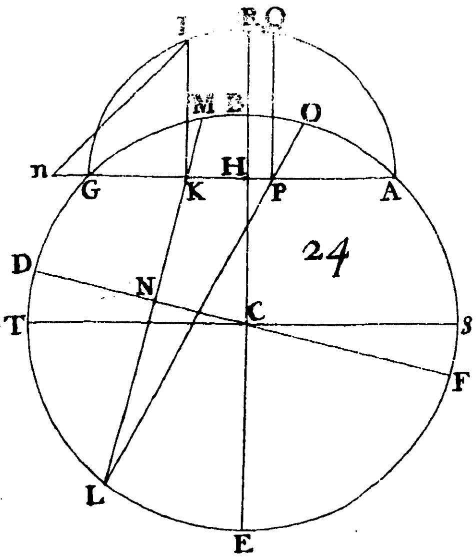

5
6
7
8
10
11


15
13
14
16
17
12

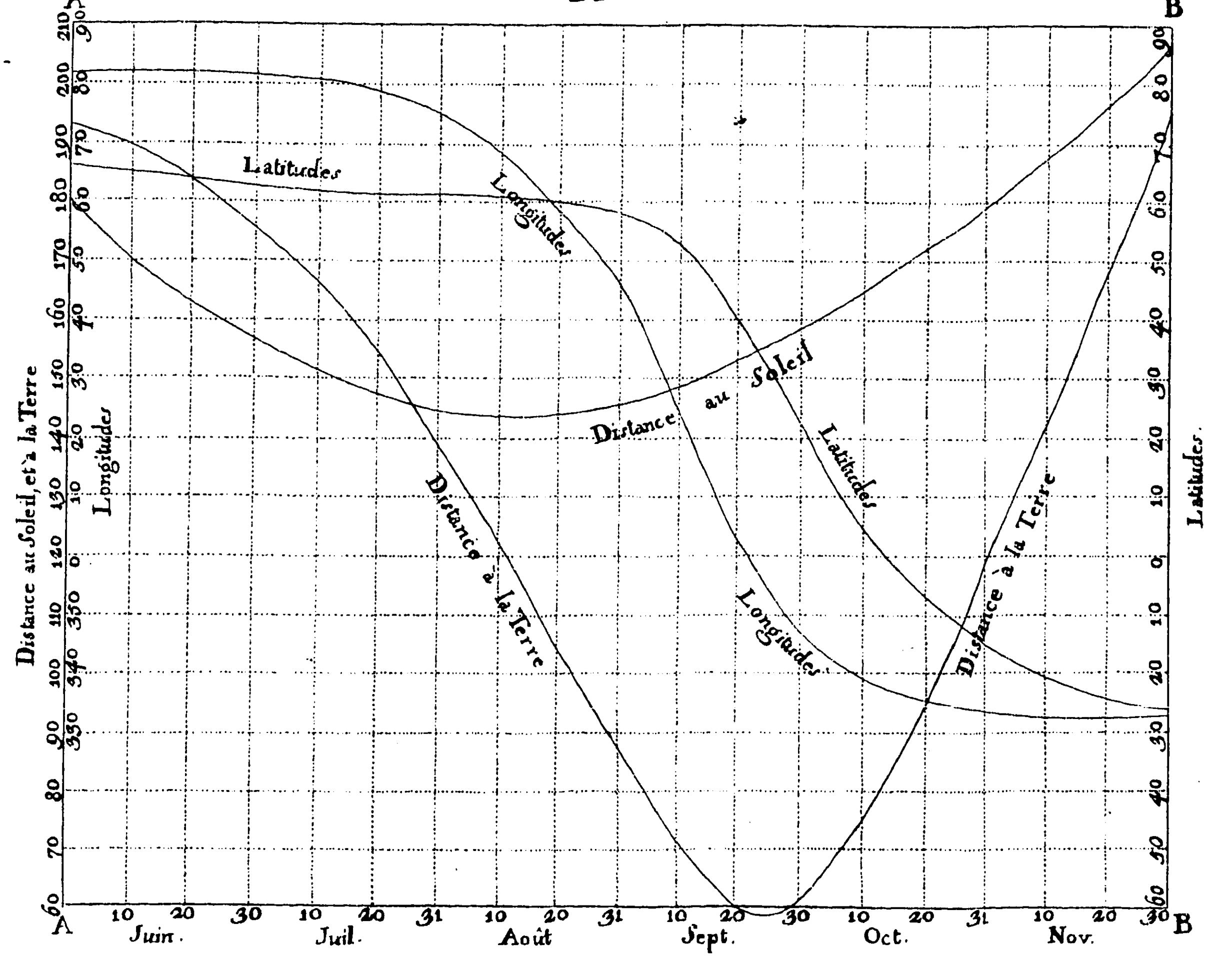

20
18
19

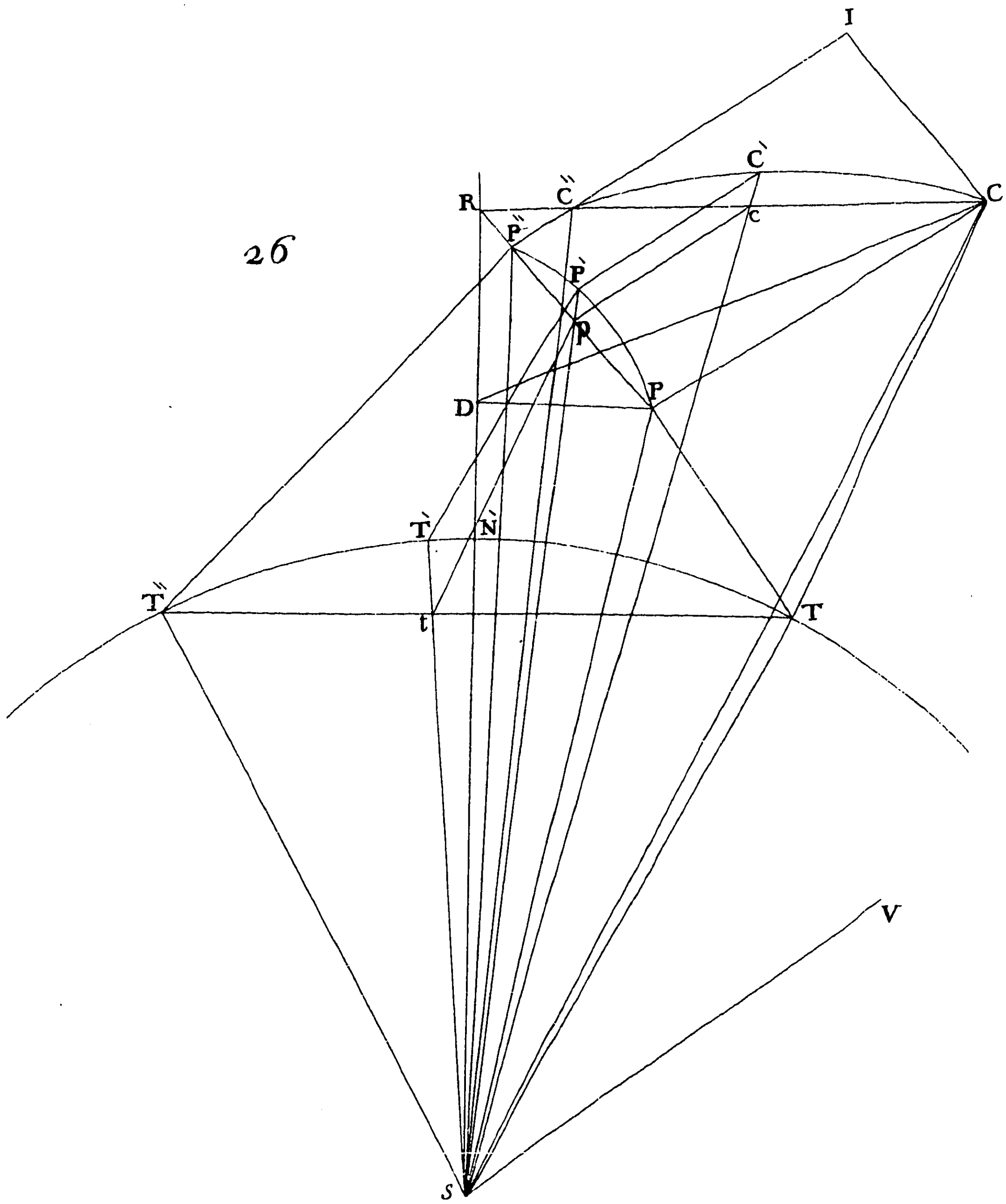


