4160|64
124 560
-64

Six tractatus. pagina

indice des ~~[illegible]~~ articles traités dans cet ouvrage depuis dechales page 5. il y a 81 articles.

histoire des fameux mathématiciens, au commencement de ce vol.

164

702|26
46302
26

R. P. CLAUDII FRANCISCI MILLIET DECHALES CAMBERIENSIS

E' SOCIETATE JESU

CURSUS

SEU

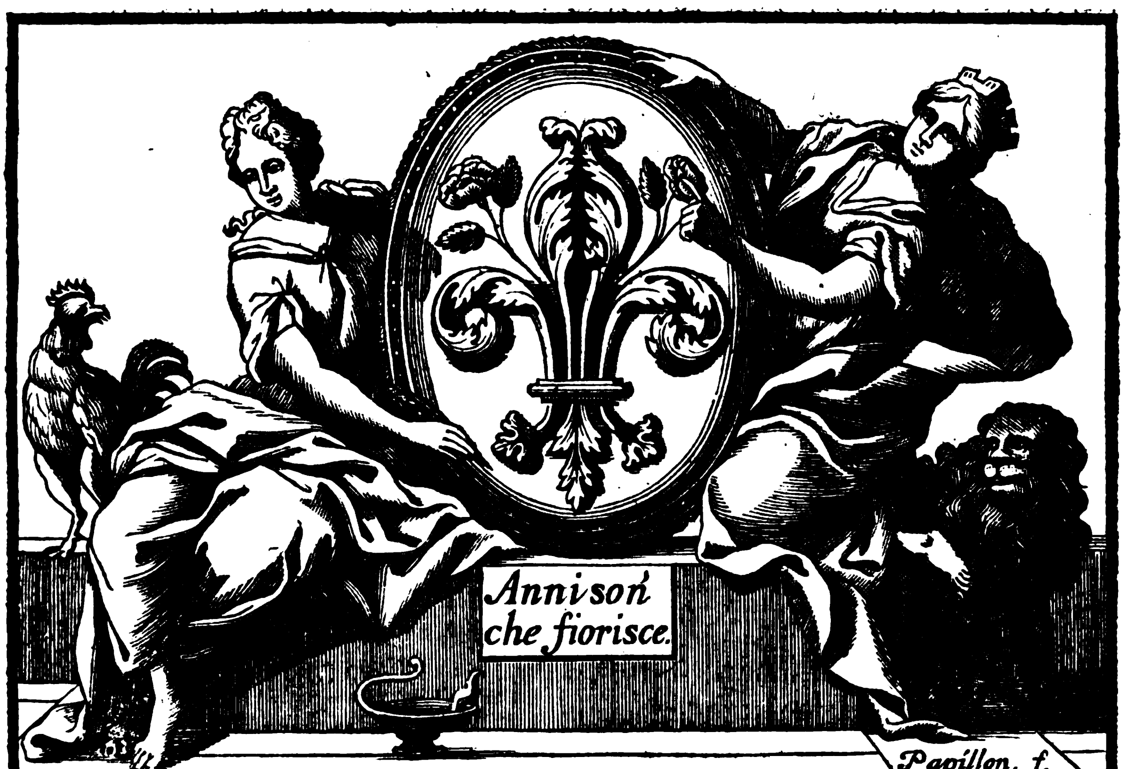
MUNDUS MATHEMATICUS.

TOMUS PRIMUS

COMPLECTENS TRACT. DE PROGRESSU MATHESEOS ET DE Illustribus Mathematicis, Euclidis Libros XIV, Theodosii sphærica, Sectiones Conicas, Arithmeticam, Trigonometriam, Algebram, & refutationem Hypotheseon Cartesianarum.

Editio altera ex Manuscriptis Authoris aucta & emendata, operâ & studio R.P. AMATI VARCIN ejusdem Societatis.

n. 1621.
mt. 1678.



LUGDUNI,
Apud ANISSONIOS, JOAN. POSUEL & CLAUD. RIGAUD.

M. DC. LXXXX.

CUM PRIVILEGIO REGIS.

VICTORI AMEDEO II SABAUDIÆ DUCI MAXIMO,

Subalpinorum Principi Potentissimo, Cypriorum Regi Augustissimo.

QUOD Opus Augusto parenti tuo CAROLO EMANUELI II. ante quindecim annos ab auctore oblatum, publicum extitit monumentum & obsequii in maximum, & grati animi in beneficentissimum Principem, idem ut numeris omnibus absolutius offerri posset, emendatum, & tertia sui parte minimùm auctius, REGIÆ TUÆ CELSITUDINI Princeps Augustissime, eadem officiorum ratione repræsento.

Faciunt Principe summo dignæ virtutes quæ in te universæ confluxerunt, ut tibi qui homini deferri possunt, omnes honores debeantur; facit operis jam toto ferè terrarum orbe sparsa celebritas, & commendatio, ut non indignum videatur, quod tanto Principi offerri possit.

Ea in Principatus quod tui est juris administratione sapientia commendaris, quam cùm Reges pauci, ac Principes moribus suis exprimant, meritò tibi omnium laudes, admirationemque conciliat. Et quidem onus imperii quod ardui, durique laboris est, tuis unius viribus in adolescentiæ flore sustines; ærarii rationes, armorum apparatus, judicia, commerciorum cum exteris pactiones, negotiorum privatorum cum tuis, cum Magnis Regibus, ac Principibus legationes, tua gubernatione tractantur, neque pars ulla est Reipublicæ, cui per te ipsum præsideas.

Quo se importuno rerum pondere, maximè in prima, & ad otium deliciasque proclivi ætate, cum se privati quorum minus gravia sunt negotia non rarò liberent, Principum autem plerique in Ministrorum curam conferant; id tu quod tui muneris proprium esse ducas, ita per te gerendum suscipis, susceptum autem assidua contentione versas, ut qui tecum in curarum partem, atque oneris assumuntur, nihil nisi per te digestum, atque ordinatum administrent. Quod cum facis tuæ gloriæ primum servis, deinde publicæ quoque felicitati.

Et verò assiduâ illâ gubernationis contentione, partes tu primum imples quæ Principis sunt præcipuæ, cùm Reipublicæ corpus regere, officij illius sit proprium ac singulare, qui Rector illius est Dei omnia administrantis providentiâ constitutus. Ut enim caput, quod propterea oculis, auribusque ad prospicienda, declinandaque corporis mala instructum est, & à natura comparatum, membra illius dirigit, & ad officia quæ singulorum sunt adhibet; ita Princeps officii sui, munerisque ratione propria, quibus Præfectus à Deo subditos, ad munia quæ sunt singulorum admovet.

Sed perpetuo illo labore suo REGIA TUA CELSITUDO *publicæ quoque servit felicitati, beata enim sunt, ac pacata regna quæ Principum suorum nutu, misera verò quæ eorum qui gratia in partem administrationis Reipublicæ asciti, gubernatione temperantur. Sive enim id superbiæ tribuendum, sive invidiæ, Ministrorum imperiis populi vel imprimis tractabiles parere dedignantur; quorum cùm jussa detrectant, & consilia reprehendunt, exitiales regnis turbæ, ac seditiones excitantur. Nimirum quorum dominium est, Reges ac Principes, publicam rem ut suam, administri ut alienam tractant; sed cùm ad res suas charitatem adhibeant singuli, ad alienas autem cùm tractantur fastidium adhæreſcat; hinc fit ut quidquid supremi Principes per seipsos moliuntur, ac cogitant, id populi summa facilitate approbent, quidquid agunt ij quos in curarum partem assumunt regnorum administri, in deteriorem partem interpretentur.*

Molliter imperant, gubernationis publicæ, auctoritatisque Principum queruntur nervos debilitari; obsequium exigunt, paulò severius, sævitiam, atrocitatemque imperiorum accusant; geruntur bella, provincias in periculum adduci expostulant; pacis fœdera sanciuntur, gloriæ, utilitatibusque gentis non satis consuli indignantur; quiescunt, otium indecorum; turbas inter vicinos excitant, fidem frangi, felicitatemque publicam in periculum trahi, criminantur.

Sed cùm ad ditionum suarum gubernationem, manum Principes admovent, suscepta quæcumque tandem illa sint, à populis consilia commendantur, cùm divinæ partem mentis illos hausisse intelligant, consiliorum autem approbationem ac legum, amor, obsequiumque eorumdem consequuntur. Quid plura pacatè, feliciterque à suis, turbulentè, & infeliciter à Ministris qui alieni sunt imperia administrantur.

Quâ

Quâ sapientiâ tuâ, politicisque quibus aliis præstas artibus, incredibili tuorum bono perfectum est, ut dum Europæ regna omnia, ac Provinciæ, atrocis belli incendio conflagrant; dum Germaniæ, Belgio, Hungariæ, Illyrico, Græciæ, Hispaniæ, ab exercitibus infertur vastitas, ditio interim tua, & quidem quâ latè patet, summa pace, ac tranquillitate perfruuntur.

Quæ cùm dico, incidit dubitatio, an REGIÆ TUÆ CELSITUDINI, *tam sapienter gubernanti gratulari, an de pace, otio, securitate de litterarum nostrarum quarum fruimur voluptate, de Religionum cerimoniis, atque honore, quæ fœlici gubernatione tua nobis sunt parta gratias agere debeamus. Utrumque certè debemus, & gratulationem summo Principi, qui à Provinciis, ditionis suæ omnibus mala quibus aliæ conflictantur sapientia sua depulerit; & gratiarum actionem beneficentissimo, cujus gubernatione fælicitate summa perfruimur.*

Jam huic summæ sapientiæ tuæ non dissimilis quâ præstas militaris fortitudo, quæ cum duplici bellorum genere contineatur, civilibus quæ subditos inter, & Principes, externis, quæ geruntur cum iis quibuscum nihil nobis commune est; utroque tu fortiter gesto, gloriam summam adeptus es. Primum id fuit quod cum Montis Regalis incolis susceptum à te, atque perfectum est; quod eo periculosius fuit, quod in eo tuorum hinc atque inde armis certatum est. At illud ita administratum est, ut qui turbas excitaverant, consiliis tuis, apparatu militari, paratáque jam in regionem illam per te impressione, intellexerint, iis qui fortem adeo haberent Principem, si exitium suum vitare vellent, legibus sibi per illum positis obtemperandum esse. Hoc autem cum Calvinianis partim Germanis, partim Gallis, qui in ditionem tuam irruperant, ita est gestum; ut vel fugati fuerint, vel internecione deleti, nullo in illis vallibus qui errorem retinere posset relicto, quas quingentis annis incoluerant.

Quod bellum cum à perduellibus illis religionis nomine gereretur, quâ nihil ad commovendos populos accommodatius, patriæ, tibique PRINCEPS FORTISSIME, *ab iis quorum communis esset cum seditiosis illis rebellibusque causa, à Germanis, ab Anglis, à Batavis; sed maximè hinc ab Helvetiis, inde à Gallis vicinis, qui in illo ditionis tuæ limite, tot annis, sub Principibus pluribus, hæresim ac rebellionem aluerant, timebamus. Quas turbas tota Europa excitassent, quàm atrocia bella quo furore gessissent; quàm copiosum sanguinem ubi fixissent sedes, fudissent, recordabamur. Sed sollicitudinem illam, ac metum, nobis,* REGIÆ TUÆ CELSITUDINIS *alta mens, ac fortitudo paucis diebus abstulit. Irrupisti hinc cum tuo, inde cum fœderato milite, cum parato hoste, & ad rem bene agendam rectè instructo conseruisti manus, vicisti; ac demum pulcherrima reportata victoria perfecisti, ut nullus tibi subditus* *sedes patrias, penates, ac domos retinere posset, qui retentâ hæresi Ecclesiæ esset inimicus.*

Sperabamus à te summa, PRINCEPS SAPIENTISSIME, quem sagacitate ingenij, judicij, consiliorumque maturitate, politicis artibus ad rectè rem tuam regendam accommodatis, majores tuos nulli fortitudine, ac sapientiâ secundos vincere videbamus; sed confecto illo formidoloso bello, cui neque in ditione tuâ iidem fortissimi Principes, neque suâ Cæsares in Germaniâ, & Hungariâ, neque Hispaniæ Reges in Belgio, finem imponere potuissent, longè expectationem nostram superasti. Expugnatæ enim sunt insuperabiles perduellium illorum arces, quæ cœlum ipsum tangere videbantur; solo æquata propugnacula quibus se perduellio tutissimam arbitrabatur, furiosorum copiæ dissipatæ; quid plura in illam opinionem serò tandem inducti, non posse domos suas, bona, ac patriam Principis ita comparati subditum ullum retinere, qui non eadem cum illo religione censeretur.

Quâ plenâ reportatâ victoriâ perfectum est, ut te quem omnes Principes qui tecum fidei Romanæ cultores sunt, perspectum habebant esse fortissimum, religiosissimum quoque esse intelligerent. Cùm enim religionum, ac cæremoniarum honorem tria contineant, sacrificium, Catholica dogmata, sectatorumque ejusdem fidei charitas, ac consensio, ea postliminio tandem sunt dissipatis erroribus, disjectoque schismate, REGIÆ TUÆ CELSITUDINIS operâ, politicisque curis ac fortitudine ditioni tuæ restituta.

Et primò sacrificium sine quo Dei cultus est nullus, locis illis unde pluribus jam seculis ejectum, atque exturbatum erat, est redditum; quo munere simul Dei, simul gloriæ tuæ consuluisti. Nam cùm ij Reges, ac Principes honorem summum, ac laudem adepti sint, qui ditionum suarum Provincias commerciorum ratione locupletarunt, qui rudes atque incultos populos mechanicis artibus excoluere, qui gentem sibi subditam magnorum virorum operâ ad humaniores litteras, scientiasque omnes instituerunt; eum qui cæremonias, cælestem doctrinam, qui Dei cultum, sacratissimasque religiones in regni sui, ditionisque non contemnendam partem induxit, non hominibus quorum munera illa propria esse non possunt, sed Deo simillimum esse judico.

Jam dogmata Theologica in excitatis per te templis, locisque sacris, magno populi concursu, ac frequentiâ, summo dicentium honore publicè exponuntur, de veris religionibus, sacrisque doctrinis sermones, in domibus, in foro, in agris instituuntur, sacri homines quod Apostoli, quod sancti Patres docuerunt securitate maximâ interpretantur; dum interim disjectæ sunt pestilentiæ Cathedræ, silent errorum, nequitiæque præcones, hæresis autem ne in latebris quidem secura est.

Denique idem de fide, religionibusque sentientium, dissipatis no-

varum

varum doctrinarum dissidiis cor unum est, eademque in omnibus animorum consensio.

Dignum quoque opus quod REGIÆ TUÆ CELSITUDINI *offeratur. Habent enim ad vitæ cultum, & commoditates, usum maximum, commendationem habent summam, admirabilitatem habent Mathematicæ disciplinæ; ut hoc doctissimo seculo parum à litteris, scientiisque instructus esse videatur, qui non in doctrinis illis sit versatissimus.*

Et primò usum habent, & quidem tum belli, tum pacis tempore. Injustæ essent, & fallaces bonorum hæreditatumque divisiones nisi illis perficiendis Geometria præsideret; servitus hominum in ponderum torquendis molibus in infinitum cresceret, nisi id Mechanicarum machinarum ope minueretur; emptiones, venditiones quibus res distrahuntur ad pondus, non sine vel ementium jacturâ, vel vendentium culpâ fieret, nisi contractibus illis Statica moderaretur. Efficit Geographia ne pars ulla orbis terrarum nobis ignota sit; ut habitemus non commodè tantùm, sed etiam pulchrè, ac magnificè Architectura civilis; ut quod Provinciarum singularum est proprium, aliisque deest, omnium commune sit, Ars Navigandi. Jam deducendis fontibus, derivandis aquis, continendis intra alveos suos fluminibus, laborat Hydrostica. Ac demum Hydrautica machinæ, Perspectiva, Catoptrica, Musica, deliciis hominum serviunt; ut jam non palatia modo Principum, atque optimatum villæ, sed ne quidem privatorum ædes, satis ad usus vitæ comparatæ esse videantur, nisi Mathematicarum artium ornamentis instructæ sint.

Sed non pacis modo, verum etiam bellorum gerendorum rationibus accommodatæ sunt. Nullæ arces muniri possunt commodè, quibus pauci tutò plurium aggressiones, atque impetum sustinent, quin earum à Mathesi descriptio fuerit ex artis hujus & disciplinarum ratione instituta; nullæ obsidiones urbium informari, quin fossas, cuniculos, aggeres, doctrinæ istæ delinearint.

Jam cùm à certitudine quam ingenerant, à methodo, mirabilique propositionum nexu quo res conficiunt commendationem adeptæ sint, à difficultate qua summâ sunt circumscriptæ admirabilitatem habent. Cùm enim in scientiis aliis præstent plurimi, Theologi magno numero censeantur; longè plures Philosophi, nulla urbs Jureconsultos, nulla Medicos artis suæ scientes non habeat, vix in centum urbibus disciplinarum Mathematicarum apprimè intelligentem unicum deprehendimus. Nimirum ut de his artibus dictum sit, quod est à Tullio pronunciatum de eloquentia, majus est hoc quam homines opinantur, & pluribus ex artibus studiisque collectum; ut mirari desinamus in his doctrinis paucitatem, cum illis universis constent, quibus in singulis elaborare permagnum est.

Effecit Majorum tuorum profusus in litteratos favor, ac libera-

litas,

litas, ut velut ad signum illustrissimum informandum, plura doctorum virorum sydera in hoc artium, scientiarumque Allobrogico cælo coaluerint. Eluxere in Theologicorum dogmatum, sacrorumque Canonum interpretatione, in facultatibus illis, scientiisque Principes Ostiensis, Angelus, Astensis, Sylvester Prieras, Anastasius Germonius Tarantasiensis Archiepiscopus, Javellus, Theophilus Raynaudus, Fichetus, Gonterius. Neque illis in scientia juris obscuriores extitere Aymo Cravetta, Antonius Thesaurus, Octavius Cacheranus, Godefridus à Ravo, Cagnolus, Osascus, Natta, Amedeus à Ponte; ac demum Antonius Faber qui peritorum judicio in hac parte principatum erudito hoc nostro seculo fremente nequicquam invidiâ occupavit. Et quidem cùm illum Lutetiæ Parisiorum honoris causa Christianissimo Regi Senatus Civitatis illius Princeps obtulisset, pulcherrimâ præfatione eum se Majestati suæ jurisconsultum sistere pronunciavit, qui quotquot viverent scientes juris longissimo intervallo superaret. Neque eodem in cælo Grammaticorum, ac Poëtarum, etiam vernaculorum minora sydera defuerunt. Illos omnes singulari suâ gratiâ à vulgo Principes sapientissimi honoribus, ac beneficientiâ sejunctos esse voluerunt, ac cæteris suis subditis officiis esse dignitatibusque honestiores, qui suis in Rempublicam, privatosque meritis eosdem vincerent.

Quamobrem cùm litteratorum genus omne REGIÆ TUÆ CELSITUDINIS *Proavi summo honore, benevolentiaque complexi sint; ei qui quod pauci possunt summa sit gloria scientiarum difficillimarum, reconditissimarumque comprehensione consecutus, quam apud te ambit gratiam, patrociniumque non negabis.*

Quod cùm facies, cujus alumnus, atque ornamentum erat in partem ejus, quam à te consequetur gratia, veniet Collegium Camberiense; quam precibus summis implorat nomine omnium

REGIÆ TUÆ CELSITUDINIS,

Humillimus, obsequentissimusque servus
ac subditus AMATUS VARCIN,
è Societate JESU.

PRÆFATIO

PRÆFATIO AD LECTOREM,

QUA SCOPUS AUTHORIS EXPONITUR, Operisque divisio traditur.

PRODIERANT jam antè aliquot annos, R. Patris Claudii Francisci Dechales Opera Mathematica tribus voluminibus comprehensa, multaque ille ab eo tempore vel excogitaverat suo marte, vel inventa ab aliis perfecerat: cùm admonitus est parari alteram suorum operum editionem; ac proindè videret, numquid additum aut immutatum vellet. Erat illi jam tum ex lucubrationibus suis quod justo volumini satis esse potuisset, sed ille majus aliquid cogitans, opus universum de integro recognoscendum suscepit, & ab elementis exorsus statuit ire per singula capita, nihil prætermittens quod à se proponi distinctiùs, aut explicatiùs dici posse speraret, aut meliori ordine collocari. Instabat operi, vel ut veriùs dicam, rem jam propè totam confecerat; cùm ex continenti meditatione, ex diuturno legendi, scribendíque labore gravem morbum concepit, quo absumptus est. Conciderat immaturâ authoris morte, omnis rei perficiendæ & facultas & spes, nisi beneficio Illustrissimi Viri D. Francisci Amedei Dechales Tarentasiensis Archipræsulis, ad quem demortui fratris sui scripta pervenerant, cuncta denuò essent restituta in integrum. Tradidit vir Clarissimus summâ benignitate scripta quæcumque habuit.

Multa in his reperta sunt nova: In Geometricis, usus centri gravitatis ad mensuram corporum rotundorum latiùs ab ipso, quàm à primo inventore Guldino, promotus; Egregium inventum P. Gregorii à sancto Vincentio de progressionibus geometricis faciliori viâ demonstratum, & à tricis quibus involvebatur expeditum. In Mechanicis motus localis, elateria; vis percussionis directæ, reflexæ, determinatio centri gravitatis in variis corporibus. In Astronomicis meteora. Multa pluribus in locis quæ ad Physicam pertinent, qualis est refutatio hypotheseon Cartesianarum, & alia his similia quæ passim in operis decursu sparsa reperiuntur. Inter cætera verò insignis quidam liber quem de progressu Matheseos, illustribusque Mathematicis conscripsit, & elementis præmitti voluit in ipsa Operis sui fronte. Recensentur in eo primi rerum Mathematicarum Auctores, eorumque inventa referuntur; reliquorum verò qui subsequentibus sæculis floruerunt, non solùm enumerantur opera & distinctè explicantur; sed adjunctum habent breve & accuratum Authoris judicium, ex quo tyrones dignoscere facilè possint, quos sequi Authores debeant, & à quibus libris abstinere ne operam inanem ponant in malè digestis operibus evolvendis. Non pertinet ille quidem liber ad scientiam, nec ad artis præcepta; sed est tamen ejusmodi ut dubitari meritò possit, inter omnia quæ aliquando scripsit, sitne opus ullum hoc opere utilius. Illud certè extrà controversiam est, nullum existere quod eruditionem in Auctore majorem, majusve ingenium arguat. Est enim viri summè eruditi, animo comprehensa habere, tàm multa, tamque varia opera quæ recenset & singillatim enumerat, veterum, & recentiorum Authorum penè omnium qui alicujus nominis ad nostra usque tempora extiterunt: est magni ingenii specimen, quid in unoquoque laudis, quid sit vitii ita discernere, ut cùm de omnibus pronuntiet, judiciumque ferat minimè dubium, tàm peritè, támque ad rei veritatem, legitimum cujusque pretium æstimet.

Cæterùm fuit is Authoris præcipuus scopus, tyronem à primis elementis ad abstrusa, reconditáque hujus scientiæ penetralia veluti manu-ducere. Quàm benè id præstiterit, aliorum esto judicium: mihi sanè non solùm id assequutus videtur, ut quæcumque demonstrat in rebus implicatissimis facilè à mediocribus ingeniis percipi possint: sed etiam existimo quemvis rerum Mathematicarum studiosum, si semel ea benè perceperit quæ hîc traduntur, posse jam per se & sine viæ duce omnes aliorum Authorum ambages,

omnes

omnes salebras inoffenso pede percurrere. Partem Matheseos nullam prætermisit, sed in his prolixior fuit quæ usum habent aliquem ad communis vitæ commoda aut necessitatem, in illis brevior quæ difficilem tantùmmodo continent, & abstrusiorem quandam contemplationem; quamquàm & hìc exquisitum delectum adhibuit, ne quid omitteret, quod turpe sit perito Mathematico ignorare. De suo multa ubique addidit; quæ accepit ab aliis; clarâ docendi methodo effecit sua.

Divisionem totius operis quadripartitam, quâ priùs usus fuit, nunc quoque retinet juxtà elementorum quaternarium numerum; suos enim terræ, suos aquæ, pariterque aëri & igni suos tractatus addicit, in singulis partibus tamen, alio plerumque ordine quàm anteà progreditur, ut cuivis licet observare in eâ, quam hìc subjicio totius operis ideâ ex ipso Authore depromptâ.

Mathesis, inquit, sicut & cæteræ omnes scientiæ, suis nititur principiis & ex propriis elementis coalescit: quatuorque tractatus ut elementares agnoscit, quorum primum elementis Euclidis contentum, si eximium, si aureum nominem, si ei primas, exceptis sacris codicibus deferam; parùm admodùm dixero: quippè qui genuinam scientiæ ideam ingeneret: nexuque mirabili à principiis per se notis exorsus, mentem ad sublimia quæque, & abstrusa sensim inducat. A simplicioribus igitur figuris initium ducit, triangulorum comparationem primò instituit, tùm proprietates linearum; perpendicularium, parallelarum considerat: tùm quadrilateras inducit secundo libro, circulares tertio, tùm figuras rectilineas circulo inscribit, & circumscribit quarto. Quinto novam proponit Logicam, proportionalem scilicet argumentandi methodum. Sexto varias proportionalium linearum proprietates enucleat, regulam quam vocant auream demonstrat, totiusque Geodesiæ principia proponit. Septimo, octavo, nono numeros explicat, incommensurabilium doctrinam decimo, totiusque Algebræ semina jacit. Quia verò non in eodem semper plano exactas figuras consideramus, undecimo solidorum principia communia, tùm parallelepidorum, cylindrorum, prismatum, pyramidum, conorum & sphæræ proprietates duodecimo & sequentibus explicat.

Nolim tamen sine delectu, hæc omnia, initio Matheseos candidatis proponi, experientiâ etenim comperi, in septimo, octavo, nono, decimo, initio tempus malè collocari: quare sex prioribus, undecimo & parte duodecimi contenti sint, cùm exceptâ Algebrâ, pleræque Matheseos partes sine reliquis demonstrentur.

Secundus Tractatus elementaris Sphærica Theodosii continet cùm enim præcipua quæ sub Mathematicam considerationem occurrunt corpora, sphærica sint, ut tellus & cælum; æquum fuit ut peculiaria & iis corporibus accommodata traderentur principia, quod abundè & methodo facillimâ tribus libris præstat Theodosius, variasque in sphæra lineas, angulos, plana, sectiones exhibet.

His adjungimus Apollonii Conicorum libros tres, de Parabolâ, Ellypsi, Hyperbolâ, earumque proprietatibus. Quartum de iisdem sectionibus in cono ipso consideratis; quibus accedet liber quintus de Sectionibus cylindricis.

Tertius Tractatus erit Arithmeticus solas elementares regulas complexus; additionem scilicet, subtractionem, multiplicationem, divisionem tàm in numeris integris, quàm fractis, regulam proportionum, seu trium, societatis, falsi, alligationis, extractiones radicum tàm quadratæ, quàm cubicæ. Arithmeticam claudet ars divinatoria per numeros.

Trigonometriam in numerum elementorum referimus, eamque in libros sex dividimus; Primus liber Sinus, tangentes & secantes investigabit, & Canonis construendi methodum tradet.

Secundus Logarithmorum originem & naturam aperiet.

Tertius triangula rectilinea solvet.

Quartus erit Isagogicus ad triangula sphærica.

Quintus sphærica triangula rectangula solvet.

Sextus denique obliquangula.

Algebra quia per omnes quantitatis species excurrit, viasque mirabiles aperit ad inventionem, referetur inter elementa, & utraque tùm vulgaris, tum speciosa octo libris comprehendetur.

Post elementa seu spinas ad amœniores materias gradum faciamus, atque ex laboribus exanthlatis fructus capiamus uberrimos. Tanta est rerum Mathematicarum amplitudo, tanta copia, tanta varietas, ut diu in iis frustrà ordinem aliquem & modum desiderarim. Cùm enim nullus sit, qui hactenùs de tota Mathesi scripserit: sed quilibet Author partem tantùm aliquam sibi ornandam assumpserit, non pauci eo animo, ut volumina & librorum molem augerent; aliundè conquisitas ad institutum suum materias,

extranesa

extraneas licèt, & minimè pertinentes retulerint, omnia extricare, & in ordinem digerere, non adeò facilè videbatur. In hoc tandem placito, pervulgato illo quidem, verissimo tamen acquievi: mundum hunc in numero, pondere, & mensurâ creatum esse, singulasque ejus partes, certis numeris & legibus circumscriptas. Numerùm, pondus & mensuram, ut objectum suum peculiare, & proprium contemplatur Mathesis, nec aliam ejus definitionem in medium proferre licet, quàm si numeri, ponderis, & mensuræ scientiam nominemus. Facilem ergò, & maximè consentaneum ordinem illi tribuemus; eundem scilicet quo partes mundi copulantur. Quatuor igitur elementa & cœlum ipsum intuebimur, & quidquid in singulis ad numerum, pondus, & mensuram pertinebit, ut juris nostri vendicabimus.

Mundum ergo Mathematicum proponimus, dùm integrum Mathesis cursum instituimus, nec alium ordinem observandum statuimus, quàm eum, quem in suo opere sibi præfixit Deus.

Ab Elementorum infimo seu tellure ordiamur. Hæc tribus suis dimensionibus Geodesiæ, seu Geometriæ practicæ materiam subministrabit.

Tellus inter Elementa gravissimum est, illius gravitatem ut objectum intuebitur Statica.

Quia verò Mechanica eodem principio cum Statica nititur, ad idem etiam referetur.

Terra magnetica est, ut fert communis sententia; versoriorum, & pixidum nauticarum acus dirigit: huic ergò tractatum de Magnetismo tribuemus.

Tellus sphærica est, ejusque diversæ partes variè ad cœli puncta relatæ, varia etiam lucis, & caloris incrementa, multiplicemque dierum, & noctium, annique tempestatum vicissitudinem patiuntur, quæ omnia Geographia universalis explicabit.

Terram hominibus incolendam dedit Deus; jure ergo Architecturæ civilis placita explicabimus, eique duos ancillantes tractatus, artem scilicet Tignariam, & tractatum de sectione lapidum adjungemus. Non tantùm ad decorem aliquem & magnificentiam accommodata esse debuit hominum sedes & habitatio; sed etiam tuta & bene contrà hostes munita; Architecturam ergo militarem in subsidium vocamus.

Novem igitur tractatus Mathematicos telluri addico, Geodesiam, seu Geometriam practicam, Mechanicam, Staticam, Geographiam, tractatum de Magnete, Architecturam civilem, artem Tignariam, tractatum de Lapidum sectione, Architecturam militarem. Singulos si lubet percurramus. Geometria practica seu Geodesia dimensiones omnes & mensuras complectitur. Libros undecim comprehendet.

Primus linearum rectarum dimensiones tradit. Secundus superficierum. Tertius solidorum. Quartus totius Geometriæ compendium in circino proportionum instituit. Quintus aget de lineis curvis. Sextus de superficiebus curvis. Septimus de corporibus rotundis. Octavus de novâ indivisibilium methodo. Nonus de spirali secundùm eandem methodum. Decimus novum P. à Sancto Vincentio inventum faciliori methodo explicabit. Ultimus novum Patris Guldini usum centri gravitatis ad rotundorum generationem ulteriùs provehet.

Plus habet admirabilitatis haud dubiè Mechanica, cujus septem libri sunt. Primus Physicus est de motu, de principio universali augmenti potentiæ per machinam. Secundus idem principium vecti applicat. Tertius axi in peritrochio. Quartus Troclearum vim demonstrat. Quintus Cocleam seu spiram explicat. Sextus Cuneum & percussionem directam. Septimus Elaterium & percussionem reflexam.

Amœnior ni fallor, & jucundior erit Statica; constituto etenim omnium gravium centro, concessaque corporibus gravitate: Primò agit de Elementorum gravitate, omnesque motus qui vulgò metui vacui conceduntur, ut ascensus aquæ in Anthliis, Mercurii in arundine suspensio, variæque attractiones; hos inquam motus gravitati tribuimus. Secundò de Gravium decidentium accelerato casu. Tertiò, de Eorumdem in planis inclinatis descensu, momentorumque decremento. Tum funependulorum doctrinam, vibrationumque æqualitatem, earumdem oscillationum durationes, cum longitudinibus comparamus, easque horologiis nostris automatis fructu non pœnitendo aptamus. Quartò, Æquiponderantium doctrinam tradimus. Quintò, de Linearum centro gravitatis. Sextò, de Superficierum centro. Septimò, de Centro gravitatis solidorum. Octavò, de proprietatibus & usu centri gravitatis. Neque verò minùs jucunda, homineque digna nobis aperiet Geographia. Hæc primò telluris figuram intuetur, locumque constituit, tum ejus partium ad cœlos relatarum affectiones determinat, totamque lucis distributionem, zonarum numerum, Climatum differentiam, perfectamque totius telluris Ideam efformat, hoc est prima universalis Geographiæ placita tradit.

Virtus magnetica prorsus mirabilis est, cum nempe uniones, margaritas, adamantes, saphyros longo superet intervallo hic lapis, ita mentis aciem perstringit vis illa occulta, qua ferrum ad se allicit, & stringit: ea tamen qua continuò ad Septentrionem & Austrum dirigitur admirabilitati utilitatem adjungit, cùm navigationum omnium evadat cynosura, viæque ducem se præbeat. Ejus proprietates omnem ferè legem detrectant: In hoc enim lapide, & contraria in eodem sinu, in summo subjectantur, centrum est in circumferentiâ, amicæ partes se invicem fugiunt, inimicæ conjunguntur, quæ uni tertio uniuntur, inter se non cohærent, causa dat quod non habet, id quod produxit destruit. Illius igitur proprietates, declinationem, inclinationem ususque varios hic Nonus tractatus aperiet.

Architectura civilis brevibus admodum coarctatur finibus utpote quæ, ultra quinque pervulgatos ordines, Doricum, Jonicum, Corinthiacum, Compositum & Tuscum, & regulas universales non excurrat. Hic tractatus demonstrationibus caret, vixque in Mathesium numerum, eum retulissem, nisi utilitas id exegisset.

Huic decimo tractatui, duos Ancillantes, seu Subalternos adjungimus. Artem Tignariam undecimum tractatum facimus, in quo lignorum sectiones, & in tectis elegantioribus usum explicabimus.

De Lapidum Sectione tractatus duodecimus, qui Latomos tantum, & cæmentarios spectare videtur, inter omnes Geometricus est. Hunc in quatuor libros partior.

Primus circa Arcus, seu compluviatas testudines, non tantum simplices, & orbe pleno ut vocant tornatas, sed etiam elumbes seu depressas, fastigiatas, reptantes, seu pedum inæqualium, obliquas, inclinatas, perstringentes, seu desinentes in aliud compluvium, in turrim rotundam. Secundus conicas testudines, pendulósque ut ita dicam fornices excitat. Tertius decumanas extruit, lunatosque fornices, sphæricos, claustrales, quadrario lapide decussatos componit. Quartus denique, in orbem aut Ellipsin ascendentes extruit.

Latiùs patebit Architectura militaris, quæ muniendarum arcium, & urbium, artem complectitur; hanc in sex libros partior. Primus Fundamenta, seu Axiomata hujus doctrinæ tradit. Secundus Polygona regularia, suis propugnaculis vallo, & fossâ instruit. Tertius circa prætenturas omnes, seu externa opera ut vocant, hoc est parmulas, lunatas cassides, opera cornuta, coronata, forcipulas suis vallis, loricis, fossis muniendas occupatur. Quartus irregulares figuras certis regulis & principiis adstringit. Quintus Obsidionales fossas, vineas, aggeres, cuniculos ducit, castra suis munitiunculis tutatur, tormentorum bellicorum suggesta seu tribunalia excitat. Sextus Repugnatorius erit, variasque propugnaculorum rescisiones, & tumultuario opere excitatas munitiones complectitur. Septimus perspectivam militarem tradet.

Atque hi sunt novem tractatus quos tellus suppeditat, Geodesia, Mechanica, Statica, Geographia, Magnetica, Architectura civilis, Ars tignaria, lapidum sectio, & Architectura militaris.

Pauciores in Aqua tractatus occurrunt, si enim gravitatem ejus consideremus, hydrostaticam seu tractatum de natantibus in humido, cùm Archimede instituimus. Si ad fluiditatem & cursum attendamus, Secundum de Fluviis & Fontibus habebimus. Tertius Machinas hydraulicas continebit. Quartus denique Navigationem complectetur.

Quod ad primum seu Hydrostaticam pertinet. Primò quantum leviora corpora in aqua descendant definimus; quantum de graviorum gravitate decedat dum aquâ merguntur; ostendimus nullibi ita exactè, æquilibrii leges observari; an figura corporum, an aquæ profunditas, ut corpora sustenentur faciat. Celebre illud Archimedis problema de corona, explicamus, metallorumque probationem in aqua aperimus. Corpora item pressione aquæ leviora aut graviora reddimus, an mediis in aquis navigari, an in aëre possit: quomodo pisces fiant aquâ leviores aliaque in hunc modum explicamus.

In secundo tractatu nempe de Fontibus, primò de aquarum æquilibrio agimus, tum methodos fontes, & rivos deducendi tradimus. Exinde fluentem aquam metimur, quâ proportione depleantur vasa explicamus. De salientibus item, fluminibus metiendis, quantum ex immissione torrentis in alveum fluminis, ejus altitudo augeatur, sexcentaque hujusmodi æque jucunda, ac utilia pertractamus.

Tertius tractatus Fontes omnes artificiales continet, qui vel attractione perficiuntur, vel compressione, aut expulsione. Spiritalia Heronis ludicra, machinas omnes ad attollendam aquam idoneas, ut sunt anthliæ, rotæ, & catenæ situlis instructæ, rosarium ut vocant, variæ helices, Archimedis spira ad exhauriendam navis sentinam excogitata, in quâ nempe aqua descendendo ascendit. Bremensis rota quæ singulis circumvolutionibus viginti quinque plaustra aquæ, in urbem immittit; amœna item nonnulla, quales sunt organa hydraulica, aviculæ canentes. Ad hunc item tractatum revocantur omnes machinæ hydraulicæ ut molæ ad terendum triticum, rotæ ad conterendos carbones, pistilla ad pulverem pyrium, mallei lignei ad papyrum, ferrei ad omne ferramentorum genus.

Quartus denique tractatus artem navigandi tradit quem in quinque libros partiemur. Primò agam de structura navium & partibus: de Variis navium generibus, de remigatione, velificatione, gubernaculo, anchora, de onere navibus imponendo: agam item de navigatione fluviatili.

Secundus pixidis nauticæ, seu Magneticæ compositionem, divisionem, tam usurpatam in Mediterraneo mari, quàm in Oceano usitatam, ejusdem usus, defectus, observandæ declinationis methodum

methodum, tam per amplitudines ortivas, quàm per ſyderum obſervationes aperiet.

Tertius Rhomborum, ſeu loxodromiarum naturam explicabit, hoc eſt illius lineæ quam ductu ejuſdem rhombi pixidis nauticæ, in ſuperficie Globi terraquei deſcribit navis.

Quartus Mappas Hydrographicas examinat, praxeſque varias docet ad determinandum navigii locum, aut ſeligendam loxodromiam navigationi accommodatam.

Quintus æſtimandi itineris rationem, variaſque correctiones ex obſervatione latitudinis, ſolemne item longitudinis inveniendæ problema explicat.

Sextus denique varias praxes nautis perutiles proponit, ut diarii conficiendi; ichnographicum portûs, aut littoris typum exprimendi, horam affluxûs aut refluxûs inveniendi, conjecturas imminentis procellæ, aliaque ſimilia.

Ex aqua Emerſi aërem ſubimus, qui cùm lumen & ſpecies, ad viſionem neceſſarias excipiat, rectè totam in aëre Opticam collocamus. Et quia viſio directis, reflexis, & refractis radiis peragitur; quatuor circa viſionem tractatus inſtituimus. Primus erit Optica in genere, Secundus Perſpectiva ſeu de radio directo. Tertius Catoptrica de reflexo. Quartus Dioptrica de refracto. Quia verò non tantùm lumen, & ſpecies, ſed ſonos etiam aër excipit, quintum addimus tractatum de Muſica.

In primo ſeu Optica; poſt exactam oculi deſcriptionem, organum in quo præciſe exercetur viſio, conſtituimus, quod adeò clare exhibemus, ut in artificiali oculo ea omnia exhibeamus, quæ naturali accidunt. Exinde ſingulas oculorum deceptiones, circa magnitudinem, diſtantiam, numerum, diſtinctionem, explicamus; cur presbytæ diſtantia meliùs diſtinguant, myopes è contrà viciniora meliùs videant. Ad hunc tractatum referimus ſtriatas imagines, quæ diverſis è locis ſpectatæ variantur, difformes, quæ ex certo reformantur. Totam item luminis propagationem.

Secundus tractatus perſpectivam tradet, pictoribus quidem perutilem, ſuis tamen Geometricis demonſtrationibus ornatam, quam in ſex libros partiemur. Primus fundamentalis erit. Secundus circa horizontalia plana, ſeu ichnographias perſpectivè deſcribendas occupabitur. Tertius Scenographiam, ſeu Elevationes tradet. Quartus puncta accidentalia explicabit. Quintus in laquearibus, & fornicibus perſpectivam exercebit. Sextus denique perſpectivas pluribus conſtantes partibus ſeparatis, umbrarumque deſcriptiones attinget: parallelogrammum item delineatorium explicabit.

Tertium tractatum Catoptricum ſeu de reflexione in tres libros dividimus, quorum primus reflexionis leges inquirit, tum ſpeculorum planorum proprietates omnes explicat, nempe cur imago tantum intra ſpeculi profunditatem videatur, quanta eſt objecti diſtantia, cur dextra appareant ſiniſtra; in horizontalibus everſa; cur in ſpeculis parallelis diſtantia & objectum multiplicentur, exinde ad multiplices praxes deſcendimus, modumque tradimus in exigua capſa, porticûs efformandæ quæ in immenſam planitiem excurrere videatur; multiplicandorum quantumlibet objectorum, omnium circa regionum nativis coloribus adumbrandarum methodum.

Secundus liber de convexis ſpeculis erit, inquiretque cur in iis objecta propiora, nonnihilque incurva videantur, cur luminis radii in iis diſpergantur, atque myopibus ſint utilia, exinde ad conica, & cylindrica deſcendit, pervulgatumque de imagine difformi, per ſpeculum cylindricum, aut conicum reformanda proponit.

Tertius concava explicat, primoque oſtendet quam vim ad comburendum, ex radiorum unione poſſideant. An verum ſit vel fabuloſum quod de Archimede claſſem Romanorum ſpeculo concavo incendente fertur, examinat. An poſſibilis ſit linea uſtoria infinita. Tum de radiorum paralleliſmo, modicoque luminis decremẽto, ita ut ad ducentos aut trecentos paſſus de nocte legere liceat. Quomodo objecta antrorſum non intra profunditatem everſa videantur. Quomodo Teleſcopia ex ſpeculis concavis, aut concavo, & convexo perficiantur.

Neque verò minùs illuſtris & amœna erit Dioptrica quæ pariter tres libros ſibi vendicabit. Primus poſt explicatam refractionis naturam, & leges, ſpecillorum convexorum, & concavorum proprietates aperit; convexorum quidem ad radiorum unionem, & conſequenter ad comburendum, ad exprimendas rerum imagines, formandoſque luminis penicillos, juvandoſque ſenum, ſeu preſbytarum oculos: concavorum ad radiorum diſperſionem myopum oculis perutilem. Neque vero polygonas lentes ad objectorum multiplicationem, aut diſperſorum unionem miſſas faciet, ſicut neque maxime convexas, ſeu minoris ſphæræ portiones ad microſcopia.

Secundus liber varia ſpecilla ſimul conjungit. Teleſcopia communia ex convexo, & concavo componit, tum ex duobus aut ex quatuor convexis; microſcopia item melioris notæ, magicam item laternam, methodum obſervandarum Eclipſium, aut macularum ſolarium tranſmiſſo per tubum radio. Addet item nonnulla ad praxin ſpectantia.

Tertius liber de refractionibus coloratis aget; primóque de priſmate triangulari, tum de Iride ejusque proprietatibus, rotunditate, distantia, motu, tum de coronis, pareliis, virgis, crepusculo, & aurora.

Sonus quamvis ita tenuis sit, & subtilis, ut neque sub numerum, pondus, aut mensuram cadere videatur? juris tamen est nostri. Demonstramus enim facile diapason seu octavam in ratione dupla positam esse, diapente in sesquialtera, cæterisque consonantiis suas rationes tribuimus. Varia item circa sonum inquirimus, cur chorda nullo impellente moveatur, sibi consona vibrante? cur in tuba sive communi, sive manuali saltus ita frequentes accidant. Systemata deinde omnia explicamus, diatonicum, chromaticum & Enharmonicum, varias instrumentorum species explicamus, regularumque musicarum rationem reddimus. Neque vero nuper inventam vocalem tubam omittemus.

Sterilior erit ignis unicumq; tantum tractatum suppeditabit, in duos libros dividendum, in quorum primo de ignibus artificialibus tam festivis, quàm bellicis. Secundò de machinis, seu tormentis bellicis aget. Hoc est certas methodos, ea examinãdi, & ad scopum certò dirigẽdi; sive directo jactu, seu circulari & parabolico, multas item quæstiones balisticas examinabit.

In cœlum tandem conscendimus, de quo quinque tractatus occurrunt nempe Astrolabiorum doctrina, Gnomonica, Astronomia, Kalendarium, & Astrologia.

Primus tractatus projectionem sphæræ in planum sub Astrolabiorum nomine indicat quibus primi mobilis problemata mirâ facilitate solvimus. Primus liber erit de globo tam Cœlesti quam Terrestri, & utriusque usu. Secundus erit de Analemmate in quo scilicet pro tabella Meridianum assumimus, oculumque infinitè removemus. Tertius Astrolabium universale proponit, in quo scilicet idem tabellæ planum, oculus punctum veri ortûs aut occasûs obtinet. Quartus in æquatore aut plano illi parallelo, cœlestes orbes describit, oculo polum Antarcticum obtinente. Quintus denique ex Nadir hemisphærium oppositum in plano horizontali contemplatur.

Quod ad secundum, seu Gnomonicam pertinet. Quamvis cœlum sphæricum sit; in plano tamen; ita graphicè describitur, ut sol in cœlo moveri non possit, quin eundem in pictura nostra motum observemus, quam picturam horologia sciotetica exhibent. Nullius quidem momenti videtur horologii delineatio, cùm cæmentarii nostri eam satis exactè perficiant; eorum tamen quæ ad horologiorum demonstrationem requiruntur scientia, homine digna semper mihi visa est. Horologia Scioterica varia sunt, cùm nulla sit materia in qua fœlicius luserit Mathematicorum ingenium. Astronomica, Babylonica, Italica describimus, in iis verticales circulos, Almicantarath, circulos domorum cœlestium; parallelos signorum, augmentum, & decrementum dierum, totumque Kalendarium inscribimus. Solaria, lunaria, ad stellas componimus. In omni plano ea delineamus, æquinoctiali, polari, horizontali, verticali, declinante in planis quomodocumque inclinatis. Per radium directum, reflexum, & refractum. Portatilia item in annulis, cylindris, armillis, scipionibus. Hunc igitur tractatum in quatuor libros dividimus. Primus agit de Horologiis in quocumque plano describendis. Secundus portatilium variam supellectilem subministrabit. Tertius horologia reflexa explicabit. Quartus refracta tradet.

Tertius tractatus erit Astronomicus, in quo primò varia systemata explicamus, tum planetarum Theoriam, variaque accidentia ut sunt Eclypses, oppositiones, conjunctiones, parallaxes, refractiones, retrogradationes, stationes, directiones, motus tam in longitudinem, quàm in latitudinem, magnitudines, distantias, fixarum item motum, adjectis omnium tabulis & praxibus explicamus.

Quartus vanæ curiositatis partum, Matheseos opprobrium, hoc est, Astrologiam judiciariam ex Matheseon albo expunget. In quâ scilicet nulla demonstratio, nulla scientiæ, aut veritatis umbra, sed perpetua hallucinatio, & ex solis planetarum nominibus, sibi de futuro blandientis stoliditatis ineptia: cui tanquàm appendicem annexuimus tractatũ de Meteoris.

Quintus denique Kalendarium continebit, totamque anni civilis, cum Solis, & Lunæ motibus conjunctionem & comparationem. In hoc variarum nationum annos civiles proponimus, quæstiones Paschales agitamus, de Cyclo aureo, Epactis, Cyclo solari, indictionibus, diebus Bissextilibus; periodo Julianâ & Cyclorum combinatione agimus. Et hæc est series, nexusque partium, quem Operi suo Author ipse destinaverat.

Habes hîc Lector Opus omnium quæ hactenùs in hoc scientiarum genere prodierint, absolutissimum, in quo vix aliquid deest, aut redundat, & cui simile nullum reperias rerum delectu, docendi ordine, & demonstrandi perspicuitate; Opus denique quod unum Matheseos candidato sufficere, atque omnium instar esse possit. Quod ad Authorem pertinet: quanto ingenio fuerit, id Lectorum judicio & scriptis ipsius æstimandum relinquo. Erunt, & ut arbitror, permulti erunt qui plura de moribus ejus, genere, ac pietate scire cupiant; in quorum gratiam, funebrem ejus laudationem hîc attexuimus habitam in Collegio Taurinensi à Patre Hyacintho Ferrerio Societatis Jesu.

ORATIO

ORATIO
HABITA IN FUNERE
R. P. CLAUDII FRANCISCI MILLIET DECHALES
SOCIETATIS JESU,

A R. Patre HYACINTO FERRERIO in Collegio Taurinensi ejusdem Societatis, die 28. Martii 1678.

ILLUSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. FRANCISCO AMEDEO MILLIET DECHALES,

Archiepiscopo Tarantasiensi, Regio Consiliario, & in Cameriensi Rationum Curia Primario Præsidi, &c.

L*AUDATIONEM R. P. Claudii Francisci Dechales, Illustrissime, & Reverendissime Archipræsul, ex Authoris manu officiis amicorum extortam, dignam credidi, quæ à Te legeretur, ut si fieri posset, fratrem redderem fratri. Gratum erit, ut arbitror, furtivum hoc munus, in quo nativam imaginem agnoscere poteris fraternæ virtutis. Quæ licet acerbam jacturæ memoriam excitet, quem tamen renovabit sensum doloris, eundem fortasse mulcebit. Cùm enim religionem, & pietatem amaveris in fratre magis quàm sanguinem, vix illum amisisse credes, cujus optimam partem, quæ scilicet mori non poterat, senties in animis hominum, ipsisque in paginis vivere. Itaque Claudii Tui virtutes illæ, quas leges, eandem Tibi voluptatem afferent, quam hauserat olim Ambrosius, dum pios mores recoleret fratris extincti.* Lætandum est magis (*aiebat ille, quod Te pariter dicturum puto*) quod talem fratrem habuerim, quàm dolendum, quòd fratrem amiserim.

SI quis vestrûm est, N. N. qui paucis antè mensibus sapientissimum Virum Patrem Claudium Franciscum Dechales in hac aula, ex hoc loco dicentem audierit; fieri certe nequit, quin miserâ rerum vicissitudine perturbatus diem illum Academiæ Taurinensi fælicissimum, cum hoc conferat tristissimo die, quo eundem audiet à me ab eodem loco funestâ laudatione commendari. Hæc igitur erant, quæ ille sperare jusserat? hæc erant, quæ nobis de seipso pollicebatur, cum eâ, quâ solebat, ingenii fœlicitate cupidis rerum novarum Adolescentibus Mathematicum Mundum evolveret? Fuit (ô mortis invidiam! ô labem! ô funus non unius hominis, sed omnium pæne litterarum, & artium!) fuit quàm magna, tam brevis fœlicitas vestra, Taurinenses. Mandavimus Terræ virtutem illam, quam scilicet hac lege permiserant superi, ut serò darent, eriperent citò. Amisimus Lumen, & Decus Academiæ: hunc nobis honorem idem annus attulit, idem ademit. Auget jacturæ gravitatem violenta celeritas fati: mentem auream, animum plane cælestem agnoscere licuit, frui negatum est; ut scilicet compertâ priùs virtute statim carituri, & certiùs experiri malum, & dolentiùs prosequi cogeremur. Enim vero, nisi pretiosæ essent sapientum exuviæ, nisi religiosum cinerem, & dulces reliquias vel ipsis lacrimis emere præstitisset, parum abfuit, quin dicerem: si tanto viro repente orbari debuimus, satius fuerat nunquam adipisci, quod erat incredibili mœrore, & luctu dimittendum; quid enim ab ejus possessione boni lucrati sumus præter usum voluptatis brevissimæ, & acerba semina magni doloris? Sapientis tamen est, Auditores, justo dolori vel modum præscribere, vel otium dare; ne periculoso silentio seipsum tegat, fit enim sæpè, dum taciti dolemus, ut ne dolere quidem videamur. Abeamus itaque ab hoc mœstæ taciturnitatis officio; erumpat in commendationem virtutis ereptæ mutus dolor; nefas est, si pares illi laudes invenire non possumus, impares recusare. Nam etsi laus nulla sufficere potest summæ virtuti, studio tamen Oratoris sufficere debet conatus ipse laudandi; qui si parum fœliciter cedat, utrumque fateatur ingenuè, & se minùs potuisse, quàm vellet, atque id saltem voluisse, quod posset. Ego tamen Claudium Franciscum Dechales satis commendatum existimabo, si vocibus omnium vestrûm commendavero; immò ne hoc quidem satis esse credam, nisi modestam hominis verecundiam ad ejus laudes adhibere, & impellere possim. Quod ut consequar, duo mihi potissimùm quærenda sunt;

Prælectionem Mathematicam habuerat P. Dechales quatuor ante mortem mensibus in aula collegii Taurinensis, in qua oratio habita.

Quid cæteri de ipso, quid de se ipse sentiret. Divinam quippe virtutem judico, quam mirantur omnes, quæ seipsam sola non miratur.

Primum omnium, si fortunæ, naturæque munera delibare placet, haud scio, utrum magis ex dignitate futurum sit; an studiosiùs inquirere, an potiùs negligenter dissimulare, quid omnes de illius sanguine, de patria, de opibus, & splendore parentum, de antiquitate originis, & nominis claritate judicarent. Quippe in ejusmodi viro, qui abdicatâ rerum humanarum pompâ fortunæ domesticæ strepitum ejuraverit, commendare majores, titulos, & stemmata ambitiosè describere, quid aliud, quàm sterilitas laudum videri potest? tenuitatis enim, & inopiæ argumentum est, aliena invadere, ut crescant sua. Quamobrem ineptè laudamus, quod ille latere voluit, ne laudaretur; ineptè miramur in sene, quod nondum virilis animus, nondum matura virtus infrà dignitatem suam esse judicavit. Nisi fortè magnanimus ille contemptus, quo rebus humanis altior, quidquid omnes venerantur, animosè dedignatus est, tabulas majorum, & stemmata, monumenta clarissimæ stirpis, sacros, militares, aulicos dignitatum gradus, & insignia velut in triumphi morem explicari deposcat; ut ex illo rerum apparatu æstimetur, quantus ille fuerit, qui tanta contempserit. Quidquid cæteri sentiant, Auditores, ego certe ita judico: Nobilitatem ex virtute nasci, sed ab illa quasi matrem ornari virtutem; sacros homines moribus quidem magis, quàm titulis censendos esse, sed morum sanctitatem additâ magni nominis luce pulchriùs, nitidiúsque splendescere; plurimum denique ad Claudii gloriam afferre momenti societatem ipsam, & consensum eorum omnium, quæ apud varios hominum ordines in pretio sunt. Cujus enim gloriæ fuerit, eundem virum nobilitate Aulicos, Doctrinâ sapientes, religione, pietate, innocentiâ Domesticos in admirationem sui, & amorem rapuisse? Itaque dignitas illa, quàm à majoribus acceperat Claudius, non quòd parva videatur, negligenda est, sed tanquam nota omnibus leviter potiùs attingenda; pedem hac in re altiùs figere non accurati, sed otiosi oratoris esse videretur.

Neminem quippè vestrum ignorare arbitror Millietam gentem fœminea, & virili stirpe latissimè propagatam utriusque Nobilitatis tum Sabaudæ tum Subalpinæ prima capita arctissimo cognationis vinculo attingere, Monmajorios, Provanas, Davisios, Noverios, Lescherenios, Costas, Isnardos, Solarios, Osascos, Monchanutios, Flescerios, Rotarios, Vallisareos. Quotusquisque Procerum est, qui nesciat, Claudii fratres, alterum Camberiensis Curiæ Supremum Præsidem, alterum à Senatore Pontificem nuper ab amplissimo Centronum Sacerdotio ad Præsidis demortui curas funestâ hæreditate fraterni honoris tum Reginæ precibus, tum Pontificis jussu compulsum; reliquos vero partim experientiâ rei militaris, & bellicâ fortitudine illustres, Principi, & gloriæ sanguine, & vitam consecrasse, Provinciarũ, & arcium præfecturas summâ fide gessisse, partim sacræ militiæ studio sub iisdem signis, quibus olim Claudius, etiamnum vivere. Nostis omnes, neque ista mihi ex Annalium fide petenda sunt, hujus dignitatem familiæ non unius ætatis esse, sed omnium retrò temporum, cujus initia, progressúsque obliviosa antiquitas abdidit; jam inde à Caroli Emmanuelis Primi temporibus Magnos Sabaudiæ Cancellarios, & Principis Patres numerasse, tum perpetuâ serie Præsides, & Senatores, Centuriones, & Tribunos militum, Torquatorum Sabaudiæ Equitum Cancellarios duos, Nobiles Principum Cubicularios, Equites tum Sancti Mauritii, tum Melitenses, denique infulatos Antistites quatuor, & quem Tarantasiæ Archiepiscopum dixi ad Sabaudiæ fœlicitatem superesse, & cæteros pridem extinctos, Philibertum Augustæ primùm, mox Eporediæ Episcopum, Paulum Maurianensem, Philibertum alterum Taurinensem. Vix habet Sabaudia gradum ullum honoris, quem Domus ista non occupaverit; omnia propemodum Regni ornamenta in unam familiam successu temporis congesta sunt; quidquid largiri Principes, quidquid virtus sperare potest, impetravit: nihil jam futuris Nepotibus superest, quod insoliti, novique splendoris acquirant, sed gloriari possunt ab illa se Domo prodiisse, in qua vincere nequeant Majores suos.

Quare huiusmodi laudes vulgatas omnibus ultrò relinquamus; ad Claudium accedere propiùs, & percontari liber, quod esset, de viri doctrina judicium Sapientum. Atque utinam Europæ voces universæ imitari possem, & plausus referre, quos dedit; cum grande opus, Mathematicas omnes disciplinas, velut tantæ mentis hæreditatem exciperet, nec Auctori minùs gratularetur, quàm sibi; illi, quòd ejus nominis famam perennibus monumentis posteritatis memoriæ consecratam nunquam timeret vitio temporum interituram; sibi, quòd tacitis omnium votis indulgente Claudii modestiâ vocaretur in partem, & fructum eruditi laboris! Mirabantur alii mentis vim, & robur ingenii, quòd rerum arduitate non vinceretur; sublimitatem alii, quòd communia, & trita contemneret, altissima quæque perinde, ac obvia, & vulgata prægrederetur. Erant, qui perspicacis animi subtilitatem commendabant, quòd abstrusa, & longè ab oculis semota penitùs, intiméque pervaderet, qui elegantiam, & venustatem, quòd suo quæque loco collocaret, aptè omnia, ordinatéque digereret; qui fœlicitatem, & copiam, quòd paucis multa colligeret; qui diligentiam, & laborem, tum quòd nihil omitteret, tùm quòd angusta, & scopulosa non minùs quàm amæna, & jucunda pari studio, & alacritate versaret. Sed omnes pariter uno vocis, animique consensu fatebantur, se quidem mirari satis non posse amplitudinem illam mentis, & vastitatem, quâ solus tam multa, tam ardua, spinosaque brevi decennio & universè complecti, & fœliciter evolvere, & celeritate summa ad exitum deducere potuisset. Fuisse plurimos, qui Matheseos partem aliquam illustandam sibi delegerint, alios Opticam, Staticam alios, plures in Elementis vitam omnem, contentionemq; animi occupasse non sine laude, & pretio laboris, singulos denique singula decerpsisse; qui omnia tam plenè, tàm vastè aggredi, & comprehendere auderet, ante Claudium fuisse neminem. Ne illos quidem antiquitatis magistros, & Duces æternitatem nominis, & famam ex universa Mathesi, sed ex singulis partibus collegisse. Elementa tradidit Euclides, Horoscopia Anaximander, Geometriam Democritus, Mechanicen Archytas, Arithmeticam Eudoxus, Architecturã Vitruvius, Sphæram, & Cylindrum Archimedes, Astrologiam Xenocrates, & Ptolomæus: quid plures enumerare opus est? Nemo unquam angustos limites, quos sibi circumscripserat, egredi, nemo plures, quam duas, tresve disciplinas ex infiniti operis mole pertractandas suscipere ausus est. Cujus animi? cujus doctrinæ fuit, quod portentosa illa veterum ingenia desperaverant, quod antiquitas tota intentatum reliquerat, id non modo fortiter arripere, sed celeriter exequi? Claudius Franciscus Dechales, qui primum ætatis florem humanioribus literis, reliquam verò, & optimam vitæ partem Philosophiæ, & Theologiæ plenè devoverat, qui mentem in peregrinas

peregrinas diviserat linguas, Italicè, Latinè, Græcè loquebatur, neque veterum modò delicias noverat, sed recentium quoque lapsus, & errata Græcorum, cùm spiritus illos, nervosque robustioris ætatis pristinus fregisset labor, hoc sibi tamen onus imposuit, hoc suarum virium esse arbitratus est: Tractatus, ut cum ipso loquar, triginta, & amplius, Libros ferme centum typis edidit, quibus Mathematica omnia abdidit, inclusitque. Neque in tanta varietate rerum, & festinatione scribendi apicem ullum immensi operis inexploratum abire permisit, quin sæpe revocaret ad trutinam, attentéque inspiceret, num parere ambages, num aciem effugere posset tyronis inculti. Neque enim, ut tenebriones aliqui solent, qui caliginem, & umbras, quas materia secum habet, suis quoque tenebris augent, non, inquam, cogitabat, quàm multa, sed quàm dilucidè scriberet; quòd eo consilio injecerat calamo manum, ut in Mathematicis peregrinū prorsus, & hospitem à primis usq; rudimentis ad supremū artis fastigium longâ quidē, sed planâ, & æquabili viâ, sine tædio, & labore deduceret.

Et sane tenuit Claudius, quam sibi destinaverat, publicæ utilitatis metam; sed nobis quantum nocuit, quòd nimis prodesse voluerit! Mortem hanc, quam dolemus, beneficus nobis, fatalis ipsi labor properavit: quid enim de illius vitâ expectare poteras, qui quatuor annorum spatio, quibus Parisiis docuit, mille Scriptorum volumina (ut ipse aliquando familiari suo amicè testatus est) incredibili celeritate perlegerit? Importunum laborem, qui festinatæ mortis est reus! qui tantum opus simul peperit, simul operis Authorem, qui opere suo pretiosior erat, extinxit. Paginas infœlices! quæ viri sapientiam, quam continent, ut posteritati tradere possent, ætati suæ, & nostræ inviderunt. Excepimus plausu eruditum munus; credebamus enim Doctrinæ suæ munus illud esse, non vitæ: Damnare nunc cogimur funestam hominis liberalitatem, & qui futuro dolori gratulabamur incauti; pristinam fœlicitatem deploramus. Non egebat libris ætas hæc nostra, ut tantam mentem agnosceret. Pervaserat Principum, & Regum Aulas Claudii fama, antequam scriberet. Ludovicus XIV. Galliarum Rex, cùm rudes & inexpertos artis suæ nautas, ipsosque navium Præfectos erudiri vellet, sciretque pinguibus nautarum, & militaribus nobilium ingeniis longè subtiliorem requiri industriam, & artem Magistri, Claudium, cujus Doctrinam celebrari audierat, è Sabaudiâ evocatum institutorem nauticæ Massiliensibus dedit. Carolus Emmanuel II. Princeps optimus, qui omnes hujus nominis, & sanguinis, homines unicè diligebat, cùm illum audisset intermissâ Mathesi Theologiam Lugduni tradere, Malè, inquit, actum: debuerat cætera prorsus omnia abjicere ex animo, seque totum Mathematicis abdere. Nondum scilicet illius vastissimæ mentis vires agnoverat, quæ licet in plurimas artes divisa, sufficeret omnibus: Nesciebat eum esse Claudium, qui rerum humanarum, divinarumque scientiam ita penitùs hauserat, ut nunquam de Mathesi cogitasse videretur. Audivimus ipsi, & sæpe admirati sumus cum in publico disceptantium theatro breviter quidem, & contortè, sed acutè subtiliterque dissereret, ut hominem crederes non argumenta proferre, sed spicula. Audivimus, cùm in familiari congressu de Theologicis incideret sermo, rem ipsam protinus attingere, neque per ambages, & circuitus accedere ad causam; aut in vestibulo hærere, sed recto mentis cursu, & primo statim gradu ad controversiæ caput, nodumque ipsum, ut aiunt, devenire. Quod quidem eò admirabilius est, quò longiùs ista ab hominis instituto recedebant, qui pluribus jam annis Philosophiæ, & Theologiæ cogitationem omnem prorsus abjecerat.

Hæc igitur de Claudii eruditione, & doctrinâ palam, & publicè ferebantur; sed erant longè majora, quæ nunquam prodierant Domo, & intra nostros parietes breve quidem, non tamen, ut arbitror, contemnendum secretæ admirationis theatrum habuere. Quamvis enim magnum apud exteros locum Claudius obtineret, mihi tamen credite Auditores, nunquam hominem plenè nostis; nunquam enim totus in publicum venit. Vos scilicet in paginis, & libris, nos in moribus animum Claudii legebamus; vos, quæ scripserat, agnoscere potuistis; nos, quid rerum in dies ageret, explorare; vos sæpe de literis, sæpius fortasse de pietate, & virtute disserentem audiebatis, nos, quæ cæteris suaderet, reipsa perficere, & exequi videbamus, plura etiam præstare, quàm quæ cæteris suaderet. Atque illa quidem tanta sunt, ut taceri non debeant; eorum verò recordatio tam acerba, ut cogitari vix possint. Hæret adhuc pectori cicatricis asperæ dolor; sentio perturbari animum, & recrudescere vulnus, dum ea mente repetimus, quæ olim maximè delectabant, dum videremus: adeò ut, quæ pietas semper fuit, nunc quædam crudelitas sit, laudare virtutem. Placet tamen, Auditores, crudelem potius esse, quàm invidum videri; non parcam dolori vestro. Nam etsi sopitus dolor excitetur commemoratione virtutis, hoc tamen acerbo licèt officio pascitur animus, & quiescit. Itaque ut tanti viri virtutes neque silere possumus sine invidiâ, neque recordari sine dolore; ita nec dolere quidem licet sine aliquo sensu voluptatis. Agite, repetamus animo, quæ olim taciti mirabamur. Quantus erat in illo contemptus rerum humanarum, qui nihil jam optare noverat, nec fugere; neque unquam gaudere visus, nec conqueri. Summa, & infima, splendida æque, & abjecta eodem apud illum ordine habebantur; ut neque in illis honorem quæreret, neque in his pudorem, aut obscuritatem timeret. Pari studio, & alacritate animi Massiliæ inter solos quandoque Nautas, & Parisiis inter Equites, Principesque versabatur. Nunquam munus muneri, Urbem Urbi prætulit, qui omnia pariter humana contemnebat. Suppellex apud illum nulla: Apum more nihil secum habebat præter labores suos. Sed quid cætera quæreret, qui seipsum alieni juris fecerat? Quippe ut olim Philosophus ille, cùm multa didicisset, se nihil scire profitebatur; ita Claudius, cum quæ cæteri vellent, summo studio, & alacritate sequeretur, & alieno arbitrio viveret, hoc tandem consecutus fuerat, nihil velle. Itaque cum Parisiis in hanc Urbem accersendus esset auctoritate Principis, precibus, & studio Nepotis, occurreretque ægrè hominem fortasse ab illo orbis terrarum theatro discessurum, omnia tamen inconsulto Claudio peracta sunt, quem scirent nunquam spectare, unde discederet, sed quò vocaretur. Neque enim aut loci dignitas, aut splendor ullus, nec cupiditas gloriæ, aut vana celebritas nominis magnanimam Viri mentem acuebat ad laborem; cum sæpe amico suo, cui nihil aut dissimulare voluit, aut simulare potuit, ingenuè professus sit, nunquam se laudis, honorisque studio adductum, ut libros ederet, sed spe & amore publici boni.

Quæ omnia eò majoris erant apud nos ponderis, quò ille vehementiùs à simulatione, & dolo abhorrebat. Sunt enim aliquando, qui mores optimos, quos assequi nolunt, imitari tamen student: Claudius (ô virum, qui nihil tegere noverat, præter virtutem!) gloriam & laudem, quam meritis majorem crederet, dedignabatur; imò quam sibi debitam negare non posset, verecundè, & modestè declinabat. Nullus in illo fucus; plena omnia ingenuitatis, plena candoris. Parcè loquebatur, sed graviter, sed sapienter; neque numerus, aut turba, sed pondus erat in verbis. Plena vox, & constans, non levis, non lubrica; gravis incessus, non concitatus, non præceps; majestatem præferebat aspectus, quam comitas, quam humanitas temperabat; verebaris occursum, non formidabas: idem denique cum omnibus agendi tenor; pares publicis domestici

mores.

mores. Quid? animus ille quàm integer, quàm incorruptus! quâ pietate, & innocentiâ, cæteroque virtutum comitatu dives, instructusque eminebat! Nunquam efferri visus, nunquam erumpere; iracundiæ ne primos impetus quidem, nec leve vestigium perturbatæ mentis agnoscere licuit. Nam si quid controversum accideret, ubi doctrinâ, & ingenio pugnandum esset quàm erat sine felle ipsa indignatio! quàm decorus ardor! quàm innocens flamma! Hominem ego altissimo flumini sæpe tacitus comparabam, quod placido, quietoque lapsu nunquam extrà ripas redundaret, sed illimi aquarum puritate profundum alveum, altéque recedentem ostenderet. Atque hanc facilitatem, & quietem ingenii hauserat ille quidem ab eodem fonte, à quo cæteri ex ejus stirpe, quibus suavitas morum videtur commune quoddam esse patrimonium sanguinis è majorum venis acceptum; sed auxerat beneficium naturæ, & excoluerat arte, studioque virtutis: adeo ut nec repentinis casibus commoveretur, & in ipso mortis occursu eandem animi constantiam, & serenitatem frontis servarit. Erat tamen in illo silentio, & tranquillitate mentis ardor quidam indolis, & vegetum robur, quo magna, & sublimia fortiter moliebatur, pertinacem solitudinis, studiorumque laborem constantissimè tolerabat, nunquam è cubiculo pedem, nunquam à libris, & calamo manum referebat, ut nova in dies meditaretur; & quæ cogitaverat, scripto traderet, non ut grandi arcano amicis, & sibi custodiret, sed ut publicæ utilitati liberaliter consecraret. Quid dicam? quibus stimulis, quâ flammâ, quo divini cultus promovendi studio incenderetur, cum in ipso juventutis flore tenuissimæ valetudinis adolescens precibus quàm potuit diligentissimis postularit, ut Constantinopolim ad Græcos pueros erudiendos mitteretur? Quod quidem assiduus flagitator impetravit, & in Principe Turcarum Urbe, insulisque circumpositis toto quinquennio commoratus est inter tædia laboris improbi, & puerilium nugarum. Itaque, Auditores, cum auctoritas Principum, preces, & officia amicorum utili furto Claudium Parisiis eripuissent; cum nostrum esse, inter hos parietes vivere hujusmodi virum videremus, gratulabamur fœlicitati nostræ, neque ut alii clamore, & plausu, sed velut attoniti, suspensique intimè gestiebamus, tantam virtutem alto silentio, & tacita veneratione prosequebamur.

Atqui cùm apud Principes, Equitesque, apud sapientes, & Domesticos præclara esset, & pervagata Claudii fama, haud abs re fuerit paucis inquirere, quid de se Claudius ipse sentiret. Brevissimè dicam. Quod unusquisque ex vulgo literatorum, quod mediocris ingenii, & conditionis homo, hoc de seipso Claudius sentiebat. Hinc scilicet oriebatur verecundus ille pudor, & Aulæ fuga; quippe toties expertus fuerat modestiam eò severiùs excipi, quò benigniùs exciperetur à Principe. Mirabatur enim, & vix ipse credebat sibi, cum apud Equites, apud Reges in pretio esse, nomen aliquod, & locum obtinere experiretur. Hinc cùm occurrentem fortè Claudium magni nominis Princeps singulari benevolentiæ significatione salutasset; quærenti deinde, amico, cur nunquam Principem obsequii causâ adjisset; quid, inquit, adirem, cui me putabam ignotum?

Plura dicerem, si aliquid unquam ille dixisset; sed laudum suarum avarissimus vir, qui aliena tantùm mirari poterat, sua despicere, silentio suo penè etiam nobis legem imposuit, & necessitatem tacendi. Nunquam tamen hoc impetrabit à me inimica Claudii gloriæ Claudii modestia, quæ si cæteras laudes siluit, silentium certè ipsum silere non potuit, & maximam hanc laudem Oratori reliquit, quòd cæteras laudes oppresserit. Quamquam non tacebat Claudius, dum taceret; virtutes enim parvæ loquuntur, ingentes tacent; sed taciturnitas ipsa loquax est, & magnitudinem mutæ virtutis sine strepitu, & voce fatetur. Neque tamen eo consilio de seipso dicebat nihil, ne laudes suas seipsum laudando minueret, sed ideò nihil laudabat, quòd nihil in se crederet posse laudari. Neque idcircò hoc credidit, quòd solus non agnosceret, quæ cæteri omnes in illo mirabantur; sed vastus animus, & majorum capax, cum diviniora adhuc superesse cerneret, quæ nondum assequebatur, quamquàm erant maxima, quæ jam studio, & labore consecutus fuerat, tanquam infima, & nulla essent, contemnebat. Mirentur tamen alii, quòd sua nunquam laudaverit Claudius; miror ego magis, quòd sua nunquam loquendo despexerit. Plures enim sunt, qui se ipsos voce contemnunt, se nullius rei, nullius nominis, nullius ingenii prædicant; sed interim contemptum, & negligentiam sui cogunt superbiæ, & ambitioni servire. Nihil horum Claudius. Scire vultis, quid ageret? tacebat.

O silentium hominis! O taciturnitatem omni voce, & laude majorem! Loquetur tamen posteritas tota; loquar ego, dum vivam; literæ omnes, Artes omnes, Academiæ, & Gymnasia, quæ te annis fermè triginta docentem audivere, sapientiam, pietatem, innocentiam, religionem tuam loquentur. Neque Civitas ista, cujus beneficio dies vitæ postremos impendisti, de Te unquam Claudi silebit. Manet altè impressa mentibus, & fideli cogitatione descripta imago virtutis tuæ. Vivis, æternumque vives in animis omnium, in quibus jam vivebas, dum viveres: habes hanc morti tuæ superstitem vitam, quæ mori non potest. Ita enim præsentem sentimus, ut sæpe obliti doloris nostri, & funeris tui, quem nuper sepulcro dedimus vix credamus extinctum, & oculis cernere videamur. Claudium cogitamus, Claudium quærimus, Claudium sive amoris, sive doloris inani fraude decepti videmus, audimus, alloquimur. Salve heroum sanguis, salve, & æternum vale. Fruere fœlicitatis fastigio, quam Tibi virtute peperisti. Si tuorum, si mei, si laudum istarum, quas vivus contempseras, curam geris post fata: O Pater, accipe postremum hoc munus, quod cineri tuo in amoris, & grati animi argumentum non sine lacrimis dolentes offerimus. Fruemur interim hæreditate luctuosâ, quam solam relinquere potuisti; habebimus pretiosa spolia mortalitatis tuæ: & ne quid juris sit tempori, signabimus fortunatum lapidem, tuasque laudes & nomen immortalibus notis inscribemus:

HIC JACET
CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DE CHALES,
GENERE, SAPIENTIA, VIRTUTE
NOTUS OMNIBUS; IGNOTUS SIBI.

SUMMA PRIVILEGII REGIS CHRISTIANISSIMI.

AUctoritate Regiâ sancitum est, nequis Librum, cui titulus est R. P. CLAUDII FRANCISCI MILLIET DECHALES è *Societate* IESU *Cursus seu Mundus Mathematicus, &c. quatuor tomis comprehensus*, intrà sex annos à die Privilegii numerandos, imprimat, aut alibi impressum in hoc Regno divendat præter Anisson, Bibliopolam Lugdunensem, aut eos quibus id juris concesserit, hocque omnibus perindè clarum, notum, indictum habeatur, ac si Regii diplomatis sententia operis initio præfigatur, finive postponatur. Qui secus faxit librorum confiscatione, aliisque pœnis Regio diplomate declaratis mulctabitur. Datum Parisiis die 13. Novembris 1685. De mandato Regis signatum IUNQUIERES.

Quod quidem diploma in acta Typographorum Parisiensium relatum est, die 19. Novembris 1685. à CAROLO ANGOT, *Syndico.*

Desiit hujus editionis prœlum die 16. Ianuarii 1690.

INDEX

INDEX
TRACTATUUM, LIBRORUM, & Propositionum, quæ in tomo primo continentur.

TRACTATUS PROEMIALIS DE PROGRESSU MATHESEOS, & illustribus Mathematicis.

Notabit Studiosus Lector, Authorem, præter naturam & progressum Matheseos, quæ in hoc Tractatu nitidè exponit, insuper passim in quolibet capite, grave, verum & censorium de cunctis ferè Authoribus qui de Mathesi, tum in genere, tum in particulari, scripsere, dare judicium.

TRACTATUS PRIMUS. EUCLIDIS ELEMENTORUM Libros XIII. Complectens.

TRACTATUS II.

THEODOSII ELEMENTA

Sphærica, tribus libris comprehensa.

TRACTATUS III.

DE SECTIONIBUS CONICIS.

TRACTATUS IV.

ARITHMETICA.

LIBER I.

De Regulis elementaribus.

32. Ex

ARITHMETICÆ
LIBER II.
De Numeris fractis.

ARITHMETICÆ
LIBER III.
De extractione radicum.

DE RADICE CUBICA.

ARITHMETICÆ

LIBER IV.

Arithmetica calculatoria, & divinatoria.

TRACTATUS V.

TRIGONOMETRIA.

TRIGONOMETRIÆ

LIBER I.

De sinubus, tangentibus, & secantibus. 421

 micos,

TRIGONOMETRIÆ

LIBER V.

De resolutione triangulorum sphæricorum rectangulorum.

TRIGONOMETRIÆ

LIBER VI.

De resolutione triangulorum sphæricorum obliquangulorum.

PRAXIS TRIGONOMETRIÆ.

LIBER VII.

TRACTATUS VI.

ALGEBRA.

ALGEBRÆ

LIBER I.

Ad æquationem Algebricam, Isagogicus

ALGEBRÆ

LIBER II.

Præceptorum usus tàm methodo communi, quàm speciosa.

ALGEBRÆ

LIBER III.

30. Numerum

ALGEBRÆ
LIBER IV.
Varia problemata æquationum compositarum.

ALGEBRÆ

LIBER V.

Poteſtatum Analyſis.

+ Sextuplo

ALGEBRÆ
LIBER VI.
Extractio radicum ex potestatibus affectis.

ALGEBRÆ
LIBER VII.
Exempla secundùm methodum speciosæ Algebræ.

ALGEBRÆ

LIBER VIII.

Diophanti exempla, ex libro primo.

23. Invenire

EX DIOPHANTI LIBRO II.

HYPOTHESEON CARTESIANARUM REFUTATIO.

TRACTATUS PROEMIALIS DE PROGRESSU MATHESEOS, ET ILLUSTRIBUS MATHEMATICIS.

CAPUT PRIMUM.

De Mathesi in genere.

MATHESIN si vim nominis & Etymologiæ præcisè spectemus, scientiam omnem indicare, doctrinámque in genere significare fatebimur; peculiari tamen jure communíque usu, illi tribui facultati, quæ circa quantitatem versetur, asseremus: non ideo quòd scientiæ, ut voluit Plato, & inter eas mathematicæ, in recordatione positæ essent, & in illis præcipuè valeret æternarum cogitationum repetita memoria: Sed quòd solæ primitùs discerentur, ob indubitatam firmitatem animos discentium solidarent, & ad reliquas capessendas idoneos redderent. In Mathesi quippe, velut in trunco surculi virtute, & energia cæteræ continentur scientiæ, aut saltem ea obstetricante in lucem prodeunt. Hinc decantatum illud Platonis edictum, foribus ejus præfixum, ὐδεὶς ἀγεομετρητος εἰσίτω. Nullus Geometriæ expers ingrediatur. Hinc tam severè in Xenocratis schola dicendæ Matheseos sancita lex, ut qui illius præsidio esset destitutus, lanificio potiùs, aut cuicumque ignobiliori artificio, quàm philosophiæ cujus ansas non haberet, aptior videretur. Neque verò à magistro suo dissentit Aristoteles, qui numquam seipso major extitit quàm cùm in organo suo, opere illo absolutissimo, tantique ingenij fœtu, non impari, hujus scientiæ Methodū usurpavit demonstrationésque suas Mathematicis finibus circumscripsit, ita exēpla exemplis respondent ut non Philosophus sed severus Geometra videatur. Non vacat Antiquorum omnium placita referre, qui communi suffragio Mathesin scientiarum omnium parentem nominarunt, senseruntque sine illius præsidio ad alias eniti idem esse, ac sine alis ad volatum accingi. Cùm experientia compertum sit, etiam qui tardioris sunt ingenij, si ad Arithmeticem & Geometriam animum appellant, solertiores evadere, iisque artibus acui ingenia, & celeritatem percipiendi acquirere, ex quo fit ut Mathesi imbuti, ad omnes disciplinas, acres, promptique appareant. Methodus quippe à Geometris communiter usurpata, progressus ille mirabilis, & nexus, quò ex certis, & indubitatis principiis, ad reconditiora, & abstrusa sensim ascendimus, nullúmque probabilitati, sed soli demonstrationi locum damus, genuinam scientiæ ideam ingenerat, docétque cuncta non ad sensus, sed ad rectæ rationis normam, & amussin exigere.

Quis enim verò hodiernæ Philosophiæ, Physicæ præsertim, inanitatem æquo satis animo tulerit; in qua si communes notiones, & doctorum ut ita dicam idioma, modúmque loquendi à communi, & vulgari paulo alienum excipias, præsertim dum ad particularia descenditur, nihil quod satisfaciat invenies, nihil quod probabilitatis, & opinionis nomen mereatur nedum demonstrationem præseferat. Hanc ex neglecto Mathesis studio, ei labem illatam esse, Antiquorum judicio fretus, assiduóque edoctus experimento, asserere non dubitarim, cùm mathemata teste Platone mediæ cujusdam conditionis existant inter sensibilia & æterna, sintque quasi scamna, & gradus quibus ad illa conscenditur. Quàm autem ab Antiquorum placitis degenerarit & decidat, quæ communiter traditur Philosophia, vel inde conjicias, quòd hæc sine Mathesi nullo pacto intelligi possint; hæc autem inoffenso quasi pede, ab omnis Geometriæ expertibus decurratur. Quòd si hoc præsertim sæculo, assurgere non nihil videtur Physica, fructúsque edidisse non pœnitendos, si multa scitu digna, jucunda, Antiquis etiam incognita detecta sunt; ideò sane quia Mathematici philosophantur, rebúsque physicis Mathematices placita admiscent. Tanta enim inter eas scientias cognatio, & societas intercedit, ut jure asserere audeam, exceptis nonnullis Metaphysices ut vocant formalitatibus, quidquid in Physica indubitati occurrit, id totum ex Matheseon fontibus profluxisse. Si singulas ejus partes percurrerem, ubique Mathesin regnantem, ubique facem præferentem, liceret animadvertere. Atque ut à summis ordiamur, quid de figura mundi sine Mathesi constitui potuit unquam, quid de cœlestium orbium natura, ordine, situ, magnitudine, quid de siderum motu vario, distantia, cognosci; quid de dierum diversitate, climatum differentia, tempestatum anni nunquam interrupta vicissitudine, quid de luminis & caloris tam attemperata diffusione, sine illa determinari, quid de solis, & lunæ cæterorúmque planetarum, aut fixarum proprietatibus, aut in hæc inferiora influxu sine illius præsidio demonstrari umquam potuit? Cæcutiret adhuc circa cœlestes orbes, aut ad tantum splendorem hebesceret Philosophiæ acies, ni novos recentésque à Mathesi oculos in telescopio mutuata, & in Sole nævos & maculas, enascentesque identidem fuligines, aut accensas de repente faculas intueri, montes, & valles in Luna notare, falcatam Venerem, gibbum Martem, novo stipatum planetarum satellitio, duplicíque & triplici zona fasciatum Jovem, ansulatum Saturnum observare disceret. Quid de Cometarum natura, aut loco constitueret unquam Physica, ni accuratis Astronomorum circa eorum parallaxin observationibus niteretur.

Quòd si paulisper ad hæc inferiora descendere, & meteora intueri lubeat, hæc sine Mathesi intelligi satis non posse deprehendes, quorum scilicet cognitio ita catoptricis, & dioptricis legibus continetur; ut qui eas nescierit, ne gressum quidem figere audeat, aut iridis, coronæ, pareliorum, virgarum aliorúmque similium naturam satis explicare valeat. Quid de reconditioribus naturæ arcanis dicam, de maris æstu, magneticis attractionibus, & directionibus, de fontium scaturigine, & fluxu, de elementorum æquilibrio, gravium ad centrum descensu, motuúmque acceleratione, de percussionis, aut gravitationis viribus. Quid humani corporis fabricam recenseam, quid sensuum organa, agendíque modos varios, quid visionis præsertim deceptiones innumeras, vitia, correctiones, adjumenta; quid reflectiones varias, & refractiones, totamque luminis propagationem; quid sonos commemorem, eorúmque diffusionem, & in echone reflexiones, quæ omnia ita à Mathematicis placitis pendent, ut jam non tam ad physicam, quam ad Mathesin pertinere videantur.

Neque vero ad naturalium effectuum cognitionem tantum, causarúmque indagationem, & speculativam, ut ita dicam contemplationem summè utilis est Mathesis, quæ certam rerum cum suis principiis connexionem, ex utriusque ad invicem comparatione, & proportione deprehendit: Sed ad usum communem hominum, vitámque civilem suam impensè impendit operam. Et ut à minutioribus exordiar, quod reipublicæ membrum satis suo fungi munere, sine Arithmetica potest An mercator commercium exercere; & ab exteris nationibus totius orbis divitias invehere, tutò & sine detrimento distrahere poterit, nisi debitorum & creditorum, lucri, & damni rationes ad minimum usque scrupulum, exactámque præcisionem ineat? An œconomicam exercebit civis, nisi redituum & expensarum calculos subducat? An Ærarium rectè administrabit quæstor qui accepti, & expensi rationes æqua lance non expendet? An aciem instruet imperator, qui numeros nescierit?

Geometria verò quàm latè pateat in republica nullus est qui nesciat, neque enim & operariis plerísque debitum reddetur stipendium, nisi ad Geometriæ placita & leges recurras. Cæmentariis, & latomis quis pactam mercedem tribuet, qui ædificia metiri nescierit, quis agros vendere, aut emere tutò poterit qui Geodesiam ignorarit, quis vinum aut aliquem liquorem distrahere, qui ad tereometriam non recurret: quis pleráSque merces tuto sibi comparare, qui librarum, & bilancium fraudes totámque staticam non teneat; quibus fraudibus non subjacebit, qui mensurarum leges ignorarit, ita in rebus etiam minimis, & vulgaribus suam ubique navat operam Mathesis.

Quid ejusdem utilitatem ad cæteras artes, nobiliores præsertim aut inveniendas, aut perficiendas commemorem. An pictura cognatæque artes, cælatura, statuaria, reliquæque affines satis appositè sine Geometria exerceri possunt, quæ unum Mathematicum tractatum Perspectivam scilicet integram sibi vendicant. An Architectura quæ ita tota in mensuris & proportionibus est posita, ut inter Mathesis partes censeatur, ejus omnia officia subalternæque artes à Geometria non minimum quidem discedunt, an latomus lapidibus convenientem unquam figuram tribuet, fornicibusque construendis aptam, nisi sua totam sui operis formam, & singulorum lapidum exemplaria, à profundiori Geometria mutuetur; An ingentes excitare substructiones, magnásque moles evehere, nisi virtutum motricium machinamenta addiscat, variísque polispastis vectibus, rotis, & tympanis vires in immensum augeat; id enim vero discit à Mechanica.

Quid Architecturam militarem in medium proferam, quæ hostium impetus suis propugnaculis moratur, tutúmque civibus in suis vallis, & fossis, præbet præsidium. In militia omnia operatur & præstat Mathesis, castrametationem instituit, si militem tegere velit, aciem instruit & dirigit, si dimicare libeat, lineas accessuum designat, suísque firmat reductibus, vineas aggeres, tormentorum suggesta extruit, dum oppugnandam arcem suscipit, parmulas, cassides, lunulas, cornuta, coronata opponit si propugnandam habeat, hæc bombardas diriget, & ad certum librabit hostium interitum, bellicis ignibus grassabitur dum sæviendum est, festivis missilibus, & Pyrobolis gestiet, si lætandum; ita in omnibus bellicis muneribus ubique operatur.

Neque verò Nauticam tacitus præterire possum, quæ quæstuoso commercio, exterarum nationum divitias in nostrum orbem importat: hæc quantæ sit utilitatis vel ex hoc uno conjicere licet, quòd exigua piscatorum manus ad tantam opulentiam

opulentiam sola navigationum & mercimoniorum ope sit evecta ut summis etiam regibus, nequidquam resistere audeant. Nautica tamen ita in mathematicis rationibus posita est, ut ex omnibus ejus partibus coalescere videatur. Geographiæ principia requirit, ut navim ad destinatum locum dirigat; magneticam advocat in qua cynosuram suam nanciscitur; Astronomiam adhibet, ut in ipsis syderibus suum iter agnoscat; Mechanicam non negligit, cujus variam machinarum suppellectilem usurpat; remisque quasi vectibus navim promoveat, gubernaculo in omnem partem detorqueat, malo & velis mobilem reddat. Hydrostaticæ leges advocat ut tantam ponderum molem aquis imponat.

Cæteris autem artibus non minus facem præfert Mathesis, cùm in opificum officinas vix pedem inferas, quin innumera, aut machinarum, aut instrumentorum supellex ex nostris orta principiis occurrat; quin ubique mechanices etiam abstrusiora placita ad usum revocata reprehendas. Quare mirum non est si tanto semper in honore apud reges, & principes veri Mathematici fuere: si tanti apud Siracusios olim fuit Archimedes, in cujus scilicèt unius solertia omnium civium salus posita videbatur: si tanti apud Romanos quibus tot clades solus intulerat.

Ad tantam Mathesis utilitatem accedit certitudo, quæ talis est, ut demonstrationes mathematicæ teste Aristotele primas sibi certitudinis partes vendicent, nec dubio minimum locum relinquant, mentémque propterea pura cognitæ veritatis suavitate perfundant. Percipitur autem præcipuè illa jucunditas dum quis post exanthlatos nonnullos labores, aliquid novi, & abstrusi proprio marte excogitat, ut Thaleti Milesio contigisse ferunt post trianguli æquilateri in circulo inscriptionem inventam, qui propterea bovem Musis immolavit; Perseo qui ob helicis descriptionem diis sacrificavit; Pythagoræ qui ob inventam rationem laterum trianguli æquilateri Ecatomben obtulit; Archimedi qui deprehenso in aurea corona furto, quasi amens gaudio suum illud εὕρηκα ingeminans nudus è balneo urbem domum properavit. Idem Sphæræ dimensionem à se inventam sepulchro suo insculpi voluit. Erathostenes à se inventam cubi duplicationem, non præcisè geometricam licèt, loco anathematis in templo suspendi voluit. Dimensam montis Atho altitudinem Apollini dedicavit.

Cùm autem tantus sit Matheseon in Philosophia perdiscenda usus, tantus in artibus, in vita universa, cum illis disciplinis nihil sit certiùs, nihil etiam jucundius, cum tam multiplici nomine commendentur: tam paucos esse, qui in hac nobilissima scientia, vel mediocriter sint versati satis mirari non possum. Nempè dum Philosophorum turbam ingentem, dum Theologorum infinitum penè numerum, dum Juristarum, & Medicorum examina ut ita dicam miramur; vix in toto aliquò regno Mathematicorum decadem censeamus. Id apud me dum recogito sæpè diligentiùs, multa esse quæ à jucundo alioquin studio deterreant, difficilésque præbeant aditus deprehendi.

Cùm enim tot jam sæculis exculta fuerit Mathesis, doctissimísque lucubrationibus ornata, in immensum penè hoc præsertim sæculo excreverit, ulteriúsque provecta sit quàm mille retro annis, mole sua cujúsque animum ut tanto oneri imparem obruit, & ab hoc labore suscipiendo deterret. Tanta est librorum mathematicorum copia, ut confusionem pariat, tanta in minutioribus, etiam nulliúsque momenti materiis, aliquorum Authorum accurata nimis solertia, ut qui sine delectu omnia profundioris præsertim Geometriæ placita addiscenda suscipiat, in tot Syrtes, & scopulos adigatur, & fœdum adeat indecoræ desertionis periculum.

Id enim verò ex malè intellecto Matheseon scopo evenisse statuo, perversâque multorum ideâ scientiam ex sola difficultate metientium; magnúmque operæ pretium se fecisse existimantium, si abstrusa, & quæ hactenus aliis incognita fuerint, nulla utilitatis habita ratione commententur. Hinc tanta in Mathesi nostra rerum futilium farrago erupit. Dum enim plerique materiam aliquam brevibus sæpissimè finibus contentam, tractandam & ut ita dicam exhauriendam suscipiunt, minuta quæque, inutilia licèt nulliúsque momenti ita persequuntur, ut tædium afferant, scientiamque jucundam alioquin tot spinis, & difficultatibus obstruant, ut impossibilem reddant.

Quare pessimè de Mathematicis meritos esse primò eos existimo, qui circa geometrica præsertim principia commentationes ita exaggerant, & scolia lemmatibus addunt, ut nullus esse modus, & finis videatur; hâc enim mole cujusque mentem fatigant, & obruunt, ut multos ab hoc studio retrahant, & avocent. Quare sic apud me semper statui Mathematicas disciplinas quas vocant puras, non sine delectu addiscendas esse, ne mentem cognitione rerum, quas scire, aut ignorare non maximopere juverit, non tam adornes, quàm inficias. Geometriam igitur, & Arithmeticem sic usurpes velim, in quantum vel ad effectus alicujus physici investigandas causas, vel ad communem vitæ usum, artésque perficiendas, aut promovendas utiles fuerint.

Cùm enim hæ disciplinæ in quantitate consideranda occupentur, soláque ejus proprietates, æqualitatem scilicet, excessum, proportionem, aliásque intueantur, non magnum est in se id omne quod docent, nec difficultatem, & laborem in iis perdiscendis impensum compensarent, nisi ad secreta naturæ penetralia viam sternerent, aut vitæ civilis commodis inservirent. Sunt etiam sui in Mathematicis nævi, sunt & tricæ, & quisquiliæ, quas qui scrupulosius fuerit consectatus, is sanè multum temporis & laboris satis meo quidem judicio impendet. Inveteratum quidem malum est, & jam à priscis temporibus ad nos usque derivatum, ut scientiam difficultate metiamur, & inanis gloriolæ cupiditate ducti, ad ea mentem applicemus, quæ aliis incognita fuisse intelligimus. Quantum temporis, & laboris impensum est in quadrando circulo, quid tamen utilitatis ex hoc problemate soluto, cum in Geodesia oblato quocumque circulo, æquale quadratum exhibeamus, & quamcúmque præcisionem in hoc negotio consequamur? Quantum in duplando cubo desudarunt prisci illi Mathematici, quid tamen emolumenti inde consequeremur, cum in ordine ad ad praxin per extractionem radicis cubicæ, solida quæcumque, quantum libuerit sine ullo vel minimi erroris periculo augeamus, & minuamus. Quid de divisione anguli in tres partes dicam, tanto labore à nonnullis quæsita, esto enim per attentationem & non geometricè eam divisionem perficiamus, non tamen multùm ulterius proveheremur si id doctius exequi doceremur. Sunt alia alterius generis problemata, in quibus non inutiliter insudatur, methodus ubique terrarum longitudinis inveniendæ jure mercedem aliquam sibi vindicat, cum & Geographicas tabulas summè perficiat, navigantibus opem ita salutarem & certam afferat. Utilitatem haberet non modicam motus perpetui artificium, sed tot linearum exoticarum proprietates, quæ nec in rebus naturalibus aliquid docent, nec ad communem hominum vitam & utilitatem referuntur proximè nec remotè, vix puto tot vigiliarum tantíque laboris esse mercedem congruentem. Innumera sunt hujus generis exempla quæ singula recensere longum esset, quare ut tam perniciosum errorem depellam, Mathematicásque disciplinas ut ita dicam expurgem, hunc tractatum concinnandum censui, in quo totum Matheseon progressum secundum ordinem temporum oculis subjicio.

Mathesin secundò potius inficiunt quàm promovent, qui in suis scriptis obscuritatem, & tenebras affectant; serpit enim virus illud, & apud nonnullas nationes mos ille invaluit, ut neglecto communi scribendi modo, Algebræ speciosæ characteres, & compendiariam methodum ita usurpent, ut sæpè nullum habeant orationis contextum, multáque reticeant, quæ ad perfectam demonstrationem requiruntur.

Quamvis autem Algebra speciosa in versandis in omnem partem æquationum rationibus, privatim adhiberi possit, utilísque sit ad invenienda multa de novo, publicè tamen & in libris usurpari non debet; primò eo quod imaginationem non feriat, quæ tamen in rebus mathematicis maximo est usui; secundò eo quòd in lineis præcipuè indicandis unico charactere, in figuris præsertim implicatis, confusionem pariat. Quare quicumque ad aliorum utilitatem scribit, nec inanem quandam gloriolam aucupatur, quòd ea invenerit, quæ alij intelligere non possunt, à communi loquendi, & scribendi usu ne discedat unquam; cùm verò tales libri offeruntur, ne in illis volutandis tempus inaniter impendatur; quia ut plurimum vitia demonstrationum sub tali latent involucro, dum ipsius methodi obscuritati, & brevitati tribuitur error qui in ipsa materia positus est, eáque ideò sic proponuntur, quid strictis Geometriæ principiis non innitantur. Tot sunt alij libri faciliores in quibus volutandis, & addiscendis melius opera collocabitur; ut quid omni in eo intelligendo authore laborandum est; qui intelligi non vult. Error fuit præteriti sæculi, ut is tantum doctus censeretur, qui obscuritatem aliquam præseferret; jam verò ita statuendum puto, eum benè rem non concipere, quam aliis explicare non possit. Excusantur quidem authores Græci si in iis intelligendis nonnunquam laborandum sit, phrasis enim & orationis contextus, immò & conceptus ipse, à nostro modo cōcipiendi paulò alienior, hanc difficultatem efficit; eum verò qui nostra lingua mentem suam explicare non valeat penitus nihili facio. Tertiò reprehensione digni sunt qui ut figuras habeant elegantiores, & in ære incisas, eas in finem operis omnes simul rejiciunt, aut etiam plicatiles ita libris inserunt, ut explicari possint: nam præterquam quòd facilè pereunt, & deteruntur, & iis detritis libri inutiles evadunt, difficultas & molestia de novo exurgit, dum in singulas propositiones sua invenienda & aptanda figura, quæ tanta est in rebus præsertim difficilioribus ut nunquam adhuc in animum inducere potuerim, ut librum ita compositum totum evolverem.

In hoc igitur tractatu totum Mathematicarum disciplinarum ordinem, & progressum per singulas ætates, & tempora persequor, singulósque authores profero, elucubrationum omnium argumenta explico, quantum ab unoquóque promota fuerit Mathesis indico, meúmque de singulis judicium fero, eorum nempè quorum scripta in manus meas venerint. Hic igitur esto mihi lydius lapis, ad hanc stateram singulas Matheseon partes expendo, ut eas legitimas hominéque dignas admittam, quæ vel ad naturæ cognitionem aliquid conferant, vel ad vitæ communis & reipublicæ commodum quomodocúmque referantur; quæ verò ad neutrum utiles fuerint ut illegitimas respuam, quæ nempè laborem in iis addiscendis impensum nullo compensent emolumento. Antiquos authores quorum scripta injuria temporum perierunt, simpliciter suo ordine, per suas ætates recensebo, quod ut ordinatè præstare queam, in certas quasi classes mihi tota Mathesis digerenda est.

Matheseos objectum esse quantitatem nemo est qui nesciat, cujus nempè proprietates omnes, sive absolutas, sive relativas, & in variis comparationibus positas si contempletur. Hæc autem quantitas vel ita solitariè & quasi abstractè consideratur, & nulli subjecto immersa, aut materiæ affixa cogitetur, sic puram Mathesin efficit; vel hæc eadem quantitas ut jam ad certum genus determinata, & cum peculiari subjecto connexa concipitur, sic Mathesin mixtam constituit. Rursus cum duplex sit quantitatis, etiam non immersæ species, continua, scilicet & discreta, duplex etiam exurgit Mathesis pura; Geometria nempè quæ continuam, Arithmetica quæ discretam quantitatem intuetur. Utráque quasi universalis dici potest, quod per omnes partes vagetur, eisque facem quasi præferat. Non tamen quæcúmque Geometrica, aut Arithmetica propterea elementaria dici debent, sunt enim nonnulla quæ quia satis universalia non sunt, nec reliquis omnino necessaria, ab elementorum ordine rejiciuntur. Communiter ergo inter elementares tractatus Geometricos recensentur, Euclidis Elementa, Sphærica Theodosij & Trigonometria; quæ verò sunt nimis particularia ut Geodesia, Tractatus Archimedis de Sphæra, & Cylindro, de Helicoidibus, spiralibus, de conicis sectionibus, variæ quadraturæ, cubi duplicationes, methodus indivisibilium, aliáque nonnulla Geometrica licèt, inter elementares tractatus non reponimus.

Idem proportione quadam in Arithmeticis dicendum est. Elementares enim regulæ Additio, subtractio, multiplicatio, divisio tam in numeris integris quàm fractis, regula proportionum, societatis,

tatis, falsi, extractiones radicum quadratæ, & cubicæ, progressiones item tam Arithmeticæ, quàm Geometricæ inter elementa recensentur. Algebra sive numerosa, sive speciosa, sub eodem licèt Arithmetices genere contenta, inter elementa non reponitur, cum reliquæ partes ab ea minimè pendeant. Atque his duabus partibus Geometria scilicèt, & Arithmetica tota Mathesis pura continetur.

Latius haud dubiè patet Mathesis mixta, nihilque puræ de dignitate concedit. Amœniores quippè materias continet, atque ex elementis seu spinis, rosas colligit, & ex laboribus exantlatis fructus percipit uberrimos. Nullus ut ait certis continetur limitibus, nisi quibus hic mundus terminatur: cum enim ut ait Plato Deus in omnibus Geometriam exerceat, hoc est mundum hunc universum singulásque ejus partes in numero, pondere, & mensura constituerit in quatuor elementis, & cœlo Mathesin particularem, seu mixtam, hoc est affixam materiæ intuebimur, & quidquid in singulis ad numerum, pondus, & mensuram seu ad quantitatem continuam, aut discretam pertinebit, ut juris nostri vendicabimus. Facilem ergo & maximè consentaneum ordinem Mathesi mixtæ & particulari tribuemus, eundem scilicèt quò partes mundi copulantur.

Ab Elementorum infimo seu tellure ordiamur: hæc primò tribus suis dimensionibus Geodesiæ, seu Geometricæ practicæ, & ad usus civiles accommodatæ materiam subministrat.

Tellus inter elementa gravissimum est; ejus gravitatem intuebitur Statica, quia verò Mechanica eidem universali principio innititur, ad idem etiam revocatur.

Tellus sphærica est ejusque partes variè, ad cœli puncta relatæ, varia lucis, & caloris; dierum, & noctium incrementa sortiuntur, hæc Geographia universalis explicat.

Terram hominibus incolendam dedit Deus, jure ergò Architecturæ tam civilis, quàm militaris placita advocamus, eíque duos ancillantes tractatus, artem scilicet tignariam, & tractatum de lapidum sectione, ad fornices componendos adjungemus.

Tellus magnetica est, cui propterea tractatum de magnetismo tribuimus.

Novem igitur tractatus telluri addicimus Geodesiam, staticam, mechanicam, Geographiam, magnetismum, Architecturam civilem, Architecturam militarem artem tignariam, & tractatum de sectione lapidum.

Pauciores Mathematicos tractatus nobis aqua suppeditat. Si enim ejus gravitatem consideremus hydrostaticam, seu tractatum de natantibus, seu insidentibus humido cum Archimede instituimus. Si ad fluiditatem & cursum aquæ attendamus secundum de fluviis, & fontibus habebimus. Tertius machinas hydraulicas exhibet. Quartus artem navigandi complectitur. Quatuor igitur tractatus in aqua solemus distinguere hydrostaticam, hydragogicam, seu de fontibus, hydromechanicam, & artem navigandi.

Cum tam visio quàm auditio in aëre peragatur, ut in medio, tam luminis quàm sonorum susceptivo apposito quidquid ad visum, & musicam pertinet in aëre collocamus, & quia visio directis, reflexis, & refractis radiis peragitur, quatuor circa visionem tractatus instituimus, nempè de visione quasi in genere differit optica; de radio directo perspectiva, de reflexo catoptrica, de refracto dioptrica. Musica item suum peculiarem tractatum jure sibi vendicat. Quinque igitur in aëre tractatus collocamus opticam, perspectivam catoptricam dioptricam, & musicam.

Sterilior erit ignis unico contentus tractatu in duas partes dividendo: in primo de ignibus tam festivis, quam seriis, & nocivis agit; in secundo de tormentis bellicis eorúmque directione, de quæstionibus item balisticis differit.

De cœlo quinque tractatus occurrunt nempè Astrolabiorum doctrina, seu projectio Sphæræ in planum; Gnomonica seu de horologiis sciatericis, Astronomia, Astrologia divinatrix, & Kalendarium.

Algebra sibi peculiarem tractatum jure vendicat. Ad methodum indivisibilium nonnulla profundioris Geometriæ placita, nempè varias quadraturas, cubi duplicationes, aliáque exotica revocamus.

Hæc fuit Mathematicarum disciplinarum partitio, quam in cursu meo Mathematico usurpavi, ut nihil intactum relinquerem, aut tacitus prætereirem, qua nempè in tractatus triginta & unum hanc scientiam distribui. Sunt autem isti. Tract. Proemialis.

1. Euclidis Elementa.
2. Arithmetica.
3. Algebra.
4. Sphærica Theodosij.
5. Methodus indivisibilium.
6. ectiones conicæ.
7. Trigonometria.
8. Geodesia.
9. Mechanica.
10. Statica.
11. Geographia.
12. De Magnete.
13. Architectura Civilis.
14. Ars Tignaria.
15. De sectione lapidum.
16. Architectura Militaris.
17. Hydrostatica.
18. De Fontibus.
19. De Machinis Hydraulicis.
20. De Navigatione.
21. Optica.
22. Perspectiva.
23. Catoptrica.
24. Dioptrica.
25. Musica.
26. Pyrotechnia.
27. De Astrolabiis.
28. Gnomonica.
29. Astronomia.
30. Kalendarium.
31. Astrologia.

Quia tamen non omnes hi tractatus ab initio sunt instituti, aut inventi, in hoc opere ad pauciora capita revocare placet, ne tot fiant classes, & quasi ordines; qui nempè potius tenebras, & confusionem parerent, quàm distinctionem, præcipuè cum multæ materiæ tantam affinitatem habent, ut in plerisque authoribus non separatim sed

sed simul explicentur. quare primò sub titulo Geometriæ Euclidis, & Hypsiclis elementa reponemus, Sphærica Theodosij, Trigonometriam, Geodesiam, quæ propriè Geometriæ est praxis, sectiones conicas, quadraturas omnes, cubi duplicationes; methodum indivisibilium; quæ omnia ad puram Mathesin, spectant, utpotè quæ circa quantitatem continuam nulli affixam materiæ versantur.

Secundò loco reponetur Arithmetica unà cum Algebra.

Tertiùm ordinem sibi vendicat Mechanica, cui Staticam adjungemus utpote ad idem principium pertinentem, cui cum etiam innitatur Hydrostatica, Hydromechanica, & quidquid de fontibus, aut spiritalibus dicitur, quidquid item de ignibus, tormentis bellicis id etiam totum sub eodem Mechanicarum titulo reponemus.

In quartò Geographiam, & magnetem collocamus, quia autem ars navigandi iisdem ferè principiis innititur ac Geographia, ab ea non sejungetur.

In quinto Opticam contemplamur, cujus cùm species sint perspectiva, catoptrica, dioptrica, immò & Astrolabia verè ad perspectivam pertineant, sicut & Gnomonicam; hæc omnia sub quinto ordine conjungemus.

Architectura tam civilis, quàm militaris, cum duobus ancillantibus tractatibus arte scilicèt tignaria, & sectione lapidum sextum ordinem efficiet.

Septimum Musica obtinebit.

Octavum denique Astronomia, cum Astrologia divinatrice, & Kalendario seu Chronologia.

Quare octo ordines in Mathesi constituimus; quorum progressum per singulas ætates relatis authoribus, qui de illis scripserunt. Nempè Geometriam, Arithmeticam, Mechanicam, Geographiam, Opticam, Architecturam, Musicam, Astronomiam.

CAPUT II.

De progressu Geometriæ.

GEometriæ nomen angustius est, quàm sint hujus scientiæ fines, cum ad omnem quantitatis continuæ considerationem se extendat, nec in sola terræ mensuratione, ut indicare videtur hæc appellatio, occupetur. Unde ineptam nonnulli, ridiculam hanc vocem Plato censuit, quòd re significata minus latè pateret, & primum tantum ejus usum, non totam amplitudinem significaret. Geometriam igitur vocamus, eam facultatem quæ in quantitatis continuæ contemplatione consistit, quæ tale sortitur nomen, quamdiu universaliter eam & in abstracto, considerat. Jure ergo sub hoc nomine Geometriæ, complectimur Euclidis elementa; in quibus nempe prima tradit Matheseos rudimenta, variásque demonstrat figurarum proprietates, sive absolutas, sive respectivas: non ineptè sub eodem titulo Sphærica Theodosij reponimus, cum tota quam tradit hic author doctrina omnibus omnino sphæris, & globis adaptari possit. Trigonometriam item reponimus: cùm enim superficies omnes, in triangula facilè resolvi possint; appositè triangulorum mensuratio superficierum omnium dimensiones complectetur. Hanc communiter in sex partes dividimus: Prima rationem indicat semidiametri circuli ad lineas circulo inscriptas, nempe canonem chordarum sinuum, tangentium, & secantium componit, instrumentum scilicet omnibus mensurationibus peragendis aptissimum. Secunda Logarithmorum scientiam tradit; opus sanè aureum, hujúsque sæculi inventum, ut suo loco dicemus, cui nempè jure hæc additur Epigraphe, Antecessoribus nostris sapientiores sumus. Hanc doctrinam Nepero nobili Scoto debemus de tota Mathesi propterèà benè merito, qui substitutis loco numerorum simplicium, eorum logarithmis, additionem pro multiplicatione, subtractionem, pro divisione assumit, pluráque solvit intra horæ quadrantem trigonometrica problemata, quàm vulgaris trigonometria intra horam. Tertia pars communiter usum talium tabularum in triangulis rectilineis docet, eáque tam per sinus, tangentes & secantes, quàm per logarithmos solvit. Quarta continet Isagogen ad triangula Sphærica. Quinta triangula sphærica rectangula metitur. Sexta obliquangula totámque trigonometriam absolvit, cujus scilicet ope terrestria corpora, & cœlestia, si opus sit, ita exactè metimur, oculísque, ut ita dicam, subjicimus; ac si sphærâ uteremur ingenti, cujus nempè semidiameter in decies millies millenas partes sensibiles divisus esset.

Geodesiam item ad geometriam revocamus; quamvis enim sub hoc nomine agrorum mensurationem indicare videamur, tam parum huic materiæ affixa est, ut facilè cuilibet quantitati adaptetur. Hæc dimensiones omnes, & mensuras complectitur; cúmque quantitas continua tribus constet speciebus; linea, superficie, & corpore, trifariam communiter dividitur. Primò enim agit de linearum mensuris; distantiásque inaccessibiles, quales sunt montium altitudines, fluviorum aluei, valliū voragines aggreditur, instrumētorúmque innumerorum usum aperit; ut semicirculi, quadrātis, quadrati geometrici, Gnomonis seu squadræ, crucis Geometricæ, pantometri, pantographi, regularum proportionalium, asserculi, cæterorúmque omnium principia tradit. Quia verò non tantùm lineæ rectæ, sed etiam curvæ sub mensurationem cadunt, circumferentiæ circuli cum diametro rationem investigat. Secundò superficierum, seu arearum mensuras explorat; non tantùm triangulorum, parallelogrammorum, aliarúmque figurarum, circulorum item & ellypsium aream contemplatur. Quia verò prima superficierum mensura, utpotè notissima, unicáque dimensione contenta quadrata est, circulum ad quadratum revocare conamur; ad quem scopum spectant helices Archimedis, quadratices, Lunula Hippocratis Chij, aliæque exoticæ lineæ quibus hactenus circuli quadratura tentata est. Aliorum item corporum superficies definimus, ut Cylindri, Coni, Sphæræ, Sphæravideon, & aliorum, earumdem item superficierum divisionem perficimus. Tertiò circa corporum soliditatem versatur, sic Prismatum, Pyramidum, Cylindrorum, conorum, Sphæræ, & cum Archimede in suo arenario granulorum, intra totius firmamenti concavitatem contentorum, facili calculo numerum inimus. Vasorum item & doliorum capacitatem exploramus.

Ad hunc Geometricum tractatum facilè revocantur

cantur quæcumque Apollonius alíique ante, & post ipsum de sectionibus conicis nempe de circulo, parabola, ellypsi, & hyperbola eruditè scripserunt quæcúmque ad circuli quadraturam ad cubi duplicationem spectant. Methodum item indivisibilium, & alia hujusmodi, quæ ad quantitatem indeterminatam adhuc, & non certæ materiæ affixam pertinent.

Hujus scientiæ dignitatem ostendit nexus ille mirabilis, & demonstrationum certitudo, quæ tanta est ut non persuadeat tantùm, sed cogat: Unde in exemplum absolutissimæ scientiæ ab ipsomet Aristotele semper proponitur.

Hujus scientiæ apud Ægyptios inventor Theut, seu Deum asserit Plato in Phædro, quasi tam nobilis inventi gloria soli Deo deberetur. Communiter tamen tradunt plerique ab Ægyptiis necessitate esse inventam. Cùm enim Nilus exundatione, & limo, agrorum limites operiret, & confunderet; ne limitum confusio, esset perpetuum discordiarum, & litium seminarium, arte & scientia opus fuit; qua rursus agri dividerentur, & controversiæ omnes dirimerentur.

Hanc à Thalete Milesio invectam esse asserit Laertius, licèt eodem teste præcedenti sæculo Euphorbus Phryx contemplationem de lineis composuerit, triangulum scalenum invenerit, seu modum cujuslibet trianguli ex tribus scilicèt lineis componendi, quæ est 22 primi elementorum Euclidis; quare primus quod sciamus geometriam exercuit.

Natus est Thales Milesius anno ab Urbe condita 120, seu ante Christum 632. Hic primus nómine Sapientis appellatus est. In Geometricis invenit triangulum in circulo orthogonicum; seu 31. 3. Elementorum, quæ ita modò effertur. Angulus in semicirculo rectus est. Item quintam 1. Elementorum. Isoscelium triangulorum anguli ad basin æquales sunt. Item 15 ejusdem, Anguli oppositi ad verticem æquales sunt. Item 26 de æqualitate omnimoda triangulorum unum latus, & duos angulos ad invicem æquales habentium. Demonstravit item circulum bifariam à diametro secari, mensus est ex umbra, Ægypti pyramides. Invenit modum inscribendi in circulo triangulum æquilaterum;pro quo invento Musis bovem immolavit. Alia multa in Astronomicis.

Ex hujusmodi inventis,multo magis ex sequentibus, quæ tanta cura ut magnum operæ pretium notantur, facile conjicere possumus qualem ex Ægypto Geometriam Thales advexerit, quæ probabiliter nonnullas tantum praxes, ad agrorum dimensionem perficiendam continebat, qualem forsitan etiamnunc Agrimensores nostri habent, qui quantum possunt omnes figuras ad parallelogramma rectangula reducunt, & multiplicatione unius lateris per aliud aream exhibent. Videntur autem isti potius regula & circino usi, & operati geometricè, quàm calculos adhibuisse.

Thaleti proximè successit Mamertinus insignis Geometra, quique multa geometrica adinvenisse dicitur.

Eodem fere tempore vixit Amethistus summus Geometra, qui dicitur rerum Geometricarum inventor; de quo nihil nisi nomen & elogium retulit Proclus. Frater fuit Stesichori Poetæ.

Eodem sæculo his successit Pythagoras Samius, qui Ægypto, & Perside perlustratâ in Mathematicis excelluit. Præcipuè in Arithmetica Astronomia & Musica. Huic nonnulli hanc laudem tribuunt, quòd ex Ægypto in Græciam Geometriam advexerit. In Geometricis autem dicitur invenisse 32 primi Elementorum, nempe Trianguli cujuscúmque tres angulos simul sumptos duobus rectis æquales esse. Demonstrationem 47 primi Elementorum reperit, nempe In triangulo rectangulo quadratum basis, quadratis laterum æquale esse; pro qua in gratiarum actionem Musis Ecatomben obtulit. Et merito cùm hæc propositio sit universalissimum trigonometriæ principium, primus Mathematicæ ludum aperuit.

Post Pythagoram tertio scilicet Urbis conditæ sæculo, hoc studium excoluere Anaxagoras Clazomenius; de quo nisi nomen nihil aliud proditum est.

Oenopides item Chius inventor duodecimæ primi Elementorum, nempe *Perpendicularem ad datam lineam ex puncto extra eam dato ducere*, & vigesimæ quartæ ejusdem; nempe *Ad datum punctum lineæ proposita, angulo dato æqualem angulum rectilineum constituere.* Probabile autem mihi est, demonstrationem tantùm aliquam hujusmodi Propositionum ab eo fuisse inventam: Si enim primum tunc temporis ipsæ Propositiones sunt inventæ, admodum imperfecta, & rudis erat Mathesis.

Hujus discipulus fuit Zenodorus author tractatus de Isoperimetris; in quo hanc vulgi hallucinationem depellere conatur, Figuras ejusdem ambitus, & circumferentiæ esse æquales inter se. Ostendit autem Figuras plurium laterum, etiam aliis pauciorum laterum isoperimetras majores esse; adeóque omnium Isoperimetrarum circulum majorem esse: item Quæ latera magis inter se æqualia habent, cæteris paribus majores esse.

Hic tractatus jam indicat Geometriam satis perfectam. Hunc tractatum habet Clavius, sumpsitque ex Theone, qui Zenodoro eum tribuit. Nos etiam in Geodesia, seu Geometria practica, eum non omisimus.

Hunc proximè secutus est Hippocrates Chius, qui dum circulum quadrare nititur, lunulæ quadraturam dedit. Hæc habetur apud multos, hícque tetragonismus per transpositionem aliquarum partium peragitur, proponitúrque ab Aristotele sæpe in exemplum patalogismi. Hic primus scripsit elementa geometrica, quæ non extant. Notavit item. Si inter duas lineas propositas, aliæ duæ mediæ proportionales inveniantur cubum duplicari posse.

Theodorus Cyreneus ejus sodalis Geometriam auctiorem reddidit.

Timæus Locrus Pythagoricus scripsit hoc tempore Mathemata. Huic Plato suum Timæum inscripsit. Nonnulli ab eo Platonem accepisse dicunt.

Quarto Urbis conditæ sæculo floruit Democritus Milesius scripsit de contactu circuli, & sphæræ, de lineis irrationalibus & solidis quæ non extant.

Eodem tempore Protagoras nonnulla Mathematica scripsit quæ pariter periere.

His successit Plato Matheseos studiosissimus: singulis enim diebus geometricum problema discipulis explicabat. Geometriæ expertes à sua schola arcebat. Primus sectiones conicas, & cylindricas lyndricas inspexit. Modúmque demonstrandi analyticum invenit, nempè supponendo quod quæritur factum esse, & dari, quæ methodus dici potest Algebra quædam naturalis, & Algebræ artificialis seminarium fuit. Hunc Delij circa duplicationem cubi consuluerunt, licèt autem eos ad Euclidem remiserit, Problema tamen tentavit, extátque ejus methodus inveniendi duas medias proportionales apud Eutocium. Nihil Geometricum ab eo reliquum habemus, nisi hanc duplicandi cubi rationem quæ etiam suo nævo non caret. Habemus item nonnulla ejus loca in suis scriptis sparsa, quæ Geometriam sapiunt. Hæc explicuit Theon Smirneus, sed hæc sunt levis momenti, nec Geometriam multum promovent. Fuit Atheniensis, dictúsque est divinus.

Amiclas Heracleotes, Laodamas Thasius, & Neoclides, Platonis aut auditores, aut familiares, Geometriam auxerunt, Leon item Elementa Geometrica multo auctiora quam Hippocrates composuit quæ non extant. Eudoxius Gnidius Platonis in Ægyptum comes quintum elementum de proportionibus scilicet, invenisse dicitur, in quo scilicet nova ut ita dicam logica, seu argumentandi methodus traditur, qua nihil potuit commodius & ingeniosius excogitari.

Thæetetus Atheniensis de quinque solidis corporibus scripsit, sed non extat ejus elucubratio. Dicitur primus demonstrasse decimam decimi Elementorum, nempe, Si quatuor lineæ fuerint proportionales, & prima secundæ fuerit commensurabilis: erit & tertia quartæ.

Bryso, & Antiphon circuli quadraturam inutiliter his temporibus tentarunt.

Philosophus Platonis auditor scripsit de circularibus & medietatibus, quæ non extant.

Quinto Urbis sæculo nempe trecentis sexaginta circiter ante Christum annis, Theudius Magnès Tertius Elementa geometrica conscripsit. Hermotimus Colophonius uberiora reddidit, quæ non extant.

Cyzicinus Atheniensis item Geometrica scripsit, quæ periere.

Aristæus Senior ante Euclidem multa de conicis scripsit. Hunc Euclides in iisdem secutus est. Scripsit item de resolutione, & locis solidis, quæ omnia non extant. Ita Pappus lib. 5.

Philippus Metæus Platonis magistri discipulus multa in Mathematicis edidit.

Menechmus Eudoxij discipulus dicitur sectiones conicas invenisse. Nescitur quid circa eas invenerit. Invenitur apud Eutocium ejus methodus constituendarum duarum mediarum proportionalium ad duplicationem cubi.

Geminus demonstravit Tres tantum lineas similares esse, nempe rectam, circularem, & spiralem cylindricam. Lineas item spiricas, conchoeides & cissoeides invenit. Quintam primi Elementorum universaliorem fecit, nempe eam demonstrat Quando basis est circularis, aut spiralis cylindrica.

De lineis Spiralibus, Conchoeidibus, & Cissoeidibus egit post Geminum, Perseus Citticus.

Aristoteles scripsit librum de unitate, & de lineis insecabilibus. Hunc latinum fecit Julius Martianus Rota; estque exigui momenti.

Ad Euclidem tandem Geometram pervenimus, quem plerique eundem putant esse cum Euclide Megarensi, ex Megaris urbe in Isthmo, cujus nomine Secta Megarica dicta fuit, cujus nempe author fuit, quam Dialecticam, & Eristicam contentiosam vocavit. Fuit Socratis auditor, & huic successit Ichtias. Diogenes Laertius ait Platonem se contulisse Megara ad Euclidem. Constat item eundem Platonem Delios ad Euclidem remisisse. Proclus Diadochus in Præfatione ad Euclidem, suprà recensitos authores ante Euclidem recenset. Euclides Geometra sive idem sit cum Megarensi sive non, longo tempore Alexandriæ Geometriam docuit, dicitúrque de illo quòd nunquam in paralogismum inciderit.

Quintus igitur Elementa geometrica miro ordine contexuit. Quem librum si aureum nominem, eíque primas inter libros qui hactenus editi sunt, exceptis tamen sacris codicibus, parum admodum dixero, cùm veram scientiæ ideam ingeneret, nihil dubij assumat, sed à principiis per se notis exorsus, ad abstrusa hujus scientiæ arcana sensim gradum faciat. In libros 15 sua Elementa partitur.

In primo agit de angulis & lineis perpendicularibus, quarum proprietates cum sine triangulis demonstrare non possit, multa de triangulis dicit, tum de lineis parallelis, & parallelogrammis figuris loquitur.

In secundo libro rectangula præcipuè considerat, totiúsque Algebræ & æquationum variarum semina jacit. Tertio circulum variásque in eo lineas contemplatur. Quarto varia polygona circulo inscribit, & circumscribit. In quinto novam proponit logicam proportionalem, scilicet argumentandi methodum. Sexto varias proportionalium linearum proprietates enucleat, regulam quam vocant auream demonstrat, totiúsque Geodesiæ principia proponit. Septimo, octavo, & nono numerorum proprietates explicat, non quidem omnes, sed eas tantum quæ ad incommensurabilium doctrinam necessariæ videbantur, ideóque hi tres libri sunt ad decimum Isagogici. In decimo incommensurabiles quantitates proponit. Undecimo solidorum principia profert; tum parallelipipedorum, prismatum, Pyramidum, Cylindrorum, conorum, & sphærarum proprietates explicat duodecimo. In decimo tertio, & sequentibus quinque solida corpora, tam inter se, quàm cum sphæra quoad superficiem quoad soliditatem comparat.

Nonnulli quintum Elementorum librum de modo argumentandi per proportionem reprehendunt quoad modum demonstrationis, nempe per æque multiplicium ambages, rationum similitudinem demonstret, quæ tamen ejus naturam non satis explicare videntur. Nos aliam methodum inivimus, & per partes aliquotas multo brevius & clarius totam hanc doctrinam explicuimus.

Libri septimus, octavus, nonus, decimus, in Elementorum numerum referri non debuerunt; cum hæc incommensurabilium doctrina plus curiositatis, quam utilitatis contineat, neque enim ad cæteras Mathesis partes intelligendas aliquid facit, multo minus ad usum communem aut ad effectum aliquem physicum explicandum: nisi forsitan leve aliquod & imbellem pro continui in infinitum divisibilitate rationem elicias. Ad eam tamen doctrinam spectant septimus, octavus, nonus, & totus decimus 117 Propositionibus difficillimis

cillimis comprehensus. Ad numerorum naturam explicandam quintus abundè sufficiebat, cum sit universalissimus & tam numeris, quam continuæ quantitati possit applicari. Potuerat tota hæc incommensurabilium doctrina separatim tradi, & post sextum immediatè poni undecimus, qui à septimo, octavo, nono, decimo est omnino independens. Experientia enim compertum est in quatuor libris recensitis initio tempus malè collocari. Non plus utilitatis continet liber decimustertius de comparatione quinque corporum regularium vel inter se, vel cum sphæra. Cum enim vix inveniatur ullum corpus naturale, aut artefactum, quod hoc modo figuratum sit, ea omnia vix ullum usum habent. Idem judicium ferimus de duobus sequentibus, qui non Euclidis; sed Hypsiclis Alexandrini esse dicuntur; in quibus hæc quinque corpora tam secundum latera, quàm secundum superficies, & soliditates inter se & cum sphæra comparantur. Adjectus item decimus sextus à Francisco Flussate Candalla simili vitio laborat. Quare tyrones sex prioribus, undecimo, & duodecimo sint contenti. Cæteros ne attingant quidem, nisi tempus inutiliter impensum velint.

Scripsit & Euclides librum Datorum. In quo nempe expendit, quænam ex aliquibus datis seu cognitis, sequuntur seu data sint, & cognoscantur. Opus continet prop. 94. Utile est Geometris. Zambertus hunc latinum fecit.

Dicitur Euclides scripsisse Conica libris quatuor comprehensa. Item de Resolutione, & fallaciis, de locis ad superficiem libris duobus; Prismatum libros tres. Sed hæc omnia perierunt. Scripsit de optica, & de sphæra ut dicetur suo loco.

Ex his fit manifestus Geometriæ ad Euclidem usque progressus; videtur enim solis Elementis, & conicis comprehendi. Certum est autem Euclidem non esse authorem omnium Propositionum & Demonstrationum, sed ordinem iis adhibuit, multáque adjecit, ut nexum illum mirabilem obtinerent. Dubitatur à nonnullis, an Euclides demonstrationes reliquerit: dedit autem dubitandi occasionem, quod in nonnullis codicibus Græcis soli tradantur Propositionum tituli, cum figuris sine ulla demonstratione. Certum tamen est Euclidem demonstrationes reliquisse, cum Pappus sæpe comparet Euclidis demonstrationem cum aliorum demonstrationibus.

Circa hæc tempora Theophrastus Erissius, Aristotelis discipulus, & successor, inter alia multa Historiarum geometricarum libros quatuor edidit.

Heraclides item Ponticus de Geometria scripsit.

Dicearchus Siculus ejusdem Aristotelis auditor primus montium altitudinem perpendicularem dimensus est, invenítque Pelion altum esse passus 1250. Quæ omnia non extant.

Sexto Urbis conditæ sæculo ante Christum 252, Eratosthenes Cyreneus sub Ptolemæo Evergete ab obitu Alexandri annis 90, & totidem ante Hipparchum, præter Astronomica, terræ ambitum dimensus est. Duplicationem cubi aliquam composuit quæ extat apud Pappum, & Eutocium.

Eodem circiter tempore nempe 250 ante Christum annis, floruit Archimedes Siracusanus Mathematicorum facilè princeps. Scripsit primò de sphæra & cylindro, seu de illorum corporum dimensionibus, tam secundum superficiem, quàm secundum soliditatem, quod præstitit methodo ingeniosissimâ, per inscriptionem conorum in sphæra. Primus invenit proportionem cylindri ad sphæram sibi inscriptam, esse sesquialteram, tam secundum soliditatem, quàm secundum superficiem, si pro Cylindri superficie numerentur ambæ bases. In quo problemate ita acquievit ut suo sepulchro insculpi voluerit.

Secundò egit de dimensione circuli, pariter per inscriptionem polygonorum, methodúmque docuit determinandæ rationis diametri ad circumferentiam cum quanta voluerimus præcisione; quæ in ordine ad praxin virtualem continent circuli quadraturam, idémque præstent emolumentum, ac si revera solutum esset illud problema; unde quæ restat invenienda quadratura plus contineat curiositatis, quàm utilitatis.

Egit item de conoeidibus, & sphæroidibus, in quibus proprietates conicarum sectionum attingit; sed non ita clarè, nec ita universaliter, ac postea Apollonius Pergæus. Quare post Apollonium Pergæum hi duo tractatus redduntur satis inutiles.

Quartò egit de lineis spiralibus, quibus quadraturam circuli tentavit sed infœliciter, cum harum linearum descriptio geometrica non sit.

Quintò perfecit quadraturam parabolæ ingeniosissimè.

Sextò in suo Arenario init calculum arenæ quæ toto cœli ambitu contineri posset, ut nempe eam aliquorum depelleret opinionem qui numerum arenæ quæ est in littore maris esse infinitum autumabant. Totus ferè liber impenditur in suppositionibus Astronomicis.

Scripsit idem de æquiponderantibus, & natantibus in humido. Nihilque præterea de scriptis ejus superest.

Dicitur à Pappo quadraginta fuisse ejus inventa mechanica; inter alia Problema illud quo terram loco se dimoturum spondebat si daretur extra illam ad consistendum locus. Problema de furto in corona aurea deprehendit, sphæram mobilem, specula ustoria. Cochleam aquaticam composuit. Navim bellicam solus traxit. Siracusas contra Marcellum per tres annos defendit. De quibus dicam in Mechanicis.

Vias init mirabiles hic author, magnóque homine dignas. Videtur paulò difficilior, sive phrasis Græca hanc difficultatem invehat, sive aliunde id oriatur. Totam ejus doctrinam de sphæra, & cylindro in Geometria practica faciliorem reddidimus; sicut & de circuli dimensione, & Arenario, de lineis spiralibus in methodo indivisibilium. Doctrinam ejus de Conoidibus & sphæroidibus, & de quadratura parabolæ in sectionibus conicis explicuimus.

Sexto Urbis conditæ sæculo 150 circiter ante Christum annis, floruit Apollonius Pergæus, natus scilicet Pergæ civitate Pamphyliæ, insignis Geometra, & cognomento Magnus, eo quòd conicarum sectionum doctrinam universalissimam reddiderit. Antiqui enim ut ex Archimede patet in solo cono acutangulo Ellypsin, parabolã in rectangulo, hyperbolem in obtusangulo considerabant.

volebant nempe sectiones esse ad unum latus perpendiculares: Appollonius autem universalius agens singulas sectiones in omni Cono intuetur, & explicat. Hactenus quatuor ejus extabant libri, alios tres periisse dolebamus, qui tamen nuper recuperati, & ex Arabico in latinum versi, Florentiæ Typis mandati sunt.

Hujus materiæ utilitas licet non usque adeo latè pateat, prætermitti tamen non debuit, cum Astrolabiorum doctrina, minorum circulorum descriptio in Gnomonica, multa item in perspectiva, captotrica, & dioptrica ab ea pendeant. Balistica item ab ea nonnulla mutuatur, Astronomia denique hodierna suas Hypotheses ellypticas faciat.

Apollonij Pergæi opus de sectionibus conicis doctissimum est, magnóque Geometra dignum, utpote circa materiam difficillimam, expurgatum tamen non est satis, minutias enim quaslibet ita persequitur ut materiem quærere videatur, quod in re alioquin difficili, & pœne ex se infinita præstandum non fuit. In quem lapidem non solum idemtidem impingit, sed libros nonnunquam integros hâc labe inficit. Libri verò nuper recuperati exigui sunt momenti; præcipuè cum ultra Apollonij fines hoc sæculo simus provecti. Castigatius, & melius qui totam Apollonij doctrinam paucis propositionibus complexus, multa de suo adjecit. De hac item materia uberius egit P. à Sancto Vincentio plus mille Propositionibus.

Nihil tamen de Apollonij laude detractum velim, quòd primus sit qui hanc materiam universalissimam reddiderit, ita ut antiquorum vestigiis inhæserit, sed eos post se longo reliquerit intervallo. Quamvis enim nonnulli quatuor primos Apollonij libros ad Euclidem pertinere suspicentur, quos commentario Apollonius illustrarit, quatuorque suos addiderit, hæc tamen suspicio sine fundamento profertur. Si enim Archimedes qui Euclidem legerat, & citat, doctrinam conicam quatuor primis libris Conicorum contentam, notam habuisset, in hunc lapidem non impegisset, ut Ellypsin in solo acutangulo cono, parabolen in rectangulo, hyperbolen in obtusangulo consideraret, sed universalius processisset.

Quatuor primos Apollonij libros latinos fecit Joannes Baptista Memmius, sed malè; meliùs Commandinus.

Scripsit & alia multa Apollonius quæ non extant, ut de sectione proportionis, de locis planis Libros duos; de perturbatis rationibus, de tactionibus, de inclinationibus, de Cochlea. Extat apud Eutocium in Archimedem ejus Methodus inveniendi duas medias proportionales suâ labe non carens. Videtur etiam scripsisse de comparatione Icosaedri, & dodecaedri eidem sphæræ inscriptorum, ut ex proœmio Hypsiclis patet.

Nos in tractatu peculiari parabolam, hyperbolam, & Ellypsin independenter à cono consideravimus, easque deinde in cono, & Cylindro intuemur, Propositionesque Apollonij præcipuas faciliori methodo demonstravimus.

Hypsicles Alexandrinus paulò post Apollonium fuit, & occasione scriptæ ab Apollonio Icosaedri, & dodecaedri eidem sphæræ inscriptorum proportionis Proportionis decimum quartum, & librum Elementorum & decimum quintum adjecit. Librum decimum quartum quatuor Propositionibus absolverat Hypsicles, decimum quintum quinque problematibus; Franciscus tamen Flussates Candalla & Campanus multa de suo addiderunt. Ut decimus quartus non tantum contineret comparationem Icosaedri, & dodecaedri eidem spheræ inscriptorum, secundum superficiem, & soliditatem; sed etiam tria reliqua corpora regularia, nempe tetraedrum, seu Pyramidem æquilateram, exaedrum seu cubum, & octaedrum inter se, tam secundum superficies, quam secundum soliditatem compararet. Decimus quintus varias inscriptiones unius corporis intra aliud continet. Additus est decimus sextus à Candalla.

Hæc materia licet sit ingeniosa, est tamen si quæ alia inutilis ut jam dixi. Ipse Hypsicles fateri videtur se eos libros à suo Præceptore Isidoro accepisse.

Floruit eodem tempore Philo Bizantius cujus Proclus meminit in octavam primi Elementorum; affert enim aliquam ejus demonstrationem. Extat item apud Eutocium in Archimedem, ejusdem Methodus inveniendi duas medias proportionales ad duplicationem cubi.

Serenus Antinsensis Philosophus videtur his temporibus floruisse duos libros edidit. In primo agit de sectione Cylindri ellyptica, ostenditque eamdem esse quæ per sectionem coni generatur: contra communem vulgi sensum, qui conicam censet ad verticem acutiorem esse.

In secundo libro agit de sectione coni quæ fit per axem, exhibétque diversas triangulorum species quæ ex hac sectione oriuntur. Comparat item conos inter se. Opus quidem bonum & breve.

Hero Alexandrinus nonnulla Geometrica scripsit quæ perierunt Extat apud Eutocium ejus Methodus inveniendi duas medias proportionales. Scripsit Geometrumenon seu Geometriam practicam, quæ non extat. Ejus meminit Proclus ad secundam, & 25 primi Elementorum. De eo loquitur Pappus, & Vitruvius. Fuit Ctesibij discipulus, multáque Mechanica edidit.

Octavo Urbis conditæ sæculo seu 50 circiter ante Christum annis, Sphæricorum libros tres edidit Theodosius Tripolita, in quibus nempe Elementa quibus proprietates planorum, & circulorum variorum in sphæra demonstrantur.

Hi libri extant integri, súntque optimi, & clarissimi, ex quibus facilè omnia principia Geographiæ demonstrari possunt; Additis tamen nonnullis de monstrationibus, quæ ex istis facilè elici possent. Hunc tractatum multi quasi utilissimum aut verterunt ex Græco in latinum, aut etiam commentario illustrarunt, nec nos eum in cursu nostro Mathematico omisimus. Scripsit & alia multa quæ non extant. Scripsit de habitationibus, de diebus & noctibus, quæ Græce in bibliotheca Regia Lutetiæ asservantur. Sed hæc potius sunt Astronomica, aut Geographica.

Dionysiodori qui fuit his temporibus, extat fragmentum apud Eutocium, nempe demonstratio subtilissima, qua docet modum secandi sphæram in datam rationem.

Primo Christi sæculo nempe post Hipparchum 224 annis ante Ptolemæum 41, Floruit Menelaus

laus qui & Milesius dictus est, libros 6 de subtensis seu chordis, scripsit, nempe methodum construendi canonis substensarum, quem nos quatuor aut quinque Propositionibus absolvimus, Scripsit item tres libros de sphæricis triangulis qui extant. Stellas Romæ, & Rhodi observavit, ut refert Ptolemæus. Scripsit sphærica post Theodosium. Ejus opusm agis directè spectat trigonometriam, videtúrque Ptolomæus ex tertio Menelai ea sumpsisse quæ de trigonometria scripsit in suo Almagesto; loquitur autem de sinubus, habetque plurimas propositiones de proportionibus sinuum, & laterum trianguli sphærici, nisi forsitan multa suppleverit Maurolycus, qui ea Sphærica interpretatus est.

Secundo sæculo à Nativitate Christi, floruit Ptolemæus Astronomus insignis, nempe observabat anno 130. Hic præter Astronomica habet multa de canone subtensarum, in ordine ad trigonometriam. Quo deinde in decursu utitur soluítque triangula. Ejus tamen canon non est commodus, eo quod fractiones adjunctas habeat. Opus hoc est valde exiguum, nec continet omnia, quæ sunt necessaria ad solutionem plerorúmque triangulorum demonstrandam. Dicam rursus de illo in Astronomica. Imperfecta igitur erat eo tempore Trigonometria.

Tertio Christi sæculo vixit Porphyrius Philosophus. Nonnulla scripsit Geometrica quæ non extant. Ejus enim meminit Proclus ad 14, 18 & 20 Propositiones primi Elementorum, ejusque demonstrationes. Idem est qui Isagogen scripsit de quinque universalibus.

Quarto Christi sæculo, fuit Nicomedes qui scripsit de lineis conchoidibus, quibus nempe duas medias proportionales inveniret, & cubum duplicaret, angulum datum trifariam secaret; sed cum hæ lineæ conchoides non describantur geometricè, sed instrumento egeant à strictâ Geometriâ alieno, ejus conatus irritus censetur. Illius meminit Eutocius, Pappus. Clavius item in Geometria practica ejus doctrinam refert.

