DE CENTRO GRAVITATIS DISSERTATIO

PUBLICE PROPUGNATA
IN COLLEGIO ROMANO SOC. JESU

AUCTORE P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH
SOCIETATIS EJUSDEM

EDITIO ALTERA

ACCEDIT DISQUISITIO

IN CENTRUM MAGNITUDINIS
QUA QUÆDAM IN EA DISSERTATIONE PROPOSITA,
ATQUE ALIA IIS AFFINIA DEMONSTRANTUR.

ROMÆ MDCCLI.

TYPIS ET SUMTIBUS, NICOLAI, ET MARCI PALEARINI
SUPERIORUM FACULTATE.

1. QUAM frequens in universis Physico Mathematicis disciplinis centri gravitatis usus occurrat, quam multæ, quam scitu dignæ ejus proprietates sint, licet in ipsa tantummodo ipsius contemplatione libeat consistere, nemo sane non novit, qui vel in Veterum, vel in Recentiorum inventis versatus sit. Hinc ejus pertractationem nostræ huic exercitationi aptissimam fore censuimus, in qua & nostrorum in geometricis studiorum specimen exhibendum est aliquod, & ipsius Geometriæ ad rem physicam non utilitas tantum, verum etiam necessitas demonstranda. Porro quanquam, quæ huc pertinent, passim occurrant; adhuc tamen non Tyronibus tantum, sed & provectioribus multo rem facturos arbitramur nec injucundam, nec inutilem; methodo enim nobis saltem nova accurate demonstrabimus quædam, quæ admodum necessaria sunt, licet omitti passim soleant, quædam alia scitu dignissima exponemus aliquanto dilucidius, ac simpliciori demonstratione expediemus, atque usus nonnullos sane præstantissimos persequemur in Geometria, in Statica, in Astronomia, in Physica, ex quibus Mathematicorum studiorum & utilitas, & vero etiam necessitas innotescat.

2. Centri gravitatis & consideratio, & nomen ortum duxit ab æquilibrio solidorum ea præditorum gravitate, quam hic experimur, nimirum constantem in quavis distantia a su-

perficie Telluris, & in æqualibus materiæ particulis æqualem. Illud enim dicitur centrum gravitatis cujuspiam corporis, per quod si suspenderetur corpus ipsum, & ejusdem particulæ materiæ æquales æque gravitarent per rectas plano horizontali perpendiculares, nullum haberet motum, nulla parte præponderante parti oppositæ. Multorum autem corporum centrum gravitatis commune dicitur per analogiam punctum illud, per quod pariter suspensa, si forte & cum ipso, & inter se connecterentur per virgas inflexiles, & non ponderantes, quiescerent, sine ullo motu orto a præponderantia partis cujuspiam.

3. Si massa quædam æqualium, & æque gravium, adeoque & æque ponderantium materiæ particularum libere descendere nequaquam possit; singulæ particulæ nisum exercent quendam ad convertendam massam ipsam circa quendam axem horizontalem, ac ita descendendum, coactis ascendere particulis ex opposita ejusdem axis parte jacentibus, qui nisus dicitur momentum particularum ipsarum, & in singulis particulis est proportionalis earum distantiæ a plano verticali transeunte per axem ipsum ita, ut eadem particula, quo magis ab ejusmodi plano distat, eo majore nisu conetur totam massam convertere circa ejusmodi axem, & majus momentum exerceat. Hoc principium in primis Mechanicæ elementis multo etiam generalius demonstrari solet, & ad machinas omnes, & omnes potentiarum plurium nexus longe pertinet.

4. Hinc ut in quodam puncto cujusdam massæ æquilibrium habeatur, oportet, ut si concipiatur planum quodcunque ductum per illud punctum, momenta omnia omnium materiæ particularum jacentium ex altera ejusdem plani parte æqualia sint momentis particularum jacentium ex parte opposita. Si enim ita illa massa collocetur, ut illud ipsum planum sit horizonti perpendiculare, nulla in eo recta linea habebitur, circa quam converti possit eadem massa, neutra ex binis partibus præponderante; quod secus contingeret, si aliquod planum ductum per illud punctum ea proprietate

non

non gauderet. In ejuſmodi enim collocatione illius ipſius plani haberetur præponderantia, & motus.

5. Hinc jam ad notionem quandam devenimus generalem centri gravitatis, quæ maſſæ cuilibet utcunque compoſitæ ex particulis materiæ vel inter ſe connexis, vel diſperſis æque applicari poteſt, ut ſit nimirum punctum illud, per quod ſi ducatur planum quodcunque, & a ſingulis æqualibus, & æque gravibus, adeoque æque ponderantibus materiæ particulis ducantur in ipſum illud planum rectæ perpendiculares, ſumma omnium ejuſmodi perpendicularium linearum jacentium ex parte altera æquetur ſummæ omnium jacentium ex oppoſita. Eo enim pacto & binæ momentorum ſummæ ſemper æquabuntur.

6. Cum vero etiam ex æquali gravium deſcenſu in ſpatio non reſiſtente colligamus in Mechanica, gravitatem æque diviſam eſſe per æquales materiæ particulas ita, ut alia corpora iccirco magis ponderent, quod denſiora ſint, & plus materiæ contineant; ut a denſitate etiam abſtrahamus animum, ac a mole ipſa particularum, quarum alia puncta ab eodem plano aliter diſtant; poterimus in eadem mole materiæ denſioris, & ponderantioris concipere puncta materiæ prorſus æque ponderantia plura in eadem illa ratione denſitatis majoris, & particularum diſtantiis perpendicularibus a quovis plano ſubſtituere diſtantias punctorum. Sic centri gravitatis ideam jam habebimus prorſus abſtractam, & geometricam, cujus conſideratio jam a gravitate non pendebit, patebitque multo latius, quod alio etiam ex capite commodum accidet. Gravitatem enim ſolum ad ſenſum conſtantem hìc eſſe apud nos, cæterum variata diſtantia a Tellure, variari, pluribus argumentis jam ſatis cônſtat petitis ab Aſtronomia potiſſimum: coaleſcere nimirum ex gravitate in ſingulas ejus particulas proportionali maſſæ ipſarum particularum directe, & quadrato diſtantiæ ab ipſis reciproce. In ea autem gravitatis theoria nequaquam conſtantis maſſa per centrum illud gravitatis ſuſpenſa non ſemper quieſceret, & aliud eſt in eadem æquilibrii centrum, aliud id, quod centrum diximus gravitatis.

7. Re-

7. Retento igitur tantummodo nomine centri gravitatis derivato ex illa consideratione æquilibrii nostrorum gravium, eam generaliorem ejus ideam ipsa definitione exprimemus geometricam tantummodo, ad quam devenimus; proprietates præcipuas deducemus; demonstrabimus in omni massa ejusmodi punctum haberi, quod fere omittitur, licet necessarium omnino sit: docebimus methodum id punctum generaliter inveniendi; tum usus præcipuos partim indicabimus, partim etiam exponemus. Præmittemus tamen nonnulla, quæ demonstrationibus ad centrum gravitatis pertinentibus viam sternant.

8. Lemma I, *Datis tribus planis se in eadem recta intersecantibus, inveniri poterunt tria plana iis parallela, se in alia eadem recta intersecantia, quæ jaceant omnia ultra omnem datam massam quancumque.*

F. 1 9. Secentur enim tria plana data plano perdendiculari communi illi intersectioni ducto per quodvis punctum C in ea assumptum, & sint eorum intersectiones cum hoc plano perpendiculari AB, DE, FG. Ducantur in eodem plano rectæ CH, CK, CI perpendiculares iis tribus intersectionibus terminatæ ad circulum descriptum radio, qui sit major, quam distantia puncti massæ remotissimi a puncto C. Jacebit necessario una ex iis in angulo contento ab aliis binis, ut CK in angulo ICH. Per extrema puncta I, H harum binarum ducantur rectæ OP, MN ipsis perpendiculares, quas patet fore parallelas ipsis FG, AB, & debere concurrere alicubi in L, cum debeant esse tangentes ejus circuli, & solæ tangentes per opposita ejusdem diametri puncta ductæ sint parallelæ. Ducatur per L recta QR parallela DE, ac per ipsas MN, QR, OP ducantur plana perpendicularia plano $ICHL$, & erit factum.

10. Nam in primis ea plana erunt parallela planis datis, cum ipsorum intersectiones MN, QR, OP cum plano $ICHL$ iis omnibus perpendiculari sint parallelæ illorum intersectionibus AB, DE, FG cum eodem.

11. Deinde mutua intersectio binorum quoruncunque

ex

ex iis erit perpendicularis plano *ICHL*, & transibit per punctum *L*. Adeoque erit communis omnium trium intersectio.

12. Demum si concipiatur sphæra radio *CI*, ea continebit omnem massam datam, plana autem ducta jacebunt omnia ultra eam sphæram. Nam plana quidem *OP*, *MN* eam contingent in punctis *I*, *H*, ut patet, planum autem *QR* jacebit ultra ipsam; ducta enim per *K* tangens circuli occurret reliquis binis tangentibus alicubi in *S*, & *T*, eritque parallela eidem *DE*, adeoque & *QR*: ac proinde jacebit *QR* ultra ipsam *ST*, adeoque extra sphæram, & cum planum per *ST* ductum sphæram contingat, planum ductum per *QR* jacebit ultra ipsam.

13. Lemma II. *Si in tres rectas per idem punctum transeuntes incidat recta quavis parallela recta data; segmentum binis quibusque interceptum ad segmentum interceptum aliis binis quibusque erit semper in ratione data.*

14. Sint ejusmodi rectæ *MN*, *QR*, *OP* transeuntes per *L*, & incidat in eas recta *KIH* paralella cuidam datæ rectæ. F. I
Ducta ubicumque recta parallela rectæ datæ, quæ non transeat per *L*, ac proinde occurrat iisdem alicubi in *T*, *S*, *X* extra *L*, similia erunt triangula *LTS*, *LKI*, & *LSX*, *LIH*, sive ipsæ *TX*, *KH* jaceant ex eadem parte puncti *L*, sive ex opposita. Erit igitur *TS* . *SL* : : *KI* . *IL*, & *LS* . *SX* : : *LI* . *IH*. Quare ex æqualitate ordinata *TS* . *SX* : : *KI* . *IH*. Et proinde etiam utralibet *TS*, vel *SX* ad totam *TX*, ut *KI*, vel *IH* ad totam *KH*.

15. Cor. *Si recta* LT, LS, LX *jaceant non in eodem plano, in quo jacent* LK, LI, LH, *sed in alio iis parallelo, & sint parallela iisdem; adhuc segmenta* KI, IH, KH *erunt inter se in constanti ratione* TS, SX, TX.

16. Erunt enim adhuc similia illa ipsa triangula.

17. Definitio. *Si sit quoddam planum ejusmodi, ut distantia omnes perpendiculares ab eo punctorum omnium data massa jacentium ex altera ipsius parte simul sumpta æquentur omnibus distantiis punctorum jacentium ex parte opposita pariter simul sumptis, id planum dicimus planum distantiarum æqualium ejusdem*

massæ,

massæ , & si plana omnia per quoddam punctum transeuntia ea proprietate gaudeant , id punctum dicimus centrum gravitatis massæ ipsius .

18. Cor. 1. *Si ex omnibus massæ punctis ducantur ad planum distantiarum æqualium rectæ secundum quancunque directionem datam , summa omnium ex altera parte jacentium æquabitur summæ jacentium ex parte opposita ; & si id contingat in una quacunque directione , illud planum erit planum distantiarum æqualium .*

F.3 19. Sint enim *V* , *u* puncta jacentia hinc inde a plano distantiarum æqualium *AB* , distantiæ perpendiculares *VG* , *ug*, distantiæ in alia directione *VE* , *ue*. Patet fore parallela plana , & similia triangula *GVE* , *gue* , adeoque omnes *VG* ad omnes *VE* erunt , ut omnes *ug* ad omnes *ue* . Ac proinde si summa omnium *VG* æquatur summæ omnium *ug* , etiam summa omnium *VE* æquabitur summæ omnium *ue* , & viceversa .

20. Cor. 2. *Si planum quoddam parallelum plano distantiarum æqualium jaceat ultra omnem massam , summa distantiarum omnium punctorum massæ ab hoc plano acceptarum in quavis data directione æquabitur distantiæ eorum planorum , seu distantiæ centri gravitatis ab eodem plano sumptæ secundum eandem directionem ductæ in numerum punctorum , & viceversa .*

21. Sit enim planum distantiarum æqualium *AB* , & ipsum centrum *C* , planum parallelum *MN* , unum e punctis jacentibus citra planum *AB* sit *V*, ultra *u* , & rectæ per ea ductæ in quavis directione iis planis occurrant in *E* , *F* , *e* . *f* , ac sit *CL* directionis ejusdem . Patet quamvis *EF* , vel *ef* fore æqualem *CL* : & quoniam omnes simul *VE* æquatur omnibus simul *ue* ; quod in omnibus simul *VF* redundat supra omnes *EF* , sive supra totidem *CL* , in omnibus *uf* deficiet ab omnibus *ef* , sive totidem *CL* . Quare summa omnium *VF* , *uf* æquabitur summæ totidem *CL* .

22. Viceversa si hæ summæ æquantur , oportet , omnes illas *VE* simul tantum addere , quantum detrahunt omnes *ue*; ac proinde si summa omnium *VF* , *uf* æquatur *CL* ductæ in numerum punctorum , erit *AB* planum distantiarum æqualium .

23. Cor. 2.

23. Cor. 3. *Dato numero, & positione punctorum massæ cujuscunque; facile inveniuntur plana distantiarum æqualium quotcunque parallela planis datis quibuscunque.*

24. Sumatur enim planum, ut *MN*, parallelum cuilibet plano dato jacens ultra totam massam. Ducantur ad ipsum a singulis datis punctis massæ datæ rectæ lineæ secundum quancunque directionem datam. Harum summa dividatur per datum punctorum numerum, & ducatur planum *AB* eidem plano *MN* parallelum, quod ab eo versus massam distet secundum eandem illam directionem per rectam *FE*, vel *LC* provenientem ex illa divisione, & erit factum.

25. Cor. 4. *Bina plana inter se parallela non possunt esse plana distantiarum æqualium ejusdem massæ.*

26. Nam distantia *FE*, quæ provenit ex illa divisione, est unica, adeoque unicum planum *AB* ita distans ab *MN*.

27. Cor. 5. *Si plurium massarum singulæ ducantur in suas distantias acceptas secundum quancunque directionem a plano quovis jacente ultra omnia earum puncta, summa productorum omnium æquabitur producto ex summa massarum in distantiam centri gravitatis communis.*

28. Nam singula illa producta æquantur singulis summis omnium distantiarum omnium punctorum singularum massarum ab eodem plano, ac proinde simul omnia simul omnibus distantiis; quæ cum æquentur totidem distantiis centri gravitatis communis, æquantur uni distantiæ ejusdem ductæ in summam punctorum omnium massarum, nimirum in summam ipsarum massarum.

29. Cor. 6. *Si per eandem rectam transeant tria plana, & bina ex iis sint plana distantiarum æqualium, erit pariter planum distantiarum æqualium etiam tertium.*

30. Secentur ejusmodi plana plano parallelo cuivis plano dato, ac transeunte per quodvis massæ punctum *V*, vel *u*, & sint intersectiones eorum cum hoc plano *AB*, *DE*, *FG*, quæ omnes transibunt per punctum quoddam communis intersectionis *C*, ac sint bina ex iis planis, ut *AB*, *FG* plana distantiarum æqualium: oportet ostendere, fore pariter & tertium *DE*. F.2

 31. In-

31\. Inveniantur per Lem. 1. tria plana iis parallela, se in alia eadem recta interſecantia, & jacentia ultra eandem maſſam datam, quarum interſectiones cum illo eodem plano priora ſecante ſint *MN*, *QR*, *OP*, quæ proinde ipſis *AB*, *DE*, *FG* parallelæ erunt, ductaque *CL*, ducatur per *V*, vel *u* recta ipſi parallela occurrens iiſdem *MN*, *QR*, *OP* in punctis *K*, *I*, *H*, vel *k*, *i*, *h*, ac puncta *V*, vel *u* jaceant hinc inde a recta *CL*. Utcumque mutato loco puncti *V*, vel *u*, & cum eo mutato ſitu plani plana data, & inventa ſecantis, recta *CL* eandem ſemper directionem habebit, & magnitudinem eandem, adeoque & *HK* ad *KI* eandem habebit ſemper rationem per Cor. Lem. 2.