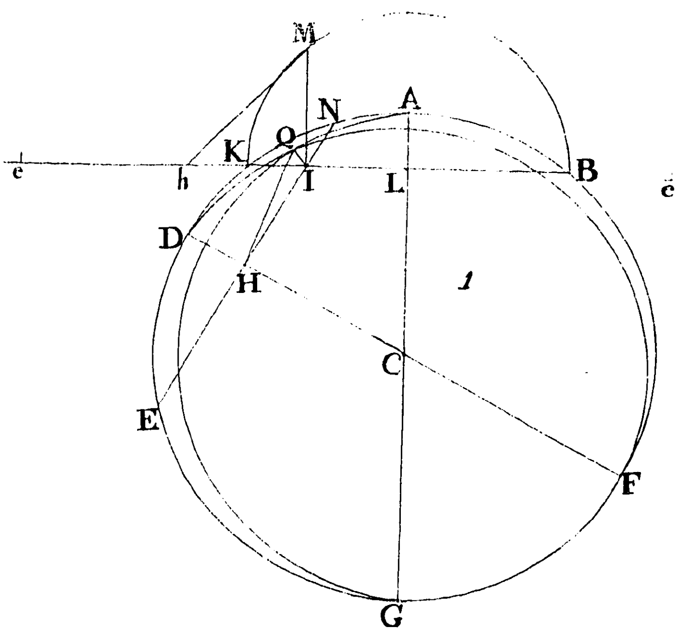

23
P
P
F
A
B
G
H
E
D

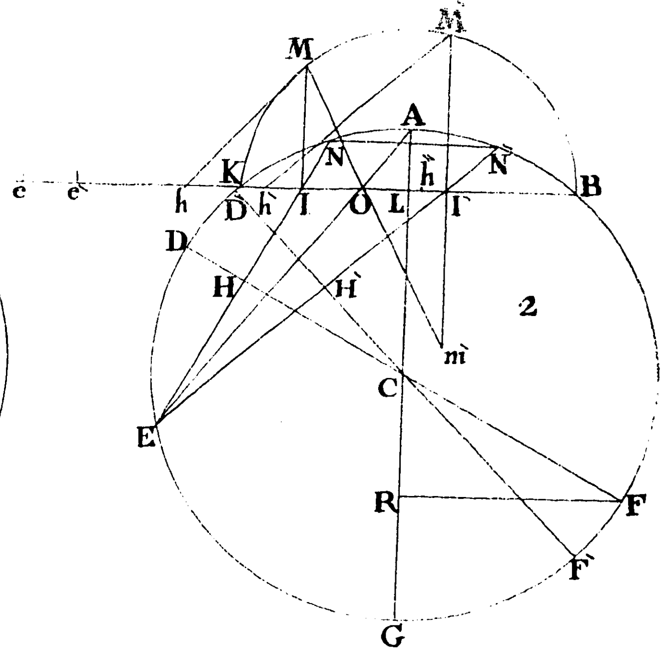

24
I
R Q
M B
O
n
G
K
H
P
A
D
N
C
T
S
F
L
E

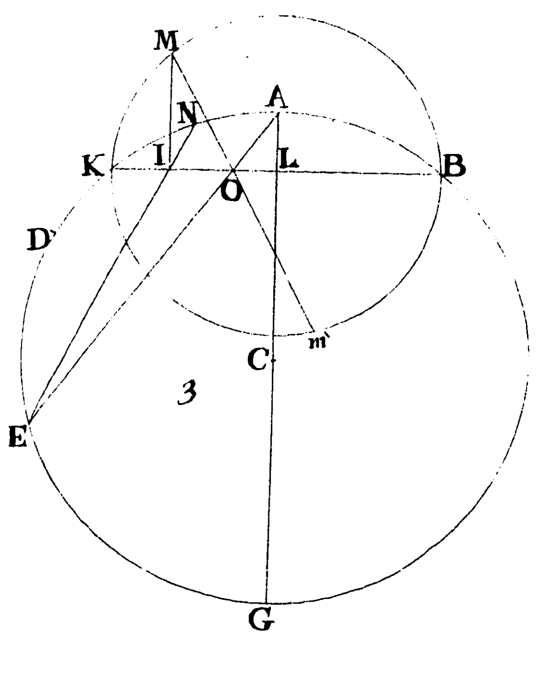