Eudemus itẽ dicitur à Proclo hoc tẽpore scripsisse Geometricas enarrationes, & libellũ de angulo.

Menelai Alexandrini demonstrationem affert Proclus ad 25 primi Elementorum.

Geminus Rhodius Procli Diadochi præceptor, Græce scripsit de ortu linearum Spiralium, Conchoidarum, Cissoidarum, & de Mathematic. quæ dicuntur asservari in Bibliotheca Vaticana Græco-latina interprete Edone Stildaria. Hæc tamen non sunt magni momenti, eò quòd talium linearum descriptio, non sit Geometrica. Circa hæc tempora fiunt irruptiones Barbarorum in Romanum Imperium, cessâtque litterarum studiũ.

Quinto Christi sæculo Diocles modum aliquem excogitavit duas medias proportionales inveniendi, & secandi sphæram in datam rationem. Utrumque refert Eutocius desumptum libro illius de Pyriis, seu igniariis.

Sporus pariter Nicenus problema duarum mediarum proportionalium tentavit. Ejus pariter methodum refert Eutocius in Archimedem.

Hoc eodem quinto Christi sæculo Proclus Diadochus qui Athenis Platonicæ scholæ præfuit, scripsit commentarium in primum Euclidis. Zonaras fabulatur eum Valentis naves speculis ustoriis combussisse.

Commentarius Procli in primum Euclidis librum est exigui momenti: nam ejus media pars est de Mathesi in genere, cujus varias tradit divisiones. In secunda parte profert ut plurimùm leves Annotationes in Propositiones, & demonstrationes primi Elementorum, habétque rationes cur sub his potius terminis quàm sub aliis concipiantur, varios item casus prosequitur, aliásque minutias, quæ cuique advertenti facile in mentem venire possunt. Habet tamen aliquas demonstrationes proprias, sed paucas, quas retulit Clavius. Hunc Franciscus Barocius Patricius Venetus magna cura, & diligentia latinum fecit.

S. Augustinus de principiis Geometriæ scripsit, sed tantùm in universum.

Marinus Philosophus Neapolitanus Procli discipulus protheoriam edidit in data Euclidis, in qua bene explicat usum hujusmodi tractatus, & mentem Euclidis.

Demetrius Alexandrinus lineares aggressiones composuit.

Phylo Tyanæus scripsit de lineis per implicationem genitis, & de aliis variis superficiebus, utrumque refert Pappus, sed hæc nullibi extant.

Pappus Alexandrinus hoc tempore floruit, edidítque mathematicas Collectiones. Videntur duo primi libri periisse. Tertio varias profert solutiones problematis Deliaci, Eratostenis, Nicomedis Heronis, & suum tum aliud proponit problema, nempe Tres medietates sumere, seu tres medias proportionales, arithmeticè, geometricè, harmonicè. Tertium intra triangulum ducere duas lineas majores duobus lateribus; exinde in data sphæra, cubum tetraedrum, octaedrum, icosaedrum, dodecaedrum describit.

In quarto primò agit de lineis irrationalibus, tum de circulis se tangentibus variísque lineis. Tertio de spiralibus. Quarto de Conchoide Nicomedis ad duplicationem cubi. Quinto de Quadratrice Dinostrati. Sexto de sectione anguli in tres partes.

In quinto, initio nonnulla habet ad isoperimetrorum doctrinam utilia etiam ad circularium, tum de comparatione superficiei sphæræ, cum superficie Cylindri; & coni, tum de comparatione soliditatum sphæræ, Cylindri, coni & corporum regularium.

In septimo libro 1. demonstrat aliter nonnullas propositiones tertij Theodosij circa declinationes, & ascensiones rectas: habet item nonnulla desumpta ex Euclidis phænomenis. Totúsque liber ad sphærica pertinet, & proprietates circulorum sphæræ.

In septimo libro 1. distinguit duplicem methodum, compositivam, & resolutivam; recenset autem triginta libros antiquorum, quorum plerique non extant pertinentes ad resolutivam; Ut data Euclidis. Apollonij rationis divisio, & spatij. Ejusdem inclinationum. Tum agit de rectangulis, de lineis tangentibus circulum, exinde de asymptotis hyperboles.

In octavo libro nonnulla initio proponit ad Mechanicam spectantia, agit item de virtutibus motricibus. In hoc opere multa continentur scitu digna permixta multis inutilibus. Optimum foret si expurgaretur. Denuo typis impressum est Bononiæ 1659.

Theon Alexandrinus Commentarium in tredecim libros Euclidis edidit. Nam 14 & 15 sunt Hypsiclis Alexandrini. Hoc opus latinum fecit Bartolomæus Zambertus Venetus, cujus optima est versio. Petrus Ramus existimat Euclidem solos titulos, & figuras composuisse, Theonem verò demonstrationem addidisse. Contradicunt Buteo Commandinus & alij, putántque Euclidem demonstrationes composuisse, quas postea Theon suis discipulis tradiderit. Quia Pappus comparat aliquam demonstrationem Euclidis, cum alia Apollonij. Item Proclus, & Boetius nonnullas demonstrationes Euclidis referunt prout in ipso jacent. Euclides item suo tempore habebatur ut summus Geometra, cum Plato conductores aræ Deliacæ ad eum remiserit. Certum est autem inter Euclidis opera vetustissima esse Theonis commentarium. Liber elementorum Euclidis multum debet Theoni à quo est in ordinem digestus, & etiam auctus.

Hypatia Theonis Alexandrini filia præter alia scripsit in Conica Apollonij commentarium qui non extat. Floruit sub Arcadio, & Honorio.

Eutocius Ascalonita post Pappum & Theonem quos citat, floruit. Edidit Commentaria in Conica Apollonij, & in Archimedis Tractatum de sphæra, & Cylindro, de circuli dimensione, & de æquiponderantibus. In hoc Commentario multa de suo addidit, locaque horum authorum difficilia clariora reddidit, additis Lemmatibus quibus robur demonstrationibus addit. Retulit item plurimorum authorum Commentationes circa Problema deliacum. Opus hoc optimum est, & solidum.

Sextum Christi sæculum primò profert Boetium virum Consularem, qui primum Euclidis librum latinum fecit, nempe solos titulos, & figuras tradidit. Habet nonnulla Geometrica quæ sunt ita parvi momenti, ut in iis legendis tempus malè impendatur.

Cassiodorus item vir Clarissimus scripsit nonnulla Geometrica præter Arithmeticam, Musicam, Astronomiam, & de Paschali computo.

Extat apud Clavium in Geometria practica Joannis Grammatici cognomento Philoponi methodus duas medias proportionales inveniendi.

Heron alius ab Alexandrino inter alia multa Geodesiam composuisse dicitur quam dicunt extare. Scripsit & de Machinis bellicis. Alter Heron fuit Alexandrinus & floruit tempore Apollonij.

Septimo Christi sæculo Isidorus Hispalensis Episcopus in suis libris de Originibus, omnium Mathematicarum compendia inserit, sed quæ sunt ita compendiosè tradita ut ex his nihil emolumenti percipi possit.

Martianus Capella inter alia multa, Geometrica scripsit.

Octavum sæculum nullum Geometram protulit.

Nono Christi sæculo apud Arabas Mathematicæ disciplinæ floruerunt. Nullus tamen eorum de Geometria scripsit excepto Gebro qui in suo libro Astronomico nonnulla tradit de triangulis sphæricis, quæ tamen hanc doctrinam non multum promovent.

Circa hæc tempora Michael Psellus Author Græcus floruit Michaelis Ducæ tempore, qui filiorum Imperatoris præceptor fuit. Hic innumeros pene libros de omni fere materia conscripsit. Inter alia Quadrivium, nempe de quatuor Mathematicis disciplinis Geometria, Arithmetica, Musica, Astronomia, sed per compendium. Quod igitur ad Geometriam spectat in hoc opere nonnulla tantum docet circa triangula, parallelas, & parallelogramma, desumpta ex primo Euclidis, tum de augmento figurarum, etiam solidarum. Habet item nonnulla de incommensurabilibus, sed ita breviter ut primas tantum notiones tradat. Si in aliis materiis ita egit, facilè fuit multos libros ita edere. Hoc opus Xylander vertit, & annotationibus illustravit Basileæ in octavo 1556.

Extant in Bibliotheca nostra Parisiensi Euclidis Elementa Arabicè scripta; in quibus habentur multa diversa ab iis quæ in communibus Euclidis Elementis continentur, ut inter alia ex figuris fit manifestum, & inter alia videtur undecimum axioma esse demonstratum, quod asseruit Clavius nempe se audivisse in Codicibus Arabicis axioma illud demonstrari.

Ex his manifestum fieri potest quem progressum habuerit Geometria usque ad præcedens sæculum. Tota enim continetur Elementis Euclidis, & Hypsiclis, Archimedis operibus de sphæra, & Cylindro, arenario, dimensione circuli, de spiralibus quæ ad quadraturam pertinent, item conicis Apollonij, Theodosij sphæricis, nonnullis quæ ad Trigonometriàm spectant, quæ tamen erant valdè imperfecta, nonnullis item praxibus circa Deliacum Problema. Neque aliud Geometricum ab antiquis accepimus. Ab eo autem tempore trigonometriam perfectissimam reddidimus per logarithmos. Geodesiam perfecimus variis instrumentis, ut regulis proportionalibus aliísque. In Conicis quantum simus provecti ostendit Mygdorgius & P. A sancto Vincentio. In Geometricis item novum P. Guldini inventum de centro gravitatis ad mensurationem omnium rotundorum nova indivisibilium methodus, totam Archimedis doctrinam faciliorem reddidimus; de quibus omnibus suo loco dicemus.

Decimo Christi sæculo Bagdadinus Arabs scripsit librum qui extat de divisione figurarum, quem nonnulli suspicantur esse librum Euclidis Arabiço translatum. Certum est enim Euclidem de divisionibus scripsisse.

Ben Musa scripsit de figuris planis & sphæricis.

Circa hæc tempora Alchindus Arabs libellum reliquit sex quantitatum, quo nihil est ingeniosius si Cardano credimus, qui inter 12 orbis miracula decimum locum Alchindo assignat.

Undecimo Christi sæculo Campanus Gallus Euclidem ex Arabico latinum fecit, scholiísque illustravit. In plerísque eandem affert demonstrationem, ac Theon. Videtur tamen melius explicare, forsitan eo quod ejus phrasis, nostro modo loquendi sit accommoda, & Theonis phrasis à nostra dissideat. Multa tamen de suo addit. Utriúsque commentationes Theonis & Campani, simul per singulas propositiones typis editæ sunt Parisiis anno 1516.

Adelardus Anglus Monachus idem præstitit.

Duodecimo sæculo Theon Smirneus loca Mathematica Platonis Græcè interpretatus est. Liber quidem ad intelligendum Platonem utilis; in quo quæ traduntur Mathematica sunt vulgaria, ita ut mediocris Mathematicus in eo vix quidquam de novo addiscat. Hunc Ismael Bullialdus baldus Pariſienſis Mathematicus ex aliis ſcriptis ſatis notus optimè latinum fecit.

Albertus Magnus ſcripſit quatuor libros de Geometria, Arithmetica, Muſica & Aſtrologia.

Decimum tertium ſæculum Aſtronomos quidem, Geometram nullum dedit, ſicut & decimum quartum.

Decimo quinto ſæculo.

Joannes de Monteregio inter multa opus de triangulis edidit tam de rectilineis, quam ſphæricis.

Idem authorum Græcorum fere omnium opera, nempe Archimedis, Apollonij, Sereni,& aliorum in latinum verſa typis edi curavit.

Eodem tempore Frater lucas de Burgo ſancti ſepulchri Minorita de Geometria, & de divina proportione ſcripſit.In ſuo tractatu Geometrico multa bona habet præcipue circa ſuperficierum dimenſiones.

1478. Nicolaus De Cuſa S. R. Ecl. Cardinalis tituli ſancti Petri ad vincula, Tractatum edidit de mathematicis complementis; in quo Archimedis veſtigiis inſiſtens circa dimenſionem circuli, ejus quadraturam tentat, irrito tamen conatu; quæ profert ſunt bona. Egit de transformatione figurarum, de recti & curvi menſura. Cenſet Faber Stapulenſis Mathematicas diſciplinas profundius eo penetraſſe neminem, cui opinioni non ſubſcriberem niſi cum addito, ſuo forſitan tempore. Habet & alibi multa mathematica exigui momenti.

Circa annum 1480 Joannes Vernerus ſcripſit de Elementis Conicis, de modis duplicandi cubum, de ſectione ſphæræ in data ratione, & quatuor libros de triangulis.

Sub annum 1490 Hermolaus Barbarus Aquileienſis Patriarcha, poſtea Cardinalis inter alia multa quæſtiones Geometricas edidit.

Initio decimi ſexti ſæculi 1500 claruit Albertus Durerus, ac Geometricarum inſtitutionum libros reliquit. Picturam illuſtravit.

Eodem tempore Bartolomæus Venetus in Græcis eruditiſſimus Euclidem ex Græco latinum fecit, eo quod Campani verſionem à Græco longius abire videret; ſed cum Matheſin neſciret, ſæpe hallucinatus eſt. Genius fuit hujus ſæculi ut in vertendis authoribus toti eſſent, fidelitatem potius ſectarentur quam ſcientiam promoverent: Quod in materia ſcientiarum eſt nugari, totum enim Euclidem ſus déque verterem ſi breviori methodo & clariori, eadem demonſtrare poſſem. Neque enim ſenſus authorum tam quærendus eſt, quam res ipſæ; neque tam quod ſignificare voluerunt, quam quod ſignificare debuerunt.

1503 Lucas Gauricus Neapolitanus tetragoniſmum, ſeu circuli quadraturam per Campanum, Archimedem & Boetium edidit, ſed ita malè explicatam ut nullam vim demonſtrandi obtineat. Quare ſatius eſt eadem in propriis authoribus legere, quam in hoc opere.

1507 Carolus Bovillus Veromanduus Geometricum introductorium compoſuit in ſex libros diviſum. In primo agit de magnitudinibus, & earum circumſtantiis. In ſecundo de conſequentibus, contiguis, & continuis. In tertio de punctis. In quarto de lineis.Quinto de ſuperficiebus. Sexto de corporibus.

Opus nullius momenti quod certas definitiones, diviſioneſque continet, prætereáque nihil. Habetur ejuſdem quadratura malè explicata, & falſa. Item introductio ad perſpectivam ejuſdem rationis.

1508 Frater Lucas Patiolus Burgenſis Minorita tractatum edidit geometricum Italicum de menſuratione ſcilicet, & productione corporum ſphæræ inſcriptibilium. In prima parte multa corpora metitur methodo Algebrica; in qua eſſent multa utilia, niſi hæc corpora rarò admodum occurrerent. In ſecunda parte agit præcipue de linea diviſa ſecundum mediam & extremam rationem, quam vocat divinam proportionem, quaſi natura hujuſmodi proportionem obſervaret, eáque ad ſuos effectus præſtandos uteretur. Eam proportionem, productioni, ſeu formationi, non tantum corporum regularium nempe unica ſpecie polygoni conſtantium, ſed etiam aliorum ſphæræ inſcriptibilium applicat. In hoc tractatu multa ſunt bona, & geometrica, non tamen tanto præconio digna, quanto ſuam divinam proportionem extollit, præcipue cum ut dixi nunquam ea corpora metienda occurrant.

Anno circiter 1516 Fredericus Commandinus quindecim libros Elementorum Euclidis latinos fecit, unà cum ſcholiis antiquis Procli, & aliorum, quibus addidit commentationes proprias. Opus quidem bonum eſt, meo tamen judicio nimis prolixum. Tyronem enim diutius in minutiis detinet dum ſcrupuloſius ea notat, quæ cuíque in mentem venire poſſunt.

Habet & data Euclidis, & fragmentum opuſculi Euclidis de levi, & ponderoſo; ſed ita mutilum, ut ex eo nihil elici poſſit, niſi quod videatur proponere principium univerſaliſſimum Mechanices, quò nempe uſi ſumus, Quod plus movetur majores habet vires.

1520 claruit Petrus Cirvellus. Docuit Matheſin in Academia Complutenſi; fecit notas in Euclidem, & compendium quatuor Mathematicarum diſciplinarum.

1626 Nicolaus Tartalea Breſſianus docuit Venetiis; & Geometrica de numeris, & menſuris pluribus eſt proſecutus Italicè.

In primo libro definitiones primi Elementorum Euclidis affert, multáſque notationes adjungit.

In ſecundo continentur methodi metiendarum arearum, ſecundum uſum variarum regionum.

In tertio ſquadræ fabricam, & uſus in reducendis ſuperficiebus ad rectangulas.

In quarto de ſoliditate, & modis metiendi, fœnum, ligna in variis regionibus.

In quinto metitur omnia ædificia, & foſſas.

Quarta pars ad numeros, & praxin reducit figuras tam ſuperficiales quam ſolidas.

In primo libro poſt aliquas libri quinti Euclidis definitiones triangula metitur etiam ſine perpendicularibus.

In ſecundo poſt definitiones variorum ſolidorum docet methodum metiendorum cuborum, priſmatum, pyramidum.

In tertio profert doctrinam Archimedis de ſphæra, & Cylindro, & qua nonnullas praxes elicit ad menſurationem eorum corporum.

Quinta pars docet methodum perficiendorum problematum regulâ & circino, eorum præcipuè quæ in Euclide continentur.

Primo libro, sex priorum Euclidis problemata, & alia multa perficit, duas medias proportionales invenit, ovalem figuram describit, methodum tradit expendendi an duæ lineæ sint proportionales.

Secundo solvit problemata librorum Euclidis 11, 12, 13 & 15, & alia multa, nempe unum corpus ab alio subtrahit.

Tertio eâdem circini aperturâ multa solvit problemata, præcipuè nonnulla à Cardano proposita circa decimum Euclidis.

Idem author commentarium edidit Italicum in 15 libros Euclidis, in quo præter demonstrationes clarè explicatas, adjungit aliquas notationes, & explicationes de suo multum ad claritatem conferentes.

Omnia Tartaleæ opera optima sunt, & utilia.

1630 floruit Orontius Finæus Delphinas Regis Christianissimi Francisci Primi Mathematicus. In 6 priores Euclidis libros commentarium edidit, in quo quantum potuit mentem Euclidis explicuit satis clarè, nullam de suo demonstrationem adjecit. De Geometria libros duos egit, item de circuli quadratura, de descriptione figurarum regularium; quæ quidem bona sunt. Scripsit & alia in aliis materiis. Hunc Nonius in multis reprehendit. Non videtur multum promovisse Geometriam. Dicemus de eo in aliis materiis.

1532 Franciscus Maurolycus Abbas Messanensis Euclidis libros 13, 14 & 15 in meliorem ordinem redegit. Libro decimotertio, unam Propositionem adjecit de suo necessariam, & duas ex sequenti libro transtulit. Libro decimo quarto Propositiones 25 adjecit. Decimum quintum intactum reliquit, totámque hanc doctrinam clariorem reddidit, & geometricè id præstitit. Quæ omnia solida quidem sunt, sed meliora forent, si in materia utiliori id præstitisset. Typis mandatus est Venetiis in quarto.

1537 Joannes Baptista Memus Patritius Venetus, & in ea Urbe Matheseos Professor publicus, Apollonij Conicorum libros quatuor latinos fecit, sed malè; Ejus enim versio non est latina, ideóque difficilior.

1544 excusa sunt Basileæ Archimedis opera omnia Græcè, & latinè unà cum Eutocij Ascalonitæ Commentariis in eosdem libros Archimedis Græcè & latinè.

1550 Joannes Scheubelius in Academia Tubingensi Euclidis Professor ordinarius commentarium edidit in 6 priores Euclidis. In quo affert titulum Propositionis Græcè, quem postea explicat, & demonstrationes adjungit. Nihil habet peculiare, nec est satis clarus, sed confusus; nonnunquam enim Propositiones efficit nimis in abstracto.

1554 prodiere Joannis Buteonis Delphinatis opera Geometrica; De mensura arcæ Noe, de sublicio ponte Cæsaris, confutatio quadraturæ circuli Orontij Finæi. Habet nonnulla de duplicatione cubi, de fluentis aquæ mensura. De libra & statere.

In hoc opere sunt multa ab Antiquis eruditè petita: quæ verò ad Mathesin spectant sunt exigui momenti.

1556 Orontius Finæus Delphinas Mathematicus Regius libros 4 edidit, de rebus Mathematicis hactenus desideratis. In primo agit de duarum mediarum proportionalium inventione, variis modis, novis, suo tamen nævo non carentibus, in numeris idem efficit. In secundo rationem circumferentiæ ad diametrum, & circuli quadraturam tentat. In tertio latus polygoni circulo inscripti, & reductionem ad circulum. In quarto, solidorum transmutationem, & sphæræ cubicationem explicat, proprietates lineæ sectæ extremâ ac mediâ ratione; in quibus ad geometricam præcisionem non pervenit, quamvis utilia sint quæ proponit.

Eodem anno Xylander vertit in latinum Pselli authoris Græci quadrivium & annotationibus illustravit. Basileæ in octavo 1556.

1557 Jacobus Peletarius Cenomanus Commentarium edidit in sex priores libros Euclidis, in quo novas demonstrationes adjecit ad decimam tertiam tertij, ostendit contactum circulorum non esse quantitatem, & paralogismos inde ortos sustulit, principia clarè explicuit, quinti libri definitiones geometricè declaravit. Euclidis verba non religiosè reddidit sed sententiam. Diu vixit Parisiis. Opus bonum & solidum. De contactu circuli altercatus est cum Clavio. Item scripsit de duabus lineis in eodem plano non parallelis, & non concurrentibus.

1558 Federicus Commandinus Urbinas, de quo supra, aliquot tractatus Archimedis in latinum vertit, nempe circuli dimensionem, de lineis spiralibus, de quadratura parabolæ, de conoidibus, & sphæroidibus. Ubi opus fuit commentationes addidit: Omnia optimè.

Eodem anno 1558 Gemmafrisius Medicus, & Mathematicus, scripsit de radio Astronomico, seu de cruce geometrica. Habet in hoc opere multa parerga, quæ ad hoc instrumentum non pertinent. Plurima tamen sunt utilia ad mensurationes. Huic operi adjecta est brevis tractatio Joannis Spangebergij, & Sebastiani Munsteri de simpliciori baculo, quem baculum Jacob nominant: In hoc opere sunt praxes utiles licet communes, Parisiis in octavo 1558. Item in quarto Antuerpiæ 1584.

Eodem anno 1558 Joannes Pena Regius Mathematicus Parisiis versionem Sphæricorum Theodosij, è Græco in latinum sermonem edidit. Ratio instituendæ hujus versionis fuit, quod aliæ versiones quæ tunc temporis habebantur fuerant ex Arabico desumptæ. Arabes autem Theodosij Sphærica corruperant, multísque Propositionibus inutilibus auxerant, hoc est ferè quarta parte. Demonstrationes item difficultatibus variis implicuerant. Quare ut argumentum alioquin utilissimum suo splendori restitueret, hanc versionem aggressus est, quam diligentissimè perfecit.

Eodem anno 1558 Maurolycus Abbas Messanensis insignis Mathematicus de quo jam suprà, inter alia, edidit Sphærica Theodosij; sed ejus versio, sive interpretatio difficilior est ea quam postea edidit Clavius. Phrasis latina non est, parítque confusionem. Idem edidit ejusdem opusculum de habitationibus 12 Propositionibus comprehensum, in quo agit de proprietatibus habitantium sub æquatore, polo aliísque locis.

Edidit item Menelai Sphæricorum libros tres, ex vetustissimis membranis desumptos, quos in multis se supplevisse asserit.

1561 Joannes Regiomontanus Trigonometriam

triam edidit libris quinque comprehensam; in quorum duobus primis agit de solutione triangulorum rectilineorum. Tertius est ad triangula sphærica Isagogicus, multáque habet ex Theodosio desumpta. In quarto proprietates triangulorum sphæricorum, nonnullásque eorum solutiones tradit. Item Methodum construendi canonis sinuum. Hæc trigonometria bene est demonstrata: in multis tamen est difficilior, nec satis compendiosa. Post ipsum enim inventæ sunt praxes aliæ faciliores. Opus tamen optimum fuit suo tempore.

Anno 1565 Christianus Herlinus versionem & Commentarium edidit sex priorum librorum Euclidis; Conradus Dasypodius reliquorum. Ratio Commentarij hujus in eo consistit, ut notet quot in unaquaque Propositione sint syllogismi, & quomodo in forma poni possint. Quæ notatio est exigui momenti, demonstrationésque nimis prolixas efficit. In fine ostenditur nexus earumdem Propositionum. Totum opus inutile.

1566 Fredericus Commandinus Urbinas in latinum vertit quatuor Apollonij Pergæi libros de Conicis, unà cum Pappi Alexandrini Lemmatibus, & Eutocij Ascalonitæ Commentariis in singulas Propositiones, quibus annotationes suas adjecit. Optima est versio, opusque clarum quantum id materia permittit. Vertit item Sereni Antinsensis Philosophi libros duos de sectione Cylindri, & coni, eâdem claritate, cui commentarium addidit de suo.

1567 Conradus Dasypodius Professor Scholæ Argentinensis, Elementa Geometriæ composuit, in quo libro definitiones solas tradit Græcè, & latinè. Argentorati, in octavo 1567.

1572 Jacobus Peletarius Medicus, & Mathematicus Parisiis, opusculum edidit de usu Geometriæ triginta problematis comprehensum. Sunt autem problemata communia ex Euclide ut plurimum desumpta. In quarto Parisiis 1572.

1575 Joannes de Merliers Professor Regius Matheseos Parisiis, Opusculum Gallicum edidit, cum titulo *La pratique de Geometrie*. In quo scilicet docet methodum metiendi omnia rectilinea per reductionem ad triangula, quæ demissa perpendiculari metitur. Nihil habet nisi commune.

1577 Joannes Nicolaus Stupanus Medicus explicuit usum & compositionem instrumenti ad omnes mensurationes utilissimi, nempe constantis tribus regulis in partes æquales divisis: Hujus dicit inventorem Abelem Fullonio Henrici secundi Galliarum regis Mathematicum. Hujus instrumenti usum dedi in Geometria practica. Huic accessit Tractatus Frederici Delphini de æstu maris, in quo rationem physicam vix attingit.

1578 Franciscus Flussates Candalla ex illustri Flussatum familia satis nota apud Gallos, Commentarium in quindecim libros Elementorum Euclidis edidit. In quo veram & germanam Geometriæ intelligentiam restituit. Addidit de suo decimum sextum, decimum septimum, & decimum octavum de solidorum corporum comparatione, & inscriptionibus variis. Opus perspicuum, & optimum si materia foret utilior.

1579 Prodiit Vietæ Canon Mathematicus seu ad triangula, cum libro singulari Vietæ universalium inspectionum ad Canonem Mathematicum; in quo ita breviter res indicat, ut plus temporis impendendum sit in conjiciendo quid intendat quam tota doctrina in eo contenta mereatur; Ideóque flocci facienda, ut alia omnia quæ sunt obscura. Videtur autem Joachimus Rheticus ex mente Vietæ suum canonem, & trigonometriam concinnasse: Cujus methodus inferior est communi.

1581 Mauricius Bressius Gratianopolitanus, Mathematicarum Lutetiæ Professor metrices Astronomicæ libros quatuor edidit, seu potius Trigonometriam. In primo libro breviter proponit praxes additionis, subtractionis, multiplicationis, & divisionis Astronomicæ, hoc est methodum has regulas exercendi circa sexagenas graduum, gradus, minuta, & secunda. In secundo docet methodum construendorum sinuum, quos constituit cum fractionibus, nempe sinus ipsos dividit quasi in gradus, minuta, & secunda, quæ ratio commoda non est, sed reddit regulas multiplicationis, & divisionis nimis difficiles. Docet item methodum constituendi canonis adscriptarum seu tangentium, & hypotenusarum, seu secantium: per quam canonem exhibet, sed pariter fractionibus implicatum. In tertio libro dat Trigonometriam rectilineam. In quarto sphæricam.

Hæc Trigonometria bona est, videtúrque bene promovisse hanc partem, cùm habeat Propositiones optimas, & claras.

1583 Thomas Finkius Flenspurgensis edidit Geometriæ rotundi seu circuli libros 14; in quibus collegit, quæcumque in libris Euclidis ad circulum pertinent. Habet item nonnulla ad Geometriam spectantia, quæ passim alibi reperiuntur. Unde totum opus est exigui momenti.

1584 Joannes Baptista Benedictus Patritius Venetus in fine sui operis multa habet Miscellanea Geometrica, quorum nonnulla ad sectiones præsertim pertinentia bona sunt, sed inordinata.

Eodem anno 1584 Simon du Chene Dolensis, edidit Gallicè opusculum; *Quadrature du Cercle, ou maniere de trouver un quarré esgal à un Cercle donné.* Opus male digestum, ageometricum, & nullius momenti.

1585 Nicolaus Tartalea Bressianus Italicè Euclidem interpretatus est; quæ interpretatio nihil habet peculiare, nisi quod Euclidem bene reddit.

1586 Franciscus Barocius Jacobi filius, Patritius Venetus, opus instituit ex conicis desumptum, in quo Problema geometricum de lineis ad sese invicem semper accedentibus, & nunquam concurrentibus, tredecim modis absolvit. Utitur autem plerúmque asymptotis hyperbolarum. Opus quidem geometricum, sed utilitatis modicæ.

1587 Prodiit nova Geometria Italica Francisci Patricij, in qua cum ordine mirabili, viâque faciliori Matheses demonstrare intendit. Opus 15 libris comprehensum; primum tamen Euclidis librum non excedens. Ideóque res est nullius momenti, in plerisque enim nihil probat. In quarto Ferrariæ.

Anno 1588 prodiere Pappi Alexandrini Collectiones à Frederico Commandino Urbinate in latinum versæ, & commentariis illustratæ. Quod ad Commandinum spectat opus est optimum. Impressum item est Bononiæ anno 1659.

1591 Philippus Lansbergius Triangulorum Geometriæ libros quatuor edidit, in quibus nova methodo

methodo triangulorum doctrinam explicat. In primo habet Theoremata necessaria ad constructionem Canonis sinuum, & tangentium, quem in secundo libro construit. In tertio triangula rectilinea, in quarto sphærica solvit.

Hæc trigonometria clara est, facilis, ab eo tamen tempore ulterius provecta est hæc doctrina, cui nempe additæ sunt praxes faciliores quam plurimæ.

1593 Adrianus Romanus Lovaniensis Medicus, & Mathematicus, edidit ideæ Mathematicæ partem primam sive methodum polygonorum, nempe qua modum tradit metiendorum facile laterum, & arearum unà cum circuli quadraturà. Hoc opus demonstrationes non habet, sed tantum praxes, ideóque ut plurimum est inutile, cum jam supponat te scire id quod docet.

1594 Josephus Scaliger Cyclometrica Elementa duo edidit. In primo agit de perimetro circuli, in secundo de potentia circuli. Voluit autem in hoc opere solvere problema de circuli quadratura ut in appendice apparet. Quàm vero ab ea longe absit omnibus fit manifestum, cum velit dodecani ambitum majorem esse circumferentia circuli cui inscribitur, quod non probabit unquam cum falsum sit; ideóque totum hoc opus sicut & alia multa similia, in nihilum recidit.

1594 prodiit Francisci Vietæ munimen adversus novam Cyclometriam seu Αντιπελεκυν Scaligeri. Nempe in hoc opere facile demonstrat Cyclometriam à Scaligero promotam esse.

Prodiit ejusdem opusculum quo solvit Problema ab Adriano Romano Lovaniensi magna pompa omnibus Mathematicis propositum. Solvit autem pluribus modis. Est autem problema Algebricum.

3 Ejusdem Pseudomesolabum, adversus Mesolabum Scaligeri. Opus exiguum pessime explicatum.

1594 Cornelius de Judæis Antuerpianus opusculum edidit figuris bene ornatum, de usu quadrantis, & quadrati Geometrici, in quo præter figuras nihil est quod commune non sit, & cuique obvium.

1595 Bartolomæus Romanus Protheum militarem Italicè edidit in tres libros divisum.

In primo describit fabricam variorum instrumentorum Geometricorum. In uno instrumento conjungit quadrantem, semicirculum, quadratum Geometricum, Radium Græcum seu regulas parallacticas, Crucem Geometricam, annulum Cylindrum, Globum cœlestem in capulo pugionis.

In 2 & 3 usum istius instrumenti aperit, quo nempe figuræ omnes geometricæ delineantur, instrumenta item Perspectivæ, Picturæ, Architecturæ; docet item nonnullas praxes ad navigationem, & bellum spectantes.

In hoc opere sunt multæ ingeniosæ praxes, nempe usus istorum instrumentorum, quorum demonstratio per se patet. Neapoli in quarto 1595.

1596 prodiit Opus Palatinum de triangulis, à Georgio Joachimo Rhetico cœptum, & à Valentino Othone Principis Palatini Friderici 4 Electoris Mathematico perfectum. Plurimos continet tractatus. Primus tractatus est Georgij Joachimi Rhetici, librosque tres complectitur: In primo præponit lemmata; in secundo quærit chordas; & sinus; in tertio calculum init. Sequitur liber unus de triquetris linearum rectarum. Exinde tractatus de triangulis Globi cum angulo recto, libris duobus comprehensus. Denique tractatus de triangulis sphæricis obliquangulis, libris quatuor. Additæ sunt tabulæ amplissimæ. Opus hoc male digestum, & male explicatum, licèt fusissime, in quo trigonometriam vix quisquam addiscat. Usus canonis difficillimus, nec comparandus cum canone communi. Videtur hoc opus desumptum esse ex Vieta.

1597 prodiit Gallicus tractatus de graphometro instrumento cujus ope distantias metiri possumus, cæterasque operationes Geodeticas perficere. Author est Philippus Danfrié. Instrumentum optimum est plurimarumque praxium capax. Parisiis in quarto 1597.

1597 Adrianus Romanus Eques auratus Matheseon Professor in Academia Vurceburgensi opusculum edidit, cujus titulus, *In Archimedis circuli dimensionem analysis.* In hoc opere defendit Archimedem contra Josephum Scaligerum qui Archimedem reprehenderat, quòd in suâ dimensione circuli, numeris esset usus. Addidit & exercitationes Cyclicas in eundem Josephum Scaligerum, Orontium Finæum, & Raymarum Ursum, in quibus optimè demonstrat Orontium non invenisse quadraturam circuli, & alios item in multis deceptos esse.

1599 Schonerus Petri Rami Veromandui Geometriam 23 libris comprehensam edidit. Quatuor primi definitiones, & divisiones communes continent. Quintus de lineis, perpendicularibus & parallelis. 6 7 & 8 de triangulis. 9, Geodesiam habet ad mensurationem linearum, & 10, 11 & 12 de parallelogrammis rectangulis, & quadratis. 13 doctrinam Secundi Euclidis continet. 14 mensurationes arearum. 15 16 & 17 de circulo. 18 de inscriptionibus in circulo. 19 de mensuratione polygonorum, & circuli. 20 de Solidorum elementis, nempe continet doctrinam Undecimi Euclidis. 21 de soliditate sphæræ. 22 de mensuratione pyramidum. 23 de prismate. 24 de cubo. 25 de polyedris. 26 de sphæra, & corporibus inscriptis. 27 de Conis & Cylindris.

Schonerus hoc opus præfert operibus Euclidis, conatúrque ostendere in Rami libris, & multo plura & utiliora contineri. Quod licet verum sit non tamen eum Euclidi præfero, quia multa habet nimis breviter dicta, & non demonstrata. Multa sunt item Euclydæa, licet item habeat multa propria.

Idem Petrus Ramus opus edidit cui titulus Scholarum Mathematicarum, in 31 libros digestum. Tres primi continent procemium Mathematicum, seu adhortationem; duo proximi disputant de præcipuis partibus Arithmeticæ, alij ordine de singulis Euclidis Elementis disserunt, singulásque evolvunt, & examinant Propositiones: ostendúntque quid in singulis reprehendendum, emendandúmque sit. Totum opus exigui est momenti, in quo pauca discas.

1600 Franciscus Vieta Fontenæensis aliquos tractatus Geometricos reliquit. Nempe 1. Effectionum Geometricarum Canonicam recensionem. In quo explicat Geometricas effectiones, quæ quadratum non superant.

2 Supplementum Geometriæ in quo problemata paulò difficiliora solvit.

3 Pseudo

2 Pseudomesolabum; in quo considerat segmenta linearum inscriptarum circulo, eaque cum segmentis diametri comparat.

Quartus adjuncta capitula: continet varia problemata de inscriptione quadrilaterorum in circulo.

5 Ad angulares sectiones problemata universalia; seu varia problemata quibus triangula inter se comparat.

6 Variorum Responsorum liber, in quo respondet ad varia quæsita.

7 Apollonius Gallus, ita se vocat occasione problematis de describendo circulo quem tres circuli contingant, quod Adrianus Romanus solvere non potuerat. Hujus occasione problematis, alia multa soluit circa tactus circulorum, & linearum.

8 Munimen adversus novam Cyclometriam Scaligeri, cujus errores detegit.

In his multa sunt ingeniosa, & abstrusa, sed quæ vix usum aliquem habeant.

1600 Bartholomæus Pitiscus Granbergensis Silesius trigonometriæ libros quinque edidit.

Primus est de generibus & affectionibus triangulorum, repetit autem nonnullas eorum proprietates ab Euclide traditas.

2 De necessariis ad dimensionem triangulorum tabulis, sinuum, tangentium, & secantium.

3 De dimensione triangulorum planorum.

4 De dimensione sphæricorum.

5 De compendiis quibusdam triangulorum canonis condendi, & usurpandi. Exhibet canonem sinuum, tangentium, & secantium.

Addidit quasi in exemplum tractatum problematum Geodeticorum, Altimetricorum, Astronomicorum, Geographicorum, in libros 10 distinctum.

Totum opus optimum quidem est; deficit tamen nonnunquam quod non habeat demonstrationes integras, sed nonnunquam ab aliis demonstrata assumat, ut à Regiomontano. Multa tamen addit de suo. Nihil habet de logarithmis, quæ modo est pars præcipua Trigonometriæ. Augustæ Vindelicorum in octavo 1600.

1603 Marinus Ghetaldus Patricius Ragusinus nonnullas Propositiones novas de Parabola edidit.

Idem Archimedem promotum edidit, nempe de variis corporum generibus, gravitate, & magnitudine comparatis, quæ nempe spectant ad tractatum de natantibus in humido; in quibus doctrinam communem Archimedis nonnihil promovit. Habet item resolutionem problematis de corona; Romæ in quarto 1603.

1603 Joannes Hermannus Beyerus reip. Francofurtensis Medicus, Stereometriæ inanium novam & facilem rationem edidit, demonstrationibus Geometricis confirmatam, quâ corporum regularium omnium, tam rectilineorum quam curvilineorum capacitates promptissimè explorantur.

Hoc opus duas habet partes. Prima pars est quasi compendium, solas praxes continens, primóque proponit numeros stereometricos, & eorum Algorithmum. Fabulam item regulæ cubimetricæ, & ejus usum in prismatibus, polyedris, Cylindris, conis & sphæra.

Secunda pars primò agit de divisione integrorum in scrupula, & de eorum algorithmo, de extractione radicis cubicæ. De virgæ cubimetricæ fabricâ, & usu. De trianguli directione Gæodetica. De triangulati Rhomboidis, trapezij, multanguli circuli Geodesia. Tum de stereometria sphæræ, prismatis, cylindri, pyramidis coni, curticoni.

Opus bonum & utilissimum, videtur in multis demonstrationes tantum indicasse.

1603 Christophorus Dibuadius Doctor Medicus, & Mathematicus Danus, In Geometriam Euclidis libris sex prioribus comprehensam demonstrationem linearum edidit, nempe commentarium, sed ita breve, ut sæpe non rectè demonstret, nec concludat.

Idem in eosdem sex priores Euclidis demonstrationem numeralem, nempe Propositiones in numeris exhibet, & demonstrat, quæ res potest aliquid lucis afferre. Supponit autem trigonometriam sine quâ intelligi non potest, sæpe citat Pitiscum, & Algebram advocat, & surdos numeros adhibet.

Idem in Arithmeticam rationalium, seu septimum, octavum, nonum Euclidis eodem modo brevissimè explicuit. Nihilque peculiare profert.

Idem in Arithmeticam irrationalium seu decimum Euclidis demonstrationem linearem, & numeralem edidit. Supponit Algebram, & multa nimis breviter & obscurè proponit.

1605 Errard Mathematicus Regius novem primos Euclidis libros Gallicos fecit, & commentario illustravit, benè, & exactè.

Idem tres libros edidit Geometriæ practicæ: Unum de mensuratione linearum. Secundum de mensuratione superficierum. Tertium de solidis. Habet autem praxes communes satis benè, & exactè demonstratas.

1605 Philippus Horcher Berncastellanus, Philosophiæ, & Medicinæ Doctor libros tres edidit de circino proportionum. Primò tradit ejus constructionem. Secundò docet quomodo eodem circino quantitates augeri, & minui, & radices omnes extrahi possint, vel vicissim radicibus datis solida investigari. Tertiò exemplis reliquos usus explicat.

Hic circinus idem non est, ac instrumentum à Galilæo inventum, habet tamen quam plurima similia. An autem Horcher à Galilæo, an Galilæus ab Horcher acceperit nescio. Videtur Galilæanus retinuisse nomenclaturam ab Horcher traditam quamvis non sit simile circino, cui Horcheri instrumentum persimile est. Tempus affine est, nam liber Horcheri anno 1605 prodiit, Galilæi opus in latinum versum est anno 1612. Moguntiæ in quarto 1605.

1605 Levinus Hulsius Gandensis tractatus nonnullos edidit ad Geodesiam spectantes, quos tamen mechanicorum inscripsit.

Primus continet ocularem demonstrationem novi Geometrici instrumenti planimetri unà cum suo inductorio, cujus beneficio, ichnographiæ omnes Geometricè describuntur, habet item rete, ad scenographias.

Secundus Tractatus continet nonnulla ad tormentorum bellicorum directionem, & globorum mensurationem spectantia.

Tertius continet usum & descriptionem circini proportionum Justi Burgi, cujus beneficio omnis superficies, & solidum augeri, & minui potest. Paucissimos tamen profert usus hujusmodi circini. Si Burgus fuit antiquior Galilæo, & Horchero ipse invenit circinum proportionis. Francofurti ad Mœnum in quarto 1605.

1607 Galilæus Galilæi Nobilis Florentinus, Professor quondam Mathematices in Universitate Paduana,

Paduana, & Supraordinarius in Pisana, Primarius Philosophus, & Mathematicus Ducis Etruriæ, Italicè scripsit de regulis proportionalibus sub hoc titulo: *Le operationi del Compasso geometrico, & militare*; fabricam autem, & usum illius instrumenti latinam postea tradit.

Objectum fuit Galilæo à Baltazare Capra Mediolanensi, quod non esset hujus instrumenti author, sed ab eo didicisset. Huic objectioni respondet testimonio artificis, qui jam à 10 annis ipsi talia instrumenta construxerat. Quare tractatum Italicum edidit cum titulo; *Difesa di Galileo Galilei contro alle calumnie, & imposture di Baltazar Capra Milaneze, Usategli si nella consideratione Astronomica sopra la nuova stella del 1604, come nel publicare come sua invenzione, la fabrica, & gli usi del compasso Geometrico, & Militare.* Atque adeo sunt quatuor qui de hoc instrumento contendere possunt. Bononiæ in quarto de novo editum. 1656.

1607 Prodiit authore Leonarto Zublero Opusculum Geometricum, cui titulus, Novum instrumentum Geometricum, quo rerum mensurabilium altitudo, latitudo, profunditas hactenus inaudito compendio etiam ab imperito mensurantur, à Gaspare Vvaser Latinitati donatum est.

Instrumentum constat semicirculo, & duplici allidada, in partes æquales mille divisa, instructa cursore, cui alia regula aptari potest: ita ut tribus his regulis cujuslibet trianguli typus in ipso instrumento habeatur. Instrumentum faciles reddit operationes trigonometricas, quod in Geometria practica non præteriimus. Opus hoc est eleganter impressum ob 22 figuras æri incisas. In quarto Basileæ 1607.

1608 Simon Stevin Principis Auriaci Mathematicus hypomnemata mathematica conscripsit, ea tribuens Mauritio Nassovio, Principi Auriaco domino suo, quasi illius essent commentationes quas Stevinus tantum conscripsisset. Sub hoc titulo multi continentur tractatus.

Primus Tractatus Hypomnematum Stevini est Trigonometricus in quatuor libros divisus. In primo post definitiones 10 Propositionibus canonem sinuum absolvit, canones item tangentium, & secantium, unâ, aut alterâ propositione, eosque tradit cum usibus.

2 Triangula rectilinea solvit 8 Propositionibus. Addit in fine nonnulla de multangulis planis ad praxin spectantia.

3 Est de sphæricis eumque in tria membra partitur: In primo membro habet 22 Propositiones quasi ad sequentia Isagogicas. Tum sequuntur novem Theoremata, ex quibus in tertio praxes eliciuntur 13 problematis. Addidit in fine nonnulla de multangulis sphæricis, & appendicem hujus tractatus.

Liber quartus proponit cœlestia problemata, quæ trigonometrico calculo solvuntur. Hic Tractatus posset, sufficere ad triangulorum omnium solutionem, non habet tamen vias brevissimas quæ postea inventæ, neque Theoremata iis inservientia.

Idem author in secundo tomo Hypomnematum habet Geometriam practicam in 6 libros divisam. In primo docet figurarum descriptionem linearum perpendicularium, Parallelarum praxes; descriptionem Ellypsis, aliarumque sectionum conicarum, helices Ichnographiæ cujusque variis modis, Modum item aptandorum polygonorum, ad formationem corporum regularium. 2 Liber est de figurarum dimensione. Primo igitur agit de linearum etiam inaccessarum dimensionibus. In secunda parte de superficierum dimensionibus etiam curvarum. In tertia de soliditate.

3 Liber agit de additione, subtractione, multiplicatione, divisione magnitudinum præsertim planarum, & solidarum.

4 Liber est de magnitudinum proportione, primò linearum, secundò superficierum, tertiò solidorum.

5 De sectione proportionali simili ordine linearum, superficierum, & solidorum.

6 De transformatione figurarum.

In hoc tractatu multa habet utilia, & ad usum revocabilia, intacta tamen reliquit instrumenta, quæ ad ea solent adhiberi.

1609 Adrianus Romanus Canonem triangulorum sphæricorum edidit, in quo totam trigonometriam quam alij 28 casibus comprehendunt, 6 casibus absolvit.

Methodicè non procedit hic author, nec terminis utitur consuetis, ita ut ejus trigonometria, licet bonam doctrinam contineat, evadat difficillima. Demonstrationes vix indicat, quare nimis laborandum est in ea perdiscenda.

1610 Joannes Baptista Porta Neapolitanus Elementorum curvilineorum libros tres edidit.

In primo circulos auget in data ratione, circulos à circulis subtrahit, Sphæroides & Ellypses similiter auget, habetque Prop. 26.

In secundo varias figuras curvilineas considerat.

In quarto lunulas, & quadraturam circuli tentat.

In hoc opere sunt multa optima, & facilia, & quæ viam sternere possunt ad ulteriora. In quarto Romæ 1610.

1611 P. Christophorus Clavius Bambergensis Societatis Jesu, Geometriam practicam in tomo secundo suorum operum edidit in octo libros divisam. Primus tribus Propositionibus omnem dimensionem absolvit.

2 Quadrantis Astronomici usum in lineis metiendis explicat.

3 Quadrati Geometrici.

4 Superficierum areas inquirit.

5 Solidas magnitudines metitur.

6 Divisiones figurarum planarum perficit, agit de augmento solidarum, ubi de inventione duarum mediarum proportionalium. Item de extractione radicum.

In septimo de figuris isoperimetris agit, quem tractatum fuisse Zenodori supra diximus.

In octavo varia problemata proponit, quorum pleraque sunt Archimedis. Hic tractatus facillimus est, & utilissimus.

Idem author Euclidis Elementorum libro 15 commentatus est, scholiisque & corollariis auxit. Multa ex antiquis coacervavit, sæpe non magni momenti, quamvis hic Commentarius bonam doctrinam contineat. Peccat tamen quod nimis multa coacervet, & mole lectorem obruat, nimiúmque in spinis detineat. Peccat item quòd nimis longo demonstrationis circuitu utatur, nec studeat brevitati, quæ si sit perspicuitati conjuncta plurimi est facienda præsertim in hac scientia.

Composuit item bonum Commentarium in Sphærica Theodosij.

Item trigonometriam tam rectilineam quàm

sphæricam

sphæricam. In qua demonstrationes ita longas, & graves habet, ut sæpe facilius sit novam demonstrationem cudere, quam eam in hoc authore addicere. Ejus tamen trigonometria bonam doctrinam continet; habet inter alia solutionem triangulorum per prostaphæresin. Deest in hac trigonometriâ logarithmorum doctrina quæ nondum inventa fuerat.

1612 Alexander Andersonius Aberdonensis Scotus varia Opuscula edidit. Primò supplementum Apollonij redivivi, sive analysin problematis desiderati ad Apollonij doctrinam de inclinationibus, à Marino Ghetaldo Patritio Ragusino restitutam. Nempe exhibetur mechanica æqualitatum tertij gradus, sive solidarum, in quibus magnitudo data æquatur homogeneæ sub altero coefficiente ignoto, quæ ad Algebram spectant.

Secundò variorum problematum affectionem habet, quorum pleraque ex Vieta desumuntur: Ea autem Geometricè solvit.

3 Brevem diacrisin animadversionis in Vietam, à Clemente Cyriaco editam. Nempe Cyriacus Vietam, & Ghetaldum impugnarat, ostenderatque solutionem aliquorum problematum ab ipsis propositam non esse accuratam: hos defendit Andersonius opusculo tria aut quatuor folia non superante.

4 Vindicias Archimedis, seu Elenchum Geometriæ novæ à Philippo Lansbergio editæ Opusculo 4 pariter foliorum.

5 Exercitationum Mathematicarum decadem primam continentem enodationem quæstionum, quæ nobilissimorum tum hujus tum veteris ævi Mathematicorum ingenia exercuerunt.

6 Angularium sectionum analaticorum Theoremata universaliora à Francisco Vieta Fontenæensi primùm excogitata, & ad Andersonium transmissa, quæ ipse demonstrat.

In hoc opere sunt multa optima, ad Algebram spectantia, sed ut plurimùm inutilia.

1612 Prodiit Galilæi de Galilæis Patritij Florentini latinè Tractatus prius Italicè editus de proportionum instrumento. Hoc instrumentum meritò vocat Compendium Geometriæ: habet enim usus innumeros quos initio omnes non vulgavit: perfectum enim est ab aliis, immo & ulterius perfici posset, aliásque lineas tangentium, & secantium, immo & logarithmos excipere.

Hunc ex Italico latinum fecit Mathias Bernegerus. In quarto Argentorati 1612.

Eodem anno Josephus Langius Cæsare-Montanus Elementale Geometricum edidit, in quo universales tantum notiones habentur sine ullis demonstrationibus. Friburgi Brisgoiæ in octavo 1612.

1614 Samuel Marolois Gallicè Geometriam practicam edidit satis bonam, & demonstratam, tædiosam tamen, eo quod figuras æri incisas separatim posuerit. Opus hoc est satis bonum, commune tamen, & malè explicatum.

1615 David Rivultus à Flurantia Cenomanus, è regia turma sacri cubiculi Regis Christianissimi Archimedem latinum fecit, scholiisque illustravit nonnullisque demonstrationibus. Item fragmenta nonnullorum authorum referentium Archimedis fragmenta ut de corona adulterata, de Cochlio, de trispasto ejusque inventis adversus Marcelli, & Appij machinas, de Machinis aëreis & aqueis, de confectione sphæræ materialis.

Hic author Archimedem bene vertit, faciliorem que reddit, & methodicè procedit.

1615 Joannes Kepler Imperatoris Mathematicus edidit novam stereometriam doliorum vinariorum, & usum. Virgæ stereometricæ compendiosam, & utilem. Hanc tamen non satis expedit, affertque methodos quæ in multis possint fallere. Indicat item aliquid circa notitiam illius partis, quæ nonnunquam vacua est in dolio, non solvit tamen problema in ordine ad praxin.

1619 prodiit in certò authore liber Gallicus inscriptus *Recreations Mathematiques*, in quo continentur aliquæ praxes faciles, ex omnibus Mathesis partibus excerptæ sine ullis demonstrationibus.

Postea idem author opus suum correxit, & edidit sub titulo, Examen recreationum Mathematicarum, & sub nomine Rolet Botonné.

1619 Alexander Guybert Conciliarius Aurelianensis Tractatum ut vocat familiarem Gallicum edidit, ad mensurationem, sive superficialem sive solidam cujuslibet ædificij. Opus facile, & utile, sed imperfectum. Parisiis in octavo 1619.

1620 Carolus Malapertius Montensis Societatis Jesu, Euclidis Elementorum libros sex priores explicuit, & ad faciliorem captum accommodavit. Opus clarum, & facile; videntur tamen Propositiones libri quinti non esse demonstratæ. Duaci in 16. 1620.

1620 Edita sunt latinè à Nicolao Jansonio Arnh. Geldro Nova reperta Joannis Alphonsi Molinensis Cani, Hispanicè scripta; in quibus subtiliores Geometricæ quæstiones de duplicatione cubi, de quadratura circuli, & aliæ expenduntur, Euclidæa Elementa nonnulla corriguntur, alia ut falsa rejiciuntur.

Quæ profert circa duas medias proportionales, & quadraturam circuli eodem vitio laborant à ageometriæ quo aliæ multæ methodi ab antiquis propositæ. Quod de Euclide proponit non demonstrat, & sæpe hallucinatur, ita ut in hoc legendo opere insumendum non sit tempus, præcipue cum methodum affectet non communem, sine ullo operæ pretio, nisi quod obscuritatem accersat.

1620 Eberhardus Vesper Elementa Geometrica in usum Geometriæ studiosorum ex variis authoribus collegit.

Opus hoc continet tantum definitiones, & varia problemata, ut plurimum non demonstrata. Habet item id incommodi quod figuræ non sint in proprio loco.

1621 Joannes Neperus nobilis Scotus Baro Merchistonij Librum logarithmorum edidit, in quo substitutis loco numerorum vulgarium, eorum logarithmis seu numeris procedentibus in proportione Arithmetica, pro numeris Geometricè proportionalibus; multiplicationem in additionem, divisionem in substractionem commutat. Quod inventum inter præcipua hujus sæculi annumerari potest, illique jure hæc addi Epigraphe, *Antecessoribus nostris sapientiores sumus.* Nihil enim potuit inveniri in supputationibus, tam Geometricis, quã Astronomicis, quod majorẽ facilitatẽ præberet. Ejus tamen Opus obscurum est & malè explicatum, & species logarithmorum, quorum tabulam exhibet, est multum incommoda. Aliam tamen indicat speciem legarithmorum utiliorem, in qua scilicet logarithmus unitatis sit o & denarij 1000000. Hanc secundam logarithmorum speciem, labore improbo ab 10000 absolvit Henricus Briggius in Academia Oxoniensi Geometriæ Professor, deditque canonem, sinuum tangentium, & secantium, item logarithmorum, sinuum, & tangentium pro singulis minutis secundis, supposito radio 10, 00000, 00000, cum usibus earumdem tabularum in trigonometria. Quod opus quanti sit laboris, & usus nemo non videt. Adrianus Ulac Goudanus secundam editionem aliis auctiorem perfecit.

1621 Henrion Mathematicus Parisiis 4 libros Geometriæ practicæ Gallicè edidit. In primo libro proponit multa Problemata practica partim ex probatis authoribus excerpta, partim à se inventa. In secundo de mensuratione linearum inaccessibilium: utitur autem instrumento, constante duabus regulis, in communi centro aptatis, & alia ad angulos rectos alterutri ita aptatâ, ut secundum eam currere possit. Ideóque ad triangulum rectangulum suas praxes revocat: Quæ sunt similes usibus quadrati Geometrici, nisi quod umbra versa nunquam se immisceat. In tertio habet planimetriam. In quarto stereometriam.

Opus hoc bonam, & solidam doctrinam continet, sed communem. Habet item dimensionem circuli, & partem doctrinæ Archimedis de sphæra, & Cylindro, In quarto Parisiis 1621.

Eodem anno 1621 Villebrordus Snellius Batavus Opusculum edidit Cyclometricum, secundum logistarum abacos, & ad mechanicen accuratissimus. Ejusdémque usus in quarumlibet adscriptarum inventione, longè elegantissimus. Opus bonum, & Geometricum, hæc tamen doctrina potuit clarius tradi. Videtur hic author obscuritatem affectare, & phrasin à communi alienam.

1622 David Sanclarus Matheseon Professor Regius pro Archimede scripsit contra Anonymum, qui aliquam quadraturam circuli promulgarat. In qua nempe diametrum circumferentiæ subtriplam faciebat, & consequenter quadratum diametri, seu circumscriptum se habere ad circulum ut 4 ad 3. Ostendit id falsum esse, affertque ambitus polygonum, qui majorem rationem habeant ad diametrum. Opus hâc difficultate caret.

Prodiit eodem anno incerto authore Refutatio quadraturæ à Benedicto Scotto propositæ. Parisiis in quarto 1622.

1622 P. Le Mardelé Professor Matheseos quindecim libros Euclidis Gallicè vertit ex Græco satis bene. Nimiùm multa videtur addidisse. Parisiis in octavo 1622.

1623 Henrion Matheseos Professor Opusculum Gallicum composuit de fabrica, & usu circini proportionum, in quo colligit, quæ ab aliis de hoc instrumento dicta sunt, additque plurimas praxes de suo. Opus hoc clarum est, & utile aliquando tamen demonstrationes indicat tantum, & non tradit integras. Parisiis in 8. 1623.

Eodem anno idem author edi curavit Pitisci canonem sinuum, tangentium, & secantium, in decimo sexto, adjecto in fine usu, tam in triangulis sphæricis quam planis, sine demonstrationibus. Parisiis in 16.

Idem author eodem anno responsionem Apologeticam edidit contra Mardelé qui Euclidis traductionem ediderat, quam contendit esse suam, quam hic in aliquibus immutarat. Opus contentiosum, & nullius momenti. Parisiis in octavo 1623.

1625 Zacharias Professor Mathematum Parisiis tractatum de planimetria, seu superficierum mensura edidit, in quo habentur tantum praxes communes & vulgares. Parisiis in octavo 1625.

1625 Benus Ursinus Mathematicus Electoralis Brandeburgici Trigonometriam cum magno logarithmorum & sinuum canone edidit per singulas decades secundorum. Trigonometriam non demonstrat: sed in tractatu quem tabulis præponit multas & praxes & problemata ex Euclide præcipuè desumpta tradit cum demonstrationibus; ubi verò ad Trigonometriam pervenit solas praxes, citat tamen aliorum Demonstrationes ut Finkij Coloniæ in quarto 1625.

1625 Claudius Hardi in curia Parisiensi advocatus Euclidis data ex regia Bibliotheca Græcè nunc edidit, Latinè vertit, scholiisque illustravit. Addidit ex eadem Bibliotheca Marini Philosophi Commentarium Græcè & Latinè, in quo dati natura, datorúmque Euclidæorum utilitates, & ad analysin præsertim explicantur. Ratio autem instituendæ talis versionis fuit, quod antiqua versio Bartholomæi Zamberti videretur in multis deficere, eò quod Græcè quidem Zambertus optimè sciret, non item Geometricè. Hic Marinus Philosophus videtur fuisse Procli discipulus. In data Euclidis scripserunt Maurolycus Abbas, Fredericus Commandinus, Josephus Auria &c.

1626 Henrion Professor Matheseon edidit Gallicè tractatum de Logarithmis, in quo clarissimè explicat illorum genesin, saltem vulgarium & eorum usum: habet item canonem logarithmorum respondentium numeris ab unitate ad 2000. Adjecit logocanonem, seu constructionem aliquarum regularium proportionalium, quibus inscribit logarithmos, sinus, & tangentes ex inventione Domini Gunteri, quibus tamen multa de suo adjicit. Omnia quæ ab Henrione prodiere sunt bona. Parisiis in octavo 1626. Anno 1627 Idem tractatum edidit de triangulis sphæricis Gallicè in duas partes divisum. In prima parte habet Theoremata, & totam speculationem. In secunda parte praxin tradit, quam applicat exemplis Astronomicis. Parisiis in octavo 1627.

1626 Prodiit opus posthumũ Villebrorti Snellij à Royen; nempe doctrina canonica triangulorum, in libros 4 divisa. In primo habet Theoremata, in quibus per appendicem deducit constructionem tabulæ sinuum. In 2 triangula rectilinea solvit & per appendicem adjungit problemata Geodætica. In tertio triangula Sphærica solvit per reductionem ad rectangula. In quarto eadem triangula solvit sine reductione ad rectangula: habet item canonem sinuum, tangentium, & secantium.

Hoc opus Geometricum est habetque quamplurimas Propositiones proprias. Ab eo tamen tempore, aliæ sunt inventæ praxes faciliores. Lugduni Batavorum in octavo 1626.

1626 Edmondus Vingate Nobilis Anglus constructionem, & usum canonis logarithmorum cum canone logarithmorum ab unitate ad 1000 edidit. Item canonem logarithmorum, sinuum, & tangentium singulorum minutorum quadrantis. Parisiis decimosexto 1626.

1626 Philippus Lansbergius Edidit Cyclometriæ novæ libros duos. In primo peripheriam circuli metitur: in secundo aream. In toto progressu istius Cyclometriæ procedit per inscriptiones, quod commune est, & Archimedicum; quæ verò adjungit de quadratrice, seu de inventione basis ejus, hic est error, nec ipse scopum attigit.

Scripserunt

Scripserunt de quadratura circuli ex antiquis Bryso, Antipho, Hippocrates Chius, Dinostratus, Euclides, Archimedes, Appollonius Pergæus, Ptolemæus, Nicomedes, Pappus Alexandrinus. Sporus Nicenus, Philo Gadarenus, Eutocius Ascalonita, Boetius. Ex recentioribus Campanus, Nicolaus Cusanus Cardinalis, Joannes Regiomontanus, Orontius Finæus, Peletarius, Clavius, P. à S. Vincentio.

1629 prodiit folium Domini Delaleu circa duplicationem cubi, & quadraturam circuli Gallicè, cum figuris implicatissimis.

1630 prodiit Gallicè ejus examen à Domino Hardy.

Consequentibus annis prodiit alius libellus cui titulus, *Propositions Mathematiques de Monsieur Delaleu demonstrées par I. Puios.*

1638 prodiit illius refutatio à D. Hardy.

Eodem anno Puios librum edidit cujus titulus, *Nullité des Demonstrations de Monsieur Hardy.* Eodem anno ei respondet D. Hardy; & iterum Puios 1643 tres addidit responsiones, ex quibus operibus in quibus sunt nonnulla bona, concludes nec duplicationem cubi, nec quadraturam fuisse legitimas.

1630 Henrion Matheseon Professor edidit opus Gallicum cum titulo, Usus mecometri. Est autem mecometrum semicirculus cum Allidada, cui adjungit versorium magneticum, lineas item chordarum, tangentium, & sinuum adjungit.

Habet optimas praxes, multas tamen easdem, ac circini proportionum, iisdemque nixas principiis. Parisiis in octavo 1630.

1631 P. Vincentius Leotaudus Delphinas, Societatis Jesu, Elementa Geometriæ practicæ composuit, nempe problemata varia ad praxin spectantia facilia, & utilia.

In parte secunda habet Elementa loci solidi, sive conicarum sectionum, in quibus natura coni, genitæque ex eo conicæ sectionis origo aperitur. Est ergo hic tractatus introductorius ad conicas sectiones.

Totum opus Geometricum est; hunc tamen defectum habet, quòd figuras habeat separatas, ita ut pleraque exemplaria, detritis figuris, utpote plicatilibus, sint inutilia; quam aleam incurrunt quicumque libri figuras habent separatas. Dolæ in decimosexto 1631.

1631 prodiit Parisiis opus Gallicum cujus titulus, *Le Cours Mathematique representé par figures & cartes, & clairement expliqué dans toutes ses parties.* Habet in Geometria definitiones, & proprietates, parallellogrammorum, circulorum, polygonorum, proportionum &c. praxes item mensurationum, Descriptiones aliquarum figurarum, Instrumentorum Geometricorum praxes.

Secundus tractatus est militaris Architectura quam compendiosè satis bene explicat.

Tertius est perspectiva in qua bene describit oculum, De radio directo, reflexo, & refracto agit, & varia affert genera speculorum, & specillorum,

Quartus habet principia cosmographiæ, systemata explicat, usum globi; omnia clarè ut habeatur cognitio generalis omnium, demonstrationes tamen non affert.

1632 Claudius Mygdorgius Patricius Parisinus de sectionibus conicis librũ edidit, quasi Catoptricorum, & Dioptricorũ prodromum, in duos libros distinctum. Quorum primus Theoricus est, naturam parabolæ, hyperbolæ & Ellypseos; earumque proprietates considerat, & demonstrat. Secundus practicus est earumdemque sectionum describendarum methodum ex præsuppositis fundamentis tradit. Opus perfectissimum, & bene compositum. Abjectis enim quæ in Appollonio nimis minuta videbantur, præcipuas harum sectionum proprietates propriis, & ut plurimum à se inventis demonstrationibus claras reddit. Quare nisi antiquitatis prærogativam haberet Apollonius, primas Mygdorgio deferrem. In folio Parisiis 1632.

1632 Bonaventura Cavalerius Mediolanensis Ordinis Jesuatorum, Directorium generale Uranometricum edidit, in quo trigonometriæ logarithmicæ fundamenta & regulæ demonstrantur, astronomicæque supputationes ad solam ferè additionem revocantur. In tres partes dividitur.

1 Habet progressum trigonometriæ, præcipuè vero genesin logarithmorum explicat, sed nimis universaliter.

In 2 triangulorum rectilineorum solutionem ad pauca axiomata revocat.

In 3 solutionem ad paucas item regulas, quas bene demonstrat revocat. In hoc opere paulò majorem ordinem & claritatem desiderarem. Doctrina ejus bona est, & trigometriam facilitat.

Habet in fine canonem sinuum & logarithmorum pro sinubus, tangentibus, secantibus, & sinubus versis singulorum minutorum quadrantis.

1634 Albertus Fridericus Gnopius aliàs Blanckenpoth, Medicus & Professor Herbornensis tractatum Mathematicum edidit, in quo fabricam instrumenti universalis, & usum tradit ad Geodesiam perficiendam, ad dirigenda tormenta bellica, aquas librandas, cuniculos subterraneos agendos, & castrametationem: estque instrumentum compositum ex quadrato geometrico, quadrante & circino proportionis. Hujus instrumenti varios usus, nonnullos novos profert. Hic tractatus est utilis. In quarto Herbornæ 1633.

1634 P. Petit Opusculum edidit Gallicum, cum titulo Methodus perficiendi unicâ regulâ omnes praxes circini proportionalis; cum ampla constructione ejus, & tabula gravitatis & magnitudinis metallorum, & reductione ponderum & mensurarum Europæ, Africæ, & Asiæ ad mensuras Parisienses.

In hoc opere pauca sunt diversa ab iis praxibus quæ communiter traduntur de circino proportionis. Parisiis in octavo 1634.

1634 Petrus Herigone Mathematicus Parisiensis Cursum Mathematicum composuit. In Geometricis quidem Elementorum libros 15 explicuit, & nonnullis appendicibus illustravit.

Item Euclidis Data, & Apollonij doctrinam de determinata sectione, à Villebrord Snellio restitutam explicuit, sicut & ejusdem inclinationum Geometriam à Ghotaldo restitutam, ejusdem tactionum doctrinam à Vieta restitutam. Denique angularium sectionum doctrinam.

Habet modum construendi canonis sinuum, non autem logarithmorum quamvis eorum usum aperiat. Trigonometriam rectilineam tradit, non sphæricam. Geometriam practicam linearum, & superficierum, sed non solidorum.

Hæc omnia nimis breviter, & modò scribendi per characteres insuetos, quæ duo ejus doctrinam difficilem & inextricabilem reddunt. Parisiis in octavo 1634.

1634 Georgius Ludovicus Frobenius Iphoviensis Francus, tunc civis Hamburgensis, edidit Clavim universi trigonometricam, per quam cœli ac terræ adita recludi, & omnes de motibus, ac dimensionibus utriusque per hypotheses artificum, triangulari forma conceptæ quæstiones, per certa problemata resolvi, & in apertum produci possunt triplici methodo.

Prima vulgari per sinus, tangentes, & secantes multiplicatione, & divisione. Secunda prostaphæretica, compendiosa, quâ termini modò in secantes, modò in sinus permutantur juxta septem regulas. Tertia logarithmica.

Additæ sunt tabulæ sinuum, tangentium, secantium, & logarithmorum iis respondentium, & in inferiori parte paginæ logarithmorum numerorum vulgarium ab unitate ad 18910.

Praxes solas habet; demonstrationes citat ex aliis authoribus. In quarto Hamburgi 1634.

1635 Bonaventura Cavalerius Mediolanensis ordinis Jesuatorum sancti Hieronimi in Bononiensi Gymnasio Professor Mathematicarum, Geometriam indivisibilium edidit.

Authoris scopus in hoc opere, est nova quantitatum resolutio in sua elementa, nempe lineæ in puncta, superficiei in lineas, soliditatis in superficies. Ut hac Analysi earum proprietates præcipuæ innotescerent, eæque æquales aut inæquales ostenderentur, quæ totidem numero Elementis constarent.

Hanc methodum plurimi sunt insectati inter quos Guldinus quasi in quantitatem vellet indivisibilia invehere, & Mathesin in quæstiones de compositione continui induere. Si tamen hæc doctrina bene intelligatur, & explicetur paulo melius, quam ab ipso authore proposita fuit, viam ad multas difficultates nullo negotio solvendas aperit.

Totam hanc doctrinam in 7 libros partitur. In primo quædā Lemmata & Propositiones præmittit circa cylindricorum, & conicorum sectiones.

In 2 triangula, & parallelogramma, genitáque ab iis solida considerat.

3 Circulum & Ellypsin, genitáque ab ipsis solida.

4 Parabolam genitaque ab eâ solida.

5 Hyperbolam & ejus solida.

6 Helicen & ejus solida.

7 Quæcumque in præcedentibus libris methodo indivisibilium demonstrata sunt, alia ratione demonstrat.

Hæc indivisibilium methodus inter pulcherrima hujus sæculi inventa annumerari potest.

1636 A. Ulac tabulas sinuum tangentium, secantium, logarithmorum sinuum, & tangentium edidit pro singulis quadrantis minutis, item logarithmorum pro numeris ab unitate ad 10000 unà cum usibus tam in triangulis planis, quam sphæricis, sine demonstrationibus. Opus utile. Goudæ 1636, In Octavo.

1638 Prodiit Parisiis Opusculum Gallicum, sub titulo *Propositions Mathematiques de Monsieur Delaleu par I. Puios.* Demonstrationes sunt difficillimæ utpote malè explicatæ, quæ eo tendunt, ut inveniat duas medias proportionales, & quæ deficiunt: neque enim omnia demonstrantur, quæ ad id præstandum sunt necessaria; quare in cassum recidit totum opus, cum ejus propositiones vix sint ad aliud utiles.

1640 Adrianus Metius Almarianus Geometriæ libros sex edidit, nempe Trigonometriam planorum, Geodesiam, Usum circini proportionum, Architecturam Militarem, Problemata Astronomica, Sciaterica Horologia. Omnia geometricè, & ad praxin accommodatè. Amstelodami in quarto 1640.

1640 Boulenger Mathematicus Regius, Geometriam practicam Gallicè edidit linearum, superficierum, & corporum demonstratam; cum nova methodo Geodesiam exercendi sine fractionibus, aut reductione ad minores mensuras. Opus facile, utile, & bene demonstratum; in quo sunt praxes ingeniosæ. Parisiis in octavo 1640.

1641 P. Bourdin Societatis Jesu, centum figuris totam Mathesin exhibuit, generalem quippe illius ideam, usum item variorum instrumentorum præsertim in Geodesia, in ichnographiis describendis, figuris augendis & minuendis, item in munitionibus extruendis.

Item Tractatum de usu globi terrestris, Opticam & dioptricam, omnia breviter & clarè, quantum satis iis, qui in profundiori geometria non sunt versati.

1643 Christianus Severini Longomontanus Cimber, regiæ Academiæ Hauniensis superior Mathematices Professor, rotundi in plano, seu circuli absolutam mensuram, duobus libris edidit. Prior veram constitutionem peripheriæ circuli syntheticè perficit, ejusque ad diametrum rationem exhibet. Posterior Gæodesiam circuli in plano absolvit, & permutationem rectilineorum in lineis, & numeris ostendit.

Hæc omnia falsæ demonstrationi innituntur, cujus falsitatem Pellius demonstravit, aliique multi Mathematici inter quos Robervallius subscripsit.

1643 Bonaventura Cavalerius Mediolanensis ordinis Jesuatorum trigonometriam planam, & sphæricam, linearum & logarithmicam edidit. Doctrinam rectilineorum ad quinque lineares, & quinque logarithmicas revocat. Sphæricorum verò praxes in hoc opere non demonstrat, sed supponit in suo Directorio demonstratas. Addidit & canonem sinuum & logarithmorum consuetum, item logarithmos pro numeris ab unitate ad 1000. Habet demonstrationes faciles, claras, & suas.

1644 Christianus Hugenius Opus edidit de circuli magnitudine in quo multa circa Cyclometriam proponit, non quidem quasi ad perfectam circuli quadraturam, sed tantum sumptis inter circumscriptum & inscriptum polygonum duobus mediis proportionalibus, ostendit circumferentiam circuli mediam esse proportionalem inter hujusmodi mediorum proportionalium ambitus. Quæ propositio majorem continet determinationem quam ab aliis traditæ, potestque esse usui ad examinandas aliorum quadraturas. Utrum autem id perfectè demonstrarit non licuit per otium examinare. Notavi tamen in ejus demonstrationibus multa subticeri necessaria. Quod fieri non debuit, nisi in rebus facillimis, & in oculos omnium incurrentibus. Id enim sine causa difficultatem affert, multisque suspicionem facit rei non benè probatæ. Opus hoc 20 Propositiones habet.

Accesserunt octo illustriorum problematum constructiones, circa divisionem sphæræ, circa duas medias proportionales, circa conchoidem & alia.

1644 prodiit Elenchus Cyclometriæ Christiani

stiani Severini Longomontani Mathematicarum superiorum in Hafniensi Academia Professoris Regij à Claudio Hardy. Demonstrat autem sequi ex Longomontani doctrina circumferentiam circuli majorem esse ambitu polygoni circumscripti 192 laterum.

1644 P. Mersennus Ordinis Minimorum, universæ Geometriæ mixtæque Matheseos Synopsin composuit, in qua scilicet titulos singularum Propositionum omnium librorum Euclidis. 2 Geometriæ Petri Rami, tertio Archimedis de sphæra, & Cylindro, ejusdem de Conoidibus, & sphæroidibus, de quadratura parabolæ, de spiralibus, æquiponderantibus, & natantibus in humido, Arenarij.

Item titulos Propositionum Theodosij, Menelai, & Maurolyci.

Item Propositiones supplementi Archimedis à Snellio editi, supplementi Kepleri in tractatum de sphæroidibus. Item Propositiones tractatus Lucæ Valerij de quadratura parabolæ.

Item titulos Propositionum Apollonij Pergæi de conicis, Mygdorgij de conicis, & Sereni.

Datorum Euclidis.

Collectionum Pappi.

Mechanicorum, de centro gravitatis Commandini, Guidi, Ubaldi, & Valerij.

1645 P. Marius Bettinus Societatis Jesu edidit Apiaria universæ Philosophiæ Mathematicæ: in quo opere videtur voluisse ornare Euclidem & occasione Propositionum Euclidis excurrit in totam Mathesin. Multa quidem habet optima, sed ita perturbato ordine, ut impossibile ferè sit in eo aliquem fingere ordinem. Si hoc opus ordinatum foret, esset alicujus momenti. In primo volumine habet præcipue geometrica, in secundo habet multa ad arithmeticam pertinentia. Bononiæ in folio 1645.

1645 P. Claudius Richardus è Societate Jesu, ex comitatu Burgundiæ Regius Madriti Matheseon Professor, Commentarium edidit in Euclidis Elementorum libros 13, & Hypsiclis duos. Addidit Propositiones Procli. Circa duas Medias proportionales. In quo Commentario multa addit de suo. Opus ingens, nempe volumen integrum in folio, quod cujusque patientiam fatiget, nimis enim multa exaggerat, & diutius quam par est tyronem in spinis detinet. Difficultatem augent figuræ separatim simul positæ. Quæ ratio in materiis difficillimis pessima est. Multos vidi qui libros hujusmodi cæteroquin bonos ne attingerent quidem.

1645 Carolus Oudart Agendiceus licentiatus, & Collegij Regij Sesaniensis Moderator primarius. Edidit suplementum supplementi, seu quadraturam circuli, continens quadraturam circuli, & anguli in quacumque ratione sectionum.

In hoc opere multa sunt non geometrica. Primoque fusissimè explicat in quonam sit posita quadratura circuli, tum ostendere conatur circumferentiam circuli mediam esse proportionalem inter ambitus, inscripti, & circumscripti similis, quod puto non satis geometricè ab illo constitui. Habet tamen multa bona. In quarto Parisiis 1645.

1647 P. Petrus Bobynet Societatis Jesu tractatum edidit Gallicum Gæodeticum sub titulo: *Longimetrie industrieuse*, in quo tradit multas praxes ad mensurationem linearum inaccessibilium. Nullas habet demonstrationes hoc opus. Parisiis in octavo 1647.

1647 P. Gregorius à Sancto Vincentio ex Societate Jesu, Opus grande edidit duobus tomis in folio, cum titulo, Opus Geometricum quadraturæ circuli, & sectionum coni 10 libris comprehensum. In primo agit de varia linearum inter se proportione, de triangulorum proprietatibus, & de rectangulorum proportione. In 2 progressiones non terminatas considerat, & terminum progressionis infinitæ continuatæ assignat, totamque hanc doctrinam planis, ac solidis applicat. In tertio lineas in circulo, angulosque cum arcubus comparat, circulorum intersectionem, linearum in circulo potentiam. Tum aliqua prolegomena ponit ad sectiones coni. Liber quartus est de Elypsi. Liber quintus de parabola. Liber sextus de hyperbole. Septimus de ductu plani in planum, in quo solidorum varias geneses, & reductiones habet. In octavo proportionalitates geometricas considerat. Libro nono Cylindrum, conum, sphæram, sphæroidem parabolicam, & hyperbolicam, ungulas cylindricas. Decimus est de ipsa circuli quadratura, quam tentat per sectiones conicas. Opus hoc est mirabile, & ad nova geometrica viam aperit, habetque demonstrationes facillimas, & brevissimas, sed nimis multas, tanta enim multitudine mentem lectoris obruit, cum potuisset hanc totam doctrinam in pauciora contrahere. Reprehenditur titulus *quadraturæ circuli* quam non est consecutus, ut demonstravit postea P. Leotaudus, ea tamen quæ ad quadraturam perficiendam adinvenit, sunt magno Geometra digna. Sectiones enim conicas multum amplificavit earumque proprietates mirabiles explicuit. Duobus tomis in folio.

1648 Richardus Albius Anglus Hemisphærium dissectum edidit, in quo scilicet habetur tota Archimedis doctrina de sphæra, & Cylindro, quam promovit multis propriis Propositionibus. In hoc opere etiam agit de maximis inscriptibilibus, & minimis circumscribentibus. Ratio etiam discutitur quare aliquæ Propositiones non admittunt solutionem per media plana, vel Elementa Euclidis. Habet item methodum geometricam novam, qua ad æquationem reducitur propositio de sectione hemisphærij in ratione data. Accessit appendix de inscriptione Coni scaleni in sphæra, & de ejus superficie; item cubatio cujusdam partis Cylindri dissectæ plano. Hic author geometricè, & clarè procedit, totumque opus geometricum est. Romæ in quarto 1647.

1648 Marius Bettinus Bononiensis Societatis Jesu, Ærarium Philosophiæ Mathematicæ edidit in quo elementa Philosophiæ geometricæ, de planis curuis, & solidis figuris applicata usibus eximiis, in omni scientiarum, & artium genere novis praxibus, paradoxis, locis Aristotelicis illustrantur. Videtur scopus authoris esse usum Mathesis in reliquis scientiis aperire: Quare primo tomo post aliqua prolegomena, definitiones communes, axiomata & 48 Propositiones Euclidis percurrit, earumque usum aperit.

In 2 Propositionum sexti Euclidis usum explicat in variis partibus Matheseos præcipuè in pictura, horographia, &c.

In tertio aliorum quatuor Elementorum Propositiones pariter variis materiis adaptat, præcipuè vero sexti, ad planimetriam, & stereometriam. Opus hoc inordinatissimum est, & fusissimè explicatum. Hoc tamen consilium valde probo, nempe ut quis præcipuas Mathesis partes ad

Euclidis

Euclidis Elementa revocet. Cum enim plerique qui ad Mathesin animum adjiciunt, deterreantur maxime ab Euclide addiscendo, quod non videant cui usui sint futuræ hujusmodi Propositiones. Quare optimum esset consilium si post singulas Propositiones præcipui usus indicarentur: sed id præstandum esset brevius, & planius, quam ab hoc authore sit præstitum. Multa tamen habet bona & geometrica.

1651 P.Antonius Lalovere Societatis Jesu quadraturam circuli, & hyperbolæ segmentorum, ex dato centro gravitatis edidit unà cum inventione proportionis, & centri gravitatis in portionibus sphæræ plurimorum periphericorum, nec non tetragonismo absoluto certæ cujusdam Cylindri partis, & aliorum, demonstratam & ad calculum reductam adjumento libræ Archimedeæ à materia avulsæ.

Opus quidem bene demonstratum, sed tantum ex suppositione, atque adeo quod perfectam problematis solutionem non exhibeat.

1651 Comes De Pagan 6 libros composuit Theorematum geometricorum quasi in supplementum Geometriæ.

1 Libro agit de lineis proportionalibus.
2 De Ellypsi, & sectionibus conicis.
3 De Theoria planetarum Ellyptica.
4 De triangulorum solutione.
5 De munitionibus regularibus.
6 De navigatione & longitudinibus.

Hoc totum opus figuris caret redditúrque propterea difficile, & inutile, cum sit difficile hanc doctrinam aptare figuris. Parisiis in octavo 1651.

1649 prodiit Geometria Renati Descartes anno 1637 Gallicè edita, nunc autem in latinum versa cum notis Florimundi De Beaune in curia Blesensi Consiliarij Regij, opera ac studio Francisci à Schooten Leydensis in Academia Lugduno Batava Matheseos Professoris.

Hæc Geometria in libros tres dividitur 1. Problemata continet quæ per rectas, & circulos absolvi possunt, nempe primo ad Arithmeticam Geometriam refert, & Geometricè,multiplicationem, divisionem, & radicum extractiones absolvit. Tum de æquationibus loquitur, & de problemate plano secundum Pappum.

In 2 agit de natura linearum curvarum. Primo in genere distinguit loca plana & solida, loquitúrque de curvis quæ admitti possunt in geometria, de modo inveniendi illorum puncta, tum de parabola, & Ellypsi, præcipue de modo describendi figuras, quæ radios ab eodem puncto prodeuntes colligant per refractionem.

In tertio problemata solida proponit,& ea quæ excedunt solida, affertque exemplum duarum mediarum proportionalium. Tum loquitur de natura æquationum,de falsis radicibus, aliisque ad Algebram pertinentibus, cur problemata solida fine sectionibus conicis construit non possint.

Hæc Geometria subtilis est aperítque viam ad majora. Præter notas breves Florimundi De Beaune Franciscus à Schooten Commentarium edidit in eamdem Geometriam Renati Descartes.

1651 Petrus Montaureus latinè interpretatus est decimum Euclidis librum.Interpretatio optima est, cui commentarium addit ad majorem claritatem.

1652 Joannes Broscius S.Thomæ in universitate Collegij Majoris Professor, & Canonicus Cracoviensis Apologiam pro Aristotele,&Euclide contra Petrum Ramum edidit. Additæ sunt duæ disceptationes de numeris perfectis. Occasio scribendi fuit, quod jam olim Petrus Ramus graviter reprehendisset Aristotelem quòd in exemplum demonstrationis attulisset proprietatem trianguli, quod nempe tres ejus anguli æquivalerent duobus rectis. Ostendit igitur errorem Petri Rami, & ea occasione detegit alia errata ejusdem Petri Rami, præcipue circa angulos figurarum solidarum. Sed tam opus illud Petri Rami, quam istius apologia, vix excedunt quæstionem de nomine, parumque promovent Mathesin.

1654 P.Vincentius Leotaud Delphinas Societatis Jesu, examen quadraturæ circuli à P.Gregorio à S.Vincentio expositæ instituit tribus libris. Primus in rationum natura explicanda insumitur, etiam ex mente P. à S. Vincentio, qui de progressionibus multa nova habet;Cujus doctrinam planiorem reddit.

In secundo primam Patris à S.Vincentio quadraturam ad calculos revocat. In tertio secundam, tertiam, & quartam.

Ostendit autem clarissimè has quadraturas legitimas non esse, quamvis opus P. à S. Vincentio plurimi faciat. Totum hoc examen geometricum est.

Huic operi præmisit amœniorem curvilineorum contemplationem initam ab Illustrissimo, ac Reverendissimo Domino Artusio De Lionne Episcopo Vapincensi. In quarto Lugduni.

1655 P.Claudius Richard Burgundus è Societate Jesu, & Matheseon Professor Madriti in libros quatuor Apollonij Pergæi amplum dedit Commentarium, additis Lemmatibus,& Corollariis innumeris. Opus quidem bonum, ita tamen prolixum ut mole suâ lectorem obruat sine magno operæpretio. Minutias enim quaslibet persequitur & vitium quod in Apollonio jure reprehendimus ipse in immensum auget. Adde difficultatem, quæ ex figuris suo loco non repositis, sed in finem simul rejectis oritur, quæ est major quam à plerísque existimetur, In folio 1655.

1655 P. Joannes Francois è Societate Jesu, Opus Gallicum edidit. *De la quantité considerée absolument, & dans ses nobles sujets.*

Hic Tractatus considerationes tantum generales habet, nec ad particularia descendit. Idem Tractatum edidit de Geodesia in quo sunt praxes communes sine demonstrationibus.

1656 P.Franciscus Aynscon Xaverius Antuerpianus è Societate Jesu composuit librum cui titulus, expositio,ac deductio Geometrica quadraturarum circuli Patris Gregorij à S.Vincentio. Cui præmittitur liber de rationibus, ac proportionibus geometricis. Occasio scribendi quod nonnulli scripsissent contra quadraturam P. à S.Vincentio, nempe aliqui contra Tractatum ejus de proportionibus seu progressionibus Geometricis, alij immediatè contra ipsam quadraturam, authores autem qui scripserunt sunt,Christianus Eugenius. Adrianus Auzout, Alexius Sylvius, & P.Vincentius Leoutaudus insignis Geometra è Societate Jesu. In prima igitur parte agit de progressionibus, & proportionibus ostenditque doctrinam Patris à Sancto Vincentio benè procedere. In secunda ostendit quadraturas Geometricas esse contra P.Leoutaudum, sed non satisfacit saltem quoad quadraturas. Composuit enim P. Leoutaudus aliam responsioné in qua Geometricè demonstrat insufficientiam quadraturarum,& paralogismum.

1657 Villelmus Ouchtred Ætonensis trigonometriam, seu modum computandi triangulorum latera & angulos ex canone mathematico composuit. Paucas habet demonstrationes hoc opus, estque ita breve, ut ex eo trigonometriam addiscere non possis, utile tamen potest esse iis qui jam sciunt.

1657. prodierunt Francisci à Schooten Leydensis in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris Exercitationum mathematicarum libri quinque.

Primus continet Propositionum Arithmeticarum, & Geometricarum centuriam nempe 60 Arithmeticas, suntque regulæ trium varie implicatæ in materiis disparatis. Geometricæ sunt de divisione figurarum, similitudine triangulorum; quorum nonnulla utilia esse possunt.

Secundus continet constructionem problematum quæ solis lineis rectis solvi possunt, quorum pleraque in Euclide continentur, dat tamen alias solutiones, ut plurimum difficiliores. In illis nonnulla sunt utilia ad Geodesiam.

Libro 3 Apollonij Pergæi loca plana restituit, nempe problemata quæ sunt à Pappo indicata, quæ omnia ferè sunt inutilia, nihilque habent quod sit alicujus momenti nisi difficultatem.

Liber 4 Sectiones conicas in plano organico describit. Quæ descriptio Geometris, Opticis Gnomonicis, & Mechanicis utilis est. Demonstrat omnes eas descriptiones.

Liber 5 Sectiones triginta duas Miscellaneas continet.

Totum opus habet multa utilia, multa item minuta nulliusque momenti.

1657 Joannes Bachou Lugdunensis edidit opusculum latinum sub titulo Demonstratio divini Theorematis quadraturæ circuli, Theologica, Philosophica, Geometrica, Mechanica unà cum ratione quantitatum incommensurabilium. Ejus Demonstratio vitiosa est. Parisiis in octavo 1657.

Idem author eamdem demonstrationem Gallicè dedit, cum demonstratione motûs perpetui. Utraque demonstratio deficit. Parisiis in octavo 1669.

1657 Ismael Bullialdus de lineis spiralibus demonstrationes novas edidit. Occasio scribendi fuit, quod doctrinam Archimedis de spiralibus præcipue verò quoad illam partem, in quâ ostendit tangentem helicis æqualem esse circumferentiæ circuli, reprehenderat Vieta, asserens eam adversari Euclidi. Totam igitur hanc doctrinam aliis mediis demonstrat optimè Bullialdus, adhibetque huic doctrinæ, ad specimen, & quasi auctarium novam indivisibilium methodum à Cavalerio nuper inventam. Solida est doctrina, ut omnia quæ ab hoc authore sunt elucubrata.

Eodem anno idem tres exercitationes geometricas edidit. Prima versatur circa demonstrationes per inscriptas, & circumscriptas figuras. Secunda circa conicarum sectionum quasdam proprietates. Tertia circa prismata, quorum naturam explicat.

Addidit & opusculum in quo Astronomiæ Philolaicæ fundamenta breviter & clarius explicat contra Clarissimi viri Sethi Vardi Oxoniensis Professoris impugnationem.

1658 Prodiit Parisiis Opusculum Gallicum cui titulus; *Solution & esclaircissement de quelques Propositions de Mathematique, entre autres de la duplication du Cube, & de la Quadrature du cercle.* Videtur author esse nomine Jovin; utrumque problema solvit infœliciter.

1658 Stephanus Angeli Venetus, Ordinis Jesuatorum Sancti Hieronimi Problemata sexaginta geometrica edidit circa conos, sphæras, superficies conicas, & sphæricas præcipue versantia. Hoc opus bene & geometricè procedit. Habet tamen quamplurima minuta, & nullius usus.

1658 Joannes Alphonsus Borellius in Messanensi pridem, tum in Pisana Academia Matheseos Professor, Opus edidit cui titulum præfixit, Euclides restitutus, seu prisca Geometriæ Elementa brevius, & facilius contexta, in quibus præcipue proportionum Theoriæ nova, firmiorique methodo promuntur.

In hoc opere author non sequitur Euclidis ordinem, ejusque demonstrationes immutat, sæpe alias cudit, alias Propositiones addit. Quamvis autem opus sit bonum, & utile, malè tamen ei titulus est præfixus, cum vix Euclidem in Euclide restituto agnoscas. Multa habet ex aliis authoribus, ut ex Archimede.

1658 P. Jacobus De Billy è Societate Jesu, Tractatum edidit de proportione Harmonicâ, in quo quamplurima Problemata hactenus non soluta in serie trium quantitatum Harmonicè proportionalium, resolvuntur Algebricè canonicè, & geometricè. Adjicitur appendix in quâ resolvuntur problemata in serie quotcumque quantitatum harmonicè proportionalium. Opus in hâc materiâ perfectum.

1659 Joannes Vallisius Geometriæ Professor Savilianus Oxoniæ duos parvos Tractatus edidit; priorem de Cycloide, & corporibus inde genitis eorumque centro gravitatis aliisque similibus; posteriorem epistolarem, de Cissoide & corporibus inde genitis & de curvarum linearum dimensione, seu cum rectis comparatione, & curvarum superficierum cum planis. Hæc materia plus habet curiositatis, quam utilitatis. Videtur hic author nimis breviter res perstringere, loquitur enim de Cycloide non explicatâ ejus naturâ. Figuras item in fine operis ponit, quod est pessimum ut jam sæpe dixi. Non debuit relinquere methodum communem scribendi ut methodum Algebricam substitueret, eo quod sine causâ res obscuras reddit. Oxoniæ in quarto 1659.

1659 Vincentius Viviani Florentinus Tractatum edidit cujus titulus, De maximis, & minimis Geometrica divinatio. Occasio scribendi fuit, quòd cum præter quatuor priores libros Appollonij, nihil haberemus, cum tamen tempore Pappi Alexandrini reliqui extarent, & tempore Eutocij Ascalonitæ, seu anno post Christi 480. Cum Eutocius qui commentatus erat quatuor priores, promittat commentarium in reliquos. Constet item ex Epistola Apollonij ad Eudemum argumentum quinti esse de maximis, & minimis lineis ad sectiones conicas pertinentibus, ut explicat Eutocius. Voluit experiri Vicentius Viviani, an posset aliquid super eâ re invenire, & quasi divinare, duosque libros conscripsit. Affert autem testimonia, quibus asseritur libros Apollonij nuper inventos, & ex Arabico in Latinum versos, non legisse prius quam suum librum edidisse. Quamvis autem non sit assecutus eà omnia quæ traduntur in libro quinto Apollonij nuper reperto, puto tamen Vincentium Viviani plura dixisse, & meliora, majorisque momenti, quam quæ in his Apollonij libris continentur. Nonnulla tamen repetiit ex iis quæ in prioribus libris dicta

dicta fuerant, sed novis & facilioribus demonstrationibus probata. Opus bonum est, bene compositum, & satis clarum, mallemque ea addiscere quæ profert quam quæ in Apollonij libro quinto, & sequentibus scripta sunt. Multum adjumenti à Mygdorgio, & Patre à sancto Vincentio habuit.

1660 Antonius Lalovera Gallus Societatis Jesu, veterum Geometriam promotam edidit, septem de Cycloide libris, & duabus adjectis appendicibus.

In primo libro positâ quadraturâ circuli, invenitur quadratura cujuslibet portionis in Cycloide designatæ, & cubatura solidi, circa quamlibet basim parallelam geniti.

In 2 ampliora suæ methodi fundamenta statuit, & Cyclocylindricarum figurarum quadratura traditur.

In tertio octo problemata ab Anonymo proposita demonstrantur in Cycloide parvâ.

In quarto eadem in Cycloide magna.

In quinto quamlibet curuam in rectam æqualem commutat, methodo generali per spiraceas respondentes spiralibus Archimedis, centrum gravitatis curvarum quærit, superficiem à motu curvarum descriptam metitur.

In 6 suam methodum accuratius tradit, & Cycloidem magnam examinat diligentius. Habet item appendicula de motu gravium accelerato.

In 7 accuratius examinantur principia Archimedeæ illius libræ quâ in Cycloide tractandâ usus fuit.

In prima appendice defendit reciprocam libræ legem.

In secunda de linearum curvarum, cum curvis comparatione agit.

Opus hoc profundiorem continet Geometriam bene demonstratam; materia tamen multum habet inutilitatis. In quarto Tolosæ 1660.

1661 Conicorum Apollonij libri quintus, sextus, & septimus cum Paraphrase Abalphati Aspahanensi Mahometano, ex Arabico in Latinum versi sunt ab Abrahamo Ecchellensi Maronita, additis notis Alphonsi Borelli in Pisana Academia Matheseos Professoris, qui huic versioni curam adhibuit. Quintus liber agit de maximis, & minimis, hoc est assumpto intra sectionem puncto, à quo in circumferentiam cadant plurimæ lineæ, considerat quænam sint maximæ, quænam minimæ. Sextus comparat sectiones & eorum segmenta. Septimus est de tangentibus, & axibus conjugatis. In his tribus libris multa sunt inutilia, nonnulla bona, multo meliora in Mygdorgio, Patre à sancto Vincentio, aliisque. Additum est Opusculum assumptorum Archimedis, in quo sunt nonnullæ proportiones exigui momenti. In folio Florentiæ 1661.

1661 P. Gaspar Schotus Regis Curianus è Societate Jesu, in suo cursu Mathematico hæc habet Geometrica. Primum librum Isagogicum, in quo tradit definitiones, & aliquas praxes communes. 6 priores Euclidis libros cum demonstrationibus. Trigonometriam in qua nec docet methodum construendi canonis sinuum, tangentium, & secantium, nec demonstrat praxes solvendorum triangulorum. Geometriam item practicam in qua demonstrationes habet.

1663 P. Vincentius Leotaudus Delphinas Societatis Jesu, insignis Geometra, Cyclomathiam, seu multiplicem circuli contemplationem tribus libris comprehensam edidit.

In primo quadraturæ examen ab ipso editum priùs confirmatur, & promovetur. Occasio scribendi fuit, responsio Patris Francisci Xaverij Ainscon examini quod prius ediderat quadraturarum circuli à P. à sancto Vincentio propositarum. Ostendit igitur in primo, non fuisse suis objectionibus satisfactum. Examinat item novam quadraturam à Patre Aynscon propositam. Procedit autem semper demonstrativè.

In secundo agit de angulo contingentiæ contra eundem Patrem Aynscon & contra Vallisium. Puto multa in hac materia degenerare in quæstionem de nomine, & multa ab hoc authore proferri, quæ apposita distinctione solvuntur.

In 3 agit de quadratrico Dinostrati, cujus alias proprietates demonstrat. Examinat item Cycloidem lineam à Patre Lalovera propositam, quam ad quadratricem videtur revocare. Omnia clarè demonstrat, fusius tamen quàm deberet, qui est hujus authoris character.

In eodem libro habet in fine nonnulla de centro gravitatis, sectorum circuli & segmentorum, per quadratricem scilicet, occasione nempe libri Patris De la Faille qui de ea materia scripsit.

1667 Prodiere Parisiis nova Elementa Geometriæ Gallica, in quo ordine insueto Geometria traditur. Multi hoc reprehenderunt quod ordo ita esset præposterus, ut nullus in his Geometriam addicere posset, ita initio spinæ, & difficultates occurrunt, ut cujusque tyronis capacitatem superent. Alij titulum reprehendunt, quòd nec Elementa sint, quia multa alia supponunt, sunt enim lemmatibus, & suppositionibus plena; non nova quia pleraque decerpta sunt ab Euclidis interpretibus. Vidi nonnullos, qui plurimos in iis paralogismos notarent. Parisiis in quarto Gallicè 1667.

1668 Renatus Franciscus Slusius suum Mesolabum edidit, in quo duas medias proportionales inter extremas datas, per circulum & infinitas hyperbolas, vel Ellypses exhibet. Item problematum solidorum omnium effectionem, per easdem curvas exhibet.

Quamvis istud opus Geometricum sit, problema tamen non solvit, quia cum circulo adhibetur Ellypsis, aut hyperbola, quæ Geometricè describi non possunt.

Accessit pars altera de Analysi, in qua methodum Analyticam non docet, sed eâ utitur ad eadem demonstranda. Hæc methodus Analytica optima est ut quis apud se problematum solutionem inveniat, non tamen ut libros componat, quia hæc methodus imaginationi non servit.

1669 Prodiit Geometria practica P. Andreæ Tacquet Antuerpiensis è Societate Jesu libris tribus comprehensa. In 1. modum supputandi canonis & tangentium tradit. 2. Trigonometriam rectilineam, & instrumentum mensorium seu quadrantem fabricatur, & scalam, omnes lineas, etiam inaccessibiles metitur, ut distantiam lunæ, & solis à terra.

In secundo exercet aliqua problemata, Triangulorum mensurationem perficit, circuli dimensionem veræ propinquam exhibet, figuras transformat, denique sectionem circuli per punctum datum perficit: habetque in eo nonnulla à se inventa.

In tertio soliditatem prismatum, & cylindrorum, sphæræ, sphæroideon conoidis parabolicæ, & hyperbolicæ superficiem, & soliditatem metitur.

tur. Item omnia vasa, corpora mundana, terræ zonas, provincias, regna, soliditatem terræ, Lunæ, Solis. Denique solida comparat, auget, minuit. Multa item habet de annularibus. Totum opus optimum, & clarum. Addidit in fine appendicem triangulorum sphæricorum sine demonstrationibus.

Idem P. Tacquet prius ediderat Elementorum Euclidis libros 6 priores, undecimum, & duodecimum, multísque demonstrationibus suis illustravit, addidit in fine doctrinam Archimedis de sphæra, & Cylindro, quam clariorem reddidit.

1671 P. Ignatius Gasto Pardies è Societate Jesu, Elementa Geometrica tradidit, in quibus methodo compendiosâ Tyronem docet quæ in Euclide, Archimede, Appollonio sunt necessaria.

Puto tamen hæc Elementa non sufficere, præsertim cum in iis Euclidis ordo non sit observatus, quem tamen mutare puto fas non esse, eo quod ab omnibus fere authoribus, tam veteribus quam recentioribus, secundum suum ordinem citetur. Parisiis in octavo 1671.

Anno 1671 P. Guarinus Guarini Mutinensis Theatinus, edidit Euclidem Adauctum seu methodicum, quem etiam Mathematicam universalem nominavit Tractatibus 35 Primus est de quantitate continua, secundus de discreta, 3 de Mathesis objecto. 4 in primum Elementorum, quintus in secundum, 6 in tertium; septimus in quartum. 8 Arithmeticam simplicem continet, nonus in quartum Eucl. 10 in sextum, undecimus in 7. 12 in decimum, 13 de numeris proportionalibus. 14 de proportionibus continuis, 15 de linearum, & segmentorum proportione. 16 de linearum progressione geometrica. 17 de proportionalitatibus rationum. 18 de lineis variis ut quadratrice conchili, &c. 19 de angulis. 20 de sinubus, tangentibus, & secantibus. 21 de logarithmis. 22 de intersectionibus planorum. 23 de sphæræ contactibus. 24 de sectionibus conicis, sicut & 25. 26 De Ortographia. 27 Trigonometria. 28 de progressione superficierum. 29 Geodesia rectilineorum, 30 Transformatio curvilineorum, 31 de transformatione superficierum corpora circumdantium. 32 de superficiebus corporum in planum redigendis. 34 de solidis planis superficiebus contentis. 35 De corporum comparatione. Augustæ Taurinorum in folio 1671 quamvis in hoc opere multa sint optima, methodus tamen, & ordo non arridet, multa item non satis clarè explicat. Unde melius scripsisset, si Euclidem in suo ordine reliquisset, peculiaribusque tractatibus cæteras materias explicuisset. Hic enim ordo confusionem parit.

Geometriæ statum exhibuimus suprà, ad initium præcedentis sæculi, restat ut breviter perstringamus quæ illi ab eo tempore addita sunt, & quem progressum his duobus sæculis fecerit. Primo certum est quod Trigonometriæ præsertim magna fuerit facta accessio, si enim comparemus ea quæ ad trigonomettiam pertinent, quæ in Ptolemæi Almagesto aliisque authoribus antiquis pauca inveniuntur, cum iis quæ nunc ubique visuntur, deprehendemus Antiquos canonem tantum chordarum habuisse valde imperfectum, divisa diametro in 120 partes, atque adeo plerisque chordis fractiones adhærebant, quod implicatissimum reddebat calculum. Nos verò ad majorem præcisionem, & facilitatem semidiametro utimur in 1000000 partes divisa, præterea addidimus canonem tangentium, & secantium, innumeras praxes facilitantes invenimus, ut per retractionem radij in primum locum; vitamus divisionem, per prostaphæresin pleraque solvimus triangula. Accedit mirabile, & compendiosum logarithmorum inventum, quo nihil potuit excogitari ingeniosius, & commodius, omnia enim problemata per solam additionem, & multiplicationem solvimus, ex quo fit ut trigonometria ad summum apicem evecta videatur. Secundo Geodesiæ facta est magna accessio, hanc valde imperfectam, & non ad praxin ordinatam habuerunt Antiqui, his duobus sæculis innumera instrumentorum supellectile illustrata fuit, inter quæ præcipuum locum obtinet circinus proportionum. Totam Archimedis doctrinam de dimensione, de sphæra, & Cylindro aliisque & ampliorem reddidimus, novisque & facilioribus demonstrationibus illustravimus. In quo Pater Tacquet egregiè & non inutiliter laboravit. Neque vero omittere possum Patris Guldini inventum, in suâ centrobaricâ, in quo ostendit, motum centri gravitatis cujuscumque figuræ circulariter motæ, determinare magnitudinem rotundi eo motu geniti; eamque revocare ad magnitudinem corporis recti, quod principium viam innumeris mensurationibus aperit, & de facto P. Tacquet his principiis insistens quam plurimorum corporum rotundorum, ut annularium, tam superficiem, quam soliditatem dimensus est. Accedit methodus indivisibilium à Cavalerio introducta, quæ ut est ingeniosissima, ita facilitatem summam omnibus mensurationibus præbet. Quod si abstrusioris Geometriæ placita consideremus, deprehendemus ingentem conicis sectionibus factam esse accessionem, in quo excelluit Mygdorgius qui paucissimis propositionibus non tantum totam Apollonij Pergæi doctrinam complexus est, sed etiam multis suis propositionibus & demonstrationibus auxit, & amplificavit. P. item à sancto Vincentio eamdem materiam novis demonstrationibus facilioribus illustravit, ita ut vix quidquam ulterius requiri videatur. Idem etiam de progressionibus optimè egit, quæ materia licet ad Arithmeticam pertinere videatur, viam tamen aperit ad multorum corporum mensurationes peragendas, Petrus item Ramus optimam habet doctrinam mensurationum.

Quamvis autem Geometria progressus non pœnitendos his duobus præsertim sæculis habuerit, hæc duo problemata celebria quadraturæ circuli, & duplicationis cubi insoluta manent, in ordine tamen ad praxin virtualiter ea solvimus, cum ad quamcumque præcisionem perveniamus, sunt item alia nonnulla, ut divisio anguli rectilinei in tres partes æquales, quæ meo judicio satis inutilia sunt. Laborandum esset in aliis majoris utilitatis, nempe in metiendis aliquibus corporibus occurrentibus, ut in superficie aliquarum fornicum, quam adhuc satis expedire nan possumus, talis est superficies fornicis quatuor Cylindricis concurrentibus constantis, pariter dum dolij capacitatem metimur, si plenum non sit, hunc defectum satis metiri non possumus, quæ quidem licet minuta sint, quia tamen ad usum communem pertinent, majoris sunt facienda, quam quæcumque proprietas conicæ figuræ, quæ nullum usum habet.

CAPUT III.

De progressu Arithmeticæ.

HUjus partis Matheseos naturam satis indicat ipsum nomen, quod à voce Græca Ἀριθμὸς numerus derivatur, Arithmeticam enim numerandi artem, aut potius scientiam nuncupare possumus, quæ circa materiam discretam seu multitudinem occupetur. Ejus dignitas ex eo satis patet, quòd teste Aristotele numerare tam sit hominis proprium illiusque à pecudibus distinctivum, quàm ratiocinari: nempe primum sapientiæ opus numeros scire, alterum verò ratiocinari, censent Pythagoræi, qui æqualiter numerorum cognitione, ac loquelâ mentem rationalem indicari volunt. Ulterius progressus est Plato qui omnem ex mundo prudentiam eum eliminare asseruit qui Arithmeticam sustulerit, cum sine illa nec res publicæ, nec privatæ tutò satis administrari possint. Ejus usus quàm latè pateat, sive in aliis Mathesis partibus, sive in aliis scientiis, artibus, omnibusque negotiis nemo est qui nesciat. Neque enim Geometra ullius quantitatis etiam continuæ dimensiones definiret, nisi ad calculos revocaret, nec Astronomus motus cœlestes, syderumque conversiones, & periodos tam indubitatis legibus astringeret, si numeros ignoraret, nec Architectus tam exquisitas in operibus mensuras & proportiones sequeretur, ut musicas tonorum, & consonantiarum differentias animadverteret, nisi ab arithmetica subsidium advocaret: verbo dicam omnis Mathesis dum practica est, in Arithmeticam degenerat. In aliis vero scientiis quam latè se extendat ejus usus longum esset recensere, sufficiat ad hoc Platonis dictum, qui Arithmeticam scientiarum vestibulum vocat, non tantum eò quod sine Arithmeticâ, vix possint consistere, sed quod numerorum tractatione, rebus difficilioribus assuescit animus, & ad reliquos scientiæ fatus excipiendos præparatur. In vitam civilem latè diffunditur Arithmetica cum nulla possit hominum societas iniri nec in ullo contractu tutò satis sine ejus ope consistere. In mutuis enim commerciis conventisque quibus hæc hominum conjunctio ut plurimum continetur, regnat Arithmetica, cum ea tutò, exerceri non possint, nisi rationes dati & accepti, sortis, & fœnoris rationes ineantur.

A quibus nationibus hanc scientiam habeamus non satis liquet, communis tamen est opinio quod primus è Græcis eam Pythagoras didicerit, qui cum mercaturam exercerent, in ea ut pote sibi pernecessaria excelluerunt. Asserit enim Porphyrius in vita Pythagoræ, quod Geometriam ab Ægyptiis, à Chaldæis Astronomiam, à Phænicibus numeros acceperit, & in Græciam advexerit, cum certum sit jam à temporibus antiquis Ægyptios Geometriæ, Phœnices numeris & rationibus, Chaldæos Astronomiæ deditos fuisse. Uult tamen Flavius Josephus Pythagoram ab Ægyptiis, hos ab Abrahamo artem numerandi didicisse. Profertur à nonnullis, ut confirment ab Ægyptiis numerandi artem profluxisse, locus Platonis asserentis Ægyptios invenisse πεττείαν, ϗ κυβείαν nempe methodum numerandi per calculos, quia tamen harum vocum significatio adhuc incerta est, calculisque tantum per suspicionem tribuitur, nihil ex hoc loco concludi potest.

Græci pro Arithmeticis notis Alphabeticis Characteribus utebantur, ut innumeris veterum authorum testimoniis probari potest, litteras autem à Cadmo in Græciam advectas esse, aut ab eo inventas, vix est dubitandi locus, id significante fabulâ, quæ ex dentibus draconis à Cadmo disseminatis, enatas acies militum asserit, nempe ex characteribus in certos sulcos seu lineas ordinatis bellorum historias indicari, & enarrari. Cum igitur Cadmus esset Phœnix numerorum notas unâ cum alphabeti Characteribus à Phœnicibus Græcos hausisse dicendum est. Potuerunt ergo à tempore Cadmi ab iis, & modum 24 characteribus omnia significandi, numerosque iisdem significandi, tum per Pythagoram ab iisdem perfectiorem numerorum scientiam eorumque in omnem partem versandorum exquisitiorem artem accipere.

Paulò difficilior erit origo Characterum numeralium à Romanis usurpatorum. Nonnulli existimarunt eos lineolis suam numerationem absolvisse, nempe unitatem unica lineola, I; duabus sed decussatis X denarium, tribus ⊏ centenarium quatuor I ⊐ quingenta quatuor I ⊐ millenarium quinque ◫ significasse. Hos item characteres paulatim degenerasse, ita ut pro ⊏ sit factum C, pro I ⊐; IↃ vel etiam D, pro ◫ sit factum ∞ vel etiam CIↃ aut M. deinde quia videbatur nimis incommodum, toties repetere unitatem ut numerus octonarius, aut novenarius exprimeretur, interseruisse pro quinario mediam partem denarij, nempe V, & pariter pro quinquaginta mediam partem centenarij ⊏ nempe L, an verè hæc omnia talem progressum habuerint non liquet, sufficiat ad determinandam imaginationem, & ad memoriæ firmitatem CIↃ & M idem esse quasi II semicirculi in unum coalescant, ∞ pariter D & IↃ idem esse.

Notas Arithmeticas vulgares quas Ciphras nominamus, nonnulli esse Græcos characteres malo formatos suspicati sunt, quasi β idem esset ac 2, γ idem ac 3. δ idem ac 4. Sed tanta est dissimilitudo, ut probabilitate careat hæc opinio. Quare probabiliùs censent plerique Hispanos à Mauris, eos ab Arabibus, hos à Persis, aut etiam Indis hos characteres accepisse. Præcipuè cum non à pluribus, quàm à quadringentis annis, iis characteribus utamur. Ex eo quod in plerisque operationibus Arithmeticis, incipiamus ab ultimo charactere, conjecturam capiunt nonnulli quod ab aliquâ natione quæ in legendo à dextera ad sinistram procedat, ut solent omnes quæ ab Hebræis litteras acceperunt, nos eos characteres mutuatos esse. Melius tamen & certius procederet conjectura, si inveniretur quænam natio iis Cyphris pro litteris alphabeti uteretur.

Variè à variis distribuitur Arithmetica nos commodissimè tres ejus partes agnoscemus. Nempe Theoricam, vulgarem, & Algebram. Theorica certas numerorum proprietates considerat, quasi in universum, sive absolutas, sive respectivas, atque in hâc tantum tradenda, toti sunt antiqui authores qui extant, ita ut nihil practicum tradant, sed simplices varias numerorum species, nempe pares, impares, perfectos, imperfectos, primos & compositos, tum in numeros planos, similes, dissimiles quadratos, tum in solidos, & cubos exinde proportiones attingunt easque dividunt & subdividunt.

Vulgaris

Vulgaris Arithmetica qualis à recentioribus traditur, & à nobis Elementaris vocata eſt aliter hauddubiè dividenda eſt. Primò enim elementares regulas complectitur, additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem tam in numeris integris quàm fractis, regulam proportionum, regulas ſocietatis varias, falſi, alligationis, extractiones radicum. Progreſſiones item tam Arithmeticas, quam Geometricas conſiderat earumque proprietates, rationes item, quas item addere, & ſubtrahere, multiplicare, & dividere, docet.

Algebra quæ analytica dici poteſt, eo quod per Analyſin procedat, nempe id quod quæritur jam quaſi cognitum, & datum ſupponat, habet pro fine, & ſcopo quantitatem ſub quæſtionis difficillimæ involucris deliteſcentem, & ex æqualitate, quam cum alia nota habere dicitur, & ſubodorari & in lucem prodere: unde unica eſt Algebræ regula, quam æqualitatem aut potius æquationem dicere poſſumus, quæ tamen tot caſus patiatur ut in varias quaſi ſpecies dividatur. Hujus ſcientiæ authorem Gebrum Græcum authorem ideóque Algebram dictam nonnulli falsò exiſtimarunt, cùm Diophantus Græcus author Gebro antiquior totus ſit in exemplis Algebricis tradendis. Potuerunt quidem à Gebro præcepta Algebræ tradi, quæ in Diophanto tantum indicantur.

Diximus jam ſuprà Platonem methodum analyticam inveniſſe, quæ numeris applicata, Algebræ initium dedit. Algebram communiter his temporibus in duas partimur, in numeroſam ſcilicet, ſeu vulgarem, & antiquam, & in ſpecioſam, utramque iiſdem nixam principiis, progreſſioniſque Geometricæ proprietatibus addictam. Vulgaris circa numeros occupatur, atque adeo propriè dictum algorithmum exercet, nempe additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem, radicum extractionem. Specioſa verò rerum ſpecies & elementares Alphabeti notas uſurpat, ideóque metaphoricum, ſeu ſimilitudinarium algorithmum agnoſcit. Prima Diophantum authorem agnoſcit, Hæc Vietam qui ſub finem præcedentis ſæculi & hujus initium floruit. Quænam ſit præſtantior ſatis definiri non poteſt. Mirabilitatem quidem majorem præſefert ſpecioſa, quod reconditiori, & abſtractiori methodo progrediatur, in hoc tamen deficit, quod imaginationi non ſerviat, unde puto non peius in Matheſin peccari poſſe, quam ſi geometrica problemata, quæ figuris explicari,& oculis ſubjici poſſunt, methodo algebricæ addicantur, & ſub hoc quaſi velamine in publicum prodeant. Vulgaris Algebra in pleriſque melius imaginationi obſecundat, in aliis item melius ſpecioſa. In ſex partes communiter poteſt tota Algebra dividi.

Prima pars eſt quaſi ad æquationem iſagogica, numerorumque coſſicorum tam integrorum,quàm fractorum algorithmum tradit. Secunda æquationem explicat ejuſque reductiones, hypobibaſmum, antitheſin, paraboliſmum, iſomeriam.

Tertia æquationes quadraticas ſecundum antiquam methodum ſolvit, tum poteſtatum omnium generationes explicat.

Quarta affectas poteſtates conſiderat.

Quinta poteſtatum analyſin continet, ad ſpecioſam præcipuè ordinatam. Sexta continet methodum extrahendarum radicum ex poteſtatibus affectis. Quo autem progreſſu hæc Arithmetica fuerit inventa melius recenſitis authoribus qui de ea ſcripſerunt, allatóque operum argumento patebit.

Secundo Urbis conditæ ſæculo, ſexcentis circiter ante Chriſtum annis floruit Pythagoras Samius, qui Ægypto, ac Perſide perluſtrata, in Mathematicis excelluit,primúſque numerorum ſcientiam in Græciam aut invexit, aut ſaltem multum illuſtravit: primus Mathematicæ ludum aperuit. Ita Proclus, & Plinius.

Telauges ejus filius Magiſter Empedoclis dicitur quatuor libros ſcripſiſſe de quaternario.

Tertio Urbis conditæ ſæculo floruit Nicomachus Arithmeticus quem Boethius ſequitur in omnibus: ut autem videas qualem antiqui nobis Arithmeticen reliquerunt, hæc quam à Nicomacho accepiſſe aſſerit idem Boethius, & clariorem, talis fuit. Hæc duobus libris continetur. In primo agit de numeri definitione; diviſione, in parem, & imparem, primum & compoſitum, perfectum, & imperfectum, tum de ſpeciebus inæqualitatis, nempe de numero multiplici, ſuperparticulari, ſuperpartiente, & cæteris.

In ſecundo habentur nonnulla circa compoſitionem rationum aliquarum, ſed ſtrictim. Exinde conſiderat numeros per analogiam ad figuras geometricas, ut de numero lineari, plano, quadrato, pentagono, ſolido, ſphærico. Denique de proportionalitatibus, de arithmeticâ medietate, Geometricâ, Harmonicâ, de maximâ, & perfectâ ſymphoniâ; quæ tribus diſtenditur intervallis. Totum opus optimum eſt ſoletque à plurimis initio ſeptimi libri Euclidis apponi. Hic Nicomachus dicitur à Pappo Pythagoricus. Probabile tamen eſt quod aliam à Phœnicibus Arithmeticam didicit Pythagoras, quæ nempe ad praxin, & ad mercimonia exercenda eſſet utilis.

Plurimi in hanc Nicomachi Arithmeticen ſcripſere, ut Joachimus Camerarius qui ſcripſit explicationem in priorem librum, eamque ſuæ logiſticæ ſubtexuit. Reliquit item Nicomachus Arithmetica θεολογούμενα, unde excerpta putantur incerti authoris in Theologia Arithmetices. Utrumque opus Nichomachi excudit Vechelus Pariſiis 1538. Eandem Arithmeticam explicuit commentario Aſclepius, & Trallianus Ammonij diſcipulus, & Jamblichus, cujus ultimi ſcripta dicuntur eſſe in Bibliotheca Regia.

Quarto Urbis conditæ ſæculo 400 circiter ante Chriſtum Democritus Mileſius uno anno major natu quàm Socrates, ſcripſit de numeris Geometricis. Ita Laertius.

Eodem ſæculo Plato Socratis auditor modum demonſtrandi analyticum invenit, nempe prima Algebræ fundamenta jecit. Ab eo Leodamas Thaſius Analyſin didicit; Eudoxus Gnidius Platonis comes in Ægyptum quintum Elementum compoſuit de proportionibus, & modo argumentandi per proportionem, quod numeris æquè ac quantitati permanenti accommodari poteſt.

Philoſophus Platonis auditor ſcripſit de Arithmetica, & numeris ſecundis, quæ non extant.

Quinto Urbis conditæ ſæculo, ante Chriſtum trecentis circiter annis Xenocrates Chalcedonius de numeris librum unum ſcripſiſſe dicitur. Fuit Platonis auditor.

Euclides Megarenſis ut volunt plerique in ſuis Geometriæ Elementis multa de numeris habet, non tantum in quinto, ſed præcipue in ſeptimo, octavo,nono,in quo plurimas eorum proprietates aperuit, præcipuè vero in ſeptimo, octavo, nono, in quibus præcipuè agit de numeris primis, & compoſitis, tum de numeris planis. Solidis, paribus, imparibus: non agit autem de numeris nisi in ordine ad doctrinam indivisibilium, quam libro decimo tradit, ea tamen quæ habet possent ferè sufficere ad demonstrandam totam Arithmeticam vulgarem.

Paulò post Theophrastus Erissius Aristotelis discipulus, & successor inter alia scripsit unum librum de numeris, & alium historiarum Arithmeticarum.

Septimo Urbis conditæ sæculo circiter 100 ante Christum annis Cleomedes scripsit Arithmeticam, quæ dicitur asservari in Bibliotheca Vaticana.

Sub initium secundi sæculi à Christi Nativitate Diophantes Alexandrinus Algebræ libros 13 composuit, sex quidem latinè vertit Xylander, quos à Durero Cæsareo apud Polonos oratore acceperat. Eosdem sex libros Diophanti Nobilis Gaspar Bachet De Meseriac nobilis Sebusianus commentariis eruditissimis illustravit, sicut & de multangulis numeris librum unum. Totum autem Diophanti opus continet varia problemata Algebrica, præcepta autem non habet nisi indicata, sed ea supponit.

Quarto Christi sæculo Maximus Epirota scripsit de numeris.

Constantini temporibus Jamblicus Chalcidensis ex Cœlesyria scripsit Græcè introductionem in Nicomachi Arithmeticam. Habuit præceptorem Alexandrinum, fuitque Anatolij contubernalis. Scripsit librum primum de vita Pythagoræ, secundum adhortationem ad philosophiam Pythagoricam, quos duos Arcerius est interpretatus. Tertius est de communi Mathematica. Quartus est hæc introductio quam Samuel Tennulius latinam fecit, & notis illustravit anno 1668. Hoc opus primo habet divisionem Matheseon ex duplici quantitate, continua scilicèt, & discreta; agit autem in hoc opere de discreta, & primò de numeris in genere, de numeris planis, & solidis, aliisque in secunda parte de numeris longioribus, de medietatibus cæterisque in Genere. In hoc opere sunt pauca utilia præter notionem figuratorum numerorum. Scripsit item de fato.

Quinto Christi sæculo pauca scripsit S. Augustinus de principiis Geometriæ, & Arithmeticæ.

Theon item Alexandrinus scripsit de Arithmetica.

Sexto Christi sæculo Anitius Manlius Severinus Boetius vir exconsul, & ordinarius Patricius Arithmeticam composuit, quam in præfatione dicit, se ex iis quæ à Nicomacho fusius de numeris disputata sunt collegisse eamque clarius & brevius in hoc opere tradere. Constat autem duobus libris in primo agit de numeri definitione, in parem, & imparem; compositum, & primum perfectum, & imperfectum, exinde de speciebus inæqualitatis, de numero, multiplici, superparticulari, superpartiente, & cæteris. In secundo habentur nonnulla circa compositionem Rationum, sed strictim. Exinde considerat numeros, per analogiam ad figuras Geometricas quas imitari possunt, ut de numero lineari, de numero plano, de quadrato, pentagono, solido, de sphærico. Denique de proportionalitatibus, de medietatibus Geometrica, Arithmetica, harmonica; de maxima & perfecta symphonia, quæ tribus distenditur intervallis. Totum opus optimum continens id totum quod ab antiquis de Arithmetica accepimus. Solet à plurimis præponi libro septimo Euclidis, Extant in hanc Arithmeticam Girardi Rufi, Jodoci Clotovei, Jacobi Fabri Stapulensis, & Francisci Maurolyci Commentaria.

Eodem tempore Cassiodorus vir clarissimus & Consularis scripsit de Arithmetica.

Joannes item Grammaticus cognomento Philoponus scripsit Arithmeticam & Commentarium in Arithmeticam Nicomachi.

Septimo Christi sæculo Martianus Capella scripsit de Geometria, & Arithmetica, Astronomia, Musica.

Octavo Christi sæculo Venerabilis Beda scripsit de Arithmetica.

Nono Christi sæculo Psellus author Græcus de quatuor Mathematicis compendiosè scripsit, primoque loco de Arithmetica. Habet autem generales tantum notiones numerorum, nempe divisionem in parem, & imparem, perfectum, imperfectum; compositum, & primum. Deinde proportiones explicat, de numeris planis & solidis agit. Hoc compendium Guillelmus Xylander Augustanus primus vertit, & annotationibus illustravit Editum Basileæ in Octavo 1556.

Eodem sæculo Geber Arabs floruit à quo volunt nonnulli Algebram dictam quod eam invenerit, sed refelluntur facile ex scriptis Diophanti, quæ exempla Algebrica continent, methodumque Algebricam ita indicant ut nullus relinquatur dubij locus. Forsitan quod ab eo primo præcepta habuerimus, sed non constat, quia non extant saltem sub ejus nomine. Alij Algebram tribuunt Mahometo Mosis filio, pariter Arabi, quem Cardanus inter duodecim subtilia totius orbis ingenia reponit.

Duodecimo Christi sæculo Jordanus scripsit libros 12 de Arithmetica.

Hoc eodem tempore Theon Smyrnæus expositionem edidit, eorum quæ ad Platonis lectionem utilia sunt. Nempe explicuit loca Platonis ad Mathesin pertinentia. Hujus opus Græcè editum est, latinè versum, & notis illustratum ab Ismaele Bullialdo Juliodunensi, depromptum scilicet ex Thuana Bibliotheca. Quia autem Plato sæpe in suis operibus numeros immiscet, hic author de numeris agit, nempe eadem fere repetit quæ Psellus habet in suo compendio. In hoc opere multa commemorat ex Philolao, Laso Hermionensi, Hippaso Metapontino, Eudoxo Archita, Empedocle, Eratosthene, Herophilo, Thimotheo Evandro, Aristotele, Aristoxeno, Adrato, Possidonio, Thrasillo, quæ alibi non inveniuntur.

Decimotertio Christi sæculo circa annum 1240 claruit Alexander de Villa dei Dolensis qui scripsit Arithmeticam, & computum Ecclesiasticum. Ex his satis manifestum redditur quam ab Antiquis Arithmeticam acceperimus, quamvis enim mihi dubium non sit illos habuisse aliquas praxes Arithmeticas, quibus elementares operationes additionis, subtractionis, multiplicationis, & divisionis perficerent, si tamen præcise spectemus ea quæ in eorum libris inveniuntur, nihil aliud deprehendimus, nisi universales illas divisiones de quibus locuti sumus, nonnulla de proportionibus, seu speciebus inæqualitatis, de progressionibus item, de medietatibus Geometricis, Arithmeticis, Harmonicis, aliisque similibus divisionibus. Algebram autem licet non ignorarent, præcepta tamen algebræ non extant in antiquis, Diophantus enim exempla Algebrica, quam plurima solvit, Algebræ, tamen prima præcepta non

tradit.

tradit. Quare Arithmetica communis quæ haud dubiè modò perfectissima est totam fere à recentioribus conditam esse, & quasi inventam, haud potius in ordinem redactam esse oportet. Algebram autem à Diophante non accepimus, qui ante Xylandrum latinum non habebamus. Probabile autem mihi est præcepta Algebrica ab Arabibus ad nos profluxisse, immo & quamplurima Arithmeticæ communis. Videmus enim Tartagliam aliosque Algebristas superioris sæculi, Algebræ nomen Arabicum imposuisse, sicut & regulæ falsi. Sed ad recentiores authores veniamus.

1 Jacobus Faber Stapulensis in Arithmeticam Jordanis Commentarium edidit 1480.

Primus liber passiones numerorum communes discutit.

Secundus de proportionum, & proportionalitatum passionibus.

Tertius de numero, primo, composito, ad alterum primo, & in aliqua proportione minimo.

Quartus de numeris continuè proportionalibus, commensuralibus, & incommensuralibus.

Quintus de additione, subtractione, & partitione rationum.

Sextus de numeris quadratis, cubicis, superficialibus, similibus & solidis.

Septimus de numero pari, impari, perfectis, abundantibus, & diminutis.

Octavus de formis numerorum trigonis, tetragonis, pentagonis, &c. pyramidalibus, serratilibus & tesseris.

Nonus de æqualitate, inæqualitate, multiplicibus superparticularibus.

Decimus de medietate, Arithmeticâ, Geometricâ, Musicâ, & aliis.

Opus quidem bonum sed in quo pleraque ex Boethio desumpta sunt.

2 Eodem anno Faber Stapulensis Epitomen edidit in Arithmeticam Boethij, & Judochus Clitoveus Neoportuensis in hanc Epitomen Commentarium adjecit. Habet item nonnulla de additione, subtractione, multiplicatione, divisione, extractione radicum, sed nimis breviter.

3 Prodiit 1521 Gallica Arithmetica composita à Magistro Stephano de la Roche dicto Villefranche Lugdunensi, divisa in duas partes, quarum prima in sex differentias dividitur. Prima differentia quasi Isagogica agit de numero in genere, de speciebus, numeris perfectis, partibus aliquotis de progressionibus, & proportionibus.

Secunda differentia agit de numero integro, de quatuor regulis, earumque examinibus.

Tertia differentia habet doctrinam fractorum absolutam.

Quarta differentia de regula trium, eiusque speciebus, de regula falsi.

Quinta de radicibus earumque extractionibus, & abbreviationibus.

Sexta habet principia algebræ.

Secunda pars hujus Arithmeticæ est practica, seu applicativa præceptorum diversis materiis, eamque dividit in decem differentias.

Prima agit de Monetis.

2 De mercibus quæ mensurationi subjacent.

3 De mercibus quæ ponderantur.

4 De mercibus quæ numero subjacent.

5 De mercibus quæ mensuris cavis, seu vasibus distrahuntur.

6 De Societatibus.

7 De permutationibus.

8 De Cambiis.

9 De sortibus & lucris.

10 De auro & argento.

Opus optimum si demonstrationes haberet, & idiomate paulo meliori traderetur.

Girardus Rufus anno 1521. Commentarium 4
edidit in Boethij Arithmeticam in multis non contemnendum, sed importunè mysticis numerorum applicationibus confarcinatum.

Anno 1523. Frater Lucas de Burgo Sancti Se 5
pulchri Ordinis Minorum, Theologiæ Professor summam edidit Italicam de Arithmetica, Geometria, proportionibus, & proportionalitatibus, divisam in plurimos tractatus.

Primo agit de numerorum divisionibus in parem, & imparem, de numeris perfectis, aliisque quæ aut in Euclide reperiuntur, aut in Boethio.

Secundo tradit Algorithmum, seu regulas additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis, cum suis probationibus, habet autem plurimos modos multiplicationis, & divisionis.

Tertio agit de progressionibus, habet autem multas praxes peculiares, exemplis illustratas, præcipuè ad cognoscendam summam totius progressionis, etiam geometricæ.

Quarto de extractione radicum, etiam in fractis, & approximatione, de modo extrahendi radicem quadratam, geometricè seu mediam proportionalem, extrahendi radicem cubicam etiam geometricè, sed praxis deficit.

Quinto de fractis eorumque algorithmo.

Sexto de regula trium etiam in fractis, de quo puncto sunt exempla & quæstiones quàm plurimæ.

De modis argumentandi ex proportionalitate, & de algorithmo proportionalitatum.

Septimo de regula helcataim seu regula falsi duplicis positionis.

Octavo Tractatum de Algebrâ sed nimis brevem; Nono de regulis Societatis, aliisque innumeris ad mercaturam pertinentibus.

Totum opus utile est & ad particularia descendit. 1528.

Joannes Fernelius Ambianens. de proportioni- 6
bus scripsit, duos libros: prior liber est de proportionibus simplicibus, tam magnitudinum, quam numerorum, etiam fractorum rationes edocet; posterior ipsas proportiones comparat.

In hoc opere author nimis universaliter loquitur nec ad particularia satis descendit. 1537.

Cuthebertus Tonstallus de arte supputandi li- 7
bros quatuor edidit. In primo agit de quatuor regulis fundamentalibus, & extractione radicum, de progressione Arithmeticâ. In secundo de fractionibus. In tertio de regulis trium, societatis &c. Habet autem quæstiones 46. In quarto agit de proportionibus, & regula falsi, habet item quæstiones multas.

Opus bonum, non satis aliquando explicatum, nec demonstratum. 1543.

Prodiit Arithmetica integra authore Michaele 8
Stifelio, tribus libris comprehensa.

In primo algorithmum numerorum integrorum tradit, agit de numerorum speciebus, item de progressionibus, arithmeticis, geometricis in ordine ad algebram. De extractionibus radicum, proportionibus, de musicis progressionibus, de numeris vulgariter denominatis, de regula falsi & alligationis.

In secundo de numeris irrationalibus, de algo-
rihmo

rithmo medialium, de propositionibus Euclidis pertinentibus ad irrationales & binomiales, de resolutione linearum irrationalium in rationales, de numeris irrationalibus contractis ad corpora.

In tertio regulam algebræ explicat.

Quamvis hoc totum opus bonam & solidam doctrinam contineat, eam tamen ita breviter explicat, & modo non communi, ut sit perdifficile mentem ejus assequi nisi aliunde rem tenueris, unde hic liber sine præceptore explicante non potest doctum efficere.

9 Anno 1550 Joannes Baptista Ruchetta Genuensis Italicam Arithmeticam edidit qua resolvitur facile omne dubium mercatorium, supponit autem jam Arithmeticam elementarem circa integros; quare incipit ab Elementis fractionum, tum proponit regulam trium simplicem, duplicem, multiplicem, rectam & inversam, & exinde, regulam falsi, simplicis, & duplicis positionis regulam alligationis.

In secundo tractatu agit de regulis societatis, tam civilibus quam rusticanis, habetque regulas pro cambiis, legaturis aliisque hujusmodi, abundat autem exemplis. Opus bonum & utile.

10 1554 Henricus Glareanus Epitomen composuit de sex Arithmeticæ practicæ speciebus, in quâ regulas communes tam cyphrâ quam calculis perficit. Habet ferè omnia bene quidem, sed nimis breviter. Parisiis in octavo 1554. Lugdun. 1554.

11 Jacobus Peletier Cenomanensis quatuor libros Arithmeticæ composuit gallicè, in quibus regulæ communes inveniuntur in numeris integris, & fractis, extractiones radicum, regulæ falsi cæteræque cum Principiis Algebræ.

Habet item fractiones astronomicas, quarum algorithmum tradit. Omnia sunt correcta, & bona, idioma non item. Lugduni in octavo. 1554.

12 Anno 1556. Nicolaus Tartaglia Venetus primam partem Arithmeticæ Italicæ septemdecim libris tradidit, in quâ habet omnes praxes, & regulas non tantum ad negotiationes, sed etiam ad quemcumque calculum spectantes.

In primo sunt præambula de numeris.

In secundo elementares tradit regulas.

In tertio habet numeros denominatos monetarum, & ponderum, unamque speciem monetæ cum alia comparat.

In quarto methodum naturalem docet omnem computum perficiendi.

In quinto, & sexto alias duas methodos faciliores exhibet.

In septimo agit de fractionibus.

In octavo regulam trium explicat.

In nono de regulis societatis, cambij &c.

In decimo regulam trium inversam, & regulam ad determinandum pondus panis proponit.

In undecimo de mercede annuâ & lucro annuo, detegitque errores fratris Lucæ aliorumque Practicorum.

In duodecimo de societatibus agit & regulis ad eas spectantibus.

In decimo tertio de dolis agit, pariterque fratrem Lucam de Burgo reprehendit.

In decimo quarto agit de variis speciebus cambiorum.

In decimo quinto de alligatione metallorum.

In decimo sexto de regula helcatain seu regula falsi, simplicis positionis.

In decimo septimo de regula falsi duplicis positionis.

Opus hoc est absolutissimum & usquequaque perfectum.

Eodem anno secundam partem edidit in undecim libros divisam.

In primo tradit generales numeri divisiones, item progressiones, & methodum eas colligendi in unam summam, aliaque hujusmodi.

In secundo agit de extractione radicum omnium potestatum, tam in numeris integris, quam fractis. Plurimæ autem methodi ab eodem authore inventæ sunt.

In tertio agit de multiplicatione, divisione, additione, subtractione radicum.

In quarto tradit algorithmum proprium algebræ per plus & minus.

In quinto addit, subtrahit, multiplicat, dividit, binomia.

In sexto probat duas primas propositiones secundi Euclidis.

In septimo de proportionibus disserit, easque addit, subtrahit, multiplicat, dividit.

In octavo considerat proportionem geometricam, & arithmeticam.

In nono considerat geometricæ progressionis proprietates, quod primus post radicem sit quadratus, secundus cubus &c.

In decimo continetur inventum authoris quo docet invenire quantitatem quæ per binomiam quodcumque multiplicata, generet quantitatem rationalem, pariter quantitatem quamlibet per binomium dividit.

In undecimo multa pertinentia ad decimum Euclidis explicat melius, & in numeris ostendit.

Quamvis habeat præcipuas algebræ difficultates, multaque de suo addat circa illam; non tamen satis methodicè procedit ut quis ex eo solo eam possit addiscere. In sexta parte ejusdem tractatus de numeris, & mensuris tradit regulam algebræ quam etiam nominat almucabalam seu regulam cosæ quam dicit inventam à Mahometo filio Moysis Arabe. Sed Diophantum non viderat. Unicum autem habet librum agitque de regulâ algebræ. 2. De potestatibus. 3. De algorithmo, dignitate binomiorum, trinomiorum, de æquationibus, non tamen omnibus; ulterius enim provecta est hoc tempore algebra. Est tamen optimus algebrista.

1567 Conradus Dasypodius logisticam satis 13 bonam, in quâ præcipuè regulas progressionum tradit, composuit, nimis tamen breviter. Argentorati in octavo 1567.

1568 Joachimus Camerarius Pabempergensis 14 Opus edidit de Græcis Latinisque notis, & præterea Saracenicis, cum indicio elementorum ejus nempe logicè in quo plurima sunt curiosa.

Accessit explicatio Arithmeticæ Nicomachi.

Hoc Opus nec satis digestum est, nec clarum.

Basileæ in octavo 1516.

1574. Magister Guillelmus Xilander Augusta- 15 nus publicus Philosophiæ Aristotelicæ in scola Heidelbergensi Doctor, Diophanti Alexandrini rerum Arithmeticarum libros sex latinos fecit, & Commentariis illustravit. Primis duobus adjecta sunt Scholia Maximi Planudis. Adjectus item est liber de numeris polygonis, seu multiangulis.

Opus hoc continet exempla algebræ, præcepta vero supponit; Xilander in hoc opere concinnan-

do

do multum laboris non inutiliter insumpsit, quamvis Clarissimus vir Dominus Bachet in multis ostendat Xilandrum mentem authoris non esse assecutum.

1575 D. Franciscus Maurolycus Abbas Messanen. in primo libro cum vidisset Eucliden egisse tantum de planis, quadratis, solidis, & cubis; de cæteris autem exagonis, triangulis, pentagonis, cæterisque non egisse, pariter Pythagorâ, Jamblicum, Nicomachum & Boetium qui ferè omnia ex Nicomacho sumpsit; conatur scientiam provehere, & aliqua nova de his speciebus de suo addere. In secundo libro regulas omnes Arithmeticas novò modo demonstrare conatur, methodo tamen difficili nec ita clarâ; in secundâ parte multa habet optima de incommensurabilibus; multa item ad algebram spectantia. In quarto Venetiis 1575.

16 1577 Guillelmus Gosselinus Cadomensis Bellocassius de arte magnâ, seu de occultâ parte numerorum, seu de Algebrâ libros quatuor edidit in quibus explicantur æquationes Diophanti, regulæ quantitatis simplicis, & surdæ.

In primo præcipuè agit de proportione arithmeticâ & geometricâ, item de rationibus addendis, subtrahendis dividendis, de regulâ duplicis hypothesis.

Liber secundus de additione, & subductione nominum, de inventione laterum, seu radicum & eorum algorithmo.

In tertio de æquatione tam simplici, quam secundâ, de revocatione quantitatum ad minorem valorem, de æquatione tertiâ, seu cubicâ, de fictitiâ æquatione Diophanti.

Liber quartus de quantitate simplici, & surdâ.

Opus optimum quidem, sed tantisper nimium breve; non attigit quidem algebram speciosam, sed multa habet optima circa algebram numerosam. Parisiis in octavo 1577.

17 1578 Gemmafrisius Medicus, & Mathematicus, Arithmeticam practicam, & brevem & facilem composuit, in quatuor partes divisam.

1. Continet elementares regulas in integris.
2. Numeros fractos.
3. De variis regulis proportionum de regulâ algebræ breviter disserit.
4. De proportione.

Huic operi additæ sunt annotationes de fractionibus, astronomicis & radice utraque.

Hoc opus optimum est videturque omnia complecti. Peletarius addidit opusculum de cognoscendis per memoriam, Kalendis, idibus, festis mobilibus, aureo numero, loco Solis, & Lunæ in Zodiaco. Parisiis in octavo 1578.

