Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

T
Ia.14.a.

Digitized by Google

Digitized by Google

Math. P. 217

Mathesis. Algebra generalis.
227.

Digitized by Google

ELEMENTA ARITHMETICÆ NUMERICÆ, ET LITERALIS SEU ALGEBRÆ

AD

PRÆFIXAM IN SCHOLIS NOSTRIS NORMAM

CONCINNATA

A

R. P. MAXIMILIANO HELL, è S. J.

ANTEHAC IN ACADEMIA CLAUDIOPOLITANA TRANSYLVANIÆ MATHESEOS PROFESSORE PUBLICO, NUNC IN UNIVERSITATE VINDOBONENSI

ASTRONOMO CÆSAREO-REGIO.

EDITIO TERTIA.

VIENNÆ,

TYPIS ET SUMPTIBUS JOANNIS THOMÆ TRATTNER, CÆS. REG. MAJEST. AULÆ TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.

M. DCC. LXI.

Digitized by Google

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

TYPOGRAPHUS
AD
LECTOREM.

Prima Arithmeticæ literalis Elementa, quorum tertiam Editionem facimus, Claudiopoli in Transylvania, ubi Author Mathesim profitebatur publicam, primam viderunt lucem Anno 1755. Prodiêre tum mille Exemplaria, usibus Scholasticis in plures annos, ut putabatur, suffectura. Bienniô elapsô vix pauca super erant, distractis pene omnibus. Editionem itaque alteram, ut indulgeret Author rogatus, abnuit, spe otii habendi, quo promissas cæteras partes, *Analysim sublimiorem*, aut saltem *Geometriam* novo à se systemate conceptam adjungeret. Abiît annus, otium tamen Authori, Astronomica jussu AUGUSTORUM tractanti non modo non datum, ut is novis omnino laboribus, in annos singulos crescentibus obrueretur.

Digitized by Google

Expetitis ergò in Regiones exteras exemplaribus, cum nulla ſupereſſent, ſecunda in Polonia Editio, Authore inſcio, prodiît; Quapropter deſideratis Exemplaribus in noſtris Regnis, perurgentibus amicis, cum ſpes otii *Geometriæ* componendæ nulla affulgeret Authori, precibus multorum tandem conceſſit, Editionemque hanc Tertiam nobis faciendam indulſit. Quamvis autem quædam ex his omittenda, alia etiam immutanda Author cuperet, à prima tamen Editione omnino non recedendum cenſuimus, eo, quod quæ placuêre hucusque, placitura etiam deinceps judicaremus, maxime, poſtquam intelleximus ex iisdem Elementis Arithmeticam Numericam, idiomate germanico concinnatam, in uſus Scholarum inferiorum typis edendam eſſe proxime.

PRÆ-

Digitized by Google

PRÆFATIO AUTHORIS
AD
LECTOREM.

Cum annis abhinc decem JOANNIS CRIVELLII *de Arithmetica literali Opusculo desideratis augendo, mendisque repurgando in usum Tyronum Philosophiæ properatam Altiorum Imperio operam locarem, nihil minus animo præceperam, quam & me penum Mathematicam scriptis subinde oneraturum. Tot quippe Recentiorum inventis optimis scientia hæc, vel mea ætate aucta, ut rectiora, aut non dicta prius adferri vix posse facile intelligerem, postquam mei olim in Mathematicis Professoris* Erasmi Frœlichii, *viri è Societate mea ab eruditis lucubrationibus per Europam clarissimi,* Introductio facilis in Mathesim ad usum Tyronum Philosophiæ Provinciæ Austriæ Soc. Jesu conscripta, *in usum publicum prodiit; Quanti hæc pretii nostris in Academiis usque sit, usus, quo in manibus Tyronum nostrorum etiam hodie versatur, palam facit. At enim mutata*

Digitized by Google

per Academias nostras Studiorum Ratione, præfixa Collegiis Mathematicis publicarum Prælectionum Norma opusculum postulabat, quo Prima Arithmeticæ, Algebræ, Geometriæ, *atque* Trigonometriæ, *Principia Theoretica, & Practica, eaque usibus etiam communibus applicata, ita pertractarentur, ut primis Tyronum conatibus forent accommoda, essetque libellus materia plenus, mole parvus, regulis necessariis brevis, exemplis certo consilio electis longus, iisque prodesset maxime, quibus ne prima quidem Arithmetices principia innotuere. Hæc, nec præterea alia, quum, in unum concinnata opusculum, Authorem adhuc desiderabant, causam perspicis L. B. laboris tumultuarii in gratiam meorum Tyronum suscepti, quorum utilitati nolle consultum, ejus non esse putavi, qui se, suaque omnia DEI Gloriæ, omniumque commodis consecrasset. Jam vero, quæ præstitisse in hoc opusculo conatus fuerim paucis accipe.*

Methodum, *sectando Mathematicam, Theoriam Praxi ita sociare satagebam, ut è paucis* Theorematibus, *tanquam fontibus, utilissimorum Problematum copiam derivarem;* Problemata *necessariis duntaxat, iisque in casus distinctis regulis instruxi, Exemplis autem, & copiosis, & utilissimis declaravi; ex his* Corollaria *permulta deduxi; In* Scholiis *denique haud parcus, dubia resolvi, utilia monui, cumque mihi ejusmodi Tyronibus scribendum esset, ad quos vix nomen* Algebræ *usque penetraverat, multis opus erat, quibus*

Digitized by Google

bus futuram Analyſeos *utilitatem, mirandamque vim oculis ipſis exhiberem, generoſos cætera, at in ſcientia nova peregrinos animos, novis identidem ſtimulis ad æmulandos eruditarum gentium doctos labores, ac ſtudia incitarem; univerſim in id conatus meos intendebam unice, ut ſcientias Mathematicas, quibus à pueritia innutritus delector maxime, diſcentibus faciles, jucundas, utilesque comprobarem, obſcura, aut ambigua, quæ novis Tyronibus, plurium annorum doctus experientia, negotium faceſſere novi, partim declararem, partim ſurrogatis aliis, tollerem; finem hunc conſequendi gratia, etſi in concinnandis partibus ſingulis operam qualemcunque adhibuerim, præcipuam tamen in enucleandis penitius Elementis Algebræ impendiſſe me non diffiteor.*

Neque velim quispiam iſthic ſublimia quærat, Philoſophiæ Naturali *duntaxat* ancillari *cupio hæc mea Elementa non* dominari *diſciplinis Mathematicis, tametſi noverim, ea hujusmodi eſſe, quibus inſtructi Tyrones in Mathesi utraque pura nempe, & mixta, feliciſſimos ad* DEI *Gloriam, Patriæque utilitatem progreſſus facere valeant; Præterea iis quoque prodeſſe hisce elementis volui, qui melioribus deſtituti præſidiis, Marte proprio, cumprimis Arithmeticam condiſcere ad uſus Civiles geſtiunt, horum gratia complura* Lector *reperiet, quæ iisdem uſibus deſerviant commode. Fruere itaque L. B. meosque ad* DEI *Gloriam conatus, eo velim ſuſcipias animo, quo damus.*

Digitized by Google

PROLEGOMENA
IN
MATHESIM UNIVERSAM

De Methodo Mathematica.

I.

Mathesis (voce Græca Μάθησις *Scientia*, vel *Disciplina* per Antonomasiam appellata) est *Scientia Quanti.* Dividitur in *Mathesim puram*, & *Mixtam.* Mathesis *pura* est scientia Quanti abstracti ab omni materia, habetque pro objecto quidquid numerabile, aut mensurabile est; cujusmodi sunt *Algebra* juncta *Arithmeticæ numericæ*, cum *Geometria pura.* Mathesis *mixta* dicitur, quæ materiis physicis applicatur, ejusmodi sunt; *Geometria mixta*, *Statica*, *Mechanica*, *Hydraulica* &c. Mathesis pura, scientia est certissima, *Mixta* secundum formam Mathematicam solum certa est, non item semper secundum materiam.

II. *Methodus mathematica* est ordo, seu modus quidam peculiaris, quo Mathesis utitur ad veritates suas inveniendas, demonstrandas, tradendasque. Dividitur hæc bifariam, in methodum

Digitized by Google

dum nempe *Analyticam*, & *Syntheticam*. Methodus *Analytica*, seu *Resolutoria* inveniendis, detegendisque veritatibus famulatur; *Synthetica*, seu *Compositoria*, ea, quæ ope Analysis reperta sunt, in ordinem disponit, veritatemque veritati ita componendo nectit, ut abs se invicem, non secus atque catenæ annuli, dependeant; inservit hæc tradendis suis dogmatibus mathematicis. In Methodo itaque *Synthetica*, adhibentur I. *Definitiones*. II. *Postulata*. III. *Axiomata*. IV. *Experientiæ*. V. *Hypotheses*. VI. *Propositiones*. VII. *Demonstrationes*. VIII. *Theoremata*. IX. *Problemata*. X. *Porismata*, seu *Lemmata*. XI. *Corollaria*. XII. *Scholia*.

III. *Definitio* est distincta notio, vel explicatio Rei, aut Nominis, de quo agitur. *Ex.gr. Numerus* est ordinata unitatum multitudo.

IV. *Postulatum* dicitur, quod fieri posse, ab alio nobis facile concedendum postulamus. *Ex. gr. Ab uno puncto ad aliud ducere lineam.*

V. *Axioma* (Ἀξίωμα *dignum creditu*) est veritas perceptis rite terminis per se, vel ex terminis manifesta, aut lumine naturæ nota. *Ex.gr. Totum est majus sua parte.*

VI. *Hypothesis* (Ὑπόθεσις *Suppositio*) sunt res, vel signa rerum ad libitum ex institutione hominum assumpta, *Ex.gr.* si loco vocis *Æquale* assumatur signum =, aut loco numeri 5 litera *a*, vel *b*, hujusmodi sunt in Astronomia loco *Solis* ☉, loco *Lunæ* ☽, &c.

VII. *Ex-*

VII. *Experientia* eſt effectus quispiam ſive ſenſu externo, ſive interno perceptus ſimul, & cognitus, *Ex.gr.* dum ſtellæ, quæ interdiu non videbantur, ſole occumbente, nocte ſerena, conſpiciuntur. *Experientiæ* itaque ſunt tantum rerum ſingularium perceptiones cognitæ.

VIII. *Propoſitio* eſt enunciatio clara, & diſtincta propoſitæ alicujus veritatis, vel praxeos; & hinc duplex eſt *Speculativa*, aut *Theoretica*, & *Practica*. Speculativa propoſitio eſt enunciatio clara, & diſtincta veritatis cujuspiam, id eſt, quid rei cuipiam ſub certis conditionibus, aut etiam abſolute convenire poſſit, quid non. *Ex.gr. Si duo numeri invicem multiplicentur, idem factum producitur ſive primus in ſecundum, ſive ſecundus in primum ducatur.* *Propoſitio practica* dicitur, quæ aliquid faciendum, aut efficiendum proponit. *Ex.gr. Additionem numericam facere, ſeu addere numeros.* Porro utraque propoſitio ſubdividitur in *Conditionatam*, ſeu *Hypotheticam*, & in *Abſolutam*. *Hypothetica* eſt, quæ enunciat veritatem, aut aliquid efficiendum proponit ſub certis conditionibus; *Ex.gr. Si quatuor termini ſunt proportionales, erit factum duorum extremorum æquale facto mediorum.* Ubi ſub conditione proportionalitatis enunciatur æqualitas facti extremorum cum facto mediorum. *Abſoluta* eſt, quæ ſub nulla conditione proponitur. *Ex.gr. Quod multiplicatio componit, tollit diviſio.*

IX. *De-*

Digitized by Google

IX. *Demonſtratio* eſt brevis argumentatio ex principiis jam certis deducta, qua intellectus convincitur ad affirmandum, vel negandum id, quod in propoſitione ſeu ſtatu quæſtionis affirmabatur, vel negabatur.

X. *Theorema* (Θεώρημα *Speculatio*) eſt complexum ex propoſitione ſpeculativa univerſali, & ex demonſtratione conſtans, ſeu eſt veritas propoſita ſimul, & demonſtrata. *Ex. gr.* Si proponatur hæc veritas: *Quod multiplicatio componit, tollit diviſio*, & ſimul per adnexam demonſtrationem id ipſum probetur, erit complexum hoc Theorema. Finitur Theorema, vel potius Demonſtratio his notis: Q.E.D. id eſt: *Quod erat demonſtrandum.*

XI. *Problema* (Πρόβλημα *Propoſitum*, ſeu *res ad faciendum propoſita*) eſt complexum ex *Propoſitione practica*, ſeu quæ aliquid faciendum proponit, ex *Reſolutione*, qua res propoſita fieri docetur, & ex *Demonſtratione*, qua demonſtratur Reſolutionem datam rite factam eſſe, ut proponebatur. *Reſolutio* finiri ſolet his notis: Q.E.F. id eſt, *Quod erat faciendum.*

XII. *Poriſma* (Πόρισμα *Præparatio*, *Tranſitus*) eſt Theorema prævium, aut præmiſſum ad aliud ſequens Theorema, vel Problema aliquod illuſtre facilius, aut brevius demonſtrandum, vocatur etiam *Lemma* (Λῆμμα *acceptio*, vel *propoſitum.*

XIII. *Co-*

Digitized by Google

XIII. *Corollaria* ſunt veritates, vel praxes ex Definitione, Axiomate, Theoremate, vel Problemate ultro fluentes ſine adhibita, aut ſaltem quam ſimpliciſſima nova demonſtratione.

XIV. *Scholia* (Σχόλια) ſunt adnotationes quædam poſt Definitiones, Propoſitiones, Corollaria &c. poſitæ, quibus obſcura declarantur, dubia reſolvuntur, uſus doctrinæ indicatur, eruditio aliqua proponitur, aut quidvis aliud ſcitu non injucundum adfertur, aut opportune monetur.

XV. Adhibentur quoque in hac methodo numeri Paragraphorum, ut horum ope, aliis in locis uſurpata nomina, aut veritates in memoriam, ſi forte excidiſſent, relegendo revocari facile queant, ſimulque, ut prolixæ earundem rerum, aut definitionum repetitioni via præcluderetur.

XVI. Methodus itaque Mathematica exigit, ut ante omnia voces, & res omnes clare, & diſtincte definiantur, præmittantur Axiomata, Hypotheſes, & Poſtulata, ſi iis opus ſit, dein ſtatus quæſtionis proponatur itidem diſtincte, clare, & breviſſime, id eſt, fiat Propoſitio clara, & diſtincta; facta Propoſitione id, quod propoſitum erat, & ſub iisdem conditionibus, nec aliud, ſuccincte, & clarè demonſtretur. In demonſtrationibus nihil adhibeatur, quod vel jam prius demonſtratum, definitum, aut declaratum non ſit; id maxime cavendum, ne ſuperfluum

Digitized by Google

fluum aliquid adferatur, ſed uno, alterove Enthymemate, aut Syllogiſmo *concluſio*, quæ identica ſit cum propoſitione facta, inferatur. Ex his utilia Corollaria deducantur, & Scholia ſubjiciantur, ſi opus ſit.

XVII. Ordo autem Propoſitionum, aut Theorematum caute obſervandus, ut maxime ſimplicia, & facillima antecedant, ex his ad ſublimiora tanquam per gradus quosdam progrediendum, in hoc progreſſu ita ſibi connexæ ſuccedant propoſitiones, & veritates, ut poſteriorem ex priore conſequi neceſſe ſit, itaque dependeant, ut poſteriores ſine prioribus conſiſtere non poſſint. Verum de methodo hac mathematica, quæ hic ſtrictim relata ſunt, fuſe videri poſſunt in eleganti Opuſculo *R. P. Philippi Steinmeyer, e S. J.* ſub titulo: *Regulæ præcipuæ methodi Mathematicæ, ſeu ſcientificæ, Auguſtæ Vindel. 1750. in 8vo.* Item *Illuſtr. Chriſtiani Wolfii, De Methodo Mathematica brevis commentatio*, Elementis ſuis Matheſeos præfixa.

MO-

Digitized by Google

MONITA
AD
TYRONES MATHESEOS,

De Methodo legendi libros Mathematicos.

I.

Definitiones intime sibi perspectas habeat Tyro Mathematicus, easque memoria non fallente retinere studeat, ac sæpius repetendo earum usum sibi familiarem reddat.

II. *Axiomata quoque (quæ, uti definitiones, fundamenta sunt primarum demonstrationum) è memoria sine hæsitatione depromere assuescat.*

III. *Propositionem factam, sive statum quæstionis propositum, & demonstrandum, aut practicè efficiendum omnimodè perspiciat, ac intelligat, ac si plures complectatur partes, singulas distinctè cognoscat oportet, videatque, sub quibus conditionibus enuncientur; nec prius ad legendam, intelligendamque subjectam demonstrationem progrediatur, quam propositionem penitus sibi cognitam habeat.*

IV. *Non inutile videtur monitum quorundam, ut intellecta probe Propositione, si affirmativa sit,* negativam, *si negativa,* affirmativam *fingat esse veriorem, nec ante veram admittat, nisi intellectu per subjectam propositioni demonstrationem integre convicto.* Ex. gr. *Sit Propositio:* In omni proportione Geometrica factum extremorum est æquale facto mediorum. *Ante, quam ad legendam demonstrationem accedam, fingo non esse verum, aut saltem dubium videri, quod* in omni Proportione Geometrica factum extremorum, debeat esse æquale facto mediorum. *Neque enim quærenti veritatem, cum primis Mathematicam, quidpiam admittendum, aut affirmandum est, de cujus veritate intellectus convictus non sit, cum in dogmatibus Mathematicis, humana enunciantis authoritas nullius, aut certe non majoris ponderis esse debeat, quam vis argumentorum, seu propositæ rationes.*

V. *Dum demonstrationem legit, videat, an præmissas evidentes intelligat, si de sensu, aut veritate cujuspiam dubitet, citatum eo in loco paragraphum evolvat, omniaque, quæ sub eo numero continentur, relegat, & experietur dubium sibi omne de veritate sublatum. Hujusmodi enim dubium frequentissimum est Tyronum vitium propterea, quod, quæ antecesserunt, & in quibus propositiones*

Digitized by Google

tiones demonstrationum fundantur, Tyronibus facillime è memoria excidant. Unde, quæ exercitato clara, & manifesta sunt, ea Tyronibus obscura, & dubia videntur.

VI. *Non transiliat, aut prætermittat rem ullam non intellectam, præsertim, si adsit, quem consulat, eoque ordine singula legat, quo proposita habentur; certus namque sit, methodum Mathematicam hujusmodi esse, ut intelligentia veritatum posteriorum à priorum perspicuitate plene dependeat, nec de progressu sibi quis blandiatur, qui per saltum propositionum scientiam Mathematicam comparari posse existimat.*

VII. *Si veritas demonstrata quomodocunque in praxin deduci possit, per singulos casus variando exerceatur.*

VIII. *Propositiones practicas (præsertim Geometriæ) instrumentorum præscriptorum ope sive in charta, sive in campo, aut loco in propositione determinato resolutas, ipse exerceat, figuras delineet, construat, ac rite factas demonstret.*

IX. *Si Professore utatur explanante sua, aut alterius Mathematici typis vulgata dogmata, plurimum ad profectum confert, si materiam explanandam privatim prælegendo intelligere marte proprio studeat, non intellecta, aut dubia adnotet, explicantem Professorem absque mentis evagatione* (nam fixam mathemata mentem exigunt) *audiat attentus, si finita explanatione nondum sibi satisfactum advertat, tum consulat Professorem, aut cum intelligente quovis alio conferre non pudeat.*

X. *Modum operandi periti Professoris ad amussim æmuletur, eundemque constanter teneat cum primis in Algebra.*

XI. *Formulas Algebraicas (quarum nulla est, quæ Theorema, aut utile quoddam Problema non contineret) contemplari, quidque eloquatur, intelligere assuescat.*

XII. *Animadvertat ad methodum ipsam Mathematicam, quomodo, & quibus viis, e paucis cognitis ad ignota, e simplicibus, & quasi obviis ad sublimia detegenda feratur, eamque in aliis disciplinis seu tradendis, seu condiscendis usurpare conetur.*

XIII. *Universim notent Tyrones, ut cæteras disciplinas, ita Mathesim omnimodis exercitio, & usu frequentissimo comparari, conservarique.*

CON-

Digitized by Google

CONSPECTUS PARTIUM, ET CAPITUM *Arithmeticæ numericæ.*

PARS I.

De Natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

		Folio.
CAP. I.	*De Arithmetica in genere.* - -	1
CAP. II.	*De Numeratione.* - - -	4
CAP. III.	*De Additione numerica.* - -	5
CAP. IV.	*De Subtractione numerica.* - -	10
CAP. V.	*De Multiplicatione numerica.* - -	14
CAP. VI.	*De Divisione numerica.* - -	21

PARS II.

De Logistica Decimali.

CAP. I.	*Hypotheses numerorum decimalium.* -	33
CAP. II.	*De Additione Logisticorum decimalium.*	41
CAP. III.	*De Subtractione Logisticorum decimalium.*	46
CAP. IV.	*De Multiplicatione Logisticorum decimal.*	48
CAP. V.	*De Divisione Logisticorum decimalium.*	54

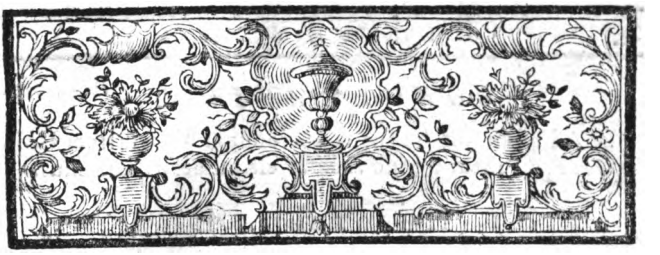
PARS III.

De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas numericas.

CAP. I.	*De Reductione numerorum mixtorum heterogeneorum reducibilium.* - -	61
CAP. II.	*Reductionum Tabulæ XV.* - -	65
CAP. III.	*Animadversiones in notas numericas.*	72
CAP. ULT.	*Tyronem manuducens ad praxim, & usum quatuor Algorithmorum Arithmeticæ numerorum integrorum.* - -	77

ELE-

Digitized by Google



ELEMENTA ARITHMETICÆ NUMERICÆ.

PARS I.

De natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

CAPUT I.

De Arithmetica in genere.

DEFINITIO I.

1. *Arithmetica Numerica* est scientia numerorum, hoc est, inquirendi in naturam Numerorum, ex qua certæ numerorum proprietates deductæ determinantur.

DEFINITIO II.

2. *Numerus* est ordinata unitatum multitudo.

DEFINITIO III.

3. *Unitas* est Principium Numeri.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

4. Ad numerum itaque conficiendum binæ saltem Unitates requiruntur; hinc *dualitas* est numerus minimus.

HYPOTHESIS I.

5. Signa, *seu* notæ, *quibus Arithmetica numerorum utitur*, decem *sunt*: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. *quorum ultima figura* (0) *nihil significat, nisi ex novem aliis aliqua ante ponatur, & tum ejus valorem auget per* decem. *Enunciantur autem signa hæc hoc modo:* Unum, duo, tria, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem, Zerus. *Vocantur hi numeri etiam* integri.

HYPOTHESIS II.

6. *Valor horum signorum:* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. *ex institutione hominum dependet à solo ordine, loco, vel situ, in quo tale signum locatur, vel scribitur.*

HYPOTHESIS III.

7. *Ordo, sive locus cognoscitur à dextra sinistram versus progrediendo*, E. gr. *sint aliqua signa, sive notæ numericæ hoc ordine locatæ:* 1754. *tum dextima nota* 4, *valet tantum* unitates *simplices, sequens nota* 5, *valet tot* decades, *quot ipsa unitates significat; quæ hanc consequitur, nempe* 7, *valet tot* Centenarios, *quot ipsa unitates denotat; ultima denique* 1, *valet tot* Millenarios, *quot ipsa unitates significat.*

COROLLARIUM I.

8. Hinc liquet incrementum valoris numerorum ex loco desumptum, fieri sinistram versus per *Decades* antecedentium.

COROLLARIUM II.

9. Patet quoque, quod hæc signa *decem* sufficiant ad exprimendum quemcunque magnum numerum.

COROL-

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

10. *Zerus* itaque omnem locum occupat, in quo ex significantibus notis novem, aliqua non ponitur; *E. gr.* in hoc ordine: 502, ubi 0 locum *decadum* occupare debet, ut numerus 5 locum *centenariorum* occupare possit; secus enim, si non occuparet *Zerus*, sed *E. gr.* scriberetur sic: 52, numerus 5 non *centenarios*, sed *decades* significaret. (§. 6. & 7.)

SCHOLION I.

11. *Ratio hujus ordinis à dextra sinistram versus est, quia modus scribendi Orientalium (uti sunt Arabes, Hebræi, Turcæ &c. qui Arithmeticam invenerunt) est etiamnum à dextris sinistram versus; ipsa vero signa numerica (quæ literæ sunt Arabum) nos* Arabica, *ab Inventoribus Arabibus, appellamus.*

SCHOLION II.

12. *Ratio incrementi valoris per* decem *ab ipsa natura repeti debet, quæ hominem decem digitis, tamquam numerandarum rerum notis, & instrumentis dotavit. Digitis enim natura duce utimur in computando. quam diu Arithmeticæ regulis instructi non sumus.*

CAPUT II.

De Numeratione.

Species Arithmeticæ numerorum integrorum sunt quinque: *Numeratio*, *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Divisio*. De sola numeratione hoc capite, de aliis in sequentibus agetur.

DEFINITIO IV.

13. *Numeratio* est ars enunciandi, & scribendi quoscunque numeros secundum valores suos totales.

PROBLEMA I.

14. PROP. *Numerum quemcunque propositum enunciare.*

RESOLUTIO.

I. Propositum numerum inchoando à dextris sinistram versus (§. 11.) per *virgulas*, sive *commata* distin-

Digitized by Google

gue in classes, classi cuilibet tres notas assignando, & habebis in qualibet classe à dextris sinistram versus, *uuitates*, *decades*, & *centenarios*. (§.7.)

II. Post dextimæ classis *virgulam* signa superne numerum *puncto uno*, quod *millenarios* designat; post secundæ classis *virgulam*, signa superne numerum una *virgula*, quæ *milliones* significat; post tertiæ classis *virgulam*, nota superne numerum iterum *puncto uno*, quod *millenarios millionum* significat; post quartæ classis *virgulam* nota superne numerum *duabus virgulis*, quæ *millionum milliones* significat: & sic semper alternando cum *punctis*, & *virgulis* à dextris sinistram versus progredere, donec signando numerum propositum absolvas.

III. Juxta signa apposita, enunciationem ordieris à sinistra dextram versus, virgulas *supernas* per *milliones*, puncta *superna* per *millenarios*, virgulas *infernas*, sive *commata* per *centenarios*, cæteras notas numericas per *decades*, & *unitates* appellabis, respiciendo semper ad virgulas, & puncta proxima dextram versus. Sed hæc viva voce magis clarescent.

Sit enunciandus, per puncta, & virgulas jam distinctus numerus:

4 Unitates	5 Decades	8 Centenarii } Simplices.
7, Unitates	5 Decades	2 Centenarii } Millenariorum.
8, Unitates	3 Decades	6 Centenarii } Millionum.
9, Unitates	8 Decades	7 Centenarii } Millenariorum Millionum.
4, Unitates	8 Decades	2 Centenarii } Bimillionum.
5, Unitates	3 Decades	} Millenariorum Bimillionum.

Igitur

Igitur numerum propositum sic enunciabis: Octuaginta quinque *millia bimillionum*, ducenti triginta quatuor *bimilliones*, septingenta octuaginta novem *millia millionum*, sexcenti triginta octo *milliones*, ducenta quinquaginta septem *millia*, octingenta quinquaginta quatuor folia *E.gr.* arborum.

Demonstratio hujus enunciationis patet ex cap. I. §. 6. ad 10. inclusive.

COROLLARIUM I.

15. Ex attenta hujus exempli contemplatione, liquet *primo:* puncta superne numeris apposita exprimenda esse per vocem *millia*, virgulas autem per vocem *millionum*, & quidem una virgula simpliciter per vocem *millio;* binæ virgulæ per voces *millionum millio*, seu brevius, per vocem *bimillio;* tres virgulas per voces *millionum millionum millio*, seu brevius *trimillio*, aut *trillio;* ita quatuor virgulas per vocem *quadrimillio;* quinque virgulas per vocem *quinimillio;* sex per vocem *seximillio*, & sic porro. *Secundo:* patet, ad numerum *millenarium* requiri quatuor notas numericas; ad *millionem* vero septem, ad *bimillionem* tredecim, ad *trimillionem* novemdecim, accremento videlicet sex notarum sequentium.

COROLLARIUM II.

16. Eodem modo enunciatur quivis alius numerus, in quo complures zeri reperiuntur, hoc solum notato, quod cum zerus nihil significet (§. 5.) zeri non enuncientur. Sic numerum propositum: 3, 0 2 0, 0 0 0, 0 5 6, 0 0 4, 3 0 0. ita enunciabis: tria millia viginti *bimilliones*, quinquaginta sex *milliones*, quatuor *millia* trecentæ *E.gr.* atomi.

CAPUT III.

De Additione Numerica.

AXIOMA.

17. Omnis numerus vel est *purus*, vel *mixtus*.

Digitized by Google

DEFINITIO V.

18. Numerus *purus*, ſive *abſtractus*, aut *diſcretus* eſt, qui ſolam multitudinem ſignificat abſtractam ab omni materia rei alicujus, ut ſi dicas: *tria*, *ſeptem*, *centum* &c.

DEFINITIO VI.

19. Numerus *mixtus*, ſive *concretus*, aut *materialis* eſt, qui præter multitudinem ſignificat ſimul materiam, ſive res, cujus eſt multitudo. Ut ſi dicas: *tres calami*, vel *ſeptem floreni*, aut *centum urnæ vini* &c. numerus *mixtus* dividitur in numeros *homogeneos*, & *heterogeneos*.

DEFINITIO VII.

20. Numeri *homogenei* ſunt, qui ſignificant res ejusdem ſpeciei, & denominationis, ut *quinque calami*, & *ſeptem calami*.

DEFINITIO VIII.

21. Numeri *heterogenei* ſunt, qui ſignificant res diverſæ ſpeciei, ſeu denominationis, ut *ſeptem calami*, & *octo urnæ vini*. Porro numeri *heterogenei*, vel ſunt *reducibiles*, vel *irreducibiles*.

DEFINITIO IX.

22. Numeri heterogenei *reducibiles* ſunt, qui ad eandem ſpeciem, ſive denominationem reduci poſſunt, ut *duo floreni*, & *quinque groſſi*; nam duo floreni (germanici) valent bis viginti, ſeu 40. *groſſos*.

DEFINITIO X.

23. Numeri heterogenei *irreducibiles* ſunt, qui ad eandem ſpeciem, ſive denominationem reduci non poſſunt, ut *tres calami*, & *quinque urnæ vini*.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

24. *Adverte: numeros heterogeneos secundum se* irreducibiles *posse fieri* reducibiles, *si in quodam* tertio *conveniant, ut* tres equi, & septem urnæ vini, *si considerantur quoad pretia pecuniæ, erunt reducibiles in ratione pecuniæ.*

AXIOMATA.

25. I. *Totum* est æquale omnibus partibus simul sumptis, & vicissim.

26. II. *Totum* est majus sua parte.

27. III. *Pars* est minor suo toto.

28. IV. Quæ sunt æqualia uni tertio, sunt æqualia inter se.

SCHOLION.

29. *Axiomata hæc, quia lumine naturæ nota, demonstratione non egent, ut adeo rigidissimi etiam Mathematum cultores superfluitatis non immerito arguant factum* Cl. Christ. Wolffii, *qui hæc in suis Elementis Math. per propositiones identicas, nihilo ipsis axiomatibus clariores, demonstravit.*

DEFINITIO XI.

30. *Additio numerica*, est collectio plurium numerorum partialium, & homogeneorum in unum *totum*, quod totum *summa*, sive *aggregatum*, aut *quæsitum* dicitur. Numeri vero colligendi vocantur *addendi*, aut *dati*.

COROLLARIUM.

31. Hinc ad additionem numerorum mixtorum requiritur homogeneitas numerorum.

PROBLEMA II.

32. PROP. *Additionem numericam facere*, sive *addere numeros.*

RESOLUTIO.

I. Numeri addendi homogenei ita sub se invicem collocentur inchoando à dextris sinistram versus, ut unitates respondeant unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c.

Digitized by Google

II. Sic collocati numeri ſubducantur linea, ne addendi confundantur cum ſumma.

III. Inchoetur collectio à dextris, ſive ab unitatibus, & ſumma unitatum ſcribatur ſub linea directe infra unitates; eodem modo colligantur decades, & ſumma decadum ſcribatur infra decades, & ſic procedendum erit cum centenariis &c. *Vide exemplum I.*

IV. Quod ſi ſumma unitatum excreſcat ultra numerum novem, ſeu in ejusmodi numerum, qui duabus notis ſcribendus foret, ſcribatur tantum illa, quæ alias ad dextram ſcribi deberet, altera vero nota mente retenta, addatur numeris ſequentis claſſis decadum; idem obſerva in reliquis claſſibus. *Vide exempl. II. & III.*

V. Si addendi ſint *heterogenei reducibiles*, E. gr. floreni, groſſi, cruciferi ad flor. groſ. & crucif. collocentur ſub ſe invicem ita, ut crucif. reſpondeant cruciferis, groſſi groſſis, flor. florenis, & à minima ſpecie inchoando, collectio inchoetur ut ſupra; hoc ſolum notato, quod, quoties ſumma ſpeciei inferioris adæquat ſpeciem ſuperiorem, toties ſuperiori ſpeciei ſit addenda. *Vide exempl. IV.*

DEMONSTRATIO.

33. Additio numerica eſt collectio plurium numerorum partialium, & homogeneorum in unum totum (§. 30.) ſed *per reſolutionem hujus Probl.* in ſumma collecti habentur omnes numeri partiales & homogenei unitatum, decadum, centenariorum &c ergo in ſumma habetur totum (§ 25.) ergo in ſumma facta habetur additio numerica Q. E. D.

EXEMPL.

Digitized by Google

EXEMPL. I. REG. III.

Addendi	2 4 3	A
	5 2 6	B
Summa	7 6 9	C

EXEMPL. II. REG. IV.

Addendi	6 5 8	A
	8 7 4	B
Summa	1 5 3 2	C

EXEMPL. III. REG. IV.

Addendi	6 2 0 7	A
	9 0 0 8	B
Summa	1 5 2 1 5	C

EXEMPL. IV. REG. V.

	flor. germ.	*gross.*	*crucif.*	
	15	14	2	A
	9	18	2	B
Summa	25 *fl.*	13 *gr.*	1 *xr.*	C

SCHOLION I.

34. *In exemplo quarto in serie cruciferorum scriptus reperitur tantum unus crucifer, quia quatuor cruciferi faciunt unum grossum & unum cruciferum, ideo tres crucif. seu* grossus, *additus est classi grossorum; item, quia ex classe grossorum, addita summa emergit 33 grossorum, 20 autem grossi faciunt* florenum Germ. *unum, ideo scribendi tantum sunt 13 grossi, & 20 grossi, seu* florenus *addendus classi florenorum, unde floreni emergunt 25.*

SCHOLION II.

35. *Eadem methodo adduntur quicunque alii numeri heterogenei reducibiles, ad quorum additionem prærequiritur notitia specierum tam superiorum, quam inferiorum in eodem genere. Sic si addendi sint* centenarii, libræ, lothones, *nosse debes, quod* 32 lothones *faciant* libram, 100 libræ, centenarium *&c. quorum notitia vel usu, vel ex aliorum libris, cumprimis ex Cl.* Jo. Mich. Poetii *Arith. item* Casp. Eisenschmidii Disquisit. Nova de Ponder. & Mensur. *comparanda erit, à quibus mutuatæ sunt tabellæ reductionum aliquæ* in Parte III. *adducendæ.*

SCHOLION III.

36. Examen *rite peractæ additionis sequenti capite IV. §. 44. ope subtractionis docebitur; nam reliquæ probæ omnes, puta per abjectionem 9 vel 7 ut vulgus Arithmeticorum docet, fallaces sunt, & erroneæ, quæ fallacia cuivis ad oculum exhiberi potest, si vel sola permutatio loci fiat in numeris summæ. Præter ea circa additionem bina monenda veniunt:* Primo: *Si nimis longa series addendorum occurrat, totius operatio instituetur, si in partes aliquot longa hæc series per lineas dispescatur, & singularum partium summæ particulares in unam summam totalem colligantur.* Secundo: *Si sursum eundo additio facta est, repetatur eadem eundo deorsum, & si summæ congruant, probabile est, summam inventam non esse erroneam;* moraliter certum, *si ã duobus facta additio in summa conveniat.*

Digitized by Google

CAPUT IV.

De Subtractione Numerica.

DEFINITIO XII.

37. *Subtractio numerica* est totius minoris numeri, & homogenei à toto majore, vel saltem totius æqualis ab æquali toto ablatio. Numerus minor dicitur *subtrahendus*, major *minuendus*, numerus, qui facta ablatione remanet, vocatur *residuum*, vel *differentia*.

COROLLARIUM I.

38. In subtractione itaque duæ tantum series numerorum requiruntur, una major, altera minor, vel saltem æquales.

COROLLARIUM II.

39. Quia subtractio est ablatio, sequitur numerum majorem, à minore non posse subtrahi, nisi minor augeatur saltem ad æqualitatem.

COROLLARIUM III.

40. Ad subtractionem quoque requiritur homogeneitas numerorum mixtorum.

PROBLEMA III.

41. PROP. *Subtractionem numericam instituere, sive subtrahere numeros.*

RESOLUTIO.

I. Collocetur numerus minor sub majore ita, ut unitates respondeant unitatibus, decades decadibus &c. quemadmodum in additione (§. 32.) dictum.

II. Sub hisce numeris ducatur linea, sicut in additione factum est.

III. In-

Digitized by Google

III. Inchoetur ſubtractio à dextris ſiniſtram verſus, auferendo ſingillatim unitates minoris ab unitatibus majoris numeri, decades à decadibus &c. reſidua ſingula ſcribantur directe ſub linea infra illum numerum, cujus ſunt reſidua. *Vide exempl. I.*

IV. Si nota numerica inferior, ſeu ſubtrahenda, æqualis ſit ſuperiori, in loco reſidui ſcribatur zerus. (§. 10.) *Vide exempl. II.*

V. Si nota inferior major à ſuperiore minore, vel à zero veniat ſubtrahenda, aſſumatur in ſuperiore claſſe ex vicina eidem ſiniſteriore nota, una unitas, quæ unitas reipſa valet decem (§. 8.) & adjuncta numero minori, vel zero, fiat ſubtractio notæ inferioris à toto numero ſuperiore jam aucto una decade (§. 39.) numerus vero unitate mulctatus notetur puncto, quod in memoriam revocet, illum una unitate eſſe minorem. *Vide exempl. III.*

VI. Si in caſu ſubtrahendæ notæ inferioris majoris à minore ſuperiore, in loco numeri ſiniſterioris, unde concedenda eſſet unitas, reperiatur zerus, unitas hæc à numero proxime ſequente zerum concedatur, quæ translata ad zerum cum illo facit 10, à quo jam aucto, unitas (quæ valet 10) iterum concedatur ad augendum numerum minorem ſuperiorem. Notetur autem tam numerus unitate mulctatus, quam zerus puncto, ut intelligatur, zerum hujusmodi puncto notatum valere novem. *Vide exempl. IV.* Idem intelligendum, ſi in numero ſuperiore plures zeri ſe ordine conſequantur, hi enim transferendo conceſſam unitatem à numero illis proximo, omnes in novenarios mutantur. *Vide exempl. V.*

VII. Si

Digitized by Google

VII. Si zerus inferior à numero ſignificante ſuperiore veniat ſubtrahendus, pro reſiduo ſcribendus eſt ſuoerior. Si zerus à zero veniat ſubtrahendus ſcribatur in loco reſidui zerus. *Vide exempl. VI.*

VIII. Eædem regulæ ſervandæ ſunt in ſubtractione heterogeneorum reducibilium, E. gr. flor. groſſ. crucif. inchoando ſcilicet ſubtractionem à ſpecie minima; hoc ſolum notato, quod in caſu conceſſionis Reg. V. & VI. conceſſa unitas à ſpecie majore, tot valeat unitates, quod ſpeciei minoris in illa continentur; E. gr. Si pro claſſe crucif. ex groſſis unus concedatur, hic valet tres unitates, ſeu cruciferos; ſi unus flor. germ. concedatur ad claſſem groſſorum, ille valet 20 unitates, ſeu groſſos. *Vide exemplum VII.* ſed & hæ Regulæ vivam vocem requirunt.

DEMONSTRATIO.

42. Subtractio numerica, eſt totius minoris numeri, & homogenei à toto majore, vel totius æqualis à toto æquali ablatio (§.37.) ſed *per reſolutionem hujus probl.* ſingulæ unitates minoris à ſingulis unitatibus majoris, decades à decadibus, &c. rite ablatæ ſunt, ergo facta eſt totius minoris numeri, & homogenei à toto majore ablatio, ergo facta ſubtractio numerica. Q. E. D.

PARADIGMA SUBTRACTIONIS.

EXEMPL. I. REG. III.

A	8 7 9 4 5	
B	5 5 4 3 2	*ſubtrah.*
Reſid.	3 2 5 1 3	C *ſeu different.*
Prob.	8 7 9 4 5	A

EXEMPL. II. REG. IV.

A	2 7 8 4 2	
B	3 8 1 2	*ſubtrah.*
Reſid.	2 4 0 3 0	C
Prob.	2 7 8 4 2	A

EXEMPL.

Digitized by Google

EXEMPL. III. REG. V.

A	8 6. 0. 5. 2	
B	2 3 4 3 8	*subtrah.*
Resid.	6 2 6 1 4	C
Proba	8 6 0 5 2	A

EXEMPL. IV. REG. VI.

A	8. 0. 6. 5. 0. 3 4	
B	4 5 8 2 4 8 2	
Resid.	3 4 8 2 5 5 2	C
Proba	8 0 6 5 0 3 4	A

EXEMPL. V. REG. VI.

A	7. 0. 0. 4. 0. 0. 3	
B	5 4 2 3 6 5 8	*subtr.*
Resid.	1 5 8 0 3 4 5	C
Proba	7 0 0 4 0 0 3	A

EXEMPL. VI. REG. VII.

A	9 0 7 5	
B	4 0 0 2	*subtrah.*
Resid.	5 0 7 3	C
Proba	9 0 7 5	A

EXEMPL. VII. REG. VIII.

	flor.	*gross.*	*crucif.*	
A	24	12	1	
B	13	18	2	*subtrah.*
Resid.	10	13	2	C
Proba	24	12	1	A

COROLLARIUM I.

43. Hinc proba *subtractionis* fit per *additionem*, si scilicet (ut factum est in omnibus exemplis) *subtrahendus* B addatur *residuo* C, prodire debet A, seu is numerus, à quo subtractum est; nam *residuum* C, tanquam *totum* continet omnes differentias unitatum, decadum &c. numeri majoris, & *subtrahendus* B continet pariter omnes partes subtractas unitatum, decadum &c. ejusdem numeri majoris (§. 41.) ergo *residuum* cum *subtrahendo* continet omnes partes numeri majoris, à quo *subtractio* facta est, ergo additæ adæquant numerum majorem (§. 25.)

COROLLARIUM II.

44. Examen itaque, seu proba additionis, quæ sit erroris, & fallaciæ expers, instituetur ope *subtractionis*: si enim in adducto (§. 33.) additionis exemplo I. hoc: à summa

Digitized by Google

	A	2	4	3
	B	5	2	6
Summa	7	6	9	C
Subtr.	5	2	6	B
Resid.	2	4	3	A

summa C subtrahatur numerus B, *qui est pars una summæ*, relinqui debet A numerus, *Pars altera* videlicet *summæ* C; si vero à summa C subtrahatur numerus A, relinqui debet numerus B. Eodem modo examen instituetur per reliqua additionis exempla superius adducta.

SCHOLION.

45. *In idem recidit praxis quorundam Arithmeticorum, qui in casu* Reg. V. & VI. (32.) *adducto, dum nota major inferior, à minore superiore, vel à zero subtradenda venit, unitatem concedendam non in serie superiore, sed in inferiore, à vicina nota mutuantur, eamque puncto notatam, una unitate non imminutam, sed auctam intelligunt.* E. gr. in Exempl. III. Reg. V. (§. 42.) *adducto sic operantur:* 8 à 2 subtrahi non potest, igitur concedo à vicino 3 unum, (id est, decem) & puncto signo, dicoque 8 à 12 auferendo manent 4. Deinde procedendo ad sequentem notam 3 puncto signatam, dico 4 (non 3) à 5 manet 1. porro 4 à 0 subtrahi non potest, ergo concedo à vicino 3, unum, & puncto signo, ajoque 4 à 10 auferendo manent 6. Deinde propter numerum 3 puncto signatum, dico 4 à 6 manent 2, & denique 2 ab 8 manent 6. *Quæ praxis etsi erroris expers sit, nostram tamen* (§. 41.) *traditam, huic præferendam esse, facilitas operandi, maxime cum zeri complures occurrunt, edocet.*

	8	6	0	5	2 A
subtr.	2	3.	4	3.	8 B
Resid.	6	2	6	1	4 C

CAPUT V.

De Multiplicatione Numerica.

DEFINITIO XIII.

46. *Multiplicatio numerica* est dati alicujus numeri toties ad seipsum facta additio, quot alter quivis datus numerus unitates continet. E. gr. *Multiplicatio* numeri 6 per numerum 3, est numerum 6 ter sumptum (tres enim unitates continet numerus 3) sibimet addere; nempe: 6, & 6, & 6 faciunt 18.

DEFI-

Digitized by Google

DEFINITIO XIV.

47. Numeri dati inter se multiplicandi vocantur *factores*, vel *efficientes*. Sic in exemplo (§. 46.) *factores* sunt: 6 & 3, horum primus vocatur *multiplicandus*, secundus, *multiplicans*, vel *multiplicator*, & vicissim. *Iterata* vero hujusmodi *additio*, vocatur *ductus* unius numeri in alterum. Summa ex *ductu* resultans, vocatur *factum*, aut *productum*, ut in dato exemplo: summa 18. vocatur *factum*, ex *factoribus* 6 & 3 in se ductis, resultans.

COROLLARIUM.

48. Hinc *multiplicare*, est ducere unum *factorem* in alterum *factorem*, ut inveniatur *factum*, in quo unus *factorum* toties contineatur, quot unitates habet alter *factor*. Sic in *facto* 18, *factor* 6 continetur ter, quia alter *factor* 3, continet tres unitates.

THEOREMA I.

49. PROP. *Quando duo numeri invicem multiplicantur, idem factum prodire debet, sive primus in secundum, sive secundus in primum ducatur.*

DEMONSTRATIO.

Resolvantur *factores* E. gr. 6 & 3 in suas unitates, & eo ordine collocentur, quem figura exhibet:

```
  I I I I I I
3 I I I I I I
  I I I I I I
    6
```

Jam in hac figura, seu sex unitates per tres lineas scriptas, seu tres unitates deorsum per sex lineas scriptas computes, idem numerus 18 prodibit, ut patet ad oculum; igitur seu 3 *multiplicentur* per 6, seu numerus 6 multiplicetur per 3, idem factum producunt. Q. E. D.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

50. *Quia tyrones difficultatem magnam sentiunt in actuali multiplicatione, inveniendi facta particularia singularum notarum in singulas ductarum*, E. gr. *si quærant* factum *ex* 9 *in* 7, *seu septies novem quot sunt? idcirco ex binis adminiculis alterutrum illis discendum erit, vel Reg.* Pigri, *quæ oretenus docebitur, vel* Tabula Pythagorica *semper ante oculos habenda, cujus constructionem, & usum sequentia Problemata edocent.*

PROBLEMA I.

51. PROP. *Tabulam Pythagoricam construere.*

RESOLUTIO.

Fiant cellulæ quadratæ tot, quot sequens figura exhibet, & ordine eodem.

TABULA PYTHAGORICA.

	M	b								
a	1	2	b							
a	2	4	3	b						
a	3	6	9	4	b					
a	4	8	12	16	5	b				
a	5	10	15	20	25	6	b			
a	6	12	18	24	30	36	7	b		
a	7	14	21	28	35	42	49	8	b	
a	8	16	24	32	40	48	56	64	9	K
a	9	18	27	36	45	54	63	72	81	b
	N	d	d	d	d	d	d	d	d	d

Videlicet I. ordo primus *a b* habeat duas cellulas, secundus *a b* tres, tertius *a b* quatuor &c. in primis novem cellulis M, N, ex parte sinistra scribantur ordine deorsum 1, 2, 3 &c. usque ad 9.

II. Eodem modo in octo cellulis lineæ M, K, ad dextram, deorsum progrediendo, scribantur numeri 2, 3, 4 &c. usque ad 9.

III. In-

Digitized by Google

III. Inſcribantur facta particularia, quæ fiunt per ſolam additionem (vide cellulas *b d*) in prima ad ſiniſtram ſerie *b d*, in qua ſupremam cellulam occupat numerus 2, ut *factum* habeatur in ſequente ejusdem ſeriei cellula inſcribendum, addantur 2 ad 2 & ſumma 4 inſcribatur cellulæ ſecundæ, ſeriei *b d*; huic numero 4 addatur iterum ſupremus numerus 2, erit ſumma 6, numerus tertiæ cellulæ in eadem ſerie *b d*; huic numero 6 addatur iterum ſupremus 2, erit ſumma 8, numerus quartæ cellulæ in eadem ſerie *b d*; & ſic addendo numerum 2 ad numerum 8, erit ſumma 10, numerus quintæ cellulæ; ad 10 addendo 2, erit ſumma 12, numerus ſextæ cellulæ; ad 12 addendo iterum 2, erit ſumma 14, numerus ſeptimæ cellulæ; ad 14 iterum addendo 2, erit ſumma 16, numerus octavæ cellulæ; ad 16 addendo iterum 2, erit ſumma 18, numerus nonæ ſeu ultimæ cellulæ, primæ ſeriei *b d*. Eodem modo operatio inſtituatur in ſecunda ſerie *b d*, in qua ſupremam cellulam occupat numerus 3; pro numero itaque ſecundæ cellulæ, addatur numerus 3 ſibimet ipſi ter, id eſt 3 & 3 & 3 ſunt 9, pro numero tertiæ cellulæ, addatur numero 9 numerus 3, & ſumma 12 inſcribatur tertiæ cellulæ. Atque hac methodo progrediendum erit cum cæteris, donec omnes cellulæ in Tabula impleantur.

PROBLEMA V.

52. PROP. *Uſus Tabulæ Pythagoricæ.*

RESOLUTIO.

Sint multiplicandi intra ſe 8 & 6. Igitur regula univerſalis eſto: Numerum ex datis majorem *E. gr.* 8 quære in parte ſiniſtra cellularum M, N, minorem 6 in dextra cellularum M, K, communis concurſus dabit cellulam, in qua reperies numerum 48, ſeu *factum*

Digitized by Google

ex 6 in 8; hæc regula continetur his versiculis memoria mandandis:

Lævâ majorem, *sed dextrâ quære* minorem,
Cellula communis, quod petis, illa dabit.

PROBLEMA VI.

53. PROP. *Numerum quemcunque per quemvis alium multiplicare.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si multiplicans constet una nota numerica.*

I. Scribatur numerus *multiplicandus*, & infra ejus dextimam notam scribatur *multiplicans.*

II. Subducantur lineâ.

III. Inchoando à dextris, per *multiplicantem* multiplicentur omnes notæ *multiplicandi* ope Tabulæ Pythagoricæ, vel regulæ pigri.

IV. *Producta* singula scribantur infra lineam inchoando à dextris sinistram versus.

V. Si productum ex *multiplicante* in aliquam notam *multiplicandi* excrescat ultra novem, seu in ejusmodi numerum, qui duabus notis scribendus foret, scribatur tantum nota dextima *(ut in Additione dictum)* & altera sinistima, mente retenta, addatur producto novo, orto ex multiplicatione notæ sequentis. *Vide exempl. I.*

CASUS II. *Si multiplicans constet duabus, vel pluribus notis.*

I. Scribatur *multiplicans* infra *multiplicandum* à dextris sinistram versus, ita, ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. respondeant. Quemadmodum in Additione (§. 32.) dictum.

II. Subducantur lineâ.

III. In-

Digitized by Google

III. Inchoando à dextris ſiniſtram verſus per dextimam *multiplicantis* notam, multiplicentur *(ope tabulæ Pythagoricæ, vel regulæ Pigri)* omnes notæ *multiplicandi*, & infra lineam ſcribantur, ut in caſu I. dictum.

IV. Eodem modo; per ſecundam *multiplicantis* notam multiplicentur omnes notæ *multiplicandi*, ut prius, id ſolum notetur: quod initium ſcribendorum productorum fieri debeat ſub ſecunda nota *multiplicantis*.

V. Peracta multiplicatione, addantur facta partialia in unam ſummam, ut habeatur totum productum. *Vide exemplum II.*

VI. Et univerſaliter: *ſi multiplicans contineat plures notas*; multiplicentur omnes notæ *multiplicandi* per ſingulas notas *multiplicantis*, à dextris ſiniſtram verſus, producta vero ſcribantur infra lineam ea lege, ut initium ſcribendi fiat ſemper infra eam notam *multiplicantis*, per quam multiplicatio inchoatur, & facta partialia in unam ſummam addita, dabunt productum totale. *Vide exempl. III.*

DEMONSTRATIO.

54. *Multiplicandus* in facto toties per datas regulas ſibimet ipſi additus eſt, quot unitates habet *multiplicans*, ergo *multiplicandus* toties continetur in facto, quot unitates habet *multiplicans* (§. 48.) igitur per has regulas factum eſt, quod petebatur. Q.E.D.

PARADIGMA MULTIPLICATIONIS.

EXEMPL. I. CASUS I.

Factores	*Multiplicandus*	6	8	4	7	3	
	Multiplicans						2
Factum		1	3	6	9	4	6

EXEMPL. II. CASUS II.

Fact.	*Multipl*	8	7	5	4	6	4
	Multipl.					3	6
Facta		5	2	5	2	7	8	4
Partialia		2	6	2	6	3	9	2
Factum		3	1	5	1	6	7	0	4

Digitized by Google

EXEMPLUM III. CASUS II. REGULA VI.

	4 3 7 5 6	*multiplicandus* } *Factores.*
	9 2 8 4	*multiplicans*
Facta	1 7 5 0 2 4	
partialia	3 5 0 0 4 8	
	8 7 5 1 2	
	3 9 3 8 0 4	
	4 0 6 2 3 0 7 0 4	*factum totale.*

COROLLARIUM I.

55. Eodem modo peragitur multiplicatio numerorum *mixtorum heterogeneorum reducibilium*, modo vel ad speciem minimam prius reducantur, vel si prius non reducuntur, tunc, si factum inferioris speciei adæquet speciem superiorem, factum speciei inferioris ad productum speciei superioris addendum sit. *E. gr.* Sint multiplicandi 5 fl. germ. 13 gr. 2 cruc. per numerum 4, erunt reducti (per Tab. in Parte III. pecuniæ germ.) ad crucif. 341, qui per 4 multiplicati dant factum 1364 crucif. si vero non reducantur, operatio sic absolvetur, ut appositum exemplum docet.

flor.	*gross.*	*cruc.*
5	13	2
		4
22 *fl.*	14 *gr.*	2 *xr.*

COROLLARIUM II.

56. Si in fine unius factoris, vel utriusque simul, occurrant *zeri*, multiplicatio instituitur tantum per notas significantes, & in fine producti totalis adscribuntur tot *zeri*, quot erant in fine factorum. Si vero in loco intermedio *multiplicantis* occurrant *zeri*, omissis iis, multiplicatio peragitur per significantes, servata tamen Reg. IV. & VI. Casus II. ut servetur ordo subscribendi facta partialia.

COROLLARIUM III.

57. *Examen* rite peractæ multiplicationis fit per divisionem *Cap. sequenti* docendam: si nempe factum totale dividatur per unum factorem, pro quoto prodire debet alter factorum.

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT VI.

De Divisione Numerica.

DEFINITIO XV.

58. *Divisio numerica* est numeri minoris à majore toties facta subtractio, quoties minor in majore continetur. E. gr. *Divisio numeri 6 per numerum 3, est numerum 3 bis subtrahere à numero 6, quia numerus 3 bis in numero 6 continetur.*

DEFINITIO XVI.

59. Numerus major vocatur *dividendus*, minor appellatur *divisor*; numerus indicans quoties minor in majore continetur, vocatur *quotus*, vel *quotiens*; ut in dato supra exemplo: numerus 6 est *dividendus*, numerus 3 est *divisor*, numerus 2 indicans quoties 3 in 6 continetur, est *quotus*, vel *quotiens*.

COROLLARIUM I.

60. Itaque *dividere*, est quærere numerum *(quotum)* qui indicet, quoties numerus minor *(divisor)* continetur in majore (seu *dividendo*); & hinc signum recte inventi *quoti* est, si *divisor* toties contineatur in *dividendo*, quoties *unitas* in *quoto*.

COROLLARIUM II.

61. Cum *quotus* indicet numerum, quoties minor à majore subtractus sit (§. 58.), si numerus minor, seu *divisor* multiplicetur per *quotum*, id est, toties sibimet ipsi addatur, quot unitates habet *quotus* (§. 46. & 48.) debet *factum* restituere majorem, sive *dividendum*.

COROLLARIUM III.

62. Ex (§. 60.) constat, recte etiam definiri *divisionem*; quod sit *Partitio numeri majoris in tot partes, quot unitates continet minor; quotus* vero indicat unam hujusmodi partem. Hinc divisione utendum, dum totum aliquod in datas partes distribuendum, aut partiendum est. *E. gr.*

Digitized by Google

Si 24 flor. in 8 homines æqualiter distribuendi sunt, per divisionem reperietur *quotus* 3 floreni, qui unam ex 8 partibus indicant partem, dandam singulis ex 8 hominibus. Patet quoque (ex §. 39.) cum divisio fit repetita unius numeri ab alio subtractio, *divisorem* debere esse minorem *dividendo*, vel saltem æqualem.

PROBLEMA VII.

63. PROP. *Usus Tabulæ Pythagoricæ* (§. 51.) *si divisor constet una nota numerica.*

RESOLUTIO.

In parte *dextra* tabulæ quæratur nota *divisoris*, & hac reperta descendendo in eadem serie exquiratur in aliqua cellularum *dividendus*, vel ei proxime minor numerus, & correspondens eidem cellulæ in serie *sinistima* numerus, erit quotus quæsitus. *E. gr.* Sit *dividendus* 32, per *divisorem* 4; reperto in parte dextra numero 4, invenietur (descendendo in eadem serie) cellula numeri 32, cui correspondens numerus 8 in serie *sinistima*, erit *quotus* quæsitus; nam multiplicando divisorem 4 per quotum 8, factum 32 restituit dividendum (§. 61.) *Idem usus Tabulæ Pythagoricæ est*, si divisor constet pluribus notis numericis. *Ut patet, ex regul. III. casus II. Probl. sequent.*

PROBLEMA VIII.

64. PROP. *Dividere numerum datum quemvis majorem per datum alium minorem.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si divisor constet una nota numerica.*

I. Infra notam dividendi sinistimam (si ea major sit, quam nota divisoris, aut saltem notæ divisoris æqualis) subscribatur divisor. *Vide exempl. I.* Si vero nota sinistima dividendi minor sit, quam nota divisoris, scribendus

Digitized by Google

bendus erit divisor sub secunda nota sinistima *dividendi*. *Vide exempl. II.*

II. Formetur ad latus dextrum dividendi *lunula*, seu hoc (Signum, pro loco scribendi *quoti*.

III. Ope Tabulæ Pythagoricæ Methodo (§.63.) tradita, investigetur quoties divisor contineatur in nota, vel notis dividendi suprascriptis divisori, & quotus inventus scribatur post lunulam.

IV. Per hunc quotum multiplicetur divisor, factum sive productum exacte scribatur sub nota, vel notis dividendi iisdem, cum quibus actu operatio exercetur.

V. Ducta linea infra hoc ipsum productum ex multiplicatione divisoris per quotum enatum, subtrahatur à nota, vel notis dividendi hoc productum, & si quid remanet ex subtractione, infra lineam ductam suo loco scribatur residuum.

VI. Deponatur sequens dividendi nota ad notam residui ex priori operatione relicti dextram versus; aut si nihil remansit, sola nota dividendi deponatur infra lineam ductam, cui denuo subscribatur divisor, nota vero in *dividendo* eadem, quæ deposita est, *commate* vel *virgula* signetur, ad evitandum errorem, ne secundo deponatur.

VII. Cum his notis iterum inquiratur *per regulam III.* in quotum, & quotus inventus scribatur post lunulam ad prioris quoti latus dextrum; deinde *per reg. IV. divisor* cum hoc recenter invento *quoto* multiplicatus, & subscriptus, subtrahatur *per reg. V.* quo facto iterum deponatur sequens ex dividendo nota, & operatio *per regulas III. IV. & V.* repetatur cum residuis dividendi notis usque ad ultimam notam inclusive. *Vide exempl. I. & II.* Si quid ex subtractione ultima

 remanet,

Digitized by Google

remanet, ſcribatur per modum *fractionis*, id eſt: ad partem dextram quoti ducatur lineola, ſupra quam ſcribatur numerus *reſiduus*, infra vero lineolam ſcribatur *diviſor*. *Vide exempl. II.*

CASUS II. *Si diviſor conſtet pluribus notis numericis.*

I. In ſubſcribendo diviſore infra dividendum ſervetur eadem *regula I. caſus I.* attendendo ſcilicet ad ſiniſtimam notam tum *dividendi*, tum *diviſoris*.

II. Eodem modo obſervetur *reg. II. caſus I.*

III. Inquiratur ope tabulæ Pythagoricæ (§. 63.) quoties ſiniſtima diviſoris nota contineatur in ſiniſtima, vel ſiniſtimis dividendi notis, & quotus repertus ſcribatur poſt lunulam, ut in *reg. III. caſus I. dictum.*

IV. Per hunc quotum multiplicentur *omnes notæ* diviſoris, & videatur, an hoc productum non ſit majus, quam notæ dividendi ſupra diviſorem ſcripti; quod ſi majus reperiatur hoc productum, ſignum eſt, *quotum* eſſe magnum reſpectu totius diviſoris, & hinc una, vel duabus unitatibus minuendum, donec productum ex quoto in diviſorem, vel ſit æquale, vel proxime minus notis *dividendi.*

V. Subtrahatur hoc productum à notis dividendi ſupra ſcriptis diviſori (videatur deinde an reſiduum non ſit majus ipſo *diviſore*, tali enim caſu augendus eſſet quotus una, vel duabus unitatibus, cum ſignum ſit nimis parvi quoti) deinde ex dividendo deponatur ad reſiduum (ſi quod remanſit) una nota, ac ſubſcripto diviſore toto, iterum *per reg. III. & IV. hujus caſûs*, inquiratur in novum *quotum*, deinde *per reg. V.* ad inventum reſiduum deponatur iterum una nota *dividendi*; atque ſic procedatur usque ad ultimam notam dividendi *incluſive*. *Vide exempl. III.* Si quid ex ultima ſubtractione remanet, ſcribatur per modum fractionis, ut in *reg. VII. caſûs I.* dictum eſt.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

65. *Quod si in operatione* reg. VII. casûs I. & reg. V. casûs II. *residuum cum deposita nota dividendi minus sit, quam* divisor, *scribatur post lunulam* zerus, & *ex dividendo adhuc una nota ad hoc residuum deponatur, quod si adhuc* divisor *major esse deprehendatur, iterum scribendus erit* zerus *post lunulam, & deponenda adhuc una nota ex* dividendo, *donec residuum sic auctum, majus sit ipso divisore, vel saltem eidem æquale, ut dividi possit.* Vide exempl. IV. Secundo: *Divisio heterogeneorum reducibilium eadem methodo exercetur, si prius ad speciem minimam reducantur.* Vide Partem III.

DEMONSTRATIO.

66. CASUS I. Ex ipsa operatione per has regulas liquet; *quotum* inventum indicare, quoties *divisor* contineatur in singulis millenariis, centenariis, decadibus & unitatibus, hoc est, in toto *dividendo* (§. 25.) quapropter unitas in *quoto* toties continetur, quoties *divisor* in *dividendo* (§. 60.) ergo per has regulas recte peracta habetur divisio. Q. E. D. *Eadem est demonstratio casûs II.*

PARADIGMA CASUS I.

Exemplum I.

Positiones						(*quoti*
I. *Divid.*	5,	6,	9,	4,	6	28473
Divisor	2	.	.	.	.	
fact. subt.	4	.	.	.	.	
II. *Divid.*	1	6	.	.	.	
Divisor		2	.	.	.	
fact. subt.	1	6	.	.	.	
III. *Divid.*		- -	9	.	.	
Divisor			2	.	.	
fact. subt.			8	.	.	
IV. *Dividend.*	1		4	.		
Divisor			2	.		
factum subt.	1		4	.		
V. *Dividend.*		- -			6	
Divisor					2	
factum subtr.					6	
ultimum resid.					0	

Exemplum II.

Positiones						(*quoti*
I. *Divid.*	2	6,	9,	4,	8	8982½
Divisor		3	.	.	.	
fact. subt.	2	4	.	.	.	
II. *Divid.*	2	9	.	.		
Divisor		3	.	.		
fact. subt.	2	7	.	.		
III. *Divid.*	2	4	.			
Divisor		3	.			
fact. subt.	2	4	.			
IV. *Divid.*		- -			8	
Divisor					3	
fact. subt.					6	
Residuum ultim.					2	

PARA-

Digitized by Google

PARADIGMA CASUS II.

EXEMPLUM III.

I. *Divid.*	1 3 8 9,3,8,	(*quoti* 547
Divisor	2 5 4 . .	
fact. sub.	1 2 7 0 . .	
II. *Divid.*	1 1 9 3 .	
Divisor	2 5 4 .	
fact. subtr.	1 0 1 6 .	
III. *Divid.*	1 7 7 8	
Divisor	2 5 4	
fact. subtr.	1 7 7 8	
Resid. ultim.	0 0 0 0	

EXEMPLUM IV.

I. *Divid.*	3267,8,3,	(*quoti* 602 $\frac{402}{542}$
Divisor	542 . .	
fact. subt.	3252 . .	
II. *Divid.*	- - 1 5 8 .	
Divisor	5 4 2 .	
III. *Divid.*	1 5 8 3	
Divisor	5 4 2	
fact. subtr.	1 0 8 4	
Resid. ultim.	4 9 9	

SCHOLION I.

67. Examen *rite inventi quoti, seu bene peractæ divisionis est, si* quotus *multiplicatus per* divisorem, *& addito ad factum residuo (si quod superfuit) restituat exacte* dividendum (§. 61.) *hinc in* exemplo I. quotus 28473, *multiplicatus per* divisorem 2, *producit factum* 56946, *qui numerus idem est cum* dividendo. *Item in* exemplo II. quotus 8982 *multiplicatus per* divisorem 3, *facit* 26946, *& cum addito ex divisione residuo* 2, *facit* 26948, *qui erat* dividendus.

SCHOLION II.

68. *Methodum hanc nostram dividendi per positiones particulares, (ut exempla docent) præferendam esse modo dividendi, quem vulgus Arithmeticorum & adhibet, & tyrones suos edocet, in quo tyrones jubentur:* Residuas ex facta subtractione notas superscribere notis dividendi iis, à quibus remanent, *nemo non videt; præterquam enim, quod ex hujusmodi residuis turritim supra dividendum congestis, & per lituras commaculatis, confusio non levis, & hinc difficultas non exigua, præsertim tyronibus, inoperando oriatur, si operantem errare contingat, is errorem hunc, peracta divisione per examen* (§. 67.) *detectum, corrigere nequit, nisi totam operationem non sine tædio repetat; è contra in nostra methodo, & confusio evitatur, unde error præsertim in quoto, non facile admittitur, & si admissus foret, in particulari sua positione illicò reperitur, & denique demonstrativa divisionis natura* (§. 58.) *ad oculum patescit.* Placuit exempli gratia subjicere oculis tyronum *exemplum nostrum III.* in formam divisionis vulgaris redactum.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION III.

69. *Tyrones admonitos volo, sequentia* Corollaria *familiaria sibi reddant, in quibus, & erroris evitatio docetur, & compendia utilia ex regulis, & exemplis supra* (§. 64, 65, & 66.) *traditis, deducuntur, & denique dubia in particularibus operationibus occurrentia resolvuntur.*

```
 XI
 XXIII
 XXXVIII(547
 XXXXX
 XXIII
  XXXVI
   XXX
   XXVIII
```

COROLLARIA.

Ad facilitandum Tyronibus usum divisionis ex datis regulis, & exemplis deducta.

70. Ex contemplatione datorum supra exemplorum, liquet *primo:* tot notas habere *quotum totalem* peracta divisione tota, quot fuerunt positiones particulares divisoris, quas in adductis exemplis denotant numeri marginales I, II, III, &c. liquet *secundo:* tot quoque habere notas *quotum totalem*, quot notæ restant in *dividendo* (facta videlicet rite prima subscriptione divisoris) quibus nulla *divisoris* nota subscripta est, una cum adjuncta nota quoti emergendi ex prima subscriptione; sic in *exemplo I.* quotus totalis habet *quinque* notas, quot nempe fuerunt positiones particulares designatæ per I, II, III, IV, V. Et in *eodem exemplo I.* ex prima subscriptione *divisoris* 2. quatuor restant in dividendo notæ, quibus addita nota primæ positionis, simul efficiunt *quinque* notas, & tot etiam habet notas *quotus totalis.*

71. II. In positionibus particularibus, *quotus particularis* nunquam potest esse major, quàm 9.

72. III. Quando in *casu II. problematis VIII.* inquiritur, quoties finistima *divisoris* nota, in finistima, vel finistimis notis *dividendi* contineatur; videatur simul, an reliquæ notæ *divisoris* toties etiam in sibi superscriptis notis *dividendi* contineantur. Fa[illegible] hæc animadversio, ne *quotus particularis* justo major acc[illegible]piatur. *Vide I. positionem exempli III. casus II.* ubi in *dividendo:* 1389: *divisoris:* 254. nota finistima 2, in 13 continetur quidem sexies, sed quia 5 in 8; & 4 in 9, non continetur sexies, ideo 2 in 13 non sexies, sed quinquies (ut, *prima nota quoti docet*) acceptum est.

73. IV

Digitized by Google

73. IV. Si contingat *factum particulare* ex *quoto* in *divisorem* esse *majus*, quam *dividendum particularem*; signum est, *quotum particularem* esse justo *majorem* acceptum; atque adeo, una, vel duabus unitatibus *minuendum*; & per *minutum quotum* repetendam esse multiplicationem *divisoris*, donec factum subtrahendum, aut æquale sit *dividendo particulari*, aut *illo* proximè *minus*. *Vide reg. IV. casus II.*

74. V. Si facta subtractione, ex dividendo particulari *residuum* maneat *majus*, quam *divisor*, signum est, *quotum particularem* esse *parvum*, adeoque *augendum* una, vel duabus unitatibus, & facta per *auctum quotum* multiplicatione *divisoris*, novum factum resultans esse subtrahendum *à dividendo*. *Vide reg. V. casus II.*

75. VI. Si *divisor* habeat in fine *Zeros*, possunt (compendii gratia) his ex *divisore* abscissis, rescindi etiam totidem notæ dextimæ in *dividendo*, & cum reliquis tam *dividendi*, quam *divisoris* notis, institui potest operatio; sed *notandum*: quod peracta tota divisione, abscissæ notæ dividendi, una cum ultimo residuo (si quod fuit) scribi debeant per modum fractionis, subscripto toto *divisore*, ut *monet Reg. VII. casus I.* Sic, si *dividendus* foret 857,32: per *divisorem* 3,00; abscissis duobus zeris *divisoris*, & duabus ultimis notis *dividendi* 32, (ut adjecta commata notant) essent tantum *dividendi* 857, per *divisorem* 3, ex qua divisione *quotus totalis* emergit: 285 $\frac{23}{100}$.

76. VII. Si tam *divisor*, quàm *dividendus* habeant in fine *zeros numero æquales*, iis utrinque simpliciter deletis, cum reliquis notis tantum operatio instituatur. Sic, si *dividendus* sit: 435,000, per *divisorem*: 24,000, abscissis utrimque *zeris tribus*, erit *dividendus*: 435, per *divisorem*: 24. *Hujus compendii ratio dabitur* in Algebra. *Secundo*: Si in fine *dividendi* plures sint *zeri*, quam in fine *divisoris*; tali casu, tot tantum in *dividendo*, quot in *divisore* deleri possunt, nec plures; ita, si *dividendus* foret: 8920,00, per *divisorem*: 356,00; abscissis utrinque *duobus zeris*, (nam tot in *divisore* reperiuntur) erit *dividendus*: 8920; per *divisorem*: 356. *Tertio*: Si *dividendus* habeat quidem *zeros in fine*, non item *divisor*; tali casu, nec in *dividendo*, nec in *divisore* quidquam rescindi potest. *Notandum*: in hoc corollario tantum agi de *zeris finalibus*, non verò de *interme-*

Digitized by Google

termediis, seu positis inter notas significantes. Sic, si foret *dividendus*: 320024 per *divisorem*: 2003; integri permaneant, est necesse.

77. VIII. Sicut *unitas* non multiplicat, ita etiam *unitas* non dividit. Hinc, si *divisoris* nota sinistima sit 1, & reliqua notæ omnes sint *zeri*, peracta habebitur divisio, si ex *dividendo* tot notæ dextimæ abscindantur (per §. 75.) quot sunt *zeri* in *divisore*, & *quotus* erit abscissæ illæ sinistimæ notæ *dividendi*. Ex abscissis vero dextimis *dividendi* notis significantibus fiat *fractio*. Sic, si *dividendus* foret: 367,245, per 1000; erit *quotus*: $367\frac{245}{1000}$.

78. IX. Quotus particularis (in quo inveniendo tota consistit difficultas *divisionis*) facilè invenitur, si per *quotum particularem* circiter acceptum, multiplicentur *mentaliter* primæ sinistimæ notæ divisoris, & videatur, an summa resultans non sit major, quam suprascriptæ *dividendi* notæ.

SCHOLION.

79. *Etsi plura superfint divisionis* compendia, & praxes, *has insinuasse sufficiat tyroni, ex quibus ad cætera facile datur gradus. Praxim tamen dividendi per solam subtractionem (quam primo loco docendi erat animus) subjungere placet, quæ uti definitionem* divisionis *à nobis* (§. 58.) *datam, claram facit, ita, si per* divisorem *ex multis notis numericis* compositum, *operatio occurrat, divisionem, Methodo & facili, & certa, & admodum compendiosa per solam subtractionem absolvit. Sit igitur:*

PROBLEMA IX.

80. PROP. *Divisionem per iteratas subtractiones numeri minoris à majore absolvere.*

CONSTRUCTIO TARIFFÆ.

Ante operationem; ex divisore dato fac multipla omnia usque ad noncuplum; quæ hac ratione facile obtinentur per solam additionem; *(Vide Tariff. f. 31.)*

I. Scripto ad latus aliquod extra dividendum *divisore* A, (ut in *Tariffa positum vides*) ducatur ad latus dextrum hujus divisoris *linea* deorsum, post hanc lineam è regione *divisoris scribatur numerus 1*.

II. Mul-

Digitized by Google

II. Multiplica divisorem per 2, vel (quod idem est) addatur ad seipsum divisor, & factum B scribatur infra eundem divisorem, è regione vero illius post lineam scribatur numerus 2.

III. Huic facto B addatur primus divisor A, & habebitur numerus C, cui post lineam respondeat numerus 3. Huic numero C addatur iterum divisor A, & habebitur numerus D, cui post lineam adscribatur 4. Huic numero D addatur iterum divisor A, & habebitur numerus E, cui post lineam correspondeat 5. Huic E addatur iterum divisor A, & obtinebitur numerus F, cui post lineam adscribatur 6. Huic numero F addatur iterum divisor A, & obtinebitur numerus G, cui post lineam respondeat 7. Huic numero G addatur iterum divisor A, & habebitur numerus H, cui post lineam adscribatur 8. Denique numero H additus divisor A, producit numerum I, cui post lineam respondeat 9. Multipla hæc eo ordine expressa, vocantur uno nomine: *Tariffa.*

RESOLUTIO.