32\. Quoniam autem *AB*, & *FG* ponuntur plana diſtantiarum æqualium; tam omnes *VK*, *uk*, quam omnes *VH*, *uh* ſimul ſumptæ æquabuntur *CL* ductæ in numerum punctorum per cor. 2. defin., ac proinde & inter ſe. Quare quod omnes *HK* addunt omnibus *VH*, debet adæquare id, quod omnes *kh* demunt omnibus *uh*; & proinde omnes *HK* æquales erunt omnibus *hk*. Cum igitur & omnes *KI* ad omnes *KH* eandem rationem habeant, quam omnes *ki* ad omnes *kh*, per Cor. Lem. 2; erunt etiam omnes *KI* æquales omnibus *ki* ſimul; ac proinde & omnes *VI*, *ui* ſimul ſumptæ æquabuntur omnibus *VK*, *uk* ſimul ſumptis, nimirum rectæ *CL* ductæ in numerum punctorum: adeoque & planum illud tranſiens per *DE* parallelum plano tranſeunti per *QR* erit planum diſtantiarum æqualium per Corol. 2. def.

33\. Cor. 7. *Si tria plana tranſeuntia per quoddam punctum ſint plana diſtantiarum æqualium; omnia alia plana per ipſum tranſeuntia erunt pariter plana diſtantiarum æqualium.*

F.4 34. Sint ejuſmodi plana *ACB*, *ACD*, *BCD*, exiſtente *CD* in ſublimi, & ſit quodvis aliud planum tranſiens per *C*, quod ſecet planum *ACB* in recta *CF*, & planum *ACD* in recta *CE*, exiſtente pariter in ſublimi. Oportet oſtendere, hoc etiam planum eſſe planum diſtantiarum æqualium.

35\. Concipiatur planum *FCD*: & jam e tribus planis *ACD*, *BCD*, *FCD*, tranſeuntibus per eandem rectam *CD* pri-

ma

ma duo erunt plana diſtantiarum æqualium ex hypotheſi. Erit igitur & tertium per Cor. 6. Jam vero e tribus planis *ACF* , *DCF* , *ECF* tranſeuntibus per eandem rectam *CF* primum erit planum diſtantiarum æqualium ex hypotheſi , ſecundum ex prima demonſtrationis parte ; ac proinde erit & tertium ex eodem Cor. 6.

36. Prop. I. *In quavis maſſa conſtante ex quotcumque corporibus utcunque a ſe invicem disjunctis habetur centrum gravitatis , quod eſt unicum , per quod tranſeunt omnia plana diſtantiarum æqualium , & quod dato numero , & poſitione punctorum ejuſdem maſſæ inveniri poteſt .*

37. Aſſumptis enim binis planis quibuſcunque ſe in quavis data recta interſecantibus , poterunt inveniri bina plana diſtantiarum æqualium iis parallela per Cor. 3. def., quæ ſe pariter in quadam recta interſecabunt . Tum aſſumpto quovis alio plano illam interſectionem ſecante , poterit pariter inveniri planum diſtantiarum æqualium eidem parallelum , quod pariter eandem hanc interſectionem ſecabit in puncto quodam , per quod jam tranſibunt tria plana diſtantiarum æqualium . Quare per Cor. 6. defin. omnia alia plana tranſeuntia per illud idem punctum erunt plana diſtantiarum æqualium . Cumque bina plana diſtantiarum æqualium ejuſdem maſſæ inter ſe parallela eſſe non poſſint per Cor. 4. def. ; nullum planum diſtantiarum æqualium poteſt non tranſire per illud idem punctum ; nam aliud ipſi parallelum & per idem punctum tranſiens adhuc eſſet planum diſtantiarum æqualium. Igitur in quavis maſſa habetur centrum gravitatis, & eſt unicum , ac tranſeunt per ipſum omnia plana diſtantiarum æqualium , & dato numero, ac poſitione punctorum ejuſdem maſſæ inveniri poteſt , *Q* , *E* , *D* .

28. Cor. I. *Centrum commune binorum corporum, vel binorum aggregatorum , quorum ſingula contineant corpora quotcunque , invenitur , ſi recta , quæ ſingulorum centra gravitatis conjungit , dividatur in ratione reciproca maſſarum eorundem corporum , vel aggregatorum .*

39. Sit enim *A* centrum gravitatis primi corporis , vel F.5

aggregati, *B* secundi, *C* commune utriusque, & producta *AB* occurrat in *D* plano cuidam jacenti ultra utranque massam. Erit per Cor. 2. defin. summa omnium distantiarum omnium punctorum massæ *B* ab eodem plano æqualis distantiæ *BD* ductæ in numerum punctorum ejusdem massæ *B*, summa omnium distantiarum massæ *A* æqualis distantiæ *AD* ductæ in numerum punctorum *A*, summa distantiarum utriusque æqualis distantiæ *CD* ductæ in numerum utriusque. Quare massa *B* ducta in *BD* cum massa *A* ducta in *AD* æquatur massæ utrique ductæ in *CD*: nimirum tria producta ex massa *B* in *BD*, massa *A* in *CD*, & massa *A* in *AC* æquabuntur tribus massæ *A* in *CD*, massæ *B* in *BD*, & massæ *B* in *BC*. Priora duo sunt utrobique eadem. Quare & tertium tertio æquale erit, nimirum productum ex massa *A* in *AC* producto ex massa *B* in *BC*; ac proinde massa *A* ad massam *B*, ut *BC* ad *AC*; ac demonstratio est eadem, sive *A*, & *B* sint centra gravitatis singulorum corporum, sive aggregatorum ex pluribus corporibus.

40. Cor. 2. *Si dentur centra gravitatis plurium corporum quotcunque, inveniri potest centrum commune gravitatis omnium, ducendo prius rectam, quæ conjungat duorum quorunvis centra, ac eam secando in ratione reciproca massarum ipsarum, tum jungendo hoc centrum illorum binorum cum centro cujusvis tertii, & eam rectam secando in ratione reciproca summæ priorum massarum ad massam tertii, & eodem pacto jungendo hoc novum centrum commune tribus cum quarto, & ita porro. Vel etiam binorum quorunvis, vel ternorum, vel quocunque numero in aggregata plura divisorum inveniendo centra gravitatis, tum bina conjungendo inter se, ac binorum commune conjungendo cum alio quovis, & semper in fine idem illud unicum centrum commune gravitatis omnium inveniri debet.*

41. Patet ex præcedentibus.

42. Cor. 3. *Si plurium massarum centra gravitatis jaceant in eodem plano, vel in eadem recta linea, centrum quoque commune jacebit in eodem illo plano, vel in eadem illa recta linea.*

43. Ubi enim bina conjunguntur, tum commune binorum

rum

rum centrum cum tertio ; in primo casu non evaditur extra id planum , in secundo extra eam rectam .

44. Cor. 4. *Si omnia massæ cujusdam puncta concipiantur in eodem plano , quæcunque dicta sunt de distantiis punctorum , & centri communis gravitatis a planis jacentibus ultra massas , vel transeuntibus per centrum gravitatis , locum habent in rectis jacentibus in illo eodem plano , sed hic binæ tantummodo rectæ centrum gravitatis determinabunt .*

45. Facile patet ex ipsis superioribus demonstrationibus , sed manifesto fluit ex Corol. superiore : Nam planum ipsum , in quo jacent ea puncta , erit unum e planis distantiarum æqualium , cum distantiæ ab eo utrinque sint nullæ ; ac per rectas in ipso ductas concipi possunt plana ipsum secantia , & distantiæ assumi secundum directiones in eodem plano jacentes , adeoque incidentes in illas ipsas rectas , sive in eorum planorum intersectiones cum plano continente puncta omnia .

46. *Scholium* 1. In hisce omnibus demonstrationibus adhibuimus plana posita ultra omnia massæ puncta , & in eam rem præmisimus Lemma 1. , quanquam adhiberi potuissent plana quævis etiam interjecta punctis massæ , si libuisset adhibere quantitates negativas , & eas negativo modo in unam summam colligere , nimirum subtrahendo easdem a positivis , vel plures casus distinguere , in quorum aliis nihil subtrahendum est , in aliis adhibenda subtractio . Demonstrari enim potest generaliter , distantiam centri gravitatis a quovis plano ductam in numerum punctorum massæ æquari excessui summæ distantiarum punctorum omnium jacentium ex una parte supra summam distantiarum jacentium ex parte opposita , vel si hæ posteriores habeantur pro negativis , illa distantia ducta in illum numerum generaliter æquatur summæ omnium simul distantiarum , omnium punctorum . Sed libuit subtractionem ejusmodi , & negativorum considerationem evitare , quod & infra præstabimus .

47. *Scholium* 2. Necessarium omnino est demonstrare , in quavis massa haberi centrum commune gravitatis , & esse unicum,

cum, ut constet methodos ad id inveniendum adhiberi solitas in errorem nos nequaquam inducere.

F. 6 48. Ut id exemplo illustremus. Quæratur centrum gravitatis trianguli *ABC*. In primis secto bifariam quovis latere ut *AC* in *D*, id centrum jacebit in recta *BD* ducta ab angulo opposito *B* ad ipsum punctum sectionis *D*. Si enim sint quævis binæ rectæ *EF*, *ef* parallelæ *AC*, ac parallelæ inter se, & infinitè proximæ, satis patet ab ipsa *BD* bifariam secari areolam iis interceptam, quæ si in particulas dividatur æquales, summa omnium distantiarum a recta *BD* ex una parte æquabitur summæ ex altera; ac proinde in ipsa erit centrum gravitatis ejusdem areolæ. Quare omnium ejusmodi areolarum centra gravitatis jacent in eadem recta *BD*, & proinde per Cor. 3. Propos. 1. centrum commune omnium jacebit in ipsa.

F. 7 49. Hinc jam centrum gravitatis trianguli sic facile invenitur. Sectis bifariam binis lateribus *AC*, *AB* in *D*, & *E*, ducantur ex angulis oppositis rectæ *BD*, *CE*, quarum concursus in *F* determinabit centrum quæsitum. Vel quoniam ducta *ED*, quæ, ob utranque *AC*, *AB* sectam bifariam in *D*, & *E*, erit parallela *CB*, similia erunt triangula *EFD*, *BFC*, ac proinde *BF* . *FD* : : *BC* . *ED* : : *BA* . *EA* : : 2 . 1, satis erit secto bifariam unico latere *AC*, ductaque unica *BD*, abscindere ex ea trientem *DF*, & habebitur centrum gravitatis *F*.

50. Hoc ita invento, jam innotescit, ducta per *F* quavis alia *HI*, dividi triangulum in binas partes hinc inde æquilibratas circa ipsam *HI*. Id tamen innotescit, quia aliunde jam constat centrum gravitatis esse aliquod, & esse unicum, per quod quævis recta ducta secans superficiem dividit ipsam in binas partes æquilibratas, quod cum debeat jacere in utraque e rectis *BD*, *CE*, debet omnino esse in earum intersectione in *F*.

51. At si quis simili pacto definiret centrum magnitudinis illud, per quod ducto quovis plano secetur solidum in binas partes æquales, vel ducta quavis recta, secetur planum pariter in binas partes æquales, tum eodem pacto inquireret in

in triangulo centrum magnitudinis, erraret ille sane plurimum. Quoniam eædem illæ rectæ *BD*, *CE* triangulum ipsum bifariam secant, deberet hujusmodi centrum esse pariter in *F*. Hinc deberent omnes rectæ per *F* ductæ secare pariter triangulum bifariam, quod secus contingit. Si enim per *F* ducatur *HI* parallela *AC*, erit *HBI* ad *ABC*, ut BH^2 ad BA^2, ut BF^2 ad BD^2, ut 4 ad 9. Quare *HBI* ad *AHIC*, ut 4 ad 5, quæ falso pro æqualibus haberentur.

52. Error proveniret ex eo, quod definito centro magnitudinis, supponeretur ipsum ubique dari; cum revera non ubique habeatur. Habetur quidem in circulo, & sphæra, in parallelogrammo, & parallelepipedo, in omnibus poligonis regularibus habentibus numerum laterum parem, ac in aliis figuris pluribus, in plurimis vero aliis, ut in omnibus poligonis regularibus habentibus numerum laterum imparem, non habetur, cum centrum gravitatis habeatur in omnibus. Sed id ipsum demonstrandum est haberi in omnibus, & esse unicum, quod satis accurate a nobis est præstitum.

53. Sic ex hac nostra generali demonstratione constat & illud, quod & hic in Corollario 2. deduximus, centrum gravitatis rite inveniri, ac deveniri semper ad idem punctum, ubi invenitur primum quidem centrum commune binorum corporum, tum trium, tum quatuor, a quibuscunque fiat exordium, & quocunque ordine progrediamur; & idem pariter inveniri, si ternorum, vel quaternorum, vel aggregatorum quorumlibet conjungantur centra; in quo quidem illud accidit, quod in plurium numerorum multiplicatione, ubi productum omnium simul est idem, a quibuscunque fiat exordium, & quocunque ordine progressus instituatur, vel singula pro novis multiplicationibus assumantur, vel binorum, ternorum, quotcunque simul producta. Idem semper punctum debere obvenire non ita facile ex sola illa constructione demonstratur, & generaliter ex illa id præstari vix potest, ut & in numeris, ac fortasse non potest, & inductio ipsa simpliciorum casuum admodum molesta est. At ubi semel demonstratum est, quod nos hic præstitimus, haberi semper cen-

centrum commune gravitatis, & esse unicum; satis jam constat, quocunque ordine investigetur, idem inveniri semper.

54. *Scholium* 3. Ex iis, quæ dicta sunt, pendent methodi generales inveniendi centra gravitatis in figuris quibuslibet materia homogenea constantibus, sive concipiantur ut lineæ, sive ut superficies, sive ut solida. Speciminis loco ea tantum, quæ ad lineas pertinent hic persequemur.

55. In medio cujusvis rectæ lineæ esse centrum gravitatis ipsius, manifestius patet, quam ut demonstrandum sit; pendet autem ab ipsa prima notione centri gravitatis, cum particulæ ejusdem æquales hinc inde æquali numero æque distent ab illo medio, & a quovis plano per id transeunte.

56. Curvæ cujusvis centrum gravitatis invenietur sequenti methodo concessis curvarum rectificationibus, & qua-
F.8 draturis. Sit curva quævis BC, & assumpta recta quavis AD jacente ad quamvis ejus plagam, ducatur per quodvis punctum E ejusdem curvæ recta GE perpendicularis ipsi AD, & EH normalis ad curvam occurrens ipsi AD in H; tum in recta GE producta sumatur GF æqualis ipsi EH, descriptaque per omnia puncta F curva OFK, quæ occurrat in OK rectis AB, DC normalibus ad AD, & transeuntibus per extrema puncta BC curvæ datæ, & si abscindatur a DC recta DL æqualis areæ $AOKD$ applicatæ ad curvam datam BEC, recta MN parallela AD ducta per L occurret centro gravitatis quæsito; ac proinde altera recta mn eodem modo determinata per alteram rectam pro axe AD assumptam, concursu suo cum MN in P determinabit ipsum centrum gravitatis.