18 1579 Raphael Bombelli Bononiensis Algebram edidit in tres libros divisam.

In primo tradit præcepta communia, ut algorithmum numerorum algebricorum, extractiones item radicum quadratarum & cubicarum, & aliarum, de binomiis, item de residuis & radicibus eorum, de radicibus ligatis seu universalibus.

In secundo de æquationibus puris, & impuris earumque algorithmis.

In tertio profert varia problemata.

Videtur in multis terminos insuetos affectare, & multa non demonstrare, in genere tamen hoc opus est satis perfectum. In quarto Bononiæ 1579.

19 Anno 1584, Joannes Baptista Benedictus Patricius Venetus post suam Gnomonicam, apposuit Opusculum de Arithmeticâ, in quo variis Arithmeticis quæsitis respondet, præcipuéque dat rationem aliquarum praxium Arithmeticarum, quarum præcipuæ in Arithmetica, aut in algebrâ demonstrantur. Quamvis ea quæ profert sint satis bona, quia tamen sine ordine proferuntur vix sunt satis clara ut à quolibet percipiantur.

1585 P. Christophorus Clavius Bambergensis Societatis Jesu, Epitomen Arithmeticæ practicæ composuit, in quo post regulas communes, agit de fractis, tum de regulis proportionis, societatis, alligationis falsi, progressionibus geometricis extractionibus radicum. Opus solidum & bonum. Romæ in octavo 1585. 20

1588 Prodiit Arithmetica compendiosa Martini Fustel Gallicè unà cum instructione ad ordinandum librum computorum. Bonas & utiles habet aliquas praxes, malè tamen explicatas, & non demonstratas. 21

1588 Petrus Savonne dictus Talon Avenionensis, Arithmeticam composuit Gallicè, in quâ præter regulas vulgares, plures abbreviationes regularum apposuit, præcipuè in ordine ad commercium; & circa emptiones rerum particularium communiter usitatarum. Habet item regulas circa monetas, cambia, reductiones mensurarum. 22

Opus in praxi optimum, non tamen in multis satis clarè explicatum. Lugduni in octavo 1588.

1599 Prodiit Petri Rami Arithmetica libris duobus comprehensa à Lazaro Schonero emendata & aucta. 23

In primo libro habetur Arithmetica simplex, comprehendens regulas Elementares tam in numeris integris quàm fractis.

In secundo libro habet partem Arithmeticæ comparativam, primo proponit regulas alligationis, tum de rationibus agit, nempe de additione, subductione earum, tum de divisione in varias partes, tum de regulâ aureâ variè combinata nempe regula societatis, tum agit de progressionibus.

Totum hoc opus scientificum est, videtur tamen deficere quòd importunis divisionibus & subdivisionibus obscuret omnia, quod item non demonstret, sed tantum demonstrationem indicet. Affert tamen multa exempla quæ lucem non modicam afferunt. Vix ille qui in Arithmetica non versatus fuerit, eam in eo authore addiscet. Habet item parvum tractatum de numeris figuratis.

Ejusdem Petri Rami Algebra libros sex habet.

Primus algorihmum continet.

Secundus agit de æquatione.

Hoc opus imperfectum est in quo nullus addiscet algebram. Idem Opus habet de logisticâ sexagenaria, quod aliquam potest habere utilitatem iis qui Astronomicum calculum per sexagenas instituunt.

Anno circa 1600 vel paulò antè floruit Parisiis Franciscus Vieta Fontenæensis Analyseos speciosæ author primus, seu algebræ quam vocant speciosam, hujus autem Analyseos speciosæ Opus ex pluribus Tractatibus coalescit. 24

Primus Tractatus est Isagoge in artem analyticam, in quâ post definitionem hujus scientiæ affert symbola proportionum, & æqualitatum, leges homogeneorum & heterogeneorum, præcepta logistices seu algorithmum speciosum, exinde expurgationes æqualitatis, nempe anthitesin, hypobibasmum, parabolismum, quæ omnia sunt ita breviter dicta, ut ea tantum intelligat qui jam

jam in communi Algebrâ fuerit exercitatus.

Secundus ad logisticen speciosam notæ priores in quo tractatu praxin affert algorithmi speciosæ in exemplis.

Tertius Zeteticorum libri quinque in quibus affert solutionem variorum problematum methodo speciosâ.

Quartus de æquationum cognitione, & emendatione tractatus duo.

Quintus de numerosâ potestatum resolutione. In hoc tractatu radices extrahit, non tantum ex potestatibus puris sed etiam affectis.

Sextus ad Adrianum Romanum, nempe continet solutionem problematis propositi ab Adriano Romano omnibus Mathematicis totius Orbis.

Septimum supplementum Geometriæ.

Hic author vulgò censetur subtilis & profundus, graviter tamen peccat quòd vocibus insuetis utatur, modoque obscuro res enunciet, ita ut nisi incurrisset in manus aliquorum qui rebus obscuris delectantur, jacuisset illius Opus, & meritò. Hic tamen excusari potest quod ejus opera non fuerint perfecta, sunt enim ferè omnia posthuma.

25 1608 Simon Stevinus Principis Auriaci Mathematicus in fine suorum operum habet Miscellanea, & inter illa rationem disponendi librum computorum sive rationum, tam pro mercatoribus, quam pro Præfectis ærariorum publicorum. Opus utile & ad praxin spectans.

26 Anno 1610 Petrus Antonius Cattaldus Bononiensis edidit brevem Tractatum de Algebrâ proportionali, in quo accuratè persequitur proprietates quantitatum proportionalium, & quid ex datis elici possit, seu algebricè cognosci, edidit & Tractatum de Arithmeticâ Elementari bonum, communem tamen.

27 1611 P. Christophorus Clavius Bambergensis Societatis Jesu, epitomen edidit Arithmeticæ practicæ, in quâ tradit additionem, subtractionem, multiplicationem in numeris integris, & fractis, regulas trium, societatis, alligationis, falsi, & extractiones radicum quadratæ & cubicæ, progressiones arithmeticas & geometricas. Videtur in hoc opere non omnia exactè demonstrare.

Idem author tradidit algebram seu vulgarem satis aptam & perfectam & exemplis bene multis, illustratam.

Non attigit speciosam, nec extractiones potestatum affectarum, exceptis communibus, seu quadraticis quarum demonstrationes tradit.

28 1612 Josephus Langius Cæsaremontanus Friburgi Brisgoiæ Mathematices Professor elementale logisticæ, tam vulgaris quàm astronomicæ, edidit. Opus nimis breve, & nihil demonstrans. Friburgi in octavo 1612.

1614 Prodiit in lucem novum hujus sæculi inventum mirifica scilicet logarithmorum descriptio, usus in omni Logistica mathematica, authore ac inventore Joanne Nepero Scoto, Barone Merchistonij. In hoc scilicet opere substitutis loco numerorum quorumcumque eorum logarithmis, quidquid per multiplicationem, & divisionem perficimus, per additionem, & subtractionem absolvit, quæ methodus in numeris majoribus est compendiosissima, quare huic operi meritò hæc additur Epigraphe, *antecessoribus nostris sapientiores sumus.* Hanc doctrinam excoluere alij, huic tamen præcipua laus ut inventori debetur.

29 Prodiit Francisci Vietæ Fontenæensis de recognitione æquationum tractatus posthumus, in quo scilicet singulas æquationum species percurrit, methodumque docet quâ ad simpliciores reducantur.

Opus non perfectum quidem, & satis expolitum profundiorem tamen doctrinam continens.

1617 Ludolphus Aceulen Hildes-Heimensis in opere suo cui titulus est Fundamenta arithmetica, & geometrica, cum eorumdem variis problematis geometricis, partim solo linearum ductu, partim per numeros irrationales, tabulam sinuum, & algebram solutis. Multa habet arithmetica; primò quidem habet Arithmeticam surdorum, tum solvit quamplurima geometrica problemata per numeros, seu algebram. 30

Hoc Opus ordinatum non est, quamvis bonam doctrinam habeat, ex quo fit ut sit obscurum in plerisque.

1620 Clarissimus Dominus Bachet de Mezeriac Nobilis Sebusianus problemata jucunda, quæ numeris absolvi possunt, præcipue ad divinandum edidit: in quo opere multa sunt scitu digna. Lugduni in octavo 1620. 31

1621 Idem Dominus Gaspard Bachet de Meziriac Nobilis Sebusianus Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libros sex, & de numeris, multangulis librum unum, Græcè & Latinè edidit, atque absolutissimis Commentariis illustravit. 32

Opus absolutissimum & usquequaque perfectum; mentem enim authoris videtur ubique assecutus, & clarissimè explicare ita ut nihil amplius requiri possit.

Anno 1624 Joannes Keplerus Imperatoris Ferdinandi Secundi Mathematicus, Chiliadem logarithmorum ad totidem numeros edidit, præmissâ demonstratione ortus logarithmorum, eorumque usibus in quacumque logisticâ. Opus hoc non satis clarè procedit. 33

1625 Zacharias Professor Mathematum Parisiis Tractatum arithmeticum edidit in quo sunt regulæ communes. Parisiis in octavo 1625. 34

1625 Simon Stevin Brugensis Arithmeticam composuit, seu potius algebram in sex libros divisam. 35

1. Habet definitiones.

2. Quatuor regulas vulgares habet, & extractiones radicum. Item algebricum algorithmum, & extractiones radicum multinomiorum & alia multa præcepta algebrica; quatuor sequentibus affert exempla Diophanti.

Opus hoc Gallicum est, videtúrque inordinatum esse atque adeo difficile esse, in quo multa potes addiscere si jam algebram teneas, non tamen percipere in hoc authore si nihil scias. Lugduni Batavorum in octavo 1625.

1625 Jacobus Hume Scotus Professor Matheseos Parisiis novam Arithmeticam Gallicè edidit, nempe methodum vulgarem omnium operationum sine fractionibus vulgaribus. Item methodum supputandi sinus posito sinu toto. 36

In hoc opere omnes fractiones reducit ad decadicas, optimasque praxes habet circa ejusmodi fractiones, quare hoc opus est alicujus momenti. Parisiis in octavo 1625.

1626 Prodiit Arithmetica logarithmica sive logarithmi pro omnibus numeris ab unitate ad 100000, unà cum canone artificialium, sinuum, tangentium, & secantium, ad radicem 10, 0000, 00000, ad singula prima minuta quadrantis: Hos logarithmos primus invenit Joannes Neperus 37 rus Baro Merchistonij, quos tamen in ejusdem sententiâ sub aliâ formâ tradidit, eorumque ortum, & usum illustravit Henricus Briggius, in celeberrimâ Academiâ Oxoniensi Geometriæ Professor Savilianus. Editionem hanc secundam auxit Adrianus Ulac Goudanus.

Additus est initio genesis & usus horum logarithmorum, quod Opus immensi laboris, & utilitatis summæ, ideóque qui hoc susceperunt de totâ Mathesi bene meriti sunt.

38 An.1631. prodiit Thomæ Hariotti Philosophi, ac Mathematici celeberrimi in Angliâ, Tractatus posthumus ex schediasmatis descriptus, cui titulus *artis analyticæ praxis*. In ejus præfatione habetur totus progressus artis analyticæ. Totum hoc Opus consistit in algebricarum operationum exhibitione in exemplo, quare qui algebram aliunde nescit, vix in hoc opere addiscet, potest tamen esse utile iis qui jam sciunt.

39 1631 Francisci Vietæ Fontenæensis in artem arithmeticam Isagoge. Ejusdem ad logisticem speciosam notæ priores, typis mandatæ sunt in 24 Parisiis.

Opus quidem optimum sed ita compendiosè traditum, ut in eo opere satis intelligi non possit.

40 1634 Petrus Herigone Mathematicus Parisiensis Arithmeticam communem, & algebram conscripsit, in quibus tractatibus quamvis doctrina in plerisque optima sit, attamen propter modum scribendi per characteres insuetos, ita fit difficilis ut sæpe contextus orationis nullus inveniri possit.

41 1636 Jacobus Humius Theagrius Scotus Vietæ algebram faciliorem reddidit, & gallicam dedit sex libris.

Liber primus communes Algebræ operationes continet, seu algorithmum.

2 Abbreviationem operationum.

3 Resolutionem potestatum simplicium.

4 Resolutionem potestatum affectarum, per subtractionem.

5 Resolutionem potestatum affectarum per additionem.

6 Resolutionem potestatum avulsarum.

7 Correctionem æquationum.

Additus est Tractatus algebricus ejusdem authoris duobus libris comprehensus, quorum primus est de numeris cossicis simplicibus, secundus de surdis.

Opus quod ad intelligentiam Vietæ multum conducere potest. Parisiis in octavo 1636.

42 1637 Pater Jacobus de Billy Societatis Jesu, Compendium præceptorum Algebræ vulgaris edidit, quinque capitibus comprehensum. Primo tradit algorithmum algebricum; Secundo regulam algebræ explicat, ejusque inventionem & reductionem; Tertio algorithmum, & usum secundarum radicum tradit; Quarto algorithmum & extractiones radicum de numeris surdis. Item radices universales, & binomia; Quinto usum algebræ.

Si hoc opus post singula præcepta, haberet exempla, multò facilius esset, & utilius, clarè tamen & nitidè procedit.

43 1640 Adrianus Metius Almarianus Arithmeticam edidit duobus libris comprehensam. In primo tradit regulas communes tam in numeris integris, quam fractis, divisiones item in varias numerorum species.

In secundo regulam proportionalem, extractiones radicum tradit satis clarè, brevius tamen.

In fine ejusdem operis adjecta sunt Epigrammata Joannis Laurembergij Professoris Mathematicæ in Sorana Academia. Hæc Epigrammata continent varia problemata ad numeros spectantia, & ex authoribus græcis deprompta, quæ ad illustrandam Arithmeticam & Algebram utilia sunt. Hafniæ in quarto 1640.

Scheubelius in Academiâ Tubingensi Euclidis 44
Professor, Tractatum Algebræ suo Euclidi præmisit, sed nimis brevem quàm nemo in eo discere possit, si interprete aut magistro careat.

1640 Prodiit Parisiis liber Gallicus incerto 45
authore cui titulus, *Traitté des quantitez incommensurables*. Primo hoc opus habet tractatum quasi introductorium in quo proferuntur nonnulla de numeris, ut plurimum ex septimo, octavo, & nono Euclidis excerpta, continet autem 24 Propositiones. In hoc tractatu refellit nonnullos Stevini errores, circa quantitates incommensurabiles; In secunda parte introductorii agit de origine quantitatum incommensurabilium.

Tertia pars introductorij, continet Arithmeticam incommensurabilium.

Exinde habet geometriam incommensurabilium, seu decimum Euclidis librum aliter explicatum, & ad 62 Propositiones reductum.

Opus hoc bonum est & bene explicat materiam alioquin in Euclide intricatam.

Anno 1643 Pater Jacobus de Billy Compen- 46
diensis Societatis Jesu, novam Clavim Geometriæ edidit, in quâ algebram geometriæ applicat, solvitque quamplurima problemata geometrica, quæ sine illa insolubilia viderentur. Opus optimum iis qui talibus delectantur. Adjecit in fine epitomen præceptorum Algebræ, nimis brevem, & sine exemplis, ideóque ferè inutilem, cum in eâ epitome nullus possit eam addiscere. Scripserunt de Algebrâ Cardanus, Stifelius, Bombellius Nuget, Xilander, Stevinus, Albertus Cluvius, Ludolphus, Peletarius, Vieta.

Pater Jacobus de Billy Compendiensis, Socie- 47
tatis Jesu, novam Geometriæ Clavim, Algebram scilicet edidit, cujus beneficio aperitur immensus Matheseos thesaurus, & resolvuntur plurima problemata hactenus non soluta in serie multarum quantitatum continuè proportionalium; simulque traditur methodus universalis quâ quilibet marte proprio invenire poterit innumera alia ejusmodi.

In hoc opere non docet Algebram sed supponit, ejusque usum aperit, in fine tamen epitomen habet præceptionum algebricarum, sine exemplis, quæ si exempla addita haberet clarissima evaderet. Opus hoc specimen continet profundioris Algebræ. Parisiis in quarto 1643.

1646 Joannes Lunesclos è montium Salinga 48
edidit thesaurum mathematum, reseratum per Algebram novam, tam numeris, quam speciebus declaratam, in duos libros divisam. In primo syntheticam Algebram, nempe agit de algorithmis, tam in quantitatibus rationalibus quam irrationalibus, in secundo Analyticam considerat in eâque de æquatione tractat.

Hic author nimiis divisionibus, & subdivisionibus materias confundit, licet autem habeat multa bona præcipuè vero applicationes Algebræ, ad diversas materias, puto tamen impossibile in hoc solo libro Algebram addiscere: habet initio

initio Synopsin Philosophiæ nempe divisiones & subdivisiones materiarum.

49 1657 Pater Joannes François ex Societate Jesu, Arithmeticam brevem admodum gallicè dedit, in quâ sunt tantum regulæ elementares perficiendæ vel characteribus vel calculis. Demonstrationes non habet.

50 1657 Joannes Maslard Arithmeticæ Professor Turonis Opusculum edidit, *le tresor parfait d'Arithmetique*, in quo ope alicujus tabulæ vult ut qui Arithmeticam nesciunt, omnes tamen operationes perficiant, nempe multiplicationem, divisionem, regulam proportionum, partes aliquotas assis, libræ Turonensis, ponderum, cambiorum, &c.

Hæc tabula ingeniosa est & perficit multa facillime aut potius jam perfecta, & supputata continet. Turonis in octavo 1657.

51 1660 Franciscus Barocius Patritius Venetus Opusculum edidit in quo una oratio,& duæ quæstiones; altera de certitudine, altera de medietate Mathematicarum, quæ omnia potius oratoria quam mathematica sunt.

1661 P. Gaspar Schottus Regiscurianus è Societate Jesu, professus Mathesin Panormi & Herbipoli cursum mathematicum, sed in plerisque Tractatibus demonstrationes non affert. In eo cursu Arithmeticam elementarem tradidit sine demonstrationibus.Habet item rabdologicam Neperi, & divinatoriam; militarem habet in polemica; habet item Algebram sed nimis breviter, ita ut ex eo Tractatu perfectam ejus cognitionem habere non possis; Habet tamen multa ænigmata selecta; breviter item explicat naturam logarithmorum.

52 1665 Prodiit Caroli Renaldini Serenissimi Principis Etruriæ Philosophi ac Mathematici & in Pisanâ Accademiâ Philosophiæ Professoris Ars analytica Mathematum,seu Algebra in tres partes divisa.

In prima veterum analistarum; in secunda recentiorum doctrinam tradit.

In tertiâ problemata resoluta exhibet, duobus tomis majoribus.In prima hunc sequitur ordinem; primò de numeris denominatis eorumque algorithmo loquitur, nempe additione, subtractione, multiplicatione, divisione,fractionibus, extractione radicum, de secundis radicibus. Et tandem ad æquationem algebricam gradum facit, nempe de ejus inventione, variisque reductionibus, anthitesi, parabolismo, hypob.basmo, izomeria. Explicat item æquationes simplices tum affectas, præcipuè quadraticas; tertio eas in quibus exponentes terminorum sunt arithmeticè proportionales, quarto exhibet numerosam affectarum æquationum Analysin; praxes tamen non sine potestatum generatione speciosa intelligi possunt. Affert autem quamplurima exempla extractionis radicum affectarum; exinde explicat æquationes quæ fractionibus aut numeris irrationalibus implicantur: tum ex binomio radicem præsertim cubicam extrahit, omnesque æquationes cubicas, quomodocũque affectas explicat,exemplisque illustrat; denique docet quæ ad ænigmata solvenda cõducant.

In secunda parte quæ est de speciosâ seu de methodo introducta à Vieta, explicat ejus naturam, algorithmum proprium, etiam cum fractionibus extractiones radicum, æquationem tam simplicem quam affectam, ejusque reductiones, aut emendationes cum vitio laborat. In fine utriusque partis innumera profert exempla. Hoc Opus videtur continere quæcumque ad hanc materiam pertinent,utilius tamen contrahi potuisset, malè enim sua prolixitate lectorem obruit.

1665 P. Gaspar Schottus Regiscurianus Societatis Jesu, Steganographiam edidit, continentur autem in hoc Opere artificia nova ad secretò alteri scribendum. Vix ad Mathesin spectat hic Tractatus. Herbipoli in quarto 1665. 53

1667 Guillelmus Oubhtredus Ætonensis Collegij regalis in Cantabrigia socius Clavim Mathematicam denuò limatam edidit, in quâ multa habet optima. 1. Circa decadicas fractiones & alias. 54

2. De æquationum affectarum resolutione, & lothgarithmorum usu.

3. Decimi Euclidis declarationem brevissimam.

4. De solidis regularibus Tractatum.

5. De Anatocismo seu ratione reducendi fœnoris breviter.

6. Regulam falsi demonstratam.

7. Theorematum Archimedis de Sphæra, & Cylindro declarationem. Horologiographicam.

Hæc omnia optima forent nisi modum scribendi non communem affectasset, ejus enim libri vix percipi possunt nisi quis supputationes ipsas faciat. In quo graviter peccat, & sine ulla necessitate materias alioquin satis difficiles, adhuc magis implicat. Oxoniæ in octavo 1667.

1668 Idem Carolus superius laudatus Renaldinus libros duos scripsit de resolutione & compositione mathematica. In primo veterem resolutionis mathematicæ methodum explicat, diversisque materiis applicat. Primo enim data Euclidis profert & theoremata plana, affert item varia exempla in aliis materiis; nempe in sectionibus conicis, in quadratrice linea, spiralibus, in catoptricâ, balisticâ, trigonometria. In secundo libro methodum analyticam recentiorum explicat. 55

Hoc opus non videtur satis ordinatè nec satis methodicè procedens.

1669 Pater Vincentius Leotaudus Delphinas Valloysianus Societatis Jesu, Institutionum arithmeticarum libros quatuor edidit, in quibus omnia quæ ad numeros simplices, fractos, radicales, ac proportionales, pertinent præcepta, clarissimis demonstrationibus tum arithmeticis tum geometricis illustrata traduntur. In primo libro numerorum integrorum algorithmum tradit, In secundo fractorum, In tertio radicum extractionem, Quartus est de rationibus & de rationum proportionibus. 56

In hoc opere nihil desideratur, nisi major brevitas; habet enim prolixiorem modum explicandi hic author.

1670 Pater Jacobus de Billy Compendiensis Diophanti redivivi partem priorem edidit, in qua non casu,ut putatum est,sed certissima methodo & analysi subtiliore innumera enodantur problemata quæ rectangulum triangulum spectant. Lugduni in octavo 1670. 57

Prodierunt Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, & de numeris multangulis liber unus cum Commentariis Domini Claudij Gasparis Bacheti de Mezeriac & Observationibus Domini de Fermat Senatoris Tholosani, quæ observationes paucæ sunt; indicant tamen in prædicto Fermatio peritiam quæ omnes Analistas superavit. 58

Accessit ejusdem Domini Fermatij Inventum novum

novum collectum ex variis ejusdem litteris. In primâ parte agit de solutionibus infinitis duplicatarum æqualitatum. In secunda de triplicata æqualitate & solutionibus ejus infinitis. In tertiâ complectitur artem eliciendi radices infinitas ex numeris plures species habentibus quàm tres.

Pater Jacobus de Billy è Societate Jesu, hoc Domini Fermatij Inventum summè laudat, & authorem Diaphanto, Vietæ, Bacheto, & quotquot hactenus vixerunt Analistæ, præferre non dubitat.

CAPUT IV.

Progressus Mechanices.

MEchanices Apellationem μῆχος quod artificium significat, & à μήδομαι quod meditari, seu artificiosè cogitare deduci voluerunt. Hujus videtur officium satis appositè Aristoteles descripsisse, dum Mechanicem dicit esse rerum præter naturam quæ arte fiunt ad utilitatem hominum. Ubi enim naturâ vincimur, arte superamus. Hanc paulò aliter definivit Vitruvius, vel potius ejus effectum, dum machinam dixit esse continentem ex materia conjunctionem quæ maximas ad onerum motus vires habet. Melius & ad institutum magis appositè Pappus qui libro octavo ejus definitionem, & divisionem hic verbis complexus est. *Mechanica contemplatio est illa quæ statum, & corporum lationem motumque secundùm locum inquirit, horumque quidem quæ naturâ sunt causas reddit: Illa autem à natura sua decedere cogens, extra propria loca, in contrarios motus transfert quod per ea Theoremata, quæ ex ipsa materia decidunt, excogitat. Mechanicarum vero alteram partem rationalem esse, alteram operâ manuum indigere, sentit Hero Mechanicus; & rationalem quidem partem ex Geometria, & Arithmetica, & Astronomia, & ex physicis rationibus constat; ea vero quæ operâ manuum indiget ex æraria, & ædificatoria, & pictura & artibus sedentariis exercetur.*

Ejus dignitas ex mirandis ejus effectibus colligitur: neque enim quævis artificia ad eam pertinent: sed ea sola in quibus ingenij solertiâ præter naturam succurritur utilitati humanæ. Idem enim accidit mechanicæ, quod magiæ, quod homines rapiat in admirationem, ut ait Aristoteles initio Mecanicorum, nempe dum ea præstat quorum causa à plerisque ignoratur.

Hanc communiter mixtam esse ex Physica, & Mathesi asserunt benè multi, cujus nempe primum principium physicum sit, hocque semel admisso & stabilito, ulterius progrediatur Mechanices, illudque variis machinis, & inventis ad usum revocet.

Utilitatem si quæras hæc melius innotescere non potest quàm si eam in suas partes dividamus, & quid ex singulis utilitatis in genus humanum, & vitam civilem proveniat, explicemus. Neque enim facile Platoni subscriberē, qui acerbè in Eudoxum Gnidium, & Architam Tarentinum invehitur, quasi philosophiam prostituissent, quod mathematicas disciplinas ad usum mechanicum traduxissent. Immo verò eo præcipuè nomine Matheses commendandas quod nulla sit, quæ hominum commoda magis promoveat, & ad utilitatem publica plura de suo conferat.

Quamvis Antiqui præcipuè Heron duas ejus partes agnoscat rationalem, & manualem, puto tamen rationalem tantum ad Mathesin spectare, quæ opera facienda imperet, dirigat, eorumque ideam, & prototypum proponat, manualem vero & practicam artificibus relinquat. Rationalis plurimas species agnoscere possumus cum antiquis authoribus, primo loco recensere possemus manganariam quæ ingentia pondera adhibitis machinis in altum attollit. Hanc propriè sub nomine Mechanices intelligimus, hæc nempe universalissimum motus principium constituit, quò scilicet in immensum hominis machinam adhibentis vires augentur, solemnemque illam jactabundi Archimedis propositionem examinat; exinde singulis machinis idem principiis applicat, illudque in triplici vecte, trocleis, axe in peritrochio, in rotis dentatis, in spira, & cuneo cæterisque contemplatur. Alteram partem μηχανοποιητικὴν Antiqui agnoscebant in anthliis, hanc in machinas hydraulicas rejicimus. Tertiam ὀργανοποιητικὴν faciebant, quæ instrumenta bello accommoda excogitat, cui successit ævo nostro pyrotechnia: ex quo enim pulvis pyrius, & tormenta bellica inventa sunt, cessavere omnino, inutilesque sunt redditæ Antiquorum machinæ bellicæ, & jam pro ludicris habentur. Quarta fuit antiquis αὐτοματοποιητικὴ, quæ varia excogitat automata, sive quæ adductis elatoriis seipsis moveantur, sive ponderibus animentur, inter quæ celebris est Archimedis sphæra, quæ seipsâ movebatur. Multa hujusmodi jactantur cum majori fama, quàm par sit; quorum pleraque, ita malè executioni erant mandata, ut risum potius quàm admirationem moverent. Nulla tamen automata celebriora, & utiliora excogitata quàm machinæ horisonæ, præcipuè vero pendulis instructæ, quæ ipso sole, & cœlo exactiores sunt. Sed ut magis appositè totam hanc materiam in suas classes, & species dividamus, secundam hujus Mechanicæ universaliter sumptæ partem, seu speciem staticam nominamus.

Statica igitur constituto omnium gravium centro concessaque corporibus gravitate, Primò agit de elementorum gravitate, omnesque effectus qui vulgò metu; vacui conceduntur, ut ascensûs aquæ in anthliis, mercurij in arundine suspensio, variæque attractiones, gravitati tribuimus. Secundò gravium descendentium acceleratum casum considerat. Tertiò eorumdem gravium in planis inclinatis descensum, momentorumque decrementum contemplatur, pendulorumque doctrinam, vibrationum æqualitatem, durationes cum longitudinibus comparat, eamque horologiis nostris fructu non pœnitendo adaptat. Quartò æquiponderantium doctrinam tradit. Quintò de linearum centro gravitatis agit. Sexto de superficierum. Septimò de solidorum. Octavo denique centrum gravitatis usum novumque, præcipuè Guldini, tam latè in rotundis metiendis aperit.

Ad Mechanicam nonnulli magnetem revocant, quia tamen navigationum est anima, quæ ad Geographiam spectat, cum Geographia componetur.

Hydrostatica à statica universali separari non debet. In qua parte primò quantum corpora leviora in humido descendant definimus, quantum de graviorum gravitate decedat, dum aqua merguntur, quàm bene constent æquilibrii leges, an figura corporum, an aquæ profunditas, ut corpora minus, aut magis mergantur expendimus;

celebre illud Archimedis problema de corona explicamus. Metallorum probationem in aqua perficimus.

Alia Mechanices nostræ universalis species circa fontes, & rivos occupatur. Agitque de aquarum æquilibrio, methodosque tradit fontes, & rivos derivandi. Fluentem item aquam metitur, quâ proportione vasa vacuentur aperit. De salientibus item fluminibusque metiendis, quantum ex immissione torrentis fluvius augeatur, aliaque, tam utilia, quam jucunda explicat.

Quinta Mechanices pars machinas omnes hydraulicas complectitur. Primò fontes omnes artificiales, sive attractione perficiantur, sive compressione, aut expulsione, rarefactione, condensatione. Spiritalia Heronis ludicra, machinas omnes ad attollendam aquam idoneas, ut sunt anthliæ, rotæ, catenæ situlis instructæ, rosaria, variæ helices, Archimedis cochlea. Amœna item nonnulla ut sunt organa hydraulica, aviculæ canentes. Ad quam revocantur machinæ omnes utiles, ut molæ ad terendum triticum, rotæ ad conterendos carbones, pistilla automata ad pulverem pyrium, mallei lignei ad Papyrum, ferrei ad omnis generis ferramenta.

Sexta Mechanices pars erit Pyrotechnia, quæ primò agit de ignibus artificialibus tam festivis, quam bellicis. Secundò de machinis, seu tormentis bellicis aget, nempe certas methodos ea examinandi, & ad scopum dirigendi, sive directo jactu, seu circulari, & parabolico, multas item quæstiones balisticas solvit. Ad Mechanicam item spectant multa quæ in bello instruendo, tam in equestri ordine quàm pedestri.

Ut melius Mechanicæ progressus innotescat, authores qui de ea scripserunt per singulas ætates recenseamus.

Quarto Urbis sæculo ante Christum 350 annis Democritus Milesius uno anno major quàm Socrates inter alia multa, scripsit certamē Clepsidræ.

Eudoxus Gnidius Mathesin ad usus Mechanicos traduxit, sicut & Architas Tarentinus, qui columbam ligneam volantem exhibuit. Hos Plato reprehendit quasi læsæ Philosophicæ majestatis, quasi nempe illam prostituissent.

Quinto Urbis sæculo Aristoteles scripsit de Mechanicis librum unum. In quo omnes machinas ad libram revocare videtur. Cardanus librum hunc Aristotelis non esse existimat, propter mancam, & paulò negligentiorem motuum rotundorum in eo positam divisionem. Franciscus Patritius in eadem est opinione, quamvis rationem non afferat. Cui facile subscribo, & rationem addo, quod primum machinarum principium non attulerit, quod enim affert, apertæ falsitatis arguitur. Hunc tamen librum commentariis auxit Henricus Monantolius Medicus, & Mathematum Professor Regius. Videntur commentaria meliora, quam liber ipse. Impressa Lugduni 1600 in quarto.

Circa hæc tempora Æneas tacticus scripsit librum tacticum, & obsidionalem in quo potius obsessis, quàm obsidentibus dat præcepta. Hunc Suidas malè vocat de Stratagematis.

Tacticorum Æneæ epitomen fecit Cineas Consiliarius Pyrrhi Epirotarum Regis. Ælianus item scripsit de tacticis, cujus scripta sunt manuscripta in Bibliotheca Vaticana, ex quo videtur exscriptus Regis Christianissimi codex à Caussobono vulgatus ex parte.

Sexto Urbis sæculo Archimedes multa edidit machinamenta, quæ non extant. Inter ea recensentur sphæra vitrea automa celebre motum cœlorum exhibens, Coclea aquatica, quâ etiam nunc utimur, machinæ ad extrahendam navim. Variis machinis Romanam classem fatigavit, furtum in corona aurea admissum detexit, quæ de speculo ustorio referuntur fabulosa sunt.

Scripsit de æquiponderantibus, in quo tractatu materiam æquiponderantiæ leviter admodum attingit, statimque excurrit ad determinandum centrum gravitatis aliquorum corporum, quæ vix unquam occurrunt. Ex quo fit ut ejus tractatus de æquiponderantibus sit exigui momenti. Fecit & alium parvum tractatum de natantibus in humido, sed paucas habet Propositiones.

Circa eadem tempora Ctesibius machinator subtilissimus Pneumatica invenit, id est quæ spiritu, & vento motus efficerent, hydraulicas item machinas construxit, quarum una superest quæ ab ipso inventa dicitur; Ita Vitruvius.

Sexto Urbis sæculo Philo Bisantius ante Heronem scripsit mechanica.

Hero Alexandrinus Ctesibij discipulus scripsit automata, spiritalia, de Balistis mechanica de rotulis, de horologiis aquaticis & alia ejusmodi. Extat ejus spiritalium liber, in quo continentur 75 Theoremata, ad spiritalia & machinas hydraulicas spectantia; nonnulla item mechanica, ex quibus similia multa deduci possunt. Hoc Opus latinum fecit Commandinus & figuris eleganti-bus ornavit. Parisiis in quarto 1583.

Idem Hero Ctesibius Opusculum edidit cum titulo βελοποιικα, seu Telifactiva, nempe de aliquibus machinis ad vibranda tela; quem librum Bernardinus Baldus Urbinas Guastallæ Abbas, ex Græco in Latinum vertit, & illustravit. Augustæ Vindelicorum 1616 edidit.

Scripsere item de Arte mechanica Diades, Nimphodorus, Phylo Bysantius, Dyphilus, Carydas, Polyidas, Pyrrhus, Agesistratus, à quibus multa sumpsit Vitruvius.

Octavo Urbis sæculo, aliquibus tantum annis ante Christum Athenæus scripsit de machinis, extantque duo ejus fragmenta apud Vitruvium. Scripsit item mechanica.

Andronicus Cyrestes in turri octogona anemoscopium primus collocavit, nempe singulis faciebus inscripsit nomen unius venti, erat autem Index seu pinna à vento mobilis quæ ventum indicabat.

Vitruvius in sua Architectura multa habet mechanica.

Primo Christi sæculo sextus Julius Frontinus 4 libros edidit de stratagematibus, item de tactica quæ erat in usu tempore Homeri. Hoc opus Gallicum factum est anno 1636.

Secundo Christi sæculo Ptolemæus scripsit libros mechanicos tres.

Julius Africanus sub Eliogabalo scripsit de fabricis militaribus.

Tertio Christi sæculo Claudius Ælianus Græcè scripsit tactica, seu de acie ordinanda, quem explicuere Theodorus Gaza, Franciscus Robortellus, Sixtus Arcerius. Latinum fecit Theodorus Thessalonicensis, dedicavitque Panormitano præceptori regis Alphonsi, Gallicum fecit Polygraphus anno 1536.

Eodem tempore Arrianus Nicomediensis scripsit tactica.

Hero

Hero Junior scripsit etiam multa mechanica præcipuè bellica.

Inveniuntur in Bibliothecis Daimachi Poliorcetica.

Asclepiodotus de tacticis in Bibliotheca Regia, & Florentina.

Possidonius Rhodius de re militari.

Basilij Patricij Naumachia.

Diodori cujusdam liber de ponderibus.

Flavius Vegecius de arte militari libros 4 edidit.

Primus liber agit de instituendis Tyronibus.

Secundus de Legionibus, de ducibus, tribunis, vexilliferis, & de acie instruenda.

Tertius de exercitu, & castrametatione.

Quartus de munitionibus urbium, de vallo, fossis, cataractis, de machinis oppugnatoriis, de ariete, falce, testudine, balistis, onagris, cuniculis, classibus item, pugnisque navalibus.

Hoc opus continet multa scitu digna, quamvis enim de antiquo tantum modo pugnandi loquatur, innumera tamen hodiernæ militiæ possunt accommodari.

Sexto Christi sæculo Jordanus Nemorarius scripsit de Ponderibus 13 Propositionibus. Videtur esse fragmentum ex quo ferè nihil possit elici.

Anno 886 Leo Imperator Orientis scripsit Græcè librum de re militari, seu documenta bellica, quibus traditur ars militaris. Tres habet partes hoc Opus: Proœmium in quo Imperator rationes affert propter quas hoc opus composuerit.

In secunda de omnibus ad bellum pertinentibus loquitur, nempe leges aliquas sancit à Ducibus observandas.

Tertia pars est conclusio, seu Anacephaleosis totius operis.

Hunc librum in linguam Italicam vertit, & annotationibus illustravit Philippus Pigafetta. In quarto 1602 Venetiis.

1472 Primò typis mandatum est Opus Valturij, de re militari in duodecim libros divisum.

Hoc opus eruditum est non mathematicum. In folio.

1500 Achilles Marozzo Bononiensis gladiator eximius, Opus edidit de arte gladiatoria libris quinque distinctum, in quo agit de gladio, de sarissis, aliisque armis offensivis. Videtur hoc Opus suo tempore fuisse alicujus momenti; illustratur figuris. Videtur esse typis mandatum Bononiæ circa annum 1500 quamvis id non notetur.

1524 Nicolaus Leonicus Thomæus Aristotelis quæstiones mechanicas notis & figuris illustravit.

1 Anno 1531 Leonardus Fortius Romanus scripsit de re militari.

2 1533 Georgius Agricola quinque de mensuris, ac ponderibus libros emisit, hic liber historicus est.

3 Tartaglia vixit hoc tempore; Ejus opera sunt posita anno 1606.

4 1544 Alexander Picolomineus Commentarium edidit in quæstiones mechanicas Aristotelis.

5 1555 Guillelmus Du Choul Consiliarius Regius & judex in montibus Delphinatus librum Gallicum edidit de arte militari, Romanorum præcipue, de castrametatione, & disciplina militari, de balneis item, de religione.

Hoc Opus Mathesin non sapit sed eruditionem.

1565 Federicus Commandinus Urbinas Archimedis libros duos de natantibus in humido in pristinum nitorem restituit, & commentariis illustravit. Opus optimum ut sunt omnia Commandini opera. Bononiæ in quarto 1565. 6

1565 Petrus Forcardel Professor Mathematum regius in Universitate Parisiensi librum Archimedis de ponderibus seu de in aquam immersis, Gallicum fecit. 7

Item nonnulla Euclidis fragmenta de corpore gravi, & levi, gallicè vertit & commentario auxit.

Hoc fragmentum est valdè mutilum quatuorque Propositionum titulos tantum comprehendit: videtur autem in eo Euclides idem ponere mechanices primum principium, quod nos posuimus, nempe quod plus movetur majores habet vires.

1567 Josephus Ceredi Parmensis tres discursus Italicos edidit ad elevandam aquam, nempe ad irrigandos agros, aut ad exhaurienda loca palustria, quarum aqua sufficientem cursum habere non potest; item ad immittendam aquam in urbem. Materia quidem utilis, modus autem hanc tractandi oratorius potius est, quam demonstrativus, machinas enim tantum indicat & non describit. Parmæ in quarto 1567. 8

1569 Franciscus Barocius Patricius Venetus Latinè vertit Heronis mechanica. 9

1569 Jacobus Besson Delphinas tractatum edidit Gallicum, de methodo detegendorum fontium latentium sub terra, in quo multa sunt utilia ad praxim spectantia. Aureliani in quarto 1569. 10

1570 Federicus Commandinus centrobaricam edidit, seu de centro gravitatis solidorum optimam. Hæc pars ignota fuit Aristoteli. 11

Guillelmus de Cavendy nobilis Anglus Dux Marchio & Comes de Xeucathle Præfectus militum in provinciis Septentrionalibus, librum edidit Anglicè de equitatione, in linguam Gallicam conversum sub hoc titulo, (*Methode nouvelle, & invention extraordinaire de dresser les Chevaux & les travailler selon la nature*) Videtur author aliquid novi promittere & nullibi usurpatum, an vero id exequatur cum professionis meæ non sit, aliis judicandum relinquo. 12

In folio 1572 Vanocius Biringuccius Pyrotechniam edidit; agit autem potius de fusione metallorum, aliisque ad hanc materiam spectantibus: In fine tamen habet nonnulla ad ignes militares pertinentia. Liber Italicè scriptus, in linguam latinam versus est Parisiis in quarto 1572. 13

1572 Nobilis Aurelius Cicuta disciplinam militarem Italicè edidit in tres libros divisam. 14

In primo agit de origine belli, & electione & Officio Imperatoris.

In secundo docet quomodo informandi sint Tyrones; dat item ordinem aciei.

In tertio tradit documenta ad regendum exercitum, nempe castrametationem, transmissionem fluminum &c. Venetiis in quarto 1572.

1572 Hyeronimus Ruscelli tractatum Italicum edidit, *Precetti della militia moderna tanto per mare, quanto per terra*, in quo artem dirigendi tormenta bellica tradit, in hoc tractatu multa continentur scitu digna ad praxin spectantia. Venetiis in quarto 1572 ibidem 1568. 15

1576 Franciscus Ferreti Anconensis Eques Ordinis sancti Stephani libros duos Italicos edidit. 16

In

In primo disserit de regulis à milite observandis.

In secundo profert suam sententiam circa varia ab eodem milite observanda. Venetiis in quarto 1576.

17 1577 Guidus Ubaldus Marchio de monte pereruditum scripsit mechanicorum librum, nempe de libra, vecte, trochlea, axe in peritrochio, cuneo, & cochlea, nimius est in reducendis aliis potentiis ad vectem, aut libram. Idem fecit paraphrasin & scholia in Archimedis libros.

18 1578 Jacobus Besson Delphinas edidit librum machinarum, in quo scilicet varias profert machinas ad artes aut perficiendas aut juvandas, quarum pleraque expensas exigerent immensas, & non succederent in praxi. Afferuntur autem sine ulla demonstratione, aut ratione sed cum simplici partium explicatione.

19 1582 Bernardinus Rocca Placentinus Italicum tractatum edidit de re militari libris quatuor, *Discorsi di guerra*, in quo docet modum regendi exercitus, pugnandi & propugnandi civitates, quæ omnia antiquorum exemplis illustrat.
20 Venetiis in quarto 1582. 1583.

21 1582 Antonius Lupicini Florentinus Architecturam militarem edidit, in qua peculiare hoc habet quod in collo propugnaculi excitet molem ab ipso propugnaculo fossâ separatam, quod methodo Domini de Pagan affine est.

Totum ferè Opus discursus aliquos continet circa varios situs, in quibus docet modum quo expugnentur munitiones.

Habet in fine Opusculum de virgarum geometricarum usu, quæ profert ut plurimum communia sunt. Florentiæ in quarto 1582.

22 1586 Ludovicus Collado Hispanus Beticus Nebricensis Architectus militaris in exercitu Regis Hispaniæ in Longobardia tractatum edidit Italicum de tormentis bellicis cum hoc titulo (*Prattica manuale di Artigleria*) in quo tractatu differitur de ejus inventore, fabrica proportionibus, de transvectione suggesti usibus, cuniculis, item de ignibus artificialibus. Opus utile in quo tamen multa desunt.

23 1588 Bernardinus de Escalante Commissarius Sancti Officij in Inquisitione dialogum composuit Hispanicum de arte militari libris quatuor. Bruxellis in quarto 1588.

24 1590 Prodiit tractatus Hispanicus de re militari per modum dialogi inter Dom Gonçalo Fernandez de Cordoua, & Don Pedro Manriquez de Lara, in quo continentur multa ad bellum spectantia, præcipuè ad acies instruendas. Bruxellis in quarto 1590.

25 1592 Martinus de Eguiluz Discursum Hispanicum edidit de disciplina militari. Madriti in quarto 1592.

26 1592 Eugenius Gentilini Estensis Instructionem pro explodendis tormentis bellicis italicè composuit, in qua continetur examen Zachariæ Schiavina cum tractatu de munimentis composito tam ab ipso, quam à fratre suo Capitana Marino Architecto bellico Reip. Venetæ.

In hoc tractatu docentur omnia quæ ad directionem tormentorum bellicorum pertinent. Omnia ferè ad praxin spectant. Venetiis in quarto 1592.

27 1594 Franciscus Patrizi parallelum militiæ antiquæ, & hodiernæ italicè scripsit.

Hic tractatus potius est politicus & philologus quam mathematicus.

1600 Bartholomæus Pelliciari Mutinensis tra- 28
ctatum Italicum edidit de re militari, *Avertimenti militari*, in quo loquitur de singulis muniis militaribus à gregario milite ad Imperatorem, item de omnibus actionibus militaribus. Mutinæ in quarto 1600.

1603 Christoüal Lechuga tractatum edidit 29
Hispanicè in quo agit de munere summi exercitus Imperatoris & de omnibus quæ ad ipsum spectant. Mediolani in quarto 1603.

1606 Georgius Basta Comes d'Hust generalis 30
pro Imperatore in Transilvania, & locum tenens pro sua Majestate tractatum edidit Italicum, in quo summum exercitus Imperatorem informat. *Il mastro di Campo generale.* In quo Opere continentur optima documenta ad Duces spectantia. Venetiis in quarto 1606.

1606 Nicolaus Tartaglia aliqua edidit Ope- 31
ra de rebus ad bellum pertinentibus nempe, *quesiti* seu varias quæstiones. *Travagliata inventione nova scientia & ragionamenti sopra Archimede.* In quibus operibus traditur methodus pugnandi tam in pugna navali, quàm terrestri. Traditur item ars dirigendorum tormentorum bellicorum, item methodus nova componendi squadras & pixides, modus extrahendi navigia Insuper methodus descendendi in aquas.

Habet item multa de natantibus in humido.

In hoc opere sunt multa optima, nonnulla item quæ praxes habent inutiles aut impossibiles. Totum Opus Italicum est. Venetiis in quarto 1606.

1608 Simon Stevinus Principis Auriaci ma- 32
thematicus in quarto tomo Hypomnematum staticam tradidit in sex libros divisam. Primus statices elementa complectitur nempe post definitiones tradit 28 Propositiones primò de æquiponderantibus, de situ recto & obliquo, de planis inclinatis, de ponderibus pendentibus è duplici fune.

Secundus est de gravitatis centro, planorum & solidorum.

Tertius statices praxin continet libræ & stateræ praxes perfectissimas, vectium genera, ponderum gestatorum aut attractorum affectiones, troclearum formas.

Quartus agit de hydrostatices elementis: post definitiones & axiomata novem primis Propositionibus corpora in aquis considerat, sex aliis aquæ contra subjectum fundum pressionem, & alia similia, item proportiones gravitatum.

Quintus habet aliquas praxes hydrostaticas.

Sextus est additamentum ad staticam continens spartostaticam seu de pondere ex pluribus funibus pendente trochleostaticam, de trochleis, de fluitantibus aerobaricis, seu de situ centri gravitatis in fluitantibus, quarto de chalinothlipsi seu de frænorum actione in equos. Hic tractatus optimus multáque de suo habet.

1610 Lelius Brancacio Eques Melitensis, 33
Opus Italicum edidit *Icarichi militari* seu munia militaria, in quo singula percurrit munia à gregario milite ad Imperatorem, modumque docet instruendæ aciei, cujus figuram habet. Venetiis in quarto 1610.

1611 Frater Ludovicus Melzo Eques Meliten- 34
sis & Præfectus Equitum librum Italicum edidit de equestri militia sub hoc titulo (*Regole militari sopra il governo, e servitio particolare della Cavaleria.*)

Hoc Opus in quinque libros dividitur.

In

In primo agit de officio cujusque dignitatis in Equestri ordine.

In secundo, de centuriis lanceatorum, & loricatorum, quo ordine sit procedendum in itinere noctu, & interdiu, de castrametatione.

In tertio, de ordine vigiliarum & excubiarum; præcipuè dum hostis adest.

In quarto, de pugnis, insidiis, quomodo instruenda acies.

Quinto denique de ordine observando in stativis.

Hoc opere nihil potuit melius si praxin spectes cum ad particularia descendat, omniáque sigillatim explicet prout de facto geri solent. In folio.

35 1613 Vincentius Digrazia italicè considerationes conscripsit, in Galilei tractatum de natantibus in humido. In hoc opere diffuso more Italico sunt multa parerga, cum tota hæc materia brevius & melius concludi potuisset.

36 Joannes de Billon dominus de la Prugne tractatum Gallicum edidit: principia nempe artis militaris, loquitur de singulis muniis militaribus eorumque præeminentiis, item de motionibus militaribus quæ in Hollandia observantur à Principe Mauritio, item de legionis unius tum pedestris cum equestris administratione, quod Opus in tres Libros dividitur.

In primo libro agit de muniis inferioribus, & quomodo se gerere debeant qui ea exercent, præcipuè dum suspiciendum quid agant hostes.

In secundo aciem instruit, omnesque militares motiones docet.

In tertio de regimine legionis equestris & pedestris. Quæ in hoc opere continentur ducibus pariter ac militibus sunt utilissima, cum ad particularia descendat. Lugduni in quarto 1612. 1614 Florentiæ in quarto.

37 Joannes Bardius Florentinus eorum quæ in aquis vehuntur experimenta. Ad Archimedis trutinam examinat oratione unica publicè habita. Præcipua quæstio est cur ea quæ ex naturâ sua aquis immergi deberent ut bracteolæ, innatent tamen; circa quàm materiam gravis fuit disputatio Florentiæ. Romæ in quarto 1644.

38 1615 Romæ Lucas Valesius scripsit acutè de centro gravitatis. Ejus liber postea est typis mandatus 1661.

Marius Savorgnano Comes Belgradensis artem militarem terrestrem & maritimam secundum modum Imperatorum & Ducum antiquorum & recentiorum Italicè conscripsit. Videntur ejus præcepta nimis universalia, quamvis in recensendis aliquibus factis ad particularia descendat. Venetiis in folio 1614.

39 1615 Æneas Piccolomini Florentinus edidit responsionem objectionibus Ludovici delle Colombe & Vincentij Digrazia contra tractatum Galilæi de natantibus in humido; in quibus omnibus multiplicantur difficultates quæ duobus verbis solvi poterant. Florentiæ in quarto 1615.

40 1615 Salomon de Caux Architectus militaris Electoris Palatini tractatum edidit Gallicum de machinis, præcipuè verò de hydraulicis; in primo libro post nonnulla statices principia & Mechanices multas machinas hydraulicas proponit, quæ moveantur impulsu aquæ; in secundo multorum fontium descriptionem habet, demonstrationes non profert. Opus facile nec reconditioris theoriæ, utile tamen.

41 Galilæus Galilæi Nobilis Florentinus tractatum edidit de natantibus in humido Italicè, *delle cose che stanno su lacqua, o che in quella si muovono.* Contra hunc tractatum Ludovicus delle Colombe & Vincentius Digrazia scripserunt; quare alium tractatum edidit, *Risposta alle oppositioni del signor Ludovico delle Colombe è del signore Vincenzo.* Tota difficultas hujus disputationis in eo vertebatur; an figura aliquid faceret ad hoc ut corpus aquæ innataret, aut mergeretur, poteratque solvi duobus verbis; per accidens figuram aliquid efficere; per se nihil. Referuntur, in eodem libro adversariorum objectiones & tractatus. In quarto. Impressum est denuò Bononiæ 1655.

Idem Galilæus tractatum edidit de mechanica valdè brevem, in quo singulas machinas prosequitur. In quarto denuo typis impressum Bononiæ 1655.

1615 David Rivultus à Florentia Cenomanus è Regia turma sacri cubiculi Regis Christianissimi, totum Archimedem Gallicum fecit, & inter alia tractatum de æquiponderantibus & insidentibus humido, addidit fragmenta authorum referentium Archimedis inventa, quæ Rivultus explicat adjectis figuris; sunt autem de corona adulterata, de Cochlio, de Elice, de trispasto, de inventis adversus Marcelli & Appii machinas in obsidione Syracusana, de speculis ustoriis, de machinis aëre & aqua moventibus de sphæra materiali. 42

Anno 1616 Jacobus de Malhausen, Primus in urbe Danzic Centurio librum edidit Gallicum cui titulus, *Art Militaire à Cheval*, nempe instructio militiæ equestris. Opus utile equitibus, cum pauci admodum hâc de re sint locuti; videtur ad particularia utiliter descendere. An verò omnia procedant secundum modum pugnandi hodiernum, sit aliorum judicium. 43

1616 Prodiit in lucem tractatus Gallicus de militia equestri levis armaturæ authore Georgio Basta Comite sancti Imperij & Gubernatore generali in Hungaria & Transilvania sub titulo, *Le gouvernement de la Cavalerie legere.* Multa tamen habet ad equitatum gravis armaturæ spectantia. In quatuor libros Opus suum digessit. 44

Primus agit de dignitatibus & magistratibus totius equitatus.

Secundus de castrametatione.

Tertius de itinere faciendo.

Quartus de acie instruenda praxin habet; & eruditione & exemplis confirmatam. In folio.

1621 Petrus Sardi tractatum edidit Italicum de tormentis bellicis in tres libros divisum sub titulo (*l'Artiglieria di Pietro Sardi Romano.* 45

Primus liber agit de machinis antiquis; secundus explicat quid sit *Artiglieria*, cur ita appellata, de inventore, progressu, speciebus, proportionibus, mensuris, de materia item cæterisque circunstantiis.; habet usus talium machinarum, multa tamen in eo desunt præcipuè ad attingendum scopum circa jactus elevatos. Opus tamen utile est.

1621 Bernardinus Baldus Urbinas Guastallæ Albas in mechanica Aristotelis problemata exercitationes edidit, sequitur singula Aristotelis capita quæ benè exponit adjectis optimis figuris ubi Opus est. Moguntiæ 1621.

Bernardinus Baldus Urbinas Guastallæ Abbas exercitationes edidit in mechanica Aristotelis 46

Problemata. Sequitur singulas Aristotelis quæstiones, quibus satisfacit, non tantum responsione Aristotelis, sed etiam de suo multa addit, Opus optimum in suo genere.

47 Anno 1623 Faustus Verantius edidit librum de machinis cum declaratione Latinâ, Italicâ, Hispanicâ, Gallicâ, Germanicâ. Opus istud maximarum impensarum fuit, habétque machinas multas communes, nonnullas inutiles, aliquas etiam novas, & numquam ad praxim revocatas, & multas non revocabiles. Sunt autem istæ machinæ non bellicæ, sed civiles, nempe ad usus communes pistrinorum, pontium, authliarum. Additus est tractatus de mensuratione, qui nihil habet nisi vulgare.

48 1628 Joannes de Guevara Cler. Reg. Min. in Aristotelis mechanica egregium commentarium edidit, unà cum additionibus quibusdam ad eamdem materiam pertinentibus.

In prima parte præcipuas proprietates circuli, in qua plura dicit quàm Aristoteles.

In secunda parte plures quæstiones mechanicas solvit, juxta principia in priori posita præcipuè, nonnulla habet de resistentia corporum ad fractionem.

Opus hoc multa habet optima & scitu digna. Romæ in quarto 1628.

49 1628 Prodiit in lucem Opus Gallicum compositum à Diego Ufano præfecto tormentorum bellicorum in arce Antuerpiensi, in quo agit de officio summi præfecti rei tormentariæ sive in expugnandis sive in propugnandis arcibus, item de suggestis tormentorum, pontibus, cuniculis, vineis. Titulus est *Artillerie, ou vraye instruction de l'Artillerie.* In tres partes dividitur.

In primo de proportionibus tormentorum bellicorum.

In secundo de apparatu ad transvehenda tormenta, de usu item.

In tertio de ignibus bellicis.

Opus utile non tamen perfectum.

50 1630 Joannes Jacobus de Vellausen Præfectus Custodiæ Principis Aurangiæ artem militarem edidit quæ Gallicè prodiit sub hoc titulo, *l'Art militaire pour l'Infanterie.*

In primo libro docet usum majoris sclopeti & sarissæ.

Secundo exercitationem unius centuriæ.

Tertio exercitationem unius legionis.

Quarto de disciplina militari usitata.

Opus practicum & utile.

51 1630 Hugo Hermannus Societatis Jesu, scripsit Latinè de militia equestri antiqua & nova quinque libris.

Primus de equitandi ratione & quomodo perfecta fuerit, & de illis qui in equis militarunt disserit.

Secundus equorum equitumque arma & phaleras describit, recentioremque transvectionem & probationem.

Tertius equitis institutionem, vexillationes, alas, centurias, decurias, multiplicemque in acie usum.

Quartus munia equitis in castris itineribus & acie complectitur.

Quintus de prærogativis & dignitate equitum Hoc Opus potius eruditionem quam praxin spectat.

52 1632 Joannes de la Faille Antuerpiensis è Societate Jesu, in Academia Matritensi Societatis Jesu, Matheseon Professor edidit 40 theoremata de centro gravitatis, partium circuli & ellipsis; nempe sectorum omnium tam circuli, quàm Ellipsis centrum gravitatis assignat.

Totum hoc Opus geometricum est, & optimum. Antuerpiæ in quarto 1632.

Joannes à Porta pneumaticorum libros tres 53 edidit.

Anno 1635 P. Paulus Guldinus Sanctogallensis è Societate Jesu, tractatum edidit de centro 54 gravitatis. In primo libro agit de centro gravitatis linearum quarumcumque, tum de centro gravitatis planorum, tum de centro gravitatis solidorum. Huic primo libro addidit appendicem numerorum quadratorum & cubicorum, eorumque variis usibus. Secundo libro novum centri gravitatis usum aperit, tum in metiendis lineis quibuscumque circularibus conicis, & etiam spiralibus, tum in generatione omnium rotundorum. In tertio libro hunc centri gravitatis usum superficiebus & solidis rotundis applicat. In quarto novum hujus doctrinæ specimen edit in plurimis Propositionibus de sphæra & cylindro facilius demonstrandis, quam ab Archimede probatæ. Idem præstat in aliquibus libri decimi Euclidis. Denique perpendit novam Cavalerij indivisibilium methodum.

Novus hic centri gravitatis usus in dimensione omnium rotundorum positus inter præcipua hujus sæculi inventa annumerari potest, cum viam aptam & facilem ad geometriam amplificanam aperiat.

Anno 1636 Prodiit Opusculum machinæ 55 Joannis de Beaugrand cui titulus Geostartice in quo demonstrare nititur idem pondus in minori à terræ centro distantiâ minus ponderare. Vacillat tamen vis demonstrationis, & infringitur; fit enim transitus à gravitate ponderis absolutè sumpti, ad gravitationem respectivam, nempe quam habet in ordine ad aliud corpus cum quo connectitur.

1644 Pater Marinus Mersennus ordinis Mini- 56 morum multa habet de mechanicis, & balisticis, non tamen exactè demonstrata.

1645 Pater Petrus Casræus Societatis Jesu, 57 edidit Physicam demonstrationem, qua ratio, mensura, modus, atque potentia accelerationis, motus in naturali descensu gravium determinantur, adversus nuper excogitatam à Galilæo Galilæi Florentino de eodem motu pseudoscientiam, ad clarissimum virum Petrum Gassendum Ecclesiæ Diniensis Præpositum.

Intendit autem probare velocitates esse in ratione spatiorum, cum Galilæus velit velocitates esse in ratione subduplicata spatiorum. Parisiis in quarto 1646.

Joannes Baptista Balianus Patritius Genuen- 58 sis & Gubernator arcis Savonensis tractatum edidit de motu naturali gravium, solidorum, & liquidorum. In primo agit de pendulorum oscillationibus, & de descensu gravium tam in perpendiculariter quam in planis inclinatis. In secundo libro de impetu. In tertio de motu gravium super pluribus planis inclinatis. In quarto de motu liquidorum. In quinto de canalium sectionibus. In sexto de foraminibus vasis. In hoc opere brevissimo licet, multa de suo scitu digna & utilia posuit. Genuæ in quarto 1646.

1646 Petrus Gassendus Ecclesiæ Diniensis 59 Præpositus Epistolas tres edidit de proportione

qua

qua gravia decidentia accelerantur, quibus ad totidem epistolas P. Casræi Societatis Jesu respondetur. Meo judicio videtur Gassendus objectionibus Patris Casræi satisfecisse, doctrinamque Galilæi bene defendisse. Parisiis in quarto 1646.

60 1646 Pater Nicolaus Zuchius Parmensis Societatis Jesu, Opusculum edidit, nempe novam methodum revocandi machinarum omnium vires ad unum atque primum in singulis principium.

Opus hoc si clarius foret, esset optimum. Parisiis in quarto 1646.

61 1647 Alexander Piccolomineus in mechanicas quæstiones Aristotelis paraphrasin paulò pleniorem edidit, in qua & genuinum Aristotelis sensum inquirit, & multa ad eamdem rem addit.

Opus solidum si mentem Aristotelis quæras. Romæ in quarto 1647.

62 Idem 1649 edidit alium tractatum, novam de machinis Philosophiam, in qua paralogismis antiquæ detectis, explicantur machinarum vires unico principio singulis immediato.

Accessit exclusio vacui contra nova experimenta contra vires machinarum, eodem vitio obscuritatis laborat. Romæ in quarto.

63 1647 Pater Mersennus Ordinis Minimorum edidit reflexiones mathematicas, titulum autem apposuit volumini continenti nonnullas experientias, Aristarchum Samium & reflexiones. Novarum observationum Physicomathematicarum F. Marini Mersenni Minimi.

In suis autem reflectionibus agit de multis Physico Mathematicis, ut de mensuris, ponderibus, de aqua per tubos saliente, de vacuo, de urinatoriis, de aëre ponderando, de percussionibus, centro percussionis, de acceleratione gravium, de gravium casu cum antisacomate &c. In quo multa sunt scitu digna & facilia: nō procedit geometricè.

Eughenius scripsit de pendulis.

64 1650 Prodiit Lovanij dissertatio Physicomathematica de motu circuli & spheræ per modum Thesium propugnatarum à Domino Philippo Eugenio Comite de Hernes præside P. Andrea Tacquet. Opus ingeniosum in quo præcipuè agitur de motu volutationis horum corporū in Plano.

65 1653 P. Joannes François scientiam aquarum Gallicè composuit quatuor partibus comprehensam, nempe aquarum formatione communicatione, motu, & mixtione. In hoc tractatu docet methodum derivandi aquas, libellandi, attollendi, item quamcumque Ichnographiam delineandi, metiendi altitudines aut areas, item Arithmeticam quæ ultima sunt parerga & ad hanc materiam non pertinent. Rhedonis in quarto 1653.

66 1657 Pater Gaspar Scottus Regiscurianus magiæ naturalis partem tertiam mechanicam effecit libris novem comprehensam.

Liber primus de centro gravitatis agit, multasque quæstiones scitu jucundas de gravitate & tendentia in centrum continet.

Liber secundus potentias motrices considerat.

Liber tertius agit de machinis quæ constant rotis dentatis, in quo referuntur innumeræ machinæ, ut memnonia, aliæque tam jucundæ, quam utiles.

Liber quartus staticam continet.

Liber quintus hydrostaticam.

Liber sextus de libellatione, & machinis hydragogicis & elevationibus aquæ.

Liber septimus de aëre, an gravitet, de vacuo, in quo multa sunt spiritalia.

Liber octavus de progressionibus geometricis.

Liber nonus de geometria, & proprietatibus circuli.

In hoc Opere more suo potius curiosa, & jucunda, quam demonstrationes sectatur. Herbipoli in quarto 1657.

1657 P. Gaspar Schotus Regiscurianus Societatis Jesu, Magiæ naturalis partem quartam Thaumatur Physicum nominavit, in libros octo divisum. 67

Primus liber est Cryptologicus in quo docet modos occultos scribendi.

Liber secundus est Pyrothechnicus primo varias naturales illuminationes docet tum de pulvere Pyrio variis que ignibus.

Liber tertius magneticus est variaque horologia magnete perficit.

Liber quartus sympathicus, & anthipaticus est.

Liber quintus medicus est.

Liber sextus divinatorius est.

Liber septimus physiognomicus.

Liber octavus Chyromanticus.

Hæc pars ad Matheses vix benè revocatur. Herbipoli in quarto 1657.

1658 P. Gaspar Scottus Regiscurianus Societatis Jesu, mechanicam hydraulicopneumathicam edidit in duas partes divisam. 68

Prima pars Theorica est agitque de vi attractiva, expulsiva, rarefactiva, fluxu naturali aquæ. Item de proprietatibus aquæ salientis, de fluxu aquæ per diversa lumina.

In secunda parte variarum machinarum secundum prædicta principia descriptionem perficit. Ut plurimum demonstrationes non affert. Herbipoli in quarto 1658.

1661 Lucas Valerius mathematicæ & civilis Philosophiæ in Gymnasio Romano Professor tractatum edidit de centro gravitatis solidorum libris tribus comprehensum. Occasio scribendi fuit Commandinus qui de eâdem materia scripsit, & aliquorum temporum centra invenire non potuit. In primo libro pyramidum, prismatum, cylindrorum, conorum, sphæræ, & sphæroideon. In secundo portionum sphæræ cylindrorum, conorum, conoideon, hyperbolicorum centra determinat. In tertio eamdem materiam prosequitur. 69

Tractatus hic geometricè procedit, & optimus est multas continens propositiones proprias. In quarto Bononiæ 1661.

1664 P. Gaspar Scotus Regiscurianus è Societate Jesu, in Panormitano olim tum in Herbipolitano Collegio matheseon Professor technica curiosa sive mirabilia artis libris duodecim comprehendit. 70

Libro primo varia profert experimenta pneumatica in recipiente è quo eductus est aër. Vocat Magdeburgica mirabilia.

Secundo experimenta Anglicana Domini Boyle circa eamdem materiam profert.

Tertio experimenta præcipuè circa hydrargirum explicat.

Quarto aliqua deducit corollaria ex præcedentibus.

Quinto machinas hydraulicas circa fontes explicat.

Sexto alias machinas hydraulicas præcipuè circa naves: Habet item mobile perpetuum per aquas in quo loquitur de specula melitensi seu turri chartacea quæ variis rotulis habet totam doctrinam primi mobilis & astrologiæ.

Septimo mirabilia graphica habet.

Octavo profert varia conamina circa tetragonismum.

Nono mirabilia chronometrica, præcipuè verò agit de pendulis, habet item descriptionem aliorum horometrorum.

Decimo motus perpetuos varios profert omnes profert fallaces.

Undecimo mirabilia varia & catoptria, geodetica thermometra.

Duodecimo cabalistica mirabilia.

Methodus geometrica non est, nec demonstrativa. Herbipoli quarto 1664.

71 1664 Famianus Michelini mathematicus Ducis Etruriæ & Professor Mathematum in studio Pisano, tractatum edidit Italicum in quo docet methodos quibus sine magnis impensis occurrendum sit damnis quæ à fluminum cursu importantur. Opus magni momenti & utilitatis. Florentiæ in quarto 1664.

1666 Joannes Alphonsus Borelli Messanensis
72 Pisæ Matheseos Professor, tractatum edidit de vi percussionis physicomathematicum. In quo primo agit de virtute projectis impressa ejusque proprietatibus, ubi rejicit medium fluidum, exinde agit de percussione corporum, tam stabilium quam amovibilium, de reflexione item, tum de debilitatione impressionis; item de acceleratione motus, comparat item vim compressivam gravitatis, cum impetu acquisito, denique de tremore.

Opus bonum quamvis non demonstret omnia, habet tamen multa scitu digna quæ ad plura detegenda viam aperiunt. Bononiæ in quarto 1666.

73 Pater Gaspar Schottus Regiscurianus in suo cursu mathematico, staticam & mechanicam
74 compendiosè tradit.

Dominus Descartes tractatum de mechanica edidit, in quo breviter explicat omnes potentias motrices. In hoc opere nihil continetur quod sit peculiare, doctrinam tamen bonam & communem habet. Prodiit gallicè 1668. Parisiis.

75 1669 Alexander Marchettus in Pisana Academia Professor Philosophiæ, de resistentia solidorum libros duos edidit, in quibus Galilæi vestigiis insistens primo ostendit in aliquibus Galilæum deceptum esse circa resistentiam corporum; multas item addit Propositiones quibus hanc doctrinam provehit. Opus maximè utile, ex quo multa deduci possunt ad praxim spectantia; habet autem circiter 150 Propositiones, benè explicatas. In quarto Florentiæ 1669.

76 1670 Joannis Uvallis Geometriæ Professor Savillianus Oxonij mechanicam seu tractatum geometricum de motu, divisum in tres partes.

Prima pars habet de motu generalia, de gravium descensu, & motuum declivitate, de libra.

Secunda pars de centro gravitatis, ejusque calculo agit.

Tertia de vecte, axe in peritrochio, trochlea, motibus compositis, acceleratis, retardatis, & projectorum, de percussione, cuneo, de clatere, resilitione, seu reflexione, de Hydrostaticis, & aëris æquipondio, variisque quæstionibus mechanicis.

Doctrina quidem hujus authoris bona est, modus autem scribendi per notas Algebricas nimis brevis, & imaginationi non satis serviens. Accedit quod figuras suo loco repositas non habet, quæ duo Opus difficile, & obscurum reddunt, multumque de illius bonitate detrahunt. In materia quidem difficili claritas & perspicuitas est affectanda. Londini in quarto 1670.

1673 Dominus Mariette ex Academia Regia tra- 77
ctatum edidit de percussione corporum, in quo nempe regulas statuit omnino contrarias, iis quas Carthesius & alii recentiores protulerunt.

Videntur nonnullæ demonstrationes non omnino convincere. Ut dum considerat corpus quod omnem motum directum amisit in percussione, quasi in amovibile, quæ duo valdè differunt. Est tamen fundamentalis propositio, Opus tamen bonum est. Parisiis in octavo 1673.

CAPUT V.

Progressus geographiæ, nauticæ, & magneticæ.

INter Matheseos mixtæ seu peculiari materiæ affixæ, partes (si dignitatem spectes) non ultimum locum obtinet Geographia, quæ telluris descriptionem non nudam, & absolutam, sed respectivam, & ad diversa cœli puncta relatam suscipit. Quamvis enim accurata omnium regionum descriptio, diligensque telluris in regna, & provincias partitio, ad Mathesin minimè pertineat, universalia tamen geographiæ placita, quibus in scientiarum numerum adscribitur, ita cum Astronomicis præsertim principiis connexa sunt, ut ab iis divelli, & separari non possint. Inchoatam motuum cœlestium ideam supponit Geographia, ex quo fit ut à nonnullis cum Astronomia sub nomine Cosmographiæ conjungatur, nos quidem eam separamus, solis tamen saltem motum annuum in Eclyptica, ab occasu in ortum, & diurnas ejus circumvolutiones ab ortu in occasum supponimus. Ex quibus motibus primò telluris figuram; locum, & situm constituimus; locum infimum, seu communem omnium gravitationum terminum in ejus centro collocamus, variasque communes licet, scitu tamen dignas conclusiones elicimus. Exinde ejus magnitudinem absolutam seu circuitum geometricè metimur, & alias ejus dimensiones assignamus, respectivam item terræ comparativè ad cœlum magnitudinem determinamus, Astronomica nonnulla delibamus, supposito enim duplici solari motu, de singulis circulis verba facimus, eorumque usum explicamus. Ab æquatore incipimus, tum illi parallelos, tropicos præsertim & polares intuemur. Horizontem duplicem distinguimus, circulum meridianum, ejusque proprietates explicamus, latitudinem, & elevationem poli distinguimus. Zonas quinque definimus proprietatesque locorum sub æquatore positorum consideramus, tum reliquas Zonæ torridæ regiones, aut sub tropico positas, annique tempestatum in iis vicissitudinem, totamque luminis, & caloris distributionem exhibemus. Exinde ad Zonas temperatas accedimus, tum ad subjectas circulo polari regiones, quibus aliquando sol non occidit aut non oritur. Denique Zonam frigidam subjectamque polo regionem cui nempe *annus dies est* consideramus. Quam doctrinam, tam in sphæra armillari, quam in mappis universalibus, & globis exhibemus. Ascios, Amphiscios, Antæcos, Antœcos, Antipodas cum omnibus Geographis distinguimus. Diemque longissimam in singulis partibus determinantes totam terræ latitudinem in varia climata distribuimus.

Hactenus tellurem à Septentrione ad Austrum, vel è contra percurrimus, regionumque proprietates ex varia latitudine provenientes consideravimus, nunc alteram ejus dimensionem ab occasu in ortum; explicamus; positóque primo aliquo meridiano, solemne illud longitudinis inveniendæ ex syderum observatione problema proponimus: tum horarum differentias in omnibus meridianis explicamus, ostendimusque quolibet tempore esse omnem horam; & datâ horâ pro qualibet orbis parte, horam pro omni alia regione assignamus: ex telluris circumnavigatione diei unius accessionem fieri, aut diem unum decedere ostendimus; quolibet tempore locum cui sol sit perpendicularis exhibemns, quibus locis, aut oriatur, aut occidat, quibus quocumque die non oriatur, aut non occidat, totam item telluris illuminationem consideramus. Præcipuas item telluris notas, & quasi regionum stabiles characteres consideramus, nempe telluris per maria distributionem, insulasque, freta, isthmos recensemus. De montibus item disserimus eorumque altitudines determinamus, exinde montes separatos, ignivomos & juga describimus; Denique oceanum, fluviosque omnes, & lacus exhibemus; divisio verò in regna, & provincias, cum arbitraria sit, & ab hominum voluntate pendeat, considerationi scientificæ non subjacet, quare vulgaribus Geographis relinquendam censemus, utpote à Mathesi alienam.

Geographiæ Artem nauticam conjungimus ut iisdem prorsus nixam principiis, quam hujus ævi scientiam nominamus, cujus antiqui in omni licet disciplinarum genere versati, ne prima quidem elementa tenuerunt: littora tantum legere didicerant, & in altum longiùs provecti cæcutiebant penitus, & quænam esset ineunda via penitus ignorabant. Nos verò faciliùs, & securiùs à terra avehimur, tamque certò cursum navigii dirigimus, ac si nota nobis littora videremus. Quod magneti acceptum referimus, aut potiùs providentiæ divinæ, quæ cum dissitas nationes Evangelicâ luce his temporibus perfundere decreverit, certum in magnete navigationum ducem, terrestrémque præbuit Cynosuram. Hujus scientiæ necessitas, & utilitas, vel ex eò patet, quod non tantum nautas, & naucleros spectet, sed summos etiam duces quorum vita, & honor, unius hominis imperitiæ alioquin permittitur. Totam hanc navigationis doctrinam in sex partes divido.

Prima sub nomine definitionum varias hujus materiæ voces, & terminos explicat, non quidem omnes, quod impossibile foret, cum in diversis regionibus, variæ sint, & eædem diversimodè usurpentur, referre supervacaneum, cum ex unius diei navigatione plures, quam ex quocumque libro addiscantur. Distinguit item varias navigiorum species, & partes, agit de navium mensura, velificatione, remigatione, anchora, gubernaculo, & navigatione fluviatili.

Secunda pixidem nauticam considerat rumbosque, seu ut vocant ventos in ea notatos appellat, ejus usum in dirigenda navi, correctiones item, seu observationes declinationis ex syderibus docet.

Tertia loxodromiarum naturam intuetur, illarum scilicet linearum quas ductu ejusdem Rumbi, pixidis magneticæ, in superficiei telluris decurrit navis: earum item linearum in tabulas redactarum usum aperit tam ad dirigendam navim, quam ad determinandum quolibet tempore ejus locum.

Quarta mappas hydrographicas examinat, reductásque per augmentum graduum meridiani circuli seligit, varias item praxes tradit ad directionem itineris servientes.

Quinta æstimationem itineris docet, ejusque correctiones varias; præcipuè vero in latitudinis observatione fundatas, solemne item longitudinis inveniendæ problema proponit.

Sexta denique varias praxes nautis perutiles habet, ut diarii conficiendi ichnographicum portûs, aut littoris typum, determinandæ horæ fluxus, aut reflexus, conjecturas item imminentis procellæ. Authores qui de navigatione scripserunt sunt hi.

Rodericus Zamoranus.
Petrus Medina.
Petrus Apianus.
Petrus Nonius.
Andreas Gaspar Cespedius.
Villebrordus Snellius in suo. Typhi Batavo.
Simon Stevin l.4 & 5 Geographiæ suæ.
Adrianus Metius l.5 doctrinæ sphæricæ.
Bartolomæus Crescentius in Nautica mediterranea.
Augustinus Cæsareus in tractatu de navigatione.
Robertus Dudlæus de arcanis maris.
Jacobus Colom in Face navigationis.
Author Columnæ flammantis.
Petrus Herigonius tomo 4 Cursus mathematici.
Joannes Jansonius in Introductione ad orbem maritimum.
Morizotus in Orbe maritimo.
Mersennus Histiodromia.
P. Georgius Fournier Societatis Jesu, in suâ hydrographia.
Bernardus Varenius lib.3. Geographiæ universalis.
Lazarus Baytius de re navali.
P. Ricciolius in sua Geographia reformata.

Qui omnes sunt recentiores, scripseruntque hoc aut precedenti sæculo; nullus enim veterum hanc materiam attigit.

A Geographia, & arte nautica magnetem non sejungemus; cum & virtus magnetica terrestris sit, & magnes tot nominibus rei nauticæ addicatur. Virtus magnetica prorsus mirabilis est, cum nempe uniones, margaritas, adamantes longo superet intervallò hic lapis: ita mentis aciem perstringit vis illa occulta, qua ferrum ad se allicit, & stringit, ea tamen quâ continuò ad septentrionem, & austrum dirigitur, & quæ antiquis fuit incognita, admirabilitati utilitatem adjungit, cum navigationes omnes dirigat. Ejus proprietates omnem ferò legem detrectant, in hoc enim lapide, & contrario in eodem sinu, etiam in summo subjectantur. Centrum est in circumferentia, amicæ partes se invicem fugiunt, inimicæ conjunguntur, quæ uni tertio uniuntur; inter se non cohærent, causa dat quod non habet, & id quod produxit destruit.

Magnes igitur aut à Magnesia regione, in quâ luculentus, & eximiæ virtutis effunditur, aut à magnete pastore, qui primus in Ida monte, ex baculi ferreâ cuspide ei adhærescente hujus lapidis virtutem attractivam detexit: nomen trahere volunt. Varia tamen sortitus est nomina, dictus est Heracleus, seu Herculeus quod sicut Hercules monstra, ita magnum ferrum domaret. A nonnullis sideritis seu ferreus nuncupatur, à Gallis dicitur *Aymant* quòd ferrum amet, ab Italis *Calamita*.

.Magnetis natura lapidea videtur, est tamen potius metallica, seu ditior ferri vena, ex qua Chalybs eximiæ notæ educitur. Colorem habet non unicum, sed varium; fuscum ut plurimum, qui si poliatur in ferrugineum desinet. Datur & magnes albus, cum enim ferri vena in medio marmore ut plurimum delitescat, cum dives non est, prævalet marmoris color, sed tunc magnetis virtus est exigua & debilis, abrasisque partibus nigricantibus ferè tota evanescit & deperit.

Magnetis virtutes variæ sunt, quæ ad duas facilè revocantur, ad attractivam scilicet Antiquis non incognitam, teste Platone aliisque, ita ex eleganti Claudiani Poœmate; & directivam qua dum liberè suspenditur, plano meridiano se accommodat, de qua ne verbum quidem Antiqui. Cum enim Deus optimusmaximus pro sua in homines providentiâ, dissitas, totoque oceano remotas Nationes Christianis ritibus imbuere voluit à trecentis circiter annis hanc directionem detexit. Melphitani in regno Neapolitano primi pixidem nauticam invenerunt circa annum 1300. Nonnulli Paulum Venetum è regno Sinensi eam in Europam advexisse circa annum 1260.

Invenimus item Poœtam Gallum ita lusisse circa hæc tempora.

Icelle estoile ne se muet.
Un art font qui mentir non puet.
Par vertu de la marinette,
Qui est une pierre noirette,
A la quelle le fer volontiers se joingt.

Quidquid sit de inventore, hôc inventô nihil potuit ad humanos usus accommodatius excogitari.

Authores qui de magnete scripserunt sunt hi.

Chabotus Primus magneticorum variationem detexit.

Fracastorius magneticorum directionem montibus hyperboreis tribuit.

Cardanus stellæ cynosuræ.

Conimbricenses alicui parti cœli.

Martinus Cortesius, Bessardus, Jacobus Severinus, Robertus Nortmannus, Franciscus Maurolycus, Joannes Baptista Porta, de magnete scripsere. Novissimè verò Guillelmus Gilbertus Medicus Londinensis, Patres Cabæus, Kirkerius, Grandamicus, Leoutaudus è nostra Societate, magnetis naturam scrutati sunt. Scripsere & nonnulla Gassendus, & Cartesius, sed non ex professo, quippe qui eam materiam tantum delibarunt.

Communiter in magnete multæ spectantur proprietates quæ variis experimentis stabiliuntur. Prima est virtus attractiva, qua ferrum aut allicit aut expellit. Secunda virtus directiva ad polos magnetis, quâ nempe magnetica, certa ejus puncta quasi polos spectant, & ad ea inclinantur. Tertia virtus directiva ad polos terræ & ad planum ejus meridianum. Quarta variatio magnetis quâ in plurimis locis à tali plano exorbitat. Quinta inclinatio. Sexta denique communicatio virtutis ex quibus proprietatibus variæ circa ejus naturam conclusiones deducuntur, variæque praxes tam ad navigationem, quàm ad Geometriam, & Gnomicam deducuntur.

Authores qui de Geographia scripserunt digesti secundum ordinem temporum sunt sequentes.

Secundo Urbis conditæ sæculo sexcentis circiter ante Christum annis Anaximander Milesius Thaletis successor sphæram composuit. Terræ circuitum dimensus est, & primus tabulam Geographicam exposuit teste Plinio & Laertio.

Eodem tempore Hecateus Milesius Primus codicem de situ orbis reliquit. Proclus Polemon auditor Panetij Rhodij tempore Aristophanis Grammatici orbis descriptionem fecit. Ita Suidas.

Tertio Urbis conditæ sæculo Timæus Locrus Pythagoricus cui Plato suum Timæum exscripsit, scripsit de natura Mundi.

Quarto Urbis conditæ sæculo ineunte 450 annis ante Christum.

Democritus Milesius inter alia multa cœli terræque descriptionem fecit.

Eleates Parmenides Primus dixit terram esse rotundam, & in medio mundi sitam, ita Laertius, ex quo concludo præcedentes descriptiones fuisse valdè imperfectas.

Philosophus Platonis auditor scripsit de magnitudine solis, lunæ, & terræ.

Quinto Urbis sæculo ante Christum 300 annis.

Euclides Geometra inter alia multa scripsit phænomena in quibus sunt nonnulla principia ad Geographiam spectantia.

Autolycus præceptor Arcesilai floruit circa Olympiadem 120. scripsit de sphæra quæ movetur, nempe habet principia communia Astronomiæ, & Geographiæ.

Dicearcus Siculus primus perpendicularem dimensus est, invenitque Pelion esse 1250 passuum.

Sexto Urbis conditæ sæculo 250 ante Christum terræ ambitum dimensus est per solis umbram solstitialem. Extat apud Ptolemæum ejus methodus.

Archimedes item sphæram construxit.

Septimo Urbis sæculo 100 ante Christum annis, Possidonius Philosophus Panetij discipulus Rhodi temporibus Ciceronis docebat; Scripsit Geographica, quæ citantur à Strabone. Dicitur Pomponius magnus, eum audivisse & imperii fasces ad ejus januam submisisse.

Cleomedes Græcè scripsit meteora quibus tractat ea quæ in sphæra docentur, suntque principia Geographiæ.

Octavo Urbis conditæ sæculo, 50 annis ante Christum.

Teodosius Tripolita, præter tres libros sphæricorum, scripsit de habitationibus nempe sunt præcipuæ proprietates cœlestes variarum regionum. Scripsit de diebus, & noctibus quæ eò etiam pertinent.

M. Agrippa Augusti Gener, & Consul, terrarum Orbem propriis commentariis descriptum, postea in porticu depictum populo Romano spectandum proposuit. Plin. l. 3. cap. 2.

Christi primo sæculo ineunte.

Dionysius Afer, vel ut vult Suidas, Corinthius, vel ex Bysante civitate tempore Augusti Geographiam, versibus Græcis exametris scripsit quam Priscianus Latinam fecit. Basileæ Græcè & Latinè. In octavo 1585. Idem fecit Poœma de situ orbis, quod

quod idem Priscianus est interpretatus versibus Latinis. Plutarchus fecit libellum de appellatione fluviorum, & montium, in quo Antiquorum fabulas refert.

Marianus Heracleota, Scylax Caryandensis, Artemidorus Ephesius, Dicearchus Messenius, Isidorus Characenus Geographica scripsere Græcè; quæ à Davide Hoeschelio edita sunt: habent autem simplicem regionum descriptionem. Aug. Vindelicorum in octavo 1600.

Strabo eruditè, & fusè orbis situm cujus magnam partem peragrarat descripsit. Mela pariter de Geographia scripsit.

Marinus Tyrius scripsit Geographica. Hunc in multis Ptolemæus reprehendit.

Solinus scripsit Polyhistora. In quo opere multa habet Geographica.

Pomponius Mela Epitomen Geographiæ Veteris & novæ edidit, in qua placita generalia Geographiæ satis benè explicat, desunt tamen figuræ ad formandum imaginationem; pauca habet de singulis regnis. Aug. Vindelicorum in octavo 1557. in folio. Basileæ.

Idem tres libros edidit de situ orbis, in quo nomina Veteris, & Novæ Geographiæ comparat. Parisiis in 8. 1538 & 1557 cum commentariis Olivarii.

Scylax Caryendensis periplum edidit in quo descripsit varias Regiones.

Hoc Opus Isaac Vossius vertit, & commentario auxit. Amsterodami in quarto 1639.

Straton Amasenus Philosophus lib. 7. Geographicos edidit.

Artemidorus iisdem temporibus Strabonis scripsit Geographica.

Ju. Hyginus de Mundo & sphæra scripsit.

Dionysius Alexandrinus scripsit de situ Orbis librum, quem Eustathius Thessalonicensis Archiepiscopus Commentariis item Græcis illustravit. Omnia in Latinum vertit Bernardus Betrandus Rhegino, Galloprovincialis. Basileæ in octavo 1556. Opus ferè historicum.

Plinius à secundo libro ad sextum habet Geographica.

Secundo Christi sæculo.

Ptolemæus Alexandrinus scripsit Geographiam nempe Geographicæ enarrationis libros octo, totum opus potius historicum est quam mathematicum. Habet tamen initio nonnulla circa descriptionem meridianorum, & parallelorum ad Mathesin spectantia. Bilibaldus Pickeimberus ea vertit in folio 1541. Gerard. Mercator Græcè & Latinè ea edidit 1584. item Basileæ 1542. Jodocus Hondius 1605.

Arrianus author Græcus Xenophon minor dictus scripsit Græcè periplum.

Tertio Christi sæculo Porphyrius scripsit Isagogen Astronomicarum rerum quæ etiam potest esse isagogica ad Geographiam.

Quarto Christi sæculo.

Sextus Auienus Rufus Arati phænomena & Dyonisii Afri Poema de situ Orbis latinè interpretatus est.

Abifeldea Princeps Syriæ, Assyriæ, & Persidis Geographus insignis, ejus Geographia Arabica asservatur in Bibliotheca Palatina.

Geminus Rhodius scripsit phænomena, quæ in Bibliotheca Ambrosiana Græco-Latina asservantur.

Sub Constantio & Constante author Græcus anonymus Veterem descriptionem Veteris Orbis Græci elucubravit. Habet autem nomina aliquarum regionum incognitarum de quibus videtur fabulosa multa dicere. Jacobus Gotofridus hoc Opus interpretatus est & notis illustravit Genevæ in quarto 1628.

Quinto Christi sæculo.

Proclus Diadochus librum de sphæra edidit, nempe, de axe, polis, circulis sphæræ, de quatuor parallelis, de occultatione, & emersione parallelorum, de magnitudine, ordine, potestate, intervallo eorumdem, de coluris, signifero, horizonte, tabula climatum, de meridianis circulis, de quinque zonis, & signis cælestibus.

Hic liber Latinè, & Græcè est editus in octavo Basileæ 1585, interprete Thoma Linacro-Britanno, Erasmus Osvaldus addidit annotationes. Vixit Traiani temporibus, Scripsit alia multa.

Pappus Alexandrinus inter alia multa, scipsit universalem Orbis descriptionem, item de fluviis Lybiæ.

Constantinus Porphyrogeneta Imperator, scripsit de Thematibus seu præfecturis occiduæ partis Orientalis Imperij. Habetur tantum liber secundus, Interprete & Commentatore Frederico Morello. Latinè typis mandatus est Parisiis 1619 in octavo.

Septimo Christi sæculo.

Isidorus Hispalensis Episcopus in libro de Mundo breviter nonnulla de sphæra perstringit.

Nono Christi sæculo.

Almeon sive Almamon Rex Arabum dimensus est ambitum terræ in planitie Singar prope Babyloniam, invenitque uni gradui terræ deberi milliaria 56.

Achilles Statius, seu Tatius Alexandrinus Episcopus scripsit de sphæra.

Undecimo Christi sæculo.

Campanus Italus ac Novariensis scripsit in sphæram.

Duodecimo sæculo Rabbi Abraham scripsit de sphæra.

Decimo tertio Christi sæculo.

Joannes de Sacro Bosco Anglus scripsit de sphæra tractatum optimum, & clarum quem multi sunt commentati. Non tamen omnia demonstrat, sed simpliciter propositiones affert, quasi essent claræ ex inspectione spheræ, quod etiam usurparunt plerique.

Joannes Gira Amalphensis primus pixidem nauticam composuit. Creditur tamen paulò ante detecta magnetis proprietas, ad meridianum planum se conformandi quâ nonnulli utebantur imposito magnete in cimba suberea. Unde magnes dictus fuit à Gallis *Marinette*, quæ est species ranarum, eo quod tanquam rana nataret. Ipse tamen Joannes Gira meliorem usum excogitavit. Multi tamen credunt quod ipse hanc magnetis proprietatem primus detexit.

Decimo quarto sæculo.

Marcus Paulus Venetus per totum Orientem pervagatus multa scitu digna de regnis Asiæ Orientalibus Italicè scripsit.

Decimo quinto sæculo.

Petrus De Aliaco scripsit de parallelis.

Christophorus Columbus Ligur detexit Americam.

Anno 1519 Ferdinandus Magellanes rei nauticæ peritissimus Fretum Magellanicum invenit, & totum Orbem circumnavigavit.

Eodem

7 Eodem anno Joannes Stobniza Polonus introductionem elaboravit in Ptolemæi Geographiam.

8 Anno 1520 Joannes Bellendenus, natus in Orientali Scotia, Scoticè Geographiam edidit.

9 1522 Joannes Venerus edidit Ptolemæi Geographiam à se Latinè redditam cum annotationibus, & libello de 4 planis terrarum descriptionibus, cum Opusculo de Geographia.

1525 Bilibaldus librum Ptolomæi de Geographia Latinum fecit.

1530 Barlouus Anglus Cosmographiam vertit.

1 1480 Jacobus Faber Stapulensis Commentarium edidit in sphæram Joannis de Sacro Bosco.

Hoc Opus in quatuor libros dividitur; In primo de sphæra, centro, axe, sphæræ divisio in rectam, obliquam, parallelum cœlestem, elementarem, quot cœlestes sphæræ & motus, de cœli figura, de terræ figura, de immobilitate terræ, de dimensione terræ, de distantia terræ à cœlis.

In secundo de circulis, constellationibus, de Zodiaco, Eclyptica, signis, Zenit Nadir, declinatione, de meridiano, de longitudine de horizonte, de æquatore, tropicis, polaribus, quinque zonis.

In tertio de ortu & occasu syderum, Cosmico Chronico, Heliaco. De ascensionibus rectis, & obliquis, de die naturali, artificiali, de die longissima, quomodo habeatur arcus semidurnus, aut seminocturnus, de diversitate horarum, de climatibus, tabula Climatum.

In quarto libro de circulis excentricis Solis, & Lunæ, de Epicyclo Lunæ, de cauda & capite draconis, de directionibus & stationibus planetarum, de Eclypsibus Solis & Lunæ. Totum Opus optimum est, videturque omnia comprehendere quæ ad universalem geographiam pertinent.

Circa hæc tempora Bonetus de Latis Hebræus Medicus Provincialis, Opusculum edidit de annuli astronomici usibus non benè explicatum.

2 1498 Impressus est Parisiis tractatus de sphæra mundi Joannis de Sacro Bosco Angli & Doctoris Parisiensis unà cum textualibus optimisque additionibus, & commentario Petri Cirvelli Darocensis atque insertis quæstionibus Cardinalis de Aliaco.

Hoc Opus habet principia geographiæ communia satis benè explicata. Item principia Astronomicæ non tamen demonstrata. In quarto Parisiis 1498.

3 1507 Prodiit Opusculum Introductio ad geographiam Ludovici Boulengerij, cum Americi, Respuccii navigationibus.

4 1515 Zacharias Lilius Vincentinus Breviarium Orbis edidit ordine alphabetico. In quarto 1515.

5 1518 Joannes Schonerus Carolostadius Opusculum geographicum ex pluribus mappis collegit, accommodavitque globo terrestri à se elaborato. Præmisit aliquos usus globi materialis, tum de singularibus regnis locutus nimis tamen breviter, ita ut vix quidquam bene doceat: habet tamen multa bona de principiis geographiæ. Nuremburgæ in quarto.

6 1532 Sebastianus Munster Novum Orbem edidit Basileæ in folio, Opus historicum, continens navigationes.

7 Circa annum 1530 Petrus Nonius Lusitanus Salaciensis insignis Mathematicus occasione aliquorum quæsitorum sibi ab insigni Navarcho Martino Alphonso à Sosa propositorum tractatum edidit de arte navigandi in duos libros divisum, quorum primo respondet duobus quæsitis, nempè quòd ubique die æquinoctii sol oriri videatur in linea æstatis, quam si sequamur describimus parallelum. Video autem jam illum agnovisse loxodromicas, nempe quod cursus navigii eumdem rombum ad meridiem inclinatum decurrentis sit spiralis.

In secundo libro loquitur de regulis & instrumentis ad nauticam spectantibus, ut de charta marina, de tabula nautica præcipuè utili ad inveniendam longitudinis differentiam, de instrumentis ad elevationem syderum indagandam, tum de latitudine regionis multis modis invenienda, tum solvit nonnulla problemata nautica explicatque naturam loxodromiarum.

Habet item annotationes in theoricas Purbachii, quæ faciunt ad intelligentiam pleniorem. Ultimò tractatum edidit de Orontii Finæi erroribus.

Character hujus authoris est obscuritas, unde impossibile judico ut nauclerus aliquis possit ex eo Opere aliquid utilitatis percipere; quamvis enim clarè appareat ipsum scivisse loxodromiarum naturam, non tamen illius doctrinæ usum satis accommodavit captui nautarum, quibus praxes faciles sunt proponendæ, melius postea Spellius de iisdem lineis loxodromicis locutus est.

1533 Prodiere Cosmographiæ aliquot descri- 8
ptiones Joannis Stofleri Justingensis Mathematici de sphæra cosmographica, hoc est de globi terrestris artificiosa structura, nempe de duplici projectione terræ in planum, & quâ ratione commodiùs chartæ cosmographicæ designari queant.

Hoc opusculum parvum est, utile tamen, continet aliquot tantum folia. Marpurgi in quarto 1537.

1534 Hyeronimus Gemuscius Strabonis epi- 14
tomen Latinam fecit.

Anno 1535 Orontius Finæus descriptionem 15
Orbis evulgavit ad effigiem cordis, item Galliæ tabulam & planisphærium geographicum.

Anno 1535 Joannes Dyander edidit Introdu- 16
ctionem Cosmographiæ.

1536 Franciscus Ritterus Granbergensis geo- 17
graphiam amplam versibus edidit. Nihil habet ad Mathesin pertinens. In quarto.

1538 Georgius Rithaymerus compendium de 18
situ Orbis edidit.

1540 Guillelmus Postellus Barentonius Syriæ 19
descriptionem edidit Latinè, Opus historicum.

1540 Franciscus Maurolycus tres libros Cos- 20
mographiæ edidit. In primo agit de forma, situ, numeróque tam cœlorum quam elementorum; In secundo agit de circulis primi mobilis & eorum officiis, de zodiaci divisione, de zonis, plagis ventis, longitudinibus, latitudinibus, declinationibus ascensionibus dierum & noctium magnitudinibus, decrementis crepusculis. In tertio de motuum speculatione. Est igitur introductio ad magnam constructionem optima quidem & utilis sed in multis non demonstrata.

1548 Gemmafrisius scripsit de principiis 21
Astronomiæ & Geographiæ, déque usu globi Cosmographici ab ipso editi, item de telluris divisione. Principia geographiæ non videntur satis benè explicata in hoc opere, nec demonstrata. Antuerpiæ in octavo 1548.

1550 Floruit Gerardus Mercator Geographo- 22
rum sui temporis facilè princeps restituit Ptolomæi Geographiam, item Athlantem elucubravit.

1551

23 1551 Guillelmus Postellus descripsit Etruriam, item librum de Cosmographia seu de Universitate.

24 1552 Robertus Recordus Anglus edidit Cosmographiæ isagogen & librum de usu globorum.

25 1556 Pater Ludovicus Vulcanus della Padula Ordinis Minorum sancti Francisci Descriptionem edidit Terræ Sanctæ, Opus historicum bonum. Neapoli in octavo 1556.

26 1556 Joannes Leo Africanus Africæ descriptionem edidit. In folio Lugduni.

27 1557 Joannes Leo Africanus de totius Africæ descriptione libros novem edidit, historicos potius quam mathematicos. Antuerpiæ in octavo.

28 1557 Sigismundus Librum rerum Moscovitarum Commentarium edidit, cum Russiæ brevissima descriptione, & geographia totius Imperii Moscovici, hoc Opus mathematicum non est. Antuerpiæ in octavo 1557.

29 1557 Proclus genere Lycius Syriani Alexandrini Philosophi discipulus & Plutarchi filij Nestorii Philosophi auditor, Philosophus Platonicus, Athenis Philosophiæ scholis præfuit & in Syriani locum suffectus, cui postea Marinus Neapolitanus successit, Scripsit in Homerum & in Hesiodi Georgica Commentarios, in Platonis politiam libros quatuor, de discendi commoditate libros tres, de institutione duos scripsit & in Christianos cui Joannes Philoponus respondit. Scripsit igitur de sphæra mundi Opusculum in quo circulos dumtaxat explicat.

Hic libellus Impressus est Parisiis 1557 Latinè ex interpretatione Thomæ Linacri Britanni cum annotationibus Jacobi Tusani Regii Græcarum litterarum Professoris. Additum est aliud ejusdem Opusculum Græcum hypotyposis astronomicarum hypotheseon; in quo opere explicat planetarum hypotheses.

Tertio aliud ejusdem Opus de motu; posteriores quinque de auscultatione libros mira brevitate complectens, Spiritu Martino Cuneato interprete. Parisiis in quarto 1557.

Dominicus Marius Niger geographiæ libros undecim edidit omnino historicos. In eodem volumine habetur Laurentii Corvini Novoferensis geographia in cujus procemio sunt nonnulla Mathematica. Habetur in eodem epitome Strabonis ad historiam spectans. Basilææ in folio.

30 1557 Pascasius Hamellius Regius Mathematicus Commentarium edidit in Archimedis Syracusani librum de numero Arenæ, & emendavit, qui Commentarius facilis est & bonus. Parisiis in octavo 1557.

31 1558 Guillelmus Xilander Strabonis geographica latinè reddidit & Stephanum de Urbibus seu Hermolaum Bysantium edidit emendatiorem.

32 1561 Petrus Medina Hispanus Hispanicè artem navigandi tradidit quam Gallicam fecit anno 1661 Nicolaus Nicolai Delphinas Geographus Regius.

Hoc Opus in sex libros dividitur. Primo tradit principia quædam sphæræ ad intelligentiam navigationis necessaria.

Secundo agit de mari, de cursu aquarum, de prognosticis tempestatum ex Luna & Sole.

Tertio de ventis & rumbis. Videtur autem ignorasse naturam loxodromiarum, loquitur tamen de rumbis quorum habet aliquam tabulam malè explicatam.

Quarto agit de altitudine syderum, & profert tabulam declinationis pro quatuor annis.

Quinto de altitudine polari per stellam Polarem.

Sexto de declinatione magneticorum quam tamen non benè corrigit.

Septimo de Luna & æstu maris prædicendo.

Octavo de Kalendario.

Multa habet optimè hoc Opus, & suo tempore erat magni momenti. Lugduni Gallicè in quarto 1661.

1567 Philippus Appianus Bavariæ descriptionem elucubravit, & patris sui Petri Appiani Cosmographiam, & Mercatoris sphæram est interpretatus. 33

1571 Henricus Glareanus Helvetius Poëta laureatus de geographia librum unum conscripsit, sed valdè brevem, in quo principia non sunt satis explicata, nec determinata. Coloniæ Agrippinæ in octavo 1571. 34

1576 Jacobus Cheyncius Arnage Scotus Duaci matheseon Professor duos libros de Geographia scripsit. 35

In priori principia tradit & nonnulla attingit ad nauticam spectantia; In secundo regiones describit, exigui omnia momenti. Duaci in octavo 1576.

1572 Benedictus Arias Montanus Hispalensis edidit Antiquitates Judaicas egit que de gentium primis sedibus, Orbisque terrarum situ. 36

1577 Pomponij Mela epitome geographiæ veteris & novæ. Prodiit in lucem operâ Georgij Henischij Augustæ Vindelicorum in octavo 1577. 37

Idem libros tres edidit de situ Orbis in quo veteris geographiæ nomina & novæ comparat. Parisiis in octavo 1538.

Franciscus Barocius Patricius Venetus præter alia multa Cosmographiam edidit. 38

Alexander Picolomineus scripsit Italicè sphæram, & de magnitudine terræ & aquæ. 39

1575 Munster & Belleforest ediderunt Cosmographiam Gallicam tribus tomis in folio. Initio sunt nonnulla ad Mathesin spectantia sed pauca & vulgaria. 40

1575 Andreas Theuet Cosmographus regius edidit Gallicè Cosmographiam universalem duobus tomis. Non benè tradidit principia. Parisiis in folio 1575. Non habet tabulas Liber est potius historicus. 41

1579 Antonius Berga Philosophus Taurinensis edidit Italicè discursum circa hanc quæstionem, An terra major esset quàm aqua, cui respondet Italicè Joannes Baptista Benedicti Philosophus Ducis Sabaudiæ. Altercantur autem in re facillima, & quæ duobus verbis constitui poterat. Taurini in quarto 1579. 42

1580 Lambertus Danæus geographiam poëticam seu universæ terræ descriptionem ex vetustissimis latinis poëtis collegit libris quatuor quorum primus Europam; Secundus Africam; Tertius Asiam; Quartus mare & insulas continet. 43

In singulis libris hic ordo observatur ut cujusque partis regiones, populi, populorúmque mores, urbes, flumina, & montes illustriores, ex iisdem Poëtis describantur. Opus optimum ad veterum geographiam cognoscendam. In octavo 1580.

1582 Bernardinus Baldus Urbinas anonymi Arabis Hortum geographicum Latinè reddidit & historiam contexuit ex scriptoribus plusquam trecentis. 44

1583 Lucas Joannis Aurigarius edidit speculum nauticum continens Oras maritimas Galliæ, Hispaniæ, 45

Hispaniæ, & præcipuarum partium Angliæ, unà cum usu & explicatione. In hoc sunt multa bona ad navigationem spectantia. Lugduni Batavorum magno folio 1583.

46 1584 Prodiit Petri Appiani & Gemmafrisii Cosmographia, seu totius Orbis descriptio. Continentur in hoc Opere, primò Appiani Libellus de principiis Cosmographiæ, & Astronomiæ, nempe de figura, situ terræ, circulis majoribus, & minoribus, de climatibus, longitudine, latitudine, de globo terrestri, ventis &c. Tum habet descriptiones Europæ, Asiæ, Africæ, Americæ, Peruviæ. Judiarum &c.

Opus hoc optimum est & clarum. Antuerpiæ in quarto 1584.

47 1585 Joannes Honterus Coronensis de Cosmographiæ rudimentis libros quatuor versibus composuit, unà cum tabellis geographicis præcipuis adjectis ejusdem tam Astronomiæ quam Geographiæ principiis. Basileæ in octavo.

48 1588 Livius Sanutus geographiam duodecim libris Italicè edidit. Habet initio discursum de acu magneticâ in quo non ita benè ratiocinatur. Venetiis in folio 1588.

49 1589 Prodiit Itinerarium à Burdegalâ Hierusalem, & ab Heraclea per Aulonam & Romam Mediolanum usque ante annos 1200 simplici sermone scriptum.

50 1590 Papyrius Massonius Jurisconsultus Gallus edidit Descriptionem fluminum Galliæ.

51 1592 Giraut Lingonensis tractatum edidit Gallicè sub hoc titulo, *Globe du monde contenant un bref traité du Ciel & de la Terre.* Hoc Opus per dialogismum procedit, satisque clarè res cœlestes explicat appositis figuris idoneis.

52 1592 Christianus Adricomius Delphus urbis Hierosolimæ qualis fuit tempore Christi Domini descriptionē edidit Coloniæ Agripp. in oct. 1592.

53 Anno 1593 prodiit Gerardi de Judæis speculum Orbis terrarum cum brevi introductione ad geographiam.

In hoc opere continentur mappæ præcipuorum regnorum, & Provinciarum Europæ, & aliæ nonnullæ cum prævia explicatione. Opus potius historicum quàm mathematicum. Antuerpiæ in majori folio 1593.

54 1595 Joannes Boterus universales relationes geographicas edidit tribus tomis 1595. Romæ in quarto.

55 1595 Prodiit Epitome Theatri Orteliani præcipuarum Orbis regionum delineationes minoribus tabulis expressas, Brevioribus declarationibus illustratas continens. Antuerpiæ in octavo 1595.

56 1598 Leonardus Verietus Cernoti Ptolomæi geographiam Italicè edidit cum tabulis. Venetiis in folio.

57 1598 Jacobus Sevetius scripsit de Orbe Catoptrico; in quo Opere sunt multa ad navigationem pertinentia.

58 Abrahamus Ortelius Theatrum Orbis universi edidit, in quo continentur mappæ omnium regionum cum earum explicatione. In folio 1598. Idem fecit parergon in quo profert tabulas Terræ Sanctæ.

59 1599 Bartholomæus Pitiscus edidit problemata geographica.

60 Prodiit libellus utilis naucleris de declinatione Solis pro quatuor annis, unà cum modis elevationis polaris observandæ, per elevationem poli & stellæ polaris. Habet item multa ad navigationem spectantia Gallicè. In eo habetur descriptio littorum Oceani Galliæ, Hispaniæ, Flandriæ &c. Author est Joannes Garcia dictus Ferrand. In quarto Pictavij sine anno.

1601 Joannes Herrera descripsit Americam, 61
Petrus Bertius geographiæ tabulas contractas edidit, & Ptolomæi geographiam Græcè & Latinè.

1608 Simon Stevinus Principis Auriaci Ma- 62
thematicus in suorum hypomnematum parte secunda tractatum habet geographicum in sex libros divisum. In primo aliquas definitiones habet, præcipuè agit de primo meridiano, & initio diei geographico. Excurrit exinde ad eruditum sæculum, & quomodo invenienda sit scientia, item de bonitate linguæ seu idiomatis, texitque Catalogum verborum monosyllaborum tam Belgicorum quam Latinorum.

Secundus liber est de terrestris globi hylocinesi, nempe quomodo materia ab agris sublimioribus aquis deteratur, agrosque alios efficiat; de montium origine, quomodo colles arenacei in pinguem terram mutentur, cur ripæ deterantur, cur ad ostia fluviorum pulvini jaceant.

Qui liber nihil habet notatu dignum nec debuit in hunc locum reponi.

Tertius est de terrestri athmeoria seu de athmosphæra terrestri, ea autem quæ habet desumpsit ex Alaceno Girardo Cremonensi, & Petro Nonio. Brevis est liber & pauca complectitur.

Quartus liber est de navigatione, in quo primo navigationem circularem explicat tum loxodromicam.

Quintus limeneuretica agit præcipuè de usibus pixidis magneticæ ejusque declinatione.

In sexto æstus maris considerat præcipuè ad praxim. Hic geographicus tractatus imperfectus est habetque pauca ad eas etiam quas tractat materias spectantia.

Christophorus Clavius edidit Commentarium 63
valdè bonum in sphæram de Sacro Bosco, non tamen satis ordinatum, nec in omnibus demonstratum, estque potius introductio ad Astronomiam.

1600 Gullelmus Gilbertus Medicus Londi- 64
nensis primus ex professo de magnetis proprietatibus & de tellure, magnete scripsit optimè, quamvis non approbent ejus omnem modum explicandi; est tamen laude dignus quod eam materiam primus agressus sit. Londini in quarto 1600.

1605 Paulus Merula Cosmographiæ libros tres 65
edidit, & particularis libros quatuor, principia geographiæ non benè explicat.

1608 Villette Sacerdos Parisiis Gallicè edidit 66
Descriptionem Syriæ. Parisiis in octavo.

Anno 1610 prodierunt tabulæ Arithmeticæ 67
prosthaphæreseos universales, quarum subsidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per solam additionem, & quotiens quilibet è divisione eliciendus per solam subtractionem, sine tædiosa & lubrica multiplicatione, atque divisionis operatione etiam ab eo qui Arithmetices non admodum sit gnarus nullo negotio invenitur.

E musæo Joannis Georgij Heruvart ab Hoemburg utriusque juris Doctoris, Præsidis Provinciæ Schuabæ. Monachiæ Bavariarum in magno folio 1610.

Hoc inventum videtur coincidere cum logarithmis Neperi, non dat tamen constructionem hujusmodi canonis.

68 1612 Josephus Langius Cæsaromontanus elementale geographiæ dedit, satis benè si principiis nonnullas adhibuisset figuras ad formandam imaginationem.

69 1614 Prodiit Hyerosolymitana peregrinatio Principis Radsivilii. Antuerpiæ in folio.

70 1615 Joannes Antonius Maginus edidit Commentaria in Ptolomæi Geographiam.

71 1616 Philippus Cluverius Veteris Germaniæ, Italicæ, & Siciliæ descriptiones perfecit, Epitomen etiam geographiæ. Principia habet non satis explicata.

72 1617 Prodiit Eratostheres Batavus de terræ ambitus vera quantitate à Villebrordo Snellio Batavo editus, in quo refert Eratosthenis, Possidonii, Ptolemæi, aliorúmque methodos in definiendo terræ ambitu, tum praxim suam explicat totumque terræ ambitum definit.

Dicam tamen licet doctrina hoc opere comprehensa sit optima, praxis tamen fuit tantum semel peracta, ut specimen operationis suæ tantum ederet, item multiplici triangulorum solutione adhibita, quorum anguli semicirculo valdè parvo determinati fuerunt, ideóque jure reprehendit hanc Snellii determinationem Pater Ricciolius, qui per decem annos integros observationes multas adhibuit ut terræ circuitum determinaret, asseritque circuitum terræ à Snellio nimis parvum factum esse.

73 1619 Gabriel Sionita Interpres Arabicæ linguæ tellurem per climata describit.

74 1620 Bernardinus Amicus Minorita Sacrarum ædium Terræ Sanctæ descriptiones & figuras edidit. Florentiæ in folio 1620.

75 1623 Nicolaus Doglioni Nobilis Bellunecensis Amphiteatrum Orbis Venetiis edidit. Initio habet nonnulla principia geographiæ sed malè. Opus historicum est.

76 1623 Judocus Hondius edidit magnum Athlantem Orbis, in quo continentur mappæ cum explicatione singularum. Amsterodami 1623 in folio.

77 1624 Prodiit Philippi Cluverii Italia cum tabulis. Opus elaboratum. Lugduni Batavorum in folio.

Item ejus Introductio ad geographiam quæ est nimis succincta, neque enim benè explicat principia. In quarto.

78 1625 Franciscus Schottus Senator Antuerpiensis Itinerarii Italiæ rerumque Romanorum libros tres edidit, ex antiquis novisque scriptoribus quod Pater Hyeronymus Capugnanus Ordinis Prædicatorum auxit. Opus eruditum, & curiosum non mathematicum. Antuerpiæ in octavo 1625.

79 1625 Conimbricenses scripserunt de magnete L7. Physicorum, cap.2. quæst.1. sed pauca admodum. Lugduni in quarto 1625.

80 1626 Bertius Professor & Cosmographus Regius Breviarium totius Orbis terrarum edidit. Opus ad Mathesin vix pertinens. Parisiis in octavo 1629.

81 1627 Prodiit Philippi Cluverii Veneti Opus posthumum Introductio in universam geographiam, tam veterem quàm novam sex libris. In primo tradit nonnulla principia universalia, nempe de circulis zonis, climatibus, ventis, de Oceano, & mari. In secundo 3. & 4. Europam describit; quinto Asiam; sexto Africam & Americam.

Descriptiones sunt succinctæ. Principia Geographiæ non dedit nec eo modo qui imaginationi prodesset. Lugduni Batavorum in decimo sexto 1627.

1628 Christianus Adricomius Delphus edidit Theatrum Terræ Sanctæ cum figuris. Opus ad intelligentiam sacræ scripturæ utile. Coloniæ Agrippinæ in folio. 82

Anno 1629 Joannes Lhoste Mathematicus Ducis Lotharingiæ Gallicè tractatum edidit de sphæra artificiali, ejusque usibus, in quo post communes notiones excurrit in aliqua astronomica, tum ad praxes describendorum horologiorum, tum ad astrolabia & alia hujusmodi. Nihil habet nisi vulgare. In quarto Genevæ 1629. 83

Anno 1629 Pater Nicolaus Cabæus Ferrariensis Societatis Jesu, Philosophiam magneticam edidit, in qua magnetis natura explicatur, & proprietatum magnetis causa assignatur. Novam pixidem construit, quæ poli elevationem per magnetis inclinationem indicet. Multa item habet de electricis. Tractatus in quatuor libros dividitur. In primo vim attractivam explicat, ejusque causam assignat; ostendit terræ vim magneticam inesse, & magnetica inclinari versus polum terræ, ex quo gradus latitudinis regionis cujuscumque potest innotescere. 84

In secundo libro magneticorum directionem exhibet, duplicemque eorum faciem.

Liber tertius effectus ad directionem spectantes explicat, præcipuéque ostendit ad nullum cœli punctum magnetem dirigi; assignat causas declinationis magneticæ. Item de vi communicativa loquitur.

In quarto ponuntur effectus ad attractionem spectantes, in quo multa sunt practica circa versoriorum compositionem & usum. In hoc opere multum promovit Philosophiam magneticam, multáque scitu digna detexit, meliusque de hoc lapide philosophatus est quàm qui ante illam scripserunt. Post ipsum tamen alii multa scitu digna addiderunt & meliora.

1629 Paulus Henstner Itinerarium Germaniæ Galliæ, Angliæ Italiæ, cum indice locorum, rerum atque verborum cum monitis peregrinatoriis, &c. Noribergæ 1629 in octavo. 85

1630 Jodocus Hondius edidit Atlantem Gerardi Mercatoris multo auctiorem. Opus potius historicum quam mathematicum. Item Atlantem minorem. In folio figura oblonga. Amsterodami cum tabulis optimis. 86

1633 Joannes Tassin Geographus Regius tabulas littorum Mediterranei & Oceani edidit. Parisiis in folio.

1634 Prodiere Parisiis varia scripta & responsiones circa propositam à Morino methodum inveniendarum longitudinum, ex quibus tantum hoc elici potest. In octavo Parisiis 1634. 87

1634 Pater Philibertus Monet Sabaudus Societatis Jesu, Geographiam veteris recentisque galliæ edidit. Hac Opus historicum potius est, quàm mathematicum. Lugduni in octavo 1634. 88

1639 Franciscus Quaresmius Laudensis Minorita, Elucidationem historicam Theologicam, & Moralem Terræ sanctæ edidit. Antuerpiæ in folio duobus tomis. 89

1640 Joannes & Cornelius Blaeu Novum Atlantem ediderunt. In folio Amsterodami quatuor tomis. 90

1640 Pater Georgius Fournier Societatis Jesu edidit Hydrographiam Gallicè, in qua etiam tradit 91 artem navigandi quam non ita benè explicuit, nec demonstravit omnia. Videtur habere nimis multa parerga. In folio Parisiis 1640 & 1665.

92 Pater Vincentius Berdini generalis Minoritarum Palestinam antiquam & novam edidit Italicè. Venetiis in quarto 1642.

93 1641 Pater Carolus à Sancto Paulo Abbas Fuliensis Geographiam Sacram Episcopatuum etiam antiquorum cum figuris edidit. Opus historicum. Parisiis in folio 1641.

94 1642 Guillelmus Blaeu Institutionem astronomicam Gallicè edidit de usu Globorum & Sphærarum, Cælestis & Terrestris, duabus partibus comprehensam; quarum prima habet duos libros. In primo compositionem globorum. In secundo usus tradit octoginta, plerosque ad geographiam spectantes, nonnullos ad gnomonicam, aliquos ad navigationem; omnes in hypothesi terræ immobilis. Secunda pars usus attingit globorum in hypothesi terræ motæ, multa tamen repetit quæ in prima parte fuerant dicta. Opus tamen bonum & utile iis qui geometriam nesciunt. In quarto Amsterodami 1642.

95 1642 Prodiit Parisiis Petri Daviti Geographia quinque tomis. In primo de Mundo multa habet ad Mathesin spectantia. In folio. Desunt tabulæ.

96 1643 Prodiit Bartholomæi Morizoti Orbis Maritimus. Liber potius historicus, in quo refert gesta varia in mari, nempe bella navalia. Divione 1643.

97 1644 D. Coulon Descriptionem Galliæ instituit Gallicè per flumina. Hoc Opus nihil habet nisi historicum. Parisiis duobus tomis in octavo 1644.

98 1646 Pater Jacobus Grandamicus è Societate Jesu, scripsit de magnete novam demonstrationem immobilitatis terræ petitam à virtute magnetica terræ, licet ejus demonstratio non sit legitima. Habet multas experientias novas circa magnetem optimas. Flexiæ in quarto.

99 1646 Pater Philippus l'Abbe Societatis Jesu, Gallicè Geographiam regiam edidit, quam ex Cluverio, Ortelio, Merula, Berthio, Goniths, Sympilio & aliis desumpsit.

Nonnulla initio de circulis Sphæræ sed nimis breviter, ita ut imaginationem non informet satis. Parisiis in octavo 1646.

100 1649 Pater Nicolaus Zuchi Parmensis Dissertationem edidit magneticam de primo magnetico, & causis progressionum magneticorum, in qua potius causam finalem cur terræ indita sit virtus magnetica, quàm alias, assignat. In quarto Romæ 1649.

101 1652 Pater Joannes Francois Societatis Jesu, Geographiam divisam in tres partes quæ explicant, divisiones, universalitates, & particularitates globi terrestris. Edidit multa inutilia ad suum institutum nempe divisiones importunas. Redonis in octavo 1652.

102 1652 S. Sanson Geographus Ordinarius Regis, Asiæ, Europæ, & Africæ Descriptionem edidit cum mappis optimis. Parisiis in quarto.

103 1653 Philippus Briet è Societate Jesu, Theatrum geographicum Europæ edidit Gallicè. Opus figuris constans. Parisiis.

Item Parallela Italiæ veteris & novæ 1649. Opus historicum.

104 Anno 1654 Pater Kirker edidit Tractatum de magnete in tres libros divisum, in quorum primo agit de natura & facultatibus magnetis. In prima parte de etimologia, inventione, generatione & speciebus magnetis agit. In secunda de omnibus facultatibus magnetis, nempe attractione, directione, armatura, declinatione, inclinatione communicatione virtutis. Habet item 21 paradoxa scitu digna. In secundo varios magnetis usus aperit, & habet staticam magneticam, versoriorum fabricam, eorumque usus in geometria practica, astronomia, gnomonica, in variis machinis, denique in nautica. In tertio multa habet de magnetismo seu consensu elementorum, solis & lunæ in maria, heliotropii, musicæ, imaginationis, de tarantismo.

In hoc opere usus præcipuè & praxes habet; sunt tamen aliqua nimis minutè explicata. In tertio libro multa congessit inutilia.

1658 D. Samson Abbavillensis Geographus Regius mapparum geographicarum volumen integrum edidit. In folio 1658. 105

1660 Bernardus Varenius Doctor Medicus Geographiam universalem edidit duobus libris comprehensam. In primo agit de tellure absolutè considerata, nempe de ejus figura, magnitudine, motu, & quiete, loco, de telluris substantia, de continentibus, montibus, fodinis, sylvis, de oceani partitione per terras, de ejusdem proprietatibus, de lacubus & fluviis, aquis mineralibus, de athmosphæra & aëre, de ventis. 106

Libro secundo agit de affectionibus telluris cœlestibus, de locorum latitudine, de zonis & apparentiis cœlestibus in singulis zonis, de climatibus, de luce, calore, & anni tempestatibus, de umbris & denominationibus inde ortis, de horologiis sciatericis, de antæcis, antipodibus, de diverso ortu & occasu solis, de longitudine locorum, de horizonte sensibili, de navigatione seu Istiodromia.

Omnium quos hactenus legi palmam retulisse de geographia videtur Varenius, exceptis nonnullis quæ non videntur ad hanc materiam pertinere, ut de Horologiis & Navigatione non erat dicendi locus. Videtur item figuris imaginationi sufficienter non serviisse, in qua efformanda non mediocriter laborandum erat.

Hoc Opus bis editum; semel in decimo sexto, novissimè in octavo ab Isaaco Nouton mathematum Professore Lucasiano apud Cantabrigienses qui 33 figuris hoc Opus illustravit. Cantabrigiæ in octavo 1672.

Anno 1661 Pater Joannes Baptista Ricciolius Ferrariensis Geographiam & Hydrographiam reformatam edidit libris duodecim. 107

Liber primus est Isagogicus. Secundus agit de mensuris. Liber tertius agit de mensurandis regionum intervallis, cum Catalogo Navigationum. Liber quartus gæodeticus est. Quintus de magnitudine dimetienda terræ. Sextus agit de altitudinibus dimetiendis. Septimus de latitudine regionum. Octavus de longitudine dimetienda; in hoc habetur tabula declinationum magnetis. Nonus de primo meridiano. Decimus hydrographicus in quo inter alia solvit problemata nautica. Undecimus Onomasticus est, nempe habet nomina plurimarum regionum cum latitudine, & longitudine. Duodecimus est Synopsis Geographiæ quam in cruce exhibet.

Hoc Opus optimum quidem est, potuerat tamen melius componi si nempe alienas materias non immiscuisset.

1661 Gaspar Schotus Societatis Jesu, in suo Cursu mathematico de geographia tractatum habet. 108

bet. Initio proponit principia universalia geographiæ, sed leviter eo quod in Astronomia jam fuerint tradita. Ferè totus tractatus historicus est, nempe in eo singula regna & provincias describit. Habet in hydrographia nonnulla ad navigationem spectantia quæ non demonstrat.

109 1665 Petrus Courtin Professor Matheseos in Opusculo Gallico tradit tredecim usus globi satis communes terraquei sine demonstrationibus. Poterant plures afferri. Parisiis in octavo 1665.

110 1666 Prodiit incerto authore Geographia universalis Gallica aut compendiosa, in qua præcipuè describuntur Provinciæ Galliæ. Lugduni in decimo sexto 1666.

111 1666 Dominus Denis Sacerdos Hydrographus Regius & Professor Dieppensis Artem Navigandi composuit, seu tractatum de variatione pixidum nauticarum, in quo tractatu, quinque modos tradit inveniendæ talis variationis, præcipuè vero qualibet hora diei & noctis.

Tabulas habet amplitudinum ortivarum ad hoc necessarias, tractatus est nimis amplus; illæ enim omnes praxes & demonstrationes brevius tradi & explicari poterant. Habet item nonnulla non ita benè explicata ut dum dicit polo convenire definitionem centri, quod falsum est; cum centrum debeat in eodem plano existere & polus in sublimi esse. Dieppe in quarto 1666.

112 P. Vincentius Leotaudus scripsit de magnete benè & solidè, novumque tradit modum explicandi tam virtutem magneticorum quàm telluris duobus libris.

Liber primus universaliora capita magneticæ Philosophiæ complectitur.

Secundus varios magnetis affectus explicat; refellit Gilbertum & Cabæum efficaciter. Lugduni in quarto 1668.

N. Samson filius, Europæ, Asiæ & Africæ Mappas edidit. Parisiis in quarto.

113 1668 M. Denis Presbiter artem Navigandi tradit per numeros. Hujus praxis in longioribus Navigationibus fallax. Falsò item reprehendit mappas reductas. Dieppæ in quarto 1663.

114 1669 M. Denis Presbyter Hydrographus Ordinarius Regis & Professor Navigationis Diepæ edidit Opus Gallicum cujus titulus, *Un discours de la declinaison du Soleil, & des principales estoiles du firmament.*

Ensemble un discours sur l'Estoile du Nord avec deux tables pour trouver l'elevation du Pole à toute heure de la nuit.

In hoc Opere tradit solis declinationem pro quatuor annis in ordine ad latitudinem inveniendam, immò totum Opus est de elevatione poli invenienda, quæ omnia Nautis sunt perutilia.

Anno 1671 Pater Honoratus Fabry Societatis Jesu, in tomo quarto suæ Scientiæ physicæ scripsit optimè de magnete, ostenditque virtutem magneticam per substantialem diffusionem propagari.

Opus hoc optimum est solidum & clarissimum. Lugduni in quarto 1671.

CAPUT VI.

Architectonices progressus.

ARchitectonices nomen ædificiorum omnium scientiam indicat, quæ cum in mensuris, & proportionibus observandis tota posita sit, jure ad Mathesin revocatur, quamvis à plerisque negligatur perinde ac si incertis placitis, & non indubitatis niteretur. Hujus disciplinæ placita omnia ad severioris geometriæ leges non exiguntur, eo quod vel habitationis humanæ commoda, & salubritatem, vel operis soliditatem, vel tandem elegantiam externamque spectet magnificentiam, quæ omnia cum à geometricis rationibus tantum, non pendeant; sed alia requirant bene multa, mixtam efficiunt disciplinam, executio tamen & quasi praxis quæ ad particularia descendit tota mathematica est.

Quod ad ædium commoda pertinet, cum variæ sint hominum conditiones, variosque in suis domibus usus requirant, variam etiam partium distributionem exigunt in quibus vix regula certa dari potest. Ex quo fit ut de hac parte utilissima licet, vix verbum authores faciant; exceptisque paucis aliquibus legibus ex Vitruvio desumptis, nihil omnino de privatarum ædium structura dicant. Puto autem quod ille optimè de architectura mereretur, qui lustratis Europæ partibus, præcipuè ideas aliquas ædium bene compositarum in lucem ederet, non palatiorum tantum, castellorum, sed etiam aliarum minus præcipuarum, ut omni hominum conditioni accommodatas ædes proponeret concinnas, elegantes, commodas, & bene in ordinem digestas, & hoc secundum omnium nationum genium, aut cœli diversam temperiem. Id enim verò operis Architectonicæ deesse videtur.

Architectonicam igitur civilem ad publica tantum ædificia externámque illam præstantiam quæ ex columnarum, capitellorum, & superimpositâ trabe, zophoro & coronide resultat solent authores communiter coarctare. Unde autem hæc substructionis species ortum duxerit non satis liquet; cum aperta intercolumnia, & omnino pervia incommodas ædes, & ad habitandum ferè inutiles reddere videantur, supervacaneum ex alia parte sit ad sustentandam contignationem & tectum; columnas addere si murus undique solidus, & perpetuus erectus sit. Unde vel ex publicis ædibus, quæ omninò apertæ, & perviæ esse debebant, vel ab aliquarum nationum consuetudine, quæ quidem solem & pluvias suis ædibus arcere intendebant; aërem verò liberum & spirare & videre cupiebant, hujusmodi compositio originem duxisse dicenda est. Nam quod pertinet ad primum, in templorum vestibulis publicisque porticibus primò adhibitas credimus; & inde ad templorum ornatum traductas, ut quod primitùs ob certum, & peculiarem usum usurpatum fuit, quia gratius oculis, & magnificentiùs apparebat, cessante licet tali usu adhibeatur. Quod verò ad secundam rationem attinet, accepimus ex litteris Sinensibus, Tartaros ita consuetos esse in libero aëre versari, ut si quas Sinensium ædes habitandas nanciscantur, priùs diruto saltem uno pariete eas aperiant, ne sibi incarcerati videantur. Vel denique quod in multis regionibus solos domorum angulos, & per intervalla parietes columnis, & quadrato lapide, quasi catenis vincire, & munire soleant, intercolumnia verò leviori materia, & minus solida claudere. In qua regione nata sit Architectura, nempe quæ Natio primum hoc genus ædificii quod stylobata, columna, capitello, trabe, zophoro, & coronice constat, inquiri potest. Antiquissima referuntur in Græcia deorum delubra, quæ talem formam imitarentur, immò quæ diversis, structurarum hujusmodi generibus nomen dederunt. Ab ipsis Græciæ partibus & regionibus appellationem habent, ita Doricum, Ionicum, Corinthiacum non aliunde quam in Græcia videntur nata,& usurpata. Certum tamen est in templo Salomonico,hoc est mille ante Christum annis,architecturæ leges fuisse usurpatas, ita ut sit credibile in Ægypto ubi immodicus calor, auram liberiorem captare docet, jam structuras, columnis fuisse distinctas, sicut apud Meridionales Americanos ædes salubriores sunt, quæ fissuris crebris, & frequentibus perviæ, auræ & aëri liberiorem aditum præbent, quam quæ continuo & minime interrupto pariete continentur. Accedit quod ipsa tabernaculi idea in deserto à Mose excitati artificibus in Ægypto edoctis, architecturæ jam satis manifesta præbeat indicia.

Huic tamen conjecturæ duo obstant: primum quod nulla referatur ædes sacra alicujus momenti in Ægypto; neque enim pyramides aliquid ex ordinibus Architectonicis desumebant. Adde quod non ita facile opus lateritium in Ægypto usurpatum tantam coronidum projecturam pati potest. Insuper à tignariis operibus, potius quàm à lapideis, hæc scientia profecta est; cujus quippe præcipuè partes à trabibus, & domorum coronide cui tectum imponitur nomenclaturam accipiant. Hinc oritur quod cum tecta, ut à subjectis parietibus imbres prohibeant, ultra perpendiculum promineant, tignáque ut plurimum appareant; In architectura qua columnis imponitur moles, præcipue coronix, & multum ultra subjectas sibi partes projecta sit, & tignis, denticulis, mutulisque ornetur. In Ægypto nec tanta lignorum copia, nec domibus tectum ut arceantur imbres imponatur, cum raræ sint in Ægypto pluviæ, sed simplex doma, ex terra bene compressa constans ædes pro tecto habeant. Quare & ipsæ hujus artis voces quæ omnes Græcæ sunt,Græcis hanc laudem tribuunt.Nullus tamen author Græcus de hac materia scripsisse legitur, Primus Vitruvius, qui & singulorum ordinum proportiones, & leges satis accuratè tradit.

Architectura civilis brevibus admodum coarctatur finibus, utpote quæ ultra quinque pervulgatos ordines Doricum, Jonicum, Corinthiacum compositum, & Tuscum non excurrat. Ad Mathesin vix pertinet hæc materia, cum demonstrationibus careat, ad eam tamen revocatur, eò quod praxes Geometricæ in architectura ritè usurpanda locum habeant.

His ultimis sæculis Architectura militaris nata est, cujus ne verbum quidem Antiqui, quorum in muniendis urbibus solertia, in frequentibus turribus tota posita fuit. Nos necessitate post inventum pulverem pyrium, alias moles multo majores, sed pauciores hostibus objicimus, certóque ordine disponimus ut pauci multis obsistamus. Hanc Architecturam militarem in septem partes commodè dividimus. Prima pars fundamenta, seu axiomata hujus doctrinæ tradit. Secunda polygona regularia suis propugnaculis, vallo, & fossa instruit. Tertia circa prætenturas omnes, seu opera externa, hoc est parmulas, lunatas cassides,cornuta, coronata, forcipulas suis vallis, loricis fossis muniendas occupatur. Quarta irregulares figuras, certis principiis, & regulis adstringit. Quinta obsidionales fossas, vineas aggeres, cuniculos ducit, castra suis munitiunculis tutatur, tormentorum bellicorum suggesta, seu tribunalia excitat. Sexta erit repugnatoria variasque propugnaculorum rescissiones & tumultuario opere excitatas munitiones complectitur.Addunt nonnulli septimam perspectivam militarem, ut facile hæc omnia exhibeantur & describantur in charta.

Utrique Architecturæ duæ famulantur facultates, quarum prima circa lapidum sectiones versatur, secunda tignaria nuncupatur. Varia enim sunt ædificiorum genera quæ latomis nostris negotium solent facessere utpote quæ ex geometricis principiis robur, & firmitatem accipiunt. Ea autem sunt, variæ species testudinum, & fornicum, quæ licet ex materia solida, & gravi, nempe ex lapidibus constent, in aëre tamen pendent, & vi innatæ gravitatis à casu prohibentur: à mutua nempe partium complicatione, & figura ipsis geometricè inducta hanc firmitatem mutuantur. Hanc scientiam in quatuor partes commodè dividere possumus. Prima pars circa arcus, seu compluviatas testudines, non tantum simplices, & orbe pleno ut vocant tornatas, sed etiam elumbes seu depressas, fastigiatas, reptantes, seu pedum inæqualium, obliquas, inclinatas, perstringentes, seu desinentes in aliud compluvium, in turrim rotundam occupatur. Secunda conicas testudines, pendulosque ut ita dicam fornices excitat. Tertia decumanos extruit, lunatósque fornices, sphæricos claustrales quadrario lapide decussatos componit. Quarta denique in orbem aut Ellypsin ascendentes extruit.

Artem tignariam adjungimus, quæ nempe lignorum sectiones, & in tectis elegantioribus usum explicat.

His præmissis recensendi auctores præstantissimi qui artes has suis operibus illustrarunt.

Octavo Urbis sæculo circa Christi domini annū primum M.Vitruvius scripsit de Architectura tempore Augusti. Cum enim Julio Cæsari in multis militiæ operibus, quæ ab Architecto dependent præcipuè verò in machinis fabricandis suam novasset operam, ab Octavia Augusto fratri est commendatus, à quo cum ita esset honoribus, & præmiis affectus, ut amplius senii paupertatem non reformidaret, otium nactus scripsit de Architectura 10 libros.

In primo loquitur de Architectura quasi in genere, ex quibus rebus constet, item de ejus partibus, tam in publicis, quam privatis ædificiis, de electione locorum salubrium,de fundamentis murorum, de divisione operum intra civitatem, & electione locorum ad usum communem civitatis.

In secundo agit præcipuè de materia ædificiorum, arena, calce, pulvere Puteolano, de generibus structuræ, de arboribus cædendis.

In tertio de sacrarum ædium structura,de quinque ædium speciebus, de fundationibus, de columnis, & Epistyliis.

In quarto de tribus generibus columnarum. De ratione Dorica, de interiore cellarum dispositione, de Tuscanis rationibus.

In quinto de ædibus publicis de foro, ærario carcere, curia, Theatro, balneis, Palestris, Portubus.

In sexto de privatorum ædibus de atriis, tricliniis, exedris, de Rusticis ædibus de Græcorum ædificiorum dispositione, firmitate, fundamentis.

In septimo de maceratione calcis ad dealbandum, de ruderatione, de coloribus, & picturis ædificiorum, de Ocra, Minio, Cerussa & aliis.

In octavo de fontibus inveniendis, de perductionibus, libellationibus.

In 9 Platonis inventum de Agro metiendo, de Gnomonicis rationibus, solis cursu de horologiorum descriptione, & usu, de deprehendendo auro, permixto in opere.

In 10 de machinis tractoriis, de machinis ad hauriendam aquam, de ctesibica machina, de catapultis, balistis aliisque similibus.

Vitruvius omnium Architectorum Magister habetur, quod primus eâ de re scripserit. Ejus tamen Opus poterat melius disponi.

Vitruvium commentariis illustrarunt Guillelmus Philander Castilionius civis Romanus anno 1586, & Bernardinus Baldus Urbinas Guastallæ Abbas qui librum conscripsit de verborum Vitruvianorum significatione, cum vita ejusdem. Augustæ Vindelicorum in quarto 1612.

De hac materia à Vitruvio ad annum 1500. nemo scripsit. Gothi quidem qui in plerisque Europæ partibus dominatum obtinuerunt, aliam ædificandi rationem inierunt, ab illis ordinibus omnino alienam, de qua nihil omnino scripserunt.

1 1512 Leo Baptista Alberti Florentinus libros decem edidit de re ædificatoria.

Primus liber agit de lineamentis, de regione seligenda & cognoscenda, de area, de parietum & columnarum formis, de scalis.

Liber secundus agit de materia.

Tertius de opere, de lapidum contextu, de tectis & dextra bibus.

Quartus de universo opere, de situ urbis, mœnibus, pontibus, cloacis.

Quintus de ædibus, porticu, vestibulo, scalis; item de arce, de palæstris, de terrestribus castris, de privatis domibus.

Sextus de ornamento, de ædificatoriæ adolescentia apud Asianos, de machinis tractoriis, de incrustationibus.

Septimus de sacrorum ornamentis, de porticibus, de columnis, capitulo, trabe, de trabeatis & arcuatis columnationibus.

Octavus de ornamentis prophanorum ædificiorum, sepulchris, pyramidibus, theatris, thermis.

Nonus de privatis ædibus.

Decimus de operum instauratione, & latentis aquæ indiciis.

In hoc opere multa repetuntur eorum quæ in Vitruvio continentur, multa tamen propria, & utilia. Parisiis in quarto 1512.

Item Florentiæ in quarto 1585.

Item Venetiis in quarto 1665 sed Italicè à Cosino Bartoli.

2 Anno 1536 Joannes Baptista Caporali Perusinus Vitruvii quinque libros priores in linguam Italicam vertit adjecta explicatione satis fusa & clara locorum difficilium, & adiectis etiam figuris. In quo egregiam navavit operam. In folio.

3 Anno 1553 Leonis Baptistæ Alberti, Nobilis Florentini Architectura in gallicum versa est à Joanne Martino, in decem libros divisa.

In primo agit de regionibus salubribus, & situ eligendo in genere, de columnis, parietibus, fenestris, portis & scalis.

In secundo loquitur de exemplari ædium, tum de materia lapidibus, cæmento, calce, lignis, &c.

In tertio de structura, seu de lapidum connexione, de contignationibus, tectis, testudinibus.

In quarto de civitatibus, de muris, propugnaculis, pontibus & portubus.

In quinto de ædibus Principis, de templis, ædibus privatis, de castris, navalibus, villis.

In sexto de ornamentis, tum de machinis ad ædificandum.

In septimo de templis, eorumque partibus, de quatuor ordinibus, Dorico, Ionico, Corinthiaco, Italico.

In octavo de sepulchris, amphitheatris, aulis comitiorum, Thermis.

In nono de ornamentis ædium.

In decimo de aquæductibus, aggeribus &c.

Hic author de suis materiis potius oratoriè & in genere agit, quam mathematicè, neque enim docet satis in particulari praxin, sed tantum præcepta generalia eruditione nimis frequenti illustrando, sermonē nimis prolixum habet. Ex eo nonnulli qui de Architectura scripserūt, sunt multa mutuati.

1554 Petrus Catenco Venetus Italicè scripsit de Architectura libris quatuor. 4

In primo agit de situ civitatibus idoneo, de methodo muniendi, breviter tamen, multas habet ideas civitatum, nempe vicorum & munitionum.

In secundo agit de materia ad ædificandum idonea.

In tertio profert varias templorum ideas.

In quarto agit de palatiis, quorum ichnographias tradit. Hoc Opus multa habet bona. Ideæ tamen pleræque non ita benè succederent, si ad praxin descenderetur, possunt tamen Architecto non esse inutiles, viamque ad utiliora aperire.

1563 Jacobus Lanterius Brixiensis libros duos de modo substruendi terrena munimenta ad urbes atque oppida quibus aditus hosti præcludatur. 5

Hic modus muniendi bonus est, multúmque accedit ad hodiernum, potius spectat ipsam praxin & fabricationem quam dispositionem partium, de qua pauca admodum habet. Venetiis in quarto 1563.

