11ª = 2860

~~64 9 … 19018~~

~~74 — 6~~

ANDREÆ TACQUET
SOCIETATIS JESU

TRIGONOMETRIA PLANA
NEC NON

TRIGONOMETRIA SPHÆRICA
ROGERII BOSCOVICH

Ejusdem Societatis Jesu,

ET

SECTIONES CONICÆ,
GUIDONIS GRANDI

Cum amplissimis Annotationibus, & Additamentis

OCTAVIANI CAMETI.

TOMUS SECUNDUS.

ROMÆ, MDCCXLV.
Sumtibus VENANTII MONALDINI Bibliopolæ in Via Cursus.

Typis HIERONYMI MAINARDI in Platea Agonali.
Superiorum facultate.

P. ANDREÆ TACQUET E SOCIETATE JESU

Trigonometriæ liber unicus.

CAPUT PRIMUM.

SINUUM DEFINITIONES.

Quid Sinus, Tangentes, Secantes, & quomodo inveniantur.

Sinus, Tangentes, Secantes sunt rectæ quædam lineæ, quarum in analysi triangulorum in Geometria practica in Astronomia, aliisque usus est maximus.

Sinuum Definitiones.

Esto quadrans circuli ACE, cujus circumferentia CE divisa sit in partes 90 æquales, quas Gradus vocant, & singuli gradus in partes æquales 60, quæ vocantur Minuta, sic ut totus arcus CE divisus sit in partes æquales, seu minuta 5400. Ex centro A ad singulos gradus, & minuta emittantur rectæ, quarum unam designo litteris AF. Constituentur hoc facto anguli 5400, quibus subtenduntur arcus totidem uno sese invicem minuto excedentes. Ex his unum designo litteris CAF. Primus angulus erit minuti unius, secundus duorum minutorum, & sic porro; sexagesimus minutorum 60. hoc est gradus unius, & sic deinceps: postremus EAC est graduum 90, adeoque rectus. Tandem per minuta singula ducantur rectæ ad semidiametrum AC perpendiculares, quæ proinde etiam ipsæ numero erunt 5400 computando radium AE, quarum unam designo litteris FX. Hæ appellantur sinus arcuum, & angulorum uno minuto sese mutuo superantium.

1. Igitur arcus ex gr. FC & anguli FAC ab ipso subtensi sinus est recta FX, quæ ab F termino arcus perpendicularis est radio AC.

2. Pars radii XC inter arcum, & sinum intercepta est sinus versus ejusdem arcus FC, & anguli FAC.

3. Sinus complementi, sive sinus secundus arcus FC, & anguli FAC est FI sinus illius arcus, nempe FE, qui quadrantem complet, adeoque & sinus illius anguli, nempe FAE, qui cum priore FAC complet rectum CAE.

4. Sinus totus, sive radius est semidiam. AE.

5. Arcus QF quadrante major eumdem habet sinum FX, quem arcus minor CF, qui cum eo semicirculum constituit: & angulus recto major FAQ eumdem habet sinum FX, quem angulus acutus FAC, qui cum eo efficit duos rectos.

Fig. 2. 6. In omni triangulo rectangulo BAC, latus BC recto angulo oppositum, est sinus totus, sive radius: reliqua vero latera sunt sinus angulorum, quibus opponuntur; latus nimirum AB est sinus anguli O, latus AC sinus anguli R.

Nam si centro C intervallo CB describatur quadrans FBL, quia latus angulo recto oppositum CB, est jam radius quadrantis erit CB sinus totus per definit. 4; latus vero AB per defin 1. erit sinus anguli O, seu FCB. Rursum centro B intervallo BC descripto quadrante QCI patet per eamdem defin. 1 AC esse sinum anguli R, sive QBC. Ex quo jam nunc apparet, quantus sinuum futurus in Trigonometria sit usus.

Definitiones Tangentium, & Secantium.

Fig. 3. Esto circulus BXZ, cujus quadrans BX intelligatur, ut supra, divisus in gradus, & minuta. Hunc tangat recta infinita BR, & ex centro A ad contactum B ducatur radius AB, qui (a) cum tangente constituet angulum rectum. Cogitentur deinde per quadrantis gradus singulos, & minuta ex centro A emitti rectæ AF, AL &c. quo facto constituentur anguli FAB, LAB &c. ad 5400, ut supra, quibus subtenduntur totidem arcus BC, BO &c.

(a) Per 18: l. 3.

7. Arcus igitur BC, & anguli BAF tangens est recta BF, secans vero AF, sinus totus AB: similiter arcus BO, & anguli BAL tangens est BL, secans AL, & sic deinceps,

8. Arcus quadrante minor BO, & arcus quadrante major ZO cum priore BO faciens semicirculum eamdem habent tangentem BL, & secantem AOL.

9. In omni triangulo rectangulo FBA respectu acuti anguli FAB tangens est FB ipsi oppositum, latus alterum AB ipsi adjacens

jacens est sinus totus, seu radius; hypotenusa vero AF, seu latus recto angulo oppositum est secans. Patet ex definit. 6. & propositione 15. lib. 3. si centro A per B describatur circulus.

Pari modo respectu alterius acuti anguli AFB tangens est AB, sinus totus, seu radius est FB, secans FA. Patet ex defin. 8., & prop. 16. lib. 3. si centro F per B circulum descripseris.

Hypotenusa igitur utriusque acuti secans est, ac proinde cum hi anguli inæquales sunt, diversis numeris in tabulis sinuum hypotenusa exprimitur.

Ceterum notandæ in primis sunt, ac probe intelligendæ definitiones 6, & 9. ut Sinus, Tangentes, secantes ad usum deducantur.

Sinuum, Tangentium, Secantium inventio.

INvenire Sinus, Tangentes, Secantes, est earum proportionem ad radium circuli aut veram, aut a vera insensibiliter aberrantem numeris exprimere. Ad eum finem intelligitur circuli radius in plurimas æquales partes divisus, ut in 100000, aut 1000, 0000. Tum Geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus singuli Sinus, Tangentes, Secantes contineant, quæ inventio, ut postea ostendam, eo accuratior futura est, quo plures in partes radius circuli divisus assumetur. Hoc sinuum artificium primi excogitarunt Hipparchus, & Menelaus, horum inventa deinde contraxit, & expolivit Ptolemæus, & novissime Joannes Regiomontanus perfecit, qui ad radium 10000000, Sinus omnium graduum, ac minutorum quadrantis supputavit. Denique horum omnium conatus egregios Clavius noster, Pitiscus, Rheticus, aliique complures illustrarunt. Quamvis autem ab iis omnibus præclare hoc in genere laboratum sit, quia tamen prolixa hujus doctrinæ tractatio est, optandum sane videtur, ut facilior ea studiosis, atque expeditior, si fieri potest, efficiatur. Quare animus mihi est, artificium, quam utile, tam pulchrum, & clarius, quam ceteri fecerunt, & brevius exponere. Rem omnem tribus Porismatis, & sex Problematibus absolvam. Sit ergo

Porisma I.

Fig. 4. *Dato sinu (FC,) cujusvis arcus (FB,) complementi sinum (FO) invenire.*

(a) Per 47.1.1. Ducto radio AF, quadratum AF (*a*) æquatur quadratis FC, AC. Quare si ex quadrato radii, seu sinus totius auferas quadratum sinus dati FC, remanet quadratum AC, hoc est quadratum FO. Igitur radix quadrata inde extracta dabit rectam FO sinum complementi quæsitum.

Porisma II.

Fig. 5. *Dato sinu (CF,) cujusdam arcus (IC,) sinum semisseos ejusdem arcus invenire.*

Arcui IC subtende rectam IC, ad quam e centro perpendicularis sit AL, quæ tam (*b*) rectam IC, quam arcum (*c*) ILC bisecabit, ac proinde IO est sinus arcus LI semisseos arcus ILC.

(b) Per 3.1.3. (c) Per 3.1.3.

Ex sinu dato CF per præcedentem inveniatur sinus complementi CQ, seu FA, quo ablato ex sinu toto AI, nota fit FI. Nota igitur est summa quadratorum IF, CF, hoc est (*d*) quadrati IC. Ex quo eliciatur radix quadrata dabit ea rectam IC, ejusque semissis sinum quæsitum IO.

(d) Per 47.1.1.

Porisma III.

Fig. 6. *Datis sinibus (LX, FR) duorum arcuum (LB, FB) quorum differentia non sit major 45 minutis, sinum (IS) arcus cujusdam medii invenire.*

Ducatur perpendicularis FOQ. Erunt LQ, IO differentiæ sinuum LX, IS ad sinum FR. Et quia arcus LF est non major 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF sensibiliter a rectis lineis, ac proinde LFQ, IFO assumi possunt ut rectilinea triangula. Quia ergo IO est parallela LQ erit (*e*)

(e) Per cor. 2. p. 4.1.6.

ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia LF	ad arcus medii, & minimi differentiam IF
ita sinuum datorum maximi, & minimi differentia LQ	ad sinus medii, & minimi differentiam IO

Quare cum hujus analogiæ tres primi termini sint noti, etiam quartus IO innotescet, quem si addamus sinui dato minori FR, notus erit medius quæsitus IS.

Lemma.

Semissis subtensa (BC) alicujus arcus (CFB) est sinus semisseos ejusdem arcus. Fig 7.

Ex centro A ducatur radius AGF ad CB perpendicularis. Erit ergo CG per defin. 1. sinus arcus CF, Atqui per 3. lib. 3. CG est semissis CB, & per 30. lib. 3. CF semissis CFB. Ergo &c.

Problema I.

Sinum arcus 45 graduum invenire.

Quadrantem CFB subtendat recta CB, ad quam ex centro A sit perpendicularis AGF. Quoniam igitur arcus CB 90 grad. (*a*) bisectus est in F, erit FB arcus graduum 45, cujus sinus est BG. Deinde ergo ob æqualitatem laterum AC, AB anguli (*b*) quoque ACB, ABC æquales sunt, qui vero ad A rectus erit. Ergo (*c*) ABC, seu ABG semirectus. Est autem (*d*) AGB rectus; reliquus ergo BAG (*e*) semirectus est, ideoque par ipsi ABG. Ergo latera BG, AG (*f*) æqualia sunt. Ergo, quia quadratum AB æquatur (*g*) utrique quadrato BG, AG, unius quadrati BG duplum erit. Semissis ergo quadrati sinus totius AB æquatur quadrato sinus 45 graduum BG. Fig. 7.

(a) Per 30. l. 3. (b) Per 5. l. 1. (c) Per cor 11. pr. 32 l. 1. (d) Per hyp. (e) Per 32 l. 1. (f) Per 6. l 6. (g) Per 47. l. 1.

Quare si ex semisse quadrati sinus totius eliciatur radix quadrata, dabit ea sinum 45 grad. qui, quarum partium sinus totus ponitur 10000000, reperietur earumdem esse 7071068 fere.

Problema II.

Arcuum 60, & 30 graduum sinus invenire.

Fig. 8. ESto quadrans BC; arcus BF graduum 60, & sinus ejus DF. Erit ergo arcus FC graduum 30, cujus sinus sit FG; ducatur autem BF, & ex centro AF. Quoniam arcus BQF est grad. 60 hoc est sexta pars circumferentiæ circuli, erit BF latus hexagoni, ideoque (*a*) æquale radio AF. Anguli (*b*) igitur ad A & B in triangulo AFB æquales sunt. Cum igitur in triangulis X, Z æquales sint anguli FBD, FAD; item anguli FDB, FDA utpote recti; latus vero FD commune, erunt (*c*) quoque latera BD, AD æqualia: ac proinde quadratum BD est quarta pars quadrati sinus totius AB, seu FB; sed quadratum FB æquatur (*d*) quadratis BD, ED. Auferatur ergo quarta pars quadrati sinus totius, sive quadratum semisseos AD sinus totius a quadrato sinus totius FB, remanebit quadratum FD, cujus radix quadrata dabit rectam FD, sinum 60. graduum. Posito igitur sinu toto 10000000 sinus grad. 60 est 8660254.

(a) Per cor. 1. p. 15 l. 4.
(b) Per 6. l. 1.
(c) Per 27 l. 1.
(d) Per 47. l. 1.

Sinus porro FG grad. 30. est semissis sinus totius, utpote æqualis ipsi DA: Idem patet ex lemmate. Posito igitur sinu toto 10000000 sinus grad. 30. est 5000000.

Problema III.

Sinum 36. gradum invenire.

Fig. 9. ESto semicirculus FBG, cujus basi radius AB rectus insistat. Tum radio AG bisecto in D ducatur recta DB, quæ transferatur ex D in C. Recta BC erit (*a*) latus pentagoni circulo inscripti.

Ex summa quadratorum AB radii, sive sinus totius, & AD semisseos radii extrahe radicem quadratam, dabit ea (*b*) rectam DB, hoc est DC. Ex DC aufer DA semissem radii fiet nota AC, cujus quadratum adde quadrato radii AB, notum fiet (*c*) quadratum CB, ex quo radix elicienda dabit BC latus pentagoni subtendens gradus 72. Illius ergo semissis (*d*) dabit sinum 36 graduum. Posito sinu toto 10000000, sinus grad. 36. reperietur partium 5877852.

(a) Ptolom l. 1 almag.
(b) Per 47. l. 1.
(c) Per 47. l. 1.
(d) Per lem.

Corol.

Corollarium.

EX sinu grad. 36. reperietur (a) sinus complementi, nempe grad. 54 partium 8090170. (a) Per poris. 1.

Problema IV.

Sinum graduum 12 invenire.

IN quadrante CB sit arcus BF graduum 30, KB grad. 54, & eorum sinus DF, GK. Igitur erit eorum differentia KF grad. 24. complementa vero erunt FC, grad. 60, KC grad. 36, quorum sinus sint PF, NK. Fig. 10.

Sinus NK grad. 36. inventus per Probl. 3. auferatur ex sinu PF grad. 60. invento per Probl. 2. remanebit OF nota. Tum sinus FD grad. 30. inventus per Problema 2. dematur ex sinu KG grad. 54. invento per Coroll. præced. remanebit OK nota. Radix summa quadratorum OF, OK dabit (b) KF subtensam 24. grad. illius vero semissis dabit (c) sinum graduum 12. (b) Per 47. l. 1. (c) Per lem.

Problema V.

Sinus omnium arcuum quadrantis sese ordinatim uno minuto superantium invenire.

EX quatuor sinibus per præcedentia quatuor Problemata graduum videlicet 45, 60, 36, 12 reliquos sinus omnes adminiculo trium Porismatum præmissorum inveniemus hunc in modum:

Ex sinu graduum 45 inveniuntur sinus septem.

PRoblemate 1. inventus est sinus arcus grad. 45. sumatur graduum 45. semissis grad. 22. 30. & semissis horum grad. 11, 15, quæ amplius bisecari nequit, sinus harum semissium reperiuntur per porisma 2, nimirum ex sinu grad. 45. reperitur sinus grad. 22, 30. & ex hoc sinus grad. 11, 15.

ex 45 gradibus
semisses 22, 30, 11, 15.

Accipiantur deinde harum semissium complementa; compleplementum arcus totius grad. 45, quia ipsi æquale tamquam inutile omittitur.

ex semissibus 22, 30. 11, 15.
Complementa 67, 30. 78, 45.

horum complementorum sinus reperiuntur per Porif. Rursum ex his complementis sumantur semisses semissium, quoties possunt; tum complementa semissium, donec complementum occurrerit, quod bisecari nequeat.

Ex compl. 67, 30. 78, 45.
Semiss. 33, 45. nulla.
Compl. 56, 15.
Semiss. nulla.

Complementa postrema erant grad. 67, 30. & grad. 78, 45. Ex posteriori, quia bisecari nequit, nihil ultra eruitur. Prioris, nempe grad. 67, 30. semissis est grad. 33, 45. cujus sinus per Porif. 2. obtinetur. Hujus complementum est grad. 56, 15, cujus sinus reperitur per Porif. 1. Quia vero complementum hoc ultimum non potest bisecari, hic terminus erit inveniendi ex sinu graduum 45. Igitur ex sinu graduum 45. inventi jam sunt sinus septem, quorum inventionis series in tabella apposita exhibetur.

	G. o	M. l	G. o	M. l	G. o	M. l	G. o	M. l
	90	0	45	0				
Semiss.					22	30	11	15
Compl.					67	30	78	45
Semiss.					33	45		
Compl.					56	15		

Ex sinu graduum 60 inveniuntur Sinus 16.

Arcus 60 graduum bisecetur quoties potest, & accipiantur semissium complementa; quæ iterum biseca, quoties potes, tum semissium rursum accipe complementa, quæ denuo biseca, & bisectionis complementum assume. Ex hac alterna acceptione, quæ sexies repetita est; habentur arcus 16, quorum sinus per Porisma 2, & 1 alternatim accepta invenientur.

Sinus

Sinus grad 60 ejusque semisses		Complementa		Semisses Complementorum		Compl.		Semiss.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
60	0										
30	0										
15	0	75	0	37 18	30 45	52 71	30 15	26	15	63	45
7	30	82	30	41	15	48	45				
3	45	86	15								

Alternam semissium, & complementorum seriem exhibet tabella hic apposita; atque ita si hactenus inventi sinus ordinentur adnumerato sinu toto grad. 90. habebimus 24. sinus arcuum sese gradib. 3 $\frac{1}{45}$ superantium.

Ex sinu graduum 36 habentur Sinus 32.

SI enim arcus grad. 36 accipiatur semissis, & semissis semisseos, & sic deinceps. Deinde ipsius sinus 36, & omnium semissium complementa, ac rursum semisses complementorum; eaque alterna semissium, ac complementorum acceptio octies repetatur, provenient arcus 32. quorum sinus per Porisma 2. & alternatim reperientur. Seriem inventionis horum 36. arcuum exhibet tabella subjecta.

Sinus

Sinus grad. 36. cum suis semiss.		Complementa.		Semiss. Complementorum.		Complementa.		Semiss.		Complementa.		Semiss.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
0	l	0	l	0	l	0	l	0	l	0	l	0	l	0	l
36	0	54	0	27	0	63	0	31	30	58	30	29	15	60	45
								15	45	74	15				
				13	30	76	30	38	15	51	45				
				6	45	83	15								
18	0	72	0												
9	0	81	0	40	30	49	30	24	45	65	15				
				20	15	69	45								
4	30	85	30	42	45	47	15								
2	15	87	45												

Ex

Ex sinu 12. graduum inveniuntur sinus 64.

HUnc in modum. Ex sinu 12 accipiatur semissis, & semissis semisseos, & sic porro, tum ipsius 12, & omnium semissium complementa sumantur deni semisses complementorum, ac rursus semissium complementa &c. Hæc alterna semissium, ac complementorum acceptio, si duodecies repetatur, provenient arcus 64, quorum sinus invenientur per Porisma 2, & 1. Seriem inventionis dictorum 64 arcuum exhibet tabella hic adjecta.

Sinus grad. 12 ejusque semiss.		Complementa.		Semiss. Complementorum.		Complementa.		Semiss.		Compl.		Semiss.		Compl.		Semiss.		Compl.		Semiss.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	M.	G.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
12	0	78	0	39	0	51	0	25	30	64	30	32	15	57	45								
								12	45	77	15												
				19	30	70	30	35	15	54	45												
				9	45	80	15																
6	0	84	0	42	0	48	1	24	0	66	0	33	0	57	0	28	30	61	30	30	45	59	15
																14	15	75	45				
												16	30	73	30	36	45	53	15				
												8	15	81	45								
				21	0	69	0	34	30	55	30	27	45	62	15								
								17	15	72	45												
				10	30	79	30	39	45	50	15												
				5	15	84	45																
3	0	87	0	43	30	46	30	23	15	66	45												
				21	45	68	15																
1	30	88	30	44	15	45	45																
0	45	89	15																				

Quod si sinus omnes hactenus inventos sinu toto adnumerato simul in ordinem redigamus, sinus habebimus 120 arcuum sese mutuo 45 minutis superantium, quorum primus est 45 minutorum, ultimus grad. 90.

G. °	M. ′	G. °	M. ′	G. °	M. ′	G. °	M. ′
0	0	3	0	6	0	9	0
0	45	3	45	6	45	9	45
1	30	4	30	7	30	&c.	&c.
2	15	5	15	8	15	90	0

Ex his 120 Sinibus.

RElìquos omnes intermedios ope tertii Porismatis per regulam proportionum reperiemus hoc ordine.

Primo quæremus inter singulos horum 120 sinuum duos medios duorum arcuum minutis 15 differentium, quibus ad priores 120 adjunctis, habentur sinus arcuum 358, 15 minutis invicem excedentium.

Deinde inter singulos jam inventos duo quæruntur medii duorum arcuum minutis 5 differentium, quibus additis ad priores 358 proveniunt sinus arcuum 1076 se minutis 5 superantium.

Denique inter illos singulos quæremus medios quatuor arcuum uno se minuto excedentium, quos si addamus illis 1076, habentur sinus 5400, omnium videlicet arcuum quadrantis uno se minuto superantium.

Problema VI

Secantes, & Tangentes quascumque invenire.

EX sinibus jam inventis hæ lineæ nullo negotio innotescent.

Arcus cujuscumque BS ex gr. 70, 15. secans esto AR, tangens BR, sinus totus AB. Oporteat secantem AR invenire. Duc SK sinum arcus SB, & SN sinum complementi SX. Per prop. 4. lib. 6. ut AK (seu NS) est ad AS, ita AB, (seu AS) est ad AR. Sunt ergo tres proportionales.

NS

NS	AB	AR
Sinus compl. arcus dati grad. 70, 17.	Sinus totus 10000000.	Secans quæsita

Quare si quadratum sinus totius dividatur per NS sinum complementi arcus dati, quotiens dabit secantem quæsitam AR, ut patet ex 18. lib. 9.

Oporteat deinde dati cujuscumque arcus BS tangentem reperire BR. Per prop. 4. lib. 6. ut AK (seu NS) est ad KS, ita AB ad BR. Sunt ergo proportionales.

NS	KS	AB	BR
Sinus compl. arcus dati	Sinus arcus dati	Sinus totus 10000000	Tangens quæsita

Quare cum tres primi termini sint noti, per regulam trium innotescet quartus.

Habent igitur studiosi, quod supra promiseram, sinuum, Tangentium, & secantium theoriam tribus porismatis, & problematis sex comprehensam. Scio plures alias esse sinuum reperiendorum vias, sed ea, quam proposui, ceteris explicatu, ac demonstratu mihi est visa facilior.

Problema VII.

Sinum unius, vel plurium Secundorum Minutorum invenire.

Repræsentet PB arcus unius minuti, seu 60 secundorum, KB vero arcum 26 secundorum ex gr. sinus vero istorum arcuum sint PM, KN. Quoniam hi arcus insensibiliter differunt a rectis lineis, assumi possunt triangula PBM, KBN tamquam rectilinea. Igitur per 4. lib. 6.

Ut PB 1 Min. seu 60 secun.	ad KB 26 secun.	ita PM sinus 1 Min.	ad KN sinum 26 secun.

Quare per regulam trium reperietur sinus KN 26 secundorum, multiplicando videlicet secundum 26 per tertium, nempe 2909 sinum 1 minuti & productum dividendo per primum, nempe 60 secund.

Hoc

Hoc opere reperitur sinus unius minuti secundi $49\frac{29}{60}$ posito sinu toto 10000000. licebitque eadem methodo reperire sinum unius tertii, & sic in infinitum.

Problema VIII.

Invenire sinum arcus, qui præter gradus, & minuta prima, etiam secunda contineat.

INveniendus sit ex. gr. sinus graduum 36. 20*l*, 16*ll*. Arcum grad. 36. 20*l*. proxime minorem dato repræsentet FB; arcum vero dato proxime majorem, nempe grad. 36. 21*l* referat LB. Arcum datum grad. 36. 20*l* 16*ll*, qui inter hos medius est, referat IB. Sinus autem horum trium arcuum sint LX, FR, IS, & ducatur perpendicularis FOQ. Arcus igitur LF est 1*l*, seu 60*ll* arcus IF, 16*ll*, LQ differentia Sinuum LX grad. 36., 21*l* & FR grad. 36, 20*l*. Quoniam igitur arcus LF, utpote 1*l*, insensibiliter differt a recta linea, & multo adhuc minus arcus IF, 16*ll*, erit per propos. 4. l. 6. Fig. 6.

Ut LF	ad IF	ita LQ differentia	ad IO	diff.
60*ll*	16*ll*	Sinuum &c.		sinus &c.

Quare cum tres primi termini sint noti, etiam innotescet quartus, differentia IO, quæ addita FR sinui grad. 36. 20*l*. dabit sinum quæsitum 15. gra. 36. 20*l*. 16*ll*.

Problema IX.

Dato Sinui arcum assignare.

SInum datum quærere in tabulis. Si eum reperies, arcum illi debitum habes adscriptum, si non reperies, quære eo proxime & majorem, & minorem, quos referat LX, FR, datum vero repræsentet IS. Ducta perpendiculari FOQ, erit per 4. lib. 6.

LQ excessus.
Ut sinus LX proxime majoris
dato supra minorem FR
ad
IO excessum
sinus dati IS
suprà minorem FR

ita
arcus LF
60. secund.
ad
numerum secundum,
quæ debentur arcui IF.

Quare cum tria prima sint nota, etiam quartum innotescet, numerus nempe secundorum debitus arcui IF, qui additus gradibus, ac minutis arcus noti FB dabit arcum debitum sinui dato IS.

Atqui hæc quidem hactenus de Sinuum, Tangentium, & Secantium inventione. Reliquum est, ut quædam ad plenam hujus rei theoriam facientia sequenti Scholio declaremus.

Scholium.

Quæstio est; cur radius circuli in tot partes divisus assumatur.

Ut hujus assumpti causa intelligatur, meminisse debemus, omnes Sinus, Secantes, & Tangentes inventas esse vel per radicis extractionem, vel per Regulam proportionum. Et quidem illi 120 sinus arcuum se invicem 45 minutis superantium per extractionem radicis reperti sunt, ut patet ex Problem. 1, 2, 3, 4, 5. Ceteri vero omnes inter hos medii ex illis 120 per proportionis regulam innotuere, ut ex Problematis 5 postrema parte constat. Tangentes autem, & Secantes ex sinibus jam notis per regulam eamdem repertę sunt, quemadmodum Problem. 6. ostensum est. Jam vero numeri, e quibus radix fuit elicienda, ut plurimum sunt non quadrati, ex quibus si radicem educas, ea semper a vera, quæ (ut lib. 3. Arith. cap. 6. demonstravi) impossibilis est, differet excessu, defectuve aliquo, minore tamen, quam sit unitas. Hæc porro differentia, quæ ob fractionum in supputando molestiam negligitur, eo minoris momenti erit, quo major fuerit numerus ille, e quo radix educta fuit. Erit autem ille numerus eo major, quo radius in partes plures divisus assumetur. Exemplum statuamus in sinu 45 graduum, quem Probl. 1. docuimus obtineri, si ex semisse quadrati sinus totius radicem extraxeris. Si numerus radii, seu sinus totius assumatur magnus, qualis hic est 10000000, illius etiam quadratus, adeoq; & quadr. semissis 50000000000000 multo erit major. Porro radix integra, quæ elici potest ex 50000000000000, est, 7071067, quæ quia ex maximo numero elicita est, etiam

ipsa

ipsa magnus est numerus. Unde fit, ut ipsius a radice vera impossibili defectus, qui semper unitate minor est, ad ipsam proportionem habeat insensibilem, proindeque tuto, & absque sensibili errore ullo negligatur. Hanc igitur ob causam tantus numerus partium sinus totius assumi debet. Verum, ut hujus rei causa manifestior evadat, omnia errorum capita exactius erunt colligenda. Primum caput erroris est in sinibus illis primis 120, quos reperire oportuit per eductionem radicis ex numeris non quadratis. In reliquis deinde, qui ex his per regulam prop. eiciuntur, idemque proinde vitium participant, alii duo insunt errores proprii, videlicet quod in triangulis LFQ, IFO arcus LF 45, & arcus I 15, aut 5 assumantur tamquam recta linea; atque insuper, cum regula proportionum exercetur, quod fractio ex divisione residua negligatur. Quo vitio postremo etiam Tangentes, & Secantes, quae omnes ex sinibus per prop. reg. obtinentur, laborent necesse est. Denique cum sinus perpauci tantum immediate reperiantur, ceteri vero sinus omnes deducantur ex invicem, ex sinibus autem Tangentes, & Secantes, manifestum est, singulos praeter errores sibi proprios contrahere etiam vitia eorum, e quibus ipsi derivantur; unde fit, ut error, qui in sinu immediate invento simplex erat, in secundo quasi duplicetur, in tertio triplicetur, & sic deinceps. Unde consequens est, eos sinus esse accuratiores, qui ex paucioribus derivantur; exactissimos vero esse eos, qui immediate, hoc est ex aliis nullis inventi sunt. Ex his ergo capitibus Sinuum, Tangentium, Secantium defectus oriuntur, qui ne essent notabiles, sed quodammodo evanescerent, radium maximo partium numero divisum assumere oportuit; & quamvis defectus illi sint non unus, sed (ut jam ostendi) plures, tamen quod singuli nullius fere momenti sunt, etiam simul juncti errorem vix sensibilem inducunt, si assumatur sinus totus partium admodum multarum: qua enim proportione augetur numerus radii, eadem crescunt numeri sinuum, ac proinde errores, qui in iis supputandis committi debent, magis evanescunt. Fig. 6.

Deinde istud etiam tyrones intelligant, si Sinus, Tangentes, Secantes accipiantur ad sinum totum 10000000. quales passim in tabulis reperiuntur abjectis duabus primis notis haberi Sinus, Tangentes, Secantes ad radium 100000, totidem videlicet cyfris mulctatum. Ex. gr. posito radio 10000000 Sinus 8 grad. est 1391731, si cupiam minorem ad radium 100000, omissis duabus primis notis, is erit 13917; talis enim Sinus, Tangentis, Secantis differentia a majori solum erit fractio, cujus numerator sint notae abjectae, denominator vero sinus totus duobus cyfris mulctatus. Itaque sinus 8 grad.

13917 *minoris a majori* 1391731, *differentia erit* 31 *diametri*
100000

Ratio pendet ex natura logistica decimalis, quam exposui Arithm. Practicæ lib. 2. cap. 9., & seq. præsertim ex Theor. 1. & 2. c. 10. Postremo hoc in primis hic observabitur, cum Sinus, Tangentes, Secantes expetuntur respectu radii ex. gr. 100000, *exactiores fore eas lineas, si supputentur respectu sinus* 10000000 *datum excedentis duobus cyfris, & ab iis ita supputatis totidem primæ notæ, ut jam dictum est, abjiciantur. Ratio est, quia errores sinuum multis notis constantium, non versantur nisi in primis notis. Ita Regiomontanus, cum sinus cuperet ad partes radii* 600000, *assumpsit radium* 600000, 00000, *& a sinibus ad eum radium supputatis primas quatuor notas sustulit. Similiter Rheticus, ut haberet sinus ad radium* 10000000000 *assumpsit radium* 100000, 00000, 00000, *& a sinibus per hunc repertis præscidit quinque notas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ residuæ omnes veræ existant, ac proinde sinus ita reperti a veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, sive canone assumitur. Et tales sunt ii omnes, qui in tabulis passim descripti sunt.*

CAPUT II.

Triangulorum rectilineorum Analysis.

Triangulorum omne, quod per se manifestum est, tria latera habet, & angulos tres, quæ simul juncta senarium numerum efficiunt. Ex his tria semper nota sint oportet, ut tria reliqua, quæ sunt ignota, cognoscantur. Scientia igitur ea, quæ ex tribus datis, sive cognitis docet tria reliqua incognita invenire, *Analysis Triangulorum* ab aliis *Trigonometria* appellatur. Hoc invento vix aliud, seu præstantius, seu utilius. Quod ex nunc tyrones, ut vel eminus perspiciant, non ea solum triangula contemplari debent, quæ in charta, vel tabula delineantur; sed ab his cogitationes suas transferre ad ea oportet; quæ in campis, atque in aere, imo & in ipso cælo per radios visuales, & ipsas rerum distantias, longitudinesque describuntur. Opportunum erit ex iis, quæ postea erunt uberius explananda, exem. unum, alterumve quasi ad rei totius specimen

men aliquod afferre. Inter Problemata Trigonometriæ hoc erit inter cetera unum, qui dato uno latere trianguli rectanguli, & angulo acuto uno, reliqua latera quanta sint, inveniri.

Ex hoc Problemate montis, aut turris altitudinem metiri poteris. Turris alicujus altitudinem referat recta QF; distantiam vero oculi ab eadem recta AQ horizontalis, cum qua rectum angulum constituit altitudo FQ; radium visualem extentum a turris apice F ad oculum in A repræsentet recta FA. Habemus triangulum rectangulum intelligibile in aere descriptum, cujus unum latus est AQ distantia oculi a turre, alterum QF ipsa turris altitudo, tertium radius visualis AF. In hoc triangulo angulus QAF (ut suo loco ostendam) fit notus instrumento; latus AQ distantia jam supponatur nota. Ex his duobus cognitis angulo videlicet acuto QAF, & distantia AQ, per universale problema jam dictum invenietur quanta sit altitudo turris QF. Adjungamus & alterum. Inter cetera Problemata Trigonometrica etiam istud occurrit: datis in triangulo quolibet duobus angulis, quæ sit laterum inter se proportio, invenire. Fig. 11.

Ex hoc Problemate ad distantiam Lunæ à Terra dimetiendam via aperitur. Centrum Lunæ esto C, centrum terræ A, oculus in superficie terræ in B; semidiameter orbis Terræ AB. Cogitentur tam ex terræ centro A, quam ab oculo B extendi rectæ ad Lunæ centrum C. Quo facto constituitur triangulum à Terra ad Lunam pertingens, cujus unum latus est semidiameter Terræ AB, reliqua duo sunt distantiæ tam centri Terræ, quam ipsius oculi a centro Lunæ. In hoc triangulo angulus ACB astronomico artificio innotescit, angulus vero ABC fit notus per instrumentum. Itaque ex his duobus angulis jam cognitis per universale Problema jam dictum innotescet, quæ sit proportio lateris CB, vel AC ad latus AB; hoc est, quoties distantia Lunæ a terra semidiametrum terræ contineat: ac proinde cum alio jam artificio, quot milliaria radius terræ contineat, innotuerit, ipsa etiam distantia Lunæ a terra in milliaribus innotescit. Ad tantæ rei notitiam nos deduxit problema hujusmodi, quod tyro forte aliquis nullius esse usus judicasset. Hæc ergo dicta sint in gratiam eorum, quibus illud in ore semper, cui usui, ut ex his etiam cetera, quorum usum non perspiciunt, æstimare discant. Fig. 1

Annotationes quædam pro Tyronibus.

PRiusquam ultro tendamus, expediet hic in memoriam revocare nonnulla, quæ in Elementis traduntur, in quibus sub hæc initia hærere plerumque tyrones solent. Prætereant ista, qui his non indigent.

1. Datum, & totum idem significant in hac materia.

2. Circumferentiam circuli partiri solent Mathematici in partes æquales 360, quas gradus appellant, & harum singulas rursus in 60 æquales, quas minuta vocant.

3. Arcus circuli, seu pars circumferentiæ nota dicitur, cum scitur, quot gradus contineat, tunc enim arcus ille, quanta sit circumferentiæ pars, innotescet.

Fig. 13. 4. Angulorum mensuræ sunt arcus circuli, qui ex vertice anguli tamquam centro inter ejus crura describuntur. Sic anguli C mensura est arcus OQ centro C descriptus inter anguli crura CA, CB. Patet ex ultima lib. 6. Hac de causa angulus C dicitur esse tot graduum, quot graduum est ille arcus OQ, ut si arcus OQ est grad. 32., etiam angulus C erit graduum 32.

5. Angulus ille C dari, seu notus esse dicitur, quando scitur, quot graduum sit, hoc est, quot graduum sit arcus OQ inter ejus crura ex vertice, ut centro descriptus.

6. Angulus rectus dicitur 90 graduum, quia arcus inter ejus latera centro vertice descriptus est 90. grad. seu quarta pars circumferentiæ totius.

Et duo recti dicuntur grad. 180; quia arcus inter eorum crura descriptus, eosque subtendens, est grad. 180, semissis nempe circumferentiæ.

Et quatuor recti dicentur efficere 360 grad. quia subtenduntur a tota circumferentia.

Fig. 14. 7. Si ex anguli vertice, ut centro inter ejus latera plures describantur arcus OQ, SV, minor æque est mensura anguli, ac major; quia minor æque magna pars est suæ circumferentiæ totius, ac major suæ, ac proinde si arcus major OQ est ex. gr. 32. graduum, quorum tota circumferentia major OQLH est 360, etiam minor arcus SV est graduum 32, quorum minor circumferentia SVRT est 360. Patet ex Corol. 3. prop. 33. lib. 6.

Fig 14. 8. Cujuscumque trianguli tres anguli simul sumpti efficiunt grad. 180. Quia per 32. lib. 1. tres illi anguli simul sumpti semper efficiunt duos rectos, ac proinde, si ex angulorum verticibus A, B, C tamquam centris inter

trian-

trianguli cujusvis crura describantur, eodem intervallo circini, tres arcus FG, XZ, OQ simul sumpti semper conflabunt semicirculum, hoc est arcum 180. graduum. Nam si centro C perficiatur semicirculus OQP, & arcus FG transcribatur ex Q in L; tertius arcus XZ æqualis erit residuo LP, adeoque tres simul arcus OQ, FG, XZ conficiunt integrum semicirculum OQLP.

9. Cum in triangulo ABC quocumque, noti sint duo anguli A grad. 125., B grad. 34. etiam C tertius innotescit, si utriusque dati gradus 159 subtrahuntur a 180 gradibus. Remanent enim gradus 21 tertii anguli C. Patet ex annotatione 8, & ex 32 lib. 1. Atque hac de causa datis duobus angulis, etiam tertius dicitur esse datus.

10. Pari ratione, si in quovis triangulo (ABC) notus sit unus angulus (B grad. 39.) innotescit etiam summa reliquorum (C, A) si gradus anguli noti (B grad. 39.) subtrahantur a 180 gradibus; remanent enim gradus (141.) summæ duorum reliquorum (C, A.) Patet ex annotat. 8., & 32. lib. 1. Et hac de causa dato uno angulo, dicitur & summa reliquorum dari. Fig. 15.

11. In triangulo rectangulo (BAC) dato acuto uno (C. grad. 31.) etiam acutus alter (B) innotescet, si acuti dati (grad. 31.) subtrahantur a gradibus 90, remanent enim grad. (59.) pro acuto altero B. Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de causa in triangulo rectangulo, cum datur acutus unus, dari dicitur etiam alter. Fig. 16.

12. Quatuor termini A, B, C, Z dicuntur proportionales, cum primus A est ad secundum B, ut tertius C ad quartum Z

ut A ad B,
ita C ad Z

13. Termini noti sunt, qui numeris exprimuntur, hoc est, quando scitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

14. Cum e quatuor proportionalibus tres termini sunt noti, quartus vero incognitus, is semper innotescet, si secundus multiplicetur per tertium, & productus numerus dividatur per primum, quotiens enim divisionis erit quartus, qui latebat.

Atque hæc est regula, quæ vulgo proportionum, sive trium, & ob summam utilitatem Aurea appellatur, demonstrata est prop. 19. lib. 9. de qua vide plura lib. 4. Arithm. c. 1.

Dato angulo, datur ex tabulis sinus ejusdem; & dato sinu datur angulus; ut si detur angulus grad. 40, 16. gradus quære in vertice tabulæ, minuta autem 16 in columna prima ad lævam.

His adscriptum reperies non solum sinum illis debitum 6463460, sed etiam tangentem 8470620, & secantem 13 05395. Contra si detur sinus ex. gr. 6563460, cujus angulum ignores, quære in columna sinuum numerum datum; vel si non reperiatur, ei proxime æqualem, in columna prima ad lævam reperies minuta, & in vertice gradus anguli quæsiti.

Denique hoc observa: in analysi trianguli rectanguli quamvis solum duo data exprimantur; ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto; tamen datum tertium semper est ipse angulus rectus, qui, quia per se notus est, & triangulo rectangulo nominato satis subintelligatur, ulterius exprimi non solet.

ANA-

ANALYSIS TRIANGULI RECTANGULI.

PROBLEMA PRIMUM.

Datis omnibus angulis laterum proportionem invenire.

BAsi AC adscribe totum sinum, lateri AB sinum oppositi anguli C, lateri CB sinum anguli oppositi A. Eadem erit laterum proportio, quæ sinuum. Fig. 15.

Demonstratio patet ex defin. 6. cap. 2. Itaque si cupiam scire, quanto latus unum sit altero majus ex. gr. BC quam AC: sinum 10000000 divide per sinum 5150381. Quotiens 1 4849619 hoc indicabit; sicut enim quotiens est ad 1. ita ———

10000000

AC est ad BC.

Vel alterutri lateri circa rectum, puta BC, cui adscribe sinum totum, lateri BA tangentem acuti C, basi AC secantem ejusdem anguli C. Ita patebit laterum proportio, ut patet ex defin. 9. cap. 2.

Problema II.

D*Atis basi (BC pedum 100,) & acuto uno (B grad. 59) reliqua latera (AC, AB) invenire.* Fig. 16.

IN triangulo rectangulo hypotenusa, sive basis dicitur; quæ recto angulo opponitur, latera vero, quæ rectum angulum continet.

Inventio lateris AC.

Ut data basis BC, prout est sinus totus 10000000	ad latus AC, prout est sinus anguli B grad. 59. 8571673

ita

ita eadem basis BC, prout est pedum 100.	ad	ejusdem lateris AC pedes quæsitos.....

In quo analogismo, quia tres primi termini sunt noti, etiam quartus incognitus, numerus nempe pedum lateri AC debitorum innotescet per regulam proportionum multiplicando videlicet secundum 8571673 per tertium 100, & productum 857167300 dividendo per primum 10000000, quotiens enim $\frac{857167300}{10000000}$ ex ea divisione proveniens, est quartus, qui latebat, numerus pedum scilicet, quos continet latus quæsitum AC.

Non absimilis inventio lateris AB. Nam quia datur acutus B grad. 59. etiam per 32. lib. 1. seu annot. 11. datur acutus alter C grad. 31; unde etiam sinus utriusque dantur. Jam

Ut basis BC, prout est sinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout est sinus ang. gr. 31. 5150381
ita basis BC, prout est pedum 100.	ad	lateris ignoti AB pedes quæsitos.....

Cum ergo tria prima sint nota, etiam quartum, numerus videlicet pedum lateri AB debitorum per regulam trium innotescet.

Demonstratio.

HOc unum tum hic, tum fere etiam in sequentibus erit demonstrandum, quatuor supradictos terminos esse proportionales. Id vero ex definitione 6. cap. 2. manifestum est. Nam basis BC, latus nempe recto angulo A oppositum est sinus totus, seu radius, latus vero AC est sinus anguli oppositi B ex. gr. 59. grad. qui ex tabulis datur 8571673. Igitur quarum partium sinus totus, nempe basis BC est 10000000, earum sinus anguli B, nempe latus AC est 8571673; ac proinde ut basis BC prout est sinus totus 10000000 est ad AC 8571673 sinum anguli B, ita eadem basis BC ex hyp. 100 pedes ad idem latus AC quæsitum, sive ad numerum pedum in latere AC contentorum. Quod erat demonstrandum.

Pari modo per defin. 6. BC est sinus totus 10000000, & AB sinus anguli C 31 grad. qui ex tabulis datur 5150381:

Ergo

Ergo ut BC ſinus totus 10000000 ad BA ſinum 5150381, ita eadem BC ex hyp. pedes 100, ad eamdem BA incognito pedum numero conſtantem. Quod erat demonſtrandum.

NOTA.

Fundamentum hujus, & omnium ſequentium operationum, ac demonſtrationum eſt, quod quando duæ quantitates A, & Z notæ ſunt ſecundum quamvis earum menſuram, & una earum A etiam nota eſt in alia menſura ex. gr. in pedibus, tum etiam altera Z in pedibus neceſſario innoteſcet per regulam auream, vide cap. 1. lib. 4. Arithmeticæ noſtræ. ubi id demonſtratum eſt.

Problema III.

Datis latere uno (AC milliariorum 1000,) & acuto uno, latus reliquum (BA,) & baſim (BC) invenire. Fig. 17.

Ex uno acuto dato notus fiat alter: ut ſi B detur gr. 54. his ſubductis a 90. erit C. gr. 36.

Inventio lateris AB.

Ut latus datum AC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout eſt anguli C dato lateri adjacentis tangens 7265426
ita latus datum AC, prout eſt milliariorum 1000		lateris ignoti AB milliaria quæſita.

Inventio baſis BC.

Ut latus datum AC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	baſim ignotam BC, prout eſt acuti C dato lateri adjacentis ſecans 12360680
ita latus datum AC, prout eſt milliariorum 1000.	ad	ignotæ BC baſeos milliaria quæſita.

Quare

Quare cum in utroque analogismo tria prisma sint cognita, etiam quartum utrobique per regulam proportionum innotescet: eritque latus AB milliariorum 726 5426 basis vero BC

10000

milliariorum 123 6068.

1000

Demonstratio.

PEr defin.9. cap.2. latus AB est tangens anguli C grad.36. quæ ex tabulis datur 7265426, latus vero AC est sinus totus 10000000, hoc est, quarum partium latus AC est 10000000, earum est AB latus 7265426. Ergo ut AC 10000000 est ad AB 7265426, ita eadem AC ex hyp. 1000 milliar. ad milliaria quæsiti lateris AB, hoc est ad numerum milliariorum in AB contentorum, ergo &c.

Pari modo per defin.9. cap.2. respectu anguli C grad.36 AC est sinus totus 10000000 & BC secans, quæ ex tabulis datur 12360680. Ergo ut AC sinus totus 10000000 est ad BC secantem 12360680, ita eadem AC ex hyp. 1000. milliarium ad eamdem BC ignotum numerum milliariorum continentem, ergo &c.

Problema IV.

Fig.18. *BAsi (CB 1000 perticarum) & uno latere (AC 891 perticarum) datis, invenire acutos angulos, & latus alterum (AB.)*

Ut basis data CB perticarum 1000	ad	latus datum AC perticarum 891
ita basis eadem CB, prout est sinus totus 10000000	ad	anguli ignoti B, qui dato lateri AC opponitur, sinum.

Qui proinde per regulam proportionum reperitur 8910000; huic in tabula invenitur proxime æqualis 8910065, cui adscriptus est angulus gr.63., qui per probl.9. cap.2. adhuc reperitur exactius 15. ergo est angulus B, qui latebat, invento autem acuto B datur etiam acutus alter C grad.27.

Quoniam vero iam in triangulo rectangulo nota est basis CB cum angulo C, latus quæsitum BA invenietur per probl.2.

Idem latus independenter ab angulis reperitur per probl.3. in Scholio prop.47. lib.1. elem.

De-

Demonstratio.

Per defin.6. cap.2. CB est sinus totus 10000000, & CA est sinus anguli B. Ergo ut basis BC 1000. pertic. ad latus AC 891 pertic. ita basis eadem BC prout est sinus totus 10000000 ad idem latus AC prout est sinus ignoti anguli B.

Aliter.

Ut latus CA datum pertic.891	ad	basim CB pertic.1000
ita sinus totus 10000000	ad	secantem ignoti ang. C datis CB, CA comprehensi.

Demonstratio eadem, sed est defin.9. cap.2.

Problema V.

DUobus lateribus datis (BA pedum 79, CA pedum 100.) *acutos angulos, & basim invenire.* Fig. 19.

Inveniendus sit angulus acutus C.

Ut datum latus AC adjacens quæsito ang. C	ad	alterum latus datum AB.
ita sinus totus 10000000	ad	anguli quæsiti C tangentem.

Quæ per regulam prop. reperitur 7900000; huic proxime æqualis invenitur in tabula 6156615, cui adscriptum reperies angulum 38 graduum, qui probl.9. cap.2. adhuc reperietur exactius. Tantus ergo est acutus C, qui latebat, quo ex grad.90 subtracto datur & alter B grad.52. ,quia vero noti jam sunt acuti anguli, & ex hyp. etiam latera per probl.2. etiam basis BC fiet nota.

Alias basis inventio ab angulis independens traditur probl.2. Scholii prop.47. lib.1. elem.

De-

Demonstratio.

Per defin. 9. cap. 2. respectu anguli C sinus totus est CA; tangens BA. Ergo ut CA ex hyp. pedum 100 ad BA ex hyp, pedum 79. ita eadem CA, prout est sinus totus 10000000. ad eamdem BA, ut est tangens quæsiti anguli C.

ANALYSIS TRIANGULI OBLIQUANGULI.

Triangulum, in quo nullus angulus rectus est, obliquangulum voco

Problema VI.

Fig 20.21 *Datis omnibus lateribus lateris segmenta (BF. CF) facta a perpendiculari (AF) ex opposito angulo ducta, & ipsam perpendicularem invenire.*

Centro A intervallo lateris minoris AB describatur circulus secans reliqua latera in O, & Q, & producatur CA in L: manifestum est LC esse summam laterum AC, AB; & OC differentiam eorumdem; item patet ex prop. 3. lib. 3. BQ bisectam esse in F. His ita constitutis rectangula BCQ, & LCO (a) æqualia sunt. Ergo per 14. vel 16. lib. 6.

(a) Corol. 1. prop. 36 l. 3.

Ut BC latus, in quod perpendicularis cadit.	ad	LC summam laterum reliquorum BA, AC
ita OC differentia reliquorum laterum.	ad	rectam CQ

Quare cum tria prima sint nota, etiam quartum nempe CQ innotescet, hæc, si perpendicularis intra triangulum cadit, (ut in fig. 20) ablata a latere noto BC notam relinquet BQ, cujus semissis BF est segmentum quæsitum minus, quo subtracto a latere BC, etiam majus segmentum CF innotescet.

Quod si perpendicularis cadat extra (ut in Fig. 21.) tunc ex quarta proportionali CQ subtrahe latus BC, ut innotescat re-

residuum BQ, hujus enim semissis BF dabit segmentum minus ad quod adjecto latere BC habetur segmentum majus CF.

Ipsa vero perpendicularis AF fiet nota, si ex quadrato lateris BA adjacentis minori segmento subtrahatur quadratum minoris segmenti BF, & ex residuo extrahatur radix, ea enim erit AF, patet ex p.47. lib.1.

Porro ipsa quarta proportionalis CQ indicat quando perpendicularis intra triangulum cadat, quando extra; cum enim minor est latere dato BC, in quod incidit perpendicularis, ea cadet intra triangulum, cum major, extra.

Hoc problema, quod sane proinde pulchrum, atque utile est, expeditur etiam per prop.13. & 12. lib.2. ut tradidi in scholio ibidem; sed modus hic traditus aliquanto facilior est.

Problema VII.

D*Atis omnibus angulis, laterum proportionem invenire.* Fig.22. 23.

In quovis triangulo eadem est inter latera proportio, quæ inter sinus angulorum lateribus oppositorum.

Demonstratio.

Esto triangulum obliquangulum ABC latera habens inæqualia (alias enim res per se esset manifesta) & ex majori CB abscindatur CI æqualis minori AB, ducanturque IL, BF ad AC perpendiculares, quæ quia sunt inter se parallelæ, erit (*a*) CI (hoc est AB ad CB, ut IL ad BF. Sed posito sinu toto CI est IL sinus (*b*) anguli C, & posito sinu toto AB, (hoc est eodem, quo ante, cum AB, CI æquales sint) BF est (*c*) sinus anguli BAC, ergo latus AB est ad latus CB, ut sinus anguli C ad sinum anguli BAC, eadem erit in reliquorum comparatione laterum demonstratio.

(a) Per cor.1.p.4. l.6.
(b) Per def.cap.1.
(c) Per eamd.

Tantum nota. Cum perpendicularis BF extra triangulum cadit, eam nihilominus esse sinum anguli BAC, quia (*d*) sinus est anguli BAF, cum quo (*e*) eumdem habet sinum angulus BAC, ejus complementum ad duos rectos.

(d) Per eamd.
(e) Per def.5.

Pro-

Problema VIII.

D*Atis omnibus lateribus, angulos invenire.*

Concipiatur in aliquod latus ex opposito angulo demissa perpendicularis AF, & per probl.6. nota fiant segmenta BF, CF. Fig.24.

Tum, quia in triangulo rectangulo BFA dantur BA, BF, per probl.4. similiter innotescet angulus B. Rursum, quia in triangulo rectangulo CFA dantur CA, CF, per probl.4. similiter innotescet angulus C, & per prop.32. lib.1. seu annot.9. etiam tertius BAC.

Problema IX.

D*Ato latere (AC,) & duobus angulis, reliqua latera (AB, CB) invenire.*

Fig.24.

Per Problema 7.

Ut anguli B, qui dato lateri AC opponitur, sinus 6293204.	ad	anguli C oppositi quæsito lateri AB sinum 2756374.
ita latus datum AC 1000 passuum	ad	lateris quæsiti AB passus.

Rursus per Problema 7.

Ut anguli B dato lateri AC oppositi sinus 6293204	ad	anguli A oppositi quæsito lateri CB sinum 8195521
ita latus datum AC 1000 passuum	ad	lateris quæsiti CB, passus.

In utroque analogismo tria prima nota sunt, quartum igitur utrobique, nimirum latera AB, CB innotescent per regulam proportionum.

Pro-

Problema X.

Datis duobus lateribus (CA ped. 216, BA ped. 112) & angulo (A gr. 113.) iis comprehenso, reliquos angulos (C, B,) & latus reliquum (CB) invenire. Fig. 26.

Quoniam CA, BA latera dantur, etiam datur eorum summa 328. ped. & eorumdem differentia ped. 104. Rursum, quia datur angulus A grad. 113, datur & reliquorum ignotorum C, B summa (67 grad.) adeoque & semissis summæ (grad. 33, 30.) cujus proinde tangens 6618856 datur ex tabulis: his positis

Ut lat. datorum CA; BA summa 328. ped.	ad	laterum CA, BA differentiam 104. ped.
ita tang. 6618856 semisseos summæ incognitorum ang.	ad	tangentem ..... semisseos differ. ignotorum ang. CB

Cum ergo tria prima sint nota, per reg. prop. innotescet quartum, nempe tangens semisseos differentiæ angulorum ignotorum, C, B... huic in columna tangentium proxime reperitur æqualis..., cui adscripti sunt grad.... pro angulo semisseos differentiæ angulorum C, B, quam si addas ad semissem summæ grad. 33, 30, angulorum C, B, habetur B major quæsitus. Si subtrahas, proveniet minor C: latus reliquum CB reperitur per præced. jam enim præter latus, dantur & anguli.

Demonstratio.

Analogismi supra positi est ejusmodi: fiant anguli HPF, FPG æquales angulis ignotis B, C: centro P descripto circulo, qui latera angulorum secet in H, F, G, ducantur ad FP perpendiculares HR, GL, quæ per defin. 1, & 6, & 5. erunt sinus angulorum HPF, FPG, posito sinu toto, seu radio PH, PG, ducatur deinde recta HOG, & fiat HX par ipsi GO jungaturque PX, erit XO differentia ipsarum HO, HX, hoc est ipsarum HO, OG, denique ex centro Fig. 26. 27

C P du-

(a) Per 3. 3. P ducatur ad HG perpendicularis PQ, (a) quæ bisecabit HG, quoniam igitur æquales sunt HQ, GQ; & HX, GO, etiam XQ, OQ æquales erunt. Unde QO est semissis differentiæ XO rectarum HO, OG, ex quo facile etiam ostenditur, angulum HPQ esse semissem summæ angulorum HPO, (b) Per constr. OPG, hoc est (b) angulorum B, C: & QPO esse semissem differentiæ angulorum HPO, OPG; hoc est B, C: his positis differentia laterum CA, AB esto Z.

Quia HR est sinus anguli HPF, hoc est B, & GL sinus anguli FPG, hoc est C, erit latus (c) CA ad latus BA ut HR sinus anguli B ad GL sinum anguli C, hoc (d) est (quia æquiangula sunt triangula HRO, GLO) ut HO ad OG. Ergo CA (e) est ad Z differentiam laterum CA, BA, ut HO ad ipsarum HO, OG differentiam XO; & invertendo laterum differentia Z est ad CA, ut differentia XO ad HO: atqui (ut jam ostendi) CA est ad BA, ut HO ad OG, igitur (f) ex æquo Z differentia laterum est ad BA, ut XO differentia ad OG. Ergo invertendo BA est ad Z, ut OG ad XO; quoniam ergo (ut ostensum supra) CA est ad AB, ut HO ad OG, ac proinde (g) componendo summa CA, AB est ad AB, ut HG ad OG; AB vero (ut jam ostendi) sit ad Z, ut OG ad XO, ex æquo (h) erit summa laterum CA, AB ad Z laterum differentiam; ut HG ad XO. Sed ut HG ad XO, sic semissis HG, nempe HQ, quæ (i) tangens est anguli HPQ, ad semissem XO, nempe QO tangentem (k) anguli QPO. Ergo summa laterum CA, AB, est ad Z differentiam laterum, ut HQ tangens anguli HPQ (qui, ut ostendi supra, est semissis summæ angulorum BC) ad QO tangentem anguli QPO, qui est semissis differentiæ angulorum B, C. Quod erat demonstrandum.

(c) Per Probl. 7.
(d) Per 4. l. 6.
(e) Per cor. 2. p. 18 l. 5.
(f) Per 22. l. 5.
[g] Per 18. l. 5.
(h) Per 22. l. 5.
(i) Per Def. 9.
(k) Ibidem.

Alia Problematis solutio.

Fig. 28. 29 Ex alterutro angulo incognito, ex. gr. ex B in latus oppositum ducta concipiatur perpendicularis BF.

In triangulo rectangulo BFA, cum detur basis BA, & acutus angulus BAF, per prob. 2. invenientur BF, & AF, qua subtracta ex data CA in Fig. 28. addita vero ad CA in Fig. 29. nota fiet etiam CF.

Rursum ergo in trigono rectangulo CFB cum dentur duo latera BF, CF per probl. 5. innotescet BC latus quæsitum, & an-

& angulus C, quem una cum dato A subtrahe a 180. grad. remanebit B alter quæsitorum.

Problema XI.

Datis duobus lateribus AB, CB, & angulo uno C iis non comprehenso, reliquos angulos, & latus reliquum AC invenire. Fig.30.31

Per Problema VII.

Ut AB latus datum dato angulo C oppositum	ad	alterum latus datum CB.
ita sinus anguli dati C.	ad	sinum ignoti anguli A, qui alteri lateri dato CB opponitur.

Quare cum tria prima sint nota, etiam quartum, nempe sinus anguli ignoti A, innotescet, & per sinum invenietur in tabulis angulus ipse A, si acutus sit; si vero A obtusus, tunc angulus per sinum inventus subtractus a 180 gradibus relinquet quæsitum A. Ratio patet ex defin.5.

Necesse igitur hic est ad inventionem anguli, ut ejus species aliunde nota sit.

Inventis angulis; latus ignotum AC innotescet per Probl.9.

Aliter.

Ex angulo B datis lateribus comprehensa ducta intelligatur BF perpendicularis ad latus ignotum AC. Fig.32.33

In triangulo rectangulo BFC, cum detur basis BC; & unus acutus C, innotescent per Problema secundum CF, & BF. Rursus in trigono rectangulo BFA cum dentur basis AB, & latus BF, innotescent per Problema quartum angulus BAF, & latus FA.

Quod si angulus ignotus BAC, qui datis lateribus AB, CA comprehenditur, sit acutus, ac proinde perpendicularis BF, ut in Fig.32. intra triangulum cadat, angulus BAF jam inven- Fig.32.

tus est ipse BAC quæsitus, & tunc FA jam nota addenda ad CF ante repertam, ut innotescat totum latus quæsitum AC.

Fig. 33. Si vero BAC sit obtusus, adeoque perpendicularis BF, in Fig. 33. extra triangulum cadat, angulus inventus BAF subtrahendus est a 180 gradibus, ut innotescat quæsitus BAC & tunc FA jam nota demenda ex nota FC, ut innotescat latus quæsitum AC.

Rursum igitur ad inventionem anguli BAC, & lateris AC necesse est, ut aliunde anguli BAC nota sit species.

TRI-

TRIGONOMETRIA SPHÆRICA

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

Soc. Jesu Matheseos Professore in Collegio Rom.

1. TRigonometria Sphærica est ars resolvendi triangula sphærica, nimirum ea, quæ in superficie sphæræ continentur arcubus circulorum, qui dicuntur maximi, quorum plana transeunt per centrum sphæræ. Sex sunt, quæ in ejusmodi triangulis considerantur, ut in triangulis planis: 3. latera, & 3. anguli. Docet Trigonometria sphærica, quonam pacto datis 3. ex hisce 6., cetera inveniri possint. Præmittemus autem primò quidem 3. lemmata, quorum primum ad elementa Geometriæ pertinet, reliqua etiam in Trigonometria plana usui esse possunt, & pertinent ad doctrinam sinuum, & tangentium: tum ea demonstrabimus, quæ ex sphæricorum doctrina necessaria sunt ad Trigonometriam hanc nostram: ac demum Trigonometriam ipsam aggressi agemus primum de triangulis rectangulis, tum de obliquangulis.

Lemma 1.

2. *SI linea AD secetur utcumque in E, & bifariam in I; erit AI vel ID semisumma, & IE semidifferentia segmentorum AE, ED.* Fig. 34.

Primum patet, cum AD sit summa, & AI ejus dimidia, semisumma: secundum sic demonstratur. Fiat AO versus D æqualis DE; erit IO æqualis IE. Erit autem OE ipsarum AE, AO, adeoque ipsarum AE, ED differentia. Igitur & IE semidifferentia. Idem pariter valebit, si punctum e sumatur extra AD, & consideretur De ut negativa, assumpta pariter Ao, sed ad partes oppositas. Nam si De consideretur ut positiva, evadit ID semidifferentia, Ie semisumma ipsarum Ae, eD.

3. Coroll. *Semisummæ adde semidifferentiam, habebis segmentum majus, subtrahe, habebis segmentum minus. Si semidifferentia fuerit major, quam semisumma; alterum segmentum erit negativum, & cadet ad partes oppositas.*

Lemma 2.

Fig. 35. 4. *In triangulo rectangulo latus est sinus anguli sibi oppositi, & cosinus anguli sibi adjacentis; si basis assumatur pro radio: tangens vero illius, ac cotangens hujus, si latus alterum pro radio assumatur.*

Si enim sumpta pro radio basi BC trianguli BAC rectanguli ad A, describatur circulus occurrens lateri BA producto in D, erit latus CA perpendiculum demissum ex altero extremo C arcus DC in radium BD ductum per alterum extremum, quæ est ipsa definitio sinus arcus DC, sive anguli B oppositi lateri AC. Cum autem ob angulum A rectum anguli

(a) 32.1.1. ACB, ABC simul compleant (*a*) rectum angulum; erit AC simul sinus complementi anguli ACB sibi adjacentis, qui dicitur ejus cosinus.

At si circulus describatur sumpto pro radio latere BA; pariter ex ipsa tangentis notione patebit fore latus alterum AC tangentem anguli B sibi oppositi; adeoque tangentem complementi anguli ACB sibi adjacentis, quæ dicitur ejus cotangens.

5. Coroll. *Factum sub tangente, & cotangente æquatur quadrato radii.*

Cum enim assumpto AB pro radio, sit AC tangens anguli B sibi oppositi, & assumpto CA pro radio, AB sit cotangens ejusdem anguli B sibi adiacentis; erit ut AC ad AB: ita tam tangens anguli B ad radium, quam radius ad cotangen-

(b) 16.1.6. tem: ac proinde (*b*) factum sub tangente, & cotangente æquatur quadrato radii.

Lemma 3.

Fig. 36. 6. *Summa sinuum duorum arcuum est ad differentiam, ut tangens semisummæ ipsorum arcuum ad tangentem semidifferentiæ.*

Sint arcus AE, ED, quorum sinus AF, DG perpendiculares radio CE, quem chorda AD secet in P; ipsa autem sec-

secetur bifariam, & ad angulos rectos (a) in H à radio CL, qui etiam arcum AD secabit bifariam in L. (b) Erit (c) AL semisumma, LE semidifferentia eorum arcuum, AH semisumma, HP semidifferentia rectarum AP, PD: & ob angulos rectos ad H, si sumatur CH pro radio, erit HA tangens anguli ACH (d), adeoque arcus LA, qui est ejus mensura, & HP tangens anguli HCP, adeoque arcus LE. Triangula autem AFP, DGP, quorum anguli ad F, & G recti, & ad P ad verticem oppositi æquales, sunt æquiangula; (e) ac proinde (f) est sinus AF ad sinum DG, ut AP ad PD. Quare summa eorum sinuum ad differentiam, ut summa rectarum AP, PD ad differentiam, & ut ipsarum semisumma AH ad semidifferentiam HP, sive ut tangens semisummæ AL ad tangentem semidifferentiæ LE.

(a) 3. l. 3.
(b) 10. l. 3.
(c) n. 4.
(d) n. 4.
(e) 32. l. 1.
(f) 4 l. 6.

7. Coroll. *Summa cosinuum, sive sinuum complementorum ad differentiam est, ut cotangens, sive tangens complementi semisummæ ad tangentem semidifferentiæ.*

Producatur enim AC usque ad circuli peripheriam in M, sumanturque LN, EO quadrantes. Dempto communi EN, erit NO æqualis LE; erit quoque DO complementum DE, & quoniam e semicirculo ADM dempto quadrante EO, arcus AE, OM simul quadranti æquantur, erit OM complementum EA. Pariter est DN complementum LD, & NM complementum LA, qui arcus NM ipsi BN æqualis erit ob AL, LD æquales. Sed (g) est summa sinuum DO, OM ad differentiam, ut tangens eorum semisummæ DN ad tangentem semidifferentiæ ON. Igitur erit summa cosinuum arcuum ED, EA ad differentiam, ut cotangens semisummæ LD ad tangentem semidifferentiæ LE.

(g) n. 6.

Ex Doctrina Sphæricorum.

DEFINITIO I.

8. *Sphæra est solidum unica superficie comprehensum, intra quam est punctum, quod centrum dicitur, a quo omnes rectæ ad eam superficiem ductæ sunt inter se æquales, quæ quidem dicuntur sphæræ radii, vel semidiametri, & recta per centrum sphæræ ducta, & ad superficiem utrinque terminata sphæræ diameter appellatur.* Fig. 13.

Generatur sphæra rotatione semicirculi circa propriam diametrum immotam, donec regrediatur unde digressus est. Quia cum omnes lineæ rectæ ductæ a centro immoto semicirculi ad ejus peripheriam sint inter se æquales; etiam omnes rectæ ductæ ab eodem puncto ad superficiem solidi geniti æquales.

les erunt. Figura quarta exhibet tantum dimidiam sphæram, vitandæ confusionis gratia, cujus centrum C, radii æquales CP, CA, CF &c., diameter Pp, vel AD.

9. Coroll. 1. *Si sphæra utcumque plano secetur, sectio erit circulus.*

Secetur primo sphæra plano ABD, quod transeat per centrum C, & rectæ omnes, quæ a centro sphæræ C ducuntur ad ejus plani intersectionem cum superficie sphæræ ipsius, ut CA, CB, CD erunt æquales radio sphæræ ejusdem. (*a*)
(a) n. 8. Quamobrem puncta omnia A, B, D erunt ad peripheriam circuli, cujus centrum C.

Secetur secundo sphæra plano EFH, quod per centrum non transeat, & per centrum sphæræ C ducatur recta CG ipsi plano perpendicularis, (*b*) ac ad bina puncta quæcunque
(b) 11. l. 11. perimetri sectionis, ut F, & H ducantur ex C, & G rectæ CF, CH, GF, GH. Erunt anguli CGF, CGH
(c) 47. l. 1. recti ob CG perpendicularem toti plano FGH. Quare (*c*) quadrata CG, GF simul æquabuntur quadrato CF, adeoque
(d) n. 8. quadrato CH, (*d*) sive binis quadratis CG, GH simul (*c*), ac dempto communi CG, quadrata GF, GH, & ipsæ rectæ GF, GH æquabuntur. Cumque id contingat manente puncto H, & variato utcumque puncto F; erit perimeter sectionis peripheria circuli, cujus centrum G, radius GH.

10. Coroll. 2. *Circuli quorum plana per centrum sphæræ transeunt æquales sunt inter se, & majores iis omnibus, quorum plana per centrum non transeunt.*

Si enim ABD sit quicumque e circulis, quorum plana transeunt per centrum C; erit ejus radius CD æqualis radio sphæræ; ac proinde omnium ejusmodi circulorum radii æquales sunt inter se, & ipsi circuli æquales.

In quovis autem circulo EFH, cujus planum per centrum non transit, radius GH minor est radio sphæræ CH, cum hujus quadratum æquetur quadratis CG, GH simul, adeoque sit majus solo quadrato GH.

DEFINITIO II.

11. HInc circuli, quorum plana per centrum sphæræ transeunt, dicuntur circuli sphæræ maximi.

12. Coroll. 1. *Circuli maximi se omnes bifariam mutuo secant, & communis intersectio planorum eorumdem est diameter sphæræ.*

Cum enim omnium plana per centrum transeant, sibi occurrunt in ipso centro, ac proinde parallela non sunt, adeo-

adeoque (*a*) se invicem secant in aliqua recta, quæ cum transeat per centrum sphæræ ipsis commune, intersectio & erit eorum circulorum diameter, quos proinde secabit bifariam, & erit diameter sphæræ. (a) 3.l.11.

13. Coroll.2. *Per quavis bina puncta assumpta in superficie sphæra potest duci circulus maximus, & per quodvis punctum potest duci circulus maximus dato circulo maximo perpendicularis.*

Patet primum, quia si data duo puncta conjungantur cum centro, & inter se; triangulum in eodem plano jacebit totum, (*b*) quo plano si secetur sphæra, sectio erit circulus maximus, & transibit per data duo puncta. (b) 2.l.11.

Patet secundum, quia ex illo dato puncto potest demitti perpendiculum in planum dati circuli maximi, (*c*) & conjunctis extremis ejus punctis cum centro, fit triangulum pariter jacens totum in eodem plano, quo si sphæra secetur, sectio erit circulus maximus, & perpendicularis (*d*) dato circulo maximo. (c) 11.l.11. (d) 18.l.11

DEFINITIO III.

14. D*Iameter sphæra perpendicularis plano circuli orti ex sectione sphæra, dicitur ejus axis, & extrema axis puncta dicuntur ejus poli.*

Sic Pp est axis circulorum EFH, ABD, & puncta Pp eorum poli.

15. Coroll.1. *Omnia puncta peripheria, cujuscumque circuli in superficie sphæra distant per æquales arcus circulorum maximorum ab eodem suo polo.*

Si enim assumantur bina ejusmodi puncta quæcumque H, & F, & per ea, ac per polum P ducantur (*e*) circuli maximi PHp, PFp, & radii HC, FC, HG, FG; in triangulis CGF, CGH ob omnia latera æqualia, æquales erunt anguli ad C; (*f*) ac proinde & arcus PH, PF æquales. (*g*) (e) n.13. (f) 8.l.1. (g) 26.l.3.

16. Coroll.2. *Circulus maximus ab utrolibet suo polo distat quaquaversus per quadrantem circuli maximi, & circulus, cujus aliquod punctum distat per quadrantem circuli maximi a suo polo, est maximus.*

Si enim circulus fuerit maximus ut ABD, transibit per centrum C, & radii CB, CD, qui erunt ejus intersectiones cum planis PFp, PHp, erunt perpendiculares axi PCp, qui nimirum ex ipsa sua definitione est perpendicularis toti plano ABD; ac proinde tam arcus PB, PD, quam arcus pB, pD erunt quadrantes.

Si autem circulus non fuerit maximus, ut EFH, non tran-

transibit ejus planum per centrum; ac proinde secta sphæra per centrum plano ABD parallelo ipsi EFH, erunt PB, PD, pB, pD quadrantes, adeoque PF, PH minores iis, & pF, pH majores erunt. Circulus igitur, cujus aliquod punctum a polo per quadrantem distat, non erit non maximus; ac proinde erit maximus.

DEFINITIO IV.

17. *Angulus sphæricus dicitur is, quem in superficie sphæræ continent bini arcus circulorum maximorum alicubi concurrentes; pro cujus mensura consideratur angulus rectilineus, quem continent rectæ jacentes cum iisdem arcubus in iisdem planis, & ad easdem partes, ac eos tangentes in ipso concursu.*

Sic FPH est angulus sphæricus, cui substituitur angulus rectilineus fPh, quem continent tangentes Pf, Ph.

18 Coroll. 1. *Si arcus supra arcum cadit; duos angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales.*

Nam tangens fP, cum tangente ePh duos angulos facit (a) 13.l.1 (a) aut rectos, aut duobus rectis æquales.

19. Coroll. 2. *Si bina anguli latera ultra verticem producantur; angulos ad verticem oppositos æquales continebunt.*

Si enim tangentes fP, HP producantur ultra verticem P, (b) 15.l.1. angulos ad verticem P æquales (b) continebunt.

20 Coroll. 3. *Si plana laterum fuerint sibi invicem perpendicularia, angulus erit rectus: & si angulus fuerit rectus, plana erunt sibi invicem perpendicularia.*

Si enim planum FPp fuerit perpendiculare plano HPp; (c) 16.l.3. tangens fP, quæ est perpendicularis diametro Pp (c) communi (d) n.12. eorum planorum intersectioni (d), erit perpendicularis (e) (e) def. 4. l.11. toti plano HPp, adeoque & tangenti Ph.

Si autem tangens fP fuerit perpendicularis tangenti Ph; (f) 4.l.11. cum etiam sit perpendicularis diametro Pp; erit (f) perpen- (g) 11.l.11. dicularis toti plano HPp, ac proinde (g) & planum FPp erit eidem perpendiculare.

21. Coroll. 4. *Si e quovis puncto diametri sphæræ transeuntis per verticem anguli exeant in planis ipsorum arcuum binæ rectæ ipsi perpendiculares; angulum continebunt rectilineum sphærico æqualem.*

Si enim ejusmodi rectæ fuerint GF, GH, erunt ex pa- (h) 28.l.1. rallelæ rectis Pf, Ph (h), perpendicularibus eidem diametro (i) 16.l.3. Pp (i). Ac proinde angulus FGH erit æqualis (k) angulo fPh. (k) 10.l.11

22. Coroll. 5. *Mensura anguli sphærici erit arcus circuli cujuscumque habentis polum in ejus vertice interceptus inter ejus latera.*

Secta

Secta enim sphæra plano quovis ABD, vel EFH perpendiculari ad diametrum Pp communem intersectionem planorum arcuum PF, PH, sectio erit circulus habens polum P *(a)* (a) n.14.
cujus arcus BD, vel FH interceptus lateribus PF, PH, erit mensura anguli BCD, vel EGH, qui cum contineatur radiis BC, CD, vel FG, GH perpendicularibus diametro Pp perpendiculari plano ABD, vel EFH, æquatur angulo sphærico FPH. *(b)* (b) n.21.

23. Coroll.6. *Si anguli sphærici crura producantur, iterum ita concurrunt, ut semicirculum compleant, & angulum sphæricum priori æqualem contineant.*

Cum enim PCp sit diameter utriusque arcus PF, PH, debet uterque productus transire per p; eruntque PFp, PHp semicirculi, & angulorum FpH, FPH mensura communis erit arcus BD, vel FH. *(c)* (c) n.22.

24. Coroll.7. *Circulus maximus circulo maximo perpendicularis transit per ejus polos, & si circulus maximus transit per polum circuli maximi, est ipsi perpendicularis.*

Sit enim circulus maximus PBp perpendicularis circulo maximo ABD, erit planum PBp perpendiculare plano ABD *(d)* (d) n.20.
Quare si secetur sphæra alio plano APDp per centrum C perpendiculari eidem plano ABD; erit *(e)* ipsi perpendicularis (e) 19.l.11
etiam intersectio PCp; ac proinde *(f)* P, p puncta, quæ (f) n.14.
jacent in circulo PBp, erunt poli circuli ABD.

Si autem circulus PBp maximus transeat per polum P circuli maximi ABD, transibit per ejus axem PCp ipsi perpendicularem *(f)*: ac proinde *(g)* erit ipsi perpendicularis. (g) 18.l.11

De Triangulis Sphæricis.

DEFINITIO.

25. TRiangulum *sphæricum dicitur, quod continetur in superficie sphæræ sub tribus arcubus circulorum maximorum, quæ dicuntur ejus latera.*

26. Coroll.1. *Si in triangulo sphærico bini anguli fuerint recti; latera iis opposita erunt quadrantes: & si bina latera fuerint quadrantes, anguli iis oppositi erunt recti; ac in utroque casu tertium latus erit mensura tertii anguli.*

Si enim sint anguli PBD, PDB recti, punctum P communis intersectio circulorum BP, DP erit *(h)* polus circuli (h) n.24.
BD, & PB, PD quadrantes. *(i)* (i) n.16.