57. Si enim sit altera gef infinite proxima priori, ducaturque eI perpendicularis ad GE, similia erunt triangula rectangula eIE, EGH cum ob angulos eEH, EGH rectos tam bini eEI, HEG, quam bini GHE, HEG simul æquales sint uni recto, adeoque eEI, GEH inter se æquales. Quare EH, sive GF ad GE, ut eE ad eI. Ac proinde rectangulum sub GF & eI, sive area $fgGF$, æquale rectangulo sub eE, & EG: nimirum, habita EG pro distantia omnium punctorum arcus eE a recta linea AD, areola $fgGF$ exprimet summam omnium

nium distantiarum punctorum eorundem ab eadem. Quare area tota $OADK$ exprimet summam distantiarum omnium dividendam per arcum BC, quo exprimitur numerus punctorum omnium in eo contentorum, ut habeatur distantia centri gravitatis a recta AD, quæ distantia proinde æquatur rectæ DL.

58. Si curva BRC habuerit axem quendam, ut RH, circa quem hinc inde ita æqualis sit, ut arcus RE, RQ abscissi per chordas EVQ parallelas BC sint semper æquales, centrum gravitatis jacebit in ipso axe. Distantiæ enim QV, EV omnium arcuum Qq, Ee hinc inde sibi respondentium æquales erunt. Quare satis erit unicam aliam rectam per idem centrum transeuntem definire. F.9

59. Ex natura autem curvarum particularium elegantiores solutiones proveniunt. Sic si arcus BRC sit arcus circuli, & AD transeat per centrum circuli H, & sit parallela chordæ BC, in primis omnes normales curvæ tendent ad centrum H, & erunt radii circuli. Quare semper GF æquabitur radio circuli, & proinde $AOKD$ erit rectangulum sub AD, vel chorda BC, & radio circuli. Eritque DL, sive HP æqualis rectangulo sub radio, & chorda BC applicato ad ipsum arcum; unde hujusmodi constructio provenit pro inveniendo centro gravitatis arcus circuli. Ducatur radius HR arcum BRC bifariam secans. Capiatur in eo HP quarta post arcum BRC, chordam, & ipsum radium, eritque P quæsitum centrum.

60. Sic etiam pro superficiebus, & solidis suæ habentur methodi generales, quæ pariter ex dictis eruuntur, in quibus hic persequendis fusius immorari non licet. Ex iis autem potissimum adhibito integrali calculo profluunt sæpe solutiones admodum elegantes.

61. Ex iisdem principiis sponte fluit etiam celeberrima Guldini nostri regula de centro gravitatis, cujus usus latissime patet potissimum in Geometria: ac Newtoni theorema pariter elegantissimum, & summæ tam in Astronomia, quam in Physica utilitatis, quæ duo sequentibus propositionibus demonstrabimus.

62. Prop. 2. *Si vel linea, vel superficies in plano posita moveatur circa datum axem, & generet illa superficiem, hæc solidum; figura genita semper æquabitur generanti ducta in viam centri gravitatis.*

F. 10 63. Sit axis datus *AB*, circa quem moveatur linea *DE*, vel superficies *ADEB*, cujus centrum gravitatis sit *C*. Dicimus, superficiem genitam ab illa linea, vel solidum genitum ab illa superficie fore æqualem ipsi lineæ, vel superficiei ductæ in viam centri gravitatis *C*.

64. Divisa enim in particulas infinitesimas æquales linea, vel superficie, quarum singulæ pro punctis habeantur; sit una e particulis lineæ *IH*, vel una e particulis superficiei *ILOH* definita per rectas *ILP*, *HON* perpendiculares axi *AB*; ac generet tempusculo infinitesimo illa superficiem *IHhi*, hæc solidum *IHOLhol*, ac eodem tempusculo via centri gravitatis sit *Cc*, & *CM* sit perpendicularis ipsi axi.

65. In primis ob angulos *CMc*, *HNh* æquales patet, fore *Hh* ad *HN* in constanti ratione *Cc* ad *CM*. Deinde habitis *IH*, *LO*, *Ii*, *Ll*, *Hh*, *Oo* pro rectis lineis, patet superficiem *HIib* fore æquipollenter rectangulum, ac solidum *Lh* fore æquipollenter parallelepipedum, quorum bases *IH*, vel *LH*, altitudo communis *Hh*. Quare illorum mensura erit particula *IH*, vel *LH* ducta in *Hh*, & proinde tota figura illo tempusculo genita æqualis producto ex una quavis e particulis æqualibus in summam omnium *Hh*. Summa vero omnium *Hh* æquatur totidem *Cc*, quot sunt particulæ. Nam summa omnium *Hh* ad summam omnium *HN* erit in illa eadem constanti ratione *Cc* ad *CM*, adeoque ut totidem *Cc* ad totidem *CM*; ac proinde cum per Cor. 2. definitionis, & Cor. 4. Prop. 1. omnes *HN* æquentur totidem *CM*, etiam omnes *Hh* æquabuntur totidem *Cc*. Quare tota figura genita æquabitur producto ex una particula in totidem *Cc*, quot sunt particulæ, vel producto ex omnibus illis particulis in unicam *Cc*, nimirum producto ex tota figura generante in viam centri gravitatis. Cumque id singulis tempusculis contingat, continget etiam post quancunque tempusculorum summam, sive post quencunque finitum motum. *Q. E. D.*

66. Lem-

66. Lemma III. *Si punctum quodcunque feratur directione quacunque uniformiter in directum, & assumatur directio alia quæcunque data, accessus ejusdem ad planum quodcunque, vel recessus ab eodem secundum hanc datam directionem binis temporibus quibuscunque erunt in ratione eorundem temporum.*

67. Moveatur punctum *C* directione *CE*, quæ occurrat F.11
plano cuicunque *AB* in *E*, ac binis temporibus percurrat spatia *CF*, *FG*, ductisque *CD*, *FH*, *GI* parallelis datæ directioni cuicunque *MN* usque ad idem planum *AB*, quæ omnes jacebunt in eodem plano *DCE*: ducantur *FK*, *GL* parallelæ *ED*. Patet triangula *CFK*, *FGL* fore similia, ac *CK*, *FL* fore accessus ejus puncti ad planum *AB* secundum directionem *MN*, quæ rectæ cum sint, ut rectæ *CF*, *FG* motu uniformi descriptæ, erunt ut ipsa tempora.

68. Quod si punctum moveatur per *GFC*, idem locum habet in recessibus *LF*, *KC*.

69. Prop. 3. *Si quotcunque puncta cujuscunque massæ moveantur directionibus, & velocitatibus utcunque inter se diversis, ita tamen, ut singula moveantur motu uniformi in directum, centrum commune gravitatis vel quiescet, vel pariter movebitur uniformiter in directum.*

70. Nam in primis si ultra omnem massam assumatur planum quodcunque, & assumatur pariter directio quæcunque; puncta singula binis temporibus quibuscunque ita accedent ad planum illud secundum datam illam directionem, vel ab eo recedent, ut accessus, vel recessus binis temporibus quibuscunque respondentes sint in ratione ipsorum temporum per Lem. 3. Quare & summæ accessuum omnium, vel recessuum binis temporibus debitæ erunt in eadem ratione.

71. Cum vero summa omnium distantiarum semper æquetur distantiæ centri gravitatis ductæ in numerum punctorum; distantia ipsius erit, ut summa distantiarum illarum omnium; ac proinde accessus, vel recessus centri gravitatis, ut decrementum, vel incrementum illius summæ. Decrementum autem illius summæ coalescit ex summa omnium accessuum demptis omnibus recessibus; vel incrementum ex sum-

ma omnium recessuum demptis omnibus accessibus. Igitur & accessus, vel recessus centri gravitatis debiti binis illis temporibus erunt, ut ipsa tempora.

F. 12 72. Jam si fieri potest, moveatur centrum gravitatis ejus massæ motu non rectilineo ita, ut tria ejus loca *A*, *B*, *C* non jaceant in directum. In *AB* productam ducatur perpendiculum *CD*, tum recta *AG* eidem parallela, & concipiatur ultra omnem massam planum *EF* perpendiculare ipsi *AG* ad partes *C*. Ad id quidem planum nihil accessisset centrum gravitatis primo tempore, quo ex *A* abiisset in *B*: accessisset autem secundo tempore per *DC*. Accessus igitur non essent in ratione temporum, contra demonstrata. Quamobrem vel quiescit; vel loca omnia, per quæ movetur, jacent in directum.

73. Sint igitur tria ejusmodi puncta quævis *A*, *B*, *D*, & si concipiatur planum quodvis *HI* ultra omnem massam; occurrens *AD* in *K*, erunt ipsa spatia *AB*, *BD* decursa accessus ad ipsum planum secundum directionem *AD*, quæ iccirco erunt in ratione temporum, quibus percurruntur; ac proinde motus, si habetur ullus, non solum erit rectilineus, sed etiam uniformis. *Q. E. D.*

74. Cor. *Datis omnium punctorum motibus secundum suam directionem, dabitur etiam motus centri gravitatis.*

75. Si enim detur motus *CF* puncti cujusdam respondens dato tempori secundum suam directionem, dabitur etiam accessus ejus perpendicularis ad quodvis planum *AB*: nam ducto perpendiculo *CD* in ipsum planum, tum *FK* in *CD*, dabitur angulus *FCK*: adeoque dato motu *CF*, & angulo recto *K*, dabitur accessus *CK*; & idem de recessu. Quare poterit colligi summa omnium ejusmodi accessuum, & summa omnium recessuum: quarum quæ minor fuerit, si dematur a majori, & residuum dividatur per numerum punctorum, habebitur accessus, vel recessus perpendicularis centri gravitatis ab eodem plano.

F. 13 76. Capiantur jam binæ rectæ *AE*, *AC* sibi invicem perpendiculares egressæ e centro gravitatis *A*, tum *AI* perpendicularis plano *EAG*, & si concipiantur tria plana

iis

iis perpendicularia ultra omnem maſſam, habebuntur tres acceſſus AB, AD, AH, ad eadem plana debiti illi eidem tempori. Compleatur rectangulum $DABG$, tum $HAGK$, & motus centri gravitatis erit AK. Debebit enim in fine dati temporis eſſe in planis BGK, DGK; adeoque in recta GK, in qua cum a plano EAC debeat diſcedere per GK æqualem AH, debebit in fine ejuſdem temporis eſſe in K.

77. *Scholium*. Libuit propoſitionis demonſtrationem deducere ab abſurdum, quod eo pacto ſimplicior evadat. Directa tamen demonſtratio ſic poteſt inſtitui. Concipiantur receſſus binis temporibus quibuſcunque debiti ab eodem initio computati, qui ſint in prima directione AB, AC, in ſecunda AD, AE, in tertia AH, AI, & completis etiam rectangulis $ACFE$, $AFLI$, erunt ſimilia $ACFE$, $ABGD$ ob latera circa angulum communem A proportionalia iiſdem temporibus; adeoque & inter ſe. Quare diameter AF tranſibit per G, & erunt AG, AF in eadem ratione temporum. Cumque in eadem ſint etiam AH, AI, diameter quoque AL tranſibit per K, eritque AK ad AL in ratione eorundem temporum. Mutato igitur utcunque minore tempore, puncta omnia K jacebunt in directum, & ipſa AK, AL erunt ſpatia decurſa, quæ cum ſint in ratione temporum; motus, ſi habeatur ullus, erit rectilineus, & uniformis.

78. Lemma IV. *Si punctum quoddam initio cujuſdam tempuſculi urgeatur viribus quotcunque, cum directionibus quibuſcunque; in fine ejus tempuſculi erit in illo eodem loco, in quo eſſet in fine totidem tempuſculorum, quot ſunt vires, ſi ſingulis tempuſculis percurreret ſingulas rectas æquales, & parallelas iis, ad quas ſingulæ vires ipſum urgebant primo tempuſculo; & quarum ſingulas illo primo tempuſculo percurriſſet, ſi ſingulæ tantummodo in ipſum egiſſent.*

79. Eſt ipſa lex motus compoſiti. Exempli gratia, urgeatur punctum A quatuor viribus, quarum prima, ſi ſeorſum ageret, illud deferret per AB, ſecunda per AC, tertia per AD, quarta per AE. Completo primum parallelogram- F.14

mo

mo *CABF*, tum *DAFG*, ac demum *GAEH*, motu composito ex primis duobus esset in fine primi tempusculi in *F*, motu composito ex primis tribus in *G*, ex omnibus simul in *H*. Porro si primo tempusculo percurreret *AB*, secundo *BF* parallelam, & æqualem *AC*, tertio *FG* parallelam, & æqualem *AD*, quarto *GH* parallelam & æqualem *AE*, in fine quarti tempusculi esset in eodem illo puncto *H*.

80. Prop. 4. *Si puncta quotcunque cujusdam massæ composita ex corporibus quotcunque utcunque a se invicem disjunctis vi inertiæ præditis, agant in se mutuo actionibus, quæ inter bina quæcunque puncta sint æquales, & contrariæ; status centri communis gravitatis quiescendi, vel movendi uniformiter in directum nihil turbatur, & manet prorsus idem, qui esset, si in se mutuo illa puncta nihil prorsus agerent.*

81. Concipiantur enim bini casus: primus, qui revera existit, quo nimirum unico tempusculo singula puncta moventur motu composito ex omnibus motibus, quos requirunt vires omnes mutuæ, & vis inertiæ retinens præcedentis tempusculi motum: secundus, in quo habeantur totidem tempuscula, quot sunt punctorum binaria, & præterea unum. Ac primo quidem tempusculo in hoc secundo casu puncta omnia moveantur iis motibus, quos requirit vis inertiæ; secundo quiescant omnia præter duo tantum unius binarii, quæ percurrant spatiola, ad quæ a sua mutua vi determinantur, vel iis æqualia, & parallela: & sic singulis sequentibus tempusculis puncta solum singulorum binariorum habeant motus, ad quos a sua mutua vi determinabantur initio primi tempusculi; vel si jam loco cesserunt præcedentibus tempusculis, percurrant lineolas illis motibus parallelas, & æquales. In hoc secundo casu in fine omnium tempusculorum omnia hujusmodi puncta erunt in illis iisdem locis, in quibus ex conjunctione omnium virium debent revera esse in fine primi tempusculi in primo casu. Quare & centrum commune gravitatis erit in hoc secundo casu in fine omnium tempusculorum in eodem illo puncto, in quo debet esse in primo casu in fine primi tempusculi.

82. Por-

82. Porro in fine omnium tempuſculorum in hoc ſecundo caſu erit in illo eodem loco, in quo in eodem caſu erit in fine primi tempuſculi; nimirum in quo eſſet, ſi ſola vi inertiæ moverentur illa puncta, & nulla vis mutua egiſſet in ea. Sumatur enim quodcunque e ſequentibus tempuſculis. Eo tempuſculo tantum bina puncta movebuntur motibus æqualibus, parallelis, & contrariis juxta hypotheſim actionum contrariarum æqualium; ac proinde quantum unum ex iis accedet ad planum quodcunque jacens ultra totam maſſam ſecundum directionem motus ſui, tantundem alterum recedet; adeoque ſumma diſtantiarum eorundem punctorum ab eodem plano manebit eadem in fine ejus tempuſculi, quæ erat initio, & iccirco ſumma quoque diſtantiarum ſecundum quancunque aliam directionem. Cumque eodem tempuſculo reliqua omnia puncta quieſcant; ſumma omnium diſtantiarum omnium punctorum a quovis plano ſecundum quancunque directionem illo tempuſculo non mutabitur; ac proinde nec diſtantia centri gravitatis: quod iccirco ad nullum planum accedet intra illud tempuſculum; adeoque nullo motu movebitur: nam ad plana omnia poſita ex ea regione, verſus quam moveretur, accederet; quod cum omnibus illis ſequentibus tempuſculis contingat, vires illæ mutuæ ejus ſtatum nihil turbabunt.