25

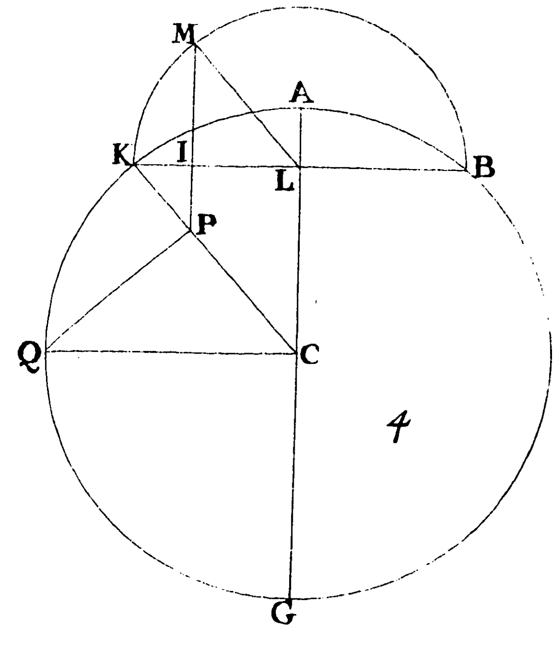

A'
B'
A
B
Latitudes
Longitudes
Distance au Soleil
Distance à la Terre
Distance au Soleil, et à la Terre
Juin.
Juil.
Août
Sept.
Oct.
Nov.