Anno 1567 Philibertus de Lorme Consiliarius & Eleemosinarius Regius, necnon Abbas Sancti Sergij Andegavensis, Architecturam Gallicè edidit in novem libros divisam. In primo principia generalia ad benè & salubriter ædificandum habet. In secundo varias regulas & problemata geometrica artificibus subalternis proponit, & modum fundamenta jaciendi. In tertio proponit ædificia quæ sunt subterranea, ut cellas vinarias, & ex occasione docet methodum arcus elumbis seu depressioris efformandi, nonnulláque instrumenta huic negotio accommodata. In quarto agit de testudinibus cylindricis, inclinatis, item de portis, & arcubus variè obliquis, aut in angulo aut in turri rotunda, aliisque hujusmodi, & eorum omnium praxes tradit. Item conicas testudines decussatas, sphæricas in Helicem assurgentes describit. In quinto, sexto & septimo ordines Architectonicos per singulas eorum partes, & ornatus prosequitur. In octavo ostendit quomodo ordinatio Architectonica aptari debeat, urbium portis, arcubus triumphalibus, fenestris, caminis. 6

In ultimo denique agit præcipuè de caminis, & multa ad praxin spectantia aperit.

Opus bonum & utile præsertim quod multa contineat circa testudines compluviatas & arcus, quæ ante illum nullus tradiderat, geometricè enim procedit quamvis demonstrationes non afferat, multas ex eo praxes desumpsimus in tractatu de lapidum sectione, addidimus tamen perspicuitatem

tatem & demonstrationes quas ne judicarat quidem. Videtur autem in eo deficere hic author, quod eruditionem in his materiis importunè accersat & ingerat pro genio nempe suorum temporum. In folio.

7 Anno 1570 Galassus Alchisi Architectus Ducis Ferrariensis librum edidit Italicè de fortificationibus, in quo repudiatis consuetis muniendi modis, alium introducit meo quidem judicio peiorem, in quo nempe & propugnacula sunt minora quàm par sit, totáque ordinatio reprehensibilis est, unde in usum numquam revocata fuit, nec ut puto umquam revocabitur. In folio.

8 Anno 1571 Sebastianus Serlius.

In prioribus libris varia antiquorum ædificia proponit, & templorum ichnographias, variáque eorum ornamentis & fragmentis ruderum eruit.

In sequentibus ordines architectonicos explicat variisque materiis applicat.

Septimo libro proponit viginti quatuor domorum ruralium ichnographias & scenographias, tum unius urbanæ habentis in parte anteriori ergasteria, tum ornamenta caminorum affert. Item nonnulla ad corrigendas ædificiorum irregularitates pertinentia.

Habet item aliqua de tectis contignationibus roborandis utilia communia licet, quæ omnia contemni non debent, licet multæ domorum ruralium ideæ videantur nimis vastæ, & non satis ad usum communem accommodatæ. In folio.

9 1572 Martinus Bassi Mediolanensis Opusculum Italicum edidit in quo nonnullas opiniones refert circa architecturæ & perspectivæ aliqua placita cum solutionibus celebrium Architectorum.

Opus hoc indigestum est & exigui momenti. Titulus est *Dispareri in materia d'architettura & perspettiva*, Bressiæ in quarto 1572.

10 1574 Joannes Baptista Benedictus Patritius Venetus edidit Opusculum de statica & mechanica, in quo nihil habet nisi vulgare & malè explicatum, ita ut sæpe vix possit bene intelligi; habet item descriptionem lucernæ satis ingeniosæ, quam Serenissimo Duci Sabaudiæ obtulit. Hæc procedit secundum Heronis principia.

11 Anno 1575 Andreas Palladius librum edidit de Architectura Italicè scriptum libris quatuor. In primo differit de materia ædificiorum præcipuè vero de lapidibus, & cœmento, variisque constructionibus, tum de ordinibus breviter, exinde proponit ideas varias scalarum. In secundo varias ideas domorum tam Græcorum, quàm Romanorum. In tertio ædificia publica ut pontes tam ligneos quam lapideos, areas & basilicas efformat. In quarto templa præcipuè antiqua quæ Romæ visuntur.

Opus bonum & probatum nisi quod ædes particularium ab eo propositæ nimis vastæ videantur, & non satis ad usum hodiernum accommodatæ. In folio.

12 Anno 1584 Hieronymus Maggi, & Jacobus Castriotus Regis Christianissimi Architectus militaris librum Italicè ediderunt, de munitionibus civitatum, tribus libris.

In primo agunt de civitatibus earumque munitionibus quasi in genere.

In secundo de munitionibus particularibus.

In tertio de munitionibus portuum, modisque fundamenta jaciendi in aqua.

Additus est tractatus de instruendâ acie compositus à Joachimo Coniano.

Multa in tractatu isto de munitionibus à peritis hujus artis reprehenderentur, nec ab iis ut legitima admitterentur. In folio.

Circa annum 1600 Joannes Errard *de Bar-le-duc* Architectus militaris Regis Galliæ librum gallicum edidit de munitionibus sub hoc titulo, *La fortification reduite en art & demontrée*, Opus suum in quatuor libros partitur. In primo non nulla habet universalia de tormentis bellicis, de situ, de muris &c. 13

In secundo de regularibus munitionibus.

In tertio de irregularibus.

Libro quarto de defectibus corrigendis, præcipuè de remediis adversus colles urbibus imminentes. Figuris quidem elegantibus ornatur hoc Opus: Multa tamen habet antiqua, quæ nunc reprehenderentur. Suo tamen tempore fuit alicujus nominis in Gallia. In folio.

Anno 1604 Joannes Franciscus Fiamelli Florentinus Architecturam edidit militarem Italicè cum titulo, *Il Principe difeso*. 14

Opus istud in octo libros dividitur. In primo proponuntur problemata nonnulla communia. In secundo proponit præcipuas partes munitionis. In tertio habet partes propugnaculi, distributionem platearum intra munitionem. In quarto varias describit munitiones earumque vitia aperit. Quintus munitiones irregulares proponit. Sextus munitiones in aqua extructas describit. Septimo apparatum obsidionalem instruit. Octavus gubernatorem informat.

Opus hoc est exigui momenti, nihilque habet quod in aliis passim non invenias. Ordo illius nullus fere. In folio.

Hieronymus Cataneo Novariensis altero sæculo scripsit de munitionibus octo capitibus. 15

In primo capite proponit nonnullas operationes geometricas.

In secundo habet delineationes propugnaculorum & partium.

In tertio considerationes militis qui arcem propugnandam suscipit.

In quarto quomodo propugnanda sit arx.

In quinto considerationes Imperatoris qui arcem oppugnat.

In sexto quo ordine procedere debet in obsidione.

In septimo quomodo se gerere debent qui arcem propugnant.

In octavo quo ordine iter faciat exercitus.

Modus muniendi satis perfectus est, pro ratione illorum temporum, multa habet bona ad praxin spectantia. Circa annum 1608.

Idem Hieronymus Cataneo Novariensis Architecturam militarem tradidit altero tractatu, in quo agit de ratione muniendi, propugnandi, & impugnandi, de castrametatione de modo instruendæ aciei cum examine eorum qui tormenta bellica explodunt. Bressiæ in quarto 1608.

Anno 1614 Samuel Marolois tractatum edidit de quinque ordinibus, figuris elegantibus ornatum. Explicatio non est usque adeo clara, sed sæpè confusa. 16

Idem tractatum edidit de Architectura militari in quo communes regulæ continentur. Opus etiam vulgare. In folio.

An. 1615 prodiit idea Architecturæ universalis Vincentij Scamozzi Veneti in decem libros divisa. In primo, secundo, & tertio tractat de Architecturæ laudibus, & officio Architecti habetque 17 betque nonnulla de area triangulorum quæ sunt communia.

Tum de salubritate situs, de portubus, de methodo describendi situs, tum de mari & fluviis, de aëre salubri, de ventis, & eorum divisione, de civitatibus, earumque partibus, & munitionibus, plateis, templis, palatiis: habet nonnulla de areis polygonorum.

Denique de ædibus Romanorum, tum variarum ædium & villarum ideas tam scenographicas quam ichnographicas exhibet, partésque describit. In sequentibus agit

De ordinibus, columnis, ornamentis, arcubus, intercolumniis.

Tum de materia ædificiorum, lapidum variis speciebus, cæmentis.

Denique de lignis, contignationibus, tectis, testudinibus.

In plerisque nimis prolixè & oratoriè procedit nec ad particularia descendit, præcipuè in duobus prioribus libris. Tertius utilior est eo quòd ædium verè existentium descriptionem habeat. In folio.

18 1618 Prodiit *Corona Imperiale*, seu de Architectura militari Italicè, authore Petro Sardi Romano. Hic tractatus duas partes habet Theoricam, quæ de fine Architecturæ, de situ, de ostensione, de forma, & materia munitionum agit. Tota ferè historica est exemplis antiquorum illustrata. Secunda quæ practica, modum habet communem muniendi, nonnulla tamen quæ à nostris Architectis non probarentur. Præcipuè verò, quæ de duplici quasi fossa proponit, altera plena sed non multum lata, altera sicca & lorica quasi dentata. Hæc inquam ab omnibus non probarentur. Reliqua sunt bona sed communia. In folio.

19 Anno 1619 Prodiit Parisiis Regula generalis Architecturæ quinque ordinum, nempe Tusci, Dorici, Ionici, Corinthiaci, Compositi, secundum regulas Vitruvii: In quo nihil nisi commune opus utile, in quo brevis tantum figurarum explicatio continetur. Nullus hujus operis author profertur: dicitur correctum à D. de Brosse Architecto Regio. In folio.

20 Anno 1623 Petrus le Muet brevem ideam ædificandi edidit in lucem. Opus utile quidem secundum modum Parisiensem, non videntur tamen ejus ideæ satis sublimes, & satis regulares. In folio.

21 1624 Ludovicus Savot Medicus regius Architecturam Gallicam de ædibus particularibus edidit in quo agit de mensuris & proportionibus ædificij cujusque.

Hoc Opus figuras nullas habet, continet tamen multa utilia. Parisiis in octavo 1624.

22 Anno 1627 Mathurinus Jousse tractatum edidit de arte seras fabricandi. Primus quod sciam de hac arte scripsit, multaque arcana hujus artis aperit. Opus utile. In folio.

Eodem anno 1627 idem Mathurinus Jousse tractatum edidit de arte fabri lignarij, nempe artem construendi tecti elegantioris, methodo scilicet apud Gallos usitata. Ex eo multa desumpsimus in tractatu de ea re quem edidimus. In folio.

23 1629 Dominus Fabre Architectus militaris Gallicè Architecturam militarem edidit sub titulo, *Les Fabriques du sieur Fabre sur l'ordre de fortifier, garder, attaquer & deffendre les places.* Quatuor habet tractatus.

Primus praxes habet ad muniendum quodlibet polygonum, cujus praxis supponit figuræ minorem radium, quo posito assignat latus cujuslibet polygoni, in eoque mensuras omnes tam ichnographicas, quam orthographicas.

Ejus praxis facillima est, & à quovis intelligi potest, quod intendebat, ut sine geometria & arithmetica has praxes doceret.

In secundo tractatu docet methodos usurpatas ad custodiendam arcem tempore pacis, nempe ordinum, stationum & vigilum.

In tertio & quarto propugnationem.

Opus potius practicum quam theoricum, facile & intelligibile complectens omnia, quæ communiter usurpantur.

1629 Antonius de Ville Eques Tolosas Architecturam militarem Gallicè edidit sub hoc titulo, 24
Les fortifications du Chevalier de Ville Tolosain. Hic erat addictus obsequio serenissimi Ducis Sabaudiæ, militavítque in Pedemontio. Tres libros habet.

Primus versatur circa constructionem munitionum, subdividitúrque in quatuor partes. In prima parte nonnulla universalia circa situm loquitur de singulis polygonis regularibus. Singulas item partes munitionis internas describit. In secunda exteriores partes, promurale, fossas & viam tectam exhibet.

Tertia opera externa, & irregulares figuras considerat.

In quarta munitiunculas aliáque additamenta.

Secundo libro impugnationem proponit primà parte improvisam, loquitúrque de insititio tormento. *Le Petard.*

In secunda de obsidionibus singulisque circunstantiis, lineis obsidionalibus, vineis, cuniculis, suggestis machinarum.

Tertius de munitionum custodia: In prima parte, de excubiarum ordine: In secunda de repugnatione.

Hoc Opus optimum est & ab omnibus æstimatur. In folio.

Anno 1630 Franciscus Tensini Cremensis 25
quondam Architectus militaris & Loco-tenens Generalis tormentorum bellicorum Ducis Bavariæ, Regis Hispaniæ, & Imperatoris Rodolphi secundi, & postea reipublicæ Venetæ, postquam interfuisset octodecim obsidionibus, & quater fuisset obsessus, post varia certamina & pugnas Architecturam militarem conscripsit Italicè sub hoc titulo, *La fortificatione, guardia, difesa, e espugnatione delle fortezze.*

Suum Opus in tres libros partitur, in quorum primo post laudes architecturæ militaris, de situ munitionum singulorumque prærogativas & incommoda profert, tum singulas partes munitionis percurrit, etiam præmunitiones item exhibet.

In secundo disserit de gubernatoris officio, & quomodo se gerere debeat præsertim tempore obsidionis, quomodo suppetiæ obsessis sint ferendæ, docet.

Tertius de oppugnatione urbium sive ex improviso sive ex longa obsidione disserit, & de singularibus artibus trincheis, vineis suggestis, aliisque sermonem habet.

In hoc opere ad particularia descendit & bene explicat, remque prout de facto geritur exhibet. In folio.

Anno 1631 Jacobus Barrozzio & Vignola 26
Opus edidit de quinque ordinibus, in quo scilicet proponit ideam simplicem horum ordinum ex probatissimis antiquorum exemplis erutam, cum ornamentis

ornamentis singulorum ordinum, quod Opus simplex est & probatum ab omnibus, ideóque posteà sub forma minori editum est, ut commodiorem usum & artificibus magis accommodatum haberet. In folio.

27 1632 Joannes le Normand tractatum habet de restitutione militiæ Gallicæ, in quo disserit de muniis omnibus à simplici pedite ad Imperatorem, cum exercitiis tam equitatus quam peditatus, aciem instruendi tam in planitie quam in montibus, castrametatione, item de re nautica in ordine ad classes. Rothomagi in quarto 1632.

28 1634 Antonius Rivan Carpentoratensis artem muniendi loca regularia, seu irregularia Gallicè composuit, cum modo omnia in solo exequendi.

Putat author multa circa irregulares figuras dixisse, quæ à nullo hactenus dicta fuerant, quæ tamen non sunt magni momenti. Parisiis in quarto 1634.

29 Anno 1635 Adamus Froitach edidit Architecturam militarem Gallicè figuris appositis ornatam, eamque in tres libros divisam.

In primo agit de munitione in genere, & de regulari, habet tabulas trigonometricè supputatas.

In secundo libro irregulares figuras munit, & opera externa extruit.

In tertio de castrametatione, de oppugnatione, de vineis cæterisque disserit.

Opus bonum & benè digestum nec nimis prolixum & quod sufficiens videtur. In folio.

30 1642 Mathurinus Jousse edidit Gallicè librum cui titulus, *Le secret d'Architecture*, in quo tradit delineationes geometricas compluviorum, arcuum, testudinum, helicum praxes habet sine ullis demonstrationibus.

Opus tamen utile præcipuè verò artificibus. In folio.

31 Anno 1643. P. Franciscus Derand è Societate Jesu librum edidit Gallicum, cui titulus, *L'Architecture des voutes ou l'art des traits & coupe des voutes*, seu de constructione omnis generis testudinum, & de praxibus ad formandos lapides. Tractatus utilissimus, videtúrque pauca admodum omisisse, solas praxes habet figuris aptissimis explicatas. Opus absolutissimum si demonstrationes, adhibuisset, eas in tractatu de sectione lapidum adhibuimus.

32 1645 Comes de Pagan edidit Gallicè novam methodum arces muniendi multo meliorem consuetâ, triploque magis restitivam. Hoc probatur ab omnibus communiter, expensas tamen in muniendo paulo majores. In folio.

33 Anno 1641 prodiit in lucem Peribologia, seu muniendorum locorum ratio Vuilelmi Dilichij totum ferè volumen in figuris positum est, quarum pleræque explicationem nullam habent. In explicando autem artificio munitionum immoratur diutiùs, tantumque nonnulla affert ad situm pertinentia. In folio.

34 Anno 1647 Mathias Dogen Dramburgensis Architecturam militarem modernam edidit, variis historiis tam veteribus quam recentioribus confirmatam, figuris ornatam cum Ichnographiis præcipuarum totius Europæ munitionum præcipuè belgicarum & batavicarum.

Primus liber terminos & axiomata totamque munitionem regularem cum præmunitionibus, tabulas item tam ichnographicas, quam orthographicas complectitur.

Secundus munitiones habet irregulares cum suis pariter tabulis, singulasque earum circunstantias commoda & incommoda persequitur.

Tertius liber est de munimentorum oppugnatione, castrametatione, lineis accessuum, munitiunculisque excitandis, de vinea, suggestis tormentorum bellicorum.

Quartus habet propugnationem. Opus istud absolutum est, & quoad doctrinam non multum differt ab iis quæ Adamus Froitach docuit. Habet præterea historias varias quibus doctrinam suam illustrare & probare nititur: ex quo fit ut sit prolixior, ita ut qui sola præcepta & artem inquirunt, vix eam tam facile agnoscant aut ex tot historiis eruant. In folio.

1655 P. Petrus Bourdin Societatis Jesu archi- 35
tecturam militarem & geometriam militarem edidit.

In hoc opere principia munitionum clarè explicat adjectis figuris & praxibus idoneis. Parisiis in octavo 1655.

1658 F. du Breuil è Societate Jesu, sub nomi- 36
ne Sylvere de Bitanvieu gallicè Architecturam militarem edidit. Cui titulus est, *L'Art universel des fortifications Françoises, Holandoises, Italiennes, avec l'Art d'attaquer & deffendre.*

Hoc Opus figuris elegantibus illustratur, habétque praxes ordinarias. In eo difficiliora desiderantur, ut quæ pertinent ad figuras irregulares. Parisiis in quarto 1658.

Anno 1669 prodiit in lucem Architectura mi- 37
litaris Patris Andreæ Tacquet Antuerpiensis è Societate Jesu, in tres partes distributa.

In prima parte Architecturæ militaris progressum explicat, terminos tam ichnographicos, quam orthographicos & axiomata tradit, regulam munitionum exarandarum, tam in charta quam in solo, opera item externa extruit.

Secunda pars munitiones irregulares habet.

Pars tertia oppugnationem & defensionem habet circunvallationem, lineas, seu trincheas reductus, munitiunculas tormentorum suggesta, perforationem loricæ, vineam, cuniculos, item defensionem. Omnia clarè & benè.

1661 Pater Gaspar Schotus è Societate Jesu, 38
in suo Cursu mathematico tractatum habet de Architectura militari nimis brevem.

CAPUT VII.

De progressu Musicæ.

QUartam Matheseos partem Musicam agnoverunt Antiqui, cujus dignitatem, & præstantiam, vel ex suavitate quâ omnes demulcet, ita suspexerunt, ut in celebrioribus, præcipuisque actionibus, tanquam divinum quid illam adhiberent. Tanto enim in honore apud eos fuit, ut nuptias celebrari, epulari, bellum inire, fœdera sancire, diis sacrificare sine musica nefas esset, illeque indoctus penitùs haberetur qui musicam ignoraret. Rectè quidem, si enim vim nominis spectemus omnem eruditionem, & scientiam significare videtur musica, seu omnem disciplinarum orbem, ipsamque adeo Philosophiam, complecti nomenclatura à musis desumpta, quæ omni omninò disciplinæ præesse creditæ sunt. Audiamus Quintilianum, *Quis ignorat*, inquit, *musicen*

sicen tantum jam antiquis illis temporibus, non studij modò, verum etiam venerationis habuisse, ut iidem musici, & sapientes haberentur. Pariter Plato, Philosophiam, maximam musicam appellat, quæ nempe affectuum harmoniam, virtutumque concentum inducat. Sed nimiùm latè patet hæc musicæ appellatio, eam suis finibus coarctabimus, si eam canendi appositè ad aures demulcendas scientiam nominemus: ad quod præstandum, non simpliciter soni naturam, & productionem investigat; sed circa illud versatur, quatenus aurium, & rationis judicio, sub mensuram, & numerum cadit. Quare Arithmetices aliqua species censenda est musica, non abstracta illa quidem, quæ numeros ab omni materia separatos consideret, sed quæ eosdem affixos intueatur, nempe eorum consonantias, dissonantias, & intervalla determinet, ideóque veteres musici voluerunt melos objectum scilicet musicæ esse temporum ordinem, Plato verò motus ordinem nominavit.

Nimis rudis, & inepta videtur musices divisio, in naturalem, & organicam, nempe naturalem quæ voce articulatâ constet, & organicam quæ instrumentis variis producatur. Cum eadem in utraque constet ratio musicæ, hæcque consideratio quod cum voce articulata conjuncta sit, aut cum in sono in articulato consistat, nihil ad hujus scientiæ considerationem pertinere videatur. Solidior videretur hæc divisio quæ duplicem admitteret in musica facultate Theoricam quæ circa sonorum Theoriam, sola eorum cognitione contentâ versatur, & practicam, quæ secundum regulas artis artificiosè, & cum delectatione modulatur. Alij nonnulli musicæ divisionem protulerunt, nempe in harmonicam, rithmicam, & metricam. Prima differentias sonorum secundum acutum, & gravem, nempe sonos ad harmoniam aptos, rejectis ineptis considerat, hoc est intervalla harmonica, tonos, hemitonia, consonantias, dissonantias, & in quibus numerorum proportionibus ea omnia posita sint investigat, praxis vero illi respondens vocem per eam intervalla attollere, aut dimittere, & secundum ea intervalla movere docet, quod vulgò intonare dicimus.

Rythmica præterea quæ observat varias in quocumque sono moras, & quasi prolationes, seu ut vocant ad mensuram & numeros canit. Tertia metrica quæ metris, seu vocibus & argumento convenientem modulationem adaptat, sed verba notis, & notas verbis accommodat. Hæ quidem viderentur potius partes musicæ, quam species, qui enim apud nos musici dicuntur, hæc munia implere debent, nempe ut benè intonent, exactè mensuram sequantur, & qui componunt, vocibus, & argumento notas accommodent, sed neque hoc modo omnia musici officia recensentur, cum præterea melopeiam habeamus, quæ diversas partes ita componit, ut symphoniam efficiant, & nunquam discordent. Quæ ultima musices pars ad recentiorem musicam pertinere videtur, cum nullum symphoniæ apud antiquos extet vestigium, nempe concludi non possit ex eorum scriptis pluribus simul diversis vocibus cecinisse, quarum una bassum efficeret, alia tenorem, aut contratenorem, alia superiorem. Quare communiter recentior musica videtur has partes posse admittere. Ut imperfectior dicatur cantus planus ut vocant & Gregorianus, in quo genere canendi, attollitur, aut demittitur sonus, secundum acutum, & gravem, mensura verò non ita exactè observatur, hunc cantum communiter in Ecclesiâ adhibemus, nullumque aliàs admittebamus. Illa vero species musices est perfectior, quam cantum variabilem, & figuratum vocamus, in quo tempora prolationum, & quasi moras exactiùs seu in minutiores partes dividimus, & ad mensuram exigimus. Metrica autem & melopeya, ad choragum, seu compositorem pertinet, qui non tantum sonos, & moras vocibus, & argumento accommodet, sed sonos sonis, acutos gravibus, ita adaptet ut dissonantias non efficiant, sed gratam auribus symphoniam producant.

Doctior erit illa divisio quâ musica in canonicam, & mathematicam dividitur, canonica de placitis & principiis musices secundum sensuum experientiam dijudicat. Ita musici nostri, etiam qui in ea arte sublimiores censentur, à sensibus suas regulas accipiunt, nempe esse aliqua intervalla consona, alia dissona, Diapason seu octavam ex quinta, & quarta compositam esse, Tonum esse excessum quintæ supra quartam, neque ulterius in iis investigandis operam ponunt.

Mathematica vero non tantum sensuum judicium admittit, sed præterea ratione eadem placita examinat, consonantiarumque singularum rationes in numeris exhibet. Ex qua diversa procedendi, & sonos examinandi methodo, Triplex musicorum secta, seu quasi classis orta est. Aristoxenia, Pythagorica, & Ptolemaica. Prima sensibus fidebat, & ad eorum judicium provocabat. Pythagoras è contra parvi faciebat sensus judicium, quod non satis accuratum, & in rebus minutioribus non satis fidele existimabat. Sed aliquas causas intelligibiles, in certis numerorum rationibus positas excogitabat, ad quas omnia musicæ placita exigebat. Ptolemæus vero utrumque admisit judicium, tam sensus, quam rationis.

A quo sit inventa musica solent multi inquirere, Eusebius Dionysio eam adscribit, Diodorus, & Lucianus Mercurio. Alij Apollini, Polybius Arcadibus, Athenæus Phrygibus Plinius Amphioni Dircæo, alii Philemoni, alii Lino Thebano, alii Pythagoræ Samio, alii Orphæo. Quæ tamen omnia falsa sunt, cum Genesis asserat Tubal fuisse patrem canentium cithara, & organo. Puto ergo si de musica naturali loquamur, eam ita fuisse insitam à natura, ut nulla sit natio barbara quæ aliquos modos musicos non habeat, & tam esse homini hoc à natura inditum, ut vocem ad concentuum modulationem inflectat, eaque modulatione delectetur, ac lusciniæ, aut avi cuilibet, atque adeo inventore opus non fuit, in ea facultate, quam à natura discimus. Si vero de arte & scientia agatur, certum est Tubal inventorem fuisse instrumentorum, quæ chordis constant. An vero præterea idem Tubal ex malleorum sono, eorum didicerit proportionem ut accidit Pythagoræ, hoc sine ullo probabili fundamento asseritur. Unde puto musicam quam vocamus mathematicam jure tribui Pythagoræ, qui cum musicam aristoxeniam optime calleret, & casu aliquo in officina ferraria, malleos in octava perfectè consonos reperisset, ad stateræ examen deprehendit, unum alterius duplum fuisse, conclusitque octavam in ratione dupla positam esse, ex quibus ad alias consonantias examinandas progressus est.

Musices utilitatem, & efficaciam multa commendant: præcipuè verò quod molestias animi minuat & abstergat. Celebris est enim ad musicæ commendationem locus ille Scripturæ, nempè Regum

gum cap. 16. in quo asseritur quod quandocumque spiritus Domini malus arripiebat Saul, David tollebat citharam, & percutiebat manu suâ, & refocillabatur Saul, & leviùs habebat; cum enim naturalis omnino non esset ægritudo, sed dæmon abuteretur humore melancholico, simul & harmonia humorem noxium sedaret, & sacri hymni dæmonem abigerent. *Pythagoras* ait Seneca *perturbationes animi lyrâ componebat, quis autem ignorat, lituos, & tubas concitamenta esse, sicut quosdam cantus blandimenta quibus mens resolvatur. Confusis oculis prosunt virentia, & quibusdam coloribus infirma acies aquiescit, quorumdam splendore perstringitur, sic mentes ægras studia læta permulcent.* Dicitur ergo Pythagoras musicâ ebrios ab sobrietatem revocasse, & Clytemnestra fuisse pudica quamdiu musicum Doricum habuit. Dicitur item Alexander Timothei Milesij cantu orthio, quasi furibundus, & alio remissiori cantu placatior evasisse. Innumera sunt quæ circumferuntur de musica, quorum pleraque aut fabulosa sunt, aut exaggerationem poeticam sapiunt veriùs de ea Boethius musica obtinet principatum inter septem artes liberales, inter omnes scientias ipsa laudabilior, jucundior, lætior, amabilior est, & probatur ab effectu. Musica enim curas abigit, insomnes infantes compescit vagientes, laborantium mitigat labores, fessos reparat artus ac perturbatos reformat animos.

Accedit ad ejus commendationem, quod in sacris tam in veteri lege, quam Christiana fuerit adhibita. Ita Christiani jam Apostolicis temporibus, ut testatur Paulus Apostolus ad *Coloss.* 3. & *ad Ephes.* 1. musicâ utebantur. Qui mos canendi in Ecclesia omni ævo obtinuit, aliis vero modulis usæ Græcorum Ecclesiæ, aliis occidentales. Immo & apud occidentales non eadem fuit ubique canendi consuetudo. Vetustiores enim Ecclesiæ solum Gregorianum cantum admittunt, nec figurato cantu, ut non satis gravi, ad majestatem & venerationem conciliandam minus idoneo non utuntur.

Ut autem ea de quibus agit musica breviter perstringamus, & quasi oculis subjiciamus, primo consonantiarum, & intervallorum omnium proportiones assignat non tantum præcipuorum, ut octavæ, quintæ, quartæ, sed aliorum omnium etiam minorum. Tum Systemata omnia explicat, diatonicum, chromaticum, enharmonicum, singulaque eorum intervalla, seu chordas determinat, modos item seu diversas octavæ species attingit, neque ulterius progressa videtur, atiquorum musica. Exinde ad Systema Aretini progreditur, totamque hodiernæ musicæ rationem exponit, scalamque communem diatonicis intervallis distinctam proponit, tum ad mensuras quæ ad rithmicam pertinere videtur progreditur. Melopeiam item seu plurimarum partium, simul canentium compositionem docet de qua apud antiquos ne vestigium quidem reperitur. Atque hi sunt musicæ nostræ fines. Ut autem melius ejus progressum videamus, per singulas ætates, & tempora eam considerabimus.

Centum circiter annis ante Urbem conditam ante Christi nativitatem annis 852, annis 75 ante primam Olympiadem, floruit Terpander Thebanus Musicus celeberrimus, Homeri pronepos. Lyram quam Orpheus tetrachordum fecerat, Eptachordum reddidit modulos lyricos, seu leges fidium edidit, suis & Homeri carminibus modos adjecit quibus canerentur. Primus dicitur de musica scripsisse, & Lacedæmonios dissidentes cantus suavitate sedasse, & quater in Pythiis ludis victor evasisse. De eo sic loquitur Plutarchus, *Omnino Cytharæ cantus Terpandri ratio omnino simplex perrexit, usque ad ætatem Phrynidis, non enim antiquitus pro libidine cujusque (uti nunc) licebat fidibus canere; nec rithmos, concentusve transferre: in ipsis namque legibus accommodatam cuique tensionem tuebatur, cujus rei causa id nominis inditum erat: leges enim sunt vocatæ ne quis per unam speciem formamque tensionis transgrederetur.* Appositè videtur lyram Eptachordum instituisse, cum septem vocibus totum diatonicum systema contineatur; utrum vero hæc musicæ ratio tantum ex judicio sensus procederet, ut solent musici vulgares multa identidem nova comminisci, licet rationes nesciant, ignoratur.

Xenocrates Italus Locrensis post Terpandrum floruit, dicitur fuisse Pæanum conditor. Ardulus Træsenius Tibianam musicam instituit, cujus postea circa primam Olympiada Clonas imitatus Terpandrum leges tulit. Ita Plutarchus.

Circa primum annum Urbis, ante Christum 751. Olymp. 6. anno 4. Sacadas Argivus fuit conditor modorum; Hoc est, videtur invenisse, multas esse species octavarum; pro varia dispositione duorum hemitoniorum, quæ in qualibet octava inveniuntur, inventor legis tripartilis, fuit antiquior Pindaro, ter in ludis Pythiis vicit.

Secundo Urbis sæculo, nempe ante Christum 600 annis, Simonides lyricus octavam chordam lyræ addidit ut octavam perficeret.

Lycaon musicus novum cordarum ordinem invexit. Octavam lyræ chordam nonnulli illi tribuunt.

Sapho Poetria, & musica Plectri usum invenit, cum antea solis digitis lyra pulsaretur. Plectrum scilicet adhibuit ne digitosattereret. Dicitur inventrix mixtolydii concentus.

Pythagoras musicæ theoriam ex fabri malleis adinvenit, & intervallorum proportiones determinavit.

Damon Musicus aliquos adolescentes luxuriæ deditos, cantu ad bonam frugem revocavit, ita Zarlinus.

Tertio Urbis conditæ sæculo ante Christum 500 annis, Phrinis insignis Cytharœdus primus apud Athenienses cithara cecinit. Tulit præmium in Panathenaicis, fuit discipulus Aristoclis qui ex Terpandi familia ortum ducebat.

Phrinicus cujus Aristoteles meminit fuit insignis musicus, & inventor carminis tetrametri.

Lasus Herminæus primus de musica scripsit. Diocles item de musica scripsit ut vult Suidas.

Ismænius Coraules teste Boëtio multos cantu à morbis & ægritudinibus liberavit.

Nicomachus Arithmeticus de musica etiam egit, ex Zarlino.

Quarto Urbis sæculo 400 ante Christum annis Antisthenes Socratis auditor de musica scripsit. Laert. Sicut & Simias Thebanus ejusdem Socratis discipulus.

Epicurus item, Plato in suis Operibus multa habet ad musicam spectantia.

Quinto urbis sæculo 300 ante Christum annis. Euclides Megarensis insignis geometra cujus extant elementa, data, aliaque nonnulla, introductionem ad musicam composuit, in qua primò bene explicat, distinctionem trium generum, Diatonici,

Chromatici,

Chromatici, & Enharmonici, & horum singula intervalla satis distinctè explicat, & proportionem. Hoc Opus latinè vertit Marcus Meibonus notisque illustravit, anno 1652.

Aristoteles librum unum de musica scripsit.

Theophrastus Erissius Aristotelis discipulus, & successor, reliquit tres libros de musica, unum de musicis, harmonicorum unum. Diog. Laert.

Aristoxenus Harmonicorum libros tres edidit, in quibus de antiquorum musica, præcipuè de triplici genere nempe Diatonico, Chromatico, Enharmonico, de consonantiis item, & intervallis sed valde obscurè. Aristoxenus fuit filius Mnesij, qui & Spintharus vocabatur, musici Tarentini; hic cum Mantineæ aliquandiu vixisset, factus est philosophus, fuitque auditor Patris, Lampri Erythræi, Xenophyli Pythagorei, denique Aristotelis, quem mortuum probris laceravit, quod Scholæ successorem reliquisset Theophrastum.

Vixit Alexandri temporibus, composuit musicam & historias, hunc Marcus Meibonius vertit & notis illustravit 1652. In quarto.

Heraclides Ponticus Speusippi, & Aristotelis auditor scripsit duos libros de musica.

Timotheus Musicus cum ad Alexandri magni mensam orthium caneret, Regem ad arma incitavit, cum vero mitiùs caneret Regis ira resedit. Chromaticum genus invexit, cujus tamen meminit Euclides. Terpandri septem chordis alias quatuor addidit.

Dicitur & Xenophantus cantu Alexandrum ad arma concitasse.

Sexto Urbis sæculo ante Christum 200 annis, dicitur Archimedes ab aliquo sancto Patre invenisse organum Pythaulicum, in quo nempe essent innumeri meatus sonorum, & segetes fistularum.

Octavo urbis sæculo ineunte quinquaginta circiter annis ante Christum floruit Cleomedes cujus Arithmetica, & Harmonica dicitur asseruari in Bibliotheca Vaticana.

Primo Christi sæculo Plutarchus libellum de musica edidit, multa eruditione refertum.

Secundo Christi sæculo Ptolemæus tres libros harmonicorum edidit quos citat Nicomachus. Hoc Opus dicitur asservari in Bibliotheca Oxoniensi. Systema diatonicum simplex & naturale vocatur, & monochordon Ptolemaicum. Fuit autem Ptolemæi ratio media inter rationem Pythagoræ & Aristoxeni. Primus rationem tantum adhibebat judicem, Aristoxenus sensum. Ptolemæus voluit ut in harmonicis utriusque judicium sequeremur, Nicomachus Gerassenus Pythagoricus Harmonices manuale edidit duobus libris. Primus liber est de harmonicis elementis, in quo agit de musica cœlesti Planetarum. Tum ostendit musicam in numeris esse, & septem chordis octavam fuisse additam. Exinde docet quomodo arithmeticæ sonorum rationes sint inventæ. De bisdiapason in genere diatonico. De sonorum secundum tria genera progressione.

Liber secundus explicat intervalla musica.

Vixit ut censet Meibonus qui primus eum explicuit, & notis illustravit circa Ptolemæi tempora. Dicitur Gerassenus, à Geraza, cavæ syriæ urbe. In quarto Amstelodami 1652.

Theon Smirnæus fuit ille quem Plutarchus inducit de maculis lunæ disserentem. Hic fuit Philosophus Platonicus, qui loca Platonis ad Mathesin spectantia explicuit quare liber ejus est ferè totus de arithmetica, & musica. Titulus autem libri est Theonis Platonici, eorum quæ in mathematicis ad Platonis lectionē utilia sunt expositio. In hoc Opere vix quidquā invenies, quàm quod in iis qui de musica egerunt, aut de numerorum divisionibus, reperitur. Hoc Opus ex Thuana Bibliotheca latinè vertit, & commentariis illustravit Ismael Bullialdus. Parisiis in quarto 1644.

Quinto Christi sæculo S. Augustinus 6 libros de musica edidit.

Sexto Christi sæculo ineunte Boetius Exconsul, & Patritius ordinarius tractatum edidit de musica. In primo libro explicat naturam consonantiæ, & primam antiquorum musicam, cum systemate vocum seu chordarum. In secundo explicat in particulari, singularum consonantiarum proportionem. In tertio aliorum intervallorum præcipui toni. In quarto monochordi divisionem præcipue diatonicam per singula tetrachorda. In quinto ea refert in quibus veteres authores non conveniunt. Totum Opus optimum, multa scitu digna complectens præcipue circa sonorum naturam, quam in motu positam esse existimabant.

Alypius item introductionem musicam edidit quæ tota consistit in descriptione modorum secundum tria genera, diatonicum, chromaticum enharmonicum, datque notas quibus notæ in singulis modis notentur, quarum difficile est recordari.

Hunc item Meybonius latinè vertit & notis illustravit.

Aristides Quintilianus musicæ libros 3 edidit, in quibus quæ à prioribus dicta sunt collegit, & brevitate concinna explicuit, hunc Meibonius notis illustravit.

Bachius Senior Græcus author Isagogen Harmonicam edidit per dialogismum, in qua veterem Musicam, & Harmoniam explicat, sed nimis breviter, ita ut vix intelligi possit.

Hoc Opus ex Bibliotheca Regia Morellus professor Regius latine vertit, & notis illustravit. Parisiis in octavo 1623.

Psellus author Græcus compendium musicæ ita breve edidit, ut in eo nihil addiscas nisi aliunde scias. Hoc Opus Xylander vertit & notis illustravit.

Ut autem Antiquos omnes complectar Euclidis isagogen harmonicam primus edi curavit Parisiis Doctor Joannes Pena anno 1557.

Aristoxeni filii Mnesiæ seu Spinthari Tarentini libros 3 elementorum musicorum è Græco latinos fecit Antonius Hermannus Gegava, Graviensis, sicut & Nicomachi libros duos.

Alypius Cassiodoro librum scripsit de musica.

Gaudentius item isagogen harmonicam quæ superesse dicitur in regia bibliotheca.

Varro, Ptolemæus, & Censorinus scripserunt de musica.

Aristides Quintilianus, Bachius Isagogen musicam.

Porphyrius scripsit de musica. Opus hoc dicitur esse in Bibliotheca Regia Parisiis.

Tota musica Antiquorum consistit in proportione consonantiarum assignanda, nominibus singularum chordarum in duplici octava per singula tetrachorda, in distinctione triplicis generis diatonici, chromatici, enharmonici, neque tamen bene explicant usum chromatici, & enharmonici. Item in distinctione modorum, seu specierum octavæ. Nihil habet quod spectet ad praxin, nihil de tactu, & mensuris, sive durationum prolationis cujusque vocis, nihil de compositione, etiam unius cantus. Multo minus de compositione plurimarum partium, immo nullum extat vestigium quod antiquitus plures simul diversis vocibus canerent. Citatur à nonnullis aliqua lex, qua cautum est ut si quis unum phonascum occiderit, plectatur & mulctetur, quasi omnes occidisset, eo quod reliqui reddantur inutiles. Hanc tamen non legi.

Sexto Christi sæculo Sanctus Gregorius magnus Papa in musica excelluit, eique ita addictus fuit, ut ipsemet Clericos Musicam doceret. Cantum Ecclesiasticum reformavit, qualem nunc habemus, nempe cantum planum, seu firmum, quem propterea Gregorianum nominamus.

Septimo Christi sæculo Isidorus Hispalensis Episcopus omnium mathematicarum compendia inserit.

Martianus Capella qui & Felix Mineus dictus est de quatuor Mathematicis scripsit. De musica autem libros 6.

Octavo Christi sæculo Venerabilis Beda scripsit de musica.

Decimo Christi sæculo temporibus Gregorii septimi, Guido, sive Guidmundus, patria Aretinus, prius Benedictinus Monachus cœnobii S. Leufredi apud Ebroicenses Normannos, postea Cardinalis, & Archiepiscopus Aversanus. Hic dum monachus esset duos ad præsulem Theobaldum scripsit libros de musica, unum prosa, alterum carmine partim heroico, partim trochaico rythmico. Idem adversus Berengarium, scripsit de corpore, & sanguine Christi Domini, in venerabili Sacramento. Hic novum excogitavit systema, seu monochordi divisionem, magis accommodatam musicis instrumentis. Cum enim in divisione monochordi diatonica vulgari, & Ptolemaica admittatur distinctio toni majoris, toni minoris, & hemitonii majoris, & quinta præcisè constet tonis majoribus duobus, uno minore, & uno hemitonio, invenitur in decursu una quinta falsa. Ut quinta quæ est ab A ad E falsa est, nam A B est tonus minor, B C hemitonium, C D tonus major, D E tonus minor. Quare deficit unum comma quod sensibile est. Ipse nulla habita ratione toni majoris, & minoris, hunc unius quintæ defectum, aliis omnibus quintis communicat, & quasi dividit, ita ut nulla deficiat aut abundet nisi quarta parte commatis, quæ insensibilis est; ex quo fit ut in organo Pythaulico, omnes quintæ sunt nonnihil diminutæ. Hoc systema quod valde commodum est dicitur Aretini: ut autem illud excogitarit, debuit perfectè scire antiquorum musicam. Hic excogitavit scalam seu Gammam communem. His vocibus ut, re, mi, fa, sol, la, desumptis ex hymno sancti Joannis, Ut queant laxis Resonare fibris, Mira gestorum Famuli tuorum, Solve &c. Voluit autem hanc ita disponere, ut qui sciret intonare exachordon ut, re, mi, fa, sol, posset omnes voces intonare: disposuitque omnia per exachorda, si adhibuisset unam vocem si, quemadmodum factum est à quadraginta annis, omnes mutationes seu transitus vitasset.

Anno 1240 floruit Albertus Episcopus Ratisponensis cognomento magnus qui inter alia multa scripsit de musica.

Anno 1503 claruit Jacobus Faber Stapulensis interque multa alia 4 de musica libros reliquit. Titulum apposuit Elementa Musicalia. In iis duos suos præceptores laudat Jacobum Labinium, & Jacobum Turbelinum. Hos libros tanti fecit Josephus Blancanus, ut inde jubeat auspicari, tum ad Boetium accedere, Aristoxenum, Ptolemæum, Euclidem.

Anno 1518 Franchinus Gafurius Laudensis 1
Regius Musicus, delubrique Mediolanensis phonascus, De harmonia musicorum instrumentorum Opus edidit, in quatuor libros divisum.

In primo loquitur de genere diatonico, & dispositione quatuor tetrachordon, hypaton, meson, diezugmenon hyperboleon, item ex synnemenon, de speciebus diatessaron, diapentes, diapason in systemate diatonico, de proportionibus & modis auferendi unam proportionem ab alia.

Liber secundus est de genere chromatico, de conversione chromatici in diatonicum aut enharmonici. De instrumento continente quatuor octavas.

In tertio de continua proportionalitate arithmetica, geometrica, harmonica, ostenditque tres sonos in medietate harmonica consonos esse, in aliis dissonos.

In quarto de' modis antiquorum, tum aliqua habet de harmonia Cœlesti.

Nullus plura dixit de distinctione generum diatonici, chromatici, & encharmonici.

Anno 1529 Ludovicus Folianus Mutinensis 2
Musicam Theoricam composuit in duas sectiones divisam, in prima agit de diversis speciebus rationum in genere. In secunda hanc rationum seu propositionum singulis consonantiis applicat, ostenditque in singulis quam rationem habeat major terminus ad minorem, seu gravis ad acutum. Dividit autem chordam in 120 ex qua auferendo sextam partem, quintam, quartam, tertiam, tres octavas partes & tres quintas & medietatem, habet omnes consonantias, exinde monochordi divisionem & manus quam gammam vocamus compositionem.

Hæc omnia communia sunt, sed satis pro illo tempore benè explicata.

Anno 1529 Musica Petri Aronis Florentini or- 3
dinis Hyerosolimitani sub titulo Toscanello, nonnihil aucta & correcta in lucem prodiit in duos libros divisa. In quorum primo post nonnulla in laudem Musices loquitur de modis & de valore notarum in singulis modis, seu proprie mensuris, tum de punctis aliisque notarum alterationibus. In secundo agit de tono hemitonio singulisque consonantiis, tum de genere diatonico chromatico, enharmonico, exinde de contra puncto & regulis ad compositionem necessariis. In fine aliquid habet de proportionalitatibus & divisione monochordi.

Opus hoc ad praxin potius pertinet quàm ad Theoriam, & habet communia præcepta musicæ hodiernæ, non tamen omnia.

1552 Gaudentius Philosophus harmonicorum 4
introductionem perfecit. In qua loquitur de sono, voce, intervallis, generibus, aliisque. Brevis est. Hunc Meybonius notis illustravit.

Bachius secta Aristoxenius pariter introductionem Musicam edidit brevem, quæ tota est in explicandis septem tantum modis seu diapason speciebus. Hanc Meybonius vertit & notis illustravit.

Anno 1530 floruit Henricus Loricus Glorea- 5
nus Helvetius qui anno 1549 libros de musica eruditos edidit.

Anno

Anno 1577 clarus fuit Orlandus Laſſus, qui multa muſica compoſuit, de arte non ſcripſit.

1575 Franciſcus Maurolycus Meſſanenſis muſicas traditiones edidit. Initio habet quaſi Epitomen Boëtianæ Muſicæ primo initio exinde in fine.

Mancum tamen eſt Opus, in quo ſcilicet multa deſiderantur quæ dici poterant. Venetiis in quarto 1575.

7 Anno 1583 Joſephus Zarlinus Chiogenſis, Præfectus muſicæ Sereniſſimæ Reipublicæ Venetæ, librum edidit de muſica Italicè, in quatuor partes diviſum ſub titulo, *Inſtitutioni Harmoniche*.

In prima parte poſt laudes Muſicæ, ejuſque diviſionem loquitur de numeris & de proportionalitatibus, eorumque ſpeciebus reguliſque ad addendas, ſubtrahendas multiplicandas, & dividendas rationes, ſeu proportiones.

In ſecunda parte agit primo de antiquorum muſica, tum de ſonis acuto, & gravi. De conſonantiis & diſſonantiis, de triplici genere diatonico, chromatico, enharmanico, eorumque inventoribus; tum de diviſione monochordi ſecundum hæc tria genera, diatonicum eſſe naturale, diverſum tamen ab eo quod in inſtrumentis muſicis invenitur.

In tertia parte agit de contra puncto, & regulis ad componendum, tum de menſura ſyncopa, de compoſitione trium, aut quatuor vocum.

In quarta parte explicat modorum naturam, nempe de modis Antiquorum, tum de modis hodiernis.

Hic author multa eruditè ſcribit, nimis mihi fuſus videtur, ſermocinationes enim habet longiores, & parum ad rem facientes, videtur hanc materiam exhauſiſſe. Poterat breviſſimè tota hæc doctrina tradi.

8 Anno 1588 Joſephus Zarlinus Chiogienſis præfectus muſices Sereniſſimæ Reipublicæ Venenetæ, lectis omnibus Antiquis, quotquot nempe in ejus manus venerunt, librum edidit Italicè cum titulo, *Sopplimenti muſicali*, in libros octo diviſum.

In primo aliqua communia, & quaſi ſequentium principia proponit.

In ſecundo agit de ſono & voce, quaſi de elementis muſicis, eorumque accidentia conſiderat.

In tertio de intervallo ſeu de conſonantiis & diſſonantiis.

In quarto de generibus muſicis, de diatonico præſertim & de diviſione varia unius octavæ.

In quinto de ſyſtematibus.

In ſexto de tonis & modis.

In ſeptimo de mutationibus.

In octavo de melopæia.

Hic tractus multa habet inutilia, nempe diſcurrit aliquando longius ſupra univerſalia; poterant item multa dici breviùs, & clariùs meo quidem judicio; vix enim ab illo intelligeretur, ab eo qui aliunde in Theoria non benè eſſet verſatus.

Anno 1615 Salomon de Caux Architectus militaris Electoris Palatini tractatum gallicum edidit de muſica, ſub titulo, *Inſtitution harmonique*. In duas partes dividitur.

In primo libro agit de conſonantiis, earumque rationibus, & diviſione monochordi.

In ſecundo tradit praxin hodiernæ muſicæ, & regulas compoſitionis. Nihil habet niſi valdè commune.

1620 Joſephus Blancanus Bononienſis Societatis Jeſu, geometricum tractatum habet de Echone. Habet autem in hoc tractatu theoremata novemdecim, problemata ſex. De hac materiâ primus quod ſciam egit geometricè & ſolidè. In quarto Bononiæ 1620. In fine aliorum Operum. 9

1639 P. Antonius Parran è Societate Jeſu, Opus gallicum de muſica edidit, de theoria ſcilicet & praxi, comprehendentem præcepta compoſitionis. 10

Habet quidem muſicæ hodiernæ præcepta, antiquam tamen muſicam non ſatis explicuit. Pariſiis in quarto 1639.

Renatus Des Cartes compoſuit Opuſculum de muſica, ſed nimis ſuccinctum & breve, in eo enim multa deſiderantur tam circa veterem quam novum muſicam. 11

1644 Theonis Smyrnæi Platonici muſicæ, eorumque quæ ad Platonis lectionem utilia ſunt expoſitio, in lucem prodiit operâ Iſmaelis Bullialdi, à quo eſt in latinum verſa & notis illuſtrata. In eo opere eſt tractatus de muſica, in quo habetur tota antiquorum muſica valde clarè, ita ut ex eo authore videatur deſumpſiſſe Michael Pſellus ea quæ de muſica dicit, & ex eo alij conſequenter. 12

Anno 16,o Pater Athanaſius Kircher Fuldenſis è Societate Jeſu, muſurgiam univerſalem edidit, duobus tomis in decem libros diviſam. 13

In primo ſonorum naturalium productionem, ſonoſque & voces plurimorum animalium conſiderat, & organum auditus explicat.

Secundus de muſica antiquorum, eorumque muſicis inſtrumentis agit.

Tertius eſt de intervallis ſeu conſonantiis & diſſonantiis, eáque occaſione proportionalitates explicat eaſque conſonantiis adaptat, de tetrachordis & generibus diatonico, chromatico, enharmonico, agit & de modis tam antiquis quàm novis.

Quartus eſt de monochordorum diviſione geometrica libro quinto novam componendarum melodiarum rationem tradit, in quâ agit iterum de modis, ſeu tonis, de contrapuncto, & regulis compoſitionis.

Sextus liber exhibet inſtrumenta muſica omnis generis, eorumque Theoriam tradit.

In ſeptimo libro Muſicam antiquam cum nova comparat.

In octavo artem componendi per numeros explicat, quâ nempe Imperitus in arte muſica componere poſſit perfectè.

Nono reconditiora ſonorum arcana reſerat, multáſque affert experientias circa naturam conſoni & diſſoni, circa Medicinam per Muſicam operantem, circa reflexiones ſonorum & alia ſimilia.

In decimo oſtendit naturam in omnibus Muſicæ leges obſervaſſe.

Hoc Opus multa optima de muſica habet minutias tamen multas & parerga continet; ideóque eſſet multo perfectius ſi ad tertiam partem redigeretur & paulo melius ordinaretur.

P. Gaſpard Schotus Regiſcurianus in ſuo Curſu mathematico muſicam tradit, de antiquorum muſica, ita breviter diſſerit, ut tantum termini percipi poſſint. Muſica recentiorum eſt paulo uberius explicata. 14

1652 Marcus Meibomius antiquæ muſices authores ſeptem, nempe Ariſtoxenum, Euclidem, 15

Nicomachum

Nicomachum Alypium, Gaudentium, Bachium seniorem, Aristidem Quintilianum, Martianum Capellam. Primos sex latinè vertit, omnes restituit, & notis illustravit.

In præfatione Kircherium nostrum reprehendit, quòd in sua Musurgia multa antiquæ musicæ placita aliter explicuerit, quam reverà habuerint.

In hoc Opere antiquorum musicâ continetur & benè explicatur. Amstelodami in quarto 1652.

CAPUT VIII.

Progressus Opticæ.

PArtem Matheseos jucundissimam aggredimur, quam ferè novam esse dicimus, cùm ad Alhazenum usque ita pauca sint, quæ ab Antiquis authoribus de hac parte sunt edita, ut ad constituendam partem ab aliis distinctam, & separatam non sufficiant. Hujus opticæ præstantiam commendat oculi dignitas, à cujus actione nempe ab actu videndi suam habet appellationem, regia scilicet scientiarum via; si enim Philosophia defluxit è cœlo, oculis sequestris deducta est in hospitium. Accedit objecti nobilitas, cùm coloribus, & lumine nihil illustrius cogitari possit. Modus ipse cognoscendi, intellectionis æmulus, qui res etiam dissitas, apprehendat, velocitas item tanta, & nullum temporis intervallum admittat, accedit certitudo qua major in sensibus cogitari non potest. Varietas item objectorum, cùm nullo sensu tot rerum differentias percipiamus, corporum enim colores, magnitudinem, continuitatem, discretionem, numerum, figuram, situm, motum, quietem oculis distinguamus. Sub hoc Opticæ nomine sex tractatus comprehendimus, nempe Opticam universalem, seu in genere, perspectivam, catoptricam, dioptricam, projectionem sphæræ in planum, & Gnomonicam. Cùm enim visio directis, reflexis, & refractis radiis peragatur, appositè quatuor in Optica partes constituimus; primam quæ generalis oculorum affectiones considerat. Secundam perspectivam seu de radio directo. Tertiam Catoptricam de reflexo. Quartam dioptricam de refracto. Quia vero Astrolabia veram speciem perspectivæ continent, in qua nempe, assumpto plano circuli cœlestis pro sectione, oculum in aliquo puncto collocamus, oppositumque spectamus hemisphærium. Gnomonica pariter ex styli extremitate, hemisphærium cœleste in extremitate styli statuit, & in opposito plano cœlestes orbes intuetur. Cùm igitur utraque sit vera perspectivæ species, sub eodem genere debuit collocari. Optica ergo post exactam oculi descriptionem, organum præcipuum in quo exercetur visio determinat, quod adeo exactè perficit, ut ea omnia in materiali oculo exhibeat quæ naturali accidunt. Exinde singulas oculorum deceptiones, circa magnitudinem, distantiam, numerum, distinctionem. Omnia oculorum vitia detegit, tam myopum qui viciniora melius vident, quam presbytarum qui remotiora distinctius intuentur. Ad hunc tractatum referimus totam luminis propagationem, striatas imagines, aliasque diformes, quæ ex certo, & determinato loco spectatæ reformantur.

Perspectiva pictoribus perutilis suis geometricis demonstrationibus, si quæ alia matheseos pars ornatur, eam in sex partes commodè dividere placet; quarũ prima fundamentales propositiones cõtinet. Secunda circa horizontalia plana, seu ichnographias perspectivè describendas occupatur. Tertia scenographiam seu elevationes tradet. Quarta puncta accidentalia explicat. Quinta in laquearibus, & fornicibus perspectivam exercet. Sexta denique perspectivas pluribus constantes partibus separatis, umbrarumque descriptiones attinget, inventumque à 40 annis parallelogrammum delineatorium explicat.

Catoptrica visionem per reflexionem factam explicat, quam in tres partes partimur; quarum prima reflectionis leges inquirit, tum speculorum planorum proprietates omnes explicat, nempe cur imago tantum intra profunditatem speculi immersa videatur, quanta est objecti à speculo distantia, cur dextra apparent sinistra, in horizontalibus eversa, cur in speculis parallelis distantia, & objectum multiplicentur. Ex quibus multæ deducuntur praxes perjucundæ, ut in exigua capsa porticum efformemus, quæ in immensam planitiem excurrere videatur, sic objecta quantumlibet multiplicamus, omnes circa regiones nativis coloribus radio solari adumbramus. Secunda pars specula convexa intuetur, inquiritque cur in iis objecta propiora, nonnihilque incurva spectentur, cur in iis reflexi radii dispergantur, atque adeo myopibus sint utilia. Exinde ad Cylindra & Conica descendit, pervulgatumque de imagine difformi per speculum cylindricum, aut conicum reformanda, problema proponit. Tertia specula concava considerat; primoque ostendit quam vim ad comburendum ex radiorum unione possideant. An verum sit vel fabulosum, quod de Archimede Classem Romanorum speculo concavo incendente fertur, examinat: item an possibilis sit linea ustoria infinita. Tum de radiorum parallelismo, modicoque luminis decremento, quo fit ut ad trecentos passus de nocte legere liceat. Denique cur objecta antrorsum, non intra profunditatem speculi eversa videantur inquirit, & Telescopia ex speculis concavis, & convexis componit.

Non minus jucunda & illustris est Dioptrica quæ pariter tres sibi partes vendicare potest. Prima post explicatam luminis naturam, & leges, specillorum convexorum, & concavorum proprietates aperit. Convexorum quidem ad radiorum unionem & consequenter ad comburendum, ad exprimendas rerum imagines, formandos luminis penicillos, juvandosque presbytarum oculos; concavorum ad radiorum dispersionem, myopum oculis perutilem. Neque vero polygonas lentes, ad objectorum multiplicationem, aut dispersorum unionem missas faciet, sicut nec maximè convexas ad microscopia. Secunda, multa specilla componit, & comparat, telescopiáque communia ex lente convexa, & specillo concavo construit, tum ex duobus, & tribus, & quatuor convexis, microscopia item melioris notæ, magicam item laternam, methodum observandarum eclypsium, aut macularum solarium transmisso per tubum radio solari: addit item nonnulla ad praxin spectantia. Tertia pars de refractionibus coloratis agit; primóque de prismate triangulari, tum de Iride ejusque proprietatibus, rotunditate, distantia, motu, tum de coronis, pareliis, virgis, crepusculo & aurora.

Hæc dioptrica ferè tota nova est, de qua tantum leviter egerunt antiqui authores, nempe attigerunt

gerunt eam refractionem, vi cujus baculus in aqua fractus apparet, de specillis autem non egerunt, Alhazen & Vitello nonnulla habent de globo vitreo objectorum apparentiam augente, ex cujus occasione paulo post nempe circa annum 1200 inventa sunt specilla convexa quibus utuntur senes, & concava quibus myopes, cum ante illud tempus nullus fuerit eorum usus. Asserente Jordano celebri ex Prædicatorum ordine concionatore, qui floruit ab anno 1200 ad 1235, in una ex suis concionibus, ante 20 annos fuisse inventa perspicilia. Dicunt nonnulli eum fuisse anno 1220. Telescopia vero initio hujus sæculi inventa sunt, quidquid de iis demonstratur novum est; quare tota fere dioptrica inter hujus sæculi inventa annumeranda est.

Ad opticam, Astrolabiorum doctrinam revocamus, ut veræ perspectivæ speciem, quæ nempe secundum regulas perspectivæ procedat, quamvis enim à nonnullis hæc pars ad Astronomiam revocetur, eo quod Astrolabiis utamur ad solvenda problemata astronomica, verè tamen est pictura, qua in plano Sphæram cœlestem adumbramus. Cum igitur perspectiva omne objectum in plano exprimat, illius etiam erit cœlum ipsum in planum projicere. Idem etiam de Gnomonica dicendum est, quæ speciem Astrolabii exprimit, circulosque cœlestes in quolibet plano adumbrat.

Astrolabiorum doctrinam in quinque partes dividimus, cum enim globum cœlestem aut terrestrem, in planum projiciendum, seu exhibendum suscipiamus, Prima pars globum cœlestem, & terrestrem considerabit, eorumque usus aperiet. Secũda erit de Analemmate in quo scilicet pro tabella meridianũ assumimus, oculumque infinitè removemus. Tertia Astrolabiũ universale, in quo scilicet idem tabellæ planum, nempe meridiani planũ, & oculus in puncto veri ortûs, aut occasûs statuitur. Quarta in plano æquatoris, aut alio illi parallelo cœlestes orbes describit, oculo polum Antarcticum obtinente. Quinta denique ex Nadir, hemisphærium oppositum in plano horizontali tanquam in tabella contemplatur.

Quamvis cœlum sphæricum sit, in plano tamen ita graphicè à Gnomonica exprimitur; ut sol in cœlo moveri non possit, quin eundem in pictura nostra motum animadvertamus. Pro tabella igitur quodlibet planum assumitur, & oculus in extremitate styli collocatur, ex quo trans tabellam hemisphærium oppositum contemplatur. Nullius quidem momenti videtur horologiorum delineatio, cum eam cæmentarii etiam nostri satis exactè perficiant; eorum tamen quæ ad horologiorum demonstrationem requiruntur scientia, homine digna semper mihi visa est. Horologia sciaterica varia sunt, cum nulla sit materia in qua fœlicius luserit mathematicorum ingenium. Astronomica, Babylonica, Italica describimus, & in iis verticales circulos, Almicantarath circulorum domorum cœlestium, parallelos signorum, augmentum, & decrementum dierum, totumque Kalendarium inscribimus. Solaria, lunaria, ad stellas componimus. In omni plano ea delineamus, æquinoctiali, polari, horizontali, verticali, declinante, quomodolibet inclinato. Per radium directum, reflexum, & refractum. Portatilia item in annulis, cylindris, armillis, scipionibus. Gnomonicam in quatuor partiemur, Prima pars de horologiis in quocumque plano per radium directum describendis agit. Secunda portatilium variam supellectilem subministrat. Tertia exhibet horologia reflexa. Quarta tradit refracta.

Ut autem melius hujus Opticæ progressus innotescat, eam per singulas ætates considerabimus, authoresque qui eam promoverunt referemus.

Secundo Urbis conditæ sæculo ante Christum sexcentis annis Anaximander Milesius horologium solare descripsit. Plin. & Laertius.

Tertio Urbis sæculo ineunte, 552 annis ante Christum, Anaxagoras Clazomenius scripsit de radiis visivis, vel ut puto de ratione scenographices, seu perspectivæ. Vitruv. l. 7.

Quarto Urbis sæculo ante Christum 452. Democritus Milesius uno anno major quam Socrates, scripsit Actinographiam sive de radiis, hoc est perspectivam. Ita Laertius.

Eudoxus Gnidius invenit Arachnen horologium videlicet solare, in quo lineæ horariæ, & arcus signorum, in modum araneæ se intersecant.

Philippus Mendæus discipulus Platonis deprehendit Iridem insequentes se fugere, & fugientes sequi. Philosophus Platonis auditor scripsit de opticis.

Quinto Urbis sæculo 300 ante Christum annis, Euclides Megarensis Geometra, opticam, & catoptricam scripsit, quam Joannes Pena Mathematicus Regius latinè vertit è Græco anno 1604.

In optica continentur tantum generalia quædam placita de radio directo, quæ possunt esse usui ad perspectivam. Sed hæc optica valdè imperfecta est.

In catoptrica continentur tantum quædam proprietates speculorum planorum, concavorum sphæricorum, & convexorum: valde item imperfecta est hæc captotrica. Parisiis 1604.

Lucius Papyrius Cursor Romæ primum solare horologium, publico loco construxit.

Aristoteles habet nonnulla de Iride, & Halone. Extabat alias liber Aristotelis de optica; ejus meminit Laertius. Opticam Aristotelis viderat Vincentius Bellovacensis. Dicitur ibi Aristotelem existimasse pyramidem opticam esse exagonam, non conicam.

Aristarchus Samius Scaphen, seu horologium solare in hemisphærio descripsit.

Sexto Urbis sæculo, 200 ante Christum annis, Archimedes Syracusius dicitur speculis concavis classem Romanorum incendisse, quod falsum esse plerique modo existimant.

Septimo Urbis sæculo Apollonius Pergæus, insignis Geometra, pharetram solaris horologii genus invenit. Ita Vitruvius.

Octavo Urbis sæculo ineunte, 50 ante Christum annis, Theodosius Tripolita cujus sunt sphærica, Horologium ad omne clima id est universale excogitavit. Vitr.

Dionysiodorus invenit conum, id est horologii solaris genus figuram conicam referens, vel descriptum in cono.

Scopas Syracusanus invenit Plinthum, nempe genus horologii in plintho, seu cubo descripti, nempe in summo erat horizontale, in aliis faciebus verticalia.

Patrocles invenit bipennem, genus horologii figuram bipennis referens.

Parmenion invenit horologium quod cœli historiam indicaret, nempe horas, dies, menses, signa Zodiaci &c.

Vitruvius Architectus aliqua scripsit de horologiis solaribus ex analemmate.

Secundo Christi sæculo, Ptolemæus Astronomorum facilè princeps in sua Astronomia scripsit de analemmate,& de Planisphærio. Hoc Ptolemæi planisphærium translatum est in latinam linguam anno 1588 unà cum Jordani planisphærio, praxin ejusdem planisphærii aliquantisper clarius explicantis, & Frederici Commandini Urbinatis in Planisphærium Ptolemæi commentario editum est Venetiis.

Planisphærium Ptolemæi est in plano æquinoctiali non satis explicatum, nos illud clarissimum reddidimus.

Videtur item excogitasse Astrolabium universale in plano meridiano, seu coluro solstitiorum, quo in mappis Geographicis universalibus describendis utitur.

In Commentario Commandini aliqua scenographices principia demonstrantur.

Incertus author vertit ex Græco in Latinum Opusculum Ptolemæi de speculis in duos libros divisum. In primo habet aliquas Propositiones de speculis planis. In secundo de concavis. Totum Opus non excedit duo, aut tria folia. Nihil habet magni momenti. Videtúrque supponere lumen esse substantiam quæ motu locali feratur.

Quinto Christi sæculo Proclus Diadochus dicitur Constantinopoli Valentis Classem speculis ustoriis combussisse.

Theon Alexandrinus commentarium edidit in parvum Astrolabium.

Sexto Christi sæculo Heliodorus Larissæus libros duos scripsit qui sunt editi anno 1657 ab Erasmo Bartolino Gasp. filio.

Primus liber suppositiones tantum habet quarum aliquæ prout jacent videntur falsæ. In 2 habet Theoremata circa rerum apparentias, quæ melius demonstrari poterant. Opus tamen antiquitate commendatur.

Additus est tractatus Hypsiclis de ascensionibus rectis partium Zodiaci quæ omnia sunt communia, & melius à Theodosio explicantur, & demonstrantur. Parisiis 1657.

Octavo Christi sæculo Venerabilis Beda scripsit de Astrolabio, & de horologiis.

Anno Christi circiter 1100 floruit Alhazen Scriptor Arabs, qui de optica volumen satis magnum reliquit, nec in libros, nec in Propositiones divisum, sed indigestum, & informe quod Fridericus Risnerius distinxit in libros, capita, & propositiones, demonstrationesque in multis obscurissimas, & mancas suplevit. 7 libros habet hæc Alhazeni optica. In primo considerat colorum, & luminis actionem in oculum, oculi item figuram, & compositionem, visionem item, & quæ ad eam sunt necessaria.

2 Explicat pyramidem visualem, item quomodo videatur color, lumen, distantia, locus, magnitudo, cæteræque visibilium circumstantiæ, aspectum item ab obtutu distinguit.

Tertius circa deceptiones visûs, earumque causas versatur.

Quartus est catoptricus, de reflexione, tam in genere, quam in specie, in plano speculo, in sphærico convexo, & concavo.

Quintus est de loco imaginis objectorum in quacumque reflexione.

Sextus errores ex reflexione ortos detegit,nempe ex speculis planis, concavis, & convexis sphæricis, cylindricis, & conicis.

Septimus Refractiones, deceptionesque ex iis emanantes aperit.

Accessit ejusdem tractatus de crepusculis, & illuminatione terræ, in quo altitudinem Athmosphæræ aliquo modo determinat.

Opus istud obscurissimum, demonstrationes habet ita prolixas, & procedentes per circuitum alienum à materia, ut plerumque facilius sit alias demonstrationes cudere, quam ab hoc authore allatas intelligere. Quare cum jam ultra hujus operis fines progressa sit optica, totus hic tractatus redditur inutilis, & in eo legendo tempus & opera perditur. In folio.

Anno 1250 floruit Vitello Polonus ex matre Turinga, scripsitque suum de optica librum in Italia, suasore Guillelmo de Morbeta summi pontificis pœnitentiario. Multa videtur sumpsisse ex Alazeno, quem tamen ipse non citat, licet fateatur libros Arabicos super ea materia legisse, & pertæsum esse, verbositatem Arabicam, & implicationem Græcam,Latinos autem paucos super ea materia reperisse asserat. Suam autem opticam in 10 libros partitur.

Primus continet axiomata,& nonnulla geometrica ab Euclidæis distincta.

Secundus propagationem luminis directam, præsertim illuminationem corporum sphæricorum denique propagationem luminis refractam.

Tertius organum visus, & visionem explicat.

Quartus deceptiones quæ visioni accidunt ex radio directo.

Quintus Catoptricus est, considerátque reflexiones in speculis planis, sphæricis, convexis, & concavis, cylindricis, & conicis convexis.

Sextus intuetur ea quæ visui accidunt ex reflexione facta in sphæricis convexis.

Septimus ea quæ ex conicis,& cylindricis convexis.

Octavus quæ ex speculis concavis sphæricis in ordine ad visionem oriuntur.

Nonus de cylindricis, & conicis convexis,item de irregularibus, denique de combustione.

Decimus Refractiones, & deceptiones ex refractione ortas explicat. Iridis item generationem attingit.

Hoc Opus in plerisque prolixitate peccat, ita ut cujusque patientiam vincat. Habet item demonstrationes malè digestas. Insuper multa in hoc opere desunt, ad opticam pertinentia. Non benè explicat oculum. Deceptiones ex radio directo procedentes melius, & brevius explicari poterant. De perspectiva nihil habet. Non benè constituit locum imaginis in speculis præcipuè sphæricis. Dioptricam habet valdè mancam hanc ab invento telescopio auctiorem habemus. Dicuntur ab aliquibus inventa perspicilia circa annum 1300. Dicunt enim Jordanum quemdam concionatorem ex ordine Prædicatorum, qui florebat ab anno 1300 ad 1335 asserere in una concione inventa esse ante 20 annos. Jordanus tamen qui fuit Magister Ordinis, vivebat anno 1220. Hic etiam author non benè explicuit Iridem,denique vix quidquam boni habet, quod in multis recentioribus, meliùs digestum & demonstratum non reperias. In folio.

Nec multò post anno 1279 Joannes Peccamus S Bonaventuræ discipulus postea Archiepiscopus Cantuariensis,& Primas Angliæ humili licet loco natus perspectivam communem edidit. Primus liber est de luce simplici.Secundus de radio reflexo. Tertius est de refracto. Pauca videtur addidisse supra

pra Euclidem Coloniæ Agrippinæ in quarto 1580.

Circa hæc tempora floruit Rogerus Baccon Anglus ex sancti Francisci ordine. Primo describit oculum, non tamen ita benè, ostenditque visionem fieri in nervo optico, tum de speciebus, & in medio, & in pupilla productis, exinde de visione directa ejusque erroribus ab oculo provenientibus. De reflexione item, & refractione, sed pauca dicit de utraque. Habet item Opusculum quod vocat speculum mathematicum, in quo agit de utilitate matheseos. Totum opus potius physicam spectat quàm mathesin. Paucissimas habet demonstrationes quæ rectè procedant. Francofurti in quarto 1614 opera Joannis Combachij Philosophiæ professoris in Academia Marpurgensi. Hic Baccon magiæ accusatus fuit quod esset mathesi addictus. Mortuus est anno 1284, sepultúsque Oxonij.

1 Anno 1516 Joannes Stoflerinus Justingensis apud Tubingam, Astronomiæ Professor, librum composuit de Astrolabio in plano scilicet tropici Capricorni, oculo posito in polo antartico; tractatum in duas partes dividit. In prima parte docet fabricam & descriptionem astrolabij circa sydera, tum etiam ejusdem usum in mensurationibus, qui ultimi usus non tam sunt usus astrolabij quam usus circuli, aut quadrati geometrici in dorso Astrolabij descripti.

Totum Opus demonstrationibus caret, solasque praxes habet & figuras illis appositas. Non dicit se esse inventorem hujus astrolabij.

2 Circa annum 1520 Albertus Durerus Pictor Nurembergensis quatuor institutionum geometricarum libros edidit. In primo methodum tradit designandarum aliquarum linearum, ut volutæ, ellypsis, hyperbolæ, & parabolæ, aliarumque. In secundo superficies pariter varias exhibet. In tertio & quarto corpora solida. Opus non geometricum sed practicum, quod potest esse utile in aliquo pictoribus, & aliis; est tamen parvi momenti, nullámque habet demonstrationem.

3 Anno 1521 prodiit artificialis perspectiva viatoris, latinè & gallicè scripta, in qua præcepta communia sine demonstratione afferuntur satis appositè, qualia in praxi usurpantur. Opus non contemnendum si modo paulò fusius praxes explicaret. Habet autem figuras optimè dispositas, quamvis non elegantes.

4 1548 Gemmafrisius tractatum edidit de annulo astronomico, in quo sunt multæ praxes & usus. Poterant plura addi. Antuerpiæ in octavo 1548.

5 1550 Joannes de Roias libros sex edidit Commentariorum in astrolabium quod planisphærium vocant.

Istud autem Astrolabium in plano meridiano describitur, & oculus infinitè distat. Vocatur autem communiter analemma; tradit autem omnes ejus usus. Usus autem partis posticæ potius ad quadratum geometricum pertinent. Habet item aliquam methodum describendi horologii portatilis.

Tota hæc doctrina poterat breviùs & clariùs tradi. Parisiis in quarto 1550.

6 1551 Orontius Finæus Delphinas regius mathematicus, Opusculum composuit de speculo ustorio ignem ad propositam distantiam producente. In quo & duarum linearum semper appropinquantium & nunquam concurrentium demonstratio colligitur.

Speculum hoc est parabolicum. Hæc proprietas paraboles quod omnes radios axi parallelos in focum colligat, facilius & melius demonstratur, quàm ab hoc authore præstetur. Falsum item fieri posse speculum quod ad quamlibet distantiam per reflexionem urat. Parisiis in quarto 1551.

1553 Nicolaus Simus Bononiensis ibidem publicus professor, Theoricas planetarum in compendium redegit. Non descendit tamen ad particularia, nempe motus ipsos non constituit nec determinat, sed tantum quasi universaliter proprietates theoricarum explicat. In octavo Basileæ 1553. 7

1554 Erasmus Reinoldus Salveldensis librum edidit tabularum directionum discentium prima elementa astronomiæ utilissimum. Additus est canon fœcundus ad singula quadrantis minuta, item nova tabula climatum, parallelorum & umbrarum, appendix libri secundi canonum directionum qui in Regiomontani opere desideratur. 8

Ante tabulas sunt multæ praxes spectantes ad doctrinam primi mobilis, quibus adjunctas habet tabulas proprias. Habet item præcepta ad astrologiam spectantia. Hoc opus benè explicat praxes ad primum mobile spectantes; non tamen satis exactè demonstrat. In quarto Tubingæ 1554.

1559 Pascasius Hamellius Mathematicus regius perspectivam edidit tribus libris. In primo agit de propagatione luminis, & de visu quasi in genere. 9

In secundo agit de reflexione.

In tertio de refractione. Non multa addit supra ea quæ tradidit Euclides. Parisiis in quarto 1556.

1557 Joannes Martinus Problacion egit de usu astrolabii per compendium, illustratum figuris. 10

Hanc materiam nimis breviter attigit, & sine demonstrationibus, aliquos item usus gæodeticos quadrati geometrici descripti attigit: Est autem astrolabium particulare in plano tropici capricorni descriptum. Accessit Procli Diadochi fabrica ususque astrolabii, Georgio Valla Placentino interprete.

Item Gregorii Nicephori astrolabus eodem interprete, in quibus pauca sunt alicujus momenti. Parisiis in Octavo 1557.

1560 Joannes Stofler Justingensis tractatum edidit de compositione & usu astrolabii particularis, descripti scilicet in plano tropici capricorni oculo in polo antarctico constituto. 11

Fabrica hujus astrolabij clarè quidem traditur, sed non demonstrat, nec principia perspectivæ cui innititur traduntur, usus etiam satis clarè exhibentur.

Hic tractatus in gallicum versus est Parisiis in octavo 1560.

1571 Joannes Fleicherus Vratislaviensis de iridibus doctrinam Aristotelis, & Vitellionis certa methodo comprehensam explicuit, nonnullis demonstrationibus. Præmissa sunt optica nonnulla ad horum intelligentiam necessaria. 12

Quamvis hic author non satisfecerit in omnibus, nec veram ubique habeat demonstrationem, habet tamen quamplurima optima & scitu digna. Ideoque suo tempore optimus erat liber. Ulterius tamen in hac materia provecti sumus. Vvitembergæ in octavo 1571.

Anno 1571 Pater Christophorus Clavius Bambergensis Societatis Jesu, gnomonicam edidit satis amplam, in octo libros divisam. In primo demonstrantur varia quæ pertinent ad analemma, 13 ad conicas sectiones, horarios circulos, inclinationem & declinationem planorum. Secundo describuntur horologia, horizontale, verticale, polare, æquinoctiale. Tertio horologia in planis declinantibus & inclinatis. Quarto agit de horologiis in sphæra recta, aut parallela describendis. Explicat item locum, styli magnitudinem, quomodo ad quamcumque styli longitudinem horologium sit construendum. Quinto tabulas construit ad faciliorem horologiorum descriptionem. Sexto Ptolomæi analemmatis uberiorem usum, aliáque ex Commandini opere desumpta. Septimo praxes omnes repetit. Octavo proponit horologia portatilia. Opus hoc bonum est & solidum, tamen est difficile intellectu. Habet enim figuras ita intricatas & demonstrationes ita prolixas, ut cujuscumque patientiam fatiget, in multis mihi fuit facilius aliam demonstrationem cudere & comminisci quàm ab illo allatam intelligere. In hoc præcipuè Opere peccavit, quòd nimis multa coacervet & lectorem obruat, poterant enim pleráque facilius demonstrari. Immo tota gnomonica poterat unica Propositione comprehendi, neque tamen etiamsi in tantam molem excreverit ejus gnomonica, omnia quæ ad hanc materiam pertinent, ut gloriatur, tradidit: cùm de reflexis & refractis alisque non paucis nihil habeat. Laudandus nihilominus, quod ferè primus sit qui gnomicam absolutam suis demonstrationibus ornatam tradiderit.

14 1574 Joannes Baptista Benedictus Patritius Venetus gnomonicam edidit, cujus præcipuæ praxes ab analemmate dependent, quod analemma author se invenisse asserit, antequam analemma Ptolomæi vidisset. Multas continet praxes valdè utiles, quæ in analemmate suas habent demonstrationes, non tamen satis explicatas, ut qui ea in materia peritus non est, possit eas invenire, eo quòd non indicentur sufficienter. Habet tamen multa utilia & propria quibus proficere posset qui jam aliunde gnomonicam teneret, & posset ipse demonstrationes invenire.

Idem author parvum Opusculum edidit de perspectiva, in quo non satis methodicè procedit, nec totam perspectivam tradit, sed tantum errores aliquarum partium detegere satagit. Hoc pariter non intelliget qui aliunde perspectivam nesciverit, quare ex hoc Opusculo magnum emolumentum habere non possumus.

15 1575 D. Franciscus Maurolicus Messanensis abbas tractatum edidit de lumine, & umbrâ ad perpectivam & radiorum incidentiam pertinentia. Item dioptricæ libros tres. In primo agit de perspicuis corporibus. In secundo de iride. In tertio de organi visualis structura, & conspiciliorum figuris. Multa bona habet de radio directo, præcipuè de radii solaris figura per foramen transmissi. Quæ de iride dicit nec sunt satis clara, nec iridis satis naturam explicant. Dioptrica item est valdè imperfecta. In quarto Venetiis 1575.

16 1576 Jacobus Androvet du Cerceau Architectus Parisiensis Perspectivam edidit sub titulo, *Leçons de perspective positive*, in qua solas praxes breviter indicat. Figuræ sunt bonæ, praxes communes, Demonstrationes non satis indicatæ nec explicatæ. Opus tamen hoc artificibus inutile non est.

17 1579 Guidus Ubaldus è Marchionibus montis planisphæriorum universalium Theoricam edidit duobus libris.

In primo agit de planisphærio universali in circulo meridiano descripto, oculo punctum veri ortus aut occasus occupante.

In secundo explicat astrolabium de Royas seu analemma, sed clarissimè, eorumque generationem explicat, & varios usus aperit. Pisauri in quarto 1579.

1581 Michael Coignet Antuerpiensis instru- 18
ctionem novam circa navigationem composuit, unà cum methodo navigandi est ouest hactenus incognita.

In hoc opere sunt omnia, communicatio, navigatio est ouest supponit horologium arenarium exactissimum 24 horarum ex quo facile longitudo haberetur. Antuerpiæ in quarto 1581.

1590 Joannes Paulus Gallucci Salodianus tra- 19
ctatum edidit Italicum de novo Instrumento, quatuor modis composito ad quodlibet horologium perficiendum, reducitur autem ad æquinoctiale. Caret demonstrationibus. Venetiis in octavo 1590.

1599 Joannes Vredeman Frison Perspectivam 20
edidit sub titulo hoc, *Perspective, c'est à dire le tres renommé Art du point oculaire.* Figuras habet elegantes, & bene multas, explicationem modicam, demonstrationem nullam, locutionem Gallicam ferè barbaram. Possunt tamen intelligi praxes ex figuris.

1599 Bartholomæus Pitiscus Grunbergensis 21
in fine suæ Trigonometriæ adjecit decem libros problematum, & inter alia problematum gnomonicorum, in quibus horologia per trigonometriam absolvit, quod ad magnam præcisionem gnomonicam adducit, licèt praxes sint difficiliores. Augustæ Vindelicorum 1599.

Anno 1600 Guidus Ubaldus è Marchionibus è 22
Monte Perspectivam edidit in sex libros divisam. In primo considerat quomodo variæ lineæ in sectione appareant, quæ consideratio fundamentalis est. In secundo data rectilinea figura in plano horizontali ejus in sectione seu tabella apparentiam investigat, seu ichnographiam quamcumque perspectivè delineat viginti modis. In tertio apparentiam prismatum, basin in horizonte habentium, in tabella quacumque etiam inclinata, ex pluribus planis constante, concava etiam, sphærica, conica, cylindrica. Quarto agit de corporum variorum rectilineorum apparentiis, exinde de circularibus figuris perspectivè describendis. Quintus liber agit de umbris; sextus de scenarum apparatu. Doctrina hujus operis solida est & geometrica, tamen methodus paulo difficilior; ita ut nullus in eo solo libro possit perspectivam addiscere, videtur enim non satis ad praxin descendisse, qui tamen in perspectiva mediocriter esset versatus posset ex eo multùm lucis haurire.

1600 Frater Cherubinus Sandelinus Utinensis 23
Capucinus librum edidit cui titulus, *Nova inventio horologiorum*, continens instrumentum ad omnes horas dignoscendas, & ad horologia describenda; ejus autem inventio consistit in instrumento speciem astrolabij præferente; nullas demonstrationes habet sed solas praxes malè, & inextricabiliter explicatas, figuras enim non indicat; ita ut sit difficilius figuram respondentem invenire, quam aliam praxim æque bonam reperire. Habet tamen multa bona quæ si demonstrata essent, & in bonum ordinem digesta mererentur ut in iis ediscendis aliquid temporis impenderetur; sed prout jacent confusionem tantum pare-

re

re possunt. Habet aliquas tabulas supputatas satis utiles.

24 1602 Joannes Paulus Gallucius Saloensis tractatum edidit de fabrica & usu horologii solaris, lunaris, syderalis in parva quadam pixide notati, in qua omnia horarum genera ad omnem latitudinem cernuntur; & multa alia tum ad navigationem tum ad Cosmographiam peropportuna. Tractatus in duas partes distributus, in quarum prima agit de horologii fabrica & usu, est autem horologium æquinoctiale cujus planum secundum omnem loci latitudinem aptari potest. In secunda parte eodem instrumento utitur quasi organo ad alia horologia perficienda.

Opus vulgare & exigui momenti nunc primum latinè versum & in lucem editum. Venetiis in quarto 1602.

25 1604 Joannes Kepler Cæsaris mathematicus Astronomiæ partem opticam tradidit, potissimum de artificiosa observatione & æstimatione diametrorum, deliquiorumque solis & lunæ, cum exemplis insignium eclypsium. Habetur inter alia multa nova tractatus de modo visionis, & humorum, oculi usu contra opticos & anatomicos.

Habet item nonnulla nova circa locum imaginis seu apparentiæ objectorum visorum per reflexionem speculorum convexorum, item per refractionem. Tractatus iste optimus est & magno homine dignus; Videtur tamen non satis ordinatus, & ab eo tempore multum proveximus tam dioptricam quam catoptricam. Francofurti in quarto 1604.

26 1606 Fridericus Risnerus Petri Rami in mathematicis adjutor communi studio inchoatos quatuor opticæ libros absolvit. Primus liber de visibili dat communia principia propagationis lucis & colorum per lineam rectam, de transmissione per foramen, de illuminatione globi, à luminoso sphærico majori, minori & æquali.

Secundus liber de visione simplici seu directa; cujus proprietates & deceptiones explicat.

Tertius est de reflexione & refractione.

Quartus est de iride.

Hoc Opus pauca dicit multóque ulterius hoc tempore provecta est hæc scientia. In quarto Cassellis 1606.

27 1607 Prodiit Odonis Malcotij Bruxellensis è Societate Jesu, astrolabium æquinoctiale per modum compendii à Leonardo Damerio Leodiensi in lucem editum. Opus bonum, si paulò uberius hanc materiam explicuisset. Scopus hujus operis est idem hemisphærium in plano æquinoctiali descriptum modo pro australi, modo pro boreali sumatur. Bruxellæ in octavo 1607.

28 1608 Simon Stevinus Principis Auriaci mathematicus Opticam edidit tribus libris comprehensam. In primo tradit sciagraphiam, seu potius perspectivam, in qua quamvis bonas demonstrationes habeat, methodus tamen non est satis practica.

In secundo de catoptrica pauca tantum habet. De tertio, nempe de refractione nihil.

29 1608 Joannes Voellus Valmocelotanus Societatis Jesu, de horologiis libros tres edidit.

In primo horologia communiora tradit.

In secundo usum quadrantis in horologiis construendis explicat;

In tertio præcipuè agit de horologiis universalibus. Opus quidem satis clarum, non tamen satis demonstratum, in plerisque enim demonstrationibus caret. Turnoni in quarto 1608.

1611 Ambrosius Rhodius Kembergensis mathematum professor in Academia Leucorea Opticam edidit in tres partes divisam. Prima agit de radio directo seu propagatione luminis, secunda de reflexo, tertia de refractione. Satis benè habet ea quæ eo tempore communiter tradebantur, ab eo tamen tempore multa didicimus in singulis partibus præcipuè circa visionem directam & refractam. 30

Habet item tractatum de crepusculis nonnihil obscurum Vvitebergæ in octavo 1611.

1611 Christophorus Clavius Bambergensis Societatis Jesu, astrolabium seu projectionem sphæræ in planum tribus libris explicat. 31

Primus liber problemata varia ac theoremata geometrica partim sphærica, partim ex conicis desumpta, necessaria ad demonstrationes astrolabiorum quæ sunt quasi lemmata.

In secundo modum describendi astrolabii, in eóque omnes circulos inscribendi tradit.

In tertio varios usus astrolabii aperit; addidit autem de suo usus trigonometricos non paucos. In hoc opere astrolabii unicam tantum speciem explicat; nempe cujus tabellæ est planum æquatori parallelum, & oculus in polo autarctico. Nempe est Ptolomæi astrolabium cui aliquid addidit Jordanus & Maurolycus.

Quare defectuosus est hic tractatus, quod unicam tantum speciem astrolabii attingat, reliquas species intactas relinquat secundo nimius est in suis lemmatibus; cum tota hæc doctrina paucis admodum propositionibus & clariùs & universaliùs comprehendi potuisset. Hoc enim Opus tantum est ut menses integros requirat, cum tamen hæc materia sit facillima si bene explicetur. Sed est hujus authoris vitium ut materias coacervet, studeat prolixitati. Multa tamen bona ex eo mutuati sumus.

1611 Adrianus Romanus mathematum professor Herbipoli Pyrotechniam edidit, hoc est de ignibus festivis, jocosis artificialibus, & seriis, ex scriptoribus latinis, Italis, & germanis collectis. 32

In hoc libro sola praxis habetur. Herbipoli in quarto 1611.

1611 Marcus Antonius de dominis tractatum edidit de radiis visus & lucis, in vitris perspectivis, & iride, duo nempe habet in hoc tractatu, nempe de telescopio quod non ita benè explicat. Item de iride de quo multa optima habet quæ ejus generationem explicant. Venetiis in octavo 1611. 33

1611 Joannes Keplerus Imperatoris Mathematicus Dioptricen edidit, seu demonstrationem eorum quæ visui & visibilibus propter conspicilla non ita pridem inventa accidunt. Præmissæ epistolæ Galilæi de iis quæ post editionem Nuncij syderei ope perspicilli nova & admiranda in cœlo sunt deprehensa. 34

Item Examen præfationis Joannis Penæ Galli in optica Euclidis. In eâ enim præfatione multa dicit reprehensibilia, nam & visionem fieri per emissionem radiorum ex oculo asserit, & negat refractionem in syderibus aliáque multa habet reprehensione digna.

Quod verò ad dioptricen Kepleri pertinet, hæc valde est imperfecta, demonstratque unam aut alteram proprietatem specilli concavi, & convexi; sed non demonstrat tubum opticum, & alia multa quæ ab eo tempore inventa sunt. Augustæ Vindilicorum in quarto 1611.

Pater Christophorus Clavius Bambergensis 35

Societatis Jeſu, in Operum mathematicorum tomo quarto Gnomonicam edidit libris octo comprehenſam.

Primo tradit analemma, aliaque pertinentia ad conicas ſectiones, planorum interſectiones, declinationes & inclinationes.

In ſecundo horizontalia, verticalia, meridiana, polaria, & æquinoctialia deſcribit.

Tertio declinantia & inclinata. In quarto de horologiis in ſphæra recta, & obliquiſſima, item de magnitudine ſtyli. Quintus componit tabulas ad horologiorum compoſitionem utiles. Sextus Ptolomæi analemma ad uſus univerſaliores accommodat. Item Opus Commandini de horologiorum deſcriptione. Septimus praxes ſecundi & tertii libri. Octavus de horologiis univerſalibus.

Habet item deſcriptionem novam horologiorum & compendium breviſſimum deſcribendorum horologiorum adjectis notis. Hoc Opus quamvis ſit ingens non continet omnia quæ ad horologia pertinent; de reflexis enim & refractis nihil dixit. Demonſtrationes habet difficillimas & figuras ita lineis implicatas & onuſtas ut ex iis ſe expedire etiam rebus mathematicis aſſueto ſit difficillimum, & ferè impoſſibile. Ita ut ſæpe ſit facilius alias demonſtrationes invenire, quam ita fusè explicatas perſequi.

Habet doctrinam ſolidam & bonam, quæ & meliori methodo & breviori clariùs tradi poterat.

36 1612 Michael Joannes Couſin Pictor & geometra tractatum edidit gallicum cum titulo, *Livre de portraiture.* In quo humanum corpus priſmatibus quaſi concludit & ad regulas communes perſpectivæ quantum poteſt revocat. Opus pictoribus ſummè utile. In praxi tamen nimis longum. Pariſiis in quarto 1612.

37 Anno 1613 prodiere Patris Franciſci Aquilonij Belgæ è Societate Jeſu, Opticorum libri ſex. Primus quaſi fundamentalis agit de oculi ſtructura & partibus, de objecto, & natura viſus.

Secundus optici radij & horopteris proprietates explanat.

Tertius eſt de perceptione à viſu facta communium objectorum, nempe magnitudinis, diſtantiæ, figuræ, ſitus loci, continuitatis, diſcretionis, numeri, motus & quietis.

Quartus oculorum deceptiones quæ præcipuè circa omnia objecta accidunt, explicat.

Quintus luminis propagationem, luminum occurſum, & concurſum, luminis illapſum, & trajectum, & umbras intuetur.

Sextus ſphæræ in planum projectiones ſeu aſtrolabia exhibet, ſcenographicen, item breviter attingit, & corporum umbras, catoptricen, item & dioptricen meditabatur, quam abſolvere non potuit.

Opus bonum & ſolidum, habet tamen aliquas repetitiones tædioſas. Cum enim ſeparatim communia perſequitur & deceptiones viſus circa illa ortas, ea ut diſtincta explicat quæ ſimul una eademque opera explicari debuerant. Fuiſſet igitur perfectiùs volumen iſtud ſi ad dimidiam partem, ut poterat, contractum eſſet. In ſexto libro ubi agit de aſtrolabiis, item de horologiis ſolaribus nimis multa coacervat, nec in bonum ordinem digerit, debuerat enim aſtrolabiorum ſpecies & ſingulorum uſus ſeparatim explicare, quæ de horologiis dicit, ſunt nimis breviter indicata, ſicut & ſcenographicen ſeu perſpectivam nimis breviter perſtrinxit.

1614 Ludovicus Meigret Lugdunenſis quatuor libros Alberti Dureri Pictoris & geometræ de proportionibus corporis humani gallicè fecit. 38
Voluit autem Durerus ſingulas corporis humani partes ita intra parallelepipeda includere, ut qui hæc perſpectivè ſciret delineare, & in omnem partem detorquere, poſſet idem præſtare circa corpus humanum.

Hæc tamen methodus eſt nimis longa & tædij plena quare tantam ex ea utilitatem non percipient pictores quantam author pollicetur.

1614 Samuel Marolois Perſpectivam Gallicè 39
edidit.

1616 Clemens Timplerus Steinfurti Philoſo- 40
phiæ profeſſor, Opticæ Syſtema methodicum per theoremata & problemata concinnatum duobus libris comprehendit.

Hic tractatus eſt potius philoſophicus quàm mathematicus, habet item tractatum de Phyſiognomia, qui etiam philoſophicus eſt. Hanoviæ in octavo 1616.

1618 Hyeronimus Sirturus Mediolanenſis te- 41
leſcopium edidit ſeu artem perficiendi novum illud Galilæi viſorium inſtrumentum in tres partes diviſam.

Prima exactiſſimam artem perſpicillorũ tradit.

Secunda teleſcopii Galilæi abſolutam conſtructionem & artem apertè docet.

Tertia alterius teleſcopii faciliorem uſum & admirandi adinventi arcanum patefacit.

In hoc opere nulla eſt demonſtratio, potiuſque praxim, & artem docet, quàm theoriam, tantumque loquitur de tubo optico convexo cavo. Francofurti in quarto 1618.

1618 Prodiit ſyntagma in quo exhibentur va- 42
ria diagrammata corporum ex præſcripto opticæ. Opus præcipuè utile pictoribus, ſtatuariis, ſculptoribus, architectis.

In hoc opere non traditur praxis qua hujuſmodi corpora perſpectivè delineentur, ſed ipſa corpora tantum exhibentur, ſunt autem ut plurimum corpora ſolida compoſita. Videntur nonnulla eſſe deſumpta ex Maroloiſio. Amſterodami in quarto 1618.

1619 P. Chriſtophorus Scheiner edidit Opus 43
quod vocavit *Oculum*, hoc eſt, Fundamentum opticum, in quo ex accurata oculi anatome & abſtruſarum experientiarum ſedula perveſtigatione, radius viſualis eruitur, anguli viſorij ingenium aperitur.

Hoc opus benè quidem explicat in qua parte fiat viſio, multa tamen fuſiſſimè quæ meliùs breviùs dici poterant. Non ſatis explicuit, an imago objecti in oculo ſitum inverſum obtineret, nec officia omnia humorum. Opus tamen bonum eſt, cum primus hanc materiam extricare ſit aggreſſus, ab eo tamen adhuc magis extricata eſt. Oeniponti in quarto 1619.

Anno 1622 Inſtitutionem artis perſpectivæ 44
edidit Henricus Hondius Gallicè. Solas praxes communes complectitur hoc Opus ſine ulla demonſtratione; figuras habet benè delineatas.

1623 Sebaſtianus de Caux Gallicè Opuſculum 45
edidit de horologiis ſolaribus, ſolas praxes continens fundatas in analemmate & malè explicatas; ita ut in hoc libro ſit difficile eas addiſcere. Modus explicandi ſapit artificem mechanicum potius quam virum doctum. Præmiſit aliqua de proportionibus quæ applicat diverſis materiis, ut geodeſiæ, ſtaticæ, perſpectivæ, muſicæ.

1625

1625 Jacobus Jaquinotius librum gallicum edidit de fabrica & usu utriusque astrolabij; nempe particularis in plano æquatoris descripti, & universalis in plano meridiano. Insuper adjecit tractatum de usu quadrati astronomici in geodesia.

Habet quidem fabricam & usus præcipuos horum instrumentorum satis bene explicatos, non bene tradit theoriam & scientiam horum astrolabiorum. Parisiis in octavo 1625.

47 1626 Joannes Fernelius Ambianus monalesphærium sive astrolabium partibus constans quatuor edidit.

Prima structuram ejus & usum explicat.

Secunda festorum mobilium, criticorúmque dierum rationes complectitur.

Tertia quascumque ex motu primi mobilis desumptas utilitates elargitur.

Quarta geometricam praxin exhibet nempè ad gæodesiam; est autem astrolabium in plano tropici capricorni descriptum, cui adjungit aliquas rotulas ad usus peculiares. Non satis explicat compositionem astrolabii, multos etiam usus nimis breviter indicat.

48 1628 Joannes Antonius Maginus Mathematicus in studio Bononiensi, Opusculum edidit cum hoc titulo, *Breve instrutione sopra l'apparenze & mirabili effetti d'ello spechio concavo*, seu de apparentiis speculi concavi. Sunt in hoc opere multa bona, non tamen exactè demonstrata, sed pleráque indicata tantum, plurima item prætermisit quæ demonstrata sunt ab aliis. Bononiæ in quarto 1628.

49 1631 Christophorus Scheiner Germano-suevus è Societate Jesu, Pantographicen seu artem delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum invenit. Duobus libris explicuit, & demonstravit; Prior Epipedographicen sive planorum descriptionem, posterior stereographicen seu solidorum aspectabilium projectionem edocet. Opus benè demonstratum utile maximè pictoribus. In quarto Romæ 1631.

50 1635 Mathurin Jousse Flexiensis Perspectivam positivam viatoris Latinè & Gallicè edidit, ornatam figuris & praxibus variis. Opus valde imperfectum, quod tamen nonnullas praxes bonas, sed vulgares habet. Flexiæ in octavo 1635.

51 Anno 1635 Joannes Franciscus Sil Belga latinè vertit Philippi Lansbergii quadrantem astronomicum geometricum, nec non ejusdem introductionem in astrolabium, quæ omnia militiæ præfectis, machinarum præfectis, mercatoribus, geodætis, nautis & mathematicis valdè utilia prædicat. Usus tamen quadrantis astronomici habetur multis in locis, præsertim in Gnomonica Clavii, quæ de astolabio dicuntur. Habentur pene omnia in Stoflerino ante annos 120 typis mandata.

52 1635 Pater Athanasius Kirker Buchovius è Societate Jesu, primitias Gnomonicæ Catoptricæ, hoc est horologiographiam novam specularem edidit. In qua demonstrationem habet horologiorum reflexorum, nempe methodum describendorum quorumlibet circulorum in planis, quantumlibet irregularibus, qui radio reflexo judicentur; duobus libris.

Primo theoricen habet, secundo praxin.

Doctrinam optimam continet hoc Opus, non tamen satis accuratè demonstratam. Avenione in quarto 1635.

1640 Jacobus Hume Scotus Matheseos professor methodum universalem edidit ad describenda horologia sciaterica, cum novis demonstrationibus; demonstrationes habet & praxes difficiles nimis, & obscurè explicatas, licet habeat doctrinam bonam. Agit autem tantùm de horologiis regularibus. Possunt ex eo opere deduci multæ praxes universales. Parisiis in octavo 1640. 53

1640 Natalis Durret Cosmographus Regius 54
in secunda parte Ephemeridum habet Gnomonicam, in qua omnia horologia sciaterica revocat ad horizontalia, & trigonometriam, inquirit elevationem poli supra planum tale; aliasque circunstantias; multa habet bona, methodus autem est difficilior. Parisiis in quarto 1640.

1640 P. Petrus Georges Canonicus Regularis 55
Congregationis Sancti Salvatoris, horologium magneticum ellipticum demonstravit. Nempe commune illud in quo unicus invenitur circulus mobilis, qui nempe vel centro admovetur, vel ab eo removetur: quod quidem est ex se universale non est, sed tantum ad determinatam latitudinem componitur, dat tamen aliquas praxes quibus aliquo modo universale evadat.

Opus bonum, utile, & ingeniosum, & in plerisque partibus demonstratum, licet in aliquibus partibus videatur non esse demonstratio omnino accurata. Toul in octavo 1640.

1642 Dubreüil Parisiensis Societatis Jesu, Per- 56
spectivam practicam Gallicè edidit optimis & elegantibus figuris ornatam. In qua dantur optimè praxes communes, ultra quas non excurrit, nec ullas demonstrationes affert.

Opus hoc utilissimum est pictoribus, sculptoribus, architectis, praxes enim faciles habet.

In hujus Operis prima parte agit de plano horizontali, nempe omnes iclinographias perspectivè delineat, procedit exinde ad elevationes, tum ad puncta accidentalia, denique ad umbras quorum omnium habet exempla optimè delineata.

In secunda parte docet modum inclinandi corpora quælibet, item corpora regularia perspectivè exhibet.

In tertia dat methodos exercendi perspectivam in planis horizontalibus, in fornicibus; imagines item deformes reformat; per lentem polyedram, imagines separatas adunat, & de reflexionibus item speculi praxes exhibet. Parisiis tribus tomis in quarto 1642.

Anno 1644 Renatus Des Cartes Diopticam 57
edidit, in qua disserit, Primò de lumine, Secundò de refractione, Tertiò de oculo, Quartò de sensibus in genere, Quintò de imaginibus quæ formantur in fundo oculi, Sextò de visione, Septimò de modis visum perficiendi, de variis specillis, de modo poliendi vitra. Hæc dioptrica optima est; ea tamen quæ habet de methodo poliendi vitra, ostendunt ipsum numquam vitra elaborasse; in praxi enim succedere non possunt.

1643 Prodiit D. Aleaume Architecti militaris 58
Regii Perspectiva speculativa practica. Opus posthumum gallicum, in lucem editum à Stephano Migon Matheseon professore.

Theoriam perspectivam benè demonstrat paucis propositionibus, praxin item habet benè deductam, sed quæ ultra ichnographias perspectivè delineandas non extendatur, ideóque imperfectum censendum est istud Opus. Parisiis in quarto 1643.

1644 P. Mersennus è Minimorum ordine libros 59
septem

septem opticorum edidit, solos propositionum titulos complectentes sine ulla explicatione, aut demonstratione. Sub hoc optices nomine comprehendit perspectivam, catoptricam, & dioptricam. Habet in fine aliquam refractionum demonstrationem.

60 1644 P. Petrus Bobinet Societatis Jesu, Horographiam curiosam Gallicam composuit continentem varias methodos antiquas, & novas, ad delineanda facilè quælibet horologia.

Prima parte suppositiones ad horographiam proponit.

Secunda parte tradit methodos varias, Prima peragitur semicirculo, Secunda quadrato, Tertia regula astronomica, Quarta eadem circini apertura, Quinta globo terrestri aut cœlesti, Sexta per umbram alterius horologii jam perfecti.

Hæ praxes sunt bonæ & faciles, desunt tamen demonstrationes quibus stabiliantur, qui enim has praxes teneret, non tamen propterea Gnomonicam scire dicendus esset. Flexiæ in octavo 1644.

61 1645 P. Athanasius Kirker Fuldensis è Societate Jesu, librum edidit sub titulo, (Ars magna lucis & umbræ) in decem libros digestum.

In primo agit de natura lucis.

In secundo de radiationibus lucis seu perspectiva.

Tertio de apparatu ad Gnomonicam curiosam, nempe de circulorum cœlestium officiis, de planorum varietate, de sectionibus gnomonicis, seu conicis, earumque descriptionibus, de invenienda linea meridiana, altitudine poli, aliisque ex tribus umbris, de analemmate, ex quo eruit tabulas gnomonicas.

Quarto horologia directa describit.

Quinto totam primi Mobilis doctrinam Gnomonicè exhibet, domos cœlestes, arcus signorum, ortus stellarum, quantitatem dierum, crepusculorum.

Sexto horologia portatilia & universalia fabricatur.

Septimo horologia reflexa tradit, videtúrque esse primus scriptus in Gallia circa annum 1630.

Octavo horologia refracta exhibet.

Nono geometriam seu geodesiam per umbram & reflexionem exercet.

Decimo horologia prodigiosa & magnetica extruit. Explicat item multa de speculis parabolicis, & lentibus.

In toto hoc Opere demonstrationibus non insistit, quamvis enim nonnullas breviter indicet, multa tamen sine demonstratione profert, potiusque in praxibus novis inveniendis, quæ ornatum aliquem habeant, quam in demonstrando immoratur, multa item ad alios tractatus pertinentia continet hic tractatus, qui melior foret si esset expurgatior, & brevior.

62 1646 P. Petrus Sanctæ Mariæ Magdalenæ Abbavillensis Congregationis Fulliensis tractatum horologiographicum composuit, in quo continentur plures methodi construendorum horologiorum in qualibet superficie, una cum aliquibus instrumentis ad id necessariis, & ad cognoscendas horas de nocte, item horam fluxus & refluxus. Insuper methodus formandorum corporum regularium in quacumque materia.

Item horologia in superficiebus, convexis concavis aliisque irregularibus.

Opus hoc practicum solum est, & demonstrationibus caret. Parisiis 16. 1646.

Idem 1647 alium tractatum edidit etiam gallicum, quem vocavit Horographiam ingeniosam, in quo nempe gnomonicam ad trigonometriam revocat in prima parte.

In secunda præcipuè agit de parallelis signorum inscribendis, item universalia nonnulla horologia describit, quæ omnia essent optima, si demonstrationes haberent adjunctas. Parisiis in octavo 1647.

1646 P. Joannes Franciscus Niceron Parisinus Ordinis Minimorum Thaumaturgum opticum edidit latinè in tres libros divisum. 63

In primo tradit methodum universalem ad exhibenda perspectivè objecta. Habet aliquas praxes in quibus punctum distantiæ semper est in ipsa tabella.

In secunda habet modum exercendi perspectivam in plano obliquo, datque usum instrumenti scenographici. Non excurrit ultra praxes communes, quas benè explicat, & demonstrat. Parisiis in folio 1646.

1648 Dominus Desargues edidit tractatum 64 gallicum, *Maniere universelle, pour pratiquer la perspective*, seu methodus universalis exercendæ perspectivæ per parvas mensuras sicut in geometrico plano, & cum determinatione eorum objectorum quæ vividioribus coloribus, aut dilutioribus exhiberi debent. Tota autem methodus consistit in eo ut doceat ichnographiam in quadratula divisam perspectivè delineandi, in quo notat ichnographiam omnium objectorum exhibendorum. Hæc praxis potest sufficere artificibus, plurimáque præstare potest, non tamen propterea in omnibus casibus facilior est; quare imperfectum censendum est Opus illud, nec omnia tradere quæ ad perspectivam pertinent, quæ tamen profert, demonstrat.

Quæ de umbris coloribusque dilutioribus profert, sunt bona, & utilia. Parisiis in octavo 1648.

Anno 1648 Nobibilis de Magnanes Gaultier 65 Perspectivam edidit Gallicè cum hoc titulo, *Invention nouvelle & brève, pour reduire en perspective par le moyen du quarré toutes sortes de plans & corps, &c.* Opus hoc demonstrationibus caret, nec ita clarè procedit ut ab omnibus percipi possit, quod tamen initio promittit; quod autem sine punctis distantiæ quadratum perspectivè describit, id multis modis docuerunt alij, & nos etiam posuimus, quòd verò per ichnographias quæ omnes in quadrato inveniri possunt, vel per quadratula determinari, omnia describi possint, id etiam habent multi, estque ut ita dicam via communis, & trita, quare methodus quam affert difficilior est communi, neque est in eo bene explicata.

Anno 1648 R. P. Emanuel Maignan Tolosanus Ordinis Minimorum edidit Gnomonicam sub titulo Perspectivæ horariæ, quam in quatuor libros dividit. 66

In primo ponit hujus perspectivæ principia, quæ sunt suppositiones Gnomonicæ circa plana & eorum sectiones. Habet nonnullas novas animadversiones circa refractionem luminis in aëre. In secundo tradit & demonstrat praxes omnes ad declineationem horologiorum quæ per radium directum in planis describuntur. Tertio libro catoptricam horariam tradit, primóque theoriam, ad reflexionis naturam intelligendam necessariam proponit, in quo multa sunt physica, deinde ad praxes descendit, omnisque generis horologia reflexa

reflexa describit speculo plano; vel immobili, vel versatili. Tum considerat reflexiones in speculo cylindrico factas, quibus etiam iridem catoptricam, horas indicantem efformat, in hoc libro multa sunt nova & jucunda. In quarto ex principiis physicis eruuntur refractionum leges & mensura. Tum practicè ita delineat circulos cœlestes in quacumque superficie, ut radius luminis refractus in aqua vel christallo omnes motus cœlestes indicet, addidit & modum elaborandorum specillorum ad tubos opticos.

Hoc Opus optimum est, & ut plurimum demonstratum, videtur tamen nimis prolixum, cum posset ad pauciores demonstrationes revocari.

Multa habet circa reflexionis & refractionis naturam scitu digna, & in re Gnomonica fere omnia dixisse videtur, si aliquid de horologiis portatilibus addidisset.

67 1650 F. Bonaventura Cavalerius Ordinis Jesuatorum tractatum opticum edidit, quod vocavit Speculum ustorium, estque de proprietatibus sectionum conicarum, earumque effectibus circa reflexiones luminis, caloris, frigoris, soni & motus.

Supponit autem totam doctrinam conicarum sectionum Apollonij, quam indicat tantum sicut demonstrationes suas, ex quo evadit Opus difficile: Accedit quod figuræ in finem operis dilatæ non citentur in propositionibus omnibus atque adeo operosum sit determinare quæ cuilibet propositioni figura conveniat. Bononiæ in quarto 1650.

68 Anno 1651 prodiit Italicè Parisiis Opus Leonardi da Vinci Nobilis Florentini de pictura, in ordinem redactum ex veteri manuscripto operâ Raphaëlis Trichet du Fresne, mortuus est sub Francisco primo Fontenebleau ferè inter manus ipsius Regis, à quo septuagenario major fuerat Parisios evocatus. Hoc Opus ad Mathesin vix pertinet, cum perspectivam non contineat, ad eam tamen aliquomodo revocatur.

Huic Operi additum est Opusculum de pictura Leonis Baptistæ Alberti Florentini ex illustri Albertorum familia, fuit Eugenii Papæ ex fratre nepos. Hic varia alia edidit Opera inter alia de Architectura. Hoc etiam Opus ad Mathesin vix pertinet, dat enim præcepta picturæ valdè universalia. Utrumque Opus in gallico legitur.

68 1652 Pater Franciscus Niceron Parisiensis Ordinis Minimorum Perspectivam Gallicè edidit, sub titulo, *La perpective curieuse*, in quatuor libros divisam.

Primo post tradita nonnulla problemata geometrica, præcepta perspectivæ tradit modo communi, nempe per ichnographias & elevationes, quæ omnia clarè explicat adjectis etiam demonstrationibus, non tamen ultra praxes communiter usurpatas est progressus.

In secundo tradit varias imaginum deformationes in quacumque superficie.

In tertio imagines deformes exhibet quæ reflexè visæ reformentur, nempe in speculo plano cylindrico & conico.

In quarto imagines exhibet divisas, quæ specillo poliædro coalescant.

Hoc Opus habet praxes faciles, non tamen omnia demonstrat.

69 1652 P. Nicolaus Zuchi Parmensis, Societatis Jesu, olim in Collegio Romano Matheseon professor, Opticam philosophiam edidit in duas partes divisam, quarum prima est de visibilibus & visibilium repræsentativis. Primo agit de perspicuo terminato, lucido & colorato, de propagatione repræsentativorum, directè, refractè, & reflexè; de legibus earum propagationum; de telescopio; de variis colorationibus.

In secunda parte agit de naturali oculorum constitutione & usu, de apparentiarum visus determinatione, de oculorum vitiis, specillorum artificio emendandis & promovendis.

Hoc Opus potius Physicum est, quàm Mathematicum. Hic author est valdè obscurus, ita ut in multis vix possit percipi; affectat item modos loquendi à communi abhorrentes, quod obscuritatem auget: multa tamen habet optima. Lugduni in quarto 1652.

1653 Scipio Claromontius Philosophus ac Mathematicus Opuscula varia edidit. 70

Primo de phasibus lunæ.

Secundo de horizonte sensibili.

Tertio de usu speculi pro libella.

Quarto, ex inspectione imaginis per reflexionem ex aquâ diametrum terræ investigare.

Quinto de altitudine Caucasi.

Pleraque sunt obscurè explicata, suntque in multis aliis authoribus meliùs explicata.

1654 Franciscus Maurolicus Messanensis Abbas Tractatum opticum composuit, in cujus primo libro egit de propagatione luminis directa, præcipue de radio solari per foramen transmisso, quem benè explicuit. Item agit de reflexione in speculis planis, convexis, sphæricis, & concavis. Composuit item diaphanon libros tres. 71

In primo agit de refractione.

In secundo de iride, quam tamen non perfectè explicuit.

In tertio agit de oculi structura brevissimè; adjecit nonnulla problemata ad iridem & perspectivam spectantia. In quarto 1554.

1654 Pater Petrus Du Heaulme Congregationis Oratorii Jesu, tractatum gallicum edidit, nempe Principium curiosum ad omnis generis horologia perficienda. Intendit autem in hoc Opere instrumentum exhibere quò quilibet etiam omnis Matheseos ignarus possit horologia omnia perficere. Instrumentum quod profert est horologium compositum nempe ex duobus horologiis horizontali & azimutali cujus aliquot usus & praxes profert. 72

Habet multa bona ad praxin spectantia, res tamen poterat universaliùs proferri. Quolibet enim horologio jam facto, quodlibet perficere possumus. Demonstrationes nullas habet, quæ præcipui sunt in hac materia momenti. Parisiis in octavo 1654.

1655 Petrus Borellus Regis Christianissimi Medicus, tractatum edidit de vero telescopiorum inventore. Omnibus perpensis invenit hanc laudem deberi cuidam artifici Mildeburgensi cujus nomen est Hans, seu Joannes, & filio ejus Zachariæ circa annum 1591. Microscopia invenit pater. Circa annum 1610. Prima telescopia convexa concava. Alii tamen hoc inventum perfecere. In antiquis nulla est conspiciliorum mentio. Affert autem conspiciliorum historiam, ubi de eorum confectione & usu, seu de effectibus. Accessit item Centuria observationum miroscopicarum. 73

Hic liber potius historicus est quàm mathematicus. Hagæ-Comitum in quanto 1655.

74 1655. P. Petrus Bourdin è Societate Jesu, perspectivam militarem clarissimè & breviter explicuit, nempe methodum delineandarum perspectivè munitionum servata eadem ichnographia geometrica. Parisiis in octavo 1655.

75 Sethus Vvardus Oxonii professor Savilianus composuit Astronomiam geometricam ubi methodum proponit, qua primariorum planetarum astronomia sive ellyptica sive circularis geometricè absolvitur.

Hoc Opus egregiè promovet ellypticam præcipuè hypothesin, multas enim habet propositiones ex quibus facilis redditur calculus in ellypsi; nimis tamen compendiosè hanc materiam tractat; ita ut multa subticeat; doctrina tamen optima est. Londini in octavo 1656.

76 1657 P. Gaspar Schottus Regiscurianus Societatis Jesu, Magiam universalem naturæ & artis edidit, sive recondita naturalium, & artificialium rerum scientia.

Opus quadripartitum prima pars optica est in decem libros divisa.

Primus liber proemialis loquitur de magia in genere.

Secundus describit oculum, & de diffusione visibilium agit.

Tertius de imaginum defformatione opticè & catoptricè.

Quartus de prodigiosis representationibus.

Quintus de variis colorationibus inducendis.

Sextus magia catoptrica tam in planis speculis quam concavis & convexis.

Septimus de speculis urentibus.

Octavus de catoptrologica.

Nonus de dioptrica, de iride trigoni, de ustione.

Decimus de telescopiis, de methodo terendi vitra in patinis, de microscopiis.

In hoc opere potius praxin quàm theoriam quærit. Herbipoli 1657. In quarto.

77 1661 P. Gaspar Scottus Regiscurianus in suo Cursu mathematico Gnomonicam habet, in qua praxes habet, nimis tamen breviter indicatas, & non demonstrantur utiles iis qui demonstrationes negligunt.

Opticam item, catoptricam, dioptricam eodem modo sine demonstrationibus.

1665 Prodiit P. Francisci Mariæ Grimaldi Opus posthumum, nempe Physicomathesis de lumine, coloribus, & iride, aliisque annexis libris duobus.

In quorum primo afferuntur nova experimenta & rationes ab eo deductæ pro substantialitate luminis.

In secundo autem dissolvuntur argumenta in primo adducta, & probabiliter sustineri posse docetur sententia peripatetica de accidentalitate luminis. Quâ occasione de hactenus incognita luminis diffusione disserit, de reflexionis, refractionis ac diffractionis modo, & causis, de visione, deque speciebus intentionalibus visibilium & audibilium, ac de substantiali magnetis effluvio; & speciali argumento impugnantur atomistæ.

Primus invenit novum genus propagationis luminis nempe per radium diffractum, qui omnes colores efficeret, multa habet nova & scitu digna. In quarto Bononiæ 1665.

78 1667 P. Honoratus Fabri Societatis Jesu, Synopsin opticam edidit, in qua omnia quæ ad opticam, dioptricam, catoptricam pertinent seu ad triplicem radium visualem directum, refractum & reflexum breviter demonstrantur.

Doctrina hujus operis optima est, nonnihil tamen breviùs explicata, quàm ut qui opticam aliundè nescit, omnia intelligat. Accedit difficultas ex figuris in finem operis dilatis, quæ meo judicio in rebus difficilioribus non est exigui momenti. Lugduni in quarto 1667.

1669 Prodiit optica P. Andreæ Tacquet Antuerpiensis è Societate Jesu, in libros tres distributa. In primo explicat apparentias rerum simplices seu directas, nempe quomodo diversa objecta & corpora oculo variè appareant, phases item lunæ. 79

In secundo projectiones scenographicas, seu perspectivam tradit, item projectiones monstrosas.

In tertio projectiones sphæræ in planum seu astrolabia explicat primo universaliter, secundo astrolabium in plano æquatori parallelo, & oculo in polo constituto. Tertio in plano coluri solstitiorum. Quarto astrolabium horizontale indicat. Quinto analemma, usus item astrolabiorum explicat.

Catoptrica item ejus eodem tempore edita est tribus pariter libris comprehensa.

In primo libro profert fundamenta catoptricæ, & proprietates omni reflexioni convenientes.

In secundo specula plana considerat, reflexionesque tam simplices quàm multiplices in speculis aut parallelis aut quemcumque angulum comprehendentibus.

In tertio speculorum tam convexorum, quam concavorum affectiones tradit, non tantum sphæricorum sed etiam parabolicorum cavorum, & hyperbolicorum convexorum.

Totum Opus clarum; videntur multa deesse ad perspectivam spectantia, cylindrica specula non attingit nec dioptricam tradidit.

Anno 1671 Pater Cherubinus Aurelianensis Ordinis Capucinorum Gallicè Dioptricam ocularem edidit in tres partes divisam, quarum prima agit de visione primò in communi, secundo de visione directa, tertiò de refracta. 80

In secunda parte agit de tubo optico, ejúsque inventore, tum de proprietatibus specillorum convexorum sphæricorum separatorum, de conjunctione convexorum, exinde de combinatione concavi, & convexi, de telescopiis quadruplici convexo instructis, item de microscopiis, de telescopio cui admiscetur reflexio de binoculo.

In tertia parte quæ praxin præcipuè spectat, ostendit quam proportionem observare debeant specilla in tubo optico cum usibus variis novisque phænomenis in cœlo ope tubi optici detectis. In usibus invenitur novus modus delineandi quodlibet objectum ope tubi optici. Ultimo tamdem habetur methodus elaborandorum omnium specillorum.

Illud Opus multa habet nova ad praxin præcipuè spectantia, licet autem demonstrativè semper procedat, nonnullas tamen habet demonstrationes quæ à severo geometra non admitterentur.

CAPUT IX.

Progressus Astronomiæ.

Quatuor tantum in Mathematicis disciplinis partes agnoscebant veteres authores, quarum

rum duæ puræ essent, Geometria scilicet, & Arithmetica, duæ mixtæ, & ad materiam peculiarem contractæ Astronomia nempe & musica. Quamvis autem plures alias partes modo distinguamus, commodéque alias quatuor assignemus opticam, geographiam, mechanicam & architecturam; ut tamen Antiquorum vestigiis quantum fieri poterit inhæreamus, Astronomiam tertio loco proponimus, illiusque naturam & per singula sæcula progressum hoc capite consideramus. Atque ut ab ipso nomine auspicemur, Astronomiam vocamus quasi astrorum legem, seu quod cœlestium orbium periodos certis nempe legibus definitas calleat, que nomine eam vocavit Plato. Aristoteles vero eamdem Astrologiam vocat, quod rationem astrorum teneat, quæ duæ appellationes primitùs eidem facultati indifferenter sunt attributæ. Successu vero temporis cum Astrologia divinatrix esset in Græciam illata, distinguere placuit, eamque astronomiam vocare quæ circa cœlestium orbium motus constituendos occupatur, quæ vero casus hominum, & eventa ex syderum conversionibus prædicit Astrologia diceretur. Nos utramque in hoc capite consideramus.

Quantum autem cæteris corporibus cœlum supereminet, quantum terrestribus sydera, & splendore & dignitate præstant, tantum cæteris scientiis superior est Astronomia, quâ nempe mens humana hæc infima, & caduca despiciens, ad sublimes illos tractus assurgit, externamque saltem mansionis æternæ speciem contemplata ad divina sensim aspirat. Quare mirum non est si tantum apud omnes nomen adepti sunt Astronomi, si divinorum consiliorum participes, si deorum interpretes, si viri ingentes numinum lege deprehensa, rerumque naturæ capaces, & conscii fuerunt appellati. Si enim in tanta versamur caligine, ut obvia quæque ea nempe quæ tangimus, & palpamus ignoremus; nosque in dies etiam in minimis, & facilibus graviter errare deprehendimus, quis meritò eum non suspiciat, qui cœlestium corporum leges, in tanta præsertim à nobis distantia deprehenderit, sydereumque tam variè implexos motus, certis & indubitatis calculis alligarit. Unde mirandum non est, si cœlestium cognitio veræ sapientiæ etiam ab ipso Salomone tribuatur, qui dum recenset ea quorum cognitionem ipsi Deus infudit, cœlestium præcipuè mentionem facit.

Ipse mihi dedit eorum quæ sunt cognitionem certam, ut cognoscam constitutionem mundi, & vim elementorum, principium, & finem mediumque temporum; solstitiorum mutationes, & varietates tempestatum; anni circuitus, & stellarum situs.

Hoc studium priscis præsertim temporibus excoluere magni Reges & principes, ut in hac quasi schola à superis discerent quomodo esset subditis imperandum. Neque vero hanc tantum scientiam commendat quod circa ea versetur, quæ splendorem, & mirabilitatem aliquam habeant, sed quod illius maximi sint usus in humana societate, vitáque civili. Motus enim cœlestis nobis est norma temporis, nec sine dierum, mensium, annorumque notitia, ulla negotiorum distributio, sed fœda in rebus etiam minimis; in recensendis præsertim historiis confusio. Quod si duo quasi reipublicæ cardines sunt agricultura, & res nautica, dum prima quæ domi nasci possunt abundè suppeditat, hæc quæ desunt ab exteris regionibus importat, utrique tamen facem præfert astronomia, quæ docet

Quo sydere terram, vertere conveniat;
Hinc tempestates dubio prædicere cœlo
Possumus; hinc messisque diem tempusque serendi,
Et quando infidum remis impellere marmor
Conveniat; quando armatas deducere classes,
Aut tempestivam sylvis evertere pinum.
Virg. 1. Georg.

Quantum Astronomiæ ignoratio detrimenti Athenienfibus attulerit, Niciæ factum satis ostendit, qui Eclypsi territus, educere exercitum, & prælio decernere non est ausus, quantùm iisdem emolumenti attulerit eâdem Astronomia Pericles, aut Romanis Sulpitius, aut Christophoro Columbo nemo est qui ignoret. Omitto cæteras utilitates, præsertim in Sacris peragendis, cùm vix sit ulla natio tam barbara, quæ festos aliquos dies, recurrentibus certis astrorum conversionibus non addixerit; Christiana præsertim relligio, cujus præcipuæ celebritates, sive mobiles, sive fixæ, utriusque syderis periodo tam exactè affiguntur, ut exactissimum requirant motuum cœlestium calculum.

Jam ab ipsis Mundi primordiis inchoatam esse Astronomiam facilè quis in animum inducat ex tam longa Patriarcharum ætate excultam, repetitis ab eodem homine observationibus perpolitã, apud Hebræos primum usurpatam, ab Hebræis ad Ægyptios, ab Ægyptiis ad Chaldæos, ab his ad Græcos; inde verò ad Romanos trãsmissam. Si verò non conjecturis, sed scriptis ipsis notatisque observationibus, & experimentis agendum sit, Chaldæis haud dubiè hanc laudem debebimus, quos ultra cæteros Astronomiæ deditos fuisse ferunt, & apud Babylonios septingentorum annorum observationes syderum coctilibus laterculis inscriptas asserat Plinius. Et Hyparchus observationes Eclypsium vetustissimas Nabonassari anno 7. seu ante Christum 720 annis observatas referat. Exciderunt hæc omnia exceptisque Eclypsibus nonnullis ab Hipparcho relatis, nihil de Chaldæorum doctrina nisi nomen & famam habuimus.

Apud Græcos verò, qui primi Astronomiam excoluere, ab occasu & ortu syderum observando, nempe fixarum inceperunt. Necessitate scilicet eos ad hoc studium impellente, cùm enim eorum annus pessimè esset compositus, neque solis conversioni responderet, ne temerè agriculturam exercerent præcipua ejus opera, stellarum ortui, & occasui fuerunt addicenda. Horum frequens est apud Poëtas mentio ut apud Homerum. Hanc gloriam nonnulli tribuunt Palamedi, alij verò Prometheo qui in monte Caucaso residens, & sydera observans, finitimis Assyriis Astronomiam communicarit. Hinc Æschylus Poëta Tragicus in Prometheo, ita eum loquentem inducit

Nullum enim ipsis hiemis erat signum.
Neque floridi veris, neque frugiferæ
Æstatis constans; sed temerè quidvis
Faciebant, donec ipsis ortus ego
Astrorum ostenderem, & occasus captu difficiles.

Multi apud Græcos Astronomiam quatenus ortus, & occasus syderum respicit excoluerunt, immò solebant singulis annis, syderum ortus, & occasus suis diebus respondentes describi, unà cum tempestatibus anni, præcipuisque aëris mutationibus. Sed hæc erant quasi Astronomiæ rudimenta, neque enim Plato dignos existimavit Astronomi nomine qui has metas non essent transgressi, & septem Planetarum motus ignorarent. De hac præcipuè Astronomiæ parte quæ circa errantium periodos definiendas occupatur, controversia moveri potest, cui nationi præcipuè debeatur: In hoc non consentiunt vetustissimi authores. Arabibus primò hanc gloriam tribuunt nonnulli, à quibus ad Ægyptios propagata sit, exinde ad Chaldæos, tum ad Græcos. Alii vero alium ordinem sequuntur.

Ut tamen quæ sunt probabiliora sequamur. Quamvis certissimum sit Genus humanum ex Asia in Europam, & Africam cæterasque orbis partes propagatum esse, non tamen æque certum est eâdem opera hanc scientiam fuisse propagatam, cùm multo tempore apud Græcos nullum fuerit ejus vestigiũ,& apud Romanos non nisi tardè admodum pervenerit. Quarè cum vetustissimæ observationes quæ habentur, & extant, fuerint Babylone habitæ, & quæ de aliis nationibus dicuntur, sint fabulosa, & incerta; iis facilè subscribimus qui Babyloniis sive Chaldæis hanc gloriam tribuunt. Inter eos Herodotus in Euterpe, Græcos polum, & gnomonem partesque diei duodecim à Babyloniis didicisse asserit, consentitque Diodorus Siculus. Cicero item in primo de divinatione, ita loquitur; *Principio Assyrii, ut ab ultimis auctoritatem repetam, propter planitiem, magnitudinémque regionum quas incolebant, cum cœlum ex omni parte patens, atque apertum intuerentur, trajectiones, motusque stellarum observaverunt.* Refert ea quæ de antiquitate hujus scientiæ ab eis referrentur. *Contemnamus etiam eos, qui è Caucaso signa cœli servantes, numeris, & motibus, stellarum cursus prosequuntur: condemnemus inquam hos, aut stultitiæ, aut vanitatis, aut imprudentiæ, qui quadringenta septuaginta millia, annorum, ut ipsi dicunt monumentis comprehensa continent.* Quæ licèt fabulosa sint, & apertè falsa, hujus tamen scientiæ apud Assyrios pervetustam originem, acceptamque à Prometheo in Caucaso degente satis indicant.Hæc jam ab antiquis temporibus ita invaluit opinio, ut qui Astrologiam divinatricem exercerent,Chaldæi dicerentur. Quæ quidem omnia ita inter se cohærent, communique consensu comprobantur, ut omnem ei opinioni probabilitatem adimat quæ Chaldæos Ægyptiorum esse coloniam existimantes, ab iis etiam Astronomiam didicisse volunt. Reclamant enim ipsæ observationes, quæ nullæ in Ægypto nisi centum ante Epocham Alexandri annis notantur, Babylone verò longè ante hæc tempora fuerint.

Quamvis autem in Jobo quem Arabem nonnulli Moysique coævum existimant, fiat mentio Pleiadum, & arcturi, & Orionis, non propterea concluditur in Arabia hoc studium viguisse, sed tantum eas constellationum appellationes pervetustas fuisse, & tunc satis cognitas, quarum scilicet ortus, & occasus observarent, non tamen propterea Astronomiam, seu planetarum motus callerent.

Quæ quidem non impediunt quominus eodem etiam tempore Atlas Mauritaniæ Rex in extremis Africæ finibus Astronomiæ deditus fuerit; dicit autem Eusebius in Chronicis, Promethei fratrem Athlantem fuisse. Sed quidquid sit de Athlante, certum est quod non ab eo, aut à Mauris in Græciam, sed à Chaldæis, aut Ægyptiis fuerit invecta.

Quamvis autem à Chaldæis in Græciam advectam fuisse Astronomiam non dubitem, rudia fuerunt hæc initia, cum subinde notentur aliquorum Græcorum inventa, quæ imperfectam valdè, & in ipsis principiis hærentem Astronomiam indicabant. Primus enim Pythagoras dicitur apud Græcos Zodiaci obliquitatem invenisse, quæ si antea ignorabatur, non video quid tandem in Astronomia sciretur, cùm ille sit primus ferè gressus qui in ea fieri debet, ut planetarum periodi certis legibus adstringantur. Geminus quidem Capite primo isagoges, refert de Pythagoricis, quòd ab iis in tota Astronomia supponuntur motus solis, & lunæ, & quinque planetarum æquales, & circulares contrariique quotidianæ mundi revolutioni. Cum enim primi investigationi talium rerum animum adjecerint,supposuerunt motus circulares & æquabiles solis & lunæ, & aliorum quinque planetarum. Talem enim in divinis non admiserunt confusionem, inque æternis rebus, ut quandoque celeriùs, quandoque tardiùs moveantur, aliàs vero stent; prout dicunt in quinque planetis esse stationum puncta.

Paucas tamẽ à Græcis accepimus observationes, quidquid igitur dicatur, & quantumvis eorum inventa simus inferiùs secundum ordinem temporum notaturi, Astronomia non multum promota fuit in Græcia. Toti enim fuere Græci in anno civili excolendo, cyclisque lunæ solaribus excogitandis; ita Oenopides, Cleostratus, Harpalus tetraëteridem quatuor annorum, & octoëteridem octo annorum, Meton periodum novemdecim annorum, in qua per additionem aliquorum mensium, motus lunæ cum motu solari, aut cum anno civili congrueret. De cæteris verò Astronomiæ partibus aut parum admodum, aut nihil omnino reliquerunt.

Ægyptum igitur tanquam Astronomiæ nostræ parentem agnoscimus; Esto enim Ægyptii eam à Chaldæis acceperint, quia tamen exceptis nonnullis observationibus, aliæ omnes Chaldæorum elucubrationes perierunt, Ægyptiis Astronomiæ magisterium tribuendum est. Nam ex quo Alexandriæ apertum est Gymnasium, floruerunt in ea urbe Aristillus, Timochares, Eratosthenes,Conon, Hipparchus, Sosigenes, Theon senior, Ptolemæus, Paulus Alexandrinus, Theon junior, Hypatia ejus filia, Pappus, Diodorus, Theophylus & Cyrillus. Ita ut ab annis ante Christum trecentis ad annum Christi quingentesimum Astromia sedem fixisse Alexandriæ videretur. Ptolomæus inter alios excelluit, egregiúmque illud Opus, magnam scilicet constructionem composuit, in quo quæ in aliis dispersa erant, in unum corpus methodo scientificâ collegit, traditasque ab antecessoribus ab Hipparcho præcipuè sydetum periodos magna diligentia ad examen revocavit.

Ab Ægyptiis ad Arabas & Saracenos transmigravit Astronomia, quorum plerique Astrologiæ potius divinatrici, quàm Astronomiæ dediti fuerunt, multi tamen in ea non impigram navarunt operam. Ex horum autem opinionibus & observationibus Alphonsus totam Astronomiam redintegrare sategit & Alphonsinas tabulas concinnare. Quarum brevi tempore animadversi sunt errores, sicut & æquinoctiorum versus anni principium retrocessio. Quare actum sæpius de Kalendario reformando. Ex quo factum est ut sæculo superiori plures in his regionibus Astronomiæ vacarent, inter quos primas tulerunt Copernicus, &

Tychobrahe

Tychobrahe qui occasione novæ in Cassiopeya stellæ Astronomiam de novo cudere cœpit; post quem multi alii consequenter hoc studium excoluerunt, & adhuc nunc excolunt; inter quos hoc sæculo floruerunt Ricciolius noster qui Almagestū novum, seu Bibliothecam integram Astronomicam in lucem edidit. Opus scilicet ingens, in quo Ptolemæi exemplo quæcumque in aliis scitu digna continentur adunavit. Fuerunt & alij celebres hoc sæculo, ut Gassendus, Bullialdus qui ex Tychonis Brahe, Gassendi, & suis observationibus, tabulas Philolaicas concinnavit. In quo notare potes apud Romanos non multum viguisse hoc studium; saltem nihil ab iis circa Astronomiam didicimus. Ut ergo omnia quæ toto hoc capite sum explicaturus quasi per synopsin hîc oculis subjiciam.

Inceperunt deinceps in Ægypto & Græcia fieri observationes. Nam Euctemon & Methon Athenis solstitium observarunt Nabonassari anno 317, seu ante Christum 424 annis. Hic Meton Cyclum novemdecim annorum invenit ut diximus. Aristillus paulò post stellarum declinationes observabat, & post 100 annos Calippus suam periodum annorum 76 constantem seu quatuor periodis Metonicis adinvenit: & sic anni magnitudinem correxit.

Successerunt circa annum ante Christum 274. Timocharis qui lunæ ad fixas adplicationes observabat, & Aristarchus Samius qui solstitium observavit, & Pythagoricam de terræ motu opinionem celebrem reddidit anno ante Christum 263 Dionisius Astronomus.

Ut autem meliùs totus Astronomiæ progressus innotescat eam priùs quasi in suas partes dividere necesse est. Astronomia igitur ut jam diximus scientia est quæ circa sydera consideranda quomodocumque occupatur. Hanc in duas species dividimus; in Astronomiam propriè dictam, quæ nempe μετεωροσκοπικὴ nominatur; quòd sublimia, astra scilicet contempletur, eorumque motus, & conversiones, distantiam, magnitudinem definiat. Hanc in plurimas partes dividere possumus, nempe in octo. Prima pars doctrinam primi mobilis continet, nempe generalem quandam cœlorum ideam efformat, variaque systemata proponit, circulorumque omnium divisionem, syderum declinationes, ascensiones rectas, & obliquas, magnitudinem dierum, aliaque similia definit.

Secunda pars de solis motu annuo agit, ejusque irregularitatem certis regulis adstringit, nempe eccentricitatem, apogæum, perigæum, maximam declinationem, aliaque his affinia determinat.

Tertia pars lunarem motum considerat; qui cum intra mensem peragatur, sicut solaris annum efficit, in eo multum operæ collocarunt Astronomi, ut motum lunarem cum solis motu annuo conciliarent, unde tot ortæ sunt periodi in quibus per certos menses intercalares hoc dissidium tolleretur. Sic varias intercalationes adhibemus ut festa paschalia celebremus, quamvis enim annum civilem purè solarem habeamus annum tamen sacrum luni-solarem efficimus. Hujus syderis motus tot irregularitatibus subjacet, ut à nonnullis contumax sydus, & legum impatiens nominetur, ideo sane quod terris viciniùs, meliùs se se spectandum offerat, errores que vel minimos detegat. Hujus motus irregularitates omnes certis hypothesibus ad regularitatem revocat hæc tertia pars.

Quarta pars varia utriusque syderis, solis nempe & lunæ accidentia explicat, hoc est parallaxin, refractionem, distantiam, magnitudinem, diametros apparentes, eclypses & lunæ phases.

Quinta fixarum motum non communem tantum quo ab ortu in occasum feruntur determinat, sed peculiarem, etiam quo supra polos Eclypticæ ab occasu in ortum, lento admodum gressu moventur. Hic decursu tantum temporis detectus est propter tarditatem.

Sexta tres superiores planetas Saturnum, Jovem & Martem intuetur, eorumque motum tam in longitudinem quàm in latitudinem, regressiones, directiones, stationes, phases item varias certis hypothesibus & regulis adstringit.

Septima Venerem & Mercurium considerat.

Octava denique de cometis agit.

Hæc Astronomiæ pars aliam affinem, & quasi subalternam sibi vindicat, quam sub Kalendarii nomine nuncupamus: Hæc scilicet totam anni civilis cum solis lunæque motibus conjunctionem, & comparationem continet, variarum nationum annos civiles proponit, quæstiones paschales solvit, cyclum aureum, epactas, cyclum solarem, indictiones, dies bissextiles, cyclorum combinationes, periodum Julianam contemplatur. Kalendaria varia proponit ut Turcarum annum purè lunarem, annum vagum Ægyptiorum, & Persarum, annum Julianum, annum Gregorianum.

Secunda Astronomiæ sumptæ universaliter pars, dicitur communiter Astrologia divinatrix, quæ ex vario syderum aspectu, in futurorum cognitionem venire contendit. Hæc item authores habuisse Chaldæos, & Babylone simul cum verâ Astronomia viguisse ita pervulgatum est, ut Astrologi, & Chaldæi pro iisdem sumantur.

Hanc porro disciplinam à Beroso, qui in Insula Coo, hodiè *Lango* diù egit, in Græciam invectâ est, & à Græcis in Latium, & ad Arabas pervenit; Quæ etenim vetustiores Poëtæ, ad præsignificationes mutationum aëris, & anni tempestatum in suis versibus cecinerunt, ea inquam longè absunt ab arte Chaldaica, cùm tantum varias circa agriculturam operas statis temporibus faciendas esse significarent, & certam aëris temperiem, quæ in Græcia præsertim regulariter ut plurimùm solet recurrere tantùm indicarent. Hanc divinatricem Astrologiam quatenus ex horoscopo totaque cœli dispositione, eventus hominum liberos prædicit, vanæ curiositatis partum matheseosque opprobrium nominare solemus. In quâ scilicet ne una quidem demonstratio, nulla scientiæ aut veritatis umbra, sed hallucinatio perpetua, & ex solis planetarum & constellationum nominibus sibi de futuro blandienti, ineptia.

Utriusque tamen scientiæ progressum, authoresque à quibus aut inventa, aut promota fuit per singulas ætates in hoc capite refero.

Vetutissimæ observationes quarum extant memoria, sunt tres Eclypses observatæ Babylone anno Nabonassari 27 & 28, nempe 720 annis ante Christum, nempe circa annum 32 urbis Romæ conditæ. Fuerunt tamen aliæ antiquiores habitæ ibidem. Refert enim Porphyrius, quòd cùm Alexander Magnus cœpit Babylonem asservabantur in ea urbe observationes annorum 1903. Fuit autem Alexander circiter 320 annis ante Christum, cui numero si addas 1903, fuerunt illæ observationes factæ ante Christum 2223. nempe antecesserunt fundationem urbis Romæ annis 1471 missæque sunt ad Aristotelem à Callisthene. Referuntur aliæ eclypses observatæ Babylone Nabonassari anno 367, seu ante Christum 380 annis; seu circiter trecentesimo septuagesimo secundo Urbis conditæ anno. Ex quibus vides quam rectè Chaldæis inventæ Astronomiæ gloria tribuatur.