83. Erit igitur centrum gravitatis etiam in primo caſu in fine primi illius tempuſculi in illo eodem loco, in quo eſſet, ſi nullæ illæ mutuæ vires egiſſent. Jam initio frequentis tempuſculi æqualis puncta illa ad nova loca delata, novis itidem viribus urgebuntur; ſed in fine ſequentis ipſius tempuſculi centrum gravitatis erit ibi, ubi eſſet, ſi nec ulla nova vis initio ipſius ſequentis tempuſculi ageret, nec ulla egiſſet initio primi tempuſculi, ſed ſola vi inertiæ puncta omnia continuarent motum, quem debuerant habere ſola vi inertiæ initio præcedentis tempuſculi; nihil pariter turbantibus ſtatum ejus motibus tum oriundis ab actionibus novis ſecundi tempuſculi, tum ab actionibus primi tempuſculi, quarum effectus durat. Quare per Propoſ. 3. motus centri gravitatis ſequenti

quenti hoc tempuſculo jacebit in directum cum motu primi tempuſculi, & erit ipſi æqualis; quod cum ſequentibus omnibus tempuſculis contingat, patet, motum centri communis gravitatis vel fore nullum, vel ſemper rectilineum, & uniformem, nihil nimirum perturbatum a viribus illis mutuis contrariis, & æqualibus. *Q. E. D.*

84. Corol. *Si bina maſſæ in ſe mutuo agant, motus binorum centrorum gravitatis ab hac actione oriundi erunt contrarii, & ipſis maſſis reciproce proportionales.*

85. Nam centrum quidem gravitatis commune utriuſque maſſæ ex hac actione non movebitur per hanc propoſitionem: centra autem gravitatis binarum maſſarum jacebunt in directum cum hoc centro communi per Cor. 1. Prop. 1., & eorum diſtantia ſecabitur a centro ipſo communi in ratione reciproca maſſarum tam in initio, quam in fine temporis, quo durat motus ab actione mutua productus. Quare ſingulorum centrorum diſtantiæ a centro illo communi tam in initio, quam in fine temporis, erunt in eadem ratione reciproca maſſarum; adeoque & diſtantiarum differentia, nimirum centrorum illorum motus in eadem ratione erunt.

86. *Scholium*. Hujus elegantiſſimi theorematis a Newtono expoſiti Principi l. 1. Cor. 4. poſt leges motuum, ſed non ſatis, vel ſaltem obſurius demonſtrati, demonſtrationem hanc ipſam hic expoſitam Prop. 2., ac 3. tribus ab hinc annis hoc ipſo in loco indicavimus in Diſſertatione de lumine. Eandem hic paulo fuſius exponere libuit, cum ex eodem theoremate fructus & in Aſtronomia, & in Phyſica profluant ſane uberrimi, quorum quidem aliquos exponemus inferius; ſed interea, & ſuperiorum theorematum libet indicare uſum multiplicem in Geometria, & Mechanica, tum ad poſtremi hujus præſtantiſſimos uſus in Aſtronomia, & Phyſica delabemur.

87. Et quidem in Geometria Guldini regula præclaros ſæpe uſus habet tum in cognoſcendis menſuris ſuperficierum, vel ſolidorum, quæ generantur a lineis, vel ſuperficiebus converſis circa axes datos, ubi horum centra gravitatis innoteſcunt,

tescunt, tum viceversa in cognoscendo situ centri gravitatis figurarum, quæ convertuntur, ubi innotescit mensura earum, quæ ejusmodi conversionibus generantur. Utriusque generis exempla exercitationis gratia proferemus.

88. Arcus circuli *AE* gyrando circa radium *EC* generet F.15 segmentum superficiei sphæricæ *AEB*, & quæratur ejus mensura. Secto bifariam arcu *AE* in *D*, ductaque *CD*, & capta *CF* quarta proportionali post arcum *ADE*, chordam *AE*, & radium *CD*, erit in *F* centrum gravitatis ejusdem arcus per Schol. 3. post Prop. sub finem. Ducta igitur *FG* perpendiculari ad *EC*, ducatur arcus *AE* in peripheriam circuli radio *GF* descripti, & habebitur mensura quæsita.

89. Cum vero radius *CD* ita secet bifariam chordam *AE* in *I*, ut angulus pariter *CIE* sit rectus: erit *EI* ad *FG*, ut *EC* ad *FC*; nimirum per constructionem ut arcus *ADE* ad chordam *AE*: adeoque etiam peripheria circuli radio *EI*, sive dimidia peripheria radio *EA* ad peripheriam radio *FG* erit, ut arcus *ADE* ad chordam *AE*. Quare productum ex arcu *ADE* in peripheriam radio *FG* æquatur producto ex chorda *EA* in dimidiam peripheriam radio ipsius *EA*, quæ est mensura areæ circuli eodem radio *EA* descripti. Superficies igitur segmenti sphærici æquatur superficiei circuli habentis pro radio chordam arcus generantis, & tota sphæræ superficies æquatur areæ circuli habentis pro radio diametrum ipsius sphæræ; adeoque quadrupla est circuli sphæræ maximi, qui nimirum habet pro radio semidiametrum ipsius sphæræ, quæ quidem sunt notissima theoremata ab Archimede demonstrata.

90. Eodem artificio facile computatur superficies *AMNB* F.16 ejus formæ, quam solent habere tholi, qui plerunque generantur ex conversione arcus proxime circularis *AM*, descripti centro quodam *C*, & revoluti circa axem *EH* transeuntem inter arcum ipsum & centrum. Invento nimirum actuali dimensione centro illo *C*, & ejus ope centro gravitatis *F* arcus ipsius, ductoque perpendiculo *FG* in axem *EH*, & inventa ejus mensura, ac ope ipsius mensura peripheriæ circuli habentis ipsum *FG* pro radio, ducatur eadem peri-

 pheria

pheria in arcum *AM*, & habebitur mensura superficiei quæsitæ.

F.17 91. Contra vero invenietur centrum gravitatis sectoris circularis *ACE* ex data mensura sectoris sphærici *ACB* ab eo geniti. Hunc sectorem æquari cono, cujus basis æquetur superficiei sphæricæ *AEB*, sive areæ circuli habentis pro radio chordam *EA*, & cujus altitudo æquetur radio *CE*, satis constat. Quare æquabitur trienti producti ex ea area in radium ipsum. Dividatur hoc productum per aream sectoris *ACE*, sive per dimidium productum ex arcu *AE*, & ipso radio, & relinquetur via centri gravitatis æqualis binis trientibus areæ illius circuli divisæ per arcum *AE*. Si concipiatur, id centrum esse in *F*; erit ejusmodi via peripheria circuli descripti radio *FG*, quæ proinde ducta in arcum *AE* æqualis erit binis trientibus areæ circuli, cujus radius chorda *AE*, sive producti ex *EI* dimidia chorda in totam peripheriam habentem pro radio chordam *AE*. Erit igitur arcus *AE* ad $\frac{2}{3}$ *EI*, ut peripheria habens pro radio chordam *EA* ad peripheriam habentem pro radio *FG*, sive ut chorda *EA* ad *FG*; & alternando arcus *AE* ad suam chordam ut $\frac{2}{3}$ *EI* ad *FG*, nimirum ob similia triangula *CGF*, *CIE* habentia angulum communem in *C*, ut $\frac{2}{3}$ *CE* ad *CF*. Quare si arcus sectioris secetur bifariam, assumaturque in recta bissecante a centro versus circumferentiam segmentum radii quartum proportionale post arcum, chordam, & binos trientes ipsius radii; habebitur centrum gravitatis sectoris circularis, & proinde centrum gravitatis areæ semicirculi distabit a centro circuli per trientem tertiæ continue proportionalis post dimidiam peripheriam, ac diametrum circuli.

92. Hæc de Guldinianæ regulæ applicatione ad Geometriam. Jam vero quanti usus in Statica sit præcipua centri gravitatis proprietas, notissimum semper fuit, & Ageometræ ipsi plerumque norunt. Nimirum si corpus quodcunque suspendatur, ita se disponet, ut recta ducta per punctum suspensionis horizonti perpendicularis transeat per gravitatis centrum. In eo enim statu nec centrum ipsum jam descendere poterit, nec

circa

circa ullum axem converti massa. Ducto enim per verticalem illam quovis plano, summæ momentorum omnium hinc inde ab ipso æquales erunt, & contrariæ, ut ex ipsa prima definitione constat. Atque hinc oritur mechanica regula inveniendi in quavis figura seu plana, seu solida centrum gravitatis per observationem. Suspendatur corpus data figura plana terminatum ex materia homogenea, & ubique æque crassum, per punctum aliquod in margine assumptum in media crassitudine: tum e regione ipsius filum penduli libere pendentis, & radentis superficiem ipsam ostendat lineam verticalem per ipsum punctum suspensionis ductam, cujus lineæ verticalis positio notetur in ipsa superficie. Suspendatur idem corpus per aliud punctum marginis situm extra priorem rectam, & nova verticali pariter notata, in ipsa intersectione erit gravitatis centrum, ut patet; cum nimirum utraque ex illis rectis per ipsum transeat gravitatis centrum. Solidi autem centrum gravitatis determinabitur, si suspendatur per quodvis punctum, & ope penduli libere pendentis notentur in binis superficiebus binæ lineæ non in eodem plano positæ, quarum plana se debent secare in recta per centrum gravitatis transeunte. Quod si jam nova suspensio fiat per punctum extra eam lineam positum, & planum verticale per ipsum transiens similiter ope penduli determinetur, hujus intersectio cum illa ipsa recta linea exhibebit gravitatis centrum,

93. Pariter & illud contra est notissimum, si corpus plano horizontali insistat ita, ut recta, quæ ex ejus gravitatis centro ducitur perpendicularis ad horizontem, transeat per basim, qua corpus ipsum ei plano horizontali insistit, id corpus stabit, secus cadet; quia in primo casu ducto plano verticali per quodvis extremum basis ipsius, pars, quæ jacet ad partes basi oppositas, non exercet majus momentum, quam quæ jacet ex parte basis ipsius, secus in secundo casu. Quamobrem in primo casu non potest converti, & cadere in secundo debet. Basis autem nomine intelligitur vel planum illud, quo cum plano horizontali congruit, si forte planæ fronti insistat, vel figura, quæcunque illa est, quæ intercipitur

 inter

inter rectas conjungentes ita puncta omnia, quæ horizontali plano innituntur, ut nullum ex iis extra cadat; nimirum si punctis quibusdam insistit, area, quæ intercipitur inter rectas, quæ a punctis ad puncta extima ducuntur; si insistit punctis, rectis lineis, ac curvis, area, quæ intercipitur inter rectas illas, inter rectas, quæ a punctis ad puncta extima ducuntur, inter tangentes illarum curvarum, & curvas ipsas.

94. Inde autem patet, ut pariter notissimum est, cur pedibus recti insistimus, cur, si nimium versus plagam aliquam inclinemur, casum cohibere non possumus, cohibemus autem aliquando protenso altero pede, vel brachiis, vel alia corporis parte in plagam oppositam, quo motu gravitatis centrum intra basim retrahimus. Pariter innotescit, quî F.18 fieri possit, ut turris quædam *ABCD*, vel murus non cadat, licet maxime inclinentur, cum nimirum adhuc verticalis *EF* ducta e centro gravitatis *E* in basim *AD* cadit. Quin immo licet magis adhuc inclinetur, ut omnino casura videatur, stabit F.19 turris *HIDG*, si fundamentum *IABCD* ita constructum sit, ut recta verticalis *EF* ducta per totius molis centrum commune *E* non cadat extra basim *AB*, & cementum in *ID* sit adeo firmum, ut resistat ei vi, qua turris ipsa *IHGD* conatur converti circa *ID*, & cadere ob suum gravitatis centrum adeo elevatum, ut recta verticalis per ipsum ducta basim *ID* effugiat.

95. Hæc quidem, ut & alia ejusmodi quamplurima Veteribus ipsis fuerunt sane notissima. Newtoniani vero tertii, & quarti theorematis usus in Astronomia mechanica, ac in Physica multo præstantior, & minus vulgo notus.

96. Quod ad Astronomiam pertinet, inde petitur summum discrimen Astronomiæ mechanicæ Newtonianæ, a Copernicana, & vero etiam Kepleriana Astronomia. Illi quidem circa Solem immotum Planetas circumduxerunt, ac Terram quidem Saturnum, & Jovem, ut & cœteros Primarios in regulari quadam orbita circa Solem; Lunam vero circa Terram ipsam. At ex mutuæ gravitatis principio in Newtoniana Astronomia

ſtronomia immotum manet tantummodo punctum quoddam imaginarium, quod eſt commune gravitatis centrum Planetarum omnium, & Cometarum, circa quod, ut reliqui Planetæ omnes, ita Sol ipſe convertitur. Cum enim Fixarum a nobis diſtantia tam immanis eſſe debeat, ut nullum, qui quidem longiſſimo etiam ſæculorum curſu percipi poſſit, vi gravitatis effectum edat, ſi quæ ſit Planetarum ipſorum gravitas in eas ipſas, ac oppoſitarum Fixarum actiones præterea ſaltem magna ex parte ſe mutuo deſtruant; Planetæ ipſi, & Cometæ non aliis agitantur viribus, quam ſua mutua gravitate, quæ ſingulorum motus a vi inertiæ determinatos deflectit ad curvas lineas, ac centrum commune gravitatis non turbat, quod proinde vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in directum. Porro ſi uniformiter in directum progrederetur, totum ſyſtema planetarium, perpetuo ad certam Cœli plagam accederet; adeoque mutua Fixarum poſitio certa lege mutaretur, & apparens omnium magnitudo ac diſtantia ex altera parte augeretur, ex altera vero decreſceret; quorum cum nullum habeatur indicium, dicendum potius ipſum quieſcere. Sed ſive ipſum quieſcat, ſive moveatur; nullus ſive ex Planetis, ſive ex Cometis in ea theoria poteſt conſiſtere, ſed transfertur circa ipſum vel immotum, vel promotum cum velocitate conſtanti.

97. Sol quidem Planetarum omnium, & Cometarum longe maximus ab illo centro communi gravitatis minime omnium diſtat, nec omnino definire licet, quanta ſit ipſius ab illo centro diſtantia; quod quidem innoteſceret, ſi maſſas ſingulorum, & Cometarum, Planetarum noſceremus, ac ſingulorum pariter loca. Nam ſi per Corol. 5. definitionis, aſſumpto quovis plano jacente ultra ea omnia corpora, maſſas ſingulorum duceremus in diſtantias perpendiculares ab eodem plano, tum productorum ſummam divideremus per ſummam maſſarum, inveniremus diſtantiam centri illius communis ab eodem plano, & tres ejuſmodi diſtantiæ locum ipſum centri communis indicarent methodo Corollarii Propoſitionis tertiæ. Si enim ejuſmodi plana fuerint *EAI*, *CAI*, *EAC*, & diſtantiæ F.13

ſtantiæ *AB*, *AD*, *AH*, erit eodem argumento centrum gravitatis in *K*. Collocatis autem Planetis omnibus, atque Cometis ad eandem Solis partem in maximis a Sole diſtantiis, inveniretur maxima, quæ haberi poſſet Solis diſtantia ab eodem centro, adeoque maximus, qui in ea theoria haberi poſſet Solis motus.

98. Verum maſſas quidem Saturni, Jovis, Terræ reſpectu maſſæ Solis ſatis proxime colligimus in theoria ipſa gravitatis ex motu Planetarum primariorum circa Solem, ſecundariorum circa Saturnum, & Jovem, ac Lunæ circa Terram, ex quibus innoteſcit vis, qua in Solem gravitant Planetæ primarii, ac in eos primarios Platenas hi Platenæ ſecundarii; & ex ipſa vi, ac diſtantia, maſſa, in quam gravitant. Quanquam Terræ quidem maſſa paulo minus eſt certa ob minus certam rationem diſtantiæ Lunæ a Terra ad diſtantiam Terræ a Sole; Lunæ quoque maſſa utcunque colligitur ex phænomenis marini æſtus, & præceſſione æquinoctiorum, quæ in theoria gravitatis generalis pendent a gravitate partium Terræ in Lunam. At Martis, Veneris, Mercurii, Satellitum Jovis, & Saturni, Cometarum omnium maſſæ penitus incertæ ſunt.