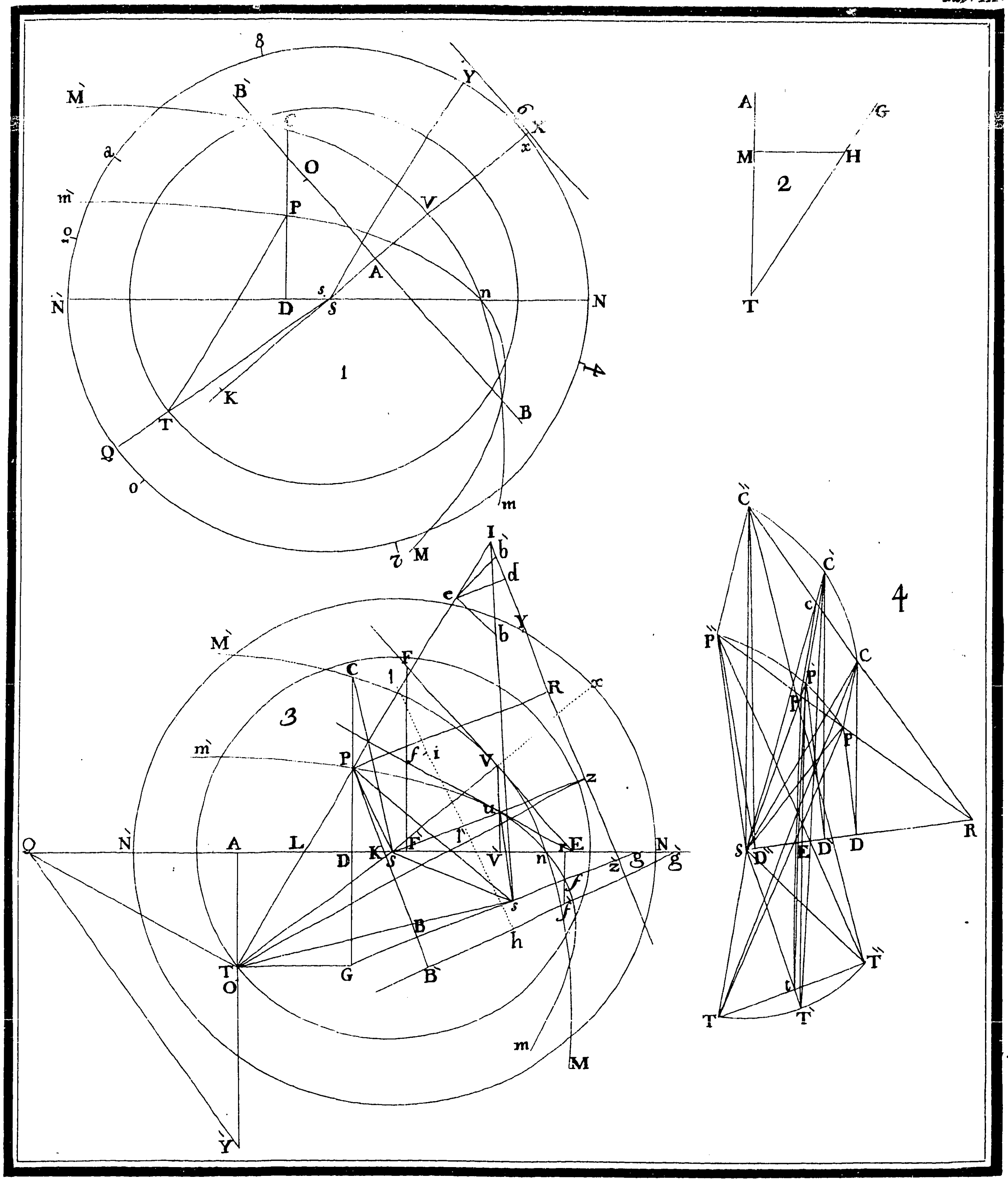

26
I
C''
C'
C
R
c
P''
P'
p
P
D
T'
N'
T''
t
T
V
S

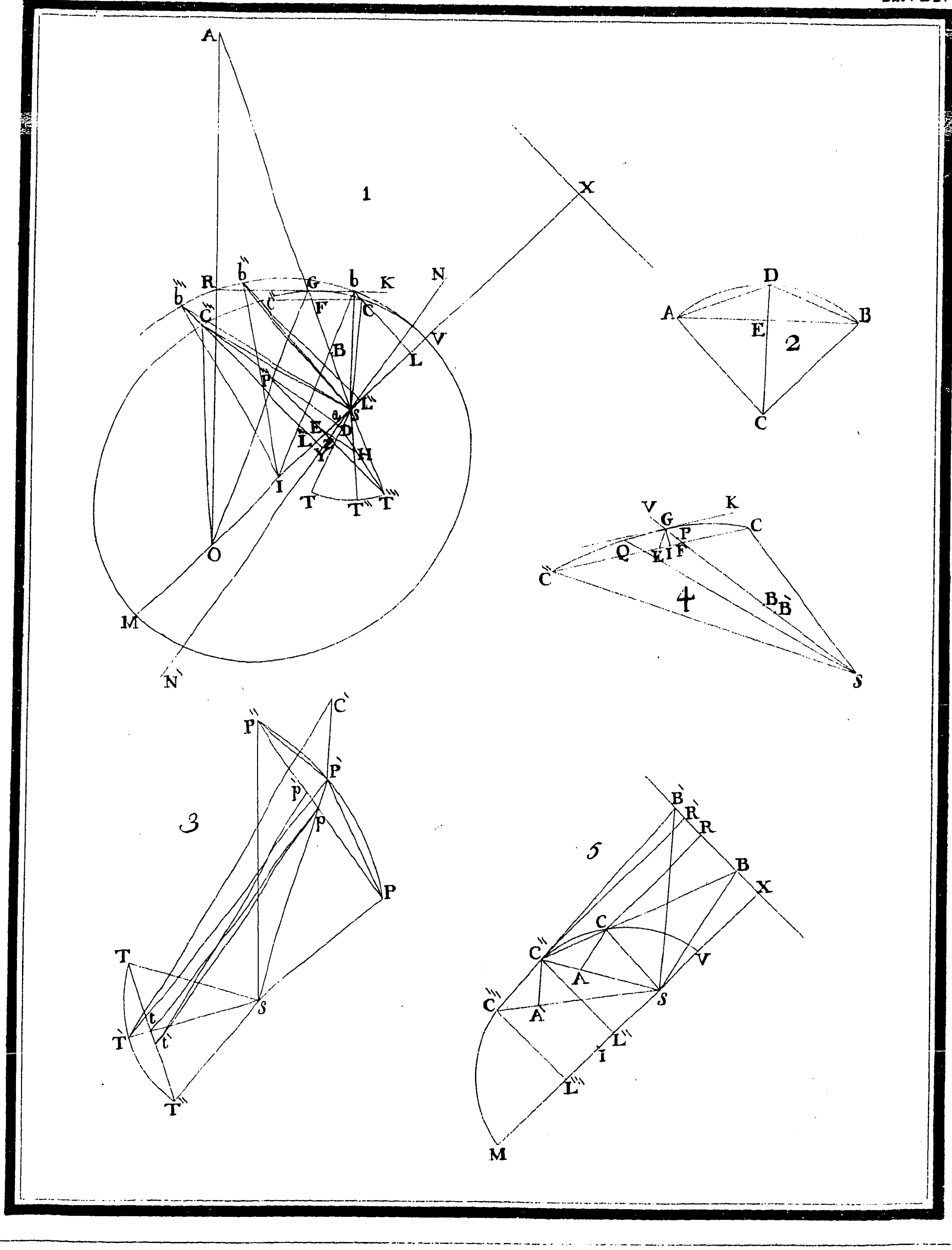

M
N
A
Q
K
e
h
I
L
B
D
H
1
C
E
F
G