Si autem arcus PB, PD fuerint quadrantes, anguli BCP, DCP erunt recti, ac proinde *(k)* recta CP perpendicularis (k) 4.l.11.
erit toti plano BCD, & iccirco *(l)* plana arcuum PB, PD (l) 18.l.11.
per-

perpendicularia erunt plano arcus BD, & anguli PBD,
(a) n. 20. PDB (*a*) recti.

In utroque autem casu cum P sit polus circuli BD, ar-
[b] n.22. cus BD est (*b*) mensura anguli PBD.

27. Coroll.2. *Si omnes anguli fuerint recti, omnia latera erunt quadrantes; & si omnia latera fuerint quadrantes, omnes anguli erunt recti.*

Cum enim bini anguli binis lateribus quibuscumque oppositi in primo casu recti sint ea ipsa latera quadrantes erunt; & pariter cum in secundo casu bina latera binis angulis quibuscumque opposita sint quadrantes, ij ipsi anguli recti erunt.

Hinc patet ejusmodi triangulorum resolutio, in quibus nullum opus est Trigonometria. Superest ut de triangulis agamus, in quibus unus angulus est rectus, quæ dicuntur rectangula, & de iis, in quibus nullus angulus est rectus, quæ obliquangula appellantur. Et in iis quidem basis dicitur latus recto angulo oppositum: in his vero latus quodlibet pro basi assumi potest.

TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

PARS I.

De Triangulis rectangulis.

Fig.38. 28. SIT triangulum DAB rectangulum ad A. Circulus la-
teris AD sit ADEF, cui latus AB, & basis DB si pro-
(c) n.23. ducantur, ita alicubi occurrent in E, & F; ut (*c*) ABE,
DBF sint semicirculi, & ACE, DCF diametri. Ducatur
{d}11 l.11 BC, tum BI perpendicularis plano ADE (*d*), quæ diametro
(e)38.l.11. AE ad angulos rectos occurret (*e*) alicubi in I: deinde IG
perpendicularis diametro DCF, & BG, quæ eidem diame-
(f)18.l.11 tro perpendicularis erit; quia planum BIG erit (*f*) perpendi-
(g) def.4. l.11. culare plano GIC, adeoque (*g*) CG perpendicularis plano
BGI, cum sit perpendicularis intersectioni IG planorum
IGB, IGC sibi invicem perpendicularium. Demum sectis
semicirculis DAF, DBF bifariam in L, & H, ducatur per L,
(h) n 23. & H (*h*) arcus circuli maximi occurrens semicirculo ABE ali-
(i) n.26. cubi in P, eruntque anguli DHL, DLH recti (*i*); ac proin-
(k) n.24. de D polus circuli LPH (*k*), & (*l*) LH mensura anguli ADB;
(l) n.22. ac ob angulum quoque LAP rectum, erit (*m*) P polus circuli
(m)n. 24. AL, & PA, PL quadrantes (*n*), ac AL mensura anguli
(n)n.16. BPH. (*o*)
[o]n 22.

29 Jam vero omnis triangulorum rectangulorum solutio,

pro-

profluet ex consideratione pyramidis, cujus vertex C basis BIG, & comparatione trianguli sphærici BAD rectanguli ad A, cum BHP rectangulo ad H. Facies omnes pyramidis sunt triangula rectangula, nam anguli BIG, BIC recti sunt ob BI perpendicularem toti plano GIC, angulus IGC per constructionem, BGC ex numero superiore. Trianguli autem sphærici PHB latus BH erit complementum basis DB trianguli DAB: basis BP complementum lateris AB: latus HP complementum arcus HL, qui mensurat angulum BDA: angulus BPH, cujus mensura arcus AL, complementum lateris AD: anguli B ad verticem oppositi æquales (a). Ex consideratione pyramidis, comparando binas facies inter se, & cum basi, eruentur tres canones: ex comparatione triangulorum DAB, BHP alii tres, quorum ope resolventur omnia triangula rectangula. Dum autem eruuntur priores tres canones habeatur ob oculos lemma 2. (a); dum eruuntur reliqui, quæ dicta sunt in comparatione singularum partium eorum triangulorum. [a] n. 19 (b) n. 3.

30. Ob angulos rectos BGC, BIC sunt BG, BI sinus angulorum BCI, BCG, sive basis BD, & lateris BA, ad radium BC; & ob angulum rectum BIG est BG ad BI, ut radius ad sinum anguli rectilinei BGI, vel sphærici D, qui lateri AB opponitur. Quare

I. *Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi.*

Ob angulos BGC, IGC rectos sunt BG, GI tangentes angulorum BCG, ICG, sive arcuum BD, AD ad radium CG: & ob angulum rectum BIG, est BG ad GI, ut radius ad sinum anguli GBI, sive ad cosinum anguli rectilinei G, vel sphærici D, qui adjacet lateri AD. Quare

II. *Radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis.*

Ob angulos rectos CGI, CIB est IG sinus anguli ICG, sive arcus AD, & IB tangens anguli ICB, sive arcus AB ad radium CI, & ob angulum BIG rectum est GI ad IB, ut radius ad tangentem anguli rectilinei BGI, sive sphærici D, cui adjacet DA, & opponitur AB. Quare

III. *Radius ad tangentem anguli, ut sinus lateris adjacentis ad tangentem oppositi.*

Ex can. 1. Radius ad sinum anguli P, vel arcus AL, sive cosinum lateris AD, ut sinus BP, sive cosinus lateris AB ad sinum BH, sive cosinum basis BD. Quare

IV. *Radius ad cosinum unius lateris, ut cosinus alterius ad cosinum basis.*

Ex can. 1. eodem. Radius ad sinum anguli PBH, sive ABD,

ABD, ut sinus BP, sive cosinus lateris AB adjacentis ipsi angulo ad sinum PH, sive cosinum HL, vel anguli D, qui ipsi AB opponitur. Quare

V. *Radius ad sinum anguli adjacentis, ut cosinus lateris ad cosinum anguli oppositi.*

Ex can 3. Radius ad tangentem anguli B, ut sinus BH, vel cosinus basis BD ad tangentem HP, sive cotangentem arcus LH, vel anguli D. Quare

VI. *Radius ad tangentem unius anguli, ut cosinus basis ad cotangentem alterius.*

31. Antequam doceamus usum eorum canonum, tradendæ sunt duæ regulæ, per quas innotescat, cujus speciei debeant esse latera, & anguli inventi. Dicuntur autem ejusdem speciei, quæ simul excedunt gradus 90., vel ab iis simul deficiunt; diversæ speciei, quorum alterum deficit, alterum excedit.

Fig. 39. Manentibus reliquis, per polum P, & punctum D ducatur (a) arcus circuli maximi, qui erit (b) perpendicularis ad ADE, & semicirculo ADE secto bifariam in I, ducatur (a) arcus BI, qui cum polus circuli ABE sit (b) in circulo ADE sibi perpendiculari, & (c) ipsum bifariam secet, ac proinde sit in I; erit (c) quadrans. Ducatur quoque arcus Bd per quodvis punctum d jacens respectu I ad partes oppositas D (d) & polo B sit arcus circuli maximi FIf occurrens arcubus BD, Bd in F & f, qui ob BI quadrantem erit (e) circulus maximus, & abscindet BF, Bf quadrantes, ac constituet (f) angulos BIF, BIf rectos.

(a) n. 13. (b) n. 24. (c) n. 16. (d) n. 13. (e) n. 16. (f) n. 24.

32. Si latus AB sit minus quadrante AP; erit angulus ADB minor semper recto ADP, cujus erit pars. Si autem illud sit majus, & hic major erit, utcumque se habuerit alterum latus AD. Quare

Reg. 1. *Latera sunt ejusdem speciei cum angulis oppositis.*

Si latus AB sit minus quadrante AP, erit angulus AIB minor per reg. 1. recto, adeoque minor angulo FIB, angulus vero BId major recto BIf; & propterea basis BD minor quadrante BF, & Bd major quadrante Bf: ac proinde in triangulis BAD, BED, ubi latera sunt ejusdem speciei, basis est quadrante minor; in triangulis AdB, EdB, ubi ea sunt diversæ speciei, est quadrante major. Quoniam vero per reg. 1. anguli sunt ejusdem speciei cum lateribus oppositis; possunt pro illis substitui. Quare

Reg. 2. *Si duo latera, vel duo anguli, vel latus cum angulo adjacente fuerint ejusdem speciei; basis erit quadrante minor; si diversæ major: & viceversa.*

33. Jam

33. Jam vero quotiescumque proponitur resolvendum triangulum rectangulum ex duobus angulis, duobus lateribus, & basi dantur duo præter angulum rectum, & quæritur tertium aliquid. Ut id inveniatur, oportet primo invenire aliquam ejus functionem nimirum sinum, tangentem, cosinum, vel cotangentem. Secundo nosse cujus speciei esse debeat: nam complementa ad semicirculum communes functiones habent. Primum semper innotescet per canones, secundum per regulas semper, præter casum, in quo detur latus cum angulo opposito; tunc enim reliqua poterunt esse vel minora gradibus 90., vel majora. Sic in fig.5. in triangulis BAD, BAF, latus BA commune est, anguli ad D & F æquales (a), latus reliquum, basis, & reliquus angulus in uno complementa ad gradus 180. eorum, quæ sunt in altero: ac proinde is casus in se indeterminatus est, & ambiguus.

(a) n 23.

34. In 6. Canonibus adsunt omnes combinationes earum 5. anguli partium, quæ dari possunt, & quæri præter angulum rectum, cum ternæ accipiuntur: & utcumque dentur duæ ex iis tribus, quæ sunt in eodem canone, dabitur functio aliqua tertiæ; nam e quatuor terminis proportionalibus, qui in eo canone ponuntur, unus erit radius, duo erunt functiones datæ, & reliqua erit functio quæsita: & in quacumque proportione datis tribus terminis quibuscumque, innotescit & reliquus. Cum enim productum sub extremis æquetur producto sub mediis (b); si reliquus ille fuerit extremus habebitur, dividendo productum ex mediis per alterum extremum, & si fuerit extremus habebitur, dividendo productum ex extremis per alterum medium. Species autem per alteram e regulis facile eruetur.

(b) 16.1.6.

35. Apponemus hic combinationes suo ordine, & singulis adscribemus canonem ad quem pertinent, & regulam. Regula secunda tres habet partes, quarum singulas adnotabimus.

1. Basis cum utroque latere.	Can.4.	Reg.2. pars 1.
2. Basis cum utroque angulo.	Can.6.	Reg.2. pars 2.
3. Basis cum latere, & angulo adjacente.	Can.2.	Reg.2. pars 3.
4. Basis cum latere, & angulo opposito.	Can.1.	Reg.1., vel nulla in casu ambiguo.
5. Utrumque latus cum altero angulo.	Can.3.	Reg.1., vel nulla in casu ambiguo.
6. Uterque angulus cum altero latere.	Can.5.	Reg.1., vel nulla in casu ambiguo.

36. Detur ex. gr. basis (gr. 57. 25′.) cum latere (gr. 41. 16′.) & quæratur angulus adjacens lateri. Tria, quæ hic combinantur, sunt basis cum latere, & angulo adjacente. Huic combinationi, quæ est 3. respondet canon 2., & regulæ 2. pars 3. Ex canone 2. habes: *Radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis.* Datur 1. terminus (10000000) tertius (15646590), quartus (8774912). Igitur erues, & secundum, nimirum cosinum anguli ($\frac{8774912 \times 10000000}{15646590} = 5608194$, qui est sinus gr. 34. 6′. 49″., cosin. gr. 55. 53′. 11″., vel grad. 124. 6′. 49″.) Ex secunda parte reg. 2. habes convertendo, si basis fuerit quadrante minor, (ut hic est), fore latus, & angulum adjacentem ejusdem speciei; si major, diversæ. Nosti speciem basis, & lateris (hic nimirum quadrante minoris). Invenies igitur, & speciem anguli (nimirum hic acuti). Igitur & angulum (gr. 55. 53′. 11″.) Eodem pacto in reliquis operare.

37. Singulæ combinationes continent terna problemata, cum nimirum quodlibet ex iis tribus quæri possit ex datis reliquis duobus. Quare omnia simul essent 18. Sed in prima, & secunda sunt bina tantum diversa. Nam cum data basi, & latere, vel angulo, quæritur alterum latus, vel alter angulus; idem erit problema utrumvis laterum, vel angulorum detur, ut ex eo inveniatur alterum. Quare ea problemata redu untur ad 16., quibus continetur omnis resolutio triangulorum rectangulorum. In postremis tribus combinationibus continentur 3. problemata indeterminata circa speciem partis quæsitæ; cum nimirum dato latere, & angulo opposito quæritur basis, vel alterum latus, vel alter angulus, in quibus tantum deserimur ab iis regulis, cætera omnia, quæ in se determinata sunt, complectentibus.

PARS II.

De Obliquangulis.

38. Obliquangula reducuntur ad rectangula ope perpendiculi demissi (*a*) in unum e lateribus consideratum ut basim. Continet 6. casus; cum nimirum possint quæri reliqua 1.° datis duobus lateribus cum angulo intercepto, 2.° cum angu-

(a) n. 13.

angulo alteri eorum opposito, 3.° datis duobus angulis cum latere intercepto, 4.° cum latere alteri eorum opposito, 5.° datis tribus lateribus, 6.° datis tribus angulis.

39. Primus, & tertius casus erunt semper possibiles, & determinati dummodo singula latera, & anguli, qui dantur, non excedant gradus 180. Facto enim angulo A, ut libuerit, & assumptis, utlibuerit, lateribus AD, AB, poterit per B, & D duci (*a*) circulus maximus, qui est determinatus a plano transeunte per B, D, & centrum sphæræ. Assumpto vero latere AD, utlibuerit, & factis angulis A, D, pariter, utlibuerit, occurrent sibi alicubi semicirculi ABa, DBd in unico puncto B, cum circuli toti debeant se invicem secare (*b*) in binis punctis e diametro oppositis, ac proinde altera intersectio debeat jacere in Hemisphærio opposito. F.40. (a) n.13. (b) n.12.

40. Secundus, & quartus possunt habere vel duas solutiones, vel unam, vel nullam. Concipiatur enim compleri circulus lateris AD trianguli ABD, & stante angulo A cum latere AB, sit semicirculus EBe perpendicularis circulo ADa, quem punctum D perpetuo percurrat, variato latere BD, & angulo D, ac semicirculi EAe, Eae secentur bifariam in i & I.

41. Ex can. 4. est radius ad cosinum EB, ut cosinus ED ad cosinum BD. Quare stante radio, & cosinu BE, erit cosinus BD, ut cosinus ED. Cosinus ED est maximus puncto D abeunte in E, ubi æquatur radio, evanescente ED: decrescit utrinque usque ad I & i, ubi fit nullus: cum nimirum quadrantis EI, & Ei nullum sit complementum. Tum fit negativus, & crescit usque ad e, ubi iterum fit æqualis radio. Quare cosinus BD, & ipsius BD complementum erunt maxima in E, & e: ab E ad I & i decrescent, ubi fient nulli: tum crescent usque ad e, & in paribus distantiis hinc inde a puncto E vel e ejusdem magnitudinis erunt.

42 Ex can. 3. est radius ad tangentem anguli D, ut sinus ED ad tangentem BE. Igitur datis radio, & tangente BE, erit tangens anguli D in ratione inversa sinus ED. Quare anguli ad D, qui, puncto D abeunte in E, sunt utrinque recti, ab E ad I, vel i variantur ita; ut acutus decrescat, obtusus crescat, decrescente tangente, adeoque eorum semidifferentia, quæ cum habeatur (*c*) demendo minorem a semisumma, seu a quadrante, vel demendo quadrantem a majore, est complementum utriuslibet, augetur usque ad I, vel i; ubi ED fit quadrans; ac proinde evadit D polus circuli EBe (*d*), & angulos ipsos metiuntur (*e*) arcus EB, Be, tum iterum aucta tangente decrescit complementum, quod in e fit nullum, ubi ipsi anguli iterum evadunt recti. (c) n.3. (d) n.16. (e) n.22.

43. Hinc si in secundo casu complementum lateris BD oppositi angulo dato A, & in quarto casu complementum anguli D oppositi lateri dato AB, fuerit majus complemento BE, qui arcus ex datis AB, & A datur per combin. 1. casus erit impossibilis. Si fuerit minus complemento EB, sed adhuc majus complemento ibi lateris AB adjacentis dato angulo, hic anguli A adjacentis dato lateri; solutio erit duplex ibi circa E, hic circa I, vel nulla, prout fuerit ejusdem speciei ibi latus BD cum latere AB, hic angulus D cum angulo A, vel diversæ. In reliquis casibus unica, & unica pariter si punctum D abeat ibi in E, & latus datum BD æquetur BE, hic in I, & angulum D mensuret arcus BE. Verum hæc omnia ex ipsa solutione innotescent facilius, & quando duplex occurret solutio; oportebit, prius nosse speciem alterius anguli in secundo casu, vel alterius lateris in quarto ad problema determinandum.

44. Postremi duo casus semper erunt determinati, quod ex ipsa solutione patebit, & si impossibilitatem involvant; deprehendetur, ut & in aliis casibus ex eo, quod sinus, aut cosinus alicujus arcus obveniet radio major.

45. Consid retur jam latus quodlibuerit AD, ut basis, in quam cadat arcus perpendicularis BE, sive intra triangulum, sive extra ipsum producta basi. Dicantur AE, DE segmenta basis, primum adjacens lateri AB, & angulo A, & oppositum lateri BD, & angulo D, secundum adjacens lateri BD & angulo D, & oppositum lateri AB, & angulo A, & illud quidem consideretur, ut positivum, cum cadit versus D, ut negativum, cum puncto E cadente citra A, abit ad partes oppositas: hoc autem positivum versus A, & negativum ex parte opposita. Anguli ABE, DBE dicantur segmenta verticis: primum adjacens lareri AB, segmento basis AE, & angulo A, oppositum lateri BD, segmento basis BE, & angulo D; contra verò secundum & eodem modo considerentur positiva, vel negativa.

46. Deducemus jam ex primis 6. alios 7. canones, quorum ope, & ope tertiæ regulæ deductæ ex prima, solvemus omnes casus obliquangulorum triangulorum. Applicabimus nimirum canones, & regulas jam expositas triangulis rectangulis AEB, DEB, & quidquid de litteris majoribus dicetur, de minoribus etiam intelligatur.

47. Ex can. 1. Radius ad sinum anguli A, ut sinus AB ad sinum BE, & radius ad sinum anguli D, ut sinus BD ad sinum BE. Ergo ex æquo sinus anguli A ad sinum D, ut sinus BD ad sinum AB. Quare

VII.

VII. *Sinus angulorum, ut sinus laterum oppositorum.*

Ex can. 2. Radius ad cosinum anguli ABE, ut tangens AB ad tangentem BE, & radius ad cosinum anguli DBE, ut tangens BD ad tangentem BE. Ergo ex æquo cosinus anguli ABE ad cosinum DBE, ut tangens DB ad tangentem BA. Quare

VIII. *Cosinus segmentorum verticis, ut tangentes laterum oppositorum.*

Ex can. 3. Radius ad tangentem anguli A; ut sinus AE ad tangentem BE, & radius ad tangentem anguli D, ut sinus DE ad tangentem BE. Ergo ex æquo tangens anguli A ad tangentem D, ut sinus DE, ad sinum AE. Quare

IX. *Sinus segmentorum basis, ut tangentes angulorum oppositorum.*

Ex can. 4. Radius ad cosinum BE ut cosinus AE ad cosinum AB, & ut cosinus DE ad cosinum DB. Ergo alternando cosinus AE ad cosinum DE, & ut cosinus AB, ad cosinum DB. Quare

X. *Cosinus segmentorum basis, ut cosinus laterum adjacentium.*

Ex can. 5. alternando, radius ad cosinum BE, ut sinus ABE ad cosinum A, & ut sinus DBE ad cosinum D. Ergo alternando sinus ABE ad sinum DBE, ut cosinus A ad cosinum D. Quare

XI. *Sinus segmentorum verticis, ut cosinus angulorum adjacentium.*

48. Ope horum 5. canonum ex segmentis datis, vel ex se mutuo invenientur latera, vel anguli, ut patebit inferius. Iccirco combinantur.

7.	Latera, & anguli inter se	can. 7.
8.	Latera, & segmenta verticis	can. 8.
9.	Latera, & segmenta basis	can. 10.
10.	Anguli, & segmenta verticis	can. 11.
11.	Anguli, & segmenta basis.	can. 9.

49. Segmenta ipsa facile invenientur in primis 4. casibus ope priorum 6. canonum, ut mox patebit. Pro duobus postremis invenientur per duos sequentes, qui eruuntur ex can. 10, & 11, ac ex præmisso lem. 3.

50. Ex can. 10. sumendo summas, & differentias terminorum, erit summa cosinuum segmentorum basis ad differentiam, ut summa cosinuum laterum ad differentiam. Quare (a) (a) n. 7.

XII. *Cotangens semisummæ segmentorum basis, sive cotangens dimidiæ basis, ad tangentem semidifferentiæ, ut cotangens semisummæ laterum ad tangentem semidifferentiæ.*

Ex can. 11. pariter summa sinuum segmentorum verticis ad differentiam, ut summa cosinuum angulorum ad differentiam. Quare (a)

(a) n. 7.

XIII. *Tangens semisummæ, segmentorum verticis, sive tangens dimidii anguli verticalis ad tangentem semidifferentiæ, ut cotangens semisummæ angulorum ad basim ad tangentem semidifferentiæ.*

51. Neperus pro can. 12. proponit hunc. *Tangens dimidiæ basis, ad tangentem semisummæ laterum, ut tangens semidifferentiæ ipsorum ad tangentem semidifferentiæ segmentorum basis*; quem demonstrat ex principiis conicis. Eruitur ex can. 12. alternando primum, tum pro ratione cotangentis dimidiæ basis ad cotangentem semisummæ laterum, ponendo rationem tangentis hujus ad tangentem illius. Cum enim (b) factum sub tangente, & cotangente cujusvis arcus æquetur quadrato radii; erunt tangentes in ratione inversa cotangentium. Sed ad praxim hic noster, qui immediate deducitur, est æque accommodatus.

(b) n. 5.

52. Ex Reg. 1. tam angulus BAE, quam angulus BDE sunt ejusdem speciei, ac arcus BE. Igitur si anguli BAD, BDA fuerint ejusdem speciei; jacebit punctum E intra basim AD, congruentibus angulis BDA, BDE; si fuerint diversæ, cadet extra. Quare

Reg. III. *Si duo anguli ad basim fuerint ejusdem speciei; perpendiculum intra basim cadet; si diversæ extra.*

53. *Casus* 1. Dentur latera AB, AD cum angulo intercepto A. Duo quæri possunt. Primò quæratur latus tertium BD. Fac basim utrumvis duorum laterum, ut AD. Ex datis AB, & A quære AE per combinationem 3.: habebis & ED ob datum AD, Ex segmentis AE, ED, & latere AB invenies cosinum BD per combin. 9. in can. 10. Ex dato A habes speciem B per reg. 1., ex ipsa, & specie ED habes speciem BD per reg. 2.

Secundò quæratur alter angulorum D. Fac basim latus datum ipsi adjacens AD. Quære segmenta AE, ED ut prius: ex iis & angulo A per combin. 11. can. 9. invenies tangentem D. Si AE excedatur ab AD, species D erit eadem ac A; si excedat erit diversa per reg. 3.

54. *Casus* 2. Dentur latera AB, BD, cum angulo A opposito alteri, ut BD: tria quæri possunt.

Primò quæratur latus AD. Fac ipsum basim: invenies AE, & speciem BE, ut in primo casu: tum ex datis lateribus AB, BD, & segmento AE invenies per combin. 9. can. 10. cosinum ED. Ex specie BE, & BD invenies ejus speciem per reg. 2. Sed quoniam aliquando poterit haberi duplex solutio; hinc inde

inde ab E subtrahe ED ab EA, & habebis primam; adde, & habebis secundam. Si forte AD ex subtractione evaserit negativa ob AE ipsa ED minorem, vel ex additione semicirculum excesserit; eam solutionem rejice.

Secundò quæratur angulus ABD interceptus. Ex datis AB, & A quære segmentum verticis ABE per combin.2. Ex lateribus AB, BD, & segmento verticis ABE invenies per combin.8. can.8. cosinum EBD. Ex BD dato, & specie BE inventa, ut prius, invenies speciem DBE per reg.2. Subtrahe EBD ex ipso EBA & habebis primam solutionem; adde & habebis alteram. Si angulus ABD ex subtractione evaserit negativus, vel ex additione major duobus rectis; eam solutionem rejice.

Tertiò quæratur angulus D oppositus lateri AB. E lateribus AB, BD, & angulo A invenies per combin 7. can.7. sinum D. Species in secunda solutione erit eadem ac A, in prima diversa per reg. 3.

55. *Casus* 3. Dentur anguli A, & B cum latere intercepto AB: Duo quæri possunt. Primo quæratur latus utrumvis BD. Fac basim alterum AD. Quære angulum ABE, ut in 2. parte casus primi. Habebis & EBD, ob datum ABD. Ex iis datis & latere AB invenies per combin.8. can.8 tangentem BD. Speciem BE ex specie A habes per reg.1. Ex ipsa & specie EBD habes speciem BD per reg.2.

Secundò quæratur angulus D. Fac basim utrunque laterum non datorum, ut AD. Quære segmenta verticis, ut prius. Ex ipsis, & angulo A invenies per combin.10. can.11. cosinum D. Is erit ejusdem speciei cum A, si ABE fuerit minor, quam ABD; diversæ, si major per reg.3.

56. *Casus*.4. Dentur anguli A, & D cum latere AB opposito alteri, ut D. Tria quæri possunt.

Primò quæratur latus AD interceptum, Fac ipsum basim. Ex datis AB, & A quære AE per combin.3. Ex angulis A, D, & AE segmento basis invenies per combin.11. can.9. sinum ED. Species erit indeterminata, & poterit esse duplex solutio circa I, assumpta utralibet ejus specie. Ipsi AE adde utrunque ED; si anguli A & D fuerint ejusdem speciei; subtrahe si diversæ per reg.3., & habebis utranque solutionem. Si AE ex subtractione evaserit negativa, vel ex additione major semicirculo; eam solutionem rejice.

Secundò quæratur tertius angulus ABD. Ex datis AB, & A quære ABE per combin.2. ex angulis A, D, & ABE segmento verticis invenies per combin.10 can.11. sinum EBD. Erit pariter EBD ambiguæ speciei, & uterque addendus ipsi ABE, si anguli A, & D fuerint ejusdem speciei; subtrahendus, si di-si diversæ per reg.3. Si angulus ABD ex subtractione obvenerit negativus, vel ex additione major duobus rectis; eam solutionem rejice.

Tertiò quæratur latus BD. Ex datis angulis A, D & latere AB, invenies sinum BD per combin. 7. can.7. Ipse arcus erit speciei ambiguæ. Si detur præterea ejus species; ex ipsa & ex specie BE jam toties inventa, determinabis speciem ED, & EBD per reg.2.

57. *Casus* 5. Dentur 3. latera, & quæratur quilibet angulus, ut A. Fac basim alterum e lateribus ipsi adjacentibus ut AD. Ex datis AB, BD, & dimidia basi AD invenies per can.12. tangentem semidifferentiæ segmentorum AE, ED, quam sumes quadrante non majorem. Adde ipsam dimidiæ

(a) n.3. basi AD, & subtrahe, invenies segmenta AE, ED (*a*). Sume pro AE adjacente ipsi AB segmentum, quod magis, vel minus distet a quadrante, prout latus adjacens AB distabit magis, aut minus, quam oppositum BD: nam per can.10: *Cosinus segmentorum basis sunt, ut cosinus laterum adjacentium*, & arcus quadranti propioris minor est cosinus. Ex AB, & AE invenies angulum A per combin.3. Sed si AE habitum fuerit per subtractionem, & obvenerit negativum puncto E cadente citra A, angulus BAD jacebit ad partes oppositas angulo BAE, adeoque erit diversæ speciei.

58. *Casus* 6. Dentur tres anguli, & quæratur quodlibet latus, ut AB. Fac basim utrumlibet ex reliquis, ut AD. Ex datis A, & D, ac dimidio ABD invenies per can.13. tangentem semidifferentiæ segmentorum ABE, DBE, quam sumes quadrante non majorem. Adde ipsam dimidio angulo ABE, & subtrahe: invenies segmenta verticis ABE, DBE

(b) n.3. (*b*) Sume pro ABE adjacente ipsi A segmentum, quod magis, aut minus distet ab angulo recto, prout e contrario angulus A adjacens minus, aut magis distabit ab eodem, quam oppositus D: nam per can.11. *Sinus segmentorum verticis sunt, ut cosinus angulorum adjacentium*, & arcus quadranti propioris major est sinus, minor cosinus. Ex angulis A, & ABE invenies latus AB per combin.2. Sed si ABE habeatur per subtractionem, & obvenerit negativum, puncto E cadente citra A; angulus BAE, ex quo, & ex ABE æstimatur species AB, jacebit ad partes oppositas, eritque diversæ speciei, ac datus BAD.

59. Si in quinto casu habita tangente semidifferentiæ, segmentorum basis, sumptus fuisset arcus quadrante major; eadem prorsus solutio obvenisset. Sit enim arcus AD bifa-

(c) n.2. riam sectus in L, ut sint (*c*) AL, LD semisummæ, LE semidifferentia, AE segmentum factum ex additione semisum-

mæ,

mæ, & semidifferentiæ, DE ex subtractione. Si pro LE sumptus fuisset arcus LAe; segmentum ex additione fuisset DLAe (vel De, quoniam semicirculum excedit) ex subtractione Ae negativum, & proinde cadens ab A versus d. Cumque ipsius complementum sit idem, ac AE; id fuisset adjacens angulo A, & pro triangulo BAE, solvendum fuisset triangulum BAe, & angulus BAD semper idem obvenisset ob functiones arcuum AE, Ae communes. Præstat tamen sumere pro semidifferentia arcum quadrante non majorem; tum quia sine nova subtractione occurrit immediatè in tabulis; tum quia eo pacto nunquam exceditur semicirculus in additione ob AD minorem semicirculo, & propterea AL, DL quadrante minores. Idem accidit in 6. casu. Unde patet utrumque determinatum esse, & unicam solutionem admittere.

60. Si in triangulo ABD, vel duo latera AB, BD, vel duo anguli A, D æquarentur; brevior evaderet solutio, sumendo pro basi latus AD interceptum lateribus, vel angulis æqualibus. Nam perpendiculum BE dividet bifariam & ipsam basim, & angulum basi oppositum. Cum enim in triangulis ABE, DBE ex data basi AB, & latere BE idem proveniat in can.4 cosinus lateris AE, & ex can.2. cosinus anguli ABE, ac ex basi æquali BD; & eodem latere BE cosinus lateris BE, & anguli DBE; ac ob speciem basium BD, BA eandem, & eandem lateris BE sit per reg.3. eadem eorundem species; erit semper AE æqualis ED, & angulus ABE æqualis angulo DBE; & similis est demonstratio pro casu æqualium angulorum A, & D. Hinc vero in triangulo rectangulo AEB præter latus AB, vel angulum A; innotescet segmentum AE, vel ABE, prout data fuerit basis AD, vel angulus ABD.

61. Si alterum latus tantum detur quadranti æquale, ut AB; capto AE quadrante, ducatur per E, & B arcus EB (a); eruntque anguli ABE, AEB recti (b) & latus BE mensura anguli A (c); ac proinde arcus ED, & angulus EBD, erunt complementa lateris AE, & anguli ABD. Datis igitur partibus trianguli ABD, dantur partes trianguli rectanguli BED, & hoc resoluto illud resolvitur.

(a) n.13.
(b) n. 16.
(c) n. 22.

62. Omnes hi canones, & universa praxis satis sunt apta pro adhibendis logarithmis: tum quia nunquam adhibetur summa, aut differentia sinuum, & cosinuum, quæ immediatè per logarithmos non habetur: tum quia omissæ sunt secantes, quarum logarithmi in pluribus tabulis non extant eo, quod facile eruantur ex logarithmis cosinuum, & nusquam occurrit usus sinuum versorum, qui difficilius e tabulis

lis eruuntur. Hæc autem methodus multis aliis præstare videtur tum brevitate, & ordine quodam, ac nexu demonstrationum; cum nec sectionum conicarum doctrina sit opus, nec transformatione quadam molesta trianguli datorum angulorum in triangulum datorum laterum, & alia ex aliis theoremata sponte fluant: tum quod per regulas expeditissimas, quotiescumque partis quæsitæ species in se determinata est, statim innotescit.

63. Ut autem unico conspectu pateant omnia, quæ ad usum spectant; apponemus hic canones cum combinationibus, & regulas.

Pro triangulis rectangulis.

I. *Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi.*

II. *Radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis.*

III. *Radius ad tangentem anguli, ut sinus lateris adjacentis ad tangentem oppositi.*

IV. *Radius ad cosinum unius lateris, ut cosinus alterius ad cosinum basis.*

V. *Radius ad sinum anguli adjacentis, ut cosinus lateris ad cosinum anguli oppositi.*

VI. *Radius ad tangentem unius anguli, ut cosinus basis ad cotangentem alterius.*

Reg. I. *Latera sunt ejusdem speciei cum angulis oppositis.*

Reg. II. *Si duo latera vel duo anguli, vel latus cum angulo adjacente fuerint ejusdem speciei; basis erit quadrante minor; si diversæ, major; & vice versa.*

Combin.	1. Basis cum utroque latere:	Can.4.	Reg.2. pars 1.
	2. Basis cum utroque angulo:	Can.6.	Reg.2. pars 2.
	3. Basis cum latere, & angulo adjacente:	Can.2.	Reg.2. pars 3.
	4. Basis latere, & angulo opposito:	Can.1.	Reg.1. vel nulla in casu ambiguo.
	5. Utrunque latus cum altero angulo:	Can.3.	
	6. Uterque angulus cum altero latere:	Can.5.	

Pro

Pro Obliquangulis.

VII. *Sinus angulorum, ut ſinus laterum oppoſitorum.*

VIII. *Coſinus ſegmentorum verticis, ut tangentes laterum oppoſitorum.*

IX. *Sinus ſegmentorum baſis ut tangentes angulorum oppoſitorum.*

X. *Coſinus ſegmentorum baſis, ut coſinus laterum adjacentium.*

XI. *Sinus ſegmentorum verticis, ut coſinus angulorum adjacentium.*

Reg III. *Si duo anguli ad baſim fuerint ejuſdem ſpeciei perpendiculum intra baſim cadet; ſi diverſæ, extra.*

	7. Latera, & anguli.	can.7.
	8. Latera, & ſegmenta verticis.	can.8.
Combin.	9. Latera, & ſegmenta baſis.	can.10.
	10. Anguli, & ſegmenta verticis.	can.11.
	11. Anguli, & ſegmenta baſis.	can.9.

Pro inveniendis ſegmentis in caſu datorum laterum, vel angulorum.

XII. *Cotangens dimidiæ baſis ad tangentem ſemidifferentiæ, ſegmentorum, ut cotangens ſemiſummæ laterum ad tangentem ſemidifferentiæ.*

XIII. *Tangens dimidii anguli verticalis ad tangentem ſemidifferentiæ ſegmentorum, ut cotangens ſemiſummæ angulorum ad baſim ad tangentem ſemidifferentiæ.*

SECTIO

SECTIONUM CONICARUM SYNOPSIS.

I.

PER fixum punctum A, extra planum circuli BED acceptum transiens recta linea BAF, utrinque indefinite producta, si per ejus circuli peripheriam circumducatur, illam perpetuo radens usque dum in eumdem situm redeat, a quo moveri cœpit: utraque superficies ex hoc lineæ motu hinc inde a puncto fixo A, resultans conica nuncupatur.

II.

Et solida ex his superficiebus ad circulum BED, vel huic oppositum b e d, terminatis comprehensa coni appellantur.

III.

Tam superficiei conicæ, quam ipsius coni vertex dicitur fixum illud punctum A.

IV.

Ejusdem autem coni basis est ipse circulus, BED, ad quem terminatur.

V.

Linea, quæ verticem coni A, cum centro C, suæ basis circularis conjungit, axis est coni.

VI.

Qui axis, si perpendicularis fuerit ad planum basis conus ille rectus vocabitur.

VII.

VII.

Si vero fuerit axis ad planum basis oblique inclinatus, conus ille scalenus erit.

Consectaria.

1. Patet hinc utramque conicam superficiem, BAD, dAF ad communem verticem, A contrapositas, in infinitum extendi posse, producta utcumque linea illa genitrice harum superficierum.

2. Sumpto quolibet puncto H in conica superficie, recta illud conjungens cum vertice A, in eadem conica superficie jacebit, congruet enim cum recta EA, quæ superficiem illam sua circumvolutione describens per quodvis ejus punctum transit, adeoque in idem punctum H impinget.

3. Unde, & quælibet recta AH, jungens verticem coni, cum aliquo puncto H, ejus superficiei conicæ producta in peripheriam basis, ad aliquod ejus punctum, E, pertinget.

Fig. 2. 4. At si duo puncta H, I in eadem conica superficie accepta fuerint, recta HI, si per verticem A non transierit intra conum cadet; nam junctis ad verticem A, rectis AH, AI, & ad basis (*a*) peripheriam productis, cui incident ad puncta E, B; utique juncta EB, intra circulum (*b*) cadet, ergo planum trianguli ABE intra conum immergitur, quia secat ejus basim itaque recta, HI, in hoc plano (*c*) existens, cum jungat duo puncta laterum talis trianguli, intra conum & ipsa manebit sua illa portione dictis punctis interjecta; quamquam si hinc inde (versus H, & I) producatur, utique extra conicam superficiem se extendet.

(a) Ex consect. 3.
(b) 2 III. Elem
(c) 12. XI. Elem.

5. Si conus quolibet plano per verticem A transeunte secetur, sectio triangulum erit; nam utraque ipsarum linearum AB, AE, aut AB, AD, quæ sunt communes sectiones superficiei conicæ, & planorum ABE, ABD, ipsam secantium semper congruit cum ipsa recta mobili AB, transeunte per eadem puncta B, E, D, dum conicam generat superficiem, & communis sectio plani secantis cum plano basis, est pariter recta (*d*) EB, vel BD, ergo ABE, ABD, sunt (*e*) triangula rectilinea.

(d) 3. XI. Elem.
(e) Def. 24. I. El.

Scho-

Scholion.

I.

SI de his quoque triangularibus coni sectionibus, non de curvis dumtaxat agendum hic esset; consideranda forent triangula sive plano per axem transeunte genita, ut ABD, AFE, quæ semper invicem æqualia erunt in cono recto, ob æquales eorum bases nempe diametros BD, FE, & æqualem altitudinem axis AC, perpendicularis plano, adeoque & omnibus rectis per C, transeuntibus (*a*) sive extra axem trajecto plano ad chordas BE, aut BL, protensa ex vertice A, triangula ABE, ABL, ob latera AB, AE, AL, semper (*b*) æqualia; quippe eorum quadrata, æquantur quadrato axis AC, & quadrato radii circularis CB, aut CE, aut CL, (quia axis AC, basi conicæ normalis, lineis quoque (*c*) CB, CE, CL, normalis erit); sed inæqualis magnitudinis ob inæquales bases BE, BL, quæ cum æqualibus lateribus junctæ, angulos sibi ad verticem trianguli oppositos, BAE, BAL, inæquales efficiunt (*d*) quorum sinus recti EN, LO, pariter (1) inæquales sunt, & ad communem basim AB, relata triangula, ABE, ABL, erunt (*e*) ut eorum altitudines inæquales EN, LO

Fig 3. (a) Def. 3. XI. Elem. [b] 47. I. Elem. (c) Def 3. XI. Elem. (d) 25. I. Elem. (e) Corol. 1. VI El.

II.

Itaque si angulus verticalis, BAD, trianguli per axem transeuntis rectus fuerit, aut acutus, reliquorum triangulorum extra axem trajectorum anguli, BAE, BAL, subinde minores fient prout minori chordæ BE, BL, insistent (*f*); ideo-

(f) 25. I. Elem.

---

(1) *Sinus recti EN, LO, pariter inæquales sunt; nam, cum BAL, BAE, sint triangula isoscelia, angulique BAL, BAE, sint inæquales, si triangula ABL, ABE, in uno plano constituta intelligantur, radioque, AL, circulus describatur, is utique per E & B transibit; porro, cum angulus BAL, major sit angulo BAE, erit arcus BL* (g) *major arcu BE; adeoque & ejus duplus LEBel, arcu EBe (qui arcus BE, duplus est) major erit; quare & chorda Ll, chordam Ee superabit, sed sinus, seu perpendicula LO, EN, illarum chordarum sunt dimidia* (h) *ergo & perpendiculum LO, perpendiculo EN, majus erit.*

An. Fig. 1 (g) Schol. 23. I. El. (h) 3. III. Elem.

ideoque omnium triangulorum maximum erit (2) per axem transiens; & reliqua subinde minora, prout magis ab axe recedent minorem chordam pro basi habentia. Si vero angulus verticalis per axem traducti trianguli obtusus fuerit, non erit hoc triangulum omnium maximum, sed aliud ipso majus extra axem poterit determinari. Quadratum enim diametri, BD, oppositi angulo obtuso BAD, majus erit quadratis laterum (a) AB, AD, ergo aliqua chorda BL minor diametro inveniri poterit (3), cujus quadratum æquale sit duobus quadratis laterum AB, AL; ubi angulus BAL, rectus (b) evadet; ideoque triangulum BAL, extra axem majus erit altero per axem transeunte; accepto enim latere AB, pro basi, erit trianguli BAL, altitudo LA, quæ æquatur AD, & major est perpendiculari (c) DM (quia DA opponitur angulo recto DMA), quæ esset altitudo alterius trianguli BAD; per axem nempe sinus rectus anguli DAM, consequentis ad obtusum BAD; & hac ratione triangulum BAL, cujus angulus rectus sit ad verticem coni, majus erit quolibet alio triangulo sive per axem, sive extra axem transeunte, ob maximam omnium altitudinem; quod si fiat extra axem triangulum BAE, cujus angulus in A, fuerit acutus, æqualis DAM, consequenti ad illum obtusum trianguli per axem BAD; erit ipsum triangulum BAE, æquale (4) BAD, quia perpendicularis EN, æquabitur alteri DM, cum sit sinus anguli æqualis tam hæc, quam illa.

(a) 12. II. Elem.

(b) 48. I. Elem.

(c) 19. I. Elem.

III.

---

(2) *Quia BD, est linearum omnium circulo inscriptarum maxima, erit angulus BAD, omnium maximus; quare & sinus, seu perpendiculum omnium maximum erit; ideoque triangulum BAD, omnia extra axem trajecta triangula superabit.*

(3) *Cum angulus BAD, omnium maximus, atque obtusus sit, anguli que ad verticem positi semper minuantur, prout chordæ BD, BL, BE, minuuntur, devenire tandem licebit ad angulum BAL, rectum, cujus basis sit chorda, BL, diametro minor.*

(4) *Sumpta AD, vel æquali AE; pro sinu toto, erit MD sinus anguli DAM, & EN sinus anguli æqualis EAN; sed sinus angulorum æqualium, si idem sit sinus totus, sunt æquales. Ergo perpendicularis, EN, æquabitur alteri DM:*

III.

Si conus fuerit scalenus, demissa ex vertice A, in planum basis perpendiculari AQ, traductoque plano per axem AC, & per AQ perpendiculum, quod efficiet triangulum per axem ABD, rectum (a) plano basis, patet fore omnium coni laterum maximum AB, remotissimum a perpendiculo AQ, & omnium minimum latus AD, eidem perpendiculari proximum, aliorum autem laterum intermediorum AF, AE, majus esse, quod est maximo propinquius, minus vero, quod ab ipso remotius, nam linearum ex puncto Q, ad peripheriam circularem deductarum maxima est (b), QB per centrum trajecta, minima autem ejus portio QD, ipsæ autem QF, FE, majores, aut minores sunt, prout maximæ, aut minimæ propiores (c); quare & ipsarum quadrata maxima, & minima, ac majora, aut minora respective erunt; quemadmodum etiam duo quælibet quadrata linearum QO, QE, a maxima QB, hinc inde æque remotarum adeoque ad invicem æqualium, æqualia erunt; unde singulis addito quadrato perpendicularis AQ resultabit quadratum AB (d) omnium maximum, & AD omnium minimum, & AE, AF quadrata majora, aut minora, prout illi maximo propiora sunt, aut remotiora; itemque AO, AE, quadrata attingentia terminos rectæ EHO, ad diametrum DB, ordinatæ, erunt (5) æqualia. Patet igitur majus omnibus coni lateribus esse AB, & minimum AD, ac reliqua majora aut minora resultare, prout magis accesserint, aut recesserint a maximo; aut æqualia esse si æquidistant ab ipso, ut AO, AE; quibus aliisque similiter ad terminos ordinatæ ductis, efficitur æquicrure triangulum AOE, cætera vero scalena semper resultabunt, nisi forte contigerit alicui habere basim uni ex lateribus æqualem.

F. 4. & 5.

(a) 18. XI. Elem.

(b) 7 & 8 III Elem.

(c) Per easdem.

(d) 47. I. El.

E IV.

---

(5) *Ordinata quippe EHO, cum secetur bifariam a diametro BD, ex hypothesi, secabitur etiam (3. III. Elem.) perpendiculariter, quare anguli OHQ, EHQ, recti sunt, proindeque æquales. Porro QH, triangulis QOH, QHE, communis est, ergo (4. I. Elem.) QO = QE; &* $QO^2 = QE^2$, *&* $QO^2 + QA^2 = QE^2 + QA^2$, *seu* $AO^2 = AE^2$ *(47. I. Elem.) latusque AO = AE.* F 4.

IV.

Si quis angulus verticalis trianguli per axem in cono scaleno rectus fuerit omnes pariter anguli verticales recti erunt, adeoque invicem æquales; nam semicirculus super diametro BD, in plano trianguli per axem descriptus, per verticem A transiret, (6) ob angulum rectum ibi a lateribus comprehensum (a), propter AC, æqualem radiis CF, CE, ideoque rectum angulum latera quoque EA, FA, continerent (b). Verum si angulus BAD, acutus fuerit, vel obtusus, reliqua per axem trian-

(a) 37. III. Elem.
(b) Per eamdem.

An. Fig. 2. (6) *Si duo triangula AEB, ACB, aquales angulos ad C, & E, eamdemque, aut æqualem basim, AB, habuerint, per puncta ABCE, circulus transire poterit. Dem... circulus per data, tria puncta ABC transire potest (5. IV. Elem.) quod vero idem circulus per A, B, C, transiens etiam per punctum E, transire debeat sic ostendo. Si enim per E non transit, transeat ergo si fieri potest infra E per punctum D, tum acta AD, erit angulus ADB = angulo ACB (21. III. Elem.) est autem per hypothesim angulus AEB = angulo ACB, quare angulus externus ADB = interno AEB contra corollarium primum prop. 32. III. Elem. non ergo transit ille circulus infra E, sed neque supra E, puta per F, transire potest; nam juncta AF, foret angulus AFB = angulo ACB = angulo AEB; quare externus AEB = interno AFB, contra idem corollarium propositionis 32. III. Elem. Circulus ergo transiens per puncta ABC, etiam per E transeat, necesse est; quare circulus per puncta A, B, C, E, transire potest.*

An. F. 3. (7) *Si in duobus triangulis SAF, SEF ad A & E non rectangulis eamdem basim SF latera vero inæqualia habentibus, fuerit summa quadratorum laterum trianguli unius SA, AF, = summæ quadratorum laterum SE, FE dico circulum per puncta S, F, E, A, transire non posse. Demons... Transeat si fieri potest circulus per ea puncta, atque ex centro N agatur NO, basi FS, perpendicularis, quæ FS, bissariam in O, dividet (3. III. El.) junctaque, AE, quæ a diametro HONM, secetur in K, ducantur AO, OE. Jam (per sequentem num. 5) $AS^2 + AF^2 = 2AO^2 + 2OF^2$ & $SE^2 + EF^2 = 2EO^2 + 2OF^2$ quare cum per hyp. $AS^2 + AF^2 = SE^2 + EF^2$, erit $2AO^2 + 2OF^2 = 2EO^2 + 2OF^2$ seu $2AO^2 = 2EO^2$, & $AO^2 = EO^2$, & $AO = EO$; hinc (7. III. Elem.) OA, OE, æqualiter diame-*

triangula inæquales angulos ad verticem A, habebunt (9) nisi eorum bases (11) hinc inde æqualiter ad diametrum BD fuerint inclinatæ.

V.

Summæ nihilominus quadratorum ex lateribus cujusvis trianguli per axem erunt semper æquales; nam in quovis triangulo quadrata duorum laterum æquantur duplo quadrati rectæ a vertice ad dimidium basis ductæ, una cum duplo quadra-

---

tro HONM, inclinantur, quare angulus AOK = angulo EOK, indeque propter latus OK, utrique triangulo AOK, EOK, commune, erit (4. I. Elem.) angulus AKO = angulo EKO, quare erunt recti; ergo (29. I. Elem.) AE, SF, erunt parallelæ, & angulus AES = angulo ESF, ergo (21. III. Elem.) EF = AS; seu EF ^{2} = AS ^{2}. Porro cum sit AS ^{2} + AF ^{2} = EF ^{2} + ES ^{2}; erit quoque AF ^{2} = ES ^{2}, & AF = ES; quare AS = EF, & AF = ES contra hypothesim: ergo circulus, per puncta S, A, E, F, nullo pacto transibit.

(8) *Patet angulos SAF, SEF, inæquales esse, si enim æquales forent, utique (not. 6.) circulus per puncta S, A, E, F, transire posset.*

(9) *Ex quibus patet si angulus BAD, acutus sit, vel obtusus, reliqua per axem triangula inæquales angulos ad verticem A, habere; nam triangula FAE, SAP, æquales bases FE, SP, habent, & (numero V.) summa quadratorum FA, AE = summæ quadratorum laterum aliorum SA, AP, quare (8) erunt anguli FAE, SAP inæquales.*

(10) *Si diametri FCE, OCe, alteri diametro DCB fuerint æqualiter inclinatæ, adeout anguli FCD, DCe æquentur; erunt eF, OE, ordinatæ ad diametrum BD. Dem.... Nam cum angulus FCD, sit angulo eCh, latus vero eC = CF; ac CH triangulis FCh, CEH communis; erunt (4. 1. Elem.) anguli Che, ChF invicem æquales, ac proinde recti, atque Fh = he; quare eF, erit diametro Bd, ordinata, eadem vero ratione ostenditur OE, ordinata esse diametro Bd, quare &c.*

(11) *Ex quo colligitur triangulorum FAE; eAo, angulos EAF, eAo, æquales esse, quandoquidem (numero III) latus Ao, trianguli eAo = lateri AE, trianguli FAE; item latus AF hujus trianguli = lateri eA, trianguli alterius eAo; bases vero EF, eO, æquales sunt, quare (8. 1. Elem.) erit angulus EAF, = angulo eAD.*

ti ipsius semibasis(12), ut in nostris Geometricis institutionibus demonstravimus; itaque duo quadrata AB, AD, æquantur duplo quadrati axis AC cum duplo quadrati radii CB. Item duo quadrata AE, AF, æquabuntur duplo quadrati ejusdem axis AC, & duplo quadrati radii CE, ipsi CB, æqualis, ergo duo quadrata AB, AD, æquantur duobus quadratis AE, AF, aut etiam duobus quadratis PA, AS, atque eadem ratione duo quadrata AB, AD, æquantur duobus quadratis SA, AP, aut etiam duobus quadratis EA, AF, adeo ut quadratorum duorum laterum cujuscumque trianguli summa sit constans.)

VI.

Fig. 6. & 7 Horum autem triangulorum per axem minimum erit BAD, rectum plano basis transiens per AQ, perpendiculum & maximum erit EAF, cujus basis EF, sit alteri diametro BD, perpendicularis; aliorum autem PAL, magnitudo erit intermedia, ita ut majora evadant, quæ maximo propiora fiant; si enim super recta CQ, inter axem, & perpendiculum, veluti super diametro, circulus CSQ, in plano basis coni describatur; hic erit locus omnium perpendicularium ex vertice A, ad bases quorumlibet triangulorum per axem transeuntium demissarum; nam ECF, perpendicularis diametro DB, tanget circulum QSC, in C, (a) & triangulum EAF, æqualia latera habebit (b) AF, AE, ideoque AC bifariam secans basim trianguli æquicruris, erit (c) ipsi perpendicularis; ubi vero alia diameter PL, secat illum circulum in S, ducta ex vertice AS, erit ipsi PL, pariter perpendicularis, quia juncta

(a) 16. III. Elem.
(b) num. III.
(c) 8. I. El.

An. Fig. 4. (12) *Si a trianguli cujusvis ABP, vertice A, agatur recta AC, basim BP, bifariam secans in C; erit* $AB^2 + AP^2 = 2AC^2 + 2CP^2$. *Dem... demittatur ad basim BP, perpendicularis AF, & cadat inter C & P erit itaque angulus ACB, obtusus, & ACP, acutus; unde (12. 2. El.)* $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BCF$; *& (13. 2. El.)* $AP^2 = AC^2 + CP^2 - 2PCF$; *quare* $AB^2 + AP^2 = AC^2 + BC^2 + 2BCF + AC^2 + CP^2 - 2PCF, = 2AC^2 + BC^2 + CP^2 + 2BCF + 2PCF$; *est autem (per hyp.)* $BC^2 = CP^2$ *propter* $BC = CP$; *atque adeo & PCF = BCF quare* $AB^2 + AP^2 = 2AC^2 + 2BC^2 + 2BCF - 2BCF = 2AC^2 + 2BC^2$. *Q. E. D.*

Id ipsum etiam contingit, & si perpendiculum AF, inter C, & P, non caderet, seu quod idem est licet angulus BPA, foret obtusus, ut attendenti patet.

ctà QS, erit quadratum QC, æquale quadratis QS, CS, (a) quare AC quadratum quod æquatur quadratis AQ, QC, (b) erit æquale quadratis AQ, QS, SC; at quadratis AQ, & QS, est æquale quadratum AS (c), ergo quadratum AC, æquatur quadratis AS, SC; ideoque angulus ASC rectus erit (d); quia ergo rectarum ex A ad peripheriam circuli QSC, ductarum (ut de lateribus coni dictum (e) est, maxima erit AC, minima AQ, & intermedia AS, mediocris magnitudinis pro majori accessu ad maximam AC crescentis; ideo maximum erit triangulum EAF, cujus altitudo AC, minimum BAD, cujus altitudo AQ intermediæ vero magnitudinis PAL, cujus altitudo AS (propter eorum basium EF, DB, PL, æqualitatem.

(a) 47. I. Elem. [b] Per eamdem. (c) Def. 3. XI. El. (d) 48. I. Elem. [e] numero III.

VII.

Triangula vero extra axem licet in cono recto cujus axis æqualis, aut major sit radio basis, nempe in quo verticalis angulus trianguli per axem BAD rectus sit vel acutus, minora semper ostensa sint (f) quovis triangulo per axem transeunte; in cono tamen scaleno, sive obtusus sit, sive rectus, aut acutus, ille angulus verticalis trianguli per axem BAD, aut EAF, vel PAL; triangula tamen extra axem haberi possunt, tum quolibet illorum minora, tum quædam etiam maximo (per axem scilicet transeuntium) EAF, majora, aut æqualia; ipsi enim EF parallela GO duci potest ordinata ad diametrum DB, in H, & supra ipsam ducto per verticem A, plano, si efficiatur triangulum GAO, quod (g) æquicrure erit, ejus perpendicularis evadet recta AH; fieri potest ut vel æqualis (13), vel major sit ratio ipsius AH, ad AC, comparata ra-

Fig. 8. (f) numero II. (g) numero III.

 tio-

---

(13) *Fiat GH : EC, sicuti AC ad quartam (proportionalem AH; tum AC, AH, ad puncta C, H, terminatæ ita invicem inclinentur ut in A, concurrant, atque ex A, tamquam vertice conus ADEBF, describatur, tunc erit triangulum EAF = triangulo GAO; cum enim AC : AH = GH : EC, erit AC×EC = AH×GH (16. VI. Elem.); est autem triangulum EAF = AC×EC, & triangulum GAO = GH×AH, propter eorum bases EF, GO duplas basium rectangulorum EC, GH; ergo & triangulum EAF = triangulo GAO.*

Deinde si centro C, intervallo CA, arcus aAM, describatur, ac junctis aH, aC, conus ad EBF constituatur, cujus perpendiculum ad basim sit aq; tum erit triangulum

An. Fig. 5

tioni, EF, ad GC, seu OB, ad GH; ideoque potest esse triangulum GAC, æquale vel majus ipso AEF, quod erat maximum omnium per axem, AC, transeuntium.

Verum hæc de triangularibus coni sectionibus indicasse sufficiat; jam de sectionibus conicis, est deinceps agendum.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 9. *SI Conus ABD, aut illi ad verticem oppositus secetur plano basi BED, parallelo, sectio FHG, aut fhg, circulus erit.*

Ducatur axis AC occurrens plano secanti in puncto L & per axem idem conus secetur plano triangulari ABD, cujus, & prioris plani secantis communis sectio FG, parallela erit diametro basis BD (a), ac sumpto quolibet puncto A, in perimetro sectionis, juncta ad verticem AH, protrahatur ad peripheriam basis E, ac jungantur EC, HL; quæ sunt communes sectiones plani trianguli ACE, cum illis parallelis planis BCD, FHG, & ideo (b) similia erunt triangula ACE, ALH, itemque similia CBA, LFA; propterea erit CE ad LH, ut CA ad LA (c), & ut CA ad LA, ita BC, ad FL; quare (d) CE, ad LH, est ut BC ad FL; sed radius CE, æquatur radio BC, ergo, & LH, æquatur ipsi BL; & eodem modo ostendetur qualibet aliam rectam jungentem quodvis punctum perimetri hujus sectionis cum puncto L, æquari eidem FL; ergo hæc sectio circulus erit, cujus centrum

(a) 16. XI. El.

(b) 16. XI. & 2. VI. Elem.

(c) Corollar. 1. 4. VI. Elem.

(d) 11 V. Elem.

GaO, majus triangulo EaF; erit enim $aH^2 = ac^2 + CH^2 + 2HCq$. *(12. 2. El.) Sicuti* $AH^2 = Ac^2 + cH^2 + 2HCQ$; *quare cum* $aC^2 + CH^2 = AC^2 + CH^2$, *&* $2Hcq$, *majus sit* $2HCQ$, *erit etiam* aH^2, *majus* AH^2; *seu AH, major AH; unde aH ad aC, in majore erit ratione, quam AH, ad AC, quare cum sit* $aH : AC = EC : GH$, *erit* $aH : aC$, *in majori ratione EC, ad GH; proindeque rectangulum* $aH \times GA$, *majus erit rectangulo* $aC \times CE$; *hoc est triangulum aOG, majus est triangulo EAF.*

Tandem si vertex coni statuatur in m, tum erit mH, minor AH, quare mH, ad mC, erit in minori ratione AH, Hc, seu EC : GH; unde rectangulum $EC \times Cm$ *majus erit rectangulo* $GH \times Hm$, *seu triangulum EMF, majus triangulo Gmo; patet ergo propositum.*

trum L; quippe omnes rectæ hinc ad perimetrum sectionis ductæ ostenduntur æquales. (14)

PROPOSITIO II.

Si conus scalenus ABED, secetur plano per axem transeunte, ad basim recto ABD; mox altero plano KHM, ad illud planum ABD, recto iterum secetur per rectam KM, quæ triangulum KAM efficiat simile ipsi ABD, sed subcontrarie positum, ut nempe sit angulus AKM, æqualis ABD, ADB, unde & alius AMK, erit alteri ABD æqualis, ob angulum A, utrique triangulo communem: hæc quoque sectio erit circulus.

Ducta ex quolibet puncto H, perimetri hujus sectionis recta HI, quæ sit perpendicularis plano, ABD, atque in communem planorum sectionem KM (a), incidet, agatur per I, recta FIG, parallela diametro basis BD, ac per ipsas FG, HI, ducatur planum FHG, quod erit (15) parallelum plano basis transeuntis per BD, & per ER, huic perpendicularem, quæ erunt ipsis FG, HI, parallelæ; Quare sectio FHG, (b) erit circulus, cujus centrum L, in axe ubi secat ejus Fig.10.

(a) 3.8 XI. El.

(b) 1. hujus.

---

(14) *Sectionem pariter fhg, circulum esse ex eadem demonstratione colligitur, nam EC, lb, cum sint sectiones plani triangularis per axem traducti, planorumque parallelorum BED, fhg, erunt parallelæ, quare triangula CAE, lAb, erunt similia, ac proinde CE : lb, = CA : Al. Sed propter triangula CBA, lfA, itidem similia, est CA : Al = cB : fl. Ergo CE : lb = cB : fl. Quare sicuti CE = CB, ita lb = fl; quod cum de qualibet recta jungente quodvis punctum perimetri hujus sectionis cum puncto L, demonstretur, patet sectionem fhg, esse circulum.*

(15) *Linea BD, communis est intersectio plani BAD, cum basis plano, cum ergo illud ad basis planum sit rectum, necesse est ER, communi sectioni BD, normalis, recta quoque sit plano BAD (def. 4. XI. Elem.), cui quoque plano cum recta sit quoque HI, erit hæc alteri ER, parallela (6. XI. Elem.) quæ cum secent rectas FG, BD, parallelas, erit planum per HI, FI, traductum, plano basis parallelum (15. XI. Elem.) seu plano per lineas BD, ER, traducto.*

ejus diametrum FG, & bifariam pariter secta KM, in O; junganturHL, HO; erit quadratum HL æquale quadrato alterius radii GL, idest (a) rectangulo FIG, cum quadrato LI; sed idem quadratum HL, æquatur (b) quadratis HI, LI, (cum enim HI, sit ad planum BAD, recta, erit (c) lineis MIK, FIG, a quibus HI, tangitur perpendicularis) ergo quadratum HI, æquatur rectangulo FIG; sed ob angulum AKM, æqualem ADB, adeoque etiam externo parallelarum MGI (d), & angulos ad verticem I, (e) æquales KIF, GIM, (ac proinde & reliquus angulus GMI, æqualis (f) angulo KFI) similia sunt triangula FIK, GIM; unde (g) KI ad IF est, ut GI ad IM; adeoque rectangulum FIG (h) æquatur rectangulo KIM, & addito quadrato IO, erunt quadrata HI, & IO, æqualia rectangulo KIM, cum quadrato IO; idest quadratum OH (i) æquabitur quadrato OM (k) est igitur recta OH, æqualis OM; & de qualibet recta ex alio puncto perimetri KHM, ad idem punctum O, ducta idem demonstrabitur, ergo hæc quoque sectio est circulus.

(a) 5. II. Elem.
(b) 47. I Elem.
(c) def. 3. XI. Elem.
(d) 27. I. Elem.
(e) 15. I. Elem.
(f) Corol. 9 32. I. El.
(g) 4 VI. Elem.
(h) 17 VI. Elem.
(i) 47 I. Elem.
(k) 5. II. Elem.

Coroll. 1 Hinc habetur, quod in circulo quadratum perpendicularis ductæ ad diametrum ex quolibet puncto circumferentiæ, æquatur rectangulo ex partibus diametri ab ipsa divisis, nempe HI, quadratum æquatur rectangulo FIG, in circulo GFH, & vicissim si in aliqua figura KHM, quadratum cujusvis perpendicularis ex perimetro ad basim ductæ HI, æquatur rectangulo partium basis KIM; hæc figura est circulus, cujus diameter ipsa basis KM.

Corol 2 Si planum secans neque sit parallelum basi, neque subcontrarie positum, triangulum abscindat simile triangulo per axem ad basim recto, sectio non erit circulus, quia ob inæqualitatem angulorum, triangula FKI, MGI non erunt similia, nec erit KI ad IF, ut GI ad IM; unde rectangulum FIG, seu quadratum HI, non æquabitur rectangulo KIM; & addito quadrato IO, non evadet quadratum OH = OM; (l) adeoque radii non erunt æquales.

(l) 5. II. Elem.

Corol. 3. Quoniam in hujusmodi subcontraria sectione triangula per axem AKM, BAD sunt similia, ideoque DA ad AB, ut AK ad AM; rectangula DAM, BAK sunt æqualia, & circulus (16) per puncta B, K, M, D transire posset; ducta

An. Fig. 6. (16) *Circulus per puncta B, K, M, D transire posset; nam si circulus transiens per tria puncta B, D, M non transiret quoque per K, tum vel infra K per punctum C, ut supra per punctum O transire deberet; per neutrum vero horumce punctorum transire potest, non quidem per C, alio-*

cta vero BN, eidem KM, parallela circulus triangulo DNB, circumscriptus tangeretur a latere AB in B; quia triangulorum ABD, ABN, similitudo (propter angulum ABN = angulo externo AKM = BDA, & angulum A, utrisque ABD, ABN communem) dat AD ad AB, ut AB ad AN; ideoque AB quadratum (a) rectangulo DAN æquale redditur; quare AB sit tangens (17) circuli per BND transeuntis. (a) 16. VI.El.

Corol. 4. Omnes sectiones ipsi circulo KHM, parallelis planis effectæ pariter circuli erunt; & juncta ex coni vertice A ad centrum O, per centra omnium circulorum ipsi æquidistantium transibit; quippe omnes rectas KM parallelas bifariam secabit, ut ipsa secatur in O, & BN in S; (est enim KO: OM = BS: SN (b), quare, cum KO = OM, erit etiam BS = SN) unde erit alius axis hujus coni recta AO, secans tamen inæqualiter diametrum basis in R, ideo conis scalenis, (quorum unus est ABEDQ) erunt bini axes AC, AR, per circulorum suorum centra deducti, quando coni recti unicum habent hujusmodi axem. (b) Corol. 2.4.VI.El.

Corol. 5. Secabitur autem ab hoc axe secundario diameter basis BR, ut sit BR ad RD, quemadmodum lateris AB quadratum ad quadratum AD, seu (18) quadratum rectæ AN ad quadratum lateris AB. Axis vero primarius AC secabit diametrum circuli subcontrarie positi, velut BN in Q, itaut sit BQ ad QN, ut quadratum AB ad quadratum AN; ideoque BR ad RD erit ut NQ ad BQ; nam ducta NPT parallela BD, erunt similia triangula BSR, NST (quare BS: SN = BR: NT)

---

quin rectangulum BAC æquaretur rectangulo DAM corol. 1. 36. 1. Elem.) cui cum æquetur (per hypoth.) BAK, esset BAC = BAK, quod est absurdum; sed neque etiam circulus per O transire posset, alioquin DAM æquaretur rectangulo BAO, cumque DAM sit = BAK, foret BAK = BAO, quod est absurdum. Circulus ergo transiens per tria puncta B, D, M, per punctum quoque K transire debet; atqui (5. 4. Elem.) circulus per puncta B, D, M transire potest; ergo & per puncta B, D, M, K. Q. E. D.

(17) *Si linea AB circulum BDN non tangit, tangat altera AM, secet vero AB circulum in O; ergo $AM^2 = DAN$ (37. 3. El.), ergo $AM^2 = AB^2$, sed $AM^2 = BAO$ per propositionem 37. 1. Elementorum, ergo $AB^2 = BAO$, quod est absurdum, ergo AB est tangens.* An. Fig. 7.

(18) *Est enim $AB^2 : AD^2 = AN^2 : AB^2$; nam AD: AB = AB: AN, ergo invertendo AB: AD = AN: AB, quare (22. 6. El.) $AB^2 : AD^2 = AN^2 : AB^2$. Si ergo est BR: RD = $AB^2 : AD^2$ erit quoque = $AN^2 : AB^2$.*

(a) Corol. 4. hujus NT) & ut BS æquatur SN, (*a*) ita BR æquabitur NT; ergo BR ad RD est ut NT ad RD, scilicet (*b*) ut AN ad AD, quæ sunt ut quadratum AB ad quadratum AD; quia ostensæ sunt (*c*) AN, AB, AD continue proportionales; & similiter BQ ad QN, erit ut BC ad NP (ob similia triangula BQC, PNQ), sive ut DC, quæ æquatur BC ad NP, idest ut DA ad AN (*d*), nempe ut quadratum AB ad quadratum AN (propter DA, AB, AN continue proportionales.)

(b) Corol. 1. 4. VI. El.
(c) Corol 3. hujus.
(d) Corol 1 4. VI. El.

PROPOSITIO III.

Si conus ABD triangulo per axem transeunte secetur tum ex quovis puncto H superficiei conicæ agatur recta HIL, parallela cuidam EF, quæ diametro basis coni BD sit perpendicularis; dico rectam illam HIL occurrere plano ipsius trianguli per axem, & inde ad alteram superficiei conicæ partem in L ita protendi, ut in dicto concursu I cum plano trianguli bifariam secta remaneat, nempe ut HI æquetur IL.

Fig. 11.

Juncta enim ex vertice coni A, recta AH producatur usque dum peripheriæ basis occurrat in M, & ex M in plano basis ducta MKG parallela ipsi EF, diametrum perpendiculariter secante, & ab ipso bifariam divisa in K (*e*), jungatur quoque recta AG, quæ jacens in superficie conica conveniet cum ipsa HIL in L (19): etenim HL, MG æquidistantes tertiæ EF sunt parallelæ inter se, adeoque in eodem plano trianguli AMG (*f*), & juncta AK, erit communis sectio plani trianguli per axem BAD, & plani alterius trianguli AGM, unde (20) per punctum I transibit utrique plano commune; quia ergo erit (*g*) MK ad HI, ut KA ad AI, & ut GK ad IL, estque MK æqualis (*h*) GK, erit quoque HI æqualis IL, ergo HL ab ipso plano per axem bifariam secatur. Q. E D.

(e) 3. III. El.
(f) 9. XI. El.
(g) cor 1. 3. VI. El.
(h) 3. III. El.

Coroll. 1.

---

(19) *Cum enim parallelæ MKG, HIL in trianguli MAG plano existant, hinc sicuti AI convenit cum MKI in conicæ superficiei puncto G, ita & in conicæ superficiei puncto L conveniet cum HIL.*

(20) *Quia I est punctum concursus lineæ HIL cum plano trianguli BAD, erit hujusmodi punctum I commune tum plano BAD, tum plano GAM, in quo HIL existit; quare illud in linea AK reperietur, quæ communis est hujusmodi planorum intersectio; quare AK per punctum I transibit.*

Corol. 1. Hinc habetur, quod si conus triangulo per axem sectus, alio plano per rectam MG diametro basis perpendicularem transeunte iterum secetur, cujus, & alterius plani communis sectio sit recta NK, hæc bifariam secabit (21) omnes lineas veluti HL in eadem sectione ductas ipsi MG parallelas. Fig. 12.

Coroll. 2.

---

(21) *Quoniam MKG diametro BD perpendicularis est, ipsique HIL per hypothesim parallela; hinc si juncta AH producatur usque dum peripheriæ basis occurrat in m, & ex m in plano basis ducta mkg, MKG parallela, & a diametro bifariam divisa in K; jungatur quoque recta Ag, quæ jacens in superficie conica transibit per L, (per hanc propositionem) eritque HL divisa bifariam in puncto concursus cum plano trianguli BAD; hoc autem concursus punctum est in linea KN, quæ est communis intersectio planorum BAD, MHNLG, ergo LH recta est bifariam per KN; quod cum semper contingat in quavis HL parallela MHG, patet propositum.*

(22) *Si rationum similium, aut æqualium A : B, & C : D antecedentes per idem E, & consequentes per idem F multiplices facta inter se eamdem rationem habent, seu A$\times$E : B$\times$F = C$\times$E : D$\times$F. Dem... Cum enim A : B = C : D erit permut. A : C = B : D, sed A : C = A$\times$E : C$\times$E (1.6. Elem.) ergo A$\times$E : C$\times$E = B : D. porro B : D = B$\times$F : D$\times$F (per eamd.) ergo A$\times$E : C$\times$E = B$\times$F, D$\times$F; & A$\times$E : B$\times$F = C$\times$E : D$\times$F.*

(23) *Si quatuor, quæcumque sint quantitates proportionales, A : B = C : D. Sintque totidem aliæ inter se se quoque proportionales E : F = G : H; si posteriores singulas in singulas priores ducas, facta inter se proportionalia sunt; seu A$\times$E : B$\times$F = C$\times$G : D$\times$H + Dem... Jam per hypothesim A : B = C : D; & E : F = G : H; erit*

$$\frac{E : F = E : F \qquad C : D = C : D.}{}$$

per notam 22. A$\times$E : B$\times$F = C$\times$E : D$\times$F;
& E$\times$C : F$\times$D = G$\times$G : H$\times$D.
ergo A$\times$E : B$\times$F = C$\times$G : H$\times$D. Q.E.D.

(24) *Hujusmodi autem argumentatio compositio rationis dicitur a Geometris; ratio quippe rectanguli A$\times$E ad rectangulum F$\times$B componitur ex duabus rationibus* $\begin{matrix} A : B \\ E : F \end{matrix}$ *sicuti & ratio rectanguli C$\times$G ad rectangulum H$\times$D, ex rationibus* $\begin{matrix} C : H \\ G : D \end{matrix}$ *est composita. Cum enim ratio ex duabus, vel pluribus composita dicatur, quam habet factum ex dua-*

Corol. 2. Et si eadem recta MG, per quam planum GNM deducitur, nedum sit perpendicularis diametro BD, sed etiam plano trianguli per axem (quod evenit, ubi triangulum per axem est rectum ad planum basis) tum rectæ illæ MG, HL non solum bifariam, sed etiam ad rectos angulos secabuntur ab illa communi sectione KN; quippe non tantum angulus MKD rectus erit, sed etiam (*a*) MKN, & illi æqualis (*b*) HIN; ubi vero recta MKG non fuerit perpendicularis plano trianguli per axem, seu nisi triangulum per axem sit rectum plano basis, transeundo per rectam ex vertice coni A, ductam basi perpendicularem tum NK, bifariam quidem secabit rectas illas parallelas HL, MG, sed ad angulos obliquos, non autem rectos juxta inclinationem lineæ MK ad ipsam KN.

(a) def. 3. XI. El. (b) 27. I. El.

Definitiones secundæ.

I.

Fig. 13. 14. 15. 16. Ipsa linea NK bifariam secans omnes rectas HL eidem MG parallelas in qualibet sectione GNM ductas, ejus sectionis diameter vocabitur.

II.

Et diametri terminus N, (vel etiam si terminus alius Q ipsi oppositus fuerit) etiam Q vertex sectionis dicetur.

III.

Ipsæ autem rectæ HL, MG, vel etiam earum medietates MI, MK ordinatæ ad ipsam diametrum NK appellantur.

IV.

Quod si nedum bifariam, sed etiam perpendiculariter secen-

---

rum, pluriumve rationum antecedentibus ad factum ex earumdem consequentibus; cumque rectangulum A$\times$*E sit factum ex rationum antecedentibus A & E & F*$\times$*B sit productum ex B in F rationum consequentibus; erit A*$\times$*E ad F*$\times$*B in ratione composita* $\begin{matrix} A : B \\ E : F \end{matrix}$; *atque ita loquendum de ratione rectanguli C*$\times$*G ad rectangulum H*$\times$*D, quæ componitur ex rationibus* $\begin{matrix} C : H \\ G : D \end{matrix}$.

secentur ordinatæ à diametro, præter generale diametri vocabulum, speciale nomen *axis* eidem diametro tribuetur.

Aliæ definitiones in sequentibus aliquibus propositionibus, & earum corollariis quibusdam designabuntur.

PROPOSITIO IV.

SI conus ADMB plano per axem sectus, alio plano MNG diametro circuli basis perpendicularem, a qua bifariam secatur ipsa in K, & per rectam KN uni ex lateribus AB, trianguli per axem parallelam deducto, erunt in hujusmodi sectione quadrata ordinatarum MK, HI proportionalia abscissis a vertice sectionis N portionibus diametri NK, NI. Vocatur autem hujusmodi sectio Parabola. Fig. 17.

Per quodlibet punctum I communis sectionis KN, cujus est ordinata HIL, ducta PIV parallela diametro basis BD, si agatur per ipsas VP, HL planum PHV, quod erit (*a*) parallelum basi per BD, MG illis æquidistantes transeunti, adeoque (*b*) circulum efficiet, unde resultabit quadratum HI æquale rectangulo PIV, ut quadratum MK æquatur rectangulo BKD (*c*); ergo quadratum MK ad quadratum HI est ut rectangulum BKD ad rectangulum PIV, scilicet ut KD ad IV (*d*) nam BK æquatur PI, cum sit BPIK parallelogrammum lineis oppositis æquidistantibus comprehensum; est autem KD ad IV, ut KN ad NI (*e*) ob similia triangula NKD, NIV; ergo quadrata ordinatarum MK, HI sunt ut partes diametri a vertice abscissæ NK, NI. Q. E. D. Nomen autem hujus sectionis hanc proprietatem habentis est parabola.

(a) 15. XI. El.
(b) 1. hujus.
(c) Corol. 1. 2. hujus.
(d) 1. VI. El.
(e) Corol. 4. VI. El.