Thales Milesius natus anno Urbis conditæ 120, seu ante Christum 631. primus omnium sapientis nomine appellatus, præter Geometriam quam ex Ægypto in Græciam advexit tropicos, & æquinoctialem dicitur designasse, eclypses solis prædixisse, nempe anno Urbis conditæ 170, cum esset quinquagemarius primam prædixit teste Plinio. Dicitur inventor Ursæ minoris, forsitan quod ejus usum aliquem in navigatione ostenderit, aut aliquid simile circa Ursam minorem præstiterit. Dicitur ex prænotione astrorum, futuram olearum fertilitatem prævidisse, & immensas ex earum coemptione divitias sibi comparasse.

Paulò post Anaximander pariter Milesius Thaletis successor obliquitatem Zodiaci observavit, Lunam alienâ luce splendere docuit, sphæram construxit.

Cleostratus paulò post Anaximandrum Zodiacum in 12 signa divisit, vitium tetraëteridis detexit, & pro ea octaëteridem introduxit. Hecateus composuit librum de situ orbis.

Pythagoras Samius Ægypto, & Perside perlustratâ, multa in mathematicis præstitit. Docuit Luciferum, & Hesperũ idem esse Veneris Astrum. Hunc asserunt nonnulli obliquitatem Zodiaci invenisse, quam jam suprà observatam videmus: potuit alia circa hanc obliquitatem notare, nempe omnes planetas, in Zodiaco, circa proprios ejus polos, ab occasu in ortum proprio motu deferri, & hanc circumvolutionem contrariam esse primæ & generali qua stellæ omnes ab ortu in occasum moventur. Hoc enim nonnulli tribuunt Pythagoricis. Hæc item opinio terræ motæ, quam Copernicus è ruderibus suscitavit, Pythagoræ tribuitur, Pythagorici enim, etiam ante Aristarchum Samium eam tuebantur.

Anaximenes Milesius qui floruit tempore Pythagoræ dixit sydera non solum supra terram, sed etiam circa moveri.

Philolaus Crotoniates Philosophus Pythagoricus dicitur primus dixisse terram in orbem moveri; ita Laërtius qui addit nõnullos hanc opinionem Hicetæ, aut Nicetæ Siracusio tribuere. Idem senserunt, Seleucus, Cleanthes Samius, Leucippus, Ecphantus, Heraclides Ponticus, Aristarchus Samius.

Tertio Urbis conditæ sæculo, ante Christum 550 annis floruit Anaxagoras Clazomenius, qui primus dicitur lunæ eclypsin prædixisse, & causam aperuisse. Idem asseruit solem majorem esse Peloponeso. Pericles item ejus discipulus Atheniensium princeps, populum ob eclypsin solis trepidantem explicatâ eclypsis naturâ sedavit.

Quarto Urbis sæculo, 450 annis ante Christum Democritus Abderita, quem nonnulli Milesium volunt, Anaxagoræ, & Leucipi discipulus, uno anno major natu quàm Socrates, scripsit de syderibus vagis seu planetis, de anno magno, & de polo.

Deinceps inceperunt fieri observationes in Græcia, & Ægypto, nam Euctemon & Meton Pausaniæ filius Athenis solstitium observarunt Nabonassari anno 317 seu 424 annis ante Christum. Hic Meton primus Enneadecaterida seu Numerum aureum invenit, & in Græcia instituit, qui annus Metonis propterea dictus est. Primus tempestatum, & mutationum aëris Prognostica edidit, & octaëterida correxit. Tetraëteride primùm utebantur Græci, cujus vitium notavit Cleostratus, ut diximus, & introduxit octoëteridem, cujus vitium notavit Harpalus, aliamque octaëteridem substituit. Hanc iterum correxit Meton, & suum cyclum novemdecim annorum introduxit. Octaëteridem nonnulli Eudoxio Gnidio Astronomo insigni tribuunt, qui eodem tempore vixit, scripsit etiam de constellationibus.

Circa hæc tempora Helico Cysicenus Platonis familiaris, cum regi Dyonisio solis defectum prænunciasset, Rex summè admiratus ei argenti talentum dono dedit.

Philosophus Platonis auditor scripsit de intervallo solis, & lunæ, de eclypsi, de magnitudine solis, lunæ, & terræ, de Planetis.

Centum annis post Metonem Calippus suam periodum 76 annorum ex quatuor scilicet Metonicis cyclis concinnavit, & sic melius anni quantitatem, & lunationum recursum adeptus est.

Quinto Urbis sæculo sub medium 300 circiter ante Christum annis Euclides tractatum edidit qui extat dicitúrque phænomena. Agit de sphæra, & primo mobili, de ortu, & occasu tam syderum, quam punctorum Zodiaci in diverso horizonte, nempe loquitur de ascensionibus obliquis. Continet propositiones 19, quarum nonnullæ clarius in Theodosio demonstrantur. Hunc pariter tractatum habemus ex traditione Theonis Alexandrini, quem Bartholomæus Zambertus Venetus Latinum fecit. Doctrina hoc libro contenta, utilis est, potuit tamen facilius tradi.

Eodem fermè tempore, hoc est Olympiade 124. seu circiter 280 annis ante Christum Aratus Poëta Solensis in Grammatica Menecratis discipulus, in Philosophia Timonis, & Menedemi scripsit phænomena, seu descripsit constellationes, ex quarum ortu aut occasu prognostica mutationum aëris prædixit.

Græcè & Latinè editus est hic liber Basileæ 1585 in octavo. Hic Aratus secutus est in omnibus Eudoxium Astronomum, & sua phænomena accommodavit ad Hellesponti, & Lacedæmonis Clima, ubi eum vixisse credibile est. Fabulas etiam constellationum retulit. Hoc Opus sequentes commentariis illustrarunt Agesianax, Alexandri Ætolus, & Ephesius, Antigonus grammaticus, Apollonii Grammaticus, & Geometra, Aristarchi Grammaticus & Samius, Aristophanes, Aristilli duo, Attalus Ahodius, Bohethius, Callimachus Cyreneus, Callistratus Tenedius, Crates, Dydimi duo, Eratosthenes, Heliodorus Stoicus, Hermippi duo, Hipparchy Bithynus, Numenius Parmenides, Parmeniscus, Pyrrhus Magnesius, Sminthes Thales, Timotheus Zeno.

Autolycus Præceptor Arcesilai floruit circa Olympiadem 120: extat ejus liber de sphæra quæ movetur & alter de vario ortu, & occasu syderum. Primus continet 12 propositiones quibus proprietates circulorum sphæræ demonstrantur. Impressus Parisiis cum commentario Paschasii in Arenarium Archimedis in octavo 1585.

Conon Geometra, & Astronomus insignis Ptolemæo Philadelpho gratificaturus Berenices comam in cœlum transtulit, librosque 6 de Astrologia composuit, qui non extant. De eo ita loquitur Virgilius

In

In medio duo signa Conon, & quis fuit Alter.
Hunc alterum Pontanus existimat esse Archimedem, qui ei fere synchronus fuit.

Berosus Chaldæus dicebat Lunam esse pilam dimidiâ parte candentem, & dimidiâ parte cæruleam, huic ob divinas prædictiones statuam inauratâ linguâ posuerunt Athenienses.

Eodem fere tempore celebris fuit Aristarchus Samius, qui Pythagoram, & Philolaum secutus terram sole immoto moveri credidit. Hodiè nihil hujus Aristarchi Samii habemus, præterquam de distantiis solis, & lunæ, cujus tractatum cum Pappi Alexandrini explicationibus, latinè vertit, & commentariis illustravit Federicus Commandinus. Pisauri 1572. Solemne item Problema quò ex differentia dichotomiæ apparentis, & quadraturæ veræ distantia solis à terra eruitur, Aristarcho Samio tribuitur, quod problema ope Telescopii adhuc ulterius provehimus, invenimusque immensam pene solis à terra distantiam, ita ut semidiametros terræ 7000 excedat, reddátque horizontalem ejus parallaxin unius semiminuti. Observavit item solstitium. Opus ejus ita procedit Primò ostendit lunam à sole lumen accipere. Secundò terram puncti, ac centri habere rationem ad sphæram lunæ. Cum luna dimidiata apparet, circulum qui limbus est illuminationis, vergere ad visum & per modum lineæ apparere, & tunc deficere à quadrante gradibus tribus, ex quibus colligit distantiam solis à terra majorem esse quam duodevigintuplam distantiæ Lunæ à terra.

Hoc tamen problema tubo optico exactiùs perficimus, majoremque solis distantiam invenimus. Pisauri in quarto 1572.

Aristillus circa hæc tempora, observabat stellarum fixarum motum, nonnullasque ejus observationes refert Ptolemæus in sua magna constructione.

Timocharis item loca stellarum observavit; primam arietis duobus gradibus à sectione verna reperit.

Dionysius Astronomus anno Alexandri magni 39 nempe ante Christum 285 suum solarem Astronomicum jam publicaverat, in quo nomina mensium, à signis Zodiaci indiderat.

Sexto Urbis sæculo, ab obitu Alexandri annis 90, nempe ante Christum 234 Erathosthenes Cyreneus Astronomiæ in Ægypto vacabat, reperítque maximam solis declinationem grad. 23. min. 51, librum item de Zonis, terræ ambitum dimensus est. Illo suadente positæ sunt Alexandriæ Armillæ, & regulæ ad quotidianas observationes, fuit bibliothecæ Alexandrinæ præfectus. Reliquit canonem temporum.

Archimedes quoque Siracusius Solstitiis notandis, incubuit, non extant ejus ullæ observationes. Dicitur & celebre automaton construxisse, sphæram scilicet mobilem vitream, de qua Claudianus composuit Epigramma. Jupiter in parvo, &c.

Sulpitius Gallus Consul primus inter Romanos rationem Eclypsium in vulgus edidit, pridiè quam P. Æmilius Persen Regem superaret.

Olympiade 154. Nabonassari 587. ante Christum annis 160, floruit Hipparchus qui aliis dictus est Abrachis, qui in insula Rhodo observavit maximam solis declinationem grad. 23. 51. primam arietis stellam grad. 4 promotam à sectione vernâ, novam stellam suo tempore genitam deprehendit, cujus occasione stellarum omnia loca assignavit organis ad id excogitatis. Scripsit de motu lunæ in latitudinem. Item commentarium in Arati phænomena, ususque Asterismorum, non ita pridem in lucem editi.

Isagogen ejus in Arati & Eudoxi phænomena interpretatus est Dyonisius Petavius è Societate Jesu. In toto hoc opere describuntur constellationes earumque ortus, & occasus cum ortu, & occasu signorum comparantur. Ostendit autem Aratum omnia sumpsisse ex Eudoxo, & cum illo errare, sicut & Attalum Grammaticum. Idem Hipparchus luminarium motus, ex collatione propriarum observationum cum veteribus exactiores reddidit, & in tabulas retulit.

Paulò post Cleomedes Græcè scripsit meteora, seu de circulis cœlestibus elegantem admodum tractatum, seu de mundo. Item circularis inspectionis meteororum libros duos, quorum primus agit de mundi quantitate, de cœli orbibus, de globorum cœlestium conversione, de orbe signifero, de torrida, de augmento dierum, de totius terræ habitatione, quod mundus sit globosus, quod terra sit mundi medium. In secundo de solis quantitate, de lunæ stellarumque magnitudine, de lunæ defectu, de vagis stellis, Joanne Vallâ interprete. Græcè, & Latinè Basileæ 1585. Opus optimum, quamvis ea quæ dicit sint modo communia.

Octavo Urbis sæculo ante Christum 50 annis Theodosius Tripolita præter sphæricorum libros tres quos in Geometria retulimus, & qui accommodari possunt Astronomiæ cujus elementa continent; edidit & tractatum de diebus & noctibus, qui ad Geographiam refertur.

Floruit eodem tempore Sosigenes Ægyptius Astronomus, cujus operâ Julius Cæsar Kalendarium correxit. Fecissetque melius nisi Sosigenes ipse addubitasset quibus præcipuè diebus essent notanda solstitia.

Circa tempora Ciceronis & Sullæ vixit Geminus patria Rhodius qui scripsit elementa Astronomiæ quæ extant: hunc citat Proclus, immò Procli sphæra nihil videtur continere, nisi quædam capita horum elementorum. Hujus authoris Opus Latinum fecit Edo Hildericus.

In hoc opere primò author distinguit Zodiacum constellationum, & dodecatemoriorum; tum motus solis inæqualitatem explicuit per eccentricum. Differit de aspectibus planetarum, de axe, & polis, & circulis spheræ, æquinoctiali, tropicis, polaribus, eclyptica, meridiano, horizonte. Distinguit climata per diem longissimam. Cur in qualibet die, & nocte 6 signa oriantur, & occidant. Agit de mense, de anno lunari, & solari, de annis Ægyptiacis, de octaëteride, cyclo novemdecim annorum, de lunæ illuminationibus, eclypsibus solis, & lunæ, de ortu, & occasu, de habitationibus, & divisione terræ; de significationibus astrorum, in quo ostendit ea esse signa, non causas mutationum. Agit item de cyclis, habet catalogum ortus syderum, cum significationibus, seu aëris temperie quæ solet accidere per singulos dies; item catalogum Astronomorum, adjectis locis in quibus mutationes aëris observarunt. Vultque ut singuli in suis regionibus idem præstent, Ex hoc opere quam plurimi desumpserunt.

C. Julius Cæsar Monarcha scripsit Metaphrasin in Arati phænomena. Manilius Antiochenus Astrologus, & Poëta primus Latinis carminibus Astronomica cecinit. Extat ipsius Astronomicon illudque dicavit Augusto, initio describit constellationes, tum ad prognostica Astrologica gradum facit.

C. Julius Hyginus Augusti libertus Poëticon Astronomicum scripsit in quo post levem spheræ explicationem, singulas percurrit constellationes; fabulasque antiquorum recenset iis convenientes, describit item earum stellas. Hoc Opus recognitum, & mendis purgatum impressum est Salingiaci in quarto 1539. Habet item nonnulla ad horoscopos spectantia. In quarto Augustæ Vindelicorum 1668. In hoc nihil addisces nisi fabulas constellationum.

Primo Christi sæculo ante Ptolemæum, 400 annis Menelaus qui & Milesius observationes aliquas fecit quæ à Ptolemæo referuntur, nempe primam Arietis post æquinoctium gradibus 6.12. de subtensis, & sphæricis triangulis scripsit. Observavit Romæ & Rhodi.

Extremis Neronis temporibus Andromachus Cretensis floruit, qui primus dicitur edidisse Theoricas planetarum, alii Andronicum vocant.

Paulò pòst Theon qui Mathematicus appellatur, quem Smyrnæum fuisse existimat Bullialdus. Alexandriæ observavit motus cœlorum, extantque ejus observationes à Ptolemæo relatæ.

Sub initium secundi sæculi nempe anno Christi 107, Agrippa Mathematicus in Bithynia observabat lunæ conjunctionem cum Pleyadibus.

Secundo item Christi sæculo Claudius Ptolemæus Pheludiensis Alexandrinus floruit sub Adriano, & Antonino, mortuus anno Christi 147, natus annos 78. Alexandriæ Ægypti suas observationes habuit. Scripsit autem Græcè primo. Almagestum vocavere Arabes, seu magnam constructionem, quam Georgius Trapezuntinus in latinum transtulit, & Lucas Gauricus Neapolitanus matheseos professor recognovit, & Typis mandari curavit anno Christi 1528.

Hoc Opus in libros 13 dividit Ptolemæus.

In primo habet principia universalia Astronomiæ, de cœli, & terræ figura, de magnitudine respectiva terræ, de quiete. Tum principia trigonometriæ proponit nempe canonem chordarum brevissimum, & demonstrationes trigonometriæ communes, paucas admodum, ita ut hæc trigonometria sit valdè imperfecta. Denique declinationem Eclypticæ maximam inquirit, & ex ea declinationum, & ascensionum rectarum tabulas componit.

In secundo libro terræ à nobis habitatæ situm describit, & ex maximæ diei quantitate, elevationem poli, & amplitudines ortivas determinat, tum ascensiones in sphæra obliqua, ejusdem sphæræ obliquæ proprietates, & angulos Eclypticæ cum meridiano inquirit.

Tertius liber est de sole, de magnitudine anni, de anomalia solari, eccentricitate, prostaphæresibus, & inæqualitate diei naturalis.

Quartus agit de motu lunæ præcipuè verò de ejus mediis motibus, longitudinis, anomaliæ, latitudinis, & de prima lunæ inæqualitate.

Quintus versatur præcipuè circa secundam lunæ inæqualitatem, primóque proponit instrumentum Armillare ad ejus à sole longitudinem observandam, tum de diversitate aspectuum lunæ differit, & de instrumento ad eam capiendam, deinde de lunæ distantia, de semidiametris utriusque syderis, & eorum distantiis à terra.

Sextus conjunctionis solis & lunæ considerat periodos, eclypses, earumque terminos, tabulasque conficit ad earum supputationem.

Septimus fixarum in consequentia motum determinat, modumque describendarum constellationum docet.

Octavus de constellationibus hemisphærii australis agit, de via lactea, de ortu, & occasu stellarum de earumdem occultationibus.

Nonus de motibus quinque Planetarum minorum in genere, & de motu Mercurii in longitudinem.

Decimus de motu in longitudinem Veneris, ejusque periodis, item de eccentricitate Martis ejusque epicyclo.

Undecimus de motibus in longitudinem Jovis, & Saturni, eorumque epicyclis.

Duodecimus agit de stationibus, & regressibus quinque planetarum, maximisque digressionibus Veneris, & Mercurii.

Decimus tertius agit de motu in latitudinem quinque planetarum, eorumque occultationibus sub radiis solaribus.

Opus hoc continet Astronomiam perfectam, quam ante ipsum nemo tam perfectè tradiderat. Immo continet id totum quod ex Antiquis in hac materia restat. Videtur tamen non satis docere quomodo inventæ sint certæ periodi, præcipuè anomaliæ lunæ; nam potius traditos ab Hipparcho motus examinat, quàm ipse de novo inveniat. Jure præstantissimus habitus est Astronomus, quotquot enim post ipsum fuerunt, ejus praxin, methodum totumque ordinem secuti sunt. Sicut ipse secutus fuerat Hipparcum.

Idem Claudius Ptolemæus tractatum edidit cui titulus, Apparentiæ Inerrantium cum significationibus. Hunc interpretatus est Dyonisius Petavius è Societate Jesu, in suo Uranologio. Est autem Kalendarium Ægyptiacum per singulos menses, & dies digestum cum ortu, & occasu syderum, & significationibus, nempe mutationibus aëris accidere solitis in iis regionibus. Hoc Opus utile potest esse ei qui aliquid statuere vellet ex astris circa mutationes aëris. Inventum est Parisiis in Bibliotheca Regia.

Additus est in eodem Petavii Uranologio alius Ptolemæi tractatus digestus secundum menses Romanos, ex translatione Nicolai Leonici.

Invenitur ibidem Kalendarium Romanum pro Constantini magni temporibus, nempe Christi 325 quo Nicæna synodus prima celebrata est, è museo Joannis Georgii Heruvart.

Eidem Claudio Ptolemæo nonnulli falsò tribuunt Quadripartitæ constructionis libros 4 seu de Astrologia judiciaria. Duos priores Joachimus Camerarius latinos fecit., Posteriores Erasmus Osvaldus Schrekhenfuchsius.

In primo ostendit Astrologiam, & scientiam esse, & utilem; tum differit de viribus Planetarum, eosque dividit in diurnos, & nocturnos; exinde de aspectibus à sole, de anni temporibus, de signis masculinis, & fæmininis, de imperantibus, & obedientibus, de domibus triangulis, altitudinibus, de cujusque Planetæ dignitatibus, & de finibus.

In libro secundo singulas gentes sub suis signis constituit, loquitur de tempore eventuum, de coloribus eclypsium, de cometis, de noviluniis, de tempestatum consideratione.

In tertio de scientia gradûs ascendentis, de parentibus, de nativitate geminorum, de spatio vitæ, de qualitatibus animæ nati.

In

In quarto de prosperitate, conjugiis, filiis, peregrinationibus, de fixarum significationibus.

Hoc Opus nihil habet solidi, nullam demonstrationem, nullam experientiam.

Author Anonymus Græcè scripsit annotationes in quadripartitum Opus Ptolemæi quem plurimi existimant esse Proclum; nempe verba subobscura explicat, & sæpè rationes addit de suo.

Tertio Christi sæculo Porphyrius Philosophus introductionem edidit in Opus quadripartitum Ptolemæi, & pariter ejus loco obscura explicuit & rationibus confirmare visus est.

Eodem tempore Censorinus in eruditissimo libello de die natali, multa habet ad Astronomiam spectantia.

Hippolitus Episcopus ob discordias inter Latinos, & Græcos circa celebrationem Paschæ scripsit primus de cyclo Paschali, ejusque propterea inventor dicitur.

Quarto Christi sæculo Sextus Avienus Rufus Arati phænomena & Dyonisii Afri Poëma de situ Orbis latinè interpretatus est.

Floruit sub Cōstantino Julius Firmicus Maternus Siculus, Vir Consularis qui ad Mavortium Lollianū virū item Consularē Astronomicon libros octo conscripsit, de Astrologia judiciaria, quos Pruckneru Astronomus ab innumeris mendis expurgavit. Liber primus Astrologiam judiciariam adversus æmulos defendit, eorumque rationes dissolvit. In secundo libro Zodiacum in signa partitur, planetarum domicilia, altitudines, dejectiones, signorum decanos, fines, diurna, & nocturna gaudia, ducatus, trigonorum dominos, signorum ortus in diversis climatibus, genituræ cardines, loca secunda, aspectus planetarum, signorum cognationes, vitæ datorem, cronocratorem, aliaque Astrologiæ judiciariæ fundamenta explicat. Tertio libro Mundi Thema, singulorumque planetarum decreta, per singulas cœli stationes. Item Mercurij cum reliquis planetis decreta proponit.

Quarto lunam applicat ad singulos Planetas, ejúsque defluxionem à Planeta uno ad alium explicat, item generalia ejus decreta, tum fortunam explorat, genituræ dominum, ejusque decreta fatalia, 36 decanos, signorum partes masculinas, & fœmininas considerat. Quintò simplicia cardinum decreta, singulorum planetarum in singulis Zodiaci signis, & in aliorum planetarum domiciliis decreta proponit. Sextò agit de radiationibus, seu aspectibus Planetarum, nempe trigono, sextili, oppositione, quadrato, de decretis item planetæ cujuslibet dum fuerit cronocrator. Septimo genituras expositorum, geminorum, libertinorum, orborum, adoptivorum considerat. Octavò determinat quæ clara sydera cum singulis signis oriantur, singulorum item signorum myriogenesin. Hoc Opus clarè procedit.

Valens insignis Astrologus jussu Constantini urbis Constantinopolitanæ genituræ Thema erexit.

Theophilus Episcopus Alexandrinus mathematicus insignis jussu Theodosii Senioris cyclum Paschalem ordinavit, cui contrarium paulò post Dyonisius Abbas Romanis proposuit.

Eusebius Cæsariensis scripsit de cyclo Paschali.

Quinto Christi sæculo Proclus Diadochus Athenis Platonicæ Scholæ præfuit, fuit natione Lycius, discipulus Siriani, scripsit commentarium in Platonem, epicheremata in Christianos, & tractatum valdè parvum de sphæra, in quo loquitur tantum de quinque parallelis, nempe æquatore, tropicis, & polaribus, de meridiano, & horizonte. Item de constellationibus qui tractatus non sufficit, ad docendam sphæram cœlestem.

Composuit idem Proclus Hypotyposin Astronomicarum positionum, quæ est quasi epitome Almagesti memoriæ sublevandæ causa. Loquitur autem in hoc opere quod nullam habet distinctionem, de motu solis, lunæ, & mercurii. Tum de Astrolabii fabrica, ejusque aranea, de diurna solis inspectione, de horis Italicis. De inspectione stellarum, additæ sunt variæ praxes, ad inveniendas horas tam Astronomicas, quam Planetarias, de inveniendo climate in quo versamur.

Opus est exigui momenti, vixque intelligi potest, quia sine figura de astrolabio loquitur, vix enim potest sciri de quo loquatur. Omnia igitur in hoc opere sunt obscura, quæ ex eo addisci non possunt.

Idem Proclus composuit ut volunt multi Paraphrasin Græcam in Opus Ptolemæi quadripartitū, illudque melius explicat. Hoc Opus latinè vertit Leo Allatius. Lugduni Batavorum 1635 in octavo.

Porphyrius composuit brevem ejusdem operis explicationem quæ est parvi momenti, ex quo concluditur hoc Opus non fuisse Procli quem antecessit Porphyrius.

Cyrillus Episcopus Alexandrinus scripsit de cyclo Paschali.

S. Prosper Aquitanus scripsit de cyclo Pascali. Præcipuè cyclum magnum annorum 532.

Victorinus Aquitanus Astronomus ab Hilario Papa Romam invitatur ad Kalendarii correctionem.

Pappus Alexandrinus composuit commentarium in Ptolemæi magnam syntaxin.

Extant ejus explicationes in Aristarchum Samium, de magnitudinibus, & distantiis solis, & lunæ. Quas latinas fecit ut & Aristarchum Federicus Commandinus. Pisauri anno 1572.

Eodem ferè tempore floruit Theon Alexandrinus qui commentarium edidit in magnam Syntaxin Ptolemæi. Observavit eclypsin solis quam refert anno Nabonassari 1112 seu Christi 365. Scripsit item de ortu caniculæ.

Hujus filia Hypatia Astronomiæ peritissima, quæ à suis concivibus miserè occisa est & per urbem tracta, Ita Hesichius, & Suidas, scripsit Astronomicum canonem.

Circa annum Christi 427 claruisse dicitur Cleomedes cujus extat duobus libris circularis meteororum inspectio. Eam vertit Georgius Valla Placentinus quam Græcè primus edidit Conradus Neobarius Parisiis 1539. postea Henricus Petri Basileæ 1561.

Sexto Christi sæculo ineunte seu anno 500. Diocletiani 216 Athenis Thius Mathematicus in syderibus observādis operam posuit. Hujus septem observationes valdè utiles Parisiis edidit Ismael Bullialdus, eò gratiores quod à Ptolemæo ad Albategnium nullæ extent. Exscripsit ex veteri codice manuscripto Bibliothecæ Regiæ.

Eodem sæculo Cassiodorus vir consularis scripsit de quatuor mathematicis Geometria, Arithmetica, Astronomia, Musica.

Hero Alter, item mechanicus asserit in sua Gæodesia stellas in consequentia à tempore Ptolemæi ad suam ætatem, seu ut asserit Albategnius annis 460, esse progressas 7 gradibus.

Dionysius Exiguus Abbas Romanus computum & cyclum paschalem, aliter ac Græci ordinavit ann. D. 532, quem latina Ecclesia secuta est, usque ad correctionem Kalendarii sub Gregorio XIII factam. Primus annos à nativitate Domini numerare cœpit, qui prius à Diocletiano numerabantur.

His temporibus Mahometani per Africam se extendunt, & cessavit Astronomia Alexandriæ exerceri. Non tamen proterea hæc natio bellum scientiis indixit, nam Caliphæ quamplurimos libros Græcos, omnium scientiarum, ac artium, ex Græco in Arabicum sermonem verti curaverunt, ut syntaxis Ptolemæi, jussu Maimonis regis Saracenorum Babylone Arabicè reddita est anno Christi 827. Hegiræ 212. Quare brevi apud Arabas multi evaserunt Philosophi, & Astronomi, multò plures Astrologi.

Septimo Christi sæculo Isidorus Hispalensis omnium mathematicarum compendium inserit in suo libro de originibus. Egit item de cyclo paschali. Et in libro de mundo Tractatum de sphæra brevem edidit.

Martianus Capella, qui & Mineus Fœlix dictus est, scripsit de 4 Mathematicis.

Anno Christi 633 S. Maximus monachus, & martir composuit Græcè Brevem enarrationem Christiani Paschatis, quam Dionysius Petavius è Societate Jesu interpretatur. Habet pro ratione illorum temporum, quidquid requiritur ad inventionem diei Paschæ, lunationum, cæterorumque ad computum ecclesiasticum pertinentium.

Idem Petavius interpretatus est Isaaci Argyri monachi ad Oenæoten Andronicum computum ecclesiasticum. Sicut fragmentum Incogniti de eadem materia quæ omnia utilia esse possunt ei qui antiquas methodos scire cupit.

Ad hæc circiter tempora referimus Achillem Statium seu Tatium, secundùm Suidam. Hic Alexandrinus fuit qui de Leucippo, & Clitophonte scripsit, & alia amatoria libris octo; tandem factus Christianus, & Episcopus, scripsit de sphæra, & etymologia, item historiam miscellaneam, quæ multorum magnorum virorum mentionem facit. Ipsius vero oratio, in omnibus sapit stylum amatorium. Hujus isagogen Græcam in Arati phænomena vulgavit Petrus Victorius ex Medicea bibliotheca, & hanc Dionysius Petavius ex Societate Jesu latinam fecit. In hac igitur loquitur de natura, & figura Universi, de motu, an sit aliquid extra mundum. An tellus stet. De stellarum natura, figura, motu, de Planetis, de ordine, & numero sphærarum, & planetarum, de anno magno. De sole, & ejus magnitudine, de Luna, de circulis Zodiaco parallelis, coluris, axe, zonis, umbrarum differentiis, de meteoris, ventis, cometis, de motu syderum, ortu, occasu, & differentiis.

Octavo Christi sæculo Venerabilis Beda scripsit de computo ecclesiastico.

Nono Christi sæculo ineunte nempe anno 800 litteræ apud Arabes florere incipiunt. Almeon, seu Almamon quinquaginta annis ante Albategnium dicitur observasse maximam solis declinationem graduum 23. 51. item in campis Singar prope Babylonem observavit uni gradui terræ deberi milliaria 56.

Albategnius Aracensis Arabs anno Christi 880, observavit maximam solis declinationem graduum 23. 35. primam arietis promotam esse ab intersectione verna gradibus 18. 2. Est autem Aracta urbs Syriæ à qua dictus est Aracensis hic author dictus etiam est Machometus filius Acharani. Librumque edidit de scientia stellarum seu Astronomiam, quæ extat. Sequitur autem ferè ordinem Ptolemæi. Nam præmittit nonnulla de chordis in circulo, in ordine ad trigonometriam. Tum scientiam primi Mobilis, & ejus problemata capitibus 17 explicat. Secundò de stellis fixis capitibus 10. Tertiò de sole tribus capitibus. Quartò agit de luna ejusque oppositionibus, conjunctionibus, eclypsibus, exinde de aliis planetis, totamque Astronomiam restituit. Multas habet observationes proprias. Difficilis est hic author ob phrasin non satis latinam, sed quæ sapit Arabicum idioma. Typis mandatus est Norimbergæ in quarto 1537. & iterum Bononiæ 1545, cum aliquot additionibus Joannis Regiomontani, ex Vaticana Bibliotheca transcriptus in quarto.

Ejus observationes circa declinationem zodiaci, & loca stellarum sunt maximi momenti in Astronomia.

Hoc eodem tempore Psellus author Græcus, qui filios Imperatoris docuit. Astronomiæ compendium tradidit in quo universales tantum notiones circulorum & Theoriæ Planetarum, ita breviter tradit, & sine figuris, ut illud legere sit dispendium temporis, in quo nempe nihil addisces, nisi prius illud sciveris. Hoc Opus à Xylandro latinè versum est, & annotationibus illustratum. Basileæ in octavo 1556.

Paulus Philosophus introductionem Astrologiæ composuit.

Petosciris Ægyptius Astrologica è sacris libris pertractavit.

Geber Arabs à quo dicitur Algebra nomen accepisse, Opus Astronomicum edidit, in quo novem libris Ptolemæi Almagestum exponit, ac corrigit. Similiterque cum Ptolemæo agit de triangulis sphæricis. Ex hoc Opere multa sumpsit Georgius Purbachius, & Regiomontanus dum Almagestum in epitomen contrahunt. Voluit Geber Ptolemæum emendare. Hunc vocat propterea Copernicus Ptolemæi calumniatorem. Norimbergæ 1533 cum instrumento primi mobilis Apiani.

Decimo Christi sæculo floruit Ebennesophin aliis Asophi dictus qui loca stellarum observabat anno 936.

Jam ab Anno 711 Arabes in Hispaniam transierant, & secum Philosophiam Peripateticam, & Astronomiam advexerant, ideóque multi in Hispania observationes syderum faciebant.

Eodem tempore apud Persas instaurabatur Astronomia, annus Persicus ex vago dierum 365, factus est Julianus, nempe initium anni affixum est æquinoctio verno habueruntque tabulas eo tempore cum cœlo congruentes, exceptis tabulis Mercurii.

Alpharabius Astronomus insignis his temporibus floruit.

Albumazar Astrologus scripsit de magnis conjunctionibus, & aliis ad judiciariam pertinentibus.

Alphraganus Astronomus Arabs scripsit de rudimentis Astronomiæ, Primò enim proponit nonnulla principia Geographiæ. Agit deinde de singulis planetis, de fixis item, mensurasque habet, & distantias, ortus, eclypses &c. Non tamen descendit, ad particularem motuum constitutionem. Hunc publicè interpretatus est Joannes De monte Regio, ejusque Operibus præfixit Orationem quam habuit, quâ scientiæ mathematicæ declarantur tantur eorumque utilitates. In quarto Norimbergæ 1537.

Undecimo Christi sæculo Alhasen Arabs in sua Optica nonnulla habet de crepusculis.

Arzahel, seu Arzachel Hispanus circa annum 1070, nempe 190 annis observavit maximam eclypticæ declinationem graduum 23.34.

Isaac Argyrus monachus Græcus egit de Paschatis correctione.

Anno Christi 1050, & genere & doctrina clarus fuit Hermannus Contractus filius Volferadi Comitis Varingensis; fuit monachus Augiensis; inter alia scripsit de eclypsibus, & de computo; de Astrolabio & musica.

Circa annum 1080 celebris fuit Guillelmus Hirsaugiensis Abbas in diœcesi Spirensi; qui philosophicas & astronomicas institutiones edidit.

Anno 1100 seu duodecimo sæculo ineunte Sigebertus Gemblacensis scripsit de computo.

Anno 1130 clarus fuit in Anglia Athelardus monachus Bathonensis. Scripsit de Astrolabio, & Erichiafarin Arabem de Planetis vertit in latinum.

Anno 1142 Almeon Almansorius solis maximam declinationem observavit gr. 23.33. Idem propositiones aliquot, quasi Astrologiæ judiciariæ compendium misit ad Saracenorum regem. Opus breve quod interpretatus est ex Arabico in latinum Plato Tiburtinus 1493.

Quo etiam tempore Hermes Astrologus Arabs centum Aphorismos edidit, nempe 100 propositiones explicantes quibus in locis planetæ sint fortunati, aut infortunati.

Bethem pariter Astrologus Arabs simile Opus edidit, quod extat; sicut & aliud de horis Planetarum.

Zahel Astrologus Arabs edidit Opusculum de electionibus, in quo docet quandonam sit aliquid agendum, vel non agendum. Extat item.

Messahalach Arabs Opusculum edidit de ratione circuli, & stellarum qualiter operantur in hoc sæculo. Est autem præcipuè in ordine ad mutationes aëris continetque duo folia.

Omar Ben-Alfargdianus Tiberiadis Astrologus, Opusculum edidit de nativitatibus, tribus libris: utiturque vocibus Arabicis, quæ deinde ab Astrologis consequentibus sunt receptæ. Ut Almuta pro dominatore loci, Hylech pro ascendente.

Albohazen Haly filius Aben-Ragel Arabs librum edidit de judiciis Astrorum, quem Yhuda filius Muscæ ex præscripto Alphonsi Regis, transtulit de Arabico in sermonem Hispanicum, & quem Ægidius de Tebaldis Parmensis, aulæ Imperialis Notarius, unà cum Petro de Regio ejusdem aulæ protonotario transtulit in latinum. Dicit autem author se in hoc libro, multos sensus adjunxisse de scientia stellarum, collegisseque ex multis libris sapientum. Prima ergo parte loquitur de signis & eorum natura, de planetarum qualitatibus, & aliis principiis judiciariæ. In tribus sequentibus agit de quæstionibus. In quinta, & sexta de Nativitatibus. In septima de de revolutionibus annorum nati. In octava de revolutionibus annorum mundi.

Rabbi Abraham scripsit de sphæra.

Anno 1149 Averroes seu Aben-Roes Medicus Cordubensis Epitomen edidit magnæ constructionis qui Commentarios scripsit in totum Aristotelem, dictusque propterea Commentator.

Alpetragius Arabs eodem tempore quò Almeon eandem maximam solis declinationem observavit.

Anno 1170 Clemens Langthoniensis Presbyter, & canonicus librum edidit de orbibus cœlestibus.

Joannes Hispalensis circa annum 1142 convertit Alphraganum in latinum.

Anno 1200 seu decimo tertio Christi sæculo ineunte Campanus Novariensis Italus scripsit computum ecclesiasticum, librum item de compositione quadrantis, Kalendarium, sphæram Theoricas Planetarum. Vertit item Euclidem ex Arabico. Scripsit item introductorium in Astronomiam. In quo primo constituit generalia quædam circa terræ locum, magnitudinem, figuram; circulos cœlestus considerat, ortusque sydeum; proprietates item cœlestes terrarum subjectarum; diversis cœli partibus, de eclypsibus solis & lunæ. Nihil habet quod vulgare non sit. Non habet demonstrationes.

Idem Campanus scripsit Kalendarium in quo agit de erroribus Kalendarii, & correctionibus, de Epactis item. Tractatus hic methodicus est, in 33 capita divisus, adjectis tabulis ad invenienda omnia ad Kalendarium spectantia.

Anno 1230 jussu Friderici secundi Imperatoris Magna Ptolemæi syntaxis ex Arabico in latinum sermonem versa est. Ei tamen remansit inditum nomen Arabicum ut diceretur Almagestum.

Anno 1232 Joannes De sacro Bosco, vel de sacro Busto tractatum de sphæra mundi edidit, quem multi commentati sunt, & in scholis legere solent multi. Opus clarum & bonum. Ea tamen quæ profert ut plurimum demonstratione carent; quæ facile ex Theodosio demonstrari poterant. De industria tamen id factum putamus, ut cœlorum notitiam etiam iis daret, qui Geometricis principiis sunt destituti. Hujus tractatus sunt quatuor partes. Prima est de partibus sphæræ, & figura mundi. Secunda de circulis sphæræ. Tertia de ortu, & occasu signorum, diversitate dierum, noctiumque, de diversitate climatum. Tertia continet alia accidentia, ut eclypses &c.

Anno 1235 Joannes Alkindus scripsit de radiis stellarum.

Anno 1270 Alphonsus Rex Castellæ, & Legionis accersitis undique Toletum Astronomis insignibus, inter quos præcipuus fuit Rabbi Isaac Hazan, Tabulas Alphonsinas edidit. Expensis in Astronomia quadraginta millibus ducatorum. Ex quo tempore apud Europæos cæpta est coli Astronomia. Hoc Opus editum est Parisiis in folio anno 1521.

Anno 1255 Rogerius Bacon Anglus Oxoniensis multa scripsit de Astronomia. Primo de utilitate Astrologiæ, de locis stellarum, de radiis solaribus, aspectibus lunæ, introductionem in Astrologiam, de judiciis Astrologiæ, prognostica ex syderum cursu. Accusatus fuit magiæ, quòd Astrologiæ esset deditus.

Anno 1300, seu decimo quarto Christi sæculo ineunte, Thebit primus in Astronomiam invexit motum trepidationis octavæ sphæræ, nempe ad obliquitatis Eclypticæ variationem salvandam.

Anno 1303 Prophatius Judæus solis maximam declinationem notavit g. 23.32. In Hispania observabat.

Anno 1355 Nicolaus Linnensis Anglus varia scripsit de Astrologia.

Anno Christi 1347 Joannes Eschuid Anglus Summam judicialem de accidentibus mundi edidit. Quod Opus vocant nonnulli Summam Anglicanam de Astrologiæ prognosticationibus. Hæc in duos tractatus dividitur: Primus est de accidentibus mundi in universum. Secundus de accidentibus mundi in particulari. Primus tractatus in 12 distinctiones dividitur; in prima agit de principio mundi, & quis planeta, aut signum dominetur in regione nostra. 2 De prognosticationibus magnarum conjunctionum, 3 Eclypsium, 4 De significationibus Planetarum cùm fuerint domini annorum, conjunctionum, Eclypsium. 5 De significatione Planetæ supra alium elevati. 6 De stellis fixis. 7 De naturis signorum & duodecim domorum. 8 De dominio Planetarum, & signorum in regiones. 9 De prognosticatione accidentium mundi per revolutiones. 10 De mutatione planetarum de natura in naturam. 11 De secundis stellis & cometis. 12 De qualitatibus planetarum, & signorum quasi per compendium.

2 Tractatus habet pariter 12 distinctiones. 1 De prognosticatione caloris. 2 frigoris. 3 serenitatis, & siccitatis. 4 imbrium. 5 nivis, & grandinis. 6 ventorum. 7 tonitruorum. 8 terræ motuum. 9 pestilentiarum. 10 caristiæ. 11 bellorum. 12 praxin habet.

Nullum reperies qui plura habeat de eventibus physicis & naturalibus.

Anno 1411 Petrus De Alliaco postea Cardinalis, composuit certas quæstiones mathematicas circa sphæram, & orbes cœlestes, sed difficultates proponit exigui momenti. Peccavit item quod crediderit Christi nativitatem præsciri potuisse ex genethliacis observationibus, adducitque stellam Magorum ad id comprobandum. Vidè Sixtum Senensem libro 5 Bibliothecæ sanctæ.

Anno 1440 illustris fuit Nicolaus Cusanus Cardinalis titulo Sti Petri ad Vincula, Natione Germanus, ex ditione Treverensi: qui inter alia multa scripsit reparationem Kalendarii, & correxit tabulas Alphonsinas.

Anno 1450 floruit Dominicus Maria Bononiensis, qui fuit præceptor Copernici.

Eodem Tempore fuit Georgius Purbachius præceptor Regiomontani. Scripsit Compendium Almagesti Ptolemæi, sed morte sublatus cùm vix sextum librum absolvisset. Regiomontanus ejus discipulus natus anno 1436 Opus hoc perfecit. Composuit item Theoricas planetarum, ut dicemus inferiùs, qui Romam ad emendationem Kalendarii evocatus, dicitur ab invidis veneno sublatus annos natus 33, nempe anno 1469. Referemus infra utriusque scripta, eo tempore quo typis sunt mandata. Primus dicitur Ephemerides conscripsisse.

Anno 1472 Joannes Blanchinus Tabulas motuum cœlestium edidit, quas postea Lucas Gauricus Venetiis edi curavit.

Anno 1491 Bernardus Gualterus Regiomontani discipulus, præcipue docuit quantùm in syderibus horizonti vicinis refractio noceat.

Anno 1470 Theodorus Gaza, author græcus, scripsit de mensibus Atticis librum. Hunc interpretatus est Joannes Perellus anno circiter 1530. Loquitur autem in hoc Opusculo de mensibus Atticis, de anno, de epactis, de mense intercalario.

1472 Prodiit Almanach perpetuum, seu Ephemerides & diarium Abrahami Zacuti Hebræi, cum Theorematibus Joannis Michaëlis Germani Budurensis cum Lucæ Gaurici castigationibus, & plerisque aliis tabulis; ut revolutionum septem planetarum, tabulis veri motus solis & lunæ, oppositionum & conjunctionum nodorum, ad eclypses latitudinis lunæ &c. Videtur autem hic author, sicut tabulæ quatuor annorum pro sole ejus locum semper indicant, invenisse alias revolutiones in singulis planetis, post quas redeant ad eadem loca iisdem diebus; quòd si verum foret, posset utilissimum esse ad inveniendum locum planetarum sine calculo. Sunt autem istæ revolutiones pro sole 4 anni, pro luna anni 31. pro Saturno 59. anni, quibus perficitur revolutio motus, centri & argumenti. Jupiter intra 83 annos. Mars 79. Sed centrum & argumentum annis 32. Veneris motus annis octo, centra verò Veneris, & Mercurii annis 4. Mercurii motus annis 125. argumentum annis 40. Quæ omnia exactiore examine egerent. Venetiis in quarto 1472.

1489 Leupoldus Ducis Austriæ filius de astrorum scientia compilationem edidit, in decem distinctam brevissimos tractatus.

Primus definitiones sphæræ, & circulorum continet.

Secundus planetarum theorias.

Tertius de probatione scientiæ judiciorum.

Quartus de introductoriis judiciorum, in quo de signis, planetis, in se & comparativè. Reliqui item pertinent ad astrologiam judiciariam. Venetiis in quarto 1489.

1496 Camillus Leonardus Pisaurensis Opusculum edidit cui titulum apposuit, Liber desideratus Canonum æquatorii cœlestium motuum sine calculo, nempe ut quis loca planetarum sine ullo calculo per circulos & rotulas chartaceas invenire possit. Dividit hoc Opus in tres partes; quarum prima sex quasi tabulas, & instrumenta circulis constantia ad locum planetarum inveniendum continet. Secunda pars introductoria erit, & quidquid de signis, gradibus, stellis fixis dici potest, compendio declaratur. Potestates item, & vires tam essentiales, quàm accidentales. Tertia de aspectibus, de diebus criticis. Omnia ex directorio.

Opus hoc viam aperit ad similia instrumenta, quæ utilia sunt iis qui omnimodam præcisionem non desiderant. Pisauri in quarto 1549.

Anno 1507 Lucas Gauricus Neapolitanus Ferrariæ Matheseos professor, edidit Astronomiam. Incipit ab oratione de laudibus, & utilitate astronomiæ; exinde proponit Opusculum de sphæra cum figuris. Omnia tamen carmine explicat. Sequuntur tabulæ amplissimæ motuum omnium planetarum satis intricatæ, nec ita faciles. Tertio est calendarium non benè explicatum, in quo congessit multa carmina, aliàque sine ordine; atque hæc in primo tomo continentur. In secundo verò habet tractatum de judiciaria astrologia, præmittit Isagogen in prædictivam astrologiam, in qua tamen multas exhibet tabulas de aliâ materia. Exinde habet tractatum de primo Mobili in quo innumeras tabulas exhibet. Alia multa congessit in fine Operis, *ut prognosticon pro multis annis carmine*. Totum Opus est indigesta moles & confusa, in quâ nihil addisces nisi prius id scias.

Anno 1526 Laurentius Bonincontrius Miniatensis de rebus cœlestibus libros tres edidit, à Luca Gaurico recognitos, & Operibus Gaurici additos.

In hoc Opere eleganti carmine tota traditur astronomia.

Anno 1510 Joannes Stoflerinus Justingensis apud Tubingam astronomiæ professor scripsit de Kalendario, adjectis tabulis tam ad festa mobilia invenienda, quàm ad cyclos reliquos determinandos. Adjecit nonnullas tabulas solis, & lunæ, item & tabulas motuum solis & lunæ in circulos, & quasi astrolabia digestus. Totum Opus obscurum est, & sine methodo & ordine procedit. Ita ut sit perdifficile ei qui Kalendarii rationem nesciat illam in eo authore addiscere.

Anno 1514 Joannes Vernerus Germanus sedulò motus syderum observabat. Reliquit duos tractatus de octava sphæra, statuitque maximam solis declinationem grad. 23. 28. Observavit primam Arietis gradus 26. ab Ariete progressam. Ejus observationes ut legitimas admittit Tycho.

Anno 1518 Joannes Baptista Capuanus de Manfredonia Canonicus Regularis Ordinis sancti Augustini Congregationis Lateranensis, exposuit Sphæricum Opus Joannis De sacro Bosco Astronomi celeberrimi. Nempe de sphæra mundi, de principiis tam geographiæ quàm astronomiæ.

Utrumque Opus utile est & bonum. Item Purbachii Theoricas planetarum.

Eodem circiter tempore Jacobus Faber Stapulensis Commentarium edidit in Introductorium Joannis de Sacro Bosco, facile, & clarum; sequitur autem eumdem ordinem. In primo agit de terræ figura, magnitudine, loco, quiete. In secundo circulos explicat omnes, eorumque officia assignat. In tertio de occasu syderum & de climatibus. In quarto de circulis & motibus planetarum, de causis eclypsium.

1519 Joannes Scieureus Brittulianus Bellovacensis Opus quadripartitum Ptolemæi recognovit, & typis mandari curavit. Parisiis 1619. in quarto.

1518 Albertus Pyghius Campensis Mathematicus ac Theologiæ baccalaureus edidit Opus adversus prognosticatorum vulgus qui annuas prædictiones edunt, & se astrologos mentiuntur; astrologiæ defensionem ad Augustinum Nyphum Suessanum astrologiæ sincerioris restauratorem. Parisiis in quarto 1518.

Extat libellus D. Pauli Veneti theologi clarissimi Augustiniani de compositione mundi. Habet autem nonnullas definitiones de sphæræ circulis, polis, &c. Habet etiam nonnullas propositiones circa motus cœlestes, quarum probationes sunt potius Philosophicæ quam Mathematicæ. Totum Opus est exigui momenti. In quarto Parisiis. Nescitur annus.

1520 Albertus Pyghius Campensis tractatum edidit de æquinoctiorum, solstitiorumque inventione, déque astronomorum erratis intolerandis. Præcipuè in stellarum locis. Procedit autem ratiocinium secundum Alphonsinorum doctrinam distinguentium duas eclypticas. Non videtur satis clarè ostendere errorem qui faciliùs ostendi poterat.

1520 Idem alium tractatum composuit de ratione Paschatis celebrationis, déque restitutione ecclesiastici Kalendarii ad Leonem decimum, Pontificem Maximum. Non satis explicuit methodum correctionis adhibendæ; hoc est, non satis ad particularia descendit. In quarto Parisiis 1520.

1521 Joannes Saxonius Alcabitij ad magisterium judiciorum astrorum Isagogen commentario declaravit. Parisiis in quarto 1521.

1521 Augustinus Riccius tractatum composuit de motu octavæ sphæræ. Opus Mathematica & Philosophia plenum. In quo tam antiquorum, quàm juniorum errores clarissimè demonstrantur, & quamplurima Platonicorum, & antiquæ Magiæ, quam Cabalam Hæbræi dicunt, dogmata videre licet cognitu suavissima. Ejusdem de astronomiæ authoribus epistola.

Inter alia rejicit mutationem declinationis eclypticæ & alios motus quos invectos putat ab observationibus perversis antiquorum. Hunc tractatum magnifecit Orontius Finæus, & typis denuò mandari curavit. In quarto Parisiis 1521.

1522 Albertus Pyghius Campensis Apologiam edidit seu potius expostulationem adversus novam Marci Beneventi Astronomiam, quæ positionem Alphonsinam ac recentiorum omnium de motu octavi orbis multis modis depravavit, & secum pugnantem fecit. In qua demonstrat Alphonsinam rationem quàm putat à paucis intellectam, & à Purbachio in multis malè explicatam.

Brevis est & luculenta enarratio Alphonsinæ positionis. Ejusdem Explanatio methodi quâ possit tabularum abacus referri ad eclypticam mobilem octavæ sphæræ.

Tota altercatio est de motu quasi trepidationis, quo puncta æquinoctialia cœli stelliferi videntur reciproco motu moveri circa sectionem vernam superioris cœli, nempe ut explicetur irregularitas qua stellæ inæqualiter recedere videntur à punctis æquinoctialibus. Communis est opinio astronomorum hujus temporis fictitiam esse hanc inæqualitatem, & provenire à motu telluris, qui refunditur in ipsas stellas; quare totum hoc Opus redditur inutile. In quarto Parisiis 1522.

Anno 1524 & 1525 Petrus Appianus Ingolstadii docuit. Scripsit de quadrante astronomico, aliisque instrumentis.

1528 Joannes Fernelius Ambianas Cosmotheoriam libris duobus comprehensam edidit. Prior mundi totius formam & compositionem, ejus subinde partium situs, & magnitudines, orbium tamdem motus quosvis solerter referat.

Posterior ex motibus syderum loca & passiones disquirit, sed omnia per epitomen. Nihil habet quod in præcedentibus non reperias; latinè benè loquitur.

1530 Joannis Hiechtembergers Prognosticatio, quam olim scripsit super magna illa Saturni ac Jovis conjunctione quæ fuit anno 1483. præterea ad eclypsin solis anni sequentis 1485. quæ durat ad annum 1567. jam iterum prodiit in lucem. Parisiis in quarto 1530. Opus non solidum.

1530 Petrus Nonius Salaciensis annotationes fecit in theoricas Purbachii, in quibus explicat quæ videbantur obscuriora, aut non satis demonstrata.

Opus quidem bonum, bonam continet doctrinam sed malè explicatam.

1531 Jacobus Zieglerus Landavus Bavarus in Plinii librum secundum de naturali historia, commentarium edidit, quo difficultates Plinianæ præsertim Astronomicæ tolluntur; item Organum aliquod hæc oculis subjiciens seu sphæra materialis.

Item Georgius Collimitius, & Joachimus Vadianus in eumdem secundum Plinii librum ediderunt.

In hoc Opere ferè tota astronomia continetur, non tamen in bonum ordinem digesta, nec idiomate satis claro. In quarto Basileæ 1531.

Anno 1533 Joannes Stoflerinus Justingensis hunc Procli Diadochi tractatum de sphæra, commentario erudito explicuit, sed non satis ordinato. Potuisset enim totam hanc doctrinam meliori ordine digerere, & non eam addicere ordini à Proclo proposito, cui sæpè non ita benè congruit.

Anno 1533 Otho Brunfelsius libellum edidit Isagogicum ad astrologiam judiciariam de definitionibus, & terminis astrologiæ.

1534 Joachimus Vadianus Sangallensis Epitomen trium terræ partium, Asiæ, Africæ, & Europæ, præcipuè eorum locorum quorum fit mentio in Evangelio. Habet nonnulla initio de Zonis & circulis, sed pauca.

1534 Jacobus Milichius professor Mathematicus in Schola Vvitembergensi Commentarium edidit in eumdem secundum Plinii. Hic commentarius non est ita amplus ac superior, & sequitur ad amussim authorem, & explicat. Bonus tamen est. Plinius autem in hoc secundo libro agit de mundo, & ejus forma, de septem planetis, solis, & lunæ magnitudine, & eclypsibus, de errantium motu, lumine, de repentinis syderibus, de coronis, pareliis, discursu stellarum, de echo, ventis, fulminibus, de natura terræ, de mari, navigationibus, de syderum ortus diversitate. In quarto Haganoæ 1534.

153 Norimbergæ Ptolemæi Opus quadripartitum Græcè impressum est, tum Latinè.

Ejusdem fructus librorum suorum seu centum dicta de eadem materia.

Item traductio in linguam latinam Joachimi Camerarii Pabergensis.

Traductio centum dictorum Joviniani Pontini.

Mathæi Guarimberti Parmensis Opusculum de radiis & aspectibus planetarum.

Aphorismi Astrologici Ludovici de Rigiis ad Patriarcham Constantinopolitanum. Norimbergæ in quarto 1535.

1538 Hyeronimus Fracastorius Veronensis tractatum cõposuit quem homocentrica nominavit. Finis istius Operis est tollere de medio circulos omnes eccentricos, & per homocentricos omnes motus cœlestes explicare. Quare hâc methodo utitur in singulis motibus, ut observationes, seu apparentias referat; tum aliorum explicationes seu hypotheses afferat, exinde eas refellat, & suum modum explicandi explicet. Quia tamen cogitur ad explicandas inæqualitates motuum cœlestium, introducere circulos retardantes, & in sua hypothesi vix potest explicare mutationem apparentium diametrorum, ejus homocentrici circuli subsistere minimè potuerunt.

Habet item tractatum de diebus criticis, per ea quæ in nobis insunt, in quo optimè ratiocinatur dierum criticorum in ipsorum humorum putrefactionem, & quasi fermentationem referens. Venetiis in octavo 1538.

Anno 1538 Prodierunt Theonis commentationum libri undecim in Magnam constructionem Ptolemæi Græcè. Basileæ. Ibidem Magna constructio Ptolemæi. In quarto Venetiis 1538.

1539 Lucas Gauricus prædictiones super omnibus futuris luminariũ deliquiis, in finitore Veneto.

Anno Christi 1533. examinatæ figuræ cœlestes Venetiarum, Bononiæ, Florentiæ.

Paraphrases & annotationes in Claudii Ptolemæi 2 librum apotelesmatum super luminum eclypsibus, Procli Diadochi Lycii decreta eclypsium utriusque luminaris, quæ in quolibet signorum decano accidere possunt, Interprete Laurentio Miniatense. Venetiis 1539. in quarto.

1539 Joannes Schonerus Carolostadius Opusculum astrologicum ex diversorum libris summa cura pro studiosorum utilitate collectum, nempe instructionem intelligendæ Ephemeridos.

Isagoge Astrologiæ judiciariæ de electionibus communibus. Canones succinct. nativitatum, tractatum integrum electionum Marci Laurentii Bonicontrii Miniatensis.

Assertio contra calumniatores astrologiæ Ebherhardi Scheusingeri. Norimbergæ in quarto 1539.

1542 Magister Ricardus Roussat Canonicus Lingoniensis Arcandam Astrologi tractatum de prædictionibus nativitatum correxit, & in meliorem formam redegit. Parisiis in octavo 1542.

1542 Orontius Finæus Delphinas Regius Mathematicus de mundi sphæra, seu Cosmographia primáque astronomiæ parte libros quinque edidit.

Primus agit de mundo, de quiete, loco, figura, & magnitudine terræ.

Secundus de circulis, & zonis.

Tertius de ortu & occasu syderum.

Quartus de die, ejusque inæqualitate, de altitudine syderum, umbris.

Quintus de circulis distinctivis climatum, de longitudine & latitudine, de numero ventorum ad hydrographiam, chordarum & sinuum definitione hanc materiam clarè explicuit, & breviter. Parisiis in octavo 1542.

1542 Petrus Ditatus Veronensis Mathematicus novum Almanach edidit, nempe Ephemerides, superadditis annis quinque supra ultimos, nempe usque ad annum 1562.

Item Isagoge in cœlestem astronomicam disciplinam tractatus tres perbreves de electionibus, revolutionibus & mutatione aëris.

Item horariæ tabulæ altitudinum solis ac stellarum pro medio sexti climatis nempe à latitudine 37. ad 54.

1542 Joannes Virdungus Hasfurdius Mathematicus & Medicus tabulas resolutas edidit de supputandis syderum motibus, ex quibus syderum omnium motus tam ad præterita quàm ad futura tempora calculari facilè possunt. Adjecit & usus, nimis breviter; neque enim omnium rationem ita reddit ut plenè doceat. Norimbergæ in quarto 1542.

Anno 1543 prodiit Epitomes Almagesti Ptolemei à Georgio Purbachio inchoata, & à Joanne Demonteregio perfecta. Scopus autem authorum in hâc Epitome concinnanda fuit, ut Almagestum, quod difficulter etiam à doctioribus intelligi potest, sive ob phrasin græcam nonnihil à nostra abhorrentem, sive ob aliam causam, in hac epitome redderetur facilius. Hæc Epitome sicut & Almagestum in tredecim libros dividitur. Proponuntur in primo universalia principia circa cœli & terræ figuram & situm. Tum quia sine trigonometria in astronomicis progredi nemo potest, chordarum, seu subtensarum omnium cum diametro comparationem instituit, exinde maximam eclypticæ declinationem, & ex eâ angulum ejusdem eum æquatore observat, & ex ea ascensiones rectas & declinationes omnes determinat.

Secundus liber. Ortus varietatem, prolixitatem

tem diei, altitudinem poli, umbras ſolis, varioſque in ſphæra angulos pro qualibet regione conſiderat, ſeu doctrinam primi mobilis tradit.

Tertius liber eſt de ſolis motu annuo, ejus proprietatibus æquinoctiis, ſolſtitiis, de motus medii & veri differentia, eorumque cauſis.

Quartus de motu lunæ præcipuè ex eclypſibus determinando, ſeu de prima motus lunæ inæqualitate.

Quintus de ſecunda motus inæqualitate, & obſervationibus quibus deprehenditur, tum de comparatione diametrorum apparentium ſolis, lunæ & umbræ terræ. Item de parallaxi omnimoda.

Sextus luminarium cognitiones, oppoſitiones, & eclypſes conſiderat.

Septimus motum fixarum in longitudinem determinat.

Octavus ſtellarum fixarum ſitum deſcribit, variamque ad luminaria & planetas habitudinem.

Nonus ſphærarum cœleſtium ordines, planetarum omnium motus medios, & Theoriam Mercurii habet.

Decimus Veneris Theoricam & Martis perficit, generatimque de aliis loquitur.

Undecimus de Jove, & Saturno ſpeciatim agit.

Duodecimus planetarum progreſſum, ſtationum, & regreſſum, variationémque in longitudinem explicat.

Decimus tertius latitudines eorumdem planetarum intuetur. Hæc Epitome bona eſt ſolida, & utilis, veréque Ptolemæi doctrinam faciliorem reddit. Perfectius tamen eſſet Opus ſi dum modum conſtituendi aliquem motum docet, veras obſervationes aut ſuas, aut alienas retuliſſet; ſic enim meliùs totus aſtronomiæ progreſſus appareret, cùm in particulari novæ occurrant difficultates. Hanc methodum in noſtra Aſtronomia uſurpandam cenſuimus.

1544 Prodierunt ſcripta Joannis Regiomontani de Torqueto inſtrumento conſtante circulo verticali & horizontali, quo ſimul altitudo ſyderis, & verticalis obſervatur. De Aſtrolabio armillari regulâ magna Ptolemaica, baculóque aſtronomico; item de obſervationibus Cometarum aucta Joannis Schoveri Caroloſtadii additionibus.

Item obſervationes motuum ſolis ac ſtellarum. Item libellus Georgii Purbachii de Quadrato geometrico, quæ omnia non ſunt ſatis benè explicata. Norimbergæ apud Joannem Montanum 1544.

1545 Paſchaſius Hamellius Mathematum Regius profeſſor tabulas aſtronomicas Alphonſi Hiſpaniarum Regis in propriam integritatem reſtituit, cum adjectione tabularum ex diverſis authoribus cum uſibus harum tabularum. Adjectæ ſunt in fine tabulæ fixarum ex Gaurico. Opus utile ſi tabulæ Alphonſinæ à cœlo non aberrarent. Pariſiis in quarto 1545.

1546 Lucas Gauricus Geophonenſis ſuper diebus decretoriis quos etiam criticos vocitant, axiomata, ſive aphoriſmi grandes.

In hoc Opere enucleavit pleráque Hipocratis & Galeni theoremata, quæ ex cœleſtium rerum cognitione pendent.

Hic tractatus iſagogicus eſt ad Aſtrologiam, medicis utilis, demonſtrationibus caret, ut omnia opera quæ ad Aſtrologiam judiciariam pertinent. In quarto Romæ 1546.

1547 Joannes de Sacro Boſco libellum edidit de anni ratione ſeu computo eccleſiaſtico.

Quæ dicit ut plurimum ſunt vulgaria, nec benè correctionem adhibet Kalendario. Antuerpiæ in octavo 1547.

1548 Claudii Ptolemæi Peluſienſis Mathematici Operis quadripartiti traductio ab Antonio Gegava. Aſtrologica varia edita à Camerario Græcè & Latinè.

Aſtrologica edita Opuſcula à Thadæo Hagecio: 1. anonimi 2. liber Regum ſeu de ſignificatione planetarum in duodecim domibus. 3. Hermetis 100 Aphoriſmi. 4. Pauli Alexandri rudimenta de natalitiis Græcè, & Latinè.

Item de ſectione Conica orthogona ſeu de parabola; deque ſpeculo uſtorio cum præfatione Gemmæfriſii. Lovanii in quarto 1548.

1548 Joannes Schonerus Opuſculum edidit ſatis bonum de globi uſu aſtriferi. Quod additum eſt in fine tractatus Gemmæfriſii de principiis Aſtronomiæ, & Geographiæ Antuerpiæ 1548.

1549 Prodierunt Meſſahalæ antiquiſſimi, ac laudatiſſimi inter Arabas aſtrologos libri tres, opera Joachimi Helleri Norimbergenſium Mathematici.

Liber primus de revolutionibus annorum mundi, de dominis anni, & loco ejus, de diviſione climatum, de natura ventorum, de eclypſi.

Secundus liber de ſignificationibus planetarum in nativitatibus.

Tertius de receptione unius planetæ ab alio.

In eodem volumine habetur liber Arbohali de judiciis nativitatum. Norimbergæ in quarto 1549.

1549 Meſſahalæ Arabis aſtrologi de elementis & orbibus cœleſtibus liber antiquus typis mandatus, in quo tantum generalia quædam & vulgaria aſtronomiæ placita.

Huic adjectum eſt ſcriptum cujuſdam Hebræi de Aris, ſeu intervallis regnorum, & de diverſis gentium annis & menſibus. Item iiſdem de rebus ſcriptum cujuſdam Saraceni continens præterea præcepta ad uſum tabularum aſtronomicarum utilia. Hæc Chronologiæ prodeſſe poſſunt. Ex veteri codice. Norimbergæ in quarto 1549.

Anno 1550 Guido Bonatus Forolivienſis Mathematicus tractatus decem edidit de Aſtronomia, nempe de judiciaria ratione nativitatum, & aëris tempeſtatum.

In primo tractatus ſcientiam confirmat. In ſecundo agit de diviſione orbis in ſigna duodecim. Tum de domibus planetarum, gaudiis, exaltationibus, detrimentis, fortitudinibus. In tertio de naturis ſeptem planetarum. In quarto de conjunctionibus. In quinto de ſignificatis ſtellarum, & quæſtionibus. In ſexto de judiciis præcipuè de ſingularum domorum judiciis.

Tractatus ſeptem de electionibus, octo de revolutionibus, novem de nativitatibus, decem de mutationibus aëris. Opus immenſum & malè digeſtum.

Additum eſt Centiloquium Aphoriſmorum Claudij Ptolemæi ex Græco in Latinum verſi à Georgio Trapezuntino.

1551 Eraſmus Reynoldus Saveldenſis tabulas Prutenicas compoſuit ex mente Copernici, à quo ſumpſit tantùm obſervationes, & demonſtrationum veſtigia, canones omnes de novo condidit. Ex his tabulis anni magnitudo apparens eclypſis, motus omnes ſupputantur.

Opus arduum benè perfectum: hæc tamen

converſio

converſio temporis in ſexagenas difficiliorem reddit calculum. Tubingæ in quarto 1551.

Anno 1551 acceſſit compendium duodecim domorum cœleſtium, ex novem clariſſimis & vetuſtiſſimis authoribus Arabibus excerptum, nempe Meſſahalla, Aomare, Alkindo, Zaele, Albepait, Dorotheo, Jergi, Ariſtotele, & Ptolemæo, nempe ob oculos ponitur, quidnam ex quolibet domicilio judicium ſumendum ſit, & horum authorum teſtimonio confirmatur authore Petro Liechtentei.

1551 Antonius Miſaldus Monſlucianus Planetologiam edidit rebus aſtronomicis, medicis, & philoſophicis refertam in qua cœleſtium corporum cum humanis, aſtrologiæ cum medicina, ſocietas demonſtratur.

In hoc Opere multa eſt eruditio ex antiquis fabulis deducta, multa tamen vana ut ſunt pleráque quæ ad aſtrologiam ſpectant. In quarto Lugduni 1551.

1551 Joannis Regiomontani tabulæ directionum & profectionum prodiere, non tam utiles aſtrologiæ indiciariæ, quam tabulis & inſtrumentis aſtronomicis conficiendis. Item tabulæ ſinuum per ſingula minuta univerſam ſphæricorum doctrinam comprehendentem, cum ſuccincta methodo procedendi in directionibus, illuſtrata exemplis, obſervato diligenti ordine.

Tum tabulas 54 poſitionum ad directiones, quarum uſus ſe extendit ad climata 4.5.6.7.8.9.

Opus optimum quantum materia permittit.

Joannes Angeli Ephemerides compoſuit pro anno 1494. & ſequentibus ſex. Item aſtrolabium planum in tabulis aſcendens, continens qualibet hora & minuto æquationes domorum cœleſtium. Moram nati in utero. Cum quodam tractatu nativitatum, in quo prædictiones figuris variis illuſtrantur. Item horas inæquales pro quolibet clymate mundi. Hoc ultimum Opus à Joanne Angeli elaboratum eſt 1494. Opus obſcurum.

1551 Andræas Perlachius Stirus Medicus & in Academia Viennenſi ordinarius Mathematicus Commentaria Ephemeridum ita ſcripſit, ut quiſque ſine præceptore integram Ephemeridum artem & uſum conſequi poſſet. Hæc commentaria quatuor habent partes. Prima nonnulla docet ad Kalendarium ſpectantia. Secunda motum planetarum, ejuſque proprietates, eclypſes exhibet. Tertia multa problemata primi Mobilis ſolvit, ut longitudinem diei & ex ea maximam elevationem. Quarta pars thema cœleſte erigit, cæteraſque leges Aſtrologiæ judiciariæ proponit.

Opus non contemnendum eò quòd clarè procedat. Viennæ Auſtriæ in quarto 1551.

Anno 1554 prodierunt tabulæ ampliſſimæ ſecundum methodum & hypotheſes Alphonſi, nempe, tabulæ octoginta quinque, authoribus Joanne Blanchino, Nicolao Pragnero, Georgio Purbachio.

His tabulis præmiſſi ſunt 17 canones in Purbachii tabulas. In toto volumine nihil aliud continetur præter tabulas; Opus immenſum, decurſu tamen temporis Alphonſinæ tabulæ deprehenſæ ſunt, in planetis præſertim minoribus, à cœlo aberrare.

1554 Lucius Bellantius Senenſis Mathematicus, Artium & Medicinæ Doctor, librum edidit quæſtionum de Aſtrologica veritate. Hic liber editus eſt poſt mortem Pici Mirandulani. Continet viginti quæſtiones. Prima de ſcientia Aſtrologiæ. Secunda de cœlorum dominio. Tertia de natura partium cœli. Quarta de numero ſphærarum. Quinta de primo mobili. Sexta de octava ſphæra, & conſtellationibus. Septima de planetis. Octava de ſphæricis planetarum. Nona de aſpectibus. Decima de autiſtiis. Undecima de conjunctionibus. Duodecima de domibus. Decima tertia de principiis univerſalibus. Decima quarta de principiis particularibus. Decima quinta de ſignificatoribus. Decima ſexta de virtute dirigibili. Decima ſeptima de ponte fortunæ. Decima octava de triplicitatibus. Decima nona de colligatione ſequentium, & præcedentium figurarum. Vigeſima de partibus terræ.

Idem librum compoſuit reſponſionum ad objectiones Joannis Pici Mirandulani. Reſpondet duodecim libris objectionum.

Eodem tempore Gabriel Pirouanus Philoſophus de aſtrologiæ veritate librum edidit.

1554 Joannes Schonerus Caroloſtadius profeſſor Mathematum Norimbergæ, ſcripſit tres libros de judiciis nativitatum.

In primo proponit nonnulla generalia, conſideranda ante judicium nativitatis, nempe de parentibus natis, fratribus & ſororibus, de forma & figura, infirmitatibus, de fortuna, conjugiis, amicitiis, peregrinationibus.

In ſecundo libro agit de ſignificatis domorum, triplicitatum partium, tum de conjunctionibus, & aſpectibus planetarum, de ſignificatis dominorum in ſingulis domibus, planetarum ſimiliter in ſingulis domibus, vel in propria domo.

In tertio de eventuris nato per ſingulas ætates, de gubernatoribus ſeptem ætatum, de vitæ ſpatio, de progreſſionibus, de Styleg. Algebutar. Alfridariis, Cronocratoribus, de domino orbis. De tranſitu planetarum, de eligendis temporibus actionum, de veſtium & equorum coloribus nato idoneis, qui dies felices & infelices. His addita eſt initio præfatio Philippi Melancthonis in hos libros de judiciis.

1554 Nicolaus Simus Mathematicus Bononienſis Ephemerides compoſuit ab anno Chriſti 1554 ad 1568. Cum canonibus uſum harum Ephemeridum explicantibus, & tractatu de electionibus, mutationibus aëris, & annorum revolutionibus.

Acceſſit tabula Joannis Baptiſtæ Placentini juxta motum horarium planetarum, ad inveniendum eorum locum in horis à meridie. Venetiis in quarto 1554.

1555 Hyeronimus Cardanus Mediolanenſis Medicus in Claudii Ptolemæi Peluſienſis quatuor libros de aſtrorum indiciis ſeu quadripartitæ conſtructionis commentarium edidit, cum duodecim exemplis, & aliis notatu dignis, ad hanc ſcientiam rectè exercendam, & eclypſeos quam graviſſima peſtis ſubſecuta eſt. Lugduni in octavo 1555.

1556 Cyprianus Leonitius à Leonicia Bohemus Hradecenſis Electoris Palatini Rheni Mathematicus, cum vidiſſet tabulas Purbachii, Alphonſinas ſcilicet, in eclypſium ſupputatione ſemihorâ ſæpe integra à cœlo diſſentire, illas correxit, & in ſpecimen Opus edidit, in quo eclypſes exhibuit ab anno 1556. ad annum 1606. tabulas tamen non edidit. Prædictiones Aſtrologicas harum eclypſium adjecit.

Opus hoc utile eſſe non poteſt niſi ad exemplum, nempe ut quis ſe in ſupputandis eclypſibus exerceat.

Anno 1556 Joannes Garcæus Junior tractatum edidit de erigendis figuris cœli, verificationibus, revolutionibus & directionibus. Vvitembergæ in octavo 1556.

Anno 1556 Erasmus Osualdus Screctensfusius commentarium composuit in novas theoricas planetarum Georgii Purbachii, quas etiam illustravit brevibus tabulis, pro eliciendis tum mediis, tum veris motibus omnium planetarum, tabulis item conjunctionum & ecclypsium. Addidit item varia exempla & methodum conficiendarum tabularum. Opus hoc in tres partes dividitur.

Prima tractat de orbibus ex quibus singulæ planetarum sphæræ componuntur, & de horum motuum proprietatibus, & de necessariis ad calculandos tres motus.

Secunda agit de passionibus singulorum planetarum.

Tertia de sphæræ octavæ seu cœli stelliferi motibus. Hic Commentarius clarissimus est & tabulæ adjectæ ad praxin seu supputationem motuum sunt aptissimæ.

Totum Opus tyronibus accommodatum. In quo Astronomiam addiscere possunt. Sequitur autem ipsum Purbachij ordinem.

Addita est in fine Philippi Imseri Medici & & Mathematici tabula seu catalogus omnium orbium, & linearum quæ in his theoriis occurrunt, quæ in duobus foliis quasi per epitomen totam hanc doctrinam complectitur.

Anno 1557 Cyprianus Leonitius Bohemus Palatini Rheni Mathematicus, Ephemerides amplissimas edidit pro annis 50. ab anno 1556. ad 1606. & methodum addidit construendi cœlestis thematis, & tabulas ad id præstandum necessarias, cum locis stellarum fixarum. Ab anno 1349. ad annum 2029. Sunt addita schemata eclypsium & pro singulis themata quatuor anni temporum. Opus immensi laboris sine magno operæ pretio; cùm elapsis his annis, liber hic magna ex parte sit inutilis. Exceptis nonnullis tabulis domorum cœlestium, aliisque ad primi mobilis motum pertinentibus, & praxibus erigendorum thematum.

1557. Lucas Gauricus Geophonensis Episcopus tabulas primi Mobilis, quas directionum vocát, edidit, cum problematibus facillimis; & tractatum indicandi omnium aphetarum apotelesmata.

Hoc Opus satis clarum, & bonum quantum patitur astrologiæ judiciatiæ vanitas. In quarto Romæ 1557.

1557 Lucas Gauricus Geophonensis Episcopus tabulas directionum edidit cum problematibus facillimis, quibus annectitur tractatus indicandi omnium aphetarum apotelesmata.

Opus hoc ad judiciariam spectat, habétque multa ad prædictionem spectantia. In quarto Romæ 1557.

Idem edidit tractatum Astrologiæ judiciariæ de nativitate virorum ac mulierum, ex Ptolemæo & aliis authoribus dignissimis, cum multis aphorismis expertis & probatis ab eodem. Addito in fine libello Antonii de Montulino de eadem re cum annotationibus Joannis de Regio monte. In quarto Norimbergæ 1540.

1557 Georgius Purbachius Germanus theoricas novas planetarum composuit, quas Erasmus Reinholdus Salveldensis pluribus figuris auxit, & scholiis illustravit. Incipit à theorica solis, tum lunæ, tum trium superiorum planetarum Veneris & Mercurij, tum de passionibus planetarũ disserit.

Opus quidem bonum, quod excellentius foret si ad particularia descendisset, & his tabulis theoricis, tabulas subjecisset ad normam earum theoricarum conformatas. Possunt enim excogitari innumeræ hujusmodi theoricæ; sed difficultas est, ut motus cœlestes iis ad amussim respondeant. Parisiis in octavo 1557.

1558 Franciscus Maurolycus Siculus Abbas Messanensis Cosmographiam edidit, in tres dialogos distinctam, in quibus de forma, situ, numeróque tam cœlorum, quàm elementorum, aliisque rebus ad Astronomica rudimenta spectantibus satis disseritur.

Opus quidem optimum, non tamen satis ordinatum & nimis fusè, utpote per dialogismum explicatum. Parisiis in octavo 1558.

1559 Arati phænomena cum Theonis scholiis, & Leontii mechanici de sphæra Arati. Impressa sunt Græcè Parisiis in quarto 1559.

1552 Lucas Gauricus Geophonensis Episcopus Civitatensis Opus Astrologicum composuit, in quo agitur de præteritis multorum hominum accidentibus per proprias eorum genituras examinatis, quorum exemplis consimilibus, unus quisque vaticinari poterit de futuris.

Dividitur in sex tractatus, Primus civitatum & quorumdam oppidorum figuras cœlestes, & eorum eventus proponit.

Secundus summorum Pontificum, Cardinalium, & quorumdam prælatorum schemata atque apotelesmata.

Tertius Imperatorum, Regum, Principum schema & decreta.

Quartus illustrium virorum, philosophorum, poëtarum, oratorum, musicorum, pictorum figuras cœlestes & eventus.

Quintus de violenta strage peremptis.

Sextus de vitiatis, & mutilatis.

Vanitas hujus artis eluceſsit, in eo quòd ejus placita & sibi ipsis contraria, ut nulla sit genitura, quæ ad quoslibet eventus aptari non possit. Venetiis in quarto 1552.

1553 Orontius Finæus Delphinas Mathematicus Regius Lutetiæ professor de duodecim cœli domiciliis, & horis inæqualibus tractatum spectantem ad Astrologiam judiciarium edidit.

Ejusdem Canonum Astronomicorum libri duo. In primo doctrinam primi Mobilis tradit. In secundo de motu particulari planetarum agit per varia problemata. Videtur non satis exactè tractare Astronomiam, sed tantum aliquas praxes & usus tabularum. Lutetiæ in quarto 1553.

1553 Guillelmus Postellus videtur stellas in alium ordinem digerere voluisse, ita ut sub nomine unius signi comprehenderentur; quæ quidem ratio divisionis legitima videbatur, sed propter assuetudinem res videtur successu caruisse. Prodiit ejus Opusculum Parisiis 1553.

1553 Gaspar Peucerus composuit elementa doctrinæ de circulis cœlestibus, & primo motu, in quo nempe explicat principia Astronomiæ. Hoc Opus nihil habet quod ubivis non reperias, nec est benè ordinatum. Vvitembergæ in octavo 1553.

1560 Valentinus Nabod Senatus Coloniensis Mathematicus ordinarius, edidit Enarrationem elementorum Astrologiæ, in qua præter Alcabicii qui Arabum doctrinam compendio prodidit, expositionem, atque cum Ptolemæi principiis collationem, rejectis sortilegiis & absurdis, de veræ artis præceptis, origine & usu disseritur. Coloniæ 1560.

1560 Jacobus Tusanus Regius litterarum Græcorum professor, in sphæram Procli annotatiunculas exigui momenti edidit. Parisiis in octavo 1560.

Anno 1561 Daniel Sanbech Noviomagus tractatum edidit, propriè loquendo de usu quadrantis astronomici in septem sectiones divisum. In prima docet modum observandorum syderum ope quadrantis. In secunda affert multa circa doctrinam primi Mobilis. In tertia loquitur de horologiis sciotericis. In quarta de generalibus magnitudinum dimensionibus. In quinta de libellationibus. In sexta de ejaculatione globorum ex tormentis bellicis. In septima de observatione geographica. In plerisque hic author demonstrationibus caret, præcipuè in horologiis sciotericis. In dirigendis tormentis bellicis fœdissimè hallucinatur, dum existimat in jactu elevato globos perpendiculariter cadere. Habet tamen multa bona, licet malè explicata.

1561 Samuel Syderocrates Bretannos ordinarius Mathematicus Tubingæ, prognosticon edidit pro anno 1561. In quo pro singulis noviluniis, pleniluniis & quadraturis, ex syderum aspectibus multa prædicit.

Opus exigui momenti. Tubingæ in quarto 1561.

1564 Petrus Pitatus Veronensis in Academia Philargmnica Matheseos professor compendium edidit super annua solaris, atque lunaris anni quantitate, paschalis item solemnitatis, juxta veteres Ecclesiæ canones recognitione, Romanique Kalendarii instauratione cum nova paschalis celebritatis forma Pontificis Maximi Pii IV. jussu executioni mandanda. De ortu quoque & occasu stellarum.

Opus bonum & utile, non satis tamen benè explicatum. Venetiis in quarto 1564.

Idem Petrus Pitatus composuit Canones Paschales noviluniorum, & pleniluniorum. In quarto Venetiis 1536.

1566 Nicolaus Copernicus Torinensis de revolutione orbium cœlestium libros sex composuit.

In primo agit de figura mundi & terræ. In quo quæstionem celebrem movet, an terræ competat motus, solvitque objectiones, seu rationes à Ptolemæo allatas pro quiete telluris, exinde triplicem telluris motum explicat. Denique Ptolemæum imitatus nonnulla ad triangulorum solutionem necessaria affert, in quibus multa addit de suo, quamvis ejus trignometria perfecta non sit.

In secundo libro doctrinam primi Mobilis tradit, nempe agit de circulis cœlestibus, obliquitate Zodiaci maxima, de angulis trium circulorum Eclypticæ, æquatoris & meridiani, de longitudine, latitudine, declinatione, ascensione recta, & obliqua, de maxima die, de ortu, & occasu syderum, de eorum locis determinandis.

Tertius est de sole, primóque inæqualem motum præcessionis æquinoctiorum considerat. Item de mutatione maximæ declinationis Eclypticæ, quorum explicatio mediam hujus libri partem obtinet. Hi tamen duo motus à plerisque rejiciuntur, nempe ut introducti ex erroneis antiquorum observationibus. Agit exinde de solis aut potius terræ motu in eccentrico. Item de mutatione Apogæi, & eccentricitatis.

Quartus circa lunæ motum versatur, rejicitque hypotheses antiquas; constituit duplicem ejus anomaliam in longitudinem, modum assignat constituendi prosthaphæreses & locum ejus supputandi. Motum item latitudinis definit, & ad particularia descendit, solis & terræ distantias, diametros apparentes, parallaxin, conjunctiones, eclypses.

Quintus de motu in longitudinem quinque reliquorum planetarum, eorumque anomaliis, de directionibus, stationibus, regressionibus, quas ex motu telluris patiuntur.

Sextus motum in latitudinem quinque minorum planetarum considerat, & Mercurii deviationem. Denique ordo ferè idem est qui in Almagesto Ptolemæi. Et sicut Ptolemæus traditos ab hyparcho motus examinat. Ita etiam Copernicus traditos à Ptolemæo.

Quamvis Copernicus non fuerit inventor hypothesis quæ motum telluri affingit, quam scimus fuisse Aristarchi Samii, magnam tamen laudem meretur, quod eam concinnarit, & in particularibus accidentibus, eam ad Astronomorum observationes exegerit. Collapsam ferè suo tempore Astronomiam restituit, hancque hypothesin simplicissimam, ferè totam condidit; addita tamen sunt post eum multa argumenta ad eam confirmandam, præcipuè à Galilæo & aliis, meliusque adhuc totum hoc Systema à Bulialdo constitutum est. Copernicus inter præstantiores Astronomos recensetur.

1567 Conradus Dasipodius Elementa Astronomica composuit, in quo opere fere solas aliquorum circulorum definitiones tradidit. Fecit item Astronomiam, in qua paulò uberiùs de hac materia disserit. Nempe ea tradit quæ communiter, in introductione ad Geographicam traduntur. Describit item constellationes. Argentorati in octavo 1567.

1567 Gilbertus Genebrardus Theologus Parisiensis Chronologiam brevem ab initio mundi ad Christum, ex Scripturis, & veterum Hebræorum Annalibus desumptam edidit; quod Opus potius historicum est quàm mathematicum.

Anno 1570 Joannes Garcæus Astrologiam genethlialogicam edidit seu Astrologiæ methodum, in qua secundum doctrinam Ptolemæi traditur ratio facillima genituras quascumque indicandi.

Opus est inordinatum, praxes multas & exempla geniturarum continens, præcepta malè explicans nisi per praxin. Videtur fuisse Mathematicus Electoris Saxoniæ. Exempla plusquam mediam operis partem obtinent.

1570 Jo. Francus Offusius Opusculum edidit de divina Astrorum facultate in larvatam Astrologiam, in quo quæ ad mutationes aëris pertinent ex Astris conjicere nititur, qui scopus optimus est, & laude dignus, puto tamen eum non attingere. Parisiis in quarto 1570.

1571 Franciscus Maurolycus Abbas Messanensis edidit computum Ecclesiasticum valdè brevem & succinctum. Coloniæ Agrippinæ in octavo 1571.

1571. Gaspar Peucerus in Academia VVitembergensi professor hypotheses astronomicas seu theoricas planetarum ex Ptolemæi doctrina ad observationes Nicolai Copernici & Canones motuum ab eo conditos accommodavit. Primò theoricas in genere explicat, tum in particulari solis, exinde lunæ, tum trium superiorum planetarum in longitudinem Veneris, & Mercurii, motum item in latitudinem, passiones planetarum, præcipuè eas

eas quas per respectum ad solem haberet. Denique de motu octavæ sphæræ. Tractatus hîc satis clarè explicat proprietates hypotheseon non tamen in particulari. Has adaptat observationibus, nec ultimo motus constituit. Vvitembergæ in octavo 1571.

1572 Aristarchi Samii de magnitudinibus & distantiis solis & lunæ librum edidit cum Pappi Alexandrini explicationibus quibusdam Federicus Commandinus Urbinas, in latinum vertit, & Commentariis illustravit. Pisauri in quarto 1572.

1573 Thomas Digescus Nobilis Cantiensis Alas seu scalas Astronomicas edidit, in quo opere circa Cassiopeiæ, parallaxin & distantiam inveniendam præcipuè laborat, secundùm principia Regiomontani & aliorum Astronomorum, datque bonas praxes observandi hujusmodi phænomena. Opus utile, quod ad alia viam aperit. Huic operi additus est parallacticæ commentationis & praxeos Nucleus, authore Joanne Dee Londinensi. Londini in quarto 1573.

1573 Cyprianus Leonitius à Leonicia Bohemus, Hradecensis Mathematicus, Historicam enarrationem composuit de magnis conjunctionibus superiorum planetarum, solis defectionibus, & cometis. Londini in quarto 1573.

Ejusdem prognosticon ab anno 1564 ad viginti annos, & conjunctionibus superiorum planetarum, eclypsibus aliisque ejusmodi desumptum.

Item tabulas positionum pro variis poli elevationibus, ad directiones necessariò pertinentes supputavit, cum tabulis ascensionum obliquarum. Opus immensi laboris.

1573 Alexander Picolomini Senensis sphæram mundi composuit Italicè in libros sex divisam. In primo solas habet communes notiones, linearum, angulorum, superficierum corporum, & præcipuè sphæricarum. In secundo agit de numero sphærarum cœlestium. Tum probat terram in medio immobilem esse, cœlos autem moveri, sphæricos esse, & terram.

In tertio de decem circulis sphæræ materialis, de æquinoctiali & polis ejus, de Zodiaco, ejus officio, divisione, polis, de coluro utróque, de meridiano horizonte recto, de tropicis & polaribus.

In quarto de Zonis, de ortu stellarum vario, de diversitate dierum artificialium, de crepusculo, de horis planetariis.

In quinto de habitantibus in sphæra recta, de aliis habitationibus, & earum proprietatibus de climatibus.

In sexto de eclypsibus, de annulo Astronomico, de magnitudine terræ, & cœli.

Ejusdem tractatus de stellis fixis cum Kalendario, in quo stellæ secundum dies sunt distributæ.

Ejusdem dissertatio an in Globo terraqueo plus sit terræ quam aquæ.

In toto hoc opere nihil invenitur nisi doctrina communis, nimis fusè tractata. In quarto Venetiis 1573.

Anno 1575 Jacobus Cheyneius ab Arnage Scotus, Duaci Matheseon professor, de priori Astronomiæ parte, scilicet de sphæra duos libros scripsit. In quorum primo de circulis disserit. In secundo de syderibus, eorumque ortu & occasu. Adjecit & duo Opuscula, unum de Globi cœlestis fabrica, alterum de sphæræ armillaris usibus.

Quæ profert communia sunt, non satis explicata, utpote sine ullis figuris. Duaci in octavo 1575.

Anno 1576 prodiit Erasmi Osualdi Schreckenfuchsii Austrii, Mathematum quondam, & linguæ Hebraicæ in Friburgiorum Schola professoris: Opus posthumum præcipuarum gentium, Alexandrinorum, Græcorum, Ægyptiorum, Persarum, Arabum, Hebræorum, & Romanorum Kalendarii rationem continens, & cum anno Juliano collationem. Opus in dialogi formam compositum. Primò ergo proponit nonnulla de correctione Kalendarii Romani; exinde loquitur de Kalendario Alexandrinorum, illudque exhibet: Tertiò Kalendaria Græcorum & Atticorum. Quartò Kalendarium Ægyptiorum. Quinto Kalendarium Persarum. Sexto Kalendarium Arabum: Septimo Kalendarium Hebræorum.

Opus quidem bonum, non tamen satis clarè explicatum.

1578 Franciscus Junctinus Florentinus Theologiæ Doctor Commentaria edidit accuratissima in sphæram de Sacro Bosco. Sequitur autem textum authoris, multáque addit explicationis causâ: Nonnumquam videtur longius excurrere, absolutè tamen Opus hoc optimum est. Lugduni in octavo duobus tomis 1578.

Anno 1560 Joannes Stadius Leounouthesius Regius, & Ducis Sabaudiæ Mathematicus Tabulas Bergenses æquabilis & apparentis motus orbium cœlestium Coloniæ Agrippinæ edidit, dictas Bergenses, quod domino Roberto de Bergis cujus domesticus erat dicatæ essent. Decem canones continent hæ tabulæ. Primus quodcumque tempus in sexagenas convertit. Secundus motus æquabiles exhibet. Tertius epochas. Quartus prostaphæreses. Quintus æquabilem motum octavæ sphæræ in apparentem mutat. Sextus æquabilem solis in apparentem mutat. Septimus idem præstat circa lunæ longitudinem & latitudinem. Octavus æquat dies. Nonus quinque Planetarum motus, & octavæ sphæræ considerat. Decimus planetarum stationes, regressus, & latitudinem exhibet. Habet item motus æquabiles planetarum. Denique tabulas resolutas, quibus motus æquabiles annis Julianis respondent.

Additus est Commentarius fixarum. Motus earum, ortus, occasus, cæterasque affectiones exhibens, tum prognostica tàm universalia temporum, quam particularia nativitatum complectens.

Deficit hoc Opus, quòd tabulas sine theoriis proponat, sic enim solis addiscitur usus, cujus ratio ignoratur. Redditúrque tota praxis confusa, cujus difficile est recordari. Procedit secundum methodum Alphonsinam.

1580 Michael Moestlinus Geoppingensis Ephemerides conscripsit ab anno 1577 ad 1590. ex tabulis Prutenicis ad horizontem Tubingensem, in quibus nihil aliud invenitur præter Ephemerides. Tubingæ in quarto 1580.

1581 Franciscus Junctinus Florentinus Serenissimi Principis Francisci Valesii fratris Regis Christianissimi Eleemosinarius ordinarius, edidit speculum Astrologiæ, universam scientiam in varias classes digestam, duobus tomis complectens. In primo tomo initio habet defensionem Astrologorum; in secundo Isagogicum tractatum ad Astrologiam; deinde ponit quadripartiti operis Ptolemæi librum primum & secundum, Tertium autem & quartum commentatus est; & hic Commentarius plusquam dimidiam partem tomi obtinet.

Addidit centiloquia Ptolemæi & Hermetis cum Almansoris propositionibus, & Ludovici de Regiis Astrologi sententias, quæ sunt quatuor Opuscula.

Adjunxit tractatum suum de judiciis nativitatum annotationes. Alium de directionibus. Tertium in quo exempla varia nativitatum profert. Quartum de conversionibus annuis, item de orbe, de pestilentia caristia de bello.

Hoc Opus non est benè ordinatum, sed sapit compilationem, in qua præter inanitatem materiæ, multum temporis impendatur.

Texit autem Catalogum authorum 100 quibus usus est.

In secundo tomo, primò Commentarium habet in Purbachii Theorias planetarum, explicatque fusè quæ obscura videbantur, addit ejusdem Purbachii tabulas, & usus.

Item Commentarium in tractatum de sphæra Joannis de Sacro Bosco in quo Commentario refert quatuor Americi Vesputii navigationes, in quibus nihil est ad scientiam navigationis pertinens.

Item tractatum de stellis fixis in quo est Catalogus fixarum, item Opusculum Ptolemæi de significatione fixarum.

Item tractatum de reformatione Kalendarii, qui non est alicujus momenti nec rem benè explicat.

Item de significatione eclypsium & cometarum. Author hic in omnibus est compilator, & multum confusus, ita ut in ejus operibus multum sit confusionis.

Anno 1583 typis mandatum est Parisiis in octavo Kalendarium Romanum perpetuum, quale summus Pontifex edi jussit.

Gemmafrisius Medicus & Mathematicus composuit tractatum de annulo astronomico, cujus compositionem & usus explicat. Idem tractatum edidit de usu globi utriusque, item alium tractatum de Astrolabio universali, seu in plano coluri solstitiorum, oculo in puncto arietis, aut veri ortus posito, qui omnes tractatus optimi sunt. Antuerpiæ in quarto 1584.

1585 Franciscus Maurolycus Abbas Messanensis multa edidit Opuscula mathematica, inter quæ primo occurrit de sphæra liber unus quasi ad Astronomiam Isagogicus, in quo agit de mundo, axe, polis, æquatore, zodiaco, tropicis, æquinoctiis, solstitiis, de polaribus quinque Zonis, coluris duobus, de horizonte, meridiano almicantharath; De umbris, de loco astri, longitudine, latitudine, ascensione rectâ, declinatione, de sphæra recta, obliqua, parallela, de ascensionibus rectis & obliquis. Periœcis, Antœcis, Antipodibus, Amphisciis, longitudinibus & latitudinibus locorum, de occasu & ortu, die maximâ, climatibus, motu solis, lunæ, planetarum directionibus, retrogradationibus, de latitudine planetarum, parallaxi, eclypsibus, de motu octavæ sphæræ, de numero & ordine sphærarum. Omnia clarè & breviter sine figuris, in quo puncto videtur deficere, eò quod imaginationem non formet.

Secundus ejusdem tractatus est computus ecclesiasticus, in quo agit de temporis divisione, die, hora, Anno Arabico, Ægyptiaco, mense, Kalendis, novis idibus, de cyclis, solari, de bissexto, de cyclo aureo seu lunari, epactis, de institutione Paschatis.

Tertius de instrumentis astronomicis, de quadrato, ejusque usibus ad mensurationem, de quadrante ejusque usibus in Astronomia, habetque aliqua ad analemma pertinentia, de Astrolabii descriptione, & usibus, de lineis horariis; quæ omnia sunt nimis breviter indicata, nec sufficienter demonstrata.

Tertius liber totus est de sectionibus conicis. Tractatus hic non est ordinatus, ideóque difficilis. Venetiis in quarto.

Quartum tractatum habet de lineis horariis quasi ex professo, seu Gnomonicam in tres libros divisam.

In primo post placita universalia tradit horologia quasi regularia.

In secundo libro agit de parrallelis signorum, aliisque in plano horologiis describendis, & ad praxes descendit.

1585 Franciscus Barocius Jacobi filius Patritius Venetus Cosmographiam in quatuor libros distributam quasi Isagogen ad magnam Ptolemæi constructionem composuit, in cujus præfatione 84 errores Joannis de Sacro Bosco detegit, præcipuè circa signorum ascensiones.

In primo libro agit de sphæra mundi, & de orbibus eam constituentibus.

In secundo de circulis sphæræ.

In tertio de ortu & occasu syderum, & climatibus.

In quarto de planetarum orbibus.

Omnia satis perspicuè & benè. Venetiis in octavo 1585.

1589 Prodiere Astronomica veterum scripta Isagogica, Græca & Latina Procli sphæra.

Arati Solensis phœnomena. Aratus patre natus est Athenodoro, matre Leonodora in urbe Ciciliæ Soloe, seu Pompeiopoli. Vixit tempore Ptolemæi Philadelphi. Descripsit carmine constellationes Leontij mechanici. De fabricatione sphæræ Arati addita est Poëtica Interpretatio Arati phænomenon.

Primo authore Maco-Tullio Cicerone.

Secundo Festi Rufi Avieni.

Tertio Germanici Cæsaris.

Item veterum Poëtarum fragmenta Astronomica.

C. Iuli Hygini Poëticon Astronomicon. In octavo 1589.

1591 Theodosii Tripolitæ de diebus & noctibus libri duo, scholiis antiquis & figuris illustrati, ex Vaticana Bibliotheca deprompti, in linguam Latinam versi sunt à Josepho Auria Neapolitano.

Hoc Opusculum continet incrementum & decrementum dierum, æqualitatem, & inæqualitatem, quorum omnium circunstantias omnes explicat. Romæ in quarto 1591.

1591 Thomas Finkius Horoscopographiam edidit, sive Astrologiam de inveniendo stellarum situ. In quo habentur tabulæ declinationum, ascensionum rectarum, differentiarumque ascensionalium generales ascensionum obliquarum pro omni gradu' positionum, & cœlestium domorum pro Germania & toto Septentrione, cardinum vero ad elevationem Ranzoniana cum solis diario, &c.

Opus magni laboris præcepta pauca complectens nec ita benè explicata, utile tamen iis qui Astrologiæ student, cujus præcepta supponit aliunde teneri.

1593 Hyeronymus Diedo Nobilis Venetus Italicè

Italicè scripsit anatomiam cœlestem in qua docet methodum dividendi domos cœlestes in figura astrologica, quærendi directiones, & adæquandi aspectus planetarum pro mensura horarum, omnium punctorum Zodiaci. Duos libros habet cum tabulis ad Astrologiam judiciariam spectantibus. Opus satis clarum. In quarto Venetiis 1593.

1595 Christophorus Clavius Bambergensis Societatis Jesu edidit Opusculum contra Elenchum Josephi Scaligeri, & Castgationem Kalendariam. In quo solidè defendit Kalendarij Romani reformationem contra objectiones Scaligeri. Romæ in octavo 1595.

1595 David Origanus Glacensis Silesius Germanus Mathematicus Electoris Academiæ Brandenburgicæ Francofurti ad Viadrum ordinarius professor novas Ephemerides motuum cœlestium annorum sexaginta nempe ab anno 1595. ad annum 1655.

Duplici calculo Tychonico & Copernicæo, & variis diversarum nationum Kalendario accommodatas.

Primus tomus introductorius est in tres partes divisus, prima agit de epochis variis, & modo numerandi annos ab illis, de annis, mensibus, notis vulgaribus annorum, de festis, æquatione temporum.

Anno 1596 Joannes Galucius Saloensis Academicus Venetus Opusculum edidit de fabrica & usu hemisphærii uranici, quo instrumento omnia observari posse contendit cœlestia phænomena.

Opus hoc in tres partes dividitur. In prima tradit fabricam hujus hemisphærii. In secunda usus communes. In tertia usus peculiares trigonometricos & astrologicos.

1600 Franciscus Vieta Fontenæensis Gallus edidit rationem Kalendarii verè Gregoriani. Item Kalendarium Gregorianum perpetuum. Utrumque Opus bonum est, non tamen receptum, eò quòd in eo paschales lunationes non in omnibus quadrabant iis, quæ tempore Nicænæ Synodi usurpabantur. Unde cum Clavii lucubrationes suis præferri vidit, in graves expostulationes in Christophorum Clavium prorupit, in quo graviter deliquit, quòd contestationem scholasticam acerbiùs sit prosecutus.

1602 Natalis Torpolæus Salopiensis tractatum edidit cui titulum apposuit, Dielides cœlometricæ, seu valvæ astronomicæ universales. Omnia artis totius munera sephophoretica in duabus tabulis methodo nova continentes, præeunte directionis accuratæ consummata doctrina.

Prima pars est astrologica, in quâ habet plurima ad hanc artem spectantia, sed obscurè. Habet item multa de triangulo peius explicata, & aliquas tabulas, suas propositiones diversis nominibus vocat; sed doctrina in eo contenta non est tanti ut quis eam extricet. In quarto Londini 1602.

1601 Jacobus Christmannus Joannis Bergensis Academiæ Heidelbergensis in Logicis professor ordinarius, tres libros edidit observationum solarium, in quibus explicatur verus motus solis in Zodiaco, & universa doctrina triangulorum ad rationes apparentium cœlestium accommodatur.

In primo libro describit sextantem, & triangulū sinuosum, tum de parallaxi & refractione differit. Dat methodos elevationis polaris observandæ, Ephemeridem solis, & tabulas prostaphæreseon, æquationem dierum explicat.

In secundo ex doctrina triangulorum profert problemata primi Mobilis, initio proponit hypotheses & definitiones.

In tertio eadem problemata prosequitur.

Hoc Opus profert instrumenta sine figuris; quæ tamen sine illis intelligi non possunt. Idem præstat circa hypotheses; doctrinam triangulorum sphæricorum nec satis explicat, nec satis demonstrat. In quarto Basilææ. 1601.

1602 Henricus Ranzovius Produx Cimbricus Tractatum astrologicum composuit de genethliacorum thematum judiciis, pro singulis accidentibus ex vetustis & optimis quibuscumque authoribus collectum. Francofurti in octavo 1602.

Anno 1602 Tycho Nobilis Danus Astronomiæ restauratæ mechanicam edidit, in quo opere instrumenta astronomica, quæ in observandis syderibus adhibuit describit, eorumque fabricam & usus proponit. In fine item globum suum cœlestem in quo nempe omnes stellæ fixæ suis locis restitutæ exhibentur, proponit, ejusque pariter usus explicat. Opus utilissimum ei præsertim qui de cœlo observationes facere cupit.

Anno 1603 Joannes Bayerus Rhaynanus Uranometriam edidit omnium asterismorum continentem schemata, nova methodo delineata æreis laminis expressa.

Opus utile ad addiscendas stellas; in eo stellarum longitudinem & latitudinem addiscere facilè potes. Opus elegans & accuratum.

1503 Lucas Gauricus Geophonensis Episcopus Civitatensis Kalendarium ecclesiasticum novum ex sacris litteris, probatisque sanctorum patrum synodis excerptum jussu summorum Pontificum Julii secundi, Leonis decimi, Clementis septimi, Pauli tertij edidit cum fastis Julij Cæsaris & alia quamplurima scitu digna.

In hoc Opere sunt multæ tabulæ sine explicatione sufficienti; neque enim benè explicat errores veteris Kalendarii. Venetiis in quarto 1503.

1605 Robertus Balforeus Burdigalensis Cleomedis meteora ex manuscripto Bibliothecæ Cardinalis Joyosii latinè vertit. Occasio scribendi fuit, quod Georgius Valla Placentinus illam pessimè verterat, ita ut ubique erroribus scateret addidit & notas. In hoc autem Opere Cleomedes agit de figura terræ, magnitudine & situ primo libro. Secundo de cœlo. Habet autem tantum universalia principia.

Hæc autem versio Balforei, & commentarius optimus est. In quarto Burdigalæ 1605.

1606 Elias Vinctus brevia scholia in sphæram à Sacro Bosco edidit simul cum textu, cui Operi adjunxit Compendium in sphæram à Pierio Valeriano Bellunensi editum.

Addidit & demonstrationem Petri Novii Salaciensis circa climatum inæqualitatem.

Opus facile, & satis clarum. Lugduni in quarto 1606.

1606 Joannes Kepler Cæsareæ Majestatis Mathematicus Tractatum edidit de stella nova in pede Serpentarii, & qui sub ejus exortum de novo iniit trigono igneo. Accesserunt primo de stella incognita Cygni Narratio astronomica, secundo de Jesu Christi nativitate anno natalitio.

In hoc Opere primò multis differit de trigono igneo contra Picum Mirandulanum, tum de tempore magnæ conjunctionis quæ fuit principium hujus trigoni ignei, ad quem scilicet hujus stellæ exortum

exortum refert, tum de constellatione Serpentarii, tum de loco hujus syderis; quod putat inter fixas fuisse, tum de materia ejusdem quam comparat cum cometis & cum stella anni 1572. cum stella cygni.

In hoc Opere multa sunt vana, præcipuè quæ de trigonis disserit, multa alia non satis probata. Sed materia difficilis in qua nihil certi dici potest. In quarto Pragæ 1606.

1606 Christophorus Clavius Bambergensis Societatis Jesu, in sphæram Joannis de Sacro Bosco, Commentarium amplissimum edidit, in quo benè & clarè explicat Astronomiæ principia, item & geographiæ. Habet item in eo tractatum de Isoperimetris. Item tractatum satis amplum de crespusculis. Plurimas item primi Mobilis tabulas, quæ omnia optima sunt,nimis tamen fusè suo more explicata. In quarto Lugduni, nova editio ab authore recognita & aucta 1606.

1607 Elias Molerius Helvetius Opusculum edidit, Astronomicus epilogismus eclypsium solis & lunæ annorum 1605 & 1607. Demonstratur In hoc Opere doctrina de supputandis eclypsibus juxta Tabulas Prutenicas. Cui adduntur epilogismi planetarum quinque, Saturni, Jovis, Martis Veneris, & Mercurii.

Secunda enarratio de planetarum eccentricis, eorumque deferentibus apogæis, perigæis,æquantibus & epyciclis. Tertia enarratio de sydere novo annorum 1604 & 1605.

Opus hoc nihil habet, quod commune non sit. In quarto Genevæ 1607.

1608 Dominus de saint Loup Ephemeridem manualem composuit, in qua manui & digitis cursum solis & lunæ, epactas aliáque ita adaptat, ut facilè inveniri possint. Methodus hæc sublevandæ memoriæ causa adinventa est, proptereaque utilissima esse potest. Parisiis in octavo 1608.

1608 Joannes Antonius Maginus Patavinus Matheseon Bononiæ professor, de astrologica ratione ac usu dierum criticorum seu decretoriorum; ac prætereа de cognoscendis, & medendis morbis,ex corporum cœlestium cognitione,

Opus ad Ephemeridum supplementum edidit, & duobus libris distinxit.

Quorum primus complectitur Commentarium in Claudii Galeni librum tertium de diebus decretoriis.

Alter agit de legitimo Astrologiæ in medicina usu. Item de annui temporis mensura in directionibus, & de directionibus ipsis ex Valentini Naibodæ scriptis. Francofurti in quarto 1608.

1608 Joannes Antonius Maginus Mathematum professor Bononiæ, novas cœlestium orbium theoricas congruentes cum observationibus Copernici composuit, in quibus singulos motus cœlestes explicat.

Liber primus omnes motus longitudinis complectitur. Secundus motum latitudinis considerat.

Opus quidem absolutum cui nihil deest, nisi ut talibus theoricis motus cœlestes in particulari aptentur. Moguntiaci in octavo 1608.

1608 Simon Stevinus in tractatu primo suorum hypomnematum librum quartum habet de problematis cœlestibus, nempe totam doctrinam primi Mobilis complectentem: Videtur nonnihil peccare quòd sæpe non utatur vocibus consuetis in hac materia, in eadem significatione.

Idem author in hypomnematum parte tertia agit de cœli motu.

Primus liber est de planetarum sydérumque cælo affixorum motu ex observationibus terrâ immotâ deducto.

Secundus de motus planetarum investigatione ex ratiocinio mathematico terra stabili & hypothesi anomaliæ primæ.

Tertius de anomalia secunda ubi Copernicææ hypotheses exprimuntur.

Hæc astronomia manca est, & imperfecta, nec affert demonstrationes ad inveniendos omnes motus, item ordinata non est atque adeo confusionem parit.

1608 Georgius Heviscius Medicus & Mathematicus Commentarium edidit in sphæram Procli Diadochi satis clarum & longum, in quo explicationis gratia multa addit ad astronomiam pertinentia.

Huic adjunctus est computus ecclesiasticus cum Kalendario triplici, & prognostico tempestatum, ex ortu & occasu stellarum. Habet item tabulas ascensionum rectarum, obliquarum, quantitatis dierum, declinationum, amplitudinum ortivarum pro elevatione gradus 48. In quarto Augustæ Vindelicorum 1609.

Anno 1609 Joannes Antonius Maginus Patavinus Bononiæ publicus Mathematicus primum mobile duodecim libris contentum edidit, in quo habentur varia problemata trigonometrica, gnomonica, geographica, cum magno trigonometrico canone, & magna primi Mobilis tabula ad decades primorum scrupulorum per utriumque latus supputata.

In primo libro trigonometriam sphæricam videtur absolvere. Primò enim docet modum constituendi canonis sinuum, tangentium, & secantium.

Secundo triangula sphærica rectangula solvit. Tertio obliquangula.

In secundo agit de aliqua methodo peculiari in qua ope alicujus tabulæ sibi propriæ solvuntur triangula faciliùs. In libro tertio alias praxes tradit solvendorum triangulorum sphæricorum rectangulorum. In quarto obliquangulorum. In quinto problemata geographica solvit ad sphæram rectam pertinentia. In sexto ad sphæram obliquam. In septimo problemata gnomonica tradit. In octavo problemata primi mobilis. In nono problemata ad tempus spectantia. In undecimo problemata geographica. In duodecimo problemata ad motus planetarum & cometarum spectantia. In fine habet duas tabulas valdè amplas ad solutionem triangulorum secundùm suam methodum necessarias.

Opus immensum in quo multæ repetitiones sunt. Videtur autem non satis explicuisse usum & artificium suarum tabularum; puto autem quod non faciliùs his tabulis quam communibus logarithmorum triangula solvantur. Poterat tota hujus Operis doctrina partem sextam voluminis non obtinere & clariùs procedere. Fecit item secunda mobilia.

1610 Prodierunt Tychonis Brahe Astronomiæ progymnasmata. Primò agit de restitutione motuum solis & lunæ stellarumque inerrantium, & prætereа de admiranda nova stella Cassyopeyæ anni 1572.

Doctrina optima, & exquisitis nixa observationibus, sed inordinata, nec ita satis benè explicata. Ejusdem epistolarum astronomicarum libri.

Celebris est author iste inter Astronomos, cum nullus

nullus sit qui majores expensas in observationibus astronomicis ritè peragendis fecerit, unde ut astronomiæ restitutor ab omnibus habetur. Utrumque Opus in quarto Uraniburgi 1610.

1610 Hyeronimus Zanchius Bergomas Varias divinationum species refutavit potius theologicè & philosophicè quam mathematicè.

Thomas item Erastus fecit defensionem libelli Hyeronimi Savonarolæ de astrologia divinatrice, adversus Christophorum Stathmionem Medicum Coburgensem. Hanoviæ in octavo 1610.

1610 Prodiit sphæra Joannis à Sacro Bosco emendata, aucta & illustrata, cum scholiis Eliæ Vineti Santonis & Francisci Functini. Item Alberti Heronis & Christophori Clavii brevibus Commentariis.

Huic Operi adjunctum est compendium in sphæram per Pierium Valerianum Bellunensem, & Petri Novii Salaciensis nonnulla de climatibus.

Opus facile, bonum tamen & utile. Coloniæ Agrippinæ in octavo 1610.

1610 Joannis Kepler Mathematici Cæsarei. Dissertatio cum Nuncio sydereo nuper ad Mortales misso à Galilæo Galilæi Mathematico Patavino.

Occasio scribendi fuit liber à Galilæo conscriptus in quo loquebatur de Novis Planetis circa Jovem detectis. Hæc autem novorum planetarum introductio convellere videbatur Joannis Kepleri mysteria, qui totius Astronomiæ placita ex corporibus solidis duxerat, ostenderéque conatus fuerat non plures potuisse esse planetas. Cum ergo illius doctrina hoc Sydereo Nuncio convelleretur, hanc quasi responsionem dedit. In quarto Pragæ 1610.

1611 Nicolaus Mulerius Doctor Medicus & Gymnasiarcha Leouvardianus edidit tabulas frisicas lunæ solares quadruplices è fontibus Claudij Ptolemæi, Regis Alphonsi, Nicolai Copernici & Tychonis Brahe, quibus accessere solis tabulæ totidem, lunæ item totidem, Tychonis Hypotheses illustratæ, Kalendarium Romanum vetus cum methodo Paschali emendata.

Hæ tabulæ nihil habent de quinque minoribus planetis, solemque tantummodò & lunam spectant Ptolemaicæ traduntur in annis Julianis, & annis Nabonassari. Commodissimè existimantur ad eclypses indagandas facillimæque construuntur. Suo tempore fidelissimæ sunt existimatæ; à multis fuere typis impressæ cum multis erratis. Illæ sunt correctæ quæ initio subscriptæ sunt authoris chyrographo.

1611 Christophorus Clavius Bambergensis Societatis Jesu, in sphæram de Sacro Bosco Commentarium edidit satis amplum, in quo plurima habentur ad astronomiam pertinentia. Dividitur in quatuor capita.

In primo explicatur, quid sit sphæra, centrum, axis, polus, quot sint sphæræ, figura mundi.

In secundo de circulis sphæræ, eorumque officiis.

In tertio de ortu & occasu signorum, diversitate dierum, divisione climatum.

In quarto de circulis & motibus planetarum, & causis eclypsium. Adjecit plurimas tabulas ad primi Mobilis motum pertinentes, & tractatum de crepusculis deductum ex analemmate.

Hic tractatus est optimus & clarus viamque ad Astronomiam aperit, poteritque dici ad Astronomiam Isagogicus.

1612 P. Christophorus Griembergerus Haliensis Societatis Jesu edidit, catalogum veteres affixarum longitudines & latitudines conferentem cum novis. Tum imaginum cœlestium perspectivam duplicem, alteram raram ex polis mundi in duobus Hemisphæriis, æquinoctialibus per tabulas ascensionum rectarum & declinationum, alteram novam ex mundi centro in diversis planis globum cœlestem tangentibus per tabulas particulares. Opus utile in quarto Romæ 1612.

1612 Sethus Calvisius Elenchum edidit Kalendarii Gregoriani, in quo errores qui passim in anni quantitate & epactis quæ festa mobilia vitiosissimè determinant, committuntur, manifestè demonstrantur, cum duplici Kalendarii melioris formula.

Hoc Opus in plerisque nihil probat, & malè totum negotium explicat. Agit cum acrimonia in Clavium indigna homine honesto. Francofurti in quarto 1612.

Huic elencho abundè respondet quatuor libris P. Paulus Guldin Societatis Jesu, qui librum quintum addidit de ratione ac praxi Kalendarii Ecclesiastici Christianorum, & computi Hebræorum.

Tractatus P. Christophori Clavii Bambergensis in sphæram Joannis de Sacro Bosco Impressus est Lugduni. In quarto 1602.

1612 Christophorus Clavius Bambergensis è Societate Jesu, Romani Kalendarii à Gregorio decimo tertio restituti jussu summi Pontificis Clementis octavi explicationem edidit. Fuit autem unus ex iis qui hujusmodi correctioni operam suam navavit. Lilius tamen præcipuas in ea correctione partes obtinuit.

Occasio scribendi fuit quod in correctione Kalendarii facta sub Gregorio XIII. simpliciter proponeretur ipsa correctio, nec ratio redderetur, satis manifesta cur ita fieri conveniebat. Ex quo fiebat ut ab hæreticis præcipuè impeteretur; quare ut iis simul omnibus responderetur, omnibusque constaret quàm sapienter esset instituta hæc correctio, jussit summus Pontifex ut ea de re scriberet Clavius. Quod hoc Opere præstat & quasi de novo totam correctionem instituit, nonnihilque priorem correctionem immutat.

In hoc igitur Opere primò proponit compendium novæ restitutionis Kalendarii missum à Gregorio XIII. ad principes Christianos unà cum Kalendario.

Incipit explicationem ab iis quæ sacræ litteræ, & Patres de hac materia tradiderunt. Tum rationes cur corrigi debuerit Kalendarium, nempe propter mutationem æquinoctii, & falsitatem aurei numeri. Tum explicat correctiones, præcipuè verò epactas in locum numeri aurei restitutas, & modum per eas inveniendorum noviluniorum, tum cyclum solarem docet; exinde de festis mobilibus loquitur, modosque varios tradit supputandorum pleniluniorum paschalium.

Habet item brevem computum ecclesiasticum per digitorum articulos & tabulas traditas.

Addita est apologia Kalendarii novi adversus Michaëlem Moestlinum Mathematicum Tubingensem.

In quo Opere eadem ferè habet quæ in suo Kalendario dicta sunt cum minori ordine, eo quod cogatur respondere objectionibus Moestlini.

In Kalendario multas habet tabulas inutiles. Doctrina cæteroquin solida est & bona.

1612

1612 Josephus Langius Cæsaromontanus Elementale Astronomiæ & Theoriæ planetarum edidit, in quo communes tantum notiones & definitiones continentur methodicè digestæ. Friburgi in octavo 1612.

1613 Galilæus Galilæi Linceus Florentinus & Mathematicus magni Ducis Hetruriæ scripsit Italicè Historiam & demonstrationem macularum solarium tribus litteris ad Marcum Verzerum scriptis.

Additæ sunt aliæ litteræ ad eumdem Velzerum Apellis post tabulam latentis nempe Patris Scheineri è Societate Jesu, ad eumdem Velzerum de iisdem Maculis & Jovis satellitibus. Romæ in quarto 1613.

Anno 1613 edidit magnum canonem sinuum jam olim à Georgio Joachimo Rhetico ingenti labore supputatum, in quo radius supponitur, 1,00000,0000,00000. ad dena quæque scrupula quadrantis & pro primo & ultimo gradu quadrantis ad singula secunda adjunctis differentiis primis, secundis, & tertiis, & alia.

Opus immensi laboris & utilitatis maximæ. In Trigonometria.

1614 P. Christophorus Scheiner Societatis Jesu Disquisitiones mathematicas edidit, de controversiis & novitatibus astronomicis, suntque theses paulò ampliores ad disputationem. Habent multa curiosa & nova. In quarto Ingolstaldii 1614.

1614 Augustinus Niphus Philosophus Suessanus de Auguriis libros duos edidit. In primo vanitates omnes ab antiquis circa auguria prolatas refert.

Secundo libro causas & opiniones quibus hujusmodi vanitatibus fidem dederunt, reprobat.

Idem de diebus criticis libros duos edidit. Tertium de prognosticis, in quibus multa sunt vana, multa tamen utilia ad medicinam.

Huic Operi additus est Rodolphi Goglenii medici astrologiæ generalis liber unus continens generales quasdam præceptiones & canones clarissimè explicatos. In quarto Marpurgi 1614.

1616 Antonius Sanu Ripomarancius Lector publicus Mathematum in Pisana Academia, & Cosmographus, tractatum edidit de cometis, in quo ostendere conatur cometas cœlestes esse, & in regione elementari produci non posse. Antiquos autem assumit cometas ut anni 1577. anni 1604.aliosque ex defectu parallaxis in cœlo fuisse contendit.

Addidit & aliquod caput & sphæram ignis & aëream motu circulari viginti quatuor horarum non moveri ostendit. Florentiæ 1616. in quarto.

1616 P. Redemptus Baranzanus Vercellensis ex Ordine patrum Paulinorum, Uranoscopiam seu tractatum de cœlo edidit. In prima parte cœlestia prædicata communiora explicat potius philosophicè quam mathematicè.

In secunda parte agit de particularibus cœlis. Tot enim agnoscit quot motus. Explicat itemprincipia astrologiæ judiciariæ. In fine habet Opusculũ quo docet methodum conficiendi annuum prognosticon secundum mentem astrologorum. Colligit tamen in fine ex variis authoribus prognostica mutationum aëris, de motibus cœlestibus tantum, quasi in genere loquitur, nempe quasi philosophus, neque ad particularia satis descendit. In quarto Coloniæ Allobrogum 1616.

1617 Joannes Kepler Cæsaris Mathematicus Ephemerides motuum cœlestium pro quatuor annis composuit, incipiendo ab anno 1617. ex observationibus Tychonis Brahe, & hypothesibus seu tabulis Rudolphinis ad meridianum Uranopyrgicum. Præmittitur explicatio præsertim pro motu lunæ, in quo recedit à Tychone. Respondet Davidi Fabricio, & examinat ejus opiniones circa umbram terræ. Dat etiam rationem cur non observet formam Ephemeridum consuetam.

Adjectæ sunt Ephemeridi 1617. observationes meteorologicæ ad dies singulos & astronomicæ nonnullæ. Lincei Austriæ in quarto 1617.

1617 Nicolaus Mulerius Medicus & Matheseon professor Groningæ, Nicolai Copernici Torinensis astronomiam instauratam libri sex comprehensam qui de revolutionibus inscribuntur, integritati restituit notisque illustravit.

Liber primus nonnulla habet generalia circa locum telluris, veteremque opinionem de terra immobili depellere conatur, de triplici motu telluris agit. Habet item nonnulla ad trigonometriam spectantia.

Secundus doctrinam primi Mobilis tradit.

Tertius de sole ejusque motibus & hypothesibus, præcipuè de præcessione æquinoctiorum.

Quartus de lunæ duplici inæqualitate, item de diametris apparentibus solis, lunæ & terræ.

Quintus de motibus quinque planetarum in longitudinem.

Sextus de motu in latitudinem.

In fine additur astronomicarum observationum thesaurus.

Notæ cum calculo à Mulerio additæ hanc doctrinam clariorem reddunt. Amsterodami in quarto 1617.

1617 Joannes Antonius Maginus Patavinus professor Mathematicarum in Collegio Bononiensi hanc Scaligeri Diatribam confutat, sicut nova quædam dogmata de stella polari, & mutatione æquinoctiorum & stellarum fixarum immobilitate, & variis aliis rebus astronomicis.

Puto tamen hic altercari de re nullius momenti. Ostendimus enim per solam mutationem poli mundi, nempe ut circa aliud punctum physicum & reale cœlum moveretur explicari posse facilè motum stellarum in consequentia, cum perinde sit aut stellas promovere in consequentia aut sectionem vernam in antecedentia retrahere. In quarto Romæ 1617.

1617 Christophorus Seheiner Societatis Jesu, Opusculum edidit de refractionibus cœlestibus, sine solis ellyptici phænomenon illustravit, variasque astronomorum circa hanc materiam difficultates solvit. Opus est in quo multa circa hanc materiam & circa tubum opticum optima continentur, non tamen satis ordinata. Ingolstadii in quarto 1617.

1618 Villebrordus Snellius publicavit cœli & syderum hassiacas illustrissimi Principis Vvillelmi Hassiæ Langravii auspiciis quondam institutum.

Item Spicilegium biennale ex observationibus Bohemicis Tychonis Brahe.

Item observationes Noribergicas Joannis Regiomontani & Bernardi Vvalteri.

In toto hoc Opere præter observationes nihil aliud habes. In quarto Lugduni Batavorum 1618.

1618 Saulnier Medicus & Interpres Principis Condæi Cosmologiam edidit, seu tractatum de mundo cœlesti, & terrestri, divisum in tres partes, Prima est de astronomia & spæra, secunda de geographia,

geographia, tertia de Kalendario. Tota eius astronomia consistit in recensendis constellationibus, & enarrandis breviter fabulis.

Quæ habet de geographia pauca sunt & minuta pariter de Kalendario pauca explicat, quare totus tractatus est parvi momenti. Parisiis in octavo Gallicè 1618.

1619 Philippus Lansbergius progymnasmatum astronomiæ restitutæ librum primum edidit de motu solis, in quo novam profert solis hypothesin, quæ nempe mutationem excentricitatis admittat. Contendit autem suam hypothesin omni sæculo convenire. Difficiliorem tamen calculum habet ob conversionem in sexagenas.

Opus optimum & convenientibus tabulis instructum Middelburgi in quarto 1619.

1619 Joannes Keplerus Imperatoris Mathematicus de Cometis tres libros composuit. Primum astronomicum theoremata continentem de motu cometarum, & demonstrationem novam & paradoxon præcipuè verò de motu quem rectum esse contendit & ostendit.

Secundum Physicum continentem phisiologiam cometarum. Hic liber non est adeò bonus nec probabilia continet. Tertium astrologicum de significatione cometarum annorum 1607. & 1618. Augustæ Vindelicorum in quarto 1619.

1619 Villebrordus Snellius descripsit cometam anni 1618. ejusque à terra distantiam tradidit, cæterasque circumstantias tum de ejus natura, & materia disputavit breviter.

Huic accessit Christophori Rothmani Vvillelmi Hassiæ Principis Mathematici descriptio accurata cometæ anni 1585. Lugduni Batavorum.

1620 Josephus Blancanus Bononiensis è Societate Jesu, Sphæram mundi seu Cosmographiam demonstrativam facili modo composuit.

Pars prima, Apparatus ad sphæram.

Pars secunda, Explicatio sphæræ materialis ac mundanæ simul, in qua de mundi loco, motu, figura, quantitate, lumine, & umbra, tum de partis elementaris loco, motu & figura. Præcipuè verò de terra, tum de mari & aëre.

In sectione secunda agit de cœlo traditque astronomiæ principia in tractatu primo, in secundo de luna, tertio de sole, quarto de maculis solis, quinto de mercurio, sexto de venere, septimo de marte; octavo de jove, nono de jovis comitibus, decimo de saturno, undecimo de cometis, duodecimo de firmamento; decimo tertio de stellis novis.

Habet item appendicem de usu sphæræ materialis.

Item additamentum, seu brevem introductionem ad Geographiam.

Item apparatum ad Mathematicas ad discendas & promovendas.

Hæc omnia Opera bona sunt & solida. In quarto Bononiæ 1620.

1621 Christianus Longomontanus professor Mathematum in Academia Hauniensi Astronomiam Danicam edidit in duas partes divisam.

Prior doctrinam de diurna apparente siderum revolutione super sphæra armillari veterum instaurata duobus libris explicat.

In primo agit de triangulorum doctrina, item compositionem sphæræ materialis explicat.

In secundo problemata primi mobilis solvit.

Secunda pars theorias planetarum duobus libris complectitur. Prior post descriptionem & comparationem triplicis hypotheseos veteris Ptolemaicæ, Copernicanæ, & recentis Tychonis Brahe, agit de motibus apparentibus stellarum fixarum, item solis & lunæ motibus omnibus sæculo accommodatis una cum doctrina Eclypsium & usu lunæ peculiari.

Posterior agit de motibus quinque reliquorum planetarum, ad cœlestes apparentias similiter restitutis.

Cum appendice de ascititiis cœli phænomenis seu de Stellis novis & Cometis. Hæc astronomia perfecta est observationibus exactis nixa. In quarto Amsterodami 1621.

Anno 1621 idem Joannes Kepler Prodromum edidit dissertationum Cosmographicarum, nempe mysterium Cosmographicum de admirabili proportione orbium cœlestium; deque causis numeri cœlorum magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis, & propriis demonstratum, per quinque corpora regularia. Hic libellus jam fuit in lucem editus anno 1596.

Hoc Opus est malè compactum & sine ordine. Neque ullam potui in eo deprehendere demonstrationem quæ ad principale institutum aliquid faceret. Ideòque non miror quòd epistolà apologetica opus habuerit adversus Robertum de Fluctibus Medicum Oxoniensem qui tale Opus jure reprehenderat.

1622 P. Georgius Schonbergerus è Societate Jesu demonstrationem & constructionem horologiorum radio recto refracto in aqua, reflexo in speculo solo magnete horas astronomicas, Italicas Babylonicas indicantium composuit.

Pars prima agit de refractis in aqua, nempe horologium astronomicum, Italicum, Babylonicum refractum in plano horizontali in cylindro, in cono, in cubo.

Secunda pars de reflexis in quocumque plano verticali, speculo pariter verticali, vel horologium horizontale. Item in laqueari, in cylindro concavo, quod simul radio directo, & reflexo utile sit.

Pars tertia habet horologia magnetica nempe in quibus acus magnetica horas indicet.

Meliùs sunt praxes traditæ quàm demonstrationes. Friburgi Brisgoiæ in quarto 1622.

1621 Andreas Argolus Medicus Ephemerides ad longitudinem Urbis Romæ ex tabulis Prutenicis supputavit, primo ab anno 1621 ad 1640. cum Isagoge & canonibus circa usum Ephemeridum solaris motus 1621. 1622. 1623. 1624. juxta Tychonis hypotheses. Item methodum revolutionum annuarum addidit & tractatum de aëris & temporum mutationibus. Item tractatum circa artem medicam, aut chirurgicam. Denique Catalogum fixarum, cum longitudinibus, latitudinibus, ascensionibus rectis & declinationibus. Romæ 1621. in quarto.

Idem Argolus Ephemerides pro meridiano Romano composuit juxta hypotheses Tychonis Brahe ab anno 1641. ad annum 1700.

Cum Catalogo stellarum fixarum & tabula ortus & occasus pro qualibet latitudine. Primus tomus varia continet præcepta circa astrologiam; aëris mutationes, varias item tabulas domorum cœlestium. Lugduni in quarto tribus tomis 1659.

1622 Joannes Keplerus Mathematicus Cæsareus epitomen astronomiæ Copernicanæ usitata forma quæstionum & responsionum conscripta, & in septem libros digesta.

Primus tradit principia astronomica in genere.

Secundus est de sphæra & circulis ejus.

Tertius doctrinam primi Mobilis tradit, distinctionem spherarum, crepuscula.

Quartus de systematibus.

Quintus, sextus & septimus doctrinam theoricæ planetarum.

Opus bonum, in quo tamen innumera sunt parerga, multa fictitia, & sine fundamento dicta, præcipuè cum ad rationes physicas descendit. Lentiis in octavo duobus tomis 1618. & 1622.

Joannes Tardo Canonicus edidit Opusculum de maculis solaribus, in quo conatur ostendere esse verè astra. Titulus autem libri est, *Les astres de Bourbon, & apologie pour le soleil.*

In hoc Opere licet brevissimo agit de lentibus vitreis convexis, & specillis concavis, omnia leviter. Parisiis in quarto 1622.

Joannes Baptista Stelluti Fabrianensis doctor, edidit tractatum Italicum de Cometis cui titulum apposuit, *Scandaglio sopra la libra astronomica e philosophica di Lotario Sarsi.* Hic Sarsi libellum ediderat de cometis cum titulo Libra-astronomica & philosophica. Hic Sarsi multa dixerat contra Galilæi placita & aliorum. Huic respondit Stelluti. In hoc Opere multa sunt minuta. Terni in quarto 1622.

Anno 1619 Joannes Kepler Harmonices mundi libros quinque edidit. In præfatione multum invehitur in Petrum Ramum, Schonerum, & Snellium, & alios qui censent librum decimum Euclidis 13, & 14. de quinque corporibus esse inutiles. Contendit rationes ex iis corporibus desumptas continere totam planetarum theoriam. In primo libro distinguit varia genera quantitatum scibilium, nempe linearum commensurabilium longitudine, potentia tantum. & compositarum, ostenditque figuras tantum esse cognitas quæ geometricè inscribuntur circulo ut trigonum, exagonum quadratum, octogonum, pentagonum, decagonum, dodecagonum &c. Endecagonum verò nullo modo sciri. In secundo libro agit de angulis, qui ita congruere possunt ut totum spatium planum impleant. Item de angulis planis ad angulum solidum concurrentibus, & consequenter de figuris solidis quæ invicem possunt congruere.

In tertio libro agit de consonantiis valdè obscurè, nec ferè in plerisque aliquid demonstrat. Multa enim fundat super axiomata quæ nec lumine naturali nota sunt nec demonstrata. In genere ergo qui musicam nescit, eam in hoc Opere non addiscet; nec qui tenet, aliquid discet. Quæ item de Pythagoreorum tetracti dicit initio, id sine sufficienti fundamento asserit. Fundat item omnes harmonias in sectione circuli per figuras regulares planas demonstrabiles. Hoc etiam non probavit; deberet enim ostendere circulum per hujusmodi figuras ita secari ut partes essent commensurabiles, aut facere consonantiam, quod non probat nisi de lateribus figurarum respectu diametri. Secundo etiam falsum est omnia latera facere consonantiam, ita ut totum illud exemplum non videatur ullo modo ad rem facere, cujus nempe comparatio in omnibus vacillat. In quarto libro agit de harmonicis radiorum syderalium in terra eorumque effectu in ciendis meteoris.

In quinto de harmonia perfectissima motuum cœlestium; quæ omnia sunt & obscurè dicta & sine fundamento; ita ut ne una quidem nisi forsitan dum de corporibus solidis, occurrat demonstratio.

Hic liber superioribus sæculis in quibus obscuritas ut signum reconditioris doctrinæ sumebatur, magni factum fuisset; in hoc verò in quo authorem parvi pendimus si obscurè loquatur non ita à plerisque æstimabitur.

1623 Galilæus Galilæi tractatum edidit Italicum, *Il Saggiatore*, in quo nempe expenduntur ea quæ continentur in libra astronomica & philosophica Lotarii Sarsi Sinuessani. Controversia est de cometis tam de loco quàm de motu.

Hic modus scribendi per disputationes est valde fusus, multáque continet inutilia.

1623 Jacobus Capreolus Moderator scholæ Harcurianæ & professor philosophiæ sphæram, seu tractatum de sphera edidit, in quo breviter & satis clarè tradit circulos cœlestes, communesque quæstiones de cœlo breviter perstringit. Multa in hoc Opere continentur minuta, & non benè demonstrata. Multa item dicta sine figuris atque adeò quæ nullam ideam relinquant. Parisiis in octavo 1623.

1624 Antonius de Villon professor Philosophiæ in Universitate Parisiensi, usum Ephemeridum Gallicè composuit, cum methodo erigendi thematis cœlestis, modumque judicandi de constitutionibus tempestatum anni & reliquorum inde consequentium, ut bellorum, pestis, famis & aliorum eventuum qui homini accidere possunt salva libertate; repetit ea quæ ab aliis Astrologis dicta sunt. Parisiis in octavo duobus tomis 1624.

1625 Adrianus Metius Almarianus professor Matheseon in Academia Frisiorum tractatum composuit de genuino usu utriusque globi.

In primo libro agit de omnibus circulis eorumque usibus.

In secundo de situ cujuslibet stellæ constituendo, de ortu & occasu, de themate constituendo per globum.

In tertio variorum instrumentorum astronomicorum fabricam & usum, methodum item describendi horologia ex globo.

Hic tractatus optimus est. Amstelodami in octavo 1625.

1625 Joannes Keplerus Mathematicus Imperatoris, Tychonis Hyperaspisten elucubravit, seu defensionem adversus Scipionis Claromontij Cæsennatis Itali Doctoris & Equitis Antetychonem.

Occasio scribendi hujus libri fuit Claromontii liber in quo ostendere conatur, nequaquam ex Tychonis observationibus concludi cometas, aut stellas novas supra lunam existere. Huic in hoc Opere respondet Keplerus, suique Tychonis doctrinam tuetur, ostenditque bene ex eo concludi cometas cœlestes esse.

Referuntur in utroque Opere quamplurimæ observationes, eo tamen res deductæ, (ut Pater Ricciolius concludit) in ancipiti disputationem positam esse. Francofurti in quarto 1625.

1625 Adrianus Metius Almarianus usum globi terrestris tradidit nimis brevem. Item institutionem navigationis marinæ, in quo multa optima habet, non tamen omnia satis practica. Non bene tradidit doctrinam loxodomiorum. Amstelodami in octavo 1625.

1626 Henrion professor Matheseon, Cosmographiam composuit Gallicè, seu tractatum universalem rerum cœlestium, & elementarium. Item de proprietatibus & accidentibus earum; libris quinque.

In

In primo agit de principiis universalibus, de situ terræ.

In secundo de circulis.

In tertio de ortu, & occasu syderum.

In quarto de tempore & de observationibus cœlestibus. Item de problematibus. Hoc est doctrina primi mobilis.

Quintus geographicus est.

Hoc Opus non est absolutum nec satis ordinatum. Parisiis in octavo 1616.

1626 Henrion professor Matheseon Parisiis in libro quinto suæ Cosmographiæ geographiam tradit, supponit autem principia jam supra tradita. Quare pauca tantum addit, exinde ad particulares descriptiones regnorum & provinciarum descendit. Parisiis in octavo 1626.

Anno 1626 Lotharius Sarsius respondet tam Galilæo quam Stelluto in Opere cui titulus, ratio ponderum libræ & simbellæ, in qua è Lotharij Sarsij libra astronomica, quidque è Galilæi Galilæi simbellatore de cometis statuendum sit, collatis utriusque rationum momentis philosophorum arbitrio proponitur.

Repetit ea omnia quæ ab aliis & à se dicta fuerant. Lutetiæ in quarto 1626.

1626 Godefridus Vendelinus Belga Loxium seu tractatum parvum de maxima obliquitate eclypticæ edidit, in quo constituitur hypothesis obliquitatis eclypticæ rem tamen non perfectè constituit. Antuerpiæ in quarto 1626.

Anno 1627 Prodierunt Rudolphinæ tabulæ operâ Joannis Kepleri ex Tychonianis monimentis extructæ; nullas enim tabulas reliquit Tycho Brahe. Occasio autem istarum tabularum ea fuit quòd Prutenicæ ex observationibus & placitis Copernici à Reynoldo concinnatæ jam ab initio sint reprehensæ; decursu vero temporis adhuc clariùs, anno enim 1626. sex gradus Mars ulteriùs quàm tabulæ Prutenicæ ferrent, progressus est deprehensus; quódque jam fuerat observatum à Tycho-Brahe cùm Tabulas meditaretur; sed cùm morte præventus eas perficere non potuisset, huic Operi Keplerus præfectus fuit. In prima parte tradit Logisticen; præcipuè vero usum logarithmorum & doctrinam primi Mobilis. In secunda parte tradit methodum ininveniendorum mediorum motuum ex tabulis prostaphæreseon, & determinandorum verorum motuum. In tertia parte dat methodum etiam supputandi, motus in ordine ad astrologiam judiciariam. Tabulæ sunt bonæ, non tamen bene explicatæ nec ordinatæ, deficit etiam hic author, quòd loco geometriæ & circulorum seu hypotheseon, substituat causas physicas, ita sæpè à communi philosophorum sensu alienas, ut demonstrationum mathematicarum vim omnem infringat & tenebris involvat. Posset tota harum tabularum doctrina meliùs compingi & ad melioré usum aptari.

1628. Scipio Claromontius Cæsenas scripsit de tribus novis stellis annorum 1572. ad 1600. 1604. libros tres, quibus demonstrare conatur eas stellas fuisse sublunares, & non cœlestes, adversus Tychonem, Gemmum, Mestlinum, Digesseum, Hagecium, Sanctreium, Keplerum aliosque quorum rationes solvuntur.

Argumentum operis satis per se patet. Rem autem ita in omnem partem versat ut vel demonstret, vel saltem dubiam reddat. Cæsenæ in quarto 1628.

Idem Scipio Claromontius anno 1636. edidit Examen censuræ Joannis Camilli Gloriosi in librum de tribus novis stellis ejusdem Claromontii.

Hic Joannes Camillus Gloriosus composuerat Censuram libri præcedentis, cui in hoc examine respondet Claromontius. Peccavit graviter Claromontius quòd in eum injuriosis verbis agat, nullis talibus lacessitus. In quarto Florentiæ 1636.

Anno 1634. Joannes Camillus Gloriosus castigationem edidit examinis Claromontii, ostenditque eum mentem suam non intellexisse. Neapoli in quarto 1637.

1628. Frater Hilarius Attobellus Senior de Montechio Nobilis Auximanus Ordinis Minimorum, tabulas Regias edidit divisionum duodecim partium cœli seu domorum cœlestium secundùm mentem Ptolemæi pro latitudinibus à 37 gradu ad 84. quas putat Jatromathematicis esse pernecesarias. Adjuncta est doctrina Ptolemæi de syderum occursu illustrata. Habet quidem aliquot tabulas motus solis, nullas aliorum planetarum. Opus hoc astrologiam judiciariam spectat & ad hanc utile est. Maceratæ 1618.

1630. Idé Keplerus edidit Ephemerides ab anno 1621 ad 1628. ex tabulis Rudolphinis quæ antea edi non potuerant. His accessit his annis utpote jam exactis Historia mutationum auræ perpetuæ, ejusque cum motibus stellarum comparatio subsidium instaurandæ meteorologicæ & profligandis ex ea nugis.