99. Maſſa quidem Jovis eſt circiter milleſima pars maſſæ Solis, quamobrem ſi a ceteris omnibus Cometis, ac Planetis abſtrahamus mentem, ſolum millies magis a centro communi gravitatis diſtat Jupiter quam Sol. Cumque Jupiter a Sole diſtet pluſquam 100 millibus ſemidiametrorum terreſtrium; pluſquam centum ejuſmodi ſemidiametris diſtat ab eodem centro Sol ipſe, quod centrum icciſco extra Solis globum jacet Telluris globo centies circiter craſſiorem.

100. At ſi Cometa quipiam Jovi ſit par, & quoniam Cometæ omnes longiſſime abeunt in orbibus ita Ellipticis, ut fere in Parabolas deſinant, biſcenties magis in Aphelio removeatur quam Jupiter, cujuſmodi magnitudinem, ac diſtantiam an ullus Cometa habeat, profecto non conſtat, ſed nec oppoſitum innoteſcit; alii vero Cometæ omnes, ac Planetæ ſecludantur animo; biſcentuplo magis in eo caſu a centro communi gravitatis recedet Sol, nimirum eo ferme intervallo, quo Tellus a Sole diſtat. Quamobrem Sol orbem in eadem

dem theoria describeret æque circiter a Sole distantem, ac distat magnus Telluris orbis. Verum iccirco fortasse Cometæ, quos huc usque observavimus in omnes Cœli plagas liberrime alii alio abeunt, ut oppositis actionibus Solem, & totum Planetarium systema minus longe, lateque circa illud centrum immobile evagari permittant. Sed hæc, ut & inæqualitates, quæ inde oriuntur in Planetarum, ac Cometarum locis e Terra visis, sunt altioris indaginis, & huc non pertinent.

101. Eodem autem pacto in eadem generalis gravitatis theoria Terra & Luna circa commune gravitatis centrum convertuntur, dum interea utriusque systema circa Solem convertitur. Et habita ratione Lunaris massæ, id commune centrum extra Telluris superficiem est situm; unde consequitur, ut prout Luna in altera e quadraturis moratur, vel in opposita, Tellus quoque ad hanc, vel illam centri gravitatis partem jaceat, ex quo Solis locus fortasse etiam 15 minutis secundis jam promovetur, jam retrahitur, Mercurii Perigei magis, Veneris, quæ in Perigeo adhuc etiam propius ad Terram accedit, plusquam triplo magis. Sed ea pariter, ut & inæqualitates in Jove, ac Saturno a satellitibus ortæ altioris itidem sunt indaginis, & hìc eas innuisse sufficiat, ut hujus propositionis utilitas, & vero etiam necessitas in Mechanica Newtoni Astronomia innotescat.

102. Quid vero, quod ad Physicam pertinet? Quanti ex quarta propositione, & ejus corollario fructus consequuntur? Omittimus congressus corporum, qui per id corollarium accuratissime definiuntur, & ad Mechanicam Physicæ veluti administram potius pertinent, quam ad Physicam. Duos tantum seligemus usus, quorum alter immensam quandam luminis tenuitatem evincit, alter mutuas particularum materiæ vires, quæ in quibusdam circumstantiis nihil agunt, in aliis excitantur, & maximos motus edunt; quæ argumenta multo fusius pertractavimus in dissertatione, quam quatuor ab hinc annis Romano inseruimus Litteratorum Diario.

103. Plures Physici, vulgo etiam satis celebres, putant, igni, & radiis ipsis solaribus pondus inesse suum, quod per ex-

experimenta deprehendi possit; ac experimenta ipsa proferunt, in quibus massa reguli antimonii redacta in calcem ope speculi ustorii excrevit pondere, adjecta decima parte ponderis præcedentis, & quidem crassiore emisso fumo. Quamobrem, inquiunt, id pondus, quod adjectum est, immo & id, quod emissum reparavit fumum, radiorum est pondus, qui in ipsa massa restincti eandem auxerunt.

104. Si eorum sententiæ opponas immensam materiæ quantitatem, quæ quotidie è Sole efflueret, radiis massam tanto ponderi respondentem continentibus, qui nimirum radii ejusmodi speculo excipiuntur, quod respectu superficiei sphericæ, per quam circa Solem in hac tanta ab eo distantia lumen diffunditur, est usque adeo exiguum, reponunt, habere Solem, unde tanta detrimenta reparet, & quidem Newtonus Cometas ipsos Solis pabulo destinavit, quo jacturam lucis emissæ repararet.

105. At ex hac propositione evidentissime constat, illud ponderis incrementum massæ radiorum tribui nequaquam posse; ac simul manifesto evincitur, adeo immensam esse luminis tenuitatem, ut vix mente concipi possit. Quoniam enim ex actione illius substantiæ in radios, radii ipsi amiserunt omnem suum motum, quo progrediebantur recedentes a Sole; opus est, ut velocitas, quam ex eorum actione in ipsam massam acquirit centrum gravitatis massæ ipsius, ad velocitatem, quam ii radii amiserunt, sit, ut massa radiorum ad massam illam, in quam egerunt. Quare si radiorum massa erat decima pars massæ ipsius, in quam inciderunt, debuit hujus massæ centrum gravitatis acquirere decimam partem velocitatis amissæ a radiis; adeoque cum radius semiquadrante horæ devenerit a Sole ad Terram per plura, quam viginti millia semidiametrorum Terrestrium, debuit id centrum gravitatis acquirere ejusmodi velocitatem, qua semiquadrante horæ abiret per plura, quam duo milliariorum millia, longe ultra Lunam, quod tamen centrum nullum habuit sensibilem motum, nam massa in calcem redacta eodem perstitit loco, quo prius steterat. Igitur massa illa radiorum

ad

ad massam reguli antimonii in calcem redacti illam rationem adeo magnam non habuit, nec proinde illud pondus adjectum radiis ipsis tribui potest, quod hinc evidentissime jam demonstratur.

106. Quin immo eodem argumento demonstratur pariter immensa radiorum tenuitas. Cum enim sit massa illius substantiæ ad massam radiorum, ut velocitas a radiis amissa, quæ est adeo immanis, ad velocitatem acquisitam a centro gravitatis substantiæ ipsius, quæ est ad sensum nulla; patet, ita immensam esse debere tenuitatem radiorum luminis, ut respectu massæ illius ipsius substantiæ pro nihilo haberi possit. Ut autem & limes aliquis, quem luminis densitas omnino non prætergreditur, definiatur argumento hinc potissimum deducto, illud in memorata dissertatione calculo inito demonstratum est, ex eo, quod charta tenuissima intra machinam etiam Pneumaticam Soli exposita per horam integram non ita a radiis impellatur, ut ejus gravitatis centrum accipiat ejusmodi velocitatem, qua horæ intervallo possit percurrere vigesimam pedis partem (qua quidem multo minorem accipit, cum nullam accipiat, quæ sensu percipi possit) tantam luminis tenuitatem consequi, ut ejus densitas ad densitatem chartæ sit in minori ratione, quam sit unitas ad eum immanem numerum, qui exprimitur unitate cum 30 cyphris, qui quidem omnino excedit arenularum tenuissimarum numerum, quibus centies millies mille vicibus universa Terrestris superficies contegi possit. Argumento autem deducto a tenuitate materiæ Athmosferæ Solaris, ex qua Boreales auroras derivavit Mairanius, ac ex immobilitate particularum earundem a radiis luminis impulsarum ulterius progrediendo ejusmodi tenuitas inventa est, qua evincitur, densitatem luminis ad densitatem materiæ, ex qua Sol constat, fere quadruplo etiam minorem densitate media materiæ terrestris, esse in minori ratione, quam sit unitas ad unitatem cum cyphris 73, qui numerus est ita immanis, ut vix imaginando concipi possit; cum nimirum inde deducatur & illud, unum pollicem sphæricum materiæ Solaris plus materiæ continere, quam ra-

 dios

dios omnes, qui emitterentur a Sole ipso per plura millena sæculorum millia, quam sint minutissimæ arenulæ, quæ universam Telluris superficiem contegerent. Quæ quidem tam immanis tenuitas incredibilis omnino videri posset, nisi ex probatissimis observationibus per principia hic demonstrata omnino consequeretur; unde tamen aliud amovetur miraculum quoddam, nimirum liberrimus quaquaversus transitus luminis per substantias adeo compactas, ut sunt crystalli, & adamas, qui transitus in tanta tenuitate, ac velocitate materiæ admirationem excitare non debet.

107. At si tanta est luminis tenuitas, illud prima fronte videtur omnino explicari non posse, qui tantos effectus edat tam exiguus ipsorum radiorum numerus ustorio speculo collectus, ut post immanem particularum perturbationem, & motum, metalla dissolvat, ligna, in cineres, lapides in calcem redigat brevissimo tempore. Verum id quidem admodum facile explicatur, ut in eadem dissertatione est præstitum, ope virium, quas in se mutuo particulæ materiæ exercent in uno statu positæ, quæ in altero prorsus quiescant, quod multo etiam expeditius præstari potest in ea theoria virium a distantiis pendentium, & parum admodum immutata distantia minima, plurimum immutatis, quam in ea dissertatione de lumine tribus ab hinc annis hic proposuimus. Ab hac quarta propositione, & ipsius corollario manifesto deducitur, motum omnem particularum massæ, qui ejusmodi sit, ut centrum gravitatis versus certam plagam non promoveatur, provenire a mutuis particularum actionibus in se invicem, non ab externa actione corporis e certa quadam plaga delati, & impellentis particulas ipsas. Cum igitur immani illa agitatione gravitatis centra non promoueantur; agitatio ipsa tribui non potest impulsui particularum luminis, sed actionibus mutuis particularum in se invicem agentium, quæ cum prius non egerint, novam quandam dispositionem oportet adeptæ fuerint a tenuissimo quodam, ac prorsus insensibili motu, quem radiorum particulæ induxerint, in qua dispositione nova jam vires exerant, quas in priore non exerebant, & immanem

çieant

cieant motum ; quod quidem omnino accideret in ea, quam diximus, virium theoria ita pendentium a distantiis, ut, iis parum etiam mutatis, ipsæ vires maxime mutarentur. Sed hæc, ut & plura alia ejusmodi, ac ratio explicandi augmentum illud ponderis substantiæ in calcem redactæ, huc non pertinent, ubi ad ostendendam & utilitatem, & vero etiam necessitatem Geometriæ, ac Mechanicæ in Physica nunquam satis solis experimentorum congestionibus illustranda, illud nobis tantummodo proposuimus, ut ex nobilissima centri gravitatis proprietate accurate demonstrata tam luminis tenuitatem, quam vires particularum mutuas, mutata particularum dispositione, se exerentes deduceremus.

108. Exposita igitur centri gravitatis natura, demonstratis præcipuis ejusdem proprietatibus, indicata ratione, qua inveniri possit, demonstrato præclarissimo ejusdem usu in Geometria, in Statica, in Astronomia, in Physica, contrahemus jam vela, & dissertationi productiori aliquanto, quam par esset, finem aliquando imponemus.

DISQUISITIO IN CENTRUM MAGNITUDINIS.

CUM nuper in centrum gravitatis diligentius inquirerem, ac ejus naturam, & proprietates præcipuas contemplarer differtationem editurus de more exercitationis gratia publice propugnandam; ultro se mihi objecit magnitudinis centrum, quadam cum eo veluti affinitate conjunctum. Gravitatis centrum dicitur illud punctum, per quod si secetur plano quocunque massa animata gravitate constanti, & agente per lineas, parallelas semper dividitur in duas partes æquilibratas. Magnitudinis autem centrum dici potest punctum ejusmodi, per quod si secetur data massa plano quocunque, semper dividitur in duas partes æquales. Hoc quidem *massæ centrum* aptiori fortasse vocabulo appellari posset, sed quoniam ejusmodi nomine ipsum gravitatis centrum appellavit Bernoullius, *magnitudinis centrum* potius nominandum censui, vocabulo adhuc non inepto. Quod vero de planis secantibus massam solidam dicitur, idem in rectis plana secantibus locum habet, quæ nimirum si per centrum gravitatis transeant, ipsa secant in binas partes æquilibratas; si per magnitudinis centrum in binas partes æquales.

Jam vero statim primo intuitu patet, esse aliqua tam solida, quam plana, quæ si homogenea sint, & centrum gravitatis, & magnitudinis centrum habent, quorum alterum cum altero congruat. Nam si sphæra, vel circulus secentur per centrum, patet ejusmodi figuras secari semper in binas partes æquales, & ita æque hinc inde dispositas, ut pariter æquilibrium servare debeant; ac proinde patet, in sphæra, & circulo centrum ipsum tam gravitatis esse centrum, quam magnitudinis.

At id quidem non ubique contingere, nullo negotio deprehenditur. Satis enim constat centrum commune gravitatis binorum vel circulorum, vel globorum haberi, si in recta jungente ipsorum centra sumatur punctum, quod ipsam divi-

dat

dat in ratione reciproca globorum, vel circulorum eorundem, per quod punctum si ducatur planum, vel recta illi ipsi rectæ perpendicularis, & ipsi globi, vel circuli ita inæquales sint, ut centrum illud commune extra majorem cadat, dividetur ipsorum summa in partes inæquales, jacentibus nimirum ipsis vel globis, vel circulis inæqualibus hinc inde ab hujusmodi plano, vel recta secante; unde fit, ut centrum illud gravitatis commune non possit etiam simul esse magnitudinis centrum.

Hinc illud in mentem venit, ut investigarem, an, ut in quavis massa passim Mechanici affirmare solent, haberi semper aliquod gravitatis centrum, sic etiam aliquod semper magnitudinis centrum haberetur, quod aliquando cum ipso gravitatis centro congrueret, aliquando vero ab eodem distaret.

At in triangulo rem tentanti, facile patuit, nullum in eo haberi posse magnitudinis centrum, quod ea deprehendi, ac demonstravi methodo, quam in eadem de centro gravitatis dissertatione exposui in scholio 2. post Prop. 1., qua re perspecta, illud etiam inquirendum duxi, an ipsum gravitatis centrum in quacunque massa debeat ubique haberi aliquod. Nam in iis mechanices Elementis, quæ videram, nuspiam illud generaliter demonstrari compereram, certum in quavis massa haberi punctum, quod centrum gravitatis sit ita, ut ea utcunque recta per idem punctum dividatur in binas partes æquilibratas, nec uspiam alibi ejusmodi mihi demonstratio occurrerat.

Nam binæ methodi plerunque adhiberi solent ad centrum gravitatis investigandum, altera Geometrica, qua singulæ particulæ ducuntur in distantias a plano quodam ad arbitrium assumpto, si massa sit solida; vel a quodam axe, si massa sit plana; & summa hujusmodi productorum dividitur per massam ipsam, ut obtineatur distantia centri gravitatis ab illo plano assumpto, vel axe; adeoque habeatur planum, vel recta per ipsum centrum transiens: ac assumptis tribus hujusmodi planis, vel binis hujusmodi rectis se in quodam

puncto

puncto intersecantibus, illud punctum assumitur pro centro gravitatis: altera vero methodus est Mechanica, qua suspensa massa per punctum quodlibet, ope penduli libere pendentis determinatur planum, vel linea transiens per ipsum suspensionis punctum, ac eodem pacto per trium ejusmodi planorum, vel binarum linearum intersectiones centrum gravitatis definitur, quarum priore ego quidem sum usus in demonstratione Prop. primæ, posteriorem exhibui in scholiis post Prop. quartam.

Porro ut evidenter constare possit, iis methodis rite determinari punctum quoddam, per quod si utcunque dividatur massa, binæ partes æquilibrari debeant, sive, quod idem est, determinari ipsum gravitatis centrum; omnino necessarium est, ut vel demonstretur, quodcunque aliud planum, vel quancunque aliam rectam eadem illa methodo inventam, debere semper transire per idem illud punctum, vel aliunde demonstratum sit in quavis massa haberi ejusmodi punctum, & esse unicum. Si enim hoc aliunde demonstratum non sit, nec illud ibidem demonstretur, semper timeri poterit, ne novæ determinationes habitæ per nova plana, vel novas rectas, quæ eadem lege assumantur, nova puncta exhibeant; nullo proinde existente puncto determinato, cui generalis centri gravitatis idea conveniat, prorsus ut centro magnitudinis in triangulo accidit, in quo aliæ determinationes alia pro ejusmodi centro puncta definirent.