Corol. 1. Hinc habetur, quod si fiat ut NK ad KM, ita KM ad aliam NF vertici N diametri NK perpendiculariter applicatam, ut quadratum MK erit æquale rectangulo KNF (*f*) ita cujusvis alterius ordinatæ AD, quadratum erit æquale rectangulo INF, quia hæc rectangula æqualem altitudinem NF habentia sunt (*g*) ut abscissæ KN : IN; adeoque ut ordinatarum quadrata MK, HI illis proportionalia (quare $MK2 : HI2 = KNF, INF$, & permutando $MK2 : KNF = HI2 : INF$ ergo cum $MK2 = KNF$, erit quoque $HI2 = INF$) Et hæc constans linea NF, ab antiquis latus rectum, a recentioribus parameter parabolæ appellatur.

(f) 16. VI. El.
(g) 1. l. 6. El.

Corol. 2. Ducta quoque NE diametro basis coni parallela lateribus trianguli per axem terminata, si fiat ut NK ad KD, vel

(a) 21 VI El. (b) 16. VI El (c) Corol. 1 2. hujus. (d) Corol. 1 hujus prop.

vel ut AE ad EN, ita EN ad NF erit eadem NF latus rectum, seu parameter ipsius parabolæ; nam (*a*) BK æqualis EN (ob parallelogrammum BENK) erit ad NF, ut AE ad EN (sive ob similia triangula AEN, NKD, cum utraque similia sint triangula ABD) ut NK ad KD; & ideo rectangulum (*b*) BKD rectangulum, idest (*c*) quadratum MK æquabitur rectangulo KNF, *erit itaque NF parameter* (*d*).

(e) Corol. præced. (f) 1. VI El.

Corol. 3. Idem parameter NF reperitur, si fiat ut rectangulum laterum trianguli per axem BAD, ad quadratum basis BD, ita AN ad NF. Nam rectangulum BAD ad BD quadratum est ut rectangulum (25) EAN ad quadratum EN; propter has lineas illis proportionales: sed quadratum EN æquatur rectangulo EA in NF parametrum (*e*), (cum sint lineæ EA, EN, EF continue proportionales) ergo BAD, rectangulum ad BD quadratum est. ut EAN, rectangulum ad EA X EF; adeoque (*f*) ut AN ad NF ob horum rectangulorum communem altitudinem EA.

PROPOSITIO V.

Fig. 18.

I*Isdem positis, ut in præcedentis propositionis titulo, sed communi sectione trianguli per axem, & plani secantis per rectam MKG diametro basis perpendicularem traducti non jam æquidistante uni laterum trianguli per axem, verum ita inclinata, ut cum uno latere AD infra verticem A coni ad punctum N, & cum altero latere AB supra verticem A conveniat ad punctum Q; ordinatarum sectionis MNG quadrata MK, HI erunt ut rectangula QKN, QIN diametris partibus inter easdem ordinatas, & utrumque terminum N, Q diametri ipsius interjectis comprehensa. Eodemque plano ad alteram oppositam superficiem conicam producto, similis sectio iQh inde resultabit, cujus ordinatarum quadrata, sive invicem, sive cum quadratis ordinatarum inferioris sectionis MNG comparata, erunt pariter ut rectangula diametri partibus inter ipsas, & utrumque vertitem Q, N positis comprehensa.*

Vocen-

(25) *Rectangulum BAD ad BD quadratum est, ut rectangulum EAN ad quadratum EN; nam*

$$BA : BD = EA : EN,$$

$$\& \quad AD : BD = AN : EN.$$

$$\textit{ergo (not. 23)} \quad BAD : BD^2 = EAN : EN^2.$$

Vocentur ambæ sectiones oppositæ, & utraque ipsorum hyperbola, ac diametri portio NQ utrique vertici interjecta latus transversum nuncupetur.

Ducta per punctum I, ubi quælibet ordinata HI, ad diametrum NK sectionis hujus applicatur, recta PIV diametro basis BD parallela, utique planum per ipsas VP, HIL traductum, utpote basi DMB æquidistans, (*a*) efficiet circulum HVP, adeoque quadratum MK ad quadratum HI, erit ut rectangulum BKD ad rectangulum PIV (hoc est ut BK$\times$KD; PI$\times$IV), quorum ratio componitur (*b*) & ex ratione BK ad PI (quæ eadem est KQ ad QI *propter triangula BQK, PQI similia*), & ex ratione DK ad VI, (quæ eadem est KN ad NI *propter triangulorum KND, INV similitudinem*) quemadmodum & ratio rectanguli QKN ad rectangulum QIN, seu QK$\times$KN ad QI$\times$IN ex iisdem rationibus (QK scilicet ad QI, & ex ratione KN ad NI) componitur (*c*); quare est quadratum MK ad HI quadratum, ut QKN ad QIN, idemque probabitur de ordinatis superioris oppositæ sectionis lQh; unde constat propositum; vocatur autem quælibet ex hisce oppositis sectionibus hiperbola, & diametri portio QN latus transversum nuncupatur. (26) & (27)

(a) 15. XI. El. & 1. hujus.
(b) not. 24.
[c] 23 VI. El. & not. 24.

Corol. 1. Si fiat NK ad KM, ut KM ad KZ, ad punctum K diametro NK perpendiculariter applicanda, & juncta QZ ad ipsam producantur rectæ NF, IS parallelæ KZ; ipsa NF ex vertice N ducta latus rectum, sive parameter hyperbo-

---

(26) *Aliter sic ostendi potest propositio; est enim*

$$BK : PI = KQ : QI$$
$$DK : VI = KN : NI$$

ergo (*not.* 23) $BK\times KD : PI\times PV = qK\times KN : qI\times IN$. *Sed* $BK\times Kd : PI\times IV = MK^2 : HI^2$; *ergo* $qK\times KN : qI\times IN = MK^2 : HI^2$. *Q. E. D.*

(27) *In sectionibus oppositis MNG, lQh, erit* $HI^2 : hi^2 = QIN : NiQ$. *Dem.... Ducta per punctum i, recta piu diametro basis coni ABMD parallela, traductoque plano per lineas up, hl ipsis BD, MK parallelas, erit planum* (15. 11. *Elem.*) *per phu traductum basi coni ABDG parallelum; quare sectio pbu circularis erit; (ex nota* 14) *unde* $HI^2 : PIV = hi^2 : piu$. (*corol.* 1. *prop.* 1.) *Porro propter lineas up, VP parallelas, erunt triangula iNu, INV similia; & similia itidem erunt triangula IPQ, ipQ, adeoque*

$$VI : ui = IN : iN.$$
$$\&\quad PI : pi = IQ : iQ. \quad ergo\ (not. 23)$$

erit $PIV : piu = QIN : Qin$; *est autem* $PIV : piu = HI^2 : hi^2$. *ergo* $HI^2 : hi^2 = QIN : QiN$.

perbolæ erit, cui hæc proprietas convenit, quod ut quadratum MK mediæ proportionalis inter NK, & KZ æquatur rectangulo NKZ, quod parametro NF applicatur; sed cum excessu rectanguli FIZ similis QNF rectangulo (*a*) ex latere transverso QN, & recto NF comprehenso; ac similiter quadratum cujusvis alterius ordinatæ HI æquabitur rectangulo NIS eidem parametro NF applicato, seu (ducta FRI parallela NK, secante IS, KZ in R, & I) cum excessu rectanguli FRS pariter similis dicto rectangulo QNF; nam quia KZ ad IS est ut KQ ad QI ratione KN ad NI utrinque adjecta, erit rectangulum (28) ZKN ad rectangulum NIS, ut rectangulum QKN ad QIN, sive ut MK quadratum ad HI quadratum (*b*); unde ut MK quadratum æquatur ZKN, ita HI quadratum æquatur NIS.

(a) 24. VI.El.

(b) Per hanc pr.

Corol. 2. Item si fiat ut NK ad KB, ita KD ad KZ juncta, ut supra QZ cui occurrat in F, recta NF ipsi KZ parallela, erit NF eadem parameter; nam ZKN rectangulum æquabitur BAD, adeoque & KM quadrato (*c*); unde etiam SIN æquabitur quadrato HI.

(c) Corol. præced.

Corol. 3. Similiter ducta NE parallela DB, si fiat ut NK ad KD, ita NE ad NF erit hæc parameter; nam juncta QF, ac producta, ut secet rectas IS, KZ eidem NF parallelas in S & Z, erit (propter triangula BQK, KQZ triangulis QEN, QNF similia) tam BK ad NE, quam KZ ad NF in eadem ratione KQ ad QN; unde (*d*) BK ad KZ, ut NE ad NF, sive ut NK ad KD; (*e*) & ideo rectangulum BKD, (quod idem est cum quadrato MK) æquabitur NKZ, ut supra (quare (*f*) NF ipsi KZ parallela erit parameter.)

(d) 11. V. El.

(e) Per hypoth.

(f) Corol. 1

Coroll. 4. Ducta ex vertice coni A in plano trianguli per axem recta AO parallela NK, cum sit (*g*) FN ad NE, ut KD ad NK, sive ut DO ad OA; itemque NE ad NQ, ut OB ad OA; erit FN ad NQ (29) in ratione composita ex DO ad

(g) Corol. præced.

---

(28) *Est itaque* $KZ : IS = KQ : QI$;
& $KN : NI = KN : NI$.
ergo (*not.* 22) $ZK \times KN : SI \times IN = QK \times KN : QI \times IN$,
seu $ZKN : NIS = QKN : QIN$.

(29) *Ratio ex rationibus* $\begin{matrix} FN : NE \\ NE : NQ \end{matrix}$ *composita* (*not.* 24.) *est ratio, quam habet rectangulum* $FN \times NE$ *ad rectangulum* $NQ \times NE$; *cum autem rectangulum* $FN \times NE$ *sit ad rectangulum* $NQ \times NE = FN$ *ad* NQ (1. 6. *El.*) *erit ratio* $FN : NQ$ *ex rationibus* $FN : NE$, *&* $NE : NQ$ *composita; cum vero* $FN : NE = DO : OA$, *&* $NE : NQ = OB : OA$;

ad AO, & ex BO ad AO, videlicet ut rectangulum DOB ad quadratum OA; unde si fiat ut quadratum OA ad rectangulum DOB, ita latus transversum QN ad NF erit hæc latus rectum, sive parameter.

Coroll.5. Imo etiam ducta AT ex coni vertice A, parallela diametro basis BD, & conveniente cum transverso latere NQ in T, erit rectangulum QTN ad quadratum AT, ut transversum latus NQ ad rectum NF; quippe cum sit (propter triangulorum ATN, NKD similitudinem NT ad TA, ut NK ad KD, sive ut AO ad OD, nec non QT ad TA, ut AO ad OB, erit rectangulum QTN ad quadratum AT, ut (31) quadratum AO ad DOB rectangulum, adeoque (*a*) ut QN ad NF. (a) Ex Corol præc.

Coroll 6. Denique cujuslibet ordinatæ MK quadratum ad rectangulum QKN, vel quadratum HI ad QIH rectangulum erit, ut rectum latus NF ad transversum NQ; nam etiam rectangulum ZKN, quod æquatur quadrato MK (*b*) ad QKN est ut ZK ad QK ob eandem altitudinem NK (*c*), & SIN, quod æquatur HI (*d*) quadrato, est ad QIN, ut SI ad IQ (*e*); verum hæ rationes ZK ad QK, & SI ad IQ sunt eædem, ac ratio lateris recti NF ad NQ transversum (propter triangula QKZ, QIS, QNF similia) ergo quadrata ordinatarum (MK, HI) & rectangula ex diametri partibus sibi correspondentibus (QKN, QIN) sunt ut parameter, seu latus rectum NF ad latus transversum NQ.

(b) Ex hypothesi. (c) 1. VI. El. (d) Corol. 1. hujus. (e) 1. VI. El.

F PRO-

---

ergo ratio FN : NQ erit composita ex rationibus $\begin{matrix} DO : OA \\ OB : OA \end{matrix}$; *porro rectangulum* $DO \times OB$ *est ad* $OA \times OA$ (*seu* AO^2) *in ratione composita ex iisdem rationibus* $\begin{matrix} DO : OA \\ OB : OA \end{matrix}$. (*not.24.*) *ergo* $FN : NQ = DOB : AO^2$.

(30) *Aliter* (*ex nota 23*) *ostendi potest; nam*

$$FN : NE = DO : OA$$
$$\text{\&}\quad EN : NQ = BO : OA.$$

ergo $FN \times EN : NE \times NQ = BO \times OD : AO^2$; *porro* (*1. 6. Elem.*) *est* $FN \times EN : NE \times NQ = FN : NQ$; *ergo* $FN : NQ = BO \times OD : AO^2$.

(31) *Quoniam est* $NT : TA = AO : OD$

$$\text{\&}\quad QT : TA = AO : OB.$$

ergo (*ex nota 23.*) $NT \times TQ : TA^2 = AO^2 : BO \times OD$, *seu* $QTN : AT^2 = AO^2 : DOB$.

PROPOSITIO VI.

Fig. 19. *Quod si KN communis sectio trianguli per axem, & plani secantis, per rectam MKG diametro basis BD, vel alterius aequidistantis circuli diametro ordinatam transeuntis, conveniat cum utroque latere infra verticem A ad puncta N, Q; erunt hujus sectionis QHN ordinatarum MK, HI quadrata, ut rectangula partium diametri inter utrumque terminum Q, N ab ipsis ordinatis secti, nempe ut QKN ad QIN; & hujusmodi sectio (si nec basi parallela sit, nec ipsi subcontrarie posita, adeoque circulus non fuerit) speciali nomine ellipsis nuncupabitur, cujus pariter latus transversum erit ipsa QN.*

Eadem demonstratione, qua superior propositio, hæc quoque probatur; unde non interest hic illam iterare, sed huic figuræ ipsa est a lectoribus applicanda.

Coroll. 1. Si fiat NK ad KM, ut KM ad KZ diametro QN in puncto K perpendiculariter applicatam, & juncta QZ secet in F rectam NF ipsi KZ parallelam, cui etiam æquidistans ducatur IS cuilibet alteri ordinatæ HI correspondens; erit NF latus rectum, seu parameter hujus sectionis, & quarumlibet ordinatarum quadrata MK, HI erunt respective æqualia rectangulis ZKN, SIN, quæ sunt applicata parametro NF, sed (32) defectu rectangulorum (ducta FRY parallela NQ secante ipsas KZ, IS in Y, & R) ZIF, SRF similium rectangulo QNF sub transverso latere QN, & sub recto NF comprehenso; idque probatur, ut in Coroll. 1. propositionis præcedentis, permutato in defectum illo excessu rectangulorum applicatorum parametro, æqualium quadratis ordinatarum hyper-

(32) *Rectangulum ZKN + rect. YZ×KN = (1. 2. El.) rectangulo YKN; est autem rectangulum YZ×KN = rectangulo ZYF propter latera KN, YF æqualia; ergo ZKN + ZYF = YKN; quare ZKN = YKN − ZYF, seu ZKN deficit ab YKN, seu KNF per ZYF, cujus diameter est ZF pars FQ diametri rectanguli QNF; quare (26. 6. El.) erit ZYF simile rectangulo QNF. Simili methodo ostenditur SIN deficere a rectangulo RIN, seu INF per SRF simile rectangulo QNF*

hyperbolæ, a dicto excessu sic nuncupatæ, uti ab hoc defectu nomen ellipsis deducitur.

Coroll.2. Si pariter fiat, ut NK ad KB, ita KD ad KZ, juncta QZ secans NF in F determinabit parametrum, ut in Corollario 2. propositionis præcedentis.

Coroll.3. Item si fiat NK ad KD, ita NE parallela BD ad NF determinabit parametrum, ut in coroll.2. propositionis præcedentis.

Coroll.4. Ducta quoque AO parallela NQ, erit ut AO quadratum ad rectangulum DOB, ita latus transversum QN ad rectum NF, ut Coroll.4. propositionis præcedentis.

Coroll 5. Et similiter ducta AT parallela BD conveniente cum QN in T, erit rectangulum QTN ad AT quadratum, ut transversum latus QN ad rectum NF, ut in Coroll.5. propositionis præcedentis.

Coroll.6. Quodlibet autem quadratum ordinatæ ad rectangulum sub diametri partibus, puta MK quadratum ad QKN, aut HI quadratum ad QIN, est ut latus rectum NF ad transversum NQ, ut in Coroll.6. præcedentis propositionis.

PROPOSITIO VII.

SI ex eodem cono ABD per plana invicem parallela MNG, SVR duæ Parabolæ, aut duæ Hyperbolæ, vel duæ Ellipses, aut etiam, quovis numero plures secentur, earum parametri, seu latera recta NF, VT erunt proportionalia distantiis NA, VA suorum verticum N, V, a coni vertice A.

Nam (ex Coroll.2. propositionis 4., & Coroll. propositionis 5. & 6.) est NK ad KD (33), ut EN ad parametrum NF;

(33) *Quod in Hyperbola, & parabola sit NK: KD = EN: NF patet ex citatis corollariis; idipsum vero contingere etiam in Figura 22. sic ostendo. Sumpto puncto K in ellipsis MNG diametro QN, agatur per ipsum bkd diametro basis BD parallela, perque ipsum, & per MK diametro Ellipseos QN ordinatam agatur planum bmdg, sectio erit circulus; quare (cor.3.6.) erit Nk: kd = EN: NF; est autem NK: KD = Nk: kd propter bd, BD parallelas, ergo NK: KD = EN: NF.*

NF; & similiter foret ut VO ad OD, ita PV ad parametrum VT alterius sectionis priori parallelæ; quare, cum sit eadem ratio NK ad KD, & VO ad OD ob rectas NK, VO parallelas, erit quoque ratio (*a*) EN ad NF eadem, quæ PV ad VT; ac permutando; erit NF ad VT, ut EN ad PV, sive ut NA ad PA (*b*).

(a) 11. V El.
(b) Cor. 1. 4. VI. El.

Coroll. In Hyperbolis, & Ellipsibus, quoniam pariter transversa latera QN, VL sunt ut distantiæ a coni vertice NA, VA (propter QN, LV parallelas), erunt etiam recta latera NF, VT proportionalia transversis QN, VL, & ideo hæ sectiones parallelis planis ab eodem cono deductæ *similes* dicuntur; parabolæ autem quælibet semper similes sunt, quippe ob diametrum uni ex lateribus coni æquidistantem, semper planis parallelis ex eodem cono deduci possunt.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 23. 24. 25.

IN omni sectione conica si latus rectum NF positum perpendiculare diametro, bifariam secetur in R ducta RT, quæ in parabola æquidistet diametro; in reliquis autem sectionibus bifariam secet in C transversam diametrum QN; dico quadratum cujuslibet ordinatæ MK fore duplum quadrilateri NRTK sibi correspondenti, quod recta KT eidem NF parallela cum dictis aliis lineis concludit.

Ducatur enim recta FB in parabola quidem parallela diametro; in aliis vero sectionibus, cum alio termino Q transversi lateris terminum F lateris recti conjungens: unde in omnibus evadet RT parallela, ob QN in C, & NF in R ab ipsa bifariam sectas in Hyperbola, & Ellipsi (34): dum utraque FB, RT in parabola æquidistat (*c*) diametro, ac juncta NB ab eadem RT bifariam secabitur in S, ut NF ab ipsa bisecca-

(c) Per constr.

(34) *Est namque NC = CQ, & NR = RF; quare NC : CQ = NR : RF; ergo [2. 6. Elem.] erit QF ipsi CR parallela; est autem BF in linea FQ producta, sicuti RT est in linea CR producta; ergo etiam BF, RT erunt parallela.*

secatur in R, (35) quare triangula NSR, SBT cum habeant ad verticem S æquales angulos, & alios alternos parallelarum (nempe (*a*) NRS = BTS, & SNR = SBT) cum æqualibus lateribus NS, SB erunt (*b*) æqualia, & communi addito quadrilineo NSTK erit triangulum NKB æquale quadrilatero NRTK, sed ex genesi sectionum (36) patet, ordinatæ MK quadratum æquari rectangulo NKB, adeoque duplo trianguli NKB; ergo idem quadratum ordinatæ duplum est quadrilateri NRTK. Q. E. D. (a) 27. lib. 1. El. (b) 26. I. El.

Punctum illud C, quod in Hyperbolis, & Ellipsibus bifariam secat latus transversum QN, *centrum* harum sectionum vocabitur; recta vero QF, sive FB *directrix*, & CR, sive RT (etiam in parabola) *subdirectrix* potest appellari.

Coroll. Excessus quadrati cujuslibet ordinatæ PV, supra quadratum alterius ordinatæ MK æquabitur duplo excessui quadrilateri NRXV supra NRTK, idest duplo quadrilinei KVXT; & ille quadratorum excessus, ducta MG diametro parallela, est rectangulum PGD (*c*); quare hoc rectangulum (37) æquatur duplo KVXT. (c) 5. II. El.

---

(35) *Propter RS, FB parallelas, erit NR : RF = NS : SB; est autem NR = RF, ergo & NS = SB; ergo NB ab RT bifariam secabitur in S.*

(36) *In parabola est* $MK^2 = KNF$ *(cor. 1. 4.), seu propter NF = KB, erit* $MK^2 = NKB$. *Id ipsum in Hyperbola patet ex coroll. 1. 5., & in Ellipsi ex coroll. 1. 6.*

(37) $MK^2 = 2NRTK$, $PV^2 = 2NRXV$, *ergo* $PV^2 - MK^2 = 2NRXV - 2NRTK = 2KVXT$. *Porro* $PV^2 - MK^2 = PGD$, *ergo* $PGD = 2KVXT$.

(38) *Ex quo infertur ordinatæ HCO per centrum Ellipseos C transeuntis quadratum æquari rectangulo QNF, seu facto ex parametro NF in latus transversum: nam puncto V abeunte in C, quadrilaterum KVXR abit in triangulum NCR; quare* HC^2 = *duplo trianguli NCR = rectangulo* $CN \times NR$; *unde* $4HC^2 = 4CN \times NR = 2QN \times NR = QN \times NF$, *propter NF duplam NR, & QN duplam CN; est autem* $4HC^2 = HO^2$, *quia HO bifariam secta est in C, ergo* $HO^2 = QN \times NF$. *Q. E. D.*

PROPOSITIO IX.

Fig. 26. 27. 28. DAtæ cuilibet coni sectioni tangentem ducere ad punctum in ejus perimetro datum.

Vel datum punctum est in sectionis vertice N, & tunc ducta NE parallela ordinatis, erit tangens; Si enim ex puncto N intra sectionem caderet, ab una tantum parte diametri chordam efficeret; unde diameter bifariam non secaret omnes parallelas ordinatis intra sectionem positas, quod est contra primam ex secundis definitionibus: tangit ergo hæc recta in dato puncto sectionem.

Vel datum punctum extra verticem in perimetro sectionis est, puta in M, & tunc ducta subdirectrice RT ordinetur MK ad diametrum sectionis, & KT parallela semiparametro NR usque ad subdirectricem pertingens in T; atque ipsis KT. MK tertia proportionalis KG in diametro ponatur supra ordinatam, juncta GM, tanget sectionem; ducatur enim recta GT, & ordinetur ad diametrum alia quævis HL occurrens ipsi GM in P; nec non ducatur LV parallela KT subdirectricem secans in V, & rectam GT in D. Quoniam igitur sunt tres proportionales KT, KM, KG rectangulum GKT (a) æquatur quadrato MK, adeoque est duplum quadrilateri NRTK (b), sed idem rectangulum est quoque duplum trianguli GKT, ergo hoc triangulum dicto quadrilatero æquabitur, & quia ut TK ad KG, ita DL ad LG; atque ut GK ad KM, ita IL ad LP; quemadmodum proportionales sunt TK, KM, KG, ita etiam (39) DL, LP, LG erunt continue proportionales; unde (c) quadratum LP æquabitur rectangulo GLD, seu duplum erit trianguli GLD, sicuti quadratum ordinatæ HL duplum est quadrilateri NLVR, sed triangulum GLD semper majus erit ipso quadrilatero NLVR, quia si LH est ordinata infra MK triangulo GKT, additur trapezium KLDT majus quadrilatero KLVT, quod

(a) 16. VI El.
(b) 8. hujus.
(c) 16. VI. El.

---

(39) *DL : TK = LG : GK. LP : MK = LG : GK, ergo DL : TK = LP : MK, & permut. DL : LP = TK : MK; est autem TK : MK = MK : KG = PL : LG, ergo DL : LP = LP : LG. Sunt ergo DL, LP, LG continue proportionales.*

quod adjungitur NKTR (æqualis triangulo GTK) (40). Si vero hl sit supra MK triangulo GKT aufertur trapezium lKTd minus quadrilatero lKTu, quod aufertur ab ipso NKTR; unde semper majus resultabit triangulum GLD quadrilineo NLVR, aut triangulum Gld (41) quadrangulo NluR. Itaque quadratum PL (quod æquatur duplo trianguli GLD) majus est quadrato HL (quod æquatur duplo quadrilateri NLVR); & quadratum pl (æquale duplo trianguli Gld) majus quadrato hl (æquali NluR); unde quælibet puncta P, aut p, præter punctum M, sunt extra sectionem; & ideo GM est ejus tangens. Q. E. D.

Illa diametri portio KG, quæ inter ordinatam, & concursum tangentis intercipitur subtangens vocatur.

Coroll. 1. Hinc patet tangentem harum sectionum in unico puncto cum earum curva convenire.

Coroll. 2. Producta KT ad directricem FB in B, quoniam ex natura harum sectionum (*a*) rectangulum NKB æquatur quadrato ordinatæ MK, & hoc quadratum æquatur rectangulo GKT (*b*), erit NKB æquale GKT; & ideo subtangens GK ad abscissam a vertice NK, erit ut KB ad KT, (*c*) (& invertendo KT : KB = NK : GK); unde tangens dati puncti M etiam determinabitur, si fiat ut KT ad KB. ita KN ad KG; & ad M juncta GM erit tangens.

(a) Ex cor 1 Proposit. 4. 5. 6

(b) Ex prop IX.

(c) 16. VI. El.

Coroll. 3. (Cum sit KB : KT = KG : GN) per conversionem rationis (*d*) erit KB ad BT, scilicet ad dimidium parametri; nam BT æquatur RF, sive NR; ita subtangens KG ad GN tangenti, & vertici curvæ interceptam.

(d) Cor 1. 18. VI. El.

Coroll. 4. Item dividendo KT ad TB æqualem semiparametro, erit (41) ut KN ad NG.

Coroll. 5. Item si jungatur BR, quæ occurrat diametro in G, erit KG subtangens (*e*); cum sit (*f*) KB ad NR, ut KG ad GN.

(e) Cor 3.

(f) Cor. 1 4. VI. El.

Coroll. 6. Hinc in Parabola (fig. 26.) semper subtangens KG

---

(40) *Triangulum* GKT = NRTK, *&* KLDT *majus est* KLVT, *ergo* GKT + KLDT, *seu* GLD *majus erit* NRTK + KLVT, *seu quadrilatero* NLVR; *est itaque triangulum* GLD *semper majus ipso quadrilatero* NLVR.

(41) *Triangulum* GKT = NKTR; *&* lKTd *minus est quadrilatero* lKTu; *ergo* GKT — lKTd, *seu* Gld *majus erit* NKTR — lKTu, *seu* NluR.

(41) *Cum sit* KB : KT = GK : NK, *erit dividendo* KB — KT : KT = GK — NK : NK, *seu invertendo* KT : KB — KT = NK : GK — NK, *seu* KT : TB = KN : NG.

KG dupla est KN abscissæ per ordinatam a vertice, uti etiam dupla reliquæ NG inter verticem, & tangentis occursum cum diametro; quia KB semper (*a*) æquatur parametro NF, cum sit directrix FB parallela diametro NF, adeoque semper KB est dupla semiparametri NR, aut KT; unde (propter analogiam BK : NR = KG : GN), & GK est dupla GN, aut NK.

(a) 36. I. Elem.

Coroll. 7. At in Hyperbola, & Ellipsi (fig. 27. 28.) est QK ad CK, ut BK ad KT ob parallelas CT, QB; adeoque etiam ut GK ad KN (*b*); unde si fiat ut distantia ordinatæ a centro CK ad ejus distantiam a remotiore termino transversi QK, ita distantia a vertice proximiori KN ad aliam GK, erit hæc subtangens quæsita.

(b) Cor. 2. hujus.

Coroll. 8. Unde rectangulum (*c*) QKN æquatur rectangulo CKG propter QK ad CK, ut GK ad KN.

(c) 16. VI. Elem.

Coroll. 9. Erit quoque per conversionem rationis (*d*) QK ad CQ, seu ad CN dimidium lateris transversi, ut subtangens GK ad GN interceptam vertice, & tangente.

(d) Cor. 1. 18. VI. El.

Coroll. 10. Et quia ob parallelas QB, CR est QG ad GC, ut BG ad GR, quæ sunt ut GK ad GN ob parallelas KB, NR; ideo erit QG ad GC, ut QK ad CQ, vel CN, cum istæ sint in eadem ratione ipsius (*e*) GK ad GN.

(e) Cor. 9.

Coroll. 11. Et dividendo erit QC ad CG, ut CK ad CQ, vel CN (42); unde erunt continue proportionales CK, CQ, CG, sive CK, CN, CG; & rectangulum KCG æquabitur quadrato transversi lateris CN, vel CQ; unde tangens invenietur sumpta ipsis CK, CN tertia proportionali CG, & jungendo ad punctum M rectam GM.

Coroll. 12. Quoniam QK ad CQ est, ut GK ad GN (*f*) & CQ ad GQ, ut KN ad GK (cum utraque harum rationum æquetur RB, ad BG) ergo ex æquo perturbate (43) QK : GQ est ut KN ad GN (*g*); unde est harmonice secta diameter

(f) Cor. 9.

(g) 23. V. Elem.

(42) *Ex Coroll. præcedenti est* $QG : GC = QK : CQ$; *ergo dividendo* $QG - GC : GC = QK - CQ : CQ$, *seu* $QC : GC = CK : CQ$, *&* *invertendo* $GC : QC = QC : CK$; *sunt itaque continue proportionales* CK, QC, CG; *seu* CK, CN, CG.

(43) *Idipsum ostenditur etiam ex nota* 23; *nam*

$$QK : CQ = GK : GN.$$

$$\text{\& } CQ : CQ = KN : GK.$$

ergo $QK \times CQ : GQ \times CQ = GK \times KN : GK \times : GN$.

Sed $QK \times CQ : GQ \times CQ = QK : GQ$, *sed* $GK \times KN : GK \times GN = KN : GN$ (1. *VI. Elem.*) *ergo* $QK : GQ = KN : GN$.

meter hyperbolæ, & ellipsis (44) per terminos transversi lateris, concursum tangentis, & ordinatæ; adeoque tangens determinatur; faciendo hujusmodi sectionem harmonicam, nempe ut QK ad KN, ita punctum G statuendo, ut sit GQ, ad GN, in eadem ratione.

Coroll. 13. Hinc alia eruitur generalis constitutio pro tangente cujusvis sectionis conicæ, ad datum punctum, M; ducta enim ordinata MK, & ex vertice N, huic parallela NI, quæ erit tangens verticalis; Si ex M ducatur in Parabola (fig. 26.) MI parallela diametro, in ellipsi vero, & hyperbola (fig. 27, 28) jungatur ad alium transversi lateris terminum Q, recta MQ, secans verticalem illam tangentem in I, si ubique secetur bifariam NI, in E, juncta ME, erit tangens; nam si hæc ad diametrum producatur in G, patet fore in Parabola GK (45) duplam GN, ut MK æqualis NI, est dupla EN; & ideo (a) GM est tangens; in hyperbola vero, & ellipsi ducta etiam QO parallela ipsi NE, quæ a recta MG producta secabitur in O, erit QO, ad NE, ut QN ad GN, sed in eadem ratione (QO ad NE) est QO ad IE, utpote æqualem ipsi NE, quæ est ut QM, ad MI, vel ut QK ad KN; quare GQ, ad GN, ut QK ad KN, Ergo

(a) Corol. VI.

(44) *In Hyperbola, seu fig. 27., cum sit* $QK : KN = GQ : GN$; *&* GQ *sit differentia* QK *ab* KG, *ac* GN, *differentia* KG *ab* KN, *erit* $QK : KN$, *ut differentia* QK *ab* KG, *ad differentiam* KG *ab* KN; *proindeque* QK, KG, KN, *sunt harmonice proportionales, cum prima sit ad tertiam, ut differentia primæ a secunda, ad differentiam secundæ ab tertia; itaque diameter in punctis* Q, K, G, N, *hoc est per terminos transversi lateris, concursum tangentis & ordinatæ harmonice secta est. Quod vero ad Ellipsim seu ad figuram 28. pertinet, idipsum sic ostendi potest:* $QK : KN = GQ : GN$, *& permutando* $QK : GQ = KN : GN$; *ac invertendo* $GQ : QK = GN : KN$; *sed* GN *est differentia* GQ *ab* QN; *&* KN *differentia* QN *ab* QK, *ergo* $GQ : QK$, *ut differentia* GQ *ab* QN, *ad differentiam* QN, *ab* QK; *sunt ergo* GQ, QN, QK, *in harmonica proportione.*

(45) *Propter triangula* GEN, IEM, *similia; est* $ME : EG = IE : EN$; *porro* $IE = EN$, *ergo* $ME = EG$; *ac proinde* MG *dupla est* GE, *est autem ob triangulorum* GMK, GEN, *similitudinem* $MG : GE = KG : GN$: *ergo sicuti* MG *dupla est* GE, *erit quoque* KG *dupla* GN.

Ergo harmonice secta est diameter in G, atque in termi-
(a)Cor. 12. nis transversi lateris, & occursu ordinatæ, ergo (a) MG est tangens.

Coroll. 14. Quælibet hyperbolæ tangens MG, semper infra centrum C, supra verticem N, cum diametro concurrit; nam QK major est KN, ergo & QG, major est GN, cum sint hæ rectæ proportionales (si vero punctum G, foret supra C tum QG, minor esset GN, si vero punctum G esset in C, tum esset QG=GN, contra analogiam.

Coroll. 15 Ducta ex centro C ellipsis, & hyperbolæ recta CX parallela NE, conveniente cum MQ in X, patet fore CX, medietatem IN, ut CQ, medietas est QN; adeoque æquari NE, vel IE, ac junctis CE, XE, fieri parallelogramma CXEN, CXIE, QXEC; quare ad ducendam tangentem ex dato puncto M, sufficiet jungere ad remotiorem diametri terminum Q, rectam MQ, & ex centro ducta CX, parallela ordinatis, factoque uno ex dictis parallelogrammis, juncta ex M, ad angulum E (sive ducta XE, dumtaxat parallelà, & æquali semidiametro CN) junctaque ex M, ad punctum E, ipsa recta ME, erit tangens.

Fig. 29. 30. 31. *Coroll.* 16. Denique semidiameter NK, in qualibet sectione sit ejus axis, posita in ipsa KS, æquali KT, ad partem subtangenti oppositam, juncta SM, erit perpendicularis curvæ; nam cum tangente GM, rectum angulum efficiet SMG; cum enim sit TK, sive KS, illi æqualis ad KM, ut KM ad KG, quadratum MK æqualiter SKG rectangulo, & ideo cum sit MK perpendicularis axi GS, erit SMG triangulum rectangulum (46), cujus normalis MK, est media inter seg-
(b) 8. VI. Elem. menta basis SK, KG (b), dicetur autem ipsa KS, subnormalis, quæ in Parabola (fig. nempe 39.] Semper erit æqualis semiparametro NR, cui æquatur KT; In hyperbola vero, & ellipsi (figuris nempe 30. 31.) erit ad semiparametrum, ut distantia ordinatæ a centro, CK ad semiaxem transversum CN; ita enim est KT, ad NR, ob triangulorum

---

(46) *Erit SMG triangulum rectangulum; cum enim sit* SK : K*M* = K*M*: KG, *angulique ad* K, *recti, ac proinde æquales, erit triangulum* S*M*K [6 *VI. El.*], *Simile triangulo G*M*K; quare anguli dictis lateribus proportionalibus oppositi, æquabuntur; erit ergo angulus S*M*K, cui opponitur* SK, *æqualis angulo MG*K, *cui opponitur M*K, *iisque communiter addito angulo G*M*K, erit angulus S*M*K + G*M*K = ang. MG*K + *G*M*K, sunt autem duo*

rum CKT, CNR, similitudinem); Sive eadem subnormalis KS, æqualis KT, est ad distantiam ordinatæ a centro CK, ut rectum latus NF ad transversum NQ; (ob triangula TKC, FNQ, similia.)

PROPOSITIO X.

IN Parabola quælibet recta MD, parallela ejus diametro NK, est pariter & ipsa diameter bifariam secans omnes illi ordinatas HF, NZ, parallelas tangenti MG; & quadrata pariter ejus ordinatarum HD, NX, sunt ut abscissæ MD, MX a vertice M talis diametri. Fig 32

Ex vertice N, diametri NK, unde genita est Parabola, ducta tangente NE, quæ occurrat ipsi MD, in I, ducatur quoque NXZ, parallela tangenti MG, quæ ipsi MD, occurrat in X, & curvæ in alio puncto Z; ducantur quoque ordinatæ ad diametrum NK, rectæ MK, & TZ, secans MD in V; erit quadratum MK ad quadratum ZT, ut NK, ad TN, ex natura Parabolæ (*a*) sive ut parallelogrammum NKMI, ad aliud æque altum NTVI, (*b*); at similia triangula GKM, NTZ, sunt pariter ut quadrata homologorum laterum (c) MK, ZT, ergo hæc triangula sunt ut dicta parallelogramma; sed triangulum GKM, æquatur NKMI, ob ejus basim GK, duplam (*d*) basis hujus NK, & parem utriusque altitudinem, ergo etiam triangulum NTZ, æquabitur NTVI, & ablato communi NXVT, erit triangulum XVZ, æquale simili triangulo XIN; quare & horum latera homologa XZ, XN, (47) erunt æqualia; igitur recta MD

(a) Proposit.4.
(b) 1. VI. Elem
(c) 19. VI. Elem
(d) Cor. 6. prop.9.

---

posteriores anguli simul sumpti recto æquales [32.I.El.] *ergo, & rectus erit angulus SMG ipsis SMK, GMK, æqualis: Aliter ob, SK : KM = KM : KG, erit $KM^2 = SKG$, quare $2MK^2 = 2SKG$; $2MK^2 + SK^2 + KG^2 = 2SKG + SK^2 + KG^2$, est autem $2MK^2 + SK^2 + KG^2 = MS^2 + MG^2$ (47. 1. El.), & $2SKG + SK^2 + KG^2 = SG^2$ (4. 2. Elem.), ergo $MS^2 + MG^2 = SG^2$; proindeque (48. 1. El.) angulus M rectus.*

(47) *Triangula XVZ, XIN, sunt similia, quare (19. VI. El.) erit $XVZ : XIN = XZ^2 : XN^2$; est autem $XVZ = XIN$ ergo & $XZ^2 = XN^2$, seu $XZ = XN$.*

MD bifariam dividit in X, ipsam NZ, tangenti MG, parallelam; Similiter ducta quavis alia parallela HDF, supra NZ, quæ secet NK, in P & NI, in E, & ordinatis ad priorem diametrum MK, HL, FB, secantibus ipsam MD, in R, & S; cum sit triangulum PLH, ad GHM, sibi simile ut LH quadratum, ad quadratum KM, (*a*) ideſt ut NL, ad NK (*b*) sive ut NLRI, ad NKMI, quemadmodum GKM, æquatur NKMI, etiam PLH, erit æquale NLRI, & aliud simile triangulum PFB, æquabitur NBSI, cum sit ad GKM, pariter ut quadratum FB ad quadratum MK, nempe ut BN, ad NK, sive ut NBSI, ad NKMI, differentia triangulorum PFB, PLH, ideſt quadrilaterum LHFB, æquabitur differentiæ parallelogrammorum ipsis triangulis æqualium NBSI, NLRI, ideſt parallelogrammo LBSR (48), & ablato communi spatio LBSDH, remanebunt triangula DSF, DHR, æqualia, unde cum similia sint, erunt homologa latera DF, DH pariter æqualia. Similiter ducta infra NZ, recta hf, parallela tangenti MG, quæ secet NK in p, NI, in e, atque ordinatis hl, fb, ad diametrum NK, secantibus ipsam MD, in R, S, oſtendetur (49) triangulum hpl æquari NLRI; unde utrinque addito LbSR, erit hpbSR; æquale ipsi NbsI parallelogrammo, quod erit æquale triangulo pbf (50) ob eamdem rationem in similibus litteris supra adductam; quare cum proveniat hpbsR æquale pbf, ablato communi pbsd, resultabit triangulum hdR, simile, & æquale fds, ideoque & homologa latera hd, df æqualia erunt. Igitur recta MD, secat bifariam quaslibet parallelas tangenti

(a) 19. VI. Elem.

(b) Proposit. 4.

---

(48) *Triangulum PLH = NLRI; & PFB = NBSI, ergo PFB — PLH = NBSI — NLRI, seu LHFB = LBSR.*

(49) *Cum sit hl ad diametrum NK ordinata, eaque cum LH, indirectum posita, erit ipsa = HL; quare propter triangula PLH, plh, similia, ob lineas ph, PH, parallelas, latusque hl = HL, erunt triangula plh, PLH [ex nota 47] æqualia; unde cum PLH = NLRI, huic parallelogrammo æquabitur quoque plh.*

(50) *Propter bf, KM, parallelas, erunt triangula pbf, GKM, similia, quare [19. VI. El.] pbf: GKM = bf2: MK2 = bN: KN, sed bN: KN = NbsI: NKMI [1. VI. El.] ergo pbf: GKM = NbsI: NKMI; & permutando pbS: : NbsI = GKM: NKMI, est autem GKM = NKMI, ergo & pbf = NbSI.*

genti GM; unde respectu harum ordinatarum, est quoque MD, diameter.

Quia vero propter GN æqualem NK, æqualem IM, triangula similia GEN, IEM, æquantur (a), addito utrinque NEMX, parallelogrammum GNXM, æquatur triangulo INX; pariterque iisdem triangulis GEN, IEM, addito NEMSB; quadrilineum GMSB æquatur parallelogrammo INBS, cui ostensum est æquale triangulum PBF; ergo ex hoc triangulo, & ex GMSB, ablato trapezio PDSB, erit triangulum DSF, æquale parallelogrammo GPDM; quare triangulum INX, sive illi æquale XVZ, (propter eorum similitudinem laterumque homologorum NX, XZ, æqualitatem) ad triangulum DSF (ob ZX, FD, parallelas) eidem simile, adeoque & quadratum (b) XZ ad quadratum DF, sive quadratum NX ad quadratum DH, erit ut parallelogrammum GNXM, ad GPDM, sive (c) ut XM, ad DM. Q. E. D.

(a) Ex nota 47.

(b) 19. VI Elem.

(c) I VI. Elem.

Coroll. 1. Hinc quæcumque respectu diametri primigeniæ NK, ejusque ordinatarum dicta sunt, ad quamlibet aliam diametrum MD, referri possunt circa tangentem, velut NI cujus subtangens XI, pariter dupla erit abscissæ MX; & circa parametrum seu latus rectum, huic alteri diametro MD, determinandum, quod erit tertia proportionalis post quamlibet abscissam MD, & ejus ordinatam DF, ut quadratum cujuslibet ordinatæ æquetur rectangulo suæ abscissæ in idem latus rectum huic diametro pertinens. (51)

Coroll. 2. Notetur autem quævis triangula superordinatis, suæ diametro adjacentia, cum subtenso latere parallelo tangenti, velut PLH, PBF, NTZ, æquari parallelogrammis sibi correspondentibus, NLRI, NBSI, NTVI &c. uti etiam GXN æquatur MXNG, & RDH (quod DSF æquale est) æquatur MDPG; dfs æquatur (52) MdpG, & sic de aliis.

Co-

---

(51) *Cum illa omnia relate ad diametrum primigeniam ostensa sint, Propositione XI., & Corol. I. IV; quia ad ipsam diametrum ordinatarum quadrata, sunt ut abscissæ; hinc & in hoc casu verificentur necesse est, cum quadrata ordinatarum ad diametrum MD, sint ut abscissæ correspondentes.*

(52) *GNE = MIE, adeoque communiter addito NEMSb erit GEMSb = INbS; est autem INbs = = bpf [ex nota 50] ergo bpf = GEMSb; ablatoque communiter bpds, erit MdpG = dfs.*

Coroll. 3. Item notetur triangulum NEG ostensum æquale IEM, & ob triangulum DHR, (= SDF) æquale MDPG, ablato communi MDHO, triangulum ORM, æquatur OHPG; unde idem triangulum ORM cum simili PLH æquatur triangulo GLO; Pariter ob hl æqualem LH, quia triangulum hpl æquatur PLH (*a*), erit ORM cum plh æquale GLO; unde & quadrata OR, HL, aut ORhl, æquantur quadrato OL (53); aut sumptis aliis lateribus homologis, quadrata MR, (seu KL) & LP (aut lp) quadrato GL, æquantur.

(a) Ex nota 49.

Coroll. 4. Similiter ob triangulum XVZ (= INK) æquale MKNG extensa tangente GM, ut secet ordinatas TZ, in I, atque BF in A, juncto MXZY, evadit triangulum MVY æquale ZNGY; sicuti ob triangulum DFS (= RDH) æquale MDPG, addito utrinque MDFA, fit triangulum MSA, æquale FPGA; & similiter, (cum sdf sit = MdpG, utrinque addito Mdfa) ostendetur triangulum Msa æquale fpGa.

Coroll. 5. Hinc triangulo MVY, & huic æquali trapezio ZNGY addito triangulo simili NIZ, erunt MVY, NTZ, æqualia simili triangulo GTY; adeoque etiam quadrata VY, & TZ, æquantur quadrato TY (54); Sicuti addito PFB triangulo ad triangulum MSA, vel ad huic æquale trapezium FPGA; erunt duo similia triangula PFB, MSA, æqualia simili triangulo GBA; unde & quadrata BF, SA, æquantur quadrato BA, & similiter aliis homologis lateribus acceptis erunt quadrata MV (seu KT), & NT æqualia quadrato GT; necnon quadrata PB & MS (seu KB) æqualia quadrato GB, & sic de aliis.

Corol-

---

(53) *Ob triangulorum ORM, PLH, similitudinem: erit* (19. VI. El.) $ORM : PLH = OR^2 : HL^2$, *&* *componendo*, $ORM + PLH : PRHL = O^2 + HL^2 : HL^2$; *& permutando* $ORM + PLH : OR^2 + HL^2 = PLH : HL^2 = GLO : LO^2$ (19. VI. El.), *atque iterum permutando* $ORM + PLH : GLO = OR^2 + HL^2 : LO^2$, *est autem* $ORM + PLH = GLO$, *ergo &* $OR^2 + HL^2 = LO^2$.

(54) $MVY : NTZ = VY : TZ^2$ [19. VI. El.] *ergo* $MVY + NTZ :: NTZ = VY^2 + TZ^2 : TZ^2$. *Seu* $MVY + NTZ : VY^2 + TZ^2 = NTZ : TZ^2 = GTY : TY$ *ergo* $MVY + NTZ :: GTY = VY^2 + TZ^2 : TY^2$; *est autem* $MVY + NTZ = = GTY$, *ergo &* $VY^2 + TZ^2 = TY^2$.

Coroll. 6. Rursus, quoniam triangulum PLH æquatur NLRI, ablato communi NLHÆ, fit triangulum PNÆ æquale ÆNRI; additoque simili triangulo HRD, erunt triangula PNÆ, HRD, æqualia ÆDI triangulo simili; unde quadrata homologorum laterum NÆ, & HR æquantur quadrato ÆI; Item quadrata PÆ, HD, æqualia erunt quadrato ÆD, quod cum sit æquale FÆH cum quadrato HD (*a*) erit PÆ quadratum æquale FÆN rectangulo, & similiter, ob triangulum hpl æquale NLRI, & addito utrinque Nlhe, triangulum PNe æquale erit IRhe; unde adjecto triangulo hRd, erunt duo triangula pNe, hRd, æqualia simili triangulo eId, adeoque quadrata homologorum laterum dh, pe erunt æqualia quadrato e d, seu (*b*) rectangulo f eh, cum quadrato dh; unde (ablato communiter quadrato dh) quadratum p e erit rectangulo fæb, æquale, ac, æp, erit media inter fæ, & eh, sicut PÆ media est proportionalis inter FÆ, & ÆH.

(a) 6. 2. Elem.

(b) Per eamdem.

Coroll. 7. Eadem ratione, quoniam quadrata OR, LH, æquantur quadrato ΦO, (*c*), seu rectangulo hOH cum quadrato LH (*d*), est quadratum OR, æquale rectangulo hoH, & ideo OR, media proportionalis inter hO, & OH (*e*); Similiterque producta ordinata FB, ad aliam curvæ partem in Φ, cum sint quadrata SA, & FB, æqualia quadrato BA (*f*) hoc est rectangulo ΦAF, cum BF quadrato (*g*), erit rectangulum ΦAF, æquale quadrato SA; ipsaque SA media proportionalis inter AΦ, & AF.

(c) Coroll III.

(d) 6 2. Elem.

(e) 2 part. 17 VI El.

(f Ex Coroll. V

(g) 6. II. Elem.

Coroll. 8. Quare si duæ tangentes NE, ME, conveniant in E, & uni earum NE, parallela ΦA, secet aliam tangentem in A, erit rectangulum ex tota secante ΦA in partem externam AF, ad quadratum AM portionis interceptæ ex tangente AM inter contactum & secantem, ut quadratum parallelæ tangentis NE, ad quadratum reliquæ tangentis EM; quippe (ob triangulorum GNE, MSA, similitudinem) NE quadratum, ad quadratum EM (quod æquatur EG, quadrato] est ut quadratum SA (seu rectangulum ΦAF (*h*) illi æquale) ad quadratum AM; Sic etiam secantis ÆHF, parallelæ tangenti ME, rectangulum FÆH, est ad quadratum ÆN, ut quadratum PÆ illi rectangulo æquale (*i*), ad quadratum ÆN, sive ut GE, vel ei æqualis EM quadratum, ad quadratum EN.

(h) Coroll. VII.

(i) Ex Coroll. VI.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Fig. 33. *IN Parabola AND, cujus basis AD, diameter AB, latus rectum NF; qualibet recta diametro parallela ME, HG sunt, ut rectangula partium basis AED, AGD; & etiam basi producta, si extra Parabolam agantur parallela diametro, em, gh, erunt ha quoque ut rectangula AeD, AgD.*

(a) Corol. 1. prop. 4. Nam ut quadratum BD, æquatur rectangulo BNF (*a*), ita quadratum alterius ordinatæ PH, vel ph, æquatur rectangulo parametri NF, in abscissam NP, seu np; ergo differentia quadratorum BD, PH, seu BG illi æqualis, quæ (b) 15. 2. Elem. est rectangulum AGD (*b*) æquatur rectangulo ejusdem NF, in differentiam abscissarum (*c*) NB, NP, quæ est PB æqualis HG: & similiter differentia quadratorum BD, ph, sive (c) 1. 2. Elem. (d) 6. 2. Elem. illi æqualis Bg, quæ est rectangulum AgD (*d*), æquabitur rectangulo ejusdem NF in Bp, seu gh, quæ est differentia BN, ab Np; Similiter ostendetur rectangulum AED, æquari NF in ME, & rectangulum AeD, æquari NF in me, ergo hæ lineæ parallelæ diametro ME, HG, sunt ut rectangula AED, AGD, (*e*) quia illæ lineæ in eamdem parametrum NF (e) 1. VI. Elem. ductæ illis rectangulis sunt æquales; ac similiter (cum AgD: AeD = hg×NF: me×NF) em, ad, gh, erunt (*f*) ut rectangula [f] Per eamdem. ipsis correspondentia AeD, AgD. Quod &c.

Corollarium.

Producta HP ad alteram diametri partem in L, quæ secat ME in I, rectangulum quoque AED, ad LIH erit ut recta ME, ad MI; quippe eodem modo NF in ME dat rectangulum æquale AED, & eadem NF in MI, dabit rectangulum æquale LIH; (quare AED: : LIH = ME×NF: (g) Per eamdem. MI×NF, seu (*g*) = ME: MI): & similiter producta hp in l, secante, em in i, rectangulum AeD æquale NF×em, ad rectangulum lih, quod pariter æquabitur rectangulo NF in mi, erit ut em ad mi.

PRO-

PROPOSITIO XII.

IN ellipsi, & oppositis hyperbolicis Sectionibus, quælibet recta, MC per centrum C extensa, ad alteram partem occurrit Sectioni in FS; atque in centro bifariam dividitur, & ex ejus terminis M, S, curvam tangentes MG, SP, sunt parallelæ, & æquales. Fig. 34. 35.

Ordinata MK, ad priorem diametrum NQ, sumptaque CF = CK, ordinetur ad alteram ejus diametri partem FS. Juncta SC; quoniam differentia quadratorum NC, CK, idest rectangulum NKQ (*a*), æquabitur differentiæ aliorum quadratorum CQ, CF, illis respective æqualium, idest rectangulo NFQ, (*b*) ipsarumque ordinatarum MK, SF quadrata sunt dictis rectangulis proportionalia (*c*) ergo hæc quadrata pariter æqualia erunt (proindeque MK = SF) unde quia MK æquatur SF, & CK æquatur CF (*d*), & anguli alterni parallelarum MKC, SFC, sunt æquales, erit quoque (*e*) CM, basis trianguli CKM, æqualis CS, basi trianguli CFS, & angulus MCK, erit æqualis SCT; unde sicut ille (seu MCK) cum angulo MCF duos rectos complet (*f*), ita hic cum eodem idem efficit, adeoque CS, est in directum ipsi MC (*g*) ob angulos SCF, MCF, binis rectis æquales, igitur ipsa MC producta incidit alteri parti sectionis in S, & ipsa MCS, bifariam divisa est in centro C; Quoniam vero ductis tangentibus MG, SP, rectangulum GCK, æquatur (*h*) quadrato semidiametri CN, & similiter rectangulum FCP æquatur quadrato CQ (*i*), sicut CN æquatur NQ, (seu $CN^2 = NQ^2$) ita rectangulum GCK æquabitur PCF, estque CK æqualis CF, ergo etiam CG æquatur CP; & propter CM æqualem CS, & angulos æquales MCG, ICP, erunt horum triangulorum bases (k) MG, SP, æquales, atque etiam parallelæ, propter alternos angulos MGC, SPC, utpote lateribus æqualibus MC, CF, oppositos) pariter æquales. Q. E. D.

(a) 5. 2. El. in Elipsi, & 6. 2. El. in Hyp.
(b) Per easdem.
(c) Prop. 5 in Hiperbol. & 6. in Ellipsi.
(d) Ex constructione.
(e) 4. 1. Elem.
(f) 13. 1. Elem.
(g) 14. 1. Elem.
(h) Ex Corol. XI. propos. 9.
(i) Per idem Corol.
(k) 4. 1. Elem.

Coroll. 1. Producta SF, ad alteram sectionis partem in E, erit FE, æqualis FS, adeoque & æqualis KM, sibi parallelæ, unde (*l*) juncta ME parallela erit, & æqualis ipsi KF. [l] 33. 1. Elem.

Coroll. 2. Et ducta per centrum C, ordinatis MK, EF, parallela CH, bifariam secabit ipsam EM, in B, & sic omnes alias huic parallelas, jungentes terminos æqualium ordinatarum ad diametrum NQ), nam evadet BM, æqualis CK & BE æqualis CF, cum sint latera opposita parallelogrammorum (CBMK CBEF), & posita jam fuerit CF æqualis CK; unde ipsa quoque CH, erit diameter, cui ME, TL ordinari possunt parallelæ priori diametro, & bifariam in B, R ab ipsa HC, dividentur.

Dicitur autem hæc alia diameter secundaria, & priori conjugata. In Ellipsi quidem ab ipso ejus perimetro determinata ad puncta H, I, existente CI æquali CH, cum & ipsa ordinetur diametro NQ, adeoque ab ipsa bifariam secetur in C; & quia (a) quadratum ordinatæ HC, ad rectangulum partium diametri QCN, adeoque ad quadratum CN, est ut latus rectum NV, ad transversum NQ, etiam quadruplicando terminos (scilicet quadratum HC, & quadratum CN) quadratum HI, ad NQ, quadratum, erit ut NV ad NQ (seu NV, ad NQ, est in ratione duplicata HI, ad NQ), & ideo HI, secundaria diameter conjugata (b) est media proportionalis inter parametrum NV, & primariam diametrum transversam NQ. In Hyperbola vero, determinanda pariter est media quædam proportionalis HI, inter latus rectum NV, & transversum NQ, atque ita disponenda per centrum E, æquidistans ordinatis diametri NQ, ut in ipso puncto C, bifariam partita maneat; & hæc erit secundaria (Hyperbolæ) diameter priori NQ, conjugata.

(a) Corol. 6. propofit. VI.

(b) Defin. 10. V. El.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 34. 35.

IN Ellipsi ordinatarum ad secundariam diametrum IH, quadrata BM, RI, sunt ut rectangula partium ejusdem diametri, HRI; HBI, idest ut differentia quadrati HC, a quadrato BC, ad differentiam ejusdem quadrati HC, ab RC quadrato. At in Hyperbola quadrata BM, RT, ordinatarum ad secundariam diametrum HI, sunt ut summa quadrati HC, & quadrati BC, ad summam ejusdem HC quadrati, & quadrati RC.

Primum patet, quia ordinatis MK, TZ, ad priorem diametrum NQ, cum sit rectangulum NCQ, seu quadratum CN, ad rectangulum QKN, ut quadratum CH, ad quadratum KN, seu CB; permutando, totum quadratum CN, ad totum quadratum CH, est ut rectangulum QKN, ex pri-

primo ablatum (55) ad quadratum CB ex secundo ablatum: quare, & reliquum quadratum CK, seu BM, ad reliquum rectangulum HBI, est ut totum quadratum CN, ad totum quadratum CH (*a*); eodem modo pariter ostendetur esse quadratum RT, ad rectangulum HRI; in eadem ratione quadrati CN ad CH quadratum (56); ergo quadrata ipsa BM, & RT sunt, ut rectangula partium secundariæ diametri HBI, HRI; quæ sunt differentiæ quadratorum BC, RC, ab eodem CH, quadrato (*b*).

(a) 19. V. Elem.

(b) 5. 2. Elem.

Secundum autem ostenditur, quia in Hyperbola, cum sit rectangulum QKN, ad quadratum MK, seu BC, ut transversum latus QN, ad rectum NV (*c*), sive ut quadratum NQ, ad quadratum HI, quæ (*d*) est media proportionalis inter NQ, & NV, seu sumptis subquadruplis ut quadratum CN, ad quadratum CH, etiam summa antecedentium, nempe QKN cum CN quadrato, quod est (*e*) CK, seu BM quadratum, ad summam consequentium, idest ad quadratum BC cum CH, quadrato, in eadem ratione erit unius antecedentis ad suum consequens, nempe ut EN quadratum ad CH, quadratum (*f*) (57); & quia eodem modo RT, quadratum ad summam quadratorum RC, & CH, in eadem ratione quadrati CN ad quadratum CH, esse probabitur (58); igitur quadrata BM, RT, sunt ut summa quadratorum BC, & CH ad summam quadratorum RC, & CH.

(c) Corol. 6 V propolit.

(d) Post Corol 2. XII. proposi.

(e) 6. 2. El.

(f) 12. V. Elem.

---

(55) *Quadratum* $CK^2 + QKC = CN^2$. *Sicuti etiam* $CB^2 + IBH = CH^2$ [5. 2. *Elem.*] *quare cum sit* $CN^2 : CH^2 =$ *ablatum* QKC : *abl.* CB^2, *erit etiam* $CN^2 : CH^2 = CK^2 : IBH = BM^2 : HBI$.

(56) $CZ^2 + QZN = CN^2$: & $CR^2 + HRI = CH^2$ *est autem* $CN^2 : CH^2 = QZN : CR^2$ [*seu* TZ^2], *ergo* $CN^2 : CH^2 = CZ^2 : HRI = RT^2 : HRI$ (19. *V. El.*

(57) *Id ipsum etiam hoc pacto ostendi potest*: $QKN . BC^2 = = CN^2 : CH^2$: & *permutando* $QKN : CN^2 = BC^2 : CH^2$, & *componendo* $QKN + CN^2 : CN^2 = BC^2 + CH^2 : CH^2$ *sive tandem permutando* $QKN + CN^2 : BC^2 + CH^2 = CN^2 CH^2$ *seu* $BM^2 : BC^2 + CH^2 = CN^2 : CH^2$.

(58) $QZN : TZ^2$ (*seu* CR^2) $= QN : NP = NQ^2 : HI^2 = CN^2 CH^2$; *ergo* $QZN : CN^2 = CR^2 : CH^2$. $QZN + CN^2 : CN^2 : CR^2 + CH^2 : CH^2$, *seu* $QZN + CN^2$ $CR^2 + CH^2 = CN^2$, *hoc est* CZ^2 (6. 2. *El.*) *seu* $RT^2 : CR^2 + CH^2 = CN^2 : CH^2$.

Coroll. 1. Patet in Ellipsi quadratum cujuslibet ordinatæ BM, ad rectangulum partium suæ diametri secundariæ HBI, esse, ut transversum QN ad rectum NV, cum sit ut quadratum CN, ad quadratum CH, vel NQ quadratum ad HI quadratum (terminos CN^2, CH^2, quadruplicando) quæ sunt in eadem ratione (QN : NV) (*a*).

(a) Post Corol. 2. prop. XII.

Coroll. 2. Unde posita HX quarta proportionali ad NV, HI, QN, erit ipsa HX latus rectum conjugatæ diametri IH; nam permutando HX ad HI, erit ut QN ad NV; Ideoque ordinatæ BM quadratum ad rectangulum HBI (& quadratum alterius ordinatæ TR, ad rectangulum HRI) est ut hæc parameter, seu latus rectum HX, ad transversum HI. (*b*) (59)

(b) Ex Corollar. praced.

Coroll. 3. In Hyperbola vero MB quadratum ad summam quadratorum BC, HC, est ut NC quadratum ad HC quadratum (*c*), sive ut QN, ad NV (*d*), seu pariter sumpta HX quarta proportionali post NV, HI, QN) ut ipsa HX ad HI; adeoque ipsa HX, erit latus rectum (60), seu parameter diametri illius secundariæ HI; quæ pertineret ad binas alias hyperbolas diametro transversa HI, descriptas, veluti Ii, AHa, quæ duæ hyperbolæ prioribus NM, QS, conjugatæ appellantur (quod earum transversa diameter Hi sit conjugata ipsi QN, transverso lateri hyperbolarum NM, QS)

(c) Ex hac proposit.
(d) Post Coroll. 2. XII.

Coroll. 4. Et quia ordinata AR intra unam ex his conjugatis hyperbolis ad diametrum HI, habet quadratum suum AR ad rectangulum IRH, ut latus rectum HX, ad transversum HI (*e*), erit ergo quadratum TR, aut LR, ad summam quadratorum RC, CH, ut quadratum AR, ad rectangulum IRH, cum utraque ratio sit eadem, quæ HX, ad HI. (*f*)

(e) Corol. 6 prop. V.
(f) Coroll. 2.

Corol-

(59) *Eamdem HX esse latus rectum, seu parametrum conjugatæ diametri HI, patet etiam ex eo quod ea sit tertia proportionalis post HI, & QN, juxta ea, quæ habentur post Coroll.* 2. *Propositionis XII. cum enim* $NV : HI = QN : HX$ *erit* $QN : NV = HX : HI$, *sed* $QN : NV = QN^2 : HI^2$; *ergo* $QN^2 : HI^2 = HX : HI$, & $HI^2 : QN^2 = HI : HX$, *quare* $HI : QN = QN : HX$.

(60) *Idipsum patet etiam in hyperbola si eadem demonstratione quam (nota 59) adhibuimus in præsentiarum uti velimus, ostendetur enim HX tertia esse proportionalis post diametrum HI, quam relate ad conjugatas hyperbolas Ii, HAh, veluti transversam consideramus, & post NQ, quæ relate ad prædictas hyperbolas est diameter conjugata.*

Coroll.5. Et permutando LR quadratum ad quadratum AR, ut summa quadratorum RC, CH ad rectangulum IRH, quod est ipsorum quadratorum RC, CH (*a*) differentia, ac dividendo LR quadratum dempto AR, quadrato, idest rectangulum (*b*), TAL ad quadratum AR, erit ut quadratum HC cum quadrato CR dempto IRH rectangulo (idest cum quadrato eodem HC (*c*), ideoque ut duplum quadrati HC, ad ipsum IRH, rectangulum, atque iterum permutando TAL rectangulum ad duplum quadrati HC, ut quadratum AR ad IRH; sive ut HX ad HI, nempe ut CN quadratum (*d*) ad CH, quadratum, sive ut duplum quadrati CN, ad duplum quadrati HC, (est ergo $TAL : 2HC^2 = 2CN^2 : 2HC^2$) ideoque illud rectangulum TAL æquatur semper duplo quadrato CN; unde ubique est ejusdem quantitatis.

(a) 6. 2. Elem.
(b) 5. 2. Elem.
(c) 6. 2. Elem.
(d) Corol. III.

Coroll.6. Hinc ex termino H, diametri HI ducta ad ipsam ordinata HY secante unam ex prioribus Hyperbolis, velut EQS, in TY, erit quadratum ipsius HY, duplum quadrati CN (61) Ut etiam hinc constat, quia esset ordinatæ HY, quadratum ad summam quadratorum HC, CH, ut MB quadratum ad summam quadratorum BC, CH (*e*), idest ad duplum quadrati CH, ut quadratum CN, ad CH quadratum (*f*), adeoque ut duplum CN quadrati, ad duplum quadrati CH, (est itaque $HY^2 : 2CH^2 = 2CN^2 : 2CH^2$); ideoque HY quadratum æquatur duplo quadrati CN.

(e) Ex hac proposit.
(f) Ex Corollar. III.

PROPOSITIO XIV.

Quæcumque alia recta MC, in Ellipsi, & oppositis Hyperbolis, per centrum C, ducta est diameter bifariam secans quaslibet NZ, *HF, ipsi applicatas parallelas tangenti GM.*

Fig. 16. 17.

Per verticem N, prioris datæ diametri NQ, agatur tangens NI, secans ipsam CM in I, & tangentem MG in E, illasque applicatas HF, hf in Æ, & æ, alteram supra NZ, ductam ex vertice N, alteram infra ipsam. Ducantur quoque ad priorem diametrum ordinatæ MK, & ZT, HL, FB, lh, fb,

G 3

(61) *Puncto R, existente in H, linea AL, in lineam HY, & TA in lineam OH, degenerabit, quare TAL, evadet* $= OH \times HY = HY^2$; *est autem* $TAL = 2CN^2$, *ergo* $2CN^2 = AY^2$.

fb, concurrentes cum CM, ad puncta V, R, S, s, & cum tangente MG, in punctis Y, O, A, a; Quoniam CK, ad CN, ut CN, ad CG (a), erit quadratum CK, ad quadratum CN, seu triangulum CKM, ad simile CNI (b), ut CK ad CG, quæ sunt, ut CKM, triangulum, ad CGM, triangulum, quæ sunt æque alta; quare triangula CNI, CGM, sunt æqualia, & horum alterutro sublato a triangulo CKM (hoc est in Hyperbola ablatis CNI, CGM ab CKM, & in Ellipsi ablato CKM, ab CNI, & CGM) erit trapezium NKMI, æquale triangulo GKM, est autem hoc triangulum ad alia similia NTZ, PLH, PBF, plh, pbf, ut quadratum KM (c) ad quadrata homologorum laterum TZ, LH, BF, lh, bf, hoc est ex natura Ellipsis, & Hyperbolæ (d), ut rectangulum QKN, ad rectangula illis correspondentia QTN, QLN, QBN, QLN, QbN, nempe ut differentia quadrati CN (62) a quadrato CK, ad differentiam ejusdem quadrati CN a quadratis CT, CL, CB, CL, Cb, sive, ob analogiam triangulorum similium cum quadratis laterum homologorum, ut differentia trianguli CNI a triangulo CKM, ad differentias ejusdem CNI, a triangulis CTV, cLR, CBS, CLR, Cbs (63); hoc est ut trapezium NKMI, ad trapezia NTVI, NZRI, NBSI, NLRI. NbsI; ut igitur triangulum GKM, æquatur NKMI, ita NTZ, æquabitur NTVI, & PLH, erit æquale NLRI, ac PBF, erit æqua-

(a) Corol. II. propofit. 9.
(b) 19. VI. Elem.
(c) 19 VI Elem
(d) Propof. 5. & 6

---

(62) *Rectangula QTN, QLN, QBN, QLN, QBN, sunt differentiæ quadrati KN, a quadratis CT, CL, CB, CL, Cb, per prop. 6. 2. El. in hyperb. & ellipsi per propositionem 5. 2. Elem.*

(63) *Cum sit* $CNI : CKM = CN^2 : CK^2$, *erit* $CNI - CKM : CKM = CN^2 - CK^2 : CK^2$; $CNI - CKM : CN^2 - CK^2 = CKM : CK^2$. *Pariter cum sit* $CNI, CLR = CN^2 : CL^2$, *erit* $CNI - CLR : CLR = CN^2 - CL^2 : CL^2$; *seu* $CNI - CLR : CN^2 - CL^2 = CLR : CL^2$; *est autem* $CLR : CL^2 = CKM : CK^2$, *ergo* $CNI - CKM : CN^2 - CK^2 = CNI - CLR : CN^2 - CL^2$; *hoc est* $CNI - CKM : CNI - CLR = CN^2 - CK^2 : CN^2 CL^2$: *atque eodem modo ostendetur esse* $CNI - CLR : CNI - CBS = CN^2 - CL^2 : CN^2 - CB^2$, & $CNI - CBS : CNI - CTV = CN^2 - CB^2 : CN^2 - CT^2$; *atque ita porro. Quare differentia quadrati CN, a quadrato CK, ad differentiam ejusdem quadrati CN, a quadratis CT, CL, CB, CL, Cb, est ut differentia trianguli CNI, a triangulo CKM, ad differentiam ejusdem CNI, ab triangulis CTV, CLR, cBS, cLR, CbS.*

æquale NBSI, ac cætera triangula cæteris trapeziis æquabuntur; Itaque ex NTZ, & æquali spatio NTVI, ablato NTVX, remanebit XVZ æquale triangulo sibi simili XIN, quorum latera homologa XZ, & XN, (a) erunt æqualia. (a) 19. VI. El.
Similiter differentia triangulorum PBF, PLH, nempe trapezium LBFH, æqualis cum sit differentiæ trapeziorum illis æqualium NBSI, NLRI, ideſt trapezio LBSR; Si ex his duobus trapeziis LBFH, & LBSR, (æqualibus), auferatur commune spatium LBSDH, remanebunt æqualia similia triangula SDF, RDH, quorum homologa latera DF, DH, (b) æqualia erunt. Item triangulo phL (quod propter hl, HL æquales, ejusque similitudinem cum triangulo PHL, est huic æquale, ac proinde æquale trapezio NLRI), & illi æquali trapezio NLRI, addito LbsR, evidet spatium hpbsR, æquale NbsI, ideſt triangulo pbf, huic trapezio æquali; & ablato communi spatio pbsd, remanebit triangulum hRd, æquale fsd, sibi simili; Unde & eorum homologa latera hd, df, erunt æqualia; igitur CM, ideſt diameter bifariam secans omnes ipsi applicatas NZ, HF, hf, tangenti MG, parallelas. Q. E. D. (b) Per eandem.

Porro in Ellipsi fieri poteſt, ut ordinata fb, ad priorem diametrum NQ, cadat ultra centrum C, versus Q; & tunc ducta alia verticali tangente Qi, conveniente cum MC in i, erit quoque triangulum pbf (64) æquale trapezio QbSI. (Quod ad trapezium NKMI, eſt ut rectangulum QbN ad QKN, sive ut quadratum fb, ad MK, aut ut triangulum pbf, ad simile GKM, quod vidimus æquari NKMI] additoque SbC, erit spatium pCsf, æquale triangulo QCi, seu CNI (65) huic æquali, & ablato Cdp triangulum dsf, æquabitur NpdI, quod æquatur Fig. 38.

 dRh

---

(64) *Erit quoque triangulum pbf = trapezio QbsI; nam, ut Auctor oſtendit, QbSI* : NK*MI* = $CQ^2 - Cb^2$: $CN^2 - CK^2$ = *QbN* : *QKN* (5. 2. *El.*) = bf^2 : *MK* ^{2} (*proposit.6.*) *pbf* : *GMK* (19. *VI. Elem.*), *quare QbSI* : NK*MI* = *pbf* : *GMK*, *porro* NK*MI* = *GMK*, *ergo & QbSI* = *pbf*.

(65) *Quoniam Qi, NI; verticales tangentes sunt, erit ipsarum qualibet ordinatis parallela (propositione IX) quare sibi invicem erunt parallelæ (30. I. Elem.); proindeque triangula CNI, Cqi, similia erunt; hinc (19. VI. Elem.) triangulum CNI* : *CQi* = CN^2 : CN^2, *sed propter* CN = *CQ*, *eſt* $CN^2 = CQ^2$; *ergo & triangulum CNI* = *triangulo CQi*.

dRh, triangulo, propter plh æquale NLRI, & commune spatium LpdR, utrinque appositum, ergo æqualium, & similium triangulorum dsf, & dRh, homologa latera fd, & dh, pariter sunt æqualia. Q. E. D.

*Coroll.*1. Uti ostensum est triangulum CGM, æquale CNI, ablato communi quadrilineo CGEI, in Hyperbola; & CEMN, in Ellipsi, remanet triangulum IEM æquale GEN, & utrique addito NEMX, fit triangulum IXN, vel etiam VXZ illi simile, & æquale ob XZ = XN) æquale trapezio MXNG.

*Coroll.*2. Pariter iisdem triangulis IEM, GEN, addito spatio NEMSB, resultat GMSB, æquale NBSI, cui ostensum fuit æquale triangulum PBF, hoc igitur erit æquale GMSB, & utrinque ablato PDSB, resultat triangulum DSF, vel huic æquale DHR (propter triangula DHR, DSF, similia latusque homologum DH = lateri homologo DF) æquale trapezio MDPG, similiterque iisdem triangulis IEM, GEN, addito NbsME, resultat NbsI, quod vidimus æquari triangulo pbf, æquale GbsM, & ablato pbsd, remanet triangulum dsf, æquale trapezio MdpG.

*Coroll.*3. Hinc patet ad quamlibet aliam diametrum MC, ordinatarum quadrata XZ, DF, df, esse ut rectangula partium diametri mXM, mDM, mdM; sunt enim illa quadrata, ut triangula similia XZV, [seu XNI] DFS, dfs, quæ vidimus æquari trapeziis MXNG, MDPG, MdpG, atque adeo esse, ut differentiæ trianguli CMG, a triangulis similibus CXN, CDP, Cdp, quæ sunt ut dicta rectangula (66), nempe ut differentiæ quadrati CM, a quadratis homologorum laterum CX, CD, Cd; quare XZ quadratum est ad quadrata DF, df, (seu quadratum NX, ad quadrata HD, hd] ut rectangulum mXM, ad mDM, mdM.

*Coroll.*4. Hinc quæcumque ostensa sunt, circa tangentes, & circa parametrum diametri primigeniæ QN ad quamlibet aliam diametrum per centrum C, deductam referri possunt, ob eamdem essentialem proprietatem, ejus ordinatarum hic demonstratam (quod scilicet earum quadrata sint ut rectangula

---

(66) *XZV: DFS = DF² : ZX² (19. VI. Elem.) = MXNG : MDPG (coroll. 1. & 2.) = CMG — CXN : CMG — CDP = CM² — CX² : CM² — CD² (nota 63.) = MXm : MDm (V. & VI. 2. Elem); atque hoc pacto ostendetur esse XZV : dfs = MXM : Mdm; quare DF², ZX², df², erunt ut MXM, MDm, Mdm.*

gula abscissatum); nempe ut tangens MG dividit diametrum QN, ut sint continue proportionales CK, CN, CG, (a) & GCK æquetur quadrato semidiametri CN, atque harmonica evadat ratio QK ad KN, ut QG ad GN (b), sic tangens NI, secat diametrum mCM, ut CX, CM, CI, sint continue proportionales, & rectangulum XCI, æquetur quadrato semidiametri CM; necnon harmonice secta sit eadem diameter, nempe mX, ad XM sit, ut mi ad IM. (a) Corol. XI. 9. (b) Corol. XII 9.

Coroll. 5. Atque parameter hujus diametri mM determinabitur, si fiat ut rectangulum partium ipsius mDM, ad quadratum ordinatæ DF ita eadem transversa diameter mM, ad aliam lineam, hæc enim (c) parameter erit, seu latus rectum, quod se habet ad transversum [ubi quadrata ordinatarum sunt ut rectangula partium diametri) ut quadratum ordinatæ ad rectangulum ipsi correspondens ex diametri partibus. (c) Cor. VI 5. & 6.