Hoc consilium mihi videtur optimum in quo si multi Mathematici quique in suis regionibus laborarent aliquid certi circa aëris mutationes forsitan posset constitui. Sagavi Silesiorum in quarto 1630.

1630. Philippus Lansbergius Opusculum edidit cum titulo Commétationes in motum terræ diurnum & annuum, & in verum aspectabilis cœli Typum; in quibus ostenditur diurnum annuumque motum qui apparet in sole & cœlo, non deberi soli & cœlo; ex Belgico in Latinum versæ à Martino Hortensio Delfensi. In hoc opere potius explicat circonstantias Copernicani systematis quàm illud probet & stabiliat.

1631. Idé Uranometriæ libros tres edidit in quibus lunæ & reliquorum planetarum & fixarum distantiæ à terra & magnitudines hactenus ignoratæ demonstrantur. Primus liber distantiam lunæ à terra constituit minimam semidiametrorum 51. maximam 66. quæ non omnino quadrant cum diametris apparentibus postea observatis. Secundùs metitur solis distantias. Tertius reliquorum planetarum & fixarum, in quibus multa sunt non satis solidè dicta.

1630. Prodiit Joannis Kepleri Mathematici Cæsarei admonitio ad astronomos, rerúmque cœlestium studiosos, & variis anni 1631 phænomenis, Veneris puta & Mercurii, in solem incursu, excerpto ex Ephemeride anni 1631. à Jacobo Bartschio Lauba Pausato Medico.

In hoc Opere multa habentur de maculis solaribus, de refractionibus, specillis &c.

1630. Dyonisius Petavius Aurelianensis Societatis Jesu Uranologiam edidit, seu Systhema variorum Authorum, qui de sphæra eorúmque motibus Græcè commentati sunt, quos ferè omnes Latinos fecit. Sunt autem sequentes.

Gemini Isagoge ad Arati Phænomena Interprete Hilderico.

Ptolomæus de apparentiis inerrantium.

Ejusdem significationes fixarum.

Kalendarium vetus Romanum cum ortu & occasu syderum ex Ovidio, & Columella à P. Petavio confectum.

Kalendarium Romanum à Joanne Georgio Heruvart editum.

Achillis Statii Isagoge ad Arati phænomena, libri tres Interprete Petavio.

Hipparchi Bithyni ad Arati phænomena cum ejusdem fragmentis Interprete Petavio.

Theodonis Baza de mẽsibus, Interprete Perello.

Maximi computus, Interprete Petavio.

Fragmentum Græcum de Paschate.

Notæ Petavii ad Geminum Ptolomæum & Hipparchum. Additi sunt variarum dissertationum libri octo.

In libro primo agit de ortu & occasu syderum cum tabulis ad eos inveniendos.

In secundo de æquinoctiis, solstitiis, aliisque punctis Cardinalibus, & octava sphæra.

In tertio confutat Scaligeri Opus Posthumum circa motum octavæ sphæræ, & æquinoctiorum anticipationem, defenditque veteres Authores.

Quartus liber est de anno Græcorum, præsertim Atticorum, contra Diatribam Alphonsi à Caranza Jurisconsulti Hispani.

Quintus de annis Judaïco, Ægiptiaco, Romano vetere contra eundem & Claudium Salmasium.

Sextus contra Salmasium de mensibus atticis.

Septimus contra eundem circa caniculæ ortum & aliis.

Octavus de Græcorum æris computis.

Totum Opus miram habet eruditionem & soliditatem.

1631. Martinus Hortensius Delphensis responsionem edidit ad additiunculam Joannis Kepleri Cæsarei Mathematici præfixam ephemeridem in annum 1624. in qua cùm de totius astronomiæ restitutione tum in primis de observatione diametri solis, fide tubi dioptrici, & de eclypsibus utriusque luminaris luculenter agitur.

1631. Libertus Fromundus in Academia Lovaniensi Professor Ordinarius Antaristarchus, sive Orbis terræ immobilis librum unicum edidit.

In quo decretum S. Congregationis 1616. adversus Pythagorico-Copernicanos editum defenditur. In hoc Opere multa affert argumenta contra Copernicanos, quæ nullius sunt roboris, eo excepto quod à Scriptura sumitur. In quarto Antuerpiæ 1631.

Idem anno 1634. Librum edidit cui titulum apposuit Ant-Aristarchi vindex adversus Jacobum Lansbergium Philippi filium Medicum Milderburgensem; in quo decretum Sanctæ Congregationis 1616. & 1633. iterum defenditur. Multa affert argumenta è Physicis petita quæ nullius sunt roboris, & procedunt ex non satis intellectis rebus mathematicis. Unum legitimum tantum profert ex sacra Scriptura petitum. Antuerpiæ in quarto 1634.

1631. Joannes Baptista Morinus Francopolitanus Doctor Medicus, & Regius Mathematum Professor, edidit Opusculum cui titulum apposuit, Famosi & antiqui problematis de telluris motu vel quiete hactenus optata solutio. Qui titulus potius jactabundè, quam verè appositus. Quamvis enim multa habeat optima nihil tamen demonstrat, licet contraria argumenta solvat. Refellit autem argumenta à Keplero, Lansbergio, aliisque prolata. Parisiis in quarto 1631

Idem author responsionem composuit ad Jacobi Lansbergij Doctoris Medici apologiam pro telluris motu. Parisiis in quarto 1634.

Idem aliud Opusculum edidit contra Gassendi Opusculum de Motore translato, cui titulum apposuit Alæ telluris fractæ, cum physica demonstratione quòd opinio Copernicana de telluris motu sit falsa, & novo conceptu de oceani fluxu & refluxu adversus Petri Gassendi Diniensis Ecclesiæ Præpositi libellum de motu impresso.

In his omnibus sæpè Morinus hallucinatur, nec satis benè percipere ostendit naturam motus.

1631 Prodiit in lucem Opusculum Galilæi Italicè & Latinè, cui titulus Nova antiqua sanctissimorum Patrum & probatorum theologorum doctrina de sacræ Scripturæ testimoniis in cõclusionibus merè naturalibus quæ sensata experientia, & necessariis demonstrationibus evinci possunt, temerè non usurpandis, à Galilæo Nobili Florentino, Primario Ducis Etruriæ Mathematico. Hoc Opus non dedit in lucem Galilæus, sed Robertus Rolentinus Borussus allatum ex Italia manuscriptum Italicè Berneggero tradidit in linguam Latinam vertendum, an fideliter nec ne dubitatur.

1631 Adrianus Metius Matheseos professor ordinarius in Academia Frisiorum primum mobile astronomicè, sciographicè, geometricè & hydrographicè, explicuit quatuor tomis.

Primum tomum in quinque libros dividit.

Primo libro post Astronomiæ definitionem Sphæram stellarum describit, originem decem circulorum in quatuor hypothesibus ostendit, dierum ac noctium vices, ortus, zonas, aliaque ad Geographiam spectantia exponit.

Secundo situs stellarum per longitudines & latitudines, ascensiones rectas, & declinationes, ortus earumdem, circulos verticales, elevationum directiones, aliaque similia explicat.

Tertio agit de observationibus syderum, per astrolabium, radium, & globum.

Quarto nova methodo horologia sciaterica per sphæram & tangentium tabulas construit.

Quinto orbem terrestrem describit novamque navigandi artem, per globum & canonem rumborum, ab authore supputatum.

Secundus tomus habet tres partes, Prima habet descriptionem astrolabii particularis in plano scilicet tropici Capricorni.

Pars secunda quatuor libros habet, Primo astrolabium generale construit.

Secundo problemata primi Mobilis in eodem astrolabio ostendit.

Tertio domicilia cœlestia & directiones in triangulis sphæricis proponit.

Quarto problemata geographica eodem astrolabio solvit.

Pars tertia trigonometriam complectitur.

Tertius tomus dicitur historia astronomica tribus libris comprehensa.

Primus historiam de situbus astrorum & per astrolabium & per triangula tradit.

Secundus Gnomonicus qui in astrolabio & in angulis sphæricis horologia demonstrat.

Tomus quartus Geometrica astrologia.

Primâ parte problemata primi Mobilis geometricè solvit.

1632 Claudius Berigardus in Academia Pisana Philosophiæ professor Dubitationes edidit in Dialogum Galilæi Lyncei in eodem Gymnasio

Mathematici,

Mathematici, in quibus notatur vel Simplicii prævaricatio vel simplicitas, quod nullum efficax super esse peripateticis argumentum ad probandam terræ immobilitatem tam facilè concesserit.

Occasio scribendi quod Dialogum Galilæus instituerit de Systemate mundi, introduxeritque simplicium qui partes Aristotelicas & communem sententiam tueatur. Cum autem in hoc dialogo Galilæus non ea omnia dicat pro hypothesi communi, quæ videbantur posse dici, jure Berigardus eam reprehendit, affertque alia paulò meliora. Florentiæ in quarto 1638.

In tertia doctrinam primi Mobilis in superficiebus planis per sciaterica describit tres tabulas geographicas, & rumborum totámque artem navigandi tradit. Opus optimum & clarum. Amstelodami in quarto.

Anno 1632. Petrus Gassendus duabus Epistolis ostendit, & refert apparentiam Mercurii sub disco solis transeuntis, quæ quatuor horis fuit tardior quam exhiberent Kepleri tabulæ.

Secunda tabula ostendit Venerem sub sole non apparuisse, & consequenter Kepleri vaticinium vanum fuisse, ita parum exactè constitutus est horum syderum motus.

Anno 1632 Philippus Lansbergius Gandavensis tabulas motuum cœlestium perpetuas ex omnium temporum observationibus constitutas, temporumque omnium observationibus consentientes edidit; cum theoricis novis & genuinis motuum cælestium, & thesauro astronomicarum observationum, in confirmationem suarum tabularum. Hoc Opus bonum est & ab omnibus plurimi æstimatur. Voluissem tamen primò ut consensum tabularum ad theoricas paulò meliùs, & clariùs ostendisset: theorias enim nimis breviter explicat, tabularum item usum ita tradit, ut in multis sit difficile animadvertere theoricas in tabulis ad praxin esse revocatas.

Secundo sequitur methodum Alphonsinam & tempus in dierum sexagenas mutat, quæ methodus quidquid dicat longior est, cum æquè operosa sit ista conversio, ac ipsa inquisitio immediata motus qui quæritur.

Tertio varietas præcessionis æquinoctiorum, mutatio excentricitatis in sole, & declinationis maximæ in eclyptica, sunt valdè dubia, quibus tamen suum calculum implicat operosum que reddit, cætera benè procedunt.

Initio in præfatione ponit progressum astronomicum.

1633 Antonius Rocco Philosophus peripateticus exercitationes philosophicas Italicè composuit, in quibus considerat positiones, & objectiones contentas, in dialogo Galilæi Galilæi, Lincei, contra Aristotelis doctrinam.

In prima agit de perfectione mundi.

In secunda de centro universi & motu circulari & acceleratione.

In tertia de differentia inter cœlos & elementa.

In quarta de corruptibilitate cœlorum, cometis, maculis solaribus, telescopio.

In quinta comparatio lunæ cum terra.

In sexta argumenta & solutiones pro terræ motu.

In septima de quiete terræ.

In octava an terra sit magnetica.

Hoc Opus scholam sapit habétque multa non probata & malè explicata.

1633 Joannes Baptista Morinus Francopolitanus Doctor Medicus & Regius Parisiis Mathematum professor, trigonometriæ canonicæ libros tres edidit, quibus planorum & sphæricorum triangulorum theoria, atque praxis accuratissimè brevissimeque demonstrantur.

Adjungitur liber quartus pro constructione tabulæ logarithmorum, & usu.

Opus optimum & clarissimum; rectilineam enim trigonometriam ad quinque theoremata revocat, sphæricam ad undecim. Nihilominus non habet omnes praxes quæ in hac materia haberi possunt. Parisiis in quarto 1633.

1633 Melchior Inchofer è Societate Jesu Austriacus tractatum syllepticum edidit, in quo quid de terræ solisque motu vel statione secundum sacram scripturam & sanctos Patres sentiendum, quáve certitudine alterutra sententia tenenda sit ostenditur. Romæ in quarto 1633.

1634 Laurentius Eichstadius Medicus, & Physicus ordinarius in veteri Sedino Pomeranorum Ephemeriden conscripsit ab anno 1636 & 1650: pro solis & lunæ motibus ex tabulis Danicis, in reliquis planetis ex tabulis Rudolphinis cum pædia seu instructione circa utendi methodum.

Secunda pars habet instructionem astronomicam seu praxin trigonometricam per Logarithmos quorum etiam tabulam tradit.

Tertia pars continet annos à 1651. ad 1655: cui accesserunt centum aphorismi de judiciis genethliacis. Prima pars & secunda impressæ sunt Stetini, tertia Dantisci 1644. Omnes in quarto.

1634. Prodiit Joannis Kepleri Mathematici olim Imperatoris somnium seu Opus Posthumum de astronomia lunari, nempe in eo disserit de iis quæ acciderent lunaribus incolis, quam luminis & dierum diversitatem experirentur, aliáque astronomica accidentia.

Idem Keplerus Appendicem edidit Selenographicam & notas ad appendicem, item libellum Plutarchi de facie in orbe lunæ, ex plurimis fragmentis collectum latinè reddidit & notis illustravit. In hoc Opere demonstrat in luna montes esse & valles, multaque alia ad ejus naturam spectantia. Opus curiosum & facile.

1634. Ægidius Bucherius Atrebas Societatis Jesu, de doctrina temporum Commentarium edidit in Victorium Aquitanum, qui floruit circa annum 450 post Christum, & cujus lucubrationes lucem adhuc non viderant, refert item alios antiquos Canonum Paschalium scriptores.

Continetur igitur in hoc Opere Canon annorum 532. scriptus anno Christi vulgari 457. nunc primum in lucem editus, & uberiore Commentario illustratus quo dies passionis Christi, multaque tam veterum Latinorum placita Paschalia, quàm historica & Chronologica eruuntur & illustrantur.

Additus est laterculus Latinorum ab anno 312: quo Constantinus vicit Maxentium ad 411. nondum editus. Accedunt nonnulla Fastorum Consularium fragmenta, nondum visa, item vetus Kalendarium tempore Constantij Imperatoris & Liberij Papæ ex vetutissimo Manuscripto.

Hippoliti Canon paschalis cum brevibus notis Judæorum tempore Christi & Machabæorum Cyclus Paschalis 84. annorum, tum ex Epiphanio tum ex Chronico Prosperi manuscripto. Additus item alius Cyclus paschalis totidem annorum.

Item Anatolii Laodicensis Canon Paschalis nunc primum de manuscripto editus.

Denique Paschales veterum aliquot Philippi de Cæsariensi Consilio, Ambrosij, Innocentii Primi, Leonis V. Theophili Alexandrini, Cyrilli, Proterij, Paschasini, Dyonisij Exigui abbatis Notis illustrati.

Opus hoc ad Kalendarium reformandum fuisset summè utile, & Chronologiæ stabiliendæ non parum conferre potest.

1655. Petrus Crugerus Mathematicus Dantiscanus doctrinam astronomiæ sphæricam edidit præceptis per globum, tabulas, trigonometriam veterem, & logarithmica cum tabulis ad eam pertinentibus.

Liber primus agit de circulis cœlestibus & angulis eorum, nempe de doctrina primi Mobilis.

Liber secundus de ortu & occasu syderum, ascensionibus, declinationibus, cæterisque accidentibus.

Totus hic tractatus trigonometriam supponit, cujus praxes refert, & non tamen demonstrat. Dantisci in Octavo. 1635.

Galilæus Galilæi Academiæ Pisanæ Mathematicus extraordinarius, systema cosmicum, seu dialogum de systemate mundi edidit quadripartitum; in quo de duobus maximis mundi systematibus Ptolemaïco & Copernicano, utriusque rationibus philosophicis ac naturalibus indefinitè propositis disseritur.

Primo conatur ostendere omnia experimenta quæ in terra fieri possunt ad inferendam ejus mobilitatem esse insufficientia, deinde phænomena cœlestia corroborando Copernicanam hypothesin. Tertio conatur explicare æstum maris per motum telluris.

Reprehensus fuit Galilæus à Sacra Inquisitione quasi nimis inclinasset in Copernicanam opinionem majusque pondus argumentis dedisset, ex qua reprehensione ita indoluit ut mortuus fuerit.

Hic dialogus Italicè fuit scriptus sed in Latinum conversus à Mathia Berneggero qui addidit præfationem quæ & decretum Congregationis reprehendit, & alia multa habet quæ nunquam fuere Galilæi. Addit & appendicem geminam qua sanctæ Scripturæ loca cum terræ mobilitate conciliantur.

Liber Galilæi si præcisè spectemus Copernicanam doctrinam in ratione hypothesis, optimus est & tanto viro dignus. Latinè in quarto Augustæ Trobec 1635.

1655. N. Durret Gallus Professor Parisiensis Gallicè novas planetarum theorias protulit, quas asserit conformes observationibus Ptolomæi, Copernici, Tychonis, Lansbergij & aliorum astronomorum, cum tabulis quas Richelianas vocat, quibus & loca planetarum & stellarum fixarum facilè inveniuntur, & eclypses solis & lunæ supputantur.

In hoc Authore Astronomiam non addisces; incipit enim à praxibus, nulla præmissa theoria, qui modus eas reddit intellectu difficiles, cum earum ignoretur ratio. Hypotheses item profert difficiles utpote plerumque duplici epicyclo constantes. Parisiis in quarto 1635.

1636. Joannes Schonerus Carolostadius Professor Mathematum Norimbergæ tabulas astronomicas edidit quas Resolutas vocat, eo quod sint facillimæ quibus loca planetarum & fixarum ad quodlibet tempus calculari facilè possunt. Opus hoc nihil continet aliud nisi tabulas & usum.

Idem aliud opus edidit cujus titulus Æquatorium astronomicum; in quo per singulos Chartaceos & quasi astrolabia, loca planetarum ad quodlibet tempus inveniuntur. Praxis quidem commoda sed non præcisa.

Idem scripsit nonnulla Geographica.

1636. Scipio Claromontius Cæsenas Opuscula tria edidit; de sede sublunari cometarum in supplementum Antitychonis.

Primo, Consideratio observationum Judaïcarum cometæ anni 1618. Goæ, & in tractu Malabarico.

Secundo, Solutio rationum pro cœlesti cometarum sede. Sunt autem de cometis

Ann. { 1576 Antonij Santutij.
1581 Ejusdem.
1585 Christophori Rothmani.
1597 Santutii & Joannis Kepleri.
1618 Kepleri, Villebrordi, Snellii, & Fromondi. }

Tertio Libellus Apologeticus. Amstelodami 1636. in quarto.

1637 P. Carolus Malapertius Belga Montensis è Societate Jesu, Opus astronomicum edidit cui titulum posuit Austriaca sydera Heliocyclia astronomicis hypothesibus illigata. Primo dat methodum observandarum macularum solarium. Secundo hypothesin motuum constituit. Duaci in quarto 1637.

1637 Jacobus Humius Scotus tractatum Gallicum edidit sphæræ Copernici & Ptolomæi cum usibus & constructionibus tabularum sphæricarum Regiomontani, nempe primi mobilis.

Quæ habentur in hoc Opere ut plurimum communia sunt sine ordine prolata. Sunt item multa de Morini disputatione circa longitudines. Parisiis in octavo 1637.

1638 Joannes Barenchius Opusculum edidit Italicum cujus titulus est; *Considerationi sopra il dialogo de duoi massimi Systemi Tolemaico & Copernicano.* In hoc Opere defendit Aristotelicum in libris de cœlo, ejúsque sententiam pro motu recto elementorum, & quiete terræ in centro & motu orbium cœlestium. Habet philosophiæ communis peripateticæ placita satis benè explicata, quibus eam vim omnem tribuere conatur quam potest. Ea tamen, quæ dicit, sunt communia. Pisæ in quarto 1638.

1639 Philolaus suppresso suo nomine dissertationem edidit de vero systemate mundi libris quatuor. Primo libro systemata antiquorum Ptolemæi scilicet & Alphonsinorum proponit, explicat, & confutat tam physicè quàm geometricè seu ex motibus, præcipuè verò latitudinis planetarum.

Secundo libro Systema Tychonicum proponit & impugnat.

Tertio aliqua theoremata necessaria ad constitutionem opinionis Copernicanæ præmittit.

In quarto verum systema investigat, opinionemque Copernicanam constituit quidem, in nonnullis tamen reprehendit.

Opus breve, bonum tamen licet ea omnia quæ affert non sint demonstrativa ut putat author. Amsterodami in quarto 1639.

Anno 1639 Vincentius Renerius Genuensis Olivetanus Tabulas Mediceas edidit universales, scilicet secundorum mobilium, quibus post unicum prostaphæreseon orbis canonem planetarum calculus

calculus exhibetur. Juxta Rudolphinas Danicas, Lansbergianas, Prutenicas, Alphonsinas, & Ptolemaicas. Tabulis autem præfixit usus simpliciter sine hypothesibus, quare qui jam aliunde hypotheses sciret, in hoc authore praxin addiscere posset. Habet item praxin supputandarum eclypseon. Quæ omnia nimis breviter, sunt indicata. Quæ videbantur paulo uberiorem explicationem requirere.

Anno 1640 Christianus Longomontanus professor Mathematum in Academia Hafniensi Astronomiam Danicam edidit, in duas partes divisam.

Prima pars de diurna syderum revolutione doctrinam super sphæra armillari duobus libris explicat.

Posterior duobus item libris secundum observationes Tychonis Brahe & proprias motuum planetarum Theorias complectitur, cum appendice de stellis novis & cometis. His præmisit præcognitionum tractatum in duas partes divisum, quarum prior triangulorum analysin compendiosam habet. Hæc pars nimis est brevis, habet tamen multa bona circa prostaphæresin, nempe solutionem triangulorum per additionem, & subtractionem etiam independenter à Logarithmis. Posterior de materia cœlorum differit. Prioris partis Astronomiæ Danicæ liber primus habet divisionem circulorum sphæræ, in quo nihil nisi commune invenies. Secundus liber problemata primi Mobilis solvit trigonometricè, tabulasque ex iis conficit, habet item tabulam mediationum centum stellarum, ibidem exhibet præcipua instrumenta astronomica. Item agit de parallaxi & refractione.

In astronomiæ parte secunda theorias planetarum duobus libris restituit: Quorum prior primò profert triplex Systema Ptolemaicum, Copernicanum, Tychonicum, tum de motu fixarum, item solis & lunæ cum doctrina eclypsium & usu lunæ peculiari. Posterior de motibus reliquorum quinque planetarum super triplici illa hypothesi.

Opus istud perfectum est, quamvis enim quæ dicit initio, sint satis communia, restituit tamen in decursu astronomiam totam, & ad particularia descendit constitutis etiam tabulis, novus ille usus lunæ est in longitudinibus inveniendis qui adhuc non est sufficienter exactus. Circa cometas nihil habet novi.

1640. Guillelmus Blaeu Institutionem astronomicam de usu globorum & sphærarum cœlestium & terrestrium duabus partibus comprehendit. Unam secundum hypothesin Ptolemaicam terræ quiescentis. Alteram juxta mentem Copernici. Prima duos continet libros; primū de adornatione globorum in quo agitur de circulis circa globos, & de circulis in ipsis globis, tum de distributione regionum, de stellis, & motu earum circa axem, de motu solis & horizonte. Secundus agit de ortu & occasu syderum, de horologiis sciatericis, de loxodromiis totus liber 79 problematis constat.

Secunda pars duobus pariter libris constat. Primus agit de ordine sphærarum cœlestium, de constructione, de triplici motu terræ, ejusque exhibitione. Item de constructione sphæræ particularis stellarum. Secundus agit de ortu & occasu, & horologiis sciatericis.

In prima parte continentur tantum quæ sunt vulgaria, exceptis iis quæ de horologiis per globum concinnandis tradit.

Secunda pars habet multas praxes peculiares in opinione Copernicana.

Latinè donata à M. Hertensio. Amsterodami Matheseon professore. Amsterodami in octavo 1640.

1640 Joannes Baptista Morinus Francopolitanus Doctor Medicus & Regius Mathematum professor, Opus edidit cui titulum apposuit; Astronomia à fundamentis integrè & exactè restituta.

Hoc Opus novem partes complectitur.

Prima Isagogen complectitur ad longitudinum scientiam, & ad tabulas astronomicas condendas.

Secunda nonnulla problemata astronomica proponit, ad longitudinum scientiam necessaria.

Tertia scientiam longitudinum per lunam demonstrat.

Quarta contra invidos sua placita defendit.

Quinta Commissariorum judicium profert.

Sexta varias epistolas profert quibus à multis authoribus ejus inventum comprobatur. Affert item aliquos modos restituendarum tabularum.

In septima temporis æquandi ratio demonstratur, & Galilæi atque Herigonij methodus de longitudinibus captandis per Jouis satellites ventilatur.

Octava demonstrat veram parallaxium doctrinam.

Nona de refractionibus cœlestibus agit.

Huic operi alius titulus apponendus esset. Est enim tractatus de longitudinibus terrestribus inveniendis, multa complectens astronomica, non tamen nova. Petierat hic author judices ut præmium de scientia longitudinum inventa adipisceretur; sed causâ cecidit. Hinc tot querimoniæ in judices, præcipuè verò in Herigonium qui cum aliis judicarat problema practicè non esse solutum, eò quod inniteretur observationibus lunæ, cujus motus hactenus ad eam præcisionem constitutus non est, qui in tali negotio requiritur. In quarto Parisiis 1640.

Idem anno 1634 quinque hujus Operis partes jam dederat quas auxit, aliásque adjunxit.

Anno 1648 prodiit gallicè Apologia seu expostulatio contra Morinum quasi contra usurpatorem scientiæ longitudinum, à Reverendo Patre Leonardo Duliris ex Ordine Recollectorum. In quo ostendit se Morino ostendisse eas praxes quas in suo Opere vulgavit. Videtur autem in hoc Opere innuere tale problema etiam practicè solutum esse; immo etiam ad captum nautarum esse accommodatum. Sed quàm longè absit ab eo declararunt judices dati Morino qui etiam hanc apologiam viderunt. Fuerunt autem illi DD. Paschalius, Mygdorgius, Boulangerius, Beugran & Erigonius omni exceptione majores. In quarto Parisiis.

1641 Natalis Durret Cosmographus regius Ephemerides motuum cœlestium Richelianas composuit ab anno 1637 & 1649. Sex primi anni sunt ex tabulis Lansbergianis, reliqui è Keplerianis.

In priori parte habetur Isagoge in astrologiam.

In secunda tractatus de aëris mutatione.

In tertia doctrina primi mobilis seu trigonometria sphærica, in quâ potius praxes quam demonstrationes traduntur.

In secunda parte habetur usus tabularum astronomicarum pro rebus omnibus ad astronomiam spectantibus instituendis.

2. De crisium mysterio.

3. Gnomonices

3. Gnomonices liber unus, in quo traditur methodus delineandi horologia sciaterica. Hæc methodus omnia horologia ad horizontalia revocat & per trigonometriam elevationem poli supra tale planum aliásque circumstantias quærit. Habet multa bona sed methodus difficilior est. Parisiis in quarto 1640.

1642 Annibal de Spadacine Astrologus Mediolanensis, Speculum astrologiæ naturale edidit, in quo agit de hominis inclinationibus, de nativitate, de omnibus mensibus anni. Item de morbis, mulierculàrum inclinationibus &c. gallicè.

Opus nullius momenti,habet & chiromantiam. Parisiis 1654 in octavo.

1642 Petrus Gassendus Ecclesiæ Diniensis Præfectus, tractatum edidit de apparente magnitudine solis, humilis & sublimis, quatuor Epistolis comprehensum, in quibus complura physica opticaque problemata proponuntur & explicantur. Occasio scribendi est difficultas, cur sol horizonti vicinus major appareat, cùm tamen refractio limborum solis eos extra circulos suos verticales non abducat, sed tantum altiùs evehat, ideoque minor apparere deberet; hoc tribuitur ampliationi pupillæ. In quarto Parisiis 1642.

Idem alium tractatum edidit de motu impresso à motore translato, Epistolis duabus comprehensum, in quibus aliquot præcipuè tum de motu universè, tum speciatim de motu terræ attributo difficultates explicantur. Doctrinam continet solidam. In quarto Parisiis 1642.

1643. Antonius Deusigius Medicus dissertationem edidit de vero systemate mundi, quâ Copernici systema reformat sublatis multis orbibus, & epicyclis, quibus in Ptolemaico systemate humana mens distrahitur; Telluri autem motum tantum diurnum relinquit. Alios item motus terræ tribuit, ut explicet inæqualitatem præcessionis æquinoctiorum, mutationem eccentricitatis & declinationis eclypticæ, quæ omnes inæqualitates modo plerisque rejiciuntur. Quare hæc hypothesis non est semicopernicana pura.

Opus hoc multa habet de motu gravium quæ faciliùs & graviùs constitui poterant. Amsterodami in quarto 1643.

1643. P. Reyta Capucinus ad Puteanum scripserat à se observatos novem Jovis satellites.

Petrus Gassendus scripsit ea de re suum judicium, & hallucinatum esse Reytam.

1630. Scripsit item quid judicaret de quatuor parheliis eo tempore apparentibus.

1643. Scipio Claromontius Cæsenas Antiphilolaum edidit, in quo Philolao redivivo de motu terræ ac solis ac fixarum quietè pugnatur, rationesque ejus quas pro demonstrationibus affert fallaces deteguntur. Positio eadem de re Copernici confutatur, & Galilœi defensiones rejiciuntur.

Utrumque Opus lectione dignum. Cæsenæ in quarto 1643.

1644. Joannes Caramuel Benedictinus Opusculum edidit sub hoc titulo Solis & artis adulteria. In prima parte ostendere conatur sphæram aliter tradendam esse quàm hactenus tradita fuerit ob refractiones, quæ tamen consideratio est exigui momenti, & jam à pluribus notata. Immo quæ constitui non possit ob varias aëris & atmosphæræ dispositiones. Modus ab ipso traditus ad inveniendum altitudinem poli fallax est. Quod verò de gnomonica promittit intra paucas horas tradenda. Id non præstat in suo Opere in quo nullam affert demonstrationem sufficienter explicatam. Horologiorum descriptiones variè deformat ob styli transpositionem, decurtationem, motum alternum, candelam, item solis vicariam in horis indicandis adhibet. Totùm opus est exigui momenti. In folio.

1644 Andreas Argoli Eques sancti Marci Primum Mobile edidit,seu tabulas ad primum Mobile spectantes. Totum ferè Opus obtinent tabulæ ascensionum obliquarum pro singulis latitudinibus. Opus immensi laboris. Patavii in quarto 1644 duobus tomis.

Idem Andreas Argoli Philosophus & Medicus, & in Gymnasio Patavino professor Matheseon, Tabulas secundorum Mobilium edidit juxta hypotheses Tychonicas, & cœlo deductas observationes.

Idem 1653 edidit Pandosium sphæricum,in quo singula in elementaribus regionibus atque ætherea mathematicè pertractantur. Hoc est loquitur de meteoris omnibus, proprietatibus maris terræ breviter tamen, & ferè nihil demonstrando sed tantum judicando. Profert item hypotheses planetarum,quarum primam ideam exhibet. In quarto 1653 Editio secunda.

Anno 1645 Ismaël Bullialdus Parisiensis edidit astronomiam Philolaicam, in qua motus planetarum per novam ac veram hypothesin demonstrantur, mediique motus aliquot observationum authoritate stabiliuntur. Quæ ex manuscripto Bibliothecæ Regiæ desumptæ sunt & hactenus ignotæ fuerunt. Tabulas item facillimas secundum eam hypothesin adjunxit, methodumque solares eclypses supputandi sine ulla solutione triangulorum sphæricorum. Addita est historia ortus & progressus astronomiæ. Suam Astronomiam in libros duodecim distribuit. In quorum primo de cœlo, sole, & planetarum motu disserit, & eclypticæ hypotheseos fundamenta jacit.

In secundo de anni magnitudine, cæterisque ad motum terræ annuum seu solis apparentem pertinentibus, præcipuéque de vera dierum æquatione agit, & Ptolemæi errorem detegit.

In tertio de lunæ motibus ejusque hypothesi.

In quarto continentur ea quæ spectant ad determinandam magnitudinem solis, terræ & lunæ, & utriusque luminaris eclypses.

In quinto fixarum motum & obliquitatem Zodiaci determinat.

Liber sextus Saturni motum considerat etiam latitudinis & Aphelii, & nodorum epochasque constituit.

Liber septimus idem præstat circa Jovem.

Liber octavus Martem intuetur.

Liber nonus Venerem.

Liber decimus est de Mercurio.

In undecimo continentur varia problemata circa motus planetarum præcipuè circa eccentricitates, & figuras orbium.

In duodecimo tabulæ motuum continentur, earumque usus traduntur.

Opus istud maximi facio cum hypothesin Copernicanam adusque minimas circonstantias persecutus sit vir iste apud exteros quàm apud suos notior. Quem Ricciolius noster vocat virum profundæ indaginis & meritò,multáque ex eo in suis Tabulis conficiendis mutuatus est. Videtur ab ejus tempore hypothesis ellyptica perfectior evasisse, & faciliùs ad praxin esse revocatam adjectis nempe pe aliquibus theorematibus circa prostaphæreseos supputationes.

Initio Operis in prolegomenis agit de progressu astronomiæ.

1645. Pater Jacobus Grandamicus è Societate Jesu, Opus edidit cum titulo, Nova demonstratio immobilitatis terræ petita ex virtute magnetica, & quædam alia ad effectus, & leges magneticas, usumque longitudinum & universam geographiam spectantia de novo inventa.

In hoc Opere multæ afferuntur experientiæ novæ circa magneticas directiones. Quod verò spectat ad novam illam demonstrationem, tantum abest ut convincat ut potius motui terræ probabilitatem afferat. Hæc enim virtus magnetica optimè parallelismum axis terrestris efficeret.

1545. P. Antonius Maria Schyrlæus de Rheyta Ordinis Capucinorum librum de Astronomia composuit, cui titulus (*Oculus Enoch, & Eliæ*) sive radius sideremisticus.

Finis Operis est omnium planetarum veros motus stationes & regressus sine ullis epicyclis aut æquantibus, tam in theoria Thyconica quàm Copernicana explicare, & Thyconicam Copernicana faciliorem reddere.

In primo & secundo libro ostendit insufficientiam hypotheseon Thyconicæ, Copernicanæ Lansbergranæ, Severianæ.

In tertia aliam hypothesin proponit, in qua centrum excentrici describit circellum, quæ hypothesis non videtur aliis simplicior. Proponit item novam lunæ hypothesin.

Libro quarto tractat de cœlo & mundo, affertur causa fluxus & refluxus.

Addidit Opusculum cui titulus, *Oculus astroscopicus binoculus*, nempe dat praxes ad conficiendum tubum opticum. Primus invexit in Gallias telescopia quatuor convexorum. Deliquit quod praxin præcipuam ænigmaticè alternatis characteribus scripserit.

In secunda parte conceptus profert prædicabiles, ex astronomia desumptos.

In hoc Opere multa sunt quæ vim non habent. Primo non benè ostendit insufficientiam cæterarum hypothesium. Ad id enim præstandum describit geometricè hypothesin aliquam, ostenditque figuram à calculo deficere, quod impossibile est, si dimensiones omnes observet. Argumenta item quibus opinionem Copernicanam impetit, sunt vulgaria, & nullius roboris, & sæpe apertè falsa continent.

1645. Pater Joannes François è Societate Jesu librum composuit Gallicum cum titulo, *La Chronologie divisée en quatre parties*, Chronologia in quatuor partes divisa.

In prima parte scientiam temporum tradit per enumerationem diversarum periodorum.

In secunda artem temporum Gnomonicam.

In tertia motus cœlestes in globo exhibet.

In quarta geographiam tradit.

Hæ omnes partes non satis appositè sub hoc titulo collocantur. Quæ de Gnomonica tradit sunt quidem bona sed non exactè demonstrantur Modos etiam loquendi insuetos habet hic Author. Parisiis in quarto 1645.

1647. Prodiit Aristarchi Samij Opusculum ex veteri manuscripto operâ P. Mersenni Ordinis Minimorum de mundi systemate, partibus & motibus ejusdem, in quo Opere non tantum astronomica, sed etiam physica multa continentur, ut de æstu maris & causis motuum. Hunc P. de Roberval Mathematicus Regius notis illustravit.

Franciscus Montebrunii Patritius Genuensis ephemerides motuum cœlestium elucubravit ad longitudinem Bononiensem ab anno 1650. ad annum 1660. cum catalogo insigniorum fixarum ad annum 1650. earumque ortu & occasu pro altitudine poli 44. ex Philippi Lansbergij Mathematici celeberrimi observationibus.

Præmissis etiam nonnullis ad constructionem & dijudicationem cœlestis figuræ necessariis. Bononiæ in quarto 1650.

1650. Joannes de Monte regio tabulas directionum & profectionum edidit; tabulas item ascensionum obliquarum cum tabulis sinuum per singula minuta universam trigonometriam complectentibus. In quo opere datur usus talium tabularum. Tubingæ in quarto 1650.

1651. Pater Joannes B. Ricciolius Ferrariensis Societatis Jesu, Almagestum novum edidit astronomiam veterem & novam complectens, observationibus aliorum & propriis promotam, in tres tomos distributam.

Libro primo de sphæra mundi in communi.
Secundo de sphæra elementari.
Tertio de sole ejusque motibus.
Quarto de luna.
Quinto de ecclypsibus.
Sexto de stellis fixis.
Septimo de planetis minoribus.
Octavo de cometis & stellis novis.
Nono de systematibus. Præcipuè impetitur Copernicanum.

10. Trigonometriam exponit etiam logarithmicam per compendium & problemata primi mobilis, geographica item & cosmographica de parallaxibus item & refractionibus.

Hoc Opus instar bibliothecæ integræ haberi potest. Collegit enim omnia quæ alicujus erant momenti in anterioribus astronomis.

Videtur tamen non sequi ordinem scientiæ nec satis indicare ejus progressum. Insuper diversa nonnunquam profert, nec satis determinat cui parti se addicat; ita ut perplexum reddat lectorem. & confusum.

Idem composuit Chronologiam reformatam anno 1669, in duos tomos divisam. In primo tomi primi libro agit de mensibus & annis præcipuarum Nationum præcipuè Hebræorum, Ægyptiorum, Persarum, Græcorum, Romanorum, tum aliarum minus præcipuarum Nationum.

Secundus habet connexionem præcipuarum epocharum cum epocha Christi. Libro tertio de Græcorum epochis. Quarto de Latinorum epochis. Libro quinto de annis Regum Asiæ cum epocha Christi. Sexto de annis Hebræorum. Septimo de annis mundi ad Christũ. Octavo de anno nativitatis Christi. Nono de annis post passionem.

Secundus tomus tria Chronica complectitur.

1653. P. Petrus Courcier Societatis Jesu astronomiam practicam composuit, sive motuum cœlestium praxes per astrolabia quædam quibus syderum loca, motus, defectus pro quolibet tempore facile cognoscuntur.

Sunt autem hæc astrolabia circuli chartacei coaptati, seu potius tabulæ motuum cœlestium in circulos digestæ, quæ omnia præcisionem habere non possunt perfectam. Sufficerent tamen ad plerasque operationes astrologiæ. Nancei in octavo 1653.

1653 Sethus Vvardus Astronomiæ professor Savilianus Opusculum de cometis edidit, in quo de cometarum natura differitur, nova cometarum theoria & novissimi cometæ historia proponitur prælectione Oxonii habita nimis compendiosè.

Idem Inquisitionem edidit in Ismaëlis Bullialdi astronomiæ Philolaicæ fundamenta, ostenditque hypothesin ellypticam à Bullialdo aliisque propositam laborare ageometria.

In hoc Opusculo nonnulla profert ad hanc hypothesin promovendam idonea.

Idem ideam trigonometriæ demonstratæ edidit sed nimis breviter, ita ut in ea trigonometriam non addiscas nisi aliunde scias. Bononiæ in quarto 1653 & 1654.

1653 Andreas Argolus in Patavino Gymnasio Matheseon professor, Brevem dissertationem edidit de cometa 1652. 1653. ubi de aliis meteorologicis impressionibus agit. In Romano Collegio habitæ sunt disputationes de cometis 1619.

Anno 1654 Yvo Capucinus Astrologiæ novam methodum tradidit sub nomine Francisci Allæi Arabis Christiani. In pluribus præcipuè circa revolutiones habet praxes à reliquis differentes, quarum sublevatur labor ope circulorum charteaceorum. Nullum peculiare de hac re judicium fero, nec utra praxis alteri sit præferenda, cùm enim omnia hæc arbitraria existimem, puto utramque æqualiter se habere, nihil in utraque esse soliditatis. In præfatione profert aliquam fabulam quasi hæc placita ab Arabe acceperit.

1654 Petrus Gassendus Diniensis Ecclesiæ præpositus, Regius Matheseos professor, Romanum Kalendarium compendiosè exposuit, cui accessit corollarium de Romano Martyrologio.

Opus breve & clarum,& utile. Parisiis in quarto 1654.

1656 Athanasius Kircher è Societate Jesu, Iter extaticum composuit, quo mundi opificium syderumque tam errantium quàm fixorum natura,vires,proprietates, singulorumque compositio, & structura ab infimo telluris globo usque ab ultima mundi confinia per ficti raptus integumentum exponitur.

Opus hoc potius philosophicum est quam mathematicum. In quarto Romæ 1656.

1656 Jacobus de Billy Compendiensis Societatis Jesu, Tabulas Lodoiceas edidit, seu universam eclypseon doctrinam, tabulis, præceptis, ac demonstrationibus explicatam. Adjectus est calculus aliquot ecclypseon solis & lunæ quæ proximè per totam Europam videbuntur.

Dividitur hic tractatus in duas partes.In prima agit de hypothesi solis & lunæ, modumque tradit conficiendarum tabularum. Agit de semidiametris solis, lunæ, & umbræ. Item de parallaxibus & refractionibus.

In secunda parte agit de eclypsi,& modum tradit inveniendorum noviluviorum, & pleniluniorum tam mediorum quàm verorum. Cæteras eclypseon circumstantias persequitur. Deinde profert calculum viginti eclypseon.

Opus hoc clarissimum est & optimum, optimè praxin docens & demonstrans. In quarto Divione 1656.

1657 Pater Jacobus de Billy è Societate Jesu, Opus gallicum edidit contra Astrologos cui titulum posuit, *Le tombeau de l'Astrologie judiciaire.* In hoc singula percurrit Astrologorum placita,eorum inanitatem planè demonstrat.

Opus perfectum in hac materia.

Idem P. Jacobus de Billy Compendiensis Societatis Jesu, librum gallicum edidit. Nempe tumulum astrologiæ judiciariæ. In quo singula placita illius doctrinæ profert clarissimè solidéque refellit, ita ut nihil amplius requiri videatur. Parisiis in quarto 1657.

1657 Joannes Baptista Morinus Doctor Medicus & Regius Parisiis Mathematum professor, Tabulas Rudolphinas ad Meridianum Uraniburgi supputatas in compendium redegit, ideo quia Tabulæ Rudolphinæ à Keplero supputatæ sunt cœlestibus apparentiis conformiores, sed earum usus est intricatissimus, ut sunt pleraque quæ à Keplero prodierunt. Quare Morinus insistendo eidem doctrinæ deductæ ab observationibus Tychonis Brahe, easdem tabulas ad praxin faciliores reddit.

Opus utile & facile. Esset Opus absolutum si præter praxin addidisset breviter hypotheses & cùm praxibus comparasset. In quarto Parisiis 1657.

1655 Comes de Pagan satis apud Gallos notus, Opusculum edidit de theoria planetarum in quo omnes orbes cœlestes geometricè ordinantur contra sententiam communem Astronomorum, hoc est pro epicyclis aut eccentricis communibus, ellypses invehit. Quamvis autem primus non sit qui tales ellypses in planetarum theoriis admiserit, doctrinam tamen ellypsium ita promovit ut ad faciles calculos ejus inventis revocari possit. Quare hoc Opusculum est maximi momenti. Parisiis in quarto 1657.

Idem anno 1658. Tabulas edidit facillimas ad usum, in quibus scilicet novas methodos adhibet per solam additionem aut subtractionem logarithmorum. Opus non contemnendum. Habet item nonnulla de longitudinibus. Parisiis in quarto 1658.

1659 Christianus Hugenius Zulochimij Const. Fr. Systema Saturnium sive de causis mirandorum ejus phænomenon & comite ejus planeta novo.

In hoc Opere systema proponit quo explicentur omnes apparentiæ Saturni & ejus comitum. Nempè exhibet Saturnum disco aliquo lato quasi fasciatum, ex cujus vario ad oculum obverso situ variæ sequantur apparentiæ, quod inventum ingeniosum, remque feliciter oculis subjicit. Hagæ Comitis in quarto 1659.

1659 Comes de Pagam Opusculum Gallicum edidit nempe Astrologiam naturalem, in quo nempe principia hujus scientiæ traduntur. Probat autem hanc artem prohibitam non esse, modo infallibiliter non prædicet actiones hominum liberas, affertque Authorum etiam sacrorum testimonia, quæ astrologiæ faveant. Exinde tradit principia illius universalia Parisiis. in Octavo.

1659 Andreas Argoli Divi Marci Eques,& in Patavino Lycæo Matheseos Professor, Ptolemæum parvum in Genethliacis junctum Arabibus, auctum, & mendis expurgatum. In hoc Opere breviter colligit omnia placita indiciariæ astrologiæ. Lugduni in quarto 1659.

1660 Joannes Baptista Du Hamel Astronomiam physicam edidit libris duobus comprehensam. In priori agit de lumine & coloribus. Primo triplicem de lumine sententiam, Peripateticorum qualitatem, Epicureorum substantiam, Carthesij æthereæ substantiæ motum esse existimantium expendit, & primæ inhæret. Tum de luminis motu, refractione, & reflexione earumque legibus,

bus, exinde de natura perspicui,, & causa luminis. Denique de colorum diversitate, omnes à luce dimanare ostendit & alia similia.

In libro secundo agit de materia cœli & syderum de distinctione planetarum & fixarum in natura, tum de solis natura, maculis cometarum, loco & generatione, de motu diurno, an tellus moveatur, de circulis qui in sphæra delineari solent. Tum de solis theoria, & emendatione anni Juliani, de lunæ theoria, ejusque natura in fluxibus, de reliquorum planetarum theoria & stellarum fixarum. Denique ad praxin descendit, & methodos observandi usum globi, horologium solare describendi, vera siderum loca ex tabulis eruendi, modos & alia similia.

Omnia idiomate eleganti & erudito. Non inhæsit difficilioribus astronomiæ tricis quæ ad institutum suum non faciunt. Accesserunt Petri Petiti Observationes aliquot eclypsium solis & lunæ, cum dissertatione de latitudine Lutetiæ, declinatione magnetis, nec non de systemate mundi quod Anonymus proposuit. In quarto Parisiis 1660.

1660 P. Gaspar Schotus Regiscurianus in Panormitano & Herbipolitano collegio mathematum professor, P. Athanasii Kircher Iter extaticum prælusionibus & scholiis illustravit & figuris exornavit. In quo opere ex occasione totam cœlestium orbium doctinam tradit. Hoc Opus habet omnia curiosa quæ de cœlo & syderibus dicuntur; Astronomiæ tamen difficiliora non explicat. Herbipoli in quarto 1660.

1661 P. Jacobus Grandamicus Societatis Jesu Quæstionem Evãgelicam edidit de Natali Christi, in qua asseritur perfecta consensio annorum Christi & æræ communis in Ecclesia à mille & amplius annis usu recepta. Hoc Opus potius est historicum quam mathematicum. Fixæ Andegavorum 1661.

1660 Pater Joannes François ex Societate Jesu Tractatum gallicum edidit de influentiis cœlestibus, in quo astrologiam indiciariam refellit.

Videtur esse fusior in rebus etiam facilioribus. Redonis in quarto 1660.

Anno 1661 Joannes Baptista Morinus Francopolitanus Medicus & Mathematicus Regius Astrologiam judiciariam sub titulo Astrologiæ gallicæ edidit. In quo Opere placita illius doctrinæ non tantùm proponit, sed etiam probare nititur, eorumque omnium rationes reddere. Primò igitur in Oratione apologetica judiciariam astrologiam à calumniis vindicare satagit, exinde viginti sex libris totum suum opus comprehendit. Primo agit de cognitione. Secundo de creaturis, rebúsque physicis. Tertio de divisione mundi. Quarto de quantitate, & extensione. Quinto de spatio, & loco. Sexto de motu, & tempore. Septimo de causa efficiente. Octavo de alteratione. Nono de principiis & elementis. Quæ omnia quàm parùm ad institutũ faciant, quódque ad astrologiam non pertineant facilè patet. Decimus liber de astrologiæ experimentis. Undecimus de virtutibus cœlorum, præcipuè de lumine. Duodecimus de influentiis. Decimus tertius de viribus singulorum planetarum & fixarum. Decimus quartus de duodecim signis. Decimus quintus de planetarum dignitatibus essentialibus. Decimus sextus de aspectibus. Decimus septimus de domibus. Decimus octavus de planetarum fortitudinibus & debilitatibus. Decimus nonus de principio astrologiæ judiciariæ. Vigesimus de divisione telluris per signa. Vigesimus primus de erroribus Astrologorum. Vigesimus secundus de directionibus. Vigesimus tertius de nativitatum revolutionibus. Vigesimus quartus de progressionibus & transitibus. Vigesimus quintus de constitutionibus cœli universalibus. Vigesimus sextus de interrogationibus & responsionibus astrologicis.

Opus hoc physica habet multa quæ ad rem non pertinent. Suntque minoris roboris quàm passim habeantur in reliquis Philosophis. Eruditionem tamen habent majorem. Astrologiæ judiciariæ præcepta satis clara reddit. Illisque probabilitatem aliquam daret, si hæc materia probabilitatis esset capax. Inanitatis hujus astrologiæ in ipso Morino factum est experimentum, referente Gassendo. Horoscopum enim rogatus ex suis principiis erexit aliquando Morinus in omnibus fere punctis fallacem.

1661 P. Jacobus de Billy Compendiensis edidit Opus astronomicum, in quo syderum omnium hypotheses, eorum motus tum medii, tum veri tabularum condendarũ ratio, eclypseon supputandarum methodus, observationum praxes, cæterorumque omnium quæ ab astronomis pertractantur, scientificus calculus, brevi ac facili via exponuntur libris novem. Liber primus de sole, primò habet doctrinam primi Mobilis, lineæ meridianæ, Azimuti solis, altitudinis polaris inventionem complectitur, æquationem temporis, obliquitatem eclypticæ, declinationem singulorum punctorum, tum apogæum solis, excentricitatem, constitutionem totius motus solaris. Liber secundus est de luna, ejusque inæqualitate prima & secunda & utramque constituit. Tertius de eclypsibus. Quartus de stellis fixis. Quintus de Saturno. Sextus de Jove. Septimus de Marte. Octavus de Venere. Nonus de Mercurio. Adiicit omnium tabulas. Opus benè ordinatum, perspicuum, & solidum. In quarto Parisiis 1661.

1661 P. Gaspar Schotus Regiscurianus, Societatis Jesu, in suo Cursu Mathematico astronomiam elementarem tradit, in qua explicat communes notiones astronomiæ; habet item astronomiam theoricam, in qua planetarum Theorias explicat, sed nimis breviter, & quasi in genere, neque enim ad particularia descendit. Tradit item breve Kalendarium in quo habetur prima cognitio difficultatum quæ in Kalendario inveniuntur.

1665 P. Petit Intendens munitionum regiarum Opus gallicum edidit. (*Dissertation sur la nature des cometes.*) In qua dissertatione refert varias opiniones de natura cometarum. Item exponit lineam trajectionis cometarum; habet item in eodem aliqua de prognosticis. In quo cœlestes cometas nihil mali efficere contendit. Habet item sermonem de eclypseon, prognosticis & in fine refert observationes cometæ 1664.

Satis clarè refert opiniones communes circa cometas, non tamen satis validè eas impugnat.

1665 Prodiere tabulæ longitudinum & latitudinum stellarum ex observatione Ulach. Reich. Tamerlanis magni nepotis, ex tribus manuscriptis Persicis, quas latinitati donavit Thomas Hyde.

In calce libri accesserunt Mahommedistezini tabulæ delineationum, & rectarum ascensionum. Additur denique elenchus nominum stellarum. Opus utile astronomis. In quarto Oxonii 1665.

Pater Jacobus de Billy Compendiensis Societatis Jesu, Crisin astronomicam de motu cometarum edidit. In qua refellitur systema lineæ rectæ. Traditurque hypothesis nova ad motus cometarum, nempe per circulum qui terram non comprehendat. Hancque hypothesin videtur demonstrare ex regressu cometarum. Quæ demonstratio bene concludit si verè regrediuntur. Divione in octavo 1666.

1668 P. Jacobus Grandamicus è Societate Jesu Tractatum edidit de eclypsibus solis & lunæ.

Praxis ejus est difficilior consuetâ. Parisiis in quarto 1668.

1669 Astronomia Patris Andreæ Tacquet Antuerpiensis è Societate Jesu, in lucem prodiit octo libris comprehensa.

Libro primo agit de motu solis. Incipit à definitionibus & principiis universalibus circa figuram cœli, terræ, locum, quietem. Tum explicato duplici solis motu explicat, accidentia sphæræ rectæ, obliquæ & parallelæ, tum agit de parallaxi, & refractione. Hypothesin solis explicat, datque praxes ad inveniendos motus solis medios & veros, excentricitatem, epochas, cæteráque in hunc modum.

Libro secundo considerat motum lunæ in longitudine & observationes tradit, ex quibus prima, secunda, immo & tertia ejus inæqualitas concluditur. Hypotheses lunæ proponit, tum quantitates mensium, cæteraque accidentia determinat & utramque inæqualitatem ad æqualitatem reducit, de motu item, & latitudine, in quibus progressum astronomiæ ostendit.

Liber tertius solis & lunæ parallaxes, refractiones, diametros apparentes, distantias, magnitudines determinat.

Quartus agit de eclypsi solis, & lunæ, eclypsi item terræ, seu in quibus terris sit apparitura eclypsis independenter à parallaxi, modos item observandarum eclypseon.

Quintus stellas fixas earumque motum, & accidentia considerat.

Sextus motum in longitudine quinque minorum planetarum ex observationibus determinat cum utraque inæqualitate.

Septimus motum in latitudine eorumdem quinque planetarum exequitur.

Octavus varios tractatus complectitur. Primo hypothesin terræ immotæ, Tractatum de novis stellis & cometis, tractatum de maculis solis, & lunæ.

Tractatus hic est perfectissimus procedens secundum ordinem scientiæ, & progressum astronomiæ ostendens, si tamen exempla vera assumpsisset, & addidisset, & non tantū indicasset ex quibus observationibus in genere concludantur motus quilibet cœlestes, sed particulares usurpasset, & insuper tabulas concinnasset, nihil potuisset melius.

1672 Jacobus de Graindorge Prior de Culey & in Abbatia de Fontenay prope Cadomum Religiosus, Opusculum edidit cum titulo, Compendium physicæ astronomicæ, seu Introductionem in physicam astronomicam, hoc est, non tam ad judiciariam eventuum liberorum, quàm ventorum, pluviarum, &c.

In eo multa sunt bona, licet vix putem hæc certo prædici posse. Cadomi in quarto 1672.

1673 Prodiere Hieremiæ Herroccii Liverpoliensis Angli ex Palatinatu Lancastriæ Opera posthuma, nempe Astronomia Kepleriana defensa, & promota, excerpta ex epistolis ad Crabtræum.

Observationum cœlestium Catalogus.

Lunæ theoria nova.

Item Guillelmi Crabtræi Manastriensis observationes cœlestes.

Denique Joannis Flamstedii Derbiensis, de temporis æquatione diatriba, & numeri ad lunæ theoriam Horoccianam.

Hoc Opus inordinatum est, quamvis multa contineat scitu digna; in planetis loco epicyclorum admittit tantum librationes aliquas. An hæc nova lunaris hypothesis satisfaciat phænomenis longius requirit examen. In quarto Londini 1673.

TRACTATUS

TRACTATUS I.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBROS XIII. COMPLECTENS,

AD FACILIOREM CAPTUM ACCOMMODATOS.

LIBER PRIMUS.

Definitiones.

1. Punctum est cujus pars nulla.

HÆC definitio ita debet intelligi, ut illa quantitas vocetur punctum quam sic concipimus, ut ab ejus partibus abstrahamus, sive re vera sit indivisibilis, sive non; neque enim puncta mathematica sunt eadem ac puncta zenonica, de quorum possibilitate jure dubitatur à multis: cum de nostris probè intellectis, nemo dubitare possit.

2. Linea est longitudo cujus nulla latitudo.

Eodem modo intelligatur quo superior, concipitur autem produci linea fluxu puncti.

3. Lineæ extrema sunt puncta.

4. Linea recta est quæ ex æquo sua interjacet puncta.

Vel est minima linearum eosdem terminos habentium, vel est ea cujus extrema obumbrant omnia media.

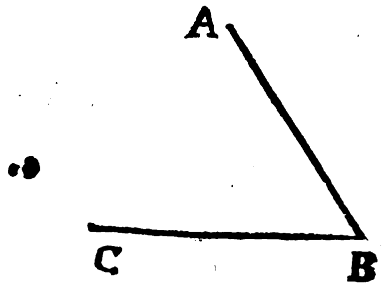
5. Superficies est quantitas longitudinem & latitudinem habens sine profunditate.

6. Superficiei extrema sunt lineæ.

7. Superficies plana, est quæ ex æquo suas interjacet lineas.

Vel est ea cujus omnibus partibus accommodari potest recta linea.

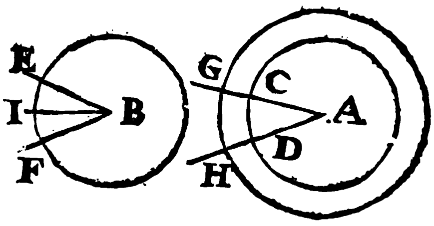
8. Planus angulus est duarum linearum se tangentium, & non in directum jacentium; alterius ad alteram inclinatio.



Ut inclinatio quam habent, ad invicem lineæ AB. BC. quæ non jacent in directum: id est non constituunt unam rectam lineam.

9. Angulus rectilineus, est inclinatio duarum linearum rectarum.

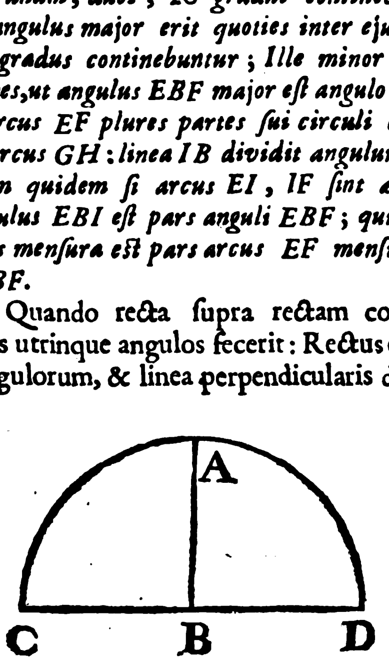
De hoc potissimum hîc agimus: & quia in hunc lapidem ut plurimùm tyrones impingunt; qui angulorum quantitatem ex linearum longitudine metiuntur; ideo aliquid explicationis adhibendum est.



Angulus censetur alio major, quò major est linearum apertura, id est quò illius lineæ magis ab invicem discedunt, in eâdem distantiâ ab apice anguli, ut angulus A, est minor angulo B, licet lineis constet longioribus; quia si sumantur in utrisque angulis puncta æqualiter distantia ab apicibus angulorum A & B, verbi gratia C,D,E,F, puncta E,F, magis distant ab invicem, quàm puncta C,D, quod si continuarentur lineæ BE, BF, idem tamen esset angulus: quia puncta E, F, eandem haberent inter se distantiam; vel ille angulus erit minor, cujus apex erit acutior, ille major cujus apex est obtusior. Communiter tres literas adhibemus, dum angulum appellare volumus; apex autem semper, est in littera media: ut si diceremus angulus CAD est angulus quem efficiunt lineæ CA, DA, in puncto A.

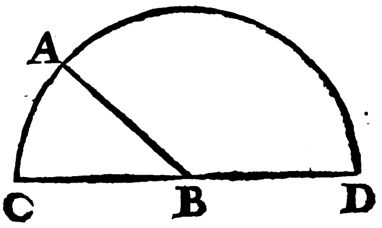
Angulorum mensura est circulus, ut si sit exploranda quantitas anguli CAD, ex puncto A, apice anguli ut centro, circulum describimus; & quo plures inter lineas anguli, circuli partes intercipientur, eo major erit angulus: parum autem interest, utrum circulus sit major, aut minor; nam si essent plures circuli, ex eodem apice anguli A, descripti: arcus GH inter lineas anguli interceptus, tot partes majoris circuli continet, quot arcus CD continet minoris: quia autem usu receptum est ut circulus dividatur in 360 partes quas vocant gradus, dicimus angulum unius, duorum, 20 graduum, quando arcus inter duas lineas anguli contentus, unum, duos, 20 gradus continebit. Ille igitur angulus major erit quoties inter ejus lineas plures gradus continebuntur; Ille minor quoties pauciores, ut angulus EBF major est angulo GAH, quia arcus EF plures partes sui circuli continet quàm arcus GH: linea IB dividit angulum EBF, bifariam quidem si arcus EI, IF sint æquales; ita angulus EBI est pars anguli EBF; quia arcus EI ejus mensura est pars arcus EF mensura anguli EBF.

10. Quando recta supra rectam consistens æquales utrinque angulos fecerit: Rectus est uterque angulorum, & linea perpendicularis dicitur.



Ut si linea AB, consistens supra lineam CD, faciat hinc inde angulos ABC, ABD æquales, hoc est facto in puncto B circulo, si arcus AC fuerit æqualis arcui AD, tunc anguli ABC, ABD vocantur recti, & linea AB perpendicularis, & quia ut ostendam totus arcus CAD est semicirculus; arcus AC, AD, erunt quadrantes circuli continentes singuli quartam partem 360 graduum, id est 90. gradus. Ille igitur angulus rectus est cujus arcus continet 90 gradus.

11. Angulus obtusus est qui major recto.



Ut angulus ABD obtusus est: quia ejus arcus AD, plures gradus quàm 90 continet.

12. Angulus acutus est qui minor recto.

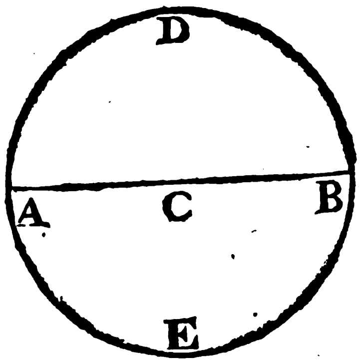
Ut angulus ABC est acutus, quia ejus arcus AC est pauciorum quam 90 graduum.

13. Terminus est quod alicujus est extremum.

14. Figura est quantitas quæ sub uno, aut pluribus terminis continetur.

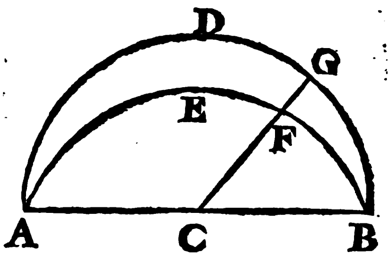
Debet autem quantitas esse undique clausa.

15. Circulus est figura plana, unius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, à qua omnes lineæ, ad unum punctum intrà positum ductæ, sunt æquales.



16. Hoc verò punctum, centrum vocatur.

17. Diameter circuli est linea quæcumque per centrum ducta, & in circuli circumferentia utrinque terminata: circulum & peripheriam bifariam secans.



Ut linea AB per centrum C transiens & terminata utrinque in peripheria in punctis AB, est circuli diameter.

Quia tamen dubitare quis posset utrum diameter dividat circulum bifariam; ita ostendemus partem ABD esse æqualem parti AEB. Intelligatur enim ei superponi; dico quòd in tali casu circumferentia AEB, cadet supra circumferentiam ADB. Si enim illi non congrueret, caderet, aut intra illam, aut extra; cadat primò intra, ducatùrque linea CG. Quia per definitionem circuli lineæ ductæ à quibuslibet punctis circumferentiæ ad centrum, sunt æquales; sequeretur lineas FC, CG esse æquales, cum tamen FC sit pars lineæ CG. Idem absurdum sequitur si caderet extra. Igitur circumferentia AEB cadit supra circumferentiam ADB, & illi est æqualis sicut pars AEB æqualis est parti ADB.

18. Semicirculus

18. Semicirculus est figura quæ continetur sub diametro, & semicircumferentiâ.

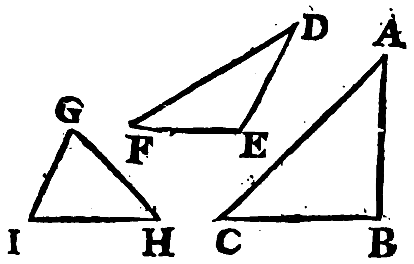
19. Rectilineæ figuræ sunt quæ rectis lineis continentur, trilateræ quæ tribus, quadrilateræ quæ 4. multilateræ quæ pluribus.

Duplicem hic tradit Euclides triangulorum divisionem, unam per latera aliam per angulos.

20. Triangulum æquilaterum est quod tria latera habet æqualia.

21. Isosceles, seu æquicrurum, illud est quod duo latera habet æqualia.

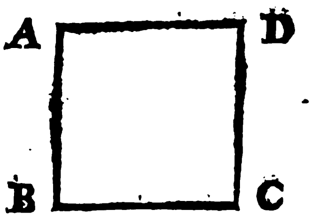
22. Scalenum quod omnia latera habet inæqualia.



23. Triangulum rectangulum est quod habet unum angulum rectum, *ut ABC, cujus angulus B rectus est.*

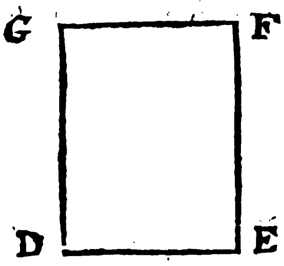
24. Amblygonium, seu obtusangulum, cujus unus angulus est obtusus, *ut DEF.*

25. Oxygonium seu acutangulum cujus omnes anguli sunt acuti *ut GHI.*

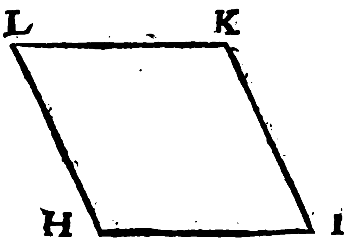


26. Rectangulum est figura quadrilatera cujus omnes anguli sunt recti.

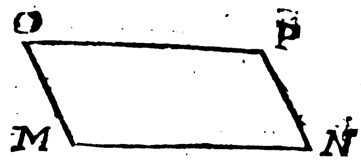
27. Inter quadrilateras quadratum est quod æquilaterum est, & rectangulum, *Id est cujus omnia latera æqualia sunt: & anguli recti, ut ABCD.*

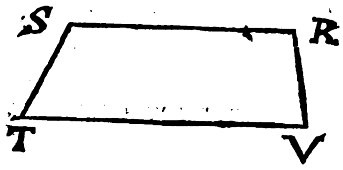


28. Altera parte longior est figura rectangula sed non æquilatera, *ut DEFG.*



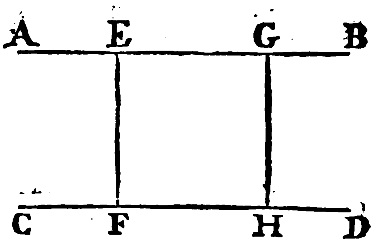
29. Rhombus est qui æquilaterus est, sed non rectangulus, *ut HIKL.*





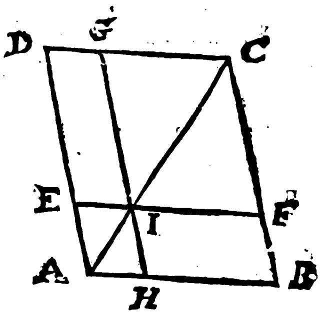
30 Rhomboides est figura quæ adversa latera, & angulos habens æquales, nec est æquilatera, nec æquiangula, *ut MNOP.*

31. Aliæ verò figuræ quadrilateræ quæ irregulares sunt vocantur trapezia, *ut RSTV.*



32 Parallelæ lineæ sunt quæ in eodem plano existentes quantumvis producantur, neutram in partem coincident; sed pari ubique spatio inter se distant.

Æqualia intervalla desumuntur in perpendicularibus; ut si lineæ EF, GH sint æquales & perpendiculares, lineæ AB, CD erunt parallelæ, nam generantur parallelæ; si linea perpendicularis, verbi gratiâ EF; intelligatur moveri supra rectam AB, ita ut sit semper perpendicularis, ejus punctum F describet lineam CD æquali intervallo distantem; Addidimus definitioni Euclidis ut pari intervallo illæ lineæ distent, quia sunt aliquæ lineæ non quidem rectæ; quæ licet semper minus distent ab invicem, nunquam tamen concurrunt; & non sunt parallelæ.



33 Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus adversa latera sunt parallela, *ut ABCD, cujus latera AB, CD sunt parallela, sicut AD, BC.*

34 Diameter est parallelogrammi, linea adversos angulos conjungens, *ut linea AC.*

35 Complementa sunt duo parallelogramma intra aliud majus existentia, per quæ diameter non transit, *ut ductis lineis EF, GH, in puncto I, se intersecantibus duo parallelogramma EIGD, HIFB, per quæ non transit diameter AC, vocantur complementa.*

Postulata.

Postulantur concedi,

1 A quovis puncto ad quodvis punctum duci posse lineam rectam.

2 Rectam

2 Rectam lineam terminatam, posse continuari quantùm volueris.

3 Quovis centro ad quodvis intervallum circulum describi posse.

Axiomata.

1 Quæ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia, & quod uno æqualium majus est aut minus, majus etiam est aut minus altero aqualium.

2 Si æqualibus æqualia addas, tota sunt æqualia.

3 Si ab æqualibus æqualia auferas, quæ restant sunt æqualia.

4 Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5 Si ab inæqualibus æqualia auferas, quæ restant sunt inæqualia.

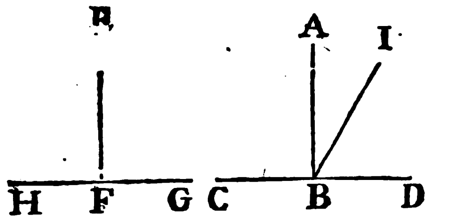
6 Quæ ejusdem aut æqualium dupla sunt, tripla, quadrupla; dimidia; inter se sunt æqualia.

7 Quæ mutuò sibi congruunt, æqualia sunt.

8 Si rectæ aut anguli æquales fuerint, mutuo sibi congruent.

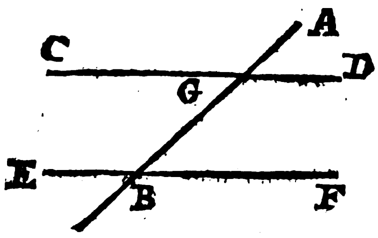
9 Totum sua parte majus est.

10 Omnes anguli recti inter se sunt æquales.



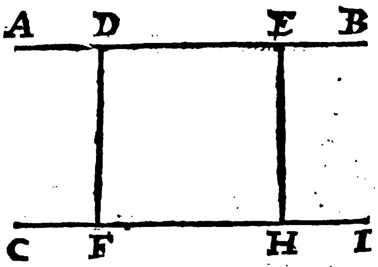
Sit angulus rectus ABD & alius EFG item rectus, necessario aquales sunt; nam intelligatur linea HG ita superponi linea CD, ut punctum F sit in puncto B, tunc linea EF cadet supra lineam AB; si enim non cadat supra illam deflectat in unam partem, verbi gratia, supra lineam BI angulus ABC, est aqualis angulo ABD per defin. 10. sed angulus ABD major est angulo IBD, scilicet parte sua: igitur angulus ABC est major angulo IBD: sed quia angulus IBD etiam rectus est (nam est idem ac EFG,) angulus IBC est etiam illi aqualis (per defin. 10.) igitur angulus ABC esset major angulo IBC, pars scilicet toto. Igitur hoc fieri non potest; sed linea EF cadit supra AB, atque adeo anguli ABD, EFG sibi congruunt & æquales sunt.

11. Si in duas rectas recta incidens angulos interiores ad easdem partes minores fecerit duobus rectis; illæ duæ rectæ si producantur, concurrent ad eam partem in qua sunt illi anguli.



Ut recta AB incidens in duas rectas CD, EF, faciat angulos internos ex eadem parte, nempe FBG, DGB, minores duobus rectis: dicit esse lumine naturali notum fore ut linea CD, EF producta ad partes D & F concurrant, quod licet verum sit, non est tamen ita clarum ut axiomatis locum mereatur, ideoque ejus loco substituimus aliud notius.

12 Si duæ lineæ parallelæ fuerint, omnes perpendiculares inter eas interceptæ æquales erunt.

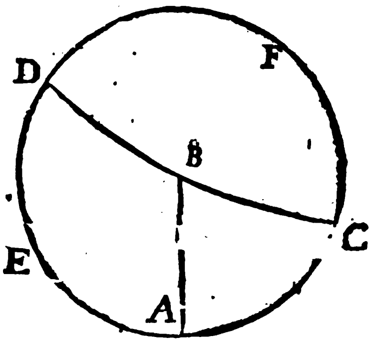


Ut si linea AB, CI *sint parallela, ducanturque dua perpendiculares DF, EH; illa aquales inter se erunt, quod in ipsa parallelarum definitione includitur; qua habet illas aquali semper intervallo inter se distare: intervalla autem metiri debemus per lineas brevissimas, & perpendiculares.*

12. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Hoc est spatium non claudunt undique, sed opus est saltem tribus.

13. Duæ rectæ lineæ non habent segmentum commune.



Hoc est dua recta non coalescunt in unam lineam; ut linea AB, CB, si producantur, non coincident in lineam BD: nam facto circulo ex puncto B, ut centro, sequeretur circulum dividi bifariam à linea ABD, & item bifariam à linea CBD quod est impossibile, quia AED esset semicirculus, & CED item, & ita pars & totum aqualia essent.

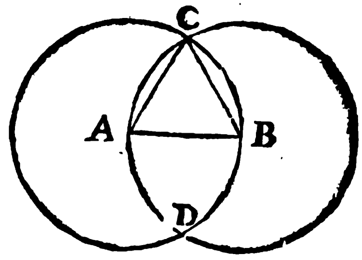
Propositionum alia proponunt aliquid faciendum vocanturque problemata, alia in sola contemplatione sistunt dicunturque theoremata.

In citationibus primus numerus propositionem designat, secundus verò librum, ut (per 4.2.) significat per quartam propositionem libri secundi, ubi verò unus tantum numerus apponitur, designat propositionem illius libri in quo versamur.

PROPOSITIO PRIMA.

Problema.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ triangulum æquilaterum constituere.



Sit data recta AB terminata (id est determinatæ longitudinis) super quam construendum sit triangulum

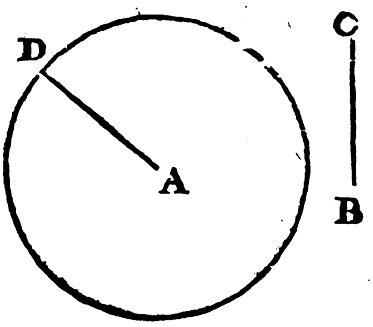
triangulum æquilaterum, ex puncto A ut centro, intervallo AB fiat circulus BCD, & ex B intervallo BA describatur alius circulus ACD, priorem secans in puncto C, ducantur lineæ CA, CB: dico factum esse triangulum ABC æquilaterum.

Demonstratio, lineæ BA, AC ductæ ex eodem centro A ad circumferentiam ejusdem circuli BCD; sunt æquales, (*per defin. circuli*) lineæ AB, BC ductæ ex centro B, ad circumferentiam circuli ACD, sunt etiam æquales: lineæ item CA, CB eidem AB ostensæ æquales inter se sunt æquales, igitur fecimus triangulum ABC tribus constans lateribus æqualibus, quod faciendum erat.

PROPOSITIO II.

Problema.

Ad datum punctum ponere lineam æqualem datæ lineæ.



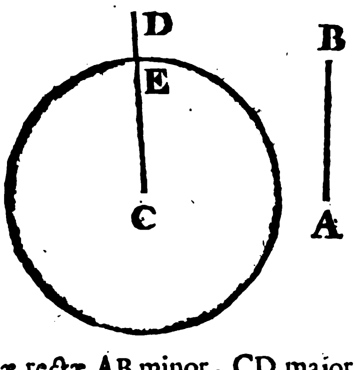
Sit datum punctum A, ex quo ducenda est linea æqualis lineæ BC sume circino intervallum BC, & eo intervallo ex puncto A describatur circulus: duc ex puncto A quamcunque lineam AD, manifestum est hanc esse æqualem lineæ BC.

Licet alius vulgo assignetur modus, in praxi tamen, isto semper utimur: videturque æquè facilè sumendo intervallum BC describere circulum ex puncto A, ac illum describere ex puncto B.

PROPOSITIO III.

Problema.

Datis duabus rectis inæqualibus, de majori, lineam minori æqualem abscindere.

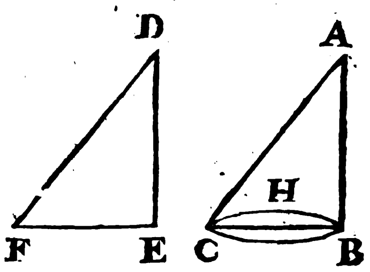


Sint datæ rectæ AB minor, CD major, ex qua abscindenda est linea æqualis minori AB, sume circino interuallum AB, ad quod ex puncto C describes circulum aut partem eius secantem lineam CD in puncto E, clarum est lineam CE æqualem esse lineæ AB.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duo triangula duo latera ad invicem æqualia habuerint alterum alteri; & angulos inter illa duo latera contentos æquales: erunt & bases, & singuli anguli singulis æquales, & tota triangula æqualia.



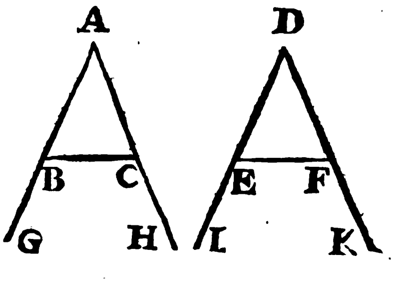
Sint duo triangula ABC, DEF, sitque latus AB lateri DE æquale: & latus AC, lateri DF, & angulus A angulo D. dico bases BC, FE esse æquales & angulos B, & E, sicut C, & F. denique triangula esse æqualia.

Demonstratio. Intelligatur superponi linea DE supra lineam BA, quia illi æqualis est, illi congruet (*per axioma* 8.) ejusque punctum E erit supra punctum B, & punctum D supra punctum A. Tunc linea DF cadet supra lineam AC, alioquin angulus D esset major aut minor angulo A, cum tamen supponatur æqualis, & quia linea DF est æqualis lineæ AC, punctum F cadet in punctum C. cum igitur lineæ EF punctum E sit supra punctum B, lineæ BC, & punctum F supra punctum C, bases BC, EF congruent. Neque enim basis EF potest tangere lineam BC in punctis B & C, & cadere infrà aut supra illam sicut facit linea BHC, alioquin contra [12. pronunciatum] duæ rectæ spatium clauderent: igitur & bases, & anguli B & E, item C & F, & tota triangula congruunt: igitur hæc omnia æqualia sunt.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Isoscelium triangulorum anguli supra basin positi, sunt æquales, & productis lateribus, anguli sub basi sunt æquales.



Sit triangulum ABC isosceles, id est ejus latera AB, AC sint æqualia, dico angulos ABC, ACB esse æquales, item productis lateribus AB, AC, in G & H: dico angulos GBC, HCB infra basin esse æquales; intelligatur enim aliud triangulum DEF cujus latera DE, DF sint æqualia lateribus AB, AC, atque adeo 4. lineæ AB, AC DE, DF sint æquales, item angulus A sit æqualis angulo D.

Demonstr. Quandoquidem latus AB lateri DE est æquale, & latus AC lateri DF & angulus A angulo D : (*per* 4.) si superponerentur triangula congruerent, & angulus ABC esset æqualis angulo DEF. Tunc autem quia DE caderet supra AB reliqua EI caderet supra BG alioquin lineæ BG, EI, haberent idem segmentum AB commune (*contra pronunc.* 13.) igitur anguli GBC, IEF sunt æquales. Si verò situ contrario comparentur ita ut punctum F cadat in B, & punctum E in C, quia linea DE est æqualis lineæ AC, & linea DF lineæ AB, & anguli A & D semper sunt æquales, in eo situ (*per* 4.) congruerent, & angulus ACB congrueret angulo DEF, sicut HCB, ipsi IEF, quare anguli ABC, ACB eidem DEF æquales, inter se æquales erunt sicut anguli GBC, HCB, eidem angulo IEF æquales ostensi inter se æquales erunt, igitur in triangulis isoscelibus, anguli supra basin sunt æquales : sicut & anguli infra basin.

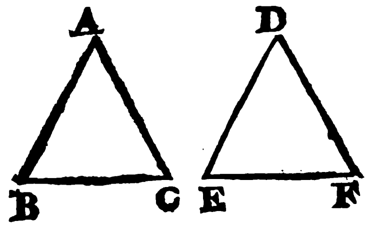
COROLLARIUM.

Sequitur triangula æquilatera esse æquiangula.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si trianguli duo anguli fuerint æquales, & latera iis opposita erunt æqualia.



Sint trianguli ABC, anguli B & C æquales : dico latera AB, AC esse æqualia : sit enim aliud triangulum DEF, cujus basis EF sit æqualis basi BC, & anguli E, F, æquales angulis B, & C atque ita 4 anguli B, C, E, F sunt æquales.

Demonst. Intelligatur basis EF superponi basi BC quia æqualis est, congruet (*per axiom.* 8.) tunc necessario linea ED cadet supra lineam BA, alioquin angulus E esset major, aut minor angulo B; cum tamen supponatur æqualis; eodem modò linea FD cadet supra lineam CA : igitur punctum D cadet in A. Neque enim lineæ ED, FD recedere possunt à lineis, BA, CA alioquin duæ rectæ haberent commune segmentum (*contra* 13. *pronunc.*) quare lineæ ED, BA, æquales erunt. Tum verò si contrario situ comparentur triangula, ita ut punctum E cadat in C, & F in B, cum anguli E & C sint æquales, sicut F & B linea ED cadet supra CA, & FD supra BA, & pariter punctum D in A : quare lineæ ED, CA, congruent, & erunt æquales, unde lineæ AB, AC, eidem DE æquales ostensæ, inter se æquales erunt.

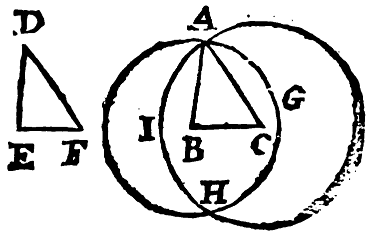
PROPOSITIO VII.

Est tantum propter octavam quæ sine illâ demonstrari potest.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si duo triangula singula latera singulis lateribus æqualia habuerint, etiam angulos æqualibus lateribus oppositos æquales habebunt.



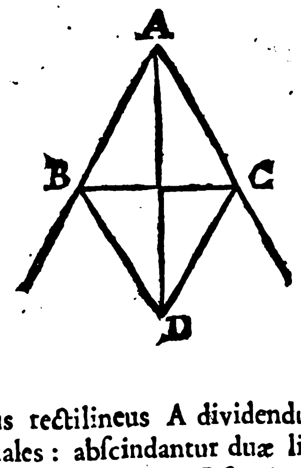
Sit triangulorum ABC, DEF latus AB lateri DE æquale, latus AC lateri DF, latus BC lateri EF, dico angulum A angulo D esse æqualem, & angulum B angulo E, & angulum C angulo F. Ex puncto B, ut centro, intervallo BA fiat circulus AGH, item ex puncto C intervallo CA fiat alius circulus AIH.

Demonst. Intelligatur linea EF superponi lineæ BC; quia illi æqualis est congruet, tunc autem punctum D cadet in A, non enim cadere potest nisi supra circumferentiam circuli AGH, alioquin lineæ BA, ED non essent æquales, debet etiam cadere supra circumferentiam AIH alioquin lineæ FD, CA non essent æquales : cadit igitur in intersectionem A. Quare congruunt triangula, & anguli A & D, B, & E, C & F sunt æquales.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.



Sit angulus rectilineus A dividendus in duos angulos æquales: abscindantur duæ lineæ AB, AC æquales, & supra lineam BC fiat (*per* 1.) triangulum æquilaterum BCD, ducaturque linea AD, dico angulos BAD, CAD esse æquales.

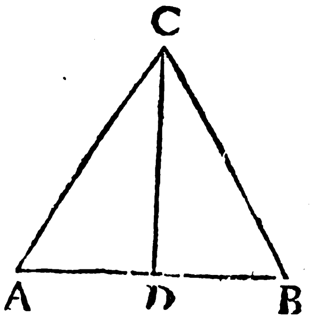
Demonstrat. Triangula ABD, ACD, habent singula latera æqualia, nempe AB ipsi AC, AD commune utrique triangulo, & BD æquale ipsi DC propter triangulum æquilaterum BDC : igitur (*per* 8.) anguli BAD, CAD sunt æquales.

PROPOSI

PROPOSITIO X.

Problema.

Lineam terminatam bifariam secare.



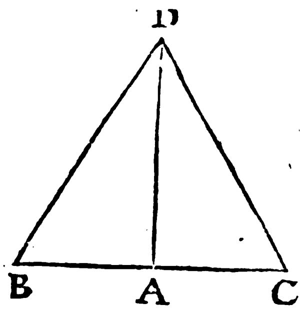
Sit recta terminata AB dividenda bifariam, supra illam constitue triangulum æquilaterum ABC (*per* 1.) cujus angulus C (*per* 9.) dividatur bifariam lineâ CD. dico lineam AB esse divisam bifariam in D.

Demonst. in triangulis ACD, BCD, latera AC, CB sunt æqualia, latus CD utrique commune & anguli ACD, BCD facti sunt æquales, cum angulus C sit divisus bifariam; ergo (*per* 4.) bases AD, DB sunt æquales quod erat propositum.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Ex puncto in linea dato perpendicularem excitare.

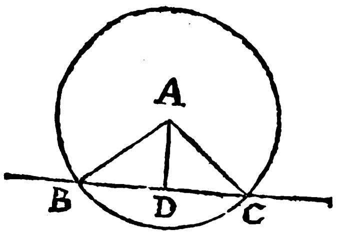


Sit punctum A in linea BC, ex quo excitanda est perpendicularis ad eandem BC abscindantur hinc inde lineæ æquales AB, AC: & super lineam BC fiat triangulum æquilaterum BDC, (*per* 1.) ducaturque linea DA. hanc dico esse perpendicularem.

Demonst. Triangula BAD, DAC habent singula latera æqualia, cum AD sit commune, & linea BA, facta sit æqualis lineæ AC, & BD sit æqualis lineæ DC, cum triangulum BDC sit æquilaterum, ergo (*per* 8.) anguli DAC, DAB sunt æquales: atque adeo linea AD (*per defin.*10.) est perpendicularis.

PROPOSITIO XII.

Ex dato extra lineam infinitam puncto, ad eam perpendicularem ducere.



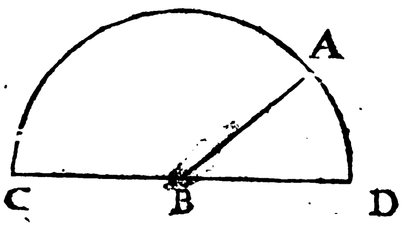
Sit datum punctum A, ex quo ad lineam BC infinitam, (id est quam producere liceat si sit opus) duci debet perpendicularis. Ex puncto A, ut centro, fiat circulus secans lineam BC in punctis B, & C. Dividatur linea BC bifariam in D, (*per* 10.) ducaturque linea AD: hanc dico esse perpendicularem. Duc lineas AB, AC.

Demonst. In triangulis ADB, ADC singula latera sunt æqualia nempè AD commune, BD æquale lateri DC, (cum linea BC sit divisa bifariam) & AB ipsi AC (*per defin. circ.*) sunt ergo anguli ADB, ADC æquales (*per* 8.) quare [per defin.10.] linea AD est perpendicularis.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Recta supra rectam consistens; aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.



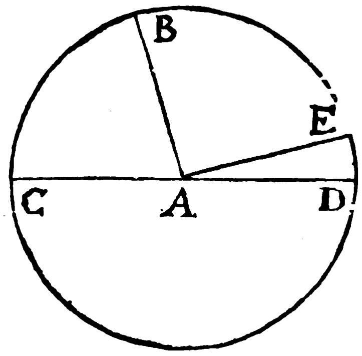
Recta AB, consistat supra lineam CD; dico angulos ABD, ABC aut rectos esse, aut eos simul sumptos duobus rectis æquivalere. Ex puncto B ut centro fiat semicirculus CAD.

Demonst. Si anguli ABC, ABD sint æquales, erunt recti (*per defi.*10.) si vero sint inæquales, semper arcus AD, AC simul sunt æquales semicirculo DAC. Arcus autem duorum rectorum sunt duo quadrantes circuli, id est semicirculus; ergo duo arcus angulorum ABD, ABC simul sumpti, sunt æquales arcubus duorum rectorum, quod est æquivalere duobus rectis. Capacitatem enim angulorum metimur per arcus (*per def.*9.)

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si duæ rectæ in idem punctum alterius coëuntes, cum illâ faciant duos angulos, duobus rectis æquales, illæ component unam lineam.



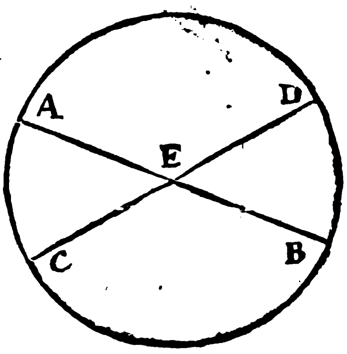
Concurrant in idem punctum A lineæ AB, duæ rectæ CA, AD, faciantque cum illa angulos BAC, BAD duobus rectis æquales, dico lineas CA, AD, efficere unam lineam, id est si linea C A continuaretur congrueret cum A D, si enim non congruit, cadet aut supra aut infra illam; ita ut CAE sit una recta linea. Ex puncto A ut centro describatur circulus C B D.

Demonst. Quia anguli BAC BAD supponuntur æquales duobus rectis, arcus DB, BC æquivalebunt duobus quadrantibus circuli, seu erunt semicirculus, sed dicitur CAE esse linea recta; ergo (*per def.* 17.) circumferentia C B E est semicirculus, ergo circumferentiæ C B E, C B D essent æquales quod est absurdum, non igitur CA continuata cadit nisi in lineam A D.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si duæ rectæ se invicem secuerint, angulos ad verticem, seu oppositos æquales facient.



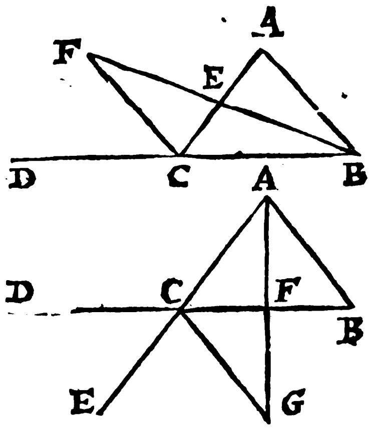
Duæ rectæ AB, CD se invicem secent in puncto E, dico angulos AED CEB oppositos, esse æquales: item angulos AEC, DEB. Fiat enim ex centro E circulus quicumque.

Demonstr. quia linea AB transit per centrum E, erit arcus A D B semicirculus (*per def.* 17.) & pariter quia linea DC transit per centrum arcus DBC erit semicirculus: ergo arcus ADB, DBC sunt æquales, ex quibus si eumdem arcum anferas DB restabunt arcus AD CB æquales & consequenter (*per def.* 9.) anguli CEB, AED, æquales, eodem modo probabis angulos DEB, AEC, esse æquales.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Cujuscumque trianguli uno latere producto, angulus externus quolibet interno, & opposito major est.



Trianguli ABC latus B C producatur in D. dico angulum extremum A C D esse majorem quolibet interno, & opposito, nempe A aut B; & primo ostendo esse majorem angulo A. Dividatur linea AC bifariam in E, ducaturque linea BEF ita ut lineæ BE, EF sint æquales, ultimo ducatur linea CF.

Demonstr. In triangulis BEA, CEF duo latera sunt æqualia singula singulis, nempe EC ipsi EA; & EF ipsi EB, & anguli AEB, CEF oppositi (*per.* 15.) sunt æquales, ergo (*per.* 4.) anguli A & ECF oppositi lateribus æqualibus EB, EF sunt æquales; sed angulus DCA est major angulo FCA, nempe sua parte, ergo angulus DCA est major angulo A.

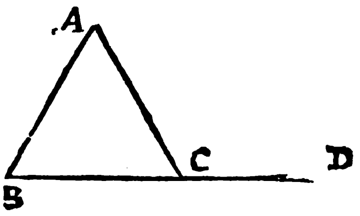
Repetatur idem triangulum ABC, ostendo angulum externum ACD esse majorem angulo B opposito, producatur latus AC in E, divisóque latere BC bifariam in F ducatur AFG, ita ut lineæ AF, FG sint æquales conjungatúrque linea GC.

Demonstr. In triangulis AFB, CFG. duo latera sunt singula singulis æqualia; nempe BF ipsi FC, FA ipsi FG & anguli BFA, GFC ad verticem oppositi (*per* 15.) sunt æquales: ergo (*per.* 4.) anguli B, & FCG oppositi lateribus æqualibus AF, FG sunt æquales: sed angulus ECF, & (*per* 15.) illi æqualis DCA est major angulo FCG nempe sua parte; igitur angulus externus DCA est major angulo B.

PROPOSITIO XVII.

Thereoma.

Cujuscumque trianguli duo anguli simul sumpti minores sunt duobus rectis.



Sit triangulum ABC; dico duos ejus angulos simul sumptos verbi gratia A & ACB esse minores duobus rectis. Producatur latus BC in D.

Demonstr. angulus A internus minor est angulo externo ACD (*per* 15.) quare si utrique addas angulum ACB, erunt anguli A & ACB minores angulis ACB, ACD. qui cum sint æquales duobus rectis (*per* 13.) erunt anguli A & ACB minores duobus rectis.

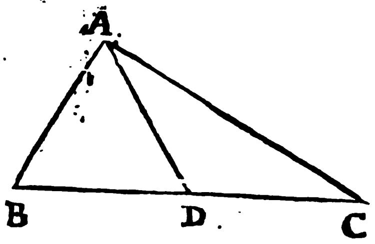
Eodem

Eodem modo probares angulos B & A C B esse minores duobus rectis, sicut A & B producto alio latere.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

In omni triangulo majus latus majori angulo opponitur.



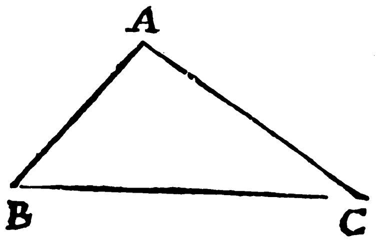
In triangulo ABC, latus BC sit majus latere BA, dico angulum A oppositum lateri BC, esse majorem angulo C. Abscindatur ex BC linea BD æqualis lineæ AB, ducatúrque linea AD.

Demonstr. In triangulo BAD latera BA, BD facta sunt æqualia; quare (*per* 5.) anguli BAD, BDA sunt æquales: sed angulus ADB externus respectu trianguli ADC (*per* 16.) major est angulo C, igitur angulus BAD eodem C major erit; ergo totus BAC multo major erit angulo C.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

In omni triangulo major angulus majori lateri opponitur.



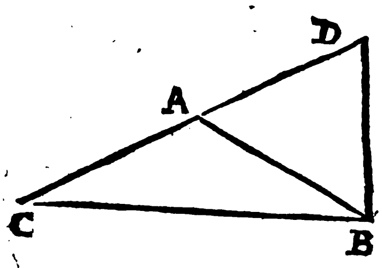
In triangulo ABC angulus A sit major angulo C. dico latus BC oppositum angulo A majori, majus esse latere AB opposito angulo C minori.

Demonstr. Si enim latus BC non est majus latere AB, erit vel æquale vel minus: non æquale quia (*per* 5.) anguli A & C essent æquales cum tamen A supponatur major. Nec etiam latus BC potest dici minus latere AB, quia (*per* 18.) angulus C esset major angulo A cùm tamen A supponatur major; restat ergo ut latus BC sit majus latere AB.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Cujuscumque trianguli duo latera simul sumpta reliquo sunt majora.



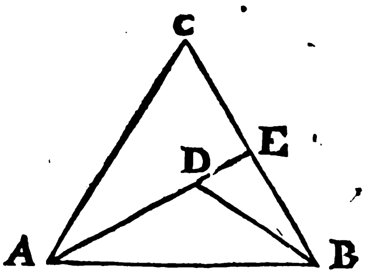
Sit triangulum ABC, dico latera AB, AC simul sumpta reliquo BC esse majora. Producatur latus CA, ita ut linea AD æqualis sit lateri AB, jungaturque linea BD.

Demonst. Quoniam lineæ AB, AD, sunt æquales, anguli D & ABD (*per* 5.) sunt æquales, sed angulus ABD minor est angulo CBD, cum sit ejus pars: ergo angulus D minor est angulo CBD. Ergo in triangulo DBC (*per* 19.) latus DC oppositum majori angulo B majus erit quàm BC oppositum minori angulo D; sed latus DC, est æquale lateribus BA, AC, igitur latera BA, AC majora sunt latere BC.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Si supra eandem basin intra triangulum aliud fiat, illius latera prioris lateribus minora erunt: continebunt autem majorem angulum.



Suprà eandem basin AB intra triangulum ABC, fiat triangulum ABD. Dico primò latera AD, DB esse minora lateribus AC, CB. Producatur enim latus AD in E.

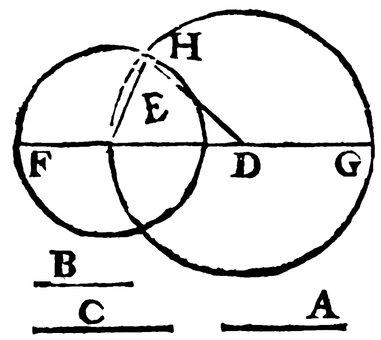
Demonstr. Quia latera AC, CE simul majora sunt reliquo AE, (*per* 20.) si utrisque addatur latus EB, erunt latera AC, CE, EB, hoc est AC, CB, majora lateribus AE, EB, sed hæc majora sunt lateribus BD, DA; cum enim BE, ED majora sint latere DB, addito communi DA, erunt BE, ED, DA, seu BE, EA, majora lateribus BD, DA. Igitur latera CA, CB multò majora erunt lateribus AD, DB.

Secundò dico angulum ADB esse majorem angulo C, angulus ADB est major angulo DEB (*per* 16.) cum sit externus respectu trianguli DEB, angulus DEB est major angulo C (*per eandem*) igitur angulus ADB est major angulo C.

PROPOSITIO XXII.

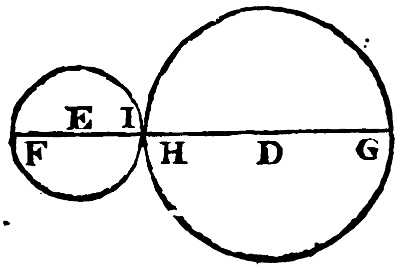
Problema.

Ex tribus datis lineis, quarum duæ reliquâ sint majores, triangulum construere.



Sint tres datæ lineæ A, B, C, ex quibus construendum est triangulum. Sumatur linea D E æqualis majori A, & linea EF æqualis lineæ B, & linea DG æqualis lineæ C. Et ex puncto D intervallo DG fiat circulus GH, & ex E intervallo EF alius circulus EH priorem secans in H. Ducantur lineæ DH, HE. dico factum esse triangulum cujus tria latera sunt æqualia lineis A, B, C.

Demonstr. Linea D E facta est æqualis lineæ A, linea DH (*per def. circuli*) est æqualis lineæ GD quæ facta erat æqualis lineæ C, & EH est æqualis lineæ EF, seu B. igitur latera trianguli æqualia sunt lineis A, B, C.

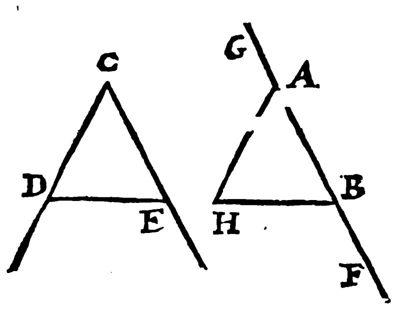


Quòd si circuli non se intersecarent ostenderem lineam DE, hoc est A, esse majorem duabus EF, DG simul sumptis, hoc est duabus B & C, contra suppositionem; nam linea DE continet lineam DH æqualem ipsi GD, & EI æqualem ipsi E F & insuper H I. igitur sola D E, seu A major esset lineis B & C.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

In dato puncto recta linea, angulum efficere æqualem alteri dato.



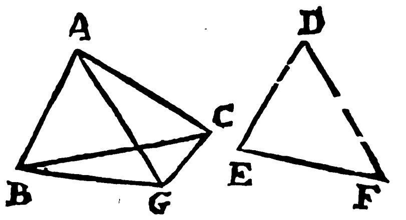
Sit datum punctum A lineæ AB, in quo construendus est angulus æqualis angulo C. Ducatur utcumque linea D E, & linea AB abscindatur æqualis lineæ EC. item linea BF lineæ DE, sicut linea AG lineæ CD, & factis centris in punctis A & B adintervalla AG, BF, construatur triangulum ABH ex lineis AB, BF, AG, (*per* 22.) dico angulum A esse æqualem angulo C.

Demonstr. Quia triangula BAH, DCE, habent omnia latera æqualia singula singulis nempe AB ipsi EC, & AH lateri CD, & BH ipsi DE, (*per* 8.) anguli A & C æquales erunt.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si triangulum duo latera habeat æqualia duobus lateribus alterius trianguli, angulum verò basi oppositum majorem habeant: & basin majorem habebit.



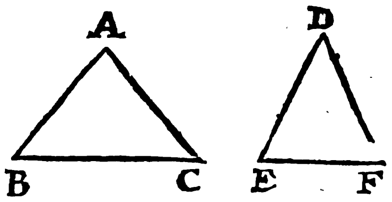
Sit trianguli ABC latus AB æquale lateri DE trianguli DEF, & latus AC lateri DF, angulus verò BAC sit major angulo D. dico basin BC. majorem esse basi EF. Fiat angulus BAG æqualis angulo D, (*per* 23.) & linea AG lateri DF, ducantúrque lineæ BG, CG.

Demonstr. Quia triangula ABG, DEF, habent latera AB, DE, AG, DF, æqualia, & angulus BAG factus est æqualis angulo D, erunt (*per* 4.) bases BG, EF æquales; quia vero lineæ AC, AG, eidem DE sunt æquales, erunt æquales inter se, quare (*per* 5.) anguli ACG, AGC sunt æquales, sed angulus AGC est minor angulo BGC, cum sit illius pars, ergo angulus ACG eodem BGC minor erit, sed adhuc angulus BCG minor est angulo ACG, cum sit illius pars: ergo angulus BCG multò minor erit angulo BGC, quare in triangulo BGC cum angulus BGC sit major angulo BCG, (*per* 19.) latus BC majus erit latere BG, sed BG est æqualis basi EF, ut vidimus, igitur basis BC major est basi EF.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si triangulum duo latera habeat æqualia, duobus lateribus alterius trianguli: habeat & basin, basi majorem: angulum quoque basi oppositum majorem habebit.



Sit trianguli ABC latus AB æquale lateri DE trianguli DEF, & latus AC, lateri DF, sed basis BC sit major basi EF. dico angulum A esse majorem angulo D.

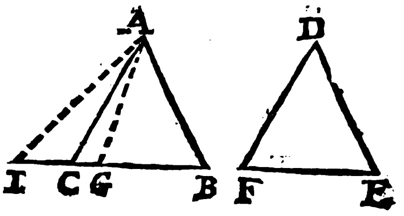
Demonstr. Non enim angulus A æqualis est angulo D, quia (*per* 4.) bases essent æquales; nec minor quia (*per* 24.) basis BC esset minor basi EF, supponitur tamen major: ergo restat ut angulus A, sit major angulo D.

PROPOSI

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si duo triangula habeant duos angulos æquales alterum alteri; & unum latus æquale, sunt æqualia triangula.



Trianguli ABC angulus B sit æqualis angulo E, trianguli DEF & angulus C angulo F, item latus BC, quod situm est inter utrumque angulum sit æquale lateri EF, dico reliqua latera esse æqualia, & angulum A angulo D.

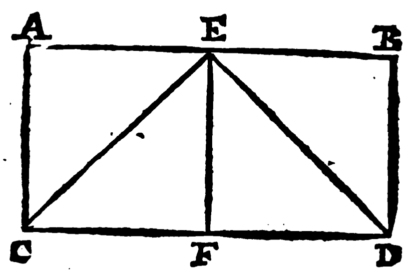
Intelligatur enim basis EF superponi basi BC quia æquales sunt congruent, ita ut punctum E cadat supra B, & F supra C. tunc linea FD cadet supra lineam AC; non enim cadere potest extrà; quia alioquin angulus F esset major angulo C; nec intra quia minor esset; igitur supra illam cadet: idem dico de linea ED respectu lineæ BA, igitur punctum D cadet supra punctum A & totum triangulum toti triangulo æquale erit.

Si verò ponatur latus AB esse æquale lateri DE. Intelligatur iterum superponi latus DE, supra latus AB, ita ut D cadat in A; & E in B; quia anguli B & E supponuntur æquales, linea EF cadet supra lineam BC, dico etiam punctum F cadere in C alioquin aut cadet intra, aut extra? non intra ut in G, alioquin angulus AGB, id est DFE esset major angulo C (*per* 16.) non extrà ut in I quia angulus C esset major angulo AIB, hoc est angulo F contra suppositionem: igitur punctum F cadit in C totumque triangulum congruit, ergo & anguli & latera sunt æqualia.

Quia sequentes propositiones ut demonstrantur ab Euclide supponunt axioma XI. quod, tamen ita lumine naturali notum non est: ut nomen axiomatis mereatur: ideo paulo aliter, eamdem propositionem sine illo demonstrabimus, quare hæc duo lemmata præmittimus.

LEMMA PRIMUM.

Perpendicularis ad unam parallelarum est etiam perpendicularis ad aliam.

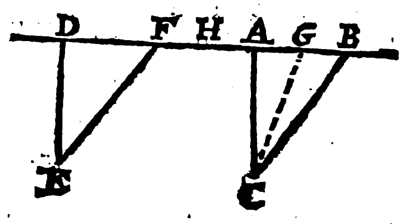


Sint lineæ AB, CD parallelæ, sitque linea EF perpendicularis ad AB, ita ut anguli FEA, FEB sint recti, dico eandem lineam EF esse perpendicularē ad lineam CD. Abscindantur lineæ EA, EB æquales, ducantur (per 11.) *ad lineam AB perpendiculares AC, BD, junganturque lineæ EC, ED.*

Demonstr. Cum in triangulis EAC, EBD latera AE; BE sint æqualia, item latera AC, BD (per def. paral.) *& anguli A, & B sint recti ideòque æquales; & bases EC, ED æquales erunt; item anguli AEC, DEB qui ablati ex angulis æqualibus nempe rectis AEF, BEF, relinquunt angulos CEF, DEF æquales. In triangulis autem CEF, DEF cum latera CE, ED sint æqualia, latus FE commune, & anguli CEF, DEF æquales:* (per 4.) *anguli CEF, DFE æquales erunt: & consequenter recti.*

LEMMA SECUNDUM.

Si duo triangula rectangula, habeant duo quæcumque latera æqualia: & reliquum latus æquale, reliquosque angulos æquales habebunt.



Sint duo triangula ABC, DEF quorum anguli A & D sint recti, & latera AC, DE, item CB, EF sint æqualia, dico & latera AB, DF esse æqualia angulosque B, & F, item C & E esse æquales. Sit enim si fieri potest latus AB majus latere DF sumatur linea AG æqualis lateri DF; ducaturque linea CG.

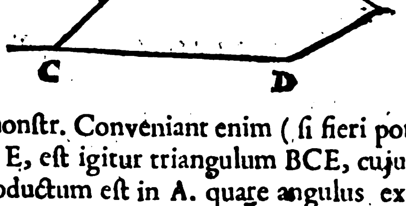
Demonstr. Quia triangula CAG, EDF habent duo latera AC, DE; & AG, DE, æqualia & angulos A, & D æquales, nempe rectos; bases CG, FE æquales erunt; quia verò in triangulo CAG producto latere BA angulus externus HAC, major est interno AGC, (per 16.) *AGC autem major est angulo B, angulus HAC qui rectus est utroque B & AGC major erit, atque adeo uterque minor recto id est acutus erit. & quia* (per 13.) *anguli AGC, CGB sunt æquales duobus rectis; & AGC est recto minor reliquus CGB major erit recto, & consequenter major erit angulo B acuto quare* (per 19.) *latus CG, minus erit latere CB, sed CG est æquale lateri FE: igitur BC, FE non erant æquales, contra suppositionem; quare AB, DE æquales sunt &* (per 4.) *reliqui anguli sunt æquales.*

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si in duas lineas alia incidens, angulos alternos æquales fecerit, illæ parallelæ erunt.

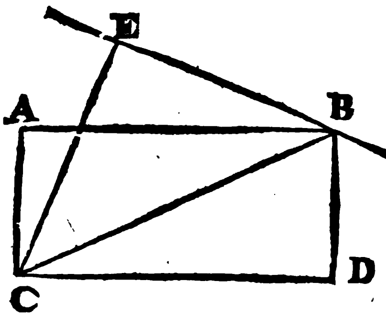
In lineas AB, CD incidat linea BC, faciatque angulos alternos ABC, BCD æquales, dico primò lineas AB, DC quantumlibet productas non convenire. *Hoc enim tantū demonstravit Euclides.*



Demonstr. Conveniant enim (si fieri potest) in puncto E, est igitur triangulum BCE, cujus latus EB productum est in A. quare angulus externus ABC major esset) *per* 16. angulo interno BCE, quod est contra suppositionem.

Quia tamen posset quis concedere lineas AB, CD non convenire, negare tamen esse parallelas, id est æquali semper intervallo distare ab invicem, ut accidit in conchoide, ut perfecta sit propositio probandum est eas esse parallelas.

Sint



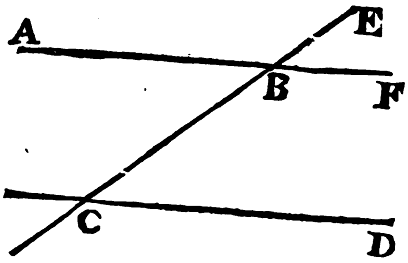
Sint igitur lineæ AB, CD, in quas incidens linea BC faciat angulos alternos ABC, BCD æquales; dico, illas esse parallelas. Si enim non sint parallelæ, intelligatur per punctum B esse ducta linea BE, ipsi CD parallela, in quam ex puncto C ducatur perpendicularis CE, & ex puncto B ad lineam CD perpendicularis BD, item & ex puncto C ad lineam AB perpendicularis CA.

Demonstr. Quia linea CE est perpendicularis ad EB, est etiam perpendicularis ad illi parallelam CD (*per lemma primum*) quare (*per def. parall.*) lineæ CE, BD æquales erunt; ideoque quia in triangulis rectangulis EBC, DCB, cum latus CB sit commune, & latera CE, BD æqualia (*per lemma secundum*) anguli EBC, BCD, erunt æquales; sed angulus ABC, suppositus est æqualis angulo BCD, igitur anguli ABC, EBC essent æquales pars & totum, quod est absurdum, non igitur alia per punctum B duci potest parallela lineæ CD, quam AB, ideoque hæc est parallela.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si in duas lineas incidens alia linea fecerit angulum externum æqualem interno opposito: vel duos externos ad easdem partes æquales duobus rectis, parallelæ sunt illæ lineæ.



In duas rectas AB, CD incidat linea BC, & faciat angulum externum EBF, æqualem angulo BCD, interno opposito ex eâdem parte: dico primò lineas AB, CD esse parallelas.

Demonstr. cum anguli EBF, BCD sint æquales & angulus ABC sit æqualis angulo EBF opposito ad verticem (*per* 15.) erunt anguli alterni ABC, BCD æquales; ergo (*per* 27.) lineæ AB, CD sunt parallelæ.

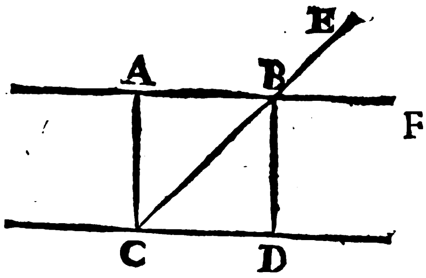
Secundò anguli interni ex eâdem parte nempe FBC, DCB sint duobus rectis æquales: dico lineas AB, CD esse parallelas.

Dem. anguli ABC, FBC, (*per* 13.) sunt duobus rectis æquales: sed etiam anguli DCB. FBC supponuntur duobus rectis æquales: igitur anguli ABC, FBC, sunt æquales duobus angulis DCB, FBC, unde ablato communi angulo FBC restant anguli ABC, BCD æquales; qui cum sint alterni lineæ AB, CD (*per* 27.) parallelæ erunt.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Si recta in parallelas incidat, anguli alterni erunt æquales; & externus interno opposito ex eâdem parte, duo interni ad easdem partes æquales duobus rectis.



In parallelas AB, CD, incidat linea BC, dico primo angulos alternos ABC, BCD esse æquales, ducantur enim ex B & C perpendiculares BD, CA, quæ (*ex def. parall.*) sunt æquales.

Demonstr. In triangulis BAC, BDC, anguli A, & D recti sunt, latera AC, BD, sunt æqualia, & latus BC commune, igitur (*per lemma* 2.) triangula sunt æqualia, & anguli ABC, BCD oppositi lateribus æqualibus AC, BD, sunt æquales.

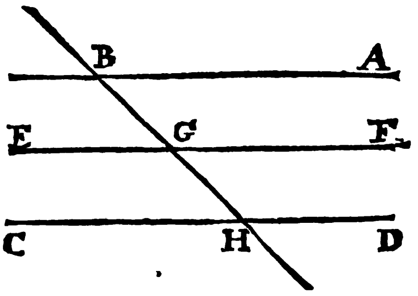
Secundò angulus externus EBF est æqualis angulo ABC opposito ad verticem (*per* 15.) sed hic ostensus est æqualis angulo BCD: igitur idem angulus externus EBF æqualis est angulo BCD interno opposito ex eâdem parte.

Tertiò cum anguli CBA, BCD sint æquales addito communi CBF erunt anguli BCD, CBF, æquales duobus CBA CBF; sed isti (*per* 13.) sunt duobus rectis æquales: ergo anguli BCD, CBF qui sunt interni, ex eâdem parte, sunt duobus rectis æquales.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Quæ eidem lineæ sunt parallelæ; inter se sunt parallelæ.



Sint rectæ AB, CD, eidem lineæ EF parallelæ, dico illas, inter se esse parallelas, incidat linea BH in tres illas lineas.

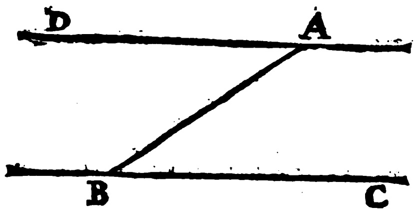
Demonstr. Quoniam lineæ AB, EF sunt parallelæ, erunt anguli alterni ABG, BGE æquales (*per* 29.) & quia lineæ EF, CD, sunt parallelæ, erit angulus externus BGE æqualis interno opposito ex eâdem parte, nempe angulo GHC; ergo anguli ABG, BHC sunt æquales, qui cum sint alterni lineæ AB, CD, (*per* 27.) parallelæ erunt.

PROPO

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Per datum punctum ducere parallelam lineæ datæ.



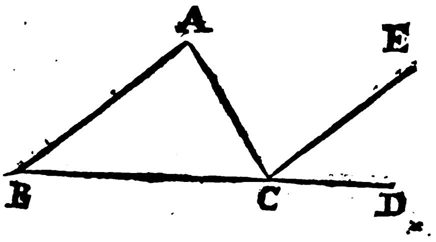
Sit punctum A per quod ducenda est parallela lineæ datæ BC. Ducatur utcumque linea A B, & angulo ABC (*per* 23.) fiat æqualis angulus BAD. Dico lineas AB, BC esse parallelas.

Demonstrat. Cum enim anguli DAB, ABC sint facti æquales, & sint alterni (*per* 27.) lineæ DA, BC erunt parallelæ.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

In quolibet triangulo, uno latere producto externus angulus duobus internis oppositis simul sumptis æqualis est, item trianguli tres anguli æquales sunt duobus rectis.



Sit triangulum ABC, cujus unum latus B C producatur in D. Dico angulum externum ACD duobus internis oppositis A & B æqualem esse, per punctum C ducatur linea CE parallela lineæ A B (*per* 31.)

Demonstr. Quia lineæ AB, CE sunt parallelæ, anguli alterni ECA, CAB (*per* 29.) sunt æquales; & quia in easdem parallelas AB, CE incidit linea BC, angulus externus DCE æqualis erit interno opposito B (*per eandem*) sed angulus ACD est æqualis angulis ACE, DCE omnibus scilicet suis partibus; ergo idem angulus ACD æqualis est angulus A, & B, simul sumptis.

Deinde dico tres angulos trianguli ABC æquivalere duobus rectis.

Demonstr. Angulus A C D cum angulo ACB (*per* 13.) æquivalet duobus rectis: sed anguli A & B æquales sunt angulo ACD, (*per primam partem hujus*) ergo anguli A & B cum angulo ACB æquivalebunt duobus rectis.

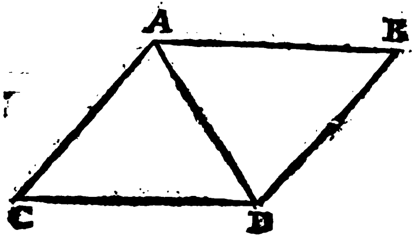
Corollaria.

1. Tres simul anguli unius trianguli æquales sunt tribus simul angulis alterius trianguli.
2. Si in triangulo unus rectus est, alij duo sunt acuti.
3. Si unius trianguli duo anguli æquales sunt duobus alterius, reliquus angulus reliquo erit æqualis.
4. Ex uno puncto ad aliquam lineam unica tantum cadit perpendicularis, quia alioquin triangulum haberet duos rectos angulos.
5. Perpendicularis est brevissima quæ à puncto ad lineam cadere potest, quia reliquæ opponuntur angulo recto, alij autem anguli sunt acuti quibus illa perpendicularis opponitur.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si duas æquales, & parallelas conjungant aliæ duæ lineæ, illæ æquales erunt, & parallelæ.

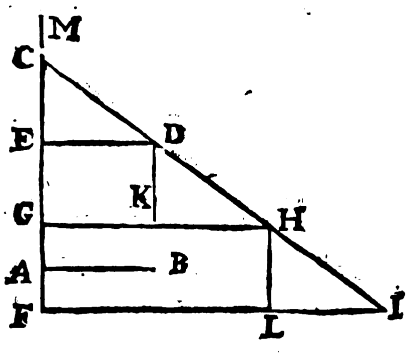


Duas parallelas AB, CD & æquales conjungant lineæ AC, BD non tamen transversim, dico lineas AC, BD esse æquales, & parallelas. Ducatur linea AD.

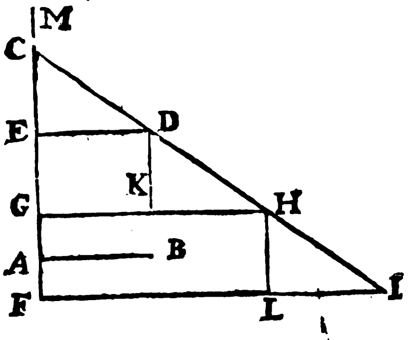
Demonstr. Quia lineæ AB, CD sunt parallelæ, erunt (*per* 29.) anguli alterni BAD, ADC æquales; in triangulis autem BAD, ADC, latera AB, CD sunt æqualia, latus AD commune & anguli BAD, ADC sunt ostensi æquales; quare bases AC, BD æquales erunt (*per* 4.) & anguli BDA, DAC oppositi lateribus æqualibus A B, D C æquales erunt; sed illi alterni sunt respectu linearum AC, BD, ergo (*per* 27.) sunt etiam parallelæ.

Potest hic facilè probari axioma Euclidis undecimum quod ita habet.

Si in duas lineas alia incidens, angulos internos ex eâdem parte, duobus rectis minores faciat: concurrent illæ lineæ ex eadem parte.



In duas lineas AB, CD, incidens linea CA, faciat angulos internos BAC, ACD minores duobus rectis, dico fore ut illæ lineæ concurrant si producantur ad partes B, & D. Cum enim anguli BAC, ACD sint minores duobus rectis alteruter saltem acutus erit. Sit ACD acutus, ex puncto D ducatur (per 31.) *linea DE parallela lineæ AB, quæ necessario cadet inter A & C. non enim cadere potest in punctum C aut in M, quia cum anguli BAC, BAF* (per 13.) *sint æquales duobus rectis, majores erunt angulis BAC, ACD, & ablato communi BAC angulus BAF major est angulo ACD. si igitur parallela DE caderet in C, aut etiam in M, angulus DEF internus minor esset angulo BAF externo.* (contra 29.) *sumantur lineæ EG, GF, æquales lineæ CE, & hoc donec perveniatur,*

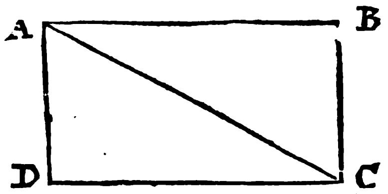


niatur infra punctum A, Sumantur etiam in linea CD producta totidem linea DH, HI ipsi CD aequales, & ex punctis E & H (per 31.) *ducantur lineae DK, HL parallela ipsi CF, & aequales lineae CE. Ultimo ducantur lineae GK, HK, FL, IL.*

Demonstr. Quia lineae ED, GK conjungunt lineas EG, DK eidem CE aequales, & parallelas; (per 33.) *aequales erunt & parallela, quare* (per 29.) *anguli GKD, KDE erunt duobus rectis aequales, quia autem lineae CA, KD sunt parallela in quas incidit linea CD, erit* (per 29.) *angulus externus KDH aequalis interno ECD; quare in triangulis ECD, KDH, cum anguli ECD, KDH sint aequales, & latera EC, DK; item CD, DH reliqui anguli E & K aequales erunt, sed propter parallelas AC, DK, angulus E,* (per 29.) *aequalis est alterno EDK: ergo anguli EDK, DKH sunt aequales, sed EDK, GKD ostensi sunt duobus rectis aequales: igitur GKD, DKH erunt aequales duobus rectis, &* (per 14.) *GKH una erit linea, quam ostendimus esse parallelam lineae ED, & quia ED facta est parallela lineae AB; GH erit etiam parallela lineae AB,* (per 30.) *ita ostendam lineam FI eidem AB esse parallelam quare si producatur linea AB cum secare non possit lineas GH, FI, sibi parallelas; necessario lineam HI secabit in aliquo puncto inter H & I posito.*

PROPOSITIO XXXIV.

In parallelogrammo oppositi anguli, & latera aequalia sunt; & ipsum diameter bifariam dividit.



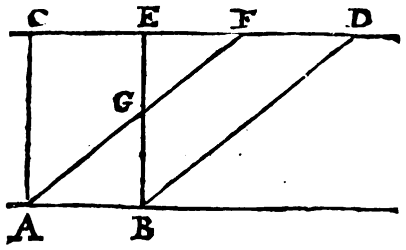
Sit parallelogrammum ABCD, dico latus AB esse aequale lateri CD, latus AD lateri BC, angulum A, angulo C, & angulum B angulo D.

Demonstr. Cum lineae AB, CD sint parallelae, & linea AC in illas incidat; erunt (*per* 29.) anguli alterni BAC, ACD aequales, pariter cum eadem AD incidat in lineas AD, CB, parallelas anguli alterni DAC ACB aequales erunt, quare cum triangula ABC, ADC habeant duos angulos singulos singulis aequales, & latus AC commune; erunt (*per* 26.) aequalia & anguli B & D oppositi eidem lateri AC aequales, & latera AB, CD opposita aequalibus angulis ACB, CAD aequalia, sicut & latera AD, BC. item angulus totalis A, aequalis erit angulo totali C. patet etiam diametrum AC dividere parallelogrammum in duo triangula aequalia.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Parallelogramma super eâdem basi, & inter easdem parallelas constituta sunt aequalia.



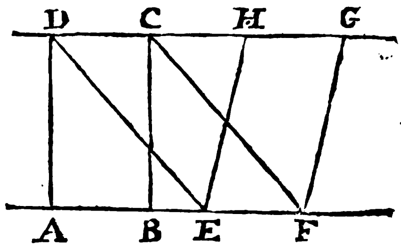
Super eâdem basi AB, & inter easdem parallelas AB, CD, sint constituta duo parallelogramma ABEC, ABDF, dico illa esse aequalia.

Demonstr. Cum triangula FCA DEB, habeant omnia latera aequalia [nam CA, EB (*per* 34.) sunt aequalia, sicut FA, DB, & cum lineae CE, FD, eidem AB sint aequales, erunt inter se aequales, & additâ communi EF; erunt lineae CF, ED aequales] quare triangula FCA, DEB (*per* 8.) sunt aequalia; ex quibus si auferas triangulum EGF utrique commune; erunt trapezia CAGE, FGBD aequalia; igitur si utrique trapezio, addas triangulum AGB erunt parallelogramma ABEC, ABDF aequalia.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Parallelogramma super aequalibus basibus & inter easdem parallelas constituta sunt aequalia.



Sint duo parallelogramma ABCD, EFGH, inter easdem parallelas AF, DG, quorum bases AB, EF sint aequales, dico illa esse aequalia. Ducantur lineae ED, FC.

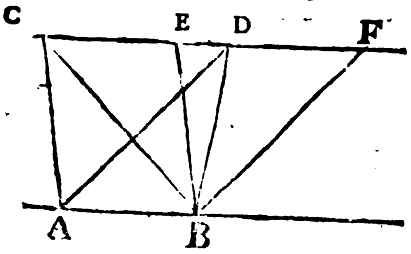
Demonstr. Lineae AB, EF supponuntur aequales, sed lineae AB, CD sunt aequales (*per* 34.) igitur lineae CD, EF sunt aequales, supponuntur etiam parallelae quare lineae DE, CF eas connectentes (*per* 33.) sunt parallelae, est igitur parallelogrammum DEFC, cui est aequale ABCD, (*per* 43.) cum eandem habeant basin DC, & etiam EFGH eidem aequale est cum eandem habeant basin EF, igitur parallelogramma ABCD, EFGH aequalia uni tertio, sunt aequalia inter se.

PROPO

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Triangula super eâdem basi, & inter easdem parallelas constituta, sunt æqualia.



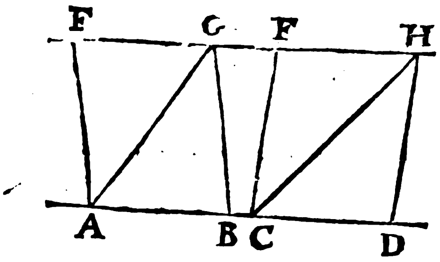
Super basi A B, & inter easdem parallelas A B, C D sint constituta duo triangula A B C, A B D. dico illa inter se esse æqualia lateribus AC, AD. Ducantur parallelæ B E, BF.

Dem. Sunt parallelogramma ABEC, ABFD, (*per* 35.) æqualia, sed triangula ABC, ABD, illorum sunt dimidia (*per* 34.) igitur sunt etiam inter se æqualia.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Triangula super æqualibus basibus, & inter easdem parallelas constituta, sunt æqualia.



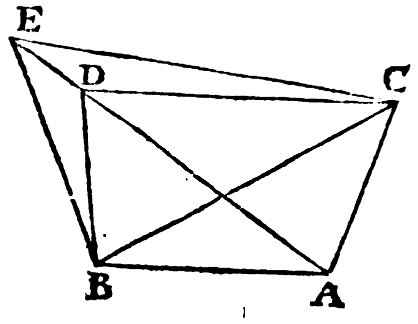
Super basibus æqualibus AB, CD, & inter easdem parallelas AD, EF sint constituta duo triangula ABG, CDH, dico illa esse æqualia. AE, CF ducantur parallelæ lateribus BG, DH. (*per* 31.)

Demonst. Parallelogramma A B G E, CDHF, sunt (*per* 36.) æqualia, sed triangula ABG, CDH, (*per* 34.) illorum sunt dimidia; ergo sunt inter se æqualia.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Triangula æqualia super eâdem basi constituta, sunt inter easdem parallelas.



Sint duo triangula æqualia ABC, ABD super basi AB. dico lineam CD esse parallelam lineæ AB.

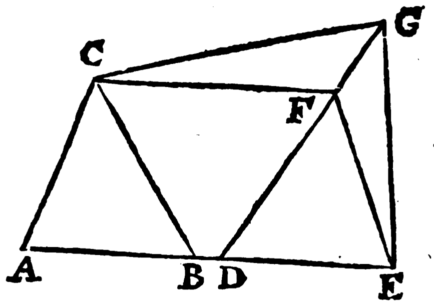
Si negas, sit linea C E parallela lineæ A B; producatur linea A D in E; jungaturque linea B E.

Demonstr. Triangula C A B, A B E super basi A B & inter easdem parallelas (*per* 37.) sunt æqualia, sed triangulum ABD, supponitur æquale triangulo ABC, igitur triangula ABD, ABE inter se essent æqualia, pars & totum, quod est absurdum, igitur nulla alia duci potest parallela lineæ AB, præter C D.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Triangula æqualia super æqualibus basibus, in eâdem lineâ constituta, sunt inter easdem parallelas.



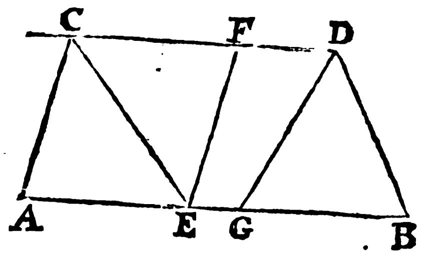
Sint triangula æqualia ABC, D E F super basibus A B, D E æqualibus; & in eâdem lineâ AE, dico lineam C F esse parallelam lineæ A E. Si enim non est, sit linea C G parallela lineæ A E, producatur latus D F in G; connectaturque linea E G.

Demonst. Triangula A B C, DGE inter parallelas AE, CG, (*per* 38.) sunt æqualia, sed triangulum D E F supponitur æquale triangulo ABC, igitur triangula DEF, DEG essent æqualia, pars & totum, non igitur alia parallela lineæ AE duci potest præter C F.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si parallelogramum, & triangulum eandem, aut æqualem basin habeant, & sint inter easdem parallelas; parallelogrammum est duplum trianguli.



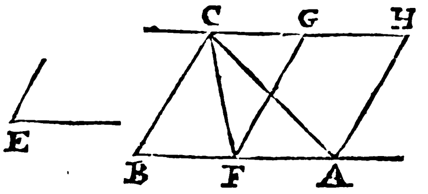
Inter parallelas AB CD sit parallelogrammum A E F C, & triangulum G B D; quorum bases AE, GB sint æquales, dico A E F C esse duplum trianguli G B D. Ducatur linea C E.

Dem. Triangulum AEC est media pars parallelogrammi AEFC (*per* 34.) sed triangulum G B D (*per* 38.) est æquale triangulo A E C; igitur triangulum G B D est media pars ipsius AEFC.

PROPOSITIO XLII.

Problema.

Dato triangulo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

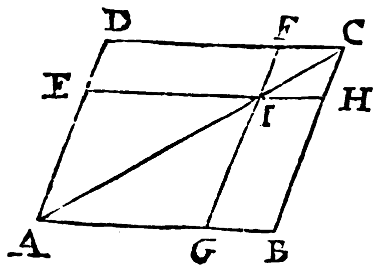


Sit triangulum A B C, cui æquale faciendum est parallelogrammum, quod habeat unum angulum æqualem angulo E. Ex puncto C duc lineam CH parallelam lineæ AB (*per* 31.) divide lineam AB bifariam in F, fiatque angulus AFG æqualis angulo E, (*per* 23.) & lineæ F G ducatur parallela AH. dico factum esse quod jubetur.

Demonstr. Primo parallelogrammum A F G H habet angulum A F G æqualem angulo E. Secundo est duplum trianguli AFC (*per* 41.) sed ejusdem trianguli A F C duplum est triangulum ABC, cum triangula AFC, FCB bases AF, FB æquales habentia, sint æqualia: igitur parallelogrammum A F G H, est æquale triangulo A B C.

PROPOSITIO XLIII.

Cujuslibet parallelogrammi, duo complementa inter se sunt æqualia.



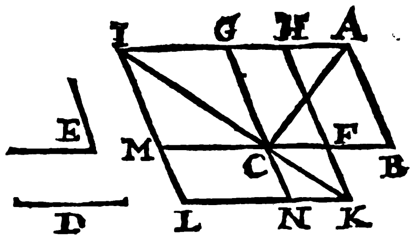
In parallelogrammo ABCD. dico complementa E F, GH esse æqualia.

Demonstr. Cum enim (*per* 34.) triangula ACD, ACB sint æqualia, ex iis si auferas triangula E I A, A I G item triangula F C I, I H C, quæ per eandem sunt æqualia: restabunt parallelogramma EF, GH æqualia, hæc autem, ex def. 35. sunt complementa.

PROPOSITIO XLIV.

Problema.

Super datam rectam dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo.



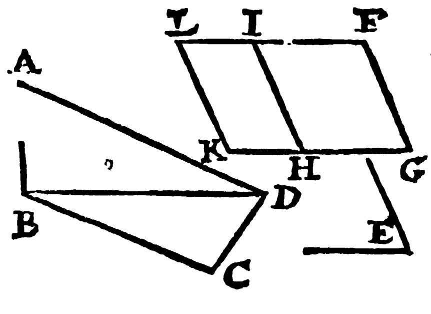
Sit triangulum A B C cui æquale parallelogrammum construendum est, cujus unum latus sit æquale lineæ D, & unus angulus æqualis angulo E. (*Per* 42.) triangulo A B C fiat æquale parallelogrammum F C G H; habens angulum C F H æqualem angulo E. Sumatur linea G I, æqualis lineæ D, ductáque linea I C, producatur linea H F eam secans in K; ducantur lineæ I L, K L, C M, parallelæ suis oppositis. dico parallelogrammum C M L N esse id quod quæritur.

Demonstr. Primo C M L N, est æquale ipsi FCGH (*per* 43.) sed F C G H factum est æquale triangulo ABC, igitur CMLN est æquale triangulo A B C. Deinde quia lineæ G N, KH, sunt parallelæ; & in eas incidit F C, erunt anguli alterni HFC FCN (*per* 29.) æquales, item anguli FCN, CNL æquales quia lineæ N L, C M sunt parallelæ. igitur anguli CNL, HFC sunt æquales, sed C F H factus est æqualis angulo E, igitur parallelogrammum C M L N unum angulum habet æqualem angulo E, deinde linea C M æqualis est lineæ G I, G I autem æqualis facta est lineæ D; igitur parallelogrammum C L habet lineam C M æqualem lineæ D.

PROPOSITIO XLV.

Problema.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum constituere habens angulum æqualem angulo dato.



Sit datum rectilineum A B C D, cui æquale parallelogrammum construendum est; habens unum angulum æqualem angulo E. Resolve rectilineum in triangula ductâ lineâ BD; tum triangulo A B D (*per* 42.) fac æquale parallelogrammum F G H I, cujus angulus G sit æqualis angulo E. item triangulo B C D (*per* 44.) In linea I H, æquale fiat parallelogrammum IHKL habens angulum I H K æqualem angulo E. dico G K L F esse parallelogrammum æquale rectilineo A B C D.

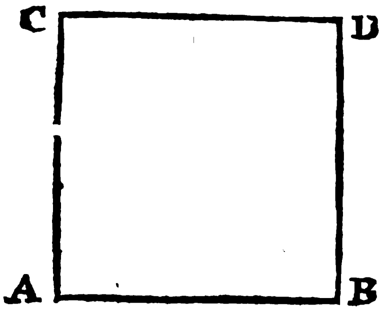
Dem. Primò quidem patet parallelogrammum esse æquale rectilineo; cum enim G H I F sit æquale triangulo A B D, & I H K L ipsi BCD: erit totum GKLF æquale toti ABCD. quod vero sit unicum parallelogrammum GKLF ostendo; nam

nam cum anguli G & I H G sint æquales duobus rectis (*per* 29.) cum lineæ F G, I H sint parallelæ, & angulus I H K sit æqualis angulo G; [cum uterque sit factus æqualis angulo E] erunt anguli IHK, IHG æquales duobus rectis; & (*per* 14.) lineæ GH, HK, unam lineam constituunt; atque adeo unicum est parallelogrammum GKLF.

PROPOSITIO XLVI.

Problema.

Super datâ rectâ quadratum construere.



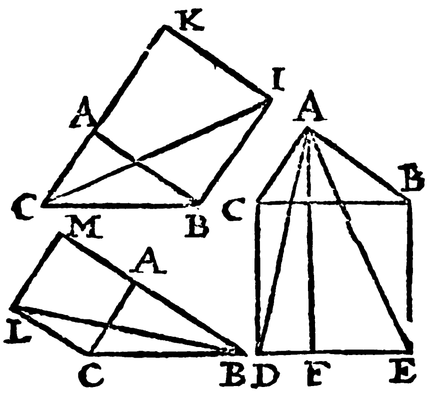
Sit data recta AB, supra quam construendum est quadratum in punctis A, & B (*per* 11.) excitentur duæ perpendiculares A C, BD ipsi AB æquales, ducaturque linea DC. dico factum esse quadratum.

Demonstr. cum enim lineæ AC. BD sint æquales, & parallelæ (*per* 28.) propter angulos A, & B rectos; lineæ AB, DC eas conjungentes (*per* 33. erunt æquales & parallelæ: sunt igitur 4. lineæ æquales, & anguli A & C, item B & D oppositi (*per* 34. erunt recti. igitur ABCD est quadratum.

PROPOSITIO XLVII.

Theorema.

In triangulo rectangulo, quadratum lateris oppositi recto angulo, æquale est quadratis reliquorum laterum simul sumptis.



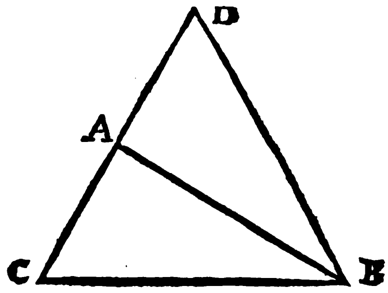
Sit triangulum ABC cujus angulus A rectus, dico quadratum B D, lateris scilicet B C oppositi angulo recto A, esse æquale duobus quadratis BK, AL, reliquorum scilicet laterum AC, AB; ducatur linea A F parallela lineis BE, CD. ducanturque lineæ A E, AD, & ne sit confusio repetatur triangulum B A C bis, factisque quadratis reliquorum laterum ducantur I C L B.

Demonstratio. In triangulis ABE, IBC, latera A B, I B sunt æqualia, cum ABIK sit quadratum, item B E B C. anguli item A B E, I B C, sunt æquales; cum enim anguli IBA, EBC sint recti, si illis addas communem angulum ABC, erunt anguli ABE, IBC æquales; igitur (*per* 4.) triangula ABE, IBC sunt æqualia, sed parallelogrammum B F, (*per* 41.) est duplum trianguli A B E, cum eandem basin B E habeant, & sint inter easdem parallelas BE, FA, item quadratum B K est duplum trianguli I B C (*per eandem*) igitur parallelogrammum BF, & quadratum BK sunt æqualia, eodem modo ostendam quadratum CM, esse æquale parallelogrammo CF: ergo totum quadratum BEDC est æquale quadratis B K. C M. simul sumptis.

PROPOSITIO XLVIII.

Theorema.

Si quadratum unius lateris trianguli est æquale duobus quadratis reliquorum laterum: angulus illi oppositus rectus est.



In triangulo A B C quadratum lateris C B, sit æquale quadratis laterum A B, AC; dico angulum BAC esse rectum. ducatur ad B A perpendicularis A D æqualis lineæ A C, conjungatúrque linea B D.

Demonstratio. Cum angulus B A D sit rectus erit (*per* 47.) quadratum lateris BD æquale quadratis laterum B A, A D, vel AC; cum AC sit æqualis ipsi AD, sed quadratis laterum BA, AC, jam ponebatur æquale quadratum lateris B C, igitur quadrata laterum BC, BD sunt æqualia; & consequenter lineæ B C, BD æquales. Cum igitur in triangulis BAD, BAC latera AD, AC sint æqualia, A D commune & bases BD, BC æquales (*per* 8.) anguli B A D, BAC æquales erunt; sed BAD factus est rectus igitur BAC rectus est.

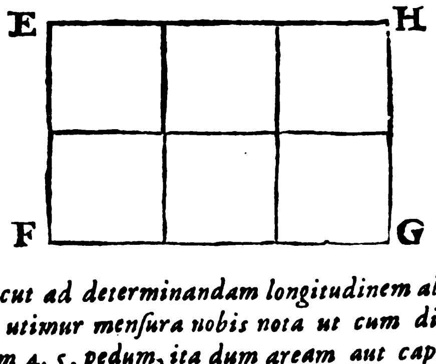
EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

Definitiones.