F. 1 Si enim triangulum *ABC* secetur bifariam primo quidem per rectas *BD*, *CE* ductas ex angulis *B*, *C* ad medias bases *AC*, *AB*, quæ centrum magnitudinis definirent in *F*; tum per rectam *MN* parallelam lateri *AC*: hæc recta per illud punctum *F* non transiret, sed transiens inter ipsum & latus idem, occurreret rectis *BD*, *CE* in binis aliis punctis *O*, *P*; quod quidem sponte fluit ex iis, quæ in dissertatione de centro gravitatis demonstravi num. 51. Ducta enim, per *F* recta *HI* parallela *AC*, area *HBI* est minor, quam *AHIC*, ut ibidem demonstravi, in ratione 4. ad 5. Quamobrem recta *MN* totam aream *ABC* bifariam secans, ac proinde relinquens

quens ad partes *AC* segmentum *AMNC* minus ipso *AHIC*, debet jacere inter ipsam *HI*, & *AC*. Quare magnitudinis centrum proveniret *F*, vel *O*, vel *P*, prout ad ejus determinationem adhiberentur rectæ *BD*, *CE*, vel *BD*, *MN*, vel *CE*, *MN*; licet omnes eæ rectæ aream trianguli bifariam secent.

Hinc ut id incommodum evitarem, diligentius excussis præcipuis ipsis centri gravitatis proprietatibus, earum ope accuratissime, &, ut mihi quidem videor, expeditissime demonstravi, esse in quavis massa punctum aliquod, atque id ipsum unicum, per quod ea utcunque secta, secetur semper in binas partes in hac hypothesi gravitatis æquilibratas, & punctum, quod in solido determinatur per tria plana, vel in plano per duas rectas, quarum singulis in binas partes æquilibratas secetur, ejusmodi esse, ut a quovis alio plano, vel recta per id punctum transeunte semper secetur ipsum solidum, vel planum in duas partes pariter æquilibratas.

Ut autem in circulo, & sphæra statim patuerat, centrum magnitudinis haberi, ac cum ipso circuli, vel sphæræ centro tam ipsum magnitudinis centrum, quam centrum gravitatis congruere; in triangulo autem demonstraveram magnitudinis centrum non solum in gravitatis centrum nequaquam incidere, sed nullum omnino esse, ita se mihi rem perpendenti multæ aliæ objecerunt figuræ in quarum aliis centrum magnitudinis haberetur, in aliis nuspiam esset, quorum aliquas expressi in eadem dissertatione num. 52., ubi de eo sic affirmavi. *Habetur quidem in circulo, & sphæra, in parallelogrammo, & parallelepipedo, in omnibus poligonis regularibus habentibus numerum laterum parem, ac in aliis figuris pluribus: in plurimis vero aliis, ut in omnibus poligonis regularibus habentibus numerum laterum imparem non habetur*. Quæ quoniam ibidem, ut ad ejus dissertationis argumentum minus pertinentia, sine ulla demonstratione proposui, erit operæ pretium, si demonstrem, ac nonnulla alia ad magnitudinis centrum pertinentia, mihi saltem nova proponam, quæ quidem longe aliis, & multo sane gravioribus distracto curis se fere sponte objecerunt.

In

In primis igitur, quod pertinet ad sphæram, & circulum, satis, ut monui, manifesto per se ipsum patet. In parallelogrammo autem haberi magnitudinis centrum admodum facile demonstratur. Si enim ductis binis diametris *BE*, *AD*
F. 2 parallelogrammi *ABDE*, quarum singulæ aream secabunt bifariam, & se invicem pariter bifariam secabunt alicubi in *C*, ducatur per ipsum punctum *C*, alia quævis recta, ea binis lateribus oppositis ut *BD*, *AE* necessario occurret alicubi in *F*, & *G*, eruntque in trianguli *FCD*, *GCA* anguli ad *F*, *D* angulis ad *G*, *A* alternis æquales ob parallelismum laterum *BD*, *AE*. Quare ob latera quoque *CD*, *CA* æqualia, etiam triangula *FCD*, *GCA* æqualia erunt, & adjecto, communi *GCDE*, erit area *GFDE* æqualis areæ *ADE*, nimirum dimidiæ areæ totius parallelogrammi. Igitur quævis recta per *C* ducta parallelogrammum ipsum bifariam secat, adeoque ipsum punctum *C* est magnitudinis centrum.

In parallelepipedo etiam centrum magnitudinis haberi facile demonstratur, sed ob solidi constructionem demonstratio ipsa imaginatione indiget, quod eam aliquanto complicatiorem reddit. Parallelepipedum habens pro basi parallelogrammum *HIKL*, & faciem basi oppositam *MPON* secetur plano *ABDE* parallelo faciebus *HMNL*, *POKI*, & secante bifariam latera *HI*, *MP*, *NO*, *LK*, ac sit centrum magnitudinis sectionis ipsius punctum *C*. Per ipsum punctum *C* transeat planum quodcunque, quod basim secet in recta
F. 3 *VT*, occurrente binis ejus lateribus ut *HI*, *IK* in *V*, *T*, & sectionem *ABDE* in recta *FG*. Patet ab ipso plano debere secari faciem *NMPO* in recta *QR* parallela *VT*, & facies *HMNL*, *IPOK* in rectis *QX*, *ST* parallelis *FG*, unde & *RS*, *XV* remanent determinatæ, & inter se parallelæ. Quoniam vero e superiore numero *FD*, *AG*, æquales sunt, facile patet, triangula *FDR*, *GAV* a parallelis rectis constituta, adeoque similia, æqualia fore; ac proinde *RD*, *AV* æquales, & adjectis *DN*, *AI* æqualbus, totas *RN*, *VI* æquales fore, & æqualia triangula similia *RNQ*, *TIV*, ac trapezia *QMPOR*, *TKLHV* & æqualia, & similia, ac pariter æqua-

lia

lia, & similia triangula *VHX, ROS*, ac *XMQ, SKT*. Quamobrem si figura jacens a plano *QRSTVX* versus angulos rectos *MOPI* collocetur supra figuram jacentem ab eodem versus angulos rectos *KHLN* ita, ut illi his congruant, totam toti debere congruere, ac proinde æqualem esse, quovis plano *QRSTVX* secante parallelepipedum in binas partes æquales; quæ demonstratio cum facile aptari possit plano cuilibet ducto per *C*, quod semper secabit bina opposita latera tam basis *HIKL*, quam sectionis *ABDE*, & ipsum parallelepidedum in binas partes oppositas tales, ut si super imponantur sibi invicem, debeant congruere; patet, ipsum punctum *C* fore totius parallelepipedi centrum magnitudinis.

Multo autem expeditius demonstratur illud, quod de poligonis regularibus affirmavi. Cuivis poligono regulari posse circulum circumscribi, patet ex elementis. Sit autem poligonum laterum numero parium *ABDEFG*; & si sumatur dimidius numerus laterum, ut *AB*, *BD*, *DE*, patet, arcum *ABDE* fore semper semicirculum, ac proinde ex quovis angulo *A* recta per centrum ducta incidet in angulum aliquem oppositum *E*, & bifariam secabit ipsam quoque poligoni aream. Secetur jam poligonum ejusmodi recta quavis transeunte per centrum, quæ cuidam lateri *AB* occurrat in *H*. Ductis ex *B*, & *A* per ipsum *C* diametris, quæ necessario terminabuntur ad binos angulos oppositos *E*, *F* intercipientes latus quoddam oppositum *FE*, illa eadem recta occurret huic lateri alicubi in *I*, & in triangulis *CBH*, *CFI* habentibus angulos hinc inde ad verticem *C* oppositos æquales, & angulos *CBH*, *CFI* insistentes æqualibus arcubus *AF*, *BE*, adeoque pariter æquales, cum etiam *CB*, *CF* æquales sint, erunt & areæ æquales. Quare & adjecta communi area poligoni intercepta angulo *BCI*, erit area *HBDEIH* æqualis dimidio poligono *BDEFB*, ac proinde quævis recta per *C* ducta ipsam aream poligoni bifariam secat, & est ejus centrum magnitudinis. F.4

At contra si numerus laterum sit impar, diameter circuli ducta per quemvis angulum *E* debebit secare bifariam ar- F.5

cum

cum aliquem ſubtenſum a latere oppoſito, ut *AB*. Quare ſecabit latus ipſum bifariam in *K*. Secabit autem ipſam poligoni aream pariter bifariam; ac proinde cum binæ ejuſmodi rectæ, ut *FK*, *AL*, tranſeuntes per centrum *C* bifariam ſecent ipſam poligoni aream; ſi habetur magnitudinis centrum, id debet eſſe in *C*; & quævis alia recta per *C* ducta debet ipſam poligoni aream ſecare bifariam. At ſi per *C* ducatur quævis alia recta, quæ in nullum angulum incurrat, ea neceſſario ſecabit in aliquo puncto *H* latus aliquod ut *AB* inter angulum aliquem *A*, & punctum *K* latus ipſum bifariam ſecans, ac ex parte oppoſita latus aliud *ED* in *I* inter angulum *E*, & punctum *L* ipſum bifariam ſecans, eritque tam *CH*, quam *CI* minor, quam *CA*, vel *CE*, & major, quam *CK*, vel *CL*. Quare cum in triangulis *HCK*, *ECI* ob angulos ad *C* æquales areæ ſint in ratione compoſita laterum *CH*, *CK* ad latera *CE*, *CI*, & illorum ſingula horum ſingulis minora ſint: erit & area *HCK* minor, quam *ECI*; ac proinde addito communi *KBDICK*, erit tota area *HBDIH* minor, quam *KBDEK*, nimirum minor, quam dimidia area poligoni, quæ proinde ab ea recta *HI* bifariam non ſecatur, adeoque ipſa area nullum habet magnitudinis centrum.

Et hæc quidem de iis, quæ propoſueram. Cæterum ſi conſideretur, quas conditiones habere debeat magnitudinis centrum, ſi quod ſit, facile invenientur plurimæ figuræ, quæ centrum magnitudinis habent, & aliæ multo plures, quæ ipſum habere non poſſunt; quin immo pro planarum figurarum areis potiſſimum regula quædam generalis eruetur, ex qua facile liceat diſpicere utrum habeatur in area datæ figuræ planæ magnitudinis centrum, nec ne.

F.6 In primis enim in quavis figura plana ſi ullum pro area ſit magnitudinis centrum, debet quævis recta per ipſum ducta ibidem bifariam dividi. Nam ſi fieri poteſt, pertineant lineæ *AB*, *DF* ad perimetrum figuræ, cujus *C* ſit centrum magnitudinis, & recta *KE* per ipſum ducta non dividatur ibidem bifariam, ſed altera pars ut *CE* ſit major, quam altera *CK*. Abſciſſa *CM* æquali *CK* ducatur per *M* recta parallela

AB,

AB, vel, si *AB* fuerit curva quævis, describatur curva ipsi prorsus similis, & æqualis, ea nimirum, cujus vestigium relinqueret ipsa *AKB*, si gyraret circa *C*, donec *K* abiret in *M*. Patet autem, ejus aliquam partem ut *MO* ex altera e binis plagis oppositis debere cadere inter perimetrum *DEF*, & punctum *C*. Ducta igitur ex ea parte per punctum *N* in ea assumptum, & per *C* recta *IH*, patet, fore aream *KCH* æqualem areæ *MCN*, adeoque minorem area *ECI*. Quare addita communi area inclusa angulo *KCI*, area tota jacens a recta *KE* ad partes *FB* erit major, quam area jacens ab *HI* ad eandem plagam; ac proinde altera ex iis rectis aream figuræ bifariam non dividit; unde consequitur ipsum *C* non posse esse magnitudinis centrum.

Contra vero si in aliqua figura plana sit aliquod punctum ejusmodi ut omnes rectæ per ipsum ductæ secentur in eodem bifariam, id punctum erit necessario centrum magnitudinis ejus figuræ. Si enim ejusmodi punctum sit *C*, una e rectis bifariam sectis *MK*, cum ducta quavis alia *HN*, sit semper *CN* æqualis *CH*, facta conversione figuræ ita ut *CK* abeat in locum *CM*, & *CM* in locum *CK*, abibit semper & angulus *KCH* in locum anguli *NCM*, & recta *CH* in locum rectæ *CN*, ac viceversa, cumque id contigat in rectis omnibus quancunque positionem habentibus ad rectam *KM*, patet, totam aream jacentem ex altera parte rectæ *KM* æquari areæ jacenti ex parte opposita; ac proinde recta *KM* aream figuræ bifariam dividit.

Ex hac demonstratione statim eruitur & illud, figuram quamvis planam, si pro area centrum magnitudinis habeat, debere esse ejusmodi, ut ducta per ipsum quavis recta, dividatur non solum in duas partes æquales, sed etiam prorsus similes, quæ nimirum superpositæ debeant sibi invicem congruere; unde & illud facile consequitur, rectam ipsam hinc inde terminari debere in ejus figuræ perimetro ad lineas prorsus similes, & æquales, subcontrario modo jacentes ita, ut si ex altera parte offendat rectam, ex opposita debeat offendere pariter rectam ipsi parallelam; ac si ex illa offendat curvam, debeat ex hac offendere pariter curvam, & tangentes ipsius curvæ ductæ per puncta opposita rectæ bifariam secantis parallelæ inter se esse debeant.

Nam ob *CK*, *CH* æquales semper *CM*, *CN*, & angulos ad *C* oppositos ad verticem æquales, semper æquales esse debent anguli *CKH*, *CMN*; ac proinde rectæ *KH*, *MN* parallelæ, quarum quidem directio, si perimeter figuræ utrinque rectilinea est, cum ipsa perimetro congruit; si curvilinea, abit demum in tangentium directionem, ubi puncta *H*, *N* punctis *K*, *M* congruunt.

Hinc autem manifesto consequitur & illud, si ea recta per centrum magnitudinis transiens terminetur ex altera parte ad angulum aliquem seu rectilineum, seu curvilineum, seu mixtilineum, debere etiam, ex opposita parte in angulum incurrere prorsus similem, & æqualem, quod ex illa superpositione manifesto deducitur.

Quamobrem jam statim patet, innumeras figuras sive rectilineas, sive mixtilineas, sive curvilineas carere centro magnitudinis. Sic omnia poligona cujuscumque generis, si numerum habeant laterum imparem, centro magnitudinis destituuntur, cum non possit semper cuicunque lateri jacenti ex altera parte rectæ transeuntis per quodvis punctum respondere latus suum æquale, in qua generali propositione continetur etiam quodvis poligonum laterum numero imparium, ac triangulum, de quibus idem supra demonstratum fuerat. Quin immo quotiescunque ex binis plagis oppositis non deprehenditur series linearum prorsus æqualium, & contrario modo positarum, centrum magnitudinis nullum erit.

F.7 E contrario infinita genera figurarum inveniri possunt, quæ centrum magnitudinis habeant, ob eam laterum positionem, quod in parallelogrammo, ac in poligonis omnibus regularibus laterum numero parium locum habet. Habet etiam in pluribus curvis, in ellipsi integra, in area clausa binis ejus arcubus *AB*, *ED*, & binis rectis *AE*, *BD* ordinatis ad alterum axem, & æque a centro *C* distantibus, in simili

mili area terminata binis arcubus binorum ramorum oppositorum Hyperbolæ, ac binis ordinatis ad axem conjugatum æque a centro distantibus. In omnibus enim hisce casibus, ac plurimis aliis ejusmodi quævis recta *MN* per centrum ducta bifariam dividitur. Immo generaliter data quavis figura *ABDE*, utcunque composita ex rectis, vel curvis, vel ex utrisque simul, & terminata ad rectam *AE*, si ea conversa circa punctum *C* bifariam secans ipsam *AE*, donec puncta *A*, *E* sibi mutuo succedant, designetur ejus vestigium ipsi æquale in *EFGA*, patet oriri ex utraque simul aream figuræ cujusdam *ABDE FG*, cujus centrum magnitudinis sit *C*. F.8 F.9

Huc usque accuratissime demonstravi ea omnia, quæ in memorata dissertatione proposueram, & generaliter etiam exhibui methodum detegendi, an planum aliquod centrum magnitudinis habeat, an ipsum omnino habere non possit. Quod autem de planis ostensum est, in quibus si recta quævis per quoddam punctum ducta, & ad perimetrum utrinque terminata dividitur in duas partes æquales, ut nimirum illud ipsum punctum sit centrum magnitudinis ipsorum, idem locum habet etiam in lineis, in superficiebus non in eodem plano positis, ac in solidis quibuscumque.