Coroll. 6. Quæcumque propositione 10. Coroll. 3. 4. 5. 6. ostensa sunt in parabola de æqualitate triangulorum cum quadrilateris correspondentibus, etiam hisce Hyperbolis, & Ellipsibus ob eamdem rationem hic repetendam conveniunt, nimirum quod ORM, æquatur OHPG, (cum (d) DHR = MDPG, ablato communiter DMOH, erit ORM = OHPG) unde duo triangula PLH, ORM, æquantur toti GLO. Non tamen quod quadrata HL, OR, sint æqualia quadrato LO (sicuti ostensum est (e) in Parabola) quia diametri NK, MD, hic non sunt paralleli ut in Parabola, & ideo triangula DHR, PLH, non sunt similia. Idem dicendum de triangulo MSA, æquale trapezio FPGA (67) ac triangulis PBF, MSA, æqualibus GAB, & sic de aliis. (d) Cor. 2. (e) Cor. 3. 10.

Coroll. 7. Quod vero sit rectangulum secantis in parte externam tangenti, & curvæ interpositam, ad quadratum tangentis puta ΦAF ad AM quadratum, ut tangentis parallelæ secanti NE quadratum, ad quadratum alterius contiguæ tangentis EM (sicque etiam FÆH ad quadratum ÆN, aut fæA ad æN quadratum, ut ME quadratum ad quadratum NE) etiam in Hyperbola, & Ellipsi obtinet; idque etiamsi ex duabus oppositis Hyperbolis tangentes ductæ forent, invicem convenien-

---

(67) *Triangulum SDF = MDPG (coroll. 2.); hinc si utrinque addatur MDFA, erit FPGA = MSA, quare MSA + PBF = FPGA + OBF = GBA, sed quadrata BF, SA, quadrata BA, non æquantur atque ita de aliis.*

venientes, ut Propositione XVI. infra generatim demonstrabitur. (68)

PROPOSITIO XV.

Fig. 39. 40. 41. *Ex quolibet puncto H in perimetro Hyperbolæ, aut Ellipsis inter binas diametros CN, CM sumpto, vel etiam extra ipsas in Ellipsi (fig. 41.) si agantur HR, HP tangentibus NI, MG parallelæ usque ad ipsas diametros productæ in RP, quadrilaterum PHRC æquabitur triangulo CGM, aut CNI.*

[a] Coroll. 2. prop. 4. Nam quia triangulum DHR æquatur trapezio DMPG, (*a*) utrovis dempto in Hyperbola, ex triangulo CPD, vel utrovis addito in Ellipsi, resultabit quadrilaterum PHRC æquale [b] Prop 4 triangulo CGM, (seu CNI (*b*)) Q. E. D. (69)

Co-

---

(68) *Hinc patet in figuris 45. 48. esse triangulum PHK = NKRI; acta enim hp tangenti MG parallela, diametrum KN in p secante, erit per hanc propositionem phk = NKRI; sed ob PH, ph ipsi MG, ac proinde sibi invicem parallelas, erunt phk, PHK triangula similia, atque ob latus homologum HK = lateri alteri homologo hk, erit (19. VI. Elem) triangulum phk = triangulo PHK, quare PHK = NKRI.*

(69) *Quod vero etiam in fig. 41. sit triangulum DHR = DMPG; patet, quia sicuti in figura 36. triangulum hdR ostensum est = dMGp, ita etiam, acta FS trangenti NI parallela, erit triangulum DFS = MDPG; est autem DSF simile, & æquale triangulo DHR ob HR, FS parallelas, latusque homologum HD = homologo alteri DF, ergo DHR = MDPG.*

(70) *In figura 46. est CNI = PHRC; nam ducta tangente ni, quæ alteri tangenti NI parallela erit, habebitur triangulum CNI = Cni (19. VI. Elem.) ob latera Cn, CN æqualia; est autem Cni = CMI (propositione XIV), ergo sicuti CMG = PHRC (propositione XV), erit etiam CNI = PHRC. Id ipsum etiam contingit in figura 49; nam DHR = MDPG (cor. 1. XIV.) hinc addita utrinque FDC, erit PHRC = CGM = Cni (propositione XIV) est autem Cni = CNI ob triangulorum Cmi, CNI similitudinem, latusque homologum CN = Cn, ergo & CNI = PHRC.*

Coroll. 1. Hinc si ex alio puncto A perimetri Hyperbolici, aut Elliptici agantur iisdem tangentibus parallelæ AT, AL ad ipsas diametros productæ in T, & L, etiam quadrilaterum LATC æquabitur eidem triangulo CGM, (cui ostensum est æquari PHRC); adeoque ipsa quadrilatera PHRC, LATC erunt æqualia.

Coroll. 2. Convenientibus AT, PH in K, differentiæ cujusvis ex dictis quadrilateris æqualibus (nempe PHRC, LATC) ab alio PKTC, nempe trapezia KHRT, PKAL erunt æqualia.

Coroll. 3. Et convenientibus etiam AL, HR in Z, addito (in Hyperbola), & dempto (in Ellipsi) a dictis trapeziis AKHZ, fiet AZRT æquale AZLP.

PROPOSITIO XVI.

IN omni Sectione Conica si duæ tangentes ejusdem Sectionis, vel Hyperbolarum oppositarum ME, NE conveniant in E, & quæpiam recta FÆ uni tangenti ME parallela, secet Fig 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49.

---

(71) *Ex eadem propositione XV ostenditur in figuris 55. 56. 57. esse* KOPR = *HSQR; & quidem ad figuram 55. quod attinet, est CND = OKQC (propositione XV), & (per notam 70) Cri = CND = CMG = PHSC, ergo OKQC = PHSC; additoque communiter PCQR, erit HSQR* = KOPR. *Pariter in figura 56. est QKe = MeOG (propositione XIV, in fine), additoque communiter OeC, erit OCQK = MCG, pariter eodem modo ostenditur esse rCSH = MCG, ergo OCQK = PCSH, ablatoque communiter PCQR, erit HSQR* = KOPR. *Tandem hac eadem demonstratione figuræ 57, rite applicata ostendetur OCQK = PHSC, unde PCQR − OCQK = PCQR − PHSC, seu* KOPR = *HSQR.*

(72) *In figuris etiam 51. 52. est HSQR* = KOPR; *nam PNb = bHSD (coroll. 6. 10.), & ONI = IKQD, (per idem coroll.) sed bHSD = bHBi + iBSD; ergo PNb = bHBi + iBSd; quare (fig. 51.) ONI − PNb = iKQd − bHBi − iBSd = BKQS − bHBi; unde PbiO = BKQS − bHBi; atque utrinque addito bHBi, erit Pbio + bHB = BKQS, seu PHBO = BKQS; quare utrinque addito* KBHR, *erit* KOPR = *HSQR. In figura vero 52. erit PNb − ONE = bHSD − iKQd; unde Pbio = bHSD − bRQD − ibRK = bHS − ibRK; ergo Pbio + ibRK = QRHS, seu* KOPR = *HSQR.*

secet curvam in H, F, & aliam tangentem NE in Æ erit rectangulum FÆH ad quadratum NÆ, ut quadratum ME ad EN quadratum.

Ducantur per puncta contactus M, N diametri MD, NK secantes ipsam HF in D, & P tangentem NE in I, & ME in G, atque parallelam ipsi NE per H ductam in R, & K; erit quadratum ÆD ad triangulum ÆDI, ut quadratum HD ad triangulum HDR alteri simile (*a*); unde differentia antecedentium, nempe rectangulum FÆH (*b*) (nam HF bifariam dividitur in D a diametro MD cui est ordinata, utpote parallela tangenti ME) ad trapezium IÆHR (seu differentiam consequentium) erit, ut unum antecedens ad unum consequens (hoc est ut quadratum ÆD ad triangulum ÆDI), sive ut quadratum ME ad triangulum EMI, quod pariter est ut ÆD quadratum ad ÆDI; estque IÆHR æquale triangulo ÆPN (nam PHK æquatur NKRI in parabola, *nempe in figuris* 42. 43. (*c*), & quibusdam aliis figuris, *scilicet* 47. (*d*) & 45. 48. (*e*). unde ablato, vel addito NÆHR supersunt æquales IÆHR, & ÆPN. In Ellipsi vero, & Hyperbolis, *seu figura* 44., 46., 49. ob quadrilineum CRHP æquale triangulo CNI (*f*), ablato, vel addito CI = ÆP *figuris* 44., 46., aut CRHÆN *figura* 49. resultat IÆHR æquale ÆPN) ergo rectangulum FÆH ad rectangulum ÆPN est ut quadratum ME ad triangulum ENG (æquale EMI (*g*)), & permutando rectangulum FÆH ad quadratum MÆ, ut triangulum ÆPN ad triangulum ENG, sive (*h*) ut quadratum ÆN ad EN quadratum; unde iterum permutando rectangulum FÆH ad quadratum ÆN, ut quadratum ME ad quadratum EN. Q. E. D.

(a) 19. VI. Elem.
(b) 6. II. Elem.
(c) Corol. 2. 10.
(d) Proposit. 14.
(e) not. 68
(f) not. 70 & Proposit 15.
(g) Coroll. 1. 14.
(h) 19. VI. El.

Coroll. 1. Ducta MN jungente contactus, quæ secet HF in V, erunt FÆ, VÆ, HÆ continue proportionales, idest rectangulum FÆH æquabitur ÆV quadrato, quod pariter (ob triangula NÆV, NEM similia) ad quadratum ÆN, est ut EM quadratum ad quadratum EN (*i*), sicut dictum rectangulum FÆH est ad ÆN quadratum.

(i) 19. VI. El.

Fig. 42. 43

Coroll. 2. In Parabola etiam quadratum ÆP æquabitur rectangulo FÆH; nam ut ME æquatur EG ob proprietatem tangentis (73), ita VÆ æqualis erit ÆP (*k*); unde utriusvis quadratum æquatur rectangulo FÆH.

(k) Coroll. 2. 6. VI. Elem.

Co-

(73) *Ordinata enim MO ad diametrum* NK, *seu parallela tangenti* NE, *erit GE* : *EM* = *GN* : *NO*; *est autem GN* = *NO* (*coroll.* 6. *IX.*) *ergo & GE* = *EM*.

Coroll. 3. Si plures secantes invicem parallelæ FH, fh cum aliqua tangente NE concurrant in Æ, æ, rectangula FÆH, fæh erunt ut quadrata partium interceptarum tangentis NÆ, Næ; nam illis æquantur quadrata ÆV, æu, quæ sunt ipsis quadratis NÆ, Næ proportionalia. Fig 50.

Coroll. 4. Quoniam HF bifariam secta in D a suo diametro, exhibet rectangulum FÆH cum quadrato HD æquale (a) quadrato DÆ, substituto quadrato ÆV dicto rectangulo æquali, erunt quadrata ÆV, & HD simul sumpta æqualia Æd quadrato. Fig. præcedentes. (a) 6. II. Elem.

Coroll. 5 Quoniam in Parabola VÆ æquatur ÆP (b), & rectangulum VHP cum quadrato ÆH æquatur quadrato ÆV (c), nempe rectangulo FÆH (d), idest rectangulo FHÆ cum quadrato HÆ (e); quare dempto ÆH quadrato rectangulum VHP æquatur rectangulo FHÆ; & ideo FH ad HP est ut HV ad HÆ, sive (ob HV ablatum ex toto FH, sicuti HÆ est ablatum ex toto PH, ut reliqua VF ad reliquam PÆ (f); seu (permutando in analogia FH : HP = HV : HÆ) est FH ad HV, ut PH ad HÆ, sive ut PK ad KN. Fig. 42. 43 [b] Cor. 2. [c] 5. II. Elem. (d) Cor. 1. (e) 3. II. Elem. (f) 19. V. El.

PROPOSITIO XVII.

Si rectæ HF, TK binis tangentibus MA, NA convenientibus in A parallelæ, secent quamlibet conicam sectionem, aut duas oppositas Hyperbolas in H, F, K, T, ipsæ autem conveniant in R, sive intra, sive extra sectionem, erit rectangulum HRF ad rectangulum KRT, *ut quadratum tangentis MA ad quadratum tangentis AN.* Fig. 51. 52 53. 54. 55. 56. 57.

Ductis per contactus diametris ME, NL, ad quas ordinentur ipsæ FH, TK tangentibus parallelæ, adeoque bifariam secantur in E, L, agatur KO parallela MA, & HS parallela AN secantes diametros in O, S, quas etiam secant productæ tangentes in G, D, & productæ FH, TK in P, Q. Manifestum est utique esse rectangulum HRF, quod (g) est differentia quadratorum HE, RE ad trapezium HSQR, quod est differentia similium triangulorum HES, REQ, ut quadratum HE ad triangulum HES; vel ut MA quadratum ad simile triangulum AMD, vel ad ANG (h) ipsi æquale; trapezium autem HSQR, quod æquatur alteri KOPR (ut in Co- (g) 5. & 6. II. Elem. (h) Prop. X. & Cor. 1. Propos. XIV.

Corollariis propositionis XV. *in figuris* 53. 54. ostensum est; *in aliis vero figuris in notatione* 71. 72.) erit ad rectangulum KRT pariter, ut triangulum KLO ad quadratum KL, sive ut triangulum ANG ad quadratum AN (*a*); ergo ex æquo HRF ad KRT est ut quadratum MA ad AN quadratum. Q. E. D.

(a) 19 VI.El

Coroll. 1. Si duæ æquidistantes cordæ HF, XZ secentur ab alia KT in R, V, erit rectangulum HRF ad KRT, ut ZVX ad KVT; quippe alternatim HRF ad KRT est ut ZVX ad KVT, nempe ut quadratum tangentis MA prioribus secantibus parallelæ, ad quadratum AN parallelæ alteri secanti KT. (*b*)

(b) Ex hac pr.

Coroll. 2. Si rectæ HF, KT concurrentes in R, sint parallelæ binis aliis XZ, YK convenientibus in I, tam HRF ad KRT, quam XIZ ad YIH erunt in eadem ratione quadrati MA tangentis, ad quadratum tangentis AN (quare HRF : KRF = XIZ : YIH); unde permutando HRF ad XIZ erit ut KRT ad YIH.

Fig. 51. 52

Coroll. 3. In Parabola eadem rectangula HRF, KRT sunt etiam ut parametri diametrorum ME, NL, ad quas illæ rectæ ordinantur; nam ex concursu R ducta RB diametris parallela, rectangulum HRF æquatur rectangulo parametri ad diametrum ME pertinentis ducti in RB (*c*); & similiter KRT æquatur rectangulo ex ductu parametri pertinentis ad aliam diametrum NL in eamdem RB; ergo (*d*) talia rectangula sunt ut dictæ parametri.

c) Propo sit. XI.
(d) 1. VI El.

Coroll. 4. Unde colligitur parametros variarum diametrorum Parabolæ esse ut quadrata tangentium ipsarum vertices, & invicem concurrentium; nempe ut MA quadratum ad AN quadratum, ita latus rectum diametri ME ad latus rectum alterius diametri NL (est enim HRF : KRT = MA^2 : NA^2 (*e*), seu ut parameter diametri ME ad parametrum diametri NL (*f*).]

(e) Ex hac pr.
(f) Cor 3.

Coroll. 5. In Ellipsi vero, & Hyperbola tangentium quadrata sunt in ratione composita diametrorum ductarum ex contactibus, & ipsarum parametrorum illis respondentium, adeoque sunt ut quadrata semidiametrorum conjugatarum (*g*), quæ ipsis tangentibus sunt parallelæ: ideoque in hac ratione pariter sunt rectangula ex partibus secantium has sectiones dictis tangentibus parallelarum. Id quod in Ellipsi patet (74), quia per centrum ipsum ductis parallelis tan-

(g) Post cor. 2. XII.

An. Fig. 8. (74) *Actis per centrum C, ICY, PCZ tangentibus NA, MA parallelis, erit (per hanc propositionem)* $IC \times CY : PC \times CZ = NA^2 : AM^2$*, hoc est* $AM^2 : AN^2 = PC^2 : IC^2$

tangentibus, eorum rectangula erunt dictarum semidiametrorum, quæ ordinatis ad diversas diametros æquidistant; ideoque sunt conjugatæ ipsis transversis quadrata, ipsis tangentium parallelarum quadratis proportionalia. In Hyperbola autem, æque ac in Ellipsi hoc idem demonstrabitur in coroll. 2. & 3. sequentis propositionis.

PROPOSITIO XVIII.

SI ad terminos cujusvis diametri Q, N sectionis Ellipticæ, aut Hyperbolicæ agantur tangentes QR, NE, quæ erunt parallelæ, utpote ordinatis æquidistantes, & alia tangens MG illas secet in R, E, rectangulum QR in KE *æquabitur quadrato secundariæ semidiametri CB priori QK conjugatæ.* Fig. 58. 59

Nam ex proprietate tangentis MG ordinata ad diametrum MK, erit QG ad GN, ut QK ad KN (*a*); unde QG plus GN in Ellipsi, seu QG minus GN in Hyperbola, erit ad GN, ut QK plus KN in Ellipsi, seu minus KN in Hyperbola ad KN, & sumptis antecedentium medietatibus, erit CG ad GN, ut CQ ad KN; unde summa antecedentium QG ad summam consequentium KG, erit ut primum antecedens CG ad primum consequens GN; est autem ob similia triangula [QGR, KGM) QG ad KG, ut QR ad KM, & CG ad GN, ut CL, NE; adeoque rectangulum (*b*) ex QR in NE æquatur rectangulo KM in CL, idest ducta MH parallela CN, quæ ex semidiametro CB secabit CH æqualem KM (*c*), erit QR in NE æquale LCH. Sed rectangulo LCH æquatur semidiametri CB quadratum; est enim primariæ

(a) Corol. 12. proposit. IX.

(b) 16. VI. El.

(c) 34. I. El.

& terminos quadruplicando $PZ^2 : I\Gamma^2$. Porro diameter PZ est conjugata ad diametrum MS, sicuti IΓ diametro NI: *est conjugata (coroll. 2. XII.); quare (per idem coroll.) $PZ^2 : \Gamma^2$, ut rectangulum ex SM in ejus parametrum, ad rectangulum ex* NΓ *in ipsius parametrum, unde illud, ad hoc erit $= AM^2 : AN^2$; est autem $AM^2 : AN^2 =$ HRF:* KRT, *ergo rectangulum ex diametro SM in ejus parametrum, ad rectangulum ex diametro* NT *in ipsius parametrum, erit ut rectangulum HRF ad* KRT; *ergo HRF,* KRT *sunt in ratione composita diametrorum MS,* NI, *& ipsarum parametrorum ipsis respondentium.*

tiæ semidiametri CN quadratum ad semidiametri conjugatæ CB quadratum, ut transversa QN ad suam parametrum (*a*), scilicet ut rectangulum CKG, quod æquatur QKN (*b*) ad quadratum MK (*c*), quod est in ratione composita ex CK ad KM; sive ad CH, & GK ad KM, hoc est CG ad CL; ideoque ut CK in CG ad CL in CH (75), sed KCG æquatur CN quadrato (*d*); ergo LCH est æquale quadrato CB (ob $CN^2 : CB^2 = KCG : LCH$); ideoque etiam QR in NE, quod vidimus æquari LCH, æquatur quadrato conjugatæ semidiametri CB. Q. E. D.

(a) Prop. XII. in fine
(b) Coroll. 8. Proposit. IX.
(c) Coroll. 6. Proposit. V. & VI.

Coroll. 1. Per contactum M ducta alia diametro MCS, ductaque tangente SA, quæ parallela erit MG conveniente in A, cum alia tangente NE, quæ diametro MS occurret in I, ductaque ex centro CD parallela ME, quæ sit semidiametro secundaria conjugata semidiametro CM, erit pariter rectangulum SA in ME æquale quadrato semidiametri CD ob eamdem rationem.

Coroll. 2. Ductis QS, NM, GI, quæ invicem parallelæ erunt, ob æqualitatem triangulorum NEG, MEI (*e*); adeoque etiam NGM, NMI (quare (*f*) NM, GI sunt parallelæ), & ob æquales rectas NC, CQ, & MC, CS, (angulumque NCM = SCQ erit (*g*) angulus CNM æqualis alterno CQS, ac proinde (*h*) MN, SQ sunt parallelæ), erit QG ad GN, ut SI ad IM (76); unde & QR ad NE, ut (*i*) SA ad ME; & ideo rectangulum QR×NE ad SA in ME, erit in duplicata ratione NE ad ME (77); unde QR in NE

(e) Proposit XIV.
(f) 39. I. Elem
(g) 4. I. Elem.
(h) 28. I. Elem.
(i) Coroll. 1. 4. VI. Elem.

---

(75) *Sic etiam ostendi potest esse* $CKG : KM^2 = KCG : CL \times CH$; *nam* $CG : CL = KG : KM$
$CK : CH = CK : KM$.
ergo $CK \times CG : LC \times CH = CK \times KG : KM^2$ *seu*
$KCG : LCH = CKG : KM^2$

(76) *Quoniam* QS, NM, GI *ostensæ sunt parallelæ, erit* $QC : SC = CN : CM = NG : MI$; *ergo summa antecedentium* $QC + CN + NG$ *ad summam consequentium* $SC + CM + MI$, *erit ut antecedens unum* NG *ad suum consequens* MI (12. *V. El.*) *quare cum* $SC + CM + MI = SI$, $QC + CN + NG = QG$, *erit* $QG : SI = GN : MI$, *ac permutando* $QG : GN = SI : MI$.

(77) $QR : SA = NE : ME$
& $NE : ME = NE : ME$; *quare* (*not.* 23.) *erit* $QR \times NE : ME \times SA = NE^2 : ME^2$; *est autem* NE^2 *ad* ME^2 *in ratione duplicata* NE *ad* ME; *quare* $QR \times NE$ *ad* $SA \times ME$ *est in ratione duplicata* NE *ad* ME.

NE ad SA in ME, idest quadratum CB ad quadratum CD, erit ut quadratum NE ad quadratum ME (*a*).

Coroll. 3. Et ideo si duæ chordæ tangentibus NE, ME parallelæ invicem conveniant, erunt ipsarum rectangula, ut quadrata semidiametrorum CB, CD ipsis æquidistantium, cum sint ut quadrata dictarum tangentium. (78)

[a] Ex hac prop. & ex Coroll 1.

PROPOSITIO XIX.

IN *axe parabolæ* NK *ponatur* NF *infra verticem æqualis quartæ parti suæ parametri, atque ipsi* NF *ponatur supra verticem æqualis* NP, *&* *ducatur PV parallela ordinatis; ducta ex F ad quodlibet curvæ punctum M recta FM, ductaque tangente OMG, ac diametro MX axi* NK *parallela, erit angulus XMO æqualis FMG, & ipsa MF erit pariter æqualis quartæ parti parametri ad diametrum MX pertinentis.* Fig. 60.

Dicatur autem punctum F focus parabolæ, & punctum P ejus sublimitas, & linea recta PV linea sublimitatis.

Ordinata ad axem MK, erit quadratum MK æquale rectangulo KN in quadruplam NF, quæ *quadrupla* est parameter axis (*b*), ergo quadruplum rectanguli KNF (seu rectangulum KN in quadruplam NF) cum quadrato FK æquatur quadratis MK, & KF, idest (*c*) FM quadrato; sed ob NP æqualem NF, quadratum PK est pariter æquale quadruplo rectanguli KNF cum quadrato FK (*d*), ergo quadratum FM æquatur PK quadrato; unde FM æquatur PK, sive æquatur FG; nam ob NK æqualem NG (*e*), & NF æqualem NP, erit FK æqualis PG, adeoque (utrinque addita PF) PK æqua-

(b) Per hypoth.

(c) 47. I. Elem.

(d) 8. II. Elem.

(e) Corol. 6. prop 9.

H

(78) *Hinc patet coroll. 5. propositionis præcedentis demonstratio; est namque ex illa propositione FRH : TRK* $=$ *$MA^2 : NA^2$. Porro per corollarium secundum hujus $MA^2 : AN^2$ est ut quadratum semidiametri conjugatæ ad diametrum MC, ad quadratum semidiametri conjugatæ ad diametrum NC, seu terminos quadruplicando, ut quadratum conjugatæ ad diametrum MC ad quadratum conjugatæ diametro NC; sunt autem hujusmodi conjugatarum quadrata ut rectangula ex diametris in suas parametros; ergo dicta rectangula sunt in ratione composita diametrorum, & parametrorum.*

æquatur FG; est igitur GFM triangulum æquicrure, adeoque angulus FMG æquatur MGK (*a*), sive externo parallelarum XMO (*b*); & producta diametro MX ad lineam sublimitatis PV in V, erit MV æqualis PK (*c*), adeoque æqualis MF, atque ordinata NX tangenti MG parallela, & ex axis vertice ducta tangente ND, quæ bifariam secabit MG in D (79) juncta DF, erit DG quadratum æquale rectangulo FGN; cum sit enim MD æqualis DG, ut KN æqualis NG (*d*), sitque MF æqualis GF, & angulus FMD æqualis FGD, etiam reliqui anguli horum triangulorum [æqualibus lateribus oppositi) æquales erunt (*e*), adeoque GDF est angulus rectus, quippe æqualis consequenti MDF; ergo GD quadratum æquatur FGN (*f*), sive æquatur MF in MX, quia FG æquatur MF, & GN est æqualis MX (*g*]; at GD quadratum est quarta pars quadrati MG, vel XN, quæ ipsius GD sunt duplæ; ergo ordinatæ XN quadratum est quadruplum rectanguli FM in MX, sed æquatur rectangulo suæ parametri in abscissam MX (*h*); ergo FM erit quarta pars dictæ parametri. Q. E. D.

(a) 5. I. Elem (b) 27. I. Elem. (c) 36. I. Elem (d) Cor. 6. prop. 9. (e) 4. I. Elem. (f) 8. VI. Elem. (g) 34. I. Elem. (h) Cor. 1. prop. X.

Fig 60. 61 *Coroll. 1.* Cum ex catoptrica ita reflectantur radii, ut angulus incidentiæ XMO æquetur angulo reflexionis FMG patet omnes radios axi parallelos, ex remotissimo luminoso corpore, velut ex sole descendentes (qui velut paralleli habentur, multo magis, quam directiones gravium ejusdem loci in centrum Terræ, ipso sole multo proximius) & in parabolicum speculum MNm incidentes, nempe XM, xm, xm &c. in punctum illud F reflecti debere, atque ibidem ex eorum concursu ignem excitari, & ideo punctum illud focus appellatur.

Coroll. 2. Si lumen aliquod in hoc foco F speculi parabolici positum fuerit, emittet radios FM, Fm, Fm &c. qui reflexi in lineas MX, mx, mx axi parallelas extendentur; unde in magna aliqua distantia eamdem intensionem servabunt, quam habent prope ipsum lumen, veluti in MX; unde characteres a lumine remotissimi legi poterunt, & distantium locorum superficies commode illustrari.

Coroll. 3. Linea FD conjungens focum ad concursum tangentis verticalis axis cum alia laterali tangente, est huic ipsi tangenti perpendicularis; ostendimus enim angulum FDG rectum esse.

Fig. 60. *Coroll. 4.* Etiam MV portio diametri MX a suo vertice M ad

(79) *Ob lineas MK, DN parallelas erit (1. 6. Elem) GN : NK = GD : DM; est autem GN = NK (corollario 6. proposit. 9.) ergo & GD = DM.*

ad lineam sublimitatis PV est quarta pars parametri sibi correspondentis; nam FM æqualis FG æquatur PK, adeoque est æqualis MV; & ubilibet ducta Fm æquatur axi parallelæ mu ad dictam lineam sublimitatis extensæ; unde quælibet FM ad MV est ut FN ad NP.

Coroll. 5. Quælibet XM cum MF æquatur alteri xm cum mF; æquatur enim XV (*a*), sive TP (*b*) propter MV æqualem MF. Fig 61. (a) Cor. 4. (b) 32. I. Elem.

Coroll. 6. Sumptis in perimetro parabolæ hinc inde ab axe binis punctis M, B (aut ex eadem parte M, b), & junctis ad focum F rectis MF, BF (seu bF), ductisque tangentibus MG, BH convenientibus in L (aut MG, bh concurrentibus in l), erit angulus MFB duplus contenti a tangentibus GLB (sive MFb duplus Glb); Nam quia ostensum est æquicrure triangulum MFG, aut BFH (vel bFh) (*c*) externus angulus KFB (*d*) duplus erit interni FHB (& KFb duplus Fhb), nec non MFK duplus MGF; unde KFB plus MFK, scilicet MFB æquatur duplo FHB cum duplo MGF, sive HGL, quibus (*e*) æquatur duplum GLB (at KFb minus MFK, scilicet MFb æquatur duplo Fhb minus duplo MGF, sive hGl, quibus æquale est duplum Glb): quare angulus ex ramis ad focum ductis MFB, MFb duplus est anguli a tangentibus contenti GLB, aut Glb. Fig. 62. (c) Per hanc pr. [d] prima par. 32. I. Elem. (e) Per eamdem.

Coroll. 7. Quod si puncta M, B sint in eadem recta linea cum foco F tangentes ML, BL, in angulum rectum MLB convenient; eo quod anguli BFK, & KFM sint duobus rectis æquales, & eorum medietas sit angulus ille MLB a tangentibus comprehensus. Fig. 63.

Coroll. 8. Hinc ipsa recta MB erit parameter diametri LSR bifariam secantis MB illi ordinatam; circulus enim triangulo MBL circumscriptus habebit centrum in R, quia rectus angulus L erit in semicirculo; quare MB erit dupla radii RL, & RL est dupla (*f*) RS, sive (ducta tangente SH parallela MB) est dupla FH (*g*), cui æquatur FS, uti ostensa fuit FM æqualis FG (*h*), ergo MB est quadrupla FS, sed hæc est quarta pars parametri ad diametrum SR pertinentis (*i*), ergo ipsa MB est ejus parameter. (f) Cor. 6. prop. 9. (g) 34. I. El. (h) Ex hac pr. (i) Ex secunda parte hujus prop.

Coroll 9. Juncta LF, erit quoque perpendicularis MB; cum enim ostensæ sint æquales LS, SR, FS (*k*) angulus LFR erit rectus, quippe in semicirculo circa diametrum LR descripto (is enim ex centro S descriptus ob LS, SR, FS æqualitatem per puncta L, F, R transire debet; quare angulus LFR in semicirculo erit, ac proinde (*l*) rectus); & ideo quadratum LF æquatur rectangulo MFB (*m*). (k) Coroll VIII. (l) 31. III El. (m) 8. VI. El. & 17. VI. El.

Coroll. 10. Ipse autem rectus angulus MLB à tangentibus comprehensus, est in recta PV sublimitatis ejusdem parabolæ, quia FS æquatur SL, ut FN æquatur NP; unde punctum L ad rectam PV pertinet, cujus est talis proprietas (a). (80)

(a) Cor. 4. hujus.

PRO-

An. Fig. 9. (80) *Eodem modo ostenditur quivis rectus angulus mlb a tangentibus ml, bl comprehensus ad rectam eamdem sublimitatis PV pertinere. Quare omnes anguli recti, quos tangentes ob rectarum per focum F traductarum extremitatibus ductæ conficiunt, in linea sublimitatis PV terminantur.*

(81) *Ad traductam per focum F rectam quamvis mb, si normalis Fl excitetur lineæ sublimitatis PV in l occurrens, erit idem punctum l tangentium ml, bl concursus. Si enim punctum concursus non erit l tangentes ex punctis m, & b, ductæ concurrent vel ad punctum K, vel ad P; concurrant ergo in K, erit itaque (coroll. IX. hujus propositionis) angulus mFK rectus; sed itidem rectus est angulus mFl (per hypoth.) ergo angulus mFK angulum mFl æquaret, quod est absurdum. Si vero punctum concursus foret in P, tum foret mFP rectus; & proinde angulus mFP = angulo mFl, quod est absurdum; ergo punctum l est tangentium concursus.*

(82) *Linea MFB per focum F traducta, traducenda proponitur alia recta mFB, ut sit BFM : bFm = m : n. Fiat m : n = FL ad quartam FK; interque FL, & FK inveniatur media proportionalis Fl ad quam per focum F, perpendicularis traducta mFb, erit linea quæsita; nam cum sit m : n = FL : FK, seu propter FL, Fl, FK continue proportionales FL ^{2} : Fl ^{2}; est autem FL ^{2} = MFB (coroll. IX) & Fl ^{2} = mFb; ergo m : n = MFB : nFb. Q. E. D.*

(83) *Quoniam QN est axis tum Hyperbolarum oppositarum, tum Ellipsis, sintque tangentes verticales QE, NO ordinatis parallelæ, erunt anguli EQV, VNO recti, & proinde æquales; quare cum sit EQ ad QV = VN : NO, erunt (6. VI. Elem) triangula EQV, OVN similia. Pariter cum sint anguli EQF, ONF recti, ac proinde æquales, sitque FN : NO = EQ : QF, erit (6. VI. Elem.) triangulum EQF simile triangulo ONF.*

PROPOSITIO XX.

In axe transverso Ellipsis, & Hyperbolarum oppositarum determinatis rectangulis QFN, NVQ, aequalibus quadrato semiaxis secundarii conjugati CB, seu quartae parti rectanguli per transversum QN, & per latus rectum NS comprehensi, ad quodlibet punctum curvae M, junctis rectis FM, VM ex utroque puncto F, V comprehendent cum tangente GME angulos aequales. Vocentur haec duo puncta F, V foci dictarum sectionum. Fig. 64. 65

Verticales axis tangentes QE, NO conveniant cum alia tangente MG ad puncta E, O; ergo rectangulum ex QE in NO, quod aequatur quadrato CB (*a*) aequabitur rectangulo QFN, aut NVQ; ideoque erit EQ ad QF, ut FN ad NO, & EQ ad QV, ut VN ad NO; unde junctis EV, OV, & EF, FO, erunt triangula EQV, OVN similia, item EQF, ONF similia erunt (83); quare angulus EVQ aequabitur NOV (*b*); & quia NOV cum NVO complet unum rectum (existente recto angulo ONV in eodem triangulo), erit EVQ (qui NOV adaequat) cum NVO recto aequalis, ideoque OVE rectus angulus erit. Similiter ob angulum QFE aequalem NOF (*c*), qui cum NFO rectum complet (*d*), etiam angulus EFO est rectus; unde semicirculus super diametro EO descriptus per puncta V, F transibit, rectos angulos EVO, EFO comprehendens (*e*); & per punctum O ducta AO parallela VE, quam secet in I recta VM, erit angulus AOV rectus, utpote alterno parallelarum EVO aequalis (in Hyperbola vero utpote binos rectos integros cum recto EVO complens): estque AO aequalis OI, quia ordinata MK, cum sit QG ad GN, ut QK ad KN (*f*), erit etiam EG ad GO, ut EM ad MO (84) (est autem EG : GO = EV : AO, & EM : MO

[a] Propofit XIX.

(b) 5. VI. El.

(c) 5. VI. El.

(d) Cor. 6. 32 El.

(e) 31. III. Elem. & not. sequen. 95.

(f) Corol. 13. propofit. IX.

(84) *Erit etiam EG ad GO, ut EM ad MO. Id ipsum jam patet in Ellipsi, ad Hyperbolam vero quod attinet; quoniam triangula QGE, GNO sunt similia, erit QG : GN = EG : GO; adeoque componendo QG + GN : GN = EG + GO : GO, seu QN : GN = EO : GO, seu permut. QN : EO = GN : GO, & inver. EO : QN = GO : GN, aut ob triangulorum NGO, KGM similitudinem = OM : NK; quare iterum permutando, erit EO : OM = QN : NK; & tandem componendo erit EM : OM = QK : NK; porro QK : NK = QG : GN = EG : GO, ergo EM : OM = EG : GO.*

MO = EV : OI), quare & EV ad AO, ut EV ad IO; unde de OA æquatur IO (a) : angulus ergo OVI æquabitur OVA (85) in triangulis OVI, OVA æqualibus, & similibus; sed OVA æquatur angulo OEF, quippe eidem arcui OF insistunt in eodem circulo (b); quare & angulus OVI æquabitur OEF; & ex puncto H, ubi concurrunt VO, EF, juncta ad M linea HM, erit tangenti EM perpendicularis, quia ob æquales angulos HVM, HEM circulus per puncta H, V, E, M describi posset (c), existente angulo HME recto, quia (in Ellipsi) oppositus est angulo recto HVE (d) (in Hyperbola vero quia in eodem segmento cum HVE recto); unde & rectus erit HMO, qui cum opponatur alteri recto HFO (semicirculo insistenti in Ellipsi, & in Hyperbola consequenti ad angulum OFE semicirculo insistentem), etiam per puncta M, H, F, O transire poterit circulus (86); quare angulus VME æquabitur VHE (utpote qui insistant segmento eidem EV circuli per puncta HV, EM transeuntis), & angulus FMO æquabitur FHO, cum sint in eodem segmento circulari (circuli nempe per puncta M, H, F, O transeuntis); sed VHE est æqualis (in Ellipsi (e)), aut idem (in Hyperbola) cum FHO, ergo anguli VME, FMO, quos rami ex focis V, F ad idem sectionis punctum M ducti cum tangente comprehendunt, sunt æquales. Q. E. D.

(a) 9. V. Elem.

(b) 21. III. El.

(c) not. 6.

(d) 26. III. El.

(e) 15. I. El.

Co-

Aliter MO : NK = GO : GN = GE : QG; ergo antecedens unum MO est ad suum consequens NK, ut summa antecedentium MO, GO, GE ad summam consequentium NK, GN, QG, seu ut ME ad QK, ergo ME : MO = QK : NK = QG : GN. (12. V. Elem.)

(85) *Angulus OVI = angulo OVA; nam cum AOV ostensus sit rectus, etiam alius VOI illi consequens rectus erit; quare angulus AOV = angulo VOI. Porro AO = OI; VO vero communis triangulis VOA, VOI; unde (4. I. El.) erit triangulum AVO = triang. OVI: atque angulus OVI = angulo OVA.*

An. Fig. 10

(86) *Posito triangulo HFO ad F rectum angulum habente, si circulus diametro HO describatur, is transibit per F; transeat enim per R, si fieri potest, tum angulus HRO in semicirculo existens rectus erit (31. III. El.); quare cum (per hypoth.) angulus HFO sit rectus, erit angulus HRO externus, par angulo interno opposito HFO, quod est contra coroll. 1. 32. I. Elem. Si vero transire per punctum r supponatur, tum angulus HrO rectus erit, proindeque æqualis externo HFO, contra idem corollarium; transibit ergo circulus per punctum R. Q. E. D.*

Coroll. 1. Hinc radii ex puncto V in perimetrum sectionis Ellipticæ, aut Hyperbolicæ NM incidentes, reflectuntur ad aliud punctum F in Ellipsi; aut in Hyperbola ita reflectentur in R, ut in ipsum punctum F sint collimantes, ob angulum reflexionis RMY æqualem angulo incidentiæ VME; adeoque æqualem angulo OMF ipsi ad verticem opposito (87); & vicissim ex puncto F in sectionem MN incidentes reflectentur in alterum focum V in Ellipsi, at in Hyperbola ob angulum ZMY æqualem verticaliter opposito VME (*a*), adeoque & angulo incidentiæ FME reflectetur FM in MZ, quæ collimat in punctum V (ita enim reflectere debet radius FM in tangentem OMY incidens, ut angulus incidentiæ FME sit par angulo reflexionis; quare cum ZMY æquetur FME, radius FM reflectetur in MZ, quæ cum MV lineam rectam constituit.) Et ideo hæc puncta Foci appellantur, quippe luminis in uno ipsórum positi reflexi radii ab Elliptica curva in aliud reflexi colligentur, & in Hyperbolica reflexi radii luminis irradiantis ex uno foco imaginem referent in altero; idem de objectis per specula Elliptica, aut Hyperbolica videndis intelligi debet. (a) 15. I. El.

Coroll. 2. Determinari poterunt foci Ellipsis, aut Hyperbolæ, si super quamlibet tangentem OE verticalibus tangentibus NO, QE interceptam velut diametrum circulus describatur, axem secans in F, V, quæ puncta erunt foci quæsiti, propter angulos in semicirculo rectos OVE, OFE.

Coroll. 3. Si ex vertice B secundarii axis inclinentur hinc inde in Ellipsi super axem transversum rectæ BF, & BV singulæ æquales semiaxi transverso CN, seu CQ, erunt puncta F, V ipsi foci: tunc enim rectangulum NFQ, aut QVN cum quadrato CF, seu CV adæquans quadratum CN (*b*), vel BF (*c*), aut BV; idest quadratum BC cum quadrato CF, (b) 5. II El (c) Per hypoth.

 aut

(87) *Hinc patet circulum transire posse per quatuor puncta M, H, F, O quadrilateri MHFO, cujus oppositi anguli F, & M sunt recti; nam quia angulus F rectus est circulus diametro HO descriptus transibit per F; pariterque quia angulus HMO est itidem rectus, ille idem circulus radio HO descriptus per M transibit (not.86.) ergo transibit circulus per puncta M, H, F, O. Q. E. D.*

(88) *Quoniam angulus RMY = angulo OMF, erit angulus RMY + angulo RMO = angulo OMF + angulo RMO; sunt autem anguli RMY, RMO simul sumpti duobus rectis æquales (13. I. El.), ergo & anguli OMF, RMO sunt pares duobus rectis, ergo RMF est recta linea (14. I. El.) quare radii MR reflectentes in R collimant in punctum F, seu punctum F directe respiciunt.*

(a) 47. I Elem. aut CV (*a*), dabit ipsum rectangulum NFQ, aut QVN dicti semiaxis secundarii BC quadrato æquale, ut contingit in Focorum determinatione (*b*).

(b) Proposit. XX.

Coroll. 4. In Hyperbola si rectæ BN jungenti terminos utriusque axis, æqualis ponatur ex centro CF, aut CV in axe transverso, erunt puncta F, V foci quæsiti; nam rectangulum QFN, quod cum quadrato CN complet quadratum CF (*c*), æquabitur quadrato CB, quod cum eodem CN quadrato complet quadratum BN (*d*) (æquale CF quadrato); atque eodem pacto NVQ ostenditur æquari CB^2, unde tam QFN, quam NVQ æquatur quadrato CB; erunt (*e*) itaque puncta F, V foci quæsiti.)

(c) 6. II. El. (d) 47. I El. (e) Proposit. XX.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 66. 67. *SI cuilibet ramo FM ex foco F ad aliquod punctum M Ellipseos, aut Hyperbolæ ducto, agatur ex centro C parallela CI cum tangente ME conveniens in I, erit CI æqualis semiaxi transverso CQ, aut CN.*

Ducta ex alio foco V recta VD parallela iisdem FM, CI, & tangenti occurrente in D, & juncta VM, quam secat CI in T, ductisque verticalibus tangentibus QE, NO; quoniam angulus VME æquatur FMO (*f*), sive VDM ob parallelas huic æquali (*g*), erunt latera VM, VD æqualia (*h*), utpote angulis æqualibus opposita; estque MI ad ID, ut MT ad TV (*i*) (ob CI, VD parallelas), ut FC ad CV, quæ sunt æquales (89); ergo triangulorum MVI, DVI latus commune

(f) Proposit XX. (g) 27. I. El. (h) 6. I. El. (i) 2. VI El.

---

(89) *FC, CV æquales sunt; nam (propositione XX.) rectangula QFN, NVQ æquantur; ergo (14. VI. Elem.) QF : NV = VQ : FN; & permutando QF : VQ = NV : FN, ac in Ellipsi dividendo QF — VQ : VQ = NV — FN : FN, seu VF : VQ = VF : FN, ergo VQ = FN; est autem CN = CQ, ergo CN — FN = CQ — VQ, seu CF = CV. In Hyperbola vero QF + QV : VQ = NV + FN : FN, seu VF : VQ = VF : FN, quare VQ = FN, ac propter CQ = CN, erit CQ + QV = CN + FN, seu CV = CF.*

(90) *Quoniam VM = 2TI, = 2TC + 2CI; & MF = 2TC erit VM — MF = 2CI + 2TC — 2TC = 2CI = 2CN = QN.*

mune VI habentium, cætera latera MV, VD, nec non MI, ID æqualia sunt; unde (*a*) & anguli MIV, DIV æquales erunt, adeoque recti; & quia pariter recti sunt VQE, VNO (ob tangentes QE, NO axi QN perpendiculares) circulus circa diametrum VE descriptus per puncta Q, I transibit (*b*), & circulus circa diametrum VO per puncta N, I pariter se conferet; quare angulus QIV æquabitur QEV, quippe ad idem circuli segmentum pertinebunt (*c*), sed QEV (ut propositione præcedenti ostensum est) æquatur OVN, qui pariter æqualis erit NIO, cum in eodem circuli segmento per puncta N, I, V, O transeuntis, uterque consistat; ergo QIV æquatur NIO; & si alteruter addatur angulo NIV in Ellipsi, vel ab ipso subtrahatur in Hyperbola fiet angulus QIN æqualis recto VIO; quare circulus super diametro QN descriptus per punctum I transibit (*d*), eritque radius CI æqualis semiaxi CQ, aut CN. Q. E. D.

(a) 8. I. El.
(b) not. 87
(c) 21. III El.
(d) not. 86

Coroll. 1. Hinc habetur, quod in Ellipsi summa inclinatarum ex focis ad quodlibet punctum curvæ, & earum differentia in Hyperbola, æquatur integro axi QN; nam quia FV, & dupla VC (*e*), erit (ob CI, FM parallelas) FM dupla CT (*f*), & cum sit quoque DM dupla MI (*g*), erit VD, sive ipsi æqualis VM dupla TI; quare FM, & VM in Ellipsi est dupla CT cum TI, hoc est dupla CI, vel CQ; adeoque æqualis QN. In Hyperbola vero differentia VM ab MF est dupla differentiæ TI a CT (90), hoc est dupla CI, seu CQ, & propterea æqualis axi transverso QN.

(e) not 89
(f) Cor. 1 4. VI. El
(g) Ex hac prop.

Coroll. 2. Rursus si per centrum C agatur tangenti parallela CP, utrumque ramum secans in P, R, erunt MP, MR eidem semiaxi CN æquales; nam in parallelogrammo CINP est utique MP æqualis CI; & ducta etiam CS parallela ramo VRM resultabit quoque CS æqualis semiaxi (*h*); & in parallelogrammo RCSM erit quoque CS æqualis MR; unde utraque MP, aut MR æquatur semiaxi CN.

(h) Per hanc pr.

Coroll. 3. Quoniam ostensa est CI, aut CS æqualis CN, & juncta VI fit perpendicularis tangenti, quemadmodum eidem foret perpendicularis FS; colligitur, quod si circa diametrum QS circulus describatur, ad quem terminabunt illæ lineæ CI, CS æquales CN, ejus peripheria secetur a qualibet tangente MG in punctis I, S, junctæ CI, CS, evadent parallelæ ramis ad contactum ductis FM, VM, utpote æquales semiaxi (nec enim tales parallelæ possunt occurrere tangenti extra peripheriam circuli, quia alias non forent æquales semiaxi) factis angulis rectis GIV, GSF illæ perpendiculares IV, SF ad focos in axe determinandos se extendent; unde patet modus alius determinandi focos harum sectionum.

Coroll.4. Ductæ ex focis F, V in aliquam tangentem GM perpendiculares FS, VI continent rectangulum æquale quadrato semiaxis secundarii CB, nempe rectangulo NFQ, aut NO in QE; nam extensa SF ad circulum in X, juncta XC, erit in directum alteri radio CI; nam ob angulum rectum ISX est arcus XSI semiperipheria, æqualis semiperipheriæ QIN, & ablato communi NI est arcus XN æqualis QI, & angulus XCN æqualis QCI (quare angulus XCN + NCI = QCI + ICN, seu = duobus rectis; est ergo XI in directum cum CI) circa quos angulos cum latera XC, CF lateribus CI, CV sint æqualia, & basis FX (*a*) æquatur basi VI; unde rectangulum FS in VI æquatur rectangulo SFX; adeoque etiam rectangulo NFQ. (*b*)

(b) 35. III. El. in Ellipsi, & cor 1. 36. III. in Hyperb.

Coroll.5. Ducta ad tangentem perpendiculari MH, erit Harmonice sectus axis ab utroque foco, a perpendiculari, & tangente (91), nempe erit FH ad HV, ut FG ad GV; nam concurrente FS cum MV in Z ob angulos rectos FSM, MSZ æquales, atque FMS, SMZ (qui æquantur VME (*c*) pariter æquales) lateri MS communi triangulorum MFS, MSZ adjacentes, erunt & latera FS, SZ æqualia (*d*); unde FS ad VI est ut SZ ad VI, sed prima ratio eadem est cum ratione FG ad GV, secunda cum altera SM ad MI, sive FH ad HV; ergo FG ad GV, ut FH ad HV.

(c) Propo-sit. XX. & 15. I. El.

(d) 26. I. Elem.

Coroll.6. Quadrata autem FS, VI, & IS erunt semper eidem quantitati æqualia, nempe quadratis NV, & VQ; nam juncta FI erunt quadrata FS, SI æqualia quadrato FI (*e*); ergo addito VI quadrato, sunt quadrata FS, VI, SI quadratis VI, & IF æqualia; hæc autem ex supradictis (*f*) sunt æqualia duplo quadrati IC bisecantis basim VF trianguli VIF cum duplo semibasis CV, & duplum quadrati CI, sive CQ, una cum duplo CV quadrati æquatur binis quadratis inæqualium partium VQ, FQ, sive VQ, VN (*g*), aut ipsis NF, NV, sive NF,

(e) 47. I. Elem.

(f) Schol. num. 5.

(g) 10 II. El. in Ellipsi, & 9. ejusd. in Hyp.

---

(91) *Quod vero ex hac analogia FH : HV = FG : GV inferatur prædicta axis harmonica sectio, patet id quidem primo in Ellipsi; erit namque FG : GV = FH : HV; est autem FH differentia FG ab HG, & HV differentia HG ab GV, ergo FG ad GV, ut differentia FG ab HG ad differentiam HG ab GV; ergo FG, HG, GV sunt harmonice proportionales. Secundo in Hyperbola, cum sit HV : HF = GV : FG, sitque GV differentia HV ab HG, & FG differentia HG ab HF, erit HV ad HF, ut differentia HV ab HG, ad differentiam HG ab HF, sunt ergo HV, HG, HF in harmonica proportione.*

NF, FQ quadratis (92); ergo quadrata FS, VI, & IS hisce quadratis æquantur; ideoque sunt semper ejusdem quantitatis.

PROPOSITIO XXII.

IN Hyperbola summa angulorum MFB, MVB, quos rectæ ab utroque foco ad bina curvæ puncta inclinatæ continent; in Ellipsi vero eorum differentia dupla est anguli MLB a tangentibus eorumdem punctorum comprehensi. Fig. 68. 69

Angulus enim MFK æquatur internis angulis MVF, FMV (*a*); ergo MFK cum MVF æquatur duplo MVF cum ipso FMV, qui pariter duplus est anguli VMG (*b*); ergo MFK cum MVF duplus evadit anguli MGF, qui æquatur ipsis MVF, VMG (*c*); eodem modo probabitur angulus BFK cum BVF duplus anguli BHF: quare totus angulus MFB cum toto MVB æquabitur duplo anguli MGF, sive HGL (*d*) cum duplo BHF; sive GHL, quibus æquatur duplus anguli externi MLB a tangentibus comprehensi (*e*). In Ellipsi vero, quia angulus GMF, sive VMI (*f*) æquatur MGV cum ~~MVF~~; ergo addito utrinque MGV, erunt anguli GMF, MGV, idest externus MFV (*g*), æquales MVF, cum duplo MGV; eodemque modo externus BFV æquabitur BVF cum duplo BHF, sive cum duplo LHG; quare totus angulus MFB æquatur toti MVB cum duplo MLB, qui (utpote externus) ipsis MGV & LHG æquantur; igitur excessus anguli MFB supra MVB est æqualis duplo anguli MLB a tangentibus comprehensi.

(a) 1. par. 32. I. El.
(b) Ex prop XX.
(c) 1. par. 32. I. El
(d) 15. I. El.
(e) 1. par. 32. I. El.
(f) Prosit. XX.
(g) 1. par. 32. I. El.

Coroll. Recta MFT per focum traducta, & ductis tangentibus ME, TE convenientibus in E, erit angulus MET in Hyperbola semper obtusus, in Ellipsi semper acutus; nam anguli a ramis MF, TF ad focum F directe concurrentibus contenti (cum linea FK, scilicet MFK, TFK) sunt duobus rectis æquales; unde medietas anguli MFT est rectus, quare ejus summa cum medietate anguli MVT major est recto, ejusdem excessus supra medietatem MVT est minor recto; quare

(92) *Cum sit (ex nota 89)* FN = VQ, *erit* FN + FV = QV + FV, *seu* VN = FQ; *quare quadrata partium* VQ, FQ *æquantur quadratis* VQ, VN, *seu quadratis* NF, NV, *seu quadratis* NF, FQ. *In Hyperbola vero* FN = VQ; *quare utrinque addita* QN, *erit* FQ = VN; *&* $FQ^2 = VN^2$.

quare angulus MET æqualis semisummæ ex dimidio MFT, & ex dimidio MVT (*a*) in Hyperbola, erit obtusus, & in Ellipsi cum sit MET æqualis differentiæ dictarum medietatum, erit acutus.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 70. 71 *Distantia focorum FV est media proportionalis inter latus transversum QN, & QG summam transversi, & recti NH in Hyperbola, eorumve differentia in Ellipsi.*

Quia enim rectangulum QFN æquatur quadrato semiaxis conjugati CB (*b*), sive quartæ parti rectanguli ex transverso, & recto QNH (quadratum quippe BA, quod est CB quadrati quadruplum, æquatur rectangulo QNH) seu QNG, posita NG æquali NH; utrovis addito in Hyperbola, & subtracto in Ellipsi ab semiaxis transversi CN quadrato, resultat CF quadratum, æquale aggregato quadrati CN, & quartæ partis QNG in Hyperbola, eorumque differentiæ in Ellipsi (93), & quadruplicando terminos erit quadratum distantiæ focorum FV æquale summæ quadrati QN, & rectanguli QNG in Hyperbola, idest rectangulo NQG (*c*); in Ellipsi autem eorumdem differentia (nempe $QN^2 - QNG$), quæ pariter est NQG rectangulum (*d*); ergo VF distantia focorum (*e*) est media proportionalis inter latus transversum QN, & QG, quæ summa est in Hyperbola, in Ellipsi vero differentia ejusdem lateris QN a recto NH, seu NE. Q. E. D.

(b) Pr. XX

(c) 3. II. Elem.

(d) 2. II. Elem.

(e) 2. par. 17. VI. El.

Coroll. Quoniam quadratum axis conjugati AB æquatur rectangulo QNH, sive QNG (*f*), & quadratum distantiæ focorum FV æquale ostensum sit rectangulo NQG, erit quadratum AB ad quadratum VF, ut QNG ad NGQ; idest (*g*) ut latus rectum NG ad QG summam transversi lateris, & recti in Hyperbola, & eorum differentiam in Ellipsi; eodemque modo erit quoque quadratum semiaxis conjugati CB ad quadratum distantiæ foci a centro CF, aut CV (quadratorum nempe AB, & FV quartam partem assumendo).

(f) Post cor. 2. XII.

PRO-

(93) *Quoniam in Hyperbola* $QFN + CN^2 = CF^2$ (*6. 2. El.*) *erit* $CF^2 = CN^2 + \frac{1}{4} QNG$, *propter* $QFN = \frac{1}{4} QNG$. *In Ellipsi vero* (*5. II. Elem.*) $QFN + FC^2 = CN^2$, *ergo* $FC^2 = CN^2 - QFN = CN^2 - \frac{1}{4} QNG$.

PROPOSITIO XXIV.

I N *Hyperbola, & Ellipsi ex quolibet puncto R ducta tangente RG concurrente cum binis semidiametris conjugatis CN, CA in punctis G, M, erit rectangulum GRM æquale quartæ parti rectanguli ex transversa diametro RCS, per contactum ducta in ejus parametrum, sive æquale quadrato semidiametri CH parallelæ tangenti, quæ est conjugata ad diametrum RCS.* Fig. 72. 73

Ducatur etiam tangens HK eidem Ellipsi, vel ad conjugatam Hyperbolam, & ordinentur HF, RE ad diametrum AB; item HI, RO ad NQ; nec non AL ad CH, & AD ad CR (eruntque IHFC, CLAD, CERO parallelogramma; proindeque (*a*) triangulum HIC = HFC, ALC = ADC, nec non CRE = CRO). Cum sit CH ad CL, ut CK ad CA, sive ut CA ad CF (94), erit triangulum HCF æquale (*b*) ACL; unde etiam HCI æquabitur ADC; Similiter erit RC ad CD, ut MC ad CA, sive ut CA ad CE (95), & triangulum ADC æquabitur RCE (*c*), vel RCO; ergo triangula HCI, RCO æquantur; estque GOR ad RCO, ut GO ad OC (*d*), hoc est ut GR ad CM, hoc est ut CE ad EM, aut ut triangulum REC ad RME (*e*); ergo GRO triangulum ad HCI, æquale RCO, erit ut idem CHI, quod æquatur RCE, sive ADC ad RME; suntque GRO, HCI, RME triangula similia, quorum homologa latera GR, CH, RM

(a) 34. I. El.
(b) 15. VI. El.
(c) Per eamd.
(d) 1. VI. El.
(e) Per eamd.

---

(94) *Esse in Hyperbola KC : CA = CA : CF, patet ex corol. XI. propositionis 9. Quod vero idipsum & in Ellipsi contingat, ex eo constat, quod ex demonstratione propositionis* 18. *Sit KCF =* CA^2 *; unde KC : CA = CA : CF* (17. *VI. Elem.*)*; est itaque tam in Hyperbola, quam in Ellipsi KC : CA = CA : CF.*

(95) *Quoniam ex demonstratione propositionis* 18*; est MCE =* CA^2 *; quare erit MC : CA = CA : CE.*

RM erunt proportionalia (96), ideoque rectangulum GRM aequatur semidiametri CH quadrato, seu quartae parti rectanguli ex diametro transversa, in suum latus rectum.

Coroll. 1. Circulo circa triangulum CMG circumscripto, cujus circumferentia secet CR in P, erit PR medietas lateris recti ad diametrum RCS pertinentis; quia rectangulum GRM aequabitur CRP (a) rectangulo; unde CRP erit quarta pars rectanguli ex RCS in suum latus rectum; adeoque ex semidiametro RC in medietatem recti lateris, quae erit PR.

(a) 35. III. El. & Corol. 1. 36. ejusd. III. El.

Coroll. 2. Si circulus hic in figura Hyperbolicâ non secaret, sed tangeret semidiametrum CR, coincidente puncto P cum C; unde PR aequalis esset semidiametro CR, foret Hyperbola aequilatera ob medietatem lateris recti aequalem medietati transversae diametri.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 74. 75. *Nclinatae ex focis F, V ad quodvis punctum R curvae Ellipticae, aut Hyperbolicae, continent rectangulum VRF aequale quadrato semidiametri CH, conjugatae diametro KCS per punctum R ductae, sive quartae parti rectanguli sub transverso RS, & ejus recto latere contenti.*

Ductâ enim tangente RG concurrente cum axe NQ in G, & cum altero conjugato AB in M, ductaque ex centro

---

(96) *Quoniam GRO, HCI ob rectarum GR, CH parallelismum sunt triangula similia, erit (19. VI. Elem.) GRO : HCI = GR² : CH²; Pariter quia triangula HCI : RME, itidem similia sunt, erit HCI : RME = CH² : RM²; quare cum sit GRO : HCI = HCI : RME, erit GR² : CH² = CH² : RM²; ac proinde GR : CH = CH : RM.*

(97) *Si duae lineae FV, MR se ita secent in G, ut sit FG × GV = MG × GR; circulus per puncta V, R, M, F, transire poterit; nam si per tria data puncta M, F, R circulus describatur, juxta 5. IV. Elem., vel is circulus ultra V per punctum K, vel per K versus G transibit, per neutrum autem horum punctorum transire posse sic ostenditur; Si enim per K transiret, esset FGK = MGR (35. III. El.) est autem per hipothesim MGR = FGV, quare FGK = FGV, ac proinde GK = GV, quod est absurdum. Sed neque transit per k, alioquin foret FGk = MGR = FGV, & Gk = GV, quod itidem est absurdum; transibit ergo per V. Q.E.D.*

An. Fig. 11

tro CI parallela VR in I, juncta IF, erit ipsi tangenti perpendicularis (*a*), quare ob angulos rectos MIF transiret circulus per puncta M, I, F, C super diametro FM descriptus (*b*), unde rectangula FGC, IGM erunt æqualia (*c*); unde FG ad GM erit ut IG ad GC (*d*), sive ut RG ad GV ob parallelas CI, VR; ergo FGV æquabitur MGR (*e*); unde etiam per puncta V, R, M, F transire poterit circulus (*f*); unde angulus FMR æquabitur FVR, seu GVR (essent enim in figura 75. in eodem segmento, & figura 74. uterque cum FVR illi opposito, huic consequenti duos rectos (98) compleret) sed angulus FRM æquatur VRG (*g*); ergo triangula FMR, GVR æquiangula sunt (*h*), & similia; ideoque FR ad RM erit ut GR ad RV, & rectangulum VRF æquabitur GRM, sed hoc (*i*) æquatur quadrato semidiametri conjugatæ CH, quæ tangenti æquidistat, seu quartæ parti figuræ ex transverso RS, & ejus parametro contentæ; ergo etiam illud rectangulum VRF ipsi æquatur. Q. E. D.

(a) Cor. 3. Proposit. XXI. (b) not. 86 (c) Cor. 1. 36. III. El. (d) 2. par. 16. VI. El. (e) 1. par. ejusdem. (f) nota 16 in Ellipsi, & not. 97. in Hyp. (g) Proposit. XX. (h) Cor. 9. par. 1. propos. 32. I. Elem. (i) Proposit. XXIV.

Coroll. 1. Hinc VR est ad semidiametrum RC, ut medietas parametri ad hanc diametrum pertinentis ad RF; quia rectangulum VRF, (quod æquatur quartæ parti rectanguli ex tota RCS in suum parametrum) æquatur RC in semiparametrum, id enim est quarta pars rectanguli totius diametri RS in totam parametrum.

Coroll. 2. Ex terminis diametri RS junctæ ad focum RF, SF, pariter continebunt rectangulum RFS æquale quadrato semidiametri conjugatæ CH, seu quartæ parti figuræ rectanguli ex ipsa diametro RS in suam parametrum; quippe FS æquatur VR, cum sint bases triangulorum FCS, RCV æqualia latera FC, CV, SC, CR, circa æquales angulos ad verticem C habentium; unde RFS æquatur VRF (seu CH^2, aut quartæ parti figuræ rectanguli ex ipsa diametro RS in suam parametrum).

Coroll. 3. Quadrata RF, RV cum duplo quadrato semidiametri conjugatæ CH, æquantur quadrato QN in Ellipsi; in Hyperbola vero eadem quadrata RF, RV, dempto duplo quadrato semidiametri conjugatæ CH, eidem quadrato axis QN æquantur; nam QN æquatur aggregato ipsarum RF, & RV

---

(98) *In figura 74. cum quadrilaterum MFVR circulo inscribi possit, erit* [22. *lib. III. El.*) *angulus FMR + angulus FVR sibi oppositus, duobus rectis æquales; est autem angulus GVR cum FVR duobus rectis æqualis, ergo angulus FMR + ang. FVR = GVR + ang. FVR, seu angulus FMR = angulo GVR.*

(a) Corol. 2. 21. & RV in Ellipsi; in Hyperbola vero æquatur earumdem differentiæ *(a)*; ergo quadratum QN æquatur ipsarum quadratis, addito in Ellipsi, & dempto in Hyperbola duplici re-(b) Propofit. 25. ctangulo ipsarum *(99)*, quod idem est, ac duplum quadratum CH *(b)*.

Coroll. 4. Rursus in Ellipsi summa ex rectangulo quolibet VRF, & ex quadrato suæ semidiametri transversæ CR, in Hyperbola vero eorum differentia semper ejusdem est quantitatis, nempe æquatur duplo quadrato semiaxis transversi CN, ablato quadrato distantiæ foci a centro CV, vel CF; nam vidimus esse QN quadratum æquale quadrato summæ in Ellipsi, vel differentiæ in Hyperbola, rectarum VR, FR, idest quadratis VR, FR, plus vel minus duplo rectangulo VRF; at quadrata VR, & FR, dupla sunt quadrati CR, & quadrati CV, ex dictis in Scholio n. 5. ergo duplum quadrati CR, cum duplo quadrati CV, plus, aut minus duplo rectangulo VRF, æquatur quadrato QN; & omnia dimidiando quadratum CR cum quadrato CV, addito, aut dempto rectangulo VRF, æquatur dimidio quadrati QN, quod est duplum quadrati semiaxis CN; quare hinc inde ablato quadrato CV, erit summa, vel differentia quadrati CR, & rectanguli VRF, æqualis differentiæ dupli quadrati CN, ab ipso CV, vel CF, quadrato; (est autem $2CN^2 - CF^2$, quantitas constans, ergo summa ex rectangulo VRF, & ex CR^2 in Ellipsi, & eorumdem differentia in Hyperbola est semper ejusdem quantitatis.

Coroll. 5. Et quia rectangulum VRF æquatur quadrato conjugatæ semidiametri CH, erit in Ellipsi summa quadratorum CR, CH; in Hyperbola vero eorum differentia, æqualis summæ, aut differentiæ quadratorum ex utroque semi-

---

(99) *In Ellipsi* $QN = FR + RV$, *ergo* $QN^2 = (FR + RV^2) = FR^2 + RV^2 + 2VRF$ [4. 2. *Elem.*] *est autem* $VRF = CH^2$; & $2VRF = 2CH^2$, *ergo* $QN^2 = FR^2 + RV^2 + 2CH^2$. *In hyperbola vero cum sit* $FR - RV = NQ$, *hinc facta* $RO = RV$ *erit* $FO = NQ$. *Porro* $FR^2 = FRO + RFO$ (2. 2. *Elem.*) *sed* $RFO = FO^2 + FOR$ [3. 2. *Elem.*]: *ergo* $FR^2 = FO^2 + FOR + FRO$, *quare* $FR^2 + RO^2 = FO^2 + FOR + RO^2 + FRO = FO^2 + FRO + FRO = FO^2 + 2FRO$, *est autem* $RO = RV$; *quare* $FR^2 + RO^2 = FR^2 + RV^2$, & $FO^2 + 2FRO = FO^2 + 2FRV$, *ergo* $FR^2 + RV^2 = FO^2 + 2FRV$; *seu* $FR^2 + RV^2 - 2FRV = FO^2 = NQ^2$.

semiaxe CN, & CB; nam pariter summa, aut differentia quadratorum CR, CH, æquabitur duplo CN, quadrati dempto quadrato CV, sed quadratum CN, dempto CV, (seu CF) quadrato, æquatur rectangulo QFN, seu QVN, (*a*), seu quadrato semiaxis CB (*b*); & in Hyperbola CV, quadratum dempto QVN, seu CB, quadrato, æquatur quadrato CN (100); ergo in Ellipsi CR, quadratum cum CH, quadrato, æquatur quadratis CN, & CB, in Hyperbola vero differentia quadratorum CR, & CH, æquabitur differentiæ quadratorum CN, & CB.

(a) 5. 2. Elem.
(b) Proposit. XX.

Coroll. 6. Hinc quadruplicatis terminis axium QN, & AB quadrata simul sumpta in Ellipsi, æquantur quadratis quorumlibet conjugatorum diametrorum RS, HT; & in Hyperbola quadratorum ex axibus differentia æqualis erit differentiæ quorumvis quadratorum ex diametris conjugatis, (erit nempe $SR^2 - HT^2 = QN^2 - BA^2$).

Coroll. 7. Unde Hyperbola æquilatera cujus axis transversus æquatur axi conjugato, & habet parametrum consequenter sibi æqualem (ob proportionalitatem harum trium linearum (*c*) habebit quasdam alias transversas diametros suis conjugatis æquales cum parametris iisdem æqualibus; nam ubi æqualis est differentia quadratorum ex axibus, & ex binis conjugatis diametris; si in illis est nulla, pariter in his nulla esse potest. (101)

(c) Post Cor. 2. XII

I PRO-

---

(100) *Cum sit in hyperbola* $CR^2 - CH^2 = 2\,CQ^2 - CV^2 = QCN^2 - CV^2$ *[coroll. 4.], &* $CV^2 = CQ^2 + QVN$ *(6. 2. El.) erit* $CR^2 - CH^2 = 2\,CQ^2 - CQ^2 - QVN = CQ^2 - QVN$; *est autem* $QVN = CB^2$ *(propositione XX.) ergo* $CR^2 - CH^2 = CQ^2 - CB^2 = CN^2 - CB^2$.

(101) *Supponatur SN, esse hyperbolam æquilateram, cujus axis transversus NQ, conjugatus AB, erit = QN; Sitque alia quævis diameter SR, conjugata vero HT, tum erit (coroll. VI.)* $NQ^2 = AB^2 = SR^2 - HT^2$, *est autem, ob* $NQ = AB$, $NQ^2 - AB^2 = 0$, *ergo etiam* $SR^2 - HT^2 = 0$; *seu* $SR^2 = HT^2$ *&* $SR = HT$.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 76. 77. *IN Ellipsi, & Hyperbola qualibet diameter HT est media proportionalis inter axem transversum NQ, & rectam ipsi HT parallelam RS, per aliquem focum F, traductam.*

Ducta enim tangente RG, & ex alio foco V, iisdem HT, RS, parallela VD, jungatur RD, quae bifariam secabitur in E (102) a diametro HT, cui est ordinata, sicuti FV, bifariam divisa est in centro C, ab eadem diametro ipsis FR, VD, parallela, erit ergo CE, media arithmetica inter ipsas FR, VD (103), sive inter FR, & FS, quae ipsi VD, aequatur (104), nam in pari a centro distantia utraque ad curvam inclinatur aequali angulo NFS, aut RFQ, & QVD; quare dupla CE, quae est media aequatur summae extremarum RS, at CH, est media Geometrica inter CE, & CG (a); ipsaque CG, parallela FR, aequatur semiaxi transverso CN, ergo sunt quoque proportionales RS dupla CE, HT, dupla CH, & QN, dupla CG; unde patet propositum.

(a) Ex dem. propofit. 18.

Coroll.

---

(102) *Acta FD, secante diametrum HT in L, erit ob linearum CH, VD, FR parallelismum, RE : ED = FL : LD = FC : CV; est autem FC = CV, ergo & RE = ED; quare RD, diametro HT, ordinatur.*

(103) *Quoniam DR diametro HT ordinatur, cui conjugata diameter est KM, erunt KM, DR, parallelae, quare, cum DP, RO sint itidem parallelae, erit PDRO, parallelogrammum; unde RO = DP; est autem HT, lineis DP, RO aequidistans; quare sicuti DE = ER, ita PC = OC. Porro cum etiam VC sit aequalis CF, angulusque PCV = OCF, erit FO = PV (4. 1. Elem.); hinc RF − OR = RF − CE = FO; & CE − DV = PD − DV = PV; ergo cum sit FO = PV, erit excessus RF supra OR, seu supra CE = excessui PD supra DV, seu CE supra DV; sunt itaque FR, CE, DV arithmetice proportionales.*

(104) *Quia KM, est conjugata ad HT diametrum bifariam secabit SR ipsi HT parallelam, unde SO = OR = PD; est autem FO = PV, ergo VD = SF.*

Coroll. 1. Quadratum igitur diametri HT, æquatur rectangulo ex recta ipsi parallela RS, per focum traducta, & ex axe transverso QN (*a*). (a) 17. VI. Elem.

Coroll. 2. Unde si plures lineæ per focum traducantur, erunt singulæ, ut quadrata diametrorum ipsis æquidistantium. (105)

Coroll. 3. Est SR, ad MA latus rectum suæ diametri MK, cui ordinatur, ut ipsa diameter MK, ad axem transversum NQ; nam HT quadratum æquatur AMK (cum HT sit conjugata diameter ad diametrum KM]; sed æquatur RS in QN (*b*), ergo AMK est æquale RS in QN, & ideo (*c*) RS ad AM, ut MK ad QN. (b) Ex Coroll. 1. (c) 2 parte 17. VI Elem.

Coroll. 4. Cum RS a diametro MK bissariam secta sit in O, erit OR quadratum ad quadratum HC, ut rectangulum KOM, ad quadratum MC; & cum sint RS, HT, NQ, proportionales, adeoque & earum dimidiæ OR, CH, CN, erit OR quadratum (*d*) ad quadratum CH, ut CH quadratum ad quadratum CN; ideoque rectangulum KOM ad quadratum MC, ut quadratum HC, sive ut rectangulum VMF, huic æquale (*e*) ad quadratum CN. (d) 22. VI. Elem. (e) Ex proposit. Præced.

Coroll. 5. Et permutando erunt rectangula KOM, VMF, ut quadrata semidiametri CM, & semiaxis CN, sive (terminos quadruplicando) ut integrorum MK, NQ, quadrata.

Coroll. 6. Rectangula NFQ, SFR, cum sint, ut QN quadratum ad HT quadratum (106), erunt ut QN ad SR; & sem-

---

(105) *Ducta diametro ht, cui SFr est parallela; erit per hanc propositionem ht, media proportionalis inter axem transversum NQ, & parallelam sr; quare* $ht^2 = NQ \times sr$; *unde* $HT^2 : NQ \times SR = ht^2 : NQ \times sr$, & $HT^2 : ht^2 = NQ \times SR : NQ \times sr. = SR : sr$ (1. *VI. Elem.*)

(106) *Quoniam in Ellipsi KM, AB, sunt diametri ordinatarum SR, QN, erunt SR, QN tangentibus MP, BP parallelæ, quare (coroll.* 3. 18.) *erit* $QFN : SFR = QC^2 : CH^2$, *seu* $= QN^2 : HT^2$. An. Fig. 12.

Quoad Hyperbolam vero, ex propositione 28., *quæ ab hac non dependet, colligitur PFA ad axem QN ordinatam esse ejusdem axis parametro æqualem; est vero QFN æquale rectangulo ex QN in quartam parametri partem, seu æquale rectangulo ex CQ in ejusdem medietatem; quare* $QF \times FN = QC \times PF$; *est itaque* $QFN : PFA = QC \times PF : PF \times FA = QC : PF$ (1. *VI. Elem.*) $= QN : Pd = QN^2 : XB^2$ *seu* $= CN^2 : CB^2$; *est namque axis conjugatus*

(a) Corol. 2. hujus. (*a*) & semper rectangula ex portionibus linearum per focum trajectarum, erunt ut ipsæmet integræ lineæ. (107)

Coroll. 7. FM, erit ad quartam partem parametri MA, pertinentis ad diametrum MK, ut eadem diameter MK ad aliam MV, ex altero foco inclinatam; quippe VMF æquale CH, quadrato (*b*) æquatur MK, in quartam partem sui parametri (unde ob $VM \times MF = MK \times \frac{1}{4} MA$, erit $FM : \frac{1}{4} MA = MK : MV$).

(b) Prop. 25.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 78. 79. *Summa inclinatarum ex focis ad idem punctum Hyperbolæ, earumque differentia in Ellipsi, nempe FR plus, aut minus VR est ad CO, distantiam ordinatæ RO a centro, ut focorum distantia VF, ad semiaxem transversum CN.*

Nam tangenti TRG, ductis ex foco F, & ex centro C, parallelis FH, CM, concurrentibus cum VR, in H, M, ductaque CI, parallela VR, atque ordinata ad axem RO, ob angulos FRI, VRT, æquales (*c*), etiam RFH (alternus alteri FRG) & RHF (*æqualis externo, aut alterno in Ellipsi VRT) æquales erunt, quare HR æquatur RF (*d*); unde VH erit summa in Hyperbola, & differentia in Ellipsi dictarum inclinatarum FR, VR; estque VH, ad VF, ut VR, ad VG, sive ut CI, æqualis CN (*e*) ad CG, vel ut CO, ad CN, (quia CO, CN, CG (*f*) sunt proportionales) ergo VH ad VF, ut CO ad CN, & permutando VH, summa, vel differentia inclinatarum a focis est ad CO distantiam ordinatæ RO, a centro, ut distantia focorum VF, ad semiaxem CN.

(c) prop. XX.
(d) 6. 1. Elem.
(e) Prop. XXI.
(f) Corollar. XI. propos. 9.

Coroll.

XB inter transversum QN, & parametrum, seu PA, media proportionalis; Porro $PFA : SFR = CB^2 : CH^2$ *(coroll. 3. propos. 18.) quare cum sit quoque* $QFN : PFA = CN^2 : CB^2$ *erit ex æquo* $QFN : SFR = CN^2 : CH^2 = QN^2 : HT^2$.

(107) *Quoniam quadratum* $HT : ht^2 = SR : sr$ *(corollar. 2.), &* $HT^2 : ht^2 = SF \times FR : SF \times Fr$ *(coroll. 3. 18.) erit* $SR : sr = SF \times FR : sF \times Fr$.