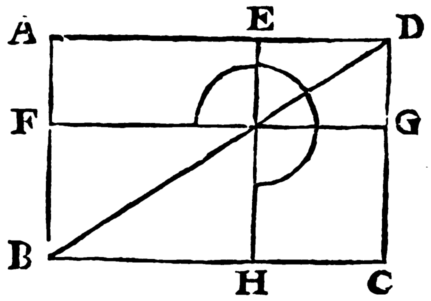
1. Parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus lineis rectum angulum comprehendentibus.

Notandum primò nos per vocem rectanguli deinceps intellecturos parallelogrammum cujus omnes anguli sunt recti, sufficienter autem determinamus rectangulum, dum ejus longitudinem, & latitudinem assignamus; duas scilicet lineas vicinas appellantes, ut in rectangulo ABCD si determinemus lineas AB, BC; aliæ enim istis sunt æquales, quare si duo rectangula duas vicinas lineas æquales habeant, illa æqualia erunt.

Intelligitur autem generari rectangulum ABCD si linea AB stans semper perpendiculariter, ad lineam BC, eam percurrat, qui ductus respondet multiplicationi arithmeticæ, ita ut sicut ducendo lineam AB supra lineam BC, producitur rectangulum ABCD, ita multiplicando latus BC per BA idem rectangulum producitur, quod ita explico



Sicut ad determinandam longitudinem alicujus lineæ utimur mensura nobis nota ut cum dicimus lineam 4. 5. pedum, ita dum aream aut capacitatem alicujus superficiei determinare volumus, eam metimur per quadrata nobis nota; v.g. per pedem quadratum, hoc est, per quadratum cujus singula latera sint unius pedis. Utimur autem potius quadrato quàm aliis mensuris; quia cum ejus longitudo sit æqualis latitudini, facilius exhibetur assignatâ unicâ eius dimensione. Cognitâ verò longitudine alicujus rectanguli facilè innotescit per multiplicationem numerus quadratorum, quæ in eo continentur. Sit enim rectangulum EFGH cujus linea EF sit duorum pedum, & FG trium; dico si multiplices FG, per EF, dicasque bis tria, invenies 6. numerum quadratorum unius pedis, quæ continentur in rectangulo EFGH. Ratio clara est si figura cum longitudine FG trium pedum haberet tantum altitudinem unius; fieret solum unus ordo trium quadratorum, sed EF est duorum pedum quare duo ordines fieri possunt, unde multiplicando unum latus per aliud, exurgit area rectanguli totius, cum igitur per multiplicationem hoc modo fiant rectangula, aliquæ propositiones in numeris exhibentur.

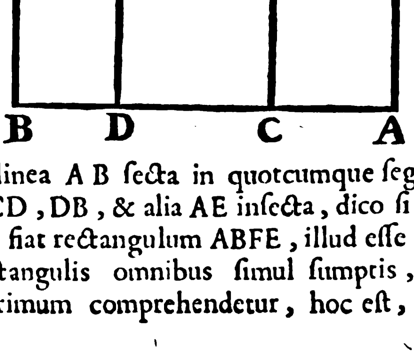


Secunda in rectangulo, ductâ diametro, unum rectangulorum per quæ diameter transit cum duobus vicinis complementis vocatur Gnomon. Ut in rectangulo ABCD si sumas rectangulum EG unà cum complementis EF, GH, hæc tria quia figuram Gnomonis seu squadræ, exhibent, vocantur Gnomon.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si fuerint duæ lineæ quarum una secetur in quotcumque segmenta, alia verò insecta maneat: rectangulum sub illis duabus lineis contentum æquale est omnibus simul rectangulis, quæ sub insecta & partibus secta continentur.



Sit linea AB secta in quotcumque segmenta AC, CD, DB, & alia AE insecta, dico si ex his duabus fiat rectangulum ABFE, illud esse æquale rectangulis omnibus simul sumptis, quorum primum comprehendetur, hoc est, habebit

bit unum latus æquale lineæ A E, & aliud segmento A C. Secundum habebit unum latus æquale eidem lineæ AE, & aliud segmento CD. Tertium habebit unum latus æquale lineæ AE aliud segmento D B. ducantur enim lineæ CG. DH parallelæ lineis AE, FB. ita ut sint tria rectangula AG, CH, DF.

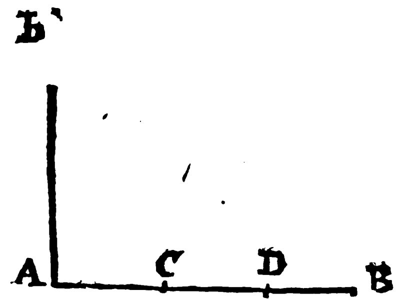
Demonstr. Rectangulum A F solum, æquale est tribus rectangulis AG, CH, DF omnibus scilicet suis partibus; sed rectangulum AF comprehenditur sub lineis AB, AE; & rectangula AG, CH, DF habent pro uno latere aut ipsam AE aut illi æquales CG, DH, *(quod perinde est)* & pro alia linea segmenta AC, CD, DB. Igitur rectangulum sub AB, AE, comprehensum, æquale est rectangulis omnibus comprehensis sub AE & singulis segmentis.

Idem in numeris. sit linea AB 9 pedum, sitque segmentum A C trium, CD 4. DB duorum pedum, & linea AE sit 5 pedum. dico rectangulum A F hoc est quinquies novem seu 45. æquale esse quinquies tribus, seu 15. & quinquies 4. seu 20. & quinquies duobus, seu 10. nam 15. 20. & 10. faciunt 45.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si recta secetur in quotcumque segmenta, rectangula comprehensa sub tota, & singulis segmentis, æqualia sunt quadrato totius.



Recta AB secetur utcumque in C & D. dico rectangula comprehensa sub tota A B, & singulis segmentis AC, CD, DB, esse simul sumpta æqualia quadrato lineæ A B. Sit linea A b æqualis lineæ A B.

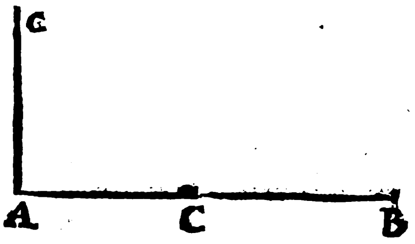
Demonstr. Per superiorem rectangulum comprehensum sub AB, A b, æquale est rectangulis comprehensis sub Ab, AC; CD; AB, DB. igitur rectangulum sub AB, Ab (quod est quadratum lineæ AB, cum AB, Ab sint æquales) est æquale rectangulis sub AB, AC; AB, CD; AB, DB comprehensis.

Idem in numeris sit AB novem, AC 3. CD 4. DB 2. dico novies novem seu 81. æqualia esse novies tribus, hoc est 27. novies 4. seu 36. & novies duobus hoc est 18. nam 27. 36. & 18. efficiunt 81.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si recta secetur utcumque, rectangulum comprehensum sub tota, & uno segmentorum, æquale est, quadrato prædicti segmenti; & rectangulo comprehenso sub segmentis.



Recta A B secetur in C, dico rectangulum comprehensum sub AB, & AC, æquale esse quadrato lineæ AC & rectangulo comprehenso sub AC, CB. Repetatur enim linea AC.

Demonstr. (*Per 1.*) rectangulum comprehensum sub AB, AC æquale est & rectangulo comprehenso sub AC AC, & alteri comprehenso sub AC, CB; sed comprehensum sub AC; AC est quadratum segmenti A C, ergo rectangulum comprehensum sub AB, AC æquale est quadrato lateris AC; & rectangulo comprehenso sub AC, CB hoc est sub segmentis.

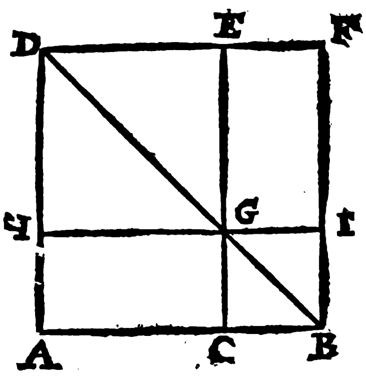
In numeris AB sit 7. AC 3. CB 4. dico ter 7. seu 21. æqualia esse ter tribus seu 9. & ter quatuor seu 12. nam 12. & 9. efficiunt 21.

Ne deterreantur tyrones etiamsi propositiones hujus libri minus benè concipiant.

PROPOSITIO IV.

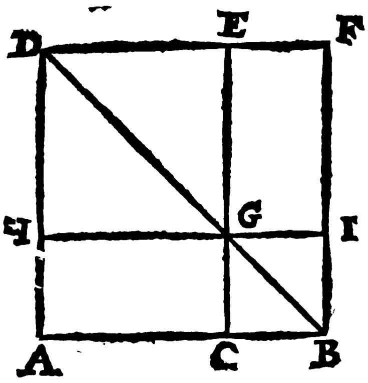
Theorema.

Si recta secta sit utcumque; erit quadratum totius lineæ, æquale quadratis segmentorum & rectangulo comprehenso sub segmentis bis sumpto.



Recta AB secta sit in C, dico quadratum ejus AF æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & duobus rectangulis comprehensis sub AC, CB. Ducta diametro DB, per C ducatur C E parallela lineis AD, BF, secans diametrum in G, & per G ducatur GH parallela lineis AB, FD.

Demonstr. Primo quidem C I est quadratum lateris C B; nam cum latera A B, A D sint æqualia (*per defin. quadr.*) erunt *per* 5. 1.) anguli ADB, ABD æquales, sed cum lineæ A D, C E sint parallelæ in quas incidit D G, angulus



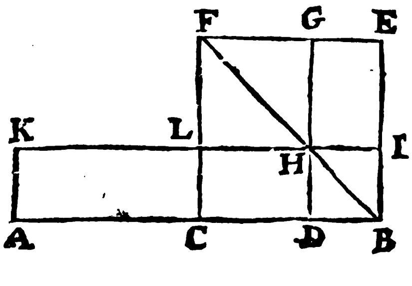
externus CGB erit æqualis angulo ADB interno (*per* 29. 1.) Igitur anguli CGB, CBG æquales erunt & dimidia pars recti cum angulus C sit rectus. Igitur latera CB, CG sunt æqualia; & quia angulus CBI erat rectus ablato semirecto CBG restabit GBI semirectus, item IGB semirectus erit, igitur (*per* 26. 1.) triangula GIB, GCB habebunt latera æqualia: igitur 4. latera CG, GI, CB, IB sunt æqualia. est igitur GI quadratum lateris CB. eodem modo ostendam HE esse quadratum lateris AC. & rectangulum AG comprehendi sub AC, CB, cum CB, CG sint æquales, & rectangulum GF sub CB, AC comprehenditur, aut illi æquali GE. nam cum lineæ AB, CE sint æquales, ablatis æqualibus CB, CG. restant æquales AC, GE. sed patet quadratum AF esse æquale quadratis CI, HE, & rectangulis AG, GE. igitur quadratum lineæ AB est æquale quadratis segmentorum AC, CB, & duobus rectangulis comprehensis sub segmentis AC, CB.

In numeris AB sit 7. AC 5. & CB 2. dico septies 7. seu 49. æqualia esse quinquies 5. seu 25. & bis duobus seu 4. & duobus rectangulis id est quinquies duobus bis, seu 10. & 10. nam 25. 4. 10. & 10. efficiunt 49.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si recta secetur æqualiter, & inæqualiter; erit rectangulum sub inæqualibus segmentis contentum, una cum quadrato partis intermediæ: æquale quadrato dimidiæ.



Sit linea AB æqualiter divisa in C & inæqualiter in D. dico quadratum CE, dimidiæ CB, æquale esse rectangulo comprehenso sub AD, DB, & quadrato intermediæ CD. ducta diametro FB, & DG parallela lineis CF, BE; item IK parallelâ lineæ AB, & AK parallelâ ipsi CF.

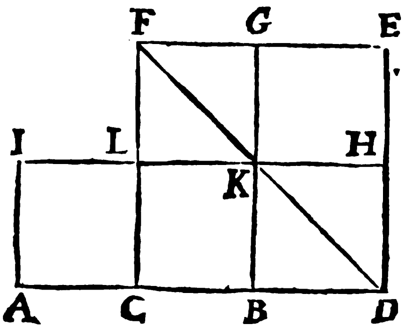
Dem. Ostendam sicut in priori DI esse quadratum. lineæ DB: item LG esse quadratum lineæ CD. cum LH sit illi æqualis. item rectangulum AL esse æquale rectangulo DE, nam lineæ AC, BE, eidem lineæ CB sunt æquales, igitur inter se sunt æquales: latus LC æquale est lateri DH, & hoc lateri DB. quibus rectangulis AL. DE si addas rectangulum CH, erit totum AH æquale tribus GI, DI, CH, sed tria GI, ID, CH una cum quadrato LG æqualia sunt quadrato CE, igitur AH (quod comprehenditur sub AD, DB) unâ cum quadrato LG scilicet quadrato lineæ CD, æquale est quadrato lineæ CB.

In numeris sit AB. 10. AC 5; CD 3. DB 2. dico quadratum dimidiæ CB hoc est quinquies 5. seu 25. æquale esse rectangulo sub AD [illegible] & DB 2. hoc est bis [illegible] seu 1[illegible] & quadrato CD 3. hoc est ter tribus, seu 9. nam 1[illegible] & 9. efficiunt 25.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si recta linea bifariam secetur eique recta quædam adjiciatur erit rectangulum comprehensum sub lineâ compositâ ex totâ & adjectâ, & sub adjectâ, unâ cum quadrato dimidiæ æquale quadrato compositæ ex dimidiâ & adjectâ.



Linea AB dividatur bifariam in C, eique addatur BD. dico quadratum CE, lineæ CD [compositæ ex dimidiâ CB, & adjecta BD.] æquale esse rectangulo comprehenso sub AD [compositâ ex AB, & adjecta BD] & sub adjecta BD & quadrato lineæ CB. ducta diametro FD, ducantur parallelæ BG, HI.

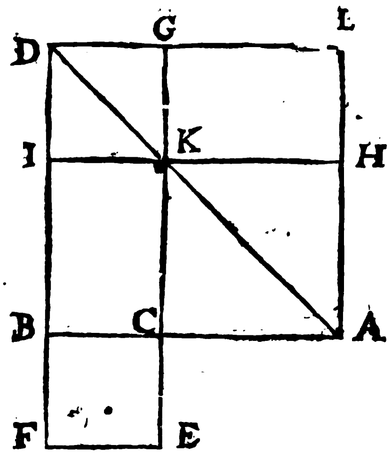
Demonstr. Rectangula AL, KE, sunt æqualia eidem CK, igitur & inter se: quare si illis addas commune CH, erit totum AH æquale ipsis KE, CH: sed KE GH una cum quadrato LG æqualia sunt quadrato CE; igitur AH una cum quadrato LG æquale est quadrato CE, sed AH comprehenditur sub AD composita ex AB, & adjecta BD, & sub BD, aut illi æquali DH, nam BH est quadratum. igitur rectang. sub AD & BD comprehensum, una cum quadrato lineæ intermediæ CB, æquale est quadrato lineæ CD compositæ ex CB, & BD.

In numeris sit AB 6. CB 3. BD 4. dico rectangulum AH id est quater 10. & quadratum lineæ CB seu LG quod est ter tria seu 9. æqualia esse quadrato lineæ CD seu 7. id est septies 7. quod est 49.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si recta secetur utcumque, erunt quadrata totius, & alterutrius segmenti, æqualia duobus rectangulis comprehensis sub totâ, & dicto segmento, unâ cum quadrato alterius segmenti.



Linea AB dividatur in C; dico quadratum AD lineæ AB, unà cum quadrato segmenti CB, id est CF, hæc duo simul, æqualia esse duobus rectangulis sub tota AB & dicto segmento CB comprehensis, unà cum quadrato reliqui segmenti AC.

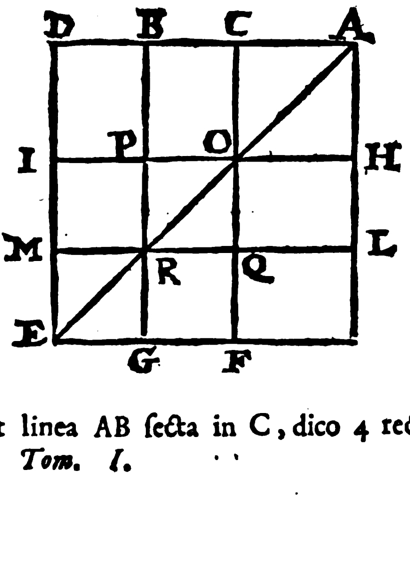
Demonstr. Hæc duo quadrata AD, CF æqualia sunt & rectangulo HD [comprehenso sub HI æquali ipsi AB, & linea ID æquali ipsi KI, seu CB.] & rectangulo KF [comprehenso sub KE, æquali ipsi AB, & sub EF æquali ipsi CB.] item rectangulo AK id est quadrato lineæ AC, omnibus scilicet suis partibus; igitur quadrata linearum AB, CB æqualia sunt quadrato segmenti AC, & duobus rectangulis comprehensis sub AB, CB.

In numeris sit AB 5. CB. 2. dico quinquies 5. seu 25. & bis duo, id est 4. quæ faciunt 29. æqualia esse numero bis 5. seu 10. bis sumpto & quadrato AC id est ter tria. seu 9. nam 10. 10. & 9. faciunt 29.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si recta secetur utcumque, erunt 4 rectangula comprehensa sub totâ, & uno segmento unà cum quadrato alterius segmenti, æqualia quadrato lineæ compositæ ex totâ & dicto segmento.



Sit linea AB secta in C, dico 4 rectangula comprehensa sub AB, BC, unà cum quadrato segmeenti AC, æqualia esse quadrato AE lineæ AD, compositæ ex AB & segmento BC; nam BC, BD sunt æquales, ducta diametro AE, ducantur parallelæ CF, BG, HI, LM.

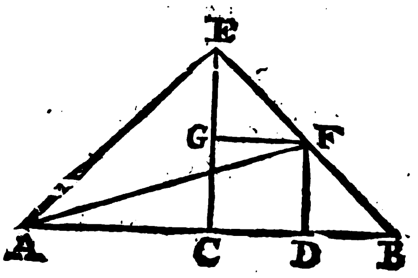
Demonstr. In quadrato AE invenitur quadratum AO, scilicet quadratum lineæ AC, & rectangula HR, LG, BM, quæ omnia unam lineam habent æqualem lineæ AB, aliam lineæ CB. Inveniuntur item CP, & GM quæ duo simul æquivalent rectangulo LP. & nihil aliud. Cum ergo quadratum AE sit æquale omnibus suis partibus, erit quadratum AE æquale quadrato segmenti AC, & 4 rectangulis comprehensis sub AB, BC.

In numeris sit AB 7. AC, 4. & CB tria; dico quadratum totius AD 10. id est decies decem seu 100. æquale esse quadrato lineæ AC 4. id est quater 4. seu 16. & rectangulo sub AB 7. & BC tribus seu 21. quatersumpto; nam 21. 21. 21. 21. & 16. faciunt 100.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si recta secetur bifariam, & non bifariam erunt quadrata partium inæqualium dupla & quadrati dimidiæ lineæ, & quadrati intermedii segmenti.



Sit linea AB divisa bifariam in C, & non bifariam in D, dico quadrata segmentorum inæqualium AD, DB simul, dupla esse quadrati dimidiæ lineæ hoc est AC, & intermediæ seu CD. Ducatur perpendicularis CE æqualis ipsi CA, junganturque lineæ AE, EB. & perpendicularis DF; & FG parallela lineæ AB; ultimò ducatur linea AF.

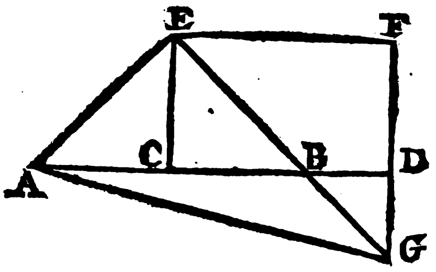
Demonstr. Quia lineæ AC, CE sunt æquales; anguli EAC, CEA æquales erunt (*per* 5.1.) & quia angulus C rectus est, erunt ambo semirecti, semirecti item sunt CEB, CBE; & quia angulus D rectus est, erit reliquus DFB semirectus: unde (*per* 6.1.) lineæ DB, DF sunt æquales, & pariter GF, EG æquales sunt lineæ CD. quadratum AE propter angulum rectum C (*per* 47.1.) æquale est quadratis laterum æqualium AC, CE, & consequenter duplum quadrati lateris AC. pariter quadratum lineæ EF duplum est quadrati lineæ GF, hoc est CD; sed quia anguli AEC, CEF sunt semirecti totus AEF rectus est & (*per* 47. 1.) quadratum lineæ AF est æquale quadratis laterum AE, EF; igitur solum quadratum lineæ AF est duplum quadratorum AC, CD, sed quadrata AD, DF (*per* 47. 1.) æqualia sunt quadrato lineæ AF, cum angulus D rectus sit; igitur quadrata AD, DF, aut AD, DB, sunt dupla quadratorum BC, CD.

In numeris sit linea AB 10. AD 8. DB 2. dico quadratum lineæ AD 8. hoc est 64. & lineæ DB 2. hoc est 4. esse dupla quadratorum lineæ AC 5. hoc est 25. & CD 3. seu 9. nam 64. & 4. sunt dupla 25. & 9.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si recta bifariam secetur, eique alia adjiciatur, erit quadratum lineæ compositæ ex totâ, & adjunctâ, cum quadrato adjunctæ: duplum quadrati dimidiæ & quadrati lineæ compositæ ex dimidiâ & adjunctâ.



Linea AB sit divisa bifariam in C, eique addatur BD, dico quadratum lineæ AD [compositæ ex totâ AB & adjuncta BD cum quadrato adjunctæ BD,] esse duplum & quadrati lineæ CD [compositæ ex dimidia CB & adjuncta BD] & quadrati lineæ, AC, dimidiæ scilicet lineæ AB. Ducatur enim perpendicularis CE æqualis lineæ AC & CB, alia item perpendicularis DF lineæ CE æqualis. Ducaturque linea EB usque in G, & linea EF, item linea AG.

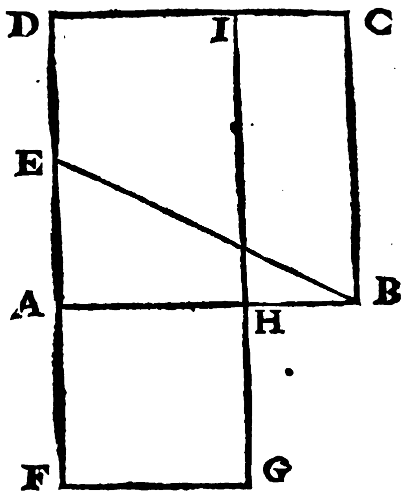
Demonstr. Cum lineæ AC, CE sint æquales; anguli CAE CEA æquales erunt, & quia angulus C rectus est, illi erunt semirecti; item anguli CEB, CBE semirecti sunt; & angulus GBD oppositus ad verticem semirecto CBE semirectus est, & cum angulus D sit rectus reliquus BGD semirectus erit (*per* 32. 1.) & (*per* 6. 1.) latera BD, DG sunt æqualia, lineæ item EF, FG sunt æquales (*per eandem*) cum anguli GEF, EGF sint æquales, nempe semirecti, lineæ EF CD conjungentes lineas CE, DF æquales & parallelas (*per* 33. 1.) sunt æquales; quia autem angulus C rectus est, quadratum lateris AE æquale est quadratis AC, CE, (*per* 47. 1.) quæ cum æqualia sint inter se, quadratum AE erit duplum quadrati AC. Item quia angulus F rectus est quadratum EG duplum erit quadrati EF, aut CD; & quia angulus AEG constans duobus semirectis, rectus est, quadratum AG est æquale quadratis AE, EG, igitur solum quadratum AG est duplum quadratorum AC, CD; sed quia angulus D rectus est, quadrata AD, DG, seu DB, sunt æqualia quadrato AG: igitur quadrata AD, DB. Dupla quadratorum AC, CD.

In numeris AB sit 6. AC, 3. BD 4. quadratum AD 10. erit 100. & BD 4. erit 16. dico 100. & 16. esse dupla quadrati AC 3. hoc est 9. & CD 7. seu 49. nam 49. & 9. seu 58. sunt media pars 116.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Datam lineam ita secare, ut rectangulum comprehensum sub illâ & uno segmento, æquale sit quadrato alterius segmenti.



Sit linea AB ita dividenda, supra illam fiat quadratum AC (*per* 46. 1.) cujus dividatur bifariam latus AD, in E; ducta lineâ EB; sumatur illi æqualis EF, fiatque quadratum supra AF, cujus latus GH producatur in I. dico rectangulum HC, comprehensum sub BC, hoc est AB (*cum sint æquales*) & sub segmento HB æquale esse quadrato segmenti AH, nempe quadrato AG.

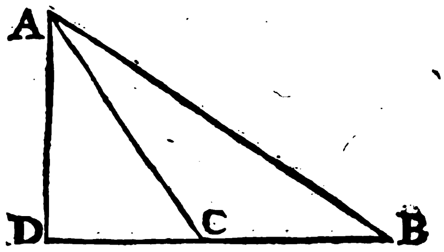
Demonstr. Cum linea DA sit divisa bifariam in E, eique adjuncta sit AF, erit rectangulum DG comprehensum sub DF composita ex linea DA & adjuncta AF, & sub FG seu adjuncta AF (*nam sunt æquales*;) una cum quadrato AE æquale quadrato lineæ EF, aut EB illi æqualis (*per* 6.) sed quadratum lineæ EB est æquale quadratis AB, AE, (*per* 47. 1.) igitur quadrata linearum AB, AE æqualia sunt rectangulo DG, & quadrato AE, quod quia commune est, si utrinque auferatur, restant rectangulum DG, & quadratum lineæ AB, seu ABCD æqualia, habent autem commune rectangulum DH, quod si utrinque auferatur: erit quadratum AG æquale rectangulo HC.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

In triangulo obtusangulo, quadratum lateris oppositi angulo obtuso, erit æquale quadratis reliquorum laterum, & insuper duobus rectangulis comprehensis sub uno latere (in quod demissa est perpendicularis) & sub lineâ quæ restat usque ad perpendicularem.

Sit



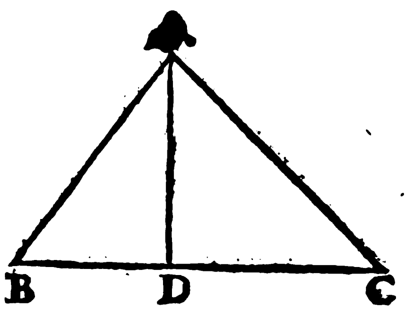
Sit rectangulum A B C, cujus angulus A C B obtusus. dico quadratum lateris A B esse æquale quadratis AC, CB, & duobus rectangulis comprehensis sub B C, & lineâ C D, quæ restat usque ad perpendicularem A D.

Demonstr. In triangulo A B D cujus angulus D rectus, (*per* 47. 1.) quadratum A B, est æquale quadratis AD, BD; & quia linea BD divisa est in C (*per* 4.) erit ejus quadratum æquale quadratis BC, CD, & duobus rectangulis comprehensis sub B C, CD, quæ omnia loco quadrati BD poni possunt, igitur quadratum A B est æquale quadratis A D, DC, CB, & duobus rectangulis sub BC, CD comprehensis. Loco autem quadratorum A D, D C potest poni solum quadratum AC illis æquale (*per* 47. 1.) igitur quadratum A B est æquale quadratis AC, CB & duobus rectangulis comprehensis sub BC, CD.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

In triangulo quocumque, quadratum lateris oppositi angulo acuto; unâ cum duobus rectangulis comprehensis sub illo latere in quod cadit perpendicularis & sub linea posita inter angulum acutum, & perpendicularem; æquale est quadrato reliquorum laterum



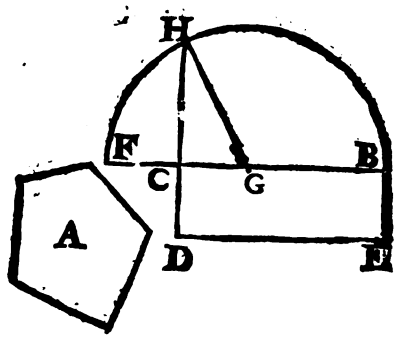
Sit triangulum A B C cujus angulus C acutus. demissâ perpendiculari A D, dico quadratum lateris A B oppositi angulo C acuto unâ cum duobus rectangulis comprehensis sub B C, CD, æquale esse quadratis laterum, A C, C B.

Demonst. Quia linea BC divisa est utcumque in D, erit (*per* 7.) quadratum totius BC, & segmenti D C, æquale duobus rectangulis sub B C, C D, & quadrato lineæ B D; addatur commune AD, erunt quadrata BC, DC, AD æqualia duobus rect. sub BC, CD, & duobus quadratis B D, A D, pro quibus duobus quadratis BD, AD potest poni quadratum AB illis æquale (*per* 47. 1.) sicut loco quadratorum D C, A D potest poni quadratum AC: igitur erunt quadrata BC, AC; æqualia duobus rectangulis sub BC, DC, & quadrato A B, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Dato rectilineo æquale quadratum construere.



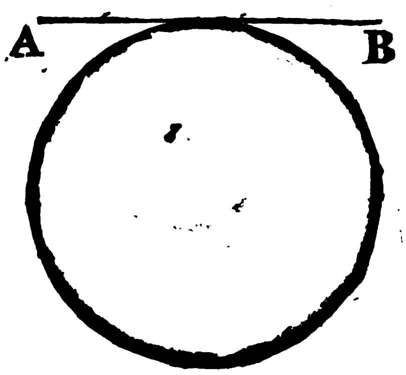
Sit datum rectilineum A; cui æquale quadratum construendum est. Fiat (*per* 45. 1.) parallelogrammum rectangulum æquale rectilineo A; sitque B D, cujus si latera B C, CD æqualia sint, factum est quod jubetur; si verò sint inæqualia, sit BC majus quàm CD, producaturque linea BC, ita ut CF sit æqualis ipsi CD. Dividatur bifariam B F in G, factoque ex G ut centro intevallo BG, aut GF, semicirculo B H G producatur linea DC, usque in H, dico quadratum lineæ C H si fieret, esse æquale parallelogrammo BD, & consequenter rectilineo A. Ducatur enim linea G H.

Demonstr. Quoniam linea B F divisa est bifariam in G, & non bifariam in C, erit (*per* 5.) quadratum dimidiæ, scilicet G F, aut GH, illi æqualis, æquale rectangulo comprehenso sub BC, CF, aut CD, hoc est rectangulo BD, & quadrato GC; sed quadrato G H (*per* 47.1.) æqualia sunt quadrata G C, CH: igitur quadrata GC, CH æqualia sunt rectangulo BD, & quadrato G C, quod quadratum G C commune utrique, si auferatur: restabit quadratum C H æquale rectangulo B D; & consequenter rectilineo A.

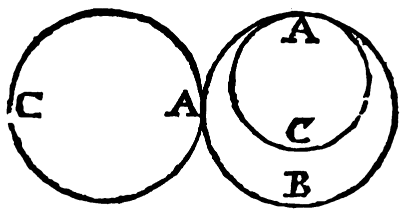
EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

Definitiones.

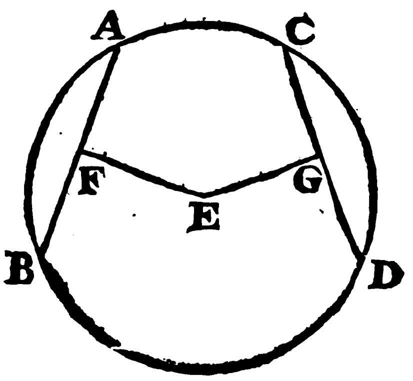
1. Æquales circuli sunt quorum diametri, aut semidiametri sunt æquales.



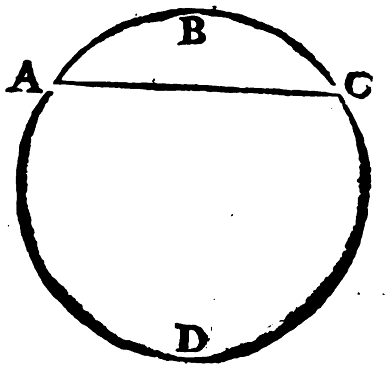
2. Linea circulum tangit, quæ circulo occurrens, cum tamen ulterius producta non secat. ut linea A B.



3. Circuli se tangunt qui sibi mutuo occurrentes se tamen invicem non secant. Tales sunt circuli AB, AC.

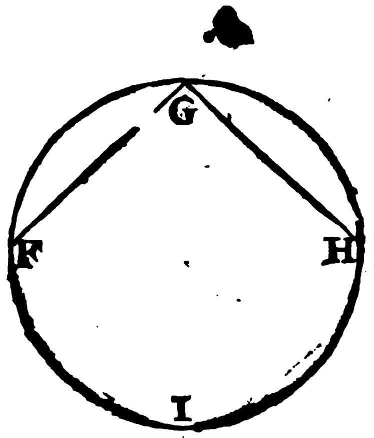


4. Lineæ in circulo æqualiter à centro distant, cum perpendiculares ad ipsas à centro ductæ, sunt æquales; ut lineæ AB, CD, nam perpendiculares EF, E G sunt æquales.



5. Segmentum circuli est figura comprehensa peripheriâ circuli, & lineâ rectâ; ut figurâ ABC vel ADC.

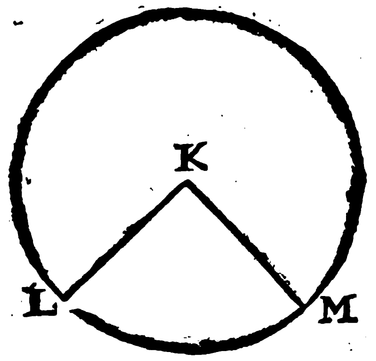
6. Angulus segmenti est angulus mixtus quem facit peripheria, cum linea recta; ut angulus BAC, vel ADC.



7. Angulus in segmento esse dicitur, in quo lineæ eum comprehendentes continentur; ut angulus FGH dicitur esse in segmento FGH.

8. Angulus insistere dicitur peripheriæ cui opponitur ut angulus FGH insistit peripheriæ FIH.

9. Sector

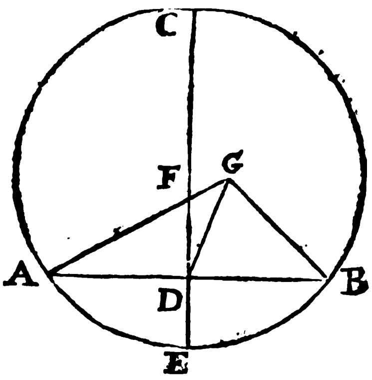


Sector est figura comprehensa duabus semidiametris & arcu inter illas intercepto; *talis est figura K L M.*

PROPOSITIO I.

Problema.

Dati circuli centrum reperire.



Sit inveniendum centrum circuli A B C. Ductâ lineâ AB, & divisa bifariam in D, agatur perpendicularis D C; dividatur linea C E bifariam in puncto F, hoc dico esse centrum circuli.

Demonst. Si centrum est in lineâ C E non potest esse aliud quam punctum F, alioquin omnes lineæ à centro ad peripheriam non essent æquales. sed centrum non est extra lineam C E, nam sit extra illam sitque punctum G, ducantur lineæ G A, G B, GD. in triangulis G D A, G D B cum latera, A D, D B sint æqualia, item D E sit commune & lineæ G A, GB (*per def.circ.*) sint æquales anguli GDA GDB (*per* 8. 1.) æquales erunt, & consequenter recti, sed iam F D A, erat rectus; igitur anguli F D A, G D A æquales essent, pars & totum, quod est absurdum.

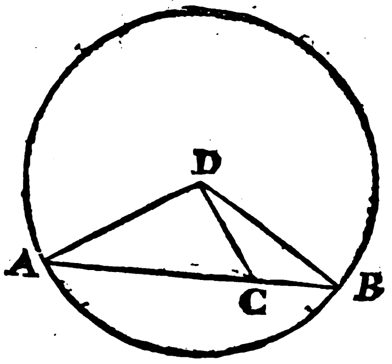
COROLLARIA.

Ex hoc patet si in circulo una linea aliam bibariam, & perpendiculariter secat, in ea esse centrum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si in circuli circumferentiâ duo puncta sumantur, linea recta illa connectens tota intra circulum cadit.



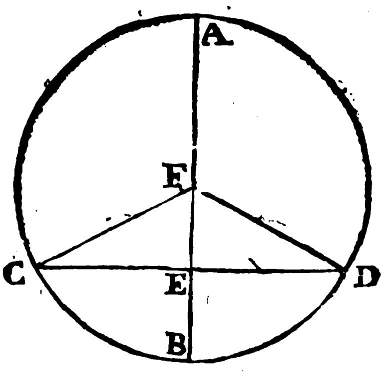
Duo puncta circumferentiæ A & B connectat linea A B, dico totam esse intra circulum. Si enim dubitetur de aliquo eius puncto utrum sit intra circulum, sit illud C. Ex centro D ducantur lineæ DA, DB, DC.

Demonstr. In triangulo A D B; latera D A, D B sunt æqualia igitur (*per* 5. 1.) anguli A & B sunt æquales. sed (*per* 16. 1.) angulus D C B est major angulo A, ergo & angulo B major erit, igitur (*per* 19. 1.) latus D B oppositum majori angulo D C B, majus erit latere D C opposito minori angulo B. Igitur ex centro D usque ad C non invenitur peripheria. quare punctum C est intra circulum, idem de aliis punctis lineæ A B ostendi potest, tota igitur est intra circulum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si diameter lineam non per centrum ductam bifariam secet, perpendicularis ad illam erit. Si verò fuerit perpendicularis eam bifariam secat.



Diameter A B lineam C D non transeuntem per centrum, dividat bifariam in E. dico primò angulos F E D, F E C esse æquales.

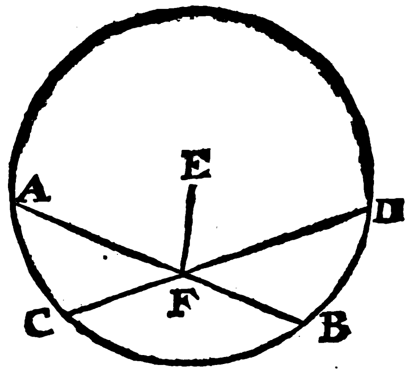
Demonst. Triangula FED, FEC habent latera ED,EC æqualia, EF est commune & bases FC, FD (*per def.cir.*) sunt æquales: igitur (*per* 8. 1.) anguli FED, FEC sunt æquales & recti.

Vicissim si anguli FED, FEC, sint æquales dico lineas CE, ED esse æquales, nam cum lineæ CF, FD, sint æquales; (*per* 5. 1.) anguli C & D sunt æquales, quare triangula F D E, F C E habent angulos C, & D, F E D, F E C, æquales, & latus FE commune; igitur (*per* 26. 1.) latera EC, ED æqualia erunt.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duæ rectæ in circulo se secent extra centrum; non se mutuò bifariam secabunt.



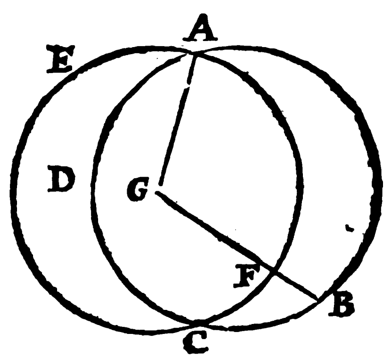
Duæ lineæ A B, C D se mutuo secent in F, quod non sit centrum: dico illas non se mutuò bifariam secare: & primò si una per centrum transiret certum est eam non secari bifariam, si verò neutra transeat per centrum, ex centro E, ducatur linea E F.

Demonstr. Si linea C D bifariam secatur in F (*per* 3. *hujus*) anguli E F D, E F C erunt recti; si linea A B etiam bifariam secatur in F, anguli EFA, EFB recti erunt: igitur anguli EFA, EFC ambo recti, & æquales essent, pars & totum, quod est absurdum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Duo circuli se mutuò secantes, non habent idem centrum.



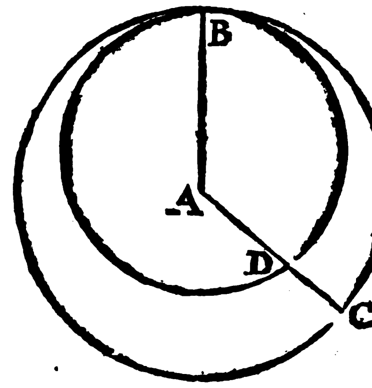
Duo circuli ABCD, A F C E se secent in A, dico illos non habere idem centrum, habeant enim idem centrum G, si fieri potest. Ducantur lineæ G A, G B.

Demonstr. Lineæ G A, G B ductæ ex eodem centro ad circumferentiam circuli A B C D essent æquales, æquales item essent GA, GF; igitur GB, GF, eidem G A æquales, inter se æquales essent; pars & totum, quod est absurdum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Duo circuli interius se tangentes non habent idem centrum.



Sit enim si fieri potest, idem centrum A circulorum se tangentium in B. Ducantur lineæ A B, A C.

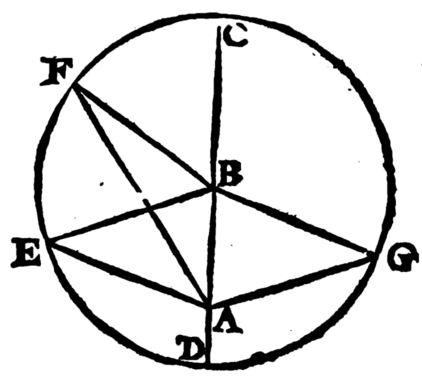
Demonstr. Sequeretur lineas A C, A D eidem A B esse æquales: ergo & inter se; pars & totum; quod est absurdum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si intra circulum ex alio puncto quàm centro, plurimæ lineæ ducantur ad circumferentiam.

1. *Maxima erit quæ per centrum transit.*
2. *Reliqua ejusdem, erit minima.*
3. *Reliquarum ea major est, quæ maximæ propinquior.*
4. *Duæ tantum duci possunt æquales.*



Ex puncto A quod non sit centrum, cadant plurimæ lineæ in circumferentiam, AC, AF, AE, AD, & AC quidem per centrum.

Dico primò A C esse maximam.

Demonstratio. In triangula A B F latera A B, B F sunt majora reliquo A F, (*per* 20. 1.) sed linea A C est æqualis lineis A B B F, [cum B F, B C sint æquales; & A B communis; igitur A C est major quàm A F. idem ostendissem de B E.

Dico secundò reliquam A D esse omnium minimam.

Demonstratio.

Demonstratio. In triangulo E A B latera EA, AB, (*per* 20. 1.) sunt majora reliquo EB, sed BD est æqualis ipsi EB, igitur EA, AB sunt majora quam BD, habent autem communem AB, quæ si ab utraque auferatur, restabit EA, major quàm A D.

Dico tertiò, AF propiorem maximæ AC, majorem esse quàm A E remotiorem.

Demonstr. In triangulis ABF, ABE latus AB est commune, latera BF, BE sunt æqualia, angulus FBA major angulo EBA, igitur (*per* 24. 1.) basis FA, major erit basi EA.

Dico quartò, duas tantum ex puncto A duci posse æquales. Fiat angulus ABG æqualis angulo ABE, ducatúrque AG.

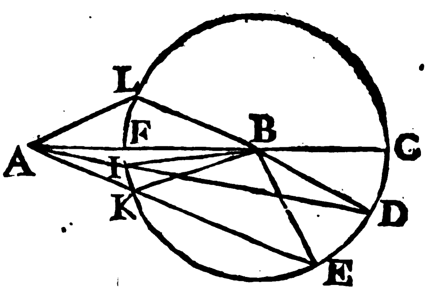
Demonstr. Quia in triangulis ABE, ABG latus A B est commune, & latera BE, BG sunt æqualia, item anguli A B E, A B G facti sunt æquales, (*per* 2. 1.) bases AE, AG erunt æquales, neque alia duci potest æqualis lineæ E A, quia quæcumque ducatur, aut magis recederet, aut magis accederet ad maximam AC, quam A E, aut A G: ergo illis aut major, aut minor esset.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si ex puncto extra circulum accepto, ad eum plures rectæ ducantur;

1. *Earum quæ in cavam peripheriam cadunt; maxima est quæ per centrum transit.*
2. *Reliquarum ea major est quæ maximæ propior.*
3. *In convexam peripheriam cadentium, ea minima est, quæ producta per centrum transit.*
4. *Quæ minimæ propior est, remotiore minor est.*
5. *Non plures quàm duæ æquales; sive in cavam sive in convexam peripheriam ducentur.*



Ex puncto A in concavam peripheriam CDE cadant lineæ AC, AD, AE, dico AC per centrum B transeuntem maximam esse, ducatur enim linea BD.

Demonstr. Latera AB, BD (*per* 20. 1.) sunt majora reliquo AD, sed linea A C æqualis est ipsis AB, BD, (*cum BD, BC sint æquales,*) igitur AC major est quàm A D. idem dicendum de A E.

Dico secundò, AD, propiorem ipsi AC maximæ, quam sit AE, ipsa AE majorem esse. Nam ducatur linea EB.

Demonstratio. In triangulis A B E, A B D, cum latus A B sit commune, & latus B D æquale lateri B E, & angulus A B D major, angulo ABE, erit (*per* 24. 1.) basis AD, major basi AE.

Dico tertiò, linearum cadentium in convexam peripheriam K I F; A F quæ producta transit per centrum minimam esse; ducatur enim linea I B.

Demonstr. In triangulo ABI, latera AI, IB, latere AB sunt majora (*per* 20. 1.) ergò ablatis lineis æqualibus B I, B F, restabit F A minor quam A I.

Dico quartò, AI, propiorem minimæ A F; quàm sit AK, ipsa A K minorem esse.

Demonstratio. Cùm enim lineæ AI, IB, lineis A K, K B (*per* 21. 1.) sint minores; ablatis lineis æqualibus B K, B I, linea A I restat minor lineâ A K.

Dico quintò, non plures quàm duas æquales cadere in circulum; fiat enim angulus ABL æqualis angulo ABK, & ducatur linea AL, hanc solam dico esse æqualem lineæ AK.

Demonstr. In triangulis A B L, A B K, latus AB est commune, & latera BK, BL sunt æqualia, item angulus ABL factus est æqualis angulo ABK, igitur (*per* 4. 1.) bases AK, AL sunt æquales, nulla autem alia potest duci æqualis ipsi AK, quàm AL, quia quæcumque duceretur magis accederet ad AF, aut ab illa magis recederet quàm AL, quare minor esset aut major quám AL atque adeo quam AK. Eodem modo ostendam duas tantum duci posse æquales ad concavam peripheriam.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

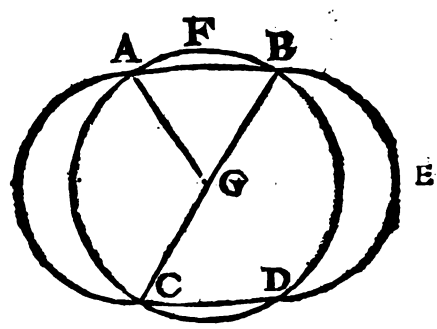
Si ab uno intra circulum puncto, tres lineæ cadant in peripheriam æquales, illud punctum centrum est.

Si enim illud punctum esset aliud à centro, duæ tantum lineæ æquales caderent in peripheriam (*per* 7. 3.) sed supponuntur cadere tres æquales, igitur punctum illud non est diversum à centro.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Duo circuli non se secant, in pluribus quàm duobus punctis.



Si enim fieri potest duo circuli se secent in tribus punctis A, B, C. invento centro circuli AFBC, ducantur lineæ GA, GB, GC.

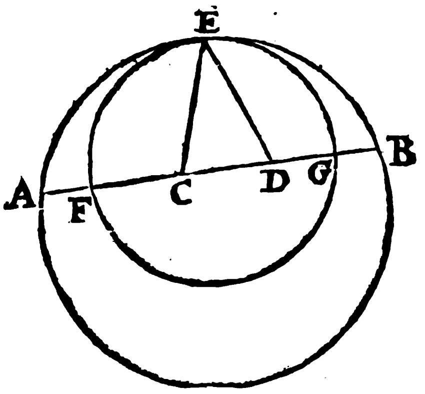
Demonstr. Tres lineæ GA, GB, GC ex centro G ad peripheriam circuli AFBC ductæ sunt æquales: sed illæ tres sunt ductæ ad circumferentiam circuli ABCE, quare per præcedentem, G erit centrum illius: igitur duo circuli se secantes

secantes idem haberent centrum (*contra propositionem 5. 3.*)

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si duo circuli se interiùs tangant, linea ducta per eorum centra transit per contactum.



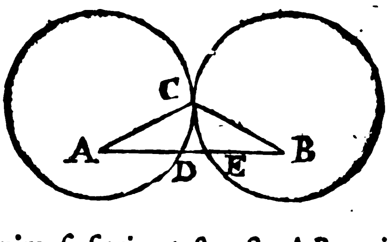
Si enim fieri potest linea A B per centra eorum transiens in contactum non cadat, sit centrum parvi circuli C, & majoris D, sitque contactus B; ducantur lineæ CE, ED.

Demonstr. Lineæ CF, CE sunt æquales; igitur additâ communi C D, tota D F est æqualis lineis C E, C D, sed CE, ED (*per* 20. 1.) reliqua E D sunt majores; igitur linea D F, est major quàm D E, sed quia D est centrum majoris circuli, lineæ D E, D A sunt æquales: igitur linea D F est major quam D A; pars quàm totum quod est absurdum.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si duo circuli se exteriùs tangant, recta centra conjungens per contactum transit.



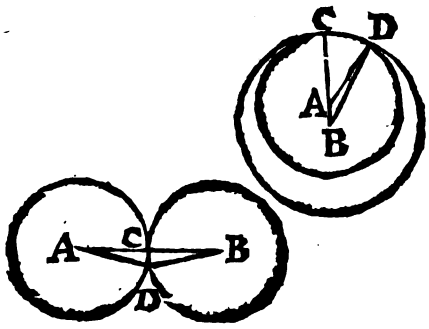
Sit enim si fieri potest recta A B conjungens duo centra A & B circulorum exteriùs se tangentium, quæ non transeat per contactum C. Ducantur lineæ A C, B C.

Demonstr. Sequeretur in triangulo A C B duo latera A C, C B reliquo A B esse minora (*contra prop.*20. 1.) nam A C, A D sunt æquales, sicut BC, BE, sed linea A B est major quàm A D, BE: igitur linea A B major esset quam A C, C B.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Circuli se tangunt in uno tantum puncto.



Primò si duo circuli se interiùs tangant; dico se tangere in uno tantum puncto, & non in toto arcu. Ducatur enim per eorum centra A & B linea A B quæ in contactum C cadet. Si dicantur se tangere adhuc in puncto D, ducantur lineæ A B, B D.

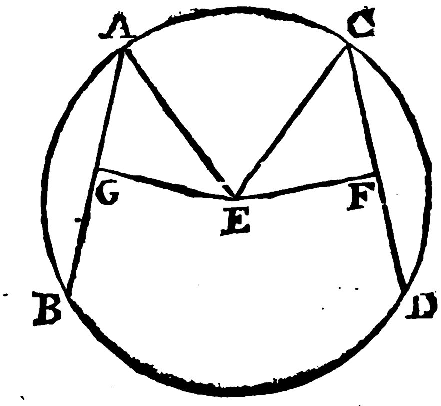
Demonstr. Lineæ A D, AC, ex eodem centro A ductæ sunt æquales, & additâ communi A B, tota B C est æqualis lineis B A, A D, sed B D est minor (*per* 20. 1.) lineis B A, A D: igitur linea BD est minor quàm BC, igitur linea BD non pervenit ad circumferentiam circuli majoris alioquin æqualis esset. Si verò circuli se tangant exteriùs, sit linea A B conjungens centra A & B quæ (*per* 12.) transit per contactum C; si dicantur se tangere adhuc in puncto D ducantur lineæ A D, B D.

Demonstr. Sequeretur lineas B D, D A esse æquales toti A B, quia B C, B D sunt æquales; sicut AC, AD. & tamen duo latera BD, DA reliquo AB majora esse debent (*per* 20. 1.)

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

In circulo æquales rectæ, æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter distant à centro æquales sunt.



Sint æquales AB, C D, ad quas ex centro ducantur perpendiculares E F, E G, dico illas esse æquales, hoc est enim æqualiter distare à centro. Ducantur lineæ E A, E C.

Demonstr. Lineæ perpendiculares E G, E F, lineas A B, BD bifariam dividunt (*per* 3.) quare cum A B, C D sint æquales, eorum dimidiæ A G, C F æquales erunt; in triangulo E G A rectangulo quadratum lineæ E A æquale est quadratis linearum A G, G E; (*per* 47. 1.) & pariter quadratum lineæ E C, æquale est quadratis linearum C F, F E; sed quadrata linearum æqualium E A, E C sunt æqualia; igitur quadrata A G, G E; æqualia sunt quadratis CF, FE, quare si ex iis auferas quadrata æqualia A G, C F,

cum

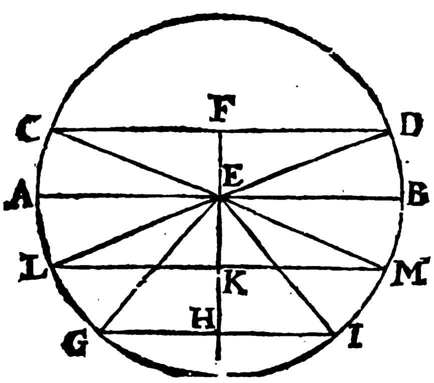
[cum lineæ sint æquales] quadrata linearum GE, EF erunt æqualia & consequenter lineæ EG, EF, æquales.

Viciſſim verò ſi lineæ EG, EF, ſint æquales [hoc eſt ſi lineæ AB, CD, æqualiter diſtent à centro] dico lineas AB, CD eſſe æquales, nam pariter oſtendam quadrata AG, GE, æqualia eſſe quadratis CF, FE, quare auferendo quadrata æqualia EG, EF, reſtant quadrata AG, CF æqualia, & conſequenter lineæ GA, FC æquales, & eorum duplæ AB, CD æquales.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Linearum circulo inſcriptarum maxima eſt diameter; cæterarum quæ centro propior, ea major eſt.



Primò dico diametrum AB eſſe omnium linearum in circulo inſcriptarum maximam. ſit enim alia quævis CD, ducantur lineæ EC, ED.

Demonſtr. In triangulo CED duo latera CE, ED, reliquo CD ſunt majora (*per* 20. 1.) ſed linea AB eſt æqualis duabus CE, ED ut patet; igitur AB major eſt quàm CD.

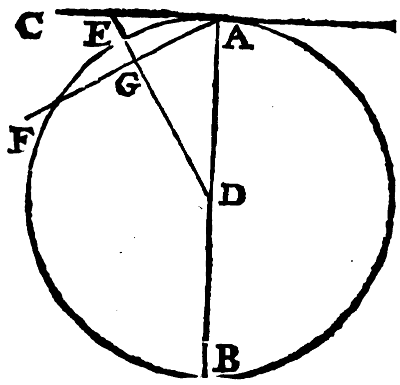
Secundò linea GI magis diſtet à centro quàm CD, hoc eſt perpendicularis EH, ſit major quàm EF, dico CD majorem eſſe. Abſcindatur ex EH; linea EK æqualis lineæ EF, & per K agatur perpendicularis LM, ducanturque lineæ EL, EM, EG, EI.

Demonſtr. In triangulis LEM, GEI, cum latera EM, EL, ſint æqualia lateribus EG, EI, (*per def. circ.*) & angulus LEM major angulo GEI, erit (*per* 24. 1.) baſis LM, major baſi GI, ſed lineæ LM, CD æqualiter à centro diſtantes ex ſuppoſitione, ſunt (*per* 14.) æquales, igitur linea CD eſt major quàm GI.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Perpendicularis ad extremitatem diametri tota extra circulum cadit, eumque tangit: neque inter ipſam, & circulum alia recta ad contactum ducetur, quin circulum ſecet.



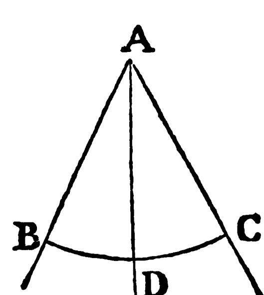
Sit diameter AB, ad quam ſit perpendicularis AC; dico primò lineam AC totam cadere extra circulum; dubitetur enim de illius aliquo puncto utrum ſit intra circulum aut in ipſa circumferentia ſitque punctum E, ex centro ducatur recta DE.

Demonſtr. In triangulo DAE angulus DAE, rectus eſt, igitur angulus DEA acutus eſt alioquin tres anguli trianguli ſuperarent duos rectos (*contra prop.* 32. 1.) quare linea DE oppoſita majori angulo DAE major erit quàm DA, ſed DA pertingit ad circumferentiam: ergo DE ultra circumferentiam perveniet, & punctum E extra circulum poſitum erit.

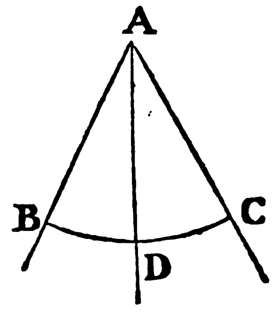
Dico ſecundò, nullam infra AC duci poſſe lineam ad contactum A quæ circulum non ſecet, ſit enim hæc AF, quia angulus DAF eſt acutus, ſi ad eam ducatur perpendicularis, hæc cadet ad partes AF, ſit igitur perpendicularis DG.

Demonſtratio. Quia angulus DGA rectus, major eſt angulo DAF; (*per* 19. 1.) latus DA majus erit latere DG, ſed DA pervenit ad circumferentiam circuli; igitur DG ad illam non pervenit, & punctum G invenitur intra circulum.

Reliqua quæ deducuntur ex hac propoſitione, nempe quod angulus contingentiæ compoſitus ex circumferentia circuli & tangente, ut angulus EAC, ſit minor quocumque angulo rectilineo acuto, nam quantuluſcumque accipiatur angulus CAF, ſemper circumferentia videbitur comprehendere cum tangente angulum mixtum minorem. Hæc inquam corollaria ſunt fallacia ut bene notat Tacquetus; oriunturque præcisè ex eo quòd loqui videamur de angulo quaſi de vera ſpecie quantitatis cum tamen ſit tantum ejus proprietas nempe inclinatio linearum, quæ inclinatio etiamſi minuantur lineæ; eadem tamen manet.



Cum enim angulis attribuimus prædicata quæ videntur ſoli quantitati convenire, ut cum dicimus unum angulum eſſe majorem, minorem, duplum, triplum, dividi in duas, tres partes, dicendum eſt

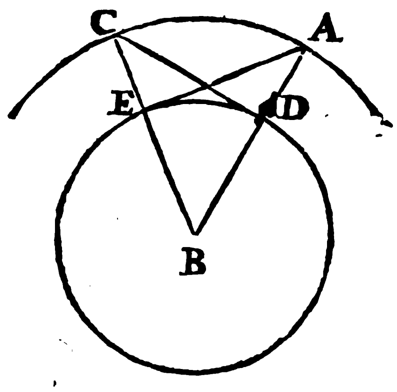


nos non tam loqui de ipsis angulis præcisè & in se quàm de illorum mensuris. Hoc sensu sit angulus B A C quem volumus dividi bifariam lineâ A D. nolumus illam inclinationem dividi: sed intelligimus quod quicumque arcus fiet ex puncto A ut centro, dividetur bifariam à lineâ AD, & in hoc sensu accipienda sunt reliqua quæ tribui possunt angulis. Cum igitur mensura anguli contingentiæ non sit eadem, ac anguli rectilinei, immò nulla sit, ideò angulus contingentiæ incomparabilis est cum angulo rectilineo. Nam in figura propositionis si ex A ut centro fierent plurimi arcus: invenirentur arcus intercepti inter tangentem AC & circumferentiam A F, aliquando minores aliquando majores arcubus interceptis inter lineas AC, AF; unde concludi non potest angulum contingentiæ absolutè minorem esse angulo rectilineo C AF, quod monere volui ne demonstrationes mathematicæ tricis Philosophicis & divisibilitati partium implicentur.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

A dato puncto rectam ducere, quæ datum circulum tangat.



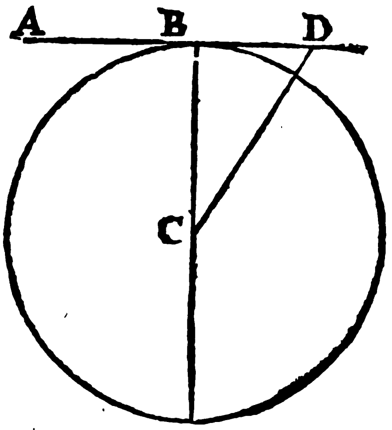
Sit punctum datum A, ex quo ad centrum circuli B ducatur linea A B. Ex centro B intervallo B A, duc circulum A C. & per punctum D duc perpendicularem D C; item lineam C B secantem minorem circulum in puncto E. dico lineam A E tangere parvum circulum in E.

Demonstr. Triangulum C B D, habet duo latera BD, BC, æqualia duobus lateribus AB, B E trianguli A B E, (*per def. cir.*) & angulus B iis comprehensus est communis: igitur (*per* 4. 1.) triangula sunt æqualia, & anguli C D B, A E B oppositi lateribus æqualibus C B, AB sunt æquales; sed CDB est factus rectus, igitur BEA rectus erit & E A (*per* 16.) erit tangens.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si linea circulum tangat, recta à centro ad contactum ducta ad eum, perpendicularis est.

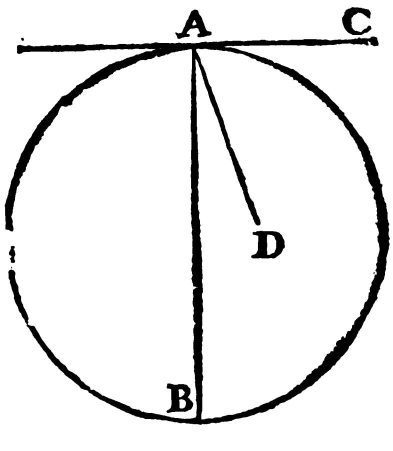


Linea AB circulum tangat in B dico lineam CB ad eam esse perpendicularem; si enim non est, ad eam ex centro C ducatur perpendicularis.

Demonstr. Quia angulus CDB rectus est, major erit angulo C B D, alioquin tres anguli majores essent duobus rectis (*contr. pr.* 32. 1.) igitur (*per* 19. 1.) linea C B opposita majori angulo C D B, major esset linea C D; quod est absurdum cum C D extra circulum cadat.

PROPOSITIO XIX.

Perpendicularis ad tangentem, in puncto contactus ducta, per centrum transit.



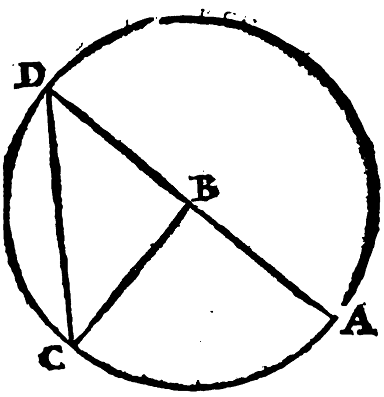
Sit linea A B perpendicularis, ad tangentem AC, ducta per punctum contactus A. dico in A B esse centrum circuli. Sit enim si fieri potest centrum D extra illam; ducatur linea D A.

Demonstr. (*per* 18.) linea D A est perpendicularis ad tangentem: igitur angulus D A C rectus erit, sed B A C jam est rectus, igitur anguli BAC, D A C æquales essent; pars & totum, quod est absurdum.

PROPOSITIO XX.

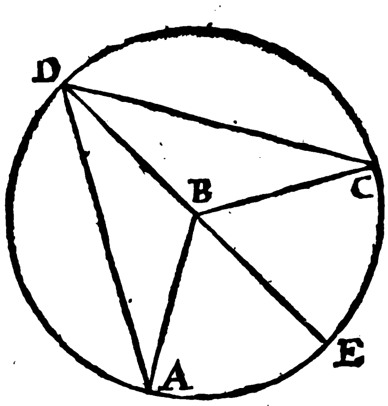
Theorema.

Angulus ad centrum est duplus anguli ad peripheriam; si eidem arcui insistant.



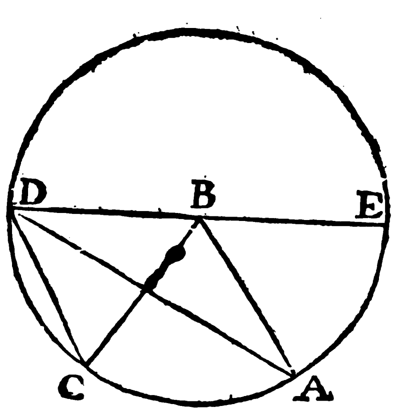
Sint anguli ABC, ADC eidem arcui AC insistentes: dico angulum ABC in centro B positum, esse duplum anguli D in peripheria. Triplex casus esse potest. In primo latera AB, AD coincidunt.

Demonstr. In triangulo BDC latere DB producto in A, [*per* 32. 1.] angulus externus ABC æqualis est duobus internis D & C, qui cum sint æquales [*per* 5. 1.] nam lineæ BD, BC sunt æquales, angulus ABC erit duplus anguli D.



In secundo casu latera non coincidunt. Ducatur linea DBE.

Demonstr. Per partem præcedentem, angulus ABE est duplus anguli ADB, item angulus EBC anguli BDC, ergo totus ABC est duplus totius ADC.



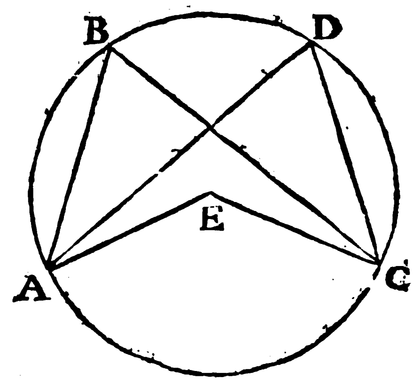
In tertio casu latera se secant. Ducatur linea DBE.

Demonstr. Per primam partem totus angulus EBC est duplus anguli EDC, & EBA anguli EDA, qui si auferantur ex suis totis, restabit reliquus ABC reliqui ADC duplus.

PROPOSITIO XXI.

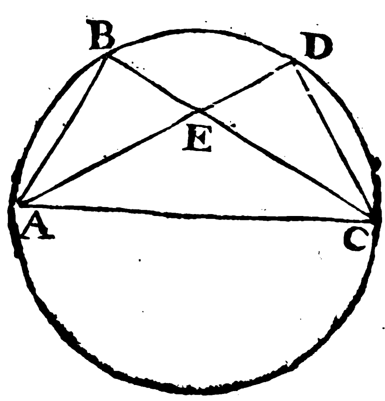
Theorema.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt æquales & qui eidem arcui insistunt; etiam sunt æquales.



Sint primò duo anguli ABC, ADC in eodem segmento ABDC quod superet semicirculum: dico illos esse æquales; ducantur enim ad centrum circuli E lineæ AE, CE.

Demonstr. Anguli B & D in peripheria sunt uterque dimidia pars anguli E ad centrum [*per* 20.] ergo sunt inter se æquales.



Secundò sint anguli ABC, ADC in eodem segmento circuli ABDC, quod non superet semicirculum, dico illos adhuc esse æquales.

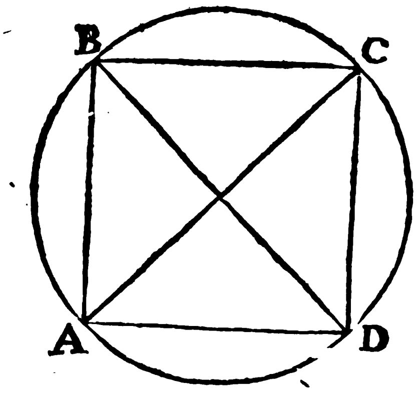
Demonstr. Omnes anguli trianguli BEA sunt æquales omnibus angulis triangulis DEC, hoc est duobus rectis (*per* 32. 1.) sed anguli BEA, DEC ad verticem oppositi (*per* 15. 1.) sunt æquales: ergo reliqui duo ABE, BAE, simul sunt æquales reliquis duobus CDE, DCE sed [*per primam partem hujus*] anguli BAE, DCE, in eodem segmento BACD superante semicirculum; sunt æquales; ergo reliqui ABC, CDE sunt æquales.

Vides angulos ABC ADC, in eodem segmento ABDC existentes, insistere eidem arcui AC, ideoque patet angulos eidem arcui insistentes esse æquales.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Quadrilaterorum circulo inſcriptorum oppoſiti anguli duobus rectis ſunt æquales.



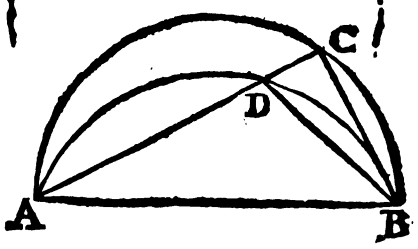
Sit quadrilaterum ABCD circulo inſcriptum, dico angulos A & C oppoſitos, duobus rectis eſſe æquales. Ducantur enim lineæ AC, BD.

Demonſtr. Trianguli ABD omnes anguli ſunt æquales duobus rectis [*per* 31. 1.] igitur ſi loco A B D ponas A C D illi æqualem [*per* 21.] cum eidem arcui A B inſiſtant; & loco ADB; ponas ACB illi æqualem; cum eidem arcui A B inſiſtant, angulus A, cum angulis ACD & ACB hoc eſt cum angulo totali C duobus rectis æqualis erit.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Super eâdem rectâ; conſtituta ad eaſdem partes duo ſegmenta circulorum ſimilia, æqualia ſunt.



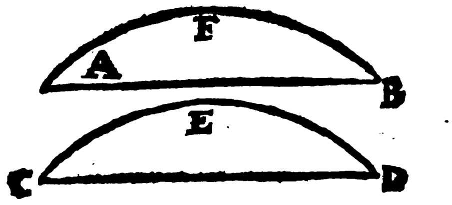
Super rectâ AB; dico ad eaſdem partes conſtiſtituta duo ſegmenta ſimilia, hoc eſt quæ contineant angulos æquales, æqualia eſſe; ſint enim ſi fieri poteſt ita conſtituta ACB & ADB, dico illa congruere, ſi enim non congruunt, ducatur linea AC utrumque ſecans in C & D, & ducantur lineæ BD, BC.

Demonſtr. Patet angulum ADB externum, majorem eſſe angulo C interno [*per* 21. 1.] igitur non continent angulos æquales: ergo non ſunt ſimilia ſegmenta: contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Super æqualibus rectis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt æqualia.



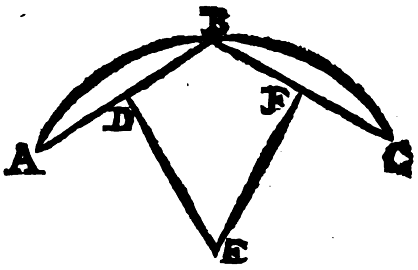
Sint ſuper lineis AB, CD æqualibus, conſtituta duo ſegmenta circulorum AFB, CED, ſimilia; dico illa eſſe æqualia.

Demonſtr. Intelligatur enim linea CD ſuperponi lineæ AB quia illi æqualis eſt congruet. tunc ſegmentum CED congruet cum ſegmento F A B, alioquin ſuper eâdem lineâ A B, eſſent conſtituta duo ſegmenta ſimilia, & inæqualia contra [*prop.* 33.]

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Dato arcu circuli totum circulum deſcribere.



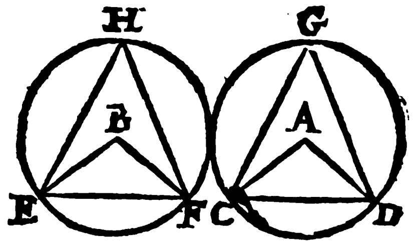
Sit datus arcus ABC perficique debeat circulus invento ſcilicet ejus centro. In arcu dato ſumo tria puncta A, B, C & duco lineas AB, BC, quibus diviſis bifariam in D, & F; duco perpendiculares DE, EF, dico punctum E interſectionis, eſſe centrum circuli ABC.

Demonſtr. Cum enim ducta ſit linea AB, diviſa bifariam in D, & ducta perpendicularis AE, in eâ AE eſt centrum circuli [*per corollarium primæ hujus*] eſt etiam in linea EF; quare debet eſſe in puncto E interſectionis.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

In circulis æqualibus æquales anguli, ſive ad centra, ſive ad peripheriam, æqualibus arcubus inſiſtunt.



Sint anguli æquales A & B ad centra in circulis æqualibus: dico arcus CD & EF quibus inſiſtunt eſſe æquales. Licet hæc propoſitio ſit ipſamet definitio angulorum æqualium, ut diximus initio, nihilominus ita oſtenditur. Ducantur lineæ CD, EF.

Demonſtr. Cum triangula C A D, E B F habeant

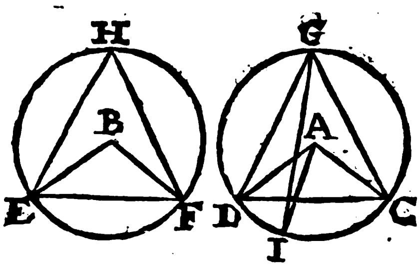
beant duo latera CA, AD æqualia duobus EB, BF, propter æqualitatem circulorum, & angulus A sit æqualis angulo B, lineæ CD & EF sunt æquales: factis autem angulis ad peripheriam G & H; cùm sint dimidia pars angulorum A & B æqualium, inter se æquales erunt, igitur segmenta CGD, EHF sunt similia, sunt etiam supra lineas CD, EF æquales: igitur (*per* 25.) æqualia sunt: igitur si ex circulis æqualibus auferas segmenta CGD EHF æqualia, reliqui arcus CD, EF æquales erunt.

Vides etiam angulos G & H ad peripheriam æquales insistere arcubus CD, & EF æqualibus.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

In circulis æqualibus, anguli insistentes peripheriis æqualibus, æquales sunt, sive ad centra sive ad peripheriam constituantur.



Sint anguli A & B insistentes peripheriis æqualibus CD, EF: dico illos esse æquales, si enim hoc non est: sit A major, fiatque CAI æqualis angulo B.

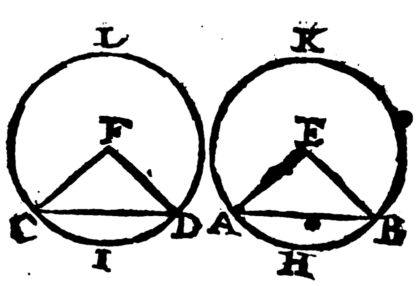
Demonstr. Quia anguli CAI & B sunt æquales, erunt (*per* 26.) arcus CI & EF æquales: igitur CD; EF non erant æquales.

Pariter ad peripheriam positis arcubus CD, EF æqualibus, si angulus G esset major angulo H; facto angulo CGI æquali ipsi H, sequeretur per 26. arcus CI, EF esse æquales.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

In circulis æqualibus, æquales rectæ æquales arcus auferunt & relinquunt.



In circulis æqualibus sint lineæ AB, CD æquales: dico arcus AHB, CID esse æquales, & consequenter AKB, CLD. Ducantur enim ad centra E & F, lineæ AE BE, CF, DF.

Demonstratio. Triangula AEB, CFD, habent latera AE, EB; CF, FD æqualia propter æqualitatem circulorum, supponuntur etiam bases AB, CD æquales; ergo (*per* 8. 1.) anguli E & F æquales sunt, & (*per* 28.) arcus AHB, CID, quibus insistunt sunt æquales, qui ablati ex circulis æqualibus relinquunt peripherias AKB, CLD, æquales.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

In circulis æqualibus, æquales peripherias æquales rectæ subtendunt.

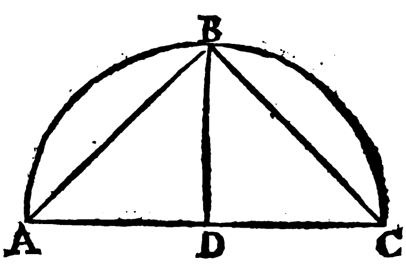
Dico si in circulis æqualibus arcus AHB, CID sint æquales, rectas AB, CD esse æquales.

Demonstr. Cum arcus AHB, CID sint æquales, erunt (*per* 27.) anguli E & F æquales, & quia in triangulis AEB, CFD latera AE, EB, sunt æqualia lateribus FC, FD, & anguli E & F sunt æquales, erunt (*per* 4. 1.) bases AB, CD æquales.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Datum arcum bifariam secare.



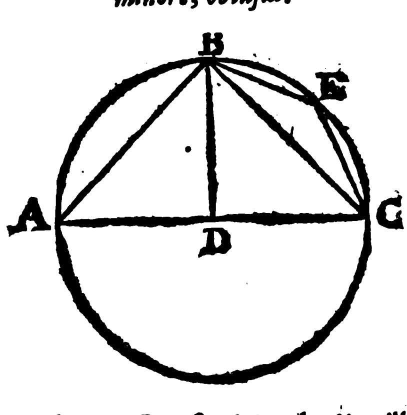
Sit data circumferentia ABC dividenda æqualiter. Duc lineam AC quam divides bifariam in D, ducesque perpendicularem DB, dico arcum ABC divisum esse bifariam in B; ducantur enim lineæ AB, BC.

Demonstratio. Triangula ADB, CDB habent latera AD, DC æqualia, [cum AC divisa sit bifariam in D] latus DB commune, & angulos BDA, BDC rectos & æquales: igitur (*per* 4. 1.) bases AB, BC sunt æquales & [*per* 28. 3.] arcus AB, BC sunt æquales.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Angulus in semicirculo rectus est, in segmento superante semicirculum, acutus: in segmento verò minore, obtusus.



Sit angulus ABC in semicirculo, dico illum esse rectum, ducatur ex centro D linea DB.

Demonstratio. In triangulo A B D cum latera A D, B D sint æqualia; erunt (*per* 5. 1.) anguli D A B, & D B A æquales, pariter erunt anguli D G B, & D B C æquales: igitur angulus totalis B erit æqualis duobus angulis A & C. sed in triangulo A B C tres anguli nempe A, B, & C, sunt duobus rectis æquales, (*per* 32.1.) igitur angulus B est media pars duorum rectorum, & reliqui A & C simul, sunt alia media pars, igitur est rectus.

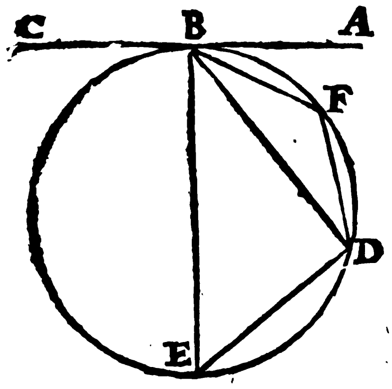
Secundò, dico angulum E existentem in segmento B E C minori esse obtusum, cum enim in quadrilatero A B E C anguli oppositi A & E æquivaleant duobus rectis (*per* 22. 3.) & angulus A sit minor recto, angulus E erit major recto.

Tertiò, patet angulum A in segmento majori B A C esse acutum.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si linea circulum tangat, & à contactu ducatur alia circulum secans, anguli quos faciet cum tangente, æquales erunt iis qui in alternis segmentis fiunt.



Sit linea A C, circulum tangens in puncto B, à quo ducatur linea B D circulum secans, dico angulum A B D, esse æqualem angulo B E D qui fit in segmento alterno D E B, & angulum DBC esse æqualem angulo B F D.

Et primò quidem si linea B D per centrum transiret, perpendicularis esset (*per* 18.) faceretque angulos rectos cum tangente: anguli item qui fierent in segmentis quæ essent semicirculi forent etiam recti (*per* 31.) igitur constaret propositio. Sed non transeat per centrum ducaturque linea B E per centrum, & jungatur linea D E.

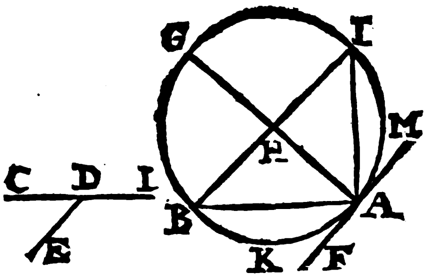
Demonstratio. Linea B E (*per* 18.) perpendicularis est ad lineam A C, quare anguli A B E E B C sunt duo recti, sed tres anguli trianguli B D E æquivalent duobus rectis (*per* 32. 1.) igitur tres anguli trianguli B D E sunt æquales duobus E B C, E B A, ex quibus si auferas angulum E B C rectum & angulum B D E in semicirculo item rectum (*per* 31.) restabunt anguli E, & D B E simul uni recto æquales, & consequenter angulo A B E; sed angulus A B E est æqualis duobus D B E, A B D, omnibus scilicet suis partibus; igitur anguli D B E A B D, æquales sunt angulis D B E & E, ergo sublato communi DBE, remanet angulus A B D æqualis angulo E.

Secundò, quia anguli A B D, & D B C sunt æquales duobus rectis (*per* 13. 1.) & in quadrilatero BEDF, anguli E, & F (*per* 22.) æquales sunt duobus rectis; erunt anguli A B D, & D B C, æquales angulis E & F, ex quibus si auferas angulos ostensos æquales A B D, & E; restabunt anguli F. & DBC æquales.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Super datâ rectâ segmentum circuli describere capiens angulum dato æqualem.



Sit data recta A B super quam describendum sit segmentum circuli capiens angulum æqualem angulo C D E, si angulus datus esset rectus super A B describendus esset semicirculus qui caperet angulum rectum (*per* 31.) si verò angulus datus ut C D E non sit rectus; fiat angulus B A F æqualis angulo C D E & lineæ A F in puncto A excitetur perpendicularis A G, & in puncto B fiat angulus A B H æqualis angulo H A B, dico; Si ex H intervallo H A fiat circulus & illum transire per B, & segmentum AGB capere angulum I æqualem angulo C D E.

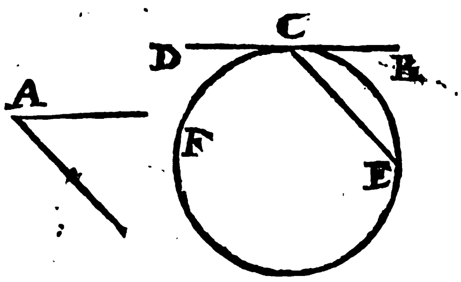
Demonstr. Primò quia anguli H A B, H B A facti sunt æquales; (*per* 6. 1.) lineæ H A, H B, sunt æquales; igitur circulus descriptus ad intervallum H A transit etiam per punctum B. Secundò, quia linea A F est perpendicularis ad lineam H A, transeuntem per centrum H, (*per* 16.) erit tangens circuli: & angulus F A B æqualis erit angulo I, in alterno segmento existenti (*per præcedentem*) sed angulus F A B factus est æqualis angulo C D E: igitur angulus I quem capit segmentum B G H est æqualis angulo C D E.

Si autem datur angulus L D E obtusus eodem modò operandum esset quasi pro angulo CDE acuto: nam angulus qui fieret in segmento A K B esset æqualis angulo M A B, cui æqualis est angulus L D E.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Ex dato circulo auferre segmentum capiens angulum dato angulo æqualem.



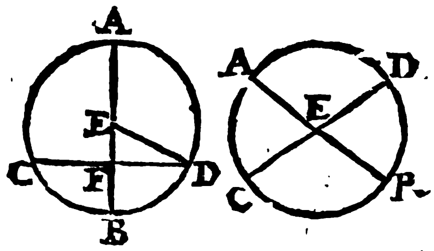
Si angulus datus esset rectus, ductâ diametro duo semicirculi caperent angulos rectos.

Si verò daretur angulus A non rectus, ducatur (*per* 17.) circulum tangens BCD, fiatque angulus BCE æqualis angulo A. segmentum alterum EFC capiet angulum æqualem angulo BCE (*per* 32.) & consequenter angulo A.

PROPOSITIO XXXV.

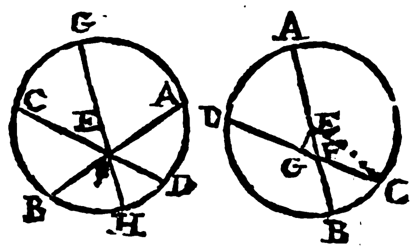
Theorema.

Si in circulo duæ rectæ se secuerint: erit rectangulum comprehensum sub segmentis unius; æquale rectangulo sub segmentis alterius comprehenso.



Plurimi sunt casus istius propositionis Primò duæ lineæ AB, CD se secent in centro E. quandoquidem AE, EB, quæ sunt segmenta unius, sunt æqualia segmentis alterius CE, ED, clarum est rectangulum comprehensum sub AE, EB, segmentis unius, esse æquale rectangulo comprehenso sub CE, ED, segmentis alterius.

Secundò AB transeat per centrum E, dividatque lineam CD bifariam in F, & (*per* 3.) ad angulos rectos, dico rectangulum comprehensum sub AF, FB æquale esse rectangulo comprehenso sub CF, FD, seu quadrato FD cum CF, FD, sint æquales, ducatur linea ED.



Demonstr. Quia linea AB divisa est bifariam in E, & non bifariam in F, erit (*per* 5. 2.) rectangulum comprehensum sub AF, FB, cum quadrato EF, æquale quadrato lineæ EB, aut illi æquali ED; sed quadratum ED, quia angulus F rectus est (*per* 47. 1.) æquale est quadratis FD, EF, igitur rectangulum comprehensum sub AF, FB cum quadrato FE, æquale est quadratis FD, EF; auferatur commune quadratum FE; restat rectangulum comprehensum sub AF FB, æquale esse quadrato FD. quod erat ostendendum.

Tertiò, linea AB per centrum E transiens, secet inæqualiter lineam DC in puncto F, dico rectangulum sub AF, FB, æquale esse rectangulo sub DF, FC. Ex centro E ducatur ad CD perpendicularis EG, eam dividens bifariam (*per* 3.) ducaturque linea CE, quæ hic omissa est.

Demonstr. Si rectangulum sub AF, FB, unà cum quadrato FE, est æquale quadrato EC, & pariter rectangulum sub DF, FC, unà cum quadrato FE est æquale quadrato CE, erit rectangulum sub AF, FB, æquale rectangulo sub DF, FC. Probatur autem hæc ita se habere, & de primo quidem cum linea AB divisa sit bifariam in E & non bifariam in F, erit (*per* 5. 2.) rectangulum sub AF, FB, unà cum quadrato FE æquale quadrato EB, aut illi æquali EC. Probatur de secundò seu de rectangulo sub DF, FC, cum enim linea CD divisa sit bifariam in G, & non bifariam in F, erit rectangulum sub DF, FC, unâ cum quadrato FG, æquale quadrato GC, quibus si utrinque addas quadratum EG, erit rectangulum sub DF, FC, una cum quadratis FG, GF, aut loco illorum cum quadrato EF, quod illis æquale est, (*per* 47. 1.) propter angulum rectum G, æquale quadratis CG, GE, aut quadrato CE, quod illis æquale est, igitur rectangulum sub DF, FC. unà cum quadrato FE æquale est quadrato EC. igitur rectangula sub AF, FB, & sub DF, FC sunt æqualia.

Quartò, si neutra AB, CD, transeat per centrum E, ostendo tamen rectangula sub AF, FB, & sub CF, FD, esse æqualia. Ducatur per centrum E linea FE. de est F.

Demonstr. quia lineæ GH, & CD se secant & GH per centrum transit; erunt rectangula sub GF, FH, & sub CF, FD æqualia (*per partem tertiam hujus*) pariter erunt, rectangula sub GF, FH & sub AF, FB æqualia: igitur rectangula sub AF, FB, & sub CF, FD sunt inter se æqualia.

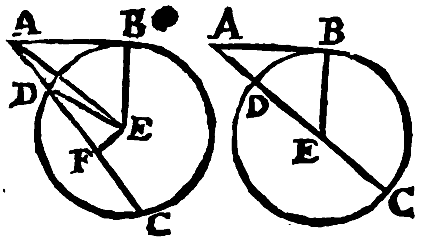
PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si ab aliquo extra circulum puncto duæ lineæ ducantur, una circulum tangens, alia circulum secans, erit quadratum tangentis æquale rectangulo comprehenso sub tota secante, & exteriori lineâ.

Ex puncto A ducatur AB tangens circulum BCD, & AC secans quæ primò transeat per centrum E. dico quadratum lineæ AB æquale esse rectangulo comprehenso sub AC, AD. Ducatur linea BE.

Demonstr.



Demonstr. Quia linea C D divisa est bifariam in E, eique addita D A, erit (*per 6. 2.*) rectangulum sub AC, A D unà cum quadrato rectæ E D, aut EB, æquale quadrato rectæ A E, sed etiam quadratum rectæ A B, una cum quadrato rectæ BE (*per* 47. 1.) est æquale quadrato A E, cum angulus B sit rectus (*per* 16.) igitur quadratum AB est æquale, rectangulo sub AC, AD.

Secundò, secans AC, non transeat per centrum E, ducantur lineæ AE, ED, & perpendicularis EF dividens (*per* 3.) lineam DC bifariam, dico quadratum A B esse æquale rectangulo sub AC, AD.

Demonstr. Quia linea C D divisa est bifariam in F, eique addita AD, erit (*per 6.2.*) rectangulum sub AC, AD una cum quadrato FD, æquale quadrato A F, utrique addatur quadratum EF, erit igitur rectangulum AC, AD, unà cum quadratis FD,EF, aut loco illorum una cum solo quadrato ED, aut EB (*quod per* 47. 1.) illis æquale est; æquale quadratis AE, FE, aut loco illorum quadrato EA illi æquali (*per* 47. 1.) sed pariter quadratum AB una cum quadrato BE, (*per* 47.1.) æquale est quadrato EA, igitur quadratum EA, est æquale rectangulo sub AC, AD.

COROLLARIUM I.

Sequitur si plures ab eodem puncto A ducerentur secantes, fore ut omnia rectangula comprehensa sub secantibus & exterioribus lineis essent inter se æqualia, essent enim singula æqualia quadrato tangentis.

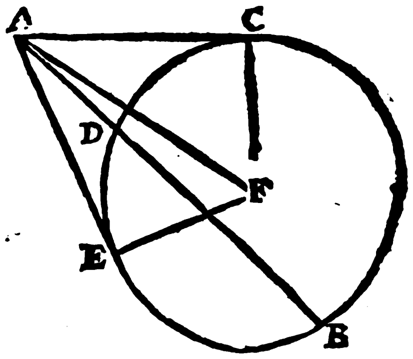
COROLLARIUM II.

Sequitur secundò, si duæ ducantur ab eodem exteriori puncto, tangentes illas esse æquales.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si rectangulum comprehensum sub secante, & exteriori linea æquale fuerit quadrato lineæ in circulum incidentis, hæc erit tangens.



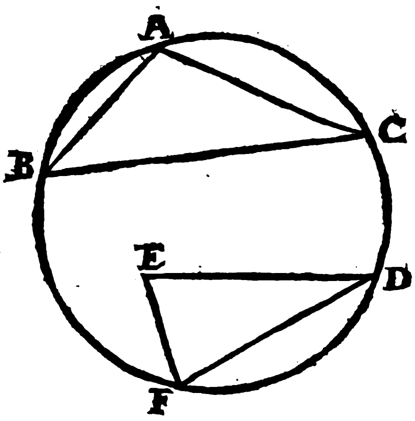
Sit ex puncto A ducta secans AB & alia AC incidens in circulum, ita ut rectangulum comprehensum sub AB, AD æquale sit quadrato rectæ AC. dico AC esse tangentem; Ex puncto A ex alia parte ducatur tangens AE, (*per* 17.) junganturque lineæ FC, FE, FA.

Demonstr. Rectangulum comprehensum sub AB, AD (*per* 36.) æquale est quadrato rectæ AE, sed supponitur æquale quadrato rectæ AC, igitur quadrata AC, AE sunt æqualia, & consequenter lineæ AC, AE. igitur triangula AFE, AFC, habent omnia latera æqualia, igitur (*per* 8. 1.) omnes angulos habent æquales, sed quia A E est tangens (*per* 18.) angulus E est rectus; igitur angulus C rectus etiam erit, (& *per* 16.) linea AC tangens erit.

EUCLI

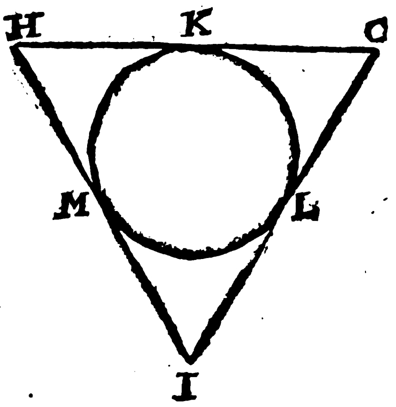
EUCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER QVARTVS.

Definitiones.



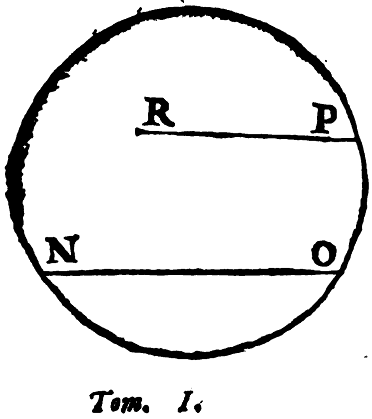
1. Figura rectilinea in circulo inscribi & circulus figuræ circumscribi dicitur, cum singuli figuræ anguli in circuli peripheria fuerint.

Ut triangulum ABC inscriptum est circulo, non DEF, & circulus triangulo ABC circumscriptus est.



2. Figura rectilinea circulo circumscripta est; & circulus figuræ inscriptus cùm singula figuræ latera circulum tangunt.

Ut triangulum CHI, cujus latera tangunt circulum in punctis K, L, M, dicitur circumscriptum circulo, & circulus inscriptus triangulo.



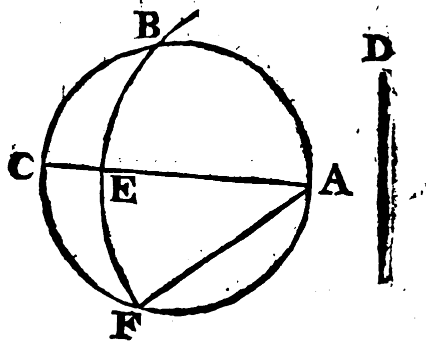
3. Linea circulo aptari aut accommodari dicitur, cujus extrema sunt in circuli peripheriâ.

Ut linea N O, non autem P R.

PROPOSITIO I.

Problema.

Circulo rectam datam, diametro non majorem, accommodare.



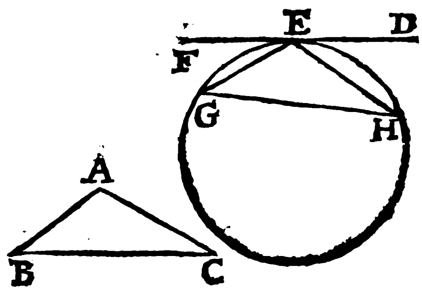
In circulo ABC sit accommodanda linea D, ex AC abscinde lineam AE æqualem lineæ D; & ex A ut centro, intervallo AE, fiat circulus BEF secans priorem in F, ducatur A F. dico lineam A F accommodatam in circulo, esse æqualem lineæ D.

Demonstr. Lineæ AE, AF (*per def. circ.*) sunt æquales: sed AE facta erat æqualis lineæ D, igitur linea AF est æqualis lineæ D.

PROPOSITIO II.

Problema.

In circulo triangulum inscribere dato triangulo æquiangulum.



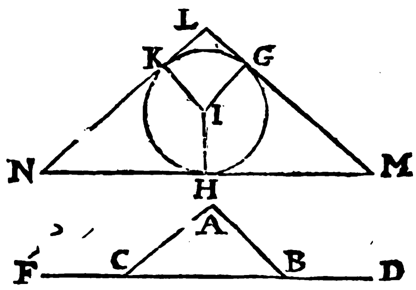
Sit in circulo inscribendum triangulum cujus singuli anguli sint æquales singulis angulis trianguli ABC; ducatur (*per 16. 3.*) linea F E D tangens circulum in puncto E, fiatque angulus FEG æqualis angu[illegible] item angulus DEH æqualis angulo B, ducatur linea GH, & factum est quod jubetur.

Demonstr. angulus H est æqualis angulo FEG (*per* 32. 3.) sed FEG factus est æqualis angulo C, igitur anguli H & C sunt æquales, pariter angulus G est æqualis angulo B, & consequenter cum cujuscumque trianguli tres anguli sint duobus rectis æquales (*per* 32. 1.) reliqui A & GEH æquales erunt.

PROPOSITIO III.

Problema.

Circulo triangulum circumscribere dato triangulo æquiangulum.



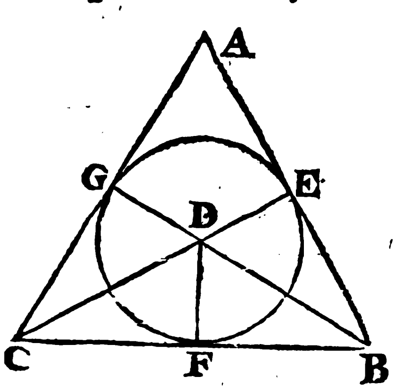
Sit datum triangulum A B C cui æquiangulum circumscribendum sit circulo. producatur latus BC in D & F, fiatque angulus GIH æqualis angulo DBA; item angulus H I K æqualis angulo FCA, ducantur in punctis G, H, K tres tangentes LM, MN, LN, quæ necessariò convenient, nam si duceretur linea GH, anguli MGH, MHI, minores essent duobus rectis MGI, MHI, igitur HM, GM, (*per* 31. 1.) convenient, ita ostendam alias convenire, fiet igitur triangulum quod dico esse æquiangulum triangulo ABC.

Demonstr. Omnes anguli quadrilateri MGIH, æquivalent 4 rectis, potest enim in duo triangula dividi, sed anguli G, & H sunt recti, ergo reliqui M & GIH æquales sunt duobus rectis, sed etiam anguli DBA, ABC æquales sunt duobus rectis, igitur anguli DBA, ABC æquales sunt duobus GIH & M, sed GIH factus est æqualis angulo DBA, ergo reliqui M & ABC sunt æquales. eodem modo ostendam angulum N æqualem esse angulo ACB. igitur cum tres anguli trianguli duobus tantum rectis sint æquales: reliqui L & A æquales erunt; & triangula æquiangula.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Triangulo circulum inscribere.



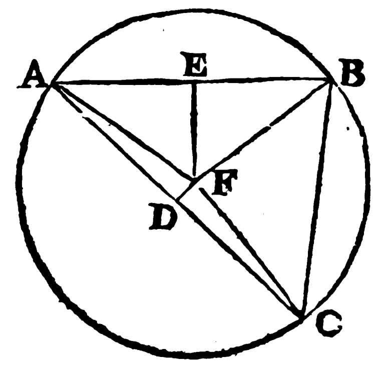
Sit inscribendus circulus triangulo ABC. Dividantur bifariam anguli B, & C (*per* 9. 1.) & ex puncto D, concursus linearum, duc lineas DE, DF, DG perpendiculares ad singula latera, quas dico esse æquales & ita circulum descriptum ex D intervallo DE, transire per puncta F, E, G; & singula latera tangere.

Demonstr. In triangulis DEB, DFB, cum anguli E & F sint æquales, sicut DBE, DBF [cum angulus B sit divisus bifariam] & latus DB sit commune, erunt (*per* 26. 1) reliqua latera æqualia, ita lineæ DE, DF æquales erunt; eodem modo sunt DF, DG æquales. igitur poterit describi ex D circulus per E, F, G; & cum anguli E, F, G sint recti; lineæ AB, BC, CA sunt tangentes, igitur triangulo inscriptus est circulus.

PROPOSITIO V.

Problema.

Triangulo circulum circumscribere.



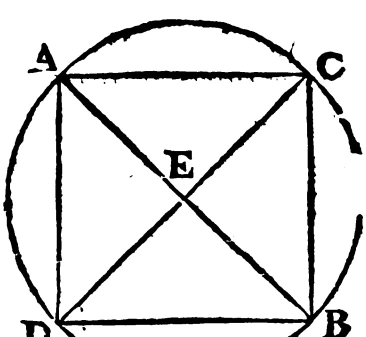
Sit circulus circumscribendus triangulo ABC. Dividantur bifariam latera AB, AC, in D, & E, ducanturque perpendiculares EF, DF. concurrentes in puncto F: dico lineas FA, FB, FC æquales esse, ideòque circulum ex F ut centro describi posse qui transeat per A, B, C.

Demonstr. In triangulis FEA, FEB, latera EA E B sunt æqualia [quia AB divisa est bifariam] latus EF est commune, anguli FEA, FEB, sunt facti recti, igitur æquales; quare (*per* 4. 1.) bases FB, FA sunt æquales. ita lineæ FB, FC æquales erunt ut bases triangulorum ADF, CDF.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Circulo quadratum inscribere.



In dato circulo duc duas diametros AB, CD se secantes ad angulos rectos in centro E, ducantur item

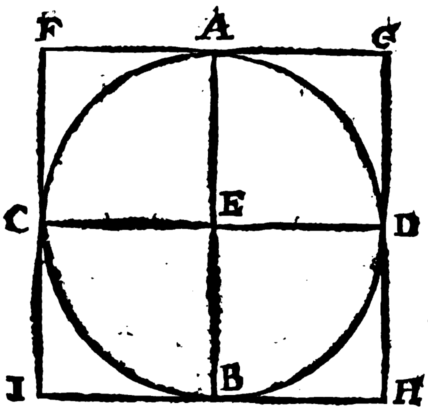
item lineæ AC, AD, DB, BC. Dico factum esse quadratum.

Demonstr. In triangulis AEC, C E B cum latera AE, EB sint æqualia (*per def. circ.*) & latus EC commune, & anguli AEC. CEB recti, æquales; *per* 4. 1.) bases A C, C B, æquales erunt; idem ostendam de aliis lateribus. Deinde in triangulo A E C angulus A E C est rectus, igitur reliqui duo E A C, E C A sunt æquales uni recto; sunt autem æquales interse, (*per* 5. 1.) quia latera A E, E C sunt æqualia: igitur quilibet est semirectus. ita semirectus est angulus E C B, quare totus angulus C compositus ex duobus semirectis rectus est; ita ostendam reliquos B, D, A esse rectos.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Circa circulum quadratum describere.



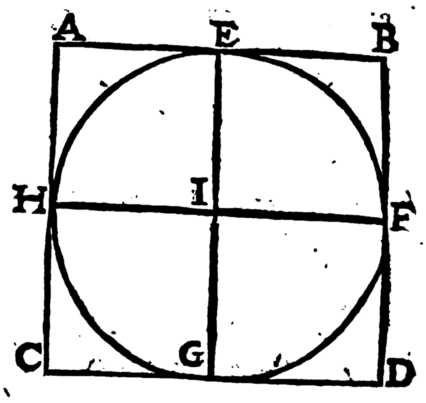
Ductis pariter duabus diametris AB, CD invicem perpendicularibus. per puncta A, B, C, D ducantur tangentes F G, G H, H I, IF. dico factum esse quadratum circa circulum.

Demonstr. In quadrilatero A D lineæ AE, GD sunt parallelæ (*per* 31. 1.) propter angulos rectos E & D, item parallelæ sunt D E G A, quare oppositæ D G, E A; A G (*per* 34. 1.) sunt æquales, & quia D E, E A, (*per def. circ.*) sunt æquales, omnes inter se æquales erunt. Item anguli E & G oppositi (*per* 34. 1.) æquales erunt; sed E rectus est: igitur G rectus erit. ita ostendam reliquos H, I, F, rectos esse. & lineas B H, A G eidem E D æquales esse, & inter se; quare singula latera FG, GH, HI, I F composita ex dimidiis æqualibus, æqualia esse. igitur F G H I est quadratum.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Quadrato circulum inscribere.



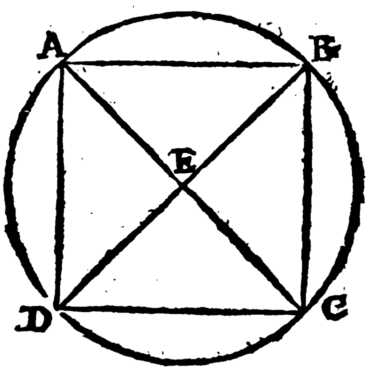
Dividantur bifariam latera AB, BD, DC, AC, in punctis E, F, G, H, ducantur lineæ E G, H F se interfecantes in puncto I, dico, lineas I E, I F, IG, IH esse æquales & perpendiculares ad singula latera; ideóque ex puncto I descriptum circulum intervallo I E, transire per F, G, H. & singula latera eum tangere.

Demonstr. Quia lineæ BD, EG conjungunt lineas EB, BD parallelas, & æquales cum sint dimidiæ laterum æqualium, erunt EG, BD parallelæ; (*per* 34. 1.) anguli D & E erunt æquales. Sed D rectus est igitur E rectus erit. ita ostendam angulos in punctis F, G, H rectos esse. quare cum lineæ BD, EG sint parallelæ, & pariter parallelæ sint AB, HF, erit parallelogrammum E F; cujus lineæ EB, BF sunt æquales ex suppositione, quare reliquæ IE, IF, illis oppositæ æquales erunt (*per* 34. 1.) ita ostendam I F, I G æquales esse: sunt igitur 4, IE, IF, IG, I H æquales. ergo describi potest circulus per E, F, G, H, & propter angulos rectos in punctis E, F, G, H, latera A B, B D, DC, AC, illum tangent.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Circa quadratum circulum describere.



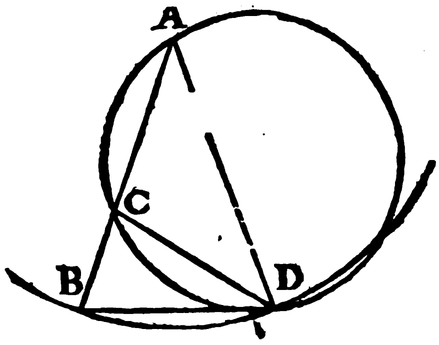
Ducantur diametri A C, B D, dico ex E descriptum circulum intervallo EA transire per puncta B, C, D, hoc est lineas EA, E B, E C, ED æquales esse.

Demonstr. In triangulo D A B, cujus angulus D A B rectus est, reliqui duo æquivalent uni recto. Sunt autem æquales (*per* 5. 1.) quia latera A B, A D sunt æqualia: igitur angulus A B E semirectus est. Eodem modò ostendam angulum E A B semirectum esse, igitur (*per* 6.) lineæ E A, E B, sunt æquales. ita lineæ EB, EC, EA, ED, ostenduntur æquales.

PROPOSITIO X.

Problema.

Triangulum Isosceles construere cujus uterque angulus ad basin, sit duplus reliqui.



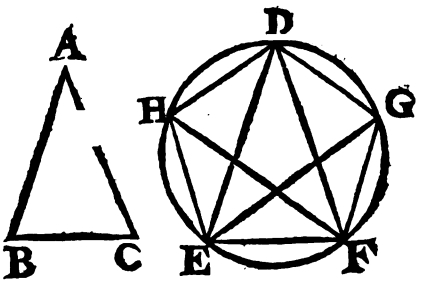
Secetur recta A B (*per* 11. 2.) ita ut rectangulum sub A B, C B ; æquale sit quadrato rectæ A C. Ex A ut centro intervallo A B circulum describe, in quo aptetur recta B D, æqualis lineæ A C ; ducantur item lineæ A D C D dico trianguli A B D utrumque angulum A B D , A D B duplum esse anguli A. Circa triangulum A C D circulus describatur.

Demonstr. Quia rectangulum sub A B , B C æquale est quadrato rectæ A C , aut D B illi æqualis ; linea D B (*per* 37. 3.) tanget minorem circulum, ideóque (*per* 32. 3.) erunt anguli BDC, & A æquales. quibus si addas angulum communem A D C , erunt duo A D C , C D B , seu totus A D B æqualis duobus A & A D C sed externus D C B (*per* 32. 1.) est æqualis duobus internis A, & A B C, igitur angulus D C B est æqualis angulo D : sed angulus D est æqualis (*per* 6. 1.) angulo B cum latera A D , A B , (*per def.circ.*) sint æqualia ; ergo angulus D C B & B sunt æquales, & (*per* 6. 1.) latera D C, DB sunt æqualia ; sed D B factum fuerat æquale lineæ AC, igitur lineæ A C , C D sunt æquales & (*per* 5.) anguli A, & ADC sunt æquales : sed angulo A, est etiam æqualis CDB, igitur tres anguli A , ADC, & C D B sunt æquales, igitur totus angulus D est duplus anguli A, sicut etiam angulus B.

PROPOSITIO XI.

Problema.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.



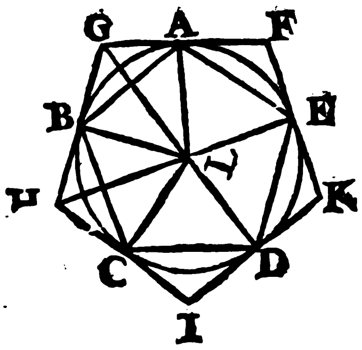
Fiat per præcedentem, triangulum A B C , cujus anguli B & C, sint dupli anguli A, & in dato circulo inscribatur triangulum D E F , æquiangulum triangulo ABC (*per* 2.) cujus anguli E, & F dividantur bifariam lineis E G, FH , (*per* 9. 1.) ultimo ducantur lineæ DG, GF, EH, HD. Dico factum esse pentagonum DGFEH , æquilaterum & æquiangulum.

Demonstr. Anguli D E G , G E F ut media pars anguli totalis D E F , sunt æquales angulo E D F, sicut etiam anguli D E H , H F E : quare (*per* 26. 3.) quinque arcus D G, G F, F E , E H, H D sunt æquales ; est igitur æquilaterum pentagonum. quia autem patet segmenta HG, DF, esse æqualia anguli H D G, D G F sunt æquales (*per* 27. 3.) ita omnes alij anguli probantur esse æquales : quare pentagonum erit etiam æquiangulum.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circumscribere.



In dato circulo per præcedentem inscribatur pentagonum A B C D E æquilaterum, & æquiangulum. Et in punctis A, B, C, D, E ducantur (*per* 16. 3.) tangentes F G, G H, H I, I K, K F. dico factum esse quod jubetur, nam ex centro L. ducantur lineæ L A , L G, L B, L H, L C.

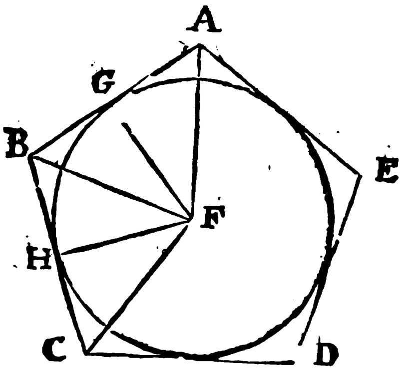
Demonstr. Lineæ G A, G B ex eodem puncto G tangentes circulum (*per cor.* 36. 3.) sunt æquales ; quare (*per* 8. 1.) triangula A L G , G L B, sibi mutuò congruunt. & anguli A L G , B L G sunt quilibet media pars anguli A L B, ita ostendam angulum B L H esse mediam partem anguli B L C, qui æqualis est angulo A L B, (*per* 27. 5.) cum lineæ A B, B C sint æquales : igitur anguli G L B , B L H sunt æquales : sunt etiam anguli L B H , L B G recti æquales , & latus L B commune triangulis G L B , B L H , quare [*per* 26. 1.] lineæ G B , B H æquales sunt , ita ostendam lineas F A , A G æquales esse, quare latera F G, G H æqualia sunt. Eâdem methodo ostendam reliqua latera esse æqualia ; igitur est æquilaterum pentagonum : & quia ostendimus angulos L G B , L H B esse æquales qui sunt quilibet media pars angulorum G & H erunt anguli G & H æquales. ita etiam æquiangulum erit pentagonum.

PROPO

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.



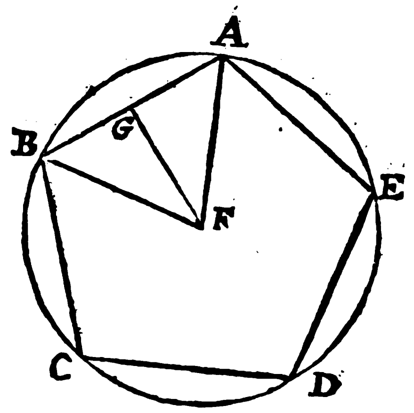
Pentagoni regularis A B C D E duos quoslibet angulos A, & B (*per* 9. 1.) divide bifariam lineis A F, B F; ductâque perpendiculari FG describatur circulus ex centro F intervallo FG, dico illum tangere singula latera pentagoni ABCDE. hoc est perpendiculares F G, F H, & aliàs esse æquales.

Demonstr. In triangulis AFG, BFG, cum anguli FAG, FBG sint quilibet media pars angulorum æqualium A & B, erunt inter se æquales: anguli etiam in puncto G recti sunt & consequenter æquales, latus autem F G est commune igitur lineæ AG, GB, (*per* 26. 1.) sunt æquales; sicut BH, HC, & quia latera AB, BC sunt æqualia eorum dimidia GB, BH sunt æqualia. quadratum autem lineæ FB (*per* 47. 1.) est æquale, & quadratis GB, FG, sicut etiam quadratis BH, HF, igitur quadrata GB, FG, sunt æqualia quadratis BH, HF; ex quibus si auferas æqualia quadrata GB, BH, restabunt quadrata HF, FG æqualia: igitur lineæ FH, F G sunt æquales. Ita ostendam reliquas perpendiculares, ductas ex puncto F, esse æquales; & consequenter circulum transire per earum extrema.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum describere.



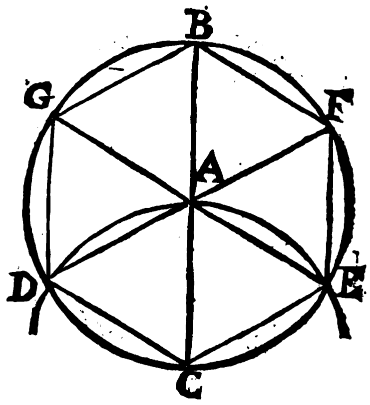
Pentagoni regularis A B C D E duo quilibet anguli A & B bifariam dividantur (*per* 9. 1.) lineis A F, B F, dico si ex puncto F intervallo FA describatur circulus illum transire per puncta B, C, D, E, hoc est lineas AF, FB, & cæteras esse æquales, ducatur enim perpendicularis FG, quæ sicut prius dividet bifariam lineam AB: triangula igitur FGB FGA habentia latus FG commune, latera AG, GB æqualia, & angulos in puncto G æquales, bases FA, FB æquales habebunt (*per* 4. 1.) ita si ducerentur F C, FD, FE, ostenderentur æquales.

Coroll. Ex quibus facilè in data figura regulari, divisis ejus angulis circulum inscribes aut eidem circumscribes, item si possis circulo figuram regularem inscribere ductis tangentibus figuram similem facile circumscribere poteris.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Exagonum æquiangulum, & æquilaterum dato circulo inscribere.



Ducatur per centrum A, diameter BAC & ex C ut centro intervallo CA describatur circulus DAE; ductisque lineis DAF, EAG, conjungantur rectæ CD, CE, EF, BF, BG, DG. dico factum esse quod jubetur.

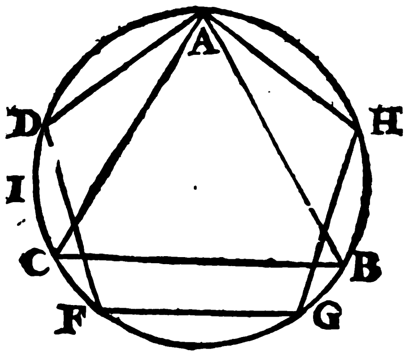
Demonstr. Primò triangulum A C E est æquilaterum, sicut & A C D, igitur quilibet angulorum ut C AE est tertia pars duorum rectorum, sicut & DAC; tres autem anguli DAC, CAE, EAF (*per* 16. 1.) sunt æquales duobus rectis, sublatis igitur angulis DAC, CAE duabus tertiis duorum rectorum restat angulus EAF, tertia pars duorum rectorum, & consequenter aliis æqualis; quare tres rectæ DC, CE, EF, sunt æquales, & quia anguli DAG GAB, BAF prioribus oppositi sunt ad verticem, (*per* 15. 1.) iis erunt æquales; & consequenter (*per* 27. 3.) lineæ DG, GB, BF æquales erunt prioribus; est igitur æquilaterum exagonum, ejus autem quilibet angulus componitur ex duabus tertiis duorum rectorum, igitur & æquiangulum est.

Coroll. Ex eo patet latus exagoni æquale esse semidiametro.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Pentedecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere in dato circulo.

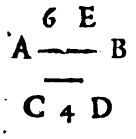


In dato circulo [*per* 2.] inscribatur triangulum æquilaterum A B C, & [*per* 11.] pentagonum regulare ADFGH. dividatur D C bifariam in I. dico si ducantur lineæ DI, IC, CF illas esse tria latera pentedecagoni. Et si in reliquis arcubus pentagoni tres lineæ illis æquales aptentur perfectum esse pentedecagonum.

Demonstr. Quia linea AC est latus trianguli æquilateri arcus ADC erit 3 pars totius circuli. igitur si circulus sit dividendus in 15 partes arcus ADC continebit ex iis quinque, & arcus AD continet ex iis tres, necnon arcus DF alias tres; igitur in arcu D C sunt duæ; & si arcus D C bifariam dividatur habebimus tres arcus DI, IC, CF, pro tribus partibus pentedecagoni & lineas subtensas pro tribus lateribus pentedecagoni.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUINTUS.

Definitiones.



Pars est minor magnitudo, comparata cum majore: ut linea C D 4 pedum, dicitur pars lineæ A B 6 pedum: licet C D verè non sit in ipsa linea A B, sufficit enim ad hoc, ut linea CD dicatur pars lineæ AB, lineam AE, æqualem lineæ C D, contineri in linea A B.

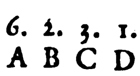
Parti respondet totum, estque major quantitas comparata cum minori, sive eam contineat verè, sive non: modò contineat quantitatem minori æqualem.

Dividitur autem pars genericè hoc modò sumpta, in partem aliquotam, & aliquantam.

2. Pars aliquota (*quam solam hic definivit Euclides*) est magnitudo magnitudinis, minor majoris; cum minor metitur majorem. *Seu est minor magnitudo comparata cum majore, quam aliquoties repetita præcisè adæquat: ut linea duorum pedum est pars aliquota lineæ 6 pedum.*

2. Multiplex est magnitudo magnitudinis, major minoris, cum minor metitur majorem. *Seu est major quantitas comparata cum minori; à qua aliquoties repetita præcisè adæquatur. ut linea 6 pedum est multiplex lineæ duorum pedum; est enim ejus tripla.*

Pars aliquanta est minor quantitas, comparata cum majore, quam aliquoties repetita non adæquat præcisè; ut linea 4 pedum, est pars aliquanta lineæ 6 pedum.



Sint duæ quantitates quarum una suam consequentem toties contineat, quoties alia suam item consequentem continet: dicuntur æquè multiplices; ut si A sit tripla ipsius B, & C sit etiam tripla ipsius D; dicuntur A, & C, æquè multiplices ipsarum B, & D.

3. Ratio est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundùm quantitatem habitudo. *Dixi ejusdem generis, nam ita habet Euclides.*

4. Rationem dicuntur habere magnitudines, quæ multiplicatæ, se mutuò superare possunt. *Ad hoc autem requiritur ut sint ejusdem generis. ita linea rationem nullam habet cum quadrato, quia quantumlibet multiplicetur linea, quadratum tamen nunquam superabit.*

Quandoquidem ratio est species relationis necessariò duos terminos requirit, quorum primus (qui à Philosophis vocaretur fundamentum) dicitur à Mathematicis antecedens: terminus verò dicitur consequens. ut rationis quæ est A ad B: A dicitur antecedens, & B consequens. rationis verò quæ est B ad A, B dicitur antecedens; & A consequens.

Dividitur ratio in rationem rationalem, & rationem irrationalem. ratio rationalis est inter quantitates quæ communem habent mensuram, ut inter lineam 4 pedum & lineam 6 pedum, habent enim lineam duorum pedum pro communi mensura.

Ratio irrationalis est inter duas magnitudines incommensurabiles, id est quæ nullam habent communem mensuram; ut ratio quæ est lateris quadrati, ad diametrum ejusdem: nulla enim potest assignari quantumvis parva linea, quæ utramque lineam præ-

cisè

cisè metiatur, ideoque hæc ratio numeris exprimi non potest.

In eâdem ratione erunt 4 magnitudines, hoc est, eamdem rationem habebit prima ad secundam, quàm habet tertia ad quartam; quando habebunt similem relationem, secundùm quantitatem. Quid sit autem habere similem relationem non ita facilè explicatur, & in eo intelligendo tota difficultas hujus libri posita est. Nam Euclides non dedit definitionem similitudinis rationum, quæ illius naturam explicaret: sed tantùm assignavit aliquod signum quo possemus dignoscere, utrum 4 quantitates in eadem essent ratione. Quod quidem signum licèt sit infallibile, non tamen ita clarum est, ut locum axiomatis obtinere possit. imò ferè nulla est propositio in toto libro quæ illo clarior non sit; ideoque quæ potiori jure tanquam axioma proponi non possit. quod dedit occasionem aliquibus eas simpliciter proponendi, sine ullâ probatione; Existimarunt enim eas probè explicatas nullâ demonstratione indigere: quod quidem licet de aliquibus negari non possit, de omnibus tamen non ausim asserere ideoque mediam quandam viam inire tentabo, & relicto longo æquè multiplicium circuitu, obscuriores saltem demonstrare, quod quidem præstitissent alij si necessarium judicassent.

5. Vult igitur Euclides 4 magnitudines in eadem esse ratione quoties auctis eadem multiplicatione primâ & tertiâ *(quæ sunt antecedentes)* auctis etiam, aliâ quacumque multiplicatione, secundâ & quartâ *(id est consequentibus)* semper evenit; ut si multiplex primæ est majus multiplice secundæ, multiplex tertiæ sit etiam majus multiplice quartæ; & si est æquale, aliud sit etiam æquale; & si est minus, sit etiam minus.

A, B, C, D,
2. 4. 3. 6.
8. 8. 12. 12.
E, F, G, H

Ut sint 4 magnitudines A, B, C, D, sumantur autem æquè multiplices primæ A: & tertiæ C; sintque E, & G; item sumantur æquè multiplices secundæ B, & quartæ D, sintque F & H; si quoties E est majus quàm F, toties G est maius quàm H; & quoties E est æquale ipsi F, G est etiam æquale ipsi H; & quoties E est minus quàm F: G sit etiam minus quam H; ita ut hoc non tantùm semel accedat, sed in omni multiplicatione eo modo factâ id semper eveniat: tunc eadem est ratio A ad B; quæ est C ad D.

Debuerat autem probare Euclides hoc esse verum, id est quoties æquè multiplicia vel unà excedunt, vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, toties 4 magnitudines in eadem ratione esse. quod quidem præstaremus si propositiones hujus libri, sine illo signo probari non possent clariùs. Quare ut meliùs intelligatur, quid sit 4 magnitudines proportionales esse; licèt possit dici, quoties prima est simile totum, vel similis pars secundæ ac tertia quartæ, id est quoties prima secundam, æqualiter continet, aut in ea continetur; ac tertia quartam, id tamen non convenit rationi æqualitatis: quare ut definitionem generalem assignemus, sciendum est quid sit similis pars aliquota.

Similes partes aliquotæ duorum totorum sunt quarum una toties in suo toto continetur quoties alia in suo; ut binarius numeri senarij est similis pars, ac ternarius novenarij, quia toties binarius in senario, quoties ternarius in novenario continetur. Quo posito.

A, B, C, D.

Prima ad secundam eandem rationem habebit; ac tertia ad quartam, si prima toties contineat secundæ partes aliquotas quascumque quoties tertia quartæ similes partes aliquotas continet; ut si magnitudo A toties continet magnitudinis B partes centesimas, millesimas, centies millesimas, & quascumque alias aliquotas; quoties C continet magnitudinis D partes centesimas, millesimas, centies millesimas & quascumque alias aliquoties similes; ita ut nulla sit pars magnitudinis B quæ pluries contineatur in magnitudine A, quàm similis pars aliquota ipsius D contineatur in C licet in irrationalibus restet semper aliqua quantitas, tunc est A ad B ut C ad D. Hæc proprietas est generalis convenitque tam proportionibus æqualitatis quàm inæqualitatis, rationalibus quàm irrationalibus, assignatúrque à R. P. Tacquet licèt ea non utatur in demonstrationibus hujus libri.

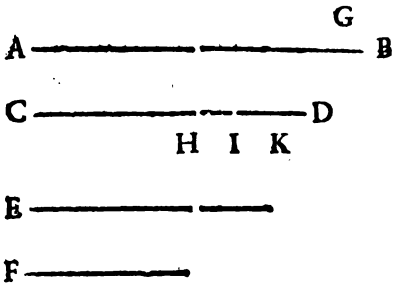
6. *Majorem autem rationem habebit prima ad secundam, quàm tertia ad quartam: quoties prima aliquam partem aliquotam secundæ pluries continebit, quàm tertia contineat similem partem aliquotam quartæ; ut* 101 *ad* 10 *majorem rationem habet quàm* 200 *ad* 20; *quia* 101 *continet centies, & semel decimam partem numeri* 10 *&* 200 *centies tantùm continet binarium, quæ est decima pars numeri* 20.

Antequam ulteriùs progrediamur, demonstranda nobis est hæc definitio, duoque probanda. Primum est quòd si fuerit eadem ratio primæ ad secundam, ac tertiæ ad quartam, id quod proposui accidet, secundum quod ubicumque hæc proprietas invenietur, quatuor quantitates proportionales erunt, & vicissim quoties dicentur quatuor quantitates non esse proportionales, toties ostendere possit hujusmodi proprietatem abesse.

A, B, C, D.

Quod ad primum attinet, nempe si fuerit A ad B ut C ad D, quod A contineat partes aliquotas magnitudinis B quoties C continet similes partes aliquotas magnitudinis D. hoc inquam punctum manifestum mihi videtur, si enim A continet centies & semel decimam partem magnitudinis B, & C contineat tantum centies partem decimam magnitudinis D; magnitudo A erit majus totum respectu magnitudinis B, quam C respectu magnitudinis D, quare non eodem modò comparabitur, nec consequenter eandem relationem habebit, seu rationem, quæ sunt omnes voces synonimæ.

Secundum



Secundum verò punctum ita probatur, nempe fore ut magnitudines non sint proportionales, si hæc desit proprietas; nam si AB toties continet partes aliquotas magnitudinis C D quoties E continet similes partes aliquotas magnitudinis F, dico eandem esse rationem AB ad CD ac E ad F, si enim non sit eadem ratio, supponamus quantitatem AB esse nimis magnam quam requiratur ut habeat eandem rationem ad C D, quam habet E ad F: abscindatur ille excessus ita ut A G ad C D eamdem rationem habeat, ac E ad F. tum dividatur CD bifariam in puncto H, pariter HD bifariam in I, & I D bifariam in K; si hoc modò semper fiat divisio, tandem occurret quantitas minor quàm G B. sit hæc K D quæ est pars aliquota lineæ C D, ut puta nata ex divisione per medium; erit enim vel medietas, vel quadrans, vel octava, vel decima sexta, &c. cum ergo eadem sit ratio lineæ A G ad CD, quæ lineæ E ad F, toties AG continebit K D partem aliquotam quantitatis C D, quoties E. continet similem partem aliquotam quantitatis F, & cum G B major quàm KD eam saltem semel contineat, AB pluries continebit K D partem aliquotam ipsius CD, ac E continet similem partem aliquotam quantitatis F. quod est contra suppositionem, ergo si A majorem rationem habet ad CD quàm E ad F; A pluries continebit aliquam partem aliquotam quantitatis C D, quàm E contineat similem partem aliquotam quantitatis F.

7. Quæ sunt in eadem ratione magnitudines proportionales vocentur.

8. Nam analogia, seu proportio est rationum similitudo.

9. Proportio in tribus nimirùm terminis consistit. *Hæc est ut sit proportio seu similitudo rationum, debent esse duæ rationes; qualibet autem ratio cùm sit relatio debet habere duos terminos: ideoque in duabus rationibus deberent esse 4 termini. ut cum dicitur ita est A ad B, sicut C, ad D: nisi unus bis repetatur, ut cum dicimus ita est A ad B; sicut B, ad C.*

10. Magnitudines continuè proportionales sunt illæ quarum quæ mediæ sunt bis sumuntur, semel ut antecedentes, & semel ut consequentes *ut si sit A ad B, ut B ad C, & ita C ad D.*

A, B, C, D.
1. 6. 12. 24.

11. Tunc autem dicitur A ad C, habere duplicatam rationem illius quàm habet A ad B, & A ad D habere triplicatam rationem illius quæ est A & B.

12. Magnitudines dicuntur homologæ antecedentes antecedentibus, & consequentes consequentibus. *Ut si prima ad secundam, eandem rationem habet, ac tertia ad quartam, prima & secunda dicuntur homologæ. sicut secunda & quarta.*

Sequentes definitiones sunt modi argumentandi, ad quorum præcipuè probationem institutus est hic liber.

A, B, C, D.
4. 2. 6. 3.

13. Alterna, seu permutata ratio, est comparatio antecedentium cum antecedentibus, & consequentium cum consequentibus; *ut si ex eo quod sit A ad B ut C ad D ego concludam, ergo ita est A ad C sicut B ad D modò tamen sint ejusdem generis. nam si A & B essent lineæ, & C & D quadrata; ratio argumentandi non valeret; quia linea non potest habere rationem ad quadratum. Vide prop.16.*

14. Conversa ratio est quando consequens instar antecedentis sumitur. *Ut si ex eo quod sit A ad B sicut C ad D, ego concludam; ergo est B ad A sicut D ad C. Vide propositionis 16. Coroll.*

15. Compositio rationis est cum antecedens, & consequens instar unius sumptum, ad consequens comparatur Ut si ex eo quòd sit A ad B sicut C ad D, concludam, ergo est A B ad B, id est 6 ad 2 sicut C D, ad D id est sicut 9 ad 3. Vide propos.18.

16. Divisio rationis est comparatio excessus antecedentis supra consequens, ad ipsum consequens, *ut si ex eo quòd sit A B ad B ut CD ad D concludam: ergo est A ad B ut C ad D.* Vide propos.17.

17. Conversio rationis est cum antecedens ad differentiam terminorum, velut ad consequens, comparatur; *ut si ex eo quod sit AB ad B ut CD ad D, concludam: ergo est AB ad A; sicut CD ad C. Vide propos.18. Coroll.*

A. B. C. D.
E. F. G. H.

18. Propositio ex æquo, est comparatio magnitudinum extremarum subtrahendo intermedias, *ut si ex eo quòd sit ut A ad B ita E ad F; & ut B ad C ita F ad G; & ut C ad D ita G ad H, ego concludam, ergo ita est A ad D sicut E ad H.*

19. Propositio ex æquo ordinata, est cum eodem ordine comparantur quantitates in utraque serie, *ut in allato exemplo. Vide prop.22.*

A. B. E.
F. C. D.

20. Propositio ex æquo perturbata, est cùm non eodem ordine comparantur quantitates in utraque serie, *ut si ex eo quòd sit ut A ad B ita C ad D: & ut B ad E ita F ad C, ego concludam; ergo est A ad E: sicut F ad D. Vide prop.23.*

A. B. C. D.
9. 3. 6. 2.

Hic subjicio omnes modos argumentandi, quia est ut A ad B ita C ad D.

Alterna ratio.
Ergo est ut A ad C ita B ad D.
Conversa ratio.
Ergo est ut B ad A ita D ad C.
Compositio rationis.
Ergo erit ut A B ad B ita C D ad D.
Divisio rationis. 12 3 8 2
Ergo ita erit 6 ad 3 ut 4 ad 2.
Conversio rationis.
Ergo erit 9 ad 6 ut 6 ad 4.

Ex æquo ordinata.		*Ex æquo perturbata.*	
12. 6. 3.	8. 4. 2.	12. 6. 2.	24. 8. 4.
12 *ad* 3. *ut*	8 *ad* 2.	12. 2.	24. 4.

Hic liber continet propositiones Euclidis 25. quibus accesserunt aliæ 10. jam apud Mathematicos receptæ. 6. priores tantùm sunt usui, ut reliquæ probentur, per æquè multiplices; quam methodum, quia non sequimur eas reliquimus immutato tamen reliquarum propositionum ordine, ne in citationibus

tionibus communibus sit aliquid difficultatis omnes propositiones sunt Theoremata.

Petitio.

Datis tribus quantitatibus A, B, C petitur concedi dari posse quartam quantitatem D, ad quam C. eamdem rationem habeat, quam habet A ad B.

PROPOSITIO VII.

Æquales ad eandem magnitudinem eandem habent rationem; & eadem ad æquales.

8. Sint magnitudines A & B æquales,
A.C.4. dico illas ad eandem magnitudinem C
B. habere eandem rationem; si enim A non
8. haberet eandem rationem ad C quam B ad C; ergo A (*per def.5.*) aliquam partem aliquotam magnitudinis C, pluries continebit quàm B illam contineat: ergo A major erit contra suppositionem.

Secundò dico magnitudinem C eandem habere rationem ad magnitudines A & B æquales, nisi enim haberet eandem rationem ad utramque: ad alterutram verbi gratia ad A, magnitudo C, haberet majorem rationem, quàm ad B. ergo (*per def.6.*) aliquam partem aliquotam ipsius A verbi gratia quadrantem pluries contineret, quàm quadrantem magnitudinis B: ergo quadrans magnitudinis A minor esset quadrante magnitudinis B: quare & tota A minor esset, totâ B; contra suppositionem.

PROPOSITIO VIII.

Major ad eandem magnitudinem, majorem habet rationem, quàm minor: & eadem ad majorem quantitatem, minorem habet rationem, quàm ad minorem.

F
A——B
C—D
E G

Sit A B major quantitas, & CD minor; sitque tertia E. dico AB ad E, majorem rationem habere, quàm CD habeat ad eandem E. Abscindatur AF æqualis magnitudini CD, tunc AF & CD eandem rationem habebunt ad E (*per 7.*) intelligatur autem dividi magnitudo E per medium, & istud medium iterum bifariam, & sic deinceps tandem fit aliqua pars aliquota EG, ipsius E, quæ minor erit quàm FB; & quia AF & CD eandem habent rationem ad magnitudinem E, (*per def.5.*) toties ejus pars aliquota EG continebitur in AF, ac in CD: sed continetur adhuc semel in FB, cum EG minor sit quàm FB: igitur EG pars aliquota ipsius E, pluries continetur in AB, quàm in CD. quare (*per def.16.*) AB majorem habet rationem ad E, quàm CD ad E.

A——B
C—D
E G F
——H

Dico secundò, eandem magnitudinem E ad majorem AB, habere minorem proportionem, quàm ad minorem CD. Sumatur enim quæcumque pars aliquota ipsius CD ut quadrans quæ auferatur ex E quantum fieri potest inveniaturque in E, verbi gratiâ quinquies, si nihil relinquat sed eam metiatur, certum est quod quia quadrans majoris AB major est, quadrante ipsius CD inveniri non poterit quinquies in ipsâ E; quare E quinquies quadrantem ipsius CD contineret & non contineret quinquies quadrantem lineæ AB: quare (*per def.6.*) majorem haberet rationem ad CD, quàm ad AB. Si vero quadrans ipsius CD quinquies sumptus in ipsâ E, relinquat FG, certum est quod quadrans ipsius AB qui major est quinquies sumptus, aut nihil relinquet aut minùs relinquet. Relinquat igitur HG, dividaturque quadrans ipsius CD bifariam, & rursus bifariam, donec aliqua ejus pars aliquota sit minor quàm FH. sit hæc pars quadrans quadrantis, seu 16 pars ipsius CD. Quia in EF erant quinque quadrantes ipsius CD, in eâ erunt quinquies quatuor partes 16, hoc est 20 16 ipsius CD; & quia in EH sunt 5 quadrantes ipsius AB, in FH erunt 20 partes 16 ipsius AB; & quia FH major est unâ 16 ipsius CD suntque in EF 20, in EH erunt 21 partes 16 ipsius CD, & 20 tantum ipsius AB; quot autem erunt 16 ipsius AB in reliquâ HG, saltem totidem erunt partes 16 ipsius CD, cùm minores sint 16 ipsius AB. Igitur tota EG pluries continet 16 partes minoris CD, quàm majoris AB: igitur (*per defin. 5.*) EG majorem habet rationem, ad minorem CD, quàm ad majorem AB.

PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem magnitudinem habent eandem rationem, illa æquales sunt: & ad quas eadem habet eandem rationem.

A, B, C. Sint magnitudines A & B, quæ ad C habeant eandem rationem: dico A & B esse æquales.

Demonstr. Si enim non sint æquales, alterutra ponatur major, sitque A; ergo (*per 8.*) major A ad eandem C majorem haberet rationem quàm B minor; contra suppositionem.

Secundò, si magnitudo C ad A & B eandem habeat rationem, dico A & B esse æquales.

Demonstr. Si enim non sunt æquales, sit A major quàm B; ergo C ad majorem A, minorem habet rationem, quàm ad B (*per 8.*) quod tamen est contra suppositionem.

PROPOSITIO X.

Quæ majorem habet rationem ad eandem, ea major est; & ad quam eadem habet majorem rationem, ea minor est.

A, B, C. Magnitudo A, habeat minorem rationem ad C, quàm B habeat ad eandem C; dico A majorem esse quàm B.

Demonstr. Si enim A non sit major quàm B, aut esset æqualis, & tunc (*per 8.*) A & B eandem haberent rationem ad C, contra suppositionem: aut A esset minor, & tunc (*per 9.*) B haberet majorem rationem ad C, quàm habeat A ad eandem C, contra supposit.

Secundò, si C habet minorem rationem ad A quàm ad B, dico A majorem esse quàm B.

 Demonst.

Demonstr. Si enim non esset major; aut esset æqualis & tunc (*per* 8.) C ad æquales A, & B haberet eandem rationem contra suppositionem: vel A esset minor, & tunc (*per* 9.) C ad A minorem, majorem rationem haberet, quàm ad B. item contra suppositionem.

PROPOSITIO XI.

Quæ eidem, eadem sunt rationes inter se sunt eadem.

A.B. C.D. E.F.
4. 2. 8. 4. 6. 3.

Sit ratio A ad B; ut ratio C ad D, sit etiam ratio E ad F; ut ratio C ad D: dico esse A ad B; sicut E ad F.

Demonstr. Quia A eandem rationem habet, ad B; quam habet C ad D, (*per def.* 5.) toties A continebit quascumque partes aliquotas ipsius B; quoties C continet similes partes aliquotas magnitudinis D; sed quoties C quascumque partes aliquotas ipsius D continet, toties (*per eandem* 5. *def.*) E continet similes partes aliquotas ipsius F; igitur quoties A continet partes magnitudinis B, toties E continet similes partes magnitudinis F. ergo (*per* 5. *def.*) eadem est ratio A ad B, quæ E ad F.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales; erit ut una antecedentium ad unam consequentium; ita omnes antecedentes, ad omnes consequentes.

3. 9.
A. B.
C. D.
2. 6.

Sit A ad B; ut C ad D. dico ita esse A & C simul ad B & D simul; ut A sola ad B solam.

Demonstr. Quia A habet eandem rationem ad B; quàm C ad D; A continebit toties quascumque partes aliquotas magnitudinis B, quoties C continet similes partes magnitudinis D. Ponamus A continere ter unam decimam quintam partem ipsius A, C pariter continebit unam decimam quintam ipsius D. Sed una 15 ipsius B, juncta uni 15 ipsius D, facit unam 15 ipsarum B, & D simul sumptarum: igitur in magnitudinibus A, & B simul, sunt tres 15. ipsarum B, & D; quare A & C simul, toties continent unam 15 magnitudinum B & D, quoties A sola continet unam 15 ipsius B. quod probavi de una 15. Idem probabo de quibuslibet aliis partibus aliquotis: quare (*per def.* 5.) erit A ad B; sicut A, & C simul, ad B & D simul.

PROPOSITIO XIII.

Si duæ rationes æquales inter se fuerint: quarum una major fuerit aliquâ tertiâ & alia æqualium eâdem tertiâ major erit.

A, B, C, D, E, F,

Sit ratio A ad B, æqualis rationi C ad D, ratio autem C ad D sit major ratione E ad F, dico rationem magnitudinis A ad B majorem esse ratione magnitudinis E ad F.

Demonstr. Cum enim C ad D majorem rationem habeat quàm E ad F, C pluries continebit aliquam partem aliquotam ipsius D, quam E contineat similem partem magnitudinis F, sed quia est ut C ad D, ita A ad B, A toties continebit similem partem aliquotam magnitudinis B, quoties C continet similem partem ipsius D, (*per def.* 5.) ergo A pluries continebit aliquam partem aliquotam magnitudinis B, quàm E contineat similem partem magnitudinis F: quare (*per def.* 5.) major erit ratio A ad B quam E ad F.