Et quidem quod ad lineas pertinet in plano positas, patet ex illa ipsa conversione, qua paulo ante usi sumus, debere non aream tantum, sed & perimetrum in ejusmodi figuris succedere in locum oppositæ; ac proinde ut area, ita & perimeter semper secatur bifariam per idem punctum.

Si figura non in eodem plano sit posita, superpositio locum non habebit. Si enim punctum *G* sit supra planum *ABE*, erit punctum *F* ipsi oppositum infra idem planum, adeoque abeunte plano *CAD* in *CBE*, recta *CF* non abibit in *CG*, sed jacebit ad partes oppositas. Adhuc tamen, & pro areis, & pro perimetris res facile demonstrabitur per gradus. Si enim primo figura ex altera parte rectæ *AB* constet segmentis linearum, quorum quodlibet in suo plano jaceat, debebit ex parte opposita constare pariter totidem lineis æqualibus, & similibus. Nam si sit una ex ejusmodi lineis *EG*, ducan- F.10

turque

turque *ECD*, *GCF*, tota figura *DCF* debet jacere in eodem plano *GCE*, in quo nimirum jacebunt omnes rectæ egressæ e punctis lineæ *GE*, ac ductæ per *C*; ac proinde ex demonstratis linea *DF* prorsus æqualis esse debet, ac similis lineæ *GE*, ut & area *DCF* areæ *GCE* æqualis & similis, quod cum in singulis laterum oppositorum binariis locum habeat, in totis etiam figuris locum habet. Deinde si inclinatione planorum & laterum numerus ita in infinitum augeatur, ut demum evadat superficiei flexus continuus, & curvarum, vel rectarum segmenta desinant in curvam continuam duplicis curvaturæ, adhuc illa eadem æqualitas oppositarum partium locum habebit; ac proinde adhuc constabit punctum *C* esse magnitudinis centrum.

Nec absimilis est solidorum ratio. Si enim primo quoddam solidum planas habebit facies, ut rectilineas, rectæ vero omnes per datum punctum transeuntes, & ad ejus perimetrum terminatæ in eodem puncto bifariam secentur, debebit ex parte opposita totidem habere facies prioribus prorsus æquales, & parallelas, ac pyramides iis insistentes & habentes verticem in illo eodem puncto æquales erunt. Nam si resolvatur in triangula ejusmodi facies, quorum unum sit *ABD*, debebunt ex parte opposita singulis rectis *AB*, *BD*,
F.11 *AD*, respondere singulæ rectæ *EF*, *FG*, *GE* iis parallelæ, & æquales: cuivis autem rectæ *BH* ductæ in priori triangulo debet respondere in opposita superficiei parte sua recta *FI* ipsi pariter parallela, & æqualis, quæ cum semper debeat jacere in plano anguli rectilinei *GFE*, segmentum superficiei *GFE* erit planum; & ob æqualitatem ac parallelismum laterum cum lateribus trianguli *ABD*, erit ipsi æquale, & parallelum: ac pyramides iis insistentes, & æqualem in *C* altitudinem habentes, erunt æquales. Quod cum in omnibus & faciebus, & pyramidibus locum habeat, patet, si plano quovis ejusmodi solidum secetur per *C*, debere & solidum ipsum, & superficiem secari in binas partes æquales, constantes nimirum eodem numero pyramidum, & facierum æqualium.

Quod

Quod ſi jam aucto facierum numero imminuta magnitudine in infinitum, ſuperficies in curvitatem perpetuam deſinat, adhuc idem theorema habebit locum; ac proinde jam generaliter in quovis ſpatiorum genere, linearum, ſuperficierum, ſolidorum, ſi per quoddam punctum rectæ omnes ductæ, & eo ſpatio terminatæ ſecentur bifariam, habebitur magnitudinis centrum, quod congruet cum ipſo illo puncto. Sub hoc canone generali & ſphæra continetur, & parallelepipedum, & ſolida omnia genita ex revolutione figuræ planæ cujuslibet *ABDE*, in qua rectæ omnes *KL* parallelæ axi revolutionis *AE*, a recta *CI* ipſi perpendiculari erecta ex quodam ejus puncto *C* bifariam ſecantur in *M*. Patet enim in ea figura fore ſemper *CL* æqualem *CK*, & angulum *LCM* æqualem angulo *LCK*. Quare producta *KC* tantundem in *P*, cum angulus *PCO* æquetur angulo *KCM*, adeoque *MCL*, ſi concipiatur figura *ABDE* converti circa *AE*, donec regrediatur ad idem planum, & abeat in *AGFE*, congruet recta *CL* cum *OP*; ac proinde quævis recta in ſolido ejuſmodi per centrum ducta ab eodem bifariam ſecabitur; & centrum magnitudinis ejus ſolidi erit punctum *C*. F.12

Hæc omnia unico theoremate comprehenduntur ſatis noto, & generaliori, quod nimirum ſi rectæ omnes ex quodam dato puncto digreſſæ, & ad binas figuras quaſcunque terminatæ, ſive ad eaſdem, ſive ad oppoſitas partes, eæ figuræ ſint ſemper prorſus ſimiles, & ſimiliter poſitæ circa illud punctum, & circa omnes rectas per ipſum ductas. Eo autem caſu, quo ejuſmodi rectarum ratio ſit æqualis, figuras præterea æquales etiam eſſe, neceſſe eſt. Sed id ipſum theorema non niſi per hoſce ipſos gradus accurate demonſtrari per geometriam finitam poteſt.

In omnibus autem hiſce caſibus, in quibus quævis recta per centrum magnitudinis ducta bifariam ſecatur in eodem centro, ſatis patet centrum illud magnitudinis cum centro gravitatis congruere. Semper enim habentur hinc inde a centro particulæ in eadem diſtantia prorſus æquales; ac proinde æque diſtantes etiam a quovis plano per illud centrum ducto;

unde

unde fit, ut ſumma omnium diſtantiarum ex una parte ſemper æquetur ſummæ ex parte oppoſita, quod ad centrum gravitatis habendum requiritur. Et quidem cum in planarum figurarum areis, etiam e converſo demonſtratum ſit, nunquam haberi magnitudinis centrum, niſi rectæ omnes per ipſum ductæ bifariam ſecentur ibidem; patet in iis nunquam haberi poſſe centrum magnitudinis, extra gravitatis centrum ita, ut ſi qua ejuſmodi figura centrum magnitudinis in ipſo centro gravitatis non habeat, nuſquam habere poſſit.

At in lineis, in curvis ſuperficiebus, in ſolidis id ea ſaltem methodo, qua in planis ſuperficiebus eſt demonſtratum, omnino demonſtrari non poteſt. Ex ipſa notione centri magnitudinis illud deducitur, ſegmenta binis ſectionibus per ipſum ductis intercepta debere æqualia eſſe inter ſe, ut areas
F.13 *ECI*, *HCK*, ſi agitur de areis, lineas *EI*, *HK*, ſi agitur de lineis; nam quantum prior ex iis demit alteri e partibus factis ſectione *EK*, tantundem poſterior addit, ut mutetur in partem factam ſectione *IH*, quarum partium cum utraque dimidiæ figuræ æqualis eſſe debeat; id quod detrahitur, & id, quod additur, inter ſe æqualia eſſe debent. In planis autem, ſi anguli ad *C* infiniteſimi ſint, areolæ circulorum ſectoribus æquipollent, a quibus infinite parum diſcrepant, ob infinite parvam differentiam rectarum *CH*, *CK*, & *GE*, *CI* infinite proximarum; ac proinde ſunt æquipollenter in duplicata ratione ipſarum *CK CE*, quæ ſi æquales non ſint, finita aliqua differentia a ſe invicem diſcrepabunt; ac proinde, & areæ ipſæ *KCH*, *ECI* finita differentia a ſe invicem diſcrepent neceſſe eſt, & *C* magnitudinis centrum eſſe non poſſit.

At ut lineolæ *KH*, *EI* æquales ſint; non eſt neceſſarium, ut æquentur etiam inter ſe rectæ *CK*, *CE*. Poteſt enim obliquitas lineolæ major minorem diſtantiam compenſare; & pariter in ſuperficiebus in plano eodem non exiſtentibus, idem poteſt contigere: immo in iis, ut & in ſolidis, cum ſecari debeant non rectis lineis, ſed planis per centrum illud

transſtranseuntibus, ac proinde totum segmen tum binis ejusmodi planis quibuscunque interceptum ex una parte debeat esse æquale segmento intercepto iisdem ex parte opposita, quorum segmentorum utrunque præter diversam a centro distantiam tam in longitudinem, quam in latitudinem patet, fieri potest ut longitudo latitudinem compenset.

Adhuc tamen sunt aliæ quædam conditiones, quæ in iis observari debent, ex quibus sæpe licebit deprehendere, eas magnitudinis centrum habere non posse. Hic alteram pro lineis in plano positis, alteram pro solidis exponam, ex quarum priore eruemus figuras, quarum perimeter magnitudinis centrum habeat, quod tamen cum gravitatis centro non congruat, e posteriore aliquod e solidis, quæ magnitudinis centrum habere non possunt.

Quod ad priorem attinet, illud generaliter deducitur, rectam quanvis *EK* per centrum magnitudinis *C* ductam in *K*, & *E* continere cum perimetro angulos, quorum sinus sint ut distantiæ *CK*, *CE*. Si enim centro *C*, intervallis *CI*, *CH* ducantur arcus circuli *HM*, *IN* infinite parvi occurrentes rectæ *EK* in *M*, *N*, erunt *HM*, *IN* sinus angulorum *HKM*, *IEN*, quos recta *EK* continet cum perimetro, ad radios *HK*, *EI*; qui cum debeant esse æquales, ut demonstratum est, erunt ii sinus ut ipsæ *HM*, *IN*, sive ut *CH*, *CI*, nimirum, coeuntibus rectis *IH*, *EK*, ut *CK*, *CE*.

Contra vero si semper ii sinus sint in ratione distantiarum *CK*, *CE*, erit *C* centrum magnitudinis: nam inde evincitur lineolam *HK* esse æqualem *EI*; ac proinde & quævis summæ ejusmodi lineolarum erunt æquales inter se, nimirum æqualia ea omnia, quæ jacent hinc inde a recta *EK*.

Porro ex prima parte haud difficulter deducitur, quotiescunque latera opposita sint rectilinea, debere esse & parallela, & æqualia, ac rectas omnes per centrum magnitudinis ductas, & ad ea terminatas debere in eo bifariam dividi. Si enim binæ rectæ *EK*, *HI* transeant per centrum magnitudinis *C*, erunt sinus in *K*, & *E*, ut *CK*, *CE*, ac sinus F 14
in *H*, & *I*, ut *CH*, *CI*. Est autem sinus in *K*, ad sinum in

E in ratione composita sinus in K ad sinum in H, sinus in H ad sinum in I, sinus in I ad sinum in E; & prima ratio est eadem, ac CH ad CK, secunda CH ad CI, tertia CE ad CI, erit igitur etiam CK ad CE in ratione composita ex hisce tribus; nimirum in ratione quadrati CH ducti in CE ad quadratum CI ductum in CK. Quare erit productum ex quadrato CH in quadratum CE, æquale producto ex quadrato CI in quadratum CK; unde eruitur, esse CH ad CK, ut CI ad CE; ac proinde similia esse triangula HCK, ECI, & rectas HK, EI parallelas; ac præterea angulum in K æquari angulo in E, adeoque & CK æquari CE, ac HK æquari EI.

Quamobrem in figuris rectilineis earum tantummodo perimetri habere possunt magnitudinis centrum, quarum areæ ipsum habent, & in eodem habebunt puncto cum centro gravitatis utriusque pariter congruens.

In curvilineis autem pluribus licebit ex eodem principio determinare, utrum habeant magnitudinis centrum. Sic
F.15 facile inde deducitur, arcum circuli semicirculo minorem centro magnitudinis carere. Sit enim is arcus ABD, quem chorda quædam EF parallela AD, secet bifariam, quam patet non posse transire per centrum circuli, cum debeat EBF esse minor semicirculo. Ea per centrum magnitudinis transibit, si id uspiam sit; & quoniam quævis circuli chorda cum peripheria angulos hinc inde æquales continet, erunt sinus angulorum E, F æquales, adeoque centrum ipsum C æque distare debet a punctis E, & F; nimirum debet esse EC æqualis CF. Ducta jam quavis alia chorda ICK, debent pariter sinus angulorum ad I, & K esse æquales inter se. Quare & IC, CK æquales esse deberent, adeoque binæ chordæ FE, IK in circulo non per centrum ductæ se mutuo bifariam secarent. Quod est absurdum. Igitur nullum habetur ibi magnitudinis centrum.

Contra vero si existente ex altera parte rectæ AE quavis
F.16 figura ABE, & ex quovis puncto H ducta HC, possit inveniri linea ejusmodi AFE, cui, ubi ipsa HC producta occurrat in G, sit sinus anguli in G ad sinum in H, ut CG ad CH, erit C centrum magnitudinis totius perimetri $ABEFA$. Id autem involuit

luit hoc problema : data quadam linea, & puncto invenire aliam lineam ejusmodi, ut quævis recta ducta per datum punctum, ubi iis occurrit, faciat cum iis angulos, quorum sinus sint proportionales distantiis. Et quidem problema ut generaliter solvatur profundiorem requirit infinitesimorum notionem. At simplicissimum casum sine iis admodum facile tractabilem, & ad rem præsentem utilissimum seligam, ex quo per circulares arcus tantummodo licebit invenire figuras plurimas, in quibus centrum magnitudinis habetur, & jacet extra gravitatis centrum.

Sit nimirum circulus *ABE*, cujus centrum *C*, & bini alii circuli habentes pro diametris radios *AC*, *CE* jacentes in di- F.17
rectum. Ducta per *C* quavis recta, quæ circulo majori occurrat in *H*, minori in *G*, patet angulum, quem chorda *CG* continet cum peripheria, nimirum quem contineret cum tangente, æquari ei, qui arcui *CG* insistit in alterno segmento, nimirum angulo *CEG*; radium autem *CH* continere angulum rectum. Cum igitur ob angulum *CGE* rectum sit *CE*, seu *CH* ad *CG*, ut radius, sive sinus anguli recti, ad sinum anguli *CEG* patet sinus angulorum ad *H* & *G* fore ut distantias *CK CG*; ut oportebat, & quæ de punctis *G H* dicta sunt, eadem locum habent in punctis *G*, *h*.

Hinc ubi arcui cuidam *AH* ex adverso ponendus esset arcus æqualis *Eh* poterit ipsi substitui arcus *EG*, qui centri magnitudinis positionem non turbabit. Et quidem ejus æqualitas cum arcu *AH* demonstratur facile per finitam Geometriam. Nam anguli *ACH* insistentis ad centrum arcus *EH* mensura est arcus ipse; anguli vero *GCE* æqualis ipsi insistentis ad peripheriam arcus *EG* mensura erit dimidium arcus ipsius, quod proinde ad arcum *AH* erit, ut diameter ad diametrum; nimirum in ratione subdupla, adeoque totus arcus *EG* toti *AH* æqualis erit; & eodem prorsus argumento arcus *AG* ipsi *AH*, vel *Eh* erit æqualis.