*Coroll.*1. Hinc summæ, aut differentiæ inclinatarum ex focis ad varia puncta curvæ hyperbolicæ, aut ellipticæ sunt ut distantiæ ordinatarum a centro, cum sint illæ ad has distantias in eadem constanti ratione VF ad CN.

*Coroll.*2. Unde si inclinandæ sint ex focis ad diversa curvæ hyperbolicæ, aut ellipticæ puncta, lineæ quarum summæ, (in Hyperbola) aut differentiæ (in Ellipsi) sint in aliqua data ratione, acceptis in tali ratione distantiis a centro, & ordinatis ad axem rectis; inclinatæ ex focis ad harum ordinatarum terminos, satisfacient quæsito. (108)

PROPOSITIO XXVIII.

IN omni sectione conica ordinata ex foco ad axem FM, ductisque tangentibus MG, NO, erit ipsa FM, medietas lateris recti, & NO, æqualis NF. Fig. 80. 81. 82.

Esto NX, latus rectum, erit in Parabola NF, ejus quadrans (a) (adeoque NX : NF = 4: 1.) estque FM, media proportionalis inter abscissam FN, & ipsum NX (b) propter MF quadratum æquale FNX; ergo FM, est medietas ejusdem parametri NX; nam inter 4. & 1. mediat 2. (109) Quia vero etiam GF dupla est FN (c), est utique GF, æqualis

(a) Proposit. 19.
[b] Coroll. 1. IV. proposit.
(c) Cor. VI. 9. proposit.

(108) *Sint inclinandæ ex focis V, F, lineæ VPF, VRF, quarum summæ in hyperbola, & differentia in ellipsi sint in ratione data m, ad n; Fiat m : n = CO : CS, ductisque ordinatis SP, OR, erunt VR + RF : VP + PF in hyperbola, aut VR − RF : VP − PF in Ellipsi = CO : CS (coroll.1.) = m : n. Q. E. D.*

(109) *Quoniam 4NF = NX, erit 2NF = ½ NX; est autem NF : 2NF = 2NF : 4NF, ergo 2NF est media proportionalis inter NF, & 4NF; sed etiam FM, est media inter easdem NF, & 4NF, cum 4NF sit æqualis NX; ergo 2NF = FM; porro 2NF = ½ NX, ergo & FM = ½ NX.*

(a) Nota 109. lis FM, quæ ejusdem FN est dupla (*a*), & NG æqualis NO (propter GF : FM = GN : NO); unde NF æqualis GN, æquatur NO.

In aliis vero Sectionibus rectangulum QFN ad quadratum MF, est ut transversum latus QN, ad rectum NX (*b*), sive ut QNX, ad NX quadratum (*c*), & permutando QFN ad QNX, ut quadratum MF, ad NX quadratum, sed primum est quartà pars secundi (*d*); ergo & tertium est quarta pars quarti (seu $MF^2 = \frac{1}{4} NX^2$), adeoque MF, est medietas NX, ut illius quadratum sit quarta pars hujus. Quia vero QFN, est pars quarta QNX æquabitur rectangulo ex medietate transversi, nempe CN, in medietatem parametri MF; quare cum sit QFN, æquale etiam rectangulo CFG (*e*), erit CN in MF æquale ipsi CFG; Unde CF, ad CN (sive CN ad CG (*f*)), erit ut MF ad FG, scilicet ut ON ad NG; sed etiam FN ad NG, est in eadem ratione CF ad CN, aut CN ad CG; quia dividendo etiam terminorum differentiæ sunt, ut ipsi termini proportionales (110) ergo ON, est æqualis FN, cum ad NG, utraque habeat eamdem rationem. Q. E. D. (111)

(b) Corol. VI. prop 5 & 6.
(c) 1. VI. Elem.
(d) Propofit. XX.
(e) Cor. 8. propof. 9.
(f) Corol. XI. Propofit. 9.

Coroll. 1. In Parabola GF æquatur FM; in aliis vero Sectionibus inæqualis est, in ratione tamen GN ad NO (cum sit GF : FM = GN : NO) sive ad NF huic æqualem; estque GN ad NF, ut GQ ad QF (*g*): quia secatur harmonice diameter ab ordinatæ, & tangentis occursu cum suis terminis, ergo GF ad FM est etiam ut GQ ad QF.

(g) Corol. 12 prop. 9.

Coroll.

---

(110) *Cum sit CF : CN = CN : CG erit CN : CF = CG : CN, sive in Ellipsi dividendo CN — CF : CF = CG — CN : CN hoc est FN : CF = GN : CN, seu FN : GN = CF : CN = CN : CG = MF : FG = ON : NG, ergo FN : GN = ON : NG; seu FN, & ON, æquales erunt, In Hyperbola vero cum sit itidem CF : CN = CN : CG, erit CF — CN : CN — CG = CN : CG, seu FN : GN = CN : CG = MF : FG = ON : NG, ergo erit denuo FN = ON.*

(111) *Ex hac propositione infertur in Hyperbola distantiam foci, ab vertice hyperbolæ oppositæ FQ, tangenti QE, æqualem esse: Nam [ex proposit. 18.] est QE × NO = CH², cui cum æquetur QF × FN (ex proposit. XX.) erit QE × NO = QF × FN; quare QE : QF = FN : NO, est autem (ex hac propositione FN = ON, ergo & QE = QF:*

Coroll. 2. Et quia in Hyperbola GQ, est minor QF, in Ellipsi vero illa major ista, ideo GF semper minor est in Hyperbola ordinata FM, in Ellipsi vero major.

Coroll. 3. Juncta FO, erit angulus NFO, semirectus ob latus NF æquale ipsi NO) & angulum N rectum.

PROPOSITIO XXIX.

Iisdem positis ordinata ad axem quavis alia TBH, secante tangentem GM in A, juncta ex foco ad curvam recta FH, erit aequalis BA. Fig. 80. 81. 82.

Rectangulum enim TAH, ad quadratum tangentis AM, est, ut quadratum NO ad quadratum OM, (*a*) sed NO, æquatur NF, ergo est etiam ut quadratum NF ad quadratum OM, vel ut quadratum FB ad quadratum AM (est namque (*b*) NF : OM = FB : MA) ita rectangulum TAH, ad idem quadratum AM; quare illud rectangulum æquatur FB, quadrato, & utrinque addito quadrato BH, erit TAH rectangulum, cum quadrato BH, æquale utrique simul sumpto quadrato FB, & BH, ideft quadratum BA (*c*) æquabitur quadrato FH, ergo ramus ex foco FH, æquatur ipsi BA, ordinatæ ad tangentem GM extensæ.

(a) Proposit. 16.

(b) Corol. 1. Prop. 1. VI. Elem.

(c) 6. 2. Elem.

Coroll. 1. Hinc constat rectangula TAH, ex ordinatis axi ad tangentem GM, protensis, in earum partem externam, æquari quadrato BF distantiæ foci ab ordinata (*d*).

[d] Ex hac proposit.

Coroll. 2. Hinc quælibet Sectio conica describi poterit si in triangulo rectangulo GFM productis lateribus GF, GM, & ductis quibuslibet ordinatis BA, ab ipsi FM, parallelis, ex fixo puncto F, ad ipsas inclinentur FH, Fh, dictis ordinatis æquales; erunt enim puncta h, H, ad parabolam si latus GF, sit æquale FM (*e*), ad Ellipsim si GF sit majus FM; ad Hyperbolam vero (& etiam ad (112) ejus oppositam) si GF minus FM (*f*).

(e) Ex Corol 1. praeced.

(f) Ex Corol. 2. praeced.

---

(112) *Ob triangulorum MGF, GEQ, similitudinem erit MG : GF = GE : GQ; ergo (12. VI. Elem.) MG + GE : GF + GQ = MG : GF, seu ME : QF = MG : GF: est autem praeterea MG : GF = Ga ; Gb, ergo [per eam*

Coroll. 3. Ubi tangens MG ex termino ordinatæ ex foco FM ducta concurrit cum axe si agatur GPK parallela ordinatis, dicetur hæc quoque in Ellipsi, & Hyperbola (ut in parabola (*a*) indicavimus) linea sublimitatis, ad quam ex quovis curvæ puncto H, ducta HK, axi parallela, uti etiam MP, erit semper ramus FH, ex foco ad quodlibet punctum H, ductus, ad ipsam NK, ut FM ad MP, sive ut FN, aut NO ipsi æqualis ad NG; quippe in eadem ratione est AB ad BG, adeoque & FH, ad HK, cum sint illis æquales.

(a) Proposit. 19.

Fig. 83. *Corol.* 4. Quin etiam si ex foco ad lineam sublimitatis ducatur quælibet inclinata linea FHS, ductoque alio ramo FL, agatur ipsi FS parallela LR, ad eamdem sublimitatis lineam terminata, in qualibet Sectione, erit FH ad HS, ut FL ad LR, ductis enim axi parallelis HK, LP, cum sit FH, ad HK, ut FL ad LP (*b*), & ob similia triangula KHS, PLR, sit HK ad HS, ut LP ad LR, erit ex æquo FH ad HS, ut PL ad LR.

[b] Corol. præced.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 84. 85. *SI ex contactu Hyperbolæ, aut Ellipsis ducatur tangenti perpendicularis MP, ad axem transversum terminata, & ex centro C in eamdem tangentem agatur perpendicularis CS, rectangulum ex PM, in CS, æquabitur quadrato semiaxis conjugati CA, seu quartæ parti figuræ rectanguli ex transverso latere in suum rectum.*

Ordinetur ad utrumque axem MK, MR, similia erunt triangula HCS, PMK; ob æquidistantia enim latera SC, MP, angulus MPK, æquatur SCP (*c*), adeoque; & CHS, quia

(c) 27. 1. Elem.

---

dem] *erit* $MG + Ga : GF + Gb = MG : GF$, *seu* $Ma; bF = MG + GF$; *quare* $ME : QF = Ma : bF$, & $Ma : ME = bF : QF$, *seu* $Ma^2 : ME^2 = bF^2 : QF^2$. *Porro* $tab : QE^2 = Ma^2 : ME^2$ (*ex prop.* 16.) *ergo* $tab : QE^2 = bF^2 : QF^2$:*cum itaque sit* $QE^2 = QF^2$ [*ex nota præceden.*] *erit* $tab = bF^2$ *additoque communiter* bh^2, *erit* $Fb^2 = bF^2 + bh^2 = bh^2 + tab = ba^2$ (6. 2. *Elem.*) *proindeque* $Fb = ba$.

quia utervis cum HCS rectum complet (*a*), suntque anguli recti MKP, HSC, pariter æquales; igitur est MP, ad MK, ut CH, ad CS, quare PM in CS, æquatur CH in MK (*b*), sive in CR illi æqualem; at HCR æquatur CA, quadrato (*c*) ergo pariter PM in CS, eidem quadrato minoris semiaxis æquatur, seu quartæ parti rectanguli ex axe transverso in suam parametrum.

[a) Prop. 32. 1. El. Corol. 6 (b) 16. VI. El. (c) Proposit. 18.

Coroll. 1. Quoniam vero rectangulum ex verticalibus tangentibus QE, NO, eidem quadrato minoris semiaxis æquatur (*d*), etiam huic æquale erit rectangulum ex PM, in CS; unde (*e*) QE ad CS, erit ut PM ad NO.

(d] Proposit. 18. (e] Ex 2. parte 16. VI. El.

Coroll. 2. Et ob similitudinem triangulorum EGQ, CGS, PGM, OGN (quod habeant angulos CSG, GQE, GNO, rectos, seu æquales, & angulum G, communem) cum sit QG ad QE, ut GS ad CS, ut GM ad MP, ut GN ad NO, sintque consequentes proportionales (nempe QE: CS, (*f*) = MP : NO), etiam antecedentes proportionales erunt (113), nempe QG ad GS, ut GM ad GN, unde rectangula QGN, MGS erunt æqualia.

(f) Ex Corol. 1.

Coroll. 3. Similiter (114) & reliqua latera EG, CG, GP, GO, proportionalia erunt, adeoque rectangulum EGO; æquabitur CGP.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 86.

SI ex quolibet puncto M, cujusvis Sectionis conicæ ducta ad tangentem ME perpendicularis MP, cum axe conveniat in P, & ex aliquo foco F, ducto ramo FM, in ipsum ex P, ducatur perpendicularis PD, erit portio MD, æqualis semiparametro axis.

In

---

(113) *Quoniam QG : QE = GS : CS, erit QG : GS = QE : CS; pariter cum sit GM : MP = GN : NO, erit GM : GN = MP : NO, est autem QE : CS = MP : NO (cor. 1.) ergo QG : GS = GM : GN.*

(114. *Propter similitudinem triangulorum FGQ, CGS, erit EG : CG = QE : CS; ac pariter ob similitudinem triangulorum PGM, OGN erit GP : GO = PM : NO, est autem QE : CS = PM : NO : ergo EG : CG = GP : GO.*

In Parabola id manifestum est; nam ducta diametro MR axi parallela, & ordinata ad axem MK, triangula MPD, PMK, æqualia, & similia erunt (115) quia angulus DMP æqualis PMR (quorum singuli cum æqualibus DME, RMS (*a*) rectum complent) æquabitur MPK (*b*) unde cum eadem sit hypotenusa MP, etiam latera homologa DM, PK æqualia erunt (*c*), sed PK, subnormalis, æquatur medietati lateris recti (*d*), ergo eidem æqualis erit MD.

(a) Propos. 19.
(b) 27. 1. Elem.
(c) 19. VI. Elem.
(d) Corol. 16. prop. 9.

In Ellipsi autem, & Hyperbola ducta ex centro ad tangentem recta CI parallela ramo FM, & CS perpendiculari seu parallela MP, erit angulus ICS æqualis PMD; utervis enim cum CIS, aut FME huic (*e*) æquali, rectum complet, unde in triangulis similibus ICS, PMD, est IC ad CS, ut MP ad MD, & rectangulum ex IC in MD, æquatur CS in MP (*f*); sed hoc æquatur quartæ parti rectanguli ex axe QN in suam parametrum (*g*), ideft CN, in semiparametrum, ergo & illud, quare cum sit IC æqualis semiaxi CN (*h*), MD æquatur semiparametro. Quod erat demonstrandum.

Fig. 87. 88.
(e) 27. 1. Elem.
(f) 16. VI. Elem.
[g] Prop. præced.
(h) Ex prop. XXI

Corollarium.

Ducta etiam ramo VM, & in ipsum ex P, ducta perpendiculari PR, erit MR æqualis semiparametro; nam triangulorum MPD, MPR, latera omnia sunt æqualia, nempe MD ipsi MR, & PD alteri PR, (*i*), ob æquales angulos DMP, RMP (116), necnon DPM, RPM.

(i) 26. 1. Elem.

PRO-

(115) *Angulus PMD + ang. DME = recto angulo PME; & angulus PMR + ang. RMS = angulo recto PMS, quare angulus PMD + DME = ang. PMR + RMS; est vero angulus RMS = angulo DME (prop. 19.) ergo PMD = PMR = MPK (27. 1. Elem.); sunt vero anguli PKM, MDP, recti, ergo & anguli PMK, MPD, æquales erunt, quare triangula MPD, GMK, similia sunt, ergo (19. VI. El.) erit PKM = PDM; ergo DM, PK æquantur.*

(116) *Quoniam anguli PMG, PMI recti sunt, proindeque æquales, hinc si ab iis auferantur æquales anguli (proposit. 20.) FMG, GMV, remanebunt anguli DMP; RMP æquales; quare cum anguli ad D, & R recti sint, adeoque æquales, erit angulus DPM = angulo RPM (cor. 9. prop. 32. 1. Elem.)*

PROPOSITIO XXXII.

R*ectangulum ex distantiis centri Ellipsis, aut Hyperbolæ a concursu tangentis MG cum axe, & concursu perpendicularis MP, cum eodem, nempe GCP, æquatur quadrato distantiæ cujusvis foci a centro CF, aut CV.* Fig. 87. 88.

Est enim VG ad GF, ut VP ad PF (*a*); ergo componendo in Ellipsi, & dividendo in Hyperbola erit VG plus, aut minus GF, ad GF, ut VP plus, aut minus PF ad PF, idest dupla CG ad GF, ut dupla CF ad PF (117); ac sumptis antecedentium medietatibus, erit CG ad GF, ut est CF ad PF; ac demum eadem antecedentia ad differentiam terminorum in Ellipsi, vel ad summam in Hyperbola, comparando, erit (118) CG ad CG minus, aut plus GF (quæ erit CF), ut ipsa CF ad CF minus, aut plus PF (quæ est CP; quare GCP æquatur quadrato CF (*b*), aut VC; cum sint continue proportionales CG, CF, CP. Quod erat demonstrandum.

(a) Corol. 6. prop. 21.

(b) 17. VI Elem.

Corol. 1. Hinc quadratum semiaxis CN, ad quadratum distantiæ foci a centro CF, est ut CK, ad CP; nempe ut distantia ordinatæ ad axem MK a centro ad distantiam concursus perpendicularis MP, cum axe ab eodem centro; nam CN

(117) *Quoniam* $VC = CF$, *erit in Ellipsi* $VG = 2\,CF + FG$; *quare* $VG + GF = 2\,CF + 2\,FG = 2\,CG$. *Cum vero sit* $VG + GF : GF = VP + PF : PF$, *erit* $2\,CG : GF = VF : PF = 2\,CF : PF$. *In Hyperbola vero ob* VC *itidem* $= CF$ *erit* $VG = VC + CG = FC + CG = FG + 2\,CG$; *unde* $VG - GF = 2\,CG$; *quocirca cum sit* $VG - GF : GF = VP - PF : PF$, *erit* $2\,CG : GF = VF : PF = 2\,CF : PF$.

(118) $CG : GF = CF : PF$, *ergo per conversionem rationis, erit in Ellipsi* $CG : CG - GF = CF : CF - PF$, *seu ob* $CG - GF = CF$, *&* $CF - PF = CP$, *erit* $CG : CF = CF : CP$. *At in Hyperbola, cum itidem sit* $CG : GF = CF : PF$, *erit invertendo* $GF : CG = PF : CF$, *&* c*omponendo* $GF + CG : CG = PF + CF : CF$, *&* *invertendo* $CG : GF + CG = CF : PF + CF$, *seu* $CG : CF = CF : PC$.

(a) Corol. XI. prop. IX. CN quadratum æquatur GCK (*a*), & CF quadratum vidimus æquari GCP, quæ rectangula sunt ut CK ad CP (ob æqualem altitudinem GC (*b*), quapropter & $CN^2 : CF^2 = CK : CP$.)

(b) 1. VI. Elem.

Coroll. 2. Unde CK ad CP est semper in eadem constanti ratione CN quadrati ad CF quadratum, ubicumque sumptum fuerit punctum illud M.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 89. 90. 91. *In omni Sectione conica si tangentes BE, DE, concurrant in E, recta ex E, ducta secans Sectionem in A, H, & rectam jungentem contactus BD in I, erit harmonice divisa in his punctis, nempe resultabit EH ad HI, ut EA ad AI.*

Ducatur per punctum E, diameter bisecans chordam BD in K, quæ & bisecabit alias illi parallelas ex punctis A, & H, ductas AM, HS in punctis L, R, quæ concurrant cum una tangentium EB in O, & P. Erit ergo ut quadratum RE ad quadratum EL, ita quadratum PR ad quadratum OL, & quadratum HR ad quadratum AL, & residuum HPS ad AOM (119); sed hæc rectangula sunt ut quadrata tangentium PB, OB (*c*); ergo quadratum PB ad quadratum OB, est pariter, ut quadratum RE ad quadratum EL, sive ut quadratum PE ad EO quadratum (unde $PB : OB = RE : EL = PE : EO$); Est itaque tangens EPB, harmonice secta (120) cum sit PE ad EO, ut PB ad BO; quare

(c) Corol. 3. prop. 16

(119) *Quia* $PR^2 : OL^2 :: = HR^2 : AL^2$, *&* $HR^2 + SPH = PR^2$, *sicuti* $AL^2 + MOA = OL^2$ *(6. 2. El.) ergo* $PR^2 : OL^2$, *est ut reliquum, SPH, ad reliquum, MOA (19. V. Elem.*

(120) $EO = EP - OP$, *&* $OB = OP - PB$; *est autem* $PE : PB = EO : BO$, *ergo* $PE : RB = EP - OP : OP - PB$; *quare PE, OP, PB, sunt harmonice proportionales. Porro* $PE : EO = HE : EA$, *&* $PB : BO = HI : IA$, *unde cum sit* $PE : EO = PB : BO$, *erit etiam* $HE : EA = HI : IA$; *ergo HE, HA, HI, sunt harmonice proportionales; atque ita etiam diameter ER harmonice secta erit, adeout RE, RL, RK sint in harmonica proportione.*

quare etiam ab iisdem parallelis PR, BD, OM, secta erit EH, harmonice, eritque HE, ad EA, ut HI ad IA. Q. E. D.

Coroll. 1. Vicissim si ex puncto E, alicujus tangentis EB, agatur EH, secans conicam Sectionem in A, & H, & fiat HE ad EA, ita HI ad IA, & juncta BI, occurrat Sectioni in D, juncta ED, erit pariter tangens; nam si tangens ex E, ad illam partem ducta non occurreret Sectioni in D, sed in alio puncto illam tangeret, ex hoc alio contactu ducta recta ad contactum B, secaret AH, in alio puncto diverso ab I, cujus partes forent pariter in ratione HE ad EA, ob harmonicam ipsius divisionem; est autem impossibile, (121) quod HA, secetur in eadem ratione HI, ad IA; in alio puncto diverso ab I, ergo tangens ex E, ducta ad partes D, non alibi curvam tangere potest, quam in ipso D.

Coroll. 2. Pariter si ex puncto E, extra Sectionem conicam ducta secans EAH, harmonice in illis punctis, & in I secta sit, ducta ex puncto E, diametro ENQ, & ex I, ad ipsam diametrum ordinata BID, junctæ EB, ED, erunt tangentes; nam si alibi tangerent, jungens contactus ipsam EH, harmonice secaret extra punctum I, quod est impossibile.

Coroll. 3. Similiter si binæ secantes ex E, ductæ EAH, EMS, in punctis aliis I, X, & in præcedentibus fuerint harmonice sectæ, ducta recta IX, sectionem secante in B, D, junctæ EB, ED, erunt tangentes, ob eamdem rationem.

PRO-

---

(121) *Si ED tangens non est, esto altera Ed, atque ducta Bd, jungente contactus puncta quæ secet EH in puncto i, erit HE : EA = Hi : iA, & ob HI : IA, itidem ut HE : EA, erit Hi : iA = HI : IA, seu permut. Hi : HI = iA : IA; est autem Hi major HI, ergo & iA major IA, quod est absurdum. Atque eadem ratione ostenditur AH, non posse harmonice secari in alio puncto infra I, quod contingere debet si punctum d, infra D, caderet; est ergo sola ED tangens.*

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 92. 93. 94. *Ex concursu E, tangentium ED, EB, ductis binis secantibus Sectionem conicam EAH, EMS in punctis A, H, & M, S, junctæ MA, & SH, aut erunt parallelæ jungenti contactus BD (ut in figuris propositionis præcedentis) aut in unum, idemque punctum T, ipsius rectæ BD, concurrent, sive intra, sive extra Sectionem.*

Si enim AM, sit parallela BD, erit EA, ad AI, ut EM, ad MX, atqui EA ad AI, est ut EA ad HI (quia harmonice secta est EH, estque EH, ad EA, ut HI ad AI) & similiter EM ad MX, ita ES ad SX, ergo (122) EH ad EA est, ut ES ad EM; unde etiam HS, parallela est AM, (a) 2. VI. Elem. & BD; unde etiam HS parallela est AM (*a*), & BD. Si vero non sint parallelæ, sed HS, concurrat cum BD in T, ductis per A, & M rectis YAZ, FMG, parallelis HT, convenientibus cum TI in Y & F, ac cum juncta ET in Z & G, erit HT ad AZ, ut HE, ad EA, sive HI ad IA (*b*), vel [b] Prop. præced. ut eadem HT ad AY, ob similia triangula TIH, IAY, quare erit AZ, æqualis AY; Similiter erit MG æqualis MF; quia cum sit GE, ad EM, ut SX ad XM, erit quoque ST ad MG, ut eadem ST, ad MF, ob similia triangula TXS, MXF; ergo juncta TM, erit in directum ipsi MA; quoniam in triangulo YTZ rectæ YZ, FG, parallelæ in eadem æqualitatis ratione secantur; (a linea AM), unde eadem linea debet esse TMA, alias juncta linea AT, si non transiret per M, bifariam secaret FG in alio puncto diverso ab M, quod est absurdum; Itaque rectæ HS, AM, convenient in idem punctum T, rectæ BD. Quod erat demonstrandum.

Fig 95. 96. *Coroll.* 1. Si rectæ secantes EAH, EMS, sint infinities proximæ, rectæ AM, HS, infinite parvæ convenient cum partibus infinitesimis suæ curvæ; adeoque productæ ad punctum T, rectæ BD, convenientes, erunt ipsius conicæ Sectio-

---

(122) *Cum sit EA : AI = EM : MX = ES : SX = EH : HI, quare ES : EH = SX : HI; unde (19. VI. El.) ES : EH = EX : EI = EM : EA, ergo EH : EA = ES : EM.*

ctionis tangentes; quare si quælibet linea EAH, ex concursu duarum tangentium E, secans Sectionem in AH, deducatur; atque ex punctis A, H, aliæ tangentes ducantur, convenient ad punctum T rectæ BD, jungentis priores contactus, seu ducta una tangente AT, concurrente cum ipsa BD in T; juncta TH, erit tangens.

Coroll. 2. Et recta TB, erit harmonice divisa in punctis T, D, B, & in concursu I, cum illa secante, nempe erit BT ad DT, ut BI ad ID (*a*). (a) Prop. 33.

PROPOSITIO XXXV.

EX concursu E, tangentium EB, ED, ducta quavis secante EAIH concurrente cum BD, jungente contactus in I, si ipsi BD agatur parallela AM, juncta HM, bifariam secabit BD in K, & ipsi BD, ductæ ex E, parallelæ EV occurrens in V, erit harmonice secta ad puncta H, K, M, V; nempe erit HV ad VM: ut HK ad KM. Fig. 97. 98.

Quoniam æquidistantes sunt BD, AM, EV (*b*) in eadem utique ratione secant ipsas EH, & VH, (est namque HE : EA = HV : VM : & HI: IA = HK: KM); quare cum EH sit ab illis harmonice secta (*c*), etiam VH, ab iisdem harmonice secta erit, ideoque HV, ad VM, ut HK ad KM; sed ducta EK secante AM in L, & HG parallelam AM in G, erit ut HV ad VM, sive ut HE, ad EA, ita HG ad AL, atque ita HK ad KM, adeoque & HG ad LM: (ob similia triangula GKH, LKM, ergo est HG ad AL, ut eadem HG ad LM; ideoque AL, æquatur LM; unde erit AM, ordinata ad diametrum, cui ordinatur etiam ejus parallela BD, transeuntem per concursum tangentium E, qualis erit ipsa ELK; unde & BD secta est bifariam in K, ab ipsa secante HMV. Q. E. D. (b) Per hypoth. (c) 33. hujus.

Coroll. 1. Hinc si per medium punctum K, rectæ BD, jungentis duos contactus, trajiciatur quælibet recta HK; secans curvam in H, M, & EV, ipsi BD parallelam in V, erit in his punctis V, M, K, H harmonice secta. (123)

Coroll.

---

(123) *Si ex puncto M, lineæ* HKM, *transeuntis per medium punctum* K, *agatur linea MA, hæc lineis BD, VE, æquidistans erit; Si enim MA, dictis lineis non sit*

Coroll. 2. Si ex quolibet puncto V, rectæ EV parallelæ BD, ducatur Sectionis tangens VA, & ex A per medium punctum K, rectæ BD, agatur recta AK, occurrens Sectioni in S, etiam juncta VS, erit tangens; quia enim VH, harmonice secta sit in V, M, K, H, juxta hanc propositionem XXXV, sitque VA, tangens, debet esse tangens etiam VS; Si enim alibi tangeret supra, aut infra punctum S, recta jungens contactus secaret MH alibi, quam in K, ubi secat ipsam recta AS; Sed (a) recta jungens contactus secat harmonice ipsam secantem ex concursu tangentium ductam, ergo alibi, quam in K, secaretur HM in ratione HV ad VM, quæ eadem jam est ac ratio HK ad KM, id quod est impossibile. (124)

(a) Propo-sit. 33.

Coroll. 3. Hinc habetur, quod si per idem aliquod punctum K, innumeræ lineæ SA, HM, ducantur & ex eorum ter-

---

parallela, esto altera mA, atque ex puncto H, ducta HO mu, erit harmonice secta in punctis u, m, O, H. atque BO = OD (per hanc propositionem) quod est absurdum; atqui idipsum contingit si punctum m sit infra M, ergo linea Am non est ipsius BD, VE parallela, bene vero mA, ergo (per hanc proposit.) HV est harmonice secta in V, M, K, H,

(124) *Si ex quovis puncto V, agantur duæ tangentes VA, VS, juncta AS; transibit per K, punctum medium lineæ BD, alteri VE parallelæ. Si enim punctum K per quod transit AS, non esset medium lineæ BD, foret aliud puta k, ergo [per hoc coroll. III.) ex puncto A, ducta Aks, juncta VS, erit tangens, quod est contra hypothesim, supponimus enim VS, tangentem esse.*

(125) *Hinc patet, quod si ex V, & P, ducantur tangentes VS, VA, PM, PH, junganturque lineæ MH, SA se mutuo secantes in K, erit punctum K diametri, cui ordinantur lineæ omnes alteri VP parallelæ. Nam (not. 124.] jungentes contactus AS, MH, lineam BD, bifariam secant; quare punctum K est medium lineæ BD, alteri VP, parallelæ, proindeque ad diametrum pertinet, a quo bisecatur BD, omnesque aliæ ipsis BD, VP parallelæ bifariam dividuntur.*

terminis tangentes ducantur, invicem convenient (126) (dummodo punctum K, non sit centrum Sectionis; tunc enim quælibet paria tangentium ex terminis diametrorum ductarum per centrum, parallela forent, neque invicem usquam convenirent) in eadem recta EP, ducta parallela illi rectæ BD, quæ per illud punctum K, bifariam secabitur, ex puncto concursus E tangentium ab illius extremitatibus ductarum BE, DE: nempe tam SV, AV, quam MP, HP, conveniunt ad eamdem lineam VEP, ex hac propositione.

Coroll. 4. Unde si per focum F, quævis linea trajiceretur RS, tangentes ab ejus extremitate ductæ RV, SV, convenient in V ad lineam sublimitatis EV, quæ per concursum tangentium ex terminis ordinatæ per focum ductarum, deducitur parallela ipsi ordinatæ, de qua dictum est in propositione 19, de Parabola, & in Corollario 3. prop. 29. de Ellipsi, & Hyperbola.

PROPOSITIO XXXVI.

EX foco F, conicæ Sectionis ductis ad curvam duobus ramis FA, FB, & ex ipsis punctis A, B, ductis tangentibus BD, AD, convenientibus in D, juncta DF, bifariam secabit angulum AFB, ab ipsis ramis contentum. Fig. 99. 100.

Occurrat DF, Sectioni in R, S, ac rectæ BA, quæ jungit contactus in I; ductisque tangentibus RV, SV, hæ convenient cum ipsa BA in eodem puncto V (*a*) idemque punctum V, erit ad lineam sublimitatis EV (*b*); quare ductis ad ipsam lineam sublimitatis perpendicularibus AH, BP, erit (ob triangula HVA, BVP, similia) BP ad AH; ita

(a) Cor. 1. prop 34.
(b) Cor. 4. prop. 35.

K BV

(126) *Tangentes AV, SV; MP, HP ad puncta A, S, M, H, ductæ convenient ad eamdem VEP; nam si tangens AV, ducatur, hæc cum non sit lineis VP, BD parallela, conveniet ad PV, in aliquo puncto V, quare cum ex A, ducta AKS, transeat per medium punctum* K, *etiam juncta SV, erit tangens (coroll. 11.); atque eodem modo ducta tangens MP, convenit ad VEP in P, quare cum MKH transeat per medium punctum K, ducta HP, altera tangens erit; convenient ergo tangentes AV, SP, & MP, HP, ad eandem lineam VEP.*

BV ad VA, sed quia BV, harmonice secta est in punctis B, I, A, V, (a) est BV ad VA, ut BI ad IA; ergo BI ad IA, ut BF ad FA; quæ sunt pariter, ut BP ad AH, cum sit tam BF ad BP, quam FA ad AH, in eadem ratione FN ad NE (b); itaque angulus AFB secatur bifariam a recta DF, cum basis AB, secetur in ratione laterum trianguli AFB. (c) Q. E. D.

(a) Cor.2. prop.34. (b) Cor.3. prop.29. (c) Ex secunda par.3. VI. El.

Coroll. 1. Hinc si rami ex foco sit indirectum, ut resultat per quamlibet rectam SR, per focum traductam, ductis ab ejus extremis tangentibus SV, RV, convenientibus cum linea sublimitatis in V, juncta VF, erit ipsi RS perpendicularis, quia anguli SFV, RFV, bis rectis æquantur, quorum medietas est quilibet angulus VFS, aut VFR rectus (d) uti de parabola ostensum est supra. (e)

(d) Ex hanc Proposit. (e) Cor.9. prop.19.

Fig.101. 102. *Coroll.* 2. Per quodlibet punctum A, curvæ interceptæ inter terminos R, S, rectæ per focum traductæ, ducatur alia tangens AT, occurrens tangentibus RV, SV, ad puncta G, T, junctæ ad focum rectæ GF, TF, angulum rectum GFT, comprehendent, quia angulus GFA, erit medietas anguli RFA, & angulus AFT, medietas anguli AFS, (sunt autem anguli RFA, AFS, duobus rectis æquales, & anguli GFA, AFT, eorum medietas), adeoque GFT est medietas duorum rectorum, quibus æquantur RFA, AFS.

PROPOSITIO XXXVII.

Fig.103. *Ex tangente Hyperbolæ ANR ad verticem cujusvis diametri NQ, sumantur hinc inde partes NA, NR, æquales semidiametro conjugatæ CB, sive quarum quadrata sint æqualia quartæ parti rectanguli sub transverso latere QN, & sub recto NS, tum ex centro C junctæ CA, CR, utcumque producantur, hæ ad curvam hyperbolicam semper propius accedent, quam pro quolibet intervallo P, numquam tamen cum ipsa convenient. Dicantur autem hæ rectæ assimptoti ipsius Hyperbolæ.*

Ordinata enim ad eamdem diametrum recta MKV parallela tangentis, secante dictas rectas assimptotos in D, Z, erit quadratum DK, ad quadratum CK, ut quadratum AN, quod est quarta pars rectanguli QNS, ad quadratum NC, quod pariter est quarta pars quadrati QN, adeoque (terminos quadruplicando) ut rectangulum QNS, ad quadratum QN, QN, sive (a) ut rectum latus NS ad transversum QN; quæ pariter est ratio quadrati ordinatæ MK ad rectangulum QKN (b) quare cum sit totum quadratum DK, ad totum quadratum CK, ut quadratum MK ex priori ablatum, ad rectangulum QKN, sumptum ex posteriori, residuum quoque illius ad residuum hujus, semper (c) rectangulum DMZ, ad quadratum CN, erit in eadem ratione quadrati AN ad CN (d), unde patet esse idem rectangulum DMZ, æquale quadrato AN, sive (ob AN = NR) rectangulo ANR; ergo (e) ut MZ ad NR, ita AN ad DM, estque MZ multo major secunda, ergo & tertia major est quarta; ideoque cum producta in infinitum Hyperbola semper major, ac major fiat MZ ipsa NR, etiam AN semper multo major evadet intervallo DM, quod continue minuetur in infinitum, uti crescit magis, ac magis in infinitum ipsa MZ: ita ut ratio illa AN ad DM maior fieri possit qualibet data ratione AN ad P, uti major eadem ratione potest fieri ratio MZ ad NR, quia crescere potest in infinitum tam ordinata MK hyperbolæ, quam ordinata ZK trianguli, & ipsarum quælibet, ac multo magis utriusque summa MZ, evadere potest major qualibet data, in majori recessu a vertice N ipsius hyperbolæ; Accedit ergo CA magis, ac magis ad curvam hyperbolæ NM, a qua minori semper intervallo DM, distat, quod minus esse potest quolibet dato P, nec unquam cum ipsa penitus concurret, quia semper punctum M, aliquo modo distabit a puncto D, ut esse possit rectangulum DMZ, æquale quadrato AN, (seu ut sit MZ : AN = AN : DM,) uti jam est demonstratum.

(a) 1. VI. Elem.
(b) Cor. 6. prop. 5.
[c] 6. 2. Elem.
(d) 19. V. Elem.
(e) 16. VI. Elem.

Coroll. 1. Eædem rectæ assimptoti ultra angulum C continuatæ abscindent pariter ex oppositi verticis tangente rectas QE, QX, prioribus æquales ob similitudinem triangulorum QEC, CAN, (sunt namque verticales tangentes QE, AN, parallelæ) quorum æqualia sunt latera QC, & CN (ac proinde (f) AN = QE, eodemque modo ostenditur NR = QX) unde patet ipsasmet CE, CX, evadere eodem modo assimptotos oppositæ hyperbolæ QI, cujus idem est latus transversum & latus rectum.

(f) 26. 1. Elem.

Coroll. 2. Quælibet uni assimptoto parallela BH, intra angulum ACR ducta hyperbolæ occurret, quia intervallum parallelarum idem semper manet, dum intervallum hyperbolæ ab assimptoto semper minus evadit quolibet dato.

Coroll. 3. Multo magis quælibet BC, angulum ACR, dividens Hyperbolam secabit; quippe ejus distantia ab assimptoto semper augebitur, dum Hyperbolæ distantia subinde minuitur.

*Coroll.*4. Patet æqualia esse rectangula DMZ, dmz, a portionibus quarumlibet parallelarum diametro ordinatarum per hyperbolæ curvam, & per assimptotos sectis contenta; quippe singula (etiam DVZ, duz) quadrato AN sunt æqualia.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 104. *SI qualibet recta TD hyperbolam alibi contingat, velut in V, occurrens assimptotis in T, D, erit TV, æqualis VD, & cujuslibet quadratum æquale pariter quartæ parti rectanguli sub diametro ICV, & ejus latere recto VF, contenti.*

Quando enim hoc non eveniret, sumptis hinc inde VG, VB, quarum quadrata æquarentur quartæ parti dicti rectanguli, junctæ CG, CB, essent assimptoti juxta præcedentem propositionem; Id quod est impossibile; nam si CG cadat ultra CT, ab ipsa magis, ac magis divertet in infinitum producta, adeoque non accedet curvæ hyperbolicæ, ut facit assimptotus CD, & si cadat intra angulum assimptoticum TCD, ut recta CB, hæc producta secabit ipsam Hyperbolam (a); adeoque non erunt CG, CB, assimptoti, ergo ipsæ portiones VT, VD, non vero ipsis majores, aut minores continebunt quadratum æquale quartæ parti rectanguli sub latere transverso IV, & latere recto VF contenti; unde invicem sunt æquales. Q. E. D.

(a) Ex Corollar. 3. præc.

*Coroll.*1. Ordinata pariter ad diametrum CV, recta LKO parallela tangenti TD, occurrente assimptotis in P, S, erit rectangulum PLS, aut POS, æquale pariter quadrato VT, quemadmodum simile quid demonstratum est in propositione præcedenti.

*Coroll.*2. Hinc pariter interceptæ inter curvam, & assimptotos PL, OS sunt æquales, unde quæcumque recta PS, secet Hyperbolam, & assimptotos; ejus portiones curvæ, & assimptotis interpositæ æquales evadunt; nam bifariam secta CL in K, & juncta ex centro diametro CK, occurrente hyperbolæ in V, ac per V, ducta ipsi OL parallela TVD, erit tangens in V, bifariam secta ex hac propositione; & rectangula PLS, POS, quadrato TV, aut VD, æquabuntur: unde portiones PL, OS, debent æquales esse (ob SK=KP, & OK=KL).

Co-

Coroll. 3. Constat ex dictis in hac propositione unicas esse assimptotos CT, CD, nec posse alias assimptotos eidem hyperbolæ assignari.

PROPOSITIO XXXIX.

Si qualibet QO Hyperbolas oppositas secet, occurrens assimptotis in E, Z, ducta per centrum diametro ICV, eidem QO parallela, erit rectangulum EOZ, æquale quadrato semidiametri CV. Fig. 105.

Ducatur tangens TVD, & per O, ipsi tangenti parallela ordinetur OL, eidem diametro, quæ assimptotos secet in P, S; Ratio rectanguli EOZ ad rectangulum SOP, componetur rationibus laterum EO ad OP (idest CV ad VT) & ZO ad OS (nempe CV ad VD) sed & ratio quadrati CV ad rectangulum TVD, idest ad quadratum VT ex iisdem rationibus componitur (*a*), ergo ut rectangulum EOZ ad aliud SOP, ita quadratum CV, ad quadratum VT (127) sed (*b*) rectangulum SOP æquatur quadrato VT, ergo & rectangulum EOZ quadrato CV erit æquale. Q. E. D. (a) Nota 24. (b) Prop. præced.

Corol. 1. Similiter (acta ex I, verticali tangente, & ex Q, ducta ordinata eidem diametro) ostendetur rectangulum ZQE, quadrato CI, æquari, quod CV quadrato æquale est; unde æqualia erunt rectangula EOZ, & ZQE, & rectæ OZ, QE erunt pariter æquales, quia horum rectangulorum æqualitas dat rationem laterum EO ad EQ, æqualem rationi QZ ad ZO (*c*); unde componendo OQ ad QE erit ut OQ ad ZO, quare interceptæ assimptotis, & utraque hyperbola QE, & OZ, æquantur, sicut etiam OE, & QZ, æquabuntur, sicut & rectangula QEO, QZO, æqualia erunt. (a) 16. VI. Elem.

Coroll. 2. Et quia ducta etiam qualibet alia ozeq; eidem diametro VCI parallela, erit pariter rectangulum eoz, aut zqe,

(127) *Id ipsum quoque infertur ex nota 23; nam*

$$EO : OP = CV : VT$$
$$ZO : OS = CV : VD$$

ergo $EOZ : SOP = CV^2 : TVD$, *seu* $eoz : SOP = CV^2 : VT^2$.

zqe, seu qeo, aut qzo, eidem quadrato CI, æquale; erunt ergo invicem æqualia quælibet rectangula EOZ, eoz, a portionibus rectarum æquidistantium, interceptis hyperbola utraque & assimptotis, contenta, & partes oz, qe æquales resultabunt, necnon e o, & z q.

PROPOSITIO XL.

Fig. 106. 107. *SI in eadem hyperbola, vel in oppositis duo puncta O, V, accepta fuerint, ex quibus rectæ OS, VD, invicem parallelæ ductæ fuerint, ad assimptotos terminatæ, necnon duæ aliæ OP, VT, pariter invicem parallelæ ductæ sint usque ad easdem assimptotos, erit rectangulum SOP æquale rectangulo DVT.*

(a) Cor. 2. prop. 38. & 39. Juncta enim OV, quæ assimptotis occurrat in I, L, erunt interceptæ CI, VL æquales (*a*), necnon OL, & VI, æquabuntur, ergo OL ad VL, est ut VI ad OI, sed ob similia triangula est OP ad VT, quemadmodum OL ad VL, atque VD ad OS, ut VI ad OI; ergo OP ad VT est, ut VD ad OS; quare rectangula SOP, DVT, æquantur (*b*).

(b) 16. VI. Elem. Fig. 108. *Coroll.* 1. Si per quælibet puncta Hyperbolæ V, N, ductæ sint ad assimptotos parallelæ VT, VD, & NR, NA, erit parallelogrammum NRA, æquale parallelogrammo TVD; nam quia hæc rectangula sunt æqualia, etiam æquiangula parallelogramma ob æqualem laterum reciproce comparatorum rationem, æquari debent. (128)

Coroll. 2. Unde & triangula CNR, CVT, eorum parallelogrammorum dimidia æquari debent.

Coroll. 3. Hinc semper ratio ordinatarum ad assimptotum NR, VT, alteri assimptoto æquidistantium, eadem est ac ratio distantiarum reciproce sumptarum CT, CR, ob æqualia illa rectangula, aut parallelogramma, vel triangula supra-

---

(128) *Cum sit ex hac propositione RNA = rectangulo DVT erit (per secundam partem* 16. *VI. Elem.) RN : DV = VT : NA, seu AC : CT = CD : CR, atqui angulus C parallelogrammis AR, DT, communis est, ergo (* 14. *VI. Elem.) erit parallelogrammum AR = parallelogrammo DT.*

prædictâ, quæ circa æquales angulos latera habere debent reciproce proportionalia (a). (a) 14. VI. El.

Coroll. 4. Ductis tangentibus PNM, HVG, ad assimptotos terminatis, quæ bifariam sectæ sunt in contactibus NV, (b) erunt quoque triangula CPM, CHG huic spatio assimptotico inscripta, invicem æqualia; quippe dupla parallelogrammorum (129) æqualium RNA, TVD, seu quadrupla triangulorum CNR, CVT (c). (b) Propofit. 38. (c) 34. 1. Elem.

Coroll. 5. Quadrilatera mixta RNVT, & ANVD sunt invicem æqualia, nam ob æqualitatem parallelogrammorum TVD, RNA, communi ablato CRXD, est TVXR æquale ANXD, & adjecto utrinque trilineo VXN, fit RNVT, æquale ANVZ.

Coroll. 6. Item sector Hyperbolicus CVN, æquatur cuilibet ex dictis quadrilateris NRVT, aut ANVD; nam ob triangulum RCN, æquale CTV (d), dempto utrinque triangulo CRZ (erit trapezium VTRZ = triangulo ZCN) additoque trilineo VZN resultat VCN sector æqualis ipsi RNVT, aut huic æquali ANVD. (d) Corol. 2. hujus prop.

PROPOSITIO XLI.

SI in Hyperbola NV, GH sint inter assimptotos ACE, & CT, quæ angulos ACT, TCE, sibi consequentes binis rectis æquales comprehendunt, & illas curvas secent rectæ NH, VG, uni assimptotorum ACE, parallelæ; secabuntur ab alia assimptoto CT in punctis R, T, in eadem ratione. Fig. 109.

Nam ordinatæ NR, VT, sunt u t reciprocæ distantiæ TC, CR (e); in qua pariter ratione erunt aliæ ordinatæ RH, TG, quare & permutando erit NR ad RH ut est VT, ad TG. (e) Cor. 3. præc.

 Coroll.

(129) *Quoniam triangulum PCM : NCM = PM : NM, estque PM = 2 NM, erit quoque PCM = 2 NCM. Sed (ob lineas NA, PC, parallelas) est PN : NM = CA : AM; proindeque CA = AM, seu CM = 2 CA; quare (41. 1. Elem:) CRNA = CNM; ergo triangulum PCM ostensum æquale 2 CNM, æquabitur 2 CRNA. Atque eadem ratione ostenditur triangulum CHG = 2 TVDC.*

Coroll. 1. Hinc quadrilineum RNVT, ad quadrilineum HRTG, erit semper in eadem ratione NR ad RH; eo quod omnes rectæ in utroque ordinatæ, ipsis NR, RH parallelæ, sunt in data ratione (*a*).

(a) 12. V. El.

Coroll. 2. Et junctis ad centrum C, rectis NC, VC, GC, HC, erunt pariter sectores CNV, CGH in eadem ratione, utpote dictis quadrilateris RNVT, & RHGT, æquales (*b*).

(b) Corol. 6. propos. præc.

Coroll. 3. Si ex punctis N, H agantur tangentes Hyperbolarum ad assimptotos productæ existente NH, assimptoto ACE, parallela, convenient tangentes ad idem punctum T alterius assimptoti; nam quia HE, æquatur HT, etiam CR, æquabitur RT (siquidem ob lineas EC, HR parallelas est EH : HT = CR : RT), & quia AN, æquatur NT, pariter CR eidem RT, æquatur; quare utrinque respondet eadem RT, æqualis CR; unde idem est punctum T, in quo duæ illæ tangentes conveniunt.

Coroll. 4. Et si ex eodem puncto T unius assimptoti agantur Hyperbolarum tangentes THE, TNA jungens contactus H, N, alteri assimptoto ACE parallela erit; quoniam utraque illa tangens bifariam secatur in contactibus H, N; ideoque latera TE, TA, proportionaliter secta sunt ab ipsa recta HN, quæ propterea parallela erit basi EA (*c*).

(c) 2. VI. Elem.

Coroll. 5. Ipsa triangula CAT, CTE, illis assimptoticis spatiis inscripta erunt semper in data ratione, quæ est NR, ad RH, quibus proportionantur bases AC, & CE (est namque triangulum CAT : CTE = AC: CE (*d*) = NR: RH; (*e*) Idque etiam in triangulis ad idem punctum minime concurrentibus eveniet, quia in quolibet assimptotico spatio ejusdem hyperbolæ inscripta triangula per suas tangentes, æqualia sunt (*f*).

(d) 1. VI. Elem.
(e) Corol. 2. 4. VI. Elem.
(f) Cor. 4. prop. 40.

PROPOSITIO XLII.

SI ad secundam diametrum HI, priori diametro transversæ NQ conjugatam fiunt duæ oppositæ Hyperbolæ HK, IF, quarum vicissim secunda diameter conjugata sit eadem NQ, erunt harum quatuor Sectionum communes assimptoti; vocentur autem hæ pariter Sectiones conjugatæ.

Ductis

Ductis tangentibus NT, IT, convenientibus in T; quæ erunt parallelæ ordinatis diametrorum NQ, HI; adeoque, & conjugatis semidiametris CI, CN, juncta CT erit communis assimptotus utrique hyperbolæ NV, IF, quia cum sit CNTI, parallelogrammum est NT quadratum æquale quadrato CI; seu quartæ parti rectanguli sub transverso latere QN, & ejus latere recto; & similiter tangens IT æqualis semidiametro alteri hyperbolæ conjugato CN, continet quadratum æquale quartæ parti rectanguli sub transverso latere HI, & recto sibi correspondente comprehenso; ac similiter ducta alterius oppositæ hyperbolæ NK, tangente HA, parallela ipsi IT, ac producta tangente TN, concurrente cum HA, in A, erit HANC parallelogrammum, ipsæque tangentes NA, HA, æquales erunt conjugatis semidiametris sibi oppositis CH, CN; unde & juncta AC erit hisce hyperbolis assimptotus communis (*a*), igitur ipsæ TCX, ACE, sunt communes assimptoti harum quatuor Sectionum, quæ invicem conjugatæ dicentur (130). (a) Proposit. 37.

Coroll. 1. Jungens contactus NI, cum evadat diameter parallelogrammi CNTI, bifariam secabitur ab assimptoto CT in R, quia CT, est alia diameter ejusdem parallelogrammi.

Coroll. 2. Et quia (*b*) NI, æquidistabit alteri assimptoto AE, etiam quælibet alia VF, jungens contactus aliarum tangentium PF, PV, ex eodem aliquo puncto P communis assimptoti deductarum, ipsimet AE, æquidistabit (131), & bifariam secabitur in Z, cum sint in eadem ratione NR ad RI, aut VZ ad ZF (*c*). (b) Cor. 4. proposit. præced. (c) Proposit. 41.

Coroll.

---

(130) *Quoniam AN ostensa est = HC, seu = CI, hoc est = NT; hinc sicuti NT² = NQ in suæ parametri quartam partem, erit NA² = quartæ parti rectanguli sub transverso latere QN, & ejus latere recto, quare CA, CP erunt assimptoti hyperbolæ NV (37. hujus.) Pariter cum HA æquetur CN, seu CQ, cui æquatur etiam HX, erunt HX, HA æquales; quare cum HA² = CN² sit = quartæ parti rectanguli ex transverso latere HI in suam parametrum, huic quoque rectangulo æquabitur HX²; quocirca (ob eamd. prop. 37.) erunt PCX ACE, assimptoti curvæ hyperbolicæ HK; ergo (cor. 1. prop. 37.) eædem lineæ erunt assimptoti hyperbolarum FI, QO.*

(131) *Lineam VF, assimptoto AE, esse parallelam patet; nam (prop. 38.) est PV = VL, & PF = FM, quare PV : VL = PF : FM, unde (1. VI. Elem.) erit AE, parallela VF.*

Coroll. 3. Quia etiam CP bifariam secta est in Z, ut tangens PFM, est bifariam secta in F *(a)*, erunt CF, CV, ductæ ex centro ad contactus parallelæ tangentibus PV, PF (132); adeoque erunt semidiametri conjugatæ harum hyperbolarum, quia PF æquatur CV sibi parallelæ, & PV, æquatur CF parallelæ, unde CV æquidistat ordinatis ad diametrum CF, & CF æquidistat ordinatis ad diametrum CV.

(a) Propofit 28.

Coroll. 4. Hæc parallelogramma CNTI, CVPF semper sunt æqualia, sicut æquantur triangula CNR, CVZ *(b)*, quæ sunt quartæ partes dictorum parallelogrammorum.

(b) Cor 2. prop 40.

Coroll. 5. Et quodvis parallelogrammum RLSM, iisdem hyperbolis conjugatis inscriptum, contentum ab ipsarum tangentibus per terminos diametrorum conjugatarum ductis, erit æquale cuilibet alteri inscripto parallelogrammo ATEX, ab aliis tangentibus per terminos aliorum diametrorum conjugatarum ductis, comprehenso; hæc enim parallelogramma erunt quadrupla æqualium triangulorum CLR, CAT *(c)*, sive æqualium parallelogrammorum CVRF, CNTI *(d)*.

(c) Cor. 4. prop. 40.
[d] Cor. 4. hujus.

Coroll. 6. Junctis quoque contactibus ad terminos conjugatarum diametrorum positis fiet parallelogrammum KVFG, æquale alteri HNIQ, sunt enim hæc parallelogramma medietates aliorum RLTM, ATEX, invicem æqualium; quippe & triangula CNI, CVF quartæ partes dictorum parallelogrammorum KVFG, HNIQ, medietates sunt parallelogrammorum CNTI, CVRF, quæ sunt aliorum RLSM, ATEX pariter quadrantes (133.)

PRO-

(132) *Quia CZ = ZP, & VZ = ZF (cor. 2.) erit VZ : ZC = FZ : ZP. Ergo (6. VI. Elem.) triangula CVZ, FZP; similia erunt; quare anguli VCZ, ZPF, & CVZ, PFZ, æquantur, ergo (28. 1. El.) CF, CV, sunt parallela PV, PF.*

(133) *Quod KVFH, HNIQ, sint parallelogramma ex eo colligitur, quod VF, NI sint assimptoto AE, parallela (coroll. 4. prop. 41.) cui quoque ob idem corollarium æquidistantes sunt jungentes contactus HQ, KG; quare VF, KG, & HQ, NI, sunt parallelæ, atque eodem modo ostenduntur KV, GF, & HN, QI, esse sibi invicem æquidistantes; ergo KVFG, HNIQ, sunt parallelogramma.*

PROPOSITIO XLIII.

Etiam in Ellipsi, ut in Hyperbolis conjugatis parallelogramma RLSM, ATEX, ex tangentibus ad terminos duarum diametrorum conjugatarum GV, KF, aut NQ, HI, ductis, comprehensa, semper aequalia erunt; sicut etiam sunt aequalia parallelogramma eidem Ellipsi inscripta KVFG, HNIQ, ex rectis jungentibus terminos binarum diametrorum conjugatarum. Fig. 112.

Jungantur duo puncta V, I, & ad diametrum NQ, ordinata per V, recta VP, secante tangentem IT in Z; tum per I ad diametrum FK ordinata IB, quae tangenti VR, concurrat in O, erit utique parallelogrammum CVOB, aequale alteri CPZI; quoniam utrumque duplum est trianguli ipsis inscripti CVI (*a*): at concurrente semidiametro CF, cum tangente IE in D, & semidiametro CN cum tangente VL in Y, atque utraque tangente ID, VL in Æ, erit parallelogrammum DCYÆ ad CFRV, ut hoc ipsum ad CVOB, cum sint aeque alta, & eorum bases CD, CF, CB, continue proportionales (*b*); & idem DCYE ad CNTI; ut hoc ipsum ad CPZI, ob proportionales bases CY, CN, CP (*c*), & eamdem horum parallelogrammorum altitudinem, ergo inter DCYÆ, & CVOB, vel huic aequale CPZI, tam est medium proportionale CFRV, quam CNTI; ergo haec pariter sunt aequalia, sunt autem quartae partes parallelogrammorum RLSM, & ATEX; ergo haec pariter sunt aequalia; & horum dimidia sunt inscripta reliqua KVFG, & HNIQ, (ut triangulum CFV est dimidium CFRV (*d*), & triangulum CNI dimidium est CNTI, quae triangula sunt pariter quartae partes dictorum parallelogrammorum Ellipsi inscriptorum) ergo haec pariter parallelogramma inscripta sunt aequalia, uti etiam aequantur alia circumscripta. Q. E. D.

(a) 41. 1. Elem.
(b) Cor. II. prop. 9.
(c) Per id. Coroll.
(d) 34. 1. Elem.

Coroll. 1. Patet FC, esse divisam in B, proportionaliter ac NC in P; quia DCYÆ, ad CVOB, est ut idem illud ad CPZI, huic aequale (sed DCYÆ : CVOB = DC : CB; (*e*) & DCYÆ : CPZI = YC : CP, ob eamdem rationem) ergo ratio DC ad CB est eadem, ac YC ad CP: sed illa est dupla rationis FC ad CB, haec autem dupla rationis NC ad

(e) 1. VI. Elem.

ad CP (ob DC, CF, CB, & CP, CN, CI, continue proportionales) ergo hæ quoque rationes FC ad CB, & NC ad CP sunt æquales; Unde quoties conjugatæ sunt diametri, FK, VG, & pariter binæ aliæ conjugatæ NQ, IH, ex termino V diametri VG, ducta ordinata ad diametrum NQ, & ex termino I diametri IH, ordinata IB ad diametrum FK, secabuntur proportionaliter diametri NQ, & FK ab ipsis ordinatis; nam (cum sit FC : CP = NC : CP), NQ, dupla NC, erit ad CP, ut FK dupla FC ad CB, sive ad residuum PN, ut hæc ad residuum BF (134.)

Coroll. 2. Quin etiam si ex utriusque diametri conjugati terminis NI, ordinentur super alias conjugatas diametros Nh, IB, erunt hæ diametri VG, FK, in punctis h, B, proportionaliter sectæ; erit enim VC ad Ch, ut YC ad CN, quia ordinata Nh, est parallela tangenti YV; adeoque ut CN ad CP (*a*), sive ut CF ad CB (*b*), adeoque VC ad Ch, ut FC ad CB, & VC ad reliquam Vh, ut ipsa CF ad residuam FB (*c*), ac duplicatis antecedentibus VG ad Vh, ut KF ad FB; uti etiam dividendo Gh ad Vh, erit ut KB ad BF.

(a) Cor. II prop. 9.
(b) Corol. præced.
(c) 19. V. Elem.

Coroll. 3. Erunt ergo rectangula GhV, & KBF ut quadrata CV, & CF, seu GV & KF (135), aut ut latus transversum GV, ad suum latus rectum (*d*), sive ut rectangulum GhV ad quadratum Nh (*e*), vel ut quadratum IB ad rectangulum HBF (136), & ideo quadratum Nh erit æquale KBF, rectangulo, quadratum vero IB, æquabitur rectangulo GhV.

(d) Post Corolar. 2. prop 12.
(e) Cor. 2. 13. prop.

PRO-

(134) *Quoniam* $QN : KF = CN, CF$, *seu* $QN : CN = KF : CF$, *&* $QN : CP = KF : CB$, *erit* [19. *V. Elem.*] $QN : PN = = KF : BF$.

(135) *Ex corollario præcedentis est* $Gh : hV = KB : BF$ *seu* $hV : BF = Gh : KB$; *est autem ex eodem corollario* $VC : Vh = FC : FB$, *seu* $VC : CF = Vh : FB$, *ergo*

est $VC : CF = Vh : FB$,

& $VC : CF = hG : KB$,

ergo $VC^2 : CF^2 = GhV : KBF$.

[136] GhV *ad* $Nh^2 = GV$ *ad suam parametrum, seu* (*coroll.* 2. 13.) *ut parameter diametri* KF, *ad eamdem* KF *diametrum, seu* (*coroll.* 6. *prop.* 6.) $= IB^2 : KBF$, *erit itaque* $GhV : Nh^2 = IB^2 : KBF$.

PROPOSITIO XLIV.

Quadrata duarum quarumlibet diametrorum conjugatarum IH, NQ, æquantur quadratis axium KF, GV. Fig. 112.

Ducta enim ex I, ordinata IB ad KF, & ex N, ordinata Nh ad GV, erit quadratum CN, æquale quadratis Nh, Ch, quadratum autem CI, æquale quadratis CB, IB, sed Nh, quadratum æquatur rectangulo KBF, & IB, quadratum æquale est GhV (*a*), ergo duo quadrata CN, CI, æquantur rectangulo KBF, cum quadrato CB, & rectangulo GhV, cum quadrato Ch; adeoque sunt æqualia binis quadratis CF, & CV (*b*), & assumptis eorum quadruplis, quadrata NQ, IH æquabuntur quadratis KF, & GV. Q. E. D. (a) Cor. 3. proposit. praeced. (b) 5. 2. Elem.

Corol. 1. Hinc quadrata duarum diametrorum conjugatarum æquantur quadratis aliarum quarumlibet diametrorum pariter conjugatarum; nam quælibet harum quadratorum paria æquantur quadratis utriusque axis.

Coroll. 2. Quadrata etiam GF, & FV, erunt æqualia quadratis QI, & IN; nam illa æquantur duplo quadrato CF, & CV (*c*), hæc autem duplo quadrato IC, & CN; sed quadrata CF, & CV, æquantur quadratis CI, & CN, (*d*) ergo etiam GF, & FV, quadrata sunt æqualia quadratis QI, IN. (c) Ex schol. gen. num. V. (d) Ex hac proposit.

PROPOSITIO XLV.

At in Hyperbolis quadrata diametrorum conjugatarum IH, NQ (si fuerint inæqualia) eadem quantitate inter se differunt, ac bina quælibet aliarum diametrorum conjugatorum KF, GV, quadrata. Fig. 113.

Ductis

Ductis enim ex N, & V, inter assimptotos tangentibus ANT, LVR, quæ ipsis secundariis diametris EH, KF, æquabuntur; nam NA, æquabitur semidiametro CH, & VL semidiametro CK (a), & actis in assimptoto CA, perpendicularibus NM, TB, atque VE, RD, patet fore AM, æqualem MB, ut AN, æquatur NT; unde differentia quadratorum CN, AN, quæ est eadem ac differentia quadratorum CM, MA (quia CN quadratum æquatur CM, & MN quadratis (b), & AN quadratum æquatur quadratis AM, MN; unde ablato communi MN quadrato, remanet illorum quadratorum differentia eadem quæ CM, & AM) erit eadem, ac differentia quadratorum CM, MB, quæ eadem est, ac rectangulum ACB (c). Similiter differentia quadratorum CV, & VL eadem erit ac differentia quadrati EC a quadrato EL (137), sive ab æquali ED, cujusmodi est rectangulum LCD; sed rectangula ACB, LCD, sunt æqualia, quippe CB ad CD est, ut CT ad CR, adeoque ut LC ad CA (ob æqualitatem triangulorum CLR, CAT, (d) quibus inesse debent, circa communem angulum C, latera reciproce proportionalia (e) ergo eadem est differentia quadratorum NC, NA, sive CH, & quadratorum CV, VL, sive CK; unde & eorum quadruplis assumptis, erit eadem differentia quadratorum QN, HI, ac quadratorum VG, KF. Q. E. D.

(a) Corollar. III. prop. 42.

(b) 47. I. Elem.

(c) 6. 2. Elem.

(d) Cor. 4. prop 40.

(e) 15. VI. Elem.

PROPOSITIO XLVI.

Sumptis in Hyperbolæ assimptoto distantiis a centro CL, CO, CA, continue proportionalibus, & hinc ductis LP, OK, AI, alteri assimptoto parallelis Hyperbolam in punctis P, K, I, secantibus, erunt spatia Hyperbólica ipsis intercepta LPKO, OKIA, invicem æqualia:

Com-

(137) *Quoniam VE, RE sunt parallelæ, erit RV: VL = DE: EL, est autem RV = VL, ergo & DE = EL. Porro* $CV^2 = VE^2 + CE^2$, & $VL^2 = VE^2 + EL^2$; *quare* $CV^2 - VL^2 = VE^2 + CE^2 - VE^2 - EL^2 = CE^2 - EL^2$, *seu* = DCL [6. 2. *Elem.*)

Completis parallelogrammis CLPR, COKS, CAIM, productisque AI, RP, convenientibus in T, quæ resultant parallelogramma CLEM, COKS, CATR, erunt similia, nam ut AC ad CO, ita OK ad AI (*a*), sed AC ad CO, ut CO ad CL (*b*), ergo CO ad CL est ut OK ad AI, sive ut CS ad CM, ergo CLEM, & COKS, sunt similia (*c*). Pariter LP, ad OK, sive CR ad CS, ut OC ad CL, hoc est (*d*) ut CA ad CO, ergo etiam CATR simile est eidem COKS, adeoque & alteri CLEM, quare diameter CF per reliquos angulos E, K, transit (*e*), & juncta PI, erit quoque diameter parallelogrammi PEIT, ab ipsa CET, bifariam secta in X; unde erit PI, ordinata hyperbolæ ad diametrum EKX, transeuntem per verticem K, segmenti hyperbolici PIK; Ab æqualibus ergo triangulis CPX, CXI (*f*) ablatis semihyperbolis æqualibus PKX, IKX, remanebunt æquales sectores CPK, CIK, sed ipsis æquantur spatia hyperbolica LPKO, OKIA, (*g*) ergo hæc quoque resultant æqualia. Q. E. D.

(a) Corol. 3. proposit. 4.
(b) Per hypot
(c) Per def. 1. VI. Elem.
[d] Per hypoth.
(e) 26. VI. Elem.
(f) 1. VI. Elem.
(g) Cor. 5. 4°.

Fig 115.

Coroll. 1. Si pariter sumantur in assimptoto CA ad CO, ut quævis alia CD ad CL, ductis parallelis alteri assimptoto AI, CK, & DQ, LP, resultabunt æqualia spatia hyperbolica AIKO, & QDLP; sumpta enim CN, media inter extremas CA, CL, adeoque & inter medias CO, CD, & ordinata NV, erit spatium IANV, æquale VNLP (*h*), necnon KONV æquale VNDQ, ergo & reliquum AIKO æquabitur QDLP.

[h] Per hanc proposit.

Coroll. 2. Et si sumptæ fuerint quælibet distantiæ continue proportionales CA, CO, CN, CD, CL, ordinatis correspondentibus resultabunt æqualia spatia hyperbolica iis interposita IAOK, KONV, VNDQ, QDLP &c.

Coroll. 3. Quoniam si duplicata sit ratio LC ad CN, rationis DC ad CN, erit spatium VNLP duplum VNDQ, & si esset triplicata prima ratio secundæ, esset primum spatium triplum secundi, totidem enim æqualia spatia contineret, quot æqualibus rationibus ejus ratio componeretur (138): hinc quodlibet spatium KOLP est ad aliud spatium QDLP, ut ratio

---

(138) *Si LC : CN est in ratione duplicata DC : CN, erunt LC, DC, CN, continue proportionales, quare VNDQ = QDLP; ac utrinque addito VNDQ, erit 2VNDQ = VLNP. Si vero sit LC ad CN in ratione triplicata DC ad CN; esto altera CF, quæ cum CD, duas medias propor-*

ratio LC ad CO est ad rationem LC ad CD, juxta quantitatem logarithmicam proportionum (139).

Coroll. 4. Quæ dicta sunt de iis spatiis valent etiam de sectoribus hyperbolicis ICK, QCP, VCQ &c. quæ correspondentibus spatiis assimptoto adjacentibus sunt semper æqualia (a).

(a) Cor. 6. prop. 40.

Coroll. 5. Patet autem, totum spatium inter curvam hyperbolicam, & ejus assimptotos interjectum, & in infinitum productum esse infinitæ magnitudinis, quia cum possint rationes CA, CO, CN &c. in infinitum continuari, infinita spatia primo IAOK æqualia correspondebunt hisce infinitis rationibus, in eodem assimptoti spatio contenta.

PROPOSITIO XLVII.

Fig. 116. *SI latere recto NR, æquali transverso NQ hyperbolæ æquilateræ NM, ad eundem axem parabola NB describatur, ducta quavis recta BD, axi parallela, conveniente cum axe secundario hyperbolæ CE in D, & cum hyperbola in M, erit hyperbolicum spatium CNMD, æquale rectangulo ex semiaxe transverso CN in curvæ parabolicæ portionem NB, vertici, & eidem rectæ BD, interpositam.*

Ordinata enim MK ad hyperbolam, & BA ad parabolam, quam tangat BG, eique perpendicularis ducatur BP, juncta DN, erit ipsi BP æqualis; nam subnormalis AP, æqua-

---

tionales constituant inter datas LC, CN, tum ob LC : CF = CF : CD, erit QDFG = GFLP; & ob CF : CD = CD : CN, erit VNDQ = QDFG, unde VNDQ = QDFG = GFLP, & VNLP = 3 VNDQ; Si tandem ratio LC: CN, sit quadruplicata rationis DC : CN, tum erit VNLP = 4 VNDQ.

(139) *Sit ratio LC : CO dupla rationis LC : CD, erunt LC, CD, CO, continue proportionales, quare KODQ = QDLP; & KOLP = 2 QDLP; Si LC : CO sit tripla rationis LC : CD erit (nota 138) KOLP = 3 QDLP, & si quadrupla sit, erit KOLP = 4 QDLP; ergo ratio LC : CO, est ad rationem LC : CD =.*

æquatur NC, cum debeat esse medietas lateris recti (NR (a) cui æquatur transversum NQ per hypothesim) & AB est æqualis CD (angulique recti PAB, NCD, æquantur) ergo (b) basis BP trianguli rectanguli BAP, æquatur basi DN alterius trianguli DCN, sed ipsa DN, æquatur DM; quippe rectangulum QKN est æquale quadrato KM, (ut diameter transversa QN, æquatur parametro NR, seu quadrato CD, ex juncto quadrato CN, quadratum CK (c), seu DM, erit æquale DN quadrato (d); quare etiam BP æquabitur DM. Ac sumpto in tangente BG puncto I, infinite proximo ipsi B, ductaque HIF parallela BD; quoniam ob triangulorum IBH, BAP, similitudinem (148) est IB ad BH, ut BP ad PA, sive ut DM ad CN, erit rectangulum EDM æquale CN in ipsam IB, quæ ob infinitam proximitatem, eadem est, ac portio infinite parva curvæ parabolicæ, uti rectangulum EDMO, ob rectam OE, infinite proximam DM, idem fere est, ac spatium EDMF hyperbolicum, a quo differt spatio FOM, infinities minori; idque cum semper eveniat, patet fore rectangulum ex CN, in totam curvam parabolicam NB, æquale spatio hyperbolico CDMN ipsi correspondenti. Q. E. D.

(a) Corollar. 16. prop. 9.
(b) 4. I. Elem.
(c) 6. VI. Elem.
(d) 47. I. El.

Corollarium.

Ex quo DN, ostensa est æquari DM, patet facilis modus describendi Hyperbolam æquilateram, inclinatis recto angulo NCD, innumeris rectis NE, ND, mox ductis ipsi CN parallelis EF, DM, quæ dictis inclinatis NE, ND, sint æquales; nam puncta N, F, M, erunt ad curvam hyperbolicam æquilateram.

L PRO-

(140) *Cum angulus IHB, sit rectus, erit angulus HIB + ang. IBH = angulo recto; est autem angulus PBO rectus, ergo angulus HIB + angulus IBH = angulo PBO = angulo PBA + angulo IBH; quare angulus HIB = angulo PBA, unde cum anguli H, & A, sint recti, erunt triangula HIB, PBA, similia.*

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 117. 118.

SI eodem axe transverso NQ, *& alio latere recto* NG, *describatur hyperbola NABK, sumpta media proportionali* NT *inter hoc latus rectum & transversum, sive rectum* NR, *hyperbolæ æquilateræ NFM, erit spatium* NBK, *ad NMK, ut NG ad NT.*

Ordinetur quævis alia AH, secans æquilateram hyperbolam in F; erit quadratum BK, ad rectangulum QKN, sive ad quadratum KM hyperbolæ æquilateræ, quod illi æquatur, ut GN ad NQ, sive ad NR (*a*); ut autem GN, ad NR, ita quadratum GN ad quadratum NT mediæ proportionalis inter illas, erit ergo BK ad MK, ut GN ad NT; Similiter autem erit AH ad HF, ut GN ad NT, ergo (*b*) omnes lineæ spatii hyperbolici NBK ad omnes alterius NMK, adeoque & spatium descriptæ hyperbolæ ad illud hyperbolæ æquilateræ, est ut latus rectum GN primæ ad NT mediam proportionalem inter ipsam GN, & transversum NQ, aut rectum alterius NR; Q. E. D.

(a) Cor. 6. propos. 5.

(b) 12. V. Elem.

PROPOSITIO XLIX.

Fig. 119.

SPatium Parabolæ CAK æquatur duabus tertiis parallelogrammi ipsi circumscripti IHCK.

Ordinetur DB ad diametrum AE, & per B, ducta FBL, diametro parallela, jungatur AC, secans DB in G, & LF in M, ex revolutione parallelogrammi AHCE, & trianguli ACH circa AH, fiet cylindrus triplus coni (*c*), & cum sit circulus radii LF, sive HC ad circulum radii ML, ut quadratum illius ad quadratum hujus (*d*), sive ut quadratum AH ad quadratum AL, nempe ut quadratum EC ad quadratum DB, scilicet ut recta EA ad abscissam AD (*e*), sive ut FL ad LB, ideo omnes æquales circuli illius cylindri, erunt ad omnes circulos inscripti coni, ut omnes æquales lineæ parallelogrammi, ad omnes lineas trilinei parabolici ABCH

(c) 10. XII. El.

(d) 2. XII Elem.

(e) Ex propos. 4.

ABCH (seu cylindrus ex parallelogrammo AC, ad conum ex triangulo ACH, ut parallelogrammum AC, ad trilineum parabolicum ABCH) quare ut cylindrus est triplus coni, ita parallelogrammum AHCE triplum est trilinei ABCH, adeoque reliquum parabolicum spatium ABCE, æquatur duabus tertiis partibus dicti parallelogrammi AECH & duplicando utrumque spatium, Parabola integra CAK est æqualis duabus tertiis circumscripti parallelogrammi IHCK. Q. E. D.

Coroll. 1. Hinc patet esse parabolam sesquitertiam trianguli inscripti (seu ut 4. ad 3.); cum enim sit parabola ad parallelogrammum ut 2. ad 3., & parallelogrammum ad triangulum ut 2. ad 1., erit parabola ad triangulum in ratione composita ex 2. ad 3., & 2. ad 3., & 2. ad 1. adeoque ut 4. ad 3. (141)

Coroll. 2. Parabola ABCE, ad partem ABD, sectam ordinata BD, est ut cubus EC ad cubum BD; nam quia etiam ABD æquatur duabus tertiis parallelogrammi ADBL, est ABCE ad ABD, ut AECH ad ADBL, scilicet in ratione composita ex ratione basium EC; DB, & altitudinum EA, DA, quæ duplicata est illius cum sit ut quadratum EC, ad DB, quadratum, quare erunt hæc spatia in ratione triplicata ordinatarum EC, DB, adeoque ut cubi earumdem.

PROPOSITIO L.

Circulus diametri AP, æquatur triangulo rectangulo CAB, cujus altitudo radius CA, basis autem AB sit æqualis circumferentiæ PA. Fig 120.

Nam per quodlibet punctum radii D, ducta concentrica peripheria DF, & in triangulo recta DE basi parallela, erit AB ad DE, ut peripheria PA ad peripheriam FD (*a*), cum tam hæ, quam illæ sint ut AC ad CD; quare ut AB æquatur

[a] 7. Theorem. Archimedis.

(141) *ABCE : AECH* $=$ 2 : 3 (*per hanc propos.*)
AECH : AEC $=$ 2 : 1. [34. 1. *Elem.*)
Ergo (*nota* 23.) *ABCE* $\times$ *AECH : AEC* $\times$ *AECH* $=$ 2 $\times$ 2 : 1 $\times$ 3 *seu dividendo utrumque priorem terminum per idem AECH erit ABCE : AEC* $=$ 2 $\times$ 2 : 1 $\times$ 3 $=$ 4 : 3.

tur peripheriæ PA, ita DE, æquatur alteri peripheriæ FD, & hoc ubique accidet, omnes ergo lineæ trianguli CAB, æquantur omnibus peripheriis concentricis ipsius circuli, ergo est triangulum circulo æquale. Q. E. D.