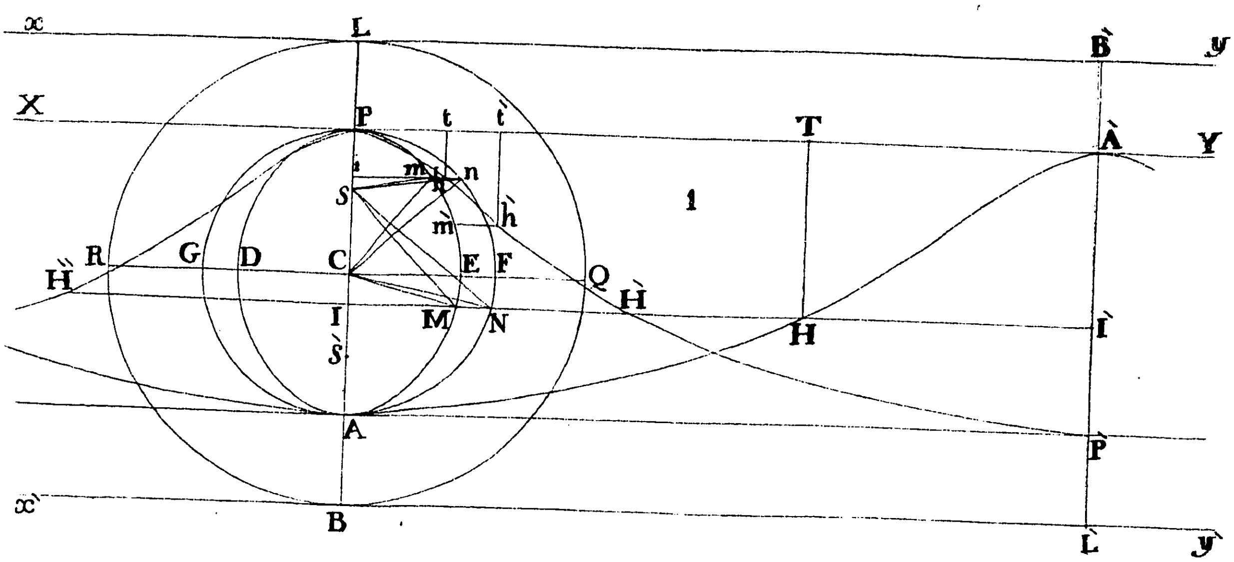

M
M`
A
N
N`
K
B
e
e
h
D`
h`
I
O
L
I`
D
H
H`
2
m`
C
E
R
F
F`
G

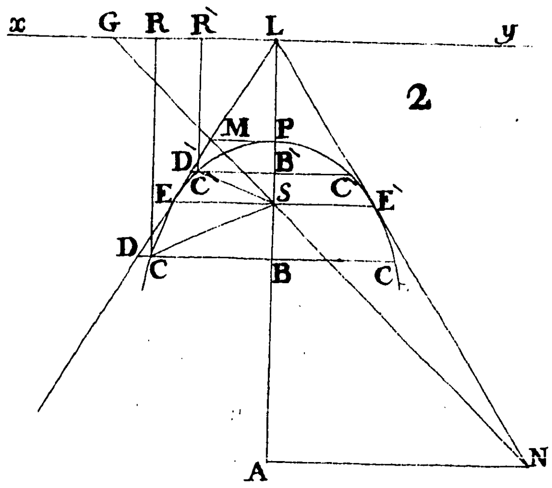

M
N
A
K
I
L
B
O
D`
C
m`
3
E
G

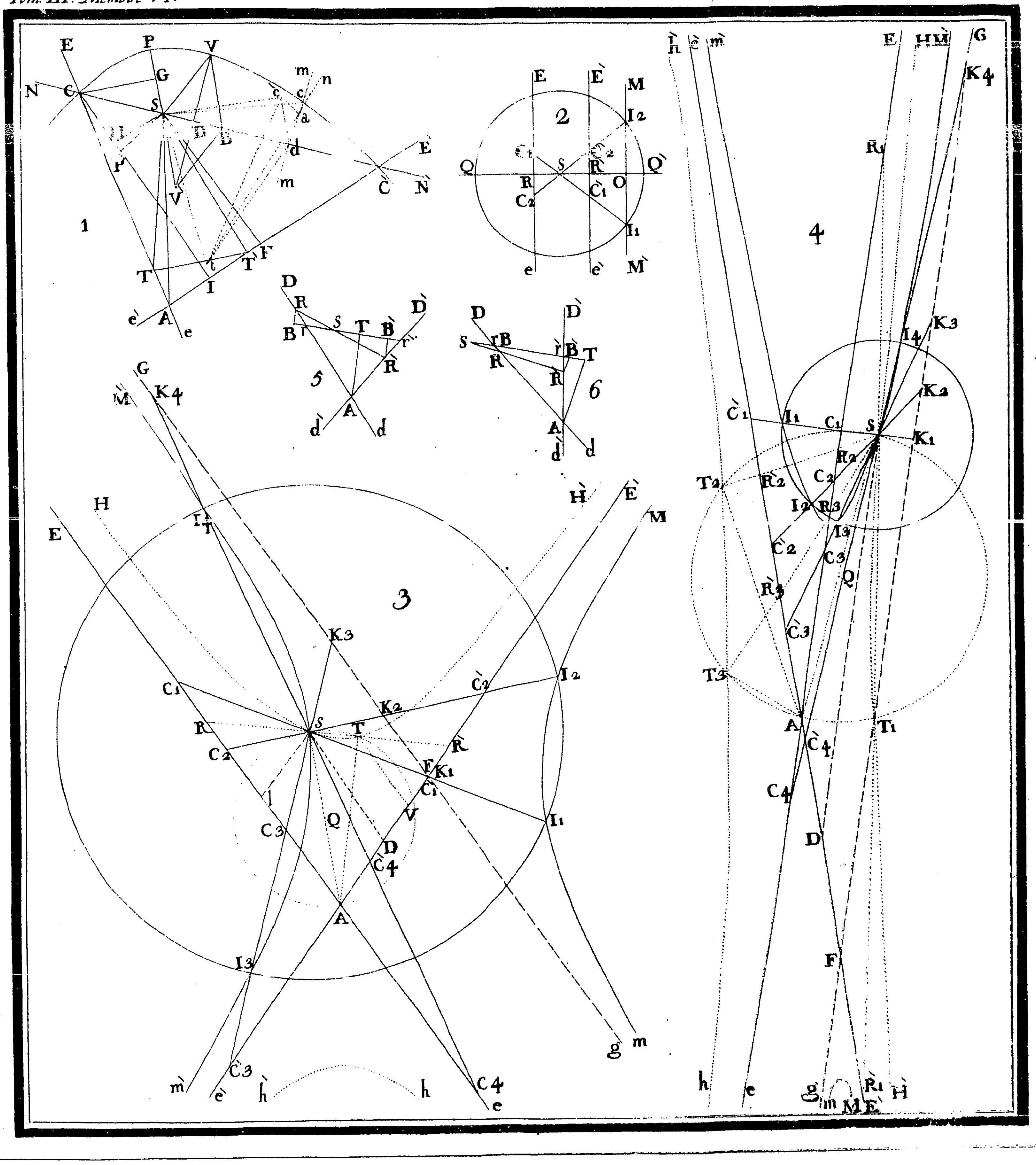