Quare plurimæ jam figuræ ope circularium arcuum construentur, quarum perimetri centrum magnitudinis habebunt, quod cum centro gravitatis non congruet, de qui-

bus etiam facile demonſtrabitur, earum areas centrum magnitudinis non habere. Omnium ſimpliciſſima e tribus ſemi-
F.18 circulis coaleſcet. Quavis diametro *ACE* deſcribatur ex altera parte ſemicirculus *ABE*, ex altera bini ſemicirculi *ALC*, *EKC* habentes pro diametris radios prioris circuli. Perimeter *ABEKCLA* habebit pro centro magnitudinis punctum *C*. Ducta enim quavis *HCG*, arcus circuli *EG* erit æqualis arcui *AH*. Quare *HBEG*, ſemiperipheriæ *ABE* æqualis erit, qui cum æqualis ſit binis ſemiperipheriis *ALC*, *EKC* ſimul, erit *HBEG* æqualis dimidiæ perimetro toti; ac proinde *C* centrum magnitudinis ipſius perimetri. Cum autem ducta *HCg* infinite proxima; arcus *Hh* ſit ſemper æqualis arcui *Gg*, at ejus diſtantia *CH* a centro *C* æqualis *CE*, adeoque major, quam hujus diſtantia *CG*, ac proinde etiam a recta *AE* ille ſemper diſtet magis, quam hic; ſumma diſtantiarum omnium punctorum arcus *ABE*, non erit æqualis ſummæ diſtantiarum punctorum omnium arcus *ALCKE*; & proinde non erit *C* centrum gravitatis ipſius.

Ipſum autem gravitatis centrum ejus perimetri ſic facile invenitur. Capiatur in radio *CB* perpendiculari ad *AE* recta *CM* tertia proportionalis poſt ſemiperipheriam, diametrum, & radium *CB*, tum *CO* ejus ſubquadrupla, eritque *O* centrum gravitatis ejuſdem perimetri. Nam ex demonſtratis in diſſertatione de centro Gravitatis in ſcholio poſt prop. 1. erit in *M* centrum gravitatis ſemiperipheriæ *ABE*. Diſtantiæ autem centri gravitatis ſemiperipheriæ utriuslibet *ALC*, *CKE* ab earum diametris debent eſſe ut ipſæ diametri, nimirum duplo minores. Quamobrem producta *BC* in *N* ita, ut *CN* ſit dimidia *CM*, erit in *N* centrum gravitatis totius lineæ *ALCKE*, quæ cum æqualis ſit lineæ *ABE*, centrum commune erit in media *MN*: ea vero diviſa in quatuor partes æquales, quarum *CN* continebit duas, ac tota *MN* ſex, diſtabit centrum gravitatis ipſum commune ab *M* per tres ejuſmodi partes, adeoque a *C* per quartam.

Area autem nullum habebit magnitudinis centrum. Nam ſi quod haberet, id eſſet in recta *BC*, quæ aream ejus figuræ

figuræ bifariam secat. Hinc tangentes perimetri ductæ per extrema puncta *B*, & *C* ejusdem rectæ deberent esse parallelæ ex demonstratis; quarum una est perpendicularis rectæ *BC* in *B*, altera cum ipsa congruit in *C*. Igitur hujusmodi figura arcubus circularibus constans, habet centrum gravitatis areæ in O, centrum magnitudinis perimetri in C, centrum areæ magnitudinis nusquam.

Generaliter hujusmodi figuræ hac ratione construi poterunt quamplurimæ. Circuli phiphæria *ABDEF* dividatur in partes quotcunque utcunque inæquales per radios *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *CF*. Assumptis iisdem radiis pro diametris circulorum, ducantur horum arcus priorem tangentes in ipsis sectionum punctis, donec bini proximi quique sibi mutuo occurrant in *G*, *H*, *I*, *K*, *L*; & nascetur figura, ex omnibus ejusmodi arcubus, cujus magnitudinis centrum erit in *C*, quod patet. Ducta enim quavis recta per *C*, quæ peripheriæ circuli majoris occurrat in *M*, & *N*, perimetro novæ figuræ in *O*, & *P*, semper arcus quivis ejusdem ut *AO*, vel *DN* assumptus usque ad contactum proximum majoris circuli erit æqualis ipsius arcus *AM*, vel *DN*; unde facile colligitur, totam perimetrum *OAGB HDP*, fore æqualem semiperipheriæ *MBN*, & reliquam reliquæ semiperipheriæ pariter æqualem. Ac in quovis angulo, ut *ACB*, pro binis arcubus *AG*, *GB* minorum circulorum, substitui posset arcus majoris *AB*, & adhuc centrum magnitudinis perimetri esset in *C*, ut patet. Si autem anguli inæquales sint, vel non sibi rite respondeant, nec se casu quodam compensent, centrum gravitatis non erit in *C*, cum alii arcus magis, alii minus á circulo majore, adeoque & a centro *C* distent, & alii aliam positionem habeant ad rectas per ipsum punctum *C* ductas, & plerunque area nullum habebit magnitudinis centrum, quotiescunque nimirum radii ipsi non continuabuntur, ut angulos efficiant ad verticem æquales, ut rectæ per centrum *C* ductæ possint in eo secari bifariam; quod cum non possit contingere, si numerus segmentorum peripheriæ circuli sit impar, in omnibus ejusmodi casibus centrum magnitudinis perimetri habebitur, areæ nullum erit. F.19

Sed

Sed ut ad centrum magnitudinis solidorum deveniamus, in illis hæc proprietas generaliter habebitur; ut si plano quovis per centrum magnitudinis secetur id solidum, sectionis centrum gravitatis sit in illo ipso centro magnitudinis ipsius solidi; & si habeatur punctum ejusmodi, quod sit centrum gravitatis sectionum omnium, quæ per ipsam
F.20 duci possunt, erit id punctum centrum magnitudinis ejus solidi. Sit enim quævis sectio *ADBE*, eique infinite proxima alia *AFBG*, transiens per quamvis rectam *ACB* prioris sectionis. Demonstratum est supra solidum *ADBF* debere æquari solido *AEBG* ex eo, quod utraque sectio debeat solidum ipsum secare bifariam. Porro cum sectiones infinite proxime, infinite parum a se invicem differre possint, solida *ADBF*, *AGBE* infinite parum different a solidis, quæ plana *ADB*, *AEB* generarent, si converterentur circa intersectionem communem *ACB*, donec abirent in plana *AFB*, *AGB*. Quare æquipollenter ea solida erunt æqualia binis productis ex binis planis *ADB*, *AEB* in vias centrorum gravitatis ipsorum planorum juxta Guldini regulam, ac proinde ea producta debebunt esse inter se æqualia. Sunt autem viæ centrorum gravitatis, ut distantiæ eorundem ab axe *AB*. Igitur producta ex iis planis in distantias suorum centrorum gravitatis a recta *AB* erunt æqualia inter se, quorum singula cum æquentur summæ distantiarum punctorum omnium sui plani ab eadem recta *AB*, binæ summæ hujusmodi distantiarum hinc inde ab ipsa *AB* æquales erunt inter se; quod cum in omnibus accidat rectis per punctum *C* transeuntibus, patet ipsum *C* debere esse centrum gravitatis totius sectionis *BDAE*.

Ex hac proprietate facile demonstrabitur, in quibusdam solidis nusquam haberi magnitudinis centrum. Sit
F.21 conus quidam, cujus sectio per axem triangulum *ABC*. Patet conum hac sectione bifariam dividi; adeoque si magnitudinis centrum sit ullum, id planum transibit per ipsum centrum. Debet autem congruere cum centro gravitatis ipsius sectionis, quod est in ipso axe *DC* secante bifariam sectionem ipsam triangularem, ac invenietur in *E*, si as-

si assumatur CE subtripla CD. At in E centrum magnitudinis ipsius coni esse non potest. Si enim is secetur plano FG parallelo basi transeunte per ipsum punctum E erit conus DFG ad DAB in triplicata ratione DE ad DC, sive ut 8. ad 27.; ac proinde DFG non est dimidium totius coni. Conus igitur magnitudinis centrum non habet.

Hoc pacto excurrendo per lineas, superficies, solida, jam habentur theoremata plurima ad centrum magnitudinis pertinentia, ex quibus & illud constat, in aliis figuris ipsum haberi, in aliis nusquam esse: in iis, in quibus habetur, aliquando congruere cum centro gravitatis, aliquando extra ipsum cadere, ac linearum magnitudinis centrum aliquando cum centro magnitudinis areæ inclusæ congruere, aliquando vero ab eo distare. Et quidem quæ pertinent ad areas planas, & lineas satis hic omnia definita sunt; ac quod ad superficies & lineas duplicis curvaturæ vix attactum, & circa solida etiam plura desunt, ut illud in primis, an aliquando etiam in iis centrum magnitudinis extra centrum gravitatis cadat; ac deest generalis aliqua regula, qua dignosci possit, an data figura centrum magnitudinis habeat, necne, præter hanc unam, ut invento per intersectionem binarum rectarum, vel trium planorum datam figuram bifariam secantium loco, in quo esse deberet, investigetur, an aliæ sectiones omnes per eam intersectionem ductæ eam pariter bifariam secent. Et quidem facillimum tantummodo casum consideravi, in quo densitas materiæ sit ubique eadem, quæ ipsa si adhuc inæqualis sit, multo difficilior investigatio esset.

Nec ea inutilis censenda est, licet vix ullus appareat centri magnitudinis usus. Sæpe enim diutissime post geometricam considerationem usus præstantissimi deprehenduntur. Sic ipsius centri gravitatis proprietatem a Guldino inventam Veteres non satis norunt, Newtoniana theoremata penitus ignorarunt, quorum omnium tam præclari sunt usus; vulgo jam constat atque ex ipsa mea dissertatione patet. Sic etiam coni sectiones apud Veteres vix ullum habuerunt usum præter ipsam geometricam contemplationem, qui per hæc tem-

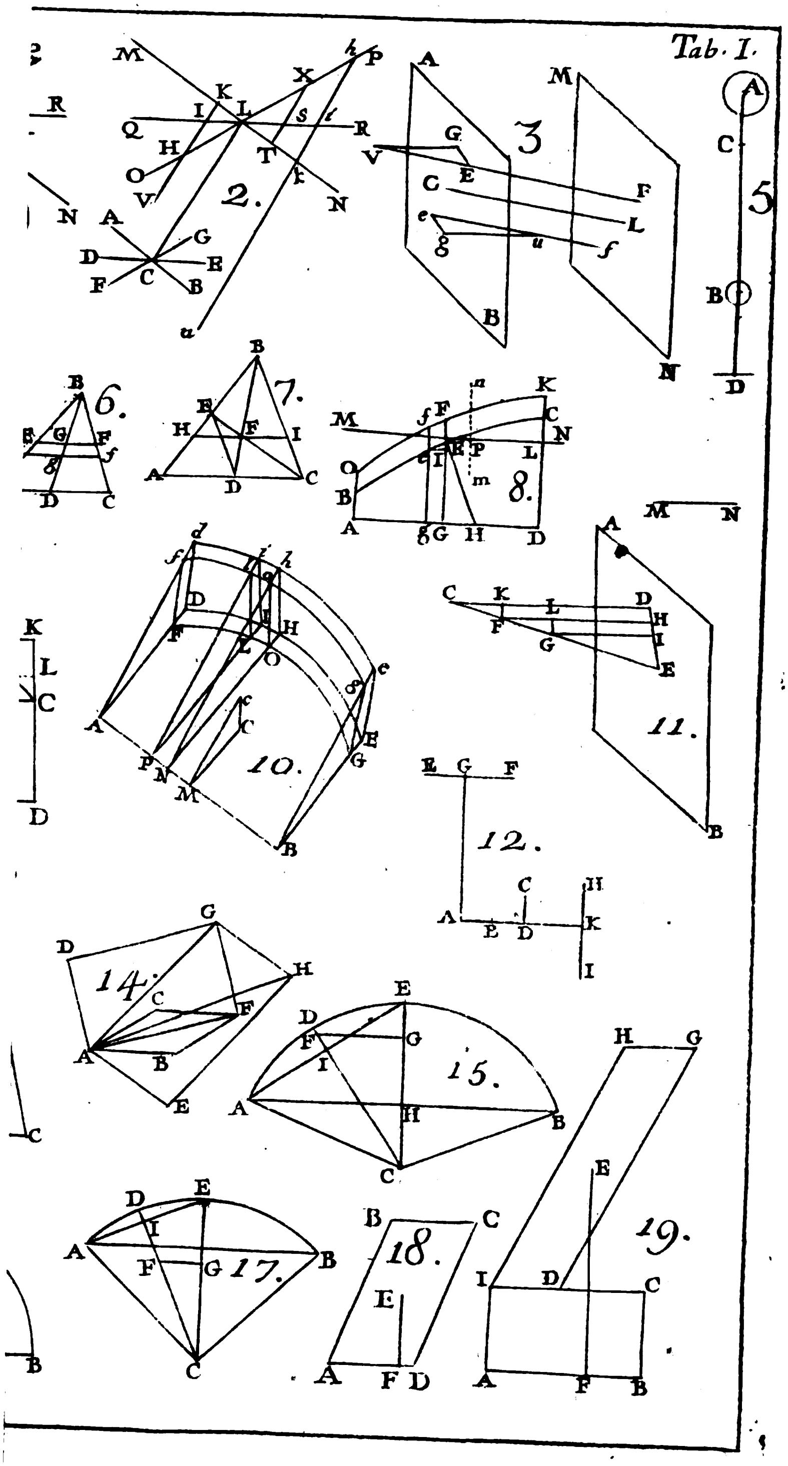
pora

pora tam longe, lateque per omnem Physicam, & Mathesim excurrit.

Potest autem pro usu quodam haberi illud, quod in aliqua gravitatis hypothesi centrum æquilibrii cum ipso magnitudinis centro congruat, adeoque ipsum etiam aliquando nusquam sit. Si enim particularum omnium gravitas deberet dirigi per lineas plano horizontali perpendiculares, sed deberet esse in ratione reciproca distantiæ a plano horizonti pariter perpendiculari, & transeunte per punctum suspensionis, in quavis figura plana, momenta particularum omnium hinc inde ab ejusmodi recta essent æqualia; sunt enim, ut vis absoluta ducta in distantiam ab eo plano verticali, adeoque essent in ratione simul directa, & reciproca distantiarum earundem, nimirum æqualia. Quare linea figuram secans in binas partes æquilibratas deberet simul secare in binas partes æquales. Ac proinde quæ figuræ centrum magnitudinis non habent, eædem centrum æquilibrii in ea hypothesi habere non possent.

Atque hic quidem illud ferme accidit, quod Clairautius invenit, in aliis gravitatis hypothesibus debere fluidum quoddam certam & permanentem figuram induere, ac in ea in æquilibrio esse, in aliis consistere omnino non posse, sed debere perpetuo cieri motu. Sic enim hic in aliis gravitatis hypotesibus certum habetur æquilibrii centrum, in aliis non habetur usquam: & illud sane mirari licet, in hac potissimum gravitatis lege, quam hic experimur prope superficiem Terræ, nullam adesse massam, in qua admodum facile non inveniatur punctum, per quod utcunque secta secetur in binas partes æquilibratas; cum tam multæ sint massarum formæ nullum habentes punctum, per quod semper in binas secentur partes æquales. Hinc autem præterea videtur illud quoque investigatione dignissimum, in quibus demum hypotesibus gravitatis certum æquilibrii centrum habeatur, in quibus nullum adsit. Verum in his mihi quidem diutius hic immorari non licet. Ea quæ protuli vel mihi ipsi, cum quid otii nactus fuero, vel alteri cuipiam ad ejusmodi perquisitionem viam sternent, & simul incitamento esse poterunt, atque adjumento.

FINIS.


Tab. I.
2.
3
5
6.
7.
8.
10.
11.
12.
14.
15.
17.
18.
19.

Tab. II.