Corollarium.

Hinc circulus idem æquabitur rectangulo ex radio in dimidiam circumferentiam, vel ex tota circumferentia in dimidium radii, seu quartam partem diametri, unde quia ex calculo Archimedæo est circumferentia ad diametrum, ut ferme 22. ad 7., erit circulus ad quadratum diametri ut 38. cum dimidio ad 49. sive ut 77. ad 98., hoc est ut 11. ad 14. (142)

PROPOSITIO LI.

Fig. 121. *Ellipsis NEQ, est ad circulum super axe majori NQ, descriptum, ut minor axis ad majorem.*

Ordinata per centrum CE, quæ est semiaxis minor Ellipsis, & producta ad circulum in B, cum qualibet alia ordinata KM, pertingente ad circulum in D, ut rectangulum QKN ad QCN, ita erit quadratum MK ad quadratum EC, & quadratum DK priori rectangulo QKN æquale ad BC quadratum æquale alteri QCN (seu $MK^2 : EC^2 = DK^2 : BC^2$, hoc est $MK : EC = DK : BC$), ergo omnes lineæ Ellipsis ad omnes lineas circuli sunt, ut EC ad CB, adeoque spatium totius Ellipsis ad integrum circulum, est ut semiaxis minor EC, ad radium CB, seu CQ, semiaxem majorem, adeoque ut axis minor ad majorem.

Corol-

---

(142) *Existente diametro* $= 7$. *erit fermè peripheria* $= 22$; *quare cum circulus æquetur rectangulo ex peripheria in quartam diametri partem, erit* $=$ *rectangulo* $22 \times \frac{7}{4} = \frac{154}{4} = \frac{77}{2} = 38\frac{1}{2}$. *Porro quadratum diametri* $= 49 = \frac{98}{2}$ *ergo circulus ad quadratum diametri* $= \frac{77}{2} : \frac{98}{2} = 77 : 98$; *seu utrumque rationis terminum per 7 dividendo* $= 11 : 14$.

Corollarium.

Ductis ex centro rectis CM, CD, erit pariter sector Ellipticus CMQ ad sectorem circularem CDQ in eadem ratione minoris axis ad majorem; nam segmentum MKQ ad segmentum DKQ, & triangulum CMK ad CDK sunt ut MK ad DK, adeoque ut EC ad BC, seu CQ; (quare CMQ : CDQ = EC : CQ. (*a*) (a) 12. V. Elem.

PROPOSITIO LII.

SI qualibet sectio Conica AEB circa suum axem ED rotetur, cujus tangentes ex terminis basis ductæ AF, BH cum verticali tangente EF conveniant in F, H, junctis ad medium basis D rectis FD, HD, erit solidum conoidale ex rotatione DEB genitum æquale solido, ex trianguli DHB rotatione circa eumdem axem facta, prodeunti: solidum autem ex trilinei ENBH revolutione circa ipsum axem æquatur cono, ex trianguli EDH revolutione. Fig. 112.

Ducta enim ubilibet basi, & tangenti verticali parallela LK, secante axem in I, tangentes in L, K, curvam in M, N, rectas FD, HD in O, P, erit rectangulum MKN ad quadratum KB, ut quadratum EH ad HB quadratum (*b*), & permutando rectangulum MKN ad quadratum EH, ut quadratum KB ad quadratum HB, sive ut DI quadratum ad quadratum DE, vel ut quadratum IP ad quadratum EH (est itaque MKN : $EH^2 = IP^2 : EH^2$); quare IP quadratum æquatur rectangulo MKN, scilicet differentiæ quadratorum IK, IN (*c*); unde & circulus radio IP descriptus, erit æqualis differentiæ circulorum a radiis IK, IN descriptorum (143), sive (b) Propofit. 16. (c) 6. II. Elem.

(143) *Circulus radii IK ad circulum radii IN, descriptus est ut IK^2 ad IN^2 (2. XII. Elem.) quare circulus radii IK minus circulus IN, est ad circulum $IN = IK^2 - IN^2 : IN^2$, seu annulus ex NK : cir. ex $IN = PI^2 : IN^2$ = circulus radii PI ad circulum radii IN; ergo circulus ex IP = annulo ex NK.*

sive armillæ circulari, quæ in revolutione trilinei ENBH circa axem ED gignitur a recta NK, & hoc semper eveniet; quare conus a triangulo EDH circa ED revoluto descriptus, cujus sectiones sunt circuli radiorum IP, æquabitur solido ex revolutione trilinei ENBH circa eumdem axem, cujus sectiones sunt armillæ per rectas NK descriptæ; sed hoc solidum ex trilineo ENBH, cum solido conoidali ex revolutione conicæ sectionis ENBD circa ED, æquatur solidis ex triangulo EDH, & ex triangulo DHB circa eumdem axem revolutis; ergo ut solidum ex trilineo ENBH æquatur cono ex triangulo EDH, etiam reliquum solidum conoidale ex revolutione ENBD æquatur residuo solido genito ex trianguli DHB revolutione circa eumdem axem. Q. E. D. (144)

Coroll. 1. Productis tangentibus collateralibus AF, BH, quæ cum axe conveniant in G, & in basis secta DS, cujus quadratum æquet differentiam quadrati AD ab FE quadrato, juncta GS, erit conoides ex revolutione ENBD circa axem ED, æqualis cono ex rotatione trianguli SGD circa GD; nam conus ex revolutione trianguli ADG est triens producti ex circulo radii DA in DG (145), & conus ex triangulo FEG cum cono ex triangulo FED, est triens producti ex circulo radii EF in EG + ED, idest in eamdem DG (seu acta FQ ipsi DE parallela, est triens cylindri, cujus basis est circulus radii DQ, & altitudo DG) ergo excessus coni ex ADG supra conos ex FEG, & FED, hoc est solidum ex revolutione trianguli AFD, seu DHB circa ED, nempe conois ex rotatione ENDB, æquabitur trienti producti ab excessu circuli DA radio descripti supra circulum radii EF in eamdem altitudinem

---

An Fig. 13 (144) *Id ipsum & in segmento sphærico AMEB contingat necesse est; nam* $BK^2 = MKN$ *(36 III. Elem.), &* $HE^2 = HB^2$ *(cor. 2. 36. III. Elem.); quare* $MKN : HE^2 = BK^2 : BH^2 = DP^2 : DH^2 = IP^2 : EH^2$; *ergo* $MKN : HE^2 = IP^2 : EH^2$, *est itaque* $MKN = IP^2$; *atque inde superiori repetita demonstratione id ipsum in segmento sphærico demonstrabitur, quod in solidis conoidalibus ostensum fuit.*

(145) *Productum ex circulo radii DA in DG, est par cylindro, cujus basis est circulus radii DA, altitudo vero DG (schol. prop. XV. lib. XII. Elem.) atque cylindri triens est conus ex revolutione trianguli ADG (10. lib. XII. Elem.); quare conus ex triangulo ADG est triens producti ex circulo radii DA in DG.*

dinem DG (146); quare cum sit quadratum DS differentia quadratorum DA, EF, etiam circulus radii DS est excessus circuli DA supra circulum EF; ideoque conus a triangulo SGD genitus æquatur ipsi conoidi.

Coroll. 2. Si curva AENB sit parabola, erit conoides ab ipsa procedens æqualis triplo solidi ex revolutione trianguli GFD circa ipsum GD; quia enim subtangens DG est dupla GE (*a*) est AD dupla FE, & illius quadratum hujus quadruplum; unde circulus radii DS erit triplus circuli radii EF (147), adeoque conus ex triangulo SGD, triplo major erit solido ex rotatione GFD, qui æquatur cono ex circulo radii EF in ipsam altitudinem GD. (*b*)

(a) Cor. 6. prop. 9.

[b] 2. lib. XII. El.

---

(146) *conus ex ADG = $\frac{1}{3}$ cylindri, cujus altitudo DG, basis vero circulus radii AD. Pariter coni ex GFE, DFE = $\frac{1}{3}$ cylindri, cujus basis circulus radii FE, seu DQ, altitudo autem DG; ergo conus ex ADG, — con. ex GFE, DFE, hoc est conois ex ENDB = $\frac{1}{3}$ cylindri, cujus basis circulus radii DA, altitudo DG — $\frac{1}{3}$ cylindri, cujus altitudo eadem DG, basis vero circulus radii DQ, seu = trienti excessus cylindri ex GDA supra cylindrum ex GDQ; est autem cylindrus ex ADG — cylind. ex GDQ = facto ex differentia circulorum radiis DA, DQ descriptorum, in altitudinem DG, seu = facto ex circulo radii DQ in eamdem altitudinem DG; ergo conois ex ENDB = $\frac{1}{3}$ ejusdem facti, erit = cono ex revolutione trianguli SGD* (10. *lib.* 3. *XII. Elem.*)

(147) *$DA^2 = 4EF^2$, ergo & circulus radii DA = quadruplo circuli radii EF, quare circulus radii DA — circulus radii FE = triplo circuli radii EF, est autem circulus radio DS, descriptus differentia circuli radii DA ab circulo radii FE, ergo circulus radii DS = triplo circuli radii EF.*

(148) *Sunto quotvis analogiæ A : B = C : D : A : F = C : E, A : H = C : I, quarum antecedentia semper æquentur, erunt antecedentium, & consequentium summæ proportionales; nam permutando erit*

$$A : C = B : D$$
$$A : C = F : E$$
$$A : C = H : I.$$

ergo (12. *V. El.*) *erit $A : C = B + F + H : D + E + I$; hoc est $3A : 3C = B + F + H : D + E + I$; seu*

$$3A : B + F + H = 3C : D + E + I.$$

Fig. 123. *Coroll.* 3. Quælibet conois est ad conum inscriptum à triangulo DEB circa axem ED revoluto genitum, ut summa basis BD, & verticalis tangentis EH ad ipsam DB; nam radio DB circulo BVA descripto, & ducta HV axi parallela secante basim in T, circulum in V, & junctæ DV perpendiculari TI, erit TV quadratum excessus quadrati DV, supra quadratum TI *(a)*, seu differentia quadratorum DB, EH; quare cum sit conois æqualis cono *(b)*, cujus basis circulus radii TV, & altitudo DG, erit ad conum inscriptum radii DB, & altitudinis DE in ratione composita *(c)* quadrati TV ad quadratum DB, seu DV, idest IV ad VD *(d)*, & ex GD ad DE, quæ est eadem GB ad BH, seu DB, aut DV ad TB (ob DV = DB, & GB : BH = DB : BT]; ergo conois ad inscriptum conum est ut IV ad BT (ratio enim composita ex rationibus IV ad VD, & VD ad TI, est ratio IV ad BT *(e)*); sed in hac ratione est quoque AT ad DV; nam rectangula IVD, ATB sunt æqualia, eo quod quadrato TV æquantur *(f)*; ergo ratio conoidis ad inscriptum conum est eadem, quæ AT ad DV, idest DB plus EH ad DB (hoc itidem corollarium segmento sphærico applicari potest, ut liquet ex dictis).

(a) 47. I. Elem. (b) Ex Coroll. 1. hujus. (c) Schol. ad prop. 15. XII. El. (d) 8. VI. Elem. (e) not. 141. (f) Cor. 2. Proposit 4 VI. Elem. & cor. pr. 17. VI. El.

Coroll. 4. Unde pariter conois ad inscriptum conum, erit ut DG plus GE ad ipsam DG (nam DG : GE = DB : EH, & DG + GE : DG = DB + EH : DB), idest producto axe ad R, ut sit GR æqualis GE, erit ratio conoidis ad conum inscriptum, ut DR ad DG.

Coroll. 5. Hinc conoidis parabolica erit sesquialtera coni inscripti, quia DR erit tripla DE, cujus dupla est DG *(g)*; unde DR ad DG est ut 3 ad 2; & quia cylindrus conoidi circumscriptus, esset triplus inscripti coni *(h)* foret is duplus conoidis parabolicæ sibi inscriptæ, quippe cum sit cylindrus ad conum, ut 6 ad 2, & conus ad conoidem, ut 2 ad 3, erit (ex æquo) cylindrus ad conoidem, ut 6 ad 3, idest duplus (conoidis).

(g) Cor. 6. 9. hujus. (h) 10. XII Elem.

Fig. 124. *Coroll.* 6. Si curva AEB sit semicirculus, aut semiellipsis, quoniam laterales tangentes AF, BH ex terminis alterius axis AB ductæ, sunt parallelæ axi ED, erit tangens EH æqualis DB; ergo DB plus EH est dupla DB; adeoque hemisphærium, sive hemisphærois elliptica dupla erit inscripti coni *(i)* cylindrus autem circumscriptus hemisphærio, aut hemisphæroidi, erit ejus sesquilater; nam cylindrus ad conum est ut 3 ad 1 *(k)*, conus vero ad hemisphærium, ut 1 ad 2; ergo cylindrus ad illud solidum hemisphærium, vel hemisphæroidem est ut 3 ad 2 *(l)*. Idem valet de cylindris integræ sphæræ, aut sphæroidi circumscriptis.

(i) Cor. 4 hujus. (k) 10. XII Elem. (l) Ex æquo.

PRO-

PROPOSITIO LIII.

Si spatium hyperbolæ BH, & asimptoto CI interjectum revolvatur circa axem BE, solidum hinc genitum æquabitur cylindro æque alto, basim habenti circulum radii BO. Fig.125.

Quoniam rectangulum IHG, nempe differentia quadratorum EI, HE (*a*) æquatur quadrato tangentis BC (*b*), sive (a) 5. II. Elem.
rectæ EK, etiam differentia circulorum a radiis EI, EH, (b) Cor.1.
idest armilla circularis genita a recta HI in rotatione spatii prop.32.
assimptotici BHIC, circa axem BE, æquabitur (*c*) circulo (c) 2. XII. El.
radii EK in cylindro ex revolutione rectanguli BCKE descripto; idque semper evenit; ergo omnes armillæ circulares illius solidi æquantur omnibus circulis hujus cylindri, & ideo solidum illud huic cylindro æquatur.

Coroll.1. Hinc conois hyperbolica ex revolutione sectionis BHE circa axem BE, æquatur angulo procedenti ex revolutione trianguli CKI circa eumdem axem; hic enim annulus cum cylindro orto ex rectangulo BCKE adæquat summam ex conoide BHE, & ex solido genito ex asimptotico spatio BHIC; unde cum hoc sit æquale dicto cylindro, etiam conois hyperbolica dicto annulo æquatur.

Coroll.2. Similiter si asimptoticum spatium ABCD circa secundum axem AF revolvatur, solidum hinc ortum æquabitur cylindro orto ex revolutione rectanguli ABEF circa eumdem axem; nam & rectangulum CDH æquatur quadrato AB, sive FE (*d*); unde differentia circulorum ex radiis FC, FD, idest armilla circularis genita a recta DC in dicto solido, æquatur circulo radii FE in illo cylindro, & hoc semper evenit, unde totum solidum toti cylindro æque longo æquale erit. Fig.126. (d] Propofit.39.

Coroll.3. Annulus autem ex hyperbolico trilineo BEC circa AF revoluto, æquabitur cono ex revolutione trianguli ADF circa eumdem axem; nam ille annulus cum cylindro, & hic conus cum solido ex asimptotici spatii revolutione, complet hyperbolicam cylindroidalem, ex revolutione spatii ABCF circa eumdem axem AF genitam; (quare cum solidum ex asimptotici spatii revolutione æquetur cylindro ex ABEF (*e*) erit conus ex DAF = annulo ex trilineo BEC.) (e] Cor. præced.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

INscripto rectangulo DEAG inter hyperbolam æquilateram DC, & ejus asimptotos EA, AB, si totum asimptoticum spatium EDCKBA circa AB, revolvatur infinities longum, efficietur solidum duplum cylindri a dicto rectangulo circa GA revoluto descripti.

Agatur quælibet CI asimptoto parallela, secans rectanguli latera in F, I, ejusque diametrum EG in H, erit CI ad DE, ut EA ad AI (*a*), sive ut peripheria radio AE descripta, ad peripheriam radio AI descriptam (*b*); ergo rectangulum ex altitudine CI, & peripheria circulari radii AI, quod est æquale superficiei cylindricæ a recta CI circa AB revoluta descriptæ (*c*), æquatur rectangulo (*d*) ex altitudine DE, & basi peripheria radii AE, quæ esset cylindrica superficies ex revoluta DE circa AB genita; quare cylindrica superficies genita a linea CI, ad superficiem cylindricam genitam ab F, I, est ut cylindrica superficies genita a DE ad ipsam genitam ab FI, nempe (ob æquales altitudines DE, FI), ut peripheria radii EA ad peripheriam radii AI, nempe ut EA ad AI, sive ut DG ad GF, vel ut DE, aut FI ad FH, cum itaque sint æquales omnes illæ cylindricæ superficies solidi hyperbolici, necnon æquales lineæ ordinatæ in parallelogrammo rectangulo, erit ipsum solidum hyperbolicum ad dictum cylindrum, ut rectangulum ad inscriptum triangulum, scilicet in ratione dupla; unde patet propositum (149).

(a) Cor. 3. prop. 40. (b) Prop. 7. Theor. Archim. (c) XI. Archim. Theor. (d) 17. VI. El.

Coroll. 1. Hinc dividendo solidum hyperbolicum supra cylindrum a rectangulo GDEA genitum existens, nempe a spatio DCKBG descriptum, erit æquale cylindro illi sibi supposito;

---

(149) *Superficies ex CI : sup. ex FI = FI : FH, & superficies ex CL (seu CI) : superf. ex FL = FL (seu FI) : fh; cum igitur utriusve analogiæ antecedentia æqualia sint, erit superf. ex CI + superf. ex CL ad superficies ex FI, fL, ut FI + fL ad FH + fh, & omnes superficies cylindricæ solidi hyperbolici, ad omnes superficies cylindri ex rectangulo DEAG geniti sunt, ut omnes lineæ ejusdem rectanguli ad lineas illis correspondentes in triangulo DEG.*

posito; & similiter alia portio dicti solidi ex revolutione folius cCKBb genita, æquabitur cylindro sibi supposito, per rectangulum cLAb descripto.

Coroll. 2. Et hujusmodi solida ex DCKBG, & ex cCKBb revolutis genita, erunt ut radii DG, cb, suarum basium circularium; quippe in hac ratione sunt cylindri illis suppositi, quibus dicta solida æquantur, utpote in ratione composita altitudinum ED, Lc [quæ eadem est reciproce LA ad AE, seu rectanguli LAE ad AE quadratum (*a*)], & AE quadrati ad quadratum AL; adeoque sunt ut LAE ad AL quadratum, scilicet ut AE ad AL (*b*), seu ut DG ad CB.

(a) 1. VI. Elem.
(b) Per eamdem.

Coroll. 3. Ideo si divisa fuerit AE in aliquot partes æquales AI, IL, LH, HE &c. ductis à simptoto parallelis Ic, Lc, HM, ED, atque ordinatis ad asimptoton CB, cb, MN, DG, ex revolutione hujus spatii asimptotici circa AB, erunt partes a portionibus DMNG, McbN, cCBb, & ultima infinite longa CKB descriptæ, invicem æquales; cum enim sint illa integra solida, ut radii basium, eorum differentiæ sunt, ut differentiæ talium radiorum.

Coroll. 4. Quod si totum spatium ex integra Hyperbola, & utraque infinito asimptoto contentum revolvatur circa unum asimptoton, nempe AOQPDCK circa AB, erit hoc magnitudinis infinitæ; quippe in ipsa infinita asimptoto AOQ infinitæ partes æquales ipsis AI, IL &c. designari possunt, quibus totidem correspondebunt infinitæ portiones hujus solidi, invicem æquales.

DE CYCLOIDE ET LOGISTICA

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO

BOSCOVICH

Soc. Jesu Publico Matheseos Professore in Collegio Rom.

POST conicas sectiones peropportunum videtur Tyronibus e sublimioribus curvis unam aut alteram, quarum mentio frequentior occurrat, & usus præstantior, ita proponere, ut præcipuæ earum affectiones accurata illa Veterum methodo, at quantum fieri potest, contracta proponantur; quarum ope ad penitiores quosdam Geometriæ velut recessus, a Recentioribus demum contractiore methodo patefactos, pervadant. Selegimus eam in rem binas ceteris omnibus longe utilissimas Cycloidem, & Logisticam, quarum illam etiam Trochoidem, hanc Logarithmicam nominant.

Et logisticæ quidem vix credibile dictu est, quanta sit utilitas, tum in præstantissimo logarithmorum usu, quorum in Arithmetica, & Trigonometria summum est commodum, ac pene necessitas, rite intelligendo, tum in calculo integrali constituendo, & solvendis problematis, quorum innumera sane omnem finitam geometriam transcendentia ita hujus curvæ opem implorant, ut sine ea rite construi non possint. Cyclois autem, quæ quotidie omnium oculis obversatur (ea enim est curva, quam clavus progredientis rotæ describit in aere motu duplici, & æquali simul delatus, altero rectilineo cum axe rotæ, altero circulari circa ipsum axem, in in unum quendam tertium simul coalescentibus) ita summorum Geometrarum ingenia diu torsit, ac exercuit, ita doctissimorum virorum contentionibus, atque expostulationibus inclaruit; ut nulla sane alia in Geometricis fastis insignior sit curva; unde etiam effectum est; ut præclarissima de cycloide theoremata inventa sint, & affectiones plurimæ, tum quæ ad geometriam, tum potissimum, quæ ad mechanicam pertinent, subinde detectæ.

Primum quidem anno elapsi sæculi 43. lis acerrima Torricellium inter, & Robervallium exorta est de primo curvæ ipsius inventore, ac de primo dimensionis auctore, quam videre est in epistolis post Robervallii opuscula editis in collectione operum Mathematicorum & Physicorum, quæ Parisiis prodiit anno 1693. Robervallius inventorem ejus curvæ primum agnoscit Mersennum, quem affirmat jam ab anno 1615. eam curvam *Trochoidem* appellasse latine, gallice la *Roulette*, & plurimis per Galliam geometris proposuisse considerandam. Se autem primum anno 1634. deprehendisse tum aream areæ circuli genitoris triplam, tum alia multa, & ex iis pleraque cum amicis communicasse. Torricellius Galilæo inventionem tribuit. Contendit, eum jam ab anno 1599. adhuc juvenem de hac curva cogitasse, cui & cycloidis nomen indiderit, quod adhuc viget; & ejus aream tum geometrica contemplatione diu frustra quæsivisse, tum mechanica dimensione, materialibus nimirum figuris ad stateram appensis, investigasse; ubi cum fato quodam invenisset semper minorem, quam triplam circuli genitoris, metu irrationalitatis absteritum omnem investigationem omisisse: eandem tamen postea & aliis, & summo geometræ Cavallerio nequidquam proposuisse. Se autem a Viviano adhuc Adolescente edoctum methodum ducendi tangentes, in areæ ipsius determinationem casu incidisse, quam nec speraret omnino, nec quæreret; inventam vero circuli genitoris triplam, & sex diversis demonstrationibus confirmatam transmisisse in Galliam: quæ simul omnia in sequenti anno 1644. primus omnium typis vulgavit. Et ea quidem lis eo usque progressa est; ut in apertas inimicitias exarserit, altero alterum plagii accusante tam in epistolis ad amicos datis, quam etiam in publicis, ac typis editis monumentis.

Verum quod ad inventorem pertinet, multo antiquiorem ejus curvæ considerationem apud Geometras extitisse demonstrat Vallisius in epistolis 20. & 22. earum, quæ habentur tertio tomo ejus operum Oxonii editorum, quarum posterioris mentio fit etiam in Transactionibus Anglicanis ad annum 1697. Ostendit enim & Bovillum inter opera sua Mathematica edita annis, 1501., 1503., 1510. ibi maxime, ubi de circuli qua-

quadraturâ agit, considerare curvam, quam rotæ progredientis punctum quodlibet, potissimum in peripheria assumptum, percurrit ascendendo, ac descendendo: & Cardinalem Cusanum in opusculo ab eo conscripto sub Nicolai V. Pontificatu, cui inscribitur, & exscripto a Joanne Scoblant anno 1454., ac a se in Bibliothecam Savilianam Oxoniensem illato, delineasse curvam, quam punctum generat assumptum in peripheria rotæ progredientis simul, & revolutæ, ejusque basi, ut & Bovillum, ad circuli quadraturam perficiendam usum; quam ipsam delineationem Vallisius diligenter ex codice exscriptam ad Leibnitium postulantem transmisit.

Et sane omnino facile fieri potuit, ut plures, alii aliorum inscii, illud, quod in rotarum motu quotidie oculis offerebatur, geometrica consideratione dignum existimarent: quod idem sane etiam in theorematum investigatione, ac demonstratione potuit contingere; ut nimirum easdem, in eodem quodam communi veluti campo naturæ consepultas veritates, ambo inde eruerent proprio uterque marte Torricellius, & Robervallius; cum potissimum diversa methodo in demonstrationibus sint usi. Quidquid autem de inventionis primatu sit, illud omnino constat, tangentes cycloidis, & areæ dimensionem primum omnium, ut diximus, typis vulgasse Torricellium anno 1644., Robervallio meditationes suas adhuc in suis, & amicorum privatis scriniis asservante.

Torricellio autem e vivis mox erepto, aliæ non minus graves controversiæ anno 1658. excitatæ. Proposuit suppresso nomine Paschalius problemata, quæ ad arearum, & solidorum cycloidalium, quæ earum revolutione generantur, dimensionem, ac ad horum omnium gravitatis centra pertinebant, ampliore promisso præmio binis, qui primi ante Kal. Octobris ea solvissent, & ad Carcavium Parisios, interposita Notarii publici auctoritate, transmisissent. Multi ea occasione, ut solet, in cycloidem inquisiverunt, & inventa sua transmiserunt Parisios; & eos inter Vallisius, cujus querelas videre est in præfatione opusculi de Cycloide, eique adnexa epistola ad Hugenium, quas insequenti anno edidit, non tantum præmio destitutus, sed ne responso quidem accepto: quo eodem anno bini quoque e nostra Societate Geometræ Lalovera & Fabrius, suas eorundem problematum solutiones, aliasque de cycloide meditationes typis ediderunt, eademque occasione Wrennius primus omnium rectam cycloidis perimetro, ejusque partibus æqualem demonstravit; quanquam id quoque a se prius inventum Robervallius affirmat, sed ne cum amicis quidem communicatum. Wrennio autem ipsi videtur Vallisius ibidem adjudicare primam

mam inventionem sectoris cycloidalis absolute quadrabilis, quæ tamen passim Hugenio, & potiore jure tribuitur, ut & alterius quoque areæ cycloidalis quadratura, ex qua alterius segmenti a Leibnitio assignati quadratura pendet.

Ante Vallisianum opusculum historia Trochoidis eodem anno prodierat Gallico idiomate conscripta a Detonvillio suppresso nomine. In ea plura contra Torricellium jam ab aliquot annis vita functum, ac contra Laloveram plagii damnatos congesta, plura ex transmissis occasione præmii, ne nominatis quidem auctoribus, desumpta, Vallisius conqueritur, & pro Torricellio satis efficacem apologiam contexit, Laloveræ adhuc superstiti, suam defensionem permittens, quam eodem ipse tempore publici juris fecit justo volumine, quo multa summo Geometra dignissima proferens, & solutionem problematum edidit, multis adjectis, & methodum suam multo generaliorem exposuit.

Atque hæc prima quædam cycloidis quasi adolescentia extitit, contentiosa illa quidem, & rixis, ac jurgiis plus æquo indulgens. Reliqua ætas pacatior. Hugenius in illo celeberrimo opusculo, quod de Horologio oscilatorio vulgavit anno 1673. cycloidem sui evolutione se ipsam gignere demonstravit, ac ejus isochronismum in spatio non resistente cum omnium admiratione detexit, quo nimirum fit, ut grave per inversam delatum cycloidem, utcumque inæquales arcus ab infimo puncto computatos, æquali semper tempore percurrat, eo scilicet tempore, quod ad tempus liberi descensus per altitudinem æqualem diametro circuli genitoris est, ut semicircumferentia circuli ad diametrum. Quamobrem illam horologiis perficiendis aptissimam judicavit.

Eandem curvam isochronam esse in spatio quoque resistente, dummodo resistentia sit vel in ratione momentorum temporis, vel in ratione simplici velocitatum, demonstravit Nevvtonus principiorum l.2., quæ primum edita sunt anno 1687.

Eandem in gravium descensu brachistochronam esse, sive quod idem sonat, esse curvam celerrimi descensus, sed in spatio non resistente, primus omnium invenit Jo: Bernoullius anno 1696., ut nimirum a dato puncto ad datum punctum non in eadem verticali linea positum descendat grave celerius per arcum cycloidis inversæ originem habentis in superiore puncto, quam vel per rectam, vel per ullam aliam curvam; atque id ipsum jam a se inventum in Actis Lipsiensibus Geometris indagandam proposuit, insequenti anno suam solutionem, ac demonstrationem exhibiturus, quam & exhibuit. Idem autem alia methodo Jacobus Frater, alia Leibnitius, alia

alia Hospitalius demonstrarunt. Eadem vero demonstratione Bernoullius ostendit eam fore viam luminis perpetuo refracti in sua de refractione sententia, & posito certo quodam nexu densitatis medii, cum celeritatibus, quas corpus acquirit cadendo libere ex eadem altitudine, quæ applicatio ad luminis refracti propagationem facile aliis etiam sententiis de refractionis causa accommodari potest.

Infinita segmenta ejus curvæ quadrabilia, & quæ Hugeniano illo, atque Leybnitiano tanquam extremis limitibus continentur, atque infinitos, qui inde fluunt, sectores quadrabiles deprehendit idem Jo: Bernoullius, & exhibuit in Actis Lipsiensibus anno 1699., ac tum ipse cum Jacobus Frater insequentibus annis infinitas alias cycloidales areas geometrice quadrabiles exhibuerunt.

Parentius autem anno 1708. (ut habetur in Historia Accadem. Paris. ad eundem annum), novam cycloidis affectionem detexit, quod nimirum dum grave per cycloidem descendit, & tum ea gravitatis parte, quæ ipsi curvæ normalis est, tum vi centrifuga arcus minimos perpetuo premit; pressio computata ex viribus prementibus, & ex pressionis tempore, sit semper ubique æqualis, celeritate scilicet viribus ipsis ubique proportionali, adeoque tempore, quo virium actio durat in singulos arcus, eo minore, quo majores sunt vires.

Demum Guido Grandus in notis, quæ adjectæ sunt operibus Galilæi editis anno 1718. sub finem, novum detexit cycloidis usum (qui tamen & ex binis locis primi libri Principiorum Nevvtoni inter se collatis facile deducitur) in exponendis temporibus descensuum corporis libere descendentis, ubi vires decrescunt in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro, cujusmodi est Nevvtoniana gravitas; modo cycloidis axis sit illa ipsa recta, quæ jungit initium descensus cum centro virium. Iis enim temporibus ordinatæ ad axem sunt in ea hypothesi proportionales.

Atque hæc ferme sunt præcipua saltem, quæ de cycloidis natura, affectionibus, applicatione ad mechanicam huc usque prolata sunt, demptis & solidorum mensuris, & gravitatis centris, & comparatione cum aliis curvis, quæ & minoris sunt utilitatis, & paucis exponi non possunt. Quibus illud accedit, quod ex ipsa fere prima curvæ genesi habetur transformatio circularis curvæ in rectam lineam, ac viceversa; unde sponte propemodum fluit solutio duplicis problematis, quorum utrumque frustra a Veteribus olim quæsitum, & per geometricas curvas incassum etiam quærendum imposterum, circuli nimirum, & sectoris cujuslibet

M circu-

circulatis quadratura, ac anguli sectio non in tres tantum æquales partes, quod etiam per conicas sectiones fit, sed in ratione quacumque etiam irrationali. Præterquamquod ipsa circularium arcuum extensio in rectas summum in universa mathesi usum habet.

Tam nobilis curvæ elementa, quæ tam multis hisce, tamque præclaris ejus usibus apud Auctores suos intelligendis necessaria sunt, hic exponemus primo loco quam brevissime licebit. Explicabimus genesim: trademus methodum ducendi tangentes per quævis puncta: dimensiones perimetri, & areæ exhibebimus utramque demonstratione eadem fere, & nobis saltem nova: eamque sui ipsius evolutione gigni docebimus. Ac ne tot præstantissimi ejus usus penitus prætermittantur; ostendemus demum ejus ope circuli quadraturam, & angulorum sectionem, ac Hugenianum illum tam celebrem isochronismum demonstrabimus. Sed aggrediamur rem ipsam.

De Cycloide.

Fig. 1. 1. DEfinitio. Circulo LPM revoluto supra rectam AB tangentem, ita ut arcus LP successive congruant cum segmentis AL ejus rectæ sibi æqualibus, describat punctum P lineam APB: eam dico *Cycloidem*: rectam AB terminatam binis appulsibus puncti P, dico *Basim*: rectam ED perpendicularem basi bifariam sectæ in E, & cycloidis perimetro occurrentem in D, dico *Axem*, & punctum D *Verticem*, chordas Pp basi parallelas, *ordinatas axi*.

Fig. 2. 2. Fig. 2. exprimit instrumentum, quo cyclois facile describitur. Lamina tenuis EFTI ita advolvitur cylindro C, ut totam ejus superficiem rotundam accurate tegat, & altero sui extremo E adhæreat ipsi cylindro, altero extremo I adhæreat regulæ solidæ rectangulæ AG, cujus crassities IA sit major latitudine IH ipsius laminæ, seu crassitie cylindri, & in cujus superficie superiore sit crena IHR ad ipsam laminam recipiendam ita excavata, ut & crassitiem, ac latitudinem lamellæ adæquet, & reliqua superficies ABRH sit rectangulum. Cylindro autem in E in ipsa commissura lamellæ adnectitur stylus EP ad angulos rectos planis basium cylindri, ita ut ultra cylindrum promineat per intervallum æquale rectæ AH. Patet cylindro revoluto, stylum P generare cycloidem; quia ob arcum TE a contactu cylindri cum plano TH æqualem rectæ TH, sive ei parti laminæ, cum qua sibi advoluta congruebat initio motus, cycloidem generat punctum E, & lineæ quas puncta PE generant, sublata distantia PE

tia PE semper eadem, & earum planis perpendiculari, congruerent.

3. Corol. 1. *Basis cycloidis æquatur peripheriæ circuli genitoris, & axis diametro ejusdem.*

Patet primum; quia inter binos appulsus puncti P ab A ad B tota peripheria successive congruit cum ipsa recta AB. Fig. 1.

Patet secundum; quia ob AE dimidiam AB, adeoque æqualem semicircumferentiæ, puncto L appellente ad E, arcus LP fiet semicirculus. Quare P jacebit in extremo puncto diametri transeuntis per E, quæ diameter cum sit perpendicularis (*a*) tangenti AE, congruet cum recta ED, ejusque extremum punctum erit in cycloidis perimetro; adeoque in ipso puncto D, ad quod tum appellit P. (a) 16.l.3.

4. Corol. 2. *Axis ordinatas suas perpendiculariter, & bifariam secat, & secat in duas partes æquales, & similes tam aream, quam perimetrum cycloidis.*

Quod secet perpendiculariter, patet ex eo, quod sit perpendicularis basi ipsis ordinatis parallelæ.

Quod secet bifariam, demonstratur. Sit ordinata Pp, quam secet axis in O, diametri LM, lm circuli genitoris in eo situ, in quo punctum generans appellit ad P & p, in N & n, ejusque circuli peripheria in I, & i. Quoniam diametri LM, lm perpendiculares sunt tangenti AB (*b*), adeoque tam inter se parallelæ, quam cum axe ED (*c*), & perpendiculares ordinatæ Pp (*d*); erunt & LN, ln æquales inter se, & NO, nO æquales rectis LE, lE (*e*); adeoque & chordæ PI, pi æquales erunt (*f*), & earum dimidiæ PN, pn æquales (*g*), & arcus PMI, pmi (*h*) æquales, & eorum dimidii PM, pm (*i*) æquales. Demptis autem ab EA, & semicircumferentia LPM æqualibus (*k*) LA, & LP pariter æqualibus (*l*), remanent LE, PM æquales. At demptis EA, lim pariter æqualibus ab æqualibus lEA, limp, remanent El, mp pariter æquales. Quare & EL, El, adeoque & ON, on, ac proinde & totæ OP, op pariter æquales.

(b) 16.l.3. (c) 28.l.1. (d) 29.l.1. (e) 34.l.1. (f) 14.l.3. (g) 3.l.3. (h) 28.l.3. (i) 30.l.3. (k) n.3. (l) n.1.

Demum si concipiatur angulus rectus DEB superimponi recto DEA, abibit semper Op in sibi æqualem OP ob angulos ad O rectos, adeoque congruent omnia puncta p, P, & tam lineæ DpB, DPA, quam areæ DEBp, DEAP; unde patet postremum.

5. Corol. 3. *Recta PR parallela basi ducta ex quovis puncto P cycloidis, usque ad intersectionem R cum perimetro circuli genitoris appellentis ad ED abscindit in ea arcum DR a vertice D sibi æqualem.*

Erit enim eodem argumento corollarii 2. arcus RD, & dimidius totius RDr, & æqualis PM; adeoque rectæ LE, five NO ; & pariter OR dimidia Rr æqualis NP, ac addito RN, vel ablato, fient ON, RP æquales; ac proinde & arcus DR rectæ RP æqualis erit.

6. Corol.4. *Circulus DREr axi tanquam diametro circumscriptus, totus intra cycloidem jacet, quam contingit in vertice D.*

Cum enim PR semper æquetur arcui RD, nusquam cyclois cum eo circulo concurrit præter punctum D, in quo is arcus fit nullus, quod pro utraque semicycloide valet, ut
(a) n.4. æquali, & simili (*a*). Cum igitur puncta A & B, sita in
(b) 16.l.3. recta AB perpendiculari ad diametrum ED, adeoque (*b*) circulum tangente in E, sint extra circulum; totus arcus tam AD, quam BD extra circulum jacebit.

Fig.3. 7. Prop.1. Theor. *Manentibus iisdem punctis AEDPRr recta LPl parallela chordæ RD cycloidem ita contingit in unico puncto P, ut ejus arcus utrinque a contactu jaceat versus basim, & axem.*

Ducta enim per quodvis punctum H a P versus verticem
(c) 31.l.1. recta basi parallela (*c*), quæ occurrat circulo in I, chordæ DR in F, tangenti circuli ductæ per R in C, & ducta RI,
(d) 32.l.3. erit angulus CRF æqualis angulo RrD (*d*) in alterno segmento; adeoque, ob arcus RD, rD æquales ex demonstratione
(e) 27 l.3. num.5., erit æqualis etiam angulo DRr (*e*), ejusque alterno
(f) 29.l.1. CFR (*f*). Quare & latera RC, CF æqualia erunt (*g*). Cum
(g) 6 l.1. igitur latera RI, IC simul majora sint solo latere CR (*h*),
(h) 20.l.1. majora quoque erunt latere CF, & dempto CI communi, erit chorda RI, & multo magis arcus RI major, quam recta IF. Quamobrem ab arcu DR dempto arcu RI, & a recta
(i) 30. l.1. FL, quæ cum parallela sit rectæ RP (*i*), æquatur eidem (*k*);
(k) 34.l.1. adeoque & arcui DR (*l*), dempta recta IF, remanebit arcus
(l) n.5. ID, adeoque & recta IH (*l*) minor quam IL, ac proinde punctum L extra cycloidem.

Eadem facta constructione pro puncto h sito ad partes oppositas, erit eadem demonstratione Rc æqualis cf, & cum rectæ Rc, ci sint simul majores arcu Ri curvo versus c, erit fi major arcu Ri, & additis æqualibus fl & RP, seu RID, erit il major arcu iRD, adeoque major recta ih, & proinde punctum quoque l extra cycloidem, punctis h, H, adeoque toto arcu hPH jacente respectu tangentis lPL versus puncta AED. Q. E. D.

8. Corol.1. *Cycloidis perimeter est curva, quæ cavitatem perpetuo obvertit axi, & basi.*

Patet ex ipsa propositione: cum recta enim nusquam congruit, sed rectas ita in singulis punctis contingit singulas, ut ab iis versus axem, & basim utrinque detorqueatur.

9. Co-

9. Corol.2. *Si tangentes per P & R ductæ producantur donec concurrant in N; punctum N perpetuo describet curvam AND genitam evolutione fili semicirculo DRE advoluti.*

Cum enim ob PN, RF parallelas, anguli CFR, CRF, jam demonstrati æquales num. 7. inter se, sint etiam æquales ille angulo P (*a*), hic angulo PNR (*b*); erunt & hi inter se æquales, ac proinde (*c*) & recta RN æqualis RP, sive (*d*) arcui RD, & filo ipsi advoluto. Quamobrem ubi filum semper tensum evolvitur usque ad R, & curvam radit; ita congruit cum tangente RN, ut ejus extremum punctum sit in N. (a) 34. l. 1. (b) 29. l. 1. (c) 6. l. 1. (d) n. 5.

10. *Scholium.* Quando curva generatur evolutione fili alteri curvæ circumvoluti, illa dicitur evolutione Genita, hæc ejus *Evoluta*, ut hic curva DNA est Genita, semicirculus DCE est ejus Evoluta. Frequens Evolutarum mentio occurrit apud Recentiores Geometras, & sæpe præstantissimos usus habent, ut mox in ipsa Cycloide patebit.

Demonstrant autem tangentem RN evolutæ esse semper perpendicularem tangenti genitæ in N, adeoque ipsius genitæ, ut vocant Normalem. Circulum autem radio CN descriptum vocant genitæ *Osculatorem*; quia licet nullus ejus arcus congruat cum arcu genitæ, quam in unico puncto N, vel contingit, ut in determinatis quibusdam casibus, vel ut fere semper, secat, (quod mirum videri possit, cum in ipso sectionis puncto communem rectam tangentem habeat); tamen ita ad eum accedit, & angulum ita exiguum constituit, ut nullius alterius circuli arcus intra eum angulum duci possit: sed arcus cujuscunque majoris jaceat tam extra osculatorem, quam extra genitam utrinque, cujuscunque minoris utrinque intra, eo prorsus pacto, quo inter rectam circulum tangentem, & arcum circuli demonstrat Euclides nullam aliam rectam duci posse (*e*): ob quem tantum accessum exiguos arcus curvarum confundunt cum arcubus circulorum, qui eas osculantur, & curvas ipsas considerant tanquam compositas ex infinitis numero, & infinite parvis arcubus circulorum eas successive osculantium, & habentium centra in ipsa Evoluta, quod si caute fiat, tuto fit. Circulorum porro osculatorum longe frequentior mentio, & usus longe præstantior. Sed ea non sunt hujus loci. (e) 16. l. 3.

11. Coroll.3. *Arcus Pp major est tangente PL ducta per punctum P remotius a vertice usque ad rectam pL parallelam basi ductam per p, & minor ejusmodi tangente pl ducta per p usque ad parallelam Pl.* Fig. 4.

Si enim eæ parallelæ occurrant circulo in r, & R, erit tangens PL parallela chordæ RD (*f*), ac PLFR parallelogrammum, in quo angulus L æquatur opposito PRF (*g*), (f) n. 7. (g) 34. l. 1.

 qui

(a) 16.l.1. qui cum major sit recto ROD (*a*) interno, & opposito, est obtusus. Quare in triangulo PLp angulus ad p acutus erit
(b) 17 l.1. (*b*), & proinde tangens PL minor, quam chorda Pp (*c*),
(c) 19.l.1. adeoque multo minor, quam arcus Pp.

Si autem tangens pl occurrat tangenti PL in G; angu-
(d) 29.l.1. lus lPG æqualis alterno GLp (*d*) obtuso, erit pariter obtusus, & eadem prorsus demonstratione PG minor, quam Gl, ac addita communi Gp, duæ simul tangentes PG, Gp, quæ majores sunt arcu Pp, erunt minores sola lp; qua proinde multo minor erit arcus ipse.

12. Corol. 4. *Arcus Pp ad duplum excessum chordæ DR supra chordam Dr, habet rationem minorem, quam chorda RD ad chordam rD, & majorem ejus inversa.*

Secto enim arcu Rr bifariam in I, ducatur recta IE, & ipsi parallelæ per R, & r rectæ occurrentes circulo in N, & n, chordis Dr, DR in T, & t, rectæ ductæ per D & I in V, & u; ac rectæ PR, pr occurrant iterum circulo in M, & m.

Ob arcus RI, Ir æquales, anguli RDV, VDT æquales
(e) 27.l.3. erunt (*e*): & ob angulum EID in semicirculo rectum (*f*),
(f) 31.l.3. angulus quoque RVD rectus erit (*g*), ac proinde æqualis an-
(g) 29.l.1. gulo TVD. Quare ob latus quoque VD commune triangulis
(h) 26.l.1. RDV, TDV, erunt (*h*) & latera DR, DT æqualia: ac eodem argumento æqualia erunt Dr, Dt, ac proinde tam rT, quam Rt erit excessus chordæ RD supra chordam rD.

(i) 21.l.3. Rursus angulus rRD est æqualis angulo rmD (*i*), cui
(k) 27.l.3. æqualis est angulus DrF (*k*) ob arcus rD, Dm æquales ex
(l) 29.l.1. demonstratione numeri 5., & angulus DfR (*l*) ipsius DrF internus, & oppositus. Quare primo ob angulum D commu-
(m) 32.l.1. nem & angulos DRr, DrF æquales, (*m*) æquiangula erunt triangula DRr, DrF, & (*n*) DR ad Dr, ut Dp ad DF,
(n) 4.l.6. ut (*o*) rf ad RF. Secundo angulus RFr major angulo FrD
(o) 2.l.6. (p) 16.l.1. (*p*) interno, & opposito, major erit etiam angulo FRr,
(q) 19.l.1. adeoque (*q*) Rr major quam rF. Tertio angulus Rrf major pariter interno, & opposito rRD, erit major angulo rfR, adeoque Rf major, quam Rr;

Demum arcus EN, RI æquales sunt, quia si duceretur
(r) 29.l.1. NI, efficeret angulos RNI, NIE alternos æquales (*r*), qui
(s) 26.l.3. arcubus NE, RI æqualibus deberent insistere (*s*): & eodem argumento æquales sunt Ir, En. Cum igitur eadem demonstratione, qua arcus DR, DM æquales sunt, sint pariter æquales arcus ER, EM, adeoque arcus EM dimidius totius REM, & EN æqualis RI, dimidius Rr, erit & NM di-
(t) 33.l.6. midius totius rNM, ac proinde (*t*) angulus NRM, cui æqua-

æquatur TRf ad verticem oppositus (*a*), erit dimidius anguli rDM, cui æquatur fRr, eo quod idem rRM sit complementum ad duos rectos & prioris oppositi in quadrilineo RrDM (*b*) & posterioris (*c*) in recta fRM. Quare ob angulum fRr sectum bifariam per rectam RT, erit (*d*) fT ad Tr, ut fR ad Rr, adeoque ipsa fT major, quam Tr, & proinde fr major quam dupla Tr, sive quam duplus excessus DR supra Dr. Eodemque pacto ob arcum Em dimidium rEm, & En dimidium rR, erit nm dimidius Rnm, & angulus nrm dimidius anguli Rrm; ac proinde in triangulo RrF erit Rt ad tF, ut Rr ad rF; adeoque Rt major, quam tF; & proinde tota RF minor quam dupla Rt, seu quam duplus excessus chordæ RD supra chordam rD. (a) 15. l. 1. (b) 22 l. 3. (c) 13 l. 1. (d) 3. l. 6.

Cum igitur rf parallela pl (*e*), sit eidem æqualis (*f*), ac proinde (*g*) major arcu Pp, & eodem pacto RF æqualis PL minor pariter arcu Pp; tam ipse arcus Pp, quam duplus excessus chordæ RD supra rD jacebunt inter rectas rf, RF; ac proinde habebit ille ad hunc rationem minorem, quam rf ad RF, sive rD ad DF, vel RD ad Dr, & majorem, quam RF ad rf, seu rD ad RD. (e) n. 7. (f) 34. l. 1. (g) n. 11.

13. Prop. 2. Theor. *Arcus cycloidis Pp æquatur duplo excessui chordæ RD supra chordam rD, si puncta R, r definiantur per rectas PR, pr parallelas basi.* Fig. 5.

Demonstratur. Abscissa DM æquali Dr ex DR, si arcus Pp non erit æqualis duplæ rectæ MR, alterum ex iis duobus minus erit. Sit id ad majus ut DM ad DT abscissam ex ipsa DR, & inter DR, & DM inveniatur media proportionalis DO (*h*): tum inter ipsas DO, DR, & DO, DM mediæ DQ, DN, & ita porro; donec habeatur aliqua DN minor, quam DT, quod semper poterit; quia cum sit DO ad DN, ut DN ad NM; erit etiam per conversionem rationis DO ad ON, ut DN ad NM, & alternando DO ad DN, ut ON ad NM; adeoque ON major quam NM; & eodem argumento OQ major, quam ON, & ita porro: Quamobrem MN ad totam MR habet rationem minorem ratione, quam haberet, si reliquis æqualis esset; nimirum ratione unitatis ad numerum particularum MN, NO &c. sive ad numerum mediarum DN, DO &c. unitate auctum. Ac proinde si numerus mediarum augeatur ita, ut excedat rationem MT ad MR; erit ratio ultimæ MN ad MR minor ratione MT ad MR, adeoque MN minor ipsa MT, & DN minor quam DT. (h) 13. l. 6.

Jam vero applicatis in circulo rectis DI, DK, DL æqualibus mediis omnibus DN, DO, DQ (*i*), ductisque IF, KG, LH parallelis basi (*k*), donec arcui Pp occurrant in F, G, H, (i) 1. l. 4. (k) 31. l. 1.

 ratio-

rationes FP, GF, HG, PH ad NM, ON, QO, RQ singularum ad singulas erunt minores (a) rationibus ID, KD, LD, RD ad rD, ID, KD, LD, & majores inversis, sive per constructionem minores ratione ND ad MD, & majores inversa. Quare & ratio totius Pp ad duplam MR erit minor ratione ND ad MD, major inversa nempe MD ad ND. Sed si arcus Pp est major dupla MR; ea ratio erit DT ad DM: si minor; DM ad DT. Igitur in primo casu erit ratio DT ad DM minor ratione DN ad eandem DM, & in secundo ratio DM ad DT major ratione DM ad DN, ac proinde in utroque casu DT minor, quam DN, sive totum sua parte minus. Igitur arcus Pp nec major, nec minor est dupla MR, sed ei æqualis. Q. E. D.

(a) n.12.

14. Corol.1. *Totus arcus DP æqualis est duplæ chordæ DR.*

Sit enim inæqualis, & si fuerit major, sit arcus Pp duplus RD; si minor, sit MR dimidia PD: & in primo casu ducta pr parallela basi (b), & capta DM æquali Dr, erit Pp æqualis duplæ RM (c). Sed etiam est duplus RD. Igitur dupla RM, & dupla RD æquantur, pars, & totum, quod est absurdum: & eodem prorsus pacto in secundo casu applicata DR æquali DM, & ducta rp parallela basi, invenitur Pp æqualis PD pars toti. Igitur æquatur DP duplæ chordæ DR.

[b] 31.l.1. (c) n.13.

15. Corol.2. *Totus arcus DA est duplus diametri DE, ac tota perimeter quadrupla.*

Demonstrari potest primum simili ratiocinio: sed etiam patet ex eo, quod si pro quavis chorda DR assumpta fuisset ipsa diameter, demonstratio habuisset eandem vim. Cum vero in fig.1. sit (d) DB æqualis DA; erit tota perimeter ADB quadrupla ejusdem diametri.

[d] n.4.

16. Corol.3. *Arcus datus cycloidis Pp secari poterit in ratione data.*

Ductis enim PR, pr parallelis basi (e), usque ad circulum, & chordis Dr, DR, ac ex longiore DR abscissa DM (f) æquali breviori Dr, secetur MR in O in illa ratione data (g): tum applicata chorda DK æquali DO (h), ducatur KG parallela basi (i), quæ arcum Pp secabit in illa ratione data in G. Nam erunt (k) arcus pG, GP dupli rectarum MO, OR; ac proinde in eadem cum ipsis ratione.

(e) 31.l.1. [f] 3.l1. (g) 10.l.6. (h) 1.l.4. (i) 31.l.1. [k] n.13.

17. Prop.3. Theor. *Area BPpb clausa arcu cycloidis Pp, binis tangentibus PB, pb, & segmento Bp rectæ De parallelæ basi ductæ per verticem D æquatur areæ RDr clausæ binis chordis RD, rD & arcu circuli Rr, si puncta R, r definiantur per rectas PR, pr parallelas basi.*

De-

Demonstratur eodem prorsus modo, quo prop.2. Nam in primis in fig.4. area BPpb ad trilineum circulare RDr habet rationem minorem quadruplicata chordæ RD ad chordam rD, & majorem quadruplicata inversa. Ductis enim PX, px parallelis (*a*) pb, PB usque ad rectam De, æqualia erunt triangula BPX, RDf; quia ob PB, RD parallelas (*b*) erit BPRD parallelogrammum, & ob Df parallelam (*b*) pb, adeoque (*c*) & PX erit parallelogrammum XPfD, quorum utrunque bifariam secaret (*d*), si duceretur diameter PD, ac proinde ab æqualibus triangulis PBD, PRD demptis PXD, PfD æqualibus relinquerentur PBX, RDf æqualia: & eodem prorsus argumento æqualia sunt triangula pbx, rDF. Cum igitur quadrilineum BPpb sit inter triangula BPX, bpx, & trilineum RDr inter triangula RDf, rDf; erit ratio illius ad hoc minor, quam trianguli RDf ad rDF, & major, quam eadem inversa. Cum autem ob Rf, rF parallelas, triangula RDf, rDF sint æquiangula (*e*); erunt in duplicata ratione DR, DF (*f*), quæ est quadruplicata rationis DR, Dr, cum ob RD, rd, FD demonstratas continue proportionales in num.12., ratio DR ad DF sit duplicata rationis DR ad Dr. Quare illud quadrilineum ad trilineum erit in ratione minore, quam sit quadruplicata RD ad rD, & majore quam sit ejusdem inversa quadruplicata. F.4. (a) 31 l.1. (b) n.7. (c) 30.l1. (d) 34.l.1. (e) 29.l.1. (f) 19.l 6.

Deinde in fig.5. si area BPpb non est æqualis areæ RDr, & ratio majoris ad minorem sit quadruplicata cujusdam DT ad DM: inventis prorsus ut in prop.2. punctis H, G, F, ductisque per ea tangentibus HS, GV, FX usque ad rectam De, eodem, quo ibi, discursu ratio quadrilinei BPpb ad trilineum RDr erit minor ratione quadruplicata ND ad MD, & major eadem inversa; adeoque si quadrilineum sit minus, ratio quadruplicata DT ad DM erit minor, quam quadruplicata DN ad DM; si sit minus, ratio quadruplicata DM ad DT erit major quam DM ad DN; ac proinde in utroque casu DT minor quam DN, sive totum sua parte minus: quod est absurdum. Quamobrem quadrilineum BPpb nec majus, nec minus est trilineo RDr, sed ipsi æquale. Q. E. D. F.5.

18. Cor.1. *Tota area BPGD æquatur toti segmento RKDR, & erecta Ae perpendiculari ad AE* (g), *adeoque parallela axi ED* (h), *donec occurrat rectæ De in e, erit trilineum AGDe æquale semicirculo EKD.* [g] 11.l 1. (h) 28.l.1.

Demonstratio est prorsus eadem, ac in corol.1., & 2. prop.2.

19. Corol.2. *Trilineum AGDKE est æquale circulo genitori, tota area cycloidis ejusdem circuli tripla, & ad rectangulum sub sua basi, & axe ut 3. ad 4.*

Nam

Nam per cor.1. prop.5. ex Archimede, area circuli æquatur rectangulo sub dimidia circumferentia, & radio; ac proinde ob dimidiam basim AE æqualem (a) dimidiæ circumferentiæ; erit (b) rectangulum AEDe sub AE, & ED diametro circuli genitoris (c) duplum circuli ipsius, a quo si dematur semicirculus EKD, & trilineum AGDE ipsi æquale relinquetur trilineum AGDKE æquale alteri circulo genitori.

(a) n.3. (b) 1 l 6. (c) n 3.

F.1. Inde autem tota area ADB in fig.1. constans circulo genitore, & binis trilineis ADRE, BDrE est tripla ejusdem circuli.

Cumque rectangulum sub basi tota ex axe, sit duplum rectanguli (d) sub dimidia basi & axe, ac proinde quadruplum circuli genitoris; area cycloidis continebit tres quadrantes ejus rectanguli.

(d) 1. l.6.

F.6. 20. Corol.3. *Ducta præterea chorda PD, & recta PI perpendiculari ad De, ac producta PR usque ad DE in H, erit primo trilineum PID terminatum arcu cycloidis æquale areæ RHD terminatæ arcu circuli: secundo quadrilineum APIE æquale trilineo RHE terminato arcu circuli: tertio trilineum PDR terminatum arcubus cycloidis, & circuli duplum segmenti cycloidalis PD.*

Patet primum, quia ob parallelogramma IH, BR secta bifariam a diametro PD (e) æqualia sunt triangula IPB, RHD excessus æqualium triangulorum IPD, PDH supra æqualia triangula PBD, PRD; quæ si addantur trilineo cycloidali PBD, & segmento circuli RD æqualibus (f), fient trilineum cycloidale PID, & circulare RHD æqualia.

(e) 34 l.1. (f) n.19.

Patet secundum, quia trilineo APDe, & semicirculo ERD æqualibus (g) demendo trilineum cycloidale IPD, & circulare RHD æqualia, relinquentur quadrilineum APIe, & trilineum circulare RHE æqualia.

(g) n.17.

Patet tertium, quia parallelogrammum RB est duplum trianguli PBD (h), & summa trilinei cycloidalis PBD, & segmenti circularis RD æqualium (i) est dupla solius trilinei. Quare & residuum trilineum PDR terminatum arcubus cycloidis, & circuli duplum est residui segmenti cycloidalis PD.

(h) 34. l 1. (i) n.18.

21. Corol.4. *Recta PN parallela RE abscindit trilineum ANP triplum segmenti circularis ER.*

Nam producta IP usque ad basim in M, rectangulum IMED, erit (k) æquale rectangulis sub RH & ED, ac PR & ED. Primum est duplum trianguli ERD (l), & ducta RC ad centrum circuli genitoris, est quadruplum trianguli ERC, cujus ERD est duplum (m). Secundum est quadruplum

(K) 1. l.2. (l) 41. l.1. (m) 1. l.6.

plum sectoris RCD, cum nimirum per coroll.5. prop.4. ex Archim., sector RCD æquetur triangulo, cujus basis sit arcus RD, æqualis rectæ PR (a), & altitudo radius CD, cujus est duplum rectangulum sub eadem basi & altitudine (b) ac proinde quadruplum rectangulum sub eadem basi & dupla altitudine ED (c). Quare rectangulum IMED erit quadruplum trilinei circularis RED. Si inde dematur trilineum cycloidale IPD æquale circulari RDH, & triangulum PMN, quod triangulo RHE æquatur pariter, quia si duceretur EP secaret bifariam (d) tam rectangulum MPHE quam parallelogrammum PREN; demetur trilineum RED semel, & remanebit area DENP terminata arcu PD tripla trilinei circularis RED. Cum igitur & area totius semicycloidis AED sit tripla totius semicirculi ERD [e); erit & reliqua area ANP tripla reliqui segmenti ER.

(a) n.5. (b) 41.1.1. (c) 23.1.6. (d) 34.1.1. (e) n.19.

22. Corol.5. *Si in semiaxe CD sumantur puncta I & O æque distantia a centro C, & vertice D, & per ea ducantur ordinatæ Gg, Pp circulo genitori occurrentes in T, t, R, r, punctis G, P, T, R jacentibus ad eandem axis partem, & conjungantur ET, ER, Er, ac GP, Gp; erit segmentum cycloidale GDp æquale summæ triangulorum EOr, EIT, & segmentum GP differentiæ triangulorum EIT, EOR.* F.7.

Ducta enim per D recta basi parallela (f), cui occurrant in H, F, f rectæ ex G, P, p parallelæ axi; trapezium GHfp, habens angulos ad H & f rectos (g), divideretur per rectam Gf (quæ vitandæ confusionis gratia non ducitur) in duo triangula, nimirum GfH, cujus basis GH, & altitudo perpendicularis fH, & Gfp, cujus basis pf & altitudo eadem. Quare eorum dupla simul æquabuntur (h) binis rectangulis sub Hf & HG, & sub Hf, & fp, nimirum (i) rectangulo sub Hf & summa HG, fp, quæ æquatur radio CD, cum GH æquetur ID (k), & pf æquetur OD, sive per constructionem CI. Igitur duplum trapezium GHfp æquatur rectangulo sub Hf & radio CD; sive (l) binis rectangulis sub DH & DC, ac sub Df & DC.

(f) 31.1.1. (g) 29.1.1. (h) 41.1.1. (i) 1.1.2. (k) 34.1.1. (l) 1.1.2.

Sed ob HD æqualem GI, rectangulum sub HD & DC, æquatur rectangulo sub GT vel arcu TD (m) & DC, ac sub TI & DC vel CE; quorum primum ex demonstratione num.20. æquatur duplo sectori TCD, & secundum duplo triangulo TCE (n) habenti basim EC & altitudinem TI; ac proinde rectangulum sub HD & DC æquatur duplo sectori circulari TED, & eadem prorsus demonstratione rectangulum sub Df, & DC æquatur duplo sectori DEr. Igitur trapezium GHfp æquatur toti areæ circulari TErDT. Demp-

(m) n.5. (n) 41.1.1.

tis

tis autem trilineis GPDH, pDf, & areis circularibus TID, (a) n.20. rOD, quæ iis æquantur (*a*), relinquetur segmentum GDp æquale summæ triangulorum EIT, EOr. Patet igitur primum.

Eadem autem prorsus demonstratione trapezium HGPF æquatur differentiæ arearum circularium TED, RED, sive differentiæ triangulorum TEI, REO, & differentiæ arearum circularium TID, ROD simul. Si autem auferatur hinc differentia arearum TID, ROD, inde quadrilineum cycloidale HGPF, quod est differentia trilineorum cycloidalium GDH, PDF; relinquetur hinc differentia triangulorum TEI, REO, inde segmentum GP cycloidale: quæ proinde æquabuntur. Patet igitur, & secundum.

23. Corol.6. *Ductis praeterea rectis IP, ip, erit sector cycloidalis PIp aequalis triangulo rectilineo REr.*

(b) n.22. Quoniam enim segmentum GP est (*b*) differentia triangulorum TEI, REO; erit triangulum REO cum segmento GP æquale triangulo TEI. Quare totum triangulum REr cum segmento GP æquabitur binis triangulis TIE, rOE, (c) n.22. sive (*c*) segmento cycloidali GDp, & ablato utrinque segmento GP, erit triangulum REr æquale sectori PGpD, sive ob triangula PGp, PIp super eadem basi Pp, & inter easdem (d) 37.l.1. parallelas Pp, Gg æqualia (*d*), erit triangulum REr æquale sectori PIp.

24. Corol.7. *Si ordinata per centrum transeat; chorda a vertice ad ejus extremum punctum ducta abscindit segmentum aequale dimidio quadrato radii circuli genitoris, & trilineum clausum ordinata, & arcubus circuli ac cycloidis aequatur utralibet ex parte quadrato radii ipsius.*

Si enim punctum I abeat in centrum C; abit O, adeoque & P in verticem D, triangulum OER fit nullum, chorda Gp evadit GD, & segmentum a chorda GD abscissum (e) 41.l.1. evadit æquale soli triangulo EIT, quod cum sit (*e*) dimidium rectanguli sub EI & IT in eo casu æqualibus radio circuli, evadit dimidio quadrato radii æquale. Patet igitur primum.

Trilineum autem GDT, quod est duplum ejus seg- (f) n.20. menti (*f*), evadit æquale quadrato radii. Patet igitur & secundum.

25. Corol.8. *Si ordinata abscindat a vertice quartam axis partem; abscindit segmentum triplum trianguli aequilateri descripti supra radium circuli osculatoris.*

Si enim POp abscindat DO quartam axis partem seu dimidium radium DC; puncta O, I, congruent; eritque seg-

segmentum PDp æquale (*a*) triangulo REr. At in eo casu (a) n.23.
ductæ Dr, Cr bases triangulorum COr, DOr habentium
angulos ad O rectos (*b*), latus Or commune latera DO, OC (b) n.4.
æqualia, erunt (*c*) æqualia, adeoque triangulum DCr æqui- (c) 4. l.1.
laterum, ad quod triangulum erit EOr ob verticem r com-
munem, ut EO ad CD (*d*), sive ut 3. ad 2., & totus REr (d) 1. l.6.
ipsius OEr duplus ob Rr sectam bifariam in O (*e*) erit ut 6. ad (e) 3. l.3.
2., nimirum triplus.

26. *Scholium*. Segmenta GDp, & sectores PIp sunt omnia geometrice quadrabilia, cum æquentur triangulis rectilineis datis geometrice, quibus æquale quadratum assignari potest (*f*). Ea sunt quæ Jo: Bernoullius determinavit. (f) 14. l.2.
Segmentum quod corol.7. determinavimus est Leibnitianum, & trilineum est Hugenianum, quorum alterum ex altero eruitur; segmentum quod in corol.8. designavimus est Hugenianum pariter, inter quos omnes Bernoulliani continentur.

Interea digna est peculiari adnotatione relatio inter Cycloidem & circulum genitorem. Basis æquatur uni circumferentiæ circuli, axis binis radiis, area tribus areis, perimeter quatuor diametris.

27. Prop.4. Theor. *Si filum advolutum semicycloidi AMI evolvatur a vertice A tum advolvatur semicycloidi IB ordine contrario positæ generatur cyclois integra ADB evoluta æqualis & basim parallelam habens ipsius basi.* F.8.

Demonstratur. Ex quovis puncto M semicycloidis AMI,
ducatur recta MO parallela basi IH (*g*), chorda AO, & ipsi (g) 31 l.1.
parallela MN, quæ cycloidem continget in M (*h*): ex pun- (h) n.9.
cto E assumpto in dimidia basi AB cycloidis ADB genitæ a
circulo DRE æquali AOH, ducatur chorda ejusdem circuli
ER parallela chordæ OA, & ex R recta RP parallela basi
AB, donec occurrat tangenti MN productæ in P.

Quoniam anguli alterni OAE, AER æquales sunt (*i*); (i) 29. l.1.
etiam RED, OAH complementa ad rectum æqualia erunt;
adeoque (*k*) arcus DR, HO æquales. Cum autem & AOH (k) 26 l.3.
æquatur toti AE (*l*), & arcus AO æquetur rectæ OM (*m*), [l] n.3.
ac proinde AN (*n*); etiam arcus OH, adeoque & DR æqua- (m) n.5.
bitur rectæ NE, adeoque & RP (*n*). Est igitur punctum P (n) 34. l.1.
in perimetro cycloidis ADB (*o*). Rursus chordæ ER, AO [o] n.5.
arcuum æqualium æquantur inter se (*p*); quare & PN, NM
iis æquales (*q*) æquantur pariter inter se, & PM est dupla [p] 29 l.3.
MN, adeoque dupla AO, sive (*r*) æqualis arcui MA. Filum (q) 34. l.1.
autem dum evolvitur ob tensionem habet semper positionem (r) n.14.
rectæ tangentis curvam, & ejus pars evoluta æquatur arcui
MA. Igitur ipsum filum congruet cum recta MP, & ejus

extre-

extremum punctum erit in P, quod, dum evolvitur, descri- bet semicycloidem APD: Et eadem demonstratione dum advolvitur filum semicycloidi ID, generat aliam semicycloidem DB. Q. E. D.

28. *Scholium*. Demonstratis præcipuis cycloidis elementis, reliquum est, ut eam applicemus ad arcuum circularium rectificationem in Geometria, & isochronismum in Mechanica; ut promisimus.

F. 1. 29. In primis unica etiam cycloide descripta, facile est arcum cujuscunque circuli in rectam commutare, & viceversa. Detur arcus circuli cujuscunque. Ei similem abscinde (*a*) in circulo genitore a vertice arcum DR. Duc per R (*b*) rectam RP parallelam basi usque ad cycloidem. Cape (*c*) aliam quæ ad ipsam habeat rationem, quam diameter dati circuli ad axem ED. Habebis rectam dato arcui æqualem. Nam erit (*d*) recta RP æqualis arcui RD; & cum totæ peripheriæ sint, per propositionem 7. ex Archimede, ut diametri circulorum; arcus quoque similes, qui ad suas peripherias habent eandem rationem, erunt inter se, ut diametri; ac proinde habebit arcus datus ad arcum RD eandem rationem quam recta inventa ad rectam RP æqualem arcui RD, adeoque, & recta inventa dato arcui æqualis erit.

[a] 34. 3. (b) 31. l. 1. (c) 12. l. 6. (d) n. 5.

30. Rursus data recta, quæratur arcus dati circuli ei æqualis. In primis cape rectam (*e*), quæ ad eam habeat rationem, quam axis ED habet ad diametrum dati circuli. Si ea excedat basim AB; hanc abscinde quoties potueris; & habebis tot integras circumferentias. Reliquo segmento, si quod supersit, abscinde æqualem rectam AL (*f*) & erecta LM normali ad AB (*g*), & æquali axi ED (*h*), diametro LM describe circulum, cujus intersectio P cum perimetro cycloidis jacens ad oppositam partem puncti E respectu LM, determinabit arcum LP, cui similem si abscindas ex dato circulo, & addas integris peripheriis, si quæ inventæ sunt; habebis arcum dati circuli æqualem datæ rectæ. Demonstratio patet ex eo, quod recta AB æquetur toti peripheriæ circuli genitoris (*i*), AL arcui LP (*k*), & arcus similes circulorum sint, ut diametri juxta numerum superiorem.

(e) 12. l. 6. (f) 3. l. 1. (g) 11. l. 1. (h) 3. l. 1. (i) n. 3. (k) n. 1.

31. Hinc & toti circulo, & cuivis sectori dato, quadratum æquale invenies. Cape rectam æqualem semicircumferentiæ, vel dimidio arcui sectoris (*l*). Inter eam & radium inveni mediam proportionalem (*m*), & ejus quadratum erit æquale areæ circuli, vel sectoris. Patet ex eo, quod totus circulus æquetur rectangulo sub dimidia peripheria & radio per cor. 1. prop. 5. ex Archim., & sectoris cujusvis area æquetur rectangulo sub dimidio arcu, & radio, ut num. 21. de- mon-

[l] n. 29. (m) 13. l. 6.

monſtravimus. Mediæ autem proportionalis quadratum æquetur (*a*) rectangulo ſub extremis. (a) 17. l.6.

32. Pariter angulum quemvis ſecare poteris in quacunque ratione data. Facto centro in anguli vertice, quovis intervallo (commodiſſimum erit intervallum circuli genitoris) deſcribe circulum. Cape rectam (*b*) æqualem arcui cruribus intercepto. Eam ſeca in ratione data (*c*). Alteri ſegmento abſcinde (*d*) ex eodem circulo arcum æqualem ab ipſa interſectione cum altero crure verſus alteram; & recta per ſectionem ducta e vertice anguli ipſum angulum ſecabit in ratione data. Nam arcus cruribus interceptus ejuſque partes ſingulæ æquales erunt toti rectæ ſectæ in ratione data ejuſque partibus ſingulis. Quare & ipſe in eadem ratione ſectus erit; ac proinde (*e*) in eadem etiam angulus in centro ejus circuli conſtitutus. (b) n. 29. (c) 10. l.6 (d) n.30. (e) 33. l.6.

33. Pro demonſtrando iſochroniſmo tria ex Mechanica ſunt præmittenda. 1. Corpus non ſolum in linea recta, ſed in curva quavis motum, ex illa flexione perpetua nihil amittit velocitatis jam acquiſitæ, niſi vel medii reſiſtentia, vel alia vis quæcunque eam imminuat. 2. Vires binæ, quæ ſimul agant ſecundum directiones PL, PF parallelogrammi cujuſcunque, & ſint ipſis proportionales, æquivalent vi ſecundum diagonalem PG ipſi diagonali proportionalem, quæ dicitur virium compoſitio, & reſolutio. 3. Ubi vires, quibus corpus per datam lineam movetur verſus datum in ea punctum, ſunt ut diſtantiæ ab eo puncto in ea ipſa linea computatæ; ex quacunque diſtantia motus incipiat, ſemper idem tempus impenditur in deſcenſu uſque ad datum illud punctum. F.8.

34. Prima illa duo pertinent generaliter ad Mechanicam, & tam geometrice demonſtrantur, quam experimentis confirmantur. Hoc poſtremum minus late patet, & ſic demonſtratur. Concipe bina corpora in binis diſtantiis ab eodem illo puncto motum ſimul inchoare. Quoniam vires habent diſtantiis proportionales; velocitates, quæ primo tempuſculo ab iis diſtantiis generantur, erunt in eadem ratione inter ſe, in qua ipſæ diſtantiæ. Quare & ſpatia primo tempuſculo percurſa in eadem ratione erunt; ac proinde in eadem etiam reliqua ſpatia decurrenda. Igitur & vires initio ſecundi tempuſculi, & velocitates ſecundo tempuſculo genitæ, adeoque & totæ velocitates quas habent, compoſitæ ex primis, quæ remanent, ac ex novis, quæ adveniunt, & ſpatia iis decurſa, & ſpatia reſidua in eadem pariter ratione erunt: & ita porro poſt quæcunque tempora, ſpatia, quæ ſupererunt decurrenda, erunt in eadem ratione, in qua integra ſpatia. Quare alterius ex iis corporibus non poterit diſtantia evadere nulla,

nulla, nisi alterius quoque distantia nulla evadat, & proinde ambo simul eo devenient.

31. Jam vero ubicumque sit corpus P in arcu APB semi-
(a) 31.l.1. cycloidis, ducta PR parallela basi (*a*), tum chorda RD, & rectis PL, DL parallelis ipsis DR, PR, quarum prior erit
(b) n.7. cycloidis tangens (*b*); ducatur PG parallela DE, cui occur-
(c) 11.l.1 rat in G recta LG perpendicularis (*c*) rectæ PL, ducanturque PF, GF parallelæ ipsis GL, PL. Quoniam si recta PG produceretur usque ad AE, esset ei perpendicularis (*d*), ut axis
[d] 29.l.1. DE, cui parallela est, erit (*d*) perpendicularis etiam rectæ PR; adeoque angulus GPR rectus æqualis erit angulo LDE pariter recto (*d*), ob LD, AE parallelas. Demptis igitur angulis LPR, LDR oppositis in parallelogrammo LR, adeo-
(e) 34.l.1. que æqualibus (*e*), erit GPL æqualis RDE. Angulus autem
(f) 31.l.3 GLP rectus æqualis est angulo DRE recto (*f*) in semicirculo.
(g) 34.l.1. Quare ob PL quoque æqualem RD (*g*), erit & (*h*) PG æqua-
(h) 26.l.1. lis ED. Gravitas igitur constans, & semper agens secundum directionem verticalem eandem, secundum quam jacere concipitur axis ED, & ipsi parallela recta PG, exponi poterit per ipsam PG, & æquivalebit binis viribus secundum rectas PF, & PL proportionalibus ipsis rectis. Earum virium prima tota sustinetur a cycloide, quam perpendiculariter urget,
(i) 29.l.1. cum sit perpendicularis ejus tangenti PL (*i*). Secunda urget corpus secundum directionem curvæ, & auget velocitatem jam acquisitam. Hæc porro cum proportionalis sit rectæ PL,
(k) n.13. quæ æquatur chordæ DR, sive (*k*) dimidio arcui PD, semper ipsi arcui proportionalis erit. Quare cum vis urgens corpus secundum directionem cycloidis sit proportionalis distantiis a puncto infimo D computatis in eadem cycloide; ubicunque incipiat motus in arcu APD, semper idem tempus impendetur in descensu per eum arcum, cujuscumque longitudinis sit.

32. Eadem autem temporum æqualitas habebitur & in ascensu. Nam in ascensu ipso vires eædem in iisdem punctis easdem velocitates destruent, quas in descensu produxerant, ac proinde tota velocitas eodem tempore, & per eumdem arcum destruetur, quibus producta fuerat.

Hinc autem si inter duas semicycloides AMI, BI appendatur pondus sustentatum filo æquali arcui semicycloidis; filo ipso alternis vicibus advoluto, & evoluto, percurret corpus arcus cycloidales semper eodem tempore, virium altera PF filum tendente, altera PL accelerante corpus in descensu, vel in ascensu retardante: & tempus oscillationum minimarum tempori maximarum æquale semper erit.