M
A
K
I
L
B
P
Q
C
4
G

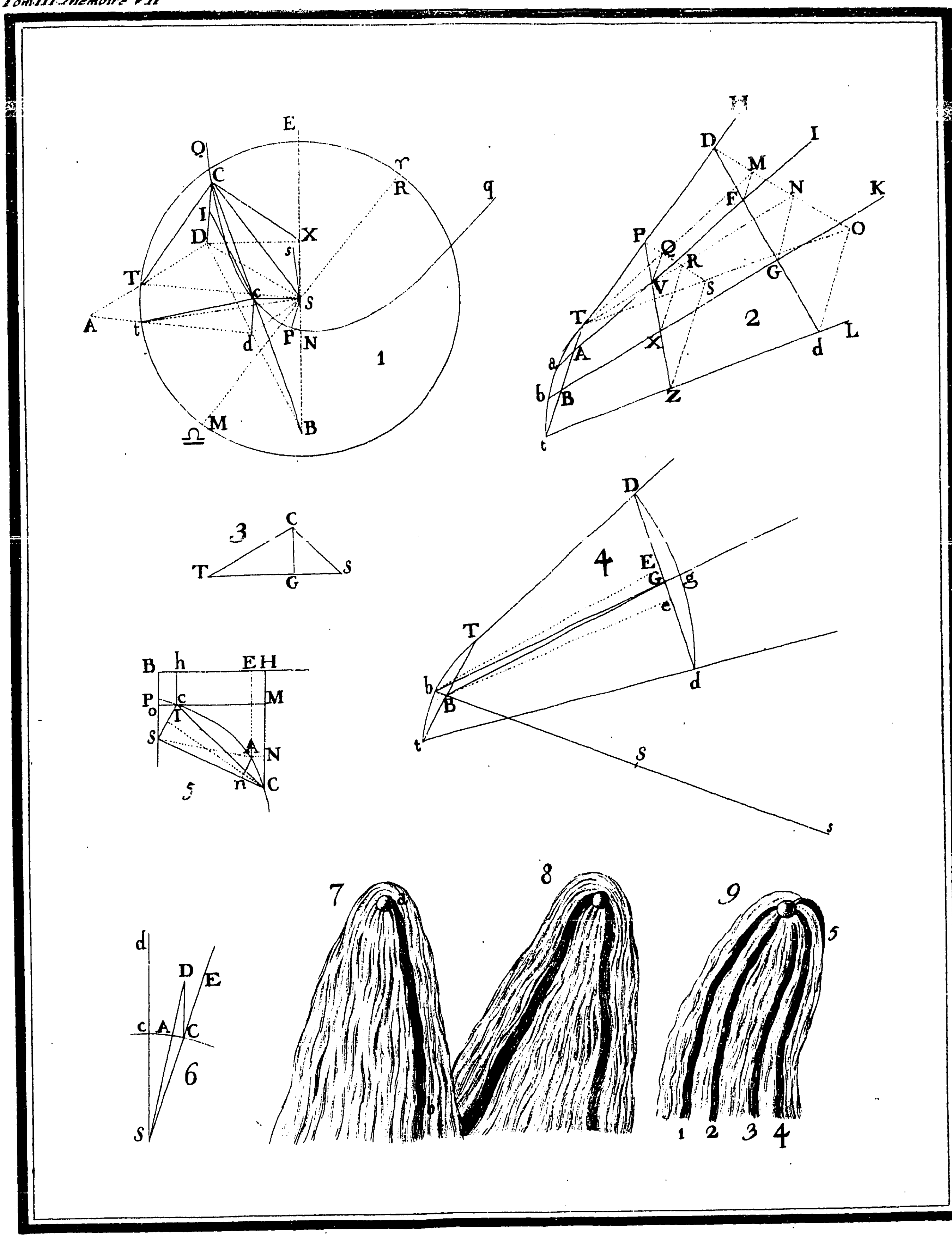


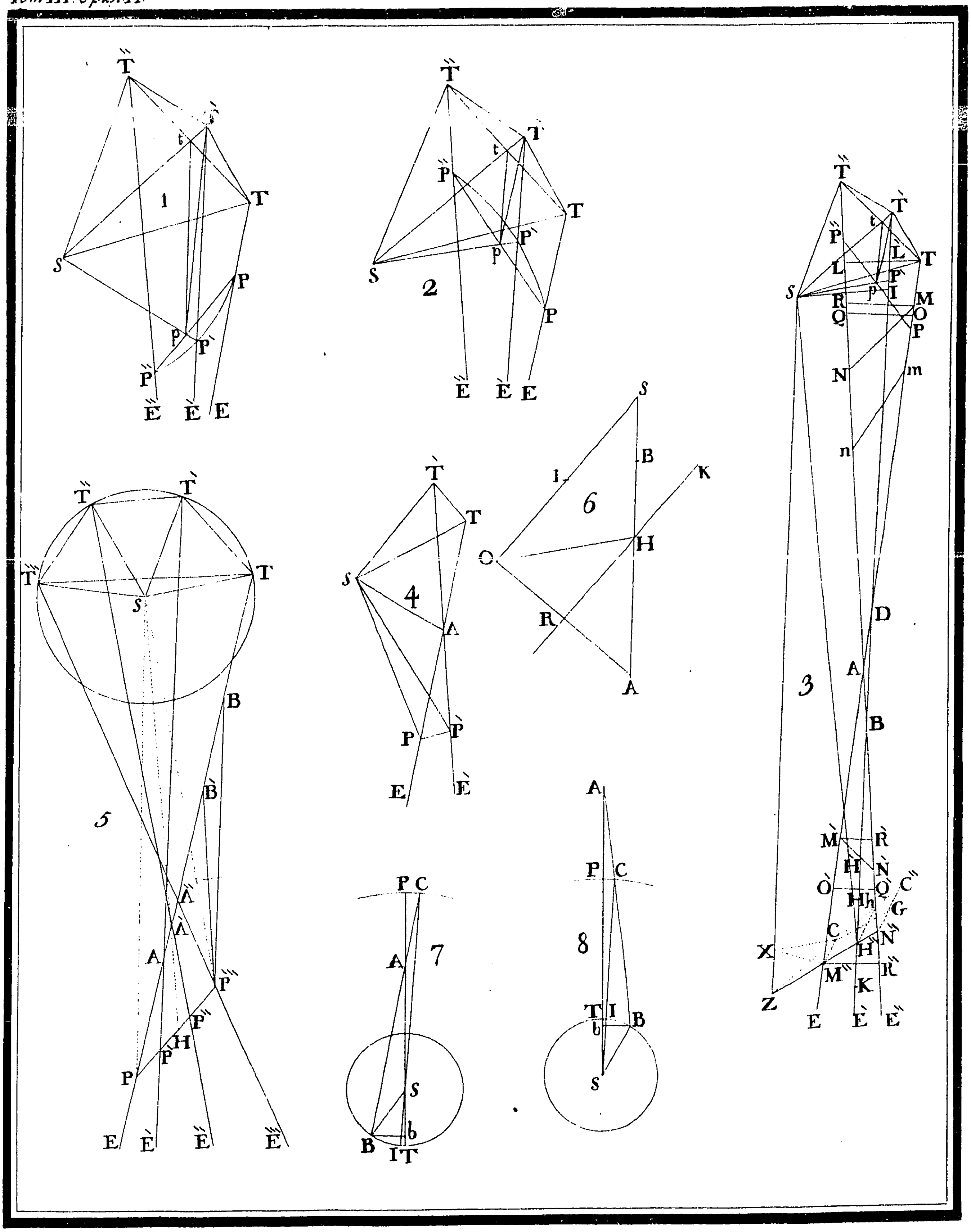

1
2
3
4
5

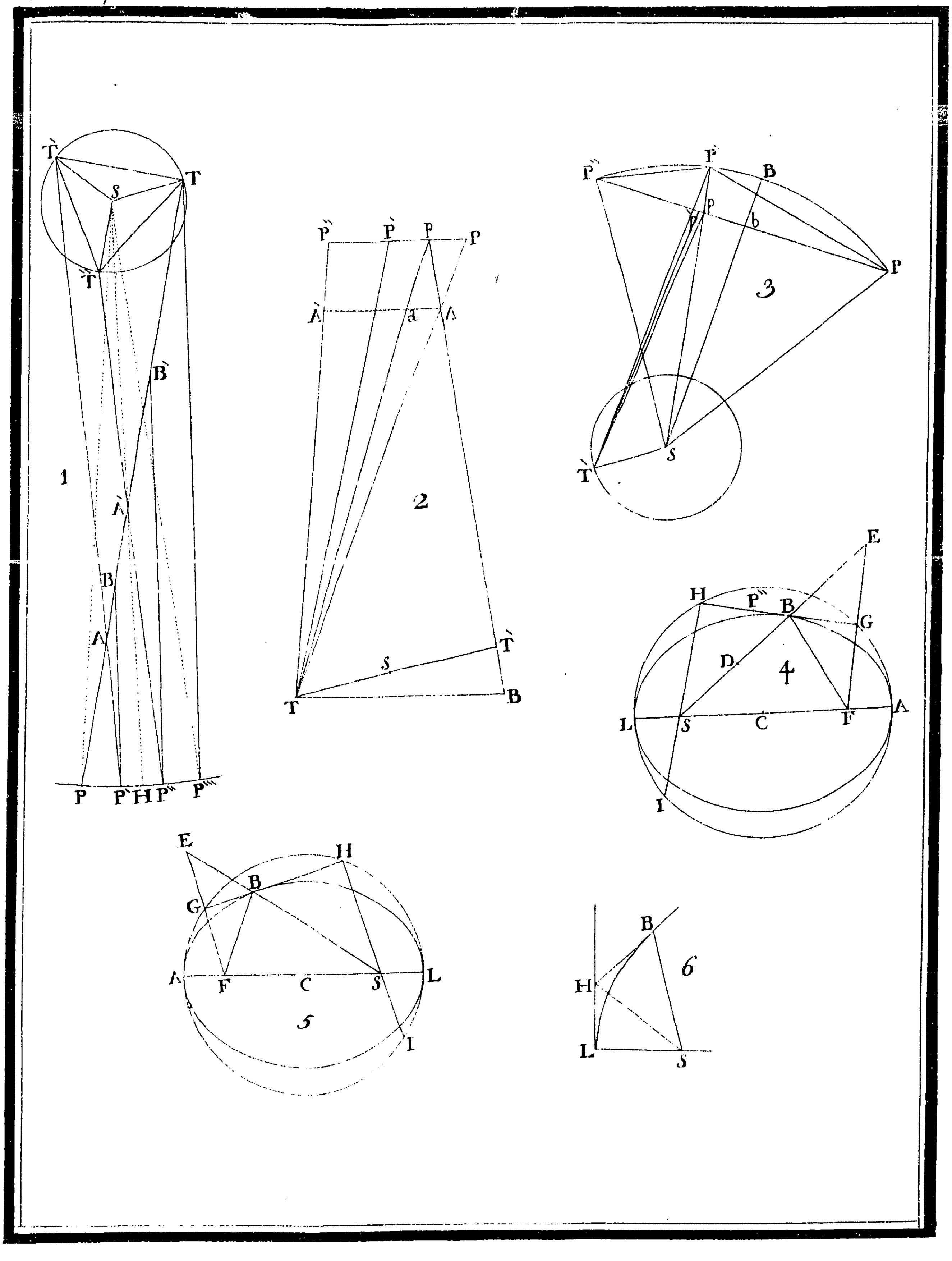

1
x L B̀ y
X P t t̀ T À Y
S m n h h̀ m̀
H̀̀ R G D C E F Q H̀
I M N H Ì
S̀
A P̀
x̀ B L̀ ỳ


2
x G R R̀ L y
M P
D̀ B̀
F C̀ S C̀ È
D C B C
A N




1
E Q C ♈ R q I D X T A t c S d P N M ♎ B
2
H D I M F N K P Q R O V S G T A X L a d b B Z t
3
C T G S
4
D E G g e T b B d t S s
5
B h E H P c M o I S A N n C
6
d D E c A C S
7
8
9
1 2 3 4 5


1
2
3
4
5
6
7
8


1
2
3
4
5
6
T
S
P
B
A
H
E
G
D
C
F
L
I