PROPOSITIO XIV.

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem quàm tertia ad quartam: & prima major, æqualis, aut minor fuerit tertiâ, secunda quoque quartâ major, æqualis, aut minor erit.

6. 3. 4. 2.
A, B, C, D,

Sit A ad B, sicut C ad D. dico primò, si A major sit quam C. B quoque quàm D major erit.

Demonstr. Quia A major est, quàm C, (*per* 9.) erit major ratio A ad B, quàm C ad eandem B, sed ut A ad B, ita C ad D. quare (*per* 13.) minor erit ratio C ad B, quàm C ad D; quare (*per* 10.) B quàm D major erit.

Dico secundò, si A sit æqualis ipsi C, B fore æqualem ipsi D.

Demonstr. Cum enim A & C sint æquales, (*per* 8.) eadem erit ratio A ad B, & C ad B, sed ut A ad B, ita C ad D, igitur (*per* 11.) ita erit C ad B. & C ad D, quare (*per* 9.) B & D æquales erunt.

Dico tertiò, si A minor sit quam C; B quoque minorem esse quàm D.

Demonstr. Quia enim A minor est quàm C, (*per* 8.) erit major ratio C ad B, quàm A ad B, sed ut A ad B, ita C ad D, igitur major erit ratio C ad B, quàm C ad D, quare (*per* 10.) B minor erit quàm D.

PROPOSITIO XV.

Æquèmultiplices in eâdem sunt ratione, ac magnitudines quarum sunt multiplices.

G.2. K.3
F. 2. I. 3
E.2. H.3
6. 2. 3. 9
C A B D

Sint duæ quantitates A & B, quarum C & D sint æquè multiplices: hoc est C toties contineat magnitudinem A, quoties D continet ipsam B: dico ita esse C ad D, sicut A ad B. Intelligatur C dividi in partes E, F, G, æquales ipsi A, quod fieri potest cum sit illius multiplex, dividatur pariter D in partes H, I, K, ipsi B æquales, tot erunt in D partes magnitudini B æquales, quot sunt in C, partes magnitudini A æquales, cum sint æquè multiplices.

Demonstr. Erit E ad H, sicut A ad B, cùm sint æquales, ita erit F ad I, sicut A ad B; pariter ita erit G ad K, ut A ad B, igitur (*per* 12.) ita erunt omnes E, F, G, seu C, ad omnes H, I, K, seu D, sicut A ad B.

COROLLA

COROLLARIUM.

Totidem partes aliquota duorum totorum, in eâdem sunt ratione, ac tota. Ostendimus in superiori propositione, ita esse E ad H, sicut A ad B, & pariter F ad I, sicut A ad B, quare (per 11.) *licebit concludere, ita sunt E, F, simul seu duo trientes magnitudinis C ad H, I duo trientes magnitudinis D, sicut A, ad B, sed ostendimus etiam ita esse C ad D, sicut A ad B, igitur duo trientes magnitudinis C, se habent ad duos trientes magnitudinis D, sicut tota C ad totam D.*

PROPOSITIO XVI.

Si 4. magnitudines proportionales fuerint, & ejusdem rationis: etiam alternatim proportionales erunt.

12. 8. 9. 6.
A. B C. D.

Sit A ad B, ut C ad D, sintque magnitudines ejusdem rationis, hoc est, vel omnes lineæ, vel omnes superficies, vel omnes solidæ. Dico ita esse A ad C, sicut B, ad D.

Demonstr. Si enim hoc ita non est, sit major ratio A ad C, quàm B ad D: quare (*per def.6.*) A pluries continebit aliquam partem aliquotam magnitudinis C, quàm B contineat similem partem aliquotam; ipsius D. Ponatur A continere quater trientem magnitudinis C; & B ter tantùm continere trientem magnitudinis D. intelligatur A dividi in quatuor quadrantes, sicut & B. quandoquidem tota A, seu quatuor ejus quadrantes, continent quater trientem magnitudinis C singuli quadrantes unum trientem continebunt, si enim singuli unum non continerent, in duobus triens non esset bis, nec in quatuor quater. Quia verò quatuor quadrantes ipsius B, seu tota B, non continet quater trientem magnitudinis D; nec singuli quadrantes unum quadrantem continebunt, quare tres quadrantes magnitudinis A, tres trientes ipsius C saltem continebunt; hoc est non erunt minores ipsâ C; tres autem quadrantes magnitudinis B, non continebunt tres trientes ipsius D, seu illâ erunt minores, aliunde tamen quia (*per superius coroll.*) tres quadrantes magnitudinis A, se habent ad tres quadrantes magnitudinis B, ut tota A ad totam B; & ut tota A ad totam B, ita C ad D; erunt, ut tres quadrantes magnitudinis A ad tres quadrantes magnitudinis B; ita C ad D; quare (*per* 14.) si tres quadrantes magnitudinis A non minores sunt tertiâ C, tres quadrantes magnitudinis B non minores erunt magnitudine D, quod tamen ostensum est esse falsum, non igitur A habet majorem rationem ad C, quàm B ad D, neque B ad D majorem hahabet rationem, quàm A ad C, propter eandem rationem: igitur æqualem habent.

LEMMA.

Si prima ad secundam fuerit ut tertia ad quartam: etiam qualibet pars aliquota prima ad secundam erit; ut similis pars aliquota tertia ad quartam.

16. 3. 32. 6.
A. B. C. D.
E. F.
4. 8.

Sit A ad B; ut C ad D. dico quamcumque partem aliquotam E, magnitudinis A verbi gratia quadrantem; ita esse ad B, sicut quadrans F ipsius C, est ad D.

Demonstr. Si enim hoc ita non est, sit major ratio E ad B; quàm F ad D, igitur (*per 6. def.*) E aliquam partem ipsius B pluries continebit quàm F contineat similem partem ipsius D. E contineat quater trientem ipsius B; & F ter tantum contineat trientem ipsius D, si fieri potest, igitur magnitudo E bis sumpta octies continebit trientem ipsius B, & F bis sumpta non contineret octies trientem ipsius D. & E quater sumpta, seu A contineret decies sexies trientem ipsius B, & F quater sumpta, seu C, non contineret decies sexies trientem ipsius D, igitur (*per 6. def.*) non esset A ad B, sicut C ad D; contra suppositionem, sequitur eodem modo, etiam ita esse duos quadrantes ipsius A ad B, sicut duos ipsius C ad D.

COROLLARIUM.

Quod in Euclide est post 4 propositionem. Conversa ratio, si prima ad secundam fuerit ut tertia ad quartam: erit secunda ad primam ut quarta ad tertiam.

4. 8. 6. 12.
A. B. C. D.
E. F.
1
—
1. 1 2.

Si sit A, ad B: sicut C, ad D: dico convertendo ita esse B ad A: sicut D ad C, nam (*per superiorem*) erit A ad C, sicut B ad D, (*per eandem*) erit ut B ad A, ita D ad C.

Quia tamen hic modus argumentandi supponit 4 quantitates esse ejusdem rationis, licet hoc Coroll. sit universale, demonstrari debet alio modo.

Sit igitur A ad B: ut C ad D. dico ita esse B ad A, ut D ad C. Sit enim si fieri potest major ratio B ad A, quam D ad C, quare (*per def. 6.*) B pluries continebit aliquam partem aliquotam ipsius A, quàm D ipsius C. B contineat octies quadrantem E, ipsius A: & D tantum septies contineat quadrantem F ipsius C si fieri potest, quia A est ad B ut C ad D; etiam (*per Lemma superius*) quæcumque pars aliquota ipsius A, ut quadrans E, erit ad B, ut F quadrans ipsius C ad D, & (*per idem Lemma*) ita erit quadrans E octies sumptus ad B, ut totidem quadrantes F ad D. hoc tamen falsum esset nisi esset B ad A sicut D ad C. nam 8 quadrantes E non superarent ipsam B cum quadrans E octies contineatur in B, & 8 quadrantes F lineæ C, superarent lineam D, cum in D quadrans F septies tantùm contineatur: igitur B ad A, non habet majorem rationem, quàm D ad C.

PROPOSITIO XVII.

Divisio rationis.

Si composita magnitudines proportionales fuerint; & divisa proportionales erunt.

B 3. 6. D
A 5. 10. C

Sit A B ad B: sicut C D ad D; dico ita esse dividendo A, ad B sicut C ad D.

Demonstr. Quia est AB ad B: sicut CD ad D: A B (*per def.5.*) toties continebit quascumque partes aliquotas magnitudinis B, quoties CD, continet similes partes ipsius D. ponamus in A B esse 8. trientes magnitudinis B, totidem in C D erunt trientes magnitudinis D. auferendo ipsam B auferuntur tres ipsius trientes & totidem trientes magnitudinis D, dum aufertur ipsa D. igitur restabunt quinque trientes in A, ipsius B; & in C ipsius D. & quod dixi de trientibus de aliis quibuscumque partibus aliquotis ostendi potest, igitur (*per def. 5.*) ita est A ad B, sicut C ad D.

PROPOSITIO XVIII.

Compositio rationis.

Si divisæ magnitudines proportionales fuerint; & compositæ proportionales erunt.

B 3. 6. D
A. 5. 10. C

Sit A, ad B: ut C, ad D: dico componendo ita esse A B, ad B: ut CD, ad D.

Demonst. Quia est A ad B ut C ad D toties A continet quascumque partes aliquotas ipsius B: quoties C continet similes ipsius D. B autem toties continet easdem partes aliquotas suas; quoties D suas similes continet: quare si utrinque addantur partibus in A & C contentis: tot erunt partes aliquotæ magnitudinis B, in A B: quot sunt similes partes magnitudinis D, in CD: quare (*per def.5.*) erit AB ad B: ut CD ad C.

COROLLARIUM.

Conversio rationis.

Ex his demonstrari potest conversio rationis.

B 3. 6. D
A 5. 10. C

Sit ut A B ad B, ita CD ad D. dico ita esse A B ad A sicut C D ad C.

Demonstratio. Quia est A B ad B, ut C D ad D, erit dividendo (per 17.) *ut A ad B: ita C, ad D & convertendo* (per cor.16.) *ut B ad A, ita D ad C. & componendo* (per 18.) *ut A B ad A; ita CD, ad C.*

PROPOSITIO XIX.

Si fuerit ut tota ad totam: ita ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam.

B 4. 2. D
A. 12. 6. C

Sit ut A B ad CD, ita B ad D. dico ita esse reliquam A ad C, ut A B ad C D.

Demonstr. Quia est ut AB ad CD, ita B ad D: erit permutando (*per 16.*) ut AB ad B, ita CD, ad D, & (*per cor.18.*) per conversionem rationis ut AB ad A, ita CD ad C, & rursus permutando ut AB, ad CD, ita A ad C.

PROPOS. XX. & XXI.

In hoc modo argumentandi non sunt necessaria; continenturque in 22. & 23.

PROPOSITIO XVII.

Ordinata ratio.

Si sint quotcumque magnitudines, & alia totidem, quæ bina & bina in eâdem ordinatâ ratione sumantur, ex æquo extrema in eadem ratione erunt.

12. 6. 2. 6. 3. 1.
A, B, C, D, E, F

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F, binæ in eâdem ratione ordinatâ, hoc est sit A ad B: ut D ad E, & B ad C, ut E ad F; dico esse extremas in eadem ratione, hoc est ut A ad C ita D ad F.

Demonstr. Si hoc non ita sit: ponatur esse major ratio A ad C, quam D ad F; igitur (*per def.6.* A continebit pluries aliquam partem aliquotam ipsius C, quam D ipsius F: sit hæc pars dimidia ita ut A contineat 12 partes dimidias ipsius C, & D tantum 11 partes dimidias ipsius F si fieri potest, & quia est ut B ad C, ita E ad F, B tot continebit partes dimidias magnitudinis C, quot E continet dimidias magnitudinis F, sint utrobique 6. quare A continens 12 dimidias ipsius C majorem habebit rationem ad B, continentem 6. dimidias ejusdem C, quam D continens tantum 11. dimidias magnitudinis F: ad E continentem 6. dimidias ejusdem F: quod est contra suppositionem; igitur est A ad C: ut D ad F.

PROPOSITIO XXIII.

Perturbata ratio.

Si sint tres magnitudines, & alia totidem in eâdem ratione perturbatâ; etiam extrema in eâdem ratione erunt.

A B C; D.E.F.G
12.6.3. 8.4.4.1.

Sint tres magnitudines A, B, C: & aliæ totidem D, E, F, in eâdem ratione perturbatâ: hoc est sit A ad B: ut E ad F, & B ad C, ut D ad E. dico ita esse A ad C, ut D ad F.

Demonstr. Addatur quantitas G, ita ut sit ut B ad C; ita F ad G. quia igitur est ut A ad B, ita E ad F: & ut B ad C: ita F ad G; erit (*per 22.*) ut A ad C, ita E ad G. Rursus quia est ut B ad C, ita D ad E, & F ad G, eadem erit ratio (*per 11.*) D ad E, quæ F ad G, & permutando (*per 16.*) ut D ad F: ita E ad G, sed ut E ad G, ostendimus ita esse A ad C, igitur ut A ad C ita erit D ad F.

PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad secundam habeat eandem rationem, ac tertia ad quartam: sit autem quinta ad secundam ut 6 ad quartam: erit prima cum quinta ad secundam ut tertia cum sexta ad quartam.

E F
4. 6.
6. 2. 9. 3.
A.B.C.D

Sit A ad B, ut C, ad D, & E, ad B ut F, ad D: dico totam AE ad B, ita esse; ut totam CF ad D.

Demonstr. Quia est E ad B, ut F ad D: erit convertendo ut B ad E, ita D ad F, quia igitur est ut A ad B, ita C ad D, ut B, ad E, ita D, ad F, erit [*per* 22.] ut A, ad E: ita C, ad F, & componendo [*per* 18.] ut AE, ad E, ita CF ad F: quare cum sit ut AE ad E ita CF ad F: & ut E ad B, ita F ad D: erit ex æquo (*per* 22.) ut AE, ad B: ita CF ad D.

PROPOSITIO XXV.

Si 4 magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus majores erunt.

B D.
8. 6.
4. 3. 4. 3.
A. C. E. F

Sint magnitudines AB, CD, E & F proportionales: sitque AB maxima; F minima. dico duas AB, & F reliquis duabus majores esse.

Demon. Quia est AB ad CD, ut E ad F, & AB est major quam E, CD etiam major erit quam F (*per* 14) quare ex CD abscindatur C, æqualis ipsi F, & ex AB, abscindatur A, æqualis ipsi E; erit igitur ut AB, ad C D; ita A ad C & (*per* 19.) ita erit reliqua B, ad D; ut tota AB ad CD; sed AB major supponitur quam CD, igitur B major erit quam D. quia autem A & E sunt æquales, si illis addantur F, & C item æquales, erunt A, & F simul; æquales ipsis E & C simul sumptis. quare si primis addatur B, major, & posterioribus D minor, erunt AB & F majores ipsis CD & E: quod erat ostendendum.

Reliqua 9 propositiones hujus libri, non sunt Euclidis; quia tamen à plerisque authoribus citantur quasi essent Euclidis: ideo illas non prætermisimus.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si prima ad secundam majorem rationem habeat; quam tertia ad quartam: habebit convertendo quarta ad tertiam majorem rationem: quam secunda ad primam.

9. 4. 6. 3.
A,B,C.D.
E
8.

Sit major ratio A ad B, quam C, ad D. dico convertendo majorem D, ad C esse rationem; quam B ad A. ponatur enim esse E ad B, sicut C ad D.

Demonstr. Quia A ad B habet majorem rationem quàm C ad D, ut autem C ad D: ita E ad B: major quoque erit ratio A ad B, quàm E ad B, & (*per* 10.) A major est quam E. Quia autem est E, ad B, sicut C ad D: convertendo (*per cor.* 10.) erit B ad E, sicut D, ad C, sed B habet minorem rationem ad majorem A, quam ad minorem E (*per* 8.) igitur major est ratio D ad C, quam B ad A.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si prima ad secundam majorem rationem habeat quam tertia ad quartam permutando, prima ad tertiam majorem rationem habebit, quàm secunda ad quartam.

9. 4. 6. 3.
A, B, C, D
E.
8.

Habeat A ad B, majorem rationem quam C ad D: dico permutando majorem rationem esse A ad C, quam B ad D; sit enim ut C ad D, ita E ad B.

Demon. Erit rursus major ratio A ad B: quàm E ad B, & [*per* 10.] A major erit quam E: cum igitur A sit major quam E, erit major ratio A ad C quam E ad C. & quia est E ad B ut C ad D, erit permutando ut E ad C ita B ad D [*per* 16.] igitur erit major ratio A ad C quam B ad D.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si prima ad secundam majorem rationem habeat quam tertia ad quartam: prima quoque cum secunda ad secundam majorem rationem habebit, quàm tertia cum quarta ad quartam.

9. 4. 6. 3.
A, B, C, D
E.
8.

Sit major ratio A ad B, quàm C ad D: dico majorem esse rationem AB ad B, quàm CD ad D, sit enim ut C ad D, ita E ad B.

Demonstr. Quia est major ratio A ad B, quàm E ad B: E minor, erit quàm A (*per* 10.) & additâ communi B, AB major erit quàm EB. quia autem est ut E, ad B, ita C ad D erit componendo (*per* 18.) ut EB ad B, ita CD, ad D, & quia AB major est, quàm EB: erit (*per* 7.) major ratio AB, ad B: quàm EB, ad B: igitur major est ratio AB ad B, quàm CD. ad D.

PROPOSITIO XXIX.

Si prima cum secunda ad secundam majorem rationem habeat quam tertia cum quarta ad quartam: etiam dividendo prima ad secundam majorem rationem habebit; quam tertia ad quartam.

9. 4. 6. 3.
A. B. C. D.
E.
8.

Habeat AB majorem rationem ad B, quàm CD ad D: dico A ad B, majorem rationem habere quam C ad D. sit enim ut CD, ad D, ita EB ad B.

Demonstr. Major erit ratio AB ad B, quàm EB ad B: & (*per* 10.) AB major erit, quam EB, & auferendo communem B, A major erit, quàm E, quia autem est ut EB ad B, ita CD ad D, erit dividendo (*per* 17.) ut C ad D; ita E ad B. sed quia A major est quàm E, erit (*per* 8.) major ratio A ad B: quàm E ad B: ergo major erit ratio A ad B: quàm C ad D.

PROPOSITIO XXX.

Si prima cum secunda ad secundam, majorem rationem habeat quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit per conversionem rationis prima cum secundâ ad primam; minorem rationem, quam tertia cum quartâ ad tertiam.

9. 4. 6. 3.
A. B. C. D.

Sit major ratio A B ad B, quàm CD ad D. dico minorem esse rationem AB ad A, quàm CD ad C.

Demonstr. Quia est major ratio AB ad B, quàm CD ad D, erit (*per* 29.) major ratio A ad B quàm C ad D, ergo convertendo (*per* 26.) major erit ratio D ad C, quàm B ad A: & (*per* 28.) componendo major erit ratio C D ad C quàm AB ad A.

PROPOSITIO XXXI.

Si sint tres magnitudines quæ in majori sint ratione quàm aliæ tres: prima priorum majorem rationem habebit ad tertiam, quam prima posteriorum ad suam tertiam.

16. 10. 3. | 9. 6. 2.
A. B. C. | D. E. F.

Sit major ratio A ad B, quàm D ad E: item sit major ratio B ad C, quàm E ad F, dico majorem esse rationem A ad C, quam D ad F.

Demonstr. Quia est major ratio A ad B, quàm D ad E erit permutando (*per* 27.) major ratio A ad D, quàm B ad E: & quia est major ratio B ad C, quàm E ad F, major quoque ratio erit B ad E quàm C ad F: ergo multo major est ratio A ad D quàm C ad F, igitur permutando (*per* 27.) erit, major ratio A ad C, quam D ad F.

PROPOSITIO XXXII.

Si sint tres magnitudines in majori ratione, quam aliæ tres in perturbatâ ratione illis respondentes: erit ex æquo major ratio prima priorum ad tertiam: quàm prima posteriorum ad suam tertiam.

B F
12. 5.
13. 6. 2. 4. 2. 1.
A, C, E : H, I, K,

Sit major ratio A ad C, quàm I ad K, item sit major ratio C ad E quàm H ad I. dico majorem esse rationem A ad E: quàm H ad K.

Demonstr. Sit enim B quæ eandem rationem habeat ad C, quàm habet I ad K, & quia A ad C habet majorem rationem quam I ad K, A ad C majorem rationem habebit quam B ad I: quare (*per* 10.) A major erit quam B, sit etiam ut H ad I, ita C ad F, & quia C ad E habet majorem rationem quam H ad I, major erit ratio C ad E, quàm C ad F; unde (*per* 10.) F major erit, quàm E: quia autem est ut B ad C, ita I ad K & ut C ad F ita H ad I, erit (*per* 23.) ut B ad F, ita H ad K; sed A major quàm B, majorem habet rationem ad F; quàm B (*per* 8.) igitur est major ratio, A ad F quàm H ad K, & quia E minor est quàm F: (*per* 8.) multo major erit ratio A ad E, quàm A ad F; igitur major est ratio A ad E, quàm H ad K.

PROPOSITIO XXXIII.

Si sit major ratio totius ad totum quàm ablati ad ablatum, erit reliqui ad reliquum major ratio quàm totius ad totum.

13. 4. 6. 2
A. B. C. D

Sit major ratio totius A B ad totam C D, quàm ablatæ B ad ablatam D. dico majorem esse rationem reliquæ A ad reliquam C; quàm totius A B ad totam C D.

Demonstr. Quia major est ratio A B ad C D quàm B ad D erit convertendo (*per* 26.) major ratio A B ad B quàm C D ad D, & (*per* 30.) per conversionem rationis minor erit ratio A B ad A, quàm C D ad C, & rursus convertendo (*per* 26.) minor erit ratio AB ad CD, quàm A ad C.

PROPOSITIO XXXIV.

Si sint quotcumque magnitudines, & aliæ totidem; sitque major ratio primæ priorum ad primam posteriorum, quàm secundæ priorum ad secundam posteriorum & hæc major quàm ratio tertiæ priorum ad tertiam posteriorum, & ita deinceps: major erit ratio omnium simul priorum, ad omnes simul posteriores, quam omnium priorum relictâ primâ, ad omnes simul posteriores relictâ primâ, minor tamen quam sit ratio primæ priorum ad primam posteriorum, major denique quam sit ratio ultimæ priorum ad ultimam posteriorum.

12. 8. 4. 4. 3. 2.
A. B. C. E. F. G

Sit major ratio A ad E, quàm B ad F, & hæc major quàm C ad G, & ita consequenter si essent plures. dico primò, rationem omnium antecedentium A, B, C ad omnes consequentes E, F, G, majorem esse ratione ultimæ antecedentium ad ultimam consequentium scilicet C ad G.

Demonstratio. Cum sit major ratio A ad E quàm B ad F, erit permutando (*per* 26.) major ratio A ad B, quàm E ad F; & (*per* 28.) componendo est major ratio A B ad B, quàm E F ad F, & permutando (*per* 26.) major erit ratio AB ad EF; quàm B ad E, sed ratio C ad G, est adhuc minor ratione B ad F: igitur ratio A B ad E F major est ratione C ad G, & componendo (*per* 28.) major est ratio A B C ad E F G, quàm C ad G. quod est primum.

Dico secundò, rationem omnium priorum ad omnes posteriores, scilicet ABC ad EFG, majorem esse, ratione omnium priorum relictâ primâ, ad omnes posteriores relictâ primâ, scilicet ratione B C ad F G.

12. 8. 4. 4. 3. 2.
A. B. C. E. F. G.

Demonstr. Quia est major ratio A ad E, quàm B ad F: erit permutando major ratio A ad B, quàm E ad F: & componendo, major ratio AB ad F: quàm EF ad F: & permutando major ratio AB ad EF, quàm B ad F: quia igitur major est ratio totius A B ad totam E F quàm ablatæ B ad ablatam F: major erit ratio reliquæ A, ad reliquam E, quàm totius A B ad totam E F, & per eandem rationem; major erit ratio B ad F, quàm B C, ad F G: multo ergo major est ratio A ad E: quàm B C ad F G: & permutando major

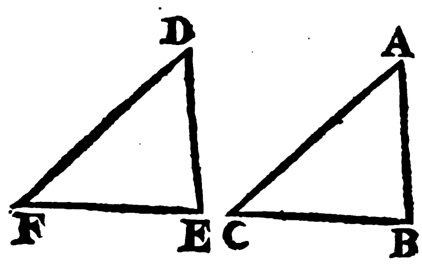
major est ratio A ad B C ; quàm E ad F G : & componendo major erit ratio A B C ad E F G, quàm BC ad F G : quod est secundo loco propositum.

Dico tertiò, majorem esse rationem A ad E : primæ scilicet priorum, ad primam posteriorum, quàm omnium priorum ad omnes posteriores, id est quam ratio A B C ad E F G.

Demonstr. Quia major est ratio ut ostendimus totius ABC ad totam E F G, quàm ablatæ BC ad ablatam FG, erit (*per* 33.) major ratio reliquæ A ad reliquam E, quàm totius ABC ad totam EFG: quod erat demonstrandum.

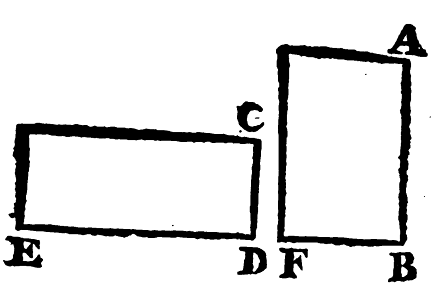
EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

Definitiones.

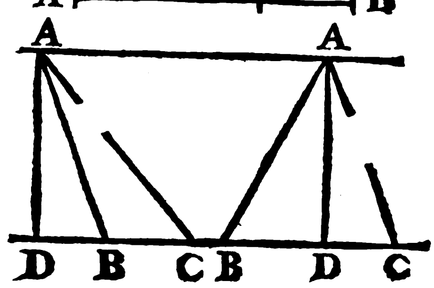


Prima, Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent : & latera circa æquales angulos proportionalia. *Vt triangula ABC, DEF erunt similia si angulus A fuerit angulo D æqualis, & angulus B angulo E, & consequenter angulus C angulo E. Sitque ut AB ad BC: ita DE ad EF, & ut EF ad FD: ita BC ad CA.*

Secunda, Reciprocæ figuræ sunt illæ quæ ita se habent ut in utrâque & antecedentes termini rationum fuerint & consequentes. *Hoc est tunc figura sunt reciproca cum in una figura est antecedens proportionis cujus consequens est in alia : & vicissim in secundâ est antecedens alterius proportionis cujus consequens est in prima : vel dum comparatio desinit in figurâ, in quâ inceperat. ut in duobus parallelogrammis, si esset ut AB ad CD : ita DE ad BF, ea essent reciproca.*



Tertia, Linea secta est extremâ, ac mediâ ratione, cum eadem est ratio totius lineæ ad majus segmentum, quæ est majoris segmenti ad minus. *Vt si linea A B ita secetur in C, ut sit eadem ratio AB ad AC, quæ est AC ad CB.*



Quarta, Altitudo figuræ est linea perpendicularis à vertice figuræ ad basin ducta. *Vt in triangulis ABC linea A D, sive cadat intra figuram sive extra; triangula autem, & parallelogramma eandem habentia altitudinem, inter easdem parallelas collocari possunt, ut bases BC collocetur in eadem linea, si altitudines seu perpendiculares A D, A D sint æquales, cum propter duos angulos rectos in punctis D, D sint parallelæ, linea B C, A A illas conjungentes* (per 33. 1.) *parallelæ erunt; pariter triangula ABD, ABC, quorũ bases BD, BC sunt in eadem linea BC, & habent eundem verticem sunt inter easdem parallelas & habent eandem altitudinem AD.*

Quinta, Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam rationem effecerint.

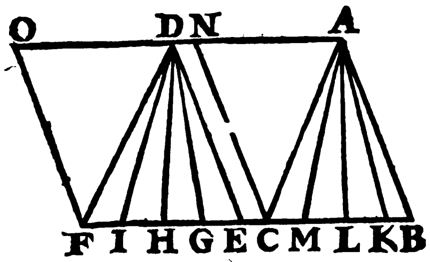
Sciendum est quamcumque rationem, seu proportionem unius quantitatis, ad aliam habere suum nomen, quod nomen sumitur ab aliquo numero significante quomodo se habeat antecedens ad consequens, nam ita se habet ut numerus à quo sumitur denominatio se habet, ad unitatem, quod intelligendum est de proportionibus rationalibus, nam in irrationalibus major est difficultas, ita si proponantur duæ magnitudines, una duodecim pedum, alia 6 pedum, dicimus rationem primæ ad secundam, esse duplam, ita ut à binario sumatur nomen indicans, quod prima sit ad secundam, ut binarius ad unitatem quod si proponeretur pro prima 4. *& pro secunda* 12. *diceremus esse proportionem subtriplam, ita ut triens esset*

esset denominator rationis 4 ad 12. indicans 4 ad 12 ita se habere ut triens ad unitatem, quando autem sunt plurimæ continuo quantitates, verbi gratia tres 12. 6. 2. denominator rationis 12 ad 6 quæ est dupla, est binarius: denominator rationis 6 ad 2 quæ est tripla, est ternarius, si velis habere denominatorem rationis 12 ad 2. multiplica denominatores rationum 12 ad 6, & 6 ad 2, id est binarium per ternarium, & fient 6. ratio igitur 12 ad 2. est sextupla, quæ componi dicitur ex rationibus 12 ad 6, & 6 ad 2, id est ex dupla, & tripla, quia ejus denominator fit ex multiplicatione denominatorum, scilicet binarij & ternarij. est enim proportio sextupla, bis tripla. quando igitur dicimus rationem componi ex aliis rationibus, nihil intelligimus aliud, quàm denominatorem illius, fieri per multiplicationem denominatorum aliarum rationum.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Triangula & parallelogramma quorum eadem fuerit altitudo se habent ut bases.



Sint duo triangula ABC, DEF quorum altitudo sit eadem. Dico primò eandem esse rationem trianguli ABC ad triangulum D E F, quæ est basis BC ad basim E F.

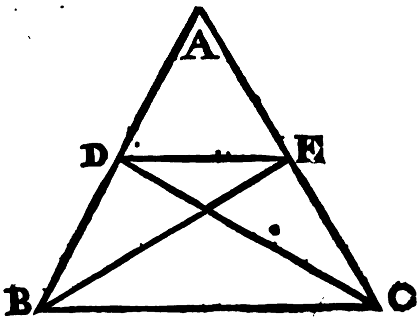
Demonstr. Intelligatur basis E F divisa in quotcumque partes æquales, verbi gratia in 4; & ex puncto D ducantur lineæ D G, D H, D I, & linea BC quadrantem lineæ EF contineat ter. sintque lineæ C M, M L, L K, quæ sint singulæ æquales lineis EG, GH, HI, I F. ducanturque lineæ A K, A L, AM, triangula D E G, D G H, DHI, DIF. singula sunt æqualia (*per* 38. 1.) quia sunt supra bases æquales, & in eisdem parallelis: igitur sunt quadrantes trianguli D E F: & quia triangula ABC, D E F habent altitudines æquales (*per def.*4.) etiam in iisdem parallelis erunt, & triangula A K L, A L M, A M C, habentia bases æquales cum triangulis EDG, EGH, DHI, DIF. illis æqualia erunt: ergo quot erunt quadrantes lineæ E F, in linea B C, tot erunt quadrantes trianguli DEF, in triangulo ABC, & quod ostendi de quadrantibus, potest etiam ostendi de quibuslibet partibus aliquotis: igitur (*per def.*5. 5.) ut basis BC ad basin EF, ita triangulum ABC ad triangulum DEF.

Quia verò parallelogramma ABCN, DEFO sunt dupla triangulorum ABC, DEF, (*per* 41. 1.) se habebunt ut triangula, (*per* 5. 5.) sed triangula sunt ut bases; igitur parallelogramma A B C N, D E F O inter easdem parallelas, seu eandem habentia altitudinem se habent ut bases.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si in triangulo ducatur linea uni lateri parallela, hæc secabit latera proportionaliter; quod si linea duo trianguli latera secet proportionaliter, hæc erit alteri lateri parallela.



Sit in triangulo ABC, ducta linea D E, lateri BC parallela. dico latera AB, AC secta esse in D & E proportionaliter: hoc est ita esse AD ad DB, ut A E ad EC. Ducantur lineæ BE, DC.

Demonstr. Triangula DBE, DEC eandem basin DE habentia, & inter easdem parallelas D E, BC, (*per* 38. 1.) æqualia sunt. igitur (*per* 7. 5.) ita erit triangulum ADE ad DBE, sicut ad DEC, sed ut triangulum ADE ad DBE, ita basis AD ad basin DB (*per* 1. [*cum eumdem habeant verticem, & consequenter una eademque esset utrique altitudo quam ostenderet perpendicularis quæ posset duci ex puncto E ad lineam A B*] & ut triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita basis A E ad basin EC. igitur ut linea AD ad lineam D B, ita linea AE, ad lineam EC.

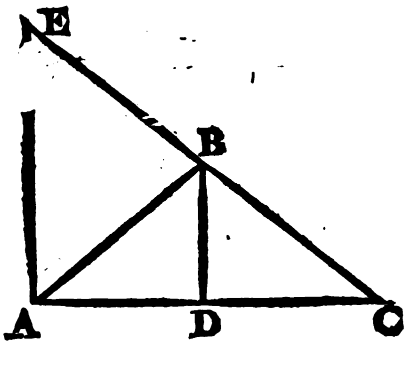
Secundò, si sit ut AD ad DB, ita AE ad EC, dico lineam DF esse parallelam lineæ BC.

Demonstr. Est enim sicut priùs ut AE ad EC, ita triangulum ADE ad triangulum DEC, & ut AD ad DB, ita idem ADE ad DBE: igitur idem triangulum ADE eandem habet rationem ad DBE & DCE, quare (*per* 9. 5.) triangula DBE DEC sunt æqualia, quæ cùm eandem basin DE habeant (*per* 39. 3.) erunt inter easdem parallelas DE, BC.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si linea angulum trianguli bifariam dividens, basin secet, eam in segmenta reliquis lateribus proportionalia dividet. Si verò linea angulum dividens secuerit basin in segmenta reliquis lateribus proportionalia; eum bifariam dividet.



Trianguli angulus A B C, dividatur bifariam linea B D. dico esse ut A B ad B C, ita AD ad

DC

DC. producatur linea BC, ita ut BE sit æqualis lineæ AB. ducaturque linea AE.

Demonstr. Angulus ABC externus respectu trianguli AEB est æqualis angulis AEB, BAE; (*per* 32. 1.) qui cum sint æquales (*per* 5. 1.) quilibet eorum erit media pars anguli ABC, sed etiam anguli ABD, DBC (sunt ejusdem anguli ABC media pars cum sit divisus bifariam: ergo angulus ABD est æqualis angulo BAE, qui cum sint alterni; lineæ AE, BD erunt parallelæ (*per* 29. 1.) & (*per* 2. 6.) erit ut EB aut AB illi æqualis ad BC, ita AD ad DC. quod erat demonstrandum.

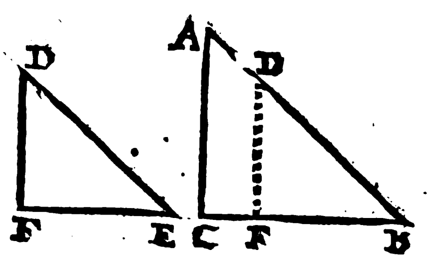
Secundò, linea BD dividat basin AC, in segmenta AD, DC proportionalia lateribus AB; BC, hoc est sit ut AD ad DC. ita AB ad BC. dico angulum ABC divisum esse bifariam. factâ eâdem constructione; quia lineæ AB, EB sunt æquales, erit ut EB ad BC, ita AD ad DC, igitur (*per* 2. 6.) lineæ AE, DB sunt parallelæ, & consequenter (*per* 30. 1. anguli EAB, ABD æquales erunt. Est autem totus ABC; (*per* 32. 1.) æqualis duobus angulis internis BAE, BEA, qui æquales sunt (*per* 5. 1.) ergo reliquus DBG est æqualis angulo E. sunt igitur anguli ABD, DBC æquales, ergo divisus est angulus ABC bifariam.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Triangula æquiangula habent latera circa æquales angulos proportionalia; & opposita æqualibus angulis homologa.

Sint duo triangula ABC, DFE æquiangula; id est angulus, B sit æqualis angulo E, & angulus A angulo D, angulus C, angulo F. Intelligatur angulus E superponi angulo B. æquali; congruent.



Demonstr. In illa superpositione quia angulus F externus supponitur æqualis angulo C opposito; erunt (*per* 29. 1.) lineæ AC, DF, parallelæ, ergo erit ut BD ad DA; ita BF, ad FC, & componendo per conversionem rationis (*per corol.* 18. 5.) erit ut BA, ad BD, ita BC, ad BF, & permutando (*per* 16. 5.) erit ut AB ad BC; ita DB ad FB. eodem modo, applicando angulum F supra C sibi æqualem ostenderem ita esse AC ad CB sicut DF ad FE. vides autem latus AB; quod est antecedens in ratione AB ad BC, opponi angulo C. & latus DE, quod est antecedens in ratione DE, ad EF opponi angulo F æquali angulo C. quod est esse homologa.

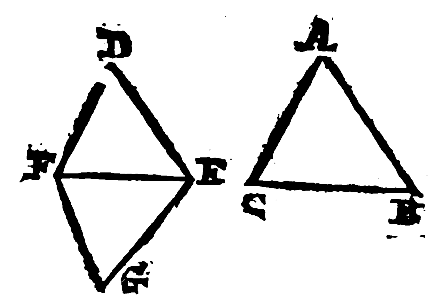
COROLLARIUM.

Ex hoc patet quod si ducatur in triangulo ut in ABC linea DF. parallela lateri AC; fiunt duo triangula ABC, DEF æquiangula, & similia.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si triangula habeant latera proportionalia, erunt æquiangula; & anguli oppositi lateribus homologis, erunt æquales.



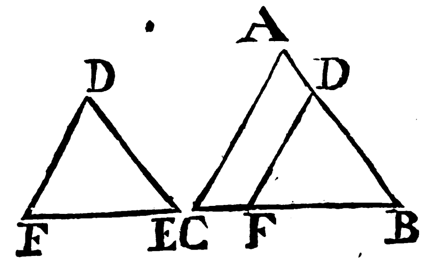
Sit in triangulis ABC; DEF, ut AB ad BC ita DE ad EF, ut BC, ad AC; ita EF ad DF. dico angulos A & D, B & E, C & F esse æquales, fiat angulus FEG æqualis angulo B, & angulus EFG æqualis angulo C; reliquus G reliquo A æqualis erit; quia omnis trianguli tres anguli æquivalent duobus rectis (*per* 32. 1.) & ita triangula ABC, EFG, sunt æquiangula.

Demonstratio. Quia triangula ABC, EFG, sunt æquiangula, erit (*per* 4.) ut EF ad EG, ita BC, ad AB, sed ut BC ad AB, ita supponitur EF ad ED, igitur ita est EF ad ED ut EF ad EG; igitur (*per* 7. 5.) ED & EG sunt æquales. ita FG & FD erunt æquales. quia autem triangula DEF, EFG habent omnia latera æqualia (*per* 8. 1.) sibi invicem congruent, & singulos angulos habebunt æquales ita angulus D angulo G erit æqualis, sed angulus G erat æqualis angulo A; igitur anguli A & D erunt æquales; ita reliqui anguli B & E, C & F æquales erunt.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si duo triangula unum angulum æqualem habeant; circa quem latera sint proportionalia: æquiangula erunt triangula.



Triangula ABC, DEF habeant angulos B, & E æquales, sitque ut AB ad BC; ita D B ad EF. dico triangula ABC, DEF esse æquiangula. intelligatur enim angulus E superponi angulo B; quia æquales sunt, congruent.

Demonstr. Quia ita est AB ad BC, ut DE ad EF, erit permutando (*per* 17. 5.) ut AB ad DE ita BC ad EF, & dividendo (*per* 18. 5. ut AD ad DE; ita CF ad FE, igitur (*per* 2.) DF, AC, sunt parallelæ, & anguli F & C, D & A oppositi ad easdem partes (*per* 29. 1.) æquales erunt, igitur æquiangula sunt triangula ABC, DEF.

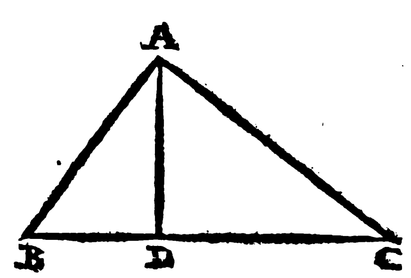
PROPOSITIO VII.

Relinquatur.

PROPOSITIO VIII.

In triangulo rectangulo perpendicularis ducta ab angulo recto, ad latus oppositum dividit triangulum in duo triangula, toti triangulo similia.

Sit triangulum ABC, cujus angulus A sit rectus à quo ad latus B C oppositum ducatur perpendicularis A D. dico facta esse duo triangula ABD, ADC similia toti triangulo ABC, ad quod, sufficit esse æquiangula, quia (*per* 4.) habebunt latera proportionalia, si sint æquiangula.



Demonst. Cum triangula ABC, ABD habeant angulos BAC, BDA rectos æquales, & angulum B communem reliqui BAD & C æquales erunt (*per* 32. 1.) & erunt æquiangula, eodem modo triangula ABD ADC, toti ABC æquiangula, inter se æquiangula erunt.

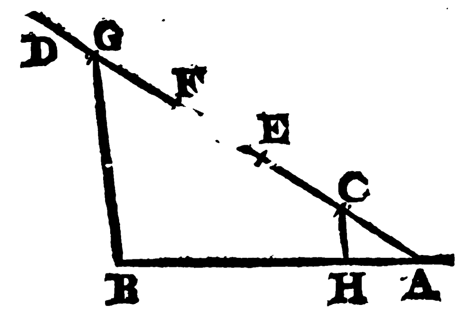
COROLLARIUM.

Ex eo sequitur lineam AD esse mediam proportionalem inter lineas BD, DC, nam quia triangula ADB, ADC sunt æquiangula, erit ut BD latus oppositum angulo BAD, ad A D latus oppositum angulo B, ita AD quod opponitur angulo C æquali ipsi BAD, ad DC latus oppositum angulo DAC æquali angulo B.

PROPOSITIO IX.

Problema.

A datâ rectâ imperatam partem auferre.



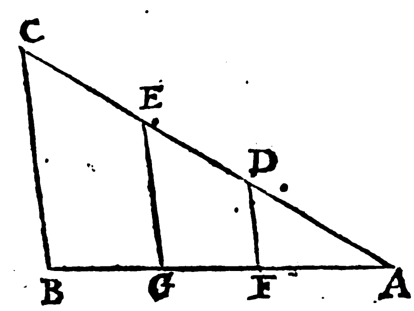
Ex linea AB sit auferenda 4 pars, ducatur linea AD infinita componens angulum A, in qua abscindantur 4 lineæ æquales AC, CE, EF, FG; ducaturque linea BG, & illi parallela CH, dico lineam AH esse quartam partem lineæ AB.

Demonstr. Quia linea C H est parallela lateri GB, erit (*per* 4.) ut AC ad CG, ita AH ad HB, & componendo (*per* 18.) ut AG, ad A C; ita AB ad AH sed AG continet quater lineam AC, igitur AH est quarta pars lineæ AB.

PROPOSITIO X.

Problema.

Datam lineam ita secare, ut alia recta secta fuerit.



Sit linea AB ita secanda ut recta AC secta fuerit, ducatur recta BC, & illi parallelæ EG, DF: dico factum esse quod requiritur.

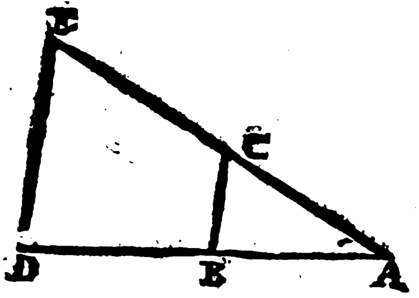
Demonstr. Cum enim lateri EG ducta sit parallela DF, ita erit (*per* 4.) AD ad DE, ut AF ad FG, hoc primum: & componendo ut DE, ad FG, ita AE, ad AG, & quia lateri BC ducta est parallela EG, erit etiam ut AE ad EC, ita FG, ad GB, ergo ex æquo (*per* 22. 5.) erit ut DE, ad EC ita FG ad GB.

PROPO

PROPOSITIO XI.

Problema.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.



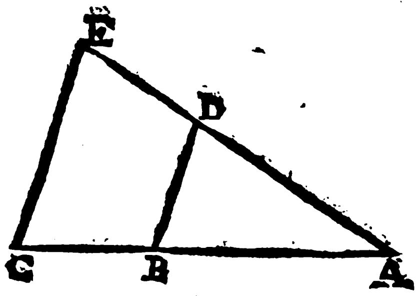
Sint datæ duæ rectæ AB, AC, quibus invenienda est tertia proportionalis, ita disponantur ut angulum efficiant : abscindatur linea BD, æqualis ipsi AC, ductæque lineæ BC fiat parallela DE, secans AC productam in puncto E. dico CE esse esse tertiam proportionalem.

Demonstratio. Cum enim linea CB, sit parallela lateri DE, erit (*per* 4.) ut AB ad BD, ita AC ad CE, & cum BD, & AC sint æquales; ita erit AB ad AC, sicut AC ad CE. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Tribus datis lineis quartam proportionalem invenire.



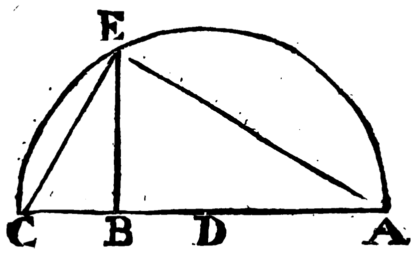
Sint tres lineæ AB, BC, AD. quarum AD angulum faciat. Iis quærenda sit quarta proportionalis, ducatur linea DB, & illi parallela CE, occurrens lineæ AD productæ in E. dico DE esse quartam proportionalem.

Demonstr. Cum enim lateri EC, linea DB sit parallela : erit ut AB ad BC, ita AD ad DE, ergo DE est quarta proportionalis.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Duabus lineis mediam proportionalem invenire.



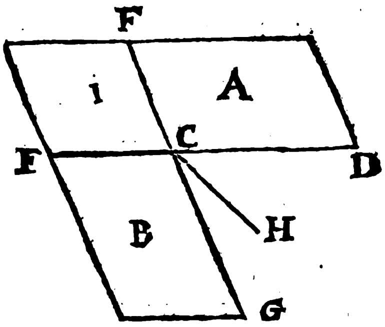
Sint datæ AB, BC, quibus quærenda est media proportionalis, tota AC secetur bifariam in D, & ex D ut centro fiat semicirculus intervallo DA, ducaturque BE perpendicularis. Dico ita esse AB ad BE, ut BE ad BC. ducantur lineæ AE, CE.

Demonstr. Angulus AEC in semicirculo (*per* 31. 3.) rectus est & (*per coroll.* 8.) perpendicularis BE media est proportionalis inter AB, BC; quod faciendum erat.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Parallelogramma æqualia, & æquiangula habent latera circa angulos æquales, reciproca: & parallelogramma quorum circa æquales angulos latera reciprocantur; sunt æqualia.



Parallelogra[illegible] & B sint æquiangula & habeant latera [illegible]gulos C æquales reciproca; hoc est ita sit D[illegible] CE, sicut GC ad CF, dico; A & B esse æqu[illegible]a.

Demonstr. Anguli C ita conjungantur, ut lineæ DCE faciant unam lineam; tunc lineæ FCG etiam unam lineam efficient; nam si FC producta non caderet supra CG, cadat in H, igitur anguli oppositi HCE, DCF (*per* 15. 1.) æquales essent contra suppositionem; cum anguli C & B supponantur æquales, perficiatur igitur parallelogrammum.

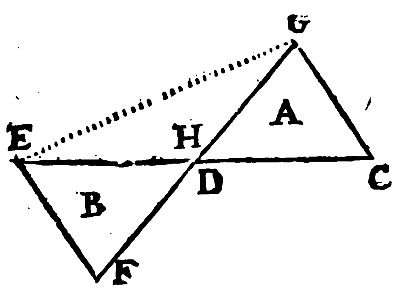
Demonstr. Quia A & B sunt æqualia : erit ut A ad I, ita B ad I, (*per* 7. 5.) sed (*per* 1.) ut A ad I, ita basis DC ad basin CE; & ut B, ad I; ita basis GC ad basin CF, igitur ut DC ad CE, ita GC, ad CF. quod est primum.

In eadem constructione si latera reciprocentur, hoc est sit ut DC ad CE; ita GC, ad CF; dico A & B æqualia esse. nam (*per* 1.) ut DC ad CE, ita A ad I, & ut GC ad CF, ita B ad I; ergo ut A ad I, ita B ad I; quare (*per* 9. 5.) A, & B æqualia sunt.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Æqualia triangula, & unum angulum æqualem habentia, habent reciproca latera circa angulum æqualem. Et triangula quorum reciproca sunt latera circa angulum æqualem, æqualia sunt.



Sint triangula A & B æqualia, quorum anguli in puncto D sint æquales, dico latera circa æquales angulos esse reciproca; hoc est ita esse CD ad DE, sicut DF, ad DG. Conjungantur anguli æquales, ita ut sint oppositi, & sicut prius CDE erit una linea, & GDF alia. ducaturque linea GE.

Demonstr. Quia triangula A, & B sunt æqualia, ita erit (*per* 7. 5.) A ad H, ut B ad H, sed quia A & H habent eundem verticem, G; (*per* 1.) erit ut A ad H; ita basis CD, ad basin DE: & quia B, & H eundem habent verticem E; erit (*per eundem*) ut B ad H, ita basis DF ad DG, igitur est CD, ad DE; sicut DF, ad DG.

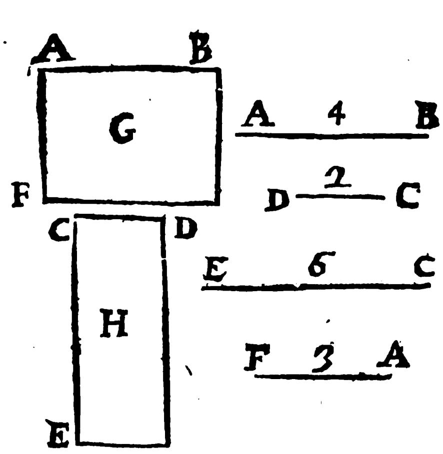
Secundò, in eadem suppositione, dico si latera reciprocentur hoc est si sit CD ad DE, ut DF ad DG, triangula A & B esse æqualia.

Demonstr. Cum enim sit ut CD ad DE, ita DF ad DG, & sicut basis CD, ad basin DE, (*per* 1.) ita sit A ad H, & sicut DF ad DG, ita sit B ad H, ita erit A ad H, sicut B ad H, igitur (*per* 9. 5.) triangula A & B sunt æqualia.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint; rectangulum contentum, sub extremis: æquale est rectangulo contento sub mediis. Et vicissim si rectangula sub extremis & sub mediis æqualia sint, lineæ proportionales erunt.



Sit ut AB ad CD, ita C E ad A F, & ex AB, AF extremis fiat rectangulum G, item ex CD, CE mediis fiat rectangulum H. dico G & H esse æqualia.

Demonstr. Cum enim rectangula G & H sint æquiangula, & latera sint reciproca nempe ut AB ad CD, ita CE ad AF, (*per* 14.) G & H æqualia erunt.

Secundò, si G & H æqualia sint (*per eandem*) erit ut AB ad CD; ita CE ad AF.

COROLLARIUM.

Ex hac propositione demonstratur regula trium in quâ datis tribus numeris; quæritur quartus proportionalis, si enim dentur tres numeri AB 4, CD 2, CE 6, AF 3; qui ultimus ignoretur, multiplico 6 per 2, fit 12. rectangulum H. quod cum sit æquale ipsi G, habetur rectangulum G, estque etiam 12, cujus latus AB, est 4. divido 12, per 4. & provenit aliud latus AF, quod est 3.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si tres lineæ proportionales fuerint; erit rectangulum sub extremis, æquale quadrato mediæ. Et vicissim si quadratum mediæ, & rectangulum sub extremis sint æqualia, tres lineæ proportionales erunt.

A____B
D____E
D____E
B____C

Sit AB ad DE, sicut DE ad BC. dico si ex AB, & BC extremis fiat rectangulum illud esse æquale quadrato lineæ D E. sumatur linea DE bis.

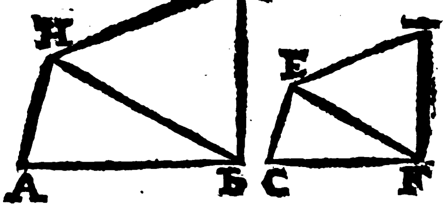
Demonstr. Quia ita est AB prima ad secundam DE, ut secunda DE ad BC. (*per* 16.) rectangula sub AB, BC, & sub DE, DE sunt æqualia: sed rectangulum sub DE, DE est ejus quadratum, igitur rectangulum sub AB, BC extremis, æquale est quadrato mediæ DE.

Vicissim si rectangulum sub extremis. æquale sit quadrato mediæ erit (*per* 16.) ut AB ad DE, ita DE ad BC, quod est eas lineas proportionales esse.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Super datâ rectâ describere dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum.



Sit data recta A B, super quam describendum est rectilineum simile rectilineo C D. dividatur CD in triangula, ductâ scilicet lineâ FE: & supra lineam AB fiant duo anguli ABH, & A, æquales angulis CFE, & C; quare (*per* 32. 1.) triangula ABH, CFE æquiangula sunt. item fiant anguli HBG, BHG, æquales angulis EFD, FED, sunt etiam triangula HBG, EFD æquiangula. dico rectilineum AG simile esse rectilineo CD.

Demonstr. Cum triangula partialia utriusque polygoni

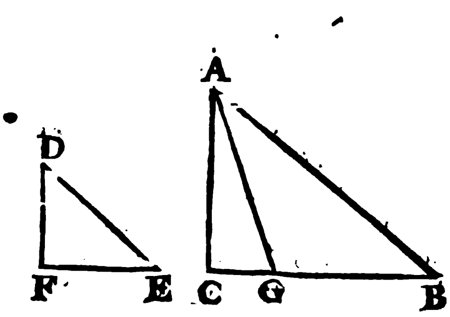
polygoni sint æquiangula, patet tota polygona esse æquiangula.

Deinde quia triangula ABH,CFE sunt æquiangula; erit (*per* 4.6.) ut HA ad AB, ita EC ad CF; & ut AB ad BH, ita CF ad FE; item quia triangula HBG, EFD sunt æquiangula ita erit HB ad BG, ut EF ad FD. ergo (*per* 22.5.) erit ex æquo ut AB ad BG; ita CF ad FD. & ita de reliquis lateribus: igitur duo polygona habent & angulos æquales, & latera circa illos proportionalia: ergo per (*def.*1.) sunt similia.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Triangula similia sunt in duplicatâ ratione laterum homologorum.



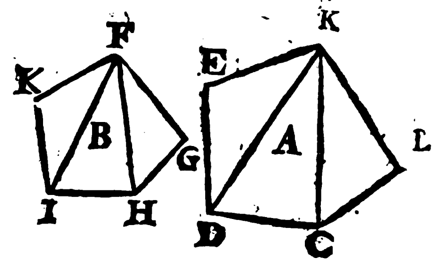
Sint triangula ABC, DEF, similia. id est sint æquiangula. dico triangulum ABC ad DEF habere rationem duplicatam illius quæ est basis BC ad basin EF. hoc est si BC, esset dupla ipsius EF, triangulum ABC esset bis duplum trianguli DEF. ratio est si triangulum ABC esset æqualis altitudinis cum triangulo DEF; cum basis BC sit dupla basis EF; triangulum ABC esset duplum trianguli DEF, quia vero duplo altius est, erit duplo duplum. fiat igitur ut BC ad EF, ita EF ad CG (*per* 11.) dico ABC ad DEF habere rationem duplicatam rationis BC ad EF, hoc est esse ut BC ad CG & hoc est habere rationem duplicatam.

Demonstr. Quia angulus C est æqualis angulo F ex suppositione, & est ut BC ad EF, ita EF ad CG; ut autem BC ad EF, cum triangula sint æquiangula (*per* 4.) ita sit AC ad DF. ita igitur est AC ad DF, sicut EF ad CG, igitur triangula ACG, DFE habent circa angulos æquales C & F latera reciproca: (*ergo per* 15.) sunt æqualia. Sed ita est triangulum ABC ad triangulum ACG habens eundem verticem A (*per* 1.) ut basis BC ad basin CG, igitur triangulum ABC ad triangnlum DEF; erit ut BC ad CG, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Similia Polygona in totidem similia triangula, homologa totis dividuntur. Et polygona similia duplicatam habent rationem laterum homologorum.



Sint polygona similia A & B, dico ea dividi posse in totidem triangula similia. quæ sint similes partes suorum totorum. ducantur enim lineæ CK, KD, HF, FI.

Demonstr. Quia polygona A & B sunt similia (*per* 1. *def.*) anguli L & G erunt æquales, eritque ut KL ad LC, ita FG ad GH, quare (*per* 6.) triangula KLC, FGH æquiangula erunt. Ita ostendam triangula KED, & FKI esse etiam æquiangula. & quia totus angulus C erat æqualis angulo H, & totus D toti I (*per eandem def.*) & anguli LCK, GHF sunt æquales; item KDE, & FIK, cum triangula sint ostensa æquiangula, erunt anguli KCD, KDC angulis FHI, FIH æquales,& triangulum KCD æquiangulum triangulo FHI.igitur omnia triangula sunt singula singulis similia.

Dico secundo, ea esse totis proportionalia, hoc est ut tota polygona sunt inter se, ita triangula sibi respondentia.

Demonstr. Quia polygona sunt similia, ita erit LC ad CD sicut GH ad HI; & permutando (*per* 16.5.) ratio LC ad GH eadem erit ac CD ad HI. sed triangulum KLC ad triangulum FGB simile; est in duplicatâ ratione lateris LC ad latus GH, & triangulum KCD etiam in duplicata ratione lateris CD ad HI. igitur triangulum KLC ad triangulum FGH erit ut KCD ad FHI, & ita ostendam etiam esse KED ad FKI. quare (*per* 11.5.) ita erunt omnia triangula polygoni A ad polygonum B, sicut unum ex triangulis; ad triangulum sibi respondens.

COROLLARIUM.

Ex eo sequitur quæcumque rectilinea similia, se habere in ratione duplicatâ laterum homologorum: nam se habent ut triangulum ad triangulum sibi simile quæ (per 19.) *sunt in ratione duplicatâ laterum homologorum.*

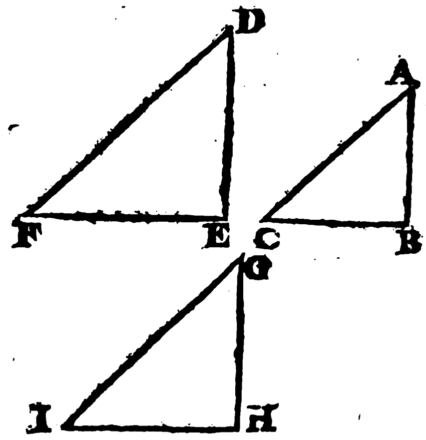
Secundò, si tres lineæ sint continuè proportionales; erit ut prima ad tertiam; ita quæcumque figura rectilinea supra primam descripta, ad figuram similem supra secundam descriptam, sic enim erit in ratione duplicata laterum homologorum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Rectilinea eidem similia inter se similia sunt.

Sint rectilinea ABC, DEF, eidem rectilineo GHI similia: dico ea inter se similia esse.

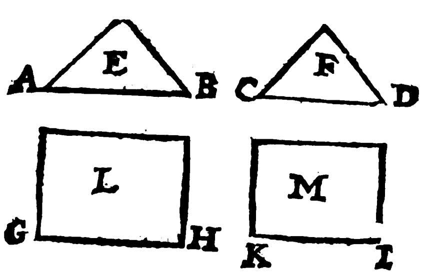


Demonſtr. Anguli A & D, eidem G ſunt æqualia: quare inter ſe æqualia ſunt, & ita de aliis, & quia eſt (*per 6 def.1.*) ut GH ad HI, ita AB ad BC, & etiam DE ad EF, ita erit AB ad BC, ſicut DE ad E F, & ita de aliis lateribus: quare rectilinea ABC, DEF (*per 6 def.1.*) ſimilia ſunt.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si quatuor lineæ proportionales ſint, polygona ſimilia ſupra illas deſcripta, erunt proportionalia. Viciſſim ſi polygona ſimilia ſupra quatuor lineas deſcripta ſint proportionalia, lineæ proportionales erunt.



Sit ut A B ad CD ita GH ad KI. dico ſi ſupra AB, & CD ſint deſcripta polygona ſimilia E, & F; & ſupra G H, K I alia ſimilia L, & M; eſſe ut E ad F, ita L ad M.

Demonſt. E ad F (*per coroll.2.*) eſt in duplicata ratione, rationis AB ad CD, ſed eadem eſt ratio G H ad K I, ac ratio AB ad CD, igitur E ad F eſt in duplicata ratione rationis G H ad KI, ſed etiam L ad M eſt in duplicata ratione rationis GH ad KI. igitur eſt ut E ad F; ita L ad M.

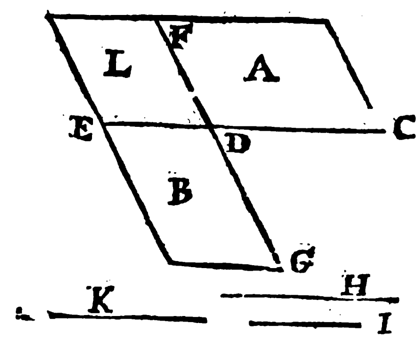
Dico ſecundò, ſi ſit ut E ad F; ita L ad M. ita etiam eſſe A B ad CD; ut GH ad KI.

Demonſtr. Cum enim ratio E ad F (*per coroll.2.*) ſit duplicata rationis AB ad CD, & ratio E ad F, ſit eadem ac ratio L ad M, ratio L ad M duplicata erit rationis A B ad CD. ſed etiam ratio L ad M (*per coroll.2.*) eſt duplicata rationis GH ad K I: igitur rationes AB ad C D; & GH ad K I ſunt eædem.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Parallelogramma æquiangula rationem habent: ex laterum rationibus compoſitam.



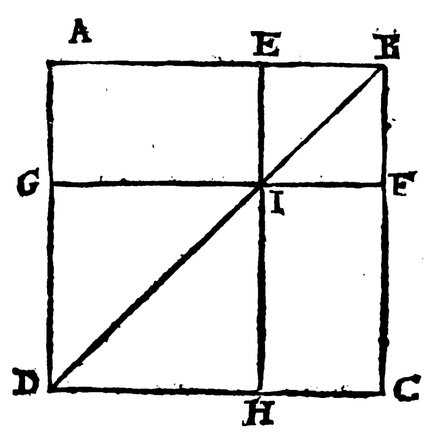
Sint parallelogramma A & B æquiangula. dico rationem A ad B componi ex ratione CD ad DE, & ratione DF ad DG. hoc eſt ſi fiat ut CD ad DE, ita H ad I, & ut F D ad DG ita I ad K. ita eſſe A ad B ut H ad K. Conjungantur enim parallelogramma prope angulos æquales, ita ut CDE, FDG componant rectas lineas.

Demonſtr. Quia (*per 1.*) eſt ut CD ad DE, ita A ad L, ut autem CD ad DE, ita eſt H ad I, ita erit A ad L ſicut H ad I; & quia etiam (*per 1.*) ita eſt L ad B, ſicut baſis FD ad D G, ut autem FD ad DG; ita eſt I ad K. erunt tres quantitates A, L, B, & aliæ tres H, I, K, ita ut ſit ut A ad L, ita H ad I, & ut L ad B; ita I ad K, igitur ex æquo (*per 22. 5.*) erit ut H ad K, ita A ad B. ratio autem H ad K componitur ex ratione H ad I, hoc eſt CD ad DE, & ratione I ad K, hoc eſt FD ad DG: igitur ratio A ad B componitur ex rationibus CD ad DE, & DF ad DG.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

In omni parallelogrammo parallelogramma quæ ſunt circa diametrum; & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.



In parallelogrammo AC ſint circa diametrum BD parallelogramma EF, GH; dico ea & toti & conſequenter inter ſe eſſe ſimilia.

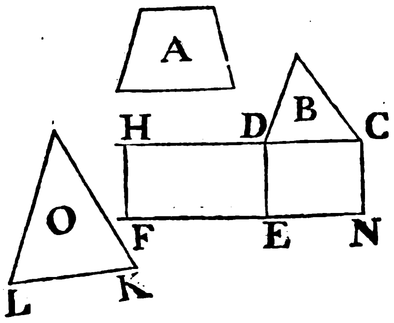
Demonſtr. Parallelogramma EF, & AC, angulum B communem habent & propter parallelas H E, D A, anguli BEI & A externus & internus (*per 29. 1.*) ſunt æquales; igitur ſunt æquiangula. Deinde in triangulo BAD, cum linea E H ſit parallela lateri AD erunt (*per coroll.4.*) triangula BEI, BAD æquiangula & (*per 4.*) erit ut BE ad Ei, ita AB ad A D; igitur latera parallelogrammorum A C, E F proportionalia, alia etiam latera eodem modo ſe habent, cum (*per 34. 1.*) oppoſita latera ſint æqualia, igitur A C, & EF ſunt

ſunt ſimilia eodem modo oſtendam A C, & G H eſſe ſimilia: ergo EF, & GH ſunt ſimilia.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Conſtituere rectilineum æquale dato, & alteri ſimile.



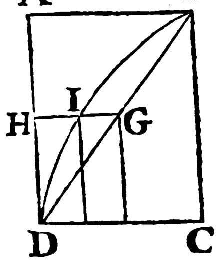
Sit conſtituendum rectilineum æquale dato A; & ſimile ipſi B ſupra CD, fac (*per* 34.1.) parallelogrammum CE, æquale rectilineo B, & ſupra DE in dato angulo N fiat parallelogrammum D F, æquale ipſi A. hoc eſt ita ut angulus D E F ſit æqualis ipſi N. ſic enim CDH, erit una linea: inter lineas CD, DH, quæratur (*per* 13.) media proportionalis; ſitque KL, ſupra quam (*per* 18.) fiat rectilineum O, ſimile ipſi B. dico O eſſe æquale rectilineo A.

Demonſtratio. Quia K L eſt media proportionalis inter CD & DH, erit ut C D ad KL, ita KL ad DH, & (*per corol.*2. 20.) erit polygonum ſupra primam C D, quod eſt B, ad polygonum ſimile ſupra ſecundam K L, deſcriptum quod eſt O, ut prima CD ad tertiam, ſed ut C D ad D H (*per* 1.) ita eſt C E, ad D F. igitur ut B ad O, ita eſt C E ad D F, ſed C E eſt æquale rectilineo B; & D F ipſi A, igitur ut B ad O, ita B ad A. quare (*per* 9. 5.) A & O æqualia ſunt. Sed O factum eſt ſimile ipſi B igitur O eſt æquale rectilineo A, & ſimile rectilineo B.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si intra parallelogrammum, aliud minus, & ſimile conſtituatur, communem angulum cum illo habens: diameter majoris, tranſit per angulos minoris.



Sit parallelogrammum A C, intra quod ſit aliud ſimile D G. communem habens angulum D. dico diametrum D B tranſire per G angulum minoris.

Demonſtr. Si enim non tranſit per G, tranſeat per I, ita ut ſit diameter D I B. Ducatur linea per I, parallela lineæ H D, fiatque parallelogrammum D I quod (*per* 24.) erit ſimile toti, unde erit ut H I ad HD, ita AB ad AD, ſed ut A B ad AD ita ſupponitur HG ad HD, cum GD ſupponatur ſimile toti A C, igitur erit ut I H ad HD, ita GH ad eandem HD, quare (*per* 9.5.) GH, IH eſſent æquales non igitur tranſit D B per aliud punctum quam per G.

PROP. XXVII. XXVIII. XXIX.

Relinquantur.

PROPOSITIO XXX.

Datam lineam extremâ, ac mediâ ratione ſecare.

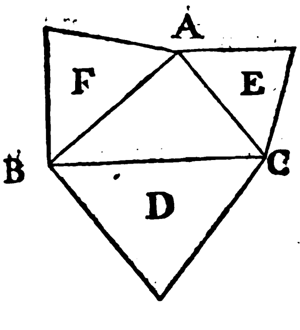
Sit ſecanda recta A B, ita ut tota A B ad majus ſegmentum A C, eandem rationem habeat, ac majus ſegmentum AC ad minus CB ita ſecetur (*per* 11.2.) ut rectangulum ſub totâ A B, & minori ſegmento CB æquale ſit quadrato ſegmenti AC, dico factum eſſe quod jubetur.

Demonſtr. Quia rectangulum ſub AB, CB; æquale eſt quadrato rectæ A C., ita erit (*per* 17.) AB ad A C, ſicut A C ad CB quod faciendum erat.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

In triangulis rectangulis rectilineum quodvis ſupra baſin deſcriptum, æquale eſt rectilineis ſimilibus ſupra latera deſcriptis.



Sit triangulum ABC cujus angulus B A C ſit rectus. dico rectilineum quodvis D ſupra baſin BC deſcriptum, æquale eſſe duobus rectilineis ſimilibus E & F deſcriptis ſupra latera AB, AC.

Demonſtr. Rectilinea F, E, D, ſimilia, ſunt (*per* 20.) in duplicata ratione laterum BC, AC, A B. ſi autem loco illorum ſupra eadem latera deſcriberentur quadrata; eſſent etiam (*per eandem*) in duplicatâ ratione eorumdem laterum: igitur rectilinea D, E, F; ſe habent ut quadrata. Sed quadratum baſis B C, (*per* 47. 1.) eſſet æquale quadratis laterum BA, AC, igitur rectilineum D eſt æquale rectilineis E, & F ſimul ſumptis.

PROPO

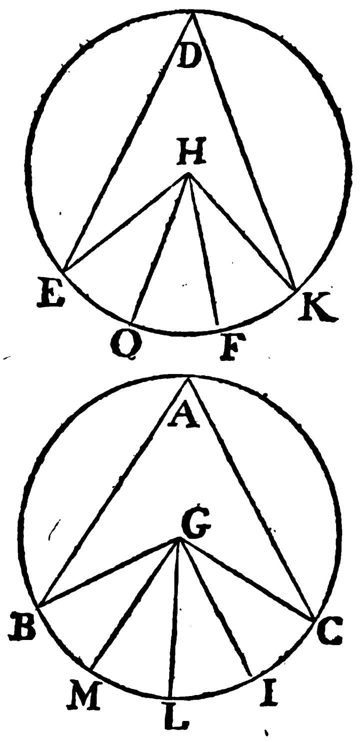
PROPOSITIO XXXII.

Relinquatur.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

In circulis æqualibus, anguli sive ad centra, sive ad peripheriam constituti eandem habent rationem; ac arcus quibus insistunt, sectores item eandem habent rationem.



Sint æquales circuli A B C, D E F, in quibus sint anguli ad centra B G C, E H K. dico ita esse arcum B C ad arcum E K sicut angulus B G C ad angulum E H K, nam sint arcus E O, O F, F K, quæcumque partes aliquotæ arcus E K, sint verbi gratia tertiæ. ductis lineis H F, H O, quia arcus E O, O F, F K sunt æquales anguli E H O, O H F, F H K (*per* 27.3.) sunt æquales; atque adeo qualibet tertia pars arcus E H K, ponamus arcum F K quater inveniri in arcu BC, ita ut I C, L I, M L, BM sint æquales arcui FK ductisque lineis G I, G L, G M fient quatuor anguli B G M, M G L, L G I, I G C æquales angulo FHK; ergo quoties in arcu BC invenitur arcus F K, tertia pars arcus EK, toties in angulo B G C invenitur angulus F H K; tertia pars anguli E H K, & quod dixi de tertiis partibus idem ostendi potest de quibuslibet aliis partibus aliquotis: igitur (*per* 5. *def.*5.) ut arcus B C ad arcum E K, ita angulus B G C, ad angulum E H K. idem dicendum de angulis A, & D, qui cum sint mediæ partes angulorum B G C, E H K (*per* 20. 3.) eandem cum ipsis rationem habebunt.

Idem dicendum de sectoribus A G C, E H K nam sectores I G C, F H K æquales sunt, cum enim ductis rectis IC, FK, quæ ductæ non sunt; in triangulis rectilineis IGC, FHK, latera propter æqualitatem circulorum sint æqualia, & anguli IGC, FHK sint æquales, erunt (*per* 4. 1.) triangula æqualia, & bases I C, F K æquales erunt, quæ ex circulis æqualibus (*per* 24. 3.) æqualia segmenta auferunt quæ addita triangulis æqualibus faciunt sectores IGC, FGK æquales; idem probabo de aliis parvis sectoribus, quare sector totalis B G C toties tertiam partem sectoris E H K continebit, quoties arcus B C continet tertiam partem arcus E K. quare sectores & arcus (*per* 5. *def.*5.) in eâdem ratione erunt. Idem intelligendum de sectoribus, angulis, & arcubus ejusdem circuli.

EUCLI

EUCLIDIS ELEMENTORVM LIBER SEPTIMVS.

HACTENUS egit Euclides de priori Geometriæ parte quæ circa plana seu superficies versatur, restatque altera solidorum. Cui tamen doctrinam de commensurabilibus, & incommensurabilibus quantitatibus præmisit, eo quod plurima latera regularium præsertim corporum incommensurabiles lineas continerent. Nos alium ordinem sequendum existimavimus, experientiâ scilicet edocti, in his difficultatibus ita Tyrones implicari, ut in iis enodandis initiô tempus terant. Præsertim cum fere tota mathesis ab hac incommensurabilium doctrina ita parùm pendeat; ut sine iis ferè tota demonstretur. Ne quid tamen in hoc nostro opere deesse videatur Euclidem resumimus, & quantùm possumus clarè explicamus.

Definitiones.

1 Unitas est secundùm quam unumquodque dicitur unum. Nempe ab unitate dicitur unus homo, unus leo, unus lapis. Hæc definitio dat primam tantum unitatis cognitionem, quod in præsenti materia sufficit; unitatem enim per se melius cognoscimus, quàm ex quacumque definitione.

2 Numerus est ex unitatibus composita multitudo. *Unde tot habet partes quot unitates, denominationemque habet ex multitudine unitatum. Ex quo sequitur omnes numeros inter se commensurabiles esse, cum eos unitas metiatur.*

3 Pars est numerus numeri, minor majoris cum minor metitur majorem. *Seu pars aliquota (ea enim intelligitur) quoties ita minor numerus cum majore comparatur, ut aliquoties sumptus eum præcisè adæquet: ut 4 est pars numeri 12, quia numerus 4 ter sumptus adæquat 12. Pars similis aliquota, ea est quæ toties in suo toto continetur ac alia in suo.*

4 Partes autem cum non metitur. *Seu est minor numerus comparatus cum majore, quem aliquoties repetitus non adæquat, ut 5 est partes, seu pars aliquanta numeri 12.*

5 Multiplex est major minoris, cum minor metitur majorem. *Seu est major numerus comparatus, cum sua parte aliquota, quam aliquoties scilicet continet exactè.*

6 Numerus par est qui bifariam dividi potest; vel quem binarius metitur.

7 Impar qui bifariam dividi non potest; vel qui unitate differt à pari.

8 Pariter par, est numerus, quem numerus par metitur per numerum parem, *ut 32, quem numerus par 4, metitur per 8 numerum parem.*

9 Pariter impar, est numerus par, quem numerus par metitur per imparem, *ut 20, quem 4 metitur per 5.*

Impariter impar, quem impar per imparem metitur; *ut 15 quem 3 metitur per 5.* 10

Primus numerus absolutè dicitur is quem sola unitas metitur, *ut 2, 3. 5. 7. 11. 13, quia nullam habent partem aliquotam unitate majorem.* 11

Numeri primi inter se, seu respectivè, quos sola unitas metitur; nempe qui nullam partem aliquotam communem habent majorem unitate, ut 3 & 5. 12

Compositus numerus absolutè dicitur, quem non sola unitas metitur, seu qui partem aliquotam habet majorem unitate, ut 4 cujus binarius est pars aliquota. Unde omnis numerus par supra binarium compositus est. 13

Compositi numeri inter se sunt quos numerus aliquis ut communis mensura metitur, seu qui habent partem aliquotam communem majorem unitate; ut numeri 15 & 24; habent enim ternarium communem partem aliquotam. 14

Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties multiplicatus sumitur quot sunt unitates in multiplicante; ut numerus 3 multiplicare dicitur numerum 4, cum toties sumitur 4, quot sunt unitates in numero 3. Ex quo sequitur numeri producti 12 multiplicatum, esse similem partem aliquotam ac unitas multiplicantis; nempe quoties unitas est in multiplicante toties numerus 4 est in producto. Quare eadem est ratio unitatis ad multiplicantem quæ multiplicati ad productum. Ideoque in multiplicatione quærimus numerum ad quem multiplicatus eandem habeat rationem, ac unitas ad multiplicantem. Ex quo sequitur quòd si uterque multiplicans & multiplicatus sit integer, numerus productus major erit multiplicato. Si sit fractio minor erit. 15

Dicimus item numerum in numerum ducere. Dicimus etiam A in B, aut A per B.

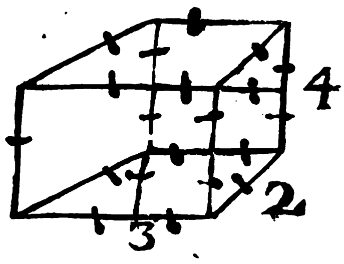
Plures numeri dicuntur invicem multiplicari 3. 4. 2. si primos duos invicem multiplices ut fiat 12 & productum 12 per 2 multiplices, ut fiat 24.

Numerus numerum dividere dicitur, cum numerus invenitur indicans quotiens divisor est in diviso. Ut numerum 12 per 3 dividimus cum assignamus numerum 4 indicantem per suas unitates, quoties numerus 3 est in diviso 12, vel est inventio numeri qui ad unitatem se habeat ut divisus ad divisorem. Quod in numeris vocat divisio, applicatio dicitur in quantitate continua; nempe applicatur divisor numero diviso, quantitas basi ut habeatur altitudo, vel altitudini ut habeatur basis. 16

4
3——
12

Numerus planus est ille qui ex multiplicatione duorum numerorum producitur, & numeri se multiplicantes dicuntur ejus latera. De hac consideratio- 17 ne multiplicationis jam diximus in secundo libro Euclidis, & in Arithmetica.

18 Numerus solidus est ille numerus, qui ex trium numerorum multiplicatione oritur, ut si tres numeri 2.3.4. se multiplicent nempe primo 2 & 3 se multiplicent, fiatque numerus 6, tum 6 & 4 ut fiant 24, numerus 24 erit numerus solidus, & numeri 2,3,4, dicentur ejus latera.



19 Similes plani numeri, aut solidi sunt, qui proportionalia habent latera; ut numeri 6 & 24 sunt plani similes; nam latera numeri 6 sunt 2 & 3, latera numeri 24 sunt 4 & 6; eadem autem est ratio 2 ad 3 quæ 4 ad 6. Pariter si numeri 2.3.4. & 46: fecerint numeros 24 & 192, illi erunt numeri solidi similes.

20 Numerus quadratus, est numerus planus æqualiter æqualis; Seu numerus planus cujus latera sunt numeri æquales, hoc est ex multiplicatione alicujus numeri per seipsum. Hic numerus radix quadrata dicitur, ut 4 cujus radix quadrata 2.

21 Numerus cubus est æqualiter æqualis, seu numerus cujus tria latera sunt numeri æquales, Seu qui fit ex multiplicatione trium numerorum æqualium. Ut hic numerus 8 qui fit ex multiplicatione binarij ter positi 2. 2. 2. si enim 2 per 2 multiplices fiunt 4. si rursus 4 per 2 multiplices fiunt 8.

22 Numerus perfectus, est numerus qui omnibus suis partibus aliquotis æqualis est: Hoc est si sumatur una pars aliquota ex æqualibus, seu ut ita dicam una ex qualibet specie, & ille omnes additæ adæquent numerum, ille perfectus erit. Ut numerus 6 cujus partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. & illæ simul faciunt 6.

23 Numerus numerum metitur per numerum, per quem multiplicatus illum producit, ut numerus 3 numerum 12 metitur per numerum 4. per quem multiplicatus producit numerum 12.

24 Ratio unius numeri ad alium, est habitudo unius numeri ad alium, quoad quantitatem, suntque in omni ratione duo termini antecedens & consequens.

25 In numeris duæ rationes sunt æquales, eædem, aut similes cum numeri fuerint proportionales, sed ista jam initio quinti libri exposuimus.

26 Termini sive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem ratione minores sumi non possunt. Melius enim concipimus parvos numeros, quàm majores; ergo melius adhibentur ut sint quasi regula cæterorum.

27 Cum tres numeri proportionales fuerint, primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundum. Si quatuor numeri continuè proportionales fuerint, primus ad quartum triplicatam rationem habet illius quæ est primi ad secundum.

28 Quotlibet numeris ordine positis, Ratio primi ad ultimum componi dicitur ex ratione primi ad secundum, secundi ad tertium, & ita consequenter.

AXIOMATA.

1 Numeri qui sunt ejusdem, aut æqualium æquemultiplices, æquales sunt.

Quorum idem numerus æquemultiplex, aut æquemultiplices sunt æquales, illi sunt æquales. 2

Æquales sunt numeri, qui ejusdem sunt similis pars, aut partes. 3

Unitas omnem numerum metitur per ipsummet numerum; ita ter unum, efficiunt tria. 4

Omnis numerus seipsum metitur per unitatem. 5

Si numerus alium multiplicans tertium produxerit, metietur productum per multiplicatum, & vicissim multiplicatus productum metietur per multiplicantem. 6

Si numerus numerum metiatur per tertium, vicissim tertius eundem metietur per primum. 7

Si pars aliquota multiplicet eum numerum per quem metitur suum totum, illud producet. 8

Numerus aliquem metiens, metitur omnem numerum quem ille metitur. 9

Numerus alios duos metiens, metitur & numerum ab ipsis compositum. 10

Numerus metiens totum & ablatum metitur & reliquum. 11

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si proponantur duo numeri, quorum minor de majore semper detrahatur alterna subtractione, ita ut reliquus præcedentem non metiatur donec ad unitatem deveniatur; Primi inter se erunt hi numeri.

A——E—G-B
C—F—D
H——

Proponantur numeri A B, C D, & ex majori A B detrahatur C D quoties potest, & relinquatur E B qui ex C D detrahatur, relinquaturque F D; qui F D detrahatur ex E B, relinquaturque unitas, hoc est semper in singulis detractionibus aliquid relinquatur, donec perveniatur ad unitatem G B: dico numeros A B, C D primos esse, seu non habere partem aliquotam communem majorem unitate. Sit enim pars illa aliquota communis H.

Demonstratio. Cum H metiatur C D, metitur & A E quem C D metitur, sed supponitur metiri totum A B: ergo (*per 11. axioma*) metitur & reliquum E B, item & C F, quem E B metitur, sed metiebatur totum C D, ergo metitur reliquum F D & E G quem F D metiebatur: sed jam metiebatur totum E B: ergo metitur unitatem: ergo H non est major unitate.

PROPOSITIO II.

Problema.

Numerorum compositorum maximam communem mensuram invenire.

A——E—B
C—F—D
G—

Sint numeri compositi A B, C D, seu non primi, quorum minor ex majore detrahatur, alternâ quadam detractione & reliquus ex præcedente, donec perveniatur ad numerum F D majorem unitate, qui metiatur exactè præcedentem E B. dico F D esse maximam communem mensuram numerorum A B, C D. Primo ostendo numerum F D metiri numeros A B, C D.

Demonstr.

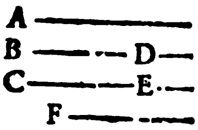
Demonstr. Cum F D metiatur EB, & EB metiatur CF, FD metietur & CF, sed metitur & seipsum; ergo FD metitur totum CD; sed CD metitur AE, ergo FD metitur AE & EB, ergo & totum AB. addo & F D esse maximam communem mensuram, si enim non sit maxima, sit G maxima communis mensura. Cum G metiatur totum AB, item CD, CD metitur AE, G metietur AE, ergo & reliquum E B. item & CF, quem EB metitur, sed metitur totum CD, ergo & reliquum FD. Non est ergo G major quam F D.

Coroll. Numerus G metiens numeros A B, C D metitur F D maximam eorum communem mensuram.

PROPOSITIO III.

Problema.

Trium numerorum non primorum inter se, maximam communem mensuram reperire.



Sint numeri A, B, C non primi inter se, sitque invenienda maxima communis eorum mensura. Primò numerorum A & B, inveniatur maxima communis mensura quæ sit D quæ si metitur numerum C. habetur intentum. Si verò non metitur, quæratur E, maxima communis mensura numerorum C & D. dico E esse maximam communem mensuram numerorum A, B, C. Primò cum E metiatur C & D, D autem metiatur numeros A & B, E metietur etiam numeros A, B, C. Quod vero sit maxima ita ostendo. Sit enim F maxima mensura numerorum A, B, C.

Demonstr. Cum F metiatur numeros A & B metitur & D maximam eorum mensuram, sed metitur etiam C, ergo per Coroll. præcedens metitur & E maximam numerorum D & C mensuram E, ergo nulla numerorum A B C communis mensura major dari potest quam E, quod demonstrandum erat.

Coroll. Eodem artificio inveniemus quatuor numerorum compositorum maximam communem eorum mensuram.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Omnis numerus minor, majoris vel est pars aliquota vel aliquanta.

Demonstr. Cum minor contineatur in majore, vel illum metietur & erit ejus pars aliquota, vel continebit aliquas partes numeri majoris, unitates scilicet, ex quibus coalescit.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si numerus numeri similis pars fuerit, ac alter alterius: uterque simul utriusque simul eadem pars erit.

Hæc propositio continetur (*in 12. 5. Eucl.*) quæ dicit: Si sint magnitudines quotcumque proportionales, ut se habet una antecedentium ad unam consequentium; ita se habent omnes antecedentes ad omnes consequentes.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si numerus numeri partes fuerit; & alter alterius similes partes; uterque simul utriusque eadem partes erit.

Continetur in eadem.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit ac totus totius.

Continetur (*in 19.5.*) nempe; Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati, & reliquus reliqui similes partes erit.

Continetur in eadem.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si numerus numeri pars fuerit & alter alterius eadem pars & vicissim qua pars est primus tertij, erit & secundus quarti.

Continetur (*in 16.5.*) Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; & vicissim proportionales erunt.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eadem partes: & vicissim quæ partes est primus tertij, aut eadem partes erit & secundus quarti.

Continetur in eadem.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si fuerit ut totus numerus ad totum numerum, ita ablatus ad ablatum: erit reliquus ad reliquum ut totus ad totum.

(Est 19.5.)

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si sint quotcumque numeri proportionales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

(Est 12.5.) Euclidis.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; & vicissim proportionales erunt.

(Est 16.5.)

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si sint quotcumque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione; etiam ex æqualitate in eâdem ratione erunt.

(Est 22. 5.)

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si unitas secundi numeri fuerit similis pars aliquota, ac tertius quarti, erit unitas tertij, similis pars aliquota ac secundus quarti.

Continetur in 13 hujus.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Duo numeri si invicem multiplicantes æquales numeros producunt.

Unitas
1
A 6. B 4
C 24. D 24

Numerus A multiplicans B faciat C. & numerus B multiplicans A faciat D. dico numeros C & D æquales esse.

Demonstr. Cum A multiplicans B faciat C, erit (*per def.15.*) ita unitas ad 6 ut 4 ad C. & (*per præcedentem*) ita erit vicissim unitas ad B ut A ad C. Rursus quia B multiplicans A producit D, ita erit unitas ad B ut A ad C. ergo ita erit A ad C, sicut A ad D: ergo (*per axioma 2.*) C & D sunt æquales. quod erat demonst.

Coroll. Si numeri A & B se multiplicantes fecerint C. A metietur productum per B, & B eundem metietur per A. nempe A ostendit per suas unitates, quotiens B invenitur in C. & vicissim B ostendit per suas unitates quotiens A invenitur in C.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si idem numerus duos numeros multiplicans aliquos produxerit; producti, & multiplicati proportionales erunt.

Unitas
1
A 3
B 2 C 4
D 6 E 12

Numerus A multiplicans numeros B & C, producat numeros D & E, dico numeros B & C numeris D & E proportionales esse.

Demonstr. Cum numerus A multiplicans B faciat D ita erit unitas ad A, sicut B ad D. (*per def.15.*) pariter ita erit unitas ad A, sicut C ad E. ergo ita erit B ad D, sicut C ad E, & permutando ita erit B ad C; sicut D ad E; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si quotcumque numeri eundem multiplicantes aliquos fecerint; producti & multiplicantes proportionales erunt.

A 2 B 4
C 3
D 6 E 12

Numeri A & B multiplicantes eundem numerum C, producant numeros D, E, dico numeros D, E numeris A, B proportionales esse.

Demonstr. Nam cum A multiplicando C, produxerit D; vicissim C multiplicando A eundem D producet (*per 16.*) pariter C multiplicando B producet E. quare per præcedentem A,B,D,E proportionales erunt.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, productus ex multiplicatione extremorum, æqualis est producto ex multiplicatione mediorum. Et vicissim.

A 3. B 2. C 6. D 4.
A D 12. B C 12.
A C 18.

Quatuor numeri A, B, C, D sint proportionales, dico A D productum ex multiplicatione extremorum A & D, æqualem esse numero B C producto ex multiplicatione mediorum B & C. Sit numerus AC productus ex multiplicatione A in C.

Demonstr. Cùm numerus A multiplicando C & D fecerit A D & A C. Erit A C ad AD sicut C ad D, hoc est ut A ad B ex constructione. Pariter cum C multiplicando A & C fecerit AC, BC, erit AC ad BC, ut A ad B. ergo ita est AD ad AC, sicut BC ad AC. ergo A D, BC sunt æquales quod erat demonstrandum.

Secundò si productus ex A in D. sit æqualis producto ex B in C, dico numeri A, B, C, D proportionales esse.

Demonstratio. Nam cum A multiplicando C & D fecerit A C & A D, ita erit A C ad AD ut C ad D, sed ita est A C ad B C, cum A D & B C sint æquales, & ut A C ad BC ita est A ad B: ergo ita est A ad B, sicut C ad D.

PROPO

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Si tres numeri proportionales fuerint, quadratus medij æquatur producto ex primo in tertium, & vicissim.

A 2 B 4 64. C 8
A C. 16 B b. 16.

Sint tres numeri A, B, C proportionales. dico quadratum medij B æquari producto ex primo A in tertium C. Repetatur numerus b.

Demonstr. Cum sit ut A ad B, ita b ad, C numerus A C æquatur numero B b, & cum numeri B & b sint æquales, numerus B b quadratus erit numeri B. ergo quadratus numeri B æquatur producto ex A in C.

Eodem modo probabo si quadratus medii B æqualis fuerit producto ex A in C, numeros A, B, C proportionales esse.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Minimi in sua proportione æquè metiuntur numeros ipsis proportionales.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . .
F . . . .

Sint numeri A & B minimi in sua proportione; sintque numeri majores E, F ipsis proportionales; dico numeros AB, C D esse similes partes aliquotas numerorum E & F.

Demonstr. Cum numeri A B, C D sint proportionales numerorum E & F, nempe A B sit ad C D, ut E ad F, ita erit permutando A B ad E, sicut C D ad F, & cum A B sit minor quam E, erit A B similis pars aut partes ipsius E, ac C D ipsius F. Non est autem similis pars aliquanta; si enim esset similes partes, dividatur AB in AG, GB partes ipsius E, & C D in totidem partes ipsius F. hoc est A B contineret A G partem aliquotam ipsius E, & C D contineret C H partem aliquotam similem numeri F, sed partes similes aliquotæ A G, G H, & æquemultiplices E, F sunt in eadem ratione (*per 15. 5. Eucl.*) ergo ita erit A G ad C H, ut E ad F seu ut A B ad C D. ergo A B C D non essent minimi in sua ratione; quod est contra suppositionem.

Coroll. Si plures quàm duo numeri fuerint minimi in sua ratione; totidem sibi proportionales æquè metientur.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si fuerint tres numeri, & alij totidem, qui bini sumantur in eadem ratione perturbata: Ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Est 23 quinti.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Primi inter se numeri, minimi sunt omnium ipsis proportionalium.

A 15 . B 8
C E D

Numeri A & B sint primi inter se, seu non habeant communem mensuram nisi unitatem. dico numeros A & B minimos omnium ipsis proportionalium. Si enim dentur alij minores, & ipsis proportionales sint C & D.

Demonstrat. Cum numeri C & D sint proportionales numeris A & B, eos æquè metientur; (*per 21. hujus*) seu per eundem numerum E. ergo numeri A & B habent numerum E communem mensuram: ergo non sunt primi, contra suppositionem.

Coroll. Si plures quàm duo numeri fuerint inter se primi, eodem modo ostendentur esse minimi in sua ratione.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Numeri omnium sibi proportionalium minimi sunt inter se primi.

A 15 . B 8
C E D

Sint numeri A & B minimi omnium sibi proportionalium, dico A & B esse inter se primos. Si enim non sunt inter se primi habeant communem mensuram E, quæ metiatur A per C & B per D, ergo C & D æquè metientur A & B, ergo A & B est ut C ad A, ita D ad B, & permutando ut A ad B, ita C ad D. ergo A & B non sunt minimi sibi proportionalium.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si numeri primi inter se fuerint si numerus unum metiatur, ad alium primus erit.

A 15 . B 8
C E D

Numeri A & B sint inter se primi, & numerus E metiatur numerum A. dico quod ad numerum B erit primus.

Demonstr. Si enim E & B non sunt primi, habebunt communem mensuram, quæ metietur numeros B & E, sed E metitur ex suppositione numerum A, ergo hæc communis mensura metietur numeros A & B: ergo non sunt primi; contra suppositionem.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si duo numeri ad tertium, primi fuerint: etiam genitus ex eorum multiplicatione, ad eundem primus erit.

A 7 B 3
C 8
A B 21
D——F——

Numeri A & B sint primi ad numerum C, dico numerum A B productum ex multiplicatione A in B, primum esse ad numerum C. Si enim A B & C non sunt primi, sit D communis eorum mensura, quæ metiatur numerum A B per F, hoc est numerus D multiplicans F faciat A B.

Demonstr. Cum numerus A B tam fiat ex D in F, quam ex A in B (*per 19. hujus*) ita erit D ad A; sicut B ad F. & cum A & C sint primi & D metiatur C, (*per praecedentem*) erit D ad A primus, & (*per 23.*) erunt minimi in sua ratione, ergo (*per 21.*) aequè metiuntur numeros B & F ipsis proportionales nempe D ipsum B, & A ipsum F. sed jam dicitur D metiri numerum C: ergo D metitur B & C: ergo B & C non sunt primi, contra suppositionem: ergo si A & B ad C primi sint, A & C primi erunt; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si numerus ad alium primus fuerit; etiam quadratus ejus, ad eum primus erit.

A 4	a 4
B 7	
Aa 16	

Numerus A sit primus ad numerum B. dico quod quadratus eius A a, ad eundem B primus erit. Repetatur numerus A.

Demonstr. Cum numerus A sit primus ad B, etiam numerus a ad eundem primus erit; ergo (*per praecedentem*) productus ex A in a, seu quadratus numeri A ad B primus erit; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si duo numeri, ad duos numeros uterque ad utrumque primi fuerint; etiam ab iis producti, primi inter se erunt.

A B
AB
C D
CD

Uterque numerus A & B, ad utrumque C, & D sint primi: dico quod AB productus ex A in B, & CD productus ex C in D primi inter se erunt.

Demonstr. Cum A & B sint primi ad C, etiam AB primus erit ad C. (*per 26.*) Pariter AB & D primi erunt. Cum ergo C & D ad AB primi sint, etiam CD & AB *per eandem* primi erunt. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Si duo numeri primi inter se fuerint: etiam eorum quadrati, & cubi, & quadrato-quadrati, primi inter se erunt.

A 2	B 3
AA 4	BB 9
AAA 8	BBB 27
AAAA 16.	BBBB 81

Numeri A & B sint primi inter se; dico & AA, BB eorum quadratos primos esse, & AAA, BBB cubos & AAAA & BBBB quadrato-quadratos etiam inter se primos esse.

Demonstr. Cum A & B sint primi, etiam AA & B primi erunt (*per 27.*) & cum A A & B primi sint (*per eandem*) BB & AA primi erunt. Rursus cum A & B primi sint etiam BB ad A primus erit; quare cum B, & BB ad A primi sint, etiam BBB & ad A primus erit (*per 26.*) & BBB & AA, immo BBB & AAA primi erunt.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si duo numeri primi inter se fuerint. Eorum aggregatum, ad utrumque primum erit. Vicissim si aggregatum ad alterutrum primum sit: numeri inter se primi erunt.

A . B
A † B
C———

Numeri A & B inter se primi sint, dico utrumque simul, nempe A † B ad utrumque. Si enim A † B non sit primus ad A, eos metiatur communis mensura C.

Demonstr. Cum numerus C metiatur totum A † B, metiatur & A, (*per axioma 11.*) metietur & reliquum B: ergo A & B non sunt primi; contra suppositionem.

Vicissim si A † B sit primus ad A. dico quod A & B sint primi inter se. si enim non sint primi eos metiatur C qui metietur & A † B, ergo A † B & A primi non sunt; contra suppositionem.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Si numerus primus, aliquem non metiatur; ad eum primus erit.

A B
C

Numerus primus A, seu quem sola unitas metitur; non metiatur numerum B. dico quòd numerus A ad B primus erit. Si enim primus non esset ad B, haberent communem mensuram C: ergo numerus A non esset incompositus, contra suppositionem.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si numerus primus, genitum ex multiplicatione duorum, metiatur; metietur saltem unum ex his numeris.

A 4	B 6
AB 24	
C 3 .	D 2

Numerum planum AB nempe productum ex multiplicatione numeri A in B, metiatur numerus primus C per D; dico quod metietur alterutrum A aut B.

Demonstr. Si enim C non metitur numerum A, erunt (*per praecedentem*) C & A primi inter se, & (*per 23.*) minimi in sua proportione; & cum C metiatur AB per D; C in D producet AB: sed AB producitur etiam multiplicatione A in B: ergo (*per 17 hujus*) erit C ad A ut B ad D; & cùm C & A sint in sua ratione minimi, metientur B & D, nempe C metietur ipsum B; quod erat demonstrandum.

PROPO

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Compositum numerum, aliquis primus metitur.

A 6
B 2 C—

Sit numerus A compositus, habens scilicet partem aliquotam majorem unitate. dico quòd aliquis numerus primus eum metiatur.

Sit numerus B minimus eorum qui metiuntur numerum B, dico numerum B esse primum; si enim primus non esset eum metiretur aliquis minor C, qui (*per axioma* 11.) metiretur numerum C. ergo numerus B non esset minimus eorum qui metiuntur numerum B. quod est contra suppositionem.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

Si enim primus non est, erit compositus; ergo eum aliquis primus metietur (*per praecedentem.*)

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Quotlibet propositis numeris, invenire minimos illis proportionales.

A 4 B 6. C 10
D 2
E 2 F 3 G 5
H—I—K—
L—

Proponantur numeri A,B,C. sintque quaerendi minimi in eadem ratione. Quaeratur maxima communis mensura numerorum A,B,C. (*per hujus*) quae metiatur, seu dividat numeros A, B, C per numeros E,F,G, dico E, F, G & numeris A, B, C proportionales esse, & minimos esse in sua proportione.

Demonstr. Cum numerus D, multiplicando numeros E, F, G, producat numeros A, B, C; erunt (*per* 18.) A, B, C; D, E, F proportionales; addo minimos esse. Si enim non sunt minimi in eadem ratione sint H, I, K minimi in eadem ratione, metientes numeros A, B, C: ergo (*per* 21.) metientur eos per communem mensuram L: ergo L in H facit A, sicut D in E facit A: ergo (*per* 19.) ita erit D ad L, sicut H ad E sed D est major quàm L cum sit maxima communis mensura: ergo H major erit quam E: non est igitur H minor quàm E: ergo E,F, G sunt minimi in ea ratione.

Coroll. Maxima communis mensura numerorum quotuncumque eos metitur per minimos in ea ratione.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Duobus datis numeris, reperire minimum numerum, quem illi metiantur.

A 4 B 7
AB 28.
C——
D——E—

Sint propositi numeri A & B; proponitur quaerendus minimus numerus, quem A & B metiantur. Vel numeri A & B sunt primi inter se, vel non sunt: supponantur primi, sitque A B productus ex A in B, dico numerum A B esse quaesitum. Primò cùm A multiplicando B faciat AB, A metietur AB, sicut etiam B eundem metietur. Si A B non est minimus omnium quos A & B metientur, sit C minor, quem A metiatur per E, & B per D. cùm ergo idem C fit ex A primo in E quartum, & ex B secundum in D tertium erit (*per* 19.) ut A ad B, ita D ad E; & cum A & B sint primi atque adeò (*per* 23.) in sua ratione minimi A aequè metietur D ac numerus B metitur numerum E. Et quia A multiplicans A & E, facit A B & C, erit (*per* 17.) ut B ad E ita A B ad C: sed minor est quàm E, ergò & A B minor est quàm C. non ergo dari potest alius minor quàm A B, quem A & B metiantur.

Secundo numeri A & B non sint primi, atque adeò nec minimi in sua ratione. Inveniantur numeri C,D minimi in eadem ratione; tum multiplicetur A per D, vel B per C, idem numerus E producetur, (*per* 19.) cum numeri A, B,C, D sint proportionales: Clarum est autem A & B metiri numerum E. Addo numerum E esse minimum quem numeri A & B metiantur. Si enim non est minimus, sit numerus F eo minor, quem A metiatur per H & B per G, & cùm idem numerus F producatur ex multiplicatione A primi in H quartum & ex multiplicatione B secundi, in G tertium, erunt A, B, G,H proportionales ergo & proportionales erunt C, D & G,H; sed C, D dicuntur minimi; ergo D minor est quam H, quare cum A multiplicando D minorem faciat E, & majorem H producat F. erit F major quam C D; quod probabitur de quocumque alio: ergo E minimus est omnium quos A & B metiuntur.

A 4 B 6
C 2 D 3
E 12
F——
G—H—

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si duo numeri aliquem metiantur; minimus quem ipsi metiuntur, eundem metietur.

A 4 B 6
C E
C. . . I. . .D
F 12

Numeri A & B metiantur numerum C, sitque F minimus numerus quem numeri A, & B metiantur, dico quòd numerus F metitur numerum C. Cum enim F sit minor quàm C D, auferatur ab eo quantum potest, & si fieri potest relinquat E D se minorem.

Demonstr. Numeri A & B, metiuntur totum C D, sed metiuntur C E, quem F metitur: ergo per 11 axioma metiuntur reliquum E D minorem quam F; quod est contra suppositionem cum F dicatur minimus omnium quos A & B metiuntur: ergo F metietur totum C D & nihil relinquet: quod erat demonstrandum.

PROPO

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Datis tribus numeris, invenire minimum numerum quem illi metiantur.

A B C
3 4 5
D 12, E 60
F——

Proponantur tres numeri A, B, & C, quæritur minimus numerus. Quæratur (*per* 36.) minimus numerus, quem A & B metiantur, sitque D: Si numerus C eundem metitur; perfectum est problema. Si verò C non metitur numerum D, quæratur (*per eamdem*) numerus E, minimus quem C & D metiantur; & cum A & B metiantur numerum D metientur & numerum E. dico numerum E minimum esse quem A, B & C. metiantur: Sit enim si fieri potest numerus F minor quam E, quem numeri A, B & C metiantur.

Demonstr. Cum numerus D sit minimus quem metiantur numeri A, B, ille (*per præcedentem*) metietur numerum F. sed C supponitur eundem F metiri; ergo si F sit minor quàm E, E non est minimus quem C & D metiantur: contra suppositionem. Nullus igitur erit minor quàm E, quem numeri A, B, & C metiantur.

Coroll. 1. Eodem artificio propositis quotcumque numeris inveniemus minimum quem illi metiantur.

Coroll. 2. Si tres numeri aliquem metiantur, etiam minimus quem illi metiuntur, eundem metietur. Ostendimus enim D metiri numerum F; & cum C & D metiantur eundem F, & E sit minimus omnium quos C & D metiuntur, etiam E ipsum F metietur.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Si numerus numerum per quotientem metiatur: quotiens erit pars mensi, à metiente denominata.

Unitas
A 3 B 12
C 4

Numerus A numerum B metiatur per numerum C, dico quòd C erit pars numeri B denominata à numero A hoc est unitates numeri A ostendent, ipsius B qualis sit pars numerus C.

Demonstr. Cùm numerus A metiatur numerum B per C, hoc est toties A invenitur in B quot sunt unitates in C unitas ita erit ad C ut A ad B; & alternando ita erit unitas ad B ut C ad B, hoc est, toties C erit in B quot sunt unitates in A. ergo A denominat seu indicat per suas unitates, qualis pars numeri B sit numerus C. ut in hoc exemplo est tertia pars.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Si numerus partem habuerit; eum metietur aliquis numerus ab ea denominatus.

A 24
B 3. C 8.

Numerus A habeat partem aliquam B, dico quòd numerum A metietur aliquis numerus C à parte B denominatus.

Demonstr. Cùm numerus B sit pars numeri A aliquota, nempe quæ aliquoties repetita adæquat numerum A. ponatur quot sunt unitates in C: ergo B, metietur numerum A per C: ergo per præcedentem numerus C erit pars à numero B denominata. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

Problema.

Minimum numerum reperire, qui habeat partes à datis numeris denominatas.

A 2 B 3 C 4
D 12
E 6 F 4 G 3
H

Sit quærendus minimus numerus, qui partes habeat à numeris A, B, C denominatas. Inveniatur (*per* 38.) minimus numerus D quem numeri A, B, C metiantur, dico numerum D eum esse qui quæritur.

Demonstr. Numeri A, B, C metiantur numerum D per numeros E, F, G; illi (*per* 39.) erunt partes numeri D à numeris A, B, C denominatæ. Quòd verò numerus D sit minimus ita ostendo, Sit enim alius minor H, qui dicitur habere partes à numeris A, B, C denominatas, quare (*per* 40.) numeri A, B & C: metientur numerum H: ergo D non esset minimus quem A, B, C metiuntur.

Coroll. Idem metiri aliquem numerum, & eum habere partes à metientibus denominatas.

EUCLI

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si sint quotcumque numeri continuè proportionales, quorum extremi sint primi; illi erunt minimi sibi proportionalium.

A B C D
E F G H

Numeri A, B, C, D. sint continuè proportionales, sintque A & D primi inter se. dico numeros A, B, C, D esse minimos sibi proportionalium. dentur enim si fieri potest in eadem proportione, alii minores E, F, G, H.

Demonstr. Cùm sit ut A ad B ita E ad F & ut B ad C, ita F ad G; & ut C ad D ita G ad H. erit ex æquo (*per* 22. 5.) ut A ad D ita E ad H. sed A & D sunt primi, (*per* 23.) & (*per* 21.) metientur ipso E & H: ergo E & H & consequenter alii minores non sunt numeris A, B, C, D. Quod erat demonstr.

Coroll. Hæc propositio est universalitet vera, etiam si numeri A, B, C, D non essent continuè proportionales: ut patebit applicanti demonstrationem.

PROPOSITIO II.

Problema.

Quotcumque numeros minimos continuè proportionales in data ratione reperire.

A B
AA, AB, BB
AAA, AAB, ABB. BBB

Sint inveniendi quotcumque numeri minimi in ratione A ad B. Primo (*per* 35.) inveniantur duo minimi in ea ratione: supponantur esse A & B. Si tres desiderantur, A seipsum multiplicans faciat AA, & multiplicans B faciat AB, item B multiplicans seipsum faciat BB, seu suum quadratum, dico numeros AA, AB, BB esse & proportionales, in ratione A ad B, & minimos.

Demonstr. Cum enim A multiplicans seipsum & B fecerit AA & AB, erit AA ad AB, ut A ad B (*per* 17. 7.) pariter cum B multiplicans A & seipsum, fecerit AB, & BB, erit AB ad BB ut A ad B. *per eandem.* Quòd sint minimi ita ostendo. Cum A & B sint inter se primi, eorum quadrati AA, & BB primi inter se erunt, (*per* 26. 7.) & (*per præcedentem*) AA, AB, BB sunt primi in sua ratione.

Si quatuor desiderantur A multiplicet suum quadratum AA, faciatque cubum suum AAA; item BB multiplicet AB, faciatque AAB; item & BB facietque ABB. item B multiplicando AA facit AAB, & multiplicando AB facit ABB. item & BB facit BBB. Ostendam eodem modo numeros AAA, AAB, ABB BBB, & esse continuè proportionales, & (*per* 26.) & *præcedentem* esse minimos in sua ratione.

Coroll. Trium continuè proportionalium minimorum in sua ratione, extremi primi sunt & quadrati, & quatuor continuè proportionalium minimorum in sua ratione extremi cubi sunt & primi. Duo rationis datæ minimi A & B reliquos omnes metiuntur. Unitas A, AA, AAA sunt continuè proportionales; sicut & unitas, B, BB, BBB &c. Tot sunt medii inter extremos quosque, quot inter ipsos & unitatem.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si fuerint quotcumque continuè proportionales minimi in sua ratione; eorum extremi primi erunt.

A, B, C, D
E, F
G H K L

Sint numeri A, B, C, D continuè proportionales, & minimi in sua ratione, dico extremos A & D primos esse. Inveniantur (*per* 35. 7.) numeri E, F minimi in ea ratione, & (*per præcedentem*) totidem numeri G, H, K, L minimi in ea ratione E, F, quorum extremi G & L erunt primi per *coroll. præcedens.* sed numeri G, H, K, L sunt minimi sicut A, B, C, D, ergo sunt illis æquales: ergo A & B sunt etiam primi.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Datas quotcumque rationes in minimis numeris disparatas easdem in minimis numeris continuare.

A	B	C	D
6.	5.	4.	3.
F 24	E 20	G 15	
H	K	L	

Sint datæ primò duæ rationes disparatæ AB, CD datæ in minimis numeris, oportet invenire tres numeros minimos in datis rationibus, ita ut primus ad secundum se habeat ut A ad B, & secundus ad tertium ut C ad D. Inveniatur E minimus quem metiuntur C & B, fiatque ut B ad E ita A ad F; & ut C ad E ita D ad G: dico F, E, G esse minimos qui habeant datas rationes.

Demonstr. Ita est ex constructione A ad F ut B ad ad E : ergo alternando ita est A ad B ; ſicut F ad E. Pariter ita eſt C ad E , ut D ad G : ergo alternando ita eſt C ad D ut E ad G : ergo F, E, G ſunt in datis rationibus. Quòd verò F, E, G ſint minimi in ea ratione ſic oſtendo. Sint ſi fieri poteſt H. K. L minores in eadem ratione. Cum A,B ſint minimi in ſua ratione,metientur ipſos H & K (*per* 21. 7.) & B & C metientur K & L. Quoniam igitur B & C metiuntur K, etiam E minimus quem B & C metiuntur, metietur ipſum K (*per* 37.7.) ergo K non eſt minor quàm E, contra ſuppoſitionem.

Secundò dentur tres rationes in minimis numeris ; nempe AB, CD, EF, ſintque inveniendi quatuor numeri qui ſint minimi in dictis rationibus:ſit G minimus quem metiantur B & C ſitque ut B ad G,ita A ad H, & ut C ad D ita G ad K. Accidere poſſunt duo caſus. Vel enim E metietur numerum K, vel non metietur:ſi primum;fiat ut E ad K ita F ad L. Patet autem numeros H,G,K,L eſſe in dictis rationibus. Cum enim ita ſit A ad H ſicut B ad G,erit alternando A ad B ut H ad G.Pariter oſtendam ita eſſe G ad K ut C ad D,& K ad L ut E ad F. Quod verò ſint minimi in iiſdem rationibus,ita oſtendo. Sint enim ſi fieri poteſt alii minores M, N, O, P.

AB, CD EF
6 5 4. 3 3 . 2
H G K L
24 20 15. 10
M N O P

Demonſtr. Cùm A & B ſint minimi in ſuis rationibus,æquemetientur numeros M N(*per* 21.7.) Pariter C, D æquemetientur numeros N,O : ergo numeri B & C metientur numerum N, & cum G ſit minimus eorum quos B & C metiuntur,metietur numerum N:ergo N non eſt minor numero G: ergo neque cæteri minores erunt.

Sed numerus E non metiatur numerum K Invento numero L minimo quem E & K metiantur. Quoties K ipſum L metitur toties G ipſum O, & H ipſum M metiantur ; & quoties E ipſum L metitur; toties F metiatur numerum N:dico numeros M,O,L N eſſe in dictis rationibus minimos : nam H, G, K, numeros M, O, L metiuntur, æqualiter ſe habebunt M ad O ut H ad G ſeu ut A ad B. Pariter erit O ad L ut C ad D : & quia E & F numeros L & N æquemetiuntur erit L ad N ut E ad F. Quòd verò ſint minimi ita oſtendo. Si non ſunt minimi ſint alij minores P. R. S. T.

AB, C, D E F
6 5 4 3 2 3
H G K
24 20 15
M O L N
24 20 30 45
P R S T

Demonſtr. Cum A, B ſint minimi in ſua ratione æquemetientur numeros P & R in eadem ratione exiſtentes (*per* 21. 7.) nempe B ipſum R. Pariter C & D metientur numeros R,S : ergo B & C metiuntur numerum R ; & cum G ſit minimus eorum quos metiuntur numeri B & C,numerus G metietur numerum R ; & cum G, K, R, S ſint proportionales, numerus K metietur numerum S,ſed etiam E metitur ipſum S ſicut F numerum T ; & cum E, F ſint in ſua ratione minimi & ſicut E ad F, ita S ad T, numerus L minimus quem E & K metiantur metietur numerum S (*per* 37. 7.) ergo S non eſt minor quam L : ergo neque alii P R S T : ergo M O L N ſunt minimi in ea ratione. Eodem artificio in minimis numeris continuabuntur quatuor, & quinque rationes.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Numeri plani habent rationem ex laterum rationibus compoſitam.

Sint numeri plani AB CD quorum latera A, B, C, D ; dico rationem numeri plani AB ad numerum planum CD componi ex ratione A ad C & B ad D. Numerus D multiplicet C faciatque BC.

A B C D
3 4 5. 6
A B C D
12 30
B C
20

Demonſtr. Quoniam B multiplicans C facit BC, & multiplicans A producit AB, erit AB ad BC ut A ad C (*per* 17.7.) Pariter cum C multiplicans B & D produxerit BC , & CD erit BC ad CD ut B ad D. quare AB , BC, CD ſunt deinceps proportionales in rationibus AC , & BD ; ſed ratio AB ad CD componitur ex rationibus AB ad BC,& BC ad CD(*per defin.*18.) ergo ratio AB , ad CD componitur ex ratione A ad C, & B ad D quæ ſunt latera numerorum planorum. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si numerorum deinceps proportionalium primus ſecundum non metiatur ; neque ullus ullum metietur.

Proponantur quotcumque numeri continuè proportionales; nempe ita ſit A ad B , ut B ad C, & C ad D; & primus A non metietur ſecundum B:dico quòd nullus alium metietur. E primò quidem nullus ſequentem metietur, alioquin non eſſet ut A ad B, ita B ad C. ſed neque A metietur C, aut B numerum D. Quærantur enim tres numeri E, F, G minimi in ea ratione.

A B C D
16. 24. 36. 54
E 4 F 6 G 9

Demonſtr. Erunt extremi E & G inter ſe primi (*per* 3 *hujus*) & cum ſit ut A ad B ita E ad F, & ut B ad C ita F ad G , erit ex æquo ut A ad C , ita E ad G ; ſed E non metitur numerum G; ergo A non metitur numerum C. Eodem modo oſtendam numerum B non metiri numerum D ; & acceptis quatuor proportionalibus minimis in ſua ratione , oſtendam A non metiri numerum D nempe tertium à ſe, atque ita deinceps.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si numerorum continuè proportionalium aliquis alium diverſum à ſecundo metiatur ; etiam primus ſecundum metietur.

Si enim primus ſecundum non metiretur , nec ullum metiretur (*per præcedentem*) quod eſſet contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Tot inter duos numeros cadent medii proportionales continuò, quot inter alios ipsis proportionales.

A	C	D	B
24.	36.	54.	81
E	G	H	F
8.	12.	18.	27
		K	
		27.	

Inter numeros A & B cadant quotcumque medii proportionales continuè, nempe ita sit A ad C sicut C ad D, & D ad B; sintque numeri EF proportionales numeris A, B, dico inter E & F interiici posse totidem continue proportionales. Fiat enim ut A ad C ita E ad G, & ut C ad D ita G ad H, & ut D ad B ita H ad K.

Demonstr. Inter E & K tot sunt medii proportionales quot inter A & B. item cum sit ut A ad C ita E ad G, & ut C ad D ita G ad H, & ut D ad B ita H ad K, erit ex æquo ut A ad B seu ut E ad F ita E ad K: ergo F & K sunt æquales, possuntque tot interjici medij proportionales inter E & F, quot inter A & B: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si duo numeri primi inter se fuerint; quot inter eos cadent medii continuè proportionales, tot inter singulos & unitatem cadent medii continuè proportionales.

C	E	F	D
8.	12.	18.	27

Unitas
1

A		B	
2		3	
AA	AB	BB	
4	6	9	
AAA	AAB.	ABB	BBB
8	12	18	27

Sint duo numeri inter se primi C & D, inter quos cadant verbi gratia duo medii continuè proportionales, nempe C & D; dico quòd inter singulos & unitatem totidem cadent medii proportionales. Quærantur enim minimi numeri in proportione C ad E, sintque A & B. Tum (*per* 8 *hujus*) quærantur tres proportionales continuè in eadem ratione; tum quatuor AAA, AAB, ABB, BBB.

Demonstr. Hi ultimi quatuor continuè proportionales ita se habent, ut extremi sint primi *per* 2. *hujus*. Erunt item minimi in sua ratione. Sed C, E, F, D cum C & D sint primi, sunt etiam minimi in sua ratione (*per* 1 *hujus*) ergo sunt primis æquales. Si enim non essent æquales, qui minores essent alios metirentur, ergo alii non essent primi, & (*per coroll.* 2.) tot inter extremos AAA BBB cadunt medii quot inter ipsos & unitatem; ergo inter singulos C & D & unitatem tot cadent medii proportionales, quot inter ipsos: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si inter unitatem & duos numeros totidem cadant medii proportionales, inter ipsos totidem existent.

Inter unitatem & numerum AAA tot sint medii, quot inter eandem unitatem, & numerum BBB; dico quod inter AAA & BBB totidem numeri medii proportionales in eadem ratione A ad B, qui sunt minimi in sua ratione. Sunt enim numeri propositi, aut similiter quadrati aut similiter cubi: nempe si fiat progressio propositionis secundæ exurgent hi numeri, & inter eos tot erunt medii, quot inter singulos, & unitatem.

Coroll. Si fuerint duo ordines continuè proportionalium ab unitate procedentes, erunt AA & BB inter se in duplicata ratione A ad B; & AAA, BBB in triplicata ratione, cum inter primos interiiciatur unus medius proportionalis, inter secundos duo. pariter erit unitas ad AA in duplicata ratione unitatis ad A & ita de reliquis.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Inter duos quadratos numeros unus cadit medius proportionalis, & ratio quadrati ad quadratum duplicata est rationis laterum.

A		B	
2		3	
AA	AB	BB	
4	6	9	
AAA	AAB	ABB	BBB
8	12	18	27

Proponantur duo numeri quadrati AA, BB, producti nempe ex multiplicatione A in A: & B in B; dico inter numeros AA & BB cadere unum medium proportionalem, nempe A multiplicet B & faciat AB, dico AB esse medium inter AA & BB.

Demonstr. Cum A multiplicans seipsum, & numerum B fecerit AA & AB, erit (*per* 17. 7.) AA ad AB, ut A ad B, pariter cum B multiplicans A & seipsum fecerit AB & BB, ita erit AB ad BB ut A ad B. ergo ita est AA ad AB, ut AB ad BB. ergo AB est medius.

Item cum sint tres numeri AA, AB, BB in continua ratione lateris A ad B, erit AA ad BB in duplicata ratione A ad B. *per defin. duplicatæ rationis.*

Coroll. Hic medius proportionalis est numerus integer, quem scilicet metiuntur duo numeri integri.

Ex quo posset probari incommensurabilitas diagonalis quadrati cum latere ejus. Si enim sint commensurabiles, se haberent ad invicem ut numerus ad numerum nempe ut numerus A ad B, & eorum quadrati ut AA ad BB: sed eorum quadrati (*per* 47. 1.) se habent ut 1 ad 2 ergo AA ad BB se habent ut 1 ad 2: sed inter 1 & 2 nullus cadit medius proportionalis, ergo inter duos numeros quadratos nullus caderet medius proportionalis.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Inter duos cubos cadunt duo medij proportionales, & eorum ratio triplicata est rationis laterum.

A		B	
2		3	
AA	AB	BB	
4	6	9	
AAA	AAB	ABB	BBB
8	12	18	27

Numerus A multiplicans seipsum faciat quadratum suum AA. & iterum multiplicans suum quadratum faciat AAA. pariter B efficiat suum cubum BBB. A multiplicet AB faciatque AAB. & B eundem A B multiplicans faciat ABB. iam supra ostendimus AAA, AAB, ABB & BBB esse continuò proportionales in ratione A ad B. ergo inter cubos cadunt duo medij proportionales, in ratione laterum. ergo ratio cuborum triplicata est rationis laterum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Numerorum proportionalium quadrati, cubi &c. sunt etiam proportionales.

A	B	C
AA	BB	CC
AAA.	AAA.	BBB

Sint numeri A, B, C proportionales; hoc est ita sit A ad B, ut B ad C. dico numerorum A B C quadratos, & cubos proportionales esse.

Demonstr. Ratio AA ad BB est duplicata rationis A ad B (*per præcedentem*) seu B ad C. sed ratio BB ad CC est duplicata rationis B ad C ergo ratio AA ad BB eadem est ac ratio BB ad CC. quod est numeros AA,BB,CC esse continuò proportionales.

Idem dicito de numeris AAA, BBB, CCC. seu cubis.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si quadratus numerus, numerum quadratum metiatur; radix ejus radicem alterius metietur. & vicissim si radix radicem metiatur; quadratus quadratum metietur.

AA	AB.	BB
4.	12.	36.
A		B
2.		6.

Numerus quadratus AA, numerum quadratum BB metiatur: dico quòd latus ejus, seu radix A, radicem B metietur. A multiplicando B faciat A B.

Demonstratio. (*Per 11.*) AA,AB,BB sunt continuo proportionales in ratione A ad B,& cum AA metiatur BB ex suppositione, (*per 7. 8.*) AA metietur AB. sed ut AA ad AB, ita A ad B, ergo A metietur B quod erat primum.

Vicissim si A metiatur B, AA metietur AB: ut autem AA ad AB,ita AB ad BB: ergo AB metietur BB, ergo (*ex 11 axiomate*) AA metietur BB.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si cubus cubum metiatur; & radix ejus radicem metietur, & vicissim.

AAA	AAB	ABB	BBB
8.	24.	72.	156.
	A	B	
	2	6	

Cubus AAA cubum B B B metiatur: dico quòd radix A radicem B metietur. inter cubos AAA & BBB duo cadunt medij proportionales AAB,ABB, in ratione A ad B (*per 7. 7.*) sed AAA metitur BBB ex constructione; ergo (*per 7. hujus*) primus AAA, metitur secundum AAB. Sed ut AAA ad A B; ita A ad B: ergo A metitur B quod erat primum.

Secundò A metiatur B, ergo AAA metietur AAB. ergo *per 6* AAA metietur AAA. quod erat secundum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Si quadratus quadratum non metiatur; neque radix ejus radicem metietur, & vicissim.

Si enim radix radicem metiretur, quadratus ejus quadratum metiretur (*per 14.*) contra suppositionem. pariter si radix radicem non metiatur nec quadratus quadratum, quia si quadratus quadratum metiretur, radix etiam radicem metiretur contra suppositionem.

PROPOSITIO XVII.

Si cubus cubum non metiatur, nec radix radicem, & vicissim.

Demonstratio est eadem (*per 15.*)

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Inter planos numeros similes unus medius proportionalis cadit, & ratio plani ad planum similem est duplicata rationis homologorum laterum.

AB	BC	CD	
12	24	48	
A	B	C	D
3	4	6	8

Sint numeri plani similes, orti ex multiplicatione numerorum proportionalium, nempe sit A ad B, ut C ad D; & ex A in B fiat A B sicut ex C. in D fiat CD. B multiplicando C faciat BC.

Demonstr. Ita est A ad B, ut C ad D ex constructione: ergo ita est permutando ut A ad C; ita B ad D: Est autem A B ad B C, ut A ad C, (*per 17. 7.*) ergo ita est A B ad B C ut B ad D, sed ita est BC ad CD sicut B ad D per eamdem: ergo ita est A B ad BC, ut BC ad CD, ergo BC est medius proportionalis inter numeros planos A B, CD & cum ratio AB ad BC sit ut A ad B quæ sunt homologa latera: erit ratio numeri A B ad CD duplicata rationis A ad B homologorum scilicet laterum, quod erat demonstrandum.

PROPO

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Inter duos solidos similes duo cadunt medij proportionales. Et ratio solidi ad solidum est duplicata rationis homologorum laterum.

ABC. BCD. CDE. DEF.
48 72 108 162

A B C D E F
2 4 8 3.6.9.

Solidos numeros similes vocamus, quæ ex duplici multiplicatione proportionalium laterum oriuntur. Sint ergo tales solidi ABC, DEF, sintque latera A,B,C; D,E,F proportionalia, nempe ita sit A ad B sicut D ad E; & B ad C sicut E ad F. dico si A multiplicet B & productum ducas in C, fiatque ABC, & pariter ducas D in E, & productum in F, fiatque D E F, quod inquam inter ABC, DEF cadent duo medij proportionales in ratione laterum homologorum A ad D, fiat numerus BCD & CDE.

Demonstratio. Ita est ABC ad BCD, sicut A ad D (*per* 17. 7.) cum idem numerus B C multiplicet numeros A & B, pariter ita est B C D ad CDE sicut B ad E: Est autem B ad E, ut A ad B; nam cum ita sit A ad B, ut D ad E, erit permutando ut A ad D, ita B ad E & C ad F, pariter ita est CDE, ad DEF ut C ad F: ergo ut A ad D; ergo ABC, BCD, CDE, DEF sunt quatuor numeri continuo proportionales in ratione A ad D, ergo inter ABC, DEF duo medij cadunt proportionales in ratione A ad D: ergo est ratio triplicata: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Si inter duos numeros cadat unus medius proportionalis similes plani erunt.

AB BC CD
18 24 32
A B C D
3. 6 4 8

Inter A B & CD cadat medius proportionalis BC, sitque ut AB ad BC, ita BC ad CD, dico numeros AB, CD esse similes planos. Sumantur minimi numeri A & C in ratione AB ad BC.

Demonstr. Numeri A & C ut minimi in ratione AB ad BC (*per* 21. 7.) æquè metientur numeros AB, BC. Metiantur per B pariter A & C, erunt minimi in ratione BC ad CD, supponitur enim esse ut AB ad BC, ita BC ad CD; æquè metientur numeros B C & C D metiantur per D. quare B multiplicans A & C, facit A B & B C. Sunt igitur (*per* 17.) AB ad BC, ut A ad C. Pariter C multiplicans B & D facit BC, CD ita erit B ad D ut BC ad CD: Sed ita est AB ad BC, ut BC ad CD: ergo ita est A ad C, sicut B ad D, & permutando ut A ad B ut C ad D: ergo sunt plani similes, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Si inter duos numeros cadant duo medij proportionales: similes solidi erunt dicti numeri.

ABC BCD, CDE DEF
24 72 216 648
G H K
1 3 9
1 1 24. 3. 3. 72
A B C E F D

Inter numeros ABC, DEF cadant duo medij proportionales B C D, C D E Sumantur (*per* 35. 7.) tres numeri G, H, K, minimi in ratione ABC, BCD, CDE, DEF, eruntque G & K plani similes (*per præcedentem*) cum mediet inter eos numerus K. Sint latera numeri G, numeri A & B, & numeri K sint latera E F, prioribus proportionalia.

Demonstr. G, H, K sunt minimi in ratione ABC, BCD, CDE, ergo eos æquemetientur (*per* 21. 7.) metiantur per C, & cum iidem G, H, K sint minimi in ratione BCD, CDE, DEF eos æquè metientur. Ponantur metiri per D, hoc est C multiplicans G, H, K, producit ABC, BCD, CDE, & D multiplicans G, H, K producit B C D, CDE DEF: sed G factus est ex multiplicatione mutua laterum suorum A, B & K ex multiplicatione suorum laterum D E F: ergo A numerus solidus est productus ex multiplicatione laterum A B C & D E F ex multiplicatione numerorum D E F; quia verò C & D multiplicantes H faciunt BCD CDE, ita erit C ad D ut BCD ad CDE, seu ut G ad H, sed ut G ad H, ita A ad E, aut B ad F, cum H sit medius inter G & K, & A, B, E, F, sint latera numerorum G & K; & (*hoc per* 19. *hujus.*) ergo ita est A ad E, B ad F, C ad D; ergo ABC, DEF sunt numeri solidi similes, habentes scilicet sua latera proportionalia; quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si primus trium continuè proportionalium quadratus fuerit; & tertius quadratus erit.

A B C
4 6 9
D E F G
2 2 7 7

Numerorum A, B, C continuè proportionalium, primus A quadratus sit: dico quartum C quadratum esse.

Demonstr. Cùm inter A & C cadat ex constructione unus medius proportionalis B, erunt (*per* 20. *hujus*) A & C plani similes: nempe si D, E, sint latera plani A, & F, G latera plani C, erit ut D ad F, ita E ad G, & permutando ut D ad E, ita F ad G, sed D & E sunt æqualia: ergo & latera F & G erunt æqualia, ergo numerus C est quadratus.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Si quatuor continuò proportionalium primus numerus cubus fuerit; quartus cubus erit.

A B C D
8 12 18. 27

Proponantur quatuor numeri continuè proportionales, sitque

 primus

primus A cubus; dico quartum D cubum esse.

Demonstr. Cum inter A & D cadant duo medii proportionales, erunt (*per 21 hujus*) numeri A & D duo cubi similes, sed cum A sit cubus: B etiam cubus erit.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si numerus quadratus ad numerum eam rationem habeat quàm quadratus ad quadratum secundus quadratus erit.

A	F	B
16.	24	36
C	E	D
4	6	9

Numerus quadratus A ad numerum B eam rationem habeat quàm quadratus C ad quadratum D; dico numerum B quadratum esse.

Demonstr. Inter C & D unus cadit medius C (*per* 11.8.) ergo (*per* 8. 8.) inter A & B unus cadit medius F; ergo (*per* 22.8.) numerus B quadratus erit.

Coroll. Ratio quadrati ad non quadratum exprimi non potest numeris quadratis; alioquin secundus quadratus esset.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si cubus ad numerum, eandem rationem habeat quàm cubus ad cubum, secundus cubus erit.

A	G	H	B
8	12	18.	27
C	E	F	D
64	96.	144.	216

Cubus A ad numerum B eandem rationem habeat, quàm cubus C ad cubum D, dico numerum B cubum esse.

Demonstr. Cum A sit ad B ut C ad D, & (*per* 12.8.) inter cubos C & D cadant duo medii proportionales E, & F; inter A & B cadent etiam duo medii (*per* 8. 8.) ergo (*per* 23. 8.) numerus B cubus erit.

Coroll. Ratio cubi ad non cubum exprimi non potest numeris cubis; alioquin secundus numerus, qui supponitur non cubus, esset cubus.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Similes plani eam inter se rationem habent, quàm quadratus numerus ad quadratum.

A	E	B
10	20	40
C	F	D
1	2	4

Numeri A & B sint plani similes; dico quod ratio A ad B eadem est ac quadrati numeri ad quadratum; hoc est dari duos numeros quadratos, quorum primus ad secundum eandem rationem habeat quam A ad B.

Demonstr. Cum numeri A & B sint plani similes, inter eos cadet unus medius proportionalis E (*per* 18. 8.) Sumantur tres numeri minimi in ratione continua A, E, B, qui sint C, F D. (*per prop.* 2. 8.) erunt C & D quadrati, est autem ut A ad B, ita C ad D; supponitur enim esse A ad E ut C ad F, & E ad B ut F ad D: ergo ex æquo ut A ad B ita C ad D: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Similes solidi eam rationem habent quam cubus ad cubum.

A	C	D	B
10	20.	40.	80
E	G	H	F
1	2	4	8

Sint duo numeri solidi similes A & B; dico quòd ita se habeant A ad B ut cubus ad cubum, seu posse inveniri duos cubos quorum primus ad secundum, eam rationem habeat, quàm A ad B.

Demonstr. Cùm A & B sint solidi similes, cadent inter eos duo medii proportionales C & D. Sumantur quatuor minimi numeri, in continua ratione A ad C, & C ad D: (*per* 2 *hujus*) extremi E & F cubi erunt. Cum autem sit ut A ad C ita E ad G; & ut C ad D, & D ad B ita G ad H, & H ad F; erit ex æquo ut A ad B ita E ad F; nempe ut cubus E ad cubum F, quod erat demonstrandum.

EUCLI

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER NONUS.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Duo similes plani se invicem multiplicantes quadratum producunt.

A	C	B
6	12	24
AA	D	AB
36.	72.	144.

Duo plani similes se invicem multiplicantes producant numerum AB, dico eum quadratum esse. Numerus A se multiplicet, producatque suum quadratum AA.

Demonstr. Cùm A multiplicando A & B producat numeros AA, & AB, erit AA ad AB ut A ad B (*per* 17. 7.) & cùm A & B sint plani similes, inter eos cadit unus medius (*per* 18. 8.) ergo & inter AA & AB cadet unus medius D (*per* 8. 8.) & cùm AA sit quadratus, erit (*per* 22. 8.) AB numerus quadratus.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si duo numeri se invicem multiplicantes quadratum gignant; similes plani erunt.

A	C	B
6	12	24
AA	D	AB
36.	72.	144.

Numeri A & B se multiplicantes producant numerum quadratum AB, dico A & B esse similes planos. A se multiplicet, faciatque suum quadratum AA.

Demonstr. (*Per* 11. 8.) inter numeros quadratos AA, & AB cadit unus medius D, & cum A multiplicans A & B produxerit AA & AB, erit AA ad AB, ut A ad B (*per* 17. 7.) ergo (*per* 8. 8.) inter A & B cadet medius proportionalis: ergo (*per* 20. 8.) numeri A & B sunt plani similes.

Coroll. 1. Si duo quadrati se multiplicent, quadratum producent, cùm sint plani similes.

Coroll. 2. Si duo numeri quadratum producant, & unus fuerit quadratus, alter quadratus erit.

Coroll. 3. Si unus quadratus non sit, nec alter quadratus erit.

Coroll. 4. Si duo numeri non quadratum producant, & unus quadratus sit, alter quadratus non erit; alioquin quadratum producerent.

Coroll. 5. Quadratus & non quadratus non quadratum producunt.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Cubus se ipsum multiplicans cubum producit.

	AAA
	AA
B	A
	1

Cubus A seipsum multiplicans producat numerum B, dico numerum B cubum esse. Sit latus seu radix cubi AAA, numerus A qui seipsum multiplicans producat quadratum AA.

Demonstr. Ex (*prop.* 23. 8.) sunt 1. A. AA, AAA continuè proportionales, ergo inter unitatem & cubum AAA cadunt duo medii. item cum AAA multiplicando seipsum, & unitatem fecerit numerum B & seipsum, ita erit (*per* 17. 7.) unitas ad AAA, ut AAA ad B: ergo inter AAA & B cadent duo medii (*per* 8. 8.) & cùm primus AAA sit cubus, Secundus B (*per* 23. 8.) cubus erit: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Cubus multiplicans cubum producit cubum.

A	B
AA	AB

Cubus A, multiplicando cubum, B producat numerum AB, dico numerum AB cubum esse. A ducatur in A, fiatque AA.

Demonstr. Cùm A ductus in A & B producat AA & AB erit (*per* 17. 7.) ut A ad B ita AA ad AB. sed (*per* 12. 8.) inter A cubos A & B duo cadunt medii, ergo & inter AA, AB. & cum AA sit cubus. AB (*per* 23. 8.) cubus erit.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si cubus multiplicans aliquem numerum faciat cubum; multiplicatus cubus erit.

A	B
AA	AB

Cubus A multiplicans numerum B producat numerum AB cubum, dico numerum B cubum esse, A ducatur in se faciatque AA.

Demonstr. (*Per* 3.) AA cubus erit; erit item ut in superiori A ad B ut cubus AA ad cubum AB, sed (*per* 12. 8.) inter AA & AB cadunt duo

medii

medij proportionales: ergo (*per* 8.8. inter A & B cadunt duo medij, & cum A sit cubus, erit (*per* 23.8.) numerus B cubus.

COROLL. Cubus non cubum multiplicans facit non cubum, alioquin multiplicatus esset cubus. Si cubus multiplicans numerum facit non cubum, ille non cubus erit.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si numerus in se ductus facit cubum; & ipse cubus erit.

A
AA. AAA

Numerus A ductus in A faciat cubum AA, dico quòd ipse cubus erit. A in AA producat AAA.

Demonstr. Cum A multiplicando AA fecerit AAA, erit numerus AAA cubus *ex definitione cubi*, quare cum A in AA fecerit cubum AAA, etiam cubus AA multiplicans numerum A facit cubum AAA (*ergo per* 5.) A cubus erit.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Compositus numerus, multiplicans quemvis numerum, generat solidum.

A	B	C
6	11	66
D	E	
2	3	

Numerus compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C, dico C esse solidum.

Demonstr. Cum numerus A supponatur compositus, eum præter unitatem metietur aliquis numerus (*per defin.*13.) Sit ille D qui metiatur eum per E, quare D multiplicando E producet A, & numerus B multiplicando productum A, producit C: ergo numerus C oritur ex multiplicatione numerorum D, E, B. Ergo ex defin. solidus est: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si fuerit series continuò proportionalium ab unitate incipiens, secundus ab unitate quadratus erit: & alternatim omnes. Tertius ab unitate cubus est, & duobus semper intermissis cæteri. Sextus ab unitate cubus simul, & quadratus est & quinque intermissis cæteri.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	O
1	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.				

Sit series continuè proportionalium incipiens ab unitate, dico primò numerum B secundum ab unitate, quadratum esse; Cùm enim sit 1 ad A ita A ad B, numerus sub A, & ex B in 1 æquatur quadrato numeri A medij (*per* 20. 7.) Sed numerus ex B in unitatem est ipse numerus B cum unitas nihil immutet, ergo numerus quadratus est.

Secundò dico B, D, F, H quadratos esse, sunt enim B, C, D continuè proportionales & B primus quadratus est: ergo tertius quadratus erit, nempe D, & F, & H, & L, & N.

Tertiò C cubus est, quia ita est 1 ad A ut B ad C, sed unitas metitur A per ipsum A: ergo & B metitur C per A: ergo A multiplicando suum quadratum B efficit numerum C; ergo C cubus est: & cum C, D, E, F sint continuè proportionales & primus sit cubus, erit & F cubus (*per* 23. 8.) idem dico de K, N & C.

Quartò numerus F est ostensus simul quadratus & cubus sicut N, intermissis nempe quinque terminis G, H, K, L, M.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

In serie continuè proportionalium ab unitate incipientium, si primus quadratus sit, reliqui omnes erunt quadrati. Si primus est cubus reliqui erunt cubi.

1 A, B, C, D, E, F, G.

Sit series continuè proportionalium, sitque primus A quadratus; dico B etiam quadratum esse, & reliquos omnes.

Demonstr. Ita est A 1 ad A sicut A ad B: ergo B in 1 seu B, cum unitas nihil immutet æquatur quadrato numeri A: pariter cum ita sit 1 ad A ut B ad C, A in B æquatur 1 in C, id est numero C, quare A multiplicat omnes numeros ut producat sequentes. Sed A est quadratus, & B quadratus ostensus est: ergo & C quadratus erit. Idem ostendam de aliis.

Secundò si A cubus sit, & A se multiplicando facit B, erit B etiam cubus (*per* 3.9.) ita A cubus in B cubum, faciet cubum C (*per* 4.9.)

PROPOSITIO X.

Theorema.

In serie continuè proportionalium ab unitate incipiente, si primus quadratus non sit; neque alij præter secundum, quartum, sextum, quadrati erunt. Si primus cubus non sit, nec alij præter tertium, sextum, nonum, cubi erunt.

Sit series continuè proportionalium, ab unitate incipiens, & primus numerus A non sit quadratus; dico nullum alium præter secundum, quartum, sextum, &c. esse quadratum. Sit enim si fieri potest nempe E; cum ita sit E ad D ut B ad A, & E, D & B sint quadrati, erit etiam A quadratus (*per* 18. 9.) contra suppositionem.

Secundò si in eadem serie primus A cubus non fuerit, dico quod præter tertium C sextum F, nonum, &c. nullus alius cubus erit; sit enim si fieri potest alius numerus G cubus, cùm ita sit G ad