33. *Schol.*2. Considerantur a Geometris aliæ quoque cycloi-

cycloides, quas dicunt *contractas*, aut *protractas*. Contractæ sunt, quas generat punctum, quod assumi concipitur in radio rotæ producto ultra peripheriam; protractæ, quas generat punctum assumptum intra rotam, inter peripheriam, & centrum. Si LPM referat non rotam, sed circulum, cujus radius est distantia puncti describentis a centro rotæ, qui dicitur circulus genitor, erit arcus LP ad rectam AL, & arcus RD ad rectam RP semper in eadem ratione, in qua radius genitoris ad radium rotæ, nimirum in ratione majoris inæqualitatis in cycloide contracta, minoris in protracta. Hasce cycloides primi etiam cycloidis primariæ Auctores considerarunt. Fig. 1.

34. Si autem circulus revolvatur non super rectam AB, sed super alium circulum; curvas, quas generant puncta in eo assumpta, vocant *Epicycloides*, de quibus multa præclara demonstravit Nevvtonus l.1. principiorum, & Philippus De la Hire opusculo integro earum usum demonstravit pro formandis rotarum dentibus ita; ut motus æquabilitas conservetur.

35. Demum curvæ etiam ex cycloidalium genere consideratæ sunt, quas generat curva quævis supra aliam quamvis curvam revoluta. Quinimmo demonstravit idem Philippus De la Hire in Commentariis Acad. Parif. ad annum 1706., quo pacto curva quævis generari possit rotatione curvæ cujusvis supra curvam aliam, quæ datis illis duabus determinari potest; ubi & naturam curvarum, quæ ex alterius curvæ revolutione supra alteram generantur, sinthetica methodo persecutus affectiones earum elegantissime definivit; quas ipsas curvas insequenti anno in iisdem commentariis generaliter tractavit Nicolius. Sed ea non sunt hujus loci; & logistica nos jam nimium evagatos ad sese vocat.

De Logistica.

1. DEfinitio. In recta AG indefinita utrinque assumpto ad arbitrium segmento CE, erectisque pariter ad arbitrium CD, EF perpendicularibus ad CE (*a*), & inæqualibus, & assumptis utrinque perpetuo CA, EG æqualibus ipsi CE (*b*), ac erectis pariter perpendicularibus AB, GH ejus longitudinis, ut sit (*c*) semper perpendicularis proxime sequens ad proxime antecedentem, ut EF ad CD, concipiatur (*d*) secari bifariam tam CE in I, quam quodvis aliud segmentum EG in i, ac erigi IL, il perpendiculares ad CE, EG, quæ sint (*e*) mediæ proportionales illa inter CD, EF, hæc inter EF, GH: tum sectis bifariam CI, IE, Ei, iG in Fig. 1. (a) 11.l. (b) 3.l.1. (c) 11.l.6. (d) 10.l.1. (e) 13.l.1.

M, O, m, o, erigi perpendiculares MN, OP, mn, op, quæ sint mediæ proportionales inter binas sibi proximas, & ita porro ultra quoscumque limites concipiantur segmenta omnia rectæ AG perpetuo bifariam secari, erectis perpendicularibus mediis geometrice proportionalibus inter binas sibi proximas lineam continuam BDFH transeuntem per omnes vertices hujusmodi perpendicularium, & perpetuo progredientem secundum directionem rectæ AG dico *Logisticam*, vel *Logarithmicam*: rectas axi perpendiculares, & ad Logisticam terminatas dico *Ordinatas*, rectam AG indefinitam dico *Axem*.

2. Corol. 1. *Logistica in punctis axis quibuscumque non nisi unicam ordinatam habet.*

Patet: quia aliter non perpetuo progrederetur secundum directionem axis.

3. Corol. 2. *Ordinatæ illæ, quæ oriuntur ex dato quovis bisectionum numero, erunt in continua progressione geometrica.*

Patet: nam primæ illæ AB, CD, EF, GH sunt per constructionem in continua ratione CD ad EF; quæ oriuntur ex prima bisectione, cum sint mediæ proportionales singulæ inter binas proximas, una cum his ipsis, sunt continuo in eadem illa ratione subduplicata: quæ oriuntur ex secunda una cum præcedentibus, sunt omnes continuo in ratione subduplicata præcedentis rationis, & ita porro.

4. Corol. 3. *Logistica ex altera parte recedit ab axe, ex altera accedit perpetuo, & ultra quoscumque limites, ita tamen ut axis sit asymptotus, cum quo nusquam concurrat.*

In primis enim puncta illa omnia, quæ per bisectiones segmentorum axis, & perpendicularium erectionem geometrice definiuntur, ex altera parte perpetuo recedunt, ex altera perpetuo accedunt ad axem; cum ob primas illas CD, EF inæquales, ordinatæ omnes ex quovis bisectionum numero ortæ constituant progressionem versus alteram partem majoris inæqualitatis versus alteram minoris. Sit autem EF major, quam CD, &, si fieri potest, aliquod segmentum logisticæ RS secundum directionem DF, vel æquidistet axi, vel ad eum accedat. Demissis ex R & S (*a*) perpendiculis RT, SX, continua bisectione devenietur ad particulas axis minores dimidia ipsa TX: ubi nimirum numerus particularum inter E & G, qui continue augetur, excesserit rationem dimidiæ TX ad EG. Quare necessario aliqua ex particulis cadet inter T, & X, ut mi, & ordinata iQ sequens erit vel æqualis præcedenti mV, vel ea minor, quæ tamen debuit esse major (*b*). Quare logistica perpetuo secundum directionem DF recedit, & secundum directionem FD accedit ad axem.

(a) 12. l. 1.

(b) n. 3.

Rur-

Rursus in progressione geometrica AB, CD, EF, GH in infinitum continuata devenitur ad quantitatem quavis data majorem, & in inversa ad quavis data minorem juxta lemma 1. & 2. post prop. 11. l. 6. Quare logistica recedit ex altera parte, & ex altera accedit ultra quoscunque limites.

Demum continuatis utcumque segmentis CA, semper habebitur aliqua ordinata (a) AB, tertia nimirum continue geometrice proportionalis post binas præcedentes, & segmentum logisticæ inter ipsam, & præcedentem semper ab axe recedit. Nusquam igitur Logistica cum axe congruet; qui proinde erit ejus asymptotus. (a) 11. l. 6.

5. *Scholium*. Hac definitione uti libuit tum alias ob causas, tum ad vitandam irrationalitatem, & ostendendum, quo pacto geometrice determinari possint infinita puncta, eaque quantum libuerit inter se proxima etiam datis binis ordinatis CD, EF, & earum intervallo CE. Joannes Neperus Baro Merchistonii primus Logarithmorum auctor (ipsi enim debentur, qui primus edidit, utut dicantur prius Justo Byrgio in privatos suos usus reservanti innotuisse) logarithmicam curvam sic definit. Recta Cc indefinita perpendicularis rectæ indefinitæ AG moveatur motu æquabili, & parallelo, & per eam punctum D versus axem excurrat celeritate proportionali distantiæ ab ipso; quod eo reducit, ut æqualibus rectæ Cc itineribus respondeant semper distantiæ puncti D a puncto C geometrice proportionales. Ea cum nostra congruit; nostra enim illa segmenta axis æqualia, sunt ipsa rectæ Cc itinera, & ordinatæ in progressione geometrica sunt ipsæ distantiæ puncti. Sed & ibi, & apud nos conditio illa expressa progressionis geometricæ respondentis abscissis axis æqualibus non exhibet omnes ordinatas, sed eas solum, quæ respondent certis punctis axis. Si enim capiantur bina axis segmenta CE, EX incommensurabilia, nullo modo axis poterit secari in partes æquales, ita ut sectionum puncta incidant in C, E, X, aliter CE, EX haberent pro mensura communi unam ex illis ipsis particulis. Quamobrem si definitio illa complectitur ordinatas spectantes ad puncta C, E, exhibere non poterit ordinatam spectantem ad X. Hujusmodi autem ordinatas complectitur Neperi definitio motu continuo habente in punctis rationalibus conditionem, quam definitio exprimit; nostra vero continuatione lineæ transeuntis per omnes vertices ordinatarum, quæ cum expressa conditione eriguntur. Nostra autem præterea statim speciem ingerit possibilitatis lineæ, cum ostendat geometricam inventionem punctorum quot libuerit, & ut libuerit proximorum.

6. Prop. 1. Theor. *Si ordinatæ AB, CD intercipiant* Fig 2.

segmentum axis AC æquale segmento EG, quod intercipiunt ordinatæ EF, GH, erit AB ad CD, ut EF ad GH.

(a) 12.l.6. Si enim non sit, inveniatur (*a*) quarta proportionalis post AB, CD, EF, quæ sit AM minor, vel Am major, quam
(b) 31.l.1. AH. Ducatur ML, vel ml parallela axi (*b*); quæ logisticæ alicubi occurret in L vel l, cum nimirum ea ex altera parte
(c) n.4. recedat ab axe, ex altera ad eum accedat (*c*) ultra quoscumque limites. Demissis inde LI, li perpendicularibus ad
(d) 12.l.1. axem (*d*), quæ erunt æquales ipsis GM, Gm (*e*) per conti-
(e) 34.l.1. nuam bissectionem axis deveniatur, ut num.4., ad particulas minores septima parte rectæ GI, vel Gi, & sectionum eæ, quæ proxime præcedunt puncta A, C, E, G, sint N, P, R, T, quæ proxime sequuntur, sint n, p, r, t. Contineat autem TX, vel Tx sex ejusmodi particulas, & per omnia sectionum puncta
(f) 11.l.1. concipiantur erectæ ordinatæ (*f*).

Primo quidem quoniam GI est major septem ejusmodi partibus, quarum TX continet sex, GT non plus quam unam; erit GI major quam GX, & eodem argumento Gi erit ma-
(g) n.4. jor quam Gx. Quare (*g*) erit IL minor quam XV, & il major quam xu.

Jam vero cum AC sit æqualis EG, erit Np major quam rT, ac proinde nP major quam RX, eo quod AN, An, CP, Cp non sint singulæ singulis particulis majores, quarum in TX auferuntur sex, & in Rr non adduntur plures quam duæ; adeoque auferantur ibi non plures, hic non pauciores quam quatuor. Quare inter n & P plures habebuntur ordinatæ, quam inter R & X; ac proinde ratio no ad PQ erit minor, quam ratio RS ad XV. Cum enim ordinatæ definitæ per puncta se-
(h) n.3. ctionum progressionem geometricam eandem constituant (*h*); quæ æqualem numerum ordinatarum intermedium habent, arguendo ex æqualitate ordinata, sunt in eadem ratione; ac proinde est no ad PQ, ut RS ad aliquam posteriorem ipsa XV;
(i) n.4. adeoque (*i*) ipsa majorem. Multo igitur magis ratio AB minoris (*i*) ad CD majorem (*i*), sive ex hypothesi ratio EF ad IL est major quam ratio ejusdem EF majoris ipsa RS (*i*) ad XV. Adeoque erit XV minor quoque quam IL, qua simul est major. Quod est absurdum.

Contra vero pauciores sunt particulæ in nP, quam in Rt; quare pauciores in Np, quam in rx, additis ibi non plus quam quatuor, hic additis 6., & ablatis non plus quam binis. Quare erit ratio NO ad pq major quam ratio rs ad xu, & multo magis ratio AB majoris ad CD minorem, sive ratio EF ad il erit major quam ratio ipsius EF ad xu. Ac proinde xu erit etiam major quam il, qua simul est minor, quod pariter est absurdum.

Igitur

Igitur ipsa GH est quarta proportionalis. Q. E. D.

7. Corol. 1. *Bina ordinatæ quæcumque ejusdem rationis idem, ubicumque sint, segmentum axis intercipiunt.*

Si enim ratio AB ad CD fuerit eadem, ac ratio EF ad GH, & segmentum AC non fuerit æquale EG; abscissa (*a*) EX, vel Ex ipsi æquali, erit (*b*) EF ad XV, vel xu, ut AB ad CD, sive ex hypothesi ut eadem EF ad GH. Quare GH æqualis esset XV, vel xu: quod est absurdum (*c*).

(a) 3. l. 1.
(b) n. 6.
(c) n. 4.

8. Corol. 2. *Ordinatæ, quæ abscindunt in axe segmenta æqualia, sunt in progressione geometrica, & quæ sunt in progressione geometrica abscindunt segmenta æqualia.*

Patet ex propositione, & corol. 1. Est enim uterque casus particularis, in quo puncta C, E concipiantur congruere.

9. Corol. 3. *Ordinatæ, quæ sunt in progressione geometrica, abscindunt in axe segmenta a quovis ejus puncto ad libitum assumpto, quæ sint in progressione arithmetica, & viceversa.*

Patet ex corol. præcedenti. Si enim assumatur ad arbitrium punctum axis A, & sint CD, EF, GH in continua progressione geometrica; segmenta AC, AE, AG habebunt differentias æquales; adeoque erunt in continua progressione geometrica, & viceversa.

10. Corol. 4. *Si sint tres ordinatæ quæcumque, erit ratio primæ ad tertiam eadem ac ratio primæ ad secundam toties multiplicata, quot exprimit ratio segmenti axis intercepti inter primam, & tertiam ad segmentum interceptum inter primam & secundam.*

Sint enim ejusmodi ordinatæ AB, CD, GH, & sit primo AG ad AC, ut numerus integer ad unitatem; divisa AG in partes æquales AC (*d*), si e singulis divisionum punctis erigerentur ordinatæ (*e*); essent in progressione geometrica (*f*), in qua AB ad secundam ex iis ordinatis esset in ratione duplicata ipsius AB ad primam CD, ad tertiam vero in ratione triplicata, & ita porro; adeoque ad postremam in ratione toties multiplicata, quoties AG continet AC, sive quot exprimit ratio AG ad AC.

(d) 9. l. 1.
(e) 11. l. 1.
(f) n. 8.

Sit secundo AG ad AC, ut numerus m ad numerum n. Divisa AG in numerum particularum m (*g*) sit earum prima An: & AC continebit earum partium numerum n accurate; eritque eodem discursu ratio GH ad AB multiplicata rationis no ad AB vicibus m; ratio autem no ad AB submultiplicata rationis CD ad AB vicibus n: ac proinde GH ad AB erit in ratione vicibus m multiplicata rationis, quæ vicibus n est submultiplicata rationis CD ad AB, nimirum in

(g) 10. l. 6

ratione multiplicata vicibus $\frac{m}{n}$, quæ eſt expreſſio rationis AG ad AC.

Demum ſi AC, AG ſint incommenſurabiles, & ratio GH ad CD non ſit multiplicata rationis CD ad AB toties, quot exprimit ratio AG ad AC, erit in ea ratione ita multiplicata aliqua minor, vel major quam GH. Sit ea GM vel Gm. Ducta ML vel ml parallela baſi (a), demiſſa ordinata LI vel li (b), ſecetur AG (c) in plures partes æquales, quam exprimat ratio GI vel Gi ad AC, & ſingulæ ex iis partibus erunt minores quam GI vel Gi. Quare aliquod e punctis diviſionum cadet in X vel x inter G, & I, vel i; & erecta (d) XV vel xu, erit ejus ratio ad AB toties multiplicata rationis CD ad AB, quot exprimit ratio AX, vel Ax ad AC, quæ in primo caſu eſt minor, in ſecundo major ratione AG ad AC. Quare ratio XV ad AB erit minor quam GM, ſeu (e) IL ad AB, vel ratio xu ad AB major, quam ratio Gm, ſeu il (e) ad AB; adeoque VX minor quam LI, vel ux major quam li; quorum utrunque eſt abſurdum (f). Patet igitur corollarium etiam in caſu incommenſurabilitatis.

(a) 31. l. 1. (b) 12. l. 1. (c) 10. l. 6. (d) 11. l. 1. (e) 34. l. 1. (f) n. 4.

11. Corol. 5. *Si ordinatæ omnes minuantur in quavis ratione data; orietur logiſtica æqualis priori, ſed promota ſecundum axem per intervallum æquale ſegmento axis reſpondente binis ordinatis rationis datæ.*

Fig. 3.

Si enim in linea GHI ſint ordinatæ AG, EH, CI in eadem ratione ad ordinatas logiſticæ AB, EF, CD ſingulæ ad ſingulas; erunt etiam alternando illæ ad ſe invicem, ut hæ pariter ſingulæ ad ſingulas. Ducta autem Gg parallela axi (g), quæ alicubi occurret logiſticæ in g (h): demiſſa ordinata ga (i), & captis ae, ac æqualibus AE, AC (k) verſus eamdem plagam, ac erectis (l) ordinatis eh, ci; erit (m) ag ad eh, vel ci, ut AB ad EF, vel CD, ſive ut AG, vel eadem ag ipſi æqualis (n) ad EH, vel CI. Quare erunt & EH, CI æquales ipſis eh, ci; ac proinde ſi axis AEC figuræ AGHI retrahatur, donec congruat cum aec ſibi æquali; congruentibus angulis rectis, congruent ordinatæ quoque AG, EH, CI cum ordinatis æqualibus ag, eh, ci, & tota linea GHI cum linea ghi. Spatium autem, per quod ghi promovetur in GHI, eſt aA intervallum reſpondens ordinatis AB, ag exprimentibus illam rationem datam AB ad AG.

(g) 31. l. 1. (h) n. 4. (i) 12. l. 1. (k) 3. l. 1. (l) 11. l. 1. (m) n. 6. (n) 34. l. 1.

12. Corol. 6. *Segmentum axis interceptum inter binas ordinatas rationis cujuſcumque ad ſegmentum interceptum inter binas cujuſcumque alterius eſt in omnibus logiſticis in eadem ratione; & ſegmentum axis unius logiſticæ interceptum inter ordinatas rationis cujuſcumque*

ad

ad segmentum alterius cujuscumque logisticæ interceptum inter ordinatas ejusdem rationis erit semper in eadem ratione constanti.

Sint binæ logisticæ in fig. 1. & 2., & tam CD ad AB, quam GH ad AB in prima ut in secunda. Erit utrobique (*a*) ratio GH ad AB toties multiplicata rationis CD ad AB, quot exprimit ratio AG ad AC. Cum igitur ambæ illæ rationes sint utrobique æquales, erit utrobique æqualis & ratio AG ad AC. Patet igitur primum. F. 1. 2. (a) n. 10.

Quoniam autem alternando est AG in prima ad AG in secunda ut AC in prima ad AC in secunda; patet & secundum.

13. Prop. 2. Theor. *Recta, quæ bina quævis Logisticæ puncta conjungit, ita in nullo alio puncto ipsi occurrit, ut segmentum iis punctis interceptum jaceat in acuto eorum angulorum, quos ipsa usque ad axem producta cum ipso axe constituet, reliqua omnis Logistica in obtuso.*

Sint ejusmodi puncta BD, demissis BA, DC ordinatis (*b*) & secta AC bifariam in E (*c*), ac erecta ordinata EF (*d*), quæ rectæ BD occurrat in G, secent ipsam in punctis I & H rectæ ex B & D ductæ parallelæ axi (*e*). Quoniam in triangulis BGI, DGH præter angulos in G ad verticem æquales (*f*), anguli ad I & H, & ad D, & B alterni æquales sunt (*g*); latera autem BI, HD æqualia segmentis (*h*) AE, EC æqualibus, æquantur inter se; æquabuntur & IG, GH (*i*). Cum vero sit (*k*) CD sive EH (*l*) ad EF, ut EF ad AB, sive EI (*l*); erit per conversionem rationis EH ad HF, ut EF ad FI, sive alternando EH ad EF, ut HF ad FI, adeoque ob HE, vel CD majorem FE (*m*) erit HF major quam FI, Quare ipsa HF erit major quam dimidia IH, sive major quam HG, adeoque punctum F jacebit intra trapezium ABDC. Eodem autem pacto si AE, EC bifariam perpetuo secarentur, omnes vertices ordinatarum transeuntium per Sectionum puncta jacerent intra trapezia ABFE, EFDC, quæ priori trapezio ABDC continentur, & ita porro. F. 4. (b) 12. l. 1. (c) 10. l. 1. (d) 11. l. 1. (e) 31 l. 1. (f) 15. l. 1. (g) 29. l. 1. (h) 34 l. 1. (i) 26. l. 1. (K) n. 8. (l) 34. l. 1. (m) n. 4.

Hinc autem deducitur omnia prorsus puncta segmenti BFD jacere intra idem trapezium: si enim aliquod punctum jaceret vel extra id trapezium, vel in recta BD; necessario aliquod segmentum ut MO jaceret intra triangulum BFG, vel GFD. Demissis autem ordinatis ML, ON (*n*), & continuata bissectione donec una e particulis evaderet minor, quam LN, aliquod e punctis sectionum caderet inter L & N in Q; unde erecta ordinata (*o*) QP, vertex P caderet extra trapezium ABFE, vel EFDC, intra quod debuit cadere. (n) 12. l. 1. (o) 11. l. 1.

(a) n.4. Producta autem DB, semper ob DC, AB inæquales (*a*) secabit axem, alicubi in S, cum ejus parallelam BI secet; & (b) 17.l.1. perpendicula BA, DC jacebunt ex parte anguli acuti DSC (*b*), adeoque & segmentum Logisticæ BFD. Si autem in eadem producta versus D capiatur quodvis punctum d, & ducatur dBs punctum D eodem argumento jacebit intra angulum dsC, adeoque recta Bd & punctum d extra angulum DSC acutum in obtuso DsR; & eadem est demonstratio pro puncto quovis b assumpto in Logistica DFB producta versus B, ducta nimirum recta per D, & b. Quare recta BD in nullo alio puncto occurrit Logisticæ, segmento quidem BFD jacente in angulo DSC acuto, reliqua vero Logistica in obtuso. Q. E. D.

14. Cor. 1. *Nulla recta in pluribus, quam duobus punctis Logisticæ occurrit.*

Patet ex ipsa propositione. Quæ enim recta occurret in binis, in nullo alio puncto poterit occurrere.

15. Cor. 2. *Logistica est linea curva, quæ curvitatem axi perpetuo obvertit.*

Patet primum. Cum recta enim nullus ejus arcus perpetuus congruit; si nulla recta ipsi in pluribus, quam in duobus punctis occurrit.

Patet secundum: quia arcus quem chorda quævis BD subtendit, cum jaceat intra trapezium ABDC, jacet inter chordam & axem, ac proinde versus axem curvatur.

16. Cor. 3. *In quovis Logisticæ puncto recta quædam linea ipsam ita tangit, ut cum axe concurrat ad angulos inæquales versus eam partem, versus quam Logistica ad ipsam accedit, & omnia Logisticæ puncta utrinque circa contactum jaceant in eorum angulorum obtuso.*

F. 5. Conjunctis enim binis quibuscunque punctis ED, de-
(c) 12.l.1. missis ordinatis EV, DC (*c*), concipiantur per quævis puncta M assumpta inter E, & D in recta ED ductæ rectæ ordi-
(d) 31.l.1. natis parallelæ (*d*), quæ axi occurrent alicubi in Q, & arcui
(e) n.13. ED alicubi in N inter M, & Q (*e*). Erit autem omnium MN aliqua maxima: quod sic probatur. Cum arcus ipse sit clausus trapezio EVCD; erit aliqua, qua nulla sit major: sit ea KI, quæ producta concurrat cum axe in B: & ipsi nulla alia erit æqualis: si enim esset aliqua MN æqualis; ducta IN, esset
(f) 33.l.1. MKIN parallelogrammum (*f*); Et arcus ab N ad I deberet jacere intra trapezium NQBI, ex demonstratione propositionis, ac proinde extra parallelogrammum MNIK: adeoque quævis alia ipsi MN parallela ducta inter M & K usque ad eum arcum esset major quam KI; cum huic æquale debeat
(g) 34.l.1. esse segmentum recta NI terminatum (*g*) quod est contra hypothesim.

Ducti

Ducta autem per I recta ipsi DE parallela, quæ rectæ cuivis MQ occurrat in O, erit MO æqualis KI (g), adeoque major quam MN, cumque eadem sit ratio pro omnibus punctis M utralibet ex parte puncti I; totus arcus EID, utrinque circa I jacebit ad easdem parte rectæ OI versus chordam ED; & quoniam producta DE occurret alicubi axi in S ad angulos inæquales versum eam partem versus, quam Logistica ad eam accedit juxta num. 15.; ac proinde eodem etiam modo & IO ipsi parallela alicubi in T; jacebit totus arcus EID, in angulo obtuso STP, & multo magis in eodem angulo jacebunt reliqua omnia Logisticæ puncta, quæ (a) jacent in angulo obtuso RSD. (g) 34. l. 1. (a) n. 13.

Assumpto demum ubicunque puncto i, demissa ordinata ib (b), capta bt in axe æquali BT & ad easdem partes, (c) & ducta ti indefinita; per quodvis ejus punctum utralibet ex parte puncti i agatur ordinata qn (d), ac assumpta ad easdem partes TQ æquali tq, ducatur pariter ordinata QN (d), occurrens tangenti TI in O; & erunt etiam qb, QB æquales; ac proinde (e) qn ad bi, ut QN ad BI. Est autem etiam (f) ib ad qo, ut bt ad qt, ut BT ad QT, ut IB ad QO. Quare ex æqualitate ordinata erit qn ad qo, ut QN ad QO in ratione majoris inæqualitatis. Quamobrem & recta it [occurrens axi ad eas partes versus quas Logistica ad axem accedit, in angulis inæqualibus (g) ob angulum tbi rectum), ita contingit Logisticam in unico puncto i, ut omnia ejus puncta utrinque circa contactum jaceant in eorum angulorum obtuso Rti. (b) 12. l. 1. (c) 3. l. 1. (d) 12. l. 1. (e) n. 6. (f) 4. l. 6. (g) 17. l. 1.

17. Cor. 4. *Subtangens, sive segmentum axis interceptum inter ordinatam, & tangentem in eadem Logistica est ubique constans.*

Patet ex eo, quod pro quovis puncto i sit tb æqualis TB.

18. Cor. 5. *Nulla recta aut parallela axi, aut normalis, aut ad eum inclinata ita, ut angulus acutus spectet eas partes, versus quas Logistica accedit ad ipsum axem est tangens. Cuivis autem rectæ ad partes oppositas inclinatæ tangens aliqua est parallela.*

Per quodvis punctum I Logisticæ transeat recta MIN parallela axi, BIa perpendicularis eidem, & PIO inclinata ita, ut angulus acutus IOB spectet arcum ID accedentem ad axem: nulla ex iis erit tangens. Cum enim Logistica ex altera parte perpetuo recedat ab axe, & ex altera accedat ad eum (h); recta MN eam necessario secabit in puncto I. Pariter cum ea perpetuo progrediatur secundum directionem axis (i), eam recta Ba necessario secabit in I. Cum vero recta OIP jaceat in angulis F. 6. (h) n. 4. (i) n. 1.

BIN,

BIN, MIa; in quibus arcus Logisticæ nullus jacet, necessario ipsa etiam eam secabit in I. Patet igitur primum.

Sit vero IT tangens, cujus inclinatio erit opposita inclinationi PIO (a), & in quovis angulo acuto ad easdem partes inclinetur recta TA, quæ occurret alicubi rectæ BI productæ, si opus est, in A: ac per A ducatur AD parallela axi, quæ necessario alicubi occurret Logisticæ in D (b). Tangens DF per D transiens erit ipsi AT parallela. Demissa enim ordinata DE (c), erit & FE æqualis TB (d), & ED æqualis BA (e). Quare ob angulum quoque E & B rectum, erit & angulus EFD æqualis angulo BTA (f), adeoque FD parallela TA (g). Et eadem est demonstratio pro recta Ta. Patet igitur & secundum.

(a) n 16.
(b) n.4.
(c) 12 l.1.
(d) n.17.
(e) 34 l.1.
(f) 4. l.1.
(g) 28 l.1.

19. Cor.6. *Angulus tangentis cum axe eo minor est, quo magis contactus recedit versus eam partem, versus quam Logistica accedit ad axem; & versus oppositam augetur perpetuo ita, ut ibi quidem decrescat ultra quoscunque limites, hic ultra quoscunque limites accedat ad rectum.*

Nam puncto D recedente ab I ad eam partem, versus quam Logistica accedit ad axem, perpetuo decrescit DE, adeoque & BA, & puncto d pariter recedente ad partem oppositam, crescit perpetuo de, adeoque & Ba (h). Quare in primo casu perpetuo decrescit angulus BTA, adeoque & EFD, in secundo perpetuo crescit BTa, adeoque & efd.

(h) n.4.

Rursus dato quovis angulo acuto, poterit fieri BTA eo minor, vel BTa minus eo distans a recto. Quare decrescet ex parte D angulus F ultra quoscunque limites; & angulus f ex parte d accedet ad rectum ultra quoscunque limites.

20. Cor.7. *Binæ tangentes quæcunque concurrunt inter utrunque contactum inter axem & curvam.*

Cum enim tangens TI secet rectam Ta parallelam tangenti fd, ob angulum quoque BTI minorem angulo efd (i), adeoque minorem, & angulo BTa (k); sursum producta secabit alicubi in Q ipsam quoque df inter I & d, quæ sectio jacebit inter axem Be, & arcum Id, ob arcum DId jacentem extra angulum BTQ (l).

(i) n 19.
(K) 29. l 1.
(l) n. 16.

21. *Quævis recta per contactum ducta ita Logisticam ibidem secat, ut hujus arcus aliquis jaceat in angulo, quem illa cum tangente efficit, nec inter tangentem, & Logisticam ulla alia recta a puncto contactus in utriusque angulo duci possit.*

Sit enim tangens TIt, & recta quævis ducta per I sit primo MIN parallela axi, vel Bia normalis, vel PIO inclinata

clinata ita, ut angulus acutus spectet eas partes, ad quas Logistica accedit ad axem ipsum. Secabit in eodem puncto Logisticam (*a*); & patet curvam ID debere remanere in angulis MIT, aIT, PIT, & curvam Id in angulis MIT, alt, PIt. (a) n 18.

Si autem sit in f.7. recta AID inclinata ad partes oppositas; aliqua tangens HF erit ipsi parallela (*b*), & tangenti IT alicubi occurret in F inter contactus H & I (*c*). Posito A ad easdem partes, ad quas jacet contactus H respectu I & D ad oppositas, & ducta chorda IH; jacebit arcus HI intra triangulum HFI, cum jaceat inter chordam & axem (*d*) punctum autem F inter arcum & axem (*e*). Jacebit igitur arcus IH in angulo FIH, & ob FH parallelam IA, multo magis in angulo AIF. Cumque tota curva HIh jaceat ad easdem partes respectu tangentis TIt (*f*) puncta verò A & D ad partes oppositas, eo quod rectæ AD, Tt se in I secent, jacebunt arcus IH, Ih ad partes oppositas, hinc inde a recta AID. Et eadem est demonstratio pro recta aId. F.7. (b) n.18. [c] n.20. (d) n.15. (e) n.20. (f) n.16.

Quoniam autem semper ID jacet ad partes oppositas curvæ respectu tangentis, & arcus IH semper in angulo FIA. Nulla recta duci poterit in eo angulo quem arcus continet cum tangente.

22. Cor. 8. *Subtangentes in diversis Logisticis sunt inter se in eadem illa constanti ratione, in qua sunt* (g) *segmenta axis abscissa a binis ordinatis cujuscunque rationis datæ.* (g) n.12.

Nam si in binis Logisticis subtangentes BT non sint in ea ratione; ratio subtangentis unius ad alteram erit ea ratione minor. Sit minor ratio subtangentis BT figuræ 8, & capta ibi in ea ratione BA ad subtangentem BT figuræ 5, erit in fig.8. BA major, quam BT; arcus autem aliquis IN, qui (*h*) jacet in angulo ATI obtuso (*i*) ob TBI rectum, jacebit in angulo TIA (*k*). Ducta vero per N ordinata QN (*l*) quæ occurrat alicubi in X rectæ AI: sumatur (*m*) in fig.5. BQ versus eandem partem ad hanc BQ in illa ratione constanti, in qua est BT ejusdem figuræ ad BA figuræ 8., erigaturque QN ordinata (*n*). F.5. 8. [h] n.16. (i) 16 l.1. (K) n 21. (l) 12. l.1. [m] 12. l 6. (n) 11. l.1.

Quoniam est alternando BA ad BQ in fig.8., ut BT ad BQ in 5.; erit dividendo BA ad QA in 8, ut BT ad QT in 5.; adeoque etiam (*o*) IB ad QX in 8., ut IB ad QO in 5. sive in ratione majore, quam in 5. sit IB ad QN. Est autem etiam ex hypothesi rationis constantis, IB ad QN in 8. ut in 5. Quare erit IB ad QX in 8. in ratione majore quam IB ad QN; ac proinde QX minor sua parte QN. Quod est absurdum. (o) 4. l. 9.

Corol.

23. Corol. 9. *Si chorda Logistica producatur usque ad axem; segmentum axis interceptum inter ejusmodi interse-ctionem & ordinatam demissam per punctum propius est minus subtangente; interceptum autem inter eam & ordinatam ductam per punctum remotius, majus est ipsa subtangente.*

F.7. Sit enim chorda IH, occurrens axi in M: demissis ordi-
(a) 12.l.1. natis IB, Hb (*a*), & producta tangente FH usque ad axem in N; patet rectam bM interceptam inter M, & ordinatam Hb fore minorem subtangenre bN, & BM interceptam inter M & ordinatam IB fore majorem subtangente BT: ex eo nimirum, quod concursus F tangentium debeat cadere
(b) n 20. respectu chordæ IH versus axem, & inter puncta I, H (*b*).

24. Corol. 10. *Si curvæ cujusdam subtangens definita per ordinatas perpendiculares ad datum axem sit constans; ea curva erit Logistica.*

F.9. In primis enim ea curva erit perpetuò convexa versus eum axem. Nam si ejus arcus aliquis ab H ad I esset AdiI perpetuo cavus versus axem; caderet ad partes opposi-tas axi respectu chordæ HI, & concursus tangentium, quæ transeunt per I & H, deberet esse alicubi in f ultra chordam HI, adeoque concursus u tangentis fH cum axe caderet a concursu M chordæ productæ versus ordinatas HC, IB, & concursus t tangentis If ad partes oppositas, & esset subtangens Cu minor subtangente BF. Quamobrem nulla pars utcunque exigua ejus curvæ obvertit cavitatem axi.

Deinde per puncta H & I eodem axe transit aliqua Lo-
(c) n.1. gistica (*c*), pariter versus axem convexa (*d*), & subtangen-
(d) n.15. tem constantem habens (*e*); quæ si cum illa curva non con-
(e) n.7. gruit; sit arcus alterius HDI alterius HOI, quorum uterque jacebit versus axem respectu chordæ ob curvitatem axi obversam ab utraque. Si forte ii arcus alicubi sibi invicem occurrunt ante punctum I; transferatur punctum I in primam illam intersectionem post H, & sint IFT, FHV tangentes arcus HOI remotioris a chorda HI. Satis patet tangentes arcus HDI non magis recedere a chorda HI, quam tangentes remotioris HOI. Quare nec tangens per I ducta poterit cadere extra angulum HIF, nec tangens per H extra angulum IHF, eique ad verticem oppositum VHM; adeoque subtangens prima non poterit esse minor quam BT, nec secunda major quam CV sive quam ipsi æqualis BT. Cum igitur & illa secunda æquetur primæ, oportebit utranque ipsi BT æqualem esse.

Demum si per quodvis punctum axis Q inter C & B transeat communis ordinata QOD, occurrens in O Logisticæ, in D

cur-

curvæ illi; eodem argumento subtangens ejusdem curvæ æquabitur subtangenti Logisticæ transeuntis per H, & D, & habentis eundem axem; ac proinde subtangens Logisticæ transeuntis per H, & I, erit æqualis subtangenti Logisticæ transeunti per H & D; adeoque & segmenta axis, intercepta ab ordinatis earum Logisticarum rationis ejusdem, æqualia erunt (*a*): ac proinde ratio CH ad QD erit æqualis rationi CH ad QO, & erunt QO, QD æquales. Quod cum fieri non possit; nisi arcus HDI congruat cum arcu Logisticæ HOI; necessario arcus quivis illius curvæ cum eadem Logistica congruet. (a) n.22.

25. *Scholium*. In his fusius immorari libuit; quia tum maxime curvæ lineæ natura dignoscitur, cum ejus positio ad rectas seu tangentes, seu secantes deprehenditur; libuit autem & inversum theorema subtangentis constantis exigere ad rigidiorem geometriam in corol.10.

Ex corol. autem 5. prop.1., ex 8. hujus, & ex demonstratione postrema corol.10. facile colligitur, logisticas, quæ eamdem subtangentem habent, esse æquales, & rite superimpositas congruere, quæ diversam diversas.

Ex corol.9. per approximationem potest deprehendi ratio quantum libuerit veræ proxima tangentis ad segmentum axis, interceptum inter ordinatas rationis cujusvis datæ. Si enim binæ ejusmodi ordinatæ sint in fig.5. VE, CD, quæ numeris exprimantur, & pariter numeris exprimatur CV; ducta EX parallela basi (*b*), quæ a CD abscindet CX ipsi VE æqualem (*c*), erit (*d*) DX ordinatarum differentia ad EV ordinatam minorem, ut CV ad VS minorem subtangente, sed quæ adjecta CV evadat major. Habentur igitur limites. Sed si concipiatur VC secari bifariam in B, & inveniatur BI media proportionalis inter VE, CD (*e*), quæ invenietur extracta radice quadrata ex producto ordinatarum VE, CD (*f*), ac fiat iterum ut excessus IB supra VE ad VE, ita VB ad quartum; prodibit linea minor subtangente; sed quæ ab ea differat minus quam per VB. Et si per continuam bissectionem inveniantur mediæ, donec deveniatur ad partem axis quamtumlibuerit parvam, devenietur etiam ad limites subtangentis quantumlibuerit proximos. In theorematis circa logisticam impressis inter opera posthuma Hugenii Amstelod.1728. habetur pag.162 bis, & 178. semel ratio subtangentis ad segmentum axis interceptum ordinatis rationis duplæ, ut 43429448190325 1804 ad 30103999566398 1195, sive proxime ut 13. ad 9. Corrigendæ sunt postremæ duæ notæ primi numeri, & quinta secundi: est enim ea ratio adhuc proximius ut 434294481903251838 96-785 &c. ad 301029995663981195240585.

Fig.5.
(b) 31. l.1.
(c) 34. l.1.
(d) 4. l.6.
(e) n.8.
(f) 17. l.6.

Ea autem definita, subtangens cujuscumque Logisticæ Fig.6.

facile

facile determinatur. Si enim in fig. 6. sit quævis ordinata BI,
(a) 10 l.1. quæ bifariam secetur in A (*a*), ducaturque AD parallela
(b) 31. l 1. axi (*b*), erit ea æqualis segmento axis BE (*c*), & proinde ad
(c) 34.l.1. subtangentem in ea ratione determinata.

In coroll. 4. illud videtur mirum, logisticam, quæ est curva, ut vocant, transcendens, non nisi duas habere posse intersectiones cum recta. Curvas Geometræ post Cartesium in certas classes partiri solent per relationem, quam habent ordinatæ ad abscissas computatas a puncto quovis in data recta assumpto usque ad ordinatas ipsas. Quæritur æqualitas inter summas, vel differentias productorum quorumcumque, quæ fiunt ex abscissa ordinata, earum potentiis quibuscumque, & quibuscumque datis rectis: quæ æquatio dicitur. Ubi aliqua ejusmodi æquatio invenitur; curvæ, ad quas ea pertinet, dicuntur *algebraicæ*: in quibus nulla est æquatio, quæ finitis terminis relationem hanc exprimat, dicuntur *transcendentes*; & illas quidem Cartesius *geometricas* has *mechanicas* appellavit. Porro algebraicæ in classes suas distribuuntur juxta dimensionem maximam producti ex abscissa, ordinata, & earum potentiis; ita, ut ubi non invenitur, nisi quadratum alterutrius, vel factum ex ipsis; dicantur secundi gradus: ubi maxima dimensio est cubus alterutrius, vel quadratum alterius ductum in alteram; dicantur tertii gradus, & ita porro. Ac curvæ quidem algebraicæ ad eum gradum ascendunt, qui exprimat, quot intersectiones possint habere cum recta linea: sic sectiones conicæ sunt curvæ secundi gradus, quia rectæ lineæ non nisi in duobus punctis possunt occurrere. Transcendentes autem plerumque omnes transcendunt finitos gradus; quia possunt habere infinitas intersectiones cum recta. Sic cyclois licet videatur habere posse duas tantum, potest habere infinitas; nam cycloides omnes, quas generat circulus perpetuo revolutus supra rectam utrinque infinitam, ad unicam pertinent curvam continuam. At logistica licet binas tantum intersectiones habere possit cum recta; adhuc tamen transcendens est, & nullius finitæ æquationis terminis coercetur. Id autem unde proveniat cogitantibus, visum est provenire ex ea similitudine partium omnium, quam n. 11. demonstravimus; qua fit, ut ubicumque in axe origo ordinatarum capiatur semper ordinatæ & ordinatarum relationes ad se invicem eodem prorsus modo progrediantur, iisdem assumptis abscissis. Unde fieret, ut si quæ æquatio exprimeret relationem abscissarum ad ordinatas; deberet exprimere relationem ejusdem abscissæ ad infinitas ordinatas, nimirum ad eas omnes, quæ respondent eidem abscissæ variata ejus origine per totum axem. Solum æquatio inveniri potest, quæ exprimat

mat relationem ordinatarum ad se invicem per relationem inter abscissas, quæ tamen est æquatio exponentialis. Sed hæc algebram requirunt, & non sunt hujus loci.

Demonstrato in corol. 10., curvam, quæ habeat subtangentem constantem, esse logisticam per rigidiorem geometriam, usui hic esse posset Marchionis Jo: Poleni doctissimi viri præclarum inventum. Is in Epistola ad Hermannum exhibuit instrumentum, quo describi possit motu continuo curva subtangentem constantem habens, adeoque logistica. Sed quoniam ejusmodi instrumentum non ita facile sibi possunt comparare Tyrones, addemus expeditissimam methodum describendi logisticam per puncta.

In recta AH capiantur segmenta AB, BC, GD &c. æqualia (*a*): erigantur ex omnibus punctis perpendicula Aa, Bb, Cc &c. (*b*) occulta, vel quæ deleri possint: assumpto in primo perpendiculo Aa puncto I ad arbitrium, & divisione E pariter ad arbitrium, applicetur regula ad I & E, & notetur in secundo perpendiculo punctum K, tum applicata regula ad K & F notetur punctum L, per L & G determinetur M, & ita porro. Erunt puncta IKLM &c. ad logisticam, quæ facile continuabitur ductu calami. Est enim (*c*) AI ad BK, ut AE ad BE, sive ut BF ad CF ob æqualitatem particularum, nimirum (*c*) ut BK ad CL. Quare AI, BK, CL sunt continue proportionales; & cum eadem sit demonstratio pro reliquis, erunt ea puncta ad logisticam (*d*).

Fig. 10.
(a) 3. l. 1.
(b) 11. l. 1.
[c] 4. l. 6.
(d) n. 1.

Perpendicula illa facilius ducentur, si erecto primo Aa, ducatur per a recta ah parallela AH (*e*), & in ea sumantur ab, bc, cd &c. æquales AB, BC, CD &c.; erunt enim Bb, Cc &c. parallelæ Aa (*f*), adeoque perpendiculares ad AH (*g*).

(e) 31. l. 1.
(f) 33. l. 1.
[g] 28. l. 1.

Si autem detur subtangens RE, ea divisa in numerum quemcumque imparem particularum (*h*), sumantur hinc inde RA, RB æquales singulis particulis: capiantur reliquæ BC, CD &c. æquales binis singulæ, & habebitur intentum quam proxime. Erecta enim RS parallela AI (*i*), quæ chordam KI secabit bifariam in I (*k*); arcus exiguus KI vix ad sensum differet a chorda KI, & a recta, quæ eum tanget in medio in S. Quare erit RE proxime subtangens.

(h) 10. l. 6.
(i) 31. l. 1.
(k) 3. l. 6.

26. Prop. 3. Theor. *Area clausa arcu logisticæ, binis ordinatis, & axe æquatur rectangulo sub differentia ordinatarum, & subtangente.* Fig. 11.

Sint ejusmodi ordinatæ BA, DC. Abscissa ex axe CE (*l*) æquali subtangenti, completo rectangulo DCEF (*m*), ductaque per B verticem ordinatæ minoris (*n*) recta parallela axi, quæ in G, & H occurrat rectis CD, EF, & abscindat CG æqualem AB (*o*); dico aream BACD esse æqualem rectangulo

(l) 3. l. 1.
(m) 31. l. 1.
[n] 34. l. 1.
(o) 31. l. 1.

gulo GF sub DG ordinatarum differentia, & recta DF æquali subtangenti CE.

Si enim alterum ex iis sit minus, sit ratio minoris ad
(a) n.4. majus eadem ac CK ad CD. Ducatur KP parallela axi (a),
(b) 12.l.1. quæ occurret alicubi arcui BD in P (b); demittatur PY or-
(c) 11.l.1. dinata (c), tum recta CA secetur in partes æquales AV, VX, XZ, ZC per continuam bisectionem, donec una ex iis evadat minor quam CY, ut in num 4. Erigantur ordinatæ
(d) 11.l.1. per omnia sectionum puncta (d) VS, XQ, ZO: per bina quæ-
(e) 31.l.1. libet puncta proxima S. Q, agantur rectæ axi parallelæ (e) occurrentes rectis VS, XQ, CD, EF, illa in T, m, I, hæc in R, M, L; & chorda QS occurrat axi in N.

(f) 1.l.6. Erit (f) rectangulum MI ad mE, ut Mm ad mC, si-
(g) 34.l.1. ve (g) ut QT ad SV, ut (h) ST ad VN minorem (i) subtan-
(h) 4. l.6. (i) n.23. gente CE, adeoque & recta mI (g); ac proinde in ratione majore quam ST ad mI, sive (f) quam rectangulum SX ad mE. Quare rectangulum MI est majus rectangulo SX. Pariter est eadem prorsus demonstratione MI ad ME, ut Mm ad MC, sive ut QT ad QX, ut ST ad XN majorem recta ML; ac proinde in ratione minore, quam ST ad ML, sive quam rectangulum RX ad ME. Quare rectangulum MI est minus rectangulo RX. Cumque etiam area logisticæ VSQX sit major rectangulo SX, minor rectangulo RX; erit ratio ejusdem areæ ad rectangulum MI major ratione rectanguli SX ad RX,
(k) 1.l.6. seu (k) ordinatæ præcedentis VS ad sequentem XQ, vel (l)
(l) n.8. penultimæ ZO ad CD, & minor ejus inversa QX ad SV, vel DC ad OZ. Cumque id accidat in omnibus areis logisticæ constituentibus aream BACD, & totidem rectangulis constituentibus rectangulum DH; erit illa ad hoc in ratione minore quam ZO ad CD, & majore inversa. Quare si illa area est minor rectangulo DH, erit ratio CK vel YP ad CD major ratione ZO ad CD; si illa est major, erit ratio CD ad PY minor ratione CD ad OZ. Adeoque in utroque casu PY ma-
(m) n.4. jor quam OZ, quod est absurdum (m). Igitur area ABDC æquatur rectangulo BH. Q. E. D.

27. *Corol. 1. Fere eadem demonstratione infertur solidum genitum revolutione ejusdem areæ circa axem AC, æquari dimidio annulo genito a rectangulo HD.*

Nam concipiatur divisio continuari donec binæ particulæ sint minores quam CY, ita ut CZ jam contineat duas ex particulis, qualium una est VX, & æquetur AX; chorda autem QB occurrat axi in n, & recta BG rectæ QX in t.

Erit cylindrus genitus ab EM ad cylindrum geni-
[n] 11.l.12. tum ab Em (n), ut circulus genitus a CM ad circulum geni-
(o) 2.l.12. tum a Cm, sive (o) in ratione duplicata CM ad Cm, vel (p)
(p) 34.l.1. XQ

XQ ad VS, sive ob XQ, VS, AB continue proportionales (*a*) in ratione simplici XQ ad AB. Quare dividendo erit annulus genitus ab MI ad cylindrum genitum ab mE, ut Qt ad BA, sive (*b*) ut Bt, vel (*c*) AX dupla VX ad An, sive in ratione minore quam dupla VX ad CE majorem An (*d*), vel (*e*) quam duplus cylindrus genitus ab XS ad eundem cylindrum genitum ab Em; ac proinde annulus MI major duplo cylindro SX. Eodem autem pacto idem demonstratur minor duplo cylindro RY; ac proinde ratio ipsius ad duplum solidum VSQX erit major quam ratio dupli cylindri XS ad duplum XR, sive (*f*) quam duplicata VS ad XQ, vel simplex AB ad XQ, sive ZO ad CD, & minor eadem inversa. Reliqua autem demonstratio procedit, ut in propositione.

(a) n.8. (b) 4.16. (c) 34 l.1. (d) n 23. (e) 14.l.2. (f) 14.l.12.

28. Corol.2. *Si concipiatur punctum B abire in infinitum; erit tota area infinita logisticæ inter ordinatam CD, logisticam, & axem, æqualis rectangulo, cujus basis CD, altitudo subtangens: & solidum genitum ejus rotatione circa axem erit æquale dimidio cylindro, cujus basis circulus ab eadem ordinata descriptus, & altitudo eadem.*

Patet, quia puncto B abeunte in infinitum, AB decrescit ultra quoscumque limites, & recta GH abit in rectam CE.

29. Corol 3. *Si DE sit tangens; erit area infinita ad triangulum ECD, ut 2. ad 1., & solidum genitum ejus conversione circa axem ad conum genitum ab eodem triangulo, ut 3. ad 2.* Fig.12.

Patet primum, quia triangulum est dimidium rectanguli sub eadem basi, & altitudine (*g*).

Patet secundum, quia solidum logisticæ ad cylindrum, cujus basis circulus CD, & altitudo CE, est ut 3. ad 6. (*h*). Idem cylindrus ad conum ejusdem basis, & altitudinis, ut 6. ad 2. (*i*). Quare illud solidum ad hunc conum, ut 3. ad 2.

(g) 41.l.1. (h) n.28. (i) 10.l.12.

30. Corol.4. *Area clausa binis ordinatis axe & curva est ut differentia ordinatarum, & potest secari in ratione data, ope ipsius logisticæ.*

Patet primum, quia area ABDC, cum æquetur rectangulo DH, erit (*k*) ut DG. Fig.11.

Patet secundum; secta enim GD in M in ratione data (*l*), & ducta MQ parallela basi (*m*), ac inde demissa ordinata QX (*n*), quæ rectæ BG occurrat in t; erit area ABQX ad XQDC, ut Qt, seu [*o*] GM ad MD.

(k) 1. l.6. (l) 10.l.6. (m) 31.l.1. [n] 1[illegible].l.1. [o] 34.l 1.

31. Corol.5. *Si tangens DE occurrat ordinatæ BA in I, & recta ex D parallela axi in O; erit area OBD ut IB, nimirum æqualis rectangulo sub IB, & subtangente.* Fig 12.

Completo enim rectangulo ECDF (*p*), rectæ per I & B parallelæ axi (*p*) occurrant lateribus EF, CD in M, H, N, G,

(p) 31.l.1.

(a) 43.l.1. Erit complementum IC æquale IF (*a*); quare addito ON. erit CO æquale NF. Demantur hinc area ABDC, inde re-
(b) n.26. ctangulum GF æqualia (*b*): relinquetur area BOD æqualis
(c) 34.l.1. rectangulo NH sub NG, seu (*c*) BI, & GH, seu subtangente constanti CE.

32. *Scholium*. Hisce præter alia nonnulla continentur fere omnia theoremata, quæ Hugenius circa logisticam proposuit, & Grandus demonstravit, demptis iis, quæ ad centra gravitatis pertinent. Jam dicendum aliquid de usu logisticæ. Infinitum esset singula fusius persequi. Delibabimus nonnulla; Indicabimus nimirum usum in Geometria ad inventionem mediarum proportionalium, ac quadraturam Hyperbolæ, & rectificationem Parabolæ: & explicabimus logarithmos, & eorum usum in Arithmetica, ac Trigonometria.

Fig.1. 33. *Datis duabus rectis, & una logistica quærantur quot libuerit mediæ proportionales*.

(d) 11.l.1. Erecta Cc normali ad axem logisticæ (*d*) abscindantur
(e) 3 l.1. in ea Cf, Ch æquales rectis datis (*e*): ducantur fF, hH parallelæ
(f) 31.l.1. axi (*f*), quæ alicubi occurrant logisticæ in F, & H (*g*). De-
(g) n.4. (h) 12.l.1. mittantur ordinatæ FE, HG (*h*); segmentum axis EG sece-
(i) 10.l.6. tur in tot partes unitate addita, quot mediæ inveniendæ sunt,
(k) 11 l.1. in m, i, o (*i*). Erigantur e singulis sectionum punctis ordina-
(l) n.8. tæ mn, il, op (*k*): quæ erunt mediæ quæsitæ (*l*).

Fig.12. 34. Asymptotis MA, AH sibi invicem perpendicularibus, sit Hyperbola aL, cujus notissima proprietas per cor.1. pr.27. Conicorum Grandi est, quod ducta ordinata LH ad alteram asymptotorum alteri asymptoto parallela sit rectangulum AHL semper constans, & proinde æquale quadrato rectæ datæ. Axe eodem sit ad easdem partes logistica dBD habens pro subtangente illam ipsam rectam, & secans AH alicubi in B: ere-
(m) 31.l.1. cta ordinata Hyperbolæ BK parallela AM (*m*), & producta LH usque ad logisticam in D, erit area Hyperbolica aBHL æqualis rectangulo sub HD, & illa ipsa subtangente: quod demonstratur, eadem methodo qua propositio 3. in fig.12.

Si enim non sit æqualis ei rectangulo, sit minus ex iis duobus ad majus, ut CK ad CD. Ducta prorsus ut ibi KP parallela basi, demissa normali PY, secta CA in partes æquales ita, ut earum una CZ sit minor quam CY, erectis
(n) 31.l.1. ordinatis VS, XQ, ZO; ducantur (*n*) per O, Q, S rectæ parallelæ basi occurrentes rectæ AH in z, E, F, hyperbolæ in o, q, s; ac per quæcumque bina puncta proxima Q, S tran-
(o) n.16. seant tangentes (*o*) QN, Sn, quarum prima secet fS productam in T, secunda producta secet XQ in R. Recta demum
(p) 31.l.1. fS producta secet XQ in I, & qt, sn parallelæ rectæ AH (*p*) secent Ff, Eq in t, & n.

In

In primis ob rectangulum AEq æquale quadrato subtangentis XN, erit (*a*) Eq ad XN, ut XN ad AE, sive (*b*) ad XQ, ut (*c*) TI ad IQ æqualem FE (*b*). Quare (*d*) rectangulum Fq æquatur rectangulo sub TI, & subtangente, & est minus rectangulo sub (*e*) SI majore quam TI, sive (*f*) sub VX, & subtangente. Contra vero Fs ad Vn, ut Vn ad AF, vel VS, ut SI ad IR minorem IQ, sive FE; ac proinde rectangulum sub SI vel VX & subtangente minus rectangulo Es. Cum igitur etiam area EqsF sit major rectangulo Fq, & minor rectangulo Es; erit ratio ejus areæ ad rectangulum sub VX, & subtangente major ratione rectanguli Fq ad Es, sive rectæ Eq ad Fs, vel ob rectangula AEq, AFs æqualia, ratione AF ad AE (*g*), vel (*h*) VS ad XQ, sive (*i*) ZO ad CD, & minor inversa ratione Es ad Fq, sive DC ad ZO. Cumque idem contingat omnibus segmentis areæ Hyperbolicæ inclusis in BaLH, respectu totidem rectangulorum sub partibus rectæ AC, & subtangente constanti; erit illa ad rectangulum sub AC vel HD (*k*), & ipsa subtangente in ratione majore quam ZO ad CD, & minore inversa; nimirum si illa est minor hoc rectangulo, erit ratio CK vel YP ad CD major quam ZO ad CD; si illa est major, erit ratio CD ad YP minor quam CD ad ZO, & in utroque casu ZO minor quam YP: quod est absurdum. (*l*)

(a) 17.l.6. (b) 34.l.1. (c) 4.l.6. (d) 16.l.6. (e) n.16. (f) 34.l.1. (g) 16.l.1. (h) 34.l.1. (i) n.8. (k) 34.l.1. (l) n.4.

Eadem demonstratione ducta hdl infra BA, erit area aBhl æqualis rectangulo sub hd, & subtangente. Et quoniam ob rectangulum ABa æquale rectangulo AHL, etiam triangula eorum dimidia (*m*) æqualia sunt; ac proinde dempto AiB, & addito aiL communi, sector aAL æquatur areæ aBHL; erit & is sector æqualis rectangulo sub HD vel AC, & subtangente.

(m) 34.l.1.

Hinc erunt areæ tam segmentorum, quam sectorum, ut rectæ HD vel AC (*n*), & eorum segmenta, ut hujus segmenta. Quare si fuerint AB, AF, Az, AH geometrice proportionales, erint areæ aBFs, ozHL inter se æquales, ob AV, ZC eo casu æquales (*o*). Captis vero segmentis asymptoti AB, AF, AE, Az, AH continue proportionalibus geometrice; erunt & areæ hyperbolicæ, quæ iis respondent æquales. Quod theorema primus omnium cum tanto & plausu, & fructu protulit noster Gregorius a S. Vincentio. Facile autem quæ hic dicta sunt de Hyperbolis æquilateris, habentibus asymptotos perpendiculares, ad reliqua transferuntur.

(n) 1.l.6. (o) n.7.

Cum vero ex quadratura Hyperbolæ pendeat rectificatio Parabolæ per prop.44. Conicorum Grandi, etiam ea haberi poterit ope logisticæ.

Γ47

35. Maxima tamen logisticæ utilitas in ipsis logarithmis sita est. Sint binæ progressiones numerorum quæcumque, altera geometrica — $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.
altera arithmetica 2. — 1. 0. 1. 2. 3. 4. 5. &c.
quæ concipiantur collocatæ altera sub altera, ut libuerit; termini secundæ progressionis dicuntur *logarithmi* terminorum primæ, qui dicuntur *numeri*, singuli singulorum.

Fig. 1. 36. Patet autem, si in fig. 1. incipiendo a quovis puncto E, & versus alteram partem numerando logarithmos positivos, versus alteram negativos, ut nimirum in E sit 0, tum Em sit 1., Ei 2., Eo 3., EG 4., & ex parte opposita EO — 1., EI — 2., & ita porro, singulis logarithmis erigantur perpendiculares rectæ, quæ numeros suos exprimant, ut IL $\frac{1}{2}$, OP 1., EF 2., & ita porro; vertices ordinatarum debere
(a) n. 1. esse in logarithmica quadam (*a*), cum nimirum ordinatæ continue geometrice proportionales insistant axi post æqualia segmenta. Et si ipsa illa logistica constructa esset, invenirentur logarithmi etiam numerorum quorumlibet intermediorum, qui in illa progressione geometrica non occurrunt; nimirum capiendo Ca respondentem dato numero, & ducendo af pa-
(b) 31. l. 1. rallelam axi (*b*), quæ esset logarithmus quæsitus; quia inde demissa ordinata fX (*c*), & esset æqualis aC (*d*), & abscinde-
(c) 12. l. 1.
(d) 34. l. 1. ret CX æqualem af. In iis autem logarithmis, & numeris haberent locum, quæcumque de segmentis axis, & ordinatis demonstravimus.

37. Porro arbitraria est & determinatio progressionum, & collocatio alterius sub altera; semper enim eadem demonstratione consurget logarithmica: & liberum quoque est ita eas collocare, ut altera crescente altera decrescat. Sic poterat inverso ordine collocari progressio arithmetica vocando EO 1., EI 2. &c. positivos, Em — 1., Ei — 2 &c. negativos. Quotiescumque tamen binis numeris rationis datæ responderet eadem logarithmorum differentia; semper eadem logistica oriretur (*e*), solum origo logarithmorum re-
(e) n. 11. trahenda, vel promovenda esset, vel consideratio positivorum ex una plaga in aliam transferenda; nam numeri illi bini essent binæ ordinatæ, & differentia logarithmorum esset segmentum axis; quare logarithmi eo modo permutati semper ejusdem speciei remanerent. Sed si mutata altera ex progressionibus, vel utraque, binis terminis progressionis geometricæ non responderet eadem, ac prius differentia logarithmorum; logistica esset diversa, & subtangentes in ratione earum differentiarum (*f*); & si origo logarithmorum utrobique res-
(f) n. 22. ponderet eidem numero, & crescentibus numeris utrobique crescerent logarithmi, vel utrobique decrescerent; omnium alio-

aliorum numerorum logarithmi primæ speciei ad logarithmos secundæ essent ut unius cujuscumque dati numeri logarithmus primæ speciei ad logarithmum secundæ (*a*), vel ut subtangens primæ ad subtangentem secundæ. (a) n.12.

38. Quæcumque autem collocatio, quarumcumque progressionum constitueretur, si vel constructione mechanica, vel quacumque alia methodo invenirentur omnium numerorum logarithmi, & in tabulas digererentur, saltem usque ad magnum aliquem numerum, statim pateret ipsorum utilitas. Si enim sint quatuor numeri mn, il, op, GH quicumque geometrice proportionales, & logarithmorum numeratio incipiat ubicumque in E, erit summa logarithmorum extremorum Em, & EG æqualis summæ mediorum Ei, & Eo. Nam mi excessus secundi Ei supra primum Em deberet esse æqualis oG excessui quarti EG supra tertium Eo (*b*), ac proinde translato (b) n.7. mi in oG, fiunt Em, EG ex Ei, Eo. Quamobrem in omni regula aurea, ubi datis tribus proportionalibus, quæritur quartus, satis esset addere logarithmum secundi, & tertii, ac detrahere logarithmum primi, & haberetur logarithmus quarti. Sic in progressionibus expositis n.35. cum sit 4 ad 8, ut 32 ad 64; quartus numerus, qui per communem arithmeticam inveniendus esset multiplicando 32 per 8, ac dividendo per 4; invenietur per logarithmos, addendo logarithmos secundi, & tertii, nimirum 2 & 4, & auferendo logarithmum primi, nimirum 1; sic enim habetur 5, cui respondet numerus quæsitus 64. Id autem in majoribus numeris quanti compendii sit, statim patet.

39. At logarithmi omnium numerorum naturalium accurati haberi non possunt, sæpe enim inciditur in incommensurabilitates; possunt tamen inveniri quantumlibuerit veris proximi, & qui errorem sensibilem nullum pariant, quod & in radicum extractione fit, & in sinibus computandis in Trigonometria. Multæ quidem methodi a doctissimis viris inventæ sunt ad facilius rem præstandam. Nos unam indicabimus, quæ omnium facillime intelligitur, ut ut in praxi molestior sit. Neque enim jam agitur de tabulis logarithmorum construendis, cum tam multæ prostent: est autem eadem, ac methodus num.25. exhibita pro computanda subtangente.

40. Sint bini numeri CD, EF ad arbitrium assumpti pro progressione geometrica, & bini logarithmi dC, dE ad arbitrium definiti; assumpto, ut libuerit, intervallo CE, & origine logarithmorum d. In primis per regulam auream continuari potest utrinque progressio factis CD ad EF, ut EF ad GH, vel EF ad CD, ut CD ad AB, & ita porro; & logarithmi dG, dA invenientur continua additione, & subtra-

ctione intervalli CE. Si autem quæratur cujuscumque intermedii numeri, ut Xf logarithmus dX; invenietur sic per approximationem. Multiplicatis binis numeris dato proximis FE, & GH, quorum jam innotescunt logarithmi, & extra-
(a)17.l.6. cta radice habebitur (a) medius proportionalis il; & adden-
(b) n.7. do Ei dimidium EG (b) logarithmo minori dE, habebitur ejus logarithmus di. Eodem pacto si Xf jaceat inter il & GH, invenietur media op,& ejus logarithmus do, qui logarithmum quæsitum dY concludet intra limites io adhuc arctiores; & hac bisectione continua devenire licebit ad limites quantumlibuerit proximos.

41 Porro maximus logarithmorum usus est in Trigonometria, in qua semper occurrit regula aurea cum numeris longioribus sinuum, & tangentium, quorum multiplicatio, & divisio est admodum molesta. Ex alia parte nec ii sunt accurati, sed proximi. Quare si sinuum, & tangentium loco digerantur in tabulas logarithmi aliqui ipsorum, versa multiplicatione in additionem, divisione in subtractionem in numeris æque vero proximis; id sane maxime proficuum erit. Primus rem altius perspexit Joannes Neperus vir numquam satis commendandus, qui primus fortasse logarithmos etiam excogitavit, ut diximus n.5., primus sane edidit, primus Trigonometriæ aptavit. Is autem cum animadverteret, sæpe primum terminum propositionis in Trigonometria esse radium; ut evitaret subtractionem ejus logarithmi, posuit o. pro logarithmo radii; tum logarithmos sinuum, qui sunt minores ipso radio consideravit positivos, secantium autem, quæ majores sunt radio posuit negativos; & logarithmos omnes computavit pro sinibus singulorum graduum, & minutorum quadrantis, in logarithmica cujus subtangens ipsi radio æqualis sit; Eorum Canonem & is vulgavit anno 1614., & iterum post ejus obitum Robertus ejus filius edidit anno 1619. adjecta methodo, qua inventi fuerant.

42. Licet autem Neperus assumpserit o pro logarithmo radii, & radium, ac subtangentem fecerit 10000000; tamen eædem prorsus notæ manent, etiam si assumatur o. pro logarithmo unitatis, & 1. pro subtangente, ac iidem logarithmi sinibus quoque, tangentibus, ac secantibus aptantur; dummodo sumatur 1. pro radio, & solum tam numeri, quibus aptantur logarithmi, quam logarithmi ipsi dividantur per 10000000, quod nullam mutationem notarum inducit, sed tantum, ut ex calculo fractionum decimalium constat, retrahit per 7. notas punctum illud, quod integros a fractis discriminat. Id autem patet ex eo, quod si AB in fig.14. sit radius ille Neperianus 10000000 æqualis subtangenti, & is dica-

dicatur 1., subtangens ipsi æqualis fit pariter 1.; & cum nova hæc unitas unitatum priorum contineat 10000000; numerus unitatum priorum ad numerum harum unitatum in quavis recta AC, Ac, CD, cd erit, ut 10000000 ad 1. Quamobrem notæ Neperianorum logarithmorum usui quoque sunt in logistica, cujus subtangens sit 1., & in hypothesi, quod o. sit logarithmus unitatis. Eodem autem argumento, si numero illi, cujus logarithmus est o. vel addantur, vel detrahantur quotlibuerit cyphræ, & simul in numeris omnibus, & logarithmis per totidem notas promoveatur, vel retrahatur punctum illud, quod integros dividit a fractis decimalibus, ac ei numero & subtangens logisticæ ponatur æqualis, & circuli radius; omnibus hisce hypothesibus æque satisfacient Neperianæ notæ. Immo etiam & logarithmi, quos ille ponit negativos sumi poterunt pro positivis, dummodo positivi Neperiani pro negativis sumantur; quod nihil est aliud, nisi considerare incrementa fieri non ab A versus c, sed versus C, & decrementa non versus C, sed versus c. Fig.13.

43. Iccirco Neperiani logarithmi fere congruunt cum logarithmis Hyperbolicis. Dicuntur autem logarithmi Hyperbolici, qui prodeunt ex logistica, cujus subtangens est 1.; & logarithmus unitatis est o.; eo quod ii statim exhibeant areas Hyperbolicas, & ab areis Hyperbolicis exhibeantur. Cum enim area quævis aBHL æquetur producto (*a*) ex HD seu AC, & subtangente; subtangens autem æqualis rectæ AB, in eo casu sit unitas; iidem prorsus numeri exprimENT & areas aBHL, & logarithmos AC computatos in logistica dBD, cujus subtangens unitas, & in qua logarithmus unitatis AB est o. (a) n.26.

44. Res exemplo patebit. Posito AB 1. AH 2., area hyperbolica aBHL, ex vera circuli, & Hyperbolæ quadratura Jacobi Gregorii edita Patavii anno 1668. invenitur 0.693147180559945 2914 171917 &c. Idem prorsus erit AC logarithmus hyperbolicus numeri 2. Si autem tam is logarithmus, quam numerus 2. multiplicetur per 10000000. evadit 6931471. 80 &c. logarithmus Neperianus numeri 20000000., sed cum signo negativo; ac idem cum signo positivo erit logarithmus Neperianus numeri 5000000, cum nimirum sumpta Ac æquali AC, sit (*b*) ut CD 20000000. ad AB 10000000., ita AB ad cd. Et quidem apud Neperum sinui graduum 60, qui est 5000000., respondet logarithmus 6931469., qui a dicto binis unitatibus deficit, in quibus nimirum Neperiani computi non sunt prorsus exacti. Si autem radius Neperianus capiatur 100000., vel 1000000000. ablatis vel additis binis cyphris; logarithmus numeri 200000. erit 69314.718 &c. vel numeri 2000000000. erit 693147180. 55. &c. (b) n.8.

45. Hyperbolici autem logarithmi ad quosvis alios speciei datæ, in quibus pariter logarithmus unitatis sit o, reducentur (a), si fiat ut logarithmus Hyperbolicus unius alicujus numeri cujuscumque ad logarithmum ejusdem numeri datæ speciei (puta eum, qui in prima combinatione progressionum juxta num.35. ad arbitrium assumitur); ita logarithmus Hyperbolicus cujuscumque alterius numeri ad logarithmum ejusdem numeri speciei datæ. Ac pariter, si fiat ut logarithmus hyperbolicus cujuscumque numeri dati, ad logarithmum ejusdem numeri speciei datæ, ita 1. quæ est subtangens in logarithmis hyperbolicis ad quartum; prodibit subtangens logarithmorum datæ speciei. (b)

(a) n.12.

(b) n.22.

(c) n.44.

46. Iccirco Jacobus Gregorius in opusculo supra (c) adducto, cum incidisset in methodum satis expeditam computandi areas Hyperbolicas, iis ad logarithmorum inventionem applicatis, sibi de suo invento plaudens: *Doctrina*, inquit, *logarithmica, quam primo invenit nobilissimus noster Neperus, & quam (ni fallor) ad summum perfectionis fastigium nunc elevamus.*

47. Neperianam logarithmorum speciem plurimum illustravit Beniamin Ursinus in Trigonometria, quam anno 1625. edidit, computatis Neperianis logarithmis ad dena secunda. Logarithmos pariter Neperianos in Astronomiam invexit in Rudolphinis tabulis Keplerus anno 1627., licet ibidem affirmet multo ante cognitos fuisse logarithmos Justo Byrgio, quem iccirco reprehendit, quod eos in privatos usus reservans cum publico non communicaverit.

48. Verum aliam logarithmorum formam, qua nunc omnes utimur, multo utiliorem hortante ipso Nepero, quem nimia calculorum prolixitas ab eo suscipiendo labore absterruerat, aggressus Henricus Briggius jam anno 1624. in sua Arithmetica Logarithmica ediderat. Oriuntur Briggiani Logarithmi ex progressione geometrica crescente in ratione decupla, & arithmetica numerorum naturalium, sed quibus cyphræ adduntur quotlibuerit, ad eruendos in fractionibus intermediis intermediorum numerorum logarithmos; ita autem disponuntur eæ progressiones, ut unitati respondeat logarithmus o, integris numeris logarithmi positivi, fractis negativi; ut hic apparet, & patet ex tabula prima in fine opusculi, in qua tamen logarithmi fractionum negativi non apponuntur, cum ex positivis sibi respondentibus satis innotescant.

Numeri	$\frac{1}{1000}$,	$\frac{1}{100}$,	$\frac{1}{10}$,			
Logarithmi	$-$3.000 &c.,	$-$2.000 &c.,	$-$1.000 &c.,			
	1.,	10.,	100.,	1000.		
	o.,	1.000 &c.,	2.000 &c.,	3.000 &c		

49. Logarithmi autem intermediorum numerorum inveniri

niri possunt methodo exposita num.40. Sed multa calculi compendia & Briggius ipse invenit, & post eum alii: Ac Jacobus quidem Gregorius in dicto opusculo ostendit, quo pacto ex hyperbolicis Briggiani deduci possint, quæ methodus coincidit cum ea, quam n.45. exposuimus. Cumque ex ipso ibidem sit logarithmus denarii hyperbolicus 2.30258509299404562401787 00; logarithmus vero denarii Briggianus sit 1.; vertetur quivis logarithmus hyperbolicus in Briggianum, si fiat ut 2.302 &c. ad 1. ita ille ad hunc: nimirum si ille dividatur per 2.302 &c.: & viceversa quivis Briggianus in Hyperbolicum vertetur, si multiplicetur per 2. 302 &c. Immo juxta eundem num.45. si fiat ut 2. 302 &c. ad 1. ita 1. ad quartum, emerget subtangens logisticæ Briggianæ 0.4342944819032518038967 85 &c. unde fortasse orti sunt Hugeniani numeri num.25. expositi. Nam Hugenius Gregorianum opusculum vidit, & celebrem cum eo controversiam habuit circa ipsum. Notandum tamen in hisce multiplicationibus, & divisionibus non omnes has notas decimalium requiri, sed totidem tantum, quot requiruntur in logarithmis propositis adjecta ad summum una vel altera.

50. Ceterum Briggius ipse in eadem Arithmetica logarithmica protulit logarithmos a se computatos ab 1 ad 20000. & a 90000. ad 100000. Lacunam a 20000 ad 90000 implevit Hadrianus Ulaccus, qui anno 1628. edidit & Briggianos, & hosce suos ab 1. usque ad 100000. Nos in tabula prima apponimus logarithmos ab 1. ad 10000., qui & ordinariis usibus trigonometriæ ut plurimum sufficiunt. In iis notandum omnes notas post punctum significare fractiones decimales, integrum autem numerum exprimi per eam notam, quæ punctum præcedit, ut in numeri 465 logarithmo 2.667453., prima nota 2. binas unitate significat, reliqui numeri sunt fracti decimales. Patet autem ex ipsa illa prima comparatione serierum, quas n.48. apposuimus, in logarithmis ab 1. ad 10. integrum fore 0., a 10. ad 100. fore 1., a 100. ad 1000. fore 3., unde factum est, ut ille integer dicatur Carateristica. Et patet haberi hoc theorema: *Carateristica tot unitates continet, quot figuris numerus constat una dempta*. Sic in logarithmo 2.667453. numeri 465. constantis tribus figuris, carateristica est 2.

51. At Halleyus anno 1695. in Transact. Angl. n.216. artic.4. expeditissimam methodum tradidit logarithmos Briggianos computandi sine ulla consideratione Hyperbolæ, & plures jam prostant series, quarum ope vel ex datis numeris logarithmi determinentur, vel ex datis logarithmis eruantur numeri; sed ea minus necessaria sunt post tabulas jam computatas, nisi forte investigandus occurrat logarithmus nume-

meri adeo magni, ut omnes tabularum vires transcendat.

52. Reliquum erat, ut Briggiani hi logarithmi trigonometriæ aptarentur. Aptavit Briggius ipse, qui logarithmos sinuum, tangentium, & secantium computavit verum non pro gradibus, & minutis, sed pro gradibus, & centesimis graduum partibus; radium autem assumpsit 10000000000., cujus nimirum logarithmus 10.0000 &c., nullo negotio & subtrahi posset, & addi; quam ob causam Neperus radii logarithmum assumpserat 0.; ne nimirum, cum frequens radii usus occurrat in Trigonometria, aut addendus esset unquam, aut subtrahendus ipsius logarithmus. Dum tamen editionem pararet ipse Briggius, fato præreptus est. Opus autem nondum penitus absolutum absolvit Henricus Gelliprandus, & nomine Trigonometriæ Britannicæ edidit anno 1633., in qua continetur Canonis constructio a Briggio conscripta, & usus ab ipso Gelliprando explicatus. Verum Hadrianus Ulaccus cum videret ægre a sexagesimali calculo vetustissimo minutorum, ac secundorum Mathematicos ipsi jam diu assuetos divelli, immani labore computavit canonem logarithmorum pro sinibus & tangentibus in singulos gradus, minuta, & dena secunda, omissis secantium logarithmis, quia, ut mox videbimus, nullo negotio eliciuntur, & necessarii non sunt. Nos hic ex eo secundam tabulam excerpsimus pro singulis tamen gradibus, & denis minutis primis, ut pariter & sinus, tangentes, ac secantes naturales, ex accuratissimis Schoteni tabulis eruimus pro iis tantum; tum quia multis usibus ordinariis hæc plerumque satis sunt; tum quia ex his, ut docebimus, reliqua pro minutis, & secundis eruuntur satis proxima; tum demum ne moles nimium excresceret: verum cum plurimis tabulis ita hosce numeros comparavimus, ut errores omnes quorum nonnullos deprehendimus quantum liceret corrigeremus.

53. Jam vero quod ad usum pertinet logarithmorum; quatuor præcipuis theorematis is omnis continetur. Sunt autem.

1. *Logarithmus Facti est summa logarithmorum Factorum*. Sic numeri 493. logarithmus 2.692847. habetur si numerorum 29, & 17. ex quorum multiplicatione oritur. logarithmi 1.462398, & 1.230449 addantur simul.