I. Facta rite prima subscriptione divisoris infra dividendum, ut (§.64.) dictum, videatur quinam numerus ex *Tariffa*, aut *æqualis*, aut proxime *minor* sit omnibus notis dividendi supra divisorem scriptis; quo reperto, subscribatur is infra dividendi notas, numerus vero in *Tariffa* post lineam eidem numero respondens, in loco quoti scribatur; ut factum vides in *exemplo subjuncto in I. Positione sub lit. D.*

II. Subscriptus ex *Tariffa* numerus D, subtrahatur à dividendo, & ad residuum (si quod est) deponatur iterum una nota ex *dividendo*, ut (§.64. Reg. VI.) dictum. *Vide in exemplo subjecto* positionem II.

III. Vi-

Digitized by Google

III. Videatur iterum, quisnam ex *Tariffa* numerus respondeat proxime *minor*, vel *æqualis* huic residuo aucto unâ notâ *dividendi*, & repertus, subscribatur residuo aucto, ac subtrahatur; numerus vero in *Tariffa* post lineam eidem respondens, in loco quoti scribatur. Atque sic procedendum erit in omnibus positionibus usque ad ultimam dividendi notam depositam. *Vide exemplum subjectum in numeris parvis exhibitum* in gratiam tyronum.

DEMONSTRATIO.

Constructio *Tariffæ*, seu multiplorum divisoris, patet ex (§. 46.) resolutio vero liquet, ex (§. 58. & 81.)

Exemplum divisionis ope subtractionis iteratæ factum.

TARIFFA.

		quoti
A—	34	1 — k
B—	68	2 — l
C—	102	3 — m
D—	136	4 — n
E—	170	5 — o
F—	204	6 — p
G—	238	7 — q
H—	272	8 — r
I—	306	9 — s

RESOLUTIO.

I. *Dividend.*	16 4,9,4,0,8,	(nrokl 48512
Divisor	34	
D *subtrah.*	136	
II. *Resid. auct.*	289 . . .	
H *subtrah.*	272 . . .	
III. *Resid. auct.*	174 . .	
E *subtrah.*	170 . .	
IV. *Resid. auct.*	- 40 .	
A *subtrahend.*	- 34 .	
V. *Resid. auct.*	- - 68	
B *subtrahend.*	- - 68	
	00	

COROLLARIUM.

81. Hinc liquet I. divisionem numericam recte definitam esse (§ 58.) quod sit *numeri minoris à majore toties facta subtractio, quoties minor in majore continetur.* II. Patet, per hanc dividendi methodum, certum semper obtineri quotum particularem. III. Liberum esse operantem à multiplicatione facienda. Et hinc IV. patet, fieri posse divi-

Digitized by Google

divisionem absque notitia regularum multiplicationis, & absque tabula Pythagorica, aut regula pigri, modo operans sciat *addere*, & *subtrahere*. V. Constat, si divisor sit admodum magnus, hac methodo operantem multo citius, & certius absolvere divisionem, quàm *methodo ordinaria* exercitatissimus etiam Arithmeticus persolvere queat.

SCHOLION.

82. *Hæc erant, quæ summatim ad captum tyronum (omissis interea de natura numerorum theorematibus sublimioribus) tractanda censuimus; ex quibus apparet reipsa duabus tantum operationibus*, additione & subtractione *omnes Arithmeticæ Algorithmos absolvi, nec enim numerus alias mutationes subire potest, quam, vel ut fiat* major, (*quod fit* addendo) *vel* minor, *quod fit* subtrahendo. *Jam ordo postularet agendi de fractionibus vulgaribus, quas (quia hæ faciliore longe methodo in Algebra demonstrantur) ad calculum literalem reservamus, & harum loco in parte secunda hujus Arithmeticæ*, Logisticam Decimalem Geometricam *praxi Geometricæ, & Experimentis in Philosophia naturali tum instituendis, tum explicandis summe necessariam, exponemus.*

FINIS PARTIS I.

ARITH-

Digitized by Google

ARITHMETICÆ NUMERICÆ PARS II.

DE LOGISTICA DECIMALI, SEU *De quatuor Speciebus Arithmeticæ decimalis Geometrarum.*

Arithmetica decimalis Geometrarum, quam alii nomine *fractionum decimalium* appellant, à quibusdam in Geometria, cujus ope calculos suos Geometræ faciunt, ab aliis post doctrinam fractionum vulgarium tractanda suscipitur. Nos ordinem doctrinæ naturalem sectantes, eam nec Geometriæ permiscendam (ne regulis Arithmeticæ filum Geometriæ rumpamus) nec ad doctrinam fractionum vulgarium rejiciendam putavimus, utpote, quæ nihil cum iis commune habet, præter inane, ac triste tyronibus nomen *fractionis*, sed absolutis numerorum integrorum algorithmis, (cum Logistica decimalis iisdem Arithmeticæ integrorum regulis utatur) tractandam hac parte suscipimus.

CAPUT I.

Hypothesis numerorum Decimalium.

HYPOTHESIS I.

83. *Quemadmodum* Geometræ, *ita* Philosophi naturales *in determinandis suis magnitudinibus* (*seu eæ sint* longitudinum *tantum*, *id est*, linearum; *seu* longitudinum *simul* & latitudinum, *id est*, arearum, & superficierum; *seu demum sint* longitudinum, latitudinum, & profunditatum, *id est*, corporum) *utuntur mensuris*, *quas vocant* perticas, pedes, digitos, lineas &c.

Digitized by Google

HYPOTHESIS II.

84. Pertica simplex *(considerando videlicet secundum longitudinem tantum) dividitur in* decem *partes, quas vocant Geometræ* pedes, *& hinc etiam* perticam *appellant*, decempedam; pedem unum *iterum dividunt in decem* digitos, *& hinc* decempeda *habet* 100 digitos. Digitum *porro subdividunt in decem* lineas, *& hinc* decempeda *habet* 1000 lineas, *& ita porro progrediuntur.*

COROLLARIUM I.

85. Hinc liquet, species inferiores in *decempeda* per accrementum decadicum constituere species superiores; sic exempli gr. cum 10 *lineæ* faciant *digitum*, si numerus *linearum* excrescat ultra 9, ille transit in speciem *digitorum*; ita *digiti* accrescentes ultra 9, constituunt speciem *pedum*, idem est de *pedibus* respectu *perticarum*, seu *decempedarum.*

COROLLARIUM II.

86. Ex hoc accremento decadico liquet porro, non aliis regulis ad suas operationes egere *Logisticam decimalem*, quam quas dedimus in *Parte I. de numeris integris vulgaribus*; nam & hi ex institutione hominum accrementum habent decadicum. (§. 8.) Hinc in numero *Ex. gr.* isto *Logistico simplici*: 5784, si ultima nota 4 denotet *lineas*, sequens 8 denotabit *digitos*, illam vero consequens 7, indicabit *pedes*, & numerus 5 significabit *decempedas*, seu *perticas.* Intelligendo omnes species esse *simplices.*

HYPOTHESIS III.

87. Signa, *sive* notæ, *aut* exponentes *harum specierum sunt sequentia*: *signum* perticarum *est* (0) *seu zerus.* Pedum *est* (,) *seu una virgula.* Digitorum (,,) *seu duæ virgulæ*: Linearum (,,,) *seu tres virgulæ. Ponuntur hæc signa supra numeros sibi cognomines.* Ex. gr. *Numerus Logisticus decimalis iste*: $\overset{0}{5}\overset{,}{7}\overset{,,}{8}\overset{,,,}{4}$ *aut simpliciter*: $5\overset{,,,}{7}8\overset{,,,}{4}$ *in ultima nota notatus, sic enunciandus est*: 5 decempedæ simplices, 7 pedes simplices, 8 digiti simplices, 4 lineæ simplices.

Digitized by Google

simplices. *Quod si respectus habeatur tantum ad ultimum signum numeri* 4, *potest* (§. 84.) *etiam sic enunciari: quinque millia septingentæ octuaginta quatuor* lineæ simplices.

COROLLARIUM I.

88. Ratio *conjunctim* scribendi numeros Logisticos decimales simplices, colligitur ex (§. 84. & seq.) sic, si *conjunctim* scribendi forent *Ex. gr.* $\overset{\circ}{4}$ & $\overset{''}{6}$, ita scribentur $\overset{\circ\,'\,''}{4\,0\,6}$ (& non $\overset{\circ\,''}{4\,6}$) quia locum deficientis intermediæ speciei, nempe *pedum*, supplere debet *zerus*; quemadmodum etiam in numeris vulgaribus monuimus (§. 10) similiter, si *conjunctim* scribendi sint $\overset{\circ}{8}$ & $\overset{'''}{5}$, ita scribentur: $\overset{\circ\,'\,''\,'''}{8\,0\,0\,5}$ (non $\overset{\circ\,'''}{8\,5}$) quia loca *pedum* & *digitorum* intermediorum *zeris* supplenda sunt. (§. 84.)

COROLLARIUM II.

89. Liquet etiam (ex §. 84.) *simplices perticas* ad inferiorem quamvis speciem *simplicem* facile reduci per adjectionem tot *zerorum*, quot *virgulæ* datam speciem inferiorem denotant. *Ex. gr.* Sint $\overset{\circ}{7}$ reducendæ ad *digitos*, cum signum digitorum sint (,,) *binæ virgulæ*, scribantur ad dextram numeri $\overset{\circ}{7}$ duo *zeri*, & habebuntur $\overset{\circ\,'\,''}{7\,0\,0}$ id est, septem *perticæ* ad speciem *digitorum* reductæ. Si vero species superior reducenda ad inferiorem jam signata habetur una, vel pluribus *virgulis*, tali casu; tot *zeri* ad dextram speciei superiori apponendi sunt, quot *virgulis* species data inferior superat *virgulas* speciei reducendæ. *Ex. gr.* Sint reducendi $\overset{'}{8}$, ad *lineas*, cum virgulæ lineas designantes sint (,,,) tres, superant virgulam *pedum* reducendorum *duabus virgulis*, igitur ad $\overset{'}{8}$ apponendi sunt *duo zeri*, & erunt $\overset{'\,''\,'''}{8\,0\,0}$ reducti. Sic $\overset{''}{5}$ ad *lineas* reducti sunt $\overset{''\,'''}{5\,0}$, & ita porro.

Digitized by Google

DEFINITIO I.

TAB. LOG. Fig. 1. 90. *Pertica*, vel *pes*, aut *digitus* &c. *quadratus* (ob figuram) appellatur productum, aut factum quod producitur, si *pertica simplex*, vel *pes*, aut *digitus simplex* per seipsum multiplicetur. *Ex. gr.* Si linea recta A B insistens alteri B C *æquali*, ad neutrum latus declinando, repræsentet *perticam*, vel *pedem*, aut *digitum simplicem*, & hæc linea A B moveri concipiatur per omnia puncta alterius lineæ rectæ B C ipsi prorsus *æquali*, ita, ut relinquere vestigia sui intelligatur, spacium viæ A B C D postquam pervenit ad C, vocatur (ob figuram) *quadratum*, & quidem in specie: si linea A B erat pertica simplex, spacium A B C D vocatur *pertica quadrata*, si linea A B fuit pes simplex, appellatur *pes quadratus*, si linea A B fuit digitus, vocatur *digitus quadratus*. Hic ductus lineæ rectæ in lineam rectam *multiplicatio Geometrica*, Area vero, sive spacium A B C D, *productum Geometricum* appellatur.

COROLLARIUM I.

91. Hinc, si pertica simplex concipiatur divisa in 10 pedes simplices, continebit *productum* perticæ quadratæ in pedes divisæ, 100 *pedes quadratos*; eodem modo: *pes quadratus* (si pes simplex in 10 digitos divisus concipiatur) 100 *digitos quadratos* continebit, & *digitus quadratus* in lineas divisus continebit 100 *lineas quadratas* &c. Igitur propter accrementum *centenariorum*, cum pertica simplex in *digitos* divisa contineat 100 *digitos* (§. 48.) ergo *pertica quadrata* continebit 100 *digitos* per 100 multiplicatos, id est, 10000 *digitos quadratos*, & cum pertica simplex divisa in *lineas* contineat 1000 *lineas* (§. 84.) continebit pertica quadrata in lineas divisa 1000 *lineas* per 1000 multiplicatas, id est 1000000 *lineas quadratas*.

Notandum: *Signum* □ *loco vocis* quadratum *deinceps usurpandum*.

COROLLARIUM II.

92. Porro ex his productis □ patet *primo*: Ad hoc, ut lineæ □ efficere possint digitum □, debeat numerus *linea-*

rum

Digitized by Google

rum □ attingere *tres notas* numericas, id est, adæquare numerum 100; idem est, de *digitis* □, ut efficiant *pedem* □, & de *pedibus* □, ut efficiant *perticam* □. *Secundo:* Ut *lineæ* □ efficiant *pedem* □, debent hæ attingere *quinque notas* numericas, id est 10000, & ad hoc, ut *lineæ* □ efficiant *perticam* □, debent attingere *septem notas* numericas, id est 1000000. Unde patet ratio reducendi speciem superiorem ad inferiores species, per adjectionem bis tot zerorum, quot virgulas species inferior continet.

PROBLEMA I.

93. PROP. *Enunciare, & per virgulas exprimere numerum logisticum decimalem* □.

RESOLUTIO.

I. Propositus numerus □ in classes distinguatur, inchoando à nota designante speciem minimam, & cuilibet classi sinistram versus binæ notæ numericæ attribuantur, quod fit, si numeri propositi logistici, notæ numericæ (inchoando à virgulis speciei infimæ) *alternando* signentur virgulis sinistram versus numero decrescentibus. Sit numerus logisticus decimalis □, *Ex. gr.* $2463847^{\prime\prime\prime}0$, erit inchoando à nota numerica $7^{\prime\prime\prime}$, *alternando signatus* per virgulas decrescentes sinistram versus: $2^{\circ}4,6^{\prime}3,8^{\prime\prime}4,7^{\prime\prime\prime}0$. & sic enunciatur: *viginti quatuor* perticæ □, *sexaginta tres* pedes □, *octuaginta quatuor* digiti □, & *septuaginta* lineæ □.

II. Si post numerum signatum virgulis speciem minimam designantibus nulla sequatur nota numerica, subintelligendus est in fine zerus. *Ex. gr.* in hoc numero logistico □: $3^{\circ}2^{\prime}7^{\prime\prime}45$, numerus ultimus $5^{\prime\prime}$ valet $5^{\prime\prime}0$.

III. Numeros sinistimos, id est, proxime sequentes virgulam designantem speciem pedum, omnes esse *perticarum*, quotcunque reperiantur, clarum est.

Digitized by Google

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. patet ex (§. 91. & 92.) Reg. III. constat, quia perticæ sunt species maxima.

COROLLARIUM.

94. Ex hactenus dictis liquet ratio quoque *conjunctim* scribendi numeros logisticos □: sic 54° perticæ □, & $72''$ digiti □, scribentur *conjunctim*: $5\,40^{\circ}\,0'\,72''$ (non $5\,47^{\circ}\,2''$) quia speciei omissæ *pedum* locus suppleri debet duobus zeris (§ 91. 92. 93.) ita 32° perticæ □, & $45'''$ lineæ □, *conjunctim* scribentur: $32^{\circ}\,00'\,00''\,45'''$ (non $32^{\circ}\,45'''$) ut patet ex (§. 92. & 93.)

HYPOTHESIS IV.

95. *Geometræ utuntur perticis, pedibus, digitis &c.* □, *in determinandis magnitudinibus arearum, seu superficierum, idque ex institutione hominum.*

SCHOLION.

96. *Mirari non debent tyrones (dum aliorum Authorum regulas tractandi numeros logisticos decimales legerint) nos à Methodo vulgari recessisse; experientur enim Methodum hanc nostram non modo intellectu faciliorem, sed usu ipso etiam longe præstantiorem. Præterquam enim, (ut patebit inferius) quod juxta regulas vulgares dispescendi in classes numeros logisticos* □, *non levis è virgularum heterogeneitate oriatur perturbatio, eas etiam universales non esse demonstrabitur. Accedit, quod virgularum eâdem signaturâ adhibitâ, discrimen non indicetur, inter numerum logisticum simplicem, & inter numerum logisticum quadratum, aut cubicum perticarum, pedum &c. Quod in nostra Methodo, vel primo virgularum dispositarum intuitu illicò patescit.*

DEFINITIO II.

TAB. LOG. Fig. 4. 97. *Pertica*, vel *pes*, aut *digitus* &c. *cubicus* (ob figuram) appellatur *productum*, quod oritur, si pertica □ per perticam *simplicem*, aut pes □ per *pedem simplicem*, item digitus □ per digitum *simplicem* &c. multiplicetur.

Digitized by Google

plicetur. *Ex. gr.* Si quadratum A B C D, repræsentans *perticam*, vel *pedem*, aut *digitum* □ &c. moveri concipiatur directe deorsum per lineam A E *æqualem perticæ*, vel *pedi*, aut *digito simplici* &c. ita, ut intelligatur hoc □ motum, per singula puncta lineæ B E, relinquere sui vestigia, spacium A B C D E H K F (per modum corporis consideratum) per quod □ moveri concipitur, vocatur *cubus*; & quidem in specie: si moveatur pertica □ per perticam *simplicem*, dicitur *pertica cubica*; si pes □ per pedem *simplicem*, *pes cubicus*; si digitus □ per digitum *simplicem*, *digitus cubicus* appellatur &c.

COROLLARIUM I.

98. Quoniam pertica □ in pedes divisa continet 100 pedes □; & pes □, 100 digitos □; digitus □, 100 lineas □ &c. (§. 91.) si pertica □ A B D moveri intelligatur deorsum per perticam *simplicem* B E divisam in 10 pedes, continebit *pertica cubica* pedes *cubicos* 1000, quod est *productum*, si 100 per 10 multiplicetur. Ex eadem ratione, pes *cubicus* numerabit 1000 digitos cubicos, & *digitus cubicus* censebit 1000 lineas cubicas, per accrementum videlicet *millenariorum*, ut patet ex fig. 5. TAB. LOG. Fig. 5.

COROLLARIUM II.

99. Præterea liquet; cum pertica □ in digitos divisa numeret 10000 digitos □ (§. 91.) & pertica simplex 100 digitos *simplices* (§. 84.) sequitur perticam cubicam in digitos divisam continere 1000000 *digitorum cubicorum*; nam 10000 per 100 multiplicata producunt 1000000; item cum pertica □ in lineas divisa contineat 1000000 *linearum* □ (§. 91.) & pertica *simplex* in lineas divisa 1000 *lineas simplices* (§. 84.) sequitur perticam cubicam in lineas divisam continere 1000000000 *linearum cubicarum*; nam 1000000 per 1000 multiplicatum, producit factum 1000000000.

COROLLARIUM III.

100. Contemplando producta cubica ex multiplicatione quadratorum in species *simplices* orta, certum est, *primo*: ad hoc, ut lineæ cubicæ efficere possint unum digi-

Digitized by Google

tum cubicum, eæ adæquare debeant numerum 1000, adeoque superare *tres notas* numericas; idem est, de digitis cubicis respectu habito ad pedem cubicum, & de pedibus cubicis relate ad perticam cubicam. (§. 98.) *Secundo:* Ut lineæ cubicæ adæquent pedem cubicum, necesse est, ut assurgant ad numerum 1000000, seu *septem notarum;* & ut eædem lineæ cubicæ adæquent perticam cubicam, attingere debent numerum 1000000000, seu *decem notarum.*

PROBLEMA II.

101. PROP. *Exprimere per virgulas, & enunciare datum numerum logisticum decimalem cubicum.*

RESOLUTIO.

I. Propositus numerus logisticus cubicus in classes distinguatur inchoando à nota designante speciem infimam, & cuilibet classi, sinistram versus, *tres notæ* numericæ assignentur, quod fit, si signentur singulæ *ternæ notæ*, à minima incipiendo, virgulis numero decrescentibus. *Ex. gr.* Sit numerus logisticus cubicus signandus: $567832\overset{'''}{9}453$, erit per virgulas in qualibet *tertia nota* signatus: $\overset{\circ}{5},\overset{'}{6}78,\overset{''}{3}29,\overset{'''}{4}53$, & ita enunciatur: *quinque* perticæ cubicæ, *sexcenti septuaginta octo* pedes cubici, *trecenti viginti novem* digiti cubici, *quadringentæ quinquaginta tres* lineæ cubicæ.

II. Si post numerum speciei minimæ per virgulas designatum, non reperiantur notæ numericæ, subintelligi debent duo zeri apponendi, sic: $\overset{\circ}{8}\overset{'}{3}45\overset{''}{2}6\overset{'''}{8}7$ numerus ultimus $\overset{'''}{7}$, valet $\overset{'''}{700}$ lineas cubicas; si vero una nota numerica sequatur, subintelligi adhuc debet unus zerus. *Ex. gr.* $\overset{\circ}{4}\overset{'}{8}9\overset{''}{4}35$, ultimi $\overset{''}{35}$, valent $\overset{''}{350}$ digitos cubicos. (§. 100.)

III. Post

Digitized by Google

III. Post virgulam pedum cubicorum sinistram versus positi numeri (quotcunque sint) designant perticas cubicas.

Demonstr. liquet, ex (§. 98. & sequ.)

COROLLARIUM.

102. Ex hactenus explicatis liquet quoque ratio *conjunctim* scribendi numeros logisticos cubicos, sic: $\overset{\circ}{24}$ perticæ cubicæ, & $\overset{''}{329}$ digiti cubici *conjunctim* scribentur: $\overset{\circ\,'}{24}000\overset{''}{329}$ (§. 100.) & non ($\overset{\circ\,''}{24329}$) propter defectum speciei intermediæ pedum cubicorum; ita quoque scribentur: $\overset{\circ}{3}$ cubicæ, & $\overset{'''}{250}$ cubicæ, videlicet: $\overset{\circ\,'}{3}000000\overset{''}{2}50\overset{'''}{0}$ & non $\overset{\circ\,'''}{3250}$) ob eandem rationem; sic pariter $\overset{\circ}{8}$ cubicæ, $\overset{'}{682}$ cubici, & $\overset{'''}{3}$ cubicæ, scribentur hoc modo: $\overset{\circ\,'}{8}6\overset{''}{8}2000\overset{'''}{0}03$. per (§. 99. & 100.)

SCHOLION.

103. *Tyro in his Hypothesibus logisticorum decimalium intelligendis studium ponat, ac exercitium, quibus memoria retentis praxim quatuor sequentium specierum Arithmeticarum sine difficultate imbibet, ac subinde tam in Geometria practica, quàm Philosophia naturali, eas absque errandi timore usurpabit.*

CAPUT II.

De Additione numerorum logisticorum decimalium.

DEFINITIO III.

104. Numeri logistici decimales *diversæ denominationis* dicuntur, qui sub eodem genere non comprehenduntur, etsi in specie conveniant, *Ex. gr. perticæ simplices*, & *perticæ* □, aut *perticæ cubicæ* &c. *Ejusdem* vero *denominationis* sunt, qui in eodem genere conveniunt, etsi specie differant. *Ex. gr. Perticæ simplices*, & *pedes simplices*. Item *perticæ* □, & *pedes* □, aut *perticæ cubicæ*, & *digiti cubici*.

Digitized by Google

DEFINITIO IV.

105. Numeri logistici decimales *diversæ speciei* dicuntur, qui in tota specie differunt, etsi in genere conveniant. *Ex. gr. Perticæ simplices*, & *pedes simplices*, qui conveniunt in eo, quod sint *quantitates simplices*, seu *longitudines*, differunt vero in eo, quod pertica sit longitudo aliter mensurabilis, quam pes.

DEFINITIO V.

106. Numeri logistici decimales, & ejusdem *speciei*, & ejusdem *denominationis* vocantur, qui & in eadem specie, & in eodem genere conveniunt. *Ex. gr.* 9 perticæ simplices, & 5 perticæ simplices. Item ejusdem denominationis, & speciei sunt 3 perticæ □, & 4 perticæ □ &c.

DEFINITIO VI.

107. Numeri logistici decimales, & *diversæ denominationis*, & simul *diversæ speciei* dicuntur, qui tam in genere, quam in specie inter se differunt. *Ex. gr. Perticæ simplices*, & *digiti quadrati*; aut *digiti* □, & *pedes cubici*.

THEOREMA I.

108. PROP. *Quæ adduntur sibi invicem, aut ab se invicem subtrahuntur, illa ejusdem & speciei, & denominationis esse debent.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. Inter ea, quæ addi, aut subtrahi debent, requiritur homogeneitas (§. 30. & 31. item §. 37. & 40.) ergo ejusdem speciei esse debent. (20.)

Demonstratur Pars altera. Ea, quæ adduntur, aut subtrahuntur, in eadem specie conveniant oportet, (per Partem I. hujus) ergo multò magis necesse est, ut in genere conveniant, id est, ut sint ejusdem *denominationis*. (§. 106.) Q. E. D.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA III.

109. PROP. *Addere numeros logisticos decimales.*

RESOLUTIO.

I. Ex dispositione virgularum videatur, cujusnam sint denominationis dati numeri addendi, an sint logistici *simplices?* an *quadrati?* an *cubici?* &c.

II. Si numeri logistici sint, & ejusdem *denominationis*, & *speciei*, ii, ita sub se invicem collocentur, ut lineæ lineis, digiti digitis, pedes pedibus, &c. respondeant.

III. Si in addendis species una, vel plures (sive eæ sint intermediæ, sive finales) deficiant, suppleantur zeris; in simplicibus quidem juxta doctrinam. (§. 88. & 89.) In quadratis juxta doctrinam. (§. 91.) 92. & 94.) In cubicis juxta (§. 99. 100. item 102.) *Vide exempl. II. & III.*

IV. Ita collocati, addantur invicem juxta regulas Arithmeticæ integrorum (§. 32.) traditas.

V. Superscriptio virgularum in summa, relate ad speciem infimam, manet eadem, quæ fuit in addendis, à qua (specie infima) reliquarum notationes juxta doctrinam (§. 87. & 88.) item (§. 93. & 101.) dependent.

DEMONSTRATIO.

Per datas regulas, tam in logisticis simplicibus, quam quadratis, & cubicis, habentur in summa singulæ species, sed etiam per datas regulas in summa habentur singularum specierum unitates, decades, centenarii &c. (§ 84. 92. 99.) ergo in summa habetur *totum* omnium datorum logisticorum. Q. E. D.

PARA-

Digitized by Google

PARADIGMA I.

Additionis logisticorum simplicium.

Exempl. I. Reg. II.

Addendi	8°	9′	5″	2‴		A
	7°	4′	3″	6‴		B
Summa	1	6°	3′	8″	8‴	C

Exempl. II. Reg. III.

Si ad 5° 6′ 7″ *add. sint* 3° *&* 2″ *erunt*

Add.	5°	6′	7″		A
	3°	0′	2″		B *completus* (§. 88.)
Summa	8°	6′	9″		C

Exempl. III. Reg. III.

Si adden. sint 2′ *ad* 4° 5′ 3″ 8‴ *erunt*

Addendi	4°	5′	3″	8‴		A
		2′	0″	0‴		B *reduct.*
Summa	4°	7′	3″	8‴		C

Exempl. IV. Reg. V.

Addendi		8′	3″	7‴		A
		9′	8″	9‴		B
Summa	1°	8′	2″	6‴		C

PARADIGMA II.

Additionis logisticorum □.

Exempl. I. Reg. II.

Addendi	4°	3′	4″	2‴	5	3	6		A
	7°	9′	6″	7‴	9	5	8		B
Summa	1	2°,	3′	1″,	0‴	4,	9	4	C

Exempl. II. Reg. III.

Si ad 5° 3′ 4″ 2‴ 6 *sint add.* 5° *&* 6″ *erunt*

Add.	5°	3′	4″	2‴	6	A
	5°	0′	0″	6‴	0	B *completus* (§. 94.)
Sum.	1	0°,	3′	4″,	8‴	6 C

Exempl.

Digitized by Google

EXEMPLUM III. REGULA III. & V.

Si addendi sint $7\,2$ *ad* $8\,9\,6\,7\,0\,5$ *erunt*

Addendi $\left\{\begin{array}{l} 8\,9\,6\,7\,0\,5\ \mathrm{A} \\ 7\,2\,0\,0\,0\,0\ \mathrm{B}\ \textit{reductus.}\ (\S.91.) \end{array}\right.$

Summa $1{,}6\,1{,}6\,7{,}0\,5$ C

PARADIGMA III.

Additionis logisticorum cubicorum.

EXEMPLUM I. REGULA II.

Addendi $\left\{\begin{array}{l} 4{,}8\,8\,9{,}7\,8\,5\ \mathrm{A} \\ 9{,}7\,9\,8{,}9\,0\,7\ \mathrm{B} \end{array}\right.$

Summa $1\,4{,}6\,8\,8{,}6\,9\,2$ C

EXEMPLUM II. REGULA III. & V.

Si sint addendi 3 & $2\,5$ *ad* $8{,}2\,7\,3{,}8\,4\,5{,}0\,0\,2$ *erunt*

Addendi $\left\{\begin{array}{l} 8{,}2\,7\,3{,}8\,4\,5{,}0\,0\,2\ \mathrm{A} \\ 3{,}0\,0\,0{,}0\,0\,0{,}2\,5\,0\ \mathrm{B}\ \textit{completi.} \end{array}\right.$

Summa $1\,1{,}2\,7\,3{,}8\,4\,5{,}2\,5\,2$ C

SCHOLION I.

110. Examen, *sive proba additionis, fit per subtractionem, ut* (§.44.) *monuimus, & cap. sequ. docebitur.*

SCHOLION II.

111. Regulâ III. *iis, qui frequenti exercitio praxim imbiberunt, opus non esse, ex contemplatione horum exemplorum liquet, modo animadvertant ad* Regulam II. *in subscriptione logisticorum; in usum tamen tyronum, donec praxi assuescant, non inutilem censuimus.*

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT III.

De Subtractione logisticorum decimalium.

PROBLEMA IV.

112. PROP. *Subtrahere numerum logisticum decimalem minorem à majore.*

RESOLUTIO.

I. Observentur ex (§.109.) *Reg. I. II. & III.* deinde fiat subtractio, ut *in Arithmetica* (§.41.) *docuimus*; pro superscriptione virgularum in residuo, *servetur Regula V. ejusdem.* (§.109.)

DEMONSTRATIO.

Per datam resolutionem in residuo habentur singulæ differentiæ specierum singularum minoris à majore, sed etiam habentur differentiæ ex singulis speciebus unitatum, decadum, &c. ergo in residuo habetur tota differentia totius numeri minoris à majore, Q.E.D.

Exempla subtractionis logisticorum decimalium desumptis numeris ex adductis in additione exemplis.

PARADIGMA I.

Subtractionis logisticorum decimalium simplicium.

EXEMPLUM I.

	°	′	″	‴	
	1	6	3	8	8 C
Subtrah.	7	4	3	6	B
Residuum	8	9	5	2	A

EXEMPLUM II.

Sit subtrahendus 3° & 2″ *à*

	°	′	″	
	8	6	9	C
Subtrah.	3	0	2	B *compl.*
Residuum	5	6	7	A

EXEMPL.

Digitized by Google

EXEMP. III. IN ADDIT. IV.

	°	′	″	‴	
	1	8	2	6	C
Subtrah.		′ 9	″ 8	‴ 9	B
Residuum		′ 8	″ 3	‴ 7	A

EXEMPLUM NOVUM.

Sint subtrahendi ′2 & ‴3 *à* °7 *erunt*

	°	′	″	‴	
	7	0	0	0	reducti.
Subtrah.		′ 2	″ 0	‴ 3	
Residuum	° 6	′ 7	″ 9	‴ 7	

PARADIGMA II.

Subtractionis logisticorum decimalium □.

EXEMPLUM I.

	°	′	″	‴				
	1	2	3	1	0	4	9	4 C
Subtrah.	° 7	′ 9	6	″ 7	9	‴ 5	8	B
Residuum	4,	′ 3	4,	″ 2	5,	‴ 3	6	A

EXEMPLUM II.

Sint subtrahendæ °5 & ″60 *ab*

	°	′	″			
	1	0	3	4	8	6 C
Subtrah.	° 5	′ 0	″ 0	6	0	B *redu.*
Residuum	° 5,	′ 3	4,	″ 2	6	A

EXEMPLUM NOVUM.

Sint subtrahendi ′24 □ & ‴53 □ *ab* °8 □ *erunt*

	°	′		″		‴	
	8	0	0	0	0	0	reducti.
Subtrah.		′ 2	4	″ 0	0	‴ 5	3
Residuum	° 7,	′ 7	5,	″ 9	9,	‴ 4	7

PARA-

Digitized by Google

PARADIGMA III.

Subtractionis logisticorum decimalium cubicorum.

EXEMPLUM I.

	1	4	6	8	8	6	9	2 C
Subtrah.	9	7	9	8	9	0	7	B
Residuum	4,	8	8	9,	7	8	5	A

EXEMPLUM NOVUM.

Sint subtrahendi 803′ *cubici ab* 7°, 0′ 234″ *erunt*

	7°	0	0	0	2	3	4	*reducti.*
Subtrah.		8′	0	3	0	0	0	
Residuum	6°,	1	9	7,	2	3	4	

SCHOLION.

118. *Examen, sive proba subtractionis fit per additionem, ut in* Arithmetica (§. 43.) & Logist. (§. 109.) ostensum est. *Ex contemplatione quoque horum exemplorum liquet, non inutilem esse tyronibus observationem* regulæ III. additionis (§. 109.)

CAPUT IV.

De multiplicatione logisticorum decimalium.

THEOREMA II.

114. PROP. *Factum, sive productum ex logisticis factoribus decimalibus* simplicibus, *in factores logisticos* simplices, *est Area, seu superficies, constans* quadratis *logisticis decimalibus; Item factum, sive productum ex factoribus logisticis* quadratis, *in factores* simplices *logisticos, est corpus, (aut saltem spacium) constans cubis logisticis decimalibus.*

DE-

Digitized by Google

DEMONSTRATIO.

I. *Pars* patet ex definitione (§. 90.). II. *Pars* ex definitione (§. 97.)

PROBLEMA V.

115. PROP. *Numeros logisticos decimales invicem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ante omnia advertendum: an factores sint ejusdem speciei? (ut ejusdem denominationis quoque sint, necesse non est) & utrum species intermediæ non deficiant.

Itaque I. Si non sint ejusdem speciei, aut aliqua species intermedia deficiat, reducantur ad eandem speciem, & intermediæ species compleantur. *Ut in Addition. & subt. dictum.*

II. Scribantur sub se invicem, ut in *Arithmetica* (§. 53.) *docuimus.* Fiat multiplicatio, & facta partialia addantur in unum factum totale, ut *eodem* (§. 53.) *dictum.*

III. Factum totale per virgulas distinguatur in species suas, quæ distinctio hac ratione perficitur. *Primo: Si factores ambo erant logistici simplices;* tali casu, in facto totali super notam penultimam dextimam tot ponantur virgulæ, quot erant in aliquo factorum speciem minimam denotantes, & ab ea notata inchoando, sinistram versus, signentur alternando reliquæ notæ per virgulas numero decrescentes. (§. 93.) *Secundo: Si unus factorum fuit quadratus, alter simplex;* tali casu, signetur nota tertia dextima per virgulas denotantes speciem minimam factorum, & ab hac notata, sinistram versus, singulæ ternæ notæ signentur per virgulas numero decrescentes. (§. 101.)

Digitized by Google

DEMONSTRATIO.

Regula II. demonstrata est supra (§. 53.) Reg. III. demonstrata est (§. 114.) Reg. I. patet, quia hac ratione determinatur locus debitus scribendi facta partialia, & in unum factum totale addendi. Q. E. D.

PARADIGMA I. MULTIPLICATIONIS.

Si factores sint logistici simplices.

EXEMPLUM I.

Factores	° 8	′ 4	″ 3
	° 7	′ 3	″ 2
Facta	1	6	8 6
Partialia	2	5	2 9
	5	9	1

Fact. tot. 6 1, 6 0, 7 6 □ *per Reg. III.*

EXEMPLUM II. REGULA I. & III.

Si unus factorum detur ° 3 & ″ 7, & *alter* ° 2 & ‴ 4 *erunt*

Factores	° 3	′ 0	″ 7	‴ 0	*reducti per* (§. 89.) &
	° 2	′ 0	″ 0	‴ 4	*completi* (§. 88.)
Facta partialia	1	2	2	8	0
	6	1	4	0	

Factum totale °6, ′1 5, ″2 2, ‴8 0 □ *per Reg. III. signatum.*

PARA-

Digitized by Google

PARADIGMA II.

Si factorum unus sit logisticus □, alter logisticus simplex.

EXEMPLUM I.

Factores { 6° 1′ 5″ 2 2 □
7° 3′ 4″ }

2 4 6 0 8 8
1 8 4 5 6 6
4 3 0 6 5 4

Factum tot. 4 5°, 1′ 5 7″, 1 4 8 *cubici per Reg. III. hujus.*

EXEMPLUM II.

Sint 3° □, & 25″ □, *multiplicandi per* 2° & 5‴ *simplices.*

erunt

Factores { 3° 0 0 2″ 5‴ 0 0 □ } *completi per* (§. 94.) & *reducti per* (§. 92.)
2° 0 0 5′ ″ ‴ }

Facta partialia 1 5 0 1 2 5 0 0
6 0 0 5 0 0 0

Factum tot. 6°, 0′ 2 0″, 0 1 2‴, 5 0 0 *cubicæ per Reg. III. hujus.*

Examen multiplicatiônis fit ope divisionis infra docendæ.

SCHOLION I.

116. *Productum* Exempli I. Paradig. I. *quod juxta nostram methodum sub hac forma:* 6 1°, 7′ 0″, 7 6 *exhibuimus, secundum* vulgarem *modum multiplicandi logisticos decimales, ita exprimeretur:* 6 1° 7′ 0″ 7‴ 6^{IV}. *Item in* Exemp. I. Parad. I. *productum nostrum:* 6, 1 5°, 2 2′, 8 0″, *juxta* vulgarem, *ita haberetur:* 6° 1′ 5″ 2‴ 2^{IV} 8^{V}. *Videlicet virgulæ speciei minimæ factorum colliguntur in unam summam, hæc summa virgularum, dextimæ notæ producti superponitur, signando reliquas producti notas virgulis numero decrescentibus sinistram versus; ex qua methodo signandi,*

Digitized by Google

perturbationem, & variationem significationis virgularum oriri necesse est; nam, cum in producto sint quadratæ *perticæ, pedes, digiti &c. atque adeo bini numeri assignandi sint classi unius speciei,* (§. 93.) *item in producto* cubicarum perticarum, pedum *&c. tres numeri unam classem constituant, liquet, variari significationem virgularum. Sic in producto* Exemp. II.

Parad. I. *vulgariter expresso:* $\overset{\circ}{6}\ \overset{'}{1}\ \overset{''}{5}\ \overset{'''}{2}\ \overset{IV}{2}\ \overset{V}{8}$ *virgulæ binæ supra numerum* $\overset{''}{5}$ *positæ, non significant digitos, sed pedes* □. *Item tres, & quatuor virgulæ numerorum* $\overset{'''}{2}\ \overset{IV}{2}$, *non significant lineas, & partes decimales linearum, sed digitos* □, *atque idem est de cæteris virgulis, quæ eam speciem non significant, quam præseferunt. Quæ variatio significationis tyronibus magnum facessit negotium discernendi veros valores.*

SCHOLION II.

117. *Quoniam factores* (juxta modum vulgarem) *non reducuntur ante multiplicationem ad eandem speciem, si diversæ speciei infimæ factores simplices sint, & summa virgularum sit impar, sequitur, notam dextimam producti, signatam per summam virgularum non significare* unitates, *sed* decades *in productis* □. *In cubicis vero productis nec regula statui potest, cum virgulæ* centenariorum *alternando, jam pares, jam impares sint. Sic in* Exemp. II. Paradig. I. *juxta vulgarem expresso:* $\overset{\circ}{6}\ \overset{'}{1}\ \overset{''}{5}\ \overset{'''}{2}\ \overset{IV}{2}\ \overset{V}{8}$, *dextima nota* 8, *non valet octo* unitates, *sed octo* decades, *id est* 80; *unde rursus tyronibus errandi campus quidem aperitur, sed via declinandi erroris, aut corrigendi non satis ostenditur ad captum.*

SCHOLION III.

118. *Ostendendum nobis est, quod* (§. 96.) *nos facturos recepimus, regulam* vulgarem, *universalem non esse hanc:* ut virgulæ factorum decimalium, signantes speciem minimam, collectæ in unam summam superscribantur notæ dextimæ in producto totali. *Nam,* Ex. gr. *sint multiplicandi* $\overset{'}{4}$ *per* $\overset{'}{2}$, *dico productum esse* $\overset{'}{8}$, *id est octo pedum, ergo productum* 8, *hoc modo signatum* ($\overset{''}{8}$) *male per duas virgulas exprimitur.* Ostenditur: *vel enim appositæ juxta modum* vulgarem *virgulæ retinent suam significationem digitorum? vel non retinent? si retinent, falsum est, productum ex* $\overset{'}{2}$ *pedibus in* $\overset{'}{4}$ *pedes esse* $\overset{''}{8}$ *digitos, quia evidens est, esse* $\overset{'}{8}$ *pedes* □, *si vero non retinent significationem digitorum, sed in tali casu, duæ virgulæ non* digitos, *sed* pedes, *significare debeant, ergo non eadem servatur hypothesis virgularum, quæ variatio hypothesium in omni methodo*

TAB. LOG. Fig. 3.

Digitized by Google

thodo non levem inducit terminorum confusionem, ac perturbationem. Deinde, si mutant significationem virgulæ (ut eam mutari necesse est) novis erit opus regulis docentibus, unde initium summendum sit signandi, & quot virgulæ pro inducta variatione accipi debeant, ad hoc, ut proximam speciem indicent; quas regulas in productis, præsertim cubicis, non est facile generales statuere, cum supponatur determinatio *speciei maximæ sinistram versum, cujus tamen* determinatio *non docetur universaliter sine algorithmis fractionum decimalium, quibus substitutæ sunt virgulæ. Unde apparet nostram methodum, & faciliorem, & intellectui tyronum longe commodiorem, atque in praxi minime erroneam esse.*

SCHOLION IV.

119. *Ne tamen aliquid neglexisse videamur, quod tyronibus usui esse queat, problema sequens subjungimus, quodvis productum juxta vulgarem methodum expressum, (secus. si non sit expressum) ad nostram reducendi, modo constet, an productum sit quadratorum decimalium, an cubicorum, seu quod idem est, num fuerint factores simplices, vel unus eorum quadratus, alter simplex. Igitur*

PROBLEMA VI.

120. PROP. *Reducere productum logisticum* □, *juxta methodum vulgarem expressum, ad nostram methodum.* Item *productum logisticum cubicum vulgarem.*

RESOLUTIO.

I. *Si productum est logisticus* □, Ex. gr. $\overset{0}{6}\,\overset{I}{1}\,\overset{II}{5}\,\overset{III}{2}\,\overset{IV}{2}\,\overset{V}{8}$, inchoando à nota unitatum in specie perticarum, *Ex. gr.* $\overset{0}{6}$, facto inferne *commate*, post singulas binas notas dextram versus ponatur *comma*, ut *exemplum docet:* $\overset{0}{6},\overset{I}{1}\,\overset{II}{5},\overset{III}{2}\,\overset{IV}{2},\overset{V}{8}$, designabit prima post perticam classis *pedes*; classis secunda, *digitos*; tertia classis *lineas* □ &c.

Notandum: *Si in dextima classe reperiatur una nota numerica (ut in hoc exemplo numerus 8) hæc valere debet decades* □.

Quod si non adsint perticæ, pro prima classe finistima, duæ notæ accipiantur, atque ab hac classe, reliquæ classes per duas notas determinentur, designa-

Digitized by Google

bunt virgulæ, ſupra notam ſiniſtimam poſitæ, ſpeciem maximam. *Ex.gr.* $1\,{}^{\prime}9,4\,{}^{\prime\prime}4\,{}^{\prime\prime\prime\,IV}$, erunt 19 digiti □, 44 lineæ □.

II. *Si productum eſt logiſticus cubicus, e.g.* $45\,{}^{\circ}1\,{}^{\prime}5\,{}^{\prime\prime}7\,{}^{\prime\prime\prime}1\,{}^{IV}4\,{}^{V}8\,{}^{VI}$ facto *commate* poſt unitates perticarum, ponatur *comma* poſt ſingulas ternas notas dextram verſus, ut in *exemplo:* $45\,{}^{\circ},1\,{}^{\prime}5\,{}^{\prime\prime}7\,{}^{\prime\prime\prime},1\,{}^{IV}4\,{}^{V}8\,{}^{VI}$, deſignabit prima poſt perticas claſſis, *pedes cubicos*; ſecunda, *digitos cubicos*, &c.

Notandum: *Si in dextima claſſe reperiatur una tantum nota numerica, hæc valet centenarios, ſi duæ, tunc prima valet centenarios, ſecunda decades.*

Quod ſi non adſint perticæ cubicæ, tali caſu, pro prima ſiniſtima claſſe tres notæ aſſignentur, & ab hac reliquæ determinentur, *ut ſupra* (§.110.) *de quadratis diximus.* Demonſtratio I. partis patet ex (§.92.) II. partis ex (§.100.)

CAPUT V.

De diviſione logiſticorum decimalium.

PORISMA.

121. PROP. *Quod multiplicatio componit ſeu colligit, tollit aut ſolvit diviſio, & viciſſim.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicatio eſt ejusdem quantitatis toties ad ſeipſam facta *additio*, quot unitates altera quantitas denotat (§. 46. & 90.) & *diviſio* eſt quantitatis minoris à majore toties facta *ſubtractio*, quoties minor in majore continetur, ſeu quot unitates denotat quotus, (§. 58.) ſed quod colligit ſeu ponit *additio*, aufert ſeu tollit *ſubtractio*,

Digitized by Google

tractio, (§. 37. & 43.) ergo quod *multiplicatio* componit seu colligit, tollit aut solvit *divisio*. Q. E. D.

THEOREMA III.

122. PROP. I. *Si numeri logistici decimales* □ *dividantur per logisticos simplices, quotus producitur logisticus simplex.* II. *Si logisticus decimalis cubicus dividatur per logisticum simplicem, quotus erit logisticus* □, *& vicissim, si cubicus logisticus dividatur per logisticum* □, *quotus est logisticus simplex.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. logisticus □ componitur per multiplicationem factorum simplicium (§. 90.) ergo per divisionem solvitur iterum in factores simplices (§. 121.) sed factores sunt *divisor*, & *quotus* (§. 61. & 67.) ergo si numeri logistici □ dividantur per logisticos simplices, quotus producitur logisticus simplex. Q. E. D. Eodem modo demonstratur pars altera.

THEOREMA IV.

123. PROP. *Dividendus logisticus nequit esse logisticus simplex, seu unius dimensionis, si tam divisor, quam quotus emergens sit logisticus decimalis.*

DEMONSTRATIO.

Dividendus logisticus æquatur facto, quod producitur ex *quoto* logistico in *divisorem* logisticum ducto (§. 61. & 67.) ergo *quotus*, & *divisor* sunt duo factores logistici, sed factum logisticum ex *factoribus logisticis* est duarum dimensionum saltem per (§. 90.) ergo *dividendus* logisticus nequit esse logisticus unius dimensionis, id est *simplex*. Q. E. D.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

124. Hinc si *dividendus* proponatur sub forma *simplicis* per virgulas expressus (ut proponitur in logistica vulgari) hic reipsa sub ficta imagine *simplicis*, aut □ est, aut *cubicus*, prout factores, aut erant logistici simplices ambo, aut unus logisticus simplex, alter □. *E.gr.* fit: $6^{\circ}\,1'\,7''\,0'''\,7^{IV}\,6$ propositus numerus logisticus sub ficta imagine *simplicis*; hic numerus reipsa logisticus □ est, productus ex factoribus simplicibus: $8^{\circ}\,4'\,3''$, & $7^{\circ}\,3'\,2''$, atque à nobis sub sua vera imagine propositus habetur (§.115.) *Parad. I. Exemp. I.* ita expressus: $6^{\circ}\,1',7'\,0'',7''\,6$.

SCHOLION.

125. *Etsi dividendus esse nequeat logisticus simplex*, (§.123.) *sua tamen utilitate non caret hæc fictio, cum ope hujus* valor quoti *in divisione logisticorum facillime determinetur per virgulas*, ut infra patebit. *Itaque ad fictam hanc imaginem simplicis ante divisionem reducendus erit dividendus, si is nondum formam simplicis induit, quæ reductio per resolutionem sequentis problematis ostenditur.*

PROBLEMA VII.

126. PROP. *Reducere numerum logisticum decimalem quemvis* □, *aut cubicum ad fictam imaginem simplicis.*

RESOLUTIO.

I. *Si in dato numero adsint perticæ*; tali casu, dextimæ notæ reducendi super ponantur tot virgulæ, quot numerantur notæ numericæ inchoando à perticis dextram versus. *Ex.gr.* Sit propositus numerus logisticus □, ad formam fictam simplicis reducendus: $6^{\circ}\,1',7'\,0'',7''\,6$, erit ad fictam imaginem simplicis reductus: $6^{\circ}\,1',7\,0\,7^{IV}\,6$. Quia 4 notæ numerantur inchoando à perticis ad finem, quas claritatis gratia adjecto *commate* distinximus.

II. *Si*

Digitized by Google

II. *Si perticæ non adſint*; tali caſu, reducetur, ſi à virgulis ſpeciem in dato numero maximam ſignantibus inchoando, omnes reliquæ notæ virgulis numero creſcentibus ſignentur. *Ex. gr.* Sit reducendus ad formam ſimplicis: $1\,5,\overset{''}{2}\,\overset{''}{2},\overset{'''}{8}\,0$, in quo ſpecies maxima ſunt pedes, erit reductus: $1\,\overset{''}{5}\,\overset{'''}{2}\,\overset{\text{IV}}{2}\,\overset{\text{V}}{8}\,\overset{\text{VI}}{0}$. Seu brevius ultimam tantum ſignando: $1\,5\,2\,2\,8\,\overset{\text{VI}}{0}$. *Hæc reſolutio demonſtratione non eget.*

PROBLEMA VIII.

127. PROP. *Dividere numeros logiſticos decimales.*

RESOLUTIO.

I. Videatur, an tam *dividendus*, quam *diviſor* ſint ſub forma logiſtici ſimplicis; *Vide exempl. I.* Si non ſint, reducantur, juxta regulas (§.126.) datas, *Vide exempl. II.*

II. Si *dividendus* reductus non continet ſaltem ſpeciem linearum, augeatur in fine tot zeris, quot requiruntur, ut ſub forma ſimplici ſaltem lineas logiſticas contineat, (juxta §.84.) *Vide exempl. III.*

III. Inſtituatur diviſio, ea prorſus methodo, qua in numeris vulgaribus (§.64.) uſi ſumus, nihil reſpiciendo virgulas, ſed eas pro non adjectis habendo.

IV. Finita diviſione, ut inventus quotus apte per virgulas ſignetur, numerus virgularum, ſpeciem minimam in *diviſore* ſignantium, ſubtrahatur à virgulis *dividendi* itidem ſpeciem minimam denotantibus, & (ſi quotus ſimplex eſt) per reſiduas virgulas ſignetur dextima quoti nota, à qua inchoando ſignentur reliquæ per virgulas numero decreſcentes ſiniſtram verſus.

Digitized by Google

Vide exempl. I. II. & III. Si vero quotus □ sit, (ut fit, si logisticus cubicus per divisorem simplicem dividatur) isque sub ficta imagine simplicis lateat, reducendus erit ad veram suam formam, per (§. 120.) *Vide exempl. IV.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. demonstratione non egent. Reg. III. patet ex (§. 86.) solum igitur restat, ut Reg. IV. demonstretur: tunc *quotus* juxta datam regulam exacte signatus habetur, quando ita signatus, per *divisorem* quoque signatum multiplicatus, restituit cum iisdem virgulis signatum *dividendum*, sed *quotus* ita signatus, & multiplicatus per *divisorem* signatum restituit *dividendum* exacte signatum per (§. 115.) ergo Q. E. D.

PARADIGMA DIVISIONIS,
logisticorum decimalium.

EXEMPLUM I.

Sit sub forma logistici simplicis.

			°	′	″	‴	IV	°	′	″	
I. *Divid.*	6	1	7	0	7	6		8	4	3	*quotus log. simplex, & signatus virgulis per Reg. IV.*
			°	′	″						
Divisor		7	3	2	.	.					
fact. subt.	5	8	5	6	.	.					
II. *Divid.*		3	1	4	7	.					
Divisor			7	3	2	.					
fact. subtr.		2	9	2	8	.					
III. *Divid.*			2	1	9	6					
Divisor				7	3	2					
fact. subtr.			2	1	9	6					
			0	0	0	0					

EXEM-

Digitized by Google

Exemplum II.

Sit dividen. 6°,15′,22″,80‴ *erit ad formam simplicis.*

I. *Divid. red.* 615228 (VI) { 3° 0′ 7″ 0‴ *quotus log. simplex & signatus virgulis per Reg. IV.*

Divisor	2004‴ . . .
fact. subt.	6012 . . .
II. *Divid.*	1402 . .
Divisor	2004 . .
III. *Dividen.*	14028 .
Divisor	2004 .
fact. subt.	14028 .
IV. *Dividen.*	- - - - - 0
Divisor	2004

Exempl. III. Reg. II.

sit div. 8°6′4″ *erit auct. zeris.*

I. *Divid.* 8°6′4000‴ (IV) { 3° 7′ 5″ 6‴

Divisor	23°′ . . .
fact. subt.	69 . .
II. *Divid.*	174 . .
Divisor	23 . .
fact. subt.	161 . .
III. *Divid.*	130 .
Divisor	23 .
fact. subtr.	115 .
IV. *Divid.*	150
Divisor	23
fact. subt.	138
Residuum	12 *negligitur ob parvitatem.*

Exemplum IV.

Sit dividend. 4 5°, 1′ 5 7, 1″ 4 8, *erit reductus ad form. simplic.*

I. *Dividend.* 4 5° 1 5 7 1 4 8 (IV) { 6° 1′ 5″ 2‴ 2 (IV) *quotus quadratus, & reductus per (§. 119.)* 6°, 1′ 5″, 2‴ 2,

Divisor	7° 3′ 4″ . . . .
fact. subt.	4 4 0 4 . . . .
II. *Dividend.*	1 1 1 7 . . .
Divisor	7 3 4 . . .
fact. subt.	7 3 4 . . .
III. *Dividend.*	3 8 3 1 . .
Divisor	7 3 4 . .
fact. subtrah.	3 6 7 0 . .
IV. *Dividend.*	1 6 1 4 .
Divisor	7 3 4 .
factum subtrah.	1 4 6 8 .
V. *Dividend.*	1 4 6 8
Divisor	7 3 4
factum subtrah.	1 4 6 8
Residuum	- - - 0 0 0 0

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION I.

128. *Examen divisionis instituitur, ope multiplicationis* (§. 115.) *quotus nempe multiplicatus per divisorem restituere debet dividendum.*

SCHOLION II.

129. *Si divisor sit logisticus incompletus, seu si intermediæ species desint, compleatur juxta superius tradita.* (§. 89. 94. & 102.)

SCHOLION III.

130. *Ratio cur in casu Reg. II. augendus sit* dividendus *per zeros, hæc est, ut si post divisionem ultimam aliquid remaneat, id in praxi negligatur ob minutiam exiguam, quæ pro nihilo habetur, cum ultra lineas decimales in praxi ordinaria vix procedatur, etsi in Philosophia naturali longe majore opus sit accuratione, nec unquam nimia fuerit, si vel cum indefinite parvis quantitatibus calculus institui posset.*

SCHOLION IV.

131. *Prolixiorem me fuisse in hoc calculo logistico tradendo non diffiteor, in quo etiam à* praxi vulgari *in quibusdam recessi, sed enim noverint tyrones (in quorum gratiam hæc conscripta sunt) nunquam nimium esse posse in eo, quod est fundamentum maximum totius calculi Geometrici, & Philosophiæ naturalis, fidenter ajo, quemadmodum tyro in his logisticorum decimalium Algorithmis egregie versatus, omnes tum Geometriæ praxes, tum Philosophiæ naturalis experimenta ad calculum revocans, inoffenso pede percurrendo, facillimè determinabit; Ita his non insignitus Mathematicus, aut Philosophus, nihil præter errores (si calculum spectes) eloquetur.*

FINIS PARTIS II.

ARITH-

Digitized by Google

ARITHMETICÆ NUMERICÆ.

PARS III.

De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas numericas.

CAPUT I.

De Reductione numerorum mixtorum Heterogeneorum reducibilium.

PROBLEMA I. UNIVERSALE.

132. PROP. *Reducere quemcunque numerum mixtum heterogeneum reducibilem ad species inferiores, & vicissim speciem inferiorem ad superiorem.*

RESOLUTIO.

I. *Si species superior, seu major reducenda sit ad inferiorem, seu minorem.* Multiplicetur species major per speciem minorem, id est, per eum numerum speciei minoris, cujus unitates adæquant unitatem speciei superioris, seu majoris. *E.gr.* Sint reducendi 7. flor. germ. ad speciem crucif. cum unus flor. in specie xr. habet 60 unitates, multiplicentur 7 per 60, erit factum 420 xr. seu 7 flor. reducti ad cruciferos.

II. *Si species inferior, seu minor reducenda sit ad superiorem, seu majorem;* opus est divisione, videlicet; species inferior, seu minor dividatur per tot unitates, quot species inferior continet relate ad unitatem speciei superioris, ad quam reducenda est. *Ex.gr.* Sint redu-

Digitized by Google

reducendi 420 xr. ad flor. germ. cum flor. germ. contineat 60 xr. dividantur 420 xr. per 60, & quotus 7 designabit flor., seu speciem majorem.

SCHOLION I.

133. *Si quod residuum ex divisione fit, illud est ejusdem speciei cum* dividendo. Ex. gr. *Si ex divisione crucif. remaneat aliquid, illud sunt xr.*

SCHOLION II.

134. *Cum ad reductionem numerorum mixtorum heterogeneorum reducibilium prærequiratur notitia specierum inter se reducibilium, non inutile censuimus, quasdam tabulas subjungere, in quibus singularum specierum unitates continerentur, quarum usus ad calcem tabularum declaratur.*

SCHOLION III.

135. *Sua utilitate non carebit nobis in Transylvania versantibus praxim adferre, qua calculo perquam facillimo absque multiplicatione illico determinare licet, quotnam dati flor. germ. conficiant fl. Ung. per Transylvaniam usitatos, & vicissim; quod sequentibus duobus problematibus docetur.*

PROBLEMA II.

136. PROP. *Flor. germ. integros in Ung. ope additionis convertere.*

RESOLUTIO.

Constare debet operanti, flor. Ung. in Transylvania valere 100 *nummos, quales in flor. germ. habentur* 120, *juxta tabulam infra ponendam.* Igitur I. Si dentur flor. germ. quotcunque convertendi in Ungaricos, scribantur hi dati flor. germ. bis directè infra se invicem, ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. respondeant, deinde idem numerus florenorum adhuc semel infra cæteros, sed una nota remotius, sinistram versus, scribatur.

II. Subducta linea hi numeri addantur in unam summam, cui summæ ad dextram adjungatur zerus.

III. A

Digitized by Google

III. A ſumma hac duæ notæ dextimæ abſcindantur, erunt hæ duæ notæ nummi, reliquæ ad ſiniſtram erunt flor. Ung. quos valent dati flor. germ. *Ex. gr.* Quæritur: 16 flor. germ. quot faciunt Ungaricos? Igitur juxta datas regulas ſic ſtabit operatio, id eſt flor. 16 germ. faciunt 19 flor. Ung. & 20 nummos.

16
16 } *Reg. I.*
flor. 16
Ung. 19,20 *nummi*

DEMONSTRATIO
hujus Praxeos.

Quod hoc ordine numeri flor. ſcripti per additionem convertantur in Ung. eſt, quia hujusmodi additio vicem ſubit multiplicationis, quæ fieri deberet per 120 nummos, quot nempe nummos habet flor. germ. juxta (§. 132.); nam ad oculum patet, ſi 16 multiplicentur per 120, eodem modo collocati reperientur numeri. In Exemplo, productum *Ex. gr.* primum per numerum 2 eſt 32, ſed hoc eſt 16 additum ad 16. *Deinde* ex producto ſecundo per numerum 1 patet, quod idem numerus 16 una nota remotior ſcribi debeat verſus ſiniſtram; ac *tandem*, quod zerus in fine ſummæ addi debeat, ratio eſt, quia multiplicans 120 habet zerum, ergo: Q. E. D.

```
  16
 120
 ---
  32
 16
 ----
 19,20
```

COROLLARIUM I.

137. Quod ſi florenis germ. adhæreant crucif. hos per 2 multiplicando, aut (quod idem eſt) ſibimet ipſis addendo, in nummos converſos adde claſſi nummorum.

COROLLARIUM II.

138. Hac methodo quilibet ſibi facile conficere poterit tabellam, in qua ab uno flor. germ. ad 100 flor. converſio habeatur, qua uti poterit ad reducendos quodcunque flor. germ.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA III.

139. *Florenos datos Ungaricales per Transylvaniam usitatos, in German. convertere.*

RESOLUTIO.

I. Vide an flor. Ung. sint integri, sine nummis, an vero adjectos habeant nummos. Si sint integri sine nummis, appone zerum unum ad dextram, & numerum flor. divide per 12, quotus dabit flor. germ. *Vide exempl. I.*

II. Si quid residuum maneat ex hac divisione, huic residuo adde iterum zerum, cujus summæ *dimidium* valebit crucif. *Vide exemplum II.*

III. Si floreni adjectos habeant nummos, illos abscinde à flor. integris, & cum flor. operare, ut in *Resolutione I.* deinde ad residuum, si quod est, adde abscissos nummos, & hujus dimidium dabit crucif. *Vide exempl. III.*

IV. Quod si summa nummorum ex residuo, & abscissis nummis adæquet numerum 120, cujus dimidium est 60, numero flor. invento addendus est unus flor. *Vide exempl. IV.*

EXEMPLUM I.

Sint flor. Ung. 24 *in Germ. convertendi, erit*

I. *Divid.*	2	4	0	20 *flor. germ.*
Divisor.	1	2		
fact. subt.	2	4		
II. *Divid.*	-	-	0	
Divis.		1	2	

EXEMPLUM II.

Sint flor. Ungar. 28, *erit*

Divid.	2	8	0	23 *flor. ger. & 20 crucif.*
Divis.	1	2	.	
fact.	2	4		
Divid.		4	0	
Divis.		1	2	
fact.		3	6	
Resid.			4	*addito zero*

erit 40, *cujus dimid.* 20 *xr.*

EXEMPL.

Digitized by Google

Exemplum III.

Sint flor. Ung. 23 *nummi* 40 *erit*

divid. 2 3 0 } 19 *flor. germ.*
divis. 1 2 } 30 *crucif.*

divid. 1 1 0
divis. 1 2
fact. 1 0 8

Residuum 2 *auctum zero*
erit { 20
cum { 40 *facit* 60, *cujus dimidium* 30.

Exemplum IV.

Sint flor. Ung. 22 *nummi* 80 *erit*

2 2 0 } 18 *flor. germ.*
1 2 . } *crucif.* 60 *seu flor. germ.* 19.

1 0 0
1 2
9 6

Residuum 4 *auctum zero*
erit { 40
cum { 80 *facit* 120, *cujus dimidium* 60 *cruc. seu flor. germ.*

CAPUT II.

Reductionum Tabulæ XV.

Ad Praxim arithmeticam summe utiles, ad usum vero civilem, & Philosophicum etiam necessariæ.

Tab. I.

Mensurarum vulgarium, seu civilium, longitudinis.

	′	″	
			¼ *digiti.*
	Digit.		4
Pes		12	48
Orgya una	6	72	288

Magnitudo pedis varia in Geometria adferetur.

Tab. II.

Ponderum Angliæ, *quibus in experimentis Philosophicis utuntur.*

Gran. min.			
24	*Gran. maj.*		
480	20	*Uncia.*	
5760	240	12	*Libra.*

Uncia valet 585 1/7 *gr. Paris. vel* 499 1/7 *gr. Apoth. Tab. VI.*

TABULA III.

Ponderum Civilium, seu Mercatorum per Austriam, Ungariam, & Transylvaniam.

1 libra hujus æquiponderat 1 lib. 2 unc. 4 gros. 22 gran. pond. Paris.

1. *Drachma, seu Quintl*	$\frac{1}{4}$ *Loth.*			
1. *Semiuncia, seu Loth*	4			
1. *Libra*	32	128		
1. *Centenarius*	100	3200	12800	

TABULA IV.

Ponderum Galliæ, & Parisin.

Uncia hujus valet 1 Unc. 12$\frac{1}{8}$ gr. pond. Apoth. Tab. VI.

1. *Carobe, seu filiqua aut tertia pars oboli*					
1. *Grain, seu Granum*	24				
1. *Denier, ou carras, seu nummus*	24	576			
1. *Gros, seu Grossus*	3	72	1728		
Once, seu Uncia	8	24	576	13824	
1. *Marcha*	8	64	192	4608	110592
1. *Livre, seu libra*	2	16	128	384	9216	221184

TABULA V.

Temporis vulgaris.

			Minut. 2dum	
		Minut. 1mum.	" 60	
1. *Hora*		′ 60	3600	
1. *Dies*	° 24	1440	86400	
1. *Annus communis*	265$\frac{1}{4}$	8766	525960	31557600

TA-

Digitized by Google

TABULA VI.

Ponderum Apothecariorum Nostratium.

1. *Granum.*				
20	1. *Scrupulus.*			
60	3	1. *Drachma.*		
480	24	8	1. *Uncia.*	
5760	288	96	12	1. *Libra.*

Granum valet circiter pondus unius grani piperis albi. Ponderis hujus 1 libra, & 7 Unc. faciunt 1 libram nostratem Tab. III. item 1 unc. ponderat 562 gr. Paris.

TABULA VII.

Ponderum Angliæ, Avoir du pois, seu Civil.

1. *Scrupul.*					
3	1. *Drachma.*				
24	8	1. *Uncia.*			
384	128	16	1. *Libra.*		
43008	14336	1792	112	1. *Centenar.*	
860160	286720	35840	2240	20	1. *Tonna.*

Uncia Angliæ valet 534 grana ponderis Parisini. Ponderis vero Apoth. Tab. VI. *valet 456 Gr.*

TABULA VIII.

Exhibens numerum librarum inter se, & cum Parisinis æquiponderantium ex Arit. Combe, Negoce rendu facile Pag. 448.

100	*Parisin.*	103	*August. Vind.*	125	*Vratislav.*
100	*Amstelodam.*	104	*Colonienf.*	150	*Genuenf.*
100	*Argentorat.*	105	*Antverpienf.*	151	*Bononienf.*
89	*Genevenf.*	105	*Hispaniæ.*	152	*Florent.*
95	*Berg. Noveg.*	105	*Lipsienf.*	166	*Venetia.*
98	*Basileenf.*	113	*Dantiscan.*	169	*Neapolot.*
98	*Norimberg.*	114	*Lusitan.*	109	*Londin. min.*
102	*Hamburg.*	117	*Stockholm.*	97	*Londin. maj.*

Si Uncia Apoth. (ut ponit Cl. Eisenschm.*) habet* 562 *Gr. Paris. tum Vien. lib.* 86$\frac{1}{3}\frac{0}{2}$ *ferè faciunt* 100 *Paris.*

Digitized by Google

TABULA IX.

Valor pecuniæ Germanicæ in Transylvania.

	Nummi.	
1. *Crucif.*	2	
1. *Grossus*	3	6
1. *flor. germ.*	20	60	120

Marianus, valet 17 xr. & septenarius 7 xr. ut in Austria, & Ung.

TABULA X.

Pecuniæ Ungaricæ per Transylvaniam.

Nummi.		
2	1. *Crucif.*	
6	3	1. *Grossus.*
100	50	$16\frac{2}{3}$	1. *flor. Ung. in Transylv.*

Marianus, & septenarius valorem suum retinent, ut in Austria.

TABULA XI.

Valor pecuniæ Germanicæ in Ungaria.

	Nummi.					
1. *Crucif.*	$1\frac{2}{3}$					
1. *Grossus.*	3	5				
1. *Septenar.*	$2\frac{1}{3}$	7	$11\frac{2}{9}$			
1. *Marianus.*	$2\frac{3}{7}$	$5\frac{2}{3}$	17	$28\frac{1}{3}$		
1. *flor. Germ.*	$3\frac{9}{17}$	$8\frac{4}{7}$	20	60	100	
1. *Aureus Kremn.*	$4\frac{1}{3}$	$14\frac{14}{17}$	36	84	252	420

TABULA XII.

Mensuræ Vini in Transylvania.

	Quadrans.		
1. *Sextarius, seu Media.*	2		
1. *Cupa, seu Mensura.*	2	4	
1. *Urna Transylv.*	8	16	32
1. *Urna Germ. in Transylv.*	5	40	80	160

2. *Mensuræ Transylvan. faciunt* $1\frac{1}{2}$ *mensuram Austriacam, vel Ungaricam cupam.*

TA-

Digitized by Google

TABULA XIII.

Mensuras Geographorum exhibens.

NB. Granum Hordei *secundum latitudinem suam accipitur.*

1. *Granum Hordei.*	1. *Digitus.*	1. *Palmus.*	1. *Pes.*	1. *Passus.*	1. *Stadium.*	1. *Milliare Italicum.*	1. *Milliare Germ. com.*	1. *Minutum.*	1. *Gradus.*	
4										
16	4									
64	16	4								
320	80	20	5							
40000	10000	2500	625	125						
320000	80000	20000	5000	1000	8					
1280000	320000	80000	20000	4000	32	4				
320000	80000	20000	5000	1000	8	1	$\frac{1}{4}$			
19200000	4800000	1200000	300000	60000	480	60	15	60		
9612000000	172800000	432000000	108000000	21600000	172800	21600	5400	21600	360	*Circulus maximus Telluris.*
2201600000	550400000	137600000	34400000	6880000	55040	6880	1720 *ferè*	*Diameter.*		

TABULA XIV.

Valor pecuniæ Germanicæ secundum Valachos in Transylvania.

Nummi.

2	1. *Crucif.*			
6	3	1. *Grossus.*		
12	6	2	1. *Susták.*	
34	17	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{3}$	1. *Horgas, seu Marian.*
102	51	17	$8\frac{3}{3}$	3	1. *Vonás flor.*

TABULA XV.

Monetariorum nostratium, exhibens gradum puritatis metallorum.

1. *Granum.*

12	1. *Corat, seu Gradus.*	
18	$1\frac{1}{2}$	1. *Loth.*
288	24	16	1. *Marcha.*

Puritas obryzi, seu nullo heterogeneo metallo permisti auri statuitur esse 24 Carat, seu Graduum, nempe totum pondus 16 Loth, continet 24 Gradus, seu Carat auri puri; & secundum hunc numerum Graduum, defectum puritatis exprimunt tam Moneta rii, *quàm* Aurifabri. E. gr. *Dum dicunt, speciem auri dati esse 23 Carat, indicare volunt, in Marcha auri admixtum esse unum Carat de metallo heterogeneo.* Ex. gr. *Cupro. Similiter puritatem summam argenti statuunt esse 16 Loth, id est, in Marcha dantur 16 Loth argenti puri, & secundum hunc numerum Lothonum (quem* probam *vocant) exprimunt defectum puritatis argenti, dum dicunt.* Ex. gr. *Hoc argentum est 14 Loth, seu probæ decimæ quartæ, indicare volunt, Marcham, seu (16 Loth) hujusmodi argenti continere argenti puri Loth 14, reliquos vero 2 Loth, ad complendos 16 Lothones, esse metallum heterogeneum* Ex. gr. *Cuprum admixtum; quam permixtionem* legam *vocant. Si vero pondus consideretur, tunc 72 aurei Kremn. faciunt* Marcham, *& unus aureus ponderat 4 Grana Tabulu XV. 3 aurei faciunt unum Carat ponderis, 1 Carat appendit 160 Grana ponderis Apothecariorum nostratium.*

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA IV.

140. PROP. *Usus harum Tabularum.*

RESOLUTIO I.

Si quæratur: unitas datæ speciei majoris, quot continet unitates ex data specie minore? Ex. gr. *Orgya civilis, quot continet digitos?* Exquire in Tab. I. titulum *Orgyæ*, & titulum *digiti*, & communis concursus, seu cellula dabit petitum numerum, 72 digitorum; eadem esto regula de cæteris tabulis.

RESOLUTIO II.

141. Si quæratur: *Ex. gr.* 8 Orgyæ civilis quot faciunt digitos? Exquire, in Tab. I. unius Orgyæ digitos, per prius dicta, qui sunt 72, hos multiplica per datum numerum 8, dabit productum 756 digitos, qui continentur in 8 Orgiis; *Hæc resolutio est eadem, quæ probl. univers.* (§.132.) *de reductione majoris ad minorem speciem.*

RESOLUTIO III.

142. Si quæratur: *Ex. gr.* 756 digiti, quot faciunt Orgyas? Exquire numerum digitorum unius Orgyæ in Tab. I. quem invenies 72, & per hunc numerum divide datos 756 digitos, dabit quotus numerum Orgyarum petitum 8. *Hæc resolutio eadem est, cum probl. univ.* (§.132.) *de reductione speciei minoris ad majorem.*

SCHOLION.

143. *Reliquos harum tabularum usus dabimus suis locis; interea curioso tyroni, coronidis loco, ultimas horum elementorum paginas, non ineruditis in notas Arithmeticas animadversionibus locupletatas, ad eruditum usum defero;* Primùm: *notas numericas Arabum modernorum;* dein *eorundem Arabum (vel ut alii volunt Indorum) antiquiores in Europam illatas numerorum figuras, quibus Europæi ad sæculum ferè* XVI. *usi fuere, adferam;* Subinde *originem Romanarum notarum dabo, ac postremo Tabellam tum Hebræi, tum Græci Alphabeti valorem literarum numericum exprimentem, adjunctis quibusdam veterum Græcorum notis compendiariis. Itaque.*

Digitized by Google

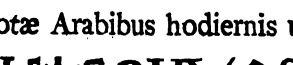
CAPUT III.

Animadverſiones in notas numericas.

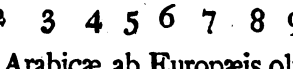
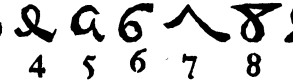
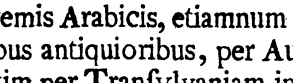
Figuræ, ſeu notæ Arabibus hodiernis uſitatæ

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Notæ numericæ Arabicæ ab Europæis olim uſurpatæ



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Notis his poſtremis Arabicis, etiamnum in plerisque Templis, & ædibus antiquioribus, per Auſtriam, Ungariam, & præſertim per Tranſylvaniam in ſedibus, ut vocant, Saxonicis, Annos legimus conſignatos, *Ex.gr.* legitur annus poſitarum ædium:  , aut  , vel  , quos, niſi eruditus lector, nemo alter interpretabitur.

Notæ Romanæ hodiernæ, quæ vulgo pro litteris latinorum habentur.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.
			L.	C.	D.	M.			
			50	100	500	1000.			

En Originem harum notarum.

Quemadmodum hodiernum rude vulgus hominum, ita Romani populi Patres primi, ignari Arithmeticæ, res ſuas numero definitas, lineolis, ſeu virgulis deſignabant, & exprimebant. *Ex. gr.* Volentes exprimere, ſe viginti modios tritici venumdediſſe, ita ſcripſerunt: IIIIIIIIIIIIIIIIIIII, atque harum ope virgularum

Digitized by Google

gularum maximos quosvis exprimebant numeros; qui modus consignandi numeros, utpote prolixus admodum, & rudis, tædium non leve consignandi, computandique creabat. Igitur de breviore modo scribendi per easdem usu receptas virgulas à quibusdam acutioris ingenii cogitatum est, videlicet, ut duabus, tribusve virgulis, varie ad se invicem inclinatis, prolixiorem modum redderent breviorem, consensuque communi hominum in usum civilem inducerent. Itaque compendium, à numero *quinario* inchoantes, ita exorsi videntur.

1. Numerum IIIII quinque virgularum, duabus virgulis ad se invicem inclinatis indicabant, videlicet V dein celerius exarando ita conjungebant V, unde orta figura hodierna numeri *quinque* (V), seu littera (v).

2. Hac figura numeri *quinque* V cum adjunctis dextram versus virgulis rectis, exprimebant cæteros usque ad decadem, seu numerum decem; cum itaque bis *quinque* sit *decem*, è duabus notis numeri *quinque*, sibi ad verticem oppositis, figuram numeri *decem* composuerunt, videlicet X, quam celerius scribendo, ita efformabant X, cui originem debet nunc usitata nota (X) seu littera (x).

His quatuor virgulis IIII, nota *quinarii* V, & *decenarii* X compendium quidem in minoribus, at non in majoribus numeris nacti Romani, cæteras quoque numerorum figuras invenêre.

3. Itaque per incrementum *quinarii*, cum XXXXX seu quinquies decem, sit *quinquaginta*, è binis virgulis rectis hoc situ I collocatis figuram componentes, *quinquaginta* indicarunt, quam celerius figurando, ita scribebant L, ex qua hodierna nota (L) ortum habet.

Digitized by Google

4. Porro, cum *centum* sit bis quinquaginta, binas notas numeri *quinquaginta* ⌊⌋ ⌊⌋ hoc situ ⌊⌋, quasi inversam unam ⌐, alteram rectam ⌊⌋ conjugentes expresserunt, quam celerius exarando, ita figurabant ⊏, dein ita ⊂, ac tandem celerrime fingendo in hanc C abiit, non absimilem litteræ hodiernæ (C), centum designanti.

5. Cum quinquies centum sint *quingenta*, loco figuræ centum, quinquies repetitæ, notas duas centenarii, conversim jungendo ⌊⌋, substituerunt, quæ celeritate scribendi in hanc ⊏⊐, dein in hujusmodi |Ↄ aut similem |ↄ, ac tandem in hanc D figuram, litteræ (D) conformem, & hodie usitatam transiit.

6. Denique cum bis quingenta efficiant *mille*, binas *quingentarum* notas conversim locando, I⌊⌋I⌊⌋I *mille* efformabant, atque celerius scribendo ita ⊏|⊐, seu C|Ↄ, celerrime C|ↄ, vel ↃↃ, aut ⅯⅯ, quæ ultima figura, simillima minori litteræ (m) occasionem præbuit Scribis, eam elegantius efformandi per litteram majorem (M) nunc usitatam. Harum varias figuras sub unum conspectum hic exhibeo.

Numeri Romani originarii.

Notæ primævæ	I,	V,	X,	⌊⌋,	⌊⌋,	⌊⌋⌊⌋,	I⌊⌋I⌊⌋I
Celerius scriptæ	I,	V,	X,	⌊,	⊏,	⊏⊐,	⊏|⊐
Multo celerius	I,	V,	X,	⌊,	C,	|Ↄ,	C|Ↄ
Celerrimè	I,	V,	X,	L,	C,	|ↄ,	ↃↃ
Ex quibus Ortæ hodiernæ	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.

His septem figuris omnem numerum consignabat populus Romanus sua adhuc ruditate felix, quibus ingeniosa posteritas alias quasdam adjecit, quarum nonnullas ex Arithmetica Cl. Poëtii excerptas damus.

Signum

Digitized by Google

Signum ∞ vel ♌, aut ◇◇ usurpatum est loco numeri 1000.

Signum, ⋔ vel ⅄, aut ⊕ significabat numerum: 10000.

Geminata ⋔⋔ vel ⅄⅄, designabant bis 10000, seu 20000.

Si signum millenarii (∞) anteponatur, *Ex. gr.* ∞ ⋔⋔, subtrahendum intelligitur, id est: 19000.

Signum ⋊ vel ⋊ significat 20, & ⋊⋊ denotat 30. quibus usu posteriore accesserunt signa ab Authoribus ætatis etiam aureæ passim usurpata sequentia.

(|),	|)),	((|))	|))),	(((|))),	((((|)))).
I,	V,	X,	L,	C,	M.
1000,	5000,	10000,	50000,	100000,	1000000.

SCHOLION.

144. *Ne vero quispiam minus eruditus existimet, expositam harum notarum originem, & natales, aut lusum ingenii, aut opinionem sua carentem ratione, is quæso consulat scriptores rerum antiquarum, qui lapides, manuscripta, nummos, cæteraque venerandæ antiquitatis monumenta pucherrima, his notis consignata, erudito orbi reliquerunt;* Vide Cl. Eisenschmid. Disquis. Tab. II. *Et certe, si rogatus fuerit quispiam dare rationem, cur nota litteræ* (V) *denotet numerum* quinque, *aut litera* (X) decem, *vel littera* (L) quinquaginta, *littera* (D) quingenta, *littera* (C) centum, *item* (M) mille: *Si originem, & natales harum notarum ignoret, quid roganti erudite reponat, non inveniet; unde liquet, cui fundamento vocum chronographicarum lusus initatur, quarum literæ, si ad natales suos reducantur, litem grammaticis moveant, cæteris vero ænigma intentent, est necesse, ut isthoc:*

I⊐ ONI⊐ L⊔ 1/ I⊐ IAI⊐ I⊐ I.

TA-

TABULA COMPENDIARIA,

Notarum numericarum Hebræis, & Græcis, scriptoribus usu receptarum in gratiam eorum, qui lectione eruditorum librorum, cumprimis rerum antiquarum notitia delectantur.

Monades, seu Unitat.

Hebr.	*Græc.M.*	*min.*	*min.*	*vulg.*
א	I	ά	α	1
ב	II	β'	β	2
ג	III	γ'	γ	3
ד	IIII	δ'	δ	4
ה	Π	ε	ε	5
ו	ΠI	ς'	ς	6
ז	ΠII	ζ'	ζ	7
ח	ΠIII	η'	η	8
ט	ΠIIII	θ'	ϑ	9

Decades.

Hebr.	*Græc.M.*	*min.*	*min.*	*vulg.*
י	Δ	ι'	ι	10
כ	ΔΔ	κ'	κ	20
ל	ΔΔΔ	λ'	λ	30
מ	ΔΔΔΔ	μ'	μ	40
נ	[Δ]	ν'	ν	50
ס	[Δ]Δ	ξ'	ξ	60
ע	[Δ]ΔΔ	ο'	ο	70
פ	[Δ]ΔΔΔ	π'	π	80
צ	ΝΜ	ς'	ϙ	90

Centenarii.

Hebr.	*Græc.M.*	*min.*	*min.*	*vulg.*
ק	H	ρ'	ρ	100
ר	HH	σ'	σ	200
ש	HHH	τ'	τ	300
ת	HHHH	υ'	υ	400
ד	[H]	φ'	φ	500
ם	[H]H	χ'	χ	600
ן	[H]HH	ψ'	ψ	700
ף	[H]HHH	ω'	ω	800
ץ	[H]HHHH	ϡ'	ϡ	900

Chiliades, seu Millenarii.

Hebr.	*Græc.M.*	*min.*	*min.*	*vulg.*
א,	X	,α	α,	1000
ב,	XX	,β	β,	2000
ג,	XXX	,γ	γ,	3000
ד,	XXXX	,δ	δ,	4000
ה,	[X]	,ε	ε,	5000
ו,	[X]X	,ς	ς,	6000
ז,	[X]XX	,ζ	ζ,	7000
ח,	[X]XXX	,η	ϱ,	8000
ט,	[X]XXXX	,ϑ	ϑ,	9000

Myriades, seu decem millenarii.

Hebr.	*Græc. maj.*	*min.*	*min.*	*vulgar.*
י,	M	,ι	ι,	10000
כ,	MM	,κ	κ,	20000
נ,	[M]	,ν	ν,	50000
ס,	[M]M	,ξ	ξ,	60000
צ,	[M]MMMM	,Ν	ϙ,	90000

Centum

Digitized by Google

Centum millenarii.

Hebr.	*Græc. maj.*	*min.*	*min.*	*vulgar.*
ק,	XH,	,ρ	ρ,	100000
ר,	XH,	,φ	φ,	500000
ת,	XH XH,	,χ	χ,	600000

Et sic de aliis.

Tres lineæ, quibus aliqua littera circumdatur, est figura literæ Π, *quæ cum* 5 *significet, indicat valorem litteræ sibi inclusæ quinquies auctum, ut ex Schemate liquet.*

SCHOLION I.

145. *Si quis ultro progredi voluerit in numeris, modum procedendi facile ex tabula intelliget; ex qua etiam ratio colligendi, & componendi numeros liquet; sic: si quis præsentem annum* 1755 *designare vellet per litteras Græcas, eum denotare poterit vel majusculis* XHHHΔΠ, *vel minusculis* ,αψνε, *aut simpliciter* α,ψνε, *item Hebraice:* אזנר״,

SCHOLION II.

146. *Præter has in antiquis græcorum monumentis reperiuntur etiam similes numerorum expressiones;* Ex. gr. *significat* 1000, *supra quam figuram si scriptæ reperiantur litteræ, ita accipiendæ sunt, ut litteræ monadum denotent* decades; *decadum*, centenarios, *centenariorum* millenarios; Er. gr. *Apud Ptolom. legitur* λα *και,αψπγ, id est:* 310000, & 1783, *simul* 311783. *Item apud eundem* κβ δ,χθ, *oco* 224609.

CAPUT ULTIMUM.

Tyronem manuducens ad praxim, & usum quatuor Algorithmorum Arithmeticæ numerorum integrorum.

USUS ADDITIONIS.

QUÆSITUM I. Quando utendum Additione? R. Cum additio sit collectio plurium numerorum partia-

Digitized by Google

partialium in unum totum (§. 30.) constat, amplissimum additionis usum in commerciis, conventisque hominum esse, dum rationes *accepti*, & *expensi* reddendæ, aut exposcendæ sunt; Itaque additione utimur, quando indagamus summam acceptorum, aut expositorum, unius septimanæ, vel mensis, aut anni, vel plurimum etiam annorum generalem summam. *Sic* Magister rationum (*vulgo* Perceptor, *aut* Provisor) *rationem inire volens, quantum toto anno perceperit? colligit, aut addit singularia accepta seu hebdomadarum, seu mensium in unam summam, quæ ostendit quantum toto perceperit anno. Per additionem quoque indagamus, quantum per particulares expensas erogatum, aut venditum, vel distractum, aut quoquo modo consumptum sit longiore quovis elapso tempore.*

USUS SUBTRACTIONIS.

QUÆSITUM II. Quando utendum subtractione? R. Cum per subtractionem innotescat Residuum, seu differentia duorum numerorum (§. 37.) subtractione utimur, quotiescunque indagamus differentiam, vel residuum duorum quantorum quorumvis. *Sic* Oeconomus *ex acquisitis per annum frumenti metretis 2685 sequenti anno partim venum dedit, partim in domesticas necessitates consumpsit metretas 1899 (ut illi ex libro rationum expositarum constat) quærit igitur ante messem novam quot metretas adhuc reliquas habeat? subtrahendo ergo 1899, à 2685, reperiet reliquas sibi adhuc esse debere 786 metretas; quod tamen residuum frumenti, si auctuali adhibita mensuratione, cum inito calculo non respondeat exacte, neminem aut furti, aut infidelitatis arguat Oeconomus, cum grana frumenti recentis ob humorem nativum turgentia, & mensurata, majorem numerum metretarum conficiant, quam tempore diuturno siccata, ut nórunt Oeconomi; quod etiam in liquidis observandum occurrit.*

Sic

Sic quoque Paterfamilias *rationem inire volens perceptæ ex censu annuo, rebusque Oeconomicis pecuniæ,* Ex. gr. 3427 *fl. Germ.* 45 *xr. cum exposita eodem anno pecunia* 3342 *fl. Ger.* 55 *xr. per subtractionem inquirit in residuam pecuniam, quam in dato exemplo reperiet esse* 84 *fl. Germ.* 50 *xr. unde liquet & hujus algorithmi usus per omnem vitam civilem amplissimus.*

USUS MULTIPLICATIONIS.

QUÆSITUM III. Quando utendum multiplicatione? R. Cum multiplicatio sit ejusdem numeri ad seipsum toties facta additio, quot alter quivis datus numerus unitates continet (§. 46.) patet, & hujus algorithmi usum frequentissimum esse in commercio humano; nam multiplicatione utendum est, quotiescunque indagamus summam, seu quantum, quod consurgere debet ex repetita ejusdem numeri ad seipsum facta additione: *Ex. gr.* Præfecto annonæ *experientia constat juxta præscriptam normam in* 2000 *Milites singulis mensibus distribui farinæ metretas* 768, *quærit pro toto anno, seu per menses* 12 *quot metretas erogaturus est in eosdem* 2000 *milites; addit ergo* 768 *metretas sibimet duodecies, seu per* 12, *qui est mensium numerus, multiplicat* 768 *metretas, & factum* 9216 *dabit metretas intra annum* 2000 *militibus distribuendas.* Item Provisor rei œconomicæ *habet agrum, ad quem conserendum siliginis metretas insumit* 16, *habet autem alium agrum, quinquies majorem isto, quærit, quot metretis ejusdem frumenti ad conserendum illum agrum opus habeat, multiplicat igitur* 16 *per* 5, *& factum* 80 *indicat numerum metretarum, quibus opus habet ad conserendum agrum quinquies majorem priore.*

USUS DIVISIONIS.

QUÆSITUM IV. Quando utendum divisione? R. Præter innumeros fere casus divisione in vita communi utimur, quoties inquirimus in partem unam, quæ emer-

emergere debet, si certa summa in plures partes æqualiter, vel inæqualiter partienda sit. *Ex. gr. Habeo legatam summam pecuniæ 360 fl. Germ. in 24 pauperes æqualiter erogandam, quæritur, quot floreni singulis pauperibus dandi sunt? dividendo itaque numerum 360 per 24, prodibit quotus 15 fl. Germ. quæ est pars vigesima quarta de 360 flor. danda singulis pauperibus.* Item Præfectus annonæ *notum sibi habet, quod in 2000 milites spacio unius anni, seu 12 mensium, erogatæ sint 9216 metretæ frumenti, quærit, quot singulis mensibus aut erogatæ sint, aut erogari debeant? dividendo itaque 9216 per 12, emergit quotus 768 metretæ, spacio unius mensis erogatæ, aut erogandæ. Item cuipiam civitati impositum est quantum pecuniæ in ærarium Regium conferendæ 7620 fl. Ger. reperiuntur autem cives esse 1524, quæritur, quid singuli conferre debeant? dividendo itaque 7620 per 1524, emergit quotus 5, seu totidem floreni à singulis civibus æqualiter conferendi.*

SCHOLION.

Cæteros fere innumeros horum algorithmorum per omnem Mathesim, Philosophiam naturalem, ac vitam socialem usus, docentis institutioni, & discipulorum industriæ in datis circumstantiis usurpandos relinquimus potius, quam ut iis hic loci referendis, molem augendo, libellum pretiosum nonnullis Tyronibus reddamus. Porro hæc, quæ de algorithmis numerorum integrorum à nobis dicta sunt, reliquorum omnium, quæ per universum arithmeticam traduntur, fundamenta, atque elementa esse, quisque facile assequetur, cum nihil aliud in quæstionibus arithmeticis præcipiendum sit, quam, ut numeri vel addantur, subtrahanturve, *aut* multiplicentur, dividanturve. *Itaque, nisi Tyro, in his algorithmis probe sit exercitatus, frustra se se ad alia conferet, quæ ad Gloriam DEI Majorem ex bono Patriæ, ac vitæ civilis commodo consequendam, tradituri sumus.*

FINIS ARITHMETICÆ NUMERICÆ INTEGRORUM.

Digitized by Google

ELEMENTA ALGEBRÆ.

F

Digitized by Google

PRÆFATIO.

Algorithmis quatuor Arithmeticæ numericæ instructo Tyroni Prima Algebræ *principia traditurus, ad summum scientiarum apicem aditum pando. Est hæc scientia inter Mathematicas hujus Ævi præcipua, ac nobilissima, quæ methodo Analytica veritates Mathematicas quantumlibet ignotas, & intricatas sagacitate mira feliciter detegit, explicat, invenit, inventas stricto compendio clarissime demonstrat, inque methodum Syntheticam non sine legentium admiratione ordinat. Hujus scientiæ tanta quorundam Mathematicorum animis insedit æstimatio, ut* Divinam *appellarent propterea, quod à sensuum cognitione longe remotissima perscrutando, nullis numerorum, aut mensurarum finibus, nulla magnitudinum mole conclusa per omnem, qua late patet veritatum Mathematicarum, rerumque naturalium campum diffusa quidquid* Quantum *audit, sibi proprium faciat, eaque facilitate abstrusa quæque pandat mysteria, ut oracula fundere videatur.*

Mirandam hanc artem munere DEI veteribus quoque usitatam fuisse (cujus ope Theoremata, ac Problemata invenerint) quamque ipsi, ut eo major subiret alios inventorum admiratio, studiose dissimulaverint, Græcum de Arithmetica testatur opus à Diophanto Alexandrino *conscriptum, signis-*

Digitized by Google

*signisque consignatum Algebraicis.** *Nec immerito scientia hæc veteribus nullo non æstimanda pretio, tanquam summus mathematum Thesaurus secreti silentio tecta, paucisque discipulorum, (ut opinor) concredita, studiosè custodienda curabatur, cujus finem, ac scopum esse nórant, quantitatem, sub quibusvis quæstionis etiam difficillimæ involucris delitescentem, ex levissimis, ac obviis indiciis (ut ita dicam) subodorari, tantisque veritatum certissimarum divitiis, quasi aliud agendo* Philetis Sui *paucarum horarum laborem levissimum remunerari, quas arte Synthetica, summo etiam ingenio præcellens, labore maximo vix unquam satis assequeretur.*

Quapropter Recentiores hac arte beati, vim ejus mirandam in perscrutandis, determinandisque naturæ phænomenis fausto successu experti, Philosophica sua circa res naturales dogmata Algebraicis expressa formulis proposuère, probe gnari, unicâ sæpe lineâ Algebraicis rite signata figuris, tot tantaque naturæ mysteria declarari, quibus explicandis (si verbis uterentur) complures paginas conscribendi necessitatem sibi imponereut.

Quæ

*Floruit Alexandriæ *Diophantus Mathem.* seculo post Christum natum secundo, scripsit 13. de Algebra libros, quorum 6. tantum hodie supersunt *à Xylandro* latinitate donati, hos primis Typis Anno 1575. in lucem datos subinde *D. Casparus Bachet* commentariis suis Anno 1621. editis, auxerat.

Digitized by Google

Quæ cum ita sint, Matheseos juxta, ac Philosophiæ Recentiorum Studiosus diligentem scientiæ huic operam navet, oportet, qua adjutus non sinè sincera voluptate animi ea reperiet Marte suo, quæ è veterum libris magna & temporis, & scientiæ jactura vix hauriet sine tædio, itaque secum statuat velim Tyro Analyseos, tantum se profecturum in Mathematicis, ac Philosophia naturali, quantum exercitatus fuerit in Algebra Geometriæ juncta, cujus prima principia duntaxat Recentiorum more, ad captum Tyronum methodo clara in DEI Gloriam concinnata, isthic propono. Velim autem ea sibi in memoriam revocet Tyro monita, quæ Elementis Arithmeticæ præmiseram.

CON-

Digitized by Google

CONSPECTUS PARTIUM, ET CAPITUM *Algebræ.*

PARS I.

De Arithmetica literali, seu Algebra tam speciosa quam numeroso integrorum cum fractis.

Folio.

CAP. I. *Hypotheses & Definitiones in Algebram universam* - - - - - 81

CAP. II. *De Additione Algebraica* - - 102

CAP III. *De Subtractione* - - - 107

CAP. IV. *De Multiplicatione* - - - 111

CAP. V. *De Divisione* - - - - 118

CAP. VI. *De Natura & proprietatibus fractionum in genere* - - - - 127

CAP. VII. *De Quatuor Algorithmis fractionum* 134

PARS II.

De Potentiis Quantitatum, & Earundem Radicibus.

CAP. I. *De Quantitatum Potentiis & radicibus in genere* - - - - - 150

CAP. II. *De Extractione Radicum quarumvis* 154

CAP. III. *De Calculo Quantitatum & Radicum irrationalium seu surdarum, tam simplicium, quam compositarum* - - 166

PARS

Digitized by Google

PARS III.

De Analysi speciosa, seu Arte Resolvendi Problemata, & Quæstiones quantumvis reconditas.

Folio.

CAP. I. *Axiomata, Præcepta, & Praxes Universales totius Artis Analyticæ* - 173

CAP. II. *Analysis Problematum simplicium, & determinatorum uno in cognito affectorum* 183

CAP. III. *Resolutio Problematum, in quibus plures occurrunt incogniti heterogenei* - 189

CAP. IV. *Resolutio Problematum indeterminatorum* 194

CAP. V. *De Resolutione Æquationum Quadraticarum* - - - - - 195

PARS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, Usu Regulæ aureæ, Inventione Theorematum, ac Problematum.

CAP. I. *De Ratione tam Arithmetica, quam Geometrica* - - - - - 201

CAP. II. *De Proportione Geometrica* - - 205

CAP. III. *De Ratione Composita, & Progressione Geometrica continua* - - - 214

CAP. IV. *De Proportione, & Progressione Arithmetica* - - - - - 220

CAP. V. *De Usu Regulæ aureæ Directæ, Inversæ, simplicis, & compositæ, itemque de Regula Societatis* - - - 224

CAP. ULT. *De Inventione Theorematum, ac Problematum* - - - - 228

ELE-

Digitized by Google

ELEMENTA ALGEBRÆ PARS I.

DE ARITHMETICA LITERALI, SEU *Algebra tam speciosa, quam numerosa integrorum cum fractis.*

CAPUT I.

Hypotheses, & Definitiones in Algebram universam.

DEFINITIO I.

Algebra est scientia, quæ ope literarum alphabeti, & certis adhibitis signis per regulas sibi proprias inquirit in quantitates, & veritates ignotas, easque ex datis quibusdam cognitis, secundùm axiomata *Æqualitatis*, infallibiliter eruit, ac demonstrativè determinat. Dicitur etiam *calculus universalis*, quia literæ universaliter significant quamcunque quantitatem, pro qua significanda assummuntur.

SCHOLION.

2. *Dividitur* Algebra *in* Arithmeticam literalem, *seu* speciosam, *& in* Analysim sublimiorem; Illa, *substitutis loco numerorum literis, in naturam numerorum, & veritates arithmeticas* universaliter *inquirit. Hæc quantitates quasvis finitas, & mensurabiles per universam Mathesim, ac Philosophiam vagantes eruit, demonstrat, ac regulas universales invenit, & statuit. Prior illa, si numeris (non substitutis literis) utatur, appellatur etiam* Algebra numerosa.

Digitized by Google

DEFINITIO II.

3. *Quantitas* dicitur, quidquid addendo augeri, aut subtrahendo minui potest. *Quantum* verò appellatur, quod constare partibus intelligitur; harum respectu vocatur etiam *Totum*.

HYPOTHESIS I.

4. *Literæ Alphabeti minusculæ substituuntur in Algebra pro* quantitatibus; *& quidem literæ Alphabeti priores*, Ex. gr. a, b, c, *&c. adhibentur pro quantitatibus nobis* notis, *&* cognitis. *Ultimæ vero* x, y, z, *pro* ignotis, *seu* quærendis, *&* determinandis *usurpantur.*

SCHOLION I.

5. *Cum* quantitatis *nomine intelligatur quidquid augeri vel minui potest* (§. 3.), *literæ alphabeti non tantum pro numeris, sed etiam pro lineis, areis, corporibus, & universim pro omni quantitate substitui possunt; Utiliter autem quantitates cognitæ per primas, ignotæ per ultimas alphabeti literas exprimuntur, ut imaginationi, ac memoriæ distinctè exhibeatur quantitas, cui inquirendæ per datas regulas insistit operans. Sunt, qui, ut memoriæ, & imaginationi adhuc melius subvenirent, literis utuntur initialibus eorum nominum, per quæ, quantitates tanquam cognitæ denominantur.* Ex. gr. *Locò datæ quantitatis cognitæ* Temporis, *ponunt literam* T, *locò* ponderis P. *locò* milliarium M, *locò* celeritatis C, *&c. quod laudabile Recentiorum inventum etiam nos in Algebra ad Geometriam applicata sequemur; Ignotas tamen, seu quærendas quantitates non aliter, quàm per ultimas literas* x, y, z, *appellabimus.* Vieta *post antiquiores Algebræ Restaurator, & Inventor usus est literis majoribus alphabeti, alii cum Anglis secuti* Harriotum *incognitas quantitates per* vocales, *cognitas per* consonantes *exprimebant. Literis minusculis usus est* Cartesius, *cujus praxim hodierni ferè omnes sequuntur præter Anglos quosdam.*

SCHOLION II.

6. *Quoniam literæ substituuntur pro quacunque quantitate* (§. 4.) *eæque sic substitutæ*, universaliter significant *illam quantitatem, pro qua substitutæ sunt* (§. 1.) *sequitur calculum literalem Algebræ, esse calculum* quantitatum indeterminatarum; *non quidem in hoc sensu, quasi talis quantitas in se non esset determinata, & certa, sed quod relatè ad* unitatem *(quæ nobis arbitraria est) per quam determinatur talis quantitas, non sit determinata, eò quod unitas non supponatur determinata; determinata*

Digitized by Google

minata autem unitate, & *ipsa quantitas determinata intelligitur. Sic, si litera* a *significet* altitudinem Ex. gr. *montis, aut turris, hæc litera* a *significare potest altitudinem magnam, aut parvam, mensurabilem per perticas, aut pedes, aut tantum per digitos, & hoc modo dicitur quantitas* a indeterminata; *si vero supponatur altitudo* a, Ex. gr. montis, *esse centum pedum, determinata habetur* unitas *nempe* pes, *à qua determinata, determinatur quoque quantitas altitudinis* a. *Et in hoc ensu calculus literalis, dicitur calculus* universalis, *seu* indeterminatorum, *vimque obtinet* Regulæ, *ac* Theorematis universalis, *quidquid per literas ritè expressum habetur, ut inferius declarabitur.*

SCHOLION III.

7. *Ut Tyronibus (qui usu idæarum universalium destituti in primis Algebræ algorithmis, & principiis, nescio, quas tenebras experiri solent, aut è præjudiciis aliorum sibimet monstrosa mysteria fingunt)* virtus, *ac non satis laudanda* vis universalis *Algebræ ob oculos ponatur; paritate desumpta ex Arithmetica numerica, ut puto,* universalitatem, & indeterminationem *quantitatum literis alphabeti expressarum, ad captum declarabimus. Itaque, quemadmodum in Arithmetica numerica,* signa, *seu* notæ numericæ puræ, & abstractæ *ab omni materia.* Ex. gr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. *significant suo modo* universaliter, & indeterminatè *omnem numerum mixtum, & concretum,* Ex. gr. *numerus* purus, & abstractus 5, *significare potest* 5 Studiosos, *vel* 5 Domos, *vel* 5 Libros, *aut* 5 Urnas vini, 5 Perticas, 5 Ulnas &c. *ita pariter (imò magis universaliter) literæ alphabeti pro quantitatibus in Algebra usurpatæ, ac substitutæ, significant quantitatem* universaliter, *ac* indeterminatè, *ut* exemplum in priore scholio adductum declarat; *Et verò quid magis universaliter significare potest, quam litera* a, *aut* b, *denotans* Ex. gr. lineam, *quæ cum multorum milliarium longa, aut tam brevis esse possit, ut unius, alteriusve capilli latitudinem vix excedat, certè litera hujusmodi magnam æquè, ac parvam denotabit, aut significabit lineam. Et hinc, sicut numerus* purus Ex. gr. 5. *ante applicationem ad materiam erat* signum, *seu* nota universalis *quinque unitatum suo modo* indeterminatarum, *applicatus vero ad materiam* Ex. gr. *Urnas vini jam* determinatus *evadit; ita litera alphabeti* Ex. gr. a, *aut* b, *substituta pro significanda quantitate lineari, significat universaliter omnem longitudinem lineæ, assumpto autem determinato numero* Ex. gr. *perticarum, cujus* unitas *(nempe pertica) determinata intelligitur, jam determinata evadit quantitas per literam prius universaliter indicata; Aut quemadmodum in dialectica vox* Domus *significat omne ædificium habitabile, atque* indeterminatè *significat domum, vel religiosam, vel sæcularem, aut rusticanam, &c. Et per adjectam vocem aliquam determinantem ad certam speciem.* Ex. gr. Principis, *primò restringitur, ita etiam litera pro quantitate sub-*

Digitized by Google

ſtituta; hoc ſolum diſcrimine, quod dialectico (propter communem hominum inſtitutionem) voce Domus, *uti non liceat ad ſignificandum* Ex. gr. calamum, *liceat autem utenti Algebrâ, per literam* a, Ex. gr. *ſignificare, & denominare vel lineam, vel numerum, vel milliare &c. non ſecus, atque in arbitrio Parentis eſt, nato ſibi filio imponere nomen Petri, aut Joannis, aut Stephani, &c.*

AXIOMA I. FUNDAMENTALE.

8. Quantitas, quæ ſub conſiderationem, & calculum Algebraicum aut Mathematicum cadere poteſt, triplex conſtituitur: Quantitas *poſitiva*, vel *affirmativa*, quæ etiam *major nihilo* dicitur. 2. Quantitas *nulla*, aut *æqualis nihilo.* 3. Quantitas *negativa*, aut *minor nihilo.*

DECLARATIO AXIOMATIS FUNDAMENTALIS.

Primò: Petrus *Ex. gr.* habet florenos 8, nullique hominum tenetur, aut debet aliquid; hi 8 floreni relatè ad Petrum poſſeſſorem ſunt quantitas *poſitiva*, *realis*, & *affirmativa*, atque *major nihilo*, cum plus habeat, quam nihil.

Secundò: Habeat Petrus tantùm 8 florenos, teneatur autem ex debito hos 8 florenos, ſeu totidem Joanni, tali caſu, ſi Petrus Joanni det hos 8 fl. intelligetur habere nihil, id eſt quantitatem *nullam*, ſeu *æqualem nihilo.*

Tertiò: Habeat Petrus 8 florenos, teneatur autem Joanni flor. 10, tali caſu, ſi Petrus Joanni det hos 8 fl. tenebitur adhuc 2 florenis, qui 2 flor. ſunt quantitas *negativa*, & *minor nihilo*, cum ad hoc, ut Petrus nihil habeat, requirantur adhuc 2 floreni poſitivi, quos tenetur Joanni, iisque habitis, & redditis Joanni, primùm intelligetur Petrus habere nihil.

SCHOLION I.

9. *Sunt, qui axioma hoc fundamentale declarant per motum progreſſivum hominis;* Ex. gr. *Statue te medium inter portam, & feneſtram oppoſitam portæ tui cubiculi, & eſto tibi negotium aliquod peragendum extra*

Digitized by Google

extra cubiculum, ad quem finem obtinendum necesse est, te propinquum fieri portæ, ut per eam exeas. Itaque 1mò: *si è medio cubiculi, in quo consistis, duos passus versus portam facias, diceris, facere duos passus* positivos, *quia conducunt ad tuum finem, extra cubiculum egrediendi.* 2dò: *Si verò in medio consistens quietus maneas, id est, nec versus portam, nec fenestram versus ullum passum facias, habebis motum* nullum, *id est, quantitatem* nullam *motus, progressivi portam versus.* 3tiò: *Si e medio non portam versus (per quam te exire necesse est) sed versus fenestram duos passus retrò facias, diceris fecisse duos passus* negativos, *respectu nempe habito ad exitum per portam, cum non appropinques portæ, sed ab ea magis elongeris, atque ad hoc, ut e medio portam versus non processisse dicaris, necesse est, te per duos passus ad medium redire cubiculi, in quo consistens, deprehendes, te nihil magis portæ appropinquasse, quam si ibi quietus mansisses.* Cl. Jo. Poëtius *explicat per motum progressivum hominis in navi à prora ad puppim progredientis dum interea navis secundo fluvio defertur. Nobis tamen prima declaratio, utpote magis ad captum Tyronum, placet præ cæteris,*

SCHOLION II.

10. *Tyrones axioma hoc fundamentale (§. 8.) altè menti imprimant, & omnem quantitatem, quæ per decursum Algebræ occurret, per modum illorum 8 & 10 florenorum considerare assuescant, ex qua consideratione maxima tum intelligendi, tum operandi facilitas in Algebra dependet.*

HYPOTHESIS II.

11. *Signum Algebraicum indicans quantitatem aliquam esse* positivam, *vel* affirmativam (§. 8.) *aut* majorem nihilo, *est præfixa quantitati datæ crucula hujusmodi* (+) *minor, & enunciatur per vocem:* plus, *sic* + a, *significat quantitatem* a *esse* positivam, *& enunciatur;* plus a. *Similiter;* a + b, *enunciatur;* a plus b. *Signum quantitatis* negativæ (§. 8.) *aut* minoris nihilo, *est lineola* (—) *præfixa, & enunciatur per vocem* minus; Ex. gr. *sit,* a — b, *dic,* a minus b. *Signum quantitatis* nullius (§. 8.) *est zerus* (o), *qui, cum* nullam quantitatem *significet, præfigi non solet literis, sed tantum inservit in problematibus reductis ad* nihilum, *ut locum unius partis Æquationis occupet,* ut infra dicetur.

Digitized by Google

SCHOLION I.

12. *Signa hæc* +, & — *afficiunt tantum illas quantitates, aut literas, quibus præfiguntur, nec ultra suam vim exerunt.* NB. Si initio alicujus calculi literalis nullum *expresse* præfigatur signum, semper intelligatur *tacitè* præfixum esse signum +, idque ex institutione hominum, adeoque illam quantitatem primam, esse positivam.

SCHOLION II.

13. *Quantitas* negativa, *seu quæ præfixum habet* (—) *signum hoc, non in eo sensu accipienda est, esse* negativa, *quasi esset* non ens, *aut quid imaginarium, existens tantùm in cerebro Mathematicorum, sed reipsa est quantitas realis quidem, & existens, sed quæ tantum suam* præsentiam *hic & nunc negat, id est, pro his certis circumstantiis præsens esse non intelligitur, tanquam non conducens ad finem intentum. Exemplum habes in* (§. 9.) *de duobus passibus fenestram versus factis, qui utique* reales, & existentes *intelliguntur, sed solum sunt* negativi *relatè ad finem intentum, exeundi nempe per portam, ad quem finem tanquam non conducentes,* præsentiam *suam negant, id est, negativi evadunt respectivè tantum ad datas circumstantias, licet in aliis circumstantiis positivi esse possint,* Ex. gr. *si consistens in medio cubiculi fenestram aperire velis. Non secus duo illi floreni* negativi (*in* §. 8.) *quos propter debitum* 10 *florenor. supra* 8 *floren.* positivos *persolvere tenetur* Petrus Joanni, *tantum* non præsentes *intelliguntur, relatè ad Petrum, etsi alibi* reales *sint,* & existant, *atque seclusa circumstantia debiti, etiam relatè ad Petrum esse possint* positivi, *id est,* præsentes. *Itaque quantitatem esse* negativam, *est,* non negare existentiam, sed præsentiam *quantitatis pro datis circumstantiis.*

HYPOTHESIS III.

14. *Loco vocis* æqualis, *vel* æquale, *per quam indicamus* æqualitatem *duarum, vel plurium quantitatum, in Algebra usurpantur hæc signa,* (=) *vel* (::) *aut* (∝), *inter quantitates* æquales *posita.* Ex.gr. *Si volumus indicare quantitatem* a *esse æqualem quantitati* b, *scribatur sic,* a = b, *aut* a::b, *vel* a ∝ b, *& enunciatur,* a æquale b, *ita* 7::7, *dic,* 7 æquale 7.

HYPOTHESIS IV.

15. *Signum* Majoritatis *est* (>); *signum verò* Minoritatis (<) *indicans duarum quantitatum eam esse* mino-

Digitized by Google

minorem, *versus quam cuspis porrigitur*, *alteram verò* majorem. Ex. g. a > b, *enunciatur*; a est majus quàm b, *item* b < a, *enunciatur*; b est minus quàm a, *eodem modo*; 8 < 12, *dic*, 8 est minus quàm 12; *aut*, 12 > 8, *dic*, 12 est majus quàm 8.

SCHOLION.

16. *In Algebrâ etiam per certa signa ipsæ quoque operationes, seu Algorithmi indicantur, uti sunt:* Additio, subtractio, multiplicatio, divisio, extractio radicis, proportionis &c.

HYPOTHESIS V.

17. *Signum* Additionis, *seu* collectionis *est* (+) *præfixum quantitati additæ, & enunciatur per vocem*; Plus; Ex. gr. *Summa duarum quantitatum* a & b *indicatur, aut scribitur ita*, a + b, *& enunciatur*; a plus b, *hoc est*: ad quantitatem a addita est quantitas b. *Quod si* Ex. gr. 8 *vocetur* a, *&* 5 *vocetur* b, *quantitas* a + b *significabit summam* 8 + 5 = 13.

HYPOTHESIS VI.

18. *Signum* subtractionis, *seu* diminutionis *est lineola* (—) *præfixa quantitati subtrahendæ, & enunciatur per vocem*; Minus, Ex. gr. *Residuum, aut differentia duarum quantitatum* a & b, *indicatur, aut scribitur ita*, a — b, *& enunciatur*, a minus b, *hoc est*: ex quantitate a ablata, *aut* subtracta est quantitas b. *Quod si* Ex. gr. 8 *vocetur* a, *&* 5 *vocetur* b, *significabit residuum* a — b *idem quod* 8 — 5, *id est*, 3.

COROLLARIUM.

19. Quoniam + est signum *Additionis*, simulque signum quantitatis *positivæ* (§. 11.) hoc verò — est signum *subtractionis*, & simul signum quantitatis *negativæ* (§. 11.) quantitas autem *positiva*, & *negativa*, itemque *additio*, & *subtractio* sibi contrariè opponuntur (§. 121. Arithm.) patet quantitates duas, quarum una habet signum +, altera signum — præfixum, esse sibi *contrarie* oppositas, & invicem *destructivas*; hinc signa + & — vocantur etiam *signa contraria*.

Digitized by Google

ria, & quantitates his affectæ, vocantur affectæ *signis contrariis*. Ex qua hypothesi manifestum est sequens axioma fundamentale.

AXIOMA II. FUNDAMENTALE.

20. Quantitas positiva cum quantitate negativa *æquali*, æquatur *nihilo*, seu *zero* (0), id est, se invicem totaliter destruunt, sic: $a - a = 0$, aut $-a + a = 0$ seu si a valeat 4, erit $4 - 4 = 0$, aut, $-4 + 4 = 0$.

COROLLARIUM.

21. Si quantitas *positiva* major est quantitate *negativa* sibi conjuncta, tali casu, quantitas *negativa* tantam partem destruit ex *positiva*, quantam ipsa *negativa* indicat; & vicissim, si quantitas *negativa* major est quantitate *positiva* sibi conjuncta, quantitas *positiva* tantum destruit ex *negativa*, quantum *positiva* se habere indicat. *Ex.gr.* Sit quantitas $+8$, & altera -5, cum sit $8 > 5$, erit; $8 - 5 = 3$, id est, quinque unitates *negativæ* ex 8 *positivis* destruunt quinque unitates; & iterum, sit quantitas $+5$, & altera -8, erit $-8 + 5 = -3$. Quia quinque *positivæ* unitates, destruunt ex 8 negativis quinque, unde remanent tres *negativæ*. Ut patet ex (§. 8.)

DEFINITIO III.

22. *Quantitas incomplexa*, aut *monomia*, vocatur quævis quantitas seorsim sumpta, id est, non conjuncta cum altera quantitate per signa $+$ vel $-$ interposita; *Ex.gr.* a, vel b, aut c, item ba, vel cba, aut dfc &c.

DEFINITIO IV.

23. *Quantitas complexa*, aut *Polynomia*, dicitur, cum duæ vel plures quantitates interpositis signis $+$ vel $-$ sibi junguntur; *E.g.* $a + b$, aut $a - b$, vel $a + b + c$; item: $ba + c - ad$ &c.

SCHOLION.

24. *Quando duæ quantitates per signum* $+$ *vel* $-$ *conjunguntur*; Ex. gr. a $+$ b, *vel* a $-$ b, *aut* ad $+$ bc &c. *hujusmodi* complexa quantitas *vocatur*, Binomia, *id est*: (duarum partium). *Si* tres, Ex.gr.

a $+$ b

Digitized by Google

a + b + c, *vel* a — b + c, &c. *vocatur* Trinomia; *si* quatuor, Ex. gr. a + b — c + d, &c. *dicitur* Quadrinomia. *In genere, si partes per signa* + *vel* — *jungantur, appellatur quantitas complexa* Polynomia.

HYPOTHESIS VII.

25. *Signa Algebraica* multiplicationem *quantitatum indicantia, sunt:* Primo: *usitatissimum signum est, si factores absque ullo signo interposito sibi connexi scribantur;* Ex. gr. *Si volumus indicare productum, quod ortum est ex multiplicatione duorum factorum* a & b, *scribatur,* ba, *vel* ab; Secundo: multiplicationem *indicat punctum* (.) *inter factores interjectum, aut duæ lineæ decussatæ* (×) *interpositæ.* Ex. gr. a.b, *vel* a×b, & *enunciatur,* a est multiplicatum per b;

Hoc ultimo (×) *signo nos rarò utemur.*

SCHOLION.

26. *Itaque si* Ex. gr. a *valeat* 8, & b *valeat* 3, *erit productum ex* a *per* b; *id est:* ab = 24, *item* a.b = 8.3 = 24, *aut* a × b = 8 × 3 = 24. *hoc est* productum 24, *quod factum est ex* factoribus 8 & 3, *indicari potest per signa, vel sic:* 8.3, *vel* 8 × 3, *quæ significant* multiplicationem. *Adhibent etiam aliqui pro signo multiplicationis* comma (,) *sed minus rectè propter confusionem typi, nos* commate *pro signo multiplicationis nunquam utemur, sed sufficiat insinuasse, ne erroris Typographos arguamus, cum pro signo multiplicationis* comma *positum legerimus.*

HYPOTHESIS VIII.

27. *Si multiplicatio quantitatis polynomiæ per monomiam, & vicissim, item multiplicatio quantitatis polynomiæ per polynomiam indicanda sit, quantitas polynomia parenthesi includatur, & alteri quantitati vel cum, vel sine signo multiplicationis* (§. 25.) *jungatur.* Ex. gr. *Sit indicanda multiplicatio ex factore* a + b — c *in factorem* d; scribatur (a + b — c) d, vel d (a + b — c) vel interjecto puncto (a + b — c). d, vel interjecto × signo, (a + b — c) × d, seu d × (a + b — c), *sit item indicanda multiplicatio quantitatis* polynomiæ, a + b — c,

Digitized by Google

per polynomiam $d+f-m$; *scribatur*: $(a+b-c)(d+f-m)$ vel $(a+b-c).(d+f-m)$, aut etiam $(a+b-c)\times(d+f-m)$.

SCHOLION I.

28. *Vulgo, exempla à nobis expressa ita etiam scribuntur*: $\overline{a+b-c}.d$; *vel* $\overline{a+b-c}.d$, *aut* $\overline{a+b-c}\times d$, *item exempla nostra polynomiorum vulgo sic exprimuntur*: $\overline{a+b-c}.\ \overline{d+f-m}$, *aut* $\overline{a+b-c}\times\overline{d+f-m}$; *in quibus* notandum; *quod si superducta linea non omnes quantitates includat*; Ex. gr. $a+\overline{b-c}\times\overline{d+f}$, *intelligi debet, illas quantitates, ad quas linea superducta non porrigitur, non esse multiplicatas per cæteras, uti in hoc exemplo est quantitas* a, *quæ non intelligitur multiplicata per* $\overline{d+f}$, *sed solum quantitas* $\overline{b-c}$; *quia linea supra* $\overline{b-c}$ *ducta, non extenditur supra quantitatem* a. *Unde, quia per ductum hujusmodi lineæ facile error committi potest, tutius erit uti parenthesi, & ab usu hujuscemodi expressionis abstinere, nisi casus* scholii sequentis *urgeat.*

SCHOLION II.

29. *Contingit non nunquam, ut per signa* (§. 27.) indicatam *jam duorum Factorum* multiplicationem *per novum tertium factorem aliquem, multiplicatam esse, indicare cogamur; tali casu, super priori modo indicatam multiplicationem linea ducenda erit, quæ indicet, an uterque factorum prioris expressionis, an unus aliquis tantum per novum tertium factorem multiplicatus sit.* Ex. gr. *Sit quantitas, quæ jam est expressa per signa multiplicationis hæc*: $a+b-c).(d+f-m)$ *denuò superindicanda, esse tota multiplicata per novum factorem*; $n+u$, *scribatur sic*: $\overline{(a+b-c)}.\ \overline{(d+f-m)}\times(n+u)$, *vel sic*: $\overline{(a+b-c)}.\ \overline{(d+f-m)}\times\overline{n+u}$. *Quodsi linea super unum ex factoribus ducta non sit, intelligendum est, illum non esse multiplicatum per tertium novum factorem*; Ex. gr. *Si scribatur*: $(a+b-c).\ \overline{(d+f-m)}\times\overline{n+u}$, *vel sic*: $\overline{(a+b-c)}.(d+f-m)\times\overline{n+u}$; *Vulgo hæc exempla sic exprimuntur*: $\overline{\overline{a+b-c}.\ \overline{d+f-m}}\times n+u$, *vel etiam hoc modo*: $\overline{\overline{a+b-c}.\ \overline{d+f-m}}\times n+u$, *aut* $\overline{\overline{a+b-c}.\ d+f-m}\times n+u$; *sed hæc Tyronibus insinuâsse sufficiat, cum ejuscemodi exempla rarius occurrant.*

HYPOTHESIS IX.

30. *Signa Algebraica* Divisionem *indicantia sunt* Primo: *usitatissimum signum est, si indicetur per modum* fractionis, *id est, si* dividendus *subducatur linea, & infra lineam scribatur* divisor; Ex. gr. *indicare volumus quantitatem dividendam* a *esse divisam per divisorem* b, *scriba-*

scribatur sic, $\frac{a}{b}$ *& enunciatur*, a divisum per b. Secundo: *Non minus usitatum signum* divisionis *sunt duo puncta* (:) *interjecta inter totum* dividendum, *&* divisorem; Ex.gr. *Si scribatur* a : b, *dic*, a *est* divisum per b.

SCHOLION.

31. *Quemadmodum* multiplicatio indicata (§. 25.) *significat* productum, *ita* divisio indicata, *significat* quotum, *adeoque hæ expressiones* $\frac{a}{b}$ *vel* a : b *exprimunt* quotum *ex* divisione *ortum*. Ex.gr. *Si* a *valeat* 12, b *valeat* 4, *erit* $\frac{a}{b} = \frac{12}{4} = 3$, *item* a : b = 12 : 4 = 3, *cum* 3 *sit* quotus *ortus ex divisione* 12 *per* 4.

HYPOTHESIS X.

32. *Si* divisio *quantitatis* polynomiæ *per* monomiam, *& vicissim*; *item*, *si* divisio polynomiæ *quantitatis per* polynomiam *indicanda sit*, *polynomia quantitas parenthesi includatur*, *si nempe pro signo* divisionis *usurpentur* (:) *duo puncta*; *si verò per modum fractionis exprimere placeat*, *omittatur parenthesis*, *sed linea sub* dividendo *ducta ad totum dividendum*, *& divisorem extendatur*; Ex.gr. *Sit quantitas* a + b *indicanda esse divisa per* c, *scribatur*, (a + b) : c, *vel* $\frac{a+b}{c}$ *eodem modo*, *si dividendus sit* a, *& divisor sit* b + c, *scribatur*, a : (b + c) *vel* $\frac{a}{b+c}$ *item*, *sit quantitas* polynomia a + b — c *indicanda esse divisa per polynomiam* d + m, (a + b — c) : (d + m) *vel sic* $\frac{a+b-c}{d+m}$.

SCHOLION.

33. *Vulgo, ut in multiplicatione indicanda* (§. 28.) *dictum est, etiam in indicanda* divisione *pro* parenthesi *usurpatur linea*. E.g. *locò* (a + b) : c, *ita* scribitur : $\overline{a+b} : c$, *item divisio* polynomiæ *per* polynomiam, *sic exprimitur*: $\overline{a+b-c} : \overline{d+m}$. *Hinc, quæ de his signis in scholio* (§. 28. & 29.) *monuimus huc quoque cum analogia applicari possunt.*

COROL-

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

34. Quoniam, *quod multiplicatio componit, tollit divisio* (§. 121. Arith.) patet *multiplicationem*, & *divisionem* sibi *contrarie* opponi, atque adeo adducta (§. 25.) *signa multiplicationis*, & adducta (§. 30.) *signa divisionis* esse signa *contraria*, & *hinc destructiva*, sive *deletiva* quantitatum earundem his signis affectarum; quantitates his signis affectæ, vocantur affectæ *signis contrariis*. Unde manifestum est, sequens corollarium.

COROLLARIUM II.

35. Quantitas aliqua *multiplicata* per quantitatem aliam quamcunque, & per eandem simul *divisa*, manet *invariata*, id est, nec illi quantitati aliquid accedit per *multiplicationem*, nec per *divisionem* decedit aliquid. *Ex. gr.* Sit a quantitas *multiplicata* per b, & *divisa* per eandem b, erit expressio hujusmodi; $\frac{ab}{b}=a$, vel $\frac{a.b}{b}=a$, aut $\frac{a\times b}{b}=a$, item sic: $(a.b):b=a$, vel sic: $(a\times b):b=a$.

Idem patet in numeris, si *Ex. gr.* a valet 5, b valeat 2, erunt priores literales expressiones in numeris hujusmodi: $\frac{10}{2}=5$, vel $\frac{5.2}{2}=5$, aut $\frac{5\times 2}{2}=5$, item sic: $(5.2):2=5$, vel $(5\times 2):2=5$.

COROLLARIUM III.

36. Unde quantitas *multiplicans* simul, & *dividens* aliam aliquam quantitatem tanquam si non adesset, id est, pro *nulla* quantitate habetur, atque adeo *deleri*, & *omitti* potest.

SCHOLION.

37. *Ut memoriæ tyronum consuleretur, Hypothesium hucusque declaratarum tabellam compendiariam, velut* memoriæ adjumentum quoddam *subjicere placuit, in qua residuas quoque nondum adductas* signorum Hypotheses *quæ explicatione vix egent, subjungimus.*

TABULA COMPENDIARIA.

38. *Exhibens Hypotheses signorum in Algebra hodierna usitatorum.*

+ Est signum quantitatis *Positivæ*, seu *Affirmativæ*, & *Præsentis* (§. 11.) item signum est *Additionis*, seu *colle-*

collectionis, (§. 17.) & enunciatur per vocem: *plus*; sic $a+b$, dic, *a plus b.*

NB. *Hoc signum initiò formulæ alicujus Algebraicæ, non præfigitur, præfixum tamen subintelligitur.* (§. 12.)

— Est signum quantitatis *Negativæ* (§. 11.) item *Subtractionis*, seu *diminutionis* (§. 18.) & enunciatur per vocem, *minus*; sic, $a-b$, dic, *a minus b.*

× vel (.) aut (,) est signum *Multiplicationis*, seu *producti*, sic, $a \times b$, vel $a.b$, dic *a est multiplicatum per b*, usitatissimè sic scribitur *ab* (§. 25. & seq.)

: *Divisionis*, seu *quoti*, sed usitatissimè per modum fractionis; sic, $a:b$, vel $\frac{a}{b}$, dic, *a est divisum per b*, (§. 30. & seq.)

= vel (::) aut (∻) est signum *Æqualitatis*; sic, $a=b$, vel $a::b$, aut $a \backsim b$, dic, *a est æquale b*, (§. 14.)

> Est *Majoritatis*; sic, $a > b$, dic, *a est majus, quàm b*, (§. 15.)

< *Minoritatis*; sic, $b < a$, dic, *b est minus, quàm a*, (§. 15.)

o *Nullitatis*; sic, $a = o$, dic, *a est æquale nihilo*, id est, *nulla quantitas*, (§. 20.)

∽ *Similitudinis*; sic, $a \backsim b$, dic, *a est quantitas similis quantitati b.*

∞ *Infinitudinis*; sic, $a = \infty$, dic, *a est æquale infinito*, vel potius, *indefinito.*

√ Est signum *Radicis*; sic, $a = \sqrt{b}$, dic, *a est æquale radici de quantitate b.*

$\sqrt{\sqrt{\ }}$ Significat *Radicem radicis*; sic, $a = \sqrt{\sqrt{b+d}}$, dic, *a æquale radici de radice b+d.*

÷ Est

∺ Est signum *Proportionis geometricæ continuæ*, ut suo loco dicetur.

Cætera pauca per algebram occurrentia signa suis locis adferentur.

SCHOLION I.

39. *Iisdem omnino signis utitur* Algebra numerosa (§. 2.), *seu ea pars Algebræ, quæ pro numeris* puris, *&* abstractis *non substituit litteras alphabeti, sed adhibitis signis Algebræ cum numeris suas operationes peragit.*

SCHOLION II.

40. *Tyrones significationem, & usum horum signorum admodum familiarem sibi reddant oportet, in quorum recto usu stupenda totius Algebræ virtus, & admiranda vis, ac efficacia potissimum consistit. His enim solis signis in acceptis referre debemus. artem, ac methodum proprio marte inveniendi, ac demonstrandi veritates mathematicas, seu* Theoremata; *His signis debemus, resolutiones per quam faciles problematum seu quæstionum, quorum solutio vix possibilis fore crederetur; His signis adjuti plus hora, velut aliud agendo, sinè fatigio, & intensione intellectûs condiscimus, quàm alia methodo vix mense integro ex aliorum libris non sinè tædio, & molestia hauriremus. His signis adjuti regulas nobis formamus ipsemet generales, quæ litteris, & signis paucis expressæ memoriæ ita retinentur, ut earum ætate tota vix obliviscì possimus; si tamen obliviscceremur, in his signis, penum mathematicam, velut in nuce Illiadem, collectam habemus, è qua sine magno labore regulam universalem, dum illa opus habemus, ultro nobismet ipsis depromimus. Signa hæc vices docentis, & nos instruentis Magistri fideliter obeunt, nihil recondunt, sed arcana omnia pandunt, & clarius longè, paucisque verbis veritates eloquuntur mathematicas, quàm dissertissimus Mathematicorum unquam præstare potuerit;* Verbo, *in his mysteria omnia totius artis Analyticæ contineri usus ipse docebit; hujus verò stupendæ signorum horum virtutis ratio in eo sita est, quod* notiones signis expressæ, *sint imagines quædam sistentes imaginationi nostræ ea præsentia, quæ alias, aut ultra ejus agendi sphæram ascenderent, aut ob imaginationis evagationem facilem, elaberentur.*

HYPOTHESIS XI.

41. *Quantitatis cognitæ* eædem *seu æquales*, literis iisdem; diversæ, *literis etiam* diversis *denominandæ sunt.* Ex. gr. *Sint in data aliqua quæstione* floreni, grossi, cruciferi, *denominetur jam* arbitrariè *florenus per literam*

literam a, *igitur per hanc literam* a, grossum *denominare non licet*, *sed* grossum *per diversam literam* Ex. gr. b, *item* cruciferum, *nec per literam* a, *nec per* b, *sed per tertiam aliquam* c *denominare cogimur*, (intelligendo in eadem tractanda quæstione) *quia* floreni, grossi, & cruciferi, *sunt inter se diversæ speciei*, *quam diversitatem*, *seu heterogeneitatem literæ substitutæ per seipsas exprimere tenentur*.

COROLLARIUM.

42. Quoniam numeri *puri*, & *abstracti* (§.18. Arith.) Solam multitudinem unitatum significant; unitatum autem multitudo una, altera multitudine major, minorve esse possit; sequitur *numeros puros* eandem multitudinem unitatum habentes, pro quantitatibus *æqualibus*, id est *iisdem* haberi, *Ex. gr.* 8, & 8, numeros verò puros majorem unitatum multitudinem habentes pro *inæqualibus*, id est *diversis*, censeri, *Ex. gr.* 5, & 8; Et hinc, si pro numeris literæ substituantur, *Numeri ejusdem multitudinis per literas easdem*, *diversæ multitudinis per literas etiam diversas denominandi sunt*; ut si denominandi sunt numeri per literas, *Ex. gr.* 5, 8, 24, cum omnes inter se sint diversi; si sit $5 = a$, & $8 = b$, numerus 24 nec vocari potest a, nec dici b, sed per tertiam aliquam *Ex. gr.* $24 = c$, intelligendo in eadem quæstione tractanda.

SCHOLION.

43. *Quod de quantitatibus cognitis denominandis dictum est*, *idem in denominandis incognitis tenendum*, *ut diversæ incognitæ per diversas ultimas alphabeti literas*, *eædem verò per easdem denominentur*, *nisi diversæ quantitates incognitæ propter certam relationem ad se invicem*, *ad eandem reduci possint*, Ex. gr. *Sit una* x, *altera* y, *constet autem ex circumstantiis*, *vel aliunde*, y *quantitatem esse* duplam *de quantitate* x, *tali casu*, *utique loco* y, *scribere possum* 2x, *adeoque* y *sub eadem expressione* x, *exhibere licet*; ut infra dicetur, *quod monitum etiam servit in denominandis cognitis*.

DEFINITIO V.

44. Quantitas monomia *composita*, dicitur, quæ duabus, vel pluribus literis (nullo intermediante signo aliquo)

Digitized by Google

aliquo) sibi invicem conjunctis expressa habetur; *Ex.gr.* bc, vel bca, aut $abdc$; item aa, vel aab, aut dfc, &c.

COROLLARIUM.

45. Ex (§. 25.) patet, quod quantitas monomia composita exprimat Hypothesim multiplicationis *primo modo* indicatam, & vicissim Hypothesis multiplicationis *primo modo* indicata, exprimat quantitatem monomiam compositam.

DEFINITIO VI.

46. Quantitas monomia *affecta coëfficiente*, dicitur, cui ad partem sinistram (NB. *nequaquam ad dextram*) præfixus est numerus aliquis, vel absque signo ullo intermediante, *Ex.gr.* $3a$, vel $4ab$, aut $15bc$; vel etiam intermediante signo, sed *solius multiplicationis*, *Ex. gr.* $3.a$, vel $4.ab$, aut $15.ab$. Numeri verò præfixi vocantur *coëfficientes*.

COROLLARIUM I.

47. *Coëfficientes* itaque indicant, quoties sibimet quantitas literalis *addita* est, *Ex. gr.* $3a$ significat quantitatem a *ter* sibimet *additam*, & *Coëfficiens* 3 conjunctus quantitati a, supplet hanc longiorem expressionem; $a+a+a$; item $4ab$ significat quantitatem ab *quater* sibimet *additam*, & supplet vicem hujus longæ expressionis; $ab+ab+ab+ab$; unde porro liquet, quod expressio per *coëfficientes*, sit modus quidam scribendi per *abreviationem* quantitates literales, sibimet aliquoties additas, ita *Ex. gr.* loco hujus seriei; $bc+bc+bc+bc+bc+bc+bc$, brevissimè scribitur, $7bc$. Item loco hujus, $2bd+3bd+5bd+7bd$, scribatur: $17bd$. Idem intelligendum de quantitatibus negativis, sic $-4a$, est compendiosa expressio hujus, $-a-a-a-a$.

COROLLARIUM II.

48. Quoniam omnis quantitas monomia (considerata per modum *totius*) seipsam *semel* sumptam, id est, *unum* totum significat, omnis quantitas monomia non affecta coëfficiente, *unitatem* tacitè præfixam habere intelligitur; *Ex. gr.* a idem est quod $1a$, aut $bc=1bc$; &c. NB. *Hæc unitas nunquam expressè præfigitur*, (nisi circumstantiæ aliud suadeant) *semper tamen tacitè præfixa intelligitur.*

DEFI-

DEFINITIO VII.

49. Quantitas literalis *affecta exponente*, illa dicitur, quæ ad dextram ſurſum verſus, vel numerum, vel literam appoſitam habet; *Ex.gr.* a^3, vel ab^4, aut a^r, vel a^m; numeri verò, vel literæ ad dextram poſitæ, vocantur *Exponentes*.

COROLLARIUM.

50. Cum *exponentes* ex Hypotheſi indicent repetitam datæ quantitatis per ſemetipſam multiplicationem, *E.gr.* a^3 indicat quantitatem a eſſe multiplicatam per eandem a ſeu aa, & hoc factum aa, eſſe iterum multiplicatum per a, ſeu aaa; ſequitur, expreſſionem hanc a^3, ſupplere hanc longiorem, aaa, vel $(a.a).a$, aut hanc $(a \times a) \times a$; & hinc liquet, expreſſionem per *exponentes*, eſſe modum ſcribendi per *abreviationem* quantitates easdem in ſemet aliquoties multiplicatas. Sic loco hujus ſeriei; $a.a.a.a.a$, vel loco hujus; $aaaaa$, breviſſimè ſcribitur: a^5.

SCHOLION.

51. *Obſervent tyrones, atque altè menti imprimant* notiones diſtinctas coëfficientium, & exponentium, *nè ſcilicet* coëfficientes, *cum* exponentibus *confundantur, aut pro eodem accipiantur; Alia enim longe quantitas indicatur per* coëfficientem, & *alia per* exponentem, *ſic* E. gr. *alia quantitas eſt* 3a, & *alia* a^3; *nam* 3a *ponitur loco hujus expreſſionis*, $a+a+a$ (§.47.) *Hæc verò* a^3, *loco hujus* aaa, *vel loco hujus* $(a.a).a$, (§.50.) *quarum prior nempe* 3a *ſignificat* additionem ſimpliciter *toties factam, quot unitates habet coëfficiens numerus* 3. (§.47.) *Altera verò*, a^3, *multiplicationem ſuimetipſius*, & *quidem iteratam indicat*, (§.50.) *ut patet ad oculum ſi pro litteris ſubſtituantur numeri;* Ex.gr. *Sit* $a=4$. *erit;* $3a=a+a+a$, *hoc eſt* $4+4+4=12$. (47.) *Hæc verò* $a^3=(a.a).a$, *hoc eſt:* $(4.4).4=64$ *per* (§.50.) *Adeoque* $3a=12$, & $a^3=64$, *patet autem* 12, & 64 *eſſe quantitates utique valde inter ſe diſcrepantes.*

DEFINITIO VIII.

52. Quantitates monomiæ dicuntur *Homogeneæ* (§.20. Arith.) quæ, & iisdem literis conſtant (§.41. & 43.) & *exponentes* (ſi adſint) eosdem habeant, tametſi diverſis affectæ ſint coëfficientibus; ſic Homogeneæ ſunt *Ex.gr.* $3a$, & $4a$, item, $2ab$, & $5ba$, vel $3a^2$, & $7a^2$.

Digitized by Google

SCHOLION.

53. *Animadvertant Tyrones* Homogeneitatem *in quantitatibus monomiis* compositis *non tolli per diversum præcise* earundem *litterarum inter se ordinem, & situm; sic quantitas composita monomia*, Ex. gr. abc *manet* homogenea, *licet* ejusdem *litteræ quocunque ordine, & situ permutatæ combinentur*, Ex. gr. abc, acb, bca, bac, cba, cab, *& hinc adductæ hæ quantitates singulæ exprimunt* Hypothesim multiplicationis (§. 45. & 25.) factum *autem seu* productum *manet idem, quomodocunque factores inter se ducantur*, (§. 49. Arith.) *igitur manifestum est, adductas quantitates esse inter se easdem, & æquales, id est*, homogeneas.

DEFINITIO IX.

54. *Heterogeneæ* quantitates monomiæ (§. 21. Arith.) dicuntur, quæ vel per unam literam diversam inter se discrepant, aut *exponentes* (si adsint) diversos habeant; diversitas autem *coëfficientium* non inducit *heterogeneitatem*, (§. 52.) sic *heterogeneæ* sunt, *Ex. gr. a* & *b*, item, *ab*, & *bc*, aut *cba*, & *bcd*; *Heterogeneæ* quoque sunt, numeri seorsim positi, & literæ, *Ex. gr. ab*, & 15, aut 3*bc*, & 3, &c.

SCHOLION.

55. *Quod de* homogeneitate, & heterogeneitate *quantitatum monomiarum* compositarum, exponentibus *affectarum, dictum est, idem omnino cum analogia intelligendum est de quantitatibus monomiis habentibus præfixum signum* (√), *ut suo loco declarabimus.*

DEFINITIO X.

56. *Formula*, aut *Propositio practica Algebraica*, dicitur quodvis literale complexum, exhibens universaliter per signa Algebraica factas, aut faciendas operationes algebraicas; *Ex. gr. Hoc complexum Algebraicum*, $x = \frac{bc}{a}$ *exhibens quantitatem incognitam x, esse* æqualem *quantitati b*, multiplicatæ *per quantitatem c*, & divisæ *per quantitatem a*, & hinc.

DEFI-

Digitized by Google

DEFINITIO XI.

57. *Resolutio Algebraica*, (quæ etiam *constructio* in Geometria appellatur) est, si formula algebraica secundum suam expressionem universalem proposita, resolvatur in suos valores determinatos, substituendo videlicet pro literis, vel *numeros arithmeticos*, vel *figuram per lineas* geometricè construendo; si in numeros simpliciter resolvatur, dicitur *Resolutio*, si verò per lineas geometricas determinetur, dicitur *constructio*. *Ex. gr.* Sit $b=4$, $c=3$, & $a=2$, sitque *formula Algebraica resolvenda in numeros substitutos hæc*; $x=\frac{bc}{a}$ *erit in numeris*; $x=\frac{4\cdot 3}{2}$, seu, $x=\frac{12}{2}$, id est, $x=6$; *adeoque x est* æqualis *quantitati numericæ* 4, multiplicatæ *per numerum* 3, & divisæ *per numerum* 2; quod ipsum faciendum *formula algebraica* eloquitur.

DEFINITIO XII.

58. *Demonstratio*, seu *propositio speculativa algebraica*, est formula algebraica, quæ per sua signa, ac literas exhibet, & eloquitur eam veritatem universalem, quam demonstrandam proposuimus, simulque continet tacitè argumentationem demonstrativam. *Ex. gr.* Sit algebraicè demonstranda hæc veritas universalis: *Quantitas positiva addita quantitati negativæ æquali, & vicissim, se invicem destruunt*; erit demonstratio algebraica hæc formula: $-a+a=0$, quæ formula universalis dictam propositionem exactè eloquitur, & simul hanc tacitam argumentationem continet: *Quantitas* $-a$ *est quantitas* negativa *per* (§. 11.), & *quantitas* $+a$, *est quantitas* positiva *per* (§. 11.); *eadem hæc quantitas positiva* $+a$, *est simul* æqualis *quantitati* $-a$, *per* (§. 41.) *præterea quantitas* $+a$, *est simul* addita *quantitati* $-a$, *per* (§. 17.), *ergo*, (in hac formula) *habetur quantitas*

Digitized by Google

positiva conjuncta cum quantitate negativa æquali; sed quantitas positiva cum quantitate negativa æquali æquantur nihilo, id est, se invicem destruunt totaliter per (§. 20.), *ergo quantitas positiva addita quantitati negativæ æquali, & vicissim, se invicem destruunt totaliter.* En stupendam signorum energiam.

COROLLARIUM.

59. Liquet itaque formulas algebraicas, & exprimere *propositionem speculativam*, vel *practicam*, & simul continere modum perfectissimum argumentandi, id est, *demonstrationem*, & quidem paucissimis characteribus clarissimè tanquam in imagine expressam, & eloquentem. *Patet secundo:* mira signorum, & literarum virtus, quam (utpote *universaliter*) eloquuntur, hanc virtutem *numeri*, etiamsi sint *puri*, possidere nequeunt, cum numeri determinatas unitatum multitudines exhibeant, id est, numeri sunt *quantitates determinatæ*, & hinc *formula Algebræ numerosæ* (§ 39.) *declarationi* tantum, non autem *demonstrationi* inservire potest. *Tertio:* clarum est, *formulas Algebraicas*, esse quoddam *compendium universale* veritatum mathematicarum, quo una linea sæpe tot veritates eloquitur, quas, si per voces consignare, & explicare vellemus, non una pagina conscribenda foret, *ut patebit inferius.* Qua propter.

SCHOLION.

60. *Tyrones seriò* contemplationi, *ac* resolutioni *formularum Algebraicarum incumbant*, quod ipsum monitum in Prolegomenis ad Tyrones dedi, *atque habita præ oculis formula Algebraica quacunque, identidem sibimet ipsis hanc cantilenam occinant;* Quid loquitur hæc formula? Quam veritatem per sua signa, & literas indicat, & exprimit? quid jubet faciendum? *Experto credant velim, cantilenam hanc* millies *repetitam*, millies *placituram magis, cum fructu Rei litterariæ, & quod consequens est, Reipublic. nullo non tempore satis æstimando, proprio experimento discent, dum ea in lucem* marte proprio *proferent, quæ hactenus, vel acutissimos etiam Mathematicos, & Philosophos, aut latuerunt, aut quæ repererunt adeo obscuris ambagibus, ad nos transmissa dolemus, ut iis explicandis; & enodandis Oedipi sagacitatem vix suffecturam crederes.*

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA I. PRÆLIMINARE.

16. PROP. *Omnis formula algebraica, continens propositionem speculativam rite per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam, vices obit* Theorematis Mathematici.

DEMONSTRATIO.

Theorema mathematicum est complexum constans propositione speculativa universali, & demonstratione propositionis, seu est veritas proposita, & demonstrata, per (*Prolegom.*), sed hujusmodi complexum est omnis formula algebraica continens propositionem speculativam ritè per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam, per (§. 58.) ergo. Q. E. D.

THEOREMA II. PRÆLIMINARE.

62. PROP. *Omnis formula algebraica, continens propositionem practicam ritè per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam, vices obit* problematis Mathematici.

DEMONSTRATIO.

Problema Mathematicum, est complexum constans propositione practica, resolutione propositionis, & demonstratione resolutionis, per (*Prolegom.*) sed hujusmodi complexum est omnis formula algebraica continens propositionem practicam ritè per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam per (§. 56. & 57.) ergo. Q. E. D.

COROLLARIUM.

63. Quidquid igitur formula algebraica ritê per suas regulas, hypotheses, & axiomata deducta exprimit, & eloquitur, pro *demonstrato* ab omnibus concedendum, & admittendum est.

SCHOLION.

64. *Tyrones singula, quæ hoc capite, quod jure clavim totius Algebræ dixerim, continentur, sæpius relegendo repetant, ac memoriæ mandent. Expertus loquor, eos, qui hæc intelligendo penetraverint, &*

Digitized by Google

memoria retinuerint, vix aliquam per decursum hujus doctrinæ difficultatem habituros. Iis verò, qui hoc neglecto capite ad cætera Algebræ secreta sinè clavi hac se penetraturos confidunt, suadeo, pedem referant, atque tempus pretiosum, in hoc perdendum, in alio scientiæ genere redimant.

CAPUT II.

De Additione Algebraica.

DEFINITIO XIII.

65. *Quantitates literales*, seu *Algebraicæ* dicuntur quantitates quæcunque per literas alphabeti (§.4.) denominatæ, & expressæ. *Ex.gr.* Si linea vocetur *a*, aut numerus 1000 appelletur *b*. Quantitates *a* & *b* vocantur *literales*, seu *algebraicæ*.

DEFINITIO XIV.

66. *Additio Algebraica* est quarumcunque, & quomodocunque affectarum quantitatum literalium, (sive eæ numeris permixtæ sint, sive non sint) in unum complexum algebraicum collectio. Hoc complexum vocatur *Totum*, seu *Summa*.

THEOREMA III. FUNDAMENTALE.

67. PROP. *Complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium* suis signis *affectarum, non variatur quoad quantitatem*; id est, *valor complexi algebraici nec augetur, nec minuitur. E.g.* Complexum algebraicum $(a+b-c)$ idem manet quoad quantitatem seu scribatur; $(b+a-c)$, sive $(b-c+a)$, sive $(-c+a+b)$, aut $(-c+b+a)$ &c.

DEMONSTRATIO.

Complexum Algebraicum est *totum quoddam*, aggregatum ex quantitatibus literalibus duabus, vel pluribus,

Digitized by Google

bus, tanquam partibus (§. 23. & 24.) *totum* autem variari non intelligitur quoad quantitatem, nisi varientur quoque quoad quantitatem partes constituentes totum (§. 25. Arithm.) sed partes quoad quantitatem non variantur per solam permutationem loci aut ordinis (§. 3.), ergo complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium *suis signis* affectarum non variatur quoad quantitatem. Q.E.D.

SCHOLION.

68. *Theorema hoc per modum axiomatis assummi poterat, cum penetratis ritè terminis veritas per se nota sit; certum nempe clarumque est, numerum* Ex. gr. 100 *hominum non variari quocunque ordine* 100 *homines disponantur, semper enim numerus* 100 *hominum, erit centum, & nunquam major, aut minor per solam transpositionem localem evadere potest.*

COROLLARIUM I.

69. Quoniam summa ex *Additione algebraica* resultans est *complexum algebraicum;* eadem erit summa, quocunque ordine quantitates literales cum suis signis collectæ scribantur; Et hinc *Additio* quantitatum literalium inchoari potest à quacunque quantitate literali ad arbitrium operantis, modo in summa, omnes ritè collectas esse, exprimatur.

COROLLARIUM II.

70. Cum in *subtractione algebraica* residuum, sit differentia quantitatum, & quidem singularum à singulis (§. 37. Arithm.) differentiam quoque per solam permutationem quantitatum literalium suis signis affectarum, non variari, clarum est.

COROLLARIUM III.

71. In *multiplicatione* quoque *algebraica* factum totale per solam permutationem factorum partialium non variari, clarum est ex notione totius complexi algebraici (§. 67); In factis autem partialibus combinatio literarum per (§. 25.) non variat factum, quocunque ordine factores inter se combinentur ut patet ex (§. 53.). Et hinc *multiplicatio algebraica* inchoari potest à quacunque quantitate *multiplicandi*, & per quamcunque quantitatem *multiplicantis; ut infra patebit.*

Digitized by Google

COROLLARIUM IV.

72. Ex eodem Theoremate sequitur, quod in *Divisione algebraica*, arbitrarium sit operanti, divisionem inchoare à quacunque quantitate *dividendi*, & per quamcunque quantitatem *divisoris*; item quotos ex divisione resultantes quocunque ordine scribi posse, infra docebitur.

SCHOLION.

73. *Liquet itaque multo faciliores esse operationes Arithmeticæ litteralis, quam numerorum, cum in operationibus numericis opus sit multis regulis solum situm, & ordinem concernentibus, easque regulas caute observandas habeat operans, quibus in calculo litterali tutò supersedemus.*

PROBLEMA I.

74. PROP. *Quantitates quascunque signis algebraicis expressas addere.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si quantitates addendæ sint inter se homogeneæ* (§. 52. & 53.)

I. *Coëfficientes* quantitatum homogenearum iisdem signis (hoc est, quarum quælibet habet signum +, vel quævis signum —) affectarum, colligantur in unam summam sub suis signis per (§. 47. & 48.) exprimendam. *Hic revocentur in memoriam* (§. 12. & 48.) *Vide Exempl. I. Casus I.*

II. Si quantitates homogeneæ sint affectæ diversis, seu contrariis signis (§. 19.) id est, (una harum habeat signum +, altera —), *coëfficiens* minoris subtrahatur à majore, & residuum scribatur in loco summæ, præfixo signo habentis majorem coëfficientem per (§. 21.) *Vide Exempl. II. Casus I.*

III. Si quantitates homogeneæ, diversis signis affectæ, sint æquales, id est (si æquales habeant coëfficientes) in loco summæ omittantur, seu non scribantur. *Vide Exempl. III. Casus I.*

DE-

Digitized by Google

DEMONSTRATIO.

Regula I. eſt hypotheſis (§. 47. & 48.) Regula II. continetur in (§. 21.) Regula III. inititur axiomati (§. 20.) Q. E. D.

CASUS II. *Si quantitates addendæ ſint heterogeneæ* (§. 54.)

Regula unica; Quantitates heterogeneæ manentibus ſuis ſignis in loco ſummæ ſibi tantum juxta ſcribantur, quocunque ordine; Hic in *memoriam* etiam *revocandus* (§. 12.) *Vide Exempl. I. & II. Caſus II.*

DEMONSTRATIO.

Patet hanc collectionem eſſe ſolum additionem indicatam (§. 17.) cum heterogeneæ quantitates reipſa per coëfficientes addi nequeant per (§. 31. Arithm.) Q. E. D.

CASUS III. *Si ex quantitatibus addendis, quædam ſint homogeneæ, quædam vero heterogeneæ.*

I. *Homogeneæ* addantur *per regulas caſus I.*

II. *Heterogeneæ* ſibi juxta ponantur in loco ſummæ cum ſuis ſignis per Reg. caſus II. *Vide Exempl. I. & II. Caſus III.*

CASUS IV. *Si quantitates addendæ ſint numeri ſeorſim cum ſignis algebraicis poſiti.*

I. Cum numeri ſint quantitates inter ſe homogeneæ, addendi ſunt *per Regulas Caſus I. V. Exemp. I. Caſ. IV.*

II. Cum numeri ſeorſim poſiti ſint quantitates heterogeneæ reſpectu quantitatum literalium, ſi cum iis addendi veniant, ſervetur *Reg. Caſus II. Vide Exemp. II. Caſus IV.* Hic caſus jam demonſtratus eſt.

Digitized by Google

PARADIGMA.

Exemplorum Additionis algebraicæ.

CASUS I.

EXEMPLUM I. REGULA I.

$$\begin{array}{lll} \textit{Addendæ} & \left\{\begin{array}{l} 3a - 2b + c \\ 4a - 3b + c \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Summa} & 7a - 5b + 2c & ☿ \end{array}$$

EXEMPLUM II. REG. II.

$$\begin{array}{lll} \textit{Addendæ} & \left\{\begin{array}{l} a^2 + 7b - 4c \\ 7a^2 - 9b + 7c \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Summa} & 8a^2 - 2b + 3c & ☿ \end{array}$$

EXEMPLUM III. REG. III.

$$\begin{array}{lll} \textit{Add.} & \left\{\begin{array}{l} 2a + 3b - c + d \\ 3a - 3b + c + 2d \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Summa} & 5a \quad + 3d & ☿ \end{array}$$

CASUS II.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{lll} \textit{Addendæ} & \left\{\begin{array}{l} 3ab + cd - f \\ ac + 5ab - 7 \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Sum.} & 8ab + ac + cd - f - 7 & ☿ \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{lll} \textit{Addendæ} & \left\{\begin{array}{l} 12a - 4c + b \\ -3b + ad + 4c \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Summa} & 12a - 2b + ad & ☿ \end{array}$$

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{lll} \textit{Addendæ} & \left\{\begin{array}{l} 5x + 3y - 8b \\ 2xy - 3v + 12 \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Sum.} & 5x + 2xy - 8p + 12 & ☿ \end{array}$$

CASUS III.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{lll} \textit{Addendæ} & \left\{\begin{array}{l} 4a^3 + 3b \\ 3ab - db \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Summa} & 4a^3 + 3b + 3ab - db & ☿ \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{lll} \textit{Addendæ} & \left\{\begin{array}{l} a^2 + a^3 - 15 \\ 2a - bc + 8c \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Sum.} & a^2 + 2a + a^3 - bc + 8c - 15 & ☿ \end{array}$$

CASUS IV.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{lll} \textit{Add.} & \left\{\begin{array}{l} 24 + 8 - 4 = 28 \\ 15 - 10 + 4 = 9 \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Sum.} & 39 - 2 \quad = 37 & ☿ \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{lll} \textit{Addendæ} & \left\{\begin{array}{l} ad + b - 4 \\ 6 + ad - f \end{array}\right. & \begin{array}{l} ♂ \\ ♃ \end{array} \\ \hline \textit{Summa} & 2ad + b - f + 2 & ☿ \end{array}$$

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

75. *In gratiam Tyronum (qui in idæis universalibus veritatem propositam non illico assequuntur) adductum* universale exemplum I. casûs I. *claritatis gratia ad determinatas quantitates applicare placuit, substituendo videlicet loco litterarum, vel certas quantitates, vel numeros. Igitur significet:* a *unum florenum Germ.* b *unum grossum,* c *crucif. erit in numeris determinatis.*

EXEMPLUM I. CASUS I.

Algebraicæ numericè.

	$3a - 2b + c$	*id est:*	3 *flor.*	$- 2$ *gross.*	$+ 1$ *cr.*	♂
	$4a - 3b + c$	*seu*	4	$- 3$	$+ 1$	♃
Summa	$7a - 5b + 2c$		$= 7$ *flor.*	$- 5$ *gr.*	$+ 2$ *cr.*	☿

Idem Arithmeticè.

flor.	*gross.*	*crucif.*	
2	18	1	♂
3	17	1	♃
6	15	2	☿

Idem exemplum substituendo pro literis numeros
Sit: $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$.
erit

	$3a - 2b + c$	$= 15$	$- 8$	$+ 7$	$= 14$	♂
	$4a - 3b + c$	$= 20$	$- 12$	$+ 7$	$= 15$	♃
Summa	$7a - 5b + 2c$	$= 35$	$- 20$	$+ 14$	$= 29$	☿

Eodem modo, & reliqua exempla substitutis loco litterarum numeris, vel certis quantitatibus, veritatem doctrinæ declarant.

CAPUT III.

De Subtractione Algebraica.

DEFINITIO XV.

76. *Subtractio Algebraica*, est inventio, vel expressio complexi alicujus algebraici, quod per sua signa exhibet *differentiam*, seu *residuum* alterius majoris, vel simplicis, vel complexæ quantitatis. Ex. gr.

Si

Digitized by Google

Si ex quantitate a, ſit ſubtrahenda quantitas b, erit complexum $a - b$, exhibens differentiam, ſeu reſiduum de quantitate a, (§. 18.)

AXIOMA III.

77. Ablatio, ſeu ſubtractio quantitatis poſitivæ, eſt ejusdem quantitatis ſubtrahendæ poſitio negativa; & vice verſa, ablatio, ſeu ſubtractio quantitatis negativæ, eſt ejusdem negativæ quantitatis ſubtrahendæ, poſitio poſitiva. (§. 20. & 21.) *Ex. gr.* Si Petrus habeat flor. 8. poſitivos, & eidem aufferantur 3. flor. poſitivi, habebit Petrus tantum 5. flor. id eſt: $8 - 3$. Et vice verſa; ſi Petro habenti 5. fl. ſeu $8 - 3$, donentur 3 fl. habebit utique $5 + 3$, ſeu 8, id eſt $8 - 3 + 3 = 8$. (§. 20.)

PROBLEMA II.

78. PROP. *Quantitates quascunque, ſignis algebraicis expreſſas, ab aliis quantitatibus algebraicis ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

I. Quantitates ſubtrahendæ ſubſcribantur quantitatibus, à quibus ſubtractio fieri debet. *Vide Exemp. I. & II. &c.*

II. Signa in quantitatibus ſubtrahendis mutentur in contraria, id eſt, (ſignum + mutetur in —, & ſignum — mutetur in +) *Vide Exempl. I. & II. &c.*

III. Sic affectæ quantitates ſub ſignis ſuis contrariis, addantur (per regulas Problema. prior.) cum quantitatibus ſuperioribus in unam ſummam, dabit ſumma hæc differentiam, ſeu reſiduum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Subtractio quantitatis poſitivæ à poſitiva eſt ejusdem quantitatis ſubtrahendæ poſitio negativa, & vice verſa per axioma (§. 77.), ſed hoc factum eſt per datas

Digitized by Google

tas regulas, ergo per datas regulas ritè peracta habetur subtractio, ergo ritè inventa differentia, seu Residuum (§.76.)

SCHOLION.

79. *In his & cæteris subtractionum algebraicarum adducendis exemplis*, mutationem signorum in contraria, *indicabimus signis inferiore loco in subtrahendo positis*, Ex. gr. *Si* + *in* — *sit mutatum, indicabitur hoc modo* (±) *& vice versa* — *in* +, *hoc modo* (∓), *unde pro facienda additione* (juxta datam regulam III. hujus) *signa inferiore loco posita usurpanda erunt, superiora verò in subtrahendo posita signa, pro non adjectis habenda.*

PARADIGMA.

Exemplorum Subtractionis Algebraicæ desumptis exemplis ex Additione (§.74.)

CASUS I. EXEMPLUM I.

	$7a$	$-5b$	$+2c$	♀
Subtrah.	$4a$	$-3b$	$+c$	
Mut. sig.	$-4a$	$+3b$	$-c$	♃
Resid.	$3a$	$-2b$	$+c$	♂

EXEMPLUM II.

	$8a^2$	$-2b$	$+3c$	♀
Subtrah.	$7a^2$	$-9b$	$+7c$	
Mut. sig.	$-$	$+$	$-$	♃
Resid.	a^2	$+7b$	$-4c$	♂

EXEMPLUM III.

	$5a$	$+3d$			♀
Subtrah.	$3a$	$+2d$	$-3b$	$+c$	
Mut sig.	$-$	$-$	$+$	$-$	♃
Resid.	$2a$	$+d$	$+3b$	$-c$	♂

CASUS II. EXEMPLUM II.

	a^2	$+2a$	$+a^3$	$-bc$	$+8c$	-15 ♀
Subtrah.		$2a$		$-bc$	$+8c$	
Mut. sig.	$-$		$+$	$-$		♃
Resid.	a^2	$+$	a^3	$-$	15	♂

CASUS

Casus III. Exemplum III.

	$12a - 2b + ad$	☿
Subtrah.	$-3b + ad + 4c$	♃
Mut. sig.	$+ \quad - \quad -$	
Resid.	$12a + b - 4c$	♂

Casus IV. Exemplum I.

	$39 - 2 \quad = 37$	☿
Subtrah.	$15 - 10 + 4 = 9$	♃
Mut. sig.	$- \quad + \quad -$	
Resid.	$24 + 8 - 4 = 28$	♂

Scholion I.

30. *Ut veritas doctrinæ Tyronibus magis elucescat, bina exempla in scholio Additionis (§. 75.) adducta, & ad quantitates determinatas applicata, hic exhibemus. Igitur significet* a *flor.* b *gross.* c *crucif. ut in additione.*

Casus I. Exemplum I.

	$7a - 5b + 2c$		7 *flor.*	$- 5$ *gr.*	$+ 2$ *cr.*		☿
Subtrah.	$4a - 3b + c$	*seu*	4	$- 3$	$+ 1$		♃
Mut. sig.	$- \quad + \quad -$		$-$	$+$	$-$		
Resid.	$3a - 2b + c$	*seu*	3 *flor.*	$- 2$ *gr.*	$+ 1$ *cr.*		♂

Id est

flor.	*gross.*	*crucif.*	
6	15	2	☿
3	17	1	♃
2	18	1	♂

Idem in numeris juxta substitutionem (§. 75.)

Sit $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$.

erit

	$7a - 5b + 2c$	$=$	$35 - 20 + 14$	$=$	29		☿
Subtrah.	$4a - 3b + c$	$=$	$20 - 12 + 7$	$=$	15		♃
Mut. sig.	$- \quad + \quad -$		$- \quad + \quad -$				
Resid.	$3a - 2b + c$	$=$	$15 - 8 + 7$	$=$	14		♂

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION II.

81. *Examen Additionis sive proba (si eam facere placet) in Algebra, fit per regulas subtractionis* hujus Problem. *ut exempla omnia declarant. Eodem modo examen subtractionis fit per regulas additionis* (§. 74.) *adductas. Videlicet, si quantitas subtrahenda non mutatis signis, seu cum signis superioribus expressa, addatur residuo, summa restituit quantitatem, à qua subtractio facta est. Ex Examen, seu probam exempli I. casus I.*

		$7a - 5b + 2c$	♀
	Subtrah.	$4a - 3b + c$	
	Mut. sig.	$- \quad + \quad -$	♂
Addendæ	*Resid.*	$3a - 2b + c$	♂
	Subtrah.	$4a - 3b + c$	♂
	Summa	$7a - 5b + 2c$	♀

CAPUT IV.

De Multiplicatione Algebraica.

DEFINITIO XVI.

82. Multiplicatio algebraica, est *ductus* quantitatis algebraicæ unius in aliam, qui *ductus* exprimitur per hypothesim *multiplicationis primo modo* (§. 25.) *indicatæ.*

THEOREMA IV.

83. Prop. *Multiplicatio quantitatis negativæ per positivam, & vice versa, quantitatis positivæ per negativam,* factum *producit* negativum; *id est: signum — cum +, item + cum —, dat in facto signum —.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. Multiplicatio est *iterata additio;* (§. 46. Arith.) sed additio ejusdem quantitatis negativæ iterata, seu toties facta quoties quantitas positiva affirmat, producit summam negativam, (§. 47. & 74.) id est, *factum negativum,* ergo; *quod erat primum.*

Pars

Pars II. *Productum*, seu *factum* non variatur, sive multiplicans in multiplicandum, sive multiplicandus in multiplicatorem ducatur per (§. 49. Arithm.) sed *(per partem I. hujus)* quantitas negativa, multiplicata per positivam, factum producit negativum, ergo etiam eadem quantitas positiva, multiplicata per negativam, *factum* producit *negativum. Cum, tam affirmare negationem, quam negare affirmationem, sit simpliciter negare. Quod erat alterum.*

SCHOLION.

84. *Demonstratio hæc, uti & sequentis Theorem. Tyronibus (qui algebraicis nondum assuevère demonstrationibus) interea sufficiat, donec ad calcem hujus doctrinæ Algebraicæ, hoc; & cætera quæpiam Theoremata ope Æquationum algebraicarum directe demonstraturi summus. Ne quis verò me criminis*, admissi *in demonstratione* paralogismi *arguat; videlicet, eadem, sed inversa ratione, argumentando, probari quoque:* multiplicationem quantitatis positivæ per negativam, & vicissim negativæ per positivam, factum producere debere positivum; *adeoque eadem demonstratione* contradictorium *confici; Is noverit, argumentationem hanc meam huic initi fundamento, quod*, tam affirmare negationem, quam negare affirmationem, sit simpliciter negare; *quantitas autem positiva est affirmativa, & negativa est negativa* (§. 11.) ut patebit inferius in schemate affirmationum, & negationum; *cui fundamento, cum inversa ratio argumentandi initi non possit, crimine* admissi paralogismi *me absolvendum, sano quisquis utitur judicio, haud difficile intelliget.*

THEOREMA V.

85. PROP. *Multiplicatio quantitatis negativæ per negativam*, factum *producit* affirmativum, *seu* positivum; *id est, signum — cum —, dat in facto signum +.*

DEMONSTRATIO.

Negare negationem est simpliciter affirmare (per Scholion §. 87.) sed multiplicare quantitatem negativam per negativam, est unam quantitatem negativam toties negare, esse sibi negativè additam, quoties altera negativa negat, ergo se invicem affirmant, seu ponunt positive, ergo *factum* producunt *positivum.* Q. E. D.

COROL-

Digitized by Google

COROLLARIUM.

86. Ex his duobus Theorematibus deducitur Regula in multiplicatione algebraica cautè observanda, videlicet; *Signa eadem factorum, dant in facto* +, *diversa verò* —; id est: si uterque factorum habeat + præfixum, vel uterque habeat præfixum signum —, in facto ponendum est signum +; si verò unus factorum habeat +, alter —, in facto scribendum est —.

SCHOLION I.

87. *Ut veritas datæ Regulæ, ex Theorematibus deductæ, vel ipsis oculis Tyronum pateat,* schema affirmationum, & negationum *subjectum, inspicere velint, in quo quantitas positiva, seu affirmativa, respondet affirmationi, seu signo* +, *quantitas verò negativa; negationi, id est signo* —.

Schema affirmationum, & negationum.

+ *Qui affirmat*	*Se negásse aliquid, ille id ipsum negat.*	—
	+	+
	Se affirmásse aliquid, ille id ipsum affirmat.	
	—	+
— *Qui negat*	*Se negásse aliquid, ille id ipsum affirmat.*	
	+	—
	Se affirmásse aliquid, ille id ipsum negat.	

Ergo:

+ *cum* —, *dat* —.
+ *cum* +, *dat* +.
— *cum* —, *dat* +.
— *cum* +, *dat* —.

SCHOLION II.

88. *Ante faciendam multiplicationem per sequens problema, in memoriam velim revocentur* (§§. 25. 53. & 71.) *cum* ductus *quantitatis algebraicæ unius in alteram, fiat per solam litterarum conjunctionem, seu combinationem.*

PROBLEMA III.

89. PROP. *Quantitates algebraicas quasvis, per quantitates alias quascunque multiplicare.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si quantitates litterales non sint affectæ coëfficientibus, aut exponentibus, nec numeris aliis permixtæ.*

Digitized by Google

I. Infra multiplicandum scribatur multiplicans cum suis signis, & subducantur lineâ. *Vide Exempl. I. & II.*

II. Singula membra *multiplicantis* ducantur in singula membra *multiplicandi*, ut *in Arithmetica.* Ductus autem iste fit præcisè combinando litteras *multiplicantis* cum litteris *multiplicandi.* (§.25.) *Vide facta partialia in Exempl. I. & II.*

III. Signa in factis partialibus præfigantur *juxta regulam* (§.86.) videlicet; *signa eadem, dant* +, *diversa* —; *Vide Exempl. I. & II.*

IV. Facta partialia *(ducta lineâ)* colligantur, seu addantur in unam summam totalem, *per Reg. Addit.* (§.74.) summa hæc dabit factum totale. *Vide Exemplum I. & II.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. demonstratione non eget. Reg. II. constat ex (§.53. Arith.) Reg. III. eadem est, quæ (§.86.) & denique Regula IV. habetur demonstrata (§.74.) Q.E.D.

CASUS II. *Si quantitates inter se multiplicandæ affectæ sint coëfficientibus.*

Præter Regulas datas in Casu I. observentur hæ:

I. Coëfficientes singulorum membrorum in multiplicando, multiplicentur per coëfficientes singulos multiplicantis, ut *in Arith.* & facta coëfficientium singulorum adscribantur singulis factis litteralibus partialibus, ad sinistram, præfixo signo *juxta Reg. III. Cas. I. Vide Exempl. I. Cas. II.*

II. Si factorum unus habeat coëfficientem, alter verò careat coëfficiente, tum coëfficiens invariatus præfigatur facto litterali partiali; *V. Exempl. II. Cas. II.*

DE-

Digitized by Google

DEMONSTRATIO.

Regula I. patet ex (Arith. §. 53.) cum coëfficientes sint numeri. Regula II. clara est; quia coëfficiens quantitatis litteralis carentis coëfficiente est (1) tacitè præfixa (§. 48.) unitas verò non multiplicat, hinc rectè præfigitur facto litterali, coëfficiens alterius quantitatis invariatus.

CASUS III. *Si quantitates affectæ sint exponentibus.*

Præter regulas casus I. has servare necesse est;

I. Videatur an *factorum* litteræ, exponentibus affectæ, sint inter se homogeneæ; si homogeneæ sunt, numeri, vel (si exponentes etiam sint litteræ) litteræ exponentium, addantur, & pro *facto* (loco combinationis litterarum homogenearum) una duntaxat ex homogeneis littera scribatur, cui ad dextram sursum versus summa invenita exponentium superscribatur, ceteræ verò litteræ heterogeneæ adhærentes per *Regul. Cas. I.* combinatæ exprimantur. *Vide Exempl. I. & II. Cas. III.*

II. Si unus ex factoribus habeat exponentem, alter verò eidem homogeneus careat exponente; Exponens factoris homogenei augeatur unitate, & ita auctus superscribatur uni litteræ homogeneæ, ut in *Regula I.* hujus. *Vide Exempl. IV. Cas. III.*

III. Exponentes heterogenearum litterarum invariati, cum suis litteris quas afficiunt, scribendi sunt in facto. *Vide Exempl. III. Cas. III.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. patet ex (§. 49. 50. & 51.) Reg. III. ex (§. 41.)

SCHOLION.

90. *Tyrones adductum post exempla hujus III. Casus positum Scholion (§. 91.) non prætermittant legendo, in quo fundamentum additionis exponentium, declaratur ad illorum captum.*

Digitized by Google

CASUS IV. *Multiplicare algebraicè inter se quascunque quantitates datas, affectas coëfficientibus, exponentibus, ac aliis numeris permixtas.* Serventur Regulæ Casus I. II. & III. ac præterea Regulæ Arithmeticæ (§. 53. Arith.) *Vide Exempl. I. & II. Cas. IV.* Hic Cas. IV. demonstratione non eget, cum in hoc antecedentes omnes Casus collecti habeantur.

PARADIGMA

Exemplorum Multiplicationis Algebraicæ.

CASUS I.

EXEMPLUM I.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Multiplicand.}\ a - b \\ \textit{Multiplicans}\ a - b \end{array}\right\}\textit{Factores.}$$

$$\begin{array}{ll} \textit{Facta} & aa - ab \\ \textit{Partialia} & \quad - ab + bb \\ \hline \textit{Fact. tot.} & aa - 2ab + bb \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{l} a + b - c \\ \quad\ \ a + b \\ \hline aa + ab - ac \\ \quad\ \ + ab + bb - bc \\ \hline aa + 2ab + bb - ac - bc \end{array}$$

CASUS II.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{l} 3a + b \\ 5a - 4b \\ \hline 15aa + 5ab \\ \quad\ \ - 12ab - 4bb \\ \hline \textit{Fact.}\ 15aa - 7ab - 4bb \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{l} 2a + 3b - 2c \\ \quad\ \ 4a + 5b \\ \hline 8aa + 12ab - 8ac \\ \quad\ \ + 10ab + 15bb - 10bc \\ \hline \textit{Fact.}\ 8aa + 22ab + 15bb - 8ac - 10bc \end{array}$$

CASUS

CASUS III.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{l} a^3 + b^3 \\ a^3 - b^3 \\ \hline a^6 + a^3 b^3 \\ \quad - a^3 b^3 - b^6 \\ \hline \end{array}$$

Fact. $a^6 - b^6$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{l} a^n + a^x - b^m \\ \qquad a^n \\ \hline a^{2n} + a^{n+x} - a^n b^m \end{array}$$

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{l} a^2 + b^3 d - d \\ \qquad a^3 b^4 \\ \hline a^5 b^4 + a^3 b^7 d - a^3 b^4 d. \end{array}$$

EXEMPLUM IV.

$$\begin{array}{l} a + b^4 \\ a^6 + b \\ \hline a^7 + a^6 b^4 + ab + b^5 \end{array}$$

SCHOLION.

91. *Cum (§. 50.) expressio per exponentes sit tantum modus scribendi brevior; idcirco, Tyrones ut multiplicationem quantitatum habentium exponentes menti fixius imprimant, exempla bina prioris Casus III. per modum hasce fusè scribendi, expressa damus, ut, si Tyro dubitaverit in casu simili, quomodo per abreviationem scribenda sint facta, hac methodo servata, seipsum instruat.* En exempla hujus Casus III. fusè descripta.

EXEMPLUM I. CASUS III. fusè.

$$\begin{array}{lll} & aaa + bb & \\ & aaa - bb & \\ \hline Fusè & aaaaaa + aaabb & \\ & \quad - aaabb - bbbb & \\ \hline Factum & aaaaaa \quad - bbbb. & \\ \hline Brevius & a^6 \quad - b^4 & \end{array}$$

EXEMPLUM III. CASUS III. fusè.

$$\begin{array}{lll} & aa + bbbd - d & \\ & \qquad aaabbbb & \\ \hline Fuse & aaaaabbbb + aaabbbbbbbd - aaabbbbd & \\ \hline Brevius & a^5 b^4 + a^3 b^7 d - a^3 b^4 d. & \end{array}$$

Digitized by Google

CASUS IV.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{r} 2a^3 - 4b + 1 \\ 5a^4b - 7 \\ \hline 10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b \\ - 14a^3 \quad + 28b - 7 \\ \hline 10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b - 14a^3 + 28b - 7. \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r} a^5 + 4a - d^n \\ 3a^2 + 8 \\ \hline 3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^n \\ + 8a^5 \quad + 32a - 8d^n \\ \hline 3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^n + 8a^5 + 32a - 8d^n. \end{array}$$

SCHOLION.

92. *Ut doctrina de multiplicatione algebraica hactenus tradita clarior Tyronibus evadat, præsertim quæ de signis demonstrata sunt, Exemplum I. Casus I. ad numeros, seu determinatas quantitates applicabimus, quam applicationem in omnibus Exemplis Tyronibus faciendam suadeo. Sit igitur* $a = 8$, & $b = 2$.

Erit

$$\begin{array}{r} a - b = 8 - 2 \\ a - b = 8 - 2 \\ \hline aa - ab = 64 - 16 \\ - ab + bb = \quad - 16 + 4 \\ \hline aa - 2ab + bb = 64 - 32 + 4 = 36 \end{array}$$

sed $8 - 2 = 6$
& $8 - 2 = 6$

factum ex multiplicatione 6 *per* 6

id est $= 36$.

CAPUT V.

De Divisione Algebraica.

DEFINITIO XVII.

93. *Divisio Algebraica* est producti, sive facti alicujus algebraici in suos factores *Resolutio*; & hinc *dividere algebraice*, est, dato factore uno invenire alterum.

Digitized by Google

terum. *Ex. gr.* Dato facto algebraico *abc*, tanquam *dividendo*, datoque factore uno *a*, tanquam *divisore*, invenire factorem alterum *bc*, tanquam *quotum*, qui factores in se ducti produxerunt factum *abc*.

THEOREMA VI.

94. PROP. *Quantitas* negativa *divisa per quantitatem* positivam, *& vicissim* positiva *per* negativam, *pro quoto dat quantitatem* negativam. *Quantitas verò* negativa *divisa per* negativam, *dat* positivam; *seu universaliter:* signa eadem *in divisore, & dividendo, dant pro quoto* +, diversa *dant* —, *quemadmodum in multiplicatione ostensum est.*

DEMONSTRATIO.

95. Quod multiplicatio componit, hoc solvit divisio (§. 121. Arith.) sed factum seu productum algebraicum per eandem regulam signorum componitur (§. 86.) ergo etiam per eandem signorum regulam resolvi debet. Nam quotus, tanquam unus ex factoribus, multiplicatus per divisorem, tanquam factorem alterum, restituere debet dividendum. Q.E.D.

COROLLARIUM.

96. In divisione itaque algebraica eadem regula studiosè observanda; nempe *signa in divisore, & dividendo eadem, dant pro quoti signo* +, *diversa* —.

SCHOLION.

97. *Cum usus divisionis algebraicæ actualis per* Problema infra tradendum, *haud frequens sit, propterea quod exacta hujusmodi divisio, seu resolutio in factores raro fieri possit, idcirco præcipua duntaxat exempla, quæ usui Tyronum futura sint, adferentur.*

PROBLEMA IV.

98. PROP. *Productum algebraicum in suos factores resolvere, seu Dividere algebraicè.*

Digitized by Google

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si* divisor *sit quantitas monomia nullo* coëfficiente, *aut* exponente *affecta*, & dividendus *similiter non sit affectus aliquo* coëfficiente, *aut* exponente.

I. Si littera, vel litteræ divisoris reperiantur in omnibus dividendi membris, peracta habetur divisio, simpliciter delendo in membris dividendi litteras divisoris, erunt reliquæ dividendi litteræ quotus (§. 35.) observata tamen cautè regula signorum (§. 96.) tradita. *Vide Exempl. I. Cas. I.*

II. Si aliquod membrum dividendi sit idem cum divisore, seu præcisè eadem quantitas litteralis, pro quoto illius membri scribenda est *unitas*, seu numerus 1. *Vide Exempl. II. Cas. I.*

III. Si in aliquo membro dividendi littera, vel litteræ divisoris non reperiantur, interpositâ lineâ exprimendus est quotus *juxta doctrinam* (§. 30.) *V. Exempl. III. Cas. I.*

CASUS II. *Si tam divisor, quam dividendus sint quantitates* polynomiæ *nullo aut* coëfficiente, *aut* exponente *affectæ.*

I. Ductis ad sinistram, & dextram deorsum versus lineis, includatur totus dividendus, divisor scribatur ante lineam sinistram dividendi, latus verò dextrum post lineam dextram deserviat quotis scribendis. *Vide Positionem I. in omnibus Exemplis.*

II. Divisoris polynomii membrum unum eligatur, quod placet, *(illud tamen præ cæteris eligendum, cujus littera, vel litteræ in pluribus dividendi membris reperiuntur,)* cum quo tota divisio peragenda est; nam uno semel assumpto, aliud divisoris membrum intra eandem divisionem assumere non licet.

III. Videatur in quo *dividendi* membro reperiatur assumptum membrum *divisoris*, & reliquæ litteræ membri

Digitized by Google

bri dividendi, quæ in divisore non habentur, pro quoto scribantur, *ut in Casu I. dictum*; servata regula de signis (§. 96.) adducta. *Vide Positionem I. Exempli I. Cas. II.*

IV. Per hunc litteralem quotum, juxta regulas multiplicationis algebraicæ, multiplicentur *omnia membra* divisoris, & facta partialia sub membris dividendi homogeneis scripta, subtrahantur algebraicè. *Vide Exemplum I. Casus II.*

V. Cum membris dividendi residuis, eodem modo per easdem Regulas III. & IV. inquiratur in quotum litteralem, donec facta subtractione ultima nihil remaneat, *vide Positionem I. Exempli I. Casus II.* si aliquid remaneat, quod porro dividi non possit, illud juxta Hypoth. (§. 30.) exprimendum erit. *Vide Exempl. II. Casus II.*

SCHOLION.

99. Plenam divisionis praxim Tyrones oretenus edocendi sunt, nec enim ea à Typothetis impetrare potui, quæ ad plenam necessaria fuerunt doctrinam. Hic quoque recolenda, quæ (§. 72.) dicta sunt, nullum videlicet, ordinem, aut in inquirendo quoto, aut in subtrahendis factis partialibus observari, sed quemadmodum quotum literalem partialem ex quocunque membro dividendi eruere licet, ita facta partialia à quibusvis membris homogeneis subtrahi possunt. Vide Paradigma Exempl. divis.

CASUS III. *Si tam divisor, quam dividendus affecti sint* coëfficientibus.

Præter Regulas Cas. II. servanda isthæc: per coëfficientem divisoris dividantur etiam coëfficientes dividendi arithmeticè. *Vide Exempl. Cas. III.*

CASUS IV. *Si tam divisor, quam dividendus affecti sint* exponentibus.

Servatis regulis supra adductis, si quantitates affectæ exponentibus in divisore sint homogeneæ quantitatibus dividendi, exponentes divisoris subtrahantur ab exponentibus dividendi, reliqua fiant, ut in Casu I. *Vide Exempl. I. & II. Cas. IV.*

Digitized by Google

Regulæ harum Resolutionum demonstratione non egent, cum ex definitione divisionis (§. 93.) pateat, hac ratione inventum quotum in singulis membris, esse factorem alterum dividendi, ut per multiplicationem divisoris in quotum liquet.

PARADIGMA.

Exemplorum Divisionis Algebraicæ.

CASUS I.

EXEMPLUM I.

Dividendus. *Quotus totalis.*

$$\text{Divisor } a \left\{ \begin{array}{ccc} ab & + ac & - ad \\ | & | & | \\ a & a & a \end{array} \right\} b + c - d.$$

NB. *Signum deletivum ad libitum est lineola (|) interposita.*

EXEMPLUM II.

Dividendus. *Quotus.*

$$\text{Divisor} - ab \left\{ \begin{array}{ccc} abc & - abdc & - ab \\ \| & \| & \| \\ -ab & -ab & -ab \end{array} \right\} -c + dc + 1.$$

EXEMPLUM III.

Dividendus. *Quotus.*

$$\text{Divisor } d \left\{ \begin{array}{ccc} db & + ad & + bc \\ | & | & \\ d & d & d \end{array} \right\} b + a + \frac{bc}{d}.$$

CASUS II.

Exempla sequentium casuum desumpta sunt ex exemplis in multiplicatione adductis.

EXEMPLUM I. quod est primum CAS. I. Multipl.

Dividendus.

$$\begin{array}{l} \text{Positio I.} \\ \text{Divisor } a - b \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc} aa & - 2ab & + bb \\ au & - ab & \\ - & + & \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Quotus part.} \\ a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Positio II.} \\ \text{Divisor } a - b \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc} \text{resid.} - & ab & + bb \\ & - ab & + bb \\ \text{subt.} + & - & \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Quotus part.} \\ -b \end{array}$$

Quotus totalis $a - b$

o o

Scilicet,

Scilicet, in Positione I. *assumpta ad libitum ex divisore litera* a, *dico:* a *in* aa, *dat quotum* a, *per hunc quotum* a *multiplico totum divisorem* a — b, *& factum* aa — ab, *subscribo membris homogeneis dividendi*, vide Posit. I. *deinde subtrahendo mutantur signa in contraria, unde* — aa, *&* + aa *se destruunt, item* + ab *destruit ex* — 2ab *unum* — ab *adeoque remanet adhuc* — ab *residuum, ad hoc residuum depono tertium membrum dividendi* + bb, ut factum vides in Positione II.

In hac Positione II. iterum ex divisore assumpta eadem litera a, *dico:* a *in* — ab, *dat quotum* — b, *& per quotum* — b *multiplicando totum divisorem* a — b, *dat factum* — ab + bb, *unde subtrahendo, mutatis in contraria signis, membra sibi homogenea ex dividendo totaliter destruunt, & nihil residui reliquunt, itaque quotus totalis emersit* a — b, *qui per divisorem* a — b *multiplicatus restituit dividendum*, aa — 2ab + bb.

Ut veritas *Reg. II. Cas. II.* pateat, de assumendo ad libitum quocunque divisoris membro, in gratiam Tyronum idem exemplum repetere placet assumendo ex divisore *a — b* secundam literam, nempe *— b*, fit itaque

	Dividendus.		
Positio I. *Divis. a — b*	*aa — 2ab + bb*	*quot. part.* — b	*Quotus totalis* — b + a.
	fact. — *ab + bb*		
	subt. + —		
Positio II. *Divis. a — b*	*res. aa — ab*	*quot. part.* + a	
	aa — ab		
	— +		
	o o		

In Positione I. assumpta igitur ex divisore litera — b, *dico:* — b *in* + bb, *dat quotum* — b, *& multiplicando totum divisorem* a — b, *per* — b, *dat factum* — ab + bb, *subtrahendo mutatis signis fit* + ab — bb, *unde* — bb *&* + bb *se invicem destruunt, &* + ab *ex* — 2ab *destruit unum* — ab *unde remanet* — ab, vide Positionem I. *ad hoc residuum* — ab, *depono tertium membrum dividendi* aa, vide Positionem II.

In Positione II. retenta eadem divisoris litera — b, *dico:* — b *in* — ab, *dat quotum* + a, *& multiplicando per quotum* a, *totum divisorem*, a — b *dat factum* aa — ab, *mutatis itaque signis fit* — aa + ab, *unde cum* — aa *&* + aa, *item* + ab *&* — ab, *se invicem destruendo nihil relinquant, patet quotum totalem esse* — b + a, *qui idem est cum quoto operationis primæ;* a — b, *cum translocatio literarum non variet complexum.* (§. 67.) *Ex hac operatione secunda, etiam liquet veritas tum Reg. III. Cas. II. tum Coroll.* (§. 72.) *adducti.*

EXEM-

EXEMPLUM II. CASUS II.

Dividendus

Positio I. Div. $a+b$	$aa+2ab+bb+dc$	quot. part.	quot. totalis $a+b+\frac{dc}{a+b}$
	$aa+ab$	a	
	$-\ -$		
Positio II. Div. $a+b$	Resid. $ab+bb+dc$	quot. part.	
	Fact. $ab+bb$	$+b$	
	Subtr. $-\ -$		
Positio III. Div. $a+b$	Residuum $+dc$	$\frac{dc}{a+b}$	

CASUS III.

Exemplum, quod est primum Casus II. multiplicationis.

Dividendus

Positio I. Div. $5a-4b$	$15aa-7ab-4bb$	quot. part.	quotus totalis $3a+b$
	$15aa-12ab$	$3a$	
	$-\ +$		
Positio II. Div. $5a-4b$	Resid. $5ab-4bb$	quot. part.	
	$5ab-4bb$	$+b$	
	$-\ +$		

o o

CASUS IV.

Exemplum I. quod est primum Cas. III. multiplicationis.

Dividendus

Positio I. Divis. a^3-b^2	a^6-b^4	quot. part.	quotus totalis a^3+b^2
	$a^6-a^3b^2$	a^3	
	$-\ +$		
Positio II. Divis. a^3-b^2	Kes. $a^3b^2-b^4$	quot. part.	
	$a^3b^2-b^4$	$+b^2$	
	$-\ +$		

o o

Exemplum II. quod est secundum Casus III. multiplic.

Dividendus

Divis. a^n	$a^{2n}+a^{n+x}-a^n b^m$	quotus totalis $a^n+a^x-b^m$
	$a^{2n}+a^{n+x}-a^n b^m$	
	$-\ -\ +$	

o o o

SCHO-

SCHOLION.

100. *Examen divisionis fit ope multiplicationis algebraicæ, & vicissim examen multiplicationis fit per divisionem algebraicam. Tyrones sequentia Corollaria ex praxi divisionis orta, perspecta habeant, ut ea, quæ inferius de resolutione problematum tractabuntur facilius intelligant.*

COROLLARIUM I.

101. Quemadmodum in multiplicatione (§. 89. Cas. II. Reg. II.) si unus factorum careat coëfficiente, alter verò factorum affectus sit aliquo coëfficiente, in facto invariatus præfigitur coëfficiens alterius factoris, ita in divisione, si *dividendus* habeat coëfficientem, non item *divisor*, in quoto manet invariatus coëfficiens. *Ex. gr.* Sit dividendus $3abd$, & divisor db, erit quotus, $3a$; Ratio clara est, quia db est idem quod $1db$ (§. 48.) sed unitas non dividit (§. 77. Arith.) ergo. Quodsi verò *divisor* habeat coëfficientem, non item *dividendus*, pro quoto scribenda erit illa litera, quæ in divisore non comparet, & subscripto coëfficiente divisoris per Hypothes. (§. 30.) exprimenda. *Ex. gr.* Sit dividendus, abd, divisor $3bd$, erit quotus $\frac{a}{3}$ ut patet ex Cas. I. §. 98.

COROLLARIUM II.

102. Ex Cas. I. §. 98. colligitur, quod in complexo algebraico per hypothes. (§. 30.) expresso, *Ex. gr.* $\frac{ab+ac}{a}$, aut $(ab+ac):a$, deleri simpliciter possint literæ homogeneæ, tam in divisore, quam dividendo, atque adeo loco hujusmodi expressionum, scribi potest, $b+c$, item loco hujus $\frac{xb+ax}{x}$, scribi potest: $b+a$, item $\frac{xb+b}{b}$ dat quotum $x+1$, aut $\frac{ac}{b}$ quotum $\frac{a}{b}$ dat (§. 36.)

COROLLARIUM III.

103. Quoniam *Ex. gr.* $ax-bx$, est factum ex quantitate $(a-b).x$, si occurrat formula $\frac{ax-bx}{a-b}$, deletis ex formula utrobique, $a-b$, erit quotus x, (non $x-x$) ut patet ex regula divisionis; item $\frac{ax-bx}{a-b}$ dat quotum x, (non $x+x$, seu $2x$); hinc in occurrente hujusmodi formula

mula considerandum, an litera in dividendo sæpius repetita non compareat in divisore, hæc enim sola erit quotus, si cæteræ dividendi literæ in divisore compareant; sic, $\frac{ax+bx-cx}{a+b-c}$, valet tantum x.

COROLLARIUM IV.

104. Cum, quod ponit multiplicatio, tollit divisio (§. 121. Arithm.) si in formula per divisionem expressa, *E.g.* $\frac{x}{a+b}$, dividendum x multiplicari deberet per $a+b$ seu per divisorem suum, tali casu simpliciter delendus est divisor, manente solo dividendo; nam $\frac{x}{a+b}$, & idem x multiplicatum per $a+b$, dat factum $(ax+bx):a+b$, seu $\frac{ax+bx}{a+b}$, sed (per Corol. §. 103.) $\frac{ax+bx}{a+b}$, est $=x$. ergo.

COROLLARIUM V.

105. Divisio actualis per datas regulas fieri non potest, quoties litera, vel literæ divisoris non reperiuntur in membris dividendi. *E.g.* Sit dividendus; $(ac+bc+cm)$ per divisorem, $(d+n)$; tali casu tantum exprimenda est divisio per hypothes. (§. 30.) videlicet, $\frac{ac+bc+cm}{d+n}$.

SCHOLION.

106. *Hæc de quatuor algorithmis adduxisse in compendio sufficiat Tyronibus, quorum plenior doctrina viva docentis voce dabitur; monitos iterum iterumque volo Tyrones, in his quatuor algorithmis præcipue versati sint, seque exerceant sedulo, nam ulterius progressi sine facilitate tractandi hos algorithmos sæpe sæpius ad hos redire cogentur, non secus atque in arithmetica numerica, nemo ullus divisionem instituit, sine notitia additionis, subtractionis, & multiplicationis propterea, quod hæ operationes divisionis algorithmum ingrediantur.*

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT VI.

De natura, & proprietatibus fractionum in genere.

DEFINITIO XVIII.

107. *Fractio* est quantitas unitate minor, id est, pars, vel partes alicujus totius, quod totum per modum *unius* consideratur. Ex. gr. 2. *crucif. qui sunt partes duæ totius grossi per modum unius considerati.*

HYPOTHESIS XII.

108. *Fractio exprimitur, vel designatur per expressionem hypotheticam divisionis* (§. 30.) *declaratam.* E. g. Algebraicè, $\frac{a}{b}$ vel $a:b$. Numericè, $\frac{3}{4}$ vel $3:4$.

SCHOLION.

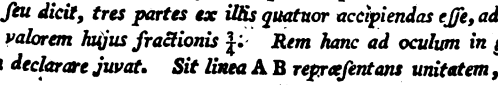
109. *Expressio prior fractionis per lineam interjectam usitatissima est.* Ex. gr. $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{3}{4}$ *etsi duo puncta interposita æque fractionem indicent.*

DEFINITIO XIX.

110. Litteræ, vel numeri supra lineam scripti, vocantur *Numeratores*, infra lineolam positi, *Denominatores* appellantur, sic *in his* $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{3}{4}$, Numeratores *sunt* a, *vel numerus* 3, Denominatores *verò* b, *vel* 4.

SCHOLION.

111. *Ratio, cur notæ infra lineolam scriptæ vocentur* denominatores, *supra lineolam positi* numeratores, *hæc est: quod nota inferior repræsentans totum per modum unius, denotet, aut exprimat, seu* denominet, *in quot partes illud unum totum sit sectum, seu divisum. Superior verò seu* numerator, *numerat, quot hujusmodi partes (quales denominator exprimit) ex* illo uno *sint accipiendæ ad hoc, ut valor fractionis cognoscatur. Sic* Ex. gr. *in hac fractione* $\frac{3}{4}$ *numerus* 4 *denominat illud unum esse sectum, seu divisum in quatuor partes, numerator verò* 3, *numerat seu dicit, tres partes ex illis quatuor accipiendas esse, ad constituendum valorem hujus fractionis* $\frac{3}{4}$. *Rem hanc ad oculum in gratiam Tyronum declarare juvat. Sit linea* A B *repræsentans unitatem,* Ex. gr.

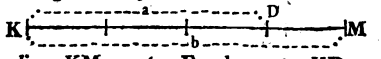


unam

Digitized by Google

unam ulnam, sitque secta hæc linea AB *in quatuor partes æquales:* 1,2,3,4. *Sint itaque exprimendæ, seu indicandæ tres partes* AC, *de hac linea, seu de una ulna* AB, *rectè igitur per fractionis expressionem sic indicabitur,* $\frac{3}{4}$ unius ulnæ, *in qua expressione, clarum est, denominatorem* 4 *indicare totam unitatem seu ulnam* AB *in quatuor partes sectam, numeratorem verò* 3, *numerare tres hujusmodi partes (quæ sunt* AC), *de tota linea* AB *in quatuor partes secta.*

Idem algebraicè ostenditur in hac linea KM.



In qua tota linea KM *vocetur* E.g. b, *partes* KD, *vocentur* a, *rectè algebraicè exprimetur linearis fractio:* $\frac{a}{b}$.

COROLLARIUM I.

112. Hinc liquet *Primò:* fractionem *veram* esse, cujus *numerator* minor est suo *denominatore*, quia exprimit quantitatem unitate *minorem* (§.107.). *Secundò:* Fractio vulgo *spuria* erit, si numerator sit *æqualis* suo denominatori, ut $\frac{b}{b}$ vel $\frac{4}{4}$, quia tali casu valor fractionis est æqualis toti unitati, *ut patet ex linea* AB (§.111.). Multo magis *spuria* vocabitur, si numerator *major* sit suo denominatore, ut $\frac{5}{4}$, quia numerator plures partes numerat, quam sint in *denominatore*, seu in unitate. *Ut ex contemplatione lineæ* AB *clarum est.*

COROLLARIUM II.

113. Inter duas, vel plures ejusdem unitatis fractiones, id est, (quæ habent eundem denominatorem) illas esse quoad valorem *majores*, quæ habent *majores numeratores*, *Ex.gr.* $\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$ quia numerator 3, ex æqualibus ejusdem unitatis partibus, plures partes numerat, quam numerator 2. *Vide expressionem linearum* AB (§.111.) Et hinc manifestum est, quod si manente eodem denominatore augeantur, vel minuantur numeratores, valores quoque fractionum augeantur, vel minuantur, id est, vel majores, vel minores quoad valorem efficiuntur, igitur universaliter, valores fractionum homogenearum à solis numeratoribus cognoscuntur.

DEFINITIO XX.

114. Fractiones dicuntur *homogeneæ*, seu *ejusdem denominationis*, quæ habent eundem denominatorem, ut

Digitized by Google

ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$, aut $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, item $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{4}$. *Heterogeneæ* appellantur, quæ sub diversis denominatoribus comparent, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, vel $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$.

DEFINITIO XXI.

115. Fractiones *ejusdem valoris*, seu æquales sunt, quarum numeratores æqualiter continentur in suis denominatoribus; *Ex. gr.* $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$ &c. *in quibus, numeratores singuli in suis denominatoribus* bis *continentur*, sic pariter æquales sunt, $\frac{6}{18}$ & $\frac{3}{24}$, quia in utraque numerator ter continetur in suo denominatore, quod per divisionem innotescit.

SCHOLION.

116. *Observent Tyrones, æqualitatem* valoris *fractionum confundendam non esse, cum æqualitate* denominationis; *nam fractiones possunt esse æquales quoad valorem, quin habeant æquales denominatores, ut patet ex* (§. 115.), *& vicissim, possunt habere æqualem denominationem quin tamen sint æquales, quoad valorem, ut clarum est ex* (§. 113.)

THEOREMA VII.

117. *Si ejusdem fractionis tam numerator, quam denominator multiplicetur, per eandem aliquam quantitatem tertiam, fractio nova ex productis orta, erit æqualis quoad valorem priori fractioni nondum multiplicatæ.*

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{a}{b}$ cujus numerator a, & denominator b, multiplicetur per eandem quantitatem tertiam c, erit fractio nova ex productis orta $\frac{ac}{bc}$ sed $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ per (§. 35. & 102.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS DECLARATUR.

Sit fractio $\frac{1}{2}$ *cujus tam numerator, quam denominator multiplicetur per* 3, *& erit nova fractio* $\frac{3}{6}$ *sed* $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ *per* (§. 115.) *ergo.*

Digitized by Google

THEOREMA VIII.

118. *Si tam numerator, quam denominator ejusdem fractionis exacte dividatur per eandem aliquam tertiam quantitatem, fractio nova ex quotis orta quoad valorem erit eadem, quæ fuit ante divisionem.*

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{ac}{bc}$ cujus numerator ac, & denominator bc dividatur per eandem tertiam quantitatem c, erit fractio nova ex quotis orta $\frac{a}{b}$ sed $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ per (§.117.) ergo. Q.E.D.

IN NUMERIS DECLARATUR.

Sit fractio $\frac{3}{6}$ cujus tam numerator, quam denominator dividatur per 3, erit nova fractio $\frac{1}{2}$ sed $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ per (§.115. & 117.) ergo.

COROLLARIUM I.

119. Hinc si tam in numeratore, quam denominatore fractionis numericæ reperiantur zeri finales, deletis utrinque zeris numero æqualibus, fractionis valor non variatur. *Ex.gr.* Loco $\frac{300}{600}$ scribi potest $\frac{3}{6}$ item $\frac{300}{400} = \frac{3}{4}$, aut $\frac{600}{1200} = \frac{6}{12}$ &c. ratio patet, quia zeri finales oriuntur ex multiplicatione decadica, vel numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ergo per eosdem divisæ (quod fit delendo zeros) manent eædem.

COROLLARIUM II.

120 Ex hoc Theoremate patet ratio compendii (§.76. Arith.) adducti, cum omnis divisio expressa per Hypothesim (§.30.) repræsentet fractionem spuriam, in qua numerator est *dividendus*, denominator vero *divisor*.

COROLLARIUM III.

121. Idem Theorema suppeditat methodum, fractionem numericam in numeris majoribus exhibitam, redducendi ad numeros minores, valore fractionis invariato. Videlicet I. Dividendo exactè tam numeratorem, quam denominatorem per eundem aliquem numerum. *Ex.gr.* Sit fractio $\frac{12}{24}$, cujus numeratorem 12, & denominatorem 24 exactè dividat numerus 6, erit facta divisione per numerum

rum 6, nova fractio $\frac{2}{2}$ æqualis $\frac{12}{24}$ per (§.118.), item $\frac{30}{60} = \frac{3}{6}$. per (§.119.) & dividendo $\frac{3}{6}$ per 3, erit $\frac{1}{2}$, ergo $\frac{32}{60} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. *Secundò:* Eadem hac methodo, fractio ad *minimos*, ut dicitur, *terminos* reducetur in casu, si numerator exacte dividat denominatorem suum; *Ex.gr.* in fractione $\frac{12}{24}$, cum 12 exacte contineatur bis in 24, si tam numerator, quam denominator, per 12 dividatur, erit fractio $\frac{1}{2}$ in terminis *minimis*.

SCHOLION.

122. *Reductio hæc ad terminos minores sua utilitate non caret; nam* Primo: *valor fractionis, si sit in numeris minoribus, facilius innotescit, sic facilius intelligitur, quota pars sit* $\frac{1}{2}$ *de uno floreno, quam* $\frac{36}{72}$ *unius floreni, etsi quoad valorem idem sint* $\frac{36}{72}$, *quod* $\frac{1}{2}$. Secundo: *Reductio hæc compendium subministrat operationum arithmeticarum, cum compendiosior sit modus operandi per parvos, quam magnos numeros.*

PROBLEMA V.

123. PROP. *Ex numero quocunque dato* integro, *efficere fractionem* vulgo *spuriam datæ denominationis, manente valore numeri integri invariato.*

RESOLUTIO.

Datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, erit *productum* numerator, cui, interposita lineola, subscribatur datus denominator. Q.E.F.

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit quantitas integra *Ex.gr.* a reducenda ad datum denominatorem b, erit per datam resolutionem fractio spuria $\frac{ab}{b}$, sed $\frac{ab}{b} = a$, per §.35. & 102.) ergo. Q.E.D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit ex numero 4, *facienda fractio spuria, quæ habeat denominatorem* 6, *igitur multiplicando* 4 *per* 6, *erit productum* 24 numerator, *cui subscriptus datus* denominator 6, *exhibebit fractionem spuriam* $\frac{24}{6}$ *æqualem quoad valorem numero* 4 *integro.*

COROLLARIUM.

124. Hinc liquet methodus reducendi numerum integrum ad datæ fractionis alicujus denominatorem; si

Digitized by Google

nempe datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, & producto addatur numerator fractionis datæ, ac ducta lineola subscribatur prior datæ fractionis denominator. *Ex. gr.* Sit numerus 3 reducendus ad denominatorem fractionis $\frac{2}{5}$, erit multiplicando 3 per 5, productum 15, cui addendo numeratorem 2, efficitur summa 17, & huic subscribendo denominatorem 5, erit fractio spuria $\frac{17}{5}$.

PROBLEMA VI.

125. PROP. *Datam fractionem* vulgo *spuriam ad integra reducere.*

RESOLUTIO.

Dividatur numerator per suum denominatorem, quotus erunt integra, vel cum, vel sine fractione vera remanente. Q. E. F.

Demonstratio algebraica patet; nam $\frac{ab}{b} = a$ per (§. 35. & 102.) Q. E. D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit data fractio spuria $\frac{24}{6}$, *igitur dividendo* 24 *per* 6, *erit quotus* 4 *numerus integer. Item sit fractio spuria* $\frac{17}{5}$, *itaque dividendo* 17 *per* 5, *erit quotus* 3, *cum remanente fractione vera* $\frac{2}{5}$.

PROBLEMA VII.

126. PROP. *Invenire, quid data quæcunque fractio valeat in data quavis certa specie.* Ex. gr. *Si quæratur* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. in specie cruciferorum, vel nummorum, quot faciunt cruciferos, vel nummos?*

RESOLUTIO.

Data species, in qua valor fractionis quæritur, multiplicetur per numeratorem datæ fractionis, factum dividatur per denominatorem ejusdem fractionis, & quotus dabit valorem fractionis quæsitum in data specie. Q. E. F. *Demonstratio dabitur in parte ultima hujus.*

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLUM NUMERICUM.

Ex. gr. *Quæratur* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. quot faciunt cruciferos; igitur cum flor. Germ. habeat* 60 *xr. multiplicentur* 60 *per numeratorem* 3, *erit factum* 180; *hoc factum dividatur per denominatorem* 9, *& quotus emergens* 20; *erunt cruciferi, seu valor fractionis* $\frac{3}{9}$, *unius flor. Germ. in specie cruciferorum. Item* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. in nummis, quid valent? igitur cum* 120 *nummi faciunt flor. Germ. multiplicentur* 120 *per* 3, *& factum* 360, *dividatur per* 9, *erit quotus* 40, *seu nummi, quos valet data fractio* $\frac{3}{9}$.

Item: Quæratur Ex. gr. $\frac{24}{32}$ *unius urnæ Transylvanicæ, quot faciunt mensuras? cum urna Transylv. habeat* 8 *mensur. multiplicentur* 8 *per* 24, *& factum* 192, *dividatur per* 32, *erit quotus* 6, *exhibens mensuras, quas valet data fractio* $\frac{24}{32}$ *unius urnæ Transf.*

SCHOLION I.

127. *Problema hoc utilissimum, & in praxi summe necessarium est, quotiescunque certum quantum in datas partes distribuendum occurrit, quæ distributio, cum ope divisionis indagari debeat, ut* (§. 62. Arith.) *dictum, plerumque autem quoto ex divisione orto adhærere soleat fractio, quæ indicat partem, vel partes aliquot unitatis, illius speciei, cujus erat dividendus, necessarium est ad æquam distributionem, ut sciatur, quid data fractio in specie illius unitatis valeat? res exemplo declaratur. Sint distribuendi* 26 *fl. Germ. in* 3 *pauperes, igitur ope divisionis Arithm. invenietur quotus* $8\frac{2}{3}$ *unius fl. Germ. dandi cuilibet pauperi; sed* $\frac{2}{3}$ *unius fl. Germ. ignorantur, ergo per hoc problema operando, ut habeatur valor* $\frac{2}{3}$ *unius fl. Germ.* Ex. gr. *In nummis, multiplico* 120 *nummos (tot enim habet flor. Germ.) per numeratorem* 2, *& factum* 240, *divido per denominatorem* 3, *erit quotus* 80 *nummi, igitur ex* 26 *florenis, cuilibet pauperi obveniunt* 8 *flor. & 80 nummi.*

SCHOLION II.

128. *Ad hoc Problema ritè tractandum necessariæ sunt* Tabulæ Reductionum, in Parte III. Arithm. *adductæ, ut sciatur in data quavis specie, quot unitates species major contineat ex specie minore,* vide usum tabularum (§. 140. Arithm.)

Digitized by Google

CAPUT VII.

De quatuor Algorithmis fractionum.

PROBLEMA VIII.

129. PROP. *Duas, vel plures fractiones* heterogeneas (§. 114) *reducere ad fractiones* homogeneas (§. 114) *seu ad eundem denominatorem, valore fractionum invariato.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si duæ fractiones reducendæ sint.* Multiplicetur tam numerator, quam denominator *primæ* fractionis, per denominatorem fractionis *secundæ*, & vicissim tam numerator, quam denominator fractionis *secundæ*, multiplicetur per denominatorem *primæ* fractionis, erunt reductæ ad eundem denominatorem valore fractionum invariato. Q. E. F.

Algebraicè, & Demonstrativè.

Sint reducendæ fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, erunt per datam resolutionem reductæ $\frac{a.d}{b.d}$ & $\frac{c.b}{d.b}$, seu $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{db}$, habentes eundem denominatorem *bd*, sed habent etiam valorem priorem, nam $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ per (§. 117.) & $\frac{cb}{db} = \frac{c}{d}$ per eundem (§. 117.) ergo. Q.E.F.D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint reducendæ $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$, erunt reductæ per datam resolutionem, *prima* fractio $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7}$, & *secunda* $\frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4}$, seu *prima* $\frac{21}{28}$, *secunda* vero $\frac{20}{28}$, & hinc $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$, & altera $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$ per (§. 117.)

SCHOLION.

130. *In gratiam Tyronum ad firmandam memoriam, reductionem duarum fractionem sub hoc schemate exhibeo: in quo ductus linearum ostendit ad oculum, quod in prima fractione* $\frac{3}{4}$, *tam numerator* 3, *quam denominator* 4 *multiplicari debeat per denominatorem* 7 *fractionis secundæ; quodque*

$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$ *id est* $\frac{21}{28}$ $\frac{20}{28}$ *in*

in secunda fractione $\frac{5}{7}$ tam numerator 5, quam denominator 7, multiplicari debeat per denominatorem 4 fractionis primæ.

CASUS II. *Si plures fractiones reducendæ sint.*

I. Numerator fractionis primæ, multiplicetur per denominatorem secundæ, hoc factum multiplicetur per denominatorem tertiæ, productum hoc iterum multiplicetur per denominatorem quartæ, & sic porro; erit productum ultimum numerator fractionis primæ.

II. Numerator fractionis secundæ multiplicetur per denominatorem primæ, hoc factum per denominatorem tertiæ, (nam per proprium denominatorem multiplicari non debet) productum hoc per denominatorem quartæ, &c.

III. Eodem modo reliquarum numeratores multiplicandi sunt per omnes denominatores *aliarum* fractionum, (NB. *aliarum*) emanente videlicet proprio denominatore.

IV. Ut communis omnium denominator obtineatur, multiplicetur denominator fractionis primæ, per denominatorem secundæ, hoc factum per denominatorem tertiæ, productum hoc iterum per denominatorem quartæ, & ita porro; erit productum omnium denominatorum, communis denominator omnium fractionum reductarum: hæ quatuor regulæ in sequente quinta regula universaliter continentur.

Regula universalis: Numerator fractionis reducendæ multiplicetur per denominatores *aliarum* fractionum, communis autem denominator, erit factum omnium denominatorum in se invicem ductorum. Q.E.F.

Digitized by Google

Algebraicè, & Demonstrativè.

Sint fractiones reducendæ.

Prima: $\frac{a}{b}$, *secunda* $\frac{c}{d}$, *tertia* $\frac{f}{g}$, *quarta* $\frac{m}{n}$.

Erunt reductæ per datam Resolutionem

Prima: $\frac{adgn}{bdgn}$, *secunda* $\frac{bcgn}{bdgn}$, *tertia* $\frac{bdfn}{bdgn}$, *quarta* $\frac{bdgm}{bdgn}$.

sed per (§.117.) *Prima* $\frac{adgn}{bdgn} = \frac{a}{b}$, *secunda* $\frac{bcgn}{bdgn} = \frac{c}{d}$, *tertia* $\frac{bdfn}{bdgn} = \frac{f}{g}$, *quarta* $\frac{bdgm}{bdgn} = \frac{m}{n}$, *ergo.*

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint reducendæ: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$,

Erit numerator primæ: $2 \cdot 5 \cdot 7$, *seu* $10 \cdot 7 = 70$.
secundæ: $4 \cdot 3 \cdot 7$, *seu* $12 \cdot 7 = 84$.
tertiæ: $6 \cdot 5 \cdot 3$, *seu* $30 \cdot 3 = 90$.

Communis denominator: $3 \cdot 5 \cdot 7$, *seu* $15 \cdot 7 = 105$.

Igitur reductæ erunt

Prima: $\frac{70}{105}$, *secunda* $\frac{84}{105}$, *tertia* $\frac{90}{105}$.

SCHOLION I.

131. *Vulgo, & usitatissimè plures fractiones ad eundem denominatorem reductæ, semel tantum subscribendo denominatorem communem exprimi solent, sic adductum prius exemplum algebraicum, ita exprimitur* $\frac{adgn,\ bcgn,\ bdfn,\ bdgm}{bdgn}$ *datum item exemplum numericum sic scribitur vulgo* $\frac{70,\ 84,\ 90.}{105}$ *quæ expressio, priore compendiosior, idem prorsus significat.*

SCHOLION II.

132. *Quandoque in Reductione ad eundem denominatorem datur locus compendio. Videlicet I. per* (§.117.) *si unius fractionis denominator major, alterius fractionis denominatorem minorem exactè aliquoties contineat, tali casu, si minor denominator, simulque & illius numerator, multiplicetur per eum numerum, quoties minor in majore continetur, manente illæsa altera fractione, habebuntur fractiones reductæ;* Ex. gr. *Sit Prima* $\frac{4}{10}$, *secunda* $\frac{3}{5}$, *quoniam denominator* secundæ 5, *in denominatore* primæ 10 *bis continetur, multiplicetur fractionis* secundæ $\frac{3}{5}$ *tam numerator* 3, *quam* denominator 5 *per* 2, *erit fractio* secunda $\frac{6}{10}$, *sub eodem denominatore, sub quo est* prima $\frac{4}{10}$.

II. Locus est compendio per (§.118.) *quando per eum numerum, per quem denominator minor in majore continetur, dividi potest exactè tam*

Digitized by Google

tam numerator, quam denominator fractionis habentis majorem denominatorem; manente illæsa altera fractione. Ex. gr. *Sit prima* $\frac{4}{10}$, *secunda* $\frac{3}{5}$, *quoniam denominator* secundæ 5, *bis continetur in denominatore* 10, *numerus verò* 2 *exactè dividat tam numeratorem fractionis* primæ 4, *quam ejus denominatorem* 10, *igitur dividendo per* 2, *erit fractio prima* $\frac{2}{5}$, *sub eodem denominatore, sub quo est secunda* $\frac{3}{5}$; *Quoniam vero horum compendiorum rarior usus occurrit, hinc Tyrones problema reductionum, utpote universale, frequenti exercitio familiare sibi reddant oportet, cum fractiones heterogeneæ nec* addi, *nec* subtrahi *possint, nisi prius ope problematis antecedentis homogeneæ efficiantur.*

COROLLARIUM.

133. Quod si inter duas, vel plures fractiones heterogeneas quæratur, quænam illarum sit quoad valorem major, vel minor, ope hujus problematis reductionum, quæstio resolvetur; nam si datæ fractiones reducantur ad eundem denominatorem, illa erit quoad valorem major, cujus numerator major erit. *Ex. gr.* Si quæratur inter datas fractiones $\frac{3}{4}$ & $\frac{6}{7}$, quænam illarum sit majoris valoris, erunt reductæ per (§. 129.) Prima $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$, secunda $\frac{6}{7} = \frac{24}{28}$, & hinc $\frac{6}{7} > \frac{3}{4}$, quia $\frac{24}{28} > \frac{21}{28}$ per (§. 113.)

DEFINITIO XXII.

134. *Addere fractiones*, est colligere valores partiales datarum omnium fractionum homogenearum in unam fractionem homogenearum, tanquam in unum totum, continens valorem omnium.

PROBLEMA IX.

135. PROP. *Fractiones quasvis datas addere.*

RESOLUTIO.

I. *Si fractiones addendæ sint homogeneæ, id est, ejusdem denominationis*, addantur tantum numeratores. Summæ omnium numeratorum subscribatur denominator communis. *Vide Exempl. I. & II.* Q.E.F.

II. *Si fractiones sint heterogeneæ*, reducantur prius ad homogeneas per (§. 129.) reductæ addantur per Reg. I. hujus. *Vide Exempl. III. & IV.* Q.E.F.

Digitized by Google

DEMONSTRATIO.

Valores partiales fractionum homogenearum habentur per ſolos numeratores (§.113.) ergo fractio ejusdem denominationis, habens pro numeratore ſummam omnium numeratorum fractionum homogenearum, continet valores partiales omnium; jam verò *per Reſolutionem hujus*, numerator fractionis ejusdem denominationis continet omnes numeratores datarum fractionum homogenearum, ergo continet valores partiales omnium, ergo *per datam reſolutionem* habetur fractio homogenea tanquam totum, continens valorem omnium (§.25. Arith.) ergo facta habetur additio fractionum. (§.134.) Q.E.D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint addendæ $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{b}$, *erit ſumma* $\frac{a+c}{b}$.

EXEMPLUM II. IN NUMERIS.

Sint addendæ $\frac{3}{8}$ *&* $\frac{2}{8}$, *erit ſumma* $\frac{5}{8}$.

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sint addendæ $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$, *erunt reductæ* $\frac{ad}{bd}$ *&* $\frac{cb}{bd}$ (§.129.) *& hinc additæ*, $\frac{ad+cb}{bd}$, *vel ſine reductione ſimpliciter* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

EXEMPLUM IV. IN NUMERIS.

Sint addendæ $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$, *& hinc ſumma* $\frac{244}{105}$, *quæ per* (§.125.) *dat integra* $2+\frac{44}{105}$.

SCHOLION.

136. *Quoniam ex additione fractionum plerumque emergit fractio vulgo ſpuria, hæc ad integra reducitur per* (§. 125.) *quemadmodum in exemplo IV. factum eſt. Examen verò additionis, fit per ſubtractionem.*

DEFINITIO XXIII.

137. *Subtrahere fractiones*, eſt invenire fractionem, quæ contineat differentiam valoris duarum fractionum homogenearum valore inæqualium.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA X.

138. PROP. *Fractionem valore minorem à fractione majoris valoris subtrahere.*

RESOLUTIO.

I. *Si fractiones sint homogeneæ;* numerator minor subtrahatur à numeratore majore, & residuo subscribatur denominator communis. *V. Exemp. I. & II.* Q.E.F.

II. *Si fractiones sint heterogeneæ;* reducantur prius ad homogeneas per (§.129.) reductæ subtrahantur per Reg. I. hujus. *Vide Exempl. III. & IV.* Q.E.F.

DEMONSTRATIO.

Valores fractionum homogenearum habentur per solos numeratores (§.113.) ergo fractio homogenea, habens pro numeratore differentiam, seu residuum duorum numeratorum, continet differentiam valoris duarum fractionum homogenearum; sed *per datam Resolutionem*, fractio homogenea exhibens residuum, continet differentiam numeratorum, ergo continet differentiam valoris earundem fractionum, ergo facta habetur subtractio fractionum (§.137.). Q.E.D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, *subtrahenda fractio* $\frac{c}{b}$ *erit differentia* $\frac{a-c}{b}$.

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sit à fractione $\frac{5}{8}$, *subtrahenda fractio* $\frac{3}{8}$ *erit differentia* $\frac{2}{8}$.

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, *subtrahenda* $\frac{c}{d}$, *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{ad}{bd}$ *&* $\frac{bc}{bd}$, *& hinc differentia* $\frac{ad-bc}{bd}$, *vel etiam sine reductione* $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$.

EXEMPLUM IV. NUMERICUM.

Sit à fractione $\frac{5}{7}$, *subtrahenda* $\frac{2}{3}$, *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{15}{21}$ *&* $\frac{14}{21}$, *& hinc differentia, seu residuum* $\frac{1}{21}$.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

139. *Examen subtractionis fit, si numerator residuæ fractionis, addatur ad numeratorem fractionis subtrahendæ, prodire debet numerator fractionis, à qua subtractio facta est; sic si numerator differentiæ* $\frac{2}{8}$, *addatur ad numeratorem* $\frac{3}{8}$, *erit fractio* $\frac{5}{8}$ *ipsissima, à qua subtractio facta est. Contra examen additionis fractionum fit per subtractionem, sic in dato Exemplo II. additionis fractionum* (§.135.) *si à summa* $\frac{5}{8}$, *subtrahatur* $\frac{3}{8}$, *prodire debet* $\frac{2}{8}$, *& vicissim.*

PROBLEMA XI.

140. PROP. *Fractiones per fractiones multiplicare.*

RESOLUTIO.

I. Multiplicentur numeratores inter se, & factum numeratorum erit numerator novæ fractionis *Producti.*

II. Multiplicentur quoque denominatores inter se, & factum denominatorum erit denominator novæ fractionis *Producti. Vide Exempl. I. & II.* Q.E.F.

SCHOLION.

141. *Demonstratio dabitur sequenti problemate, alia verò magis ordinata dabitur ad calcem* Partis ultimæ hujus.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint datæ fractiones $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *erit productum* $\frac{ac.}{bd}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sint multiplicandæ inter se $\frac{4}{3}$ *&* $\frac{5}{7}$, *erit productum* $\frac{4.5}{3.7}$ *seu* $\frac{20}{21}$.

SCHOLION.

142. *Illud à Tyronibus observatu dignum, quod fractio nova, producta ex multiplicatione fractionum,* (ut videre est in Exemplo II.) *quoad valorem longe minor sit, quam valores singularum fractionum, ex quibus per multiplicationem fractio nova orta est, cum tamen in multiplicatione integrorum factum longe majus producatur, quam ipsi factores sint. Ratio itaque hæc est: Quod si quantitas aliqua per* 1 *multiplicetur, ipsa quantitas invariata semel ponitur, ut clarum est; igitur si quantitas multiplicanda sit per aliquid minus unitate, id est per fractionem, minus necessario poni debet, quam sit ipse multiplicandus, igitur pars tantum multiplicandi poni debet pro facto, & hinc productum minus evadit, quam factores singillatim accepti.*

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA XII.

143. PROP. *Fractionem per fractionem dividere.*

RESOLUTIO.

I. Fractionis *dividendæ* numerator multiplicetur per denominatorem fractionis *divisoris*, erit factum numerator fractionis novæ.

II. Fractionis *dividendæ* denominator multiplicetur per numeratorem fractionis *divisoris*, erit factum denominator fractionis novæ exhibentis *quotum. V. Exemp. I. & II.* Q.E.F.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sit divisor $\frac{a}{b}$, *dividenda* $\frac{c}{d}$, *erit quotus* $\frac{bc}{ad}$.

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sit divisor $\frac{4}{5}$, *dividenda fractio sit* $\frac{24}{35}$, *erit quotus* $\frac{24 \cdot 5}{35 \cdot 4}$ *seu* $\frac{120}{140}$, *id est* $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ *per* (§. 121.)

DEMONSTRATIO.

Quotus multiplicatus per divisorem æquatur dividendo per (§. 61. Arithm.) igitur quotus $\frac{bc}{ad} \times \frac{a}{b}$ debet æquari dividendo $\frac{c}{d}$, sed $\frac{bc}{ad} \times \frac{a}{b} = \frac{bac}{bad}$ per (§. 140.) & $\frac{bac}{bad} = \frac{c}{d}$ per (§. 35. & 117.) ergo. Q.E.D.

Demonstratur quoque resolutio prioris Problem. XI. de multiplicatione fractionum. Si factum, sive productum dividatur per unum factorem, pro quoto prodire debet alter factorum, per (§. 57. Arith.) igitur *(in Exemp. I. Probl. XI.)* productum $\frac{ac}{bd}$, si dividatur per unum ex suis factoribus $\frac{c}{d}$ prodire debet alter $\frac{a}{b}$, sed $\frac{ac}{bd} : \frac{c}{d} = \frac{adc}{bdc}$ per (§. 143.), & $\frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$, per (§. 35. & 117.) ergo. Q.E.D.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION I.

144. *Demonstrationes hæ binæ, si in exemplis numericis adductis exhibeantur, veritatem ad oculum declarant, simulque examen seu probam multiplicationis per divisionem, & divisionis per multiplicationem edocent.*

SCHOLION II.

145. *In gratiam Tyronum resolutionem problematis hujus de divisione fractionum, sub hoc schemate exhibeo: ubi ductus linearum, datas supra regulas manifeste exhibent, nempe: quod* c *numerator dividendi multiplicari debeat per* b *denominatorem divisoris, & denominator* d, *quod multiplicari debeat per* a *numeratorem divisoris, ut*

divis. *divid.*

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$$

Quotus $\frac{bc}{ad}$

prodeat quotus $\frac{bc}{ad}$. Aliter: *Invertatur divisor, id est, loco numeratoris scribatur denominator proprius, & loco denominatoris scribatur numerator, deinde fiat multiplicatio numeratorum inter se, itemque denominatorum inter se, ut* (§.140.) *dictum, erit nova fractio quotus,* Ex. gr. *sit dividendus* $\frac{c}{d}$, *divisor* $\frac{a}{b}$, *erit divisor inversus* $\frac{b}{a}$, *& hinc* $\frac{b \times c}{a \times d} = \frac{bc}{ad}$. *Quæ praxes in idem problema recidunt.*

SCHOLION III.

146. *Quotus, ex divisione fractionum ortus, major quoad valorem emergit ipso dividendo, imò sæpe ad fractionem vulgo spuriam assurgit, contra, ac in divisione integrorum fieri debere docuimus. Cujus ratio est, quod, quo minor sit divisor* (etiam in integris) *eo major emergat quotus, manente eodem dividendo; sic si* Ex. gr. 18 *dividatur per* 2, *quotus erit* 9, *è contra si dividatur per* 6 *quotus erit* 3 < 9. *Igitur cum divisor in fractionibus, sit minor unitate, quotus prodire debet major, quam sit dividendus.*

SCHOLION IV.

147. *Quoniam in praxi arithmetica fractiones cum numeris integris frequenter tractandæ occurrant, plerique Arithmeticorum novas regulas integrorum cum fractis fuse proponere solent; nos labori Tyronum parcentes, simulque studentes compendio doctrinæ, artem numeros integros cum fractis tractandi non aliam proponimus, atque eam, quam de fractionibus hucusque exposuimus; hinc unico problemate universali Algorithmos omnes numerorum fractorum cum integris complectemur, sit igitur.*

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA XIII. ET UNIVERSALE.

148. PROP. *Algorithmos omnes fractorum cum integris tractare, id est*, Addere, Subtrahere, Multiplicare, & Dividere *integra cum fractis.*

RESOLUTIO.

I. Quantitas integra exprimatur per modum fractionis vulgo spuriæ, quod fit subscribendo unitatem loco denominatoris.

II. Sub hac ficta imagine fractionis tractetur tanquam fractio vera secundum omnia problemata fractionum hucusque tradita. *Vide Exempla subjecta.* Q.E.F.

DEMONSTRATIO.

Regula I. ostenditur. Data expressio fractionis, est expressio divisionis (§.108.) dividendus autem divisus per unitatem manet invariatus (§.77. Arithm.) ergo expressio hæc quantitatis integræ per fractionem vulgo spuriam non immutat valorem integri. *Quoad erat primum.*

Regula II. Fractio vulgo spuria habet imaginem fractionis, ergo tractari potest, per modum fractionis, ut *constat ex tota doctrina fractionum.*

EXEMPLUM ADDITIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a *addenda in unam fractionem cum* $\frac{c}{b}$, *erit per datam Resolut.* $\frac{a}{1}$ *addenda ad* $\frac{c}{b}$, *& hinc addendæ per* (§.135.) *igitur reductæ erunt per* (§.129.) $\frac{ab}{b}$ *&* $\frac{c}{b}$, *quarum summa est* $\frac{ab+c}{b}$ *per* (§.135.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint numerus 4 *addendus cum* $\frac{2}{3}$, *in unam fractionem, erit numerus* 4 *sub ficta imagine fractionis* $\frac{4}{1}$ *igitur addendæ sunt* $\frac{4}{1}$ *ad* $\frac{2}{3}$ *per* (§.135.) *quare reductæ erunt* $\frac{12}{3}$ *&* $\frac{2}{3}$ *per* (§.129.) *& additæ in unam fractionem* $\frac{14}{3}$ *per* (§.135.)

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLUM SUBTRACTIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit ex quantitate a *subtrahenda fractio* $\frac{c}{b}$, *ergo ex* $\frac{a}{1}$ *subtrahi debet* $\frac{c}{b}$ *per* (§.138.), *igitur reductæ erunt* $\frac{ab}{b}$ *&* $\frac{c}{b}$, *& hinc differentia* $\frac{ab-c}{b}$ *per* (§.138.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit à numero 4 *subtrahenda fractio* $\frac{2}{3}$, *ergo ab* $\frac{4}{1}$ *subtrahi debet* $\frac{2}{3}$ *per* (§.138.) *igitur reductæ erunt* $\frac{12}{3}$ *&* $\frac{2}{3}$, *& hinc differentia* $\frac{10}{3}$ *per* (§.138.)

EXEMPLUM MULTIPLICATIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a *multiplicanda per* $\frac{c}{b}$, *ergo* $\frac{a}{1}$ *multiplicari debet per* $\frac{c}{b}$ *juxta* (§.140.) *erit igitur productum* $\frac{ac}{b}$ *per eundem* (§.140.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 *multiplicandus per* $\frac{2}{3}$, *ergo* $\frac{4}{1}$ *multiplicari debet per* $\frac{2}{3}$ *juxta* (§.140.) *erit igitur productum* $\frac{8}{3}$ *per eundem* (§.140.)

EXEMPLUM DIVISIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a *dividenda per divisorem* $\frac{c}{b}$, *erit dividendus* $\frac{a}{1}$, *& divisor* $\frac{c}{b}$ *igitur per* (§.143.) *quotus* $\frac{ab}{c}$.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 *dividendus per divisorem* $\frac{2}{3}$, *erit dividendus* $\frac{4}{1}$, *& divisor* $\frac{2}{3}$ *igitur per* (§.143.) *quotus* $\frac{12}{2}$.

COROLLARIUM.

149. Eadem methodo procedendum est, si numerus complexus ex fracto & integro tractari debeat cum alio numero complexo itidem ex fracto & integro, aut numerus complexus ex fracto & integro, cum fracto tantum; nam subscribendo integris unitatem, tractentur ut fractiones. Idem est in literalibus.

SCHOLION.

150. *In adductis hucusque Theorematibus, ac problematibus fundamentalibus tota fractionum vulgarium, & simplicium doctrina continetur, de cæteris fractionibus potentiarum, ut sunt fractiones quadraticæ, cubicæ, &c. agetur in* Parte II. hujus; *de earundem progressionibus, & cæteris affectionibus in* Parte IV. *tractabitur. Ne verò aliquid à nobis deside-*

desideretur præstitum fuisse, quod ab aliis quoque pertractatur, bina problemata, non quia necessaria, sed quod sua utilitate in certis circumstantiis non careant, adferemus.

DEFINITIO XXIV.

151. *Communis mensura*, simpliciter, dicitur quantitas, major unitate, quæ alias binas, vel plures quantitates exacte metitur, quod per divisionem exactam innotescit; sic communis mensura respectu numerorum 8, & 12, est numerus 2, item numerus 4, quia per hos tam 8, quam 12 exactè dividitur; Hæc communis mensura vocatur etiam *Pars aliquota communis.*

DEFINITIO XXV.

152. Communis mensura (cum addito) *maxima*, dicitur quantitas, quæ, metiendo plures quantitates inæquales, est mensura maxima respectu quantitatis inter datas minimæ, prout cum aliis conjunctæ. Ita numerorum 8 & 12 communis mensura maxima est numerus 4, quia 4 respectu numeri 8 prout conjuncti cum numero 12, est divisor *maximus*, qui numerum 8 & 12 simul exactè dividit.

COROLLARIUM.

153. Cum duorum, vel plurium numerorum communis mensura maxima, sit divisor, qui respectu numeri inter datos minimi, est maximus, sequitur, quod si numerus inter datos minimus sit divisor respectu reliquorum, erit ipse numerus inter datos minimus communis mensura omnium maxima, quæ in dato casu haberi potest. *E.g.* Sint numeri 8 & 16, cum 8 sit mensura communis, & respectu sui, & respectu numeri 16, cumque respectu sui sit maxima, erit etiam respectu numeri 16 prout conjuncti cum 8, mensura maxima, ita, ut ea major in dato casu haberi non possit, cum divisor respectu dividendi major esse nequit, quam sit ipse dividendus, per (§. 62. Arith.) ergo eidem æqualis, omnium maximus est.

Digitized by Google

PROBLEMA XIV.

154. PROP. *Invenire communem mensuram maximam, seu divisorem communem maximum, per quem exacte dividendo tam numeratorem, quam denominatorem fractionis datæ, fractio reducitur ad terminos minimos possibiles.*

RESOLUTIO.

I. *Denominator* dividatur per *Numeratorem*, quod si ex hac divisione nihil remaneat, erit ipse *numerator*, communis mensura maxima, per quam divisus tam numerator, quam denominator datæ fractionis, producit novam fractionem in terminis minimis. *V. Exemp. I.*

II. Si ex prima divisione denominatoris per numeratorem suum, relinquatur Residuum aliquod, sic procedendum erit; *Numerator* (qui fuit divisor) fiat *dividendus*, & Residuum fiat *divisor*, qui, si exacte dividat numeratorem sine residuo, erit hic communis mensura maxima. *Vide Exempl. II.*

III. Quod si ex secunda divisione numeratoris per residuum, iterum emergat residuum, tum ex secundo *divisore* (qui fuit primum residuum) fiat iterum *dividendus*, & secundum residuum fiat *divisor*; atque hac alternativa methodo tamdiu procedendum est, donec inveniatur aliquis divisor major unitate, qui suum dividendum exactè sine aliquo residuo dividat, erit hic ultimus divisor communis mensura maxima respectu datæ fractionis, ut supra dictum.

IV. Quod si hac methodo procedendo semper aliquod residuum emergat, donec tandem ad divisorem perveniatur, qui sit *unitas*, cum unitas non dividat per (§. 77. Arithm.) signum est, datam fractionem ad minores terminos irreducibilem esse. *Vide Exempl. III.*

EXEMPL.

Digitized by Google

Exemplum I.

Sit fractio reducenda $\frac{36}{144}$

erit

Dividend.	144	*quotus.*
Divisor	36	4
Fact. subt.	144	
Residuum	000	

Igitur dividendo tam numeratorem 36, *quam denominatorem* 144 *per* 36, *erit fractio* $\frac{1}{4}$ *in terminis minimis valore* $= \frac{36}{144}$.

Exemplum II.

Sit reducenda fractio $\frac{108}{144}$

erit

Dividend.	144	*quotus*
Divisor	108	1
Residuum	36	

Secundo.

Dividend.	108	*quotus*
Divisor	36	3
	108	
Residuum	000	

Igitur divisor maximus tam respectu numeratoris 108, *quam denominatoris* 144 *est* 36, *qui producit fractionem in terminis minimis* $\frac{3}{4}$ *æqualem datæ* $\frac{108}{144}$.

Exemplum III.

Sit reducenda $\frac{88}{105}$

erit

Divid.	105	1
Divis.	88	
Residuum	17	

secundo

Divid.	88	5
Divis.	17	
fact. subt.	85	
Residuum	3	

tertio

Divid.	17	5
Divis.	3	
fact. sub.	15	
Residuum	2	

quarto

Divid.	3	1
Divis.	2	
Resid.	1	

Cum ultimus divisor sit unitas, fractio $\frac{88}{105}$ *est irreducibilis.*

Algebraicè.

In fractione algebraica cum omnes factores pateant, E. g. $\frac{abcd}{acdf}$ *deletis per* (§. 35. & 36.) *utrinque terminis homogeneis* acd; *erit in terminis minimis prior fractio* $\frac{b}{f}$.

DEMONSTRATIO.

Regula I. patet ex (§. 121.) Regula II. demonstratur per gradationem retrogradam; nam divisor secundus 36, seipsum seu 36 exacte dividit, sed idem etiam exacte dividit divisorem primum 108, ergo 36 exacte dividit quantitatem 36 + 108, sed 36 + 108 = 144 per (§. 43. Arithm.) ergo 36 est communis mensura, & quidem maxima respectu numerorum 108 & 144.

Digitized by Google

Q.E.D. Eodem modo Regula III. demonstratur. Regula IV. demonstratione non eget, cum unitas, ad quam devenitur, non dividat, per (§.77. Arithm.)

SCHOLION.

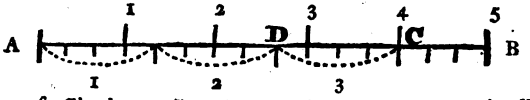
155. *In hujusmodi divisione*, quotorum *nulla habetur ratio. Cæterum molesta hæc initio Tyronibus praxis, suppleri potest per methodum aliam tentativam; videlicet: si tam numerator, quam denominator finales numeros habeant pares*, Ex.gr. 2, 4, 6, 8. *Divisio utriusque exacta tentanaa per numeros pares. Si verò finalis unius sit par, alterius impar, tentanda erit divisio exacta per imparem, eodem modo si uterque sit impar.*

DEFINITIO XXVI.

156. *Fractio fractionis*, vocatur fractio, quæ est pars, vel partes, alterius alicujus fractionis, seu est pars, vel partes, alicujus partis per modum unius consideratæ. *Ex. gr.* $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$.

SCHOLION.

157. *Claritatis gratia; sit linea* AB *primum divisa in 5 partes*



Sitque fractio de tota linea $\frac{4}{5}$, *quæ est Pars* AC. *Porro intelligatur quælibet pars quinta de* AB *subdivisa in tres particulas, vide figuram. Sit jam de hac ipsa parte* AC *indicanda pars* AD, *erit hæc* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{4}{5}$, *id est fractio* $\frac{2}{3}$ *est fractio fractionis* $\frac{4}{5}$.

PROBLEMA XV.

158. PROP. *Fractionem fractionis ad fractionem simplicem reducere.*

RESOLUTIO.

Multiplicetur, per (§.140.) numerator per numeratorem, & denominator per denominatorem illius fractionis, cujus hæc est fractio. Q.E.F.

EXEMPL.

Digitized by Google

EXEMPLUM ALGEBRAICUM.

Sit fractio $\frac{a}{b}$ *de fractione* $\frac{c}{d}$ *erit ad simplicem reducta* $\frac{ac}{bd}$ *per* (§.140.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit fractio $\frac{2}{3}$ *de fractione* $\frac{4}{5}$ *erit reducta ad simplicem* $\frac{8}{15}$. *Resolutio hæc jam demonstrata est* (§.143.)

COROLLARIUM.

159. Liquet itaque *primo:* toties fieri fractionem fractionis, quoties fractiones quæcunque inter se multiplicantur per (§.140.) *Secundo:* patet, per hanc reductionem innotescere valorem fractionis de fractione, ut clarum fit ex contemplatione lineæ AB in Scholio (§.157.) adductæ. Nam AD, de AC, seu $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ faciunt revera de tota linea AB $\frac{8}{15}$. *Tertio* colligitur, si fractio fractionis addenda, subtrahendave sit ab aliis fractionibus, per hoc problema prius ad simplicem esse reducendam.

SCHOLION.

160. *De aliis fractionum proprietatibus agetur suis locis.*

FINIS PARTIS I.

Digitized by Google

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

CAPUT I.

De quantitatum Potentiis, & Radicibus in genere.

DEFINITIO I.

161. *Productum*, seu *factum*, quod oritur, si quantitas quævis per seipsam semel, vel sæpius multiplicetur, vocatur *Potentia*, *Potestas*, vel *Dignitas*. *Ex.gr.* Si *a* per *a* multiplicetur, erit factum *aa*, *Potentia*, *Potestas*, vel *Dignitas*; idem est in numeris sic 3.3 seu 9, est *Potentia* &c.

DEFINITIO II.

162. Multiplicatio quantitatis per seipsam, vocatur *Elevatio*, vel *Evectio* quantitatis ad *Potentiam* &c. Quantitas verò illa, quæ elevatur, vel elevata est ad potentiam aliquam, vocatur *Radix*, vel *Latus* Potentiæ; aut etiam *prima Potentia*. Sic *a* est radix de *aa*, vel *aaa*, item 3 est radix de 3.3 seu de 9.

COROLLARIUM.

163. Omnis itaque quantitas secundum se considerata, & ex qua per elevationem, vel fieri potest, vel facta est potentia, vocari potest *Radix*.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION I.

164. *Ut Tyrones genesim dignitatum tam in quantitatibus integris, quam fractis rectè intelligant. sequentem Tabulam contemplandam subjicio, quæ quantitatis monomiæ evectionem ad aliquot dignitatis gradus declarat. Sit igitur*

IN INTEGRIS.

Algebraicè.	Gradus Potentiæ.	*Numericè.*
$a^0 = 1$	*Nulla Potentia.*	$1 = 1$
$a = a^1$	Radix, *vel prima Potentia*	$3 = 3$
$aa = a^2$	Quadratum, *vel secunda Potentia*	$3 \cdot 3 = 9$
$aaa = a^3$	Cubus, *vel tertia Potentia*	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
$aaaa = a^4$	- - *quarta Potentia*	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

&c. &c. in infinitum.

Universaliter: a^m *significat omnem potentiam, quam denotat exponens m.*

IN FRACTIS.

Algebraicè.	Gradus Potentiæ.	*Numericè.*
$\frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$	Radix, *seu prima Potentia*	$\frac{3}{4}$
$\frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$	Quadratum, *seu secunda Potentia*	$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}$
$\frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$	Cubus, *seu tertia Potentia*	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{27}{64}$

& ita in infinitum.

Universaliter: $\frac{a^m}{b^m}$ *significat omnem Potentiam.*

SCHOLION II.

165. *Ex attenta hujus tabulæ contemplatione sequentia Corollaria deducuntur:* I. *Exponentes accuratè indicare gradum datæ potentiæ, sic* a^2 *significat* secundam Potentiam, *seu* Quadratum; a^3 *exprimit* Cubum, *seu tertiam Potentiam;* a^4, *quartam,* a^5 *quintam Potentiam, & ita porro.* II. *Quadratum* aa, *seu* a^2 *generari, si radix per seipsam semel multiplicetur,* Cubum *verò* aaa, *vel* a^3 *generari, si* Quadratum aa *iterum per* a, *seu per radicem suum multiplicetur; & ita porro:* III. *Ad hoc, ut fracti ad dignitatem evehantur, opus esse, ut tam numeratores, quam denominatores eleventur.*

Digitized by Google

SCHOLION III.

166. *Eodem modo per exponentes exprimuntur gradus dignitatis, seu potentiæ quantitatum*, binomiarum, *vel polynomiarum; sic* $(a+b)^2$ *vel* $\overline{a+b}^2$ *significat totam quantitatem* $a+b$ *esse elevatam ad secundam potentiam, seu ad* quadratum; *item* $(a+b)^3$, *vel* $\overline{a+b}^3$ *significat* cubum, *seu tertiam* potentiam, *& ita porro. Idem est in numeris; sic* $(3+4)^2$ *est* quadratum, $\overline{3+4}^3$ *significat cubum; ut ex doctrina exponentium* (§. 50.) *data clarum est.*

SCHOLION IV.

167. *Nomina, & signa peculiaria graduum* dignitatis, *quibus Arabes, & antiquiores mathematici usi sunt:* Ex. gr. Zensus, *vel* zensi-zensus, *aut* surdesolidus, quadrato-cubus, *& cætera heteroclyta, omittenda potius duxi, quam Tyronum memoriam, obsoletis, & inter Recentiores abolitis nominibus, inutiliter onerare, quorum catalogi, quibus legendi animus est, in comentariis antiquiorum non sinè tædio passim videri possunt.*

HYPOTHESIS I.

168. *Quoniam signum* Radicale *est* $\sqrt{}$ *per* (§. 38.). *Numeri, vel literæ huic signo supra scripti, sunt* Exponentes, *quibus indicatur gradus potentiæ, cujus hæc est radix.* Ex. gr. $\sqrt[2]{}$, vel simpliciter sine exponente $\sqrt{}$, *indicat radicem* quadratam, *seu secundæ potentiæ. Sic* $\sqrt[3]{}$ *indicat radicem* cubicam *seu tertiæ potentiæ, &* $\sqrt[5]{}$ *radicem quintæ potentiæ, aut universaliter:* $\sqrt[n]{}$ *radicem cujuscunque potentiæ.*

SCHOLION I.

169. *Itaque* $\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt{aa}$, *aut* $\sqrt{a^2}$ *significat radicem* quadratam *ex* aa, *quæ cum sit* a *per* (§. 164.) *erit* $\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt{aa}=a$, *ita* $\sqrt{xx}=x$, *&* $\sqrt{aabb}=ab$ *&c. item* $\sqrt[3]{aaa}$, *vel* $\sqrt[3]{a^3}=a$, *& universaliter* $\sqrt[n]{a^n}=a$, *eodem modi in fractis* $\sqrt{\frac{aa}{bb}}=\frac{a}{b}$, *&* $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}=\frac{a}{b}$, *aut* $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{a}{b}$ *&c.*

SCHOLION II.

170. *Eodem modo in* polynomiis. $\sqrt[2]{(a+b)^2}$, *vel* $\sqrt{\overline{a+b}^2}$, *significat radicem* quadratam *de* $(a+b)^2$, *quæ est* $a+b$, *item* $\sqrt[3]{\overline{a+b}^3}$, *denotat radicem* cubicam *&c. Notent Tyrones quod signum radicale* $\sqrt{}$, *afficiat*

Digitized by Google

afficiat tantum quantitatem sibi ad dextram scriptam; sic in hac, $ab\sqrt[2]{aa}$, *vel* $2\sqrt{ac}$, *signum* $\sqrt[2]{}$ *non afficit* ab, *vel* 2, *sed tantum* aa, *vel* ac, *est tamen quantitas antepositа signo* $\sqrt{}$ *coëfficiens, sic* $2\sqrt{aa}$ *significat* $\sqrt{aa} + \sqrt{aa}$.

SCHOLION III.

171. *Sunt qui Hypothesim expressionis radicalis per exponentes, non signo* $\sqrt{}$ *superscribendo exponentem, sed ad latus dextrum, interpositis inter exponentem, & dignitatem duobus punctis exprimunt; sic* Ex. gr. *loco hujus* $\sqrt[3]{ab^4}$, *scribunt:* $\sqrt{3 : ab^4}$, *vel loco hujus* $\sqrt[4]{a+b^3}$, *ponunt* $\sqrt{4 : a+b^3}$, *verum etsi hujusmodi expressio versatis jam in Algebra nihil obturbet, Tyronibus tamen molesta, & perturbata accidit, atque hinc nos ea non utemur.*

DEFINITIO III.

172. *Radix rationalis*, aut *vera*, dicitur illa, quæ numeris exactè exprimi potest; sic numerus 3 (qui est $\sqrt[2]{9}$) est *rationalis*, quia $3.3 = 9$, ita quoque $\sqrt[3]{8}$, quæ est 2, est *rationalis*, quia $2.2.2 = 8$.

SCHOLION.

173. *Hinc* Radix irrationalis, *vel* surda *appellatur, quæ numero exactè exprimi non potest, licet in lineis geometricis dari queat; sic* surda, *vel* irrationalis *est* $\sqrt[2]{28}$; *quia nullus numerus per seipsum semel multiplicatus producere potest* 28, *nam* $5.5 = 25 < 28$, & $6.6 = 36 > 28$. *Sic surda est* $\sqrt[3]{34}$ *nam* $3.3.3 = 27 < 34$, & $4.4.4 = 64 > 34$.

DEFINITIO IV.

174. Radix *Imaginaria*, vel *Impossibilis* illa dicitur, quæ datur in potentia *negativa*, habente *exponentem* numerum parem 2, 4, 6, 8 &c. sic $\sqrt{-a^2}$, vel $\sqrt[2]{-4}$ imaginaria est, & impossibilis.

SCHOLION I.

175. *Radices hujusmodi dicuntur* impossibiles, *quod nec lineis, nec numeris exprimi possint, propterea, quia nulla quantitas per seipsam, adeoque sub* eodem *etiam* signo *multiplicata producere potest quantitatem negativam affectam exponente, qui sit numerus par. Sic* impossi-

Digitized by Google

bilis *est* $\sqrt{-a^2}$, *quia* a.a *dat* $+a^2$ & $-a \times -a$, *dat etiam* $+a^2$, *per* (§. 86.) *ergo* $-a^2$ *produci non potest ex quantitate multiplicata per seipsam sub eodem signo; item* impossibilis *est* $\sqrt[2]{-4}$, *quia tam* $+2$ *quam* -2 *per seipsum multiplicatum dat* $+4$, *per* (§. 86.) *dicitur autem* Imaginaria *propterea, quia saltem imaginatione nostra concipi potest, comparativè nempe ad positivam, cui negativè opponitur, eo prorsus modo, quo impossibilia concipere solemus. Neque tamen sua utilitate carent hæ radices imaginariæ, nam præterquam quod in Analysi numerorum, indicent impossibilitatem Problematis, in Geometria flexus, & curvaturas linearum demonstrant.*

SCHOLION II.

176. *In potentia itaque* negativa *habente exponentem numerum imparem,* 3, 5, 7, &c. *radix non est* imaginaria, *aut* impossibilis, *sed vera, etsi* negativa. *Sic* $\sqrt[3]{-a^3}$, *est possibilis, & vera, est enim* $-a$, *nam* $(-a \times -a) \times -a$, *factum dat* $-aaa$ *seu* $-a^3$, *item* $\sqrt[3]{-64}$ *est* -4, *quia* $(-a \times -4) \times -4$ *producit* -64 *per* (§. 86.)

CAPUT II.

De Extractione Radicum quarumvis.

DEFINITIO V.

178. *Extractio Radicis*, est inventio quantitatis radicalis, quæ, aut elevata produxit datam potentiam, aut, si producere non potuit, saltem in illa proximè continetur.

SCHOLION.

179. *In specie* Extractio radicis quadratæ, *est inventio quantitatis, quæ per seipsam semel multiplicata generavit* quadratum; *item,* Extractio radicis cubicæ, *est inventio quantitatis, quæ per seipsam bis multiplicata produxit* cubum, *& ita porro.*

AXIOMA.

180. Omnis quantitas radicalis considerari, & exprimi potest, tanquam quantitas *binomia, Ex. gr.* $a+b$, aut $a-b$, item $x-y$, vel $x+y$.

COROL-

Digitized by Google

COROLLARIUM.

181. Itaque omnis numerus radicalis monomius, exprimi potest per expressionem *binomiam*, sic numerus $7 = 2 + 5$, vel $3 + 4$, aut $1 + 6$ &c.

THEOREMA I.

182. PROP. *Omne Quadratum (generatum ex* $\sqrt{}$ binomia) *componitur ex tribus elementis;* Primò: *ex quadrato partis primæ radicalis;* Secundo: *ex duobus factis partium radicalium inter se;* Tertio: *ex quadrato partis secundæ radicalis.*

DEMONSTRATUR.

	Algebraicè.	*In Numeris.*	
Sit Radix binomia	$a + b$	$= 2 + 5$	$= 7$
Per seipsam multiplic.	$a + b$	$= 2 + 5$	$= 7$
Erunt facta	$aa + ab$	$= 4 + 10$	-
Partialia	$+ ab + bb$	$= \quad 10 + 25$	-
Quadratum	$aa + 2ab + bb$	$= 4 + 20 + 25$	$= 49$

Sed aa *est quadratum de parte prima radicis* a, & 2ab *est* a. b + a. b, *seu duo facta partium radicalium* a & b *inter se, & denique* bb *est quadratum partis secundæ radicalis* b, *ergo.* Vide Fig. 1. *In qua si linea* CD = DE *secta inæqualiter, vocetur* a + b, *hæ in se invicem* geometrice *multiplicatæ per* (§. 90. Arithm.) *producunt* □DCHE, *constans quadratis partium* aa & bb, & *duobus factis* ab.

Idem in Exemplo numerico: Vide Fig. 2. *in qua* DC *æqualis* DE *sit* Ex. gr. $7''$ *seu* $2'' + 5''$, *constabit totum* □DCHE, *quadrato de* $2''$, *seu* □$4''$, & *quadrato de* $5''$, *seu* □$25''$, & *duobus factis* $10'' + 10''$, *seu* $20''$, *quæ simul faciunt* $49'' = 7''.7'' = (2'' + 5''). (2'' + 5'')$

COROLLARIUM.

183. Cum omnis radix esse possit *binomia*, per (§. 180.) omne quadratum considerari potest generatum ex radice binomia. Itaque formula algebraica, $aa + 2ab + bb$ universaliter repræsentat omne quadratum, sed hæc formula facta est per multiplicationem, ergo inquisiturus, seu extracturus radicem divisione opus est, utatur, cum quod multiplicatio ponit, tollat divisio per (§. 121. Arith.)

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA I.

184. PROP. *Extrahere radicem quadratam ex quadrato Algebraico.*

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sit extrahenda radix

ex	$\square\, aa + 2ab + bb$	$\left\{ a \right.$		*Radix*
Subtrah.	$+ aa \quad \cdots \quad \cdots$			$a + b$
	$- \quad \cdots \quad \cdots$			
Resid.	$+ 2ab + bb$	$\left\{ + b \right.$		
Divis.	$2a) \; + 2ab + bb$			
Subtrah.	$- \quad -$			
	$0 \quad 0$			

Itaque primo: *Quia primum membrum* aa *est quadratum de* a, *erit* $\sqrt{aa} = a$ *per* (§.169.) *quæ locetur post lunulam, erit* a *pars prima radicis binomiæ.*

Secundo: *Ex hac inventa radice* a *fiat quadratum* aa, *quod subscriptum quadrato formulæ* aa, *& subtractum destruit ex formula primum membrum* aa, *remanentibus duobus membris* $2ab + bb$.

Tertio: *Quia in secundo membro* 2ab *continetur pars altera radicis* b, *quæ est multiplicata per* 2a; *& quia* $\frac{2ab}{2a} = b$ *per* (§.85. & 98.) *itaque* 2ab *dividi debet per divisorem* 2a, *& prodibit quotus* $+ b$, *pars nempe altera radicis, quæ ponatur post lunulam.*

Quarto: *Divisor* 2a *multiplicetur per quotum radicalem* b, *& factum* $+ 2ab$ *membro formulæ homogeneo* 2ab *subscribatur. Fiat quoque quadratum ex* b, *quod est* $+ bb$ *idque subscribatur membro formulæ homogeneo* $+ bb$, *unde subtrahendo tam* $- 2ab$ *ex* $+ 2ab$, *quam* $- bb$ *ex* $+ bb$ *nihil relinquent; igitur* $a + b$ *est* $\sqrt{aa + 2ab + bb}$.

SCHOLION.

185. *Hac itaque methodo universali ad numeros applicata ex quocunque numero radicem quadratam extrahere licet, ut paulo post in exemplo declaraturus sum; ante tamen, quam ad numeros descendamus, ut Tyronibus calculum faciliorem reddam, Tabulam sequentem subjicio.*

TA-

Digitized by Google

TABULA

Radicum, Quadratorum, & Cuborum in Numeris unitatum.

I.	$\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt[2]{bb}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sqrt[3]{a^3}$ *vel* $\sqrt[3]{b^3}$
II.	$\square$ aa, *vel* bb	1	4	9	16	25	36	49	64	81	*Quadrata*
III.	*Cub.* aaa	1	3	27	64	125	216	343	512	729	*Cub.* bbb

Series I. *Continet radices tam quadratas, quam cubicas;* Series II. *Continet quadrata numerorum primæ seriei;* Series III. *Exhibet cubos eorundem numerorum primæ seriei. Sic numerus 2 seriei primæ est* $\sqrt[2]{}$ *de* $\square$ 4 *seriei* II. *& idem numerus 2 est* $\sqrt[3]{}$ *de cubo 8 seriei* III.

PROBLEMA II.

186. Prop. *Extrahere radicem quadratam numericam.*

Paradigma Extractionis $\sqrt[2]{}$.

Sit extrahenda $\sqrt[2]{}$ *ex numero* 189225.
Erit formula resolutoria $aa + 2ab + bb$.
Itaque

$$\left\{\begin{matrix} a\,b \\ 4\,3\,5 \end{matrix}\right. \quad 18,92,25$$

Operatio I.

$$aa = -16 \ldots$$

		$2ab + bb = *$	292..
	Divisor	$2a = 4 \cdot 2 =$	8...
Addend.	*duplum factum*	$2ab = 4 \cdot 3 \cdot 2 =$	24...
	quadratum	$bb = 3 \cdot 3 =$	..9..
	Summa subtrahenda	$2ab + bb = *$	249..
Oper. II.	Resid. *auctum*	$2ab + bb =$	✿4325
	Divisor novus	$2a = 43 \cdot 2 =$	86
Addend.	*duplum factum*	$2ab = 43 \cdot 5 \cdot 2 =$	430
	quadratum	$bb = 5\,5 =$	. 25
	Summa subtrahenda	$2ab + bb =$	✿4325
		Residuum	0000

a b novum ex operatione II.
a novum pro operatione II.

Numerica extractio $\sqrt[2]{}$ *secundum formulam algebraicam sic procedit. Datus numerus distinguatur in classes à dextris sinistram versus, classibus singulis bineas notas assignando (sinistima tamen etiam una constare potest) fit hæc classificatio per binas notas ideo, quia quadratum de 9, (qui*

(qui inter unitates maximus est) non excedit duas notas, est enim 9.9 = 81, *ut patet ex Tabula; hæc classificatio ante operationem ostendit, tot notas numericas habituram radicem extrahendam, quot classes reperiuntur. Itaque operatio prima extractionis* $\sqrt[2]{}$ *(intuendo semper formulam algebraicam præfixam) eadem methodo, ut* (§. 184.) *dictum, procedit.*

I. *Cum in numero classis sinisiimæ* 18 *(quem ex formula repræsentat* aa) *contineatur* □ *partis primæ radicalis* a, *quæratur in Tabula radicum in serie II. numerus quadratus æqualis, vel proxime respondens numero* 18, *qui reperitur esse* 16, *cujus superscripta radix numerica* 4 *ponatur post lunulam, voceturque* a ut in Paradigmate factum vides.

II. *Fiat ex invento numero* 4 *quadratum* aa = 4.4 = 16, *idque subtrahatur ex* 18, *erit residuum* 2, *ad quod ex secunda classe deponantur numeri* 92, *& habebitur numerus* ✻ 292, *quem ex formula repræsentant membra formulæ,* 2ab + bb.

III. *Ut reperiatur pars altera radicis* b *dividatur* 29 *per* 2a = 4.2 = 8, *& quotus* 3 *post lunulam positus vocetur* b, *quo reperto.*

IV. *Resolvantur termini formulæ algebraicæ* 2ab + bb, *in numeros jam inventos radicis per* a *&* b *designatos. Erit itaque* 2ab = 4.3.2 = 24, *quod factum directe scribatur infra* 29 (vide Paradigma) *fiat quoque* □ bb = 3.3 = 9 *hoc una nota remotius versus dextram ita scribatur, ut respondeat ultimæ notæ* 2 *ex numero* 292. (vide Paradigma.)

V. *Sic collocati numeri* 2ab *&* bb, *addantur, & habebitur summa* = ✻ 249, *quæ summa* ✻ 249 *subtracta à superiore numero* ✻ 292, *relinquit residuum* 43, *ad quod residuum deponantur numeri tertiæ classis* 25, *erit summa* ✿ 4325 *pro secunda operatione, quem iterum ex formula algebraica repræsentant* 2ab + bb.

Notandum: Quod si summa numerica ex 2*ab* + *bb* subtrahi non posset à superiore numero, signum est inventum quotum *b* deberi minui, & cum minuto *b* operationes Reg. IV. & V. repetendas esse.

187. *Inchoetur II. operatio, pro qua inventi jam numeri radicis* 43 *simul vocentur* a *novum.* (vide Parad.) *Ad inveniendum itaque* b *novum.*

I. *Fiat* novus *iterum divisor ex* novo a, *qui erit* 2a = 43.2 = 86, *per quem dividendo* 432 *reperitur quotus* 5, *qui post lunulam positus vocetur* b novum.

II. *Resolvantur iterum termini formulæ algebr.* 2ab + bb *in numeros per* a *&* b novum *indicatos, erit* 2ab = 43.5.2 = 430, *qui directè infra numeros* ✿ 432 *scribatur, &* □ bb = 5.5 = 25, *una nota remotius juxta Reg. IV. scribatur.* Vide Parad.

III. *Hi*

Digitized by Google

III. *Hi numeri sic collocati, & additi dant summam subtrahendam* ✱4325, *quæ à superiore* ✱4325 *subtracta nihil relinquendo, indicant inventam radicem* 435 *veram, & rationalem esse numeri* 189225, *hujus rectæ inventæ radicis examen est, si* (435·435·) *producat* 189225. *per* (§. 179.)

SCHOLION.

188. *Hac itaque methodo operationis II. semper procedendum erit cum numeris reliquarum classium, si plures fuerint, observata cautè regula: quod pro subsequente quavis operatione, omnes numeri radicis per antecedentes operationes inventi, valere debeant* a novum, *solaque altera pars radicis* b, *per Regula I. II. & III.* (§. 187.) *deinceps investigando eruatur.*

PROBLEMA III.

189. PROP. *Construere formulam universalem pro extrahenda radice quavis, id est, radicem binomiam* a + b *ad datam quamvis potentiam elevare.*

RESOLUTIO.

Multiplicetur $a+b$, per $a+b$, dabit productum hoc secundam potentiam, seu *quadratum*; secunda hæc potentia iterum multiplicata per $a+b$, dat *Tertiam*, seu *Cubum*; tertia iterum multiplicata per $a+b$, dat *Quartam*, & ita porro procedendum, donec *exponens* membri primi de a, & membri ultimi de b exprimat ipsam potentiam petitam, erit hæc formula universalis pro extrahenda radice petita. Q.E.F.

Resolutio hæc per ipsam genesim potentiarum demonstratur.

SCHOLION.

190. *Hac methodo constructa est sequens tabula quatuor potentiarum ex radice binomia* a + b *productarum, quas in infinitum eadem methodo continuare licet.*

√, *seu* I. Potentia $= a+b$
□, *seu* II. Potentia $= a^2+2ab+b^2$
Cub. *seu* III. Potent. $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
IV. Potent. $= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Et ita in infinitum.

In his formulis pulcherrima, ac utilissima Theoremata, corollaria, ac praxes continentur, quas (quia referre libelli mole inhibemur) docentium explicationi, ac Tyronum attentioni, relinquimus.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA IV. UNIVERSALE.

191. PROP. *Datam cujusvis potentiæ radicem numericam extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Ut habeatur formula operationum, elevetur radix binomia $a+b$ ad datam potentiam, cujus radix quæritur per (§.189.)

II. Ut propositus numerus ritè in classes distinguatur, tot notæ à dextris sinistram versus cuivis classi assignandæ sunt, quot unitates denotat exponens primi membri formulæ de a.

III. Ex classe sinistima semper subtrahatur illa potentia, quam ex formula ostendit primum membrum de a, ejus verò radix numerica scribatur post lunulam, quæ vocetur a, ad residuum sinistimæ classis, si quod fuit, deponantur numeri classis secundæ.

IV. Juxta secundum membrum formulæ algebraicæ formetur ex inventa radice numerica a divisor ad quærendum quotum, qui erit radix numerica b, qua reperta, reliqua omnia formulæ membra per a & b expressa resolvantur in numeros inventæ radicis per a & b denominatæ, ut (§.186.) dictum. *Vide Parad. subjectum.*

V. Resoluta hæc facta numerica, ita sub se invicem scribenda sunt, ut notæ dextimæ singulorum factorum una nota remotius versus dextram promoveantur. *Vide Paradigma subjectum;* hoc modo scripta hæc facta partialia addantur, addita à suprascripto numero classis secundæ, auctæ per residuum si quod fuit, subtrahantur.

VI. Sic absoluta classe secunda, eadem methodo cum classe tertia, & cæteris classibus procedendum erit, *assumendo semper pro formando novo divisore a omnes jam repertas (per antecedentes operationes) radices numericas,*

Digitized by Google

mericas, eæque per novum *a* denominatæ, & juxta membrum ſecundum formulæ in numeros reſolutæ, erunt *novus* diviſor pro inquirendo *novo b*, quo invento juxta *Reg. IV. & V. hujus* procedatur.

Quæ regulæ univerſales, ut clariores evadant, eas ad extrahendam radicem cubicam applicabimus, ſit itaque extrahenda $\sqrt[3]{}$ *ex numero* 14886936, *erit per* (§. 189.).

Formula algebraica,

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb$$

					Radix
				14,886,936	$\begin{cases} a\ b \\ 246 \end{cases}$
Operatio I.	$aaa = 2.2.2 =$			8	
	$3aab + 3abb + bbb =$			✱6886 . . .	*a b novum ex operatione II.*
Diviſor	$3aa = 2 . 2 . 3 =$			12 . . .	*a novum operationis II.*
Addend.	$3aab = 4 . 2 . 2 . 3 =$			48 . . .	
	$3abb = 4 . 4 . 2 . 3 =$			-96 . . .	
	$bbb = 4 . 4 . 4 =$			--64 . . .	
	Subtrahend.			= ✱5824 . . .	
Operatio II.	$3aab = 3abb + bbb =$			✱1062936	
Diviſ. nov.	$3aa = 24 . 24 . 3 =$			1728	
Addend.	$3aab = 6 . 24 . 24 . 3 =$			10368	
	$3abb = 6 . 6\ 24 . 3 =$			--2592	
	$bbb = 6 . 6 . 6 =$			----216	
	Subtrahendus			= ✱1062936	
	Reſiduum nullum			= 0000000	

SCHOLION.

192. *Quod ſi poſt ſubtractionem claſſis ultimæ reſiduum aliquod emergat, conſtat ex* (§. 174.) *radicem inventam non eſſe exactam, adeoque in propoſito numero dari radicem irrationalem, & ſurdam, quæ licet à vera, deficere non poſſit una unitate radicali, quia tamen hic defectus radicalis (ob multiplicationem iteratam, per quam potentiæ generantur) defectum ſæpe inſignem in potentia producit; idcirco neceſſe eſt noſſe methodum per decimales, appropinquandi ad illam unitatem radicalem ita, ut, ſi placet, ne una millionejima parte unitatis illius aberrare contingat; itaque.*

Digitized by Google

PROBLEMA V. UNIVERSALE.

193. PROP. *Extracta radice proximè vera ex quavis potentia irrationali, approximare ad radicem veram per fractiones decimales.*

RESOLUTIO.

I. Extracta radice proximè vera per (§.191.) ad residuum ultimum addantur tot zeri, quot unitates denotat præfixæ formulæ algebraicæ exponens primi membri de *a*; *Ex.gr.* In approximatione ad radicem quadratam, addantur zeri duo, in cubica, zeri tres, &c.

II. Cum hoc residuo zeris aucto procedatur secundum Regulas IV. & V. (§.191.) assumendo scilicet pro novo *a* totam radicem inventam, & per hanc inquirendo, juxta Reg. IV. & V. (§.191.) in novum *b*, reperietur prima nota numeratoris, (quæ vocetur *b* novum) pro denominatore vero scribatur 10, & habebuntur partes decimæ, unitatis radicalis.

III. Ex hoc numeratore *b*, & cæteris notis per *a* novum denominatis formentur in numeris omnia membra formulæ præfixæ, *ut Regula IV. & V.* (§.191.) *dictum*, quibus additis, & subtractis, ad residuum iterum addantur tot zeri, quot exponens in formula præfixa signat, & assumendo pro novo *a* omnes notas radicis, una cum nota numeratoris, procedatur iterum ad inquirendum novum *b*, per easdem Reg. IV. & V. (§.191.) quo reperto, & priori numeratori adjuncto, denominator augeatur uno zero, & habebuntur partes centesimæ, atque hac methodo reliquas numeratoris notas eruendo, & post singulas operationes denominatorem uno zero augendo, pervenietur tandem absoluta operatione sexta ad partes millionesimas.

In

Digitized by Google

In gratiam Tyronum subjungo approximationem ad radicem quadratam. In part. centesimis. Sit itaque extrahenda $\sqrt{}$ *ex numero irrationali* 1286.

Formula algebraica, $a^2 + 2ab + b^2$ b, b

12,86 { 3586
$aa =$ 9 { ab 100
$2ab + bb =$ ✱386 a
Divisor $2a = 3.2 =$ 6

$2ab = 5.3.2 =$ 30
$bb = 5.5 =$ 25
Subtrahend. = ✱325

Adproximat I. *Resid. auct. zeris* ✱ 6100
Divisor $2a = 35.2 =$ 70

$2ab = 8.35.2 =$ 560
$bb = 8.8 =$ 64
Subtrahend. = ✱ 5664

Adproximat. II. *Resid. auct. zeris* ✱43600
Divisor nov. $2a = 358.2 =$ 716

$2ab = 6.358.2 =$ 4296
$bb = 6.6 =$ 36
Subtrahend. = ✱42996

Residuum pro approximatione III. 604
& ita porro progrediendum.

SCHOLION.

194. *Extractio radicum, & approximatio eadem methodo peragitur in potentiis fractionum, extrahendo videlicet radicem datam tam ex numeratore, quam denominatore sic* $\sqrt{\frac{25}{64}}$ *erit* $\frac{5}{8}$. *Examen verò rectè inventæ radicis tam in integris, quam fractis est, si inventa radix elevata ad datam potentiam, una cum adjuncto residuo (si quod fuit) adæquet numerum, ex quo radix extracta est, ut tentanti in adductis supra exemplis patebit.*

PROBLEMA VI.

195. PROP. *Potentiam quamvis per exponentes expressam elevare ad aliam potentiam per exponentes indicandam.*

Digitized by Google

RESOLUTIO.

Exponens datæ potentiæ elevandæ multiplicetur per exponentem potentiæ ad quam elevari debet. Q.E.F.

EXEMPLA ALGEBRAICA.

Sit a^3 *elevandum ad* 2 *potentiam, erit* $a^{3 \cdot 2} = a^6$ *secunda potentia de* a^3, *sic* x^m *elevatum ad potentiam* n, *erit* x^{mn} *&* $(a+b)^3$ *elevatum ad* 3 *potentiam* $(a+b)^9$

Idem est in potentiis numericis per exponentes indicatis.

Demonstratio liquet; hæc enim multiplicatio exponentium tantum supplet vicem additionis iteratæ exponentium, quam fieri debere docuimus in multiplicatione quantitatum exponentibus affectarum in Casu III. (§.89.) nam a^3 elevatum ad secundam potentiam est $a^3 . a^3 = a^{3+3} = a^6$, ergo. Q.E.D.

PROBLEMA VII.

196. PROP. *Ex data potentia per exponentes expressa, indicare per exponentes, extractam esse radicem datam quamvis.*

RESOLUTIO.

Exponens datæ potentiæ dividatur per exponentem datæ radicis. Q.E.F.

EXEMPLA ALGEBRAICA.

Sit indicandum extractam esse $\sqrt[2]{}$ *de potentia* a^6 *erit* $\sqrt[2]{a^6} = a^{6:2} = a^3$, *item* $\sqrt[n]{x^{mn}} = x^{mn:n} = x^m$, *item* $\sqrt[3]{(a+b)^{9:3}} = (a+b)^3$ *&c.*

Demonstratio clara est: Extractio radicis fit per divisionem (§.191.), divisionem autem quantitatum exponentibus affectarum fieri docuimus Cas. IV. (§.198.) per subtractionem, unde sequitur divisionem hanc supplere iteratam subtractionem, sic $a^6 : a^3$, seu per suam radicem, est $a^{6-3} = a^3$, &c. Q.E.D.

SCHO-

SCHOLION I.

197. *Postrema duo Problemata usum amplissimum habent in calculo radicum irrationalium de quo, in compendio sequenti capite; nam ope horum problematum quantitates irrationales reduci possunt ad expressionem rationalium, sub qua, ut rationales tractari possunt; sic* $\sqrt[2]{a} = a^{1:2}$ *item* $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$, *aut* $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ *&c.*

SCHOLION II.

198. *De quatuor algorithmis potentiarum jam actum est* Parte I. *sunt enim potentiæ nihil aliud, quam quantitates affectæ exponentibus, & vicissim. Hinc* Additio *potentiarum fit per Cas. I. & II.* (§. 74.) Subtractio *per* (§. 78.) Multiplicatio *per Cas. III.* (§. 89.) Divisio *per Cas. IV.* (§. 98.) *Illud hic in divisione potentiarum notandum: quod si pro quoto prodeat potentia cum exponente negativo (ut fit in casu, quo* divisoris *exponens major est exponente* dividendi) *hujusmodi potentia sit fractio, cujus numerator est* 1, *denominator verò eadem potentia, sed cum exponente positivo; sic* Ex. gr. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, *nam* Ex. gr. $a^3 : a^5 = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa}$; *sed* $a^3 : a^5 = a^{-2}$ *per Cas. IV.* (§. 98.) *ergo* $a^{-2} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$ *Sic* $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ & $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ *&c.*

SCHOLION III.

199. *Locus hic esset agendi de potentiis affectis, & deficientibus, ac de earundem extractione radicis, item de inventione radicum verarum, & falsarum in formulis potentiarum reductis ad nihilum, qualis est,* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *quarum singulares observationes ex earundem natura, & genesi referunt cum Carthesio, Hariotus, & cæteri Recentiores, quas, quia ii, qui ad sublimiorem Algebram perdiscendam animum adjecerint, facile ex Recentiorum Analyticorum libris petere possunt, nos (prima duntaxat principia Tyronibus tradentes) prætermittere cogimur, earumque loco calculum quantitatum irrationalium capite sequenti strictim pertractabimus, propterea, quod sine hujusmodi notitia tam Recentiorum Mathematicorum, quam Philosophorum obvii calculi intelligi nequeant. Itaque.*

Digitized by Google

CAPUT III.

De calculo quantitatum, & radicum irrationalium, seu surdarum tam simplicium, quam compositarum.

DEFINITIO VI.

200. Radices *heterogeneæ* dicuntur, quarum exponentes radicales sunt heterogeneæ, ut (§. 54.) dictum, sic heterogeneæ sunt $\sqrt[n]{b^m}$ & $\sqrt[s]{a^r}$, item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt[3]{18}$. Homogeneæ sunt, quæ eosdem habent exponentes radicales, sic $\sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{b^r}$, item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt[2]{8}$.

PROBLEMA VIII.

201. PROP. *Quantitates irrationales heterogeneas reducere ad homogeneas.*

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sint reducendæ $\sqrt[n]{b^m}$ *&* $\sqrt[s]{a^r}$ *erunt per* (§. 196.) $\sqrt[n]{b^m} = b^{m:n}$ *&* $\sqrt[s]{a^r} = a^{r:s}$ *cum itaque exponentes de* $b^{m:n}$ *&* $a^{r:s}$ *sint expressio fractionum habentium diversos denominatores, hos reducendo ad eundem denominatorem per* (§. 129.) *erunt* $b^{ms:ns}$ *&* $a^{rn:ns}$, *ergo restituendo signa radicalia erunt* $b^{ms:ns} = \sqrt[ns]{b^{ms}}$ *&* $a^{rn:ns} = \sqrt[ns]{a^{rn}}$, *sed* $\sqrt[ns]{}$ *&* $\sqrt[ns]{}$ *sunt homogeneæ per* (§. 200.) *ergo. Q. E. F. & D.*

Eadem resolutio applicata ad radices surdas numericas veritatem problematis declarat.

PROBLEMA IX.

202. PROP. *Quantitates irrationales ad expressionem simplicissimam, seu ad terminos minimos reducere.*

RESO-

Digitized by Google

RESOLUTIO.

Videatur, an quantitates irrationales in factores suos resolutæ contineant factorem unum, qui sit potentia rationalis, ejusdem potentiæ, cujus est exponens radicis præfixæ, ex hoc factore actualiter extracta radix rationalis ponatur ante signum $\sqrt{}$, altero factore manente post signum $\sqrt{}$. Q.E.F.

EXEMPLUM ALGEBRAICUM.

Sit reducenda $\sqrt[2]{aab}$, *quoniam* $\sqrt[2]{aab} = \sqrt[2]{b.aa}$, *erit per datam resolutionem* $\sqrt[2]{aab} = a\sqrt[2]{b}$, *item* $\sqrt[3]{abbb} = b\sqrt[3]{a}$, *&* $\sqrt{48aabc} = \sqrt{3.16.aa.bc} = 4a\sqrt{3bc}$, *idem est in compositis, & fractis.*

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit reducenda $\sqrt{12} = \sqrt{3.4}$, *erit reducta* $2\sqrt{3}$, *item* $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2.8}$ *erit* $2\sqrt[3]{2}$.

SCHOLION.

203. *Quod si quantitas irrationalis, aut in factores resolvi non possit, aut nullis factorum sit potentia exponentis datæ radicis, quantitates hæ erunt irreducibiles; sic irreducibiles sunt* $\sqrt{7}$ & $\sqrt[3]{5}$, *item* $\sqrt{10} = \sqrt{2.5}$, *aut* $\sqrt{ab}$, *vel* $\sqrt[3]{aab}$.

DEFINITIO VII.

204. Si duæ, vel plures quantitates, ad expressionem simplicissimam reductæ, habentes eosdem exponentes radicales, habeant præterea eandem quantitatem post signum $\sqrt{}$ positam, quantitates hæ dicuntur *communicantes*, *Ex.gr.* $3\sqrt{2}$, & $5\sqrt{2}$, item $a\sqrt[3]{b}$ & $c\sqrt[3]{b}$ &c. in aliis expressionibus dicuntur *incommensurabiles.*

Digitized by Google

PROBLEMA X.

205. *Addere quantitates irrationales.*

RESOLUTIO.

Ante operationem reducantur per (§. 202.) ad expressionem simplicissimam.

CASUS I. Si quantitates reductæ fuerint *communicantes* (§. 204.) quantitates ante signum $\sqrt{}$ positæ addantur, ut (§. 74.) dictum, harum summa uni quantitati radicali præfixa, erit summa quæsita. Q. E. F. *Vide Exempl. I. & II. Cas. I.*

CASUS II. Si quantitates irrationales sint irreducibiles, aut *incommensurabiles*, addendæ sunt, ut quantitates heterogeneæ per Cas. II. (§. 74.) *Vide Exempl. I. & II. Cas. II.*

CASUS I. EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint $\sqrt{4aab} - \sqrt{9aabc}$ *erunt* $2a\sqrt{b} - 3a\sqrt{bc}$ *per*
Add. $\sqrt{16aab} - \sqrt{aabc}$ *reduct.* $4a\sqrt{b} - a\sqrt{bc}$ (§. 202.)

Summa $6a\sqrt{b} - 4a\sqrt{bc}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sint $\sqrt{48} - \sqrt{50}$ *seu* $\sqrt{3.16} - \sqrt{2.25}$ *erunt* $4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$
Add. $\sqrt{12} + \sqrt{162}$ *seu* $\sqrt{3.4} + \sqrt{2.81}$ *reduct.* $2\sqrt{3} + 9\sqrt{2}$

Summa $6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$

CASUS II. EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{ab} + a\sqrt{b} \\ & \sqrt{cd} - a\sqrt{c} \\ \hline \textit{Summa} & \sqrt{ab} + a\sqrt{b} + \sqrt{cd} - a\sqrt{c} \end{array}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{7} + 2\sqrt{3} \\ & \sqrt{5} - 2\sqrt{6} \\ \hline \textit{Summa} & \sqrt{7} + 2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{6}. \end{array}$$

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA XI.

206. PROP. *Subtrahere quantitates irrationales.*

RESOLUTIO.

CASUS I. Si quantitates irrationales per (§. 202.) reductæ fuerint *communicantes*, quantitates ante $\sqrt{}$ positæ subtrahantur, ut homogeneæ per (§. 78.). *Vide Exempl. I. & II. Cas. I.*

CASUS II. Si fuerint *incommensurabiles*, tractentur ut heterogeneæ. *Vide Exempl. I. & II. Cas. II.*

CASUS I.

EXEMPLUM I. ALGEBR.

	$6a\sqrt{b} - 4a\sqrt{bc}$
Subtrah.	$4a\sqrt{b} - a\sqrt{bc}$
	$- \quad +$
Resid.	$2a\sqrt{b} - 3a\sqrt{bc}$

EXEMPLUM II. NUMER.

	$6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$
Subtrah.	$2\sqrt{3} + 9\sqrt{2}$
	$- \quad -$
Resid.	$4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

CASUS II.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

	$\sqrt{ab} + a\sqrt{b}$
Subtrah.	$\sqrt{a} - a\sqrt{cb}$
	$- \quad +$
Resid.	$\sqrt{ab} + a\sqrt{b} - \sqrt{a} + a\sqrt{cb}.$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

	$\sqrt{7} - 2\sqrt{6}$
Subtrah.	$2\sqrt{3} - \sqrt{5}$
	$- \quad +$
Resid.	$\sqrt{7} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}.$

PROBLEMA XII.

207. PROP. *Multiplicare quantitates irrationales per irrationales.*

RESOLUTIO.

I. Videatur, an quantitates radicales sint homogeneæ per (§. 200.) si homogeneæ sint, multiplicentur

Digitized by Google

quantitates ante ſignum poſitæ, per quantitates ſigno $\sqrt{}$ antepoſitas, & quantitates poſt ſignum poſitæ, per quantitates ſigno $\sqrt{}$ poſtpoſitas, ut (§. 89.) dictum. *Vide Exempl. I. II. III. & IV.*

II. Si ſint heterogeneæ (§. 200.) reducantur prius ad eandem denominationem per (§. 201.) reductæ multiplicentur per Reg. I. *Vide Exempl. V.*

EXEMPLUM I. ALGEBR.	EXEMPLUM II. NUMER.
Factores $\begin{cases} \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} \end{cases}$	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
Fact. part. $\sqrt{aa}+\sqrt{ab}$ $-\sqrt{ab}-\sqrt{bb}$	$\sqrt{9}+\sqrt{6}$ $-\sqrt{6}-\sqrt{4}$
Fact. $\sqrt{aa}-\sqrt{bb}=a-b$	$\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2.$

EXEMPLUM III. ALGEBR.	EXEMPLUM IV. NUMER.
$a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ $c\sqrt{m}$	$2\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}$ $-4\sqrt[3]{5}$
$ac\sqrt{bm}-cc\sqrt{dm}$	$-8\sqrt[3]{20}+12\sqrt[3]{10}$

EXEMPLUM V. ALGEBRAICUM.

Sint multiplicandi $\sqrt[n]{b^m}$ *per* $\sqrt[s]{a^r}$, *erunt reductæ per* (§. 201.) $\sqrt[ns]{b^{ms}}$ *&* $\sqrt[ns]{a^{rn}}$, *& hinc factum* $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}}$.

Eodem modo tractandæ ſunt radices numericæ heterogeneæ.

PROBLEMA XIII.

208. PROP. *Dividere quantitates irrationales per irrationales.*

RESOLUTIO.

Si ſint homogeneæ radicales (§. 200.) dividantur quantitates ante $\sqrt{}$ poſitæ per antepoſitas, poſt poſitæ per poſtpoſitas, ut (§. 98.) dictum. *V. Exempl. I. & II.*

II. Si ſint heterogeneæ, reducantur prius ad homogeneas per (§. 201.) reductæ dividantur per Reg. I. *Vide Exempl. III.*

EXEMPL.

Digitized by Google

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Divisor	Dividendus	Quotus
$c\sqrt{m}$	$\left\{\begin{matrix} ac\sqrt{bm} - cc\sqrt{dm} \\ ac\sqrt{bm} - cc\sqrt{dm} \end{matrix}\right\}$	$a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$
$-$	$+$	

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$-4\sqrt[3]{5}\left\{\begin{matrix} -8\sqrt[3]{20} + 12\sqrt[3]{10} \\ -8\sqrt[3]{20} + 12\sqrt[3]{10} \end{matrix}\right\} 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2}$$

$$+ \qquad -$$

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sit dividendus reductus per (§. 210.) $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}}$ *divisor* $\sqrt[ns]{a^{rn}}$, *erit* $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}} : \sqrt[ns]{a^{rn}} = \sqrt[n]{b^{ms}} = b^{ms:n} = \sqrt{b^{m}}$.

SCHOLION I.

209. *Eodem modo tractantur radices radicum, seu quantitates sub duplici signo radicali,* Ex. gr. $3\sqrt{\sqrt{2}}$, *aut* $(3+\sqrt{5})\sqrt{6}$, *modo observetur, quod quantitates aut duplici signo radicali antepositæ, aut parenthesi inclusæ, tractari debeant ut rationales; quarum calculus videri poterit apud authores infra referendos.*

SCHOLION II.

210. *Calculus radicum imaginariarum eodem modo peragitur, quo realium, modo notetur in multiplicatione, & divisione signa negativa post radicale signum posita non mutari in positiva, allas ex quantitate imaginaria, & impossibili fieri posset realis, & possibilis, quod est absurdum; hinc regulæ de signis* (§. 86. & 96.) *traditæ tantum respectu signorum ante* $\sqrt{}$ *positorum locum habent. Sic*

Si $\sqrt{-50}$ *addendæ sit ad* $\sqrt{-8}$, *erit* $\sqrt{-50} = \sqrt{-2.25} = 5\sqrt{-2}$, *&* $\sqrt{-8} = \sqrt{-2.4} = 2\sqrt{-2}$ *per* (§. 202.) *& hinc summa* $5\sqrt{-2} + 2\sqrt{-2} = 7\sqrt{-2}$, *id est* $\sqrt{-2.49} = \sqrt{-98}$. *Item*

Ex $\sqrt{-98}$ *subtrahendo* $\sqrt{-8}$, *erunt reductæ,* $\sqrt{-98} = 7\sqrt{-2}$, *&* $\sqrt{-8} = 2\sqrt{-2}$, *& hinc differentia* $7\sqrt{-2} - 2\sqrt{-2} = 5\sqrt{-2}$.

Pariter multiplicando $\sqrt{-6}$ *per* $\sqrt{-3}$ *dat factum* $\sqrt{-18}$, *& dividendo* $\sqrt{-18}$ *per* $\sqrt{-3}$ *dat quotum* $\sqrt{-6}$. *Sed & de his, cum nobis prolixioribus esse non liceat, plura ex infra citandis authoribus petenda erunt.*

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION III.

211. *Non ignoro celeberrimos Italiæ Analystas docere multiplicando, vel dividendo radices imaginarias per imaginarias, signa — mutari debere in +, quod ipsum* Cl. D. Martine *pluribus ostendere conatur. Sed enim adverto, radicem imaginariam non esse negativam, uti nec est positiva, nam propterea impossibilis asseritur, quod nec sit positiva, nec negativa; nunquam itaque intelligere poteram, ut ex quantitatibus, quæ nec positivæ, nec negativæ forent, quantitas produci queat positiva, uti assequi non possum, quo modo ex duobus entibus involventibus contradictionem, componi possit ens unum possibile.*

FINIS PARTIS II.

ELE-

Digitized by Google

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS III.

De Analysi speciosa, seu arte resolvendi problemata, & quæstiones quantumvis reconditas.

CAPUT I.

Axiomata, Præcepta, & Praxes universales totius artis Analiticæ.

DEFINITIO I.

212. Æquatio, dicitur formula algebraica exprimens per interpositionem signi = certas quantitates quomodocunque affectas esse sibi invicem æquales, vel etiam æquales nihilo: *Ex.gr.* $ax + c = ab - d$, vel $3 + 5 - 2 = 6$, aut $ax - ab = 0$.

SCHOLION I.

213. *Æquationis itaque formula exprimit quantitates omnes simul acceptas, & ante signum = positas, æquales esse quoad valorem omnibus, quantitatibus simul sumptis, & post signum = positis, seu quod idem est, quantitates ad latus sinistrum signi = positas æquivalere quantitatibus ad latus dextrum signi = collocatis, ut ex hactenus dictis constat.*

SCHOLION II.

214. *Cum unicum medium, quo utitur Algebra ad resolvendas quæstiones etiam abstrusissimas, sit Æquatio, seu Æqualitatis expressio, totum artis Analyseos artificium fundatur in inventione Æquationis, & arte reducendi (per axiomata de Æqualitate quantitatum,) datam Æqua-*

Digitized by Google

Æquationem ad unum terminum incognitum, ita, ut ex una Æquationis parte obtineatur unus solus terminus incognitus liber ab omnibus aliis tam cognitis, quam incognitis terminis, ex alia verò Æquationis parte meri termini noti habeantur; quod, qua ratione ritè fieri debeat, in quinque operationes artem universam resolvendi quæstiones distinguo, in quibus, si Tyro Analysta rectè exercitatus fuerit, nihil tam reconditum proponi eidem poterit, cujus solutionem, harum operationum ope, daturus non esset. Prima itaque operatio Analystæ erit: I. Quæstionis propositæ accurata omnium circumstantiarum discussio, & perfecta, perspectaque propositi status quæstionis intelligentia. II. Apta & debita quantitatum, tam cognitarum, quam incognitarum per literas alphabeti denominatio. III. Inventio, & expressio Æqualitatis. IV. Reductio Æquationis, & V. Æquationis reductæ in numeros resolutio, *vel* figuræ constructio *de quibus in compendio jam specialius.*

OPERATIO I. ANALYSEOS.

215. Quæstionis resolvendæ accurata omnium conditionum, & circumstantiarum discussio.

I. *Analysta resoluturus problema aliquod, considerabit primum accurate, quis sit status quæstionis, seu quid petatur inveniendum? quo cognito.*

II. *Conditiones, & circumstantias in quæstione resolvenda appositas sedulo evolvet.*

III. *Inquiret in quantitates notas; & ignotas, quænam dentur cognitæ; quæ incognitæ lateant.*

IV. *Intelligere adlaboret, quænam sit illa quantitas incognita, à cujus notitia dependet solutio problematis, & quamnam relationem quantitates cæteræ ad hanc habeant.*

V. *Quænam quantitates (seu eæ sint cognitæ, seu incognitæ) ex ipsis conditionibus in problemate appositis, dicantur vel inter se, vel cum tertia aliqua quantitate æquales, aut saltem proportionales. His rite intellectis procedat Analysta ad operationem II.*

OPERATIO II.

216. Apta, & debita quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum per literas alphabeti denominatio.

I. *Quantitates notas per primas, ignotas per ultimas Alphabeti literas denominet, ut (§. 4. & 5. item 41. 42. & 43.) dictum.*

II. *Quando occurrunt plures quantitates (seu eæ sint cognitæ, seu incognitæ) quæ ob certam relationem ex discussione quæstionis notam,*

Digitized by Google

notam, paucioribus literis exprimi possunt, id præstat faciendum, ad facilitandam operationem Reductionis, ut si dentur duæ incognitæ, E. g. x & y, *constat autem* y *esse duplum de* x, *loco* y, *scribo* 2x, *item si esset* y *subduplum seu una dimidia pars de* x, *eam per* $\frac{x}{2}$ *melius denominabit Analysta, quam per* y, & *ita de aliis.*

III. *Denominationem factam ad latus folii aliquod seorsim & distincte, (adscriptis etiam eorum nominibus in quæstione adductis, interposito signo =) sibi adnotet Analysta, tum ne e memoria elabantur quantitates, pro quibus substitutio literarum facta est, tum ut Resolutio Æquationis reductæ ordinatè peragatur.*

OPERATIO III.

217. Quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum in formulam Æquationis collocatio, seu inventæ æqualitatis expressio.

I. *Discussis rite conditionibus quæstionis propositæ, denominatisque terminis, videatur, quæ quantitates (vel simul, vel seorsim acceptæ) dicantur æquales, aut saltem proportionales, nihil respiciendo notæne sint, an ignotæ, sed ignotas tanquam notas juxta conditiones quæstionis promiscuè in æquationem ordinabit; seu quod idem est; quæstionem ex idiomate latino, vel alio quocunque, in algebraicum per signa, & hypotheses exprimendum transferet, & eloquetur Analysta; erit hæc elocutio desiderata Æquatio prima ad solutionem ope Reductionis aptanda.*

I. *Tot* Æquationes *formabit, ex conditionibus quæstionis, quot termini inveniuntur incogniti diversi, excepto casu quæstionum indeterminatarum, de quibus infra.*

SCHOLION.

218. *Quemadmodum primæ Æquationis inventio, & expressio acre, ac subtile ingenium Analystæ desiderat, quæ (utpote maximi laboris) lapis est Lydius, in quo sincerum periculum Analysta facere poterit suimet ingenii, ita habita prima Æquatione (quam tamen perspicax ingenium Analystæ ex conditionibus quæstionis propositæ haud difficile formabit) nihil facilius, quam (ope* Reductionis*) quæstionis solutionem reperire, repertamque exhibere.*

OPERATIO IV.

219. Æquationum primarum ad unum terminum incognitum, & solitarium Reductio.

Animad-

Digitized by Google

Animadvertant Tyrones Analystæ, scopum, & finem unicum hujus operationis esse, ut servato semper utriusque partis Æquationis, valore æquali, Æquatio ita transformetur per operationes contrarias, ut ex una parte terminus ignotus separatus ab omnibus aliis tam notis, quam incognitis compareat, ex altera vero parte meri termini noti, nullis ignotis permixti habeantur; quod ut rectè tractent Analystæ per axiomata, & regulas paulo post referendas, sequentem regulam universalem cautè velim observent, & menti imprimant, videlicet.

Quæcunque operatio cum una Æquationis parte suscipitur, eadem, & in alia Æquationis parte peragatur, *excepta* Metathesi, *ut infra declarabitur. Itaque sequentia Axiomata, in quibus Reductionis regulæ fundantur, memoriæ cumprimis mandet Analysta.*

AXIOMATA QUANTITATUM, tam Æqualium, quam inæqualium.

220. I. Idem sibimetipsi, & simile, & æquale est ut $a = a$, & $3 + 2 = 5$.

221. II. Quæ sunt æqualia uni tertio, sunt etiam æqualia inter se, ut si $a = x$, & $b = x$, erit quoque $a = b$, item si $3 + 2 = 5$, & $7 - 2 = 5$, erit etiam $3 + 2 = 7 - 2$. Et hinc

222. III. Æquale pro æquali, aut æqualia pro æqualibus substitui, & surrogari possunt, ut si $x = y$, & $y = a$, erit quoque $x = a$.

223. IV. Si Æqualibus addatur æquale, vel æqualia, manent æqualia, ut si $a = x$, & parti utrique addatur b, erit $a + b = x + b$, item si $a = x$, & $c = d$, erit etiam $a + c = x + d$.

224. V. Si ab æqualibus aufferantur, aut subtrahantur æqualia, vel æquale, manent æqualia, ut si $a = x$, & ab utraque parte aufferatur c, erit $a - c = x - c$, item si $a = x$, & $c = d$, erit quoque $a - c = x - d$.

225. VI. Si æqualia per æquale multiplicentur facta manent æqualia, ut si $a = x$, & utraque pars multiplicetur per b, erit $ab = xb$.

226. VII.

Digitized by Google

226. VII. Si æqualia dividantur per æquale, quoti erunt æquales, ut si $a = x$, & utraque pars dividatur per c, erit $\frac{a}{c} = \frac{x}{c}$.

227. VIII. Si æqualia per alia æqualia multiplicentur, facta erunt æqualia, ut si $a = x$, & $c = d$, erit $ac = xd$, nam $ac = cx$, & $cx = xd$ per (§. 225.) ergo $ac = xd$ per (§. 222.). Eodem modo, si æqualia per æqualia dividantur quoti erunt æquales, ut si $a = x$, & $c = d$, erit quoque $\frac{a}{c} = \frac{x}{d}$.

228. IX. Quantitates æquales elevatæ ad eundem gradum potentiæ, manent æquales, ut si $a = x$, erit $a^2 = x^2$, aut $a^3 = x^3$.

229. X. Ex quantitatibus æqualibus, elevatis ad eundem gradum potentiæ, extractæ radices ejusdem gradus, manent æquales, ut si $aa = xx$, erit $\sqrt{aa} = \sqrt{xx}$, id est, $a = x$.

230. XI. Si inæqualibus addantur æqualia, aut ab inæqualibus subtrahantur æqualia, item si inæqualia multiplicentur, dividanturve per æqualia *Summæ*, *Residua*, *Facta*, & *Quoti* manebunt inæqualia.

THEOREMATA ÆQUATIONUM.

231. I. Si duarum quantitatum inæqualium differentia, seu residuum addatur ad earundem summam, erit aggregatum æquale duplo quantitatis majoris, ut si $a > b$,

Erit summa $= a + b$	*In Numeris sit* $12 > 4$
Differentia $= a - b$	*Erit summa* $12 + 4 = 16$
	Differentia $12 - 4 = 8$
Aggregatum $= 2a$	*Aggregatum* $12 + 12 = 24$

232. II. Si verò à summa duarum quantitatum inæqualium, subtrahatur differentia, erit residuum æquale duplo minoris, ut si $a > b$,

		In Numeris sit $12 > 4$	
Erit summa	$= a + b$	Erit summa	$= 12 + 4 = 16$
Differentia	$= a - b$	Differentia	$= 12 - 4 = -8$
Subtrahendo	$- \quad +$	Subtrahendo	$- \quad + \quad 8$
Residuum	$= 2b$	Residuum	$= 4 + 4 = 8$

233. III. Si ad semisummam duarum quantitatum inæqualium addatur semidifferentia, erit aggregatum æquale quantitati majori, ut si $a > b$ erit

$$\text{Addend.} \begin{cases} \text{semisumma} = \dfrac{a+b}{2} \\ \text{semidifferentia} = \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \text{ \& hinc aggregatum per}$$

(§. 136.) $\dfrac{a+b+a-b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$ per (§. 36.)

In Numeris sit $12 > 4$

erit semisumma $= \dfrac{12+4}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$

semidifferentia $= \dfrac{12-4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ sed $8 + 4 = 12$

seu $\dfrac{12+4+12-4}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$ per (§. 125)

234. IV. Si à semisumma duarum quantitatum inæqualium subtrahatur earundem semidifferentia, erit residuum æquale quantitati minori, ut si $a > b$,

erit semisumma $= \dfrac{a+b}{2}$

semidifferentia $= \dfrac{a-b}{2}$

seu subtrahendo $= \dfrac{-a+b}{2}$ sed $\dfrac{a+b-a+b}{2} = \dfrac{2b}{2} = b.$

Idem patet in numeris, si pro literis numeri substituantur, ut in priori Exemplo $12 > 4$.

Ultima quatuor axiomata magnum habent usum in formanda prima Æquatione, de qua (§ 217.) *dictum.*

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

235. *Axiomatibus his rite intellectis, & memoria retentis, sequentes Reductionum regulas fundatas in axiomatibus, familiares sibi reddat Tyro Analysta, id universaliter notando; quod quemadmodum Medici calida frigidis, frigida calidis, id est contrariis tollere in more habent, ita Analystæ, ut terminum in Æquatione incognitum, seu quæsitum reddant notum ope Reductionis, quidquid eidem, & ex illius parte in Æquatione adhæreat, per contrarias operationes in utraque parte Æquationis instituendas, tollunt. Sunt autem operationes contrariæ,* Additio & Subtractio *per* (§.19.) *aut eorum loco* Metathesis, *item contrariæ sunt* Multiplicatio & Divisio *per* (§. 34.) *item inter contrarias sunt, elevatio radicis ad potestatem, & ex potestate radicis extractio; atque per ejusmodi contrarias operationes (quæ in regulis reductionum continentur) Æquationem tamdiu reducit Analysta, donec ex una Æquationis parte solus terminus ignotus, ex altera verò meri cogniti quomodocunque affecti habeantur.*

REGULÆ
REDUCTIONUM ANALYTICARUM
Æquationis solitariæ.

236. *Æquationem solitariam voco, in qua incognitus unus est, vel si plures, ii sint homogenei, ut si sit* $8x + a = ad - c$.

Reg. I. Si ex parte termini ignoti compareant termini noti per *additionem*, seu signum + conjuncti, ii tollendi sunt per *Subtractionem*, & quidem in utraque parte æquationis faciendam per (§.224.) ut si sit $4x + b = a$, subtrahendo ab utraque parte b, erit $4x + b - b = a - b$, hoc est $4x = a - b$ per (§.20.)

Reg. II. Si ex parte termini ignoti inveniatur terminus notus per *Subtractionem*, seu signum — connexus, is tollendus est per *Additionem* ejusdem termini in utraque parte æquationis instituendam, ut si sit $3x - c = ab$, addendo utrique parti $+c$, erit $3x - c + c = ab + c$, hoc est $3x = ab + c$.

Reg. III. Loco reductionis per binas nunc traditas regulas instituendæ, ab exercitatis Analystis adhibetur figura *Metathesis*, quæ est translatio terminorum quorumvis

rumvis ex una Æquationis parte in alteram mutatis signis in contraria; est hic Modus per Metathesim operandi admodum compendiosus, utpote vicem binarum antecedentium regularum sæpius repetendarum unica terminorum translatione supplens. Sic si detur $4x+b=a$, erit per Metathesim $4x=a-b$, item $3x-c=ab$, per Metathesim $3x=ab+c$, aut $5x-c+b+d=ac$ per *Metathesim* erit $5x=ac+c-b-d$.

Hac figura Metatheseos nos semper utemur, quotiescunque terminos per additionis, aut subtractionis signa affectos ex una parte Æquationis sublatos voluerimus.

Reg. IV. Si termino ignoto adhæreat aliquis terminus notus per hypothesim *multiplicationis* expressus, is tollendus est per *divisionem*, dividendo scilicet per terminum notum, adhærentem ignoto, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per hunc divisi non sunt, ut si sit, $ax=bc$ erit $\frac{ax}{a}=\frac{bc}{a}$ hoc est $x=\frac{bc}{a}$ per (§.36.) item si sit $ax+bx=ad+c$, erit $\frac{ax+bx}{a+b}=\frac{ad+c}{a+b}$ hoc est $x=\frac{ad+c}{a+b}$ per (§.103.)

Reg. V. Si termino ignoto adhæreat terminus notus per hypothesim *divisionis* expressus, is tollendus est per *multiplicationem*, multiplicando videlicet per terminum notum adhærentem, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per illum terminum divisi non sunt, ut si sit $\frac{x}{a}+b=c$, erit $\frac{ax}{a}+ab=ac$, hoc est $x+ab=ac$ per (§.36.) & per Metathesim $x=ac-ab$.

Reg. VI. Quod si occurrat Æquatio, in qua *omnes termini* per eandem aliquam quantitatem multiplicati, vel divisi sunt, ea quantitas simpliciter deleri potest; ut si sit $ax+ac=ad$, erit $x+c=d$, item si sit $\frac{x+c}{a}=\frac{d+b}{a}$, erit $x+c=d+b$ per Axiom. (§.226.)

Notent

Notent Tyrones: Analystis in more esse, in casu, quo per multiplicationem, aut divisionem notum ab ignoto tollunt, compendii gratia, delendo simplicetur per (§.104.) terminum notum ignoto adhærentem, reliquos verò per illum multiplicatos, aut divisos indicare, ut si Æquatio sit $ax - bx = dc$ *statim eam ita exprimunt* $x = \frac{dc}{a-b}$, *item hanc* $\frac{x}{a} = c$, *ita* $x = ac$.

Reg. VII. Si terminus ignotus sit elevatus ad potentiam, ex illo, & cæteris terminis in utraque parte Æquationis repertis, extrahenda est radix ejusdem gradus, cujus est potentia, ut si sit $xx = bb$, erit $\sqrt{xx} = \sqrt{ab}$, hoc est, $x = \sqrt{ab}$, verum de hujusmodi reductione alibi fusius.

Reg. VIII. Si terminus ignotus sit affectus signo $\sqrt{}$, is, & cæteri utriusque partis in Æquatione termini elevandi sunt ad gradum ejus potentiæ, quem indicat exponens radicis, & tum signum $\sqrt{}$ termino ignoto præfixum ommittitur, ut si sit $\sqrt[2]{x} = ab$, erit $x = a^2b^2$, sed, & de his suo loco prolixius.

Reg. IX. Si in utraque parte Æquationis compareat idem terminus ignotus quomodocunque, affectus, tum, minor ignotus ad partem majoris (si major sit positivus) per Metathesim transferendus est, ut si sit $5x = ab + 2x$, erit per Metathesim $5x - 2x = ab$, seu $3x = ab$, è contra, si major ignotus sit negativus, ad partem minoris per Metathesim transferatur, ut si sit $2x = ad - 4x$, erit $2x + 4x = ad$, seu $6x = ad$.

Reg. X. Tyrones Analystas sæpe multum juvat reductio Æquationis ad *nihilum*. Fit hæc reductio (ope Metathesis) transferendo omnes terminos tam notos, quam ignotos ad partem illam Æquationis, in qua habetur major terminus ignotus positivus, aut contra, ad partem minoris, si major sit negativus, ut si sit $10x - c - b = a + 4x - cx$,
erit $10x - c - b - a - 4x + cx = 0$,
hoc est $6x - c - b - a + cx = 0$, dein iterum (per

Metathesim) omnes notos transferendo, erit $6x + cx = a + b + c$, & dividendo per $6 + c$, erit $x = \frac{a+b+c}{6+c}$ per Reg. IV.

Reg. XI. Si qui termini sint, qui se invicem destruere, vel per additionem, aut subtractionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt, ut si sit $x + x + b + x + c = a$, erit $3x + b + c = a$, & per Metathesim $3x = a - b - c$, & dividendo per 3, erit $x = \frac{a-b-c}{3}$ per Reg. IV. Item si sit $5a + 3x = 5b - 3a + 2x$, erit reducendo ad nihilum (per Regul. X.) $5a + 3x - 2x + 3a - 5b = 0$, seu $x + 8a - 5b = 0$, & per Metathesim $x = 5b - 8a$.

Reg. XII. Si occurrant termini (seu noti sint, seu ignoti) expressi per fractiones diversæ denominationis, reducendi sunt illico ad eandem denominationem, ut si sit $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - c = x$, erunt reductæ per (§. 129.) $\frac{12x + 8x + 6x}{24} - c = x$, seu $\frac{26x}{24} - c = x$, & multiplicando per 24, erit $26x - 24c = 24x$, & per Metathesim $26x - 24x = 24c$, seu $2x = 24b$, & dividendo per 2, erit $x = \frac{24c}{2} = 12c$.

Cætera suis locis, & oretenus plura.

OPERATIO V.

237. Æquationis ad unum incognitum, & ab omnibus notis liberum reductæ, in numeros *Resolutio*, vel figuræ *Constructio*.

I. *Cum solutio quæstionis per ipsam Æquationem obtineatur, in qua terminus ignotus ex una Æquationis parte omnino solus, & liber ab omnibus aliis comparet, ex alia verò parte meri termini noti habeantur, nihil amplius laboris Analystæ super est, quam (si quæstio per numeros solvi debet) ut literæ in valores suos numericos, pro quibus in Operatione II. substitutæ sunt, juxta expressionem Æquationis reductæ solvantur, ut si foret*

Æquatio

Æquatio reducta, $x = \frac{a - b - c}{3}$, *& literæ substitutæ fuissent (per Operationem II.) loco numerorum*, Ex. gr. *si fuisset* $a = 485$, $b = 10$, *&* $c = 25$, *erit Resolutio* $x = \frac{485 - 10 - 25}{3}$, *hoc est* $x = \frac{450}{3}$, *seu* $x = 150$.

Si vero Æquatio resolvenda sit in lineas, facienda est figuræ constructio, *ut in Geometria docebitur.*

II. *Invento valore termini ignoti, videat Analysta, an substituto loco termini ignoti valore invento, conditionibus propositæ quæstionis satisfiat, si ita, quod semper ritè operantibus evenit, non sine voluptate animi virtutem Analyseos admirabitur; secus (si quæstio non fuit impossibilis) errorem se admisisse, deprehendet.*

SCHOLION.

238. *His Regulis universalibus, & in abstracto declaratis, cum Tyro Analysta aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit, ut ingenii vires in quæstionibus primum quidem simplicioribus, dein magis reconditis, & subtilioribus ad Æquationem redigendis, reducendisque tentet, quibus ritè applicandis (in sequentibus capitibus) qua licet brevitate, exemplis prælucebo, ac præmissis adhuc quibusdam scitu necessariis, veluti manuducam, identidem commonendo, si cætera mathemata frequentem exercitationem desiderant, eam certo in quæstionum, & problematum resolutionibus cumprimis sedulam esse oportere, propterea, quod Ars Analytica non tam verbis, quam ipsamet praxi quotidiana, & formularum contemplatione seria, mentisque ad operationes acri adversione condiscatur, nec laboris unquam pœnitebit, cum novis inventis (veluti totidem ingenii partubus felix) eruditum orbem, non sine sincera animi voluptate, ad DEI Gloriam, locupletabit.*

CAPUT II.

Analysis Problematum simplicium, & determinatorum, uno incognito affectorum.

DEFINITIO II.

239. Omne Problema, aut Quæstio est vel *possibilis*, vel *impossibilis*; *Possibilis* dicitur, cujus conditiones inter se non pugnant, adeoque solutionem admittunt, ut, si quæratur dimidium de numero 6; est enim numerus 3. *Impossibilis* est, cujus conditiones,

Digitized by Google

aut sibi opponuntur contradictoriè, aut unam impossibilem involvunt, ut, si quæratur dimidium de numero 6, hac adjecta conditione, ut id dimidium sit numerus par; cum enim dimidium de numero 6, tantum sit numerus 3, qui par esse nequit, conditio adjecta quæstionem reddit impossibilem.

SCHOLION.

240. *Quæstionis impossibilitas, si ea ex conditionibus in quæstione appositis non illico reluceat, per Reductionis regulas manifesta redditur, si enim terminus incognitus in Æquatione reducta evadat negativus, hoc est, si sit æqualis meris cognitis negativis, aut, si sit æqualis radici imaginariæ, problema propositum Analysta pronunciabit esse practicè impossibile, ut si foret* $x = -4$, *aut* $x = \sqrt{-aa}$.

DEFINITIO III.

241. Problema possibile aliud est *determinatum*, aliud *indeterminatum*; *Determinatum* dicitur, in quo tot habentur conditiones, quot quantitates ignotæ, seu quando (discussis conditionibus) tot formari possunt Æquationes primariæ, quot sunt incogniti diversi. *Indeterminatum* appellatur, cujus pauciores reperiuntur conditiones, quam quantitates diversæ incognitæ. His accedit problema *plusquam determinatum*, quando plures conditiones apponuntur, quam sint incognitæ, quod ultimum plerumque evadit impossibile, si adjectæ conditiones superfluæ sint inter se pugnantes.

COROLLARIUM I.

242. Determinata problemata, determinatum etiam numerum solutionum admittunt; Indeterminata, quam plurimos Solvendi modos habent, ut patebit inferius.

COROLLARIUM II.

243. Quando problema est determinatum, plures incognitæ ad unum reduci possunt, in Indeterminatis plures ignotas remanere est necesse, quarum una, aut altera (arbitrio Analystæ) determinanda est, per quam cæteræ determinentur, ut suo loco dicetur.

DEFI-

Digitized by Google

DEFINITIO IV.

244. Problemata tam determinata, quam indeterminata, alia sunt *simplicia*, *composita* alia. Simplicia sunt, cujus incognitus est *unius dimensionis*, id est, ad nullam potentiam elevatus, ut si sit $x = ab$. Composita dicuntur, quorum incognitus est duarum, vel trium, aut plurium dimensionum, id est, ad potentiam secundam, tertiam, &c. elevatus, ut si sit $xx = ab$, aut $x^3 = ac$.

SCHOLION.

245. *Problemata tam simplicia, quam composita quandoque affecta sunt incognitis homogeneis tantum, quandoque vero pluribus ignotis heterogeneis permiscentur, de quibus suo loco speciatius; hoc capite problematibus simplicibus determinatis, & uno, vel pluribus incognitis homogeneis affectis, ad praxim Analyseos Tyrones manuducam. Sit igitur Resolvendum.*

PROBLEMA I.

Sempronius Parens condito testamento legavit ternis filiis suis *Mathiæ*, *Stephano*, & *Alexio* summam aureorum 485, his conditionibus partiendam, ut *Stephano* natu medio, tot aurei obvenirent, quot *Mathiæ* natu maximo, & præter hos, 10 aureos plures censeret *Stephanus*, quam *Mathias*. *Alexius* quoque totidem, quot *Mathias*, & insuper adhuc 25 aureos obtineret. Quæritur Legatum singulorum?

OPERATIO I.

Juxta regulas (215.) *discutiendo statum quæstionis, & conditiones appositas, intelligo* Primo: *Quæsitum hujus esse, ut singulorum filiorum legata summa reperiatur.* Secundo: *Clarum fit, si summam particularem* Mathiæ *legatam, notam haberem, jam quoque reliquorum legata in aperto essent, cum tam* Alexius, *quam* Stephanus *(demptis* 10, *&* 25 *aureis supererogatoriis) eundem cum* Mathia *aureorum numerum percipere debeant.* Tertio: *Video, præter* 485 *aureos, dari notos terminos* 10, *&* 25 *aureos.*

His rite intellectis procedatur ad denominationem:

OPERATIO II. DENOMINATIO.

Sit summa Legata $485 = a$, *aurei* $10 = b$, *aurei* $25 = c$, *erit juxta conditiones problematis.*

Legatum natu maximi, seu Mathiæ $= x$
- - - *natu medii, seu* Stephani $= x + b$
- - - *natu minimi, seu* Alexii $= x + c$

Facta rite hac denominatione progrediendum est ad elocutionem quæstionis Algebraicam, seu ad formandam Æquationem, quam conditiones ipsiusmet quæstionis suppeditant. Intelligo enim singulorum filiorum legata particularia, in unam summam collecta, adæquare debere totam summam legatam, id est, legatum x Mathiæ *plus legato* $(x + b)$ Stephani, *plus legato* $(x + c)$ Alexii, *adæquat summam totalem* a. *Quam Æquationem inventam eloquendo algebraicè. Sic exprimo:*

OPERATIO III. ÆQUATIONIS EXPRESSIO.

$$x + x + b + x + c = a.$$

Hanc Æquationem juxta Regulas Operat. IV. (§. 236.) *de Reductione datas, tractando, reducere tamdiu debeo, donec obtineatur Æquatio, seu formula, in qua ex una parte Æquationis terminus ignotus* x *omnino solus, ex altera vero parte meri cogniti habeantur. Itaque.*

OPERATIO IV. REDUCTIO.

Per Reg. XI. (§. 236.) *reducitur ad hanc;* $3x + b + c = a$
& per Metathesim juxta Reg. III. erit - $3x = a - b - c$
dein per Reg. IV. dividendo utramque partem per 3 } *erit* - - - $\frac{3x}{3} = \frac{a - b - c}{3}$
hoc est per (§. 104.) - - - - - - - - $x = \frac{a - b - c}{3}$

Cum habeatur x *reductum, & solitarium ex una, ex altera vero parte meri cogniti, solutio quæstionis in aperto est; si termini noti Æquationis ultimæ juxta expressionem datam in numeros (pro quibus literæ substitutæ sunt) resolvantur. Erit itaque*

OPERATIO V. ÆQUATIONIS REDUCTÆ RESOLUTIO.

$x = \frac{485 - 10 - 25}{3}$, *hoc est* $x = \frac{450}{3}$, *seu* $x = 150$.

Sunt

Digitized by Google

Sunt ergo Legata Particularia.

Legatum natu maximi, seu Mathiæ	$x = 150$, *hoc est*	$= 150$
- - - *natu medii, seu* Steph.	$x + b = 150 + 10$	$= 160$
- - - *natu minimi, seu* Alexii	$x + c = 150 + 25$	$= 175$
Summa omnium	$3x + b + c = 450 + 35$	$= 485$

Quæ summa cum adæquet totam à Sempronio *Parente legatam summam* 485 *aureorum, quæstionem recte solutam esse demonstrat.*

SCHOLION.

246. *Præluxi Tyronibus exemplo facillimo fusè deducto, quo viam commonstrarem, qua deinceps intellectum circa artem Analyticam, in quæstionibus difficilioribus ratiocinando exercere valeant; reliqua enim exempla (supponendo ratiocinium Analyticum) via brevissima resolvemus; Id interea velim notent Tyrones, me iisdem fidelem suasorem esse, ut, tametsi hujusmodi quæstiones resolutionum numericarum, per Algebram numerosam (id est, non substituendo literas pro numeris) tractari possint, & à plerisque tractentur Analystis, Praxim eorum minime sequantur, verum semper literas pro numeri substituendas suadeo, propterea, quod ultimæ resolutionum formulæ literis expressæ, utpote universales, medium, & instrumentum sint Theorematum, & regularum reperiundarum, ut patebit alibi; dein, id commodi præterea habent literæ, quod harum ope molestissimæ cæteroquin numerorum reductiones evitentur, viaque brevissima scopum obtineamus; accedit, quod aptos reddant Tyrones Geometriam ope Algebræ tractandi, veramque scientiam, quæ idæis universalibus comparatur, adipiscendi.*

PROBLEMA II.

Cum aliquando in Macedonum colloquio mentio de singulorum ætate incidisset; Ego, inquit *Alexander*, *Ephestionem* meum antecedo annis 4; at *Clytus*, ego vero amborum vestrorum ætatem vivo; Tum *Calisthenes*: jucunda est mihi, ô Rex! isthæc ætatum commemoratio, Patris enim memoriam renovavit, qui cum annos vixisset 72, trium vestrum ætates compleverat.

Quæstio hæc priori simillima, & eodem modo resolvenda, proponit quærendas singulorum ætates. Fiat itaque discussis conditionibus apta denominatio.

Sint

Digitized by Google

Sint anni $4 = b$, *anni* $72 = a$
sitque ætas Ephestionis $= x$
erit ætas Alexandri $= x + b$
ætas Clyti $= 2x + b$

Itaque quæstionem algebraice eloquendo, ex conditionibus appositis habebitur Æquatio:

$$x + x + b + 2x + b = a$$

hoc est per Reg. XI. - - - - - $4x + 2b = a$
& per Metathesim - - - - - - - $4x = a - 2b$
& per Reg. IV. divid. per 4, erit - - - $x = \frac{a - 2b}{4}$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$x = \frac{72 - 8}{4}$, *hoc est* $x = \frac{64}{4}$, *seu* $x = 16$

Est igitur ætas Ephestionis	$x = 16$, *hoc est*	$= 16$
ætas Alexandri	$x + b = 16 + 4$	$= 20$
ætas Clyti	$2x + b = 32 + 4$	$= 36$
Summa ætatum -	$4x + 2b = 64 + 8$	$= 72$

Recte igitur soluta quæstio.

PROBLEMA III.

Pythagoras Philosophus interogatus, quotnam haberet discipulos? Respondit: Dimidia pars meorum discipulorum Philosophiæ operam navat, pars quarta Mathesim audit, septima silentium tenet, adsunt præter hos 3 novitii sacris nostris mox initiandi.

Quæritur numerus omnium Discipulorum, quo reperto innotescit quoque numerus Philosophorum, Mathematicorum, & silentium tenentium. Itaque

Sint novitii $3 = a$, *summa omnium discipulorum* $= x$ *habebuntur ex conditionibus quæstionis.*

Philosophi $= \frac{x}{2}$, *Mathematici* $= \frac{x}{4}$, *Silentes* $= \frac{x}{7}$

Hos terminos juxta conditionem quæstionis in Æquationem ordinando.

Erit Æquatio prima: $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + a = x$

Et

Et reducendo fractiones ad eundem denominatorem.

Erit per Reg. XII. (236.) $\frac{28x + 14x + 8x + a}{56} = x$

hoc est per Reg. XI. - - - - - - - $\frac{50x + a}{56} = x$

Multipl. per 56 erit per Reg. V. $50x + 56a = 56x$

& per Metathesim - - - - - $56a = 56x - 50x$

hoc est - - - - - - - - - $56a = 6x$

& divid. per 6, erit per Reg. IV. $\frac{56a}{6} = x$

RESOLUTIO.

$\frac{56a}{6} = \frac{56 . 3}{6} = \frac{168}{6} = 28$, *hoc est* $28 = x$

Fuêre itaque Discipuli Pythagoræ universim 28

Et hinc Philosophi $\frac{x}{2} = \frac{28}{2} = 14$

Mathematici $\frac{x}{4} = \frac{28}{4} = 7.$

Silentes $\frac{x}{7} = \frac{28}{7} = 4.$

Novitii $= a = 3.$

Summa omnium - $= 28.$

Eodem modo tractantur quæcunque quæstiones, in quibus fracti habentur; notent Tyrones, primam omnium operationum esse debere reductionem ad eundem denominatorem.

CAPUT III.

Resolutio Problematum in quibus plures occurrunt incogniti heterogenei.

Præter cætera hucusque dicta, noverint Tyrones artem totam hujusmodi Problemata solvendi (si determinata sint) in eo versari, ut incogniti, præter unum, eliminentur, & exterminentur omnes, in Indeterminatis vero tot, quod possunt eliminari.

Obtinetur autem hæc eliminatio duobus modis:

247. I. Eliminatio obtinetur per substitutionem Æqualis pro Æquali, juxta Axioma III. (§. 222.).

Digitized by Google

(§. 222.), ut si dentur Æquationes: Prima, $y + 1 = 2x - 2$, & altera $y - 1 = x + 1$, velimus autem eliminatum y, reducantur ambæ Æquationes ad y solitarium juxta regulas reductionum,

Erit prima per Metathes. $y = 2x - 3$
secunda per Metathes. $y = x + 2$, *& hinc per Axioma III.* (222.) *substituendo loco y alterutram, erit* $x + 2 = 2x - 3$, *in qua eliminatus habetur terminus y.*

248. II. Eliminari potest per Additionem, aut Subtractionem totius Æquationis unius à tota Æquatione altera, sed prius per Reductionem ad destructionem unius termini ignoti rite præparata, ut sit Prima, $x + y = a$, secunda $8x + 4y = b$, cupimus autem eliminatum y, quod cum in *secunda* multiplicatum per 4 compareat, *primam* per numerum 4 multiplicando aptare necesse erit.

Eritque prima - - - - - - - - $4x + 4y = 4a$,
quæ jam sic aptata si subtrahatur, nempe à secunda $8x + 4y = b$
Primam subtrahendo - - - - - - - - - $4x + 4y = 4a$
— — —
erit Residuum - - - - - - - $4x = b - 4a$
in qua y eliminatum habetur.

SCHOLION.

Utra Methodus alteri præferenda sit, definire non licet, sed exercitato Analystæ jam hanc, jam alteram circumstantiæ quæstionis usurpandam suadebunt. Itaque

PROBLEMA I.

Euclidis Geometrarum Principis Ænigma, quod Geometris olim proposuisse fertur, sic habet: Ibant, inquit *Mulus*, & *Asina* vinum portantes, *Asina* ex dolore ponderis ingemiscebat, quo audito, *Mulus*: chara mater, inquit, quid ita lamentaris? mensuram mihi unam si dederis, duplo tunc plus, quam tu sustulero; sin tu à me unam acceperis, idem, quod ego, pondus feres. *Onus igitur utriusque peritissime Geometra edicas volo.* Itaque

Discessu

Digitized by Google

Discussis rite conditionibus, ac probe intellectis verbis Muli, fiat denominatio, sitque numerus mensurarum vini, quem gestat Mulus $= y$
Numerus mensurarum Asinæ $= x$
jam ex conditione prima Muli; si Asina det Mulo unam mensuram, habebit Mulus $y + 1$, *& Asina habebit* $x - 1$, *cumque* $y + 1$ *dicatur esse duplum de* $x - 1$, *ut Æquatio habeatur, multiplicetur* $x - 1$ *per* 2, *erit* $2x - 2$ *duplum de* $x - 1$, *adeoque* $2x - 2$ *æquale* $y + 1$, *hoc est* $y + 1 = 2x - 2$,
seu per Metathes. - - $y = 2x - 3$ A
Item ex secunda conditione; si Mulus det Asinæ unam mensuram, habebit Mulus $y - 1$, *& Asina* $x + 1$, *sed tunc dicuntur habere uterque Æquales numero mensuras,*
ergo - - - $y - 1 = x + 1$
per Metathesim - - $y = x + 2$ B
sed etiam in Æquat. A *erat* $y = 2x - 3$ A
Ergo per Axioma III. (§. 222.) $x + 2 = 2x - 3$,
in qua eliminatum est y
itaque per Metathesim - - $3 + 2 = 2x - x$ *hoc est* $5 = x$

RESOLUTIO.

Inventus est valor $x = 5$, *sed in Æquatione* B *est* $y = x + 2$, *ergo* $y = 5 + 2$. *Igitur* Mulus *habuit mensuras* $y = 7$,
Asina $x = 5$.

Nam Primo: *si* Asina *portans* 5 *mensuras det unam* Mulo *portanti* 7, *habebit Mulus* $7 + 1$, *hoc est* 8, *& Asina habebit* $5 - 1$, *hoc est* 4, *sed* 8 *est duplum de* 4, *ergo prima conditio impleta habetur.*

Secundo: *Si Mulus habens* 7 *mensuras det Asinæ* 5 *portanti, unam; habebit Mulus* $7 - 1$, *hoc est* 6, *& Asina* $5 + 1$, *hoc est etiam* 6, *seu numero Æquales, quæ erat secunda conditio.*

PROBLEMA II.

Cauponæ Præfectus, vini partim generosi, partim debilioris urnas complures cellario suo intulit, lucrum justum facturus, si urnas singulas vini generosi pretio 42 grossorum, urnam vero debilioris 27 gross. venumdaret; at enim vinum generosius, quia pretii majoris; debilius, quia gustui minus gratum, suis pretiis distrahere nequit, cupit itaque vina hæc commiscendo vas 100 urnarum implere, hac conditione, ut urnam vini mixti grossis

Digitized by Google

grossis 30 (pretio nempe inter 42 & 27 gross. medio) venumdando, idem lucrum reportaret, quod obtineret, si purum distrahere potuisset; *Idcirco, ne vel se, vel emptores falleret, scire desiderat, quot urnæ vini generosi, quotque debilioris accipiendæ sint, ut vini misti emergant urnæ* 100, *quarum singulæ* 30 *grossis distrahantur.*

Discussis rite conditionibus, fiat Denominatio.

Sit pretium urnæ vini generosi - - 42 *gross.* $= a$
pretium debilioris - - 27 *gross.* $= b$
Pretium medium vini misti - - - 30 *gross.* $= c$
Vas vini mixti urnarum - - - - 100 $= d$
Urnæ accipiendæ ex vino generoso - - - - $= x$
- - - *ex vino debiliore* - - - - $= y$

Ergo ratione numeri urnarum juxta conditionem Problematis primam.

Erit Æquatio prima hæc - - $x + y = d$
& per Metathesim - - - - - $x = d - y$ A

Jam vero ratione pretii per conditionem secundam.

Erit Æquatio secunda - - $ax + by = dc$
& per Metathesim - - - - $ax = dc - by$
& devidendo per a, erit - - $x = \frac{dc - by}{a}$ B

sed etiam in Æquat. Prima A, *est* - $x = d - y$
Ergo in Æquat. B *substituendo loco x valorem æqualem* $d - y$
Erit per Axioma III. (§. 222.) - $d - y = \frac{dc - by}{a}$

& multiplicando per a, erit - - $ad - ay = dc - by$
per Metathesim - - - - $ad - dc = ay - by$
denique dividendo per $a - b$, *erit* - $\frac{ad - dc}{a - b} = y$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$y = \frac{(42.100) - (100.30)}{42 - 27}$, *hoc est* $y = \frac{4200 - 3000}{15} = 80$

Itaque $y = 80$ *urnæ*, *& Nam in Æquat.* A, *est* $x = d - y$, *seu* $x = 100 - 80 = 20$.
$x = 20$

Summa $x + y = 100$ *urnæ.*

Jam

Jam 100 *urnæ vini mixti (urnam per* 30 *gross. vendendo) faciunt* 3000 *grossos.*

Sed etiam 80 *urnæ per* 27, *faciunt* 2160 *gross.*
& 20 *urnæ per* 42, *faciunt* 840 *gross.*
seu simul addend. 3000 *gross.*
Ergo habetur impleta secunda conditio.

SCHOLION I.

253. *Hujusmodi Problema, vocatur* Mixtionis, *vel* Alligationis; *habetque usum, & utilitatem amplissimam in Oeconomicis, Physicis, Pharmaceuticis, Chymicis &c. & universim in casu omni, quo duo miscibilia diversi valoris, aut ponderis commiscenda sunt, ita, ut emergat mixtum desiderati valoris, pretii, virtutis, probitatis, aut ponderis medii; ut* Ex. gr. *Si misceri debeat frumentum, vina, medicinæ, merces, diversa liquida chymica, item metalla &c. ad obtinendum mixtum valoris medii. Hinc Tyro Analysta ultimam Æquationem* $\frac{ad - dc}{a - b} = y$ *memoria retinens, omnem hujusmodi quæstionem* (duorum nempe miscibilium) *facile solvet, si in proposita quavis quæstione, eandem nostram denominationem retineat; id est, si rem datam majoris pretii vocet* a, *viliorem* $= b$, *mediam* $= c$, *quantitatem datam mixti componendi* $= d$, *quantitatem denique ex viliore accipiendam* $= y$, *quibus denominatis, hanc formulam* $\frac{ad - dc}{a - b} = y$, *in numeros propositæ quæstionis resolvendo, solutionem cujusvis quæstionis illico reperiet, ut tentanti patebit.*

SCHOLION II.

251. *Hæc formula* $\frac{ad - dc}{a - b} = y$ *est celebris illa Regula Arithmeticorum, quam* Mixtionis, *sive* Alligationis *nomine compellantes, licet fuse declarare conentur, nunquam satis ad captum demonstrant. Cæterum notent Tyrones, hoc, & pleraque problemata, quæ vulgo per duos incognitos diversos (causa exercitii) resolvuntur, unico incognito ab exercitatis Analystis plerumque solvi. Sic in priori Problemate, si numerus urnarum vini debilioris vocetur* y, *loco* x *(numeri nempe urnarum generosioris) poni potest* $d - y$, *quod ipsum Æquatio prima* A, *attentum Analystam edocet. Reliqua mixtionum problemata, ad quæ plura, quam duo miscibilia ingrediuntur, ad problemata indeterminata pertinent, de quibus jam breviter.*

Digitized by Google

CAPUT IV.

Resolutio Problematum Indeterminatorum.

252. *Cognoscitur Problema aliquod propositum, esse ex genere indeterminatorum per* (§. 241.)

In his Problematibus, ultima Æquatio duos plerumque, aut etiam plures complectitur incognitos, etsi ab exercitato Analysta, quotcunque dentur incogniti, semper ad duos saltem incognitos per substitutionem (æqualis pro æquali) juxta Axioma III. (§. 222.) *reduci possint.*

PROBLEMA I.

Sint distribuendi 240 fl. in Studiosos pauperes 50, hac conditione, ut singuli Theologi percipiant fl. 8, Philosophi singuli fl. 6, singuli Humanistæ fl. 2.

Quæritur quotnam esse debeant Theologi, quot Philosophi, & Humanistæ?

Problema hoc indeterminatum, claritatis gratia solvemus per Algebram numerosam.

Fiat itaque denominatio.

Sint Theologi $= x$, *Philosophi* $= y$, *Humanistæ* $= z$.

Erit per conditionem primam, Æquatio Prima A *hæc:*

$$x + y + z = 50$$

& per Metathesim - - $x = 50 - y - z$ A

Deinde per conditionem secundam, Æquatio Secunda B

erit $8x + 6y + 2z = 240$

Per Metathesim - $8x = 240 - 6y - 2z$ B

& multiplic. Æquat. A *per* 8, *erit* $8x = 400 - 8y - 8z$ A

ergo per Axi. III. (222. $240 - 6y - 2z = 400 - 8y - 8z$

& per Metathesim - - $8z - 2z = 400 - 240 + 6y - 8y$

hoc est - - - - $6z = 160 - 2y$

dividendo per 6, *erit* - - $z = \frac{160 - 2y}{6}$

Cum sit Indeterminatum, assumatur arbitrarie pro litera y numerus 32, *hoc est, sint Philosophi* - - - $y = 32$,

erunt (vi ult. formulæ) Humanistæ $z = \frac{160 - 64}{6} = 16$,

& consequenter Theologi $x = 2$; *nam* $32 + 16 + 2 = 50$, *quæ est conditio prima.*

Et præterea per conditionem secundam,

$$2 . 8 + 32 . 6 + 16 . 2 = 240 \text{ fl.}$$ *ergo.*

SCHO-

SCHOLION I.

Dixi (§. 242.) omne indeterminatum Problema plures solutiones admittere, hinc in nostro Problemate, substituendo pro y diversos numeros (quos sequens Tabula exhibet) solutio invenietur, quæ iisdem conditionibus satisfacit.

TABULA

Exhibens varias solutiones Problematis antecedentis.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
$x =$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$y =$	32	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2
$z =$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

Ex singulis classibus hujus Tabulæ patet, quod omne indeterminatum Problema reduci possit ad determinata Problemata complura; Sic si in nostro Problemate præter conditiones jam positas, adjiciatur E. g. etiam hæc, ut Philosophi sint duplo plures, quam Theologi, & itidem Humanistæ tot, quot Philosophi, patet ex contemplatione hujus Tab. nullam classem satisfacere his conditionibus, præter classem V. Unde colligitur, Docentibus Analysim magno subsidio esse Resolutionem Probl. indeterminatorum, cum ope horum, unica solutione campus formandi varia Problemata determinata aperiatur, quæ exercendis Tyronibus suis deserviant, Tyronibus vero via ostenditur facillima sibimetipsis fabricandi Problemata determinata, quibus se se exerceant in Analysi. Sed hæc de indeterminatis sufficiant.

SCHOLION II.

253. *Huc revocantur omnia Problemata miscibilium, quando plura dantur miscibilia, quam duo.*

CAPUT V.

De Resolutione Æquationum Quadraticarum.

DEFINITIO V.

254. Æquatio Quadratica, seu duarum dimensionum, aut secundi ordinis, dicitur, si incognitus terminus sit Quadratus, aut si sit, $xx = ab$, vel $xx + ax = ac$.

Digitized by Google

SCHOLION.

255. *Si exponens incogniti est 3, dicitur Æquatio* Cubica, *aut trinæ dimensionis; si exponens incogniti est 4, quarti ordinis &c. Prætermissis Æquationibus altiorum ordinum, quarum Resolutionem Analysis sublimior pluribus pertractat, nos præfixi temporis angustis limitibus concluſi, Regulas solvendi Æquationes duntaxat* Quadraticas *strictim exponemus. Analysis itaque Æquationes* □ *in binas distinguendo classes, quasdam dicunt* Completas, Incompletas *alias, aut* Deficientes. Completæ *dicuntur, in quibus nullus deficit terminus ad expressionem Quadraticam requisitus, ut si sit* $xx = ab$, *aut* $xx + 2ax + aa = bc$. Incompletæ *vocantur, si terminus tertius, (id est, quadratum partis unius radicalis) deficiat, ut si sit* $xx + 2ax = ab$, *in qua deficit terminus* aa, *ut constat ex* (§. 182.) *De utraque classe nunc brevibus*

REGULÆ

Discernendi an data quævis Æquatio quadratica sit completa, an incompleta.

256. Reg. I. Si in Æquatione incognitus quadratus solus habeatur (seu is affectus sit cognito, seu non sit) neque præterea idem incognitus simplex in Æquatione reperiatur, hujusmodi Æquatio completa est; ut si sit $xx + ac = bd$, quia quadratum hujusmodi est monomium.

Reg. II. Si in data Æquatione præter quadratum incogniti termini, inveniatur idem incognitus simplex, affectus cognito, & præterea quadratum illius dimidii cogniti, quo incognitus simplex affectus est, Æquatio quoque *completa* erit; ut si sit $xx + 2ax + aa = bd$, in qua habetur quadratum aa factum, de $\frac{2a}{2}$, seu de a, quo affectus est secundus terminus $2ax$. Ratio hujus est, quia tale quadratum est factum ex $\sqrt{}$ binomia, $x + a$, vel $x - a$, ut constat ex (§. 182.)

Reg. III. Si verò in Æquatione deficiat hoc quadratum, de dimidio factore secundi termini, seu si deficiat tertius terminus quadrati binomii, Æquatio incompleta, erit, & deficiens, ut si sit $xx + 2ax = db$, aut $xx + ax = cd$, item $3xx - 6x = ac$, vel $4xx + x = ab$,

$x = ab$, aut $5xx + \frac{x}{3} = bc$, vel denique $6xx + \frac{x}{c} = bb$. In Prima enim deficit $\square\, aa$, in Secunda deest $\square$ ex $\frac{6}{2}$, hoc est $\frac{aa}{4}$, in Tertia non habetur $\square$ ex $\frac{6}{2}$, seu de 3, quod est 9, in Quarta deficit $\square$ ex $\frac{1}{2}$, hoc est $\square\, \frac{1}{4}$, in Quinta deest $\square$ de dimidia $\frac{1}{3}$, seu de $\frac{1}{6}$, quod est $\square\, \frac{1}{36}$ in Sexta deficit $\square$ de dimidio $\frac{1}{c}$, seu de $\frac{1}{2c}$, id est $\square\, \frac{1}{4cc}$.

SCHOLION I.

257. *Ut verò Tyro Analysta indicium certum habeat, an deficiat terminus tertius; Reducat sibi datam Æquationem (prius tamen per Regulas Reductionis ad expressionem simpliciorem transformatam) ad Æquationem* Nihili *per Reg.* X. (§. 236.) *id est, omnes terminos tam cognitos, quam incognitos per Metathesim, ita ad unam partem Æquationis transferat, ut incognitus quadratus evadat positivus, quo facto contemplando terminos, videat, an ex dimidio factore cogniti, quo incognitus simplex afficitur, adsit* $\square$, *vel absit? ut si foret* $2ax = bc - xx - aa$, *erit reducta ad nihilum* $xx + 2ax + aa - bc = 0$, *quæ completa comparet; item si sit* $xx = aa + cx$, *erit ad nihilum reducta* $xx - cx - aa = 0$, *in qua deficit* $\square$ *ex* $\frac{-c}{2}$, *seu* $\frac{cc}{4}$, *& ita de aliis.*

SCHOLION II.

258. *Notent Tyrones, quod si reducta ad* Nihilum *Æquatio sit hujusmodi;* $xx - 2ax - aa + bd = 0$, *hæc Æquatio non sit completa, cum* $\square - aa$, *utpote Imaginarium, produci non possit ex* $\frac{-2a}{2}$ *seu ex* $-a$, *ut constat ex* (§. 175.) *adeoque universaliter, si tertium membrum adsit, sed affectum signo* $-$, *id non pertinere cognoscitur ad expressionem quadraticam; adeoque illam deficientem esse; Nam si pertineret, tum quidem effici poterit positivum per translationem Metatheseos, sed tum iterum incognitus quadratus evadet imaginarius, quotiescunque autem incognitus evadit imaginarius, aut ejus Radix negativa, indicat, aut quæstionem, ex qua emersit hujusmodi Æquatio, esse impossibilem, aut ab Analysta non recte conceptam, & denominatam, aut etiam errorem in Reductione admissum, intelligendo, si quæstio in numeros resolvenda sit.*

REGULÆ

Reducendi Æquationem Quadraticam incompletam, item affectam signo $\sqrt{}$.

259. Reg. I. Reducta Æquatione ad nihilum, transferantur iterum termini per Metathesim ad alteram partem Æquationis, remanentibus duobus terminis

Digitized by Google

affectis incognito; ut si sit $xx + ax - b = 0$, erit $xx + ax = b$, quo facto, addatur utrique parti □ de dimidio factore termini ax, qui est $\frac{a}{2}$, seu □ $\frac{aa}{4}$, erit Æquatio completa $xx + ax + \frac{aa}{4} = b + \frac{aa}{4}$, deinde extrahatur √ ex parte utraque, erit $x + \frac{a}{2} = (\sqrt{b + \frac{aa}{4}})$ & per Metathesim transferendo $+ \frac{a}{2}$, erit $x = (\sqrt{b + \frac{aa}{4}}) - \frac{a}{2}$, quæ est Æquatio Resolutoria. Idem est de aliis in Reg. III. (§. 256.) adductis.

SCHOLION I.

260. *Meminisse velim Tyrones, dum ex □ incognito jam per supra datas Regulas completo, √ extrahitur, toties partem radicis cognitæ esse negativam, quoties secundus terminus negativus est, ut si extrahatur √ ex hac Æquatione jam completa* $xx - ax + \frac{aa}{4} = bd + \frac{aa}{4}$, *erit* $x - \frac{a}{2} = (\sqrt{bd + \frac{aa}{4}})$ *& non* $x + \frac{a}{2} = (\sqrt{bd + \frac{aa}{4}})$.

SCHOLION II.

261. *Si sit Æquatio completa, Reductio immediate per extractionem radicis obtinetur, ut si sit* $xx = ab$, *erit Reducta* $x = \sqrt{ab}$, *item sit* $xx - 2ax + aa = bc$, *erit extracta radice* $x - a = \sqrt{bc}$, *& per Metathesim* $x = (\sqrt{bc}) + a$. *Notent Tyrones, quantitates notas ex altera parte Æquationis comparentes, quibus signum √ præfigitur, includendas esse parenthesi prius, quam translatio termini cogniti ex parte termini incogniti fiat ad alteram partem, ne terminus cognitus hoc modo, post extractionem radicis translatus, afficiatur signo √.*

262. Reg. II. Quemadmodum ad resolvenda Problemata □, utimur extractione √, ita si occurrat Æquatio, cujus incognitus affectus est √ tota Æquatio elevari debet, ad potentiam secundam, seu ad □. ut si foret $\sqrt{x} = a + b$, elevando utramque partem ad □. erit $x = aa + 2ab + bb$. Item si sit $\sqrt{ax} = b$, erit $ax = bb$, & dividendo per a, erit $x = \frac{bb}{a}$.

Sed enim hasce praxes jugis Resolutionum exercitatio faciliores reddet. Itaque

PRO-

PROBLEMA I.

Manlius miles cum ſociis quibusdam è pugna redux, interrogatus à *Marco Piſone*, quotnam hoſtium ſua ſtraviſſet manu? mea inquit, meorumque ſociorum manu fortiſſima, cæſa hoſtium capita jacent 1296, id vero memoria digniſſimum, quod ſinguli noſtrum tot ſtraverimus hoſtes, quot nunc ſocii ſumus. *Quæritur quot fuerint una cum Manlio milites? & quotnam hoſtes ſinguli ſtraverint?*

Diſcuſſis vitè conditionibus fiat denominatio.

Sit ſumma cæſorum hoſtium - - 1296 $= a$
Socii milites una cum Manlio - - - $= x$

Igitur cum ſinguli tot ſtraverint hoſtes, quot fuerint ſocii, erit quoque numerus hoſtium à ſingulis ſeorſim cæſorum $= x$
Ergo ſimul omnes ſtraverunt ex hoſtibus ſummam xx *itaque Æquatio* - - - $xx = a$
& extrahendo $\sqrt{}$ *erit* $x = \sqrt{a} = \sqrt{1296} = 36$
fuerunt ergo cum Manlio ſocii 36, *& ſinguli ſtraverunt ex hoſtibus etiam* 36.

PROBLEMA II.

Iſidorus Colonus Mediensis à deſignatis fundorum conſcribendorum Quæſtoribus interrogatus, quotnam tritici metretas annis ſingulis ſuo in agro ſeminaret? reſpondit: Ego ſex metretas plures ad conſerendum agellum meum in ſementem annis ſingulis ſpargo, quam *Andreas* germanus meus Colonus Marburgenſis, quæ meæ metretæ, ſi ita DEO largiente multiplicarentur, ut ſingulæ tot producerent metretas, quot *Andreas* ſingulis annis inſementem ſpargit, inferrem annis ſingulis horreo meo metretas tritici 720.

Quæritur quot Andreas, quotque Iſidorus metretas annis ſingulis in ſementem ſpargant.

Diſcuſſis rite conditionibus, fiat denominatio:
Sint itaque metretæ 6 $= a$, *metretæ* 720 $= b$
ſint metretæ quas ſeminat Andreas $= x$
ergo Iſidorus *ſeminat annis ſingul.* $= x + a$.

Jam per conditionem Problematis

erit $(x+a).x=b$

hoc est $xx+ax=b.$

Igitur complendo quadratum per Reg. I. (§. 259.) hoc est

Add. utrique parti $\square\frac{aa}{4}$, *erit* $xx+ax+\frac{aa}{4}=b+\frac{aa}{4}$

Et extrahendo $\sqrt{}$, *erit* $x+\frac{a}{2}=(\sqrt{b+\frac{aa}{4}})$

& per Metathesim $x=(\sqrt{b+\frac{aa}{4}})-\frac{a}{2}$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$x=(\sqrt{720+\frac{36}{4}})-\frac{6}{2}$,

hoc est $x=(\sqrt{729})-3=27-3=24.$

Itaque

metretæ, quas seminat Andreas $x=24$ *hoc est* 24

quas seminat Isidorus $x+a=24+6=30$

Jam si multiplicentur 30 *per* 24 *habebitur productum* 720. *Metret.*

Recte igitur soluta quæstio.

SCHOLION.

263. *Hæc erant, quæ de Resolutionibus Problematum, tanquam prima Rudimenta summatim duntaxat adducere poteram; supersunt multa, eaque singularia, quæ ad sublimiorem Analysim viam sternerent, quibus præscripta brevitate compulsus supersedere cogor, ne tamen utilitati meorum Tyronum deforem, quorum nunquam non studiosus exstiti, idcirco binis quinquagenis selectissimorum Problematum Analyticorum in numeros solvendorum, singularibus paginis, sub nomine;* Exercitationum Analyticarum *typo edendis, si DEO O. M. visum fuerit, Tyronum sciendi cupiditatem accendam, & Quæstionibus partim* applicatis, *iisque tum in Physicis, tum Oeconomicis per quam utilissimis, partim* Abstractis *Arithmeticæ, & Geometriæ inservientibus, non injucundum campum aperiam se se privatis in ædibus exercendi, certo enim consilio, Problemata quædam afferam, quæ* primas Æquationes *(denominatione facta) contineant, atque una ultimam duntaxat reductam exhibeant, ut nempe Reductionem marte proprio tractantes, praxim Regularum (§. 236.) imbibant. Quædam verò sola Quæstione proposita finientur, ut in reperiundis primis quoque Æquationibus dexteritatem, ingeniumque suummet Tyro periclitari valeat. Ordo jam postulat, ut parte ultima, utilissimam, summeque necessariam proportionum doctrinam complectente, opusculum concludamus; de qua jam brevissime.*

FINIS PARTIS III.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, Usu Regulæ aureæ, Inventione Theorematum, ac Problematum.

Nihil per universam Mathesim, & eidem sororio nexu junctissimam Philosophiam naturalem, cæterasque liberalium artium scientias magis necessarium, nihil in omni vitæ humanæ commercio magis esse utile, atque *Proportionum scientiam*, nemo, (nisi ignarus) inficiabitur. Cum enim DEUS O. M. quidquid omnipotente suo decreto ex abysso nihili produxit, omnia in *Pondere, Numero, & Mensura* creaverit, nihil in creatis rectè cogitaveris, nihil rectè egeris, si in sacras proportionum leges pecces; cogita *Pulchrum*, cogita *Solidum, Stabile, Jucundum, Utile, Mirum, commodum* &c. & curiosus quære rationem, cur hæc ita potius sint, quam secus; profecto, duce natura, fatebere dicendo: *Quæ recta sunt, habere proportionem ad invicem, quæ secus, hac carere.* Vera ais, at quid dicas, nescis, si doctrinam ignoras proportionis; Hæc nempe est (ut metaphora utar) medulla illa, atque anima mathematica stupendarum effectrix rerum. Hæc illa methodus ratiocinandi, argumentandique ratio plane subtilissima, solidissima, certissima, brevissimaque è proportione Geometrica petita, qua, tanquam *Logica*, cæteræ fere omnes, circa res naturales versantes disciplinæ perficiuntur, atque consistunt, quam si sustuleris, scientias, artesque exstinxisti, pulchrumque vitæ humanæ commercium in monstrum chaoticum, horrendum, atque terribile deformâsti; de hac itaque summe necessaria doctrina hac quidem parte in compendio.

CAPUT I.

De Ratione tam Arithmetica, quam Geometrica.

DEFINITIO I.

264. *Ratio*, dicitur duarum quantitatum homogenearum comparatio, vel relatio, aut respectus ad invicem. Hujusmodi comparatio,

Digitized by Google

ratio, sive *Ratio* duplex est, *Ratio* nempe *Arithmetica*, & *Ratio Geometrica*.

DEFINITIO II.

265. *Ratio Arithmetica*, dicitur comparatio duarum quantitatum homogenearum, quoad *excessum*, vel *defectum*; ut si comparentur inter se numeri; 4 & 12, quot nempe unitatibus minor sit numerus 4, quam 12, aut numerus 12 major, quam 4. *Excessus* hic, vel *defectus*, vocatur *Differentia*; sic excessus numeri 12 supra 4, qui est 8, vocatur *Differentia*; innotescit hæc differentia per subtractionem.

HYPOTHESIS I.

266. Ratio Arithmetica *designatur*, *vel exprimitur ita*: $_{a,b}^{d}$, *vel* $_{4,12}^{8}$, *id est inter quantitates comparatas ponendo* (,) & differentiam *locando supra comma, vel etiam* $a \overset{d}{-} b$.

DEFINITIO III.

267. *Ratio Geometrica*, est comparatio duarum quantitatum homogenearum, quoad quotitatem; ut si consideremus duos numeros, *E.g.* 12 & 4, quoties nempe 12 contineat numerum 4; vel quoties numerus 4 contineatur in 12, quæ quotitas per divisionem innotescit; Quotus vero, qui indicat quoties una quantitas alteram continet, vel in ea continetur, appellatur *Exponens*, vel *Nomen Rationis*, ut in dato Exemplo foret numerus 3.

HYPOTHESIS II.

268. *Ratio Geometrica recte exprimitur per Hypothesim* Divisionis (§. 30.) *traditam*, *ut* $_{a:b}^{m}$, *aut* $_{12:4}^{3}$, *in qua* exponens *Rationis*, *seu quotus* m *locatur super duo puncta*.

SCHOLION.

269. *Rationem Geometricam recte exprimi per hanc Hypothesim, patet ex definitione Rationis Geometricæ* (§. 267.) *unde liquet eam etiam recte sic exprimi* $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{12}{4}$. *Sed modo priore usitatius.*

DEFI-

Digitized by Google

DEFINITIO IV.

270. Quantitates, quæ comparantur, (tam in Ratione Arithm. quam Geometr.) vocantur *Termini*; & quidem terminus primus, qui comparatur, seu sinistram tenens, vocatur *Antecedens*; secundus, vocatur *Consequens*: sic in hac Ratione $a:b$, *Antecedens* est a, *Consequens* verò b.

DEFINITIO V.

271. *Ratio* Geometrica *Majoritatis*, vel *Multipla*, dicitur, quando Antecedens est major suo consequente, ut si sit $_{12:4}^{3}$, & in specie: *Dupla*, si exponens est 2, *Tripla*, si exponens 3 &c. *Ratio* verò *Minoritatis*, vel *Submultipla* appellatur, dum Antecedens est minor suo consequente, ut si sit 4:12, in hac exponens semper est fractus. *Ratio* denique *Æqualitatis* est, quando Antecedens est æqualis suo consequenti, ut 4:4, *hæc postrema peculiarem considerationem non habet in doctrina proportionum.*

COROLLARIUM.

272. Quoniam Ratio Geometrica est comparatio quoad quotitatem, (§. 267.) sequitur in omni Ratione Geometrica Antecedens esse *dividendum*, consequens *divisorem*, & exponentem Rationis, *Quotum*; unde consequitur (cum expressio fractionum sit expressio divisionis, & hæc sit expressio Rationis Geometricæ) quod omnis fractio vera sit Ratio Geometrica *Minoritatis*, in qua *Numerator* est Antecedens, & *Denominator* consequens, Nam $\frac{4}{12}$, idem est ac 4:12. Præterea quod omnis fractio spuria sit Ratio Geometrica *Majoritatis*, aut saltem *Æqualitatis*, ut si sit $\frac{12}{4}$, quod idem est ac 12:4.

SCHOLION.

273. *Pro diversitate* Exponentium *Rationes Geometricæ varias sortiuntur denominationes, & quidem in Ratione* Majoritatis, *I. si exponens est* $1\frac{1}{2}$ *dicitur:* Sesqui altera, *ut* 3:2. *Si exponens est* $1\frac{1}{3}$, *dicitur* sesqui tertia, *ut* 4:3 *&c. quæ denominationes naturam denominatorum sequuntur, cum addito* sesqui. *Ut* sesqui quarta, *si* $1\frac{1}{4}$, sesqui quinta *si* $1\frac{1}{5}$ *&c. II. Si exponens sit unitas, cum fractione habente* numeratorem

Digitized by Google

torem majorem unitate; *dicitur* superpartiens; *ut si sit exponens* $1\frac{2}{3}$, *erit* superbipartiens tertias, *ut in hac* 5 : 3. *Si exponens sit* $1\frac{3}{4}$ supertripartiens quartas *&c. Eædem denominationes manent in Ratione* Minoritatis *respectu exponentium, præfigendo particulam* sub, *ut* 4 : 8, *cujus exponens est* $\frac{4}{8}$, *seu* $\frac{1}{2}$ *dicitur* subsesqui altera. *Sed hæc, ut ad doctrinam proportionum nihil faciunt, ita solius notitiæ causa adnotasse sufficiat.*

DEFINITIO VI.

274. Rationes Geometricæ *Æquales* dicuntur, si eosdem habeant exponentes, & vicissim. Sic $\overset{m}{a:b}$, & $\overset{m}{c:d}$, item $\overset{4}{8:2}$, & $\overset{4}{12:3}$ Æquales sunt; è contra *Major* dicitur *Ratio*, quæ exponentem habet majorem, ut $\overset{3}{6:2} > \overset{2}{8:4}$. *Minor* verò cujus exponens minor est; ut $\overset{2}{8:4} < \overset{3}{6:2}$.

SCHOLION.

275. *Eodem modo Rationes Arithmeticæ Æquales, vel Majores, aut Minores dicuntur relate ad differentiam rationum, sic* $\overset{4}{3,7} = \overset{4}{2,6}$, *item* $\overset{5}{3,8} > \overset{3}{4,7}$ & $\overset{3}{4,7} < \overset{5}{3,8}$.

THEOREMA I. FUNDAMENTALE.

276. PROP. *In omni Ratione Geometrica Productum ex termino* consequente *in* exponentem, *æquale est termino* antecedenti, *ut si sit* $\overset{m}{a:b}$, *dico*; $mb = a$.

DEMONSTRATIO.

In omni Ratione Geometrica Antecedens est *dividendus*, consequens *divisor*, & exponens est *Quotus*, per (§. 272.) sed factum ex *divisore* in *Quotum* æquatur *dividendo* per (§. 61. Arithm.) ergo. Q. E. D.

COROLLARIUM.

277. Hinc per Axioma III. (§ 222.) loco *Antecedentis*, semper substitui potest *Consequens* multiplicatus per *Exponentem*. Sic loco $\overset{m}{a:b}$, scribi potest $mb:b$. Nam $\frac{mb}{b}$ dat quotum m, quod ipsum numeri pro literis substituti declarant, sic 6:3, idem est ac 3. 2:3, nam 3. 2 = 6.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA II. FUNDAMENTALE.

278. PROP. *In Ratione Arithmetica Summa ex termino* Minore, & Differentia *est æqualis termino* Majori; ut si sit $_{a,b}^{d}$ *vel* $_{4,7}^{3}$, *erit* $b+d=a$, *aut* $4+3=7$.

Demonstratio petitur ex (§. 43. Arithm.)

THEOREMA III.

279. PROP. *Duæ Quantitates, habentes eandem Rationem ad unam tertiam, æquales sunt, & vicissim.*

DEMONSTRATIO.

Sint quantitates a, & d, quæ ad eandem b dicant eandem Rationem, erunt itaque $_{a:b}^{m}$, & $_{d:b}^{m}$, dico esse, $a=d$. Nam $a=mb$, & $d=mb$ per (§. 276.) ergo per (§. 222.) $a=d$. Q.E.D.

CAPUT II.

De Proportione Geometrica.

DEFINITIO VII.

280. *Proportio* est duarum Rationum *Æqualitas*; & in specie, *Proportio Geometrica* est duarum Rationum *eosdem* exponentes habentium *Æqualitas*, ut si sit $_{a:b}^{m}$, & $_{c:d}^{m}$, item $_{8:4}^{2}$, & $_{6:3}^{2}$. *Proportio Arithmetica* est duarum Rationum eandem *differentiam* habentium *Æqualitas*, ut si sit $_{a,b}^{d}$, & $_{c,f}^{d}$, aut $_{5,3}^{2}$, & $_{7,9}^{2}$.

COROLLARIUM.

Omnis itaque Proportio quatuor terminis constat. *Et hinc recte exprimitur per sequentem Hypothesim.*

HYPOTHESIS III.

281. Proportio Geometrica *sic exprimitur*, a:b = c:d, *vel* 8:4::6:3, &, *enunciatur*; a *est ad* b, *sicut* c *est ad* d, aut *sicut* a *se habet ad* b, *ita* c *se habet ad* d; Arithmetica *sic exprimitur*; a, b = c, f, aut 3, 5 = 7, 9.

SCHO-

SCHOLION.

283. *Dilata tantisper doctrina* Proportionis Arithmeticæ, *quæ habita scientia Proportionis Geometricæ facilius intelligitur, hoc capite solius Proportionis Geometricæ doctrinam proponemus.*

DEFINITIO VII.

284. *Proportio continua* dicitur, dum terminus *Consequens* Rationis primæ est terminus *Antecedens* secundæ; ut $a:b=b:c$, vel $8:4=4:2$. *Discreta* appellatur, dum Rationum Antecedentes diversi sunt, ut $a:b=c:d$, vel $8:4=6:3$.

HYPOTHESIS IV.

285. Proportio continua *exprimitur ita*; a.b.c, *vel etiam præfixo signo* :: (§. 38.) *ut* :: a.b.c.d.&c. *enunciatur*; a *est ad* b, *sicut* b *est ad* c, & b *est ad* c, *sicut* c *est ad* d &c.

THEOREMA IV. FUNDAMENTALE.

286. PROP. *In omni Proportione Geometrica, factum Extremorum* (id est termini primi cum ultimo) *est æquale facto Mediorum (seu* secundi cum tertio.) *Nempe si sit*, $a:b=c:d$, *erit* $ad=bc$.

DEMONSTRATIO.

Exprimatur cum exponentibus, ut sit $\frac{m}{a:b}=\frac{m}{c:d}$, & per (§. 277.) substituendo mb loco a, & md loco c, erit eadem proportio, $mb:b=md:d$, sed in hac factum extremorum est $mb.d$, & factum mediorum est $b.md$, hoc est $mbd=mbd$. Ergo etiam $ad=bc$ per (§. 221.) Q.E.D. *Aliter*: cum sit $a=mb$, & $c=md$ per (§. 276.) substituantur hi valores in Æquatione $ad=bc$, & habebitur $mbd=mdb$. Q.E.D. *Declaratur*: sit $8:4=6:3$, erit $8.3=4.6$, id est $24=24$.

SCHO-

SCHOLION.

287. *Hoc Theorema esse basim reliquorum ferè omnium Theorematum, ac Problematum Proportionis, præcipiumque fundamentum inveniendarum primarum Æquationum Analyticarum Tyrones nosse volo. Ex hoc enim præter cætera (ope Analysis) sequentia Tria utilissima, Problemata reperta sunt.* Primum *est celeberrima illa Regula* Trium, *quæ etiam ob summam utilitatem, maximumque in scientiis, vitæque humanæ commercio usum, merito nomen obtinuit* Regulæ Aureæ; *de qua Cap. V.* Secundum Problema *non minus utile est;* datis duobus terminis invenire Tertium. *Et denique* III. Problema *est,* datis duobus invenire medium. *Itaque*

PROBLEMA I.

288. PROP. *Datis tribus terminis invenire quartum proportionalem; seu invenire Regulam auream.*

RESOLUTIO.

Sit primus $= a$, *Secundus* $= b$, *Tertius* $= c$, *Quartus quæsitus* $= x$, *erit proportio:* $a : b = c : x$, *& per Theor. Anteced.* $ax = bc$, *& per Reg. IV.* (§. 236.) *dividendo utramque partem per* a, *habebitur* $x = \frac{bc}{a}$, *quæ ultima Æquatio, utpote Resolutoria, hoc Problema eloquitur.* Quartus x, est æqualis facto ex termino secundo b, in Tertium c, & diviso per Primum a; *id est:* Si vis invenire quartum Proportionalem, multiplica secundum cum tertio, & factum divide per Primum, Quotus erit quartus Proportionalis; *quæ verba sunt ipsissima, quibus Arithmetici* regulam auream *edocent, à quibus, si quæras, cur non Primus cum Tertio multiplicari debeat, & dividi per Secundum; hanc rationem rogando actum ages, ni Analysim edocti sint, cui regulas suas* Arithmetica *repertas, demonstratasque debet.* Notandum: *Cum sit quartus* $x = \frac{bc}{a}$ *semper loco termini* quarti *substitui potest per* (§. 222.) tertius *multiplicatus per* secundum, *& divisus per* primum, *eritque proportio* $a : b = c : \frac{bc}{a}$.

PROBLEMA II.

289. PROP. *Datis duobus terminis invenire Tertium continue proportionalem.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $= a$, *Secundus* $= b$, *& Tertius quæsitus* $= x$, *erit proportio;* $a : b = b : x$, *& per Theor.* (§. 286.) $ax = bb$,

&

& per Reg. IV. (§. 236.) $x = \frac{bb}{a}$, *hoc est:* Quadratum *termini* Secundi *dividatur per* Primum, *quotus erit* Tertius *quæsitus, ut si sit* $2:4 = 4:x$, *erit* $2x = 16$, *& x* $= \frac{16}{2} = 8$: *id est* $2:4 = 4:8$.

PROBLEMA III.

290. PROP. *Datis terminis duobus invenire medium continue proportionalem.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $= a$, *Tertius* $= b$, *Medius* $= x$; *erit proportio;* $a:x = x:b$, *& per Theor.* (§. 286.) $xx = ab$, *& extrahendo* $\sqrt{}$ *per Reg. VII.* (§. 236.) *erit* $x = \sqrt{ab}$, *hoc est:* ex facto termini Primi in Tertium extrahatur radix quadrata, erit hæc medius proportionalis, *ut si sit, quærendus inter numerum* 2 *&* 8, *medius, erit* $2:x = x:8$, *hoc est* $xx = 16$, *& x* $= \sqrt{16} = 4$, *est ergo* $2:4 = 4:8$.

THEOREMA V. FUNDAMENTALE.

291. PROP. *Si factum extremorum est æquale facto mediorum, factores erunt reciproce proportionales; ut si sit* $ad = bc$, *erit* $a:b = c:d$, *hoc est, si in producto* ad, *assumatur factor* a, *(arbitrarie) pro* primo *termino proportionis, tunc ejusdem producti* ad, *alter factor* d *poni debet pro* quarto, *factores verò alterius producti* bc, *nempe* b *&* c *poni debent loco medio.*

Hæc Propositio (utpote conversa Theorematis IV.) nova Demonstratione non eget.

COROLLARIUM I.

292. Duorum itaque productorum æqualium factores solvi possunt in proportionem reciprocam, eamque variam, ut si detur $abc = dgf$, erit proportio reciproca, $a:f = dg:bc$, vel $a:gf = d:bc$, aut $a:df = g:bc$ &c. quæ resolutio insignem usum habet in Analysi ad invenienda Theoremata.

COROLLARIUM II.

293. Quoniam factores in proportionem reciprocam varie disponi possunt, sequitur varias inde enasci terminorum transpositiones manente proportione; manent autem

autem termini proportionales, si eorum factum extremorum sit æquale facto mediorum per (§. 286.) hinc, ut in subjecta Tabula (exhibente variam terminorum transpositionem proportionalem) demonstretur factum extremorum esse æquale facto mediorum, nullo alio medio opus est, quam, ut (per Theorema I. §. 276.) loco literæ *a*, ponatur *mb*, & loco literæ *c* substituatur *md*. Sit itaque

	Algebraicè.	*Numericè.*
	$ad = bc$	$8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$
	erit $a : b = c : d$	$8 : 4 = 6 : 3$
Alternando	$a : c = b : d$ *seu permutando* -	$8 : 6 = 4 : 3$
Invertendo	$c : a = d : b$	$6 : 8 = 3 : 4$
Iterum Altern.	$c : d = a : b$	$6 : 3 = 8 : 4$

Item Algebraicè.

Sit - - - -	$a : b = c : d$
Dividendo -	$a - b : b = c - d : d$
Componendo -	$a + b : b = c + d : d$
Convertendo -	$a : a - b = c : c - d$
Mixtim -	$a + b : a - b = c + d : c - d$
Item - -	$a + c : b + d = a : b$
Aut - -	$a - c : b - d = a : b$

Item Numericè.

Sit - - -	$8 : 4 = 6 : 3$
Dividendo -	$8 - 4 : 4 = 6 - 3 : 3$
Componendo -	$8 + 4 : 4 = 6 + 3 : 3$
Convertendo -	$8 : 8 - 4 = 6 : 6 - 3$
Mixtim -	$8 + 4 : 8 - 4 = 6 + 3 : 6 - 3$
Item - -	$8 + 6 : 4 + 3 = 8 : 4$
Aut - -	$8 - 6 : 4 - 3 = 8 : 4$

Quæ omnes proportiones iterum *Alternando*, & *Invertendo* &c. varie permutari possunt, adeo, ut hæc exigua Tabella octo insignia Theoremata complectatur.

SCHOLION.

294. *Quemadmodum Theorema IV. unicum fere est fundamentum omnium proportionum, harumque ope reperiendarum primarum Æquationum per Synthesim, ita Theorema V.* locus communis *habetur inveniendorum Theorematum, ac Problematum per Analysim, ut oretenus, & suo loco plura dicentur.*

Digitized by Google

THEOREMA VI.

295. PROP. *Quæ sunt proportionalia uni Tertio, sunt etiam proportionalia inter se, ut si sit* a:b=c:d, & e:f=c:d, *erit etiam* a:b=e:f.

Demonstratio patet ex (§. 286.) *& numeris substitutis declaratur.*

THEOREMA VII.

296. PROP. *Si quatuor termini proportionales, multiplicentur per alios quatuor ipsis correspondentes proportionales, facta erunt proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{m}{a:b}=\frac{m}{c:d}$
& $\frac{n}{e:f}=\frac{n}{g:h}$, dico fore $ae:bf=cg:dh$, nam substituendo per (§. 277.) loco antecedentium, consequentes per exponentes multiplicatos, erit: $mbnf:bf=mdnh:dh$, in qua factum extremorum æquale facto mediorum per (§. 286.) ergo. Idem in numeris patet.

COROLLARIUM.

297. Hinc si *Radices* sunt proportionales, erunt etiam proportionalia earundem *Quadrata*, *Cubi*, &c. seu universaliter, earundem potestates quæcunque similes.

THEOREMA VIII.

298. PROP. *Si quatuor Termini proportionales dividantur per alios ipsis correspondentes proportionales, quoti erunt proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit $ae:bf=cg:dh$
& divis. $\overline{e}:\overline{f}=\overline{g}:\overline{h}$, erit $a:b=c:d$, ut patet.

COROLLARIUM.

299. Quadratorum, Cuborum, & universim potestatum similium radices similes, sunt proportionales.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA IX.

300. PROP. Rationes *Æquemultiplæ (hoc est* per eandem quantitatem multiplicatæ) *item* Rationes *Submultiplæ (seu* per eandem quantitatem divisæ) *sunt, ut* simplæ, *hoc est, simplis proportionales.*

DEMONSTRATIO.

I. Sit $a:b$, cujus tam antecedens, quam consequens multiplicetur per d, dico fore $ad:bd = a:b$. Nam per (§. 286.) $abd = abd$. Quod erat primum.

II. Sit $ad:bd$, & dividatur uterque terminus per d, erit $\frac{ad}{d}:\frac{bd}{d} = a\,b$, ut patet ex (§. 35.) idem est in numeris.

Nam sit $6:3$, & multiplicentur per 4, erit $24:12 = 6:3$; item dividantur $24:12$, per 3, erit $8:4 = 6:3$.

THEOREMA X.

301. PROP. *Si sint duæ proportiones, in quibus (sibi invicem subscriptis) lineæ ad inæquales quantitates ductæ, sunt* Æquedistantes *seu parallelæ, erunt hæ quantitates proportionales ex* Æquo.

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $a:b = c:d$

Secunda $b:f = d:g$, dico fore $a:f = c:g$, nam alternando utramque.

erit Prima $a:c = b:d$

Secunda $b:d = f:g$, ergo per (§. 295.) $a:c = f:g$, seu altern. $a:f = c:g$. Q. E. D.

IN NUMERIS.

Sit $12:6 = 8:4$

$6:3 = 4:2$, erit $12:3 = 8:2$, ut patet ex (§. 286.)

Digitized by Google

THEOREMA XI.

302. PROP. *Si in duabus proportionibus sibi invicem subscriptis, lineæ ad inæquales quantitates ductæ, sint* Convergentes, *erunt hæ quantitates proportionales* ex Æquo perturbato.

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $a:b=c:d$

& *Secunda* $b:f=g:c$, dico fore, $a:f=g:d$, nam in Prima $ad=bc$, & in Secunda $bc=fg$, per (§.286.) ergo per (§.221.) $ad=fg$, sed hæc resolvitur in hanc $a:f=g:d$ per (§.291.) ergo. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $12:6=8:4$

& $6:3=16:8$, erit $12:3=16:4$, ut patet ex (§.286.)

THEOREMA XII.

303. PROP. *Si in duabus proportionibus* Primi Antecedentes, & Ultimi Consequentes, *vel vicissim, æquales sunt, erunt reliqui termini* reciproce *proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit $a:b=c:d$

$a:f=g:d$, dico fore $b:f=g:c$. Demonstratio eadem, quæ Theorematis prioris.

IN NUMERIS.

Sit $12:6=8:4$

$12:3=16:4$, erit $6:3=16:8$, ut patet ex (§.286.)

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA XIII.

304. PROP. *Si in duabus proportionibus* bini antecedentes, *vel* bini consequentes, *æquales sunt, erunt reliqui termini proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit $\left.\begin{array}{c} a:b=c:d \\ | \qquad\quad | \\ a:f=c:g \end{array}\right\}$ erunt altern. $\left\{\begin{array}{l} a:c=b:d \\ a:c=f:g \end{array}\right.$

ergo per (§. 295.) $b:d=f:g$. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $12:6=16:8$

$\quad | \qquad\quad |$

$12:3=16:4$, erit $6:8=3:4$, ut patet ex (§. 286.)

THEOREMA XIV.

305. PROP. *Si sint quotcunque termini proportionales, erit summa* omnium antecedentium, *ad summam* omnium consequentium, *ut quivis* antecedens *ad suum* consequentem.

DEMONSTRATIO.

Sit $\left.\begin{array}{l} \overset{m}{a:b} \\ \& \ \overset{m}{c:d} \\ \& \ \overset{m}{f:g} \end{array}\right\}$ erit $a+c+f:b+d+g=a:b$, substituendo loco $a+c+f$, eorundem valores per (§. 277.) erit $mb+md+mg:b+d+g=mb:b$, sed in hac per (§. 286.) est $mbb+mdb+mgb=mbb+mbd+mbg$. ergo. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $\left.\begin{array}{l} 12:6 \\ 16:8 \\ 4:2 \end{array}\right\}$ erit $12+16+4:6+8+2=12:6$, hoc est, $32:16=12:6$, ut patet ex (§. 286.)

SCHOLION.

306. *Quæ hucusque dicta sunt, pertinent ad proportiones ortas ex rationibus simplicibus, supersunt quædam in compendio referenda de Rationibus compositis, & harum proportionibus, ac progressionibus, de quibus tamen pluribus in Geometria tractabitur. Itaque.*

Digitized by Google

CAPUT III.

De Ratione Composita, & Progressione Geometrica continua.

DEFINITIO VIII.

307. *Ratio Composita* dicitur comparatio *Producti* ex antecedentibus duarum, vel plurium Rationum simplicium orti, cum *Producto* ex consequentibus earundem Rationum facto; ut si sint duæ Rationes simplices $a:b$ & $f:g$, erit productum ex antecedentibus af, productum ex consequentibus bg, & hinc *Ratio Composita* $af:bg$. Idem est in numeris.

THEOREMA XV.

308. PROP. *Exponens Rationis Compositæ est* Productum *omnium exponentium, quæ datam rationem compositam constituunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $\left.\begin{matrix}m\\a:b\end{matrix}\right\}$ & *Secunda* $\left.\begin{matrix}n\\f:g\end{matrix}\right\}$ erit ratio composita $\begin{matrix}mn\\af:bg\end{matrix}$ cujus exponens mn.

Nam substituendo per (§.277.) mb loco a & ng loco f, erit Ratio composita eadem $mnbg:bg$, sed hujus exponens est mn, utpote quotus per (§.267.) ergo. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $\left.\begin{matrix}4\\8:2\end{matrix}\right\}$ & $\left.\begin{matrix}2\\10:5\end{matrix}\right\}$ erit Composita $8.10:5.2$, hoc est $80:10$, cujus exponens est $8=4.2$.

COROLLARIUM I.

309. Hinc I. In Ratione composita, orta ex duabus Rationibus simplicibus *æqualibus* (hoc est, habentibus eundem exponentem) Exponens semper est quadratum exponentis simplicis, ut si sit composita $\overset{mm}{ac:bd}$ orta ex duabus Rationibus $\overset{m}{a:b}$ & $\overset{m}{c:d}$, habentibus eundem exponentem m, erit mm, vel m^2, exponens compositæ $ac:bd$; qui expo-

exponens mm, est *Quadratus* de m rationis simplicis $\overset{m}{a:b}$; & hinc hujusmodi Ratio composita, vocatur *Ratio Quadratica*, aut *Duplicata* (*NB.* non dupla) diciturque Antecedens Rationis hujusmodi. *Ex.gr.* Antecedens ac, dicere ad consequentem suum bd rationem *duplicatam*, aut *quadraticam*, Antecedentis simplicis a, ad consequentem suum b, hoc est, ut $aa:bb$. II. Eodem modo Exponens rationis compositæ, ortæ ex tribus Rationibus simplicibus æqualibus, est *Cubus* exponentis simplicis, diciturque *Ratio Triplicata*, (non *Tripla*) & Antecedens rationis hujus compositæ ad suum consequentem dicitur esse in *Ratione Triplicata* Antecedentis simplicis ad suum Consequentem. Eodem modo intelligenda est *Ratio quadruplicata* &c.

COROLLARIUM II.

310. Quoniam in proportione Geometrica continua idem omnium Rationum exponens est, per (§. 284.) sequitur, quod *primus sit ad tertium in Ratione duplicata seu quadratica primi ad secundum*, seu, ut *quadratum Primi, ad quadrat. Secundi.* Sic si sit $\overset{m\ m}{\div\div}\ a.b.c$ &c. erit $a:c=aa:bb$, nam $a:c=ab:bc$ per (§. 300.), sed in hac substituendo per (§. 277.) mb loco a, & mc loco b, erit $mmc:c=mmcb:bc$, in qua exponens est mm, sed etiam $aa:bb$ habet exponentem mm, nam substituendo mb loco a, erit $mmbb:bb$. ergo. II. Ex eodem ratiocinio clarum est, quod *primus sit ad quartum in ratione triplicata primi ad secundum*, sit $a.b.c.d.$ &c. erit $a:d=aaa:bbb$, seu, ut *cubus primi ad cubum secundi.* Idem clarum fit in Numeris, fit enim $\overset{2\ 2\ 2}{\div\div}\ 2.4.8.16.$ &c. erit terminus primus 2 ad tertium 8, hoc est 2 : 8 in ratione *duplicata* primi 2 ad secundum 4, seu 2 : 4, hoc est 2 . 2 : 4 . 4, id est 4 : 16, nam 2 : 8 = 4 : 16, ut patet per (§. 286.) & hinc universaliter: *Potentiæ sunt in tantuplicata ratione radicis, seu laterum, quot unitates habet exponens datæ potentiæ.* Sed hæc viva voce docentis clariora reddentur.

SCHOLION.

311. *Tyrones Theorema hoc cum suis corollariis probe velim memoria retineant, utpote quæ per omnem Geometriam, & Philosophiam naturalem identidem usurpanda veniunt.*

Digitized by Google

DEFINITIO IX.

312. *Progressio* dicitur certa series quantitatum continue proportionalium, ut $\div\!\div$ $1^{\cdot}3^{\cdot}9^{\cdot}27^{\cdot}81^{\cdot}243$ &c.

SCHOLION I.

313. *In specie, si series continua sint termini arithmetice proportionales* (§. 280.) *dicitur* Progressio Arithmetica, *ut* $1, \overset{2}{3}, \overset{2}{4}, \overset{2}{7}, \overset{2}{9}, \overset{2}{11}$ &c. *ad hanc revocantur I. Progressio numerorum naturalium*, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. *Item Progressio figuratorum quorundam, ut* $\overset{3}{3}, \overset{4}{6}, \overset{5}{10}, \overset{6}{15}, 21$, *quorum differentiæ sunt numeri naturales. II.* Progressio *dicitur* Geometrica, *si termini sint continue Geometrice proportionales, ut* $\div\!\div$ $1.\overset{2}{2}.\overset{2}{4}.\overset{2}{8}.\overset{2}{16}.\overset{2}{32}$. &c. *Progressiones cumprimis Arithmeticæ, & Geometricæ sunt vel* crescentes, *vel* decrescentes. Crescentes *dicuntur si termini crescant; ut* 1. 2. 4. 8. 16 &c. decrescentes, *si termini decrescant, ut* $\div\!\div$ $32.16.8.4.2.1.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.\frac{1}{16}$ &c.

SCHOLION II.

314. *Quoniam nobis hic de Progressione Geometrica agendum, multum juvabit, Tyronibus expressionem universalem per literas ob oculos ponere, quarum formularum contemplatione sola condiscimus, quæ fuse cæteroquin demonstranda forent. Sint itaque termini Progressionis Geometricæ crescentis sub exponente* m, Ex. gr. $\div\!\div$ $a.b.c.d.e.f$ &c. *patet eam per substitutionem exponentium juxta* (§. 277.) *recte sic exprimi* $\div\!\div$ $a.m^1a.m^2a.m^3a.m^4a.m^5a$ &c. *nam cum sit crescens erit* $b = ma$, & $c = mb = mma$, *seu* m^2a, & $d = mc = mmma$, *seu* m^3a, & $e = md = m^4a$, & $f = me = m^5a$ &c. *idem patet in decrescente. Hinc omnes Progressiones Geometricæ per sequentes binas classes recte designantur.*

TABULA
PROGRESSIONUM GEOMETRICARUM.

Num. termin.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Crescens	$\div\!\div$ a.	m^1a.	m^2a.	m^3a.	m^4a.	m^5a.	m^6a. &c.
Decrescens	$\div\!\div$ a.	$\frac{a}{m^1}$.	$\frac{a}{m^2}$.	$\frac{a}{m^3}$.	$\frac{a}{m^4}$.	$\frac{a}{m^5}$.	$\frac{a}{m^6}$. &c.

IN

Digitized by Google

In Numeris.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
Crescens	$\div\div 1$.	2 .	4 .	8 .	16 .	32 .	64	&c.
per Expon.	$\div\div 1$.	2^1 .	2^2 .	2^3 .	2^4 .	2^5 .	2^6	&c.
Decrescens	$\div\div \frac{64}{1}$.	$\frac{64}{2^1}$.	$\frac{64}{2^2}$.	$\frac{64}{2^3}$.	$\frac{64}{2^4}$.	$\frac{64}{2^5}$.	$\frac{64}{2^6}$	&c.
Hoc est	$\div\div \frac{64}{1}$.	$\frac{64}{2}$.	$\frac{64}{4}$.	$\frac{64}{8}$.	$\frac{64}{16}$.	$\frac{64}{32}$.	$\frac{64}{64}$	&c.
id est	$\div\div 64$.	32 .	16 .	8 .	4 .	2 .	1	&c.

NB. *Puncta inter terminos posita non indicant multiplicationem, sed tantum separationem terminorum.*

Jam contemplando imprimis seriem crescentem a . ma . m^2a &c. *sequentia Theoremata, & Problemata deducuntur.*

315. THEOREMA. Factum extremorum est æquale facto terminorum quorumvis ab extremis æquedistantium, aut si termini sint impares, quadrato medii. *Sic factum ex termino primo* a, *& termino septimo* m^6a *est* m^6a^2; *quod est æquale facto ex termino secundo* ma, *& sexto* m^5a, *quod etiam est* m^6a^2, *sic factum tertii* m^2a, *& quinti* m^4a *est* m^6a^2, *& quadratum quarti est* m^6a^2. *Idem patet in numeris, nam factum primi* 1, *& septimi* 64, *est* 64 . 1 = 64, *sed etiam factum secundi, & sexti est* 2 . 32 = 64, *factum tertii, & quinti est* 4 . 16 = 64; *quadratum medii* 8 *est* 8 . 8 = 64.

316. THEOREMA. Omnis terminus, est productum ex termino primo, & ex exponente elevato ad potestatem uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini. *Sic terminus* Ex. gr. *septimus* m^6a, *est factum ex exponente* m, *elevato ad sextam potentiam, hoc est* m^6, *& multiplicato per primum* a, = m^6a. *Idem est in numeris; sic quartus* 8, *est factum ex exponente* 2, *elevato ad tertiam potentiam nempe* 2 . 2 . 2 . = 2^3, *multiplicato per primum* 1. *Hinc eruuntur sequentia Problemata.*

317. PROBLEMA. Dato termino primo, & exponente rationis, invenire terminum quemvis. Resolutio, *datus Exponens elevetur ad potentiam uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini, factum multiplicetur per Primum; sic si detur exponens* 2, *& primus* 1, *& quæratur sextus terminus, erit* 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 1 = 32 . 1 = 32, *qui est terminus sextus, ut patet ex Tabula.*

Digitized by Google

318. COROLLARIUM. *Hinc si quæratur terminus* maximus, *invenitur is eodem modo, ut quivis alter. Terminus verò* minimus *habebitur, si terminus* maximus *(per prius dicta inventus) dividatur per exponentem elevatum uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini maximi. Sic detur terminus maximus* 32, *qui sexto loco consistit, & exponens detur* 2, *erit* $2.2.2.2.2 = 32$, *per quem dividendo* 32, *erit quotus* $= 1$, *hoc est minimus. Et universaliter formula termini* Maximi $m^{n-1}a$, *& termini* Minimi $m^{n-1}a : m^{n-1}$, *in qua* m *denotat exponentem datæ rationis*, $n - 1$ *denotat exponentem potentiæ, vel potestatis de* m *elevato ad gradum unum inferiorem, quam numerus localis termini cujuscunque,* a *verò denotat primum terminum. Porro ex contemplatione seriei crescentis* a. ma. m²a *&c. habetur sequens.*

319. THEOREMA: Exponens rationis *m* est æqualis $\sqrt[n-1]{m^{n-1}a : a}$ *hoc est* $\sqrt[n-1]{m^{n-1}} = m$ *hoc est* Terminus datus quivis *(seu maximus)* divisus per terminum primum, & ex quoto extracta radix, potentiæ uno gradu inferioris, quam sit numerus localis termini, est exponens datæ rationis. *Hinc habetur resolutio sequentis Problematis.*

320. PROBLEMA: Dato termino primo, termino ultimo *(seu maximo)* & dato numero terminorum, *(seu quotum locum terminus ultimus occupat)* invenire exponentem rationis. Ex. gr. *Datur terminus primus* $= 1$, *terminus ultimus* $= 8$, *datus numerus terminorum* $= 4$ *(hoc est, numerus* 8 *consistit quarto loco in data serie)* invenire exponentem. *Vocetur is* $= x$ *erit is per formulam generalem* $\sqrt[n-1]{m^{n-1}a : a} = \sqrt[4-1]{x^{4-1} : 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$ *hoc est* $\sqrt[3]{8 : 1} = \sqrt[3]{8} = 2$ *hoc est:* Terminus datus ultimus dividatur per primum, & ex quoto extrahatur radix potentiæ uno gradu inferioris, quam sit terminorum numerus, erit radix hæc quæsitus exponens rationis. *Hinc porro sequitur.*

321. THEOREMA: Si primus terminus subtrahatur ab ultimo, & residuum dividatur per exponentem rationis una unitate mulctatum, & huic quoto addatur terminus ultimus, habetur summa omnium terminorum. *Seu, cum ultimus sit* $= m^{n-1}a$, *primus* $= a$ *exponens rationis* $= m$, *erit residuum, si primus ab ultimo subtrahatur* $= m^{n-1}a - a$, *& dividendo per* $m - 1$, *erit quotus* $(m^{n-1}a - a) : (m - 1)$, *& huic*

Digitized by Google

huic addendo ultimum $m^{n-1}a$, *habebitur summa* $= m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1)$, *quæ est formula universalis reperiendæ summæ. Hinc resolvitur sequens.*

322. PROBLEMA: Dato termino primo, dato termino ultimo, & dato exponente rationis, invenire summam omnium terminorum. *Ut si detur terminus primus* $= 1$, *terminus ultimus* $= 64$, *exponens rationis* $= 2$, *erit vi formulæ, terminus primus* $a = 1$, *ultimus* $m^{n-1}a = 64$, *& exponens* $m = 2$, *& hinc vi formulæ* (§.321.) *erit summa:* $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : m - 1 = 64 + (64 - 1) : (2 - 1)$ *hoc est* $64 + (63 : 1) = 64 + 63 = 127$, *ut patet ex Tabula:* (§.314.) *nam*

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127.$$

323. COROLLARIUM. *Quotiescunque itaque quæritur summa, nota esse debent hæc tria.* I. Terminus primus, II. terminus ultimus, *&* I I. exponens rationis. *Hinc quotiescunque datur hujusmodi problema resolvendum, & ex his tribus deficiat unum, in id prius, per superiora problemata inquirendum est.* Ex. gr. *Si daretur terminus primus, & exponens, & non daretur ultimus, in hunc ultimum prius inquirendum est per* (§.317.) *aut si daretur terminus primus, & ultimus, & non daretur exponens, hic exponens prius inveniri debet per* (§.320.) *denique ex his liquet.*

324. PROBLEMA: Datis duobus terminis invenire quotcunque medios proportionales. *Nam cum semper detur terminus primus, terminus ultimus, & numerus terminorum, invenietur ex his per* (§.320.) *exponens rationis, quo invento formari possunt quodcunque termini per* (§.317.)

SCHOLION I.

325. *Exemplis hæc quidem pluribus illustrari deberent, quæ, ne in molem excrescat liber ad* Exercitationes Analyticas *reservamus. Porro quæ de progressione* crescente *dicta sunt, eodem modo de* decrescente *vera esse applicanti patebit, maxime si Tyro animadvertat, omnem decrescentem, fore crescentem, & vicissim crescentem mutari in decrescentem, modo seriem consideret progredientem à dextris sinistram versus, & contra.*

SCHOLION II.

326. *De proportione, & progressione jam Arithmetica brevibus; nam* universaliter, *quæ de proportione, & progressione Geometrica demonstrantur adhibendo* multiplicationem, & divisionem, *item* elevationem *ad* potestatem, *vel* extrahendo $\sqrt{}$, *hæc de proportione, & progressione Arith-*

Digitized by Google

Arithmetica intelligenda sunt adhibendo loco multiplicationis, Additionem, *& loco divisionis*, Subtractionem, *loco quadrati, multiplicationem per* 2, *loco cubi, multiplicationem per* 3, *&c. loco extractionis* $\sqrt{}$, *divisionem per* 2, *& loco extractionis* $\sqrt{}$, *divisionem per* 3, *&c.*

CAPUT IV.

De Proportione, & Progressione Arithmetica.

THEOREMA XVI.

327. PROP. *In Proportione Arithmetica* (§.280.) *summa extremorum est æqualis summæ mediorum.*

DEMONSTRATIO.

Sit Majoritatis $\frac{d}{a,b} = \frac{d}{c,f}$, erit $a+f=b+c$, nam substituendo per (§.278.) erit $a=d+b$, & $c=f+d$, & hinc proportio $d+b$, $b=f+d$, f. summa extremorum $d+b+f=b+f+d$ summæ mediorum. In Numeris sit $3, 5=7, 9$, erit $3+9=5+7$, hoc est $12=12$.

328. COROLLARIUM I. *In continua* $a, b=b, c$, *summa extremorum* $a+c=2b$, *hoc est, duplo medii; ut sit* $3, 5=5, 7$, *erit* $3+7=5+5$, *seu* $3+7=10$.

329. COROLLARIUM II. *Quartus Arithmetice proportionalis invenitur, si à summa mediorum (hoc est secundi & tertii) subtrahatur Primus. Nam* $a, b=c, x$, *erit* $a+x=b+c$, *& per Metathesim* $x=b+c-a$. *Sic si detur* $3, 5, 7$, *& quæratur quartus* x, *erit* $3, 5=7, x$, *hoc est* $3+x=5+7$, *& per Metathes.* $x=5+7-3=12-3=9$.

330. COROLLARIUM III. *Tertius continue proportionalis obtinetur, si à duplo secundi subtrahatur primus, ut si dentur* 3, *&* 5, *& quæratur tertius* x, *erit* $3, 5=5, x$, *hoc est* $3+x=5+5$, *hoc est* $3+x=10$, *& per Metathesim* $x=10-3=7$, universaliter: $a, b=b, x$ *erit* $a+x=2b$, *&* $x=2b-a$.

331. COROLLARIUM IV. *Medius proportionalis invenitur, si summa Primi & Tertii dividatur per* 2, *nam* $a, x=x, c$, *hoc est* $a+c=x+x$, *seu* $a+c=2x$ *& dividendo* $\frac{a+c}{2}=x$, *sic sit dentur* 3 *&* 7, *& quæratur medius* x, *erit* $3, x=x, 7$, *hoc est* $3+7=2x$, *seu* $\frac{3+7}{2}=x=\frac{10}{2}=5$.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

332. *Liquet itaque ex his, quæ* (§. 326.) *monui eodem quoque modo ratiocinandum esse de progressionibus Arithmeticis, quemadmodum de Geometricis dictum, adhibendo videlicet, loco multiplicationis,* Additionem, *& in locum divisionis* subtractionem, *&c. igitur sit series Arithmetica crescens* a, b, c, f, g, h *&c. exprimetur hæc recte per substitutionem differentiarum, juxta doctrinam* (§. 278.) *declaratam.*

Sit	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
cresc.	a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$	&c.
In	2	2	2	2	2	2		
Num.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13	&c.

Ex cujus contemplatione sequentia innotescunt Theoremata, ac Problemata.

333. THEOREMA I. Summa extremorum, est æqualis summæ quorumvis æque distantium ab extremis, aut *(si termini sint impares)* duplo medii. *Sic Summa primi & septimi est* - - - $a+a+6d=2a+6d$, *Summa secundi & sexti* - $a+d$, $+a+5d=2a+6d$, *Summa tertii & quinti* - $a+2d$, $+a+4d=2a+6d$, *duplum medii* - $a+3d$, *seu* $(a+3d).2=2a+6d$, *idem patet in numeris.*

334. THEOREMA II. Quivis terminus componitur ex termino primo, & tot differentiis, quot sunt numeri terminorum dempto uno, *seu* est aggregatum ex termino primo, & tot differentiis, quot sunt termini antecedentes. *Sic* E. g. *terminus sextus* $a+5d$, *constat termino primo* a *plus quinque differentiis; quot nempe termini hunc antecedunt. Idem patet in Numeris. Ex his deducuntur sequentia Problemata.*

335. PROBLEMA I. Dato termino primo, & differentia rationis, invenire terminum quemvis. *Sit primus* $=a$, *differentia* $=d$, *numerus terminorum* $=n$, *terminus quæsitus sit* $=x$ Resolutio: *multiplicetur differentia per numerum terminorum una unitate mulctatum, & facto huic addatur primus, erit aggregatum, terminus quæsitus, id est* $(d.n-1)+a$, *hoc est* $dn-d+a=x$, *quæ est formula universalis pro quocunque termino, excepto primo; sit in numeris primus* $a=1$, *differentia* $d=2$, *& quæratur sextus, erit numerus terminorum* $6=n$, *adeoque* $a+nd-d=1+12-2=11$.

336. CO-

Digitized by Google

336. COROLLARIUM I. *Cum in data progressione ad libitum poni possit terminus quicunque pro ultimo, si is vocetur* $= u$, *erit generalis formula pro ultimo, seu maximo termino* $u = a + nd - d$. *Hinc terminus ultimus seu maximus eodem modo reperitur, quo quivis alius.*

337. COROLLARIUM II. *Quod si detur differentia* $= d$, *numerus terminorum* $= n$, *& terminus ultimus* $= u$, *& quæratur primus* x, *erit* $u = x + dn - d$, *& per Metathesim* $u - dn + d = x$, *hoc est, ad ultimum addatur differentia, & à summa subtrahatur factum ex differentia, & numero terminorum, erit residuum æquale primo. Sit* $u = 13$, *&* $d = 2$, *&* $n = 7$, *erit primus* $13 - 14 + 2 = 1$.

338. PROBLEMA II. Dato termino primo $= a$, dato ultimo $= u$, & dato numero terminorum $= n$ invenire differentiam; *sit quæsita differentia* $= x$, *erit* $u = a + xn - x$, *& per Metathesim* $u - a = xn - x$, *& dividendo per* $n - 1$, *erit* $\frac{u-a}{n-1} = x$, *hoc est;* Ab ultimo subtrahatur primus, Residuum dividatur per numerum terminorum unitate mulctatum, erit quotus differentia. Ex. gr. *Sit primus* $a = 1$, $u = 13$, *numerus terminorum* $n = 7$, *erit formula;* $\frac{u-a}{n-1} = \frac{13-1}{7-1}$, *hoc est* $\frac{12}{6} = 2$.

339. PROBLEMA III. Dato termino primo $= a$, dato termino ultimo $= u$, & data differentia $= d$, invenire numerum terminorum; *Sit numerus terminorum quæsitus* $= x$, *erit* $u = a + dx - d$, *& per Metath.* $u + d - a = dx$, *& dividendo per* d, *erit* $\frac{u + d - a}{d} = x$, *hoc est, ad ultimum addatur differentia, & subtrahatur primus, residuum dividatur per differentiam, erit quotus numerus terminorum. Sic si* $a = 1$, $u = 13$, $d = 2$, *erit vi formulæ* $\frac{u + d - a}{d} = \frac{13 + 2 - 1}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

340. PROBLEMA IV. Dato termino primo $= a$, & ultimo $= u$, & numero terminorum $= n$, invenire summam omnium terminorum; *erit Resolutoria formula* $(u + a) \cdot \frac{n}{2}$ *seu* $\frac{nu + na}{2}$, *hoc est, ad ultimum addatur primus, & summa multiplicetur per dimidium numerum terminorum.*

341. PRO-

Digitized by Google

341. PROBLEMA ULTIMUM. Dato termino primo $=a$, data summa omnium terminorum $=S$, & dato numero terminorum $=n$, invenire differentiam. *Sit hæc* $=x$, *itaque terminus ultimus* $=a+nx-x$, *per* (§. 336.) *adeoque summa omnium per* (§. 340.) $S=(2a+nx-x).\frac{n}{2}$, *hoc est*, $\frac{2an+nnx-nx}{2}=S$, *& multiplicando per* 2, *erit* $2an+nnx-nx=2S$, *& per Metath.* $nnx-nx=2S-2an$, *dividendo per* $nn-n$, *erit* $x=\frac{2S-2an}{nn-n}$, *quæ est formula resolutoria. Ut si sit* $S=49$, $a=1$, $n=7$, *erit vi formulæ*, $\frac{98-14}{49-7}=\frac{84}{42}=2$, *quæ est differentia terminorum.*

SCHOLION I.

342. *Doctrina progressionum* a §. 312. *hucusque tradita, procedit de omnibus etiam fractis. In his tamen, cum variæ esse possint, considerandi veniunt tam* numeratores, *quam* denominatores; *sunt enim quædam, in quibus manente eodem numeratore, denominatores progrediuntur in ratione vel Geometrica, vel Arithmetica, & sunt quædam, quarum tam numeratores, quam denominatores, vel tantum Geometrice, vel solum Arithmeticè procedunt; sunt item aliæ, in quibus numeratores progrediuntur Arithmetice, denominatores verò Geometricè, aut vicissim &c. eæque omnes vel sunt crescentes, vel decrescentes, hujusmodi tamen progressiones, si series numeratorum, itemque denominatorum seorsim considerentur, iisdem gaudent regulis, quibus integri.*

SCHOLION II.

353. *Superest, ut de proportione* Harmonica *innuamus, quam multi, existimantes eam duntaxat* Musicis *famulari, tanquam cæteris scientiis parum utilem negligunt, non animadvertentes summum ejusdem usum in enodandis miris naturæ arcanis, quem satis quidem intelligo amplissimum. Tyronibus interea innuisse sufficiat, proportionem Harmonicam appellari, & quidem discretam, si differentia termini primi à secundo, ita se habeat* Geometrice, *ad differentiam tertii à quarto, ut primus ad quartum, aut in continua, differentia primi à secundo ad differentiam secundi à tertio, ut primus ad tertium, & quidem in ratione Geometrica. Sic harmonicè proportionales sunt* $12, \overset{2}{14}=\overset{4}{20}, 24$, *nam* $2:4=12:24$, *quæ est discreta. Item continua* $10, \overset{6}{16}=\overset{24}{16}, 40$, *nam* $6:24=10:40$, *quæ si generaliter exprimatur per literas* $a, b=c, d$, *erit* $b-a, d-c=a, d$, *quæ est Geometrica, legibusque Geometricis tractanda; cujus ope*, quartus, tertius, *aut* medius *harmonice proportionalis inveniri potest, plura oretenus.*

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT V.

De usu Regulæ Aureæ directæ, Inversæ, Simplicis, & compositæ, itemque de Regula Societatis.

344. Regula Aurea, vel Trium est proportio Geometrica, ut (§. 288.) dictum, eaque, vel *simplex*, vel *composita*, *simplex* appellatur, quando datis tribus terminis quæritur quartus. *Composita* dicitur, quando datis terminis quinque, quæritur sextus, vel datis septem, quæritur octavus. Utraque hæc dividitur in *Directam*, & *Inversam*; *directa* appellatur, quando, ut primus est ad secundum, ita tertius ad quartum; *Inversa*, quando, ut tertius est ad primum, ita secundus ad quartum.

SCHOLION.

345. *Cum ea, quæ in commercium, usumque communem veniunt, sint* pretiis, temporibus, laboribus &c. *proportionalia, (qui enim duas ulnas emit, necesse est, ut unius ulnæ pretium duplum persolvat, qui tres, triplum &c. item, qui laborat duabus diebus duplam mercedem, qui tribus triplam meretur, & qui fodit duabus diebus, duplum laborem unius diei perficit, qui tribus, triplum &c.) sequitur, per regulam auream* (§. 288.) *seu per proportionem, rectè quæsita inveniri, unde consequitur, ea, quæ per regulam auream indagantur, debere esse homogenea; male enim quis ratiocinaretur: urna vini constat 40 gross. ergo 6 metretæ tritici, quanti erunt? cum urna vini, & metretæ non sint homogenea. Itaque ad praxim.*

Usus Regulæ Aureæ simplicis, & directæ.

346. Regula I. Termini ordine in quæstione proposito in proportionem ordinentur. II. Multiplicetur tertius per secundum, factum dividatur per primum (§. 288.) quotus erit terminus quartus quæsitus. III. Si occurrant ordinandi termini mixti heterogenei reducibiles, reducantur ante ad speciem minimam omnes termini homologi. *Vide Exempl. II.* IV. Si fractiones immisceantur, reducantur ante ad eandem denominationem, aut tractentur per (§. 148.)

EXEMPLUM I.

3 *Ulnæ panni constant fl.* 7, *ergo* 9 *Ulnæ, quanti veniunt?*

erunt ordinati $\underset{uln.}{3}:\underset{fl.}{7}=\underset{uln.}{9}:\underset{fl.}{x}$, *adeoque per Reg. II.* $x=\frac{7.9}{3}=\frac{63}{3}=21$,

ergo $3:7=9:21$, *examen fit per* (§. 286.)

EXEM-

EXEMPLUM II.

2 Libræ, & 12 Loth aromatum (ponderis civilis) constant flor. germ. 15, & 24 xr. quanti erunt 5 Libræ cum 30 Loth ejusdem speciei aromatum?

Itaque terminos hos Reducendo juxta Reductionum Tabul. III. & IX. (§. 141. Arithm.)

erunt 2 *Libræ* & 12 *Loth* = 76 *Loth*
15 *flor.* & 24 *xr.* = 924 *xr.*
5 *Libræ* & 30 *Loth* = 190 *Loth.*

Loth xr. Loth
Unde 76 : 924 = 190 : x, & *hinc* $x = \frac{924 \cdot 190}{76} = \frac{175560}{76} =$ 2310 *xr. id est* 38 *fl.* & 30 *xr.*

Regula aurea simplex Inversa.

347. *Cognoscitur esse inversa per (§. 344.) & plerumque ratione temporis occurrit, quo opus aliquod citius, tardiusve perficiendum est; ut si quæras, 4 Murarii exstruunt domum 10 Mensibus, ergo 8 Murarii, quot mensibus construent eandem domum? video itaque inversam, cum 8 Murarii longe breviore (quam 10 Mensium) tempore opus absolvere debeant, sunt nempe Menses in ratione inversa Murariorum, hoc est, ut 8 Murarii ad 4 Murarios, ita 10 Menses ad Menses quæsitos. Itaque*

348. Regula unica: Ordinentur termini ita, ut tertius in quæstione terminus fiat primus, & primus fiat secundus; cætera fiant, ut in regula directa. Vel *(secundum vulgus Arithmeticorum)* ordinentur termini ordine in quæstione proposito; tum multiplicetur primus per secundum, & factum dividatur per tertium.

EXEMPLUM I.

Operæ 100 intra 8 Dies excolunt vineam, ergo 50 Operæ, quot Diebus.
Erit, ut 50 : 100 = 8 : x, *hoc est* $x = \frac{100 \cdot 8}{50} = \frac{800}{50} = 16$ *dies.*

EXEMPLUM II. VULGARI METHODO.

Militibus 125 pro diebus 10 sufficiunt centum metretæ, ergo 625 Militibus, quot diebus sufficient?

erit vulgo, 125 : 10 = 625 : x, *hoc est* $\frac{10 \cdot 125}{625} = \frac{1250}{625} = 2.$

Usus Regulæ compositæ Directæ.

349. *Regula composita juxta* (§. 344.) *tunc utimur, quando datis* 5, *vel* 7 *terminis quæritur sextus, vel octavus, quæ (si omnes termini sint in ratione directa) appellatur* Directa. *Ad hujus rectum usum cumprimis videndum, quis sit terminus* solitarius? *terminum autem* solitarium *voco, cui* homogeneus *est terminus quæsitus. Itaque*

350. Regula I. Termini omnes, qui ad solitarium spectant, multiplicentur inter se, *(excepto solitario)* & factum ponatur primo loco, in secundo loco ponatur terminus solitarius, tertio loco ponatur productum ex terminis, qui pertinent ad quæsitum. Reg. II. Sic reducti termini, & hoc ordine positi tractentur, ut in Regula aurea simplice directa. (§. 346.)

EXEMPLUM.

1000 *fl. per annos* 4 *dant* censum 200 *florenos? ergo* 3500 *floreni per annos* 6 *quantum* censum *dabunt? In hac quæstione census* 200 *fl. est solitarius, cum quæratur census.*

fl. an. cens. fl. an. cens.

Itaque (1000 . 4) : 200 = (3500 . 6) : x

hoc est 4000 : 200 = 21000 : x

unde per (§. 346.) $x = \frac{21000 . 200}{4000} = 1050$ *fl. cens.*

Regula composita Inversa.

351. Regula Unica: Videatur, qui termini sint in ratione inversa aliorum, hi ante reductionem transponantur ita, ut terminus pertinens ad solitarium, transferatur ad terminos pertinentes ad quæsitum, & vicissim terminus pertinens ad quæsitum transferatur ad terminos solitarii, quo facto per Reg. I. (§. 350.) reducantur, reducti in proportionem ordinentur, & tractentur, per regulam compositam directam.

EXEMPLUM.

8 *Messores demetunt* 50 *jugera intra dies* 10, *igitur* 16 *messores, jugera* 150 *quot diebus demetent. In hac solitarius est* 10 *dies, cum quæsitus sint dies. Itaque video dies quæsitos esse in ratione inversa messorum, & hinc.*

mess. jug. dies mess. jug.

ut (16 . 50) : 10 = (8 . 150) : x

hoc est 800 : 10 = 1200 : x, *seu* $x = \frac{12000}{800} = 15$ *dies.*

SCHO-

SCHOLION.

Habetur quoque methodus resolvendi quæstiones compositas per repetitas regulas simplices, sed hæc docentis viva voce, aut lectione authorum facile intelligitur.

Usus Regulæ Societatis simplicis.

352. *Regula* Societatis *(quæ etiam proportio est) appellatur, quando bini, vel plures societatem ineunt lucri causa, conferendo ad faciendum lucrum pecunias particulares, dein elapso certo tempore factum lucrum partiendum est inter socios pro rata collatæ cujusvis pecuniæ.*

353. REGULA. Primo loco semper ponatur tota summa collatorum omnium; secundo loco semper lucrum totale, tertio cujusvis collatum particulare, pro quo quæritur. Hinc quot sunt socii, toties dicto modo regula repetenda est. Itaque

EXEMPLUM.

Tres Mercatores Pterilus, Ponticus, & Cosmophilus inita societate conflarunt summam 1000 *fl. Pterilus contulit* 240 *flor. Ponticus* 300, *Cosmophilus* 460, *hac summa lucrati sunt uno anno omnes simul* 2000 *fl. quæritur quid singuli? Itaque Proportiones pro singulis sic ordinantur:*

Pro Pterilo ut.	1000 : 2000 = 240 : x	*prodit lucr.*	-	480
Pro Pontico ut.	1000 : 2000 = 300 : x	*fit lucr.*	-	600
Pro Cosmophilo	1000 : 2000 = 460 : x	*habetur*	-	920
		Lucrum omnium	=	2000

Regula Societatis composita.

354. Iii hac præter collatum singulorum occurrit etiam tempus, pro quo singuli contulerunt. Hinc antequam termini ad proportionem ordinentur, singulorum collatum per suum tempus multiplicetur, & factum ponatur loco tertio, cætera fiant, ut in regula Societatis simplice.

EXEMPLUM.

Iidem Mercatores alio pacto inierunt societatem, ita, ut Pterilus contulerit - - - fl. 100 *pro mens.* 19.
Ponticus - - fl. 130 *pro mens.* 10.
Cosmophilus - - fl. 300 *pro mens.* 6.

Digitized by Google

Exacto hoc tempore lucrati sunt simul fl. 10000 *fl. quantum singuli? ut habeatur collatum singulorum, & summa totalis collata.*

Fiat 100 . 19 *hoc est* 1900 *Pterili collatum.*
130 . 10 - - 1300 *Pontici.*
300 . 6 - - 1800 *Cosmophili.*
Summa collat. 5000

Itaque pro Pterilo 5000 : 10000 = 1900 : x *fit* 3800.
Pontico 5000 : 10000 = 1300 : x *fit* 2600.
Cosmoph. 5000 : 10000 = 1800 : x *fit* 3600.
totum lucrum = 10000.

SCHOLION.

355. *Cum usus Regularum frequenti exercitio condiscatur, nobis autem prolixioribus esse non liceat, idcirco selectissima ad usum exempla, & quæstiones,* Exercitationibus Arithmeticis *in gratiam nostrorum discipulorum edendis, reservamus, quibus Methodum Italicam, & cætera compendia, ac praxes adjungemus.*

CAPUT ULTIMUM.

De Inventione Theorematum, ac Problematum.

356. *Inventio Theorematum, ac Problematum adeo propria est Algebræ, ut nullam fere Æquationem reperias, quæ vel Theorema insigne, aut utile aliquod Problema non eloqueretur, modo mentem advertamus. Itaque tribus (ut ajunt) verbis doctrinam hanc complectar:* Tracta quantitates componendo, æqualia pro æqualibus substituendo, & composita in analogiam, seu proportionem resolvendo, & artem reperisti. *Quapropter*

357. *Ad* Compositionem *pertinent* Additio, *cujus ope reperta habentur Theoremata* (§. 231, 233. *&c.*) Subtractio *per quam detecta habentur Theor.* (232, 234. *&c.*) Multiplicatione, *&* Divisione *innotuerunt Theor.* (§. 182.), *& reliqua potentiarum doctrina, item omnia Partis IV. de proportione.*

358. *Virtutem* Substitutionis *æqualis pro æquali declarant* (§ 247, 248.) *& demonstrationes proportionum à* (§. 276.) *ad Caput V.*

359. *Infinitum prope Problematum numerum à formularum in analogiam seu proportionem* Resolutione *emanare, nemo est Mathematicorum, qui ignoret; quarum quidem resolutionum artificium*

in

neo consistit, ut ita termini resolvantur, & in proportionem ordinentur, ut factum extremorum, semper sit æqualis facto mediorum, quemadmodum à (§. 291.) *ad Cap. V. ostensum est. Hic animadvertendum præterea, quod si formula per Hypothesim divisionis expressa in analogiam solvenda, totus divisor pro* primo, *reliqui factores Numeratoris, seu dividendi,* secundo, *& tertio loco constituantur. Sic hæc* Ex. gr. *Æquatio* $x = \frac{ad-dc}{a-b}$ *ita resolvetur;* $a-b : a-c = d : x$, *aut* $a-b : d = a-c : x$, *item hæc* $x = \frac{a}{}$, *ita* $b : a = 1 : x$, *item* $\frac{3ab}{2c}$, *ita* $2c : 3a = b : x$, *vel* $2c : 3b = a : x$, *vel* $2c : 3 = ab : x$, *ut patet. Sed hæc, & cætera docentium industriæ una cum reflexionibus, relinquo.*

359. *Ut fidem* (§ 84.) *datam exsolvam, sint ope Analysis demonstranda Theoremata.*

360. THEOREMA: Quantitas positiva per negativam, vel vicissim multiplicata, dat negativum productum, *hoc est* $(a-b).+c$, *dat productum* $+ac-bc$; *cum cuicunque quantitati æqualis assignari possit aliqua quantitas, sit illa* d, *erit* $a-b=d$, *& per Metathesim* $a=d+b$ *& per* $+c$ *multiplicando utramque partem, erit* $ac=dc+bc$, *& per Metathesim* $ac-bc=dc$, *unde cum inter* $a-b$, *&* d *fuerit æqualitas, & iterum inter* $ac-bc$, *&* dc *sit æqualitas, sequitur multiplicando* $a-b$ *per* c, *fieri debere* $ac-bc$, *& non* $ac+bc$.

361. THEOREMA. Quantitas negativa per negativam multiplicata, dat positivam: *hoc est* $(a-b).-c$ *dat* $-ac+bc$. *Sit* $a-b=d$, *erit per Metathesim* $a=d+b$, *multiplicetur pars utraque per* $-c$, *erit per prius demonstrata* $-ac=dc-bc$, *& per Metathesim* $-ac+bc=-dc$, *sed* $-ac+bc$, *est factum ex* $a-b$ *in* $-c$, *ergo.*

362. THEOREMA. Factum duarum fractionum $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$, *esse debet* $\frac{ac}{bc}$, *ut* (§. 140, *&* 141) *dictum.*

DEMONSTRATIO. *Omnis fractio est Ratio Geometrica per* (§. 272.) *Ratio verò Geometrica est divisio per* (§ 272.) *sed in divisione divisor est ad dividendum, sicut unitas ad quotum, per* (§. 60. Arithm.) *unde,*

fractio $\frac{a}{b}$ *resolvitur in hanc* $b : a = 1 : \frac{a}{b}$ *per* (§ 288.)

& $\frac{c}{d}$ *resolvitur in hanc* $d : c = 1 : \frac{c}{d}$ *per* (§ 288.)

ergo per (§. 296) $b.d) : (a.c) = (1.1) . \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

hoc est - - $bd : ac = 1 : \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

seu - - $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ *quod erat Demonst.*

SCHOLION.

362. *Ex his, & cæteris hucusque declaratis, satis liquet* Arithmeticam numericam *omne suum pretium* Algebræ *debere, quanta verò incrementa cæteræ disciplinæ ab Analysi sumpserint, erudita Recentiorum volumina his formulis locupletata, loquuntur. Postremum Tyronibus proficere volentibus tam in Arithmetica numerica, quàm literali non inutile censui quosdam Authores indicare, à quibus, quæ à me ob temporis angustias, necessario, aut prætermittenda, aut certe strictim pertractanda fuere, petere valeant. Itaque Arithmeticam ad captum Tyronum præclare concinnárunt*, P. Christophorus Clavius, è S.J., *cujus* Epitome Arithmeticæ practicæ, *sæpissimè recusa, Authorem à facilitate doctrina commendat; Theoriam praxi junxit*, R.P. Andreas Tacquet, S.J. *in sua* Theoria, & praxi Arithmetices. *Arithmeticam, & Algebram in usum Tyronum dedere* R.P. Erasmus Frœlich, è S.J. *sub Titulo:* Introductio facilis in Mathesim Viennæ 1746. *in 8vo, Opusculum singulare.* Crivellii Elementa Arithmeticæ numericæ, & literalis, *latinè, & auctiora reddita Viennæ 1745. in 8vo.* R.P. Lechi, è S.J. Arithmetica universalis Neutoni. *His accedunt* Tabulæ Mnemonicæ ex Primis universæ Matheseos Elementis concinnatæ à R.P. Philippo Steinmeyer, S.J. Augustæ Vindel. 1750. *in 8vo. Cel. D. L'Abbé de la Caille Institutiones Mathematicæ* Viennæ latine redditæ à R.P. Carolo Scherffer è S.J. *in 4to.*

Cursus Mathematici commendantur: R.P. Caspari Schotti, è S.J. & R.P. Claudii Milliet Dechales, è S.J. *Notissima sunt* Illust. Christiani Wolffii Elementa Mathematica, & eorundem Compendium; *item* Ozanam Cours de Mathematique; Institutiones Matheseos Weidleri, & Wiederburgii; *item* Poëtii Introductio in Arithmeticam Idiomate Germ. è quibus singulis prima Matheseos Elementa, si quando Tyrones petent, meminisse una mecum velim, moniti D. Pauli:

Omnia in Gloriam DEI facite.

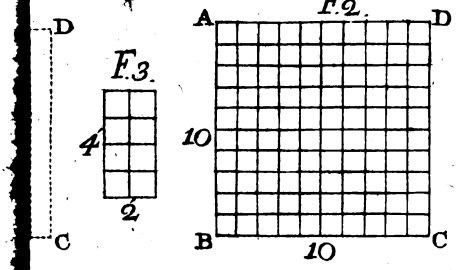
I.Cor. 4. v. 31.

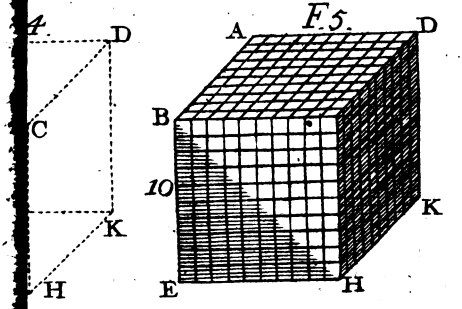
FINIS ELEMENTORUM ALGEBRÆ.

INDEX

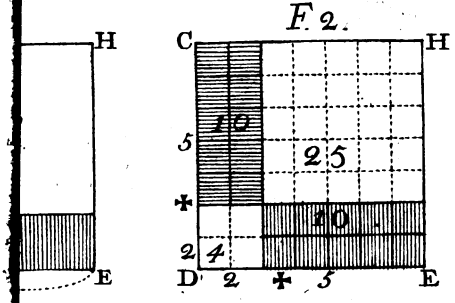
Digitized by Google

Logisticæ Decimalis.





bula Algebræ.



Digitized by Google

SCHOLION.

362. *Ex his, & cæteris hucusque declaratis, satis liquet* Arithmeticam numericam *omne suum pretium* Algebræ *debere, quanta verò incrementa cæteræ disciplinæ ab Analysi sumpserint, erudita Recentiorum volumina his formulis locupletata, loquuntur. Postremum Tyronibus proficere volentibus tam in Arithmetica numerica, quàm literali non inutile censui quosdam Authores indicare, à quibus, quæ à me ob temporis angustias, necessario, aut prætermittenda, aut certe strictim pertractanda fuere, petere valeant. Itaque Arithmeticam ad captum Tyronum præclare concinnárunt*, P. Christophorus Clavius, è S.J., *cujus* Epitome Arithmeticæ practicæ, *sæpissimè recusa, Authorem à facilitate doctrinæ commendat; Theoriam praxi junxit*, R.P. Andreas Tacquet, S.J. *in sua* Theoria, & praxi Arithmetices. *Arithmeticam, & Algebram in usum Tyronum dedere* R.P. Erasmus Frœlich, è S.J. *sub Titulo:* Introductio facilis in Mathesim Viennæ 1746. *in 8vo, Opusculum singulare.* Crivellii Elementa Arithmeticæ numericæ, & literalis, *latinè, & auctiora reddita Viennæ 1745. in 8vo.* R.P. Lechi, è S.J. Arithmetica universalis Neutoni. *His accedunt* Tabulæ Mnemonicæ ex Primis universæ Matheseos Elementis concinnatæ à R.P. Philippo Steinmeyer, S.J. Augustæ Vindel. 1750. *in 8vo. Cel. D. L'Abbé de la Caille Institutiones Mathematicæ* Viennæ latine redditæ à R.P. Carolo Scherffer è S.J. *in 4to.*

Cursus Mathematici commendantur: R.P. Caspari Schotti, è S.J. & R.P. Claudii Milliet Dechales, è S.J. *Notissima sunt* Illust. Christiani Wolffii Elementa Mathematica, & eorundem Compendium; *item* Ozanam Cours de Mathematique; Institutiones Matheseos Weidleri, & Wiederburgii; *item* Poëtii Introductio in Arithmeticam Idiomate Germ. è quibus singulis prima Matheseos Elementa, si quando Tyrones petent, meminisse una mecum velim, moniti D. Pauli:

Omnia in Gloriam DEI facite.

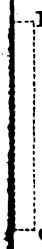
I.Cor. 4. v. 31.

FINIS ELEMENTORUM ALGEBRÆ.

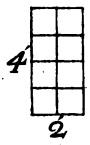
INDEX

Digitized by Google

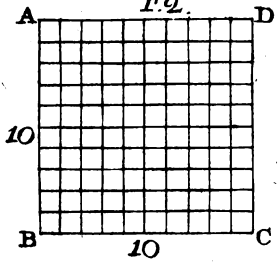
Logisticæ Decimalis.

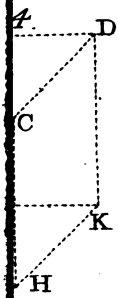


F. 3.

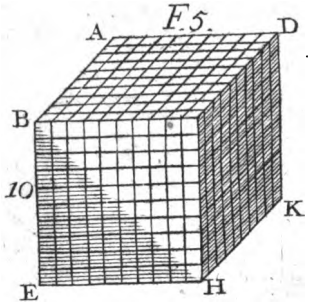


F. 2.



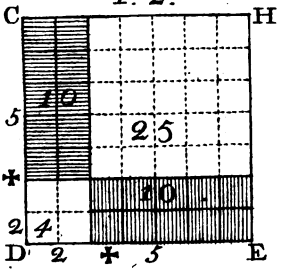


F. 5.



bula Algebræ.

F. 2.



Digitized by Google

Digitized by Google

INDEX PROBLEMATUM.

PARTIS I.

De Algebra tam speciosa, quam numerosa integrorum cum fractis.

	N. fol.	N. §.
Tabula Compendiaria exhibens Hypotheses signor. -	92 -	38
Quantitates quascunque Algebraicas Addere. - -	104 -	74
- - - - *Subtrahere.* - -	108 -	78
- - - - *Multiplicare.* - -	113 -	89
- - - - *Dividere.* - -	119 -	98
Ex numero quocunque dato integro efficere fractionem vulgo spuriam datæ denominationis. - -	131 -	123
Numerum integrum reducere ad datæ fractionis denominatorem. - - - - - - -	131 -	124
Fractionem vulgo spuriam ad integra reducere. -	132 -	125
Invenire quid data fractio valeat in data quavis certa specie. - - - - - - -	132 -	126
Duas; vel plures fractiones heterogeneas reducere ad eundem denominatorem. - - - -	134 -	129
Invenire quænam duarum, vel plurium fractionum heterogenearum valore major sit altera, vel æqualis.	137 -	133
Fractiones quasvis Addere. - - - -	137 -	135
Fractionem minorem à majore subtrahere. - -	139 -	138
Examen Additionis, & Subtractionis fractionum. -	140 -	139
Fractiones per fractiones multiplicare. - -	140 -	140
Fractionem per fractionem dividere. - - -	141 -	143
Examen multiplicat. & divisionis fractionum. -	142 -	144
Algorithmos omnes fractorum cum integris tractare, id est, Addere, Subtrahere, Multiplicare, & Dividere *integra cum fractis.* - - - - -	143 -	148
Invenire communem mensuram maximam, per quam fractio reducatur ad terminos minimos. - -	146 -	154
Methodus tentativa reducendi fractiones ad terminos minimos. - - - - - - -	148 -	155
Fractionem fractionis ad fractionem simplicem reducere.	148 -	158

Digitized by Google

PARTIS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

	N. fol.	N. §.
Radicem quadratam extrahere ex quadrato Algebraico.	156	184
Tabula Radicum, Quadratorum, & Cuborum.	157	—
Extrahere Radicem quadratam numericam.	157	186
Construere formulam universalem pro extrahenda radice quavis.	159	189
Datam cujusvis potentiæ radicem numericam extrahere.	160	191
Paradigma extractionis Radicis cubicæ.	161	—
Approximare ad Radices veras per fractiones decimales.	162	193
Extrahere Radicem quamvis ex fractionibus.	163	194
Potentiam quamvis per exponentes expressam elevare ad aliam potentiam per exponentes indicandam	163	195
Ex data potentia per exponentes expressa, indicare per exponentes, extractam esse radicem quamvis.	164	196
Quantitates irrationales heterogeneas reducere ad expressionem homogeneam.	166	201
Quantitates irrationales ad expressionem simplicissimam, seu ad terminos minimos reducere.	166	202
Addere quantitates irrationales.	168	205
Subtrahere quantitates irrationales.	169	206
Multiplicare quantitates irrationales per irrationales.	ibid.	207
Dividere quantitates irrationales &c.	170	208
Radices Radicum Addere, Subtrahere &c.	171	209
Calculus Radicum imaginariarum.	ibid.	210

PARTIS III.

De Analysi speciosa seu arte Resolvendi Problemata, & quæstiones quantumvis reconditas.

	N. fol.	N. §.
Operatio I. Analysios, id est, Quæstionis resolvendæ accurata omnium conditionum, & circumstantiarum discusso.	174	215
Operatio II. Apta, & debita quantitatum tam cognitarum per literas denominatio.	174	216
Operatio III. Quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum in formulam æquationis collocatio, seu inventæ Æqualitatis expressio.	175	217
Operatio IV. Æquationum primarum ad unum terminum incognitum, & solitarium reductio.	ibid.	219
Axiomata quantitatum tam æqualium, quam inæqualium.	176	220
Theoremata Æquationum.	177	231

Regulæ

Digitized by Google

	N. fol.	N. §.
Regulæ Reductionum Analyticarum Æquationis solitariæ.	179	236
Operatio V. Æquationis ad unum incognitum, & ab omnibus notis liberum reductæ in numeros Resolutio, vel figuræ Const. - - - - - -	182	237
Problema I. Analyseos determinatum cum uno incognito.	183	239
Problema II. Simile. - - - - - -	187	—
Problema III. cum fractis. - - - - -	188	—
Methodus prima eliminandi incognitos. - - -	189	247
Methodus secunda. - - - - - -	190	248
Problema I. cum duobus incognitis. - - -	ibidem.	
Problema II. Mixtorum, seu Alligationis. - -	191	—
Problema Indeterminatum. - - - -	194	252
Resolutio Æquationum quadraticarum. - -	195	254
Regulæ discernendi an data quævis æquatio quadratica sit completa, vel incompleta. - - -	196	256
Regulæ reducendi æquationem quadraticam incompletam. Item affectam signo √. - - - - - -	197	259
Problema I. Resolutionis quadraticæ completæ. -	199	—
Problema II. Resolutionis quadraticæ incompletæ. -	ibidem.	

PARTIS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, usu Regulæ aureæ, Inventione Theorematum, ac Problematum.

	N. fol.	N. §.
Datis tribus terminis invenire quartum proportionalem, seu invenire regulam auream. - - -	207	288
Datis duobus terminis invenire tertium continue proportionalem. - - - - - - -	ibid.	289
Datis terminis duobus invenire medium continue proportionalem. - - - - - - -	208	290
Facta duo æqualia resolvere in proportionem reciprocam.	ibid.	293

De Progressione Geometrica.

Dato Termino primo, & exponente rationis invenire terminum quemvis, etiam maximum, *seu* ultimum. *Invenire terminum* primum, *seu* minimum. - -	216	314
Dato termino primo; termino ultimo, seu Maximo, & dato numero terminorum invenire exponentem rationis.	218	320
Dato termino primo, dato termino ultimo, & dato exponente rationis invenire summam omnium terminorum.	219	322
Datis duobus terminis invenire quotcunque medios continue proportionales. - - - - -	ibid.	324

Digitized by Google

De Proportione, & Progressione Arithmetica.

	N. fol.	N. §.
Invenire quartum Arithmetice proportionalem. -	220	329
Invenire tertium continue proportionalem. - -	ibid.	330
Invenire medium continue proportionalem. - -	ibid.	331
Dato termino primo, & differentia rationis invenire terminum quemvis. - - - - -	221	335
Item invenire ultimum, seu maximum. - -	223	336
Data differentia, dato numero terminorum, & dato termino ultimo, invenire primum. - - -	ibid.	337
Dato termino primo, dato ultimo, & dato num. terminorum, invenire differentiam. - - -	ibid.	338
Dato termino primo, & ultimo, & data differentia, invenire numerum terminorum. - - -	ibid.	339
Dato termino primo, & ultimo, & dato numero terminorum invenire summam omnium terminorum. -	ibid.	340
Dato termino primo, data summa omnium terminorum, datoque numero terminorum invenire differentiam.	223	341

De Regula Aurea.

Usus Regulæ simplicis, & directæ. - - - -	224	346
- - - - - *aureæ simplicis inversæ.* - - -	225	347
- - - - - *compositæ directæ.* - - -	226	349
- - - - - *compositæ inversæ.* - - -	ibid.	351
- - - - - *Societatis simplicis.* - - -	227	352
- - - - - *Societatis compositæ.* - - -	ibid.	354
Inventio Theorematum per Compositionem. - -	228	357
- - - - - - - *per Substitutionem.* - -	ibid	358
- - - - - - - *per Analogiam.* - -	ibid.	359

O. A. M. D. G.

AP-

Digitized by Google

APPENDIX.

EXERCITATIONES ARITHMETICÆ

Quibus pertractantur

Varia Compendia Arithmetica, Praxes Regulæ Aureæ quamplurimis Quæſtionibus œconomicis, & ad uſum Civilem, ac Mercatorum applicatis declaratæ; His accedit Regula Rabbatæ, Annatociſmi, & Juris Civilis de quarta falcidia.

AD

USUM PRIVATUM STUDIOSÆ JUVENTUTIS

Conſcriptæ & editæ Claudiopoli Anno 1755.

à

R. P. MAXIMILIANO HELL è S.J.

Digitized by Google

Digitized by Google

MONITUM
AD
TYRONES SUOS.

Habetis Exercitationum Mathematicarum Partem Primam vobis à me pag. 301. §. 355. Elementorum Algebr. promissam. Arithmeticas hæc praxes complectitur primarias, daturus in Parte altera (si DEO visum fuerit) cæteras, vestris quidem usibus, qui Algebra, seu arte hæc Marte proprio inveniendi, tincti estis, haud necessarias, non tamen inutiles, vel ideo, ne à vobis, qui sublimia tenetis, humilia hæc desiderentur, quæ vulgus Arithmeticorum summa hactenus existimabat. Formulis Algebraicis, vobis charissimis, consulto abstinui, contentus inventa dedisse, arte inveniendi dissimulata, ne divinam hanc scientiam imperitæ turbæ Arithmeticorum ea carpentis, contemnentisque, quorum ignorantiam fateri pudet, calumniis exponerem; Nostis artem, sacram in usus vestros servatote; Gemmarios vos putatote, obtrectatores cæteros, emblemate gallinæ Æsopicæ notatos, si sapere velint, errorem subinde dedocetote. Valere vos cupio ad DEI Gloriam Majorem per vos, vestrosque conatus augendam. Fruimini his ad Religionis, Patriæque Vestræ bonum promovendum.

IN-

Digitized by Google

INDEX CAPITUM.

CAPUT I. Compendia quædam quatuor Algorithmorum Arithmeticæ Integrorum. - - 1

CAP. II. Compendia Regulæ aureæ, vel Trium. 13

CAP. III. De Compendiis, & Praxibus Reductionum numerorum mixtorum. - - - - - 19

CAP. IV. Praxes ſcitu neceſſariæ circa uſum Regulæ aureæ in genere. - - - - - - 24

CAP. V. Regula aurea ad uſum œconomicum, & civilem applicata. - - - - - - - - 27

CAP. VI. De uſu Regulæ aureæ ad Quæſtiones Mercatorum applicatæ. - - - - - - 32

CAP. VII. Regula aurea ad Regulam Societatis Mercatorum applicata. - - - - - - 41

CAP. ULT. Quæſtiones Miſcellaneæ ad uſum utiliſſimæ, & neceſſariæ. - - - - - - - 45

EXER-

Digitized by Google

EXERCITATIONES ARITHMETICÆ.

CAPUT I.

Compendia quædam quatuor Algorithmorum Arithmeticæ integrorum.

Finis omnium compendiorum est, operationes, quam brevissimo tempore absolvere. Facimus autem compendium temporis. 1. Si operationes, quæ seorsim peragendæ forent, simul perficiamus. 2. Quæ per plures operationes fieri ordinariè solent, per pauciores, omissis quibusdam fiant. 3. Quæ per difficiliores perficiuntur via vulgari, per faciliores, & strictiores peragantur. E triplici hoc capite judicium ferendum de compendiis; multa namque vulgo nomine compendii veniunt, quæ recto judicio inter dispendia potius referenda sunt, nisi velimus exercitationem pro compendio habere, qua exercitatus, etsi per ambages operans, Tyroni, compendioso modo easdem operationes facienti, celeritate antecedit. Nobis hic (præter ea, quæ Elementis nostris Math. inseruimus) de veris quibusdam compendiis Arithmeticæ agendum, quæ ex certis Principiis Algebræ innotuêre, nihil derogando iis, quæ me latent, aliique cum fructu usurpant. Itaque

PROBLEMA I.

1. *Additionem, & Subtractionem plurium numerorum una absolvere.*

RESOLUTIO.

Sint dati Addendi quotcunque A, B, C, D, à quibus subtrahendi sunt quotcunque E, F, G.

Primo, fiat collocatio Addendorum, ut in Additione fieri solet, dein ducta linea, collocentur infra hos eodem ordine numeri subtrahendi, & linea subducantur, ut in Paradigmate.

PARA-

Digitized by Google

PARADIGMA.

A	1.4 5	*Addendi.*
B	5.6. 2	
C	3 8 7	
D	9 2 4	
E	1.5.6	*Subtrahendi.*
F	2 3	
G	7 3 4	
Resid.	1 1 0 5	

Inchoëtur ab unitatibus ſubtrahendorum, quæ in unam ſummam collectæ efficiunt 13, ubi, cum una decas emerſerit, rejiciatur hæc ad ſequentem claſſem decadum, quæ rejectio fit tantum ponendo punctum (ut hic ad numerum 5 factum eſt) idque toties, quoties decas emergit; numerus vero 3, qui reliquus eſt ex collectis unitatibus, ſubtrahatur ſtatim ab unitatibus Addendorum, nempe 3 a 4, manet 1, hoc reſiduum, & reliqui Addendi colligantur in unam ſummam, qui dum colliguntur, quoties in decadem excreſcunt, toties in aliqua nota decadum ponatur punctum, numerus vero ex collectis unitatibus reſiduus, ponatur in loco Reſidui, ut numerum 5, hic poſitum vides.

Dein fiat item eodem modo collectio decadum in ſubtrahendo, numeri autem puncto ſignati, habeantur pro auctis una unitate, & quoties decades excreſcunt ad decadem, toties aliqua nota in centenariis notetur puncto, numerus vero e rejectis decadibus reſiduus ſubtrahatur iterum à numeris decadum Addendorum, *ut hic* 1 à 2; reliqui verò numeri in Addendo eadem ratione colligantur, & quoties excreſcunt in decadem, toties numerus aliquis in centenariis puncto ſignetur, numerus autem e collectis decadibus reſiduus, aut (ſi nihil ſuperſit) zerus, ponatur in loco Reſidui, *ut hic zerum ſcriptum vides.* Eodem modo procedatur cum centenariis, millenariis &c. & habebitur Reſiduum totale,

Digitized by Google

totale, in noſtro quidem Paradigmate 1105; e qua operatione liquet compendium, & praxis à vulgari modo operandi diſtincta.

SCHOLION.

2. *Cætera compendia Additionis, aut ſubtractionis, quæ ope Machinarum Arithmeticarum, aut per circinum Proportionis, vel etiam per Rabdologiam Neperianam vulgo celebrantur, nos inter diſpendia referimus, propterea, quod plurimum temporis in diſpoſitionem machinæ, vel collocationem calculorum &c. inſummatur.*

PROBLEMA II.

3. *Multiplicationem per compendia inſtituere.*

COMPENDIUM I.

Multiplicationem, & Additionem factorum partialium ſimul abſolvere.

Sit Multiplicandus 2345
Multiplicans 248

Factum 581560

18760
2225
581

Itaque fiat multiplicatio per numerum 8, ut alias, factumque 18760 ſubſcribatur, ut methodo ordinaria; dein fiat multiplicatio per ſequentem numerum 4, dicaturque 4 per 5 dat 20, & 6 (numerus videlicet ex primo producto infra multiplicantem 4 ſcriptus) dat 26, itaque relicto numero 6 in primo producto, mente retineatur numerus 2, (ſeu 20.) Deinde dicatur 4 per 4 dat 16, & cum 2 mente retentis dat 18, & additis 7 (qui eſt tertius in primo producto) facit 25, ſcriptoque 5 infra 7, & delendo numerum 7, mente iterum retineatur 2, (ſeu 20.) Porrò 4 per 3, dat 12, & cum 2 mente retentis, facit 14, additisque 8 ex primo producto, fiunt 22, ſcriptis itaque 2 infra 8, & numero 8 deleto, mente iterum retineatur 2 (ſeu 20) demum 4 per 2, dat 8, & cum 2 mente retentis dat 10, additaque ex primo producto 1, efficitur 11, qui numerus integer, utpote ultimus, ſubſcribatur, numerus verò 1, ex primo producto deleatur.

Digitized by Google

Progrediendo ad tertiam multiplicantis notam 2, dicatur iterum 2 per 5 dat 10, & additis ex producto ſecundo 5, fiunt 15, relictis itaque in producto ſecundo 5, mente retineatur 1; porro 2 per 4 dat 8, & cum 1 mente retenta, facit 9, atque cum 2, (numero nempe ſecundi producti) fiunt 11, adſcripta ergo 1, & mente retenta altera unitate (ſeu 10) dicatur 2 per 3 dat 6, & cum 1 (mente retenta) fiunt 7, & addita unitate ex producto ſecundo, habetur 8, quo ſubſcripto, & ex producto ſecundo deleta unitate, dicatur 2 per 2 dat 4, & 1, ex ſecundo producto, fiunt 5, atque deleta unitate producti ſecundi, erunt numeri, qui deleti non ſunt, nempe 581560 productum totale.

Methodo hac, ſi exercitium accedat, ſatis celeriter abſolvitur multiplicatio.

EN EXEMPLUM II.

```
        3 2 7 5
          8 9 4
      ---------
      x 3 x Ø 0          factum
    3 Ø 7 8 5          2927850
  2 9 2
```

COMPENDIUM II.

4. Multiplicatio ferè ſola ſubtractione unica peragitur in caſu, quo multiplicans proxime accedit ad numerum aliquem ſimplicem, ſunt autem numeri ſimplices, unitas cum zeris, ut 10, 100, 1000, 10000 &c.

Sit multiplicandus 894673 per 9. Itaque cum multiplicans 9 accedat ad numerum ſimplicem 10, adjiciatur multiplicando unus zerus, & ab hoc aucto jam per zerum, ſubtrahatur idem multiplicandus non auctus zero. Erit Reſiduum productum, quod prodire debet, ſi multiplicaretur per 9.

EN

Digitized by Google

EN EXEMPLUM.

Multiplicandus	8946730	*auctus zero.*
idem multiplicandus	894673	*sine zero.*
Residuum	8052057	*seu Productum.*

Eodem modo fit multiplicandus 536789 per 99, quia 99 accedit ad 100, adjiciantur multiplicando zeri duo, & idem multiplicandus non auctus zeris subtrahatur, & habebitur productum, ut in Exemplo

	53678900
	536789
Product.	53142111

Et hinc universaliter: quot zeros habet numerus simplex, ad quem accedit multiplicans, tot zeri multiplicando adjiciantur.

Ratio autem hujus compendii est, quia adjiciendo zeros, multiplicandus reipsa multiplicatur per 10, vel 100, vel 1000 &c. adeoque loco 9 multiplicatur per 10, loco 99, multiplicatur per 100, & sic porro, cum itaque, multiplicare *Ex.gr.* per 10, loco 9, sit totum multiplicandum semel plus accipere, quam deberet accipi, ideo, multiplicandus semel subtractus, relinquit Residuum, quasi per 9 fuisset multiplicatum; idem dicendum, si multiplicari deberet per 99, vel 999.

SCHOLION.

5. *Eodem modo absolvitur multiplicatio, etsi multiplicans deficiat duabus, tribus, quatuor &c. unitatibus à numero simplice, tali enim casu ante, quam multiplicandus subtrahatur, is multiplicari debet per illas unitates, quibus deficit. Ut sit multiplicandus* 58345 *per* 98, *quia* 98 *deficit à* 100 *per* 2, *multiplicetur* 58345 *per* 2, *& hoc factum subtrahatur ab priore multiplicando zeris aucto. Ut Exemplum docet.*

EXEMPLUM I.

	5834500	
	116690	*id est* 58345 *per* 2
Productum	5717810	

Digitized by Google

EXEMPLUM II.

Sit multiplicandus	789457	*per* 997
erit	789457000	
subtrab.	2368371	*id est* 789457 *per* 3
Productum	787088629	

COMPENDIUM III.

6. *Si tam multiplicandus, quam multiplicans accedunt proximè ad numerum aliquem simplicem.*

Sit Mnltiplicandus 998 per 987, ponatur itaque numerus proximè simplex primo loco, huic immediate subscribantur factores, ut hic factum vides.

Numerus simplex	A 1000		
	B 998	2	*differentia.*
	C 987	13	
	985026		

Subtrahatur factor B ab A, & ejus Residuum seu differentia 2 ponatur ad latus ejusdem; eodem modo subtrahatur C ab A, & ejus Residuum 13 ponatur eidem ad latus, dein multiplicentur hæc duo residua seu 13 per 2, & productum 26, scribatur ordine infra datos factores, demum minor differentia 2 subtrahatur à minore factore 987, & Residuum 985 ita scribatur, ut siniſtima nota residui 5 veniat infra unitatem numeri simplicis, cætera vero loca intermedia, si vacua sint, inter hoc Residuum, & inter productum ex differentiis, expleantur zeris, ut hic uno zero, expletum vides.

Sic quoque habetur, si Multiplicandus sit 9984 per 9992, vel vicissim

EN EXEMPLUM.

Numerus simplex	10000		
	9984	16	*factum ex different.*
	9992	8	128.
Productum	99760128		

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

7. *Hic modus brevior adhuc reddi potest, si nempe minori factori tot zeri apponantur, quot ipse notas numericas habet, dein eidem sic zeris aucto, superscribatur major factor, ejusque differentia à numero suo simplici ad latus ejusdem ponatur, per hanc differentiam multiplicetur minor factor (seclusis zeris, quibus auctus est) Productum hoc subtrahatur a minore factore jam zeris aucto, erit Residuum* Productum, *quod quærebatur.* Vide Exemplum.

Sit multiplicandus 995 *per* 897

erit Major 995 } 5 *differentia à* 1000.

Minor zeris auctus 897.000 }

subtrahendus 4485) *id est* 897 *per* 5.

Productum 892515

Ratio hujus utilissimi compendii eadem est, quæ Compendii II. Superscriptio factoris majoris tantum claritatis gratia hic in Exemplo facta est, quæ in praxi omitti potest, modo sciatur ejusdem differentia, à numero simplice.

COMPENDIUM IV.

8. Inter compendia censeri potest modus multiplicandi, vi cujus, duæ notæ multiplicantis in unam contrahuntur, adeoque lucrifit multiplicatio una particularis; sed hic modus rarior est, cum multiplicans debeat esse ejusmodi, ut duæ notæ relictæ sint factum, ex altero numero multiplicantis, & alio quovis numero *Ex.gr.* sit multiplicans 36, 4 hic potest contrahi in factorem 4, & alterum 9, quia electo numero 4 reliqui duo nempe 36, rectè sunt factum ex 4 per 9. Item si multiplicans esset 856, electo numero 8, reliqui 56, contrahi possunt in numerum 7, quia 8 per 7 dat 56; sed præterea notandum, quod is, qui hac methodo utitur, & ordinem peculiarem subscribendorum factorum partialium observandum habeat, & simul ordinem multiplicandi, ut in Exemplis clarum fiet.

Digitized by Google

EXEMPLUM I.

Multiplicandus 56342 (36, 4 *multiplicans.*
225368 (4
2028312 (9
Productum 20508488

Scilicet: quia in numero 364, electo numero 4, binæ notæ 36, sunt factum ex 4 per 9, ideo multiplicatio abreviari potest multiplicando primo per 4, dein hoc productum iterum multiplicando per 9, ut factum est in Exemplo.

EXEMPLUM II.

Sit multiplicandus 23453 *per* 856
erit 23453 (8, 56
187624 (8
1313368 (7
Productum 20075768

In hoc exemplo, quia numerus 8 ex 856, occupat locum centenariorum, ideo initium scribendi in producto factum est in loco centenariorum, secundum vero productum in loco unitatum.

COMPENDIUM V.

9. Ordinarium Compendium Arithmeticorum est, per dispersionem in factores, quos vocant *partes aliquotas*; si nempe multiplicans sit numerus compositus, qui per multiplicationem aliorum numerorum produci potest, sic *Ex.gr.* numerus 24 est compositus ex 3 & 8, vel ex 4 & 6, quia 3 per 8 dat 24, & etiam 4 per 6 dat 24, quod si itaque hujusmodi multiplicans occurrit, solvatur is in suos factores partiales, & per hos multiplicandus successive multiplicetur, id est, primo multiplicetur per unum factorem, productum hoc per alterum, & iterum hoc secundum productum per tertium factorem, atque ita porro, erit productum ultimum

Digitized by Google

mum factum quod petebatur. In hoc compendio lucrifit Additio, quæ omittitur.

EN EXEMPLUM.

Sit multiplicandus	2574	*per* 24	*vel*	2574	*per* 24
erit	7722	(3	*etiam*	10296	(4
Productum	61776	(8	*Product.*	61776	(6

COMPENDIUM VI.

10. Non minus usitatum habetur compendium per dispersionem in *partes aliquantas*, quando multiplicans dispergitur in suas partes ita, ut per additionem collectæ iterum restituant totum multiplicantem, *Ex. gr.* si numerus 24 dispergatur in 20 & 4, aut in 12 & 6 & 6 &c. item si numerus *Ex. gr.* 276, solvatur in 6, in 30, & 240, quæ simul additæ faciunt 276, en itaque modum multiplicandi ope hujus dispersionis.

Sit Multiplicandus	4325	*per*	276	*multiplicantem.*
	25950	6	6	*Pars prima.*
	129750	5	30	*Pars secunda.*
	1038000	8	240	*Pars tertia.*
	1193700			

Videlicet; disperso multiplicante 276, in *partes aliquantas* 6, 30, & 240, multiplicetur multiplicandus primo per 6, deinde, quia 6 in secunda parte nempe in 30 continetur quinquies, multiplicetur iterum hoc primum productum per 5, porro, quia secunda pars nempe 30 in tertia parte nempe 240 continetur octies, productum secundum iterum multiplicetur per 8, deinde facta partialia in unam summam collecta dabunt productum totale. Animadvertendum tamen, quod in omnibus factis partialibus initium scribendi fieri debeat ab unitatibus, si factores per quos multiplicantur, sint unitates, ut factum vides in nostro Exemplo.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION I.

11. *Hic modus ultimus, etsi nullum videatur esse compendium in numeris abstractis multiplicandis, ut consideranti patet, habet tamen suam utilitatem in numeris mixtis propterea, quod utens hoc compendio nulla opus habeat Reductione numerorum mixtorum instituenda ante vel post multiplicationem; videatur subjectum exemplum.*

Sint multiplicandi	36 fl. Germ.	18 gr.	2 xr.	per	245
	184,	13,	1,	5	5
	1477,	6,	2,	8	40
	7386,	13,	1,	5	200
Productum	9048,	13,	1		

Primo, multiplicando omnes species per 5, videlicet 2 xr. per 5 dant 10 xr. hoc est 3 gr. 1 xr. & subscripto 1, mente retineantur 3, deinde 18 pr. per 5, dant 90 gr., additis 3, fiunt 93 gr. hoc est 4 fl. & 13 gr. & subscriptis 13, mente retineantur 4, deinde 36 fl. per 5 dant 180, & additis 4, fiunt 184; Eodem modo hoc primum productum (nempe 184 fl. 13. gr. & 1 xr.) multiplicetur per 8, & Productum hoc secundum, iterum per 5, demum singula producta in unam summam collecta dabunt Productum totale.

Idem Exemplum per dispersionem aliam, quæ variari potest.

36 fl.	18 gr.	2 xr.	per	245
184,	13,	1	6	5
1108	—	—	5	30
7756	—	—	7	210
9048,	13,	1		

Quod si fiat dispersio in partes aliquotas per Compendium V. eodem modo, & quidem compendiosus multiplicatio mixtorum absolvitur. Ut sit idem Exemplum per Compendium V. factum.

36. fl.

Digitized by Google

	36 fl.	18 gr.	2 xr.	per	245	nam factores 5 & 7 & 7 producunt 245.
	184,	13,	1	5		
	1292	13	1	7		
Product.	9048	13	1	7		

SCHOLION II.

12. *Non me latent cumplures modi dispersionis numerorum mixtorum in* partes partium, &c. *quibus* Monetarii, Cambiatores, *cæterique in officinis ponderum, monetarum* &c. *versantes* Ministri, *cum fructu utuntur, verum, quia hi modi determinatæ speciei*, Ponderum, Valorum &c. *inhærent, his referendis supersedemus propterea, quod, quemadmodum usus horum compendiosus est, ita instructio prolixa nimis, Tabulisque compluribus adhæc concinnandis opus habet; quapropter Tyrocinia hujusmodi Arithmetices, iis relinquimus, qui ad officia calculatoria aspirant, de quibus compendiis videri potest* Cl. Poëtii *Arithmetica, item* Monier de Claire-Combe dans le Negoce rendu facile, *aliique.*

PROBLEMA III.

Divisionem methodo compendiosa instituere.

COMPENDIUM I.

13. Máximum divisionis compendium in numeris abstractis, in casu, quo divisor ex multis notis constat, habetur per Tariffam, vel (*à la Indienne.*) Modum hunc per Tariffam dividendi, tradidimus, §. 80. Arithmet. Potest tamen & hic modus reddi brevior ab exercitatis; scilicet, si pro Tariffa tantum habeatur divisoris *simplum*, *duplum*, & *quintuplum*; nam reliqua, mente duntaxat fieri facile possunt sub ipsa operatione, sic si mentaliter *simplum* addatur *duplo*, habebitur *triplum*, si *duplum* bis summatur, habebitur *quadruplum*, si ad *quintuplum* addatur *simplum* emergit *sextuplum* &c. En Exemplum per Tariffam abreviatam.

Digitized by Google

Sit divisor 2534, *sitque dividendus* 932512.

	Tariffa		
simplum -	2534	1	9325,1,2, (368 *quotus.*
duplum -	5068	2	7602 . .
quintuplum	12670	5	17231 .
			15204 .
			20272
			22272
			00000

SCHOLION.

14. *Habetur quidam modus* Italicus *in numeris abstractis, quem vocant per* Dandam, *verum nihil in hoc compendii video, nisi quod facta ex* divisore *in* quotum *orta mentaliter perficiantur, & una mentaliter etiam subtrahantur; videri potest hic modus fuse expositus in* Epitome Arithm. P. Christoph. Clavii, è S.J. *mihi fol.* 76. *editionis Coloniensis in 8vo.*

COMPENDIUM II.

15. Miræ brevitatis etiam est divisio per dispersionem divisoris in suos factores partiales, de qua dispersione dictum est (§.9.) ut sit dividendus 61776 per 24, erit divisor 24, sparsus in 3, & 8. *Vide Exemplum.*

Dividendus.	*Quotus.*	*Quotus secundus.*
3) 61776	(20592	(2574
	& per 8	

Scilicet, si dividendus dividatur per 3 erit quotus 20592, hic quotus iterum divisus per 8, dat quotum secundum petitum 2574, qui haberetur, si per 24 divisus fuisset. Demonstratio habetur á §. 151. ad 155. Algebr. Est autem perinde per quemcunque factorem partialem divisio inchëtur, ut Exemplum subjectum declarat.

Dividendus.	*Quotus.*	*Quotus secundus.*
8) 61776	(7722	(2574.
	& per 3	

Eodem modo obtinebitur idem quotus, si 24 dispergatur in 4, & 6, vide subjectum Exemplum.

Divi-

Digitized by Google

	Dividendus.	*Quotus.*	*Quotus secundus.*
divis. 4)	61776	(15444	(2574.
		& per 6	

Aliter

	Dividendus.		
divis. 6)	61776	(10296	(2574.
		divis. 4	

SCHOLION.

16. *Cætera compendia inserta habentur Elementis nostris Mathem. (à §. 75. ad 78. Arithm.) & quia dividendus comparatus cum divisore, considerari potest ex Principiis Algebraicis tanquam fractio vulgo spuria uti etiam possumus compendiis, quæ habentur (à §. 118. ad 121. Algeb.)*

CAPUT II.

Compendia Regulæ Aureæ, vel Trium.

Cum in usu Regulæ Aureæ, multiplicatio, & divisio usurpanda sit, patet in praxi omnia compendia, tam multiplicationis, quam divisionis à §. 3. hucusque relata, applicari posse in usu Regulæ Aureæ. At tamen præterea peculiaria sunt sequentia.

COMPENDIUM I.

17. Si per Terminum *Primum* dividi exacte potest Terminus *Secundus*, vel per eundem Primum *Tertius*, fiat hæc divisio ante usum Regulæ Aureæ, & lucrifiet divisio molestior. *Vide Exempl. I. & II.* Item si Terminus *Secundus*, vel *Tertius* exacte dividat *Primum*, lucrifit multiplicatio. *Vide Exempl. III. & IV.* Demonstratio hujus compendii videri potest in doctrina Proportionum §. 300. Algeb.

EXEMPLUM I.

5 Ulnæ panni veneunt 20 flor. quanti 17 Ulnæ.

erit Proportio 5 : 20 = 17 : x

per Compend. 1 : 4 = 17 : x

hoc est multiplic. 4 *per* 17 = 68 *fl.*

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLUM II.

6 Milites consumunt intra mensem 32 metretas farinæ, quot consument milites 24.

erit proportio 6 : 32 = 24 : x
per Compend. 1 : 32 = 4 : x
hoc est multiplic. 32 *per* 4 = 128 *metretas.*

In hisce exemplis nulla fit divisio, propterea, quod primus terminus evadat unitas (1), *quæ non dividit.*

EXEMPLUM III.

Cursor percurrit 100 *Milliaria intra* 8 *dies,* 25 *Milliaria intra quot dies percurret?*

erit. 100 : 8 = 25 : x
Compendium 4 : 8 = 1 : x = $\frac{8}{4}$ = 2 *diebus.*

EXEMPLUM IV.

8 *Murarii exstruere possunt quoddam Templum annis* 9, *ergo* 16 *Murarii intra quot annos idem opus absolvent, quæ cum sit inversa.*

erit inverse 16 : 8 = 9 : x
per Compend. 2 : 1 = 9 : x = $\frac{9}{2}$ = 4 $\frac{1}{2}$ *annis.*

Vel vulgariter.

8 : 9 = 16 : x
per Compend. 1 : 9 = 2 : x

In his lucrifit multiplicatio, cum 1 *non multiplicet.*

SCHOLION.

18. *Animadvertendum tamen, quod si per* secundum *terminum dividi possit* tertius, *vel* secundus *per* tertium, *id fieri minime debeat (ut constat ex doctrina Proportionum) propterea, quod Ratio terminorum tolleretur, & mutaretur. Compendium hoc eximiæ est utilitatis in Regula præsertim composita, & societatis. Ut Exempla declarant.*

EXEMPLUM.

Mercatores 6, *aureis* 100, *mensibus* 2, *lucrantur* 70 *aureos, ergo Mercatores* 12, *aureis* 400, *mensibus* 4, *quantum lucrum facient?*

In hujusmodi regula composita ante Reductionem ad tres terminos, videatur an termini homologi inter se sint divisibiles; sic in hac quæstione numerus 6 *Mercatorum, dividit numerum* 12 *Mercatorum, & numerus* 100 *aureorum, dividit numerum* 400 *aureorum, & denique menses* 2, *dividunt menses* 4, *adeoque dividendo, erit*

Mercat.

Digitized by Google

Mercator. 1, *aureus* 1, *mens.* 1, *lucrum dant* 70 *aureos, ergo Mercat.* 2, *aurei* 4, *mens.* 2, *quantum dabunt lucrum; hoc est,*

1 : 70 = 16 : x.

Item sit regula societatis: tres Mercatores contulerunt in unam summam florenos 100, *primus dedit* 24 *fl. secundus* 30, *tertius* 46, *intra annum lucrati sunt simul* 200 *florenos, quæritur lucrum singulorum, stabit itaque Proportio per* (§. 353. *Algeb.*)

Pro Primo: 100 : 200 = 24 ; x
Secundo: 100 : 200 = 30 : x
Tertio: 100 : 200 = 46 : x

Sed per Compendium ita.

Pro Primo: 1 : 2 = 24 : x *lucrum* = 48
Secundo: 1 : 2 = 30 : x = 60
Tertio: 1 : 2 = 46 : x = 91

Unde liquet opus tantum esse multiplicatione termini secundi per tertium in singulis proportionibus, dabitque factum, lucrum cujuslibet particulare.

COMPENDIUM II.

19. Quod si terminus secundus, vel tertius sint numeri mixti diversæ speciei, & primus dividat secundum, vel tertium mixtum quidem, sed cui non adhæreant diversæ species, duplex habetur Compendium; Primum est, de quo (§. 17.) dictum secundum autem ex (§. 9.) desumitur. Sic *Ex. gr.*

4 *Ulnæ materiæ sericeæ constant* 16 *flor.* 3 *gr.* 2 *xr. quanti erunt ulnæ* 48 ?

erit Proportio 4 : 16 *fl.* 3 *gr.* 2 *xr.* = 48 : x
per Compend. (§.17.) 1 : 16 *fl.* 3 *gr.* 2 *xr.* = 12 : x

Et multiplicando secundum per tertium juxta (§. 9.)

erit

16,	3,	2	per	12
48,	11,	1	3	
194,	4,	1	4	

hoc est 48 *ulnæ constabunt* 194 *fl.* & 4 *gross.*

SCHOLION.

Hoc compendio fere semper uti licet, quando primus terminus est unitas, imò Exercitatus Compendium reperiet, etiamsi terminus primus sit major unitate, Ex. gr. 2, 3, 4, *vel* 5 *&c. per quem divisus secundus, vel tertius, fractionem relinquit.*

COM-

Digitized by Google

COMPENDIUM III.

20. Quod si in Regula aurea occurrant meri numeri fracti, tum primi termini fractio invertatur, dein numeratores omnes inter se multiplicentur, itemque denominatores inter se, dabit producta fractio quæsitum numerum quartum, quæ si sit spuria, reducatur per (§. 125. Algebr.) *Ex. gr.*

$\frac{1}{2}$ libra piperis constat $\frac{5}{8}$ unius floreni, quid constabunt $\frac{3}{4}$ unius libræ?

Erit per datum Compendium $\frac{2}{1} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4} : x$ *hoc est multiplicando* $\frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{1 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{30}{24}$ *& per* (§. 125. *Alg.*) 1 *fl.* $\frac{6}{24}$, *seu* $\frac{1}{4}$ *fl. quæ facit* 15 *xr. simul* 1 *fl.* 15. *xr.*

COMPENDIUM IV.

21. Si denominatores termini primi, & secundi, vel primi, & tertii sint iidem, deletis simpliciter denominatoribus, cum solis denumeratoribus tanquam numeris integris operatio absolvatur. Ut in Exemplo.

$\frac{3}{4}$ unius ulnæ constant 2 flor. quid $\frac{1}{4}$ ulnæ? erit per compendium $3 : 2 = 1 : x$, *hoc est $\frac{2}{3}$ unius floreni, seu* 40 *xr.*

EXEMPLUM II.

$\frac{1}{2}$ centenarii salis constat $\frac{2}{3}$ unius flor. quid $\frac{3}{4}$ centenarii?

Erit per compendium $1 : 2 = \frac{3}{4} : x$, *hoc est $\frac{6}{4}$ seu* 1 *& $\frac{2}{4}$, vel* 1 *& $\frac{1}{2}$ unius flor.*

SCHOLION I.

22. *Idem Compendium obtinetur, si sint sub diversis denominatoribus fractiones, modo terminus primus, & secundus, vel primus, & tertius prius reducantur ad eundem denominatorem per* (§. 129. *Algeb.*) Ex. gr.

$\frac{5}{8}$ unius floreni emuntur $61\frac{1}{4}$ libræ aromatum; quot libræ ementur florenis 60?

	fl.	*libræ*	*fl.*
Erit Reducendo per (§. 129. *Algeb.*)	$\frac{20}{32} :$	$\frac{200}{32}$	$= 60 : x$
hoc est per Compend. (§. 21.)	$20 :$	200	$= 60 : x$
& per Compendium I. (§. 17.)	$1 :$	200	$= 3 : x = 600$ *lib.*
vel etiam per eundem (§. 17.)	$1 :$	10	$= 60 : x = 600$ *lib.*

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION II.

23. *Quod si integri cum fractis occurrant, præcepimus* (§. 346. *Alg.*) *integris subscribendam unitatem; quo facto, integra tanquam fractiones tractando, compendium sæpe nanciscimur; nam hoc modo operandi emergunt subinde fractiones sub iisdem denominatoribus, qui, per* (§. 21.) *deleri possunt.* Ex. gr.

$2\frac{3}{4}$ *unius centenarii constant florenos* 6, *quid constabunt* $8\frac{1}{4}$ *centenarii?*

Erit Proportio $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{4}$: 6 = $\frac{8}{1}$ & $\frac{1}{4}$: x

hoc est Reducendo: $\frac{11}{4}$: 6 = $\frac{33}{4}$: x

per (§. 21.) 11 : 6 = 33 : x

& *per* (§. 17.) 1 : 6 = 3 : x = 18 *fl.*

COMPENDIUM V.

24. Quod si occurrat proportio, in qua termini primi, unitate differunt, & quidem si sit *Ratio majoritatis*, hoc est, si primus sit unitate major, quam secundus, tunc tertius divisus per primum, & quotus emergens subtractus ab eodem tertio, relinquet residuum terminum quartum quæsitum. *Vide Exempl. I.* In Ratione verò *minoritatis*, hoc est, si primus sit una unitate minor secundo, quotus emergens ex divisione tertii per primum, additus eidem tertio, dat summam, quæ sit terminus quartus quæsitus. *V. Exempl. II. & III.*

EXEMPLUM I.

Constat ex Tab. VIII. Arithmet. de reductione Num. Mixt. Element. nostror. quod 103 *libræ Augustanæ, efficiant* 102 *libras Hamburgenses, quæritur jam* 618 *libræ Augustanæ, quod faciunt Hamburgenses?*

Erit 103 : 102 = 618 : x

divis. dividend. quotus

hoc est 103) 618 (6

subtr. 6

Resid. 612 *libræ Hamburgenses.*

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLUM II.

In Ratione minoritatis.

5 floreni Germ. faciunt 6 Ung. in Transylvania, 65 fl. Germ. quot facient hujusmodi Ungaricales flor.

	divis.	*divid.*	*quotus.*
	5)	65	(13
adden.		13	
Summa		78 *flor. Ungar.*	

EXEMPLUM III.

4 ulnæ Viennenses faciunt 5 ulnas Transylvaniæ, ulnæ Viennenses 180, quot dabunt Transylvanicas?

	divis.	*divid.*	*quotus.*
	4)	180	(45
adden.		45	
		225 *ulnæ Transylvanicæ.*	

Quod si quæratur 5 ulnæ Transylvanicæ dant 4 ulnas Viennenses, ergo ulnæ Transylvaniæ 225, quot dabunt Viennenses? Erit per casum primum hujus.

	divis.	*divid.*	*quotus.*
	5)	225	(45
subtr.		45	
		180 *ulnæ Viennenses.*	

SCHOLION.

25. *Egregium est hoc Compendium in reducendis mensuris, ponderibus, & monetis, quarum certa Ratio unitate differt; ut in datis circumstantiis utenti constabit. Sic, si velit quis Bacios Italicos reducere ad nostram monetam, (valet autem Bacius 4 xr.)* Ex.gr. *567 Bacii, quot faciunt gross. cum 3 Bacii faciunt 4 gross. nostrates. Erit*

	divis.	*divid.*	*quotus.*
	3)	567	(189
addend.		189	
		756 *gross. seu 37 fl. 16 gross.*	

Sed de his Reductionibus in capite sequenti agetur; Industrius Arithmeticus ex his compendiis, quæ hucusque dicta sunt, facile sibi alias vias breviores reperiet, maximè si Algebra instructus sit, ex qua etiam hæc fluxêre compendia.

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT III.

De Compendiis, & Praxibus Reductionum numerorum mixtorum.

In Parte III. Arithmeticæ nostræ Numer. auctum est de Reductione in genere, & per regulas universales, omissis compendiis, & praxibus variis, ne molem libelli augeremus, quæ his exercitationibus reservata, nunc prosequemur. Quamvis autem praxis Reductionum omnium absolvi possit per Regulam auream, nihilominus compendium universale operandi per *excessum*, vel *defectum* unius speciei supra alteram in hac materia non potest non esse summe utilis. Itaque

COMPENDIUM I.

Reducere speciem datam majorem ad minorem in monetis, mensuris, & ponderibus.

26. *Primo*: Notum esse debet operanti, quot unitatibus speciei minoris, species major minorem superet; *Ex.gr.* florenus Germ. superat florenum Ung. in Transylvania usitatum $\frac{20}{100}$ unius flor. Ungaricalis; nam fl. Ung. habet 100 Nummos, quales in fl. Germ. habentur 120, ergo superat 20 Nummis, hoc est $\frac{20}{100}$ seu $\frac{2}{10}$ aut $\frac{1}{5}$ de floreno Ung. & ita de aliis ratiocinandum.

Secundò: Per hunc excessum multiplicetur datus numerus major reducendus, Productum hoc addatur ad numerum majorem, erit summa quæsitus numerus minoris speciei.

EXEMPLUM I.

Sint reducendi 340 *flor. Germ. ad Transylv. Ungar. cum florenus Germ. superet Transylv.* $\frac{1}{5}$, *erit multiplicando* $\frac{340}{5}$, *hoc est* 68 *flor., qui additi ad* 340

$$\begin{array}{r} 68 \\ \hline 408 \end{array}$$

faciunt 408 *flor. Ung.*

Digitized by Google

EXEMPLUM II.

Unus Bacius Ital. valet 4 xr. adeoque superat grossum nostratem $\frac{1}{3}$ gross. nostratis (hoc est 1 xr.) sint igitur reducendi 258 Bacii ad grossos nostrates, erit multiplicando $\frac{258}{3}$, hoc est 86, qui additi ad 258 faciunt 344 grossos, seu 17 fl. 4 gr. nostrates.

EXEMPLUM III.

Pes geometricus Parisinus superat pedem Viennensem $\frac{25}{144}$, seu $\frac{1}{576}$, itaque pedes Paris. 1704, quot faciunt Viennenses?

Erit $\frac{1704}{576}$ hoc est 24, qui additi ad 1704, faciunt 1728 pedes Viennenses.

EXEMPLUM IV.

Centenarius Vratislaviensis, (ut constat ex Tab. VIII. Arith. Numer.) superat Lipsiensem $\frac{20}{215}$, seu $\frac{4}{21}$ igitur 567 Centenarii Vratislaviense quot faciunt centenarios Lipsienses?

Erit $\frac{2268}{21}$, hoc est 108, qui additi ad 567, faciunt 675 centenarios Lipsiensis.

COMPENDIUM II.

Reducere speciem minorem ponderis, mensuræ, aut monetæ ad speciem majorem.

27. *Primo*: Notum debet esse operanti (uti in priori Compendio) quot unitatibus speciei majoris deficiat species minor ad æqualitatem constituendam.

Secundo: per hunc defectum multiplicetur species minor reducenda, & factum subtrahatur a specie minore, erit residuum, species minor reducta ad majorem. *Claritatis gratia, exempla prioris compendii assumemus, eaque ex data specie minore ad majorem reducemus.*

EXEMPLUM I.

Sint reducendi 408 fl. Ung. Transylv. ad Germanicales, cum florenus Ung. deficiat à floreno German. $\frac{20}{120}$, seu $\frac{2}{12}$, id est $\frac{1}{6}$, erit factum $\frac{408}{6}$, seu 68, hoc

Factum à 408
subtrab. 68

Residuum 340 *seu floreni Germ. qui æquales sunt flor. Ung.* 408.
Vide Exempl. I. Comp. I. (§. 26.)

EXEM-

Digitized by Google

Exemplum II.

Sint Reducendi 344 *grossi nostrates ad Bacios Ital. cum grossus nostras deficiat à Bacio* $\frac{1}{4}$ *Bacii, erit multiplicando* $\frac{344}{4}$, *hoc est* 86, *hoc Productum à* 344

subtrah. 86

Resid. 258 *Bacii.*

Vide Exempl. II. ejusdem (§. 26.)

Exemplum III.

Sint Reducendi pedes Viennenses 1728 *ad pedes Parisinos, deficit autem pes Viennensis à pede Parisino* $\frac{20}{1440}$, *seu* $\frac{2}{144}$, *hoc est* $\frac{1}{72}$, *igitur multiplicando* 1728 *per* $\frac{1}{72}$ *erit productum* $\frac{1728}{72}$, *seu* 24 *pedes, qui subtracti à* 1728, *dant residuum* 1704 *pedes Parisinos, quibus dati pedes Viennenses* 1728 *æquivalent.* Vide Exempl. III. (§. 26.)

Exemplum IV.

Sint Reducendi 675 *centenarii Lipsienses ad centenarios Vratislavienses; centenarius Lipsiensis deficit à centenario Vratislaviensi* $\frac{20}{125}$ *seu* $\frac{4}{25}$, *ergo multiplicando* 675 *per* $\frac{4}{25}$ *erit Productum* $\frac{2700}{25}$, *hoc est* 108 *centenarii, qui subtracti à* 675, *relinquunt* 567 *centenarios Vratislavienses.*

Scholion I.

28. *Quanta harum Reductionum sit necessitas, atque utilitas, nôrunt* Præfecti Militum, annonæ, commeatuum, Magistri Ponderum, & Monetarum, Mercatores item & Cambiatores, *Itemque Philosophiæ naturali operam dantes, aut Civilis etiam conditionis homines, qui varias terræ Regiones peragrantur, victualia, merces emendas, vendendas, pecunias item exigendas, permutandas, colligendas, expendendas &c. ex officio habent; Quanta porro hinc Algebraicæ scientiæ commendatio accedat, cui hæc singularia inventa in acceptis ferre debemus, nemo ratione præditus, inficiabitur.*

Scholion II.

29. *Quod si quis invenire desideret* æquivalentiam *in terminis minimis duarum specierum alias valore differentium, id esi, quot unitates speciei minoris adæquent certas unitates speciei majoris;* Ex. gr. *si quis quærat in terminis minimis, quot numero fl. Ungar. Transylvanici adæquant certum numerum florenorum Germ. in terminis; id facile invenitur, modo sciatur excessus speciei majoris supra minorem in partibus minoris speciei, expressis per fractionem;* Nam multiplicando unitatem

Digitized by Google

utriusque speciei per denominatorem fractionis, quæ excessum exhibet, & numeratorem ejusdem fractionis addendo speciei minori, habebitur æqualitas duarum specierum in terminis minimis. *Utilissimum hoc Problema, cujus ope Reductiones specierum diversarum per* Regulam auream *indagari possunt, apud Arithmeticos audit* (La Regle de Pareille, ou Pary.)

EXEMPLUM I.

1 florenus Germ. æqualis est 1 fl. Ung. Trans. plus $\frac{1}{5}$ ejusdem floreni Transylv. hoc est; 1 fl. Germ. = 1 fl. Ung. Trans. & $\frac{1}{5}$. Igitur multiplicando per denominatorem de $\frac{1}{5}$ seu per 5 tam 1 fl. Germ. quam 1 fl. Ung. Transylv. & numeratorem 1, addendo ad Ungaricales, erunt 5 fl. Germ. æquales 6 fl. Ung. Transylv.

EXEMPLUM II.

1 Ulna Viennensis æquivalet 1 & $\frac{1}{4}$ ulnæ Trans. ergo multiplicando per denominatorem 4 utramque speciem, & numeratorem 1, addendo ad ulnas Trans. erunt 4 ulnæ Viennenses æquales 5 ulnis Transylv.

SCHOLION III.

30. *Hinc si habeatur hujusmodi Ratio æqualitatis duarum specierum, reductio facile habebitur (per* Regulam auream*) specierum quarumvis. Ut si quæratur 80 ulnæ Viennenses, quot faciunt Transylvanicas, erit proportio*

$$4 : 5 = 80 : x \text{ fient } 100 \text{ ulnæ Transyl.}$$

Si vero quæratur ex data specie minore major, tum fiat inverse, ut ut si quæratur 100 ulnæ Transyl. quot faciunt Viennenses, erit

$$5 : 4 = 100 ; x, \text{ fient } 80 \text{ ulnæ Viennenses.}$$

PROBLEMA.

31. *Speciem datam quamvis Reducere ad aliam speciem quamvis, in casu, quo æquivalentia unius speciei ad alteram ad plures intermedias comparata datur. Ex. gr.* Si quæratur; 56 libræ Norimbergenses, quot faciunt libras Vratislavienses, datis æquivalentiis intermediis hujusmodi:

25 libræ Vratislav. æquivalent 21 libris Lipsiensibus, & 105 libræ Lipsienses æquivalent 98 libris Norimberg.

RESO-

Digitized by Google

RESOLUTIO.

Multiplicentur 25 per 105, productum 2625 iterum multiplicetur per 56 (nempe per datas libras reducendas) & habebitur Productum 147000. Deinde multiplicentur 21 per 98, fiet productum 2058, per hoc dividatur 147000, & quotus $71\frac{3}{7}$ dabit libras Vratislavienses æquivalentes libris 56 Norimbergensibus.

Si verò datis $71\frac{3}{7}$ libris Vratislaviensibus, quæreretur, quot faciant libras Norimbergenses secundum datas intermedias æquivalentias, tali casu, dati supra termini invertantur, & dicatur.

98 libræ Norimbergens. æquivalent 105 Lipsiensibus, & 21 libræ Lipsienses æquivalent 25 Vratislav.

Itaque multiplicando 98 per 21, fiat productum 2058, quod multiplicatum per datas $71\frac{3}{7}$ libras Vratislav. fecit $\frac{1029000}{71}$ seu 147000, deinde multiplicando 105 per 25 producitur 2625, per quod dividendo 147000 reperitur quotus 56 libræ Norimbergenses æquivalentes $71\frac{3}{7}$ libris Vratislaviensibus, ut prius.

SCHOLION.

32. *Problema hoc utilissimum à Gallis Arithmeticis vocatur* La Regle Conjointe, *quasi Regula composita, aut conjuncta, item* La Regle des Arbitrages, *seu Arbitratus, quasi decisoria negotii cujuspiam utrum utile, an damnosum sit; utuntur autem hac regula non solum Monetarii, & Cambiatores, sed cumprimis Mercatores, quemadmodum* §. 28. *dictum,*

Digitized by Google

CAPUT IV.

Praxes ſcitu neceſſariæ circa uſum Regulæ Aureæ in genere.

De uſu Regulæ aureæ in Elementis noſtris Algebr. à §. 344. ad 356, actum in compendio, copioſius hic nobis agendi locus datur; habetur ibidem §. 346. Regula univerſalis de diſponendis terminis in proportionem, ſeu in Regulam auream, in caſu Regulæ ſimplicis, & directæ, quæ hujusmodi eſt: *Ut termini ordine in quæſtione propoſito in proportionem ordinentur*, intelligendo ſi ordine naturali, & debito proponatur Quæſtio. Quia tamen ſeu ob enunciantis indebitum quæſtionem concipiendi modum, ſeu ad periclitandam Tyronum ſcientiam conſulto quæſtiones præpoſtero non nunquam ordine proponuntur, idcirco ad tollendum dubium omne, quod in caſu Regulæ directæ de ordinandis terminis oriri poſſet, ſequens Problema ſubjungo pluribus illuſtrandum exemplis.

PROBLEMA.

33. *Terminos in caſu Regulæ Aureæ directæ, quocunque præpoſtero ordine propoſitos, debite in regulam auream ordinare, & collocare.*

RESOLUTIO.

Regula unica: Terminus, qui adnexam habet quæſtionem (ſeu *de quo* quæritur) ſtatuatur loco *tertio*; huic tertio termino *homogeneus*, ſeu *ſimilis* pōnatur loco *primo*; *ſecundo loco* ponatur terminus, cui *quæſitus* eſt ſimilis, ſeu *homogeneus*. Sit itaque

QUÆSTIO I.

34. Quanti conſtat 1 libra ſacchari, ſi ejusdem ſacchari 60 libræ conſtant fl. 30. *Vides in hoc caſu præpoſtero ordine terminos poſitos, nam ordinate ſic proponi debent;* Si 60 libræ ſacchari conſtant 30 fl. *quanti erit* 1 *libra?* Hinc termini juxta datam regulam ſic ordinabuntur.

lib. fl. lib. fl.
60 : 30 = 1 : x
& per compendium 2 : 1 = 1 : x, *facit* $\frac{1}{2}$ *fl. ſeu* 30 *xr.*

QUÆ-

QUÆSTIO II.

35. Si 10 libræ ceræ flavæ emuntur 5 fl., quot libræ ejusdem ceræ ementur fl. 90? *& hæc quæstio præpostere concepta est, debetque ordinari hoc modo:* florenis 5 emuntur 10 libræ, ergo 90 fl. quot libræ ementur? hinc

	fl. lib.	*fl. lib.*
	5 : 10 =	90 : x
per compendium	1 : 2 =	90 : x
vel etiam	1 : 10 =	18 : x *fiunt libræ* 180.

QUÆSTIO III.

36. Quanti constabunt $\frac{3}{4}$ unius ulnæ panni, si $\frac{1}{2}$ ulnæ constat $\frac{2}{3}$ unius fl. Ger. *Hæc indebite proposita, sic ordinatur:* si $\frac{1}{2}$ ulna panni constat $\frac{2}{3}$ flor. quid constabunt $\frac{3}{4}$ unius ulnæ? hoc est:

	uln. fl.	*uln. fl.*
	$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} =$	$\frac{3}{4} : x$
seu per (§. 20.)	$\frac{2}{1} : \frac{2}{3} =$	$\frac{3}{4} : x$ *facit* $\frac{12}{12}$ *hoc est* 1 *fl.*

QUÆSTIO IV.

37. Studiosus profectus ad Academiam literis operam daturus per annos 6, animadvertit se 7 mensibus expendisse fl. 35, quæritur quanta summa pecuniæ egeat ad absolvenda studia? NB. *Annus hic sumitur scholasticus 10 mensium.* Itaque resoluti 6 anni in menses, erit

	mens. fl.	*mens. fl.*
	7 : 35 =	60 : x
per compendium	1 : 5 =	60 : x *fiunt* 300 *floreni.*

QUÆSTIO V.

38. Cursor quidam conficit diebus 7, milliaria 84, volo scire, quot diebus conficeret milliaria 192, si nempe singulis diebus æqualem numerum milliarium conficeret; *hæc ordinate sic poni debet:*

	milliar. dies, milliar. dies
	84 : 7 = 192 : x
& per compend.	12 : 1 = 192 : x *fiunt dies* 16.

Digitized by Google

SCHOLION.

39. *Exercitii, aut Examinis loco in usu regulæ aureæ, eadem quæstio quatuor vicibus repeti potest, si nempe termini alias dati pro quærendis ponantur; En praxim.*

I.

Quidam in Nundinis florenis 24 emit ulnas panni 20, quanti constabunt ulnæ 100 ejusdem panni? stabit ordinate.

	ulnæ.	*fl.*	*ulnæ.*	*fl.*
	20 :	24 =	100 :	x
per Compend.	1 :	24 =	5 :	x *fiunt* 120 *floreni.*

II.

Quidam emit 20 ulnas panni florenis 24, quot ulnas panni emet florenis 120, erit ordinatè:

	fl.	*ulnæ.*	*fl.*	*ulnæ.*
	24 :	20 =	120 :	x
per Compend.	1 :	20 =	5 :	x *fiunt ulnæ* 100, *ut prius.*

III.

Quidam certa summa pecuniæ emit ulnas panni 20, & eodem pretio deinde emit ulnas 100, flor. 120. quæritur quid expendit pro primis 20 ulnis? erit ordinate:

	ulnæ.	*fl.*	*ulnæ.*	*fl.*
	100 :	120 =	20 :	x
per Compend.	5 :	120 =	1 :	x *fiunt fl.* 24. *ut prius.*

IV.

Quidam aliquot ulnas panni emit fl. 24, deinde alius quispiam ex eodem panno flor. 120 *emit ulnas* 100, *quot ergo ulnas prior emit;* itaque ordinate:

	fl.	*uln.*	*fl.*	*uln.*
	120 :	100 =	24 :	x
per Compend.	5 :	100 =	1 :	x
vel etiam	12 :	10 =	24 :	x *fiunt* 20 *ulnæ.*

SCHOLION.

40. *Ex adductis exemplis liquet, quam varia ratione termini eruantur, & quomodo eadem quæstio variari possit. Nunc ad usum Regulæ aureæ variis quæstionibus utilissimis applicatæ gradum faciamus.*

CA-

Digitized by Google

CAPUT V.

Regula Aurea ad usum Oeconomicum, & Civilem applicata.

QUÆSTIO I.

41. Paterfamilias conducit tres servos, quibus singulis in dies singulos præter victum, & vestitum statuit dare 4 xr. itaque cupiens inire rationes, quantum sumptum in omnes tres, una cum victu, & vestitu spacio unius anni impensurus sit; victus pretium diurnum æstimatur 6 xr. vestis annuæ pretium censetur fl. 10.

Ante regulam auream opus est, ut diurna singulorum in pecuniam conversa addantur, & habebitur summa expensarum omnium pro una die, hoc est, cum singuli percipere debeant indies 4 xr. solutionis, 6 item xr. in victum, acquirent singuli 10 xr., cumque sint servi 3, in ternos expendentur indies 30 xr. fiat ergo regula aurea.

1. *die consummunt 30 xr., quantum consumment 365, hoc est anno uno ordinario, aut diebus 366 anno bis sextili, & habebitur proportio :*

dies xr. dies

1 : 30 = 365 : x, *fiunt* 10950 *xr. seu fl.* 182, *&* 30 *xr. pro anno verò bis sextili* 183 *fl.*

Quibus pretium vestitûs 30 fl. additi efficiunt summam 212 fl.

Quod si 30 xr. exprimantur per $\frac{1}{2}$ *fl. habebitur compendium sine Reductione, erit enim :*

$1 : \frac{1}{2} = 365 : x$, *hoc est* $\frac{365}{2}$ *seu* 182, *&* $\frac{1}{2}$ *fl.*

Si idem Paterfamilias scire cupit sumptus unius servi pro anno uno erit proportio:

dies xr. dies

1 : 10 = 365 : x *fiet 3650 xr. seu 60 fl. 50. xr. aut per Compend.* $1 : \frac{1}{6}$ *fl.* $= 365 : x$, *erit* $\frac{365}{6}$, *seu 60 fl.* $\frac{1}{6}$, *id est 50 xr., & cum pretio vestis 10, erunt 70 fl. 50 xr.*

Digitized by Google

QUÆSTIO II.

42. Idem Paterfamilias conductum ſervum pro mercede diurna habentem 4 xr. pro victu diurno 6 xr., & pro veſte annua 10. fl., præſtito obſequio per hebdomadas 27, & 3 diebus, ex obſequiis dimittit; *Quærit igitur quantum eidem ex conventione pro fidelibus obſequiis pendendum ſit?*

Quot ſi velit totam ſummam pro 27 ſeptimanis, & 3 diebus quærere, primum quærere debet juxta regulam auream priori quæſtione poſitam, quid toto anno meritus fuiſſet, reperietur autem una cum veſtitu mereri 70 fl. 50 xr.

Tum 27 ſeptimanæ reducantur ad dies, quod fiet multiplicando per 7, fientque dies 189, & cum 3, erunt 192: deinde reſolvantur 70 fl. ad cruciferos, & reperientur cruciferi 4200, & cum 50 xr. fient 4250, quibus præſtitis fiat regula aurea hujusmodi:

dies xr. dies xr.

365 dant 4250 = 192 : x, & reperiet 2235 xr. cum fractione unius cruciferi, ſuperante dimidium cruciferum, adeoque meretur ſervus hujusmodi pro 27 ſeptimanis, & 3 diebus fl. 37 & 15 ½ xr.

Quod ſi idem Paterfamilias ſecluſo victu, tantum pecuniam diurnam, & veſtem computare velit, eodem modo per regulam auream reperiet, pro 27 hebdom. & 3 diebus, mercedem 18 fl. 3 xr. ½ fere.

Si ſervus hic interea temporis ad rationes ſuæ conventionis certam ſummam pecuniæ percepiſſet à Domino, hæc ab inventa ſumma ſubtracta, relinquet reſiduum eidem pendendum.

QUÆSTIO III.

43. Quidam mutuos dedit fl. 25360 in cenſum annuum 5 pro 100, quærit cenſum unius anni? fiet

100 : 5 = 25360 : x
per Compend. 20 : 1 = 25360 : x
brevius 2 : 1 = 2536 : x *fiet cenſus annuus* 1268 *fl.*

Ultimum compendium ſuppeditat novum Compendium eruendi cenſus annui data quacunque ſumma capitali,

Digitized by Google

pitali, ſupponendo cenſum 5 pro 100; Nam ſi ex ſumma capitali abſcindatur nota ultima, & reliquum dividatur per 2, erit quotus cenſus quæſitus; ut ſi quæratur cenſus 5 pro 100 ex capitali 2400.

divid. quotus.
erit divi.ſ2) 240 (120 *floreni cenſus.*

Hoc Comp ndio in quærendo cenſu 6 pro 100 uti non licet, per hanc tamen quæſtionem eruitur.

QUÆSTIO IV.

44. Quidam datos 25360 fl. mutuos ad cenſum 5 pro 100, poſt annos 3, & hebdomadas 13, repetit capitale una cum cenſu, qui interea temporis perſolutus non eſt; Quæritur quantam ſummam una cum capitali percipiet?

Primo: per priorem (§. 43.) *reperietur cenſus pro uno anno* 1268 *fl hunc multiplicando per* 3, *erit cenſus pro annis tribus* 3804, *deinde quæratur per regulam auream cenſus pro* 13 *ſeptimanis, ſeu* 91 *diebus inferendo:*

365, *dant* 1268, *quid* 91, *& reperientur* 316 *fl.* 7 *xr. &* $\frac{65}{73}$. *itaque capitale* 15360, *cenſus item* 3 *annorum* 3804, *& nunc reperti* 316 *fl.* 7 *xr. in unam ſummam additi efficiunt* 29480 *fl.* 7 *xr.* $\frac{65}{73}$, *ſummam nempe percipiendam.*

QUÆSTIO V.

45. Quidam ſcire cupit ſummam capitalem, quæ ex cenſu 5 pro 100, dat annuum cenſum 1268 fl. itaque hoc ordine habebuntur termini

5 *dant* 100, *quid* 1268
& per Comp. 1 : 20 = 1268 : x *fiet capit.* 25360 *fl.*

QUÆSTIO VI.

46. *Stephanus* mutuos dedit *Paulo* florenos 6000 pro annis 4, quos cum *Paulus* redderet, *Stephanus* cenſum recipere noluit, verum petiit, ut ei viciſſim *Paulus* 8000 fl. ad certum tempus ſine cenſu mutuo daret. Quæritur quamdiu *Stephanus* pecuniam 8000 fl. retinere

Digitized by Google

nere possit, ut sibi ex æquo satisfiat pro præstito beneficio per 6000 fl. quos *Paulo* commodaverat?

Hoc casu opus est regula inversa, cum 8000 fl. citius refundant eundem censum, quam 6000 fl. & hinc terminus, qui tertium locum occuparet, ponatur loco primo, & primus loco secundo vel tertio, juxta doctrinam (§. 48 Alg.) qua transpositione terminorum facta, fiat regula directa:

flor. flor. an. an.

Itaque 8000 : 6000 = 4 : x

per Comp. 8 : 6 = 4 : x

brevius. 2 : 6 = 1 : x, *fient anni* 3, *quibus pecuniam* 8000 *fl. sine censu Stephanus retinere potest; Nam* 8000 *fl. intra* 3 *annos (computando* 5 *pro* 100) *dant censum* 1200 *fl. sed etiam* 6000 *fl. per* 4 *annos dant censum* 1200, *ergo habetur æqualitas. Neque verò existimandum tantum* 5 *pro* 100 *satisfacere quæstioni, nam quivis census alius satisfaciet, modo utrinque idem supponatur census.*

QUÆSTIO VII.

47. Quidam sibi vestem curaturus scit opus esse 8 ulnis panni, cujus latitudo sit $\frac{3}{4}$ unius ulnæ, vult pannum emere cujus latitudo sit unius ulnæ, seu $\frac{4}{4}$, quæritur, quot ulnis ex hoc latiore panno pro eadem veste opus habet? *Hanc iterum inversam esse, ex statu quæstionis cognoscitur. Igitur*

ut $\frac{4}{4} : \frac{3}{4} = 8 : x$

per (§. 21.) 4 : 3 = 8 : x

brevius. 1 : 3 = 2 : x *fiunt ulnæ* 6.

QUÆSTIO VIII.

48. In omni recte constituta Civitate, Pistoribus lege cautum est, ut pro ratione pretii tritici, panem (qui sit ejusdem pretii) majoris, minorisve ponderis conficiant; *Esto casus*: ut dum cubulus tritici emitur 2 fl. Germ. panis, qui grosso venditur, juxta rectas leges Civitatis cujuspiam, ponderare debeat 3 libras, sit jam pretium vilius, *Ex. gr.* sit pretium unius cubuli 1 fl. 30 xr. quæritur, quot librarum panis (qu grosso

Digitized by Google

grosso vendatur) confici debeat? cum sit regula inversa utendum, erit reductis, & transpositis terminis proportio:

xr. xr. lib. lib.
90 : 120 = 3 : x
& per Comp. 30 : 120 = 1 : x
brevius 3 : 12 = 1 : x *fiunt libræ 4 pro uno grosso, ut examinanti patebit, cum 4 lib. sint ad 3 lib sicut 120 xr. ad 90 xr.*

QUÆSTIO IX.

49. Obsessus quidam exercitus 8500 Militum, victum habet pro 11 mensibus, verum cum spes solvendæ obsidionis nulla sit, nisi post menses 25; *quæritur, quot Milites retinendi sint, ut reliquis victus sufficiat pro 25 mensibus? hæc quæstio iterum per regulam inversum solvenda:*

mens. mens. Milit.
11. : 25 = 8500 : x, *& emergtt numerus Militum* 3740, *sunt ergo dimittendi* 4760.

QUÆSTIO X.

50. Si 10 equis 1 die dentur 7 mensuræ hordei, vel avenæ, quot mensuræ juxta eandem distributionem convenient 100 equis pro diebus 20. *Hæc per regulam compositam directam solvenda juxta (§. 350. Algeb.) hoc est:*

Equi dies *mensur.* *Equi dies*
(10 . 1) *consummunt* 7, *ergo* (100 . 20): *quantum?*
erit 10 : 7 = 2000 : x
per Compend. 1 : 7 = 200 : x, *& fient mensuræ* 1400.

QUÆSTIO XI.

51. In 3 Servos intra 4 hebdomadas pro pane expenduntur 2 fl. 6 xr., quid pro uno Servo per diem? *& hæc composita directa est; itaque*

Serv. dies xr. Serv. dies xr.
(3 . 28) : 126 = (1 . 1) : x
hoc est 84 : 126 = 1 : x, *& fiunt* 1 ½ *xr. seu medius grossus.*

QUÆ-

QUÆSTIO XII.

52. Piſcinam quandam habentem 30 orgyas quadratas, 10 operarii repurgant diebus 12, habetur alia piſcina repurganda 40 orgyarum quadratarum pro quaconducuntur homines 20, quæritur quot diebus eandem repurgabunt. *Hic opus eſt regula compoſita inverſa operariorum; itaque per (§. 351. Algeb.)*

	oper.	*org.*	*dies*	*oper.*	*org.*	*dies*
	(20 :	30) :	12 =	(10 .	40) :	x
ſeu		600 :	12 =	400 :	x	
per Compend.		6 :	12 =	4 :	x	
brevius		1 :	2 =	4 :	x *fiunt dies* 8.	

SCHOLION.

53. *Cum uſus regulæ aureæ in œconomicis, & vita civili non magis eluſceſcat, quam ex diverſis caſibus Mercatorum, qui toti ſunt in lucro quærendo, aut damno avertendo, cætera, quæ ad uſum œconomicum faciunt, ex capite ſequenti repeti poterunt.*

CAPUT VI.

De uſu Regulæ Aureæ ad Quæſtiones Mercatorum applicatæ.

QUÆSTIO I.

54. Quidam mercator Claudiopolitanus Lipſiæ emerat ſacchari libras Lipſienſes 1000, quæ Lipſiæ conſtiterant fl. Germ. 300. Expoſuit autem pro his præterea Lipſiæ in vectigal fl. 15, in Telonia, & Triceſimas uſque Claudiopolim incluſive expendit fl. 30, in vecturam, & viaticum ſervorum impendit fl. 55. Cupit autem in ſingulis libris ſacchari ponderis Viennenſis lucari 2 groſſ. Quærit igitur quanti hic Claudiopoli vendere debeat unam libram Viennenſem, ut in ſingulis lucretur 2 gr.

RESO-

Digitized by Google

RESOLUTIO.

Primum oportet, ut exposita particularia in unam summam addat.

videlicet:

		fl.
In 1000 *libr. sacchari*	-	300
In Vectigal Lipsiense	- -	15
In Telonia, & Tricesim.	-	30
In Vecturam, & Servos	-	55
Summa expositorum	-	400 *fl.*

Constant ergo 1000 *libræ Lipsienses hic Claudiopoli Mercatorem hunc florenos Germ.* 400.

Secundo: Cum hic Claudiopoli non Lipsienses, sed Viennenses libras distrahere debeat, oportet, ut indaget, quotnam libras Viennenses faciant 1000 libræ Lipsienses, est autem libra Lipsiensis minor $\frac{1}{4}$ quam Viennensis, hoc est per (§. 29.) 5 libræ Lipsienses faciunt 4 Viennenses,

hinc per (§. 24.) *divis.* 5) 1000 (200
subtr. 200
Resid. 800 *lib. Viennenses.*

Faciunt ergo 1000 *libræ Lipsienses*, 800 *libras Viennenses.*

Tertio: Inquirat per proportionem, quanti illum hic in loco constet una libra Viennensis. Dicendo, si 800 lib. Vien. constant 400 fl. quid. 1.

seu 800 : 400 = 1 : x
per Compend. 2 : 1 = 1 : x *fiet* $\frac{1}{2}$ *fl. seu* 10 *gr.*

vult itaque in singulis libris Vien. lucrari 2 *grossos, ergo singulas libras vendere debet grossis* 12. Quod erat inveniendum.

QUÆSTIO II.

55. Hic idem Mercator emptam libram sacchari 10 grossis, eandem vendendo gr. 12, scire cupit, quantum lucrum habiturus sit pro 100. *Itaque si scire cupit purum lucrum, cum* 10 *grossi lucrentur* 2 *gr. sit proportio:*

10 : 2 = 100 : x
per Comp. 5 : 1 = 100 : x, *fiet lucrum* 20 *pro* 100.

Quodsi

Digitized by Google

Quodsi scire cupiat lucrum una cum pecunia exposita inferat

10 : 12 = 100 : x

per Compend. 1 : 12 = 10 : x *fiet* 120, *hoc est pro* 100 *expositis recipiet una cum lucro* 120, *à qua summa si expositi* 100 *subtrahantur, eodem modo reperitur purum lucrum esse* 20 *pro* 100.

SCHOLION.

56. *Si idem Mercator scire cupiat in specie monetæ determinatæ, perinde est, nam si in priori quæstione terminus primus* 10 *sunt grossi, & secundus terminus* 2 *etiam grossi, tunc quoque tertius terminus* 100, *etiam erunt grossi, adeoque quartus dabit etiam grossos* 20; *eodem modo discurendum de quacunque moneta. Et quia quæstio in abstracto praxin quæstione posita satisfacit omnibus speciebus monetæ, hinc sufficit in abstracto solvere, & numeros abstractos eosdem monetis, quibusvis applicare; sic si rem emptam* 10 *grossis, vendendo* 12 *grossis, lucror* 20 *gross. pro* 100, *etiam rem emptam* 10 *florenis vendendo* 12 *florenis, lucror* 20 *pro* 100, *seu quod idem est, rem emptam* 10 *grossis vendendo* 12 *grossis in* 100 *florenis lucror* 20 *florenos, est enim eadem proportio* 10 *grossorum ad* 2 *grossos, quæ* 10 *fl. ad* 2 *fl., aut* 20 *grossi ad* 100 *grossos eandem proportionem dicunt, quam habent* 20 *fl. ad* 100 *fl. idem ergo est de quacunque moneta.*

QUÆSTIO III.

57. Mercator quidam emit complures libras croci singulas à fl 10, jam vero ex contracto vitio quodam libram hujus croci distrahere nequit nisi 8 flor. quæritur quantum damnum habiturus sit pro 100. Quæstio hæc, ut Quæstio II. antecedens solvi debet; qui enim emit rem 10, & distrahit 8 grossis predit 2 grossos; ergo per proportionem.

10 : 2 = 100 : x

1 : 2 = 10 : x *fit* 20 *fl. damnum, hoc est loco* 100 *recipiet tantum* 80 *florenos.*

Sic quoque si emo rem quampiam 8 *Nummis, & vendo* 5, *perdo* 3 *nummos, hoc est, ut* 5 : 3 = 100 : x *fit damnum* 60 *Nummi pro* 100 *Nummis, seu loco* 100 *fl. acquiro tantum* 40 *florenos, aut loco* 100 *grossorum, tantum* 40 *grossos.*

QUÆ-

Digitized by Google

QUÆSTIO IV.

58. Quærit apud se Mercator, quanti emendæ sint ulnæ 100 panni, ut eædem postea venditæ 63 florenis, lucrum dent 5 pro 100. *In hac quæstione manifestum est, qui vult 5 pro 100, vult habere 105 loco 100.* Itaque si 105 dant 100, quid 63? fient floreni 60 pro ulnis panni 100 dandi, ut patet ex Subjecta proportione?

fl. lucrum
Si 60 *dant* 3, *quid* 100 *? fient* 5 *fl pro* 100, *ut quærebatur.*

QUÆSTIO V.

59. Volumen quoddam pretiosæ materiæ emptum est certo numero aureorum, quod si venderetur à Mercatore 180 aureis, damnum pateretur 10 pro 100. *Quæritur, quanti Mercator emerit hoc volumen materiæ?* Itaque qui perdit 10 pro 100, facit ex 100 aureis, aureos 90; inferatur ergo, si 90 fiunt ex 100, ex quo fient 180?

hoc est 90 : 100 = 180 : x
per Compend. 1 : 100 = 2 : x *fiunt aurei* 200, *quos expe dit Mercator in volumen materiæ, nam qui emit rem* 200 *fl.*, *& vendit* 180, *perdit* 20, *hoc est* 10 *pro* 100, *ut clarum est.*

QUÆSTIO VI.

60. Mercator Claudiopolitanus vendendo ulnam minorem Claudiopolitanam eodem pretio, quo empta est ulna major Viennensis, scire cupit lucrum pro 100. Constat autem, quod 5 ulnæ Claudiopolitanæ faciant 4 ulnas Viennenses, seu quod idem est, in quatuor ulnis Viennensibus lucratur unam Claudiopolitanam; dicatur ergo:

Uln Vien. uln. Claud.
4 *dant* 1 *quid* 100? *fiet lucrum* 25 *pro* 100. Hoc *tamen lucrum Mercator Claudiopolitanus habere non potest, eo, quod expensæ adhuc ab hoc lucro detrahi debeant; hinc si ponamus ulnam Viennensem Viennæ constitisse florenos* 2, *& expensas factas uni-*

Digitized by Google

versim donec Claudiopoli deponeretur, pro ulna venire 15 *xr., tali casu* 4 *ulnæ Viennenses, seu* 5 *ulnæ Claudiopolitanæ ipsum Mercatorem constant florenos* 9, *vendit autem* 10 *fl. ergo pro* 9 *accipit* 10, *hoc est,* 9 *lucrantur* 1, *erit pro puro lucro de* 100 *hæc proportio:*

9 *dant* 1 *quid* 100, *fiet* 11 $\frac{1}{9}$ *pro* 100, *hoc est in* 100 *florenis lucratur* 11 *flor.* 6 *xr.* & $\frac{1}{3}$

QUÆSTIO VII.

61. Inquirit Mercator Claudiopolitanus Lipsia merces 8000 fl: advehens, quantam tricesimam persolvere debeat? *Supponitur autem hic eadem pro omnibus speciebus tricesima;* Inferatur.

30 : 1 = 8000 : x *fient* 266 *fl.* 20 *x.*

QUÆSTIO VIII.

62. Emporii cujuspiam Mercator magnam mercium massam à se florenis 20000 emptam triennio depositam habet, tandem elapso triennio comparet alius Mercator depositas merces empturus, quærit apud se Mercator Emporii, quantam summam pro his mercibus ab emptore petere debeat: cum lege cautum sit, non plus quam 10 pro 100 lucrari. *Sciendum autem Mercatores tute computare posse lucrum cessans, aut damnum emergens; inquirendum itaque, quantum lucrum facturus fuisset Mercator florenis 20000 intra triennium, supponendo, I. quod semel singulis annis dictas merces distraxisset, II. quod ipsum lucrum annuum ad lucrum faciendum expendisset.*

Itaque pro lucro primi anni indagando fiat proportio:

100 : 10 = 20000 : x

seu 10 : 1 = 20000 : x *fiet lucrum* 2000, & *cum hoc lucrum* 2000 *fl. iterum expendat ad lucrum, erit capitale pro anno secundo* 22000, *hinc lucrum pro anno secundo*

10 : 1 = 22000 : x, *fi t lucrum* 2200.

Hoc lucrum addendo priori capitali, fiet capitale pro anno 3tio 24200, *adeoque* 10 : 1 = 24200 : x *fit lucrum* 2420 *pro anno tertio:*

Digitized by Google

tertio; denique lucrum anni tertii 2420 addendo ad capitale anni tertii 24200 fiet capitale 26620 fl quam summam loco 20000 fl. ab emptore petere potest Mercator; Nam lucrum cessans efficit 6620 fl. quos habere potuisset intra triennium. Cavendum autem Mercatori, ne merces hæ vitio aliquo laborent.

SCHOLION.

63. *Ex resolutione hujus quæstionis liquet, quomodo computandus est census iterum ad censum positus, seu quando per censum augetur capitale;* hujus calculi compendium capite ultimo harum exercitationum adferam. *Mercatores plerique initio statim depositionis mercium pretium titulo lucri cessantis augent, ob metum damni emersuri, si longiore tempore merces distrahere nequirent, qui metus lucri cessantis incautos Mercatores plerumque ad incitas redigit, eo, quod pretia rerum nimium augendo Emptores à se ab alienent, quo fit, ut corruptis mercibus ob debita contracta, lucrumque revera cessans cessare cogantur à quæstu exercendo. Hinc optandum potius, saniora caperent consilia Mercatores quidam, atque in quæstu mercium mediocre lucrum quærerent, quo fieret (quemadmodum multi experti sunt) ut minori lucello, at sæpius repetito, longe majus lucrum faciant: Nam lucellum minus* Ex. gr. 5 *pro* 100, *at quinquies per annum repetitum superat majus lucrum* 10 *pro* 100, *aut etiam* 20 *pro* 100, *at semel in anno factum, qui enim* 5 *pro* 100 *in anno quinquies accipit, percipit revera per annum* 25 *pro* 100, *seu auget* 100 *ad* 125, *imo si lucrum* 5 *pro* 100 *iterum singulis vicibus ad novum lucrum faciendum exponat, patet ex priori quæstione, per quinam repetionem uno anno factam lucraturum* 27. *fl.* 37 *xr.* & $\frac{1}{2}$ *fere.*

QUÆSTIO IX.

64. Mercator qui vendit 1 libram sacchari 8 grossis dicitur lucrari 60 pro 100, quæritur jam si eandem sacchari libram vendat 10 grossis, quantum pro 100 lucrabitur?

RESOLUTIO.

Primum *investigandum, quanti Mercatorem constitit* 1 *libra sacchari, ex qua lucratur* 60 *pro* 100, *inferendo videlicet; si* 160 (seu pecunia exposita cum lucro) *proveniunt ex* 100, 8 *grossi* (qui considerantur tanquam lucrum cum exposita pecunia) *ex quo provenient?*

hoc est	160 : 100	=	8 : x	
per Compend.	20 : 100	=	1 : x	
brevius	1 : 5	=	1 : x	*fiunt grossi* 5.

Digitized by Google

Constitit ergo Mercatorem 1 *libra grossos* 5, *id verum esse patet ex* (§. 55.) *nam qui emit rem* 5 *grossis, & vendit* 8, *lucratur* 60 *pro* 100 *ergo.*

Secundo: *invento valore* 1 *libræ nempe* 5 *grossi, cum vendere velit grossis* 10, *huc delabitur quæstio; qui emit rem* 5 *grossis, & vendit* 10 *grossis, quantum lucratur pro* 100: *itaque cum lucrum sit* 5 *grossi, fiat proportio:* 5 *dant* 5 *quid* 100,
seu 5 : 5 = 100 : x *fiet lucrum* 100, *hoc est, qui vendendo rem* 8 *grossis lucratur* 60 *pro* 100, *si eandem rem vendat* 10 *grossis lucratur* 100 *pro* 100, *hoc est alterum tantum.* Quod erat inveniendum.

QUÆSTIO X.

65. Qui ulnam panni 18 grossis vendit, dicitur perdere 10 pro 100, quæritur si eandem ulnam vendat grossis 15, quantum pro 100 perdet.

RESOLUTIO.

Et in hac quæstione primo inquirendum, quanti constiterit 1 *ulna, ut vendita* 18 *grossis damnum inferat* 10 *pro* 100; *hic animadvertendum, sicut is, qui lucratur* 10 *pro* 100, *facit ex* 100 *summam* 110, *ita qui perdit* 10 *pro* 100, *facit ex* 100 *summam* 90. *Adeoque hæc quæstio, ut antecedens, solvi debet; hinc fiat proportio inferendo: si* 90 *proveniunt ex* 100, *ex quo provenient* 18 *grossi.*

erit 90 : 100 = 18 : x
per Comp. 9 : 10 = 18 : x
brevius 1 : 10 = 2 : x *fiet* 20, *hoc est* 1 *ulna constitit* 20 *grossos.*

Hoc invento pretio unius ulnæ dicatur, qui ulnam emptam grossis 20, *vendit* 15, *perdit grossos* 5, *id est* 15 *dant damnum* 5, *quid* 100?

seu 15 : 5 = 100 : x
brevis 3 : 1 = 100 : x *fit* 33 $\frac{1}{3}$

Perdit ergo 33 $\frac{1}{3}$ *pro* 100, *hoc est, si scire velit in grossis, quantum percipiat loco* 100 *grossorum? tantum accipit* 66 $\frac{2}{3}$ *seu* 66 *grossos* 2 *xr; aut in florenis, loco* 100 *florenorum, recipit tantum* 66 *fl.* 40 *xr.*

QUÆ-

Digitized by Google

QUÆSTIO XI.

66. Inquirit Mercator, ſi pro 20 centenariis mercium advectis per 100 milliaria perſolvuntur pro vectura 50 fl quantum ſolvendum erit pro 30 centenariis advehendis per 400 milliaria? *Hic regula compoſita directa opus eſt*

cent. mill. *fl.* *cent. millia.*
(20 . 100) *conſtant* 50, *ergo* (30 . 400) *quantum?*
ſeu 2000 : 50 = 12000 : x
per Comp. 1 : 50 = 6 : x *fient floreni* 300.

QUÆSTIO XII.

67. Mercator florenis 300 intra 2 annos lucratur 200, quærit, florenis 1000 intra 6 annos, quantum lucrabitur? & hæc compoſita eſt, ergo

fl. annis *lucr.* *fl. annis*
(300 . 2) *dant* 200, *quid* (1000 . 6)
ſeu 600 : 200 = 6000 : x *lucrum.*
per Comp. 1 : 200 = 10 : x *fient* 2000 *fl.*

Sed idem Mercator adhuc ſcire cupit, ſi 300 fl. inter 2 annos dant lucrum 200 fl. quantum habiturus ſit lucrum uno anno ex 100. floren.

fl. an. *fl. an.*
Fiat (300 . 2) *dant* 100, *quid* (100 . 1)
ſeu 600 : 200 = 100 : x
per Compend. 6 : 200 = 1 : x *fiet lucrum* 33⅓ *pro* 100

QUÆSTIO XIII.

68. Quidam per 3 menſes 10 florenis lucratus eſt 4 florenos, quærit 100 florenis quandonam lucrabitur 2000 florenos. *Hoc caſu bis facienda eſt regula aurea, propterea, quod ignotum ſit tempus, in quo 100 floreni lucrari debent 2000 fl adeoque (adhibendo duplicem regulam auream) primum quæratur pro 3 menſibus, quantum ſit futurum lucrum ex 100 florenis; nempe ſi 10 flo-*

Digitized by Google

reni lucrantur 4 flor. inter 3 menses, intra eosdem 3 menses 100 floreni, quantum lucrabuntur?

erit 10 : 4 = 100 : x
per Comp. 1 : 4 = 10 : x *fient floreni* 40.

Deinde Fiat secunda regula dicendo: si 40 floren. lucror 3 mensibus, florenos 2000 quando lucrabor.

erit 40 : 3 = 2000 : x
per Comp. 1 : 3 = 50 : x *fient menses* 150, *seu anni* 12, *& menses* 6.

Atque adeo si 10 floreni inter 3 menses lucrantur 4 florenos, 100 floreni lucrabuntur 2000 floren. intra menses 150 seu annos 12, & 6 menses, ut examinanti liquet.

QUÆSTIO XIV.

69 Si 100 floreni mensibus 8 lucrantur 20 florenos, iidem centum floreni, quando lucrabuntur 3000 florenos, erit proportio:

fl. mens. fl. mens.
20 : 8 = 3000 : x
per Comp. 1 : 8 = 150 . x, *fiunt menses* 1200, *seu anni* 100.

Eodem modo si quis quærat: 300 fl. intra 7 menses lucrantur 45 florenos; intra eosdem 7 menses, quid lucrabuntur floreni 1780?

fl. lucr. fl. lucr.
Erit proportio: 300 ; 45 = 1780 : x
per Compend. 60 : 9 = 1780 : x
brevius 6 : 9 = 178 : x
adhuc brevius 2 : 3 = 178 : x, *fiet lucrum* 267.

In his duobus casibus liquet, quando pro eadem pecunia (ut in primo casu) vel pro eodem tempore (ut in casu secundo) quæritur lucrum, terminos illos ad regulam non esse ordinandos.

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT VII.

Regula aurea ad regulam Societatis Mercatorum applicata.

De Regula Societatis in compendio tractavimus (à §. 352 ad § 255. Algeb.) in qua posuimus Regulam: *Ut primo loco semper ponatur summa collatorum omnium Sociorum, secundo loco lucrum, vel damnum totale omnium Sociorum, tertio loco collatum particulare cujusvis Socii seorsim, pro quo quæritur damnum, vel lucrum; hinc quot Socii sunt, toties dicto modo regulam auream repetendam, intelligendo, si simplex sit regula.* In *Composita* verò, in qua tempus occurrit, prius cujuslibet collatum particulare esse multiplicandum per suum tempus; ut per Exempla, & Quæstiones nunc declaraturus sum.

QUÆSTIO I.

70. Mercatores quatuor inita Societate lucrati sunt in nundinis 600 florenos; Primus ad faciendum lucrum contulit florenos 50, secundus 70, tertius 80, quartus 100, quæritur jam, quantum quisque ex lucro 600 florenor. accipere debeat?

Primo, collata singulorum colligenda sunt in unam summam, quæ efficitur 300 *florenorum, deinde cum Socii sint quatuor, quater juxta supra datam regulam instituenda proportio hoc modo:*

summa lucr.

Pro primo	300 : 600	=	50 : x	
secundo	300 : 600	=	70 : x	
tertio	300 : 600	=	80 : x	
quarto	300 : 600	=	100 : x	

Per Compendium.

1 : 2 =	50 :	*fit*	100	*Primi.*
1 : 2 =	70 :	*fit*	140	*Secundi.*
1 : 2 =	80 :	*fit*	160	*Tertii.*
1 : 2 =	100 :	*fit*	200	*Quarti.*

summa 600 *lucrum tot.*

Hinc, primus pro 50 *florenis lucratur* 100, *secundus pro* 70 *lucratur* 140, *tertius pro* 80 *lucratur* 160, *quartus pro* 100 *lucratur* 200 *florenos; Examen est, si lucra particularia inventa in unam summam collecta faciant lucrum totale.*

Digitized by Google

QUÆSTIO II.

71. Tres Mercatores emptis mercibus navem onerarunt. Primi merces constiterunt 1800 aureis. Secundi 2400. Tertii 3000; gravi deinde exorta tempestate, ut se, navimque salvarent, graviores merces tumultarie arreptæ in mare projectæ sunt, efficientes simul damnum aureorum 2400; conventum ergo inter eos est, ut jactura hæc communis sit omnium; quæritur quantum quisque damnum feret pro ratione suarum mercium; *Hæc eodem modo solvitur, ut prior quæstio.*

Nempe collata summa omnium est 7200 *aurei, damnum omnium* 2400.

	summa,	*damn.*		*collat.*
ergo ut	7200 :	2400	=	1800 : x
	7200 :	2400	=	2400 : x
	7200 :	2400	=	3000 : x

Per Compend.			*damnum.*	
3 : 1	= 1800 : x	*fit*	600	*Primi.*
3 : 1	= 2400 : x	*fit*	800	*Secundi.*
3 : 1	= 3000 : x	*fit*	1000	*Tertii.*
			summa 2400 *aurei.*	

QUÆSTIO III.

72. Duo Mercatores contracta Societate assumpserunt Procuratorem mercium suarum, cui pro stipendio annuo, 10 pro 100 cederent ex lucro universo unius anni; Primus Mercator contulit 120 aureos; secundus 180 aureos; lucrati sunt per annum 1000 aureos. Quæritur jam, quid Procuratori, & quid singulis Mercatoribus pro ratione collatæ pecuniæ obveniat.

RESOLUTIO.

Primo, invenienda est pars Procuratoris per proportionem dicendo si 100 *dant* 10, *quid dabunt* 1000. *& reperietur pars Procuratoris esse* 100 *aurei, qui subtracti à* 1000 *aureis, relinquunt* 900 *aureos inter duos Mercatores partiendos: est autem collatum horum duorum* 300 *aurei*

summa

Digitized by Google

summa lucr. collat.

Ergo pro Primo 300 : 900 = 120 : x
Secundo 300 : 900 = 180 : x

Per Compendium.

1 : 3 = 120 : x *fit* 360 *Primi.*
1 : 3 = 180 : x *fit* 540 *Secundi.*

summa 900 *aurei.*

QUÆSTIO IV.

73. Tres Mercatores exmisso socio Lipsiam pro saccharo emendo, decernunt emendas 4000 libras; quæ constant 2000 flor; Horum primus vult accipere 1300 libras, secundus lib. 1460, tertius reliquas lib. 1240; *Quæritur, quantum quisque ad conficiendam summam 2000 fl. conferre debeat.* Fiat proportio:

lib. *fl.* *lib.*

ut 4000 : 2000 = 1300 : x
4000 : 2000 = 1460 : x
4000 : 2000 = 1240 : x

Per Compendium.

2 : 1 = 1300 : x *fit* 650 *fl. Primi.*
2 : 1 = 1460 : x *fit* 730 *Secundi.*
2 : 1 = 1240 : x *fit* 620 *Tertii.*

summa 2000 *fl.*

QUÆSTIO V.

74. Tres Mercatores inita Societate lucrati sunt florenos 1000; Primus contulit flor. 200 per 8 menses, Secundus fl. 400 per 6 menses, Tertius 100 per 10 menses; quæritnr lucrum singulorum?

RESOLUTIO.

Cujuslibet collatum particulare multiplicetur per suum tempus, erunt facta particularia, pro Primo 1600; *pro Secundo* 2400; *pro Tertio* 1000; *Hæc in unam summam collecta efficiunt* 5000, *itaque inferatur:*

Pro Primo 5000 : 1000 = 1600 : x
Secundo 5000 : 1000 = 2400 : x
Tertio 5000 : 1000 = 1000 : x

Digitized by Google

Per Compendium.

		lucrum.	
5 : 1 =	1600 :	*fit* 320	*Primi.*
5 : 1 =	2400 :	*fit* 480	*Secundi.*
5 : 1 =	1000 :	*fit* 200	*Tertii.*
		summa 1000 *fl.*	

QUÆSTIO VI.

75. Tres Mercatores inierunt Societatem quadriennio duraturam; *Primus* contulit initio Societatis 4000 fl. sed post 6 menses ex his abstulit 1000 fl. verum post elapsos a die ablationis menses 30, iterum contulit 2000 fl. usque ad finem quadriennii. *Secundus* principio dedit 5000 fl. & post menses 10 ex his recepit 500 fl. deinde vero elapsis à die ablationis mensibus 12 retulit 1000 fl. ad terminum quadriennii. *Tertius* contulit 8000 fl. quos illæsos ad finem quadrienii reliquerat. Hoc quadriennio lucrati sunt 100000 fl. quæritur lucrum singulorum?

Quæstionem hanc, utpote ad calculos etiam Oeconomicos Exempli loco servientem, prolixius persequemur.

RESOLUTIO.

Quoniam Primus contulit 4000 *fl. quos per* 6 *menses illæsos reliquerat*, 4000 *per* 6 *multiplicando efficiunt* 24000 *fl. at quia post* 6 *menses ex* 4000 *abstulit* 1000, *igitur per reliquos* 30 *menses tantum* 3000 *fl. in societate permanserunt, quos per* 30 *menses multiplicando habebimus factum* 90000; *demum, quia post* 30 *à die ablationis menses retulit iterum* 2000 *fl. hos ad* 3000 *addendo, habuit ad finem usque quadriennii* 5000, *eosque per reliquos ad finem menses* 12 *multiplicando efficitur factum* 60000. *Jam hæc tria facta* 24000, 90000, *&* 60000, *in unam summam addendo habebimus collatum particulare Primi* 174000.

Eodem modo, quia Secundus *ex sua initio collata summa* 5000 *fl. post* 10 *menses abstulit* 500 *fl. ergo* 5000 *fl. per* 10 *menses efficiunt* 50000; *pro mensibus verò* 12 *tantum habuit* 4500, *seu multiplicando per* 12, *efficitur factum* 54000; *retulit autem post* 12 *à die ablationis mensem* 1000 *fl. quos addendo ad* 4500, *&*

summam

Digitized by Google

summam 5500 *multiplicando per* 26 *menses (reliquos nempe ad* 48 *) efficitur factum* 143000. *Tria hæc facta* 50000, 54000, *&* 143000 *addendo, erit collatum secundi* 247000. Tertius *cum illæsam reliquerit suam initio datam summam* 8000 *fl. hanc per* 48 *menses (seu* 4 *annos) multiplicando, habetur factum* 384000 *; jam hæc tria collata totalia horum sociorum addendo, erit :*

Primi nempe	174000
Secundi -	247000
Tertii - -	384000
Summa collatorum	805000

Fiat jam regula Societatis.

Ut 805000 *ad* 100000 *lucrum omnium, ita collatum particulare cujusvis ad suum lucrum, seu per Compendium.*

lucrum.

805 : 100 = 174000 : x 21614 $\frac{732}{805}$ *Primi.*

805 : 100 = 247000 : x 30683 $\frac{183}{805}$ *Secundi.*

805 : 100 = 384000 : x 47701 $\frac{685}{805}$ *Tertii.*

lucrum totale 99998 | $\frac{1612}{805}$
2

100000 *fl.*

SCHOLION.

76. *Cæteras magis implicatas, & difficiliores quæstiones Exercitationibus Analyticis reservamus.*

CAPUT ULTIMUM.

Quæstiones Miscellaneæ ad usum utilissimæ, & necessariæ.

Quæstiones hic adfero, quarum quidem usus Arithmeticus, inventio autem Algebraica. Sunt hæ quæstiones, quarum solutiones à plurimis Arithmeticis etiam iis, quos vulgus in arte Magistros celebrat, ignorantur. Quotus quisque etiam exercitatus novit calculum *Anticipationis* seu Regulam vulgo Rabattæ (Germanis : Die Rabath-Rechnung) vix nomine notum. Paucos reperias, qui *Anatocismum*, seu censûs censum (Germanis : Den Zins zum Capital

pital schlagen) ad calculum revocent; Non multos existimo, qui celebrem juris Regulam de *quarta falcidia* in hæreditatibus ex *Dodrante* pro omnibus circumstantiis ad leges Jurium calculent. Quæ tamen praxes, quam in vita Civili necessariæ sint ex Exemplis refendis patebit.

DEFINITIO.

77. Calculus *Anticipationis*, seu Regula Rabattæ, est calculus, quo definitur, quanto minus capitale aliquis dare debeat ei, qui id ante tempus præfixum habere desiderat. Hunc sequenti scholio explico

SCHOLION I.

78. Cajus *legaverat* Sempronio Ex. gr. *flor.* 100000 *hac conditione, ut per annos* 10, *censum* 5 *pro* 100 *perciperet quidem, at elapsis decem annis capitale* 100000 *fl. domui pauperum cederet; Elapsis annis* 4 Titius *Curator domus pauperum occasionem nanciscitur coëmendorum fundorum in usum pauperum valde utilium, requirit itaque* Sempronium *de deponendo hoc Capitali ante tempus præfinitum, annuit petitioni* Sempronius *verum ita, ut pro sexennio residuo census tantam sibi partem ex hoc capitali desummat, quantum requiritur ad hoc, ut hæc pars decerpta, elocata ad censum, & census iterum ad censum positus, tantum* Sempronio *lucretur, quantus futurus fuisset census ex* 100000 *fl. per annos sex percipiendus, & simul positus ad censum novum faciendum.* Titius *suscipit conditionem, ut non majorem partem sibi desummat* Sempronius, *quam requireretur, ut imminuti capitalis census additus capitali, & hujus census census iterum additus capitali, atque sic per sex annos tantum augeat capitale, quasi evoluto decennio integrum accepisset. Regula itaque, quæ in hanc partem à summa capitali ante tempus repetitam, decerpendam inquirit.* Regula Rabattæ *audit, fundatur autem in his postulatis:* I. *Is, qui summam pecuniæ ante præfinitum tempus (id est anticipato) deponit, jure censum exigere potest inter præsens, & præfinitum tempus sibi debitum.* II. *Compensatio est quædam solutio, ut JCti loquuntur.* III. Creditor *cum* debitore *ita contrahere potest, ut eorum negotium nunc & in præsens finiatur ita absque alterutrius damno, ut neuter alteri quidquam debeat.*

SCHOLION II.

97. *Cum Regulæ Rabattæ inventio, & modus reperiendorum numerorum Tabulæ infra ponendæ ad Algebram pertineant, has autem Exercitationes usibus Arithmeticæ numericæ tantum destinavimus, idcirco ex Ratione data numerorum Tabulæ sequentis pro annis* 60 *calculatorum Regulam Rabattæ definiemus.*

TA-

Digitized by Google

TABULA ANTICIPATIONIS

Seu imminutionis capitalis,

Calculata ex capitali 100000 *flor. ad censum* 5 *pro* 100.

Anni Pro quibus			Summa Anticipanda.	Anni Pro quibus			Summa Anticipanda.
1	—	—	95238	31	—	—	22036
2	—	—	90703	32	—	—	20987
3	—	—	86384	33	—	—	19987
4	—	—	82270	34	—	—	19035
5	—	—	78353	35	—	—	18129
6	—	—	74622	36	—	—	17265
7	—	—	71068	37	—	—	16444
8	—	—	67684	38	—	—	15661
9	—	—	64461	39	—	—	14915
10	—	—	61391	40	—	—	14205
11	—	—	58468	41	—	—	13529
12	—	—	55684	42	—	—	12885
13	—	—	53032	43	—	—	12271
14	—	—	50507	44	—	—	11687
15	—	—	48102	45	—	—	11131
16	—	—	45811	46	—	—	10601
17	—	—	43630	47	—	—	10096
18	—	—	41552	48	—	—	9615
19	—	—	39573	49	—	—	9157
20	—	—	37689	50	—	—	8721
21	—	—	35894	51	—	—	8306
22	—	—	34185	52	—	—	7911
23	—	—	32557	53	—	—	7534
24	—	—	31007	54	—	—	7175
25	—	—	29530	55	—	—	6833
26	—	—	28124	56	—	—	6508
27	—	—	26785	57	—	—	6198
28	—	—	25509	58	—	—	5903
29	—	—	24294	59	—	—	5622
30	—	—	23138	60	—	—	5354

Quod si continuare libeat hanc Tabulam, assumatur ultimus Tabulæ numerus 5354, *& inferatur, ut* 21 : 20 = 5354 : x, *erit inventus numerus* 5099 $\frac{1}{10}$ *seu (quia fractio minor est dimidio, assumendo rotundum numerum* 5099, *omissa fractione, quod in aliis Tabulæ numeris quoque observatum est) numerus* 5099 *pro*

Digitized by Google

pro anni 61 hic numerus 5099 in proportionem ordinatus, ut 21 : 20 = 5099 : x *dat numerum* 4856 *pro annis* 62, *atque ita porro progredi licet per plures annos donec capitale ad unitatem reducatur. Non absimili modo quis Tabulam construere poterit census* 6 *pro* 100, *si inferat, ut* 106 : 100 = 100000 : x *His intellectis ad Resolutionem Problematis Rabattæ progrediamur.*

PROBLEMA RABATTÆ,

SEU ANTICIPATIONIS.

80. *Determinare partem desumendam ex capitali, quod capitale post aliquot annos elapsos primo pendendum esset, cujus anticipatio nunc præstanda petitur juxta conditiones (§. 78.) positas.*

RESOLUTIO.

I. Inquirantur in supra posita Tabula anni pro quibus anticipandum petitur capitale, & videatur, quæ summa iisdem annis correspondens anticipanda habetur.

II. Fiat Regula aurea directa, cujus primus terminus sit 100000; terminus secundus sit datis annis in Tabula repertis correspondens numerus; tertius terminus sit datum capitale, quod anticipandum est, erit quartus numerus capitale imminutum pro datis annis anticipandum.

EXEMPLUM.

Cajus *tenetur* Titio *deponere capitale* 23152 *fl. post* 3 *elapsos annos, verum* Titius *nactus occasionem, pecuniam hanc (quæ sua futura est post* 3 *annos) nunc elocandi alibi cum fœnore; hanc itaque repetit à* Caio, *petitioni huic juxta conditiones* (§. 87.) *annuit* Cajus, *quæritur quanto minus capitale* Cajus *dare debeat* Titio, *supposito census* 5 *pro* 100.

Itaque juxta datam Resolutionem fiat repula aurea

100000 : 86384 = 23152 : x *fiet* 20000 *ferè ergo loco* 23152 *fl. anticipando,* Titius *tantum percipit* 20000 *ferè, patet id per sequens examen juxta conditiones Rabattæ institutum.*

Nam Primo: Titius *imminutum hoc capitale* 20000 *florenorum spacio* 3 *annorum censum census adjungendo huic capitali, habet totum capitale in fine tertii anni, quasi illud non anticipasset; ut ex subjectis proportionibus liquet.*

Nam

Digitized by Google

Nam inferendo : 100 : 105 = 20000 : x *fit capitale cum censu anni primi* 21000.
& pro anno secundo : 100 : 105 = 21000 : x *fit capitale cum censu* 22050.
& pro anno tertio : 100 : 105 = 22050 : x *fit capitale cum censu* 23152 *&* $\frac{1}{2}$ *fere.*

Secundo *patet quoque* Cajum *ex decerpta parte* 3152 *fl. ad censum census intra triennium posita, & capitali suo adjecta rehabere censum census, quem habuisset ex capitali integro* 23152 *fl. intra triennium.*

Nam capitale 23152 *fl. ad censum census positum lucratur intra* 3 *annos* 3648, *sed etiam* 3152 *fl. uno cum suo censu census faciunt intra annos* 3 *ferè* 3648.

Nam si fiat
pro anno Primo : 100 : 105 = 3152 *fit* 3309 $\frac{6}{10}$
& pro an. Secun. : 100 : 105 = 3309 $\frac{6}{10}$, *fit* 3475 $\frac{2}{25}$
& pro an. Tertio: 100 : 105 = 3475 $\frac{2}{25}$, *fit* 3648 $\frac{13}{100}$

Unde liquet recte secundum jus proprietatis utriusque solutam Quæstionem Anticipationis, seu Rabattæ.

Porro per eandem quoque Tabulam solvitur Quæstio Anatocismi.

DEFINITIO.

81. Regula *Anatocismi* est, per quam inquiritur in summam capitalem auctam per censum census pro datis annis, Germ. Den Zins auf Zins, oder zum Capital schlagen. Hung. A' vett Interesnek interesse.

PROBLEMA ANATOCISMI.

82. *Determinare pro datis quibusvis annis capitale quodvis, auctum per Anatocismum, juxta censum 5 pro 100.*

RESOLUTIO.

I. Inquirantur in Tabula supra posita anni pro quibus capitale auctum petitur, eorundemque annorum in Tabula repertorum numerus correspondens excerpatur.

II. Fiat regula aurea directa : numerus ex Tabula inventus, ponatur loco primo, secundo loco numerus 100000, tertio, capitale datum pro quo quæritur Anatocismus ; erit quartus numerus inventus, capitale una cum suo Anatocismo pro datis annis quæsitum.

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLUM.

Cajus *summam capitalem* 23152 *flor. elocat in censum* 5 *pro* 100 *ad annos* 3, *ita ut census census singulis annis per anatocismum adjiciatur capitali, quæritur quamnam summam habebit in fine anni tertii? fiat juxta datam Resolutionem:*

86384 : 100000 = 23152 *fl. fit* 26800 *fere,*

Unde lucrum anatocismi 3648 *fl. pro annis tribus ut priori quæstione positum.*

DEFINITIO.

83. *Quarta falcidia* est quarta pars totius Hæreditatis.

SCHOLION.

84. *Si unus, aut plures hæredes per* legata *subinde ita graventur, ut hæreditas plus quam* $\frac{3}{4}$ *imminuenda foret per legata, tali casu legata juxta jus civile, ita proportionaliter minuenda sunt, ut hæredibus pars quarta (seu quarta falcidia) integra, & salva permaneat; esto casus.*

PROBLEMA.

85. *In casu quo legata* dodrantem *hæreditatis superant, ita hæc legata inter* legatarios *proportionaliter partiendi, ut hæredum pars* quarta falcidia *integra, ac salva habeatur.*

RESOLUTIO.

I. Deductis deducendis inquiratur in totam massam hæreditatis.

II. Dividatur massa tota per 4, erit quotus pars *quarta falcidia*, hic quotus iterum multiplicatus per 3 producit *dodrantem.*

III. Inferatur per regulam Societatis: *Ut summa legatorum ad dodrantem, ita cujusvis legatum particulare ad partem loco sui legati percipiendam.*

EXEMPLUM.

Cajus *post obitum relinquit* 2452 *fl. tenetur autem ex debito* 930 *fl. impensæ in exequias, & cætera fuêre* 250 *fl. legavit autem* Joanni 500 *fl.* Paulo 300 Jacobo 250 *fl. hæredes instituit* Petrum *ex* Tertia, Stephanum *ex duabus reliquis partibus hæreditatis. Quæritur quantum hæredes, quantumque singuli legatari percipere debeant?*

Addatur

Digitized by Google

Addatur debitum 930 *ad expensas in exequias* 250, *erit summa* 1180 *fl. hæc subtracta à relicta hæreditate* 2452, *relinquit residuum totam massam* 1272 *fl. Hæc divisa per* 4 *dat* quartam falcidiam 318, *hic quotus multiplicatus per* 3 *dat* 954 dodrantem, *sunt autem legata* 500, *&* 300, *&* 250, *horum summa est* 1050. *ergo inferatur per regulam tertiam hujus.*

sum. leg. dodr.

Pro Joanne 1050 : 954 = 500 : x *fiet* $454\frac{3}{7}$ *fl.*

Paulo 1050 : 954 = 300 : x *fiet* $272\frac{4}{7}$ *fl.*

Jacobo 1050 : 954 = 250 : x *fiet* $227\frac{1}{7}$ *fl.*

summa 954 *fl.*

Ex quarta falcidia 318 *acquirit* Petrus $\frac{1}{3}$ *hoc est* 106 *fl.*

Stephan. $\frac{2}{3}$ *hoc est* 212

summa 318

cum legatis 954

Tota hæreditas 1272

SCHOLION.

86. *Si unus, aut plures hæredes pluribus legatis graventur, tali casu considerando hæreditatem cujuslibet hæredis tanquam massam totalem relate ad legatarios, eodem modo instituetur calculus. Cæterum plura parantem ad usus civiles, & sumptus hæc in publicum bonum evulgandi, & ocium nunc quidem defecit, daturus subinde alia, hæc interea DEI Solius Gloriæ consecrata commodo publico conscripta volui.*

FINIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google