2. *Logarithmus Quoti est differentia orta subtrahendo a logarithmo divisi logarithmum divisoris*. Sic numeri 17 qui oritur dividendo 493. per 29. logarithmus 1.230449 habetur si a numeri 493. logarithmo 2.692847 dematur logarithmus 1.462398.

3. *Logarithmus quadrati, vel cubi, vel potentiæ cujusvis m, numeri dati est logarithmus ipsius numeri multiplicatus per 2., vel 3., vel m*. Sic cum numerus 625. sit quadra-

quadratum numeri 25: illius logarithmus 2.795880 est duplus logarithmi hujus nimirum 1.397940. Et cum idem numerus sit quarta potentia numeri 5., idem ille ejus logarithmus est quadruplus logarithmi 5. nimirum 0.698970.

4. *Logarithmus radicis quadratæ, vel cujusvis m dati numeri est logarithmus ejusdem divisus per 2. vel 3. vel m.* Sic quia numerus 25. est radix quadrata numeri 625.; hujus logarithmo 2.795880. diviso per 2., habetur 1.397940 logarithmus illius; & quia ejusdem numeri numerus 5. est radix quarta; hujus logarithmus 0.698970 habetur, illo diviso per 4. F.1.

Demonstratur primum. Sit AB unitas, CD primus numerus, EF secundus; fiat EG æqualis AC; & erit AC logarithmus primi numeri, AE secundi: cum nimirum ob logarithmum unitatis 0. Logarithmi incipiant a C; logarithmorum summa erit AG, qui erit logarithmus GH. Erit autem (a) AB unitas ad CD, ut EF ad GH; ac proinde HG multiplicatus per unitatem, nimirum ipse numerus HG, æqualis producto, ex CD & EF. (a) n.6.

Secundum patet ex primo, quia divisio numerorum destruit multiplicationem, & subtractio logarithmorum additionem.

Tertium pariter ex secundo facile infertur; quia duplicando logarithmum dati numeri habetur logarithmus ipsius ducti in se, nimirum quadrati ipsius, addendo iterum logarithmum ipsius habetur logarithmus quadrati ducti in ipsum numerum, nimirum cubi, & ita porro. Generalius autem eruitur ex num. 10. pro potentiis etiam irrationalibus.

Quartum patet ex tertio, quia extractio radicis destruit elevationem ad potentiam, & divisio logarithmi multiplicationem.

54. Hinc patet primo, pro computandis tabulis logarithmorum satis esse computare logarithmos numerorum primorum, qui ex aliorum multiplicatione non producuntur, ut sunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, &c.; nam numeri, qui oritur ex aliorum multiplicatione, habebitur logarithmus ipsorum logarithmos addendo per theor. 1. Sic inventis log. 3. & 7. invenietur statim logarithmus numeri 21. Immo n. 5. logarithmus invenietur detrahendo ab 1.000000 logarithmo numeri 10. assumpto, logarithmum numeri 2. inventum.

55. Eruitur secundo in regula aurea logarithmum quarti inveniri si a summa logarithmorum secundi, & tertii dematur logarithmus primi; quod & n. 38. demonstravimus: hic autem patet ex theor. 1. & 2.; quia nimirum quartus haberetur multiplicando secundum per tertium, & dividendo per primum.

56. Eruitur tertio: methodus inveniendi fractiones, quæ respon-

respondent cuivis logarithmo negativo. *Cape fractionem, cujus denominator numerus ille qui in tabulis respondet logarithmo proposito considerato ut positivo, & numerator 1. & habebis fractionem quaesitam*; quia a logarithmo unitatis qui est 0. si subtrahatur illius denominatoris logarithmus; residuum erit idem logarithmus, sed cum signo negativo; nimirum ille ipse propositus logarithmus. Is autemerit per theor. 2. logarithmus quoti ex divisione unitatis per eum numerum qui quotus est illa ipsa fractio: sic quia 2. 795880 est logarithmus numeri 625: erit $-$ 2. 795880 logarithmus hujus fractionis $\frac{1}{625}$. Immo etiam sic facile invenientur fractiones decimales, quae respondeant cuivis logarithmo negativo. *Subtrahe ejus postremam notam a 10. reliquas a 9. usque ad carateristicam, quam omitte. Residuo praefige carateristicam, quamlibuerit. Hujusmodi logarithmi quaere numerum, cui si apponas pro divisore unitatem cum tot cyphris, quot unitates erant in carateristica omissa, & quot sunt in carateristica praefixa, una addita; habebis fractionem decimalem quaesitam.* Exemplo & praxis illustrabitur, & demonstratio innotescet. Proponatur logarithmus $-$ 1. 125518. Facta subtractione juxta formam praescriptam habebitur 874482. Huic praefige quamlibuerit carateristicam ut 2. Invenies numerum 749, cujus nimirum log. 2. 874482. Cape hunc pro numeratore fractionis quaesitae, & pro denominatore sume 10000, [quatuor nimirum cyphras, quia carateristica propositi logarithmi 1. cum carateristica assumpta 2, requirunt tres cyphras & una addenda est] habebis fractionem quaesitam $\frac{749}{10000}$ sive quod idem est 0. 0749. Demonstratio pendet ex eo, quod log. 10000. est 4. 0000000, cui si addas $-$ 1. 125518, sive, quod idem est, si subtrahas 1. 1255182, postremam notam 8. subtrahes a 10., reliquas a 9.: carateristicae unitatem unam destruet primi decimalis subtractio, alteram carateristica 1, relictis duabus; ac proinde necessario juxta formam praescriptam emerget 2. 874482. Quare fractio quaesita ducta in 10000. debet per theor. 1. exhibere 749. ac proinde ea debet esse 749. divisus numerus per 10000.

57. Jam vero tabula prima continet, ut diximus logarithmos numerorum ab unitate ad 1000: tabula autem secunda sinus, tangentes, secantes, logarithmos sinuum, & logarithmos tangentium pro denis minutis primis. Si numeri ab 1 ad 1000. cujuscunque oporteat invenire logarithmum; in tabula prima quaeratur numerus in columna 1, 3, 5, 7, 9; & invenietur e regione logarithmus. Si quaeratur sinus, tangens, secans, logarithmus sinus, logarithmus tangentis

angu-

anguli continentis gradus & dena minuta: quæratur in tab. 2. gradus in columna prima paginæ sinistræ, si fuerit infra gradum 45.; dexteræ, si fuerit ultra eum gradum, ac minuta in secunda columna: & in tertia respondebit sinus, in quarta tangens, in quinta secans, in sexta log. sinus, in 7. log. tangentis. Iccirco autem conjuncti sunt arcus minores gradibus 45, cum æquè majoribus, & illi descendendo crescunt, hi decrescunt, ut cuivis arcui alteriusq; paginæ respondeat in altera e regione complementum, & cosinus, cotangens &c. Sic anguli grad. 28. min. 40. invenietur sinus 4797131 tangens 5467281, secans 1139698. log. sin. 9.680982 log. tang. 9.737771, & in pag. sequenti complementum gr. 61. min. 20. cosinus 8774254; & ita porro. Quoniam autem ex trigonometria plana est cosinus ad radium, ut radius ad secantem; si a duplo logarithmo radii sive a 20.000000. dematur logarithmus cosinus, nimirum si ut in num. 56. postrema figura dematur a 10. reliquæ a 9. & carateristica a 19. relinquetur (*a*) logarithmus secantis. Viceversa si occurrat logarithmus, qui sit in tabulis, & quæratur vel numerus, vel arcus facile invenietur. (a) n. 55.

58. Notandum tamen logarithmos sinuum & tangentium non respondere numeris ipsorum in prima & secunda columna expressis, sed iis ductis in 1000. nam sinus, & tangentes sunt computati ad radium 1000000. Logarithmi vero pro radio 10000000000; ut radii ipsius logarithmus esset 10.0000000 & posset facilius, & subtrahi, & addi. Reducentur autem ad eorum numerorum logarithmos, si logarithmi illi singuli mulctentur in carateristica quatuor unitatibus; quo pacto tabula prima logarithmorum respondens numeris tantum infra 1000. extendetur in tabula secunda ad plurimos numeros majores.

59. *Si autem proponatur vel numerus, vel arcus intermedius inter binos, qui sunt in tabulis; eruetur logarithmus, vel sinus, tangens &c. ipsi respondens factis ut differentia numeri vel arcus proximè minoris a proxime majori ad differentiam proxime minoris a proposito, ita differentia logarithmi, vel sinus, tangentis &c. respondentis proxime minori a respondente proxime majori, ad quartum addendum respondenti proximè minori, ut habeatur respondens proposito*; Et viceversa si proponantur logarithmus, sinus, tangens intermedii inter binos existentes in tabulis: quæ dicitur inventio partis proportionalis, & adhibetur in omni quaruncunque tabularum usu. Innititur autem hæc praxis huic principio, quod pars exigua lineæ curvæ potest haberi pro recta sine errore sensibili. Exprimat in f. 11. NA logarithmum numeri AB, NX logarithmum numeri XQ,

NV

NV logarithmum cujusdam intermedii VS. Si consideretur
(a) 4.1.6. arcus BSQ pro recta, erit [a] Qt ad Ss ut Bt sive AX (a) ad
(b) 34.1.1. Bs, sive (b) AV addendam NA, ut fiat NV. Et eadem est demonstratio si NAX referat arcus circuli, & AB, XQ sinus tangentes &c. Exemplis res clarior evadet.

60. Exemplum 1. Quæratur logarithmus numeri 256. 65. A logarithmo numeri 257. proxime majoris 2.409933, dempto log. num. 256. proxime minoris 2.408240., differentia erit 1693. Fac ut 1. excessus 257. supra 256. ad 0.356 excessum 256.365 supra 256., sive ut 1000 ad 356, ita 1693, ad quartum. Prodibunt 602.708, vel computata per 1. fractione 708, prodibunt 603, quibus additis log. 256. nimirum 2.408240. emerget numeri 256.365 logarithmus 2.408843. Patet autem hanc regulam pro praxi erui. *Differentiam logarithmorum numeri proximè majoris, & minoris duc in notas decimales integris additas post punctum, & resecatis in fine tot notis, quot ipsa fractio continebat, vel computatis pro unitate in reliquarum ultima, reliquos adde logarithmo numeri proximè majoris, ut habeas quæsitum.*

61. Exemplum 2. Quæratur numerus logarithmi 2.594152. Differentia logarithmi proxime majoris 2.594393, a proximo minori 2.593286 est 1107: differentia proximè minoris a proposito est 866. Fac ut 1107 ad 866, ita 1 excessus numeri 393. respondentis logarithmo majori supra 392. respondentem minori ad quartum. Prodibunt .782 &c. Erit igitur numerus quæsitus 392.782 &c. Regula autem in praxi erit: *Differentiam logarithmi proxime minoris a proposito auctam in fine tot cyphris, quot notas decimales requiris, divide per differentiam proximè minoris a proxime majori, & quotum, contempto residuo, adjunge numero respondenti logarithmo proxime minori interposito puncto, quo indicetur eas esse figuras decimales.*

62. Ex hisce autem exemplis, & ex theor. primo oritur praxis extendendi vires tabularum ultra terminos, pro quibus computatæ sunt; Quæratur log. numeri 256365. Post primas tres interpone punctum, & fiat 256.365. Quære ejus logarithmum per n. 60., qui erit 2.408843: adde ejus carateristicæ tot unitates, quot notæ, post punctum rejectæ sunt ex integris in decimales, ut hic adde 3; habebis 5.408843 logarithmum numeri 256365. Quia nimirum 256.365 ductus in 1000 evadit 256365, adeoque logarithmo illius addito log. hujus, nempe 3.0000000, fit log. numeri 256365. Viceversa si quæratur numerus logarithmi 5.594152; deme carateristicæ tot unitates, quot opus est, ut relinquantur 2. Residui 2.594152 quære numerum cum tot decimalibus, quot

uni-

unitates detraxisti carateristicæ, qui per num. 61 erit 392. 782. Rejice punctum post ultimam notam & habebis numerum 392782. Demonstratio est eadem.

63. Hoc pacto inveniri solent accurati logarithmi pro numeris continentibus duplum notarum, quam in tabulis habeantur, & viceversa. Quare in nostra tabella eruentur accurati usque ad 1000000. In Ulacchiano canone qui extenditur ad 100000. habebuntur usque ad 10000000000. Verum ibi oportebit in primo casu punctum apponere post 5. notas, & in secundo relinquere in carateristica 4. unitates. Possunt autem majorum numerorum logarithmi erui methodo numeri 60. adhibendo ex tabula 2. sinum, vel tangentem proxime majorem, & minorem cum suis logarithmis mulctatis tamen in carateristica sua 3 unitatibus juxta num. 58., & viceversa methodo numeri 61. Sed si sinus proximi multum inter se differant; non ita accuratus proveniet logarithmus inventus aut numerus.

64. Exemplum 3. Quæratur log. sinus gr. 28 min. 13. A log. sinus gr. 28. min. 20. arcus proximè majoris 9.676328, dempto log. sinus gr. 28. min 10. arcus proxime minoris 9.673977: differentia erit 2351. Fac ut 10. minuta excessus proxime majoris arcus supra proximè minorem ad 3. excessum propositi supra proximè minorem ita 2351 ad quartum. Prodibunt 705.3 vel fractione 3. omissa, prodibunt 705; quibus additis logarithmo proximè minoris arcus 9.673977, fit 9.674682 log. sinus quæsitus; qui minus quam binis unitatibus in postrema nota differt ab eo, qui in tabulis Ulaccianis habetur. Si autem propositus fuisset arcus continens etiam minuta secunda, ut gr. 28. min. 13. sec. 25; oportuisset reducere differentias ad secunda, & quidem cum minuta per unicam notam ut hic exprimuntur facile reducuntur ad secunda, multiplicando eam per 6, & computando tot decades secundorum, quot indicabit productum. Hinc 3. min. continebunt sec. 180 & 3. min: cum 25. secundis erunt 205 secunda. Quare fiet ut 600. ad 205. ita 2351 ad quartum; prodibit 803 omissis fractionibus, quod si addatur 96.73977; habebitur 9.674780 log. sin. gr. 28. min. 13, sec. 25., qui a vero nonnisi unitate discrepat in ultima nota: Oritur autem hæc regula. *Differentiam log. arcus proxime minoris a proxime majori, si propositus non contineat minuta secunda, multiplica per numerum minutorum qui decades superat & rejice ultimam notam, vel computa pro unitate in precedenti prout fuerit minor, vel non minor 5., ac adde logarithmo sinus arcus proxime minoris; si vero contineat secunda; multiplica per numerum secundorum, qui continentur in excessu*

supra

supra decades primorum, & rejectis binis notis, residui sextam partem adde eidem logarithmo, & habebis quaesitum.

65. Exemplum 4. Demum quaeratur arcus cujus 9. 871382 est log. tangentis. Proximè major est 9. 871849 log. tang. gr. 36. min. 40.; proximè minor 9. 869209 log. tang. arcus gr. 36. min. 30. Differentia est 2640. Differentia proxime minoris a proposito est 2173. Fac ut 2640 ad 2173 ita 10. vel 600. prout volueris sola minuta, vel etiam secunda ad quartum; Invenies in primo casu 8 minuta prima, in secundo 494 secunda, contemptis fractionibus, sive 8. prima, 14. secunda addenda arcui minori gr. 36. min. 30., ut fiat quaesitus gr. 36. min. 38. sec. 14., qui arcus ne unico quidem secundo a vero distat. Oritur autem haec regula. *Differentiam log. tang. proximè minoris auctam una cyphra, si quaeris sola minuta, multiplicatam per 600, si quaeris etiam secunda, divide per differentiam proxime minoris a proxime majori; & quotum contemptis fractionibus exprimentem in primo casu minuta prima, in secundo secunda adde arcui minori; & habebis quaesitum.*

66. Eadem autem est praxis pro sinibus ipsis, tangentibus, & secantibus. Interim illud notandum: quod hic fere eadem facilitate eruuntur ex hac tabella logarithmi sinuum &c. pro gradibus minutis, & secundis, & viceversa, ac ex longioribus tabulis, quae pro singulis minutis conscriptae sunt. Ex alia parte plerunque omnia, nimirum extra initium & finem quadrantis ita accuratè proveniunt, ut ne unius quidem secundi error committatur. Unde patet quanto usui futurae sint hae tabellae Tyronibus, quibus non ita facile ad manus sunt longiores tabulae, & non ita parvo pretio prostant. Accedit, quod si subtiliora quaedam Astronomiae problemata excipias; rarus admodum usus occurrit minutorum secundorum, ac saepissimè tuto plura etiam prima negliguntur, tum in mensurandis locorum intervallis, & altitudinibus in Geometria practica, tum in construendis arcibus in Architectura militari, tum in delineandis horologiis in Gnomonica; tum in determinandis Caeli phaenomenis in Sphaera, tum in plurimis aliis praestantissimis facultatibus, in quibus continuus est Trigonometriae usus, & ad quas omnes hae licet breviusculae tabellae se extendunt.

67. Proferendum jam est exemplum aliquod, quo pateat Tyronibus, quanto facilius per logarithmos triangula resolvantur, quam per sinus naturales. Proferemus bina tantum: alterum ex Trigonometria plana, alterum ex Sphaerica. Sit triangulum planum rectangulum, in quo basis pedum

dum 982, alter angulus gr. 29. min. 20. Quæratur latus oppositum ei angulo. Per n. 4. nostræ Trig. Sphæricæ; est radius ad sinum anguli in triangulis planis, ut basis ad latus oppositum. Adde log. sin. ejus anguli 9. 690098, & log. basis 982. qui est 2. 992111, & aufer log. radii; nimirum aufer 10. e carateristica. Habebis 2. 682209, qui (*a*) erit log. lateris quæsiti, nimirum pedum proxime 481. In tri: autem rectangulo Sphærico datis lateribus gr. 28. min. 10. & gr. 52. min. 40., quæratur basis. Per canonem 1 ejusdem Trigonometriæ Sphæricæ est radius ad cosinum unius lateris, ut cosinus alterius ad cosinum basis. Cosinus igitur logarithmicos illorum 9. 945261, & 9. 782796 si simul addas dempto radii logarithmo 10. 00 &c. habebis 9. 728057, qui cum sit cosinus proximè gr. 57. min. 40., & accuratius methodo numeri 65. cosin. gr. 57. min. 40. sec. 51.; ea erit basis quæsita juxta regulam 2. ejusdem Trig. Sphæricæ. Porro si naturalibus sinibus res fuisset peragenda; pro additione multiplicatio necessaria fuisset, & illa quidem satis molesta numerorum longiorum. Nam in hoc secundo casu esset radius 1000000. ad cos. gr. 28. min. 10., nimirum 881578., ita cos. gr. 52. min. 40. nimirum 606451. ad cos. basis, qui proveniret 534634., sed per molestam multiplicationem cosinuum senis notis constantium. Multo autem etiam difficilior evaderet operatio, si primus terminus non esset radius, ut in obliquangulis fere semper accidit, & molestam multiplicationem molestior divisio exciperat. Porro 534634. invenitur (*b*) sinus grad. 32. min. 19. sec. 9., & cos. gr. 57. min. 40. sec. 51., absque ullo ne unius quidem secundi discrimine a basi per logarithmos definita.

(a) n. 55.

(b) n. 59.

68. Ope primæ tab. hyperbolicorum etiam spatiorum dimensio habebitur in numeris. Sit sector aAL hyperbolæ æquilateræ. Ductis aB, LH perpendicularibus ad alteram asymptotum (*c*), capiantur in numeris ex scala aliqua partium æqualium AH (286.), AB (148.), aB (89.), & fiat ut subtangens logisticæ Briggianæ 0.434294 (*d*) ad differentiam logarithmorum AH, AB erutorum ex tab. 1. (0.286104); ita productum ex AB, & Ba (13172] ad aream quæsitam (8677). Demonstratur. Si quadratum subtangentis logisticæ dBD æquetur rectangulo sub AB, & Ba; erit (*e*) area aBHL æqualis rectangulo sub AC, & subtangente ipsa. Rursus differentia logarithmorum ex tabulis eruta est segmentum axis logisticæ Briggianæ interceptum inter binas ordinatas iisdem numeris expressas, quibus exprimuntur AB, AH, vel CD (*f*). Erit igitur (*g*) subtangens logisticæ Briggianæ ad subtangentem logisticæ dBD, ut illa differentia logarithorum ad AC: &

F. 13.

(c) 12. l. 1.

(d) n. 49.

(e) n. 34.

(f) 34. l. 2.

(g) n. 22.

alternando subtangens logisticæ Briggianæ ad illam differentiam, ut hæc subtangens ad AC, sive (*a*) ut quadratum hujus subtangentis ad rectangulum sub AC & ipsa subtangente, sive ad aream aBHL, vel (*b*) sectorem aAL.

(a) 1. l.6. (b) n.34.

Fig. 6. Cycl.

69. Ope autem utriusque tabulæ facile invenietur in numeris etiam mensura arcuum, & sectorum circularium. Sit sector RCD. Capiantur ex aliqua scala partium æqualium diameter DE, & chorda DR in numeris. Logarithmo DR addatur 10.000000 logarithmus radii, & dematur log. DE. Inveniatur arcus (*c*) cujus id residuum est log. sin., qui ob angulum DRE rectum (*d*), erit mensura anguli RED per nu.4. nostræ Trig. sphær., nimirum (*e*) dimidii anguli DCR, adeoque æqualis dimidio arcui DR. Is arcus reducatur ad minuta secunda. A log. numeri secundorum inventi, & log. diametri DE simul additis auferatur 4.536274, & habebitur logarithmus arcus RD sumpti in iisdem partibus; vel a log. ejusdem numeri secundorum, & duplo log. DE auferatur 5.138334, & habebitur log. sectoris RCD sumpti in iisdem partibus quadratis. Demonstratio autem sponte fluit ex ratione diametri ad circumferentiam ut 113. ad 355. exposita tom. 1. pag 276., & ex eo; quod sector circuli æquetur rectangulo sub semidiametro, & dimidio arcu (*f*), collatis semel inter se logarithmis, qui semper iidem occurrunt addendi, ac subtrahendi.

(c) n.59. (d) 31 l.3. (e) 20.l.3. (f) n.21. Cycl.

70. Ex arcuum computatione, & cyclois facile sine motu mechanico describetur per puncta ob RP æqualem (*g*) arcui RD. Cumque & Ellipsium quadratura pendeat a quadratura circuli, per pr.50. sect. con. Grandi, & omnium hyperbolarum areæ ad areas hyperbolæ æquilateræ facile reducantur; patet ope cycloidis, & logisticæ obtineri tam geometricas, quam numericas quadraturas conicarum sectionum, quæ per finitam geometriam obtineri non possunt; unde illud etiam fit manifestum, satis apposite selectas esse hasce potissimum curvas, quæ post sectiones conicas Tyronibus proponerentur. Sequuntur jam

(g) n.5. Cycl.

TABULA I. constans 5. pag. pro log. Briggianis numerorum ab 1. ad 1000.; quanquam pro 1000. apposuit Typographus 100. tantum, intervallo quartam notam non admittente.

TABULA II. constans 16. pag. pro sinibus, tangentibus, secantibus ad radium 1000000., & logarithmis sin., ac tang. ad radium logarithmicum 10.000000 in dena minuta prima.

TA-

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	0.000000	41	1.612784	81	1.908485	121	2.082785	161	2.206826
2	0.301030	42	1.623249	82	1.913814	122	2.086360	162	2.209515
3	0.477121	43	1.633468	83	1.919078	123	2.089905	163	2.212188
4	0.602060	44	1.643453	84	1.924279	124	2.093422	164	2.214844
5	0.698970	45	1.653213	85	1.929419	125	2.096910	165	2.217484
6	0.778151	46	1.662758	86	1.934498	126	2.100371	166	2.220108
7	0.845098	47	1.672098	87	1.939519	127	2.103804	167	2.222716
8	0.903090	48	1.681241	88	1.944483	128	2.107210	168	2.225309
9	0.954243	49	1.690196	89	1.949390	129	2.110590	169	2.227887
10	1.000000	50	1.698970	90	1.954243	130	2.113943	170	2.230449
11	1.041393	51	1.707570	91	1.959041	131	2.117271	171	2.232996
12	1.079181	52	1.716003	92	1.963788	132	2.120574	172	2.235528
13	1.113943	53	1.724276	93	1.968483	133	2.123852	173	2.238046
14	1.146128	54	1.732394	94	1.973128	134	2.127105	174	2.240549
15	1.176091	55	1.740363	95	1.977724	135	2.130334	175	2.243038
16	1.204120	56	1.748188	96	1.982271	136	2.133539	176	2.245513
17	1.230449	57	1.755875	97	1.986772	137	2.136721	177	2.247973
18	1.255273	58	1.763428	98	1.991226	138	2.139879	178	2.250420
19	1.278754	59	1.770852	99	1.995635	139	2.143015	179	2.252853
20	1.301030	60	1.778151	100	2.000000	140	2.146128	180	2.255273
21	1.322219	61	1.785330	101	2.004321	141	2.149219	181	2.257679
22	1.342423	62	1.792392	102	2.008600	142	2.152288	182	2.260071
23	1.361728	63	1.799341	103	2.012837	143	2.155336	183	2.262451
24	1.380211	64	1.806180	104	2.017033	144	2.158362	184	2.264818
25	1.397940	65	1.812913	105	2.021189	145	2.161368	185	2.267172
26	1.414973	66	1.819544	106	2.025306	146	2.164353	186	2.269513
27	1.431364	67	1.826075	107	2.029384	147	2.167317	187	2.271842
28	1.447158	68	1.832509	108	2.033424	148	2.170262	188	2.274158
29	1.462398	69	1.838849	109	2.037426	149	2.173186	189	2.276462
30	1.477121	70	1.845098	110	2.041393	150	2.176091	190	2.278754
31	1.491362	71	1.851258	111	2.045323	151	2.178977	191	2.281033
32	1.505150	72	1.857332	112	2.049218	152	2.181844	192	2.283301
33	1.518514	73	1.863323	113	2.053078	153	2.184691	193	2.285557
34	1.531479	74	1.869232	114	2.056905	154	2.187521	194	2.287802
35	1.544068	75	1.875061	115	2.060698	155	2.190332	195	2.290035
36	1.556303	76	1.880814	116	2.064458	156	2.193125	196	2.292256
37	1.568202	77	1.886491	117	2.068186	157	2.195900	197	2.294466
38	1.579784	78	1.892095	118	2.071882	158	2.198657	198	2.296665
39	1.591065	79	1.897627	119	2.075547	159	2.201397	199	2.298853
40	1.602060	80	1.903090	120	2.079181	160	2.204120	200	2.301030

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
201	2.303196	241	2.382017	281	2.448706	321	2.506505	361	2.557507
202	2.305351	242	2.383815	282	2.450249	322	2.507856	362	2.558709
203	2.307496	243	2.385606	283	2.451786	323	2.509203	363	2.559907
204	2.309630	244	2.387390	284	2.453318	324	2.510545	364	2.561101
205	2.311754	245	2.389166	285	2.454845	325	2.511883	365	2.562293
206	2.313867	246	2.390935	286	2.456366	326	2.513218	366	2.563481
207	2.315970	247	2.392697	287	2.457882	327	2.514548	367	2.564666
208	2.318063	248	2.394452	288	2.459392	328	2.515874	368	2.565848
209	2.320146	249	2.396199	289	2.460898	329	2.517196	369	2.567026
210	2.322219	250	2.397940	290	2.462398	330	2.518514	370	2.568202
211	2.324282	251	2.399674	291	2.463893	331	2.519828	371	2.569374
212	2.326336	252	2.401401	292	2.465383	332	2.521138	372	2.570543
213	2.328380	253	2.403121	293	2.466868	333	2.522444	373	2.571709
214	2.330414	254	2.404834	294	2.468347	334	2.523746	374	2.572872
215	2.332438	255	2.406540	295	2.469822	335	2.525045	375	2.574031
216	2.334454	256	2.408240	296	2.471292	336	2.526339	376	2.575188
217	2.336460	257	2.409933	297	2.472756	337	2.527630	377	2.576341
218	2.338456	258	2.411620	298	2.474216	338	2.528917	378	2.577492
219	2.340444	259	2.413300	299	2.475671	339	2.530200	379	2.578639
220	2.342423	260	2.414973	300	2.477121	340	2.531479	390	2.579784
221	2.344392	261	2.416641	301	2.478566	341	2.532754	381	2.580925
222	2.346353	262	2.418301	302	2.480007	342	2.534026	382	2.582063
223	2.348305	263	2.419956	303	2.481443	343	2.535294	383	2.583199
224	2.350248	264	2.421604	304	2.482874	344	2.536558	384	2.584331
225	2.352183	265	2.423246	305	2.484300	345	2.537819	385	2.585461
226	2.354108	266	2.424882	306	2.485721	346	2.539076	386	2.586587
227	2.356026	267	2.426511	307	2.487138	347	2.540329	387	2.587711
228	2.357935	268	2.428135	308	2.488551	348	2.541579	388	2.588832
229	2.359835	269	2.429752	309	2.489958	349	2.542825	389	2.589950
230	2.361728	270	2.431364	310	2.491362	350	2.544068	390	2.591065
231	2.363612	271	2.432969	311	2.492760	351	2.545307	391	2.592177
232	2.365488	272	2.434569	312	2.494155	352	2.546543	392	2.593286
233	2.367356	273	2.436163	313	2.495544	353	2.547775	393	2.594393
234	2.369216	274	2.437751	314	2.496930	354	2.549003	394	2.595496
235	2.371068	275	2.439333	315	2.498311	355	2.550228	395	2.596597
236	2.372912	276	2.440909	316	2.499687	356	2.551450	395	2.597605
237	2.374748	277	2.442480	317	2.501059	357	2.552668	397	2.598790
238	2.376577	278	2.444045	318	2.502427	358	2.553883	398	2.599883
239	2.378398	279	2.445604	319	2.503791	359	2.555094	399	2.600973
240	2.380211	280	2.447158	320	2.505150	360	2.556303	400	2.602060

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
401	2.603145	441	2.644439	481	2.682145	521	2.716838	561	2.748963
402	2.604226	442	2.645422	482	2.683047	522	2.717671	562	2.749736
403	2.605305	443	2.646404	483	2.683947	523	2.718502	563	2.750508
404	2.606381	444	2.647383	484	2.684845	524	2.719331	564	2.751279
405	2.607455	445	2.648360	485	2.685742	525	2.720159	565	2.752048
406	2.608526	446	2.649335	486	2.686636	526	2.720986	566	2.752816
407	2.609594	447	2.650308	487	2.687529	527	2.721811	567	2.753583
408	2.610660	448	2.651278	488	2.688420	528	2.722634	568	2.754348
409	2.611723	449	2.652246	489	2.689309	529	2.723456	569	2.755112
410	2.612784	450	2.653213	490	2.690196	530	2.724276	570	2.755875
411	2.613842	451	2.654177	491	2.691081	531	2.725095	571	2.756636
412	2.614897	452	2.655138	492	2.691965	532	2.725912	572	2.757396
413	2.615950	453	2.656098	493	2.692847	533	2.726727	573	2.758155
414	2.617000	454	2.657056	494	2.693727	534	2.727541	574	2.758912
415	2.618048	455	2.658011	495	2.694605	535	2.728354	575	2.759668
416	2.619093	456	2.658965	496	2.695482	536	2.729165	576	2.760422
417	2.620136	457	2.659916	497	2.696356	537	2.729974	577	2.761176
418	2.621176	458	2.660865	498	2.697229	538	2.730782	578	2.761928
419	2.622214	459	2.661813	499	2.698101	539	2.731589	579	2.762679
420	2.623249	460	2.662758	500	2.698970	540	2.732394	580	2.763428
421	2.624282	461	2.663701	501	2.699838	541	2.733197	581	2.764176
422	2.625312	462	2.664642	502	2.700704	242	2.733999	582	2.764923
423	2.626340	463	2.665581	503	2.701568	543	2.734800	583	2.765669
424	2.627366	464	2.666518	504	2.702431	544	2.735599	584	2.766413
425	2.628389	465	2.667453	505	2.703291	545	2.736397	585	2.767156
426	2.629410	466	2.668386	506	2.704151	546	2.737193	586	2.767898
427	2.630428	467	2.669317	507	2.705008	547	2.737987	587	2.768638
428	2.631444	468	2.670246	508	2.705864	548	2.738781	588	2.769377
429	2.632457	469	2.671173	509	2.706718	549	2.739572	589	2.770115
430	2.633468	470	2.672098	510	2.707570	550	2.740363	590	2.770852
431	2.634477	471	2.673021	511	2.708421	551	2.741152	591	2.771587
432	2.635484	472	2.673942	512	2.709270	552	2.741939	292	2.772322
433	2.636488	473	2.674861	513	2.710117	553	2.742725	593	2.773055
434	2.637490	474	2.675778	514	2.710963	554	2.743510	594	2.773786
435	2.638489	475	2.676694	515	2.711807	555	2.744293	595	2.774517
436	2.639486	476	2.677607	516	2.712650	556	2.745075	596	2.775246
437	2.640481	477	2.678518	517	2.713491	557	2.745855	597	2.775974
438	2.641474	478	2.679428	518	2.714330	558	2.746634	598	2.776701
439	2.642465	479	2.680336	519	2.715167	559	2.747412	599	2.777427
440	2.643453	480	2.681241	520	2.716003	560	2.748188	600	2.778151

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
601	2.778874	641	2.806858	681	2.833147	721	2.857935	761	2.881385
602	2.779596	642	2.807535	682	2.833784	722	2.858537	762	2.881955
603	2.780317	643	2.808211	683	2.834421	723	2.859138	763	2.882525
604	2.781037	644	2.808886	684	2.835056	724	2.859739	764	2.883093
605	2.781755	645	2.809560	685	2.835691	725	2.860338	765	2.883661
606	2.782473	646	2.810233	686	2.836324	726	2.860937	766	2.884229
607	2.783189	647	2.810904	687	2.836957	727	2.861534	767	2.884795
608	2.783904	648	2.811575	688	2.837588	728	2.862131	768	2.885361
609	2.784617	649	2.812245	689	2.838219	729	2.862728	769	2.885926
610	2.785330	650	2.812913	690	2.838849	730	2.863323	770	2.886491
611	2.786041	651	2.813581	691	2.839478	731	2.863917	771	2.887054
612	2.786751	652	2.814248	692	2.840106	732	2.864511	772	2.887617
613	2.787460	653	2.814913	693	2.840733	733	2.865104	773	2.888179
614	2.788168	654	2.815578	694	2.841359	734	2.865696	774	2.888741
615	2.788875	655	2.816241	695	2.841985	735	2.866287	775	2.889302
616	2.789581	656	2.816904	696	2.842609	736	2.866878	776	2.889862
617	2.790285	657	2.817565	697	2.843233	737	2.867467	777	2.890421
618	2.790988	658	2.818226	698	2.843855	738	2.868056	778	2.890980
619	2.791691	659	2.818885	699	2.844477	739	2.868644	779	2.891537
620	2.792392	660	2.819544	700	2.845098	740	2.869232	780	2.892095
621	2.793092	661	2.820201	701	2.845718	741	2.869818	781	2.892651
622	2.793790	662	2.820858	702	2.846337	742	2.870404	782	2.893207
623	2.794488	663	2.821514	703	2.846955	743	2.870989	783	2.893762
624	2.795185	664	2.822 68	704	2.847573	744	2.871573	784	2.894316
625	2.795880	665	2.822822	705	2.848189	745	2.872156	785	2.894870
626	2.796574	666	2.823474	706	2.848805	746	2.872739	786	2.895423
627	2.797268	667	2.824126	707	2.849419	747	2.873321	787	2.895975
628	2.797960	668	2.824776	708	2.850033	748	2.873902	788	2.896526
629	2.798651	669	2.825426	709	2.850646	749	2.874482	789	2.897077
630	2.799341	670	2.826075	710	2.851258	750	2.875061	790	2.897627
631	2.800029	671	2.826723	711	2.851870	751	2.875640	791	2.898176
632	2.800717	672	2.827369	712	2.852480	752	2.876218	792	2.898725
633	2.801404	673	2.828015	713	2.853090	753	2.876795	793	2.899273
634	2.802089	674	2.828660	714	2.853698	754	2.877371	794	2.899821
635	2.802774	675	2.829304	715	2.854306	755	2.877947	795	2.900367
636	2.803457	676	2.829947	716	2.854913	756	2.878522	706	2.900913
637	2.804139	677	2.830589	717	2.855519	757	2.879096	797	2.901458
638	2.804821	678	2.831230	718	2.856124	758	2.879669	798	2.902003
639	2.805501	679	2.831870	719	2.856729	759	2.880242	799	2.902547
640	2.806180	680	2.832509	720	2.857332	760	2.880814	800	2.903090

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log	N.	Log.	N.	Log	N.	Log.
801	2.903633	841	2.924796	881	2.944976	921	2.964260	961	2.982723
802	2.904174	842	2.925312	882	2.945469	922	2.964731	962	2.983175
803	2.904716	843	2.925828	883	2.945961	923	2.965202	963	2.983626
804	2.905256	844	2.926342	884	2.946452	924	2.965672	964	2.984077
805	2.905796	845	2.926857	885	2.946943	925	2.966142	965	2.984527
806	2.906335	846	2.927370	886	2.947434	926	2.966611	966	2.984977
807	2.906874	847	2.927883	887	2.947924	927	2.967080	967	2.985426
808	2.907411	848	2.928396	888	2.948413	928	2.967548	968	2.985875
809	2.907949	849	2.928908	889	2.948902	929	2.968016	969	2.986324
810	2.908485	850	2.929419	890	2.949390	930	2.968483	970	2.986772
811	2.909021	851	2.929930	891	2.949878	931	2.968950	971	2.987219
812	2.909556	852	2.930440	892	2.950365	932	2.969416	972	2.987666
813	2.910091	853	2.930949	893	2.950851	933	2.969882	973	2.988113
814	2.910624	854	2.931458	894	2.951338	934	2.970347	974	2.988559
815	2.911158	855	2.931966	895	2.951823	935	2.970812	975	2.989005
816	2.911690	856	2.932474	896	2.952308	936	2.971276	976	2.989450
817	2.912222	857	2.932981	897	2.952792	937	2.971740	977	2.989895
818	2.912753	858	2.933487	898	2.953276	938	2.972203	978	2.990339
819	2.913284	859	2.933993	899	2.953760	939	2.972666	979	2.990783
820	2.913814	860	2.934498	900	2.954243	940	2.973128	980	2.991226
821	2.914343	861	2.935003	901	2.954725	941	2.973590	981	2.991669
822	2.914872	862	2.935507	902	2.955207	942	2.974051	982	2.992111
823	2.915400	863	2.936010	903	2.955688	943	2.974512	983	2.992554
824	2.915927	864	2.936514	904	2.956168	944	2.974972	984	2.992995
825	2.916454	865	2.937016	905	2.956649	945	2.975432	985	2.993436
826	2.916980	866	2.937518	906	2.957128	946	2.975891	986	2.993877
827	2.917506	867	2.938019	907	2.957607	947	2.976350	987	2.994317
828	2.918030	868	2.938520	908	2.958086	948	2.976808	988	2.994757
829	2.918555	869	2.939020	909	2.958564	949	2.977266	989	2.995196
830	2.919078	870	2.939519	910	2.959041	950	2.977724	990	2.995635
831	2.919601	871	2.940018	911	2.959518	951	2.978181	991	2.996074
832	2.920123	872	2.940516	612	2.959995	952	2.978637	992	2.996512
833	2.920645	873	2.941014	913	2.960471	953	2.979093	993	2.996949
834	2.921166	874	2.941511	914	2.960946	954	2.979548	994	2.997386
835	2.921686	875	2.942008	915	2.961421	955	2.980003	995	2.997823
836	2.922206	876	2.942504	916	2.961895	956	2.980458	996	2.998259
837	2.922725	877	2.943000	917	2.962369	957	2.980912	997	2.998695
838	2.923244	878	2.943495	918	2.962843	958	2.981366	998	2.999131
839	2.923762	879	2.943989	919	2.963316	959	2.981819	999	2.999565
840	2.924279	880	2.944483	920	2.963788	960	2.982271	100	3.000000

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. tang.
0	0	0.	0.	1000000.	— Infin.	— Infin.
	10	2909.	2909.	1000004.	8.463726	8.463727
	20	5818.	5818.	1000017.	8.764754	8.764761
	30	8727.	8727.	1000038.	8.940842	8.940858
	40	11635.	11636.	1000068.	8.065776	8.065806
	50	14544.	14545.	1000105.	8.162681	8.162747
1	0	17452.	17455.	1000152.	8.241855	8.241921
	10	20361.	20365.	1000207.	8.308794	8.308884
	20	23269.	23275.	1000271.	8.366777	8.366895
	30	26177.	26186.	1000343.	8.417919	8.418068
	40	29085.	29097.	1000423.	8.463665	8.463849
	50	31992.	32009.	1000512.	8.505045	8.505267
2	0	34899.	34921.	1000610.	8.542819	8.543084
	10	37805.	37834.	1000715.	8.577566	8.577877
	20	40713.	40747.	1000830.	8.609734	8.610094
	30	43619.	43661.	1000953.	8.639680	8.640093
	40	46525.	46576.	1001084.	8.667689	8.668160
	50	49431.	49491.	1001224.	8.693998	8.694529
3	0	52336.	52406.	1001372.	8.718800	8.719396
	10	55241.	55325.	1001529.	8.742259	8.742922
	20	58145.	58243.	1001695.	8.764511	8.765246
	30	61049.	61163.	1001869.	8.785675	8.786486
	40	63952.	64083.	1002051.	8.805852	8.806742
	50	66854.	67004.	1002242.	8.825130	8.826103
4	0	69756.	69927.	1002442.	8.843585	8.844644
	10	72658.	72851.	1002650.	8.861283	8.862433
	20	75559.	75775.	1002867.	8.878285	8.879529
	30	78459.	78702.	1003092.	8.894643	8.895984
	40	81359.	81629.	1003326.	8.910404	8.911846
	50	84258.	84558.	1003569.	8.925609	8.927156
5	0	87156.	87489.	1003820.	8.940296	8.941952
	10	90053.	90421.	1004080.	8.954499	8.956267
	20	92950.	93354.	1004348.	8.968249	8.970133
	30	95846.	96289.	1004625.	8.981573	8.983577
	40	98741.	99226.	1004911.	8.994497	8.996624
	50	101635.	102164.	1005205.	9.007044	8.009298

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
	60	1000000.	Infin.	Infin.	10.000000	Infin.
	50	999996.	343773707.	343775162.	9.999998	12.536273
	40	999982.	171885399.	171888308.	9.999993	12.235239
	30	999962.	114588650.	114593013.	9.999983	12.059142
	20	999932.	85939791.	85945609.	9.999971	11.934194
89	10	999894.	68750087.	68757359.	9.999954	11.837273
	60	999848.	57289962.	57298688.	9.999934	11.758079
	50	999793.	49103881.	49114062.	9.999910	11.691116
	40	999729.	42964077.	42975713.	9.999882	11.633105
	30	999657.	38188459.	38201550.	9.999851	11.581932
	20	999577.	34367771.	34382316.	9.999816	11.536151
88	10	999488.	31241577.	31257577.	9.999778	11.494732
	60	999391.	28636253.	28653708.	9.999735	11.456916
	50	999285.	26431600.	26450510.	9.999689	11.422123
	40	999171.	24541758.	24562123.	9.999640	11.389905
	30	999048.	22903766.	22925586.	9.999586	11.359906
	20	998917.	21470401.	21493676.	9.999529	11.331840
87	10	998778.	20205553.	20230284.	9.999469	11.305471
	60	998630.	19081137.	19107323.	9.999404	11.280604
	50	998473.	18074977.	18102619.	9.999336	11.257078
	40	998308.	17169337.	17198434.	9.999265	11.234754
	30	998135.	16349855.	16380408.	9.999189	11.213514
	20	997953.	15604784.	15636793.	9.999110	11.193258
86	10	997763.	14924417.	14957882.	9.999027	11.173897
	60	997564.	14300666.	14335587.	9.998941	11.155356
	50	997357.	13726737.	13763115.	9.998851	11.137567
	40	997141.	13196883.	13234717.	9.998757	11.120471
	30	996917.	12706205.	12745495.	9.998659	11.104016
	20	996685.	12250505.	12291252.	9.998558	11.088154
85	10	996444.	11826167.	11868370.	9.998453	11.072844
	60	996195.	11430052.	11473713.	9.998344	11.058048
	50	995937.	11059431.	11104549.	9.998232	11.043733
	40	995671.	10711913.	10758488.	9.998116	11.029867
	30	995395.	10385397.	10433431.	9.997996	11.016423
	20	995113.	10078031.	10127522.	9.997872	11.003375
84	10	994822.	9788173.	9839123.	9.997745	10.990702

TABULA II.

G	M.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
6	0	104528.	105104.	1005508.	9.019235	9.021620
	10	107421.	108046.	1005820.	9.031089	9.033609
	20	110313.	110990.	1006141.	9.042625	9.045284
	30	113203.	113936.	1006470.	9.053859	9.056659
	40	116093.	116883.	1006807.	9.064806	9.067752
	50	118982.	119833.	1007154.	9.075480	9.078576
7	0	121869.	122785.	1007510.	9.085894	9.089144
	10	124756.	125738.	1007874.	9.096062	9.099468
	20	127642.	128694.	1008247.	9.105992	9.109559
	30	130526.	131653.	1008629.	9.115698	9.119429
	40	133410.	134613.	1009020.	9.125187	9.129087
	50	136292.	137576.	1009419.	9.134470	9.138542
8	0	139173.	140541.	1009828.	9.143555	9.147803
	10	142053.	143508.	1010245.	9.15245	9.156877
	20	144932.	146478.	1010671.	9.16116	9.165774
	30	147809.	149451.	1011105.	9.169702	9.174499
	40	150685.	152426.	1011550.	9.17807	9.183059
	50	15356	155404.	1012003.	9.186280	9.191462
9	0	156434.	158384.	1012465.	9.194332	9.199713
	10	159307.	161368.	1012936.	9.20223	9.207817
	20	162178.	164354.	1013416.	9.209992	9.215780
	30	165048.	167343.	1013905.	9.217609	9.223507
	40	167916.	170334.	1014403.	9.225092	9.231302
	50	170782.	173329.	1014910.	9.232444	9.238872
10	0	173648.	176327.	1015427.	9.239670	9.246319
	10	176512.	179328.	1015952.	9.24677	9.253648
	20	179375.	182332.	1016487.	9.25376	9.260863
	30	182236.	185339.	1017030.	9.260633	9.267967
	40	185095.	188349.	1017583.	9.267395	9.274964
	50	187953.	191363.	1018145.	9.274049	9.281858
11	0	190809.	194380.	1018719.	9.280599	9.288652
	10	193664.	197401.	1019297.	9.287048	9.295349
	20	196517.	200425.	1019887.	9.293399	9.301951
	30	199368.	203452.	1020487.	9.299655	9.308463
	40	202218.	206483.	1021095.	9.305819	9.314885
	50	205065.	209518.	1021713.	9.311893	9.321222

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log.sin.	Log ta.
	60	994522.	9514364.	9565772.	9.997614	10.978380
	50	994214.	9255304.	9309170.	9.997480	10.966391
	40	993897.	9009826.	9065151.	9.997341	10.954716
	30	993572.	8776887.	8833671.	9.997199	10.943341
	20	993238.	8555547.	8613790.	9.997053	10.932248
83	10	992896.	8344956.	8404659.	9.996904	10.921424
	60	992546.	8144346.	8205509.	9.996751	10.910856
	50	992187.	7953022.	8015645.	9.996594	10.900532
	40	991820.	7770351.	7834434.	9.996433	10.890441
	30	991445.	7595754.	7661298.	9.996269	10.880571
	20	991061.	7428706.	7495711.	9.995100	10.870913
82	10	990669.	7268725.	7337191.	9.995928	10.861458
	60	990268.	7115370.	7185297.	9.995753	10.852197
	50	989859.	6968224.	7039622.	9.995573	10.843123
	40	989442.	6826944.	6899794.	9.995390	10.834226
	30	989016.	6691156.	6765459.	9.995203	10.825501
	20	988582.	6560554.	6636329.	9.995013	10.816941
81	10	988139.	6434843.	6512081.	9.994818	10.808538
	60	987688.	6313752.	6392453.	9.994620	10.800287
	50	987229.	6197028.	6277193.	9.994418	10.792183
	40	986762.	6084438.	6166067.	9.994212	10.784220
	30	986286.	5975764.	6058858.	9.994003	10.776393
	20	985801.	5870804.	5955363.	9.993789	10.768698
80	10	985309.	5769369.	5855392.	9.993572	10.761128
	60	984808.	5671282.	5758770.	9.993351	10.753681
	50	984298.	5576379.	5665333.	9.993127	10.746352
	40	983781.	5484505.	5574926.	9.992898	10.739137
	30	983255.	5395517.	5487404.	9.992666	10.732033
	20	982721.	5309279.	5402633.	9.992430	10.725036
79	10	982178.	5225665.	5320486.	9.992190	10.718142
	60	981627.	5144554.	5240843.	9.991947	10.711348
	50	981068.	5065835.	5163592.	9.991699	10.704651
	40	980501.	4989403.	5088628.	9.991448	10.698049
	30	979925.	4915157.	5015852.	9.991193	10.691537
	20	979341.	4843005.	4945169.	9.990934	10.685115
78	10	978748.	4772857.	4876491.	9.990671	10.678778

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log sin	Log ta.
12	0	207912.	212557.	1022341.	9.317879	9.327475
	10	210756.	215599.	1022977.	9.323780	9.333646
	20	213599.	218645.	1023624.	9.329599	9.339739
	30	216440.	221695.	1024280.	9.335337	9.345755
	40	219279.	224748.	1024945.	9.340995	9.351697
	50	222116.	227806.	1025619.	9.346579	9.357566
13	0	224951.	230868.	1026304.	9.352088	9.363364
	10	227784.	233934.	1026998.	9.357524	9.369094
	20	230616.	237004.	1027702.	9.362889	9.374756
	30	233445.	240079.	1028415.	9.368185	9.380354
	40	236273.	243157.	1029138.	9.373414	9.385888
	50	239098.	246241.	1029871.	9.378577	9.391360
14	0	241922.	249328.	1030614.	9.383675	9.396771
	10	244743.	252420.	1031366.	9.388711	9.402124
	20	247563.	255516.	1032128.	9.393685	9.407419
	30	250380.	258618.	1032900.	9.398600	9.412658
	40	253195.	261723.	1033682.	9.403455	9.417842
	50	256008.	264834.	1034474.	9.408254	9.422974
15	0	258819.	267949.	1035276.	9.412996	9.428052
	10	261628.	271069.	1036088.	9.417684	9.433080
	20	264434.	274194.	1036910.	9.422318	9.438059
	30	267238.	277325.	1037742.	9.426899	9.442988
	40	270040.	280460.	1038584.	9.431429	9.447870
	50	272840.	283600.	1039437.	9.435908	9.452706
16	0	275637.	286745.	1040299.	9.440338	9.457496
	10	278432.	289895.	1041172.	9.444720	9.462242
	20	281225.	293052.	1042055.	9.449054	9.466945
	30	284015.	296213.	1042949.	9.453342	9.471605
	40	286803.	299380.	1043853.	9.457584	9.476223
	50	289589.	302553.	1044767.	9.461782	9.480801
17	0	292372.	305731.	1045692.	9.465935	9.485339
	10	295152.	308914.	1046627.	9.470046	9.489838
	20	297930.	312104.	1047573.	9.474115	9.494299
	30	300706.	315299.	1048529.	9.478142	9.498722
	40	303479.	318500.	1040495.	9.482128	9.503109
	50	305249.	321707.	1050474.	9.486075	9.507460

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log ta.
	60	978148.	4704630.	4809734.	9.990404	10.672525
	50	977539.	4638246.	4744821.	9.990134	10.666354
	40	976921.	4573629.	4681675.	9.989860	10.660261
	30	976296.	4510709.	4620226.	9.989582	10.654245
	20	975662.	4449418.	4560408.	9.989300	10.648303
77	10	975020.	4389694.	4502157.	9.989014	10.642434
	60	974370.	4331476.	4445411.	9.988724	10.636636
	50	973712.	4274707.	4390116.	9.988430	10.630906
	40	973045.	4219332.	4336215.	9.988133	10.625244
	30	972370.	4165300.	4283658.	9.987832	10.619646
	20	971687.	4112562.	4232394.	9.987526	10.614112
76	10	970995.	4061070.	4182378.	9.987217	10.608640
	60	970296.	4010781.	4133565.	9.986904	10.603229
	50	969588.	3961652.	4085913.	9.986587	10.597876
	40	968872.	3913642.	4039380.	9.986266	10.592581
	30	968148.	3866713.	3993929.	9.985942	10.587342
	20	967415.	3820828.	3949522.	9.985613	10.582158
75	10	966675.	3775952.	3906125.	9.985280	10.577026
	60	965926.	3732051.	3863703.	9.984944	10.571948
	50	965169.	3689094.	3822225.	9.984603	10.566920
	40	964404.	3647047.	3781660.	9.984259	10.561941
	30	963630.	3605884.	3741978.	9.983911	10.557012
	20	962849.	3565575.	3703151.	9.983558	10.552130
74	10	962059.	3526094.	3665152.	9.983202	10.547294
	60	961262.	3487414.	3627955.	9.982842	10.542504
	50	960456.	3449512.	3591536.	9.982477	10.537758
	40	959642.	3412363.	3555871.	9.982109	10.533055
	30	958820.	3375943.	3520937.	9.981737	10.528395
	20	957990.	3340233.	3486711.	9.981361	10.523777
73	10	957151.	3305209.	3453173.	9.980981	10.519199
	60	956305.	3270853.	3420304.	9.980596	10.514661
	50	955450.	3237144.	3388082.	9.980208	10.510162
	40	954588.	3204064.	3356490.	9.979816	10.505701
	30	953717.	3171595.	3325510.	9.979420	10.501278
	20	952838.	3139719.	3295123.	9.979019	10.496891
72	10	951951.	3108421.	3265315.	9.978615	10.492540

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. fin.	Log. ta
18	0	309017.	324920.	1051462.	9.489982	9.511776
	10	311782.	328139.	1052461.	9.493851	9.516057
	20	314545.	331364.	1053471.	9.497682	9.520305
	30	317305.	334595.	1054492.	9.501476	9.524520
	40	320062.	337833.	1055524.	9.505234	9.528702
	50	322816.	341077.	1056567.	9.508956	9.532853
19	0	325568.	344328.	1057621.	9.512642	9.536972
	10	328317.	347585.	1058686.	9.516294	9.541061
	20	331063.	350848.	1059761.	9.519911	9.545119
	30	333807.	354119.	1060849.	9.523495	9.549149
	40	336547.	357396.	1061947.	9.527046	9.553149
	50	339285.	360679.	1063057.	9.530565	9.557121
20	0	342020.	363970.	1064178.	9.534052	9.561066
	10	344752.	367268.	1065310.	9.537507	9.564983
	20	347481.	370573.	1066454.	9.540931	9.568873
	30	350207.	373885.	1067609.	9.544325	9.572738
	40	352931.	377204.	1068776.	9.547689	9.576576
	50	355651.	380530.	1069955.	9.551024	9.580389
21	0	358368.	383864.	1071145.	9.554329	9.584177
	10	361082.	387205.	1072347.	9.557606	9.587941
	20	363793.	390554.	1073631.	9.560855	9.591681
	30	366501.	393910.	1074786.	9.564075	9.595398
	40	369206.	397275.	1076024.	9.567269	9.599091
	50	371908.	400646.	1077273.	9.570435	9.602761
22	0	374607.	404026.	1078535.	9.573575	9.606410
	10	377302.	407414.	1079808.	9.576689	9.610036
	20	379994.	410810.	1081094.	9.579777	9.613641
	30	382683.	414214.	1082392.	9.582840	9.617224
	40	385369.	417626.	1083703.	9.585877	9.620787
	50	388052.	421046.	1085025.	9.588890	9.624330
23	0	390731.	424475.	1086360.	9.591878	9.627852
	10	393407.	427912.	1087708.	9.594842	9.631355
	20	396080.	431358.	1089068.	9.597783	9.634838
	30	398749.	434812.	1090441.	9.600700	9.638302
	40	401415.	438276.	1091827.	9.603594	9.641747
	50	404078.	441748.	1093225.	9.606465	9.645174

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log sin.	Log.ta.
	60	951057.	3077684.	3236068.	9.978206	10.488224
	50	950154.	3047491.	3207367.	9.977794	10.483943
	40	949243.	3017830.	3179198.	9.977377	10.479695
	30	948324.	2988685.	3151545.	9.976957	10.475480
	20	947397.	2960042.	3124395.	9.976532	10.471298
71	10	946462.	2931888.	3097736.	9.976103	10.467147
	60	945519.	2904211.	7071553.	9.975670	10.463028
	50	944568.	2876997.	3045835.	9.975233	10.458939
	40	943609.	2850235.	3020569.	9.974792	10.454881
	30	942641.	2823913.	2995744.	9.974347	10.450851
	20	941666.	2798020.	2971349.	9.973897	10.446851
70	10	940684.	2772545.	2947372.	9.973444	10.442879
	60	039693.	2747477.	2923804.	9.972986	10.438924
	50	938694.	2722808.	2900625.	9.972524	10.435017
	40	937687.	2698525.	2877853.	9.972058	10.431127
	30	936672.	2674621.	2855451.	9.971588	10.427262
	20	935650.	2651087.	2833419.	9.971113	10.423424
69	10	934619.	2627912.	2811747.	9.970635	10.419611
	60	933580.	2605089.	2790428.	9.970152	10.415823
	50	932534.	2582609.	2769453.	9.969665	10.412059
	40	931480.	2560465.	2748814.	9.969173	10.408319
	30	930418.	2538648.	2728504.	9.968678	10.404602
	20	929348.	2517151.	2708514.	9.968178	10.400909
68	10	928270.	2495966.	2688837.	9.967674	10.397239
	60	927184.	2475087.	2669467.	9.967166	10.393590
	50	926090.	2454506.	2650296.	9.966653	10.389964
	40	924989.	2434217.	2631618.	9.966136	10.386359
	30	923880.	2414214.	2613126.	9.965615	10.382776
	20	922763.	2394489.	2594914.	9.965090	10.379213
67	10	921638.	2375037.	2576975.	9.964560	10.375670
	60	920505.	2355852.	2559305.	9.964026	10.372148
	50	919365.	2336929.	2541896.	9.963488	10.368645
	40	918216.	2318261.	2524744.	9.962945	10.365162
	30	917060.	2299843.	2507843.	9.962398	10.361698
	20	915896.	2281669.	2491187.	9.961846	10.358253
66	10	914725.	2263736.	2474773.	9.961290	10.354826

TABULA II.

G.	M.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
24	0	406737.	445229.	1094636.	9.609313	9.648583
	10	409392.	448719.	1096060.	9.612140	9.651974
	20	412045.	452218.	1097498.	9.614944	9.655348
	30	414693.	455726.	1098948.	9.617727	9.658704
	40	417338.	459244.	1100411.	9.620488	9.662043
	50	419980.	462771.	1101888.	9.623229	9.665366
25	0	422618.	466308.	1103378.	9.625948	9.668673
	10	425253.	469854.	1104881.	9.628647	9.671963
	20	427884.	473410.	1106398.	9.631326	9.675237
	30	430511.	476976.	1107929.	9.633984	9.678496
	40	433135.	480551.	1109473.	9.636623	9.681740
	50	435755.	484137.	1111030.	9.639242	9.684968
26	0	438371.	487733.	1112602.	9.641842	9.688182
	10	440984.	491339.	1114187.	9.644423	9.691381
	20	443593.	494955.	1115787.	9.646984	9.694566
	30	446198.	498582.	1117400.	9.649527	9.697736
	40	448799.	502219.	1119028.	9.652052	9.700892
	50	451397.	505867.	1120670.	9.654558	9.704036
27	0	453990.	509525.	1122326.	9.657047	9.707166
	10	456580.	513195.	1123997.	9.659517	9.710282
	20	459166.	516875.	1125682.	9.661970	9.713386
	30	461749.	520567.	1127382.	9.664406	9.716477
	40	464327.	524270.	1129095.	9.666824	9.719555
	50	466901.	527984.	1130826.	9.669225	9.722621
28	0	469472.	531709.	1132570.	9.671609	9.725674
	10	472038.	535446.	1134329.	9.673977	9.728716
	20	474600.	539195.	1136104.	9.676328	9.731746
	30	477159.	542956.	1137893.	9.678663	9.734764
	40	479713.	546728.	1139698.	9.680982	9.737771
	50	482263.	550513.	1141518.	9.683284	9.740767
29	0	484810.	554309.	1143354.	9.685571	9.743752
	10	487352.	558118.	1145205.	9.687843	9.746725
	20	489890.	561939.	1147073.	9.690098	9.749689
	30	492424.	565773.	1148956.	9.692339	9.752642
	40	494953.	569619.	1150854.	9.694564	9.755585
	50	497479.	573478.	1152769.	9.696775	9.758517

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log.fin.	Log. ta.
	60	913545.	2246037.	2458593.	9.960730	10.351417
	50	912358.	2228568.	2442645.	9.960165	10.348026
	40	911164.	2211323.	2426922.	9.959595	10.344652
	30	909961.	2194300.	2411421.	9.959023	10.341296
	20	908751.	2177492.	2396137.	9.958445	10.337957
65	10	907533.	2160896.	2381065.	9.957863	10.334634
	60	906308.	2144507.	2366202.	9.957276	10.331327
	50	905075.	2128321.	2351542.	9.956684	10.328037
	40	903834.	2112335.	2337083.	9.956089	10.324763
	30	902585.	2096544.	2322820.	9.955488	10.321504
	20	901329.	2080944.	2308750.	9.954883	10.318260
64	10	900065.	2065532.	2294869.	9.954274	10.315032
	60	898794.	2050304.	2281172.	9.953660	10.311818
	50	897515.	2035256.	2267657.	9.953042	10.308619
	40	896229.	2020386.	2254320.	9.952419	10.305434
	30	894934.	2005690.	2241158.	9.951791	10.302264
	20	893633.	1991164.	2228168.	9.951159	10.299107
63	10	892323.	1976805.	2215346.	9.950522	10.295964
	60	891007.	1962611.	2202689.	9.949881	10.292834
	50	889682.	1948577.	2190195.	9.949235	10.289718
	40	888350.	1934702.	2177859.	9.948584	10.286614
	30	887011.	1920982.	2165681.	9.947929	10.283523
	20	885664.	1907415.	2153655.	9.947269	10.280445
62	10	884309.	1893997.	2141781.	9.946604	10.277379
	60	882948.	1880726.	2130054.	9.945935	10.274326
	50	881578.	1867600.	2118474.	9.945261	10.271284
	40	880201.	1854616.	2107036.	9.944582	10.268254
	30	878817.	1841771.	2095739.	9.943899	10.265236
	20	877425.	1829063.	2084579.	9.943210	10.262229
61	10	876026.	1816489.	2073556.	9.942517	10.259233
	60	874620.	1804048.	2062665.	9.941819	10.256248
	50	873206.	1791736.	2051906.	9.941117	10.253274
	40	871784.	1779552.	2041276.	9.940409	10.250321
	30	870356.	1767494.	2030772.	9.939697	10.247358
	20	868920.	1755559.	2020393.	9.938980	10.244415
60	10	867476.	1743745.	2010136.	9.938258	10.241483

R

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
30	0	500000.	577350.	1154701.	9.698970	9.761439
	10	502517.	581235.	1156648.	9.701151	9.764352
	20	505030.	585134.	1158612.	9.703317	9.767255
	30	507538.	589045.	1160592.	9.705469	9.770148
	40	510043.	592970.	1162589.	9.707606	9.773033
	50	512543.	596908.	1164603.	9.709730	9.775908
31	0	515038.	600861.	1166633.	9.711839	9.778774
	10	517529.	604827.	1168681.	9.713935	9.781631
	20	520016.	608807.	1170746.	9.716017	9.784479
	30	522499.	612801.	1172828.	9.718085	9.787319
	40	524977.	616809.	1174927.	9.720140	9.790151
	50	527450.	620832.	1177044.	9.722181	9.792974
32	0	529919.	624869.	1179178.	9.724210	9.795789
	10	532384.	628921.	1181331.	9.726225	9.798596
	20	534844.	632988.	1183501.	9.728227	9.801396
	30	537300.	637070.	1185689.	9.730217	9.804187
	40	539751.	641167.	1187895.	9.732193	9.806971
	50	542197.	645280.	1190120.	9.734157	9.809748
33	0	544639.	649408.	1192363.	9.736109	9.812517
	10	547076.	653551.	1194625.	9.738048	9.815280
	20	549509.	657710.	1196906.	9.739975	9.818035
	30	551937.	661886.	1199205.	9.741889	9.820783
	40	554360.	666077.	1201523.	9.743792	9.823524
	50	556779.	670284.	1203861.	9.745683	9.826259
34	0	559193.	674509.	1206218.	9.747562	9.828987
	10	561602.	678749.	1208594.	9.749429	9.831709
	20	564007.	683007.	1210991.	9.751284	9.834425
	30	566406.	687281.	1213406.	9.753128	9.837134
	40	568801.	691572.	1215842.	9.754960	9.839838
	50	571191.	695881.	1218298.	9.756782	9.842535
35	0	573576.	700208.	1220775.	9.758591	9.845227
	10	575957.	704551.	1223271.	9.760390	9.847913
	20	578332.	708913.	1225789.	9.762177	9.850593
	30	580703.	713293.	1228327.	9.763954	9.853268
	40	583069.	717691.	1230886.	9.765720	9.855938
	50	585429.	722108.	1233466.	9.767475	9.858602

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log sin.	Log.ta.
	60	866025.	1732051.	2000000.	9.937531	10.238561
	50	864567.	1720474.	1989982.	9.936799	10.235648
	40	863102.	1709012.	1980081.	9.936062	10.232745
	30	861629.	1697663.	1970294.	9.935320	10.229852
	20	860149.	1686426.	1960621.	9.934574	10.226967
59	10	858662.	1675299.	1951058.	9.933822	10.224092
	60	857167.	1664279.	1941604.	9.933066	10.221226
	50	855655.	1653366.	1932258.	9.932304	10.218369
	40	854156.	1642558.	1923017.	9.931537	10.215521
	30	852640.	1631852.	1913881.	9.930766	10.212681
	20	851117.	1621247.	1904847.	9.929989	10.209849
58	10	849586.	1610742.	1895914.	9.929207	10.207026
	60	848048.	1600335.	1887080.	9.928420	10.204211
	50	846503.	1590024.	1878344.	9.927629	10.201404
	40	844951.	1579808.	1869704.	9.926831	10.198604
	30	843391.	1569686.	1861159.	9.926029	10.195813
	20	841825.	1559655.	1852707.	9.925222	10.193029
57	10	840251.	1549715.	1844348.	9.924409	10.190252
	60	838671.	1539865.	1836078.	9.923591	10.187483
	50	837083.	1530102.	1827899.	9.922768	10.184720
	40	835488.	1520425.	1819806.	9.921940	10.181965
	30	833886.	1510835.	1811801.	9.921107	10.179217
	20	832277.	1501328.	1803881.	9.920268	10.176476
56	10	830661.	1491904.	1796045.	9.919424	10.173741
	60	829038.	1482561.	1788292.	9.918574	10.171013
	50	827407.	1473298.	1780620.	9.917719	10.168291
	40	825770.	1464115.	1773029.	9.916859	10.165575
	30	824126.	1455009.	1765517.	9.915994	10.162866
	20	822475.	1445980.	1758084.	9.915123	10.160162
55	10	820817.	1437027.	1750727.	9.914246	10.157465
	60	819152.	1428148.	1743447.	9.913365	10.154773
	50	817480.	1419343.	1736241.	9.912477	10.152087
	40	815801.	1410610.	1729110.	9.911584	10.149407
	30	814116.	1401948.	1722051.	9.910686	10.146732
	20	812423.	1393357.	1715064.	9.909782	10.144062
54	10	810723.	1384835.	1708148.	9.908873	10.141398

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
36	0	587785.	726543.	1236068.	9.769219	9.861261
	10	590136.	730996.	1238691.	9.770952	9.863915
	20	592482.	735469.	1241336.	9.772675	9.866564
	30	594823.	739961.	1244003.	9.774388	9.869209
	40	597159.	744472.	1246691.	9.776090	9.871849
	50	599489.	749003.	1249402.	9.777781	9.874484
37	0	601815.	753554.	1252136.	9.779463	9.877114
	10	604136.	758125.	1254892.	9.781134	9.879741
	20	606451.	762716.	1257671.	9.782796	9.882363
	30	608761.	767327.	1260472.	9.784447	9.884980
	40	611067.	771959.	1263297.	9.786089	9.887594
	50	613367.	776612.	1266145.	9.787720	9.890204
38	0	615661.	781286.	1269018.	9.789342	9.892810
	10	617951.	785981.	1271914.	9.790954	9.895412
	20	620235.	790697.	1274834.	9.792557	9.898010
	30	622515.	795436.	1277779.	9.794150	9.900605
	40	624789.	800196.	1280747.	9.795733	9.903197
	50	627057.	804979.	1283741.	9.797307	9.905785
39	0	629320.	809784.	1286760.	9.798872	9.908369
	10	631578.	814612.	1289803.	9.800427	9.910951
	20	633831.	819463.	1292872.	9.801973	9.913529
	30	636078.	824336.	1295967.	9.803511	9.916104
	40	638320.	829234.	1299088.	9.805039	9.918677
	50	640557.	834155.	1302234.	9.806557	9.921247
40	0	642788.	839100.	1305407.	9.808067	9.923814
	10	645013.	844069.	1308607.	9.809569	9.926378
	20	647233.	849062.	1311833.	9.811061	9.928940
	30	649448.	854081.	1315087.	9.812544	9.931499
	40	651657.	859124.	1318368.	9.814019	9.934056
	50	653861.	864193.	1321676.	9.815485	9.936611
41	0	656059.	869287.	1325013.	9.816943	9.939163
	10	658252.	874407.	1328378.	9.818392	9.941713
	20	660439.	879553.	1331771.	9.819832	9.944262
	30	662620.	884725.	1335192.	9.821265	9.946808
	40	664796.	889924.	1338643.	9.822688	9.949353
	50	666966.	895151.	1342123.	9.824104	9.951896

TABULA II.

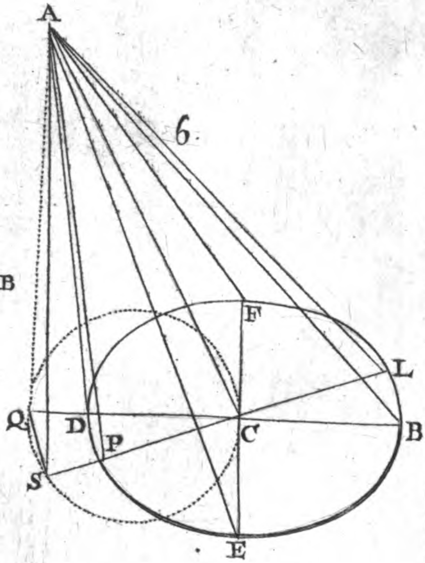
G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log.sin.	Log ta.
	60	809017.	1376382.	1701302.	9.907958	10.138739
	50	807304.	1367996.	1694524.	9.907037	10.136085
	40	805584.	1359676.	1687815.	9.906111	10.133436
	30	803857.	1351422.	1681173.	9.905179	10.130791
	20	802123.	1343233.	1674597.	9.904241	10.128151
53	10	800383.	1335108.	1668086.	9.903298	10.125516
	60	798636.	1327045.	1661640.	9.902349	10.122886
	50	796882.	1319044.	1655258.	9.901394	10.120259
	40	795121.	1311105.	1648938.	9.900433	10.117637
	30	793353.	1303225.	1642680.	9.899467	10.115020
	20	791579.	1295406.	1636483.	9.898494	10.112406
52	10	789798.	1287645.	1630346.	9.897516	10.109796
	60	788011.	1279942.	1624269.	9.896532	10.107190
	50	786217.	1272296.	1618251.	9.895542	10.104588
	40	784416.	1264706.	1612291.	9.894546	10.101990
	30	782608.	1257172.	1606388.	9.893544	10.099395
	20	780794.	1249693.	1600542.	9.892536	10.096803
51	10	778973.	1242268.	1594751.	9.891523	10.094215
	60	777146.	1234897.	1589016.	9.890503	10.091631
	50	775312.	1227579.	1583335.	9.889477	10.089049
	40	773472.	1220312.	1577708.	9.888444	10.086471
	30	771625.	1213097.	1572134.	9.887406	10.083895
	20	769771.	1205933.	1566612.	9.886362	10.081323
50	10	767911.	1298818.	1561142.	9.885311	10.078753
	60	766044.	1191754.	1555724.	9.884254	10.076186
	50	764171.	1184738.	1550356.	9.883191	10.073622
	40	762292.	1177770.	1545038.	9.882121	10.071060
	30	760406.	1170850.	1539769.	9.881046	10.068501
	20	758514.	1163976.	1534549.	9.879963	10.065944
49	10	756615.	1157149.	1529377.	9.878875	10.063389
	60	754710.	1150368.	1524253.	9.877780	10.060837
	50	752798.	1143633.	1519176.	9.876678	10.058287
	40	750880.	1136941.	1514145.	9.875571	10.055738
	30	748956.	1130294.	1509160.	9.874456	10.053192
	20	747025.	1123691.	1504221.	9.873335	10.050647
48	10	745088.	1117130.	1499327.	9.872208	10.048104

TABULA II.

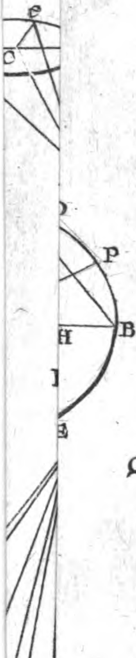
G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
42	0	669131.	900404.	1345633.	9.825511	9.954437
	10	671289.	905685.	1349172.	9.826910	9.956977
	20	673443.	910994.	1352742.	9.828301	9.959516
	30	675590.	916331.	1356342.	9.829683	9.962052
	40	677732.	921697.	1359972.	9.831058	9.964588
	50	679868.	927091.	1363634.	9.832425	9.967123
43	0	681998.	932515.	1367327.	9.833783	9.969656
	10	684123.	937968.	1371052.	9.835134	9.972188
	20	686242.	943451.	1374809.	9.836477	9.974720
	30	688354.	948965.	1378598.	9.837812	9.977250
	40	690462.	954508.	1382420.	9.839140	9.979780
	50	692563.	960083.	1386275.	9.840459	9.982309
44	0	694658.	965689.	1390164.	9.841771	9.984837
	10	696748.	971326.	1394086.	9.843076	9.987365
	20	698832.	976996.	1398042.	9.844372	9.989893
	30	700909.	982697.	1402032.	9.845662	9.992420
	40	702981.	988432.	1406057.	9.846944	9.994947
	50	705047.	994199.	1410118.	9.848218	9.997473
45	0	707107.	1000000.	1414214.	9.849485	10.000000

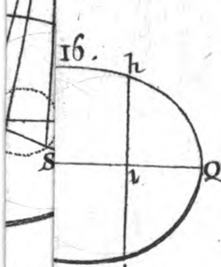
TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin	Log. ta.
	60	743145.	1110613.	1494477.	9.871073	10.045563
	50	741195.	1104137.	1489670.	9.869933	10.043023
	40	739239.	1097702.	1484907.	9.868785	10.040484
	30	737277.	1091308.	1480187.	9.867631	10.037948
	20	735309.	1084955.	1475510.	9.866470	10.035412
47	10	733334.	1078642.	1470874.	9.865302	10.032877
	60	731354.	1072369.	1466279.	9.864127	10.030344
	50	729367.	1066134.	1461726.	9.862946	10.027812
	40	727374.	1059938.	1457213.	9.861758	10.025280
	30	725374.	1053780.	1452740.	9.860562	10.022750
	20	723369.	1047660.	1448306.	9.859360	10.020220
46	10	721357.	1041577.	1443912.	9.858151	10.017691
	60	719340.	1035530.	1439557.	9.856934	10.015163
	50	717316.	1029520.	1435239.	9.855711	10.012635
	40	715286.	1023546.	1430960.	9.854480	.0.010107
	30	713250.	1017607.	1426718.	9.853242	10.007580
	20	711209.	1011704.	1422513.	9.851997	10.005053
45	10	709161.	1005835.	1418345.	9.850745	10.002527
44	60	707107.	1000000.	1414214.	9.849485	10.000000

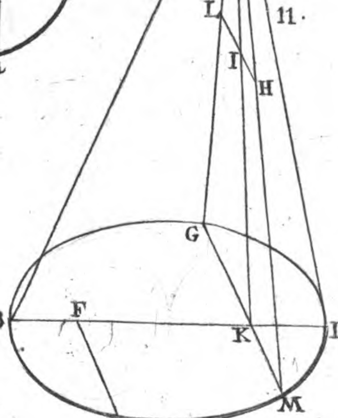


6.





16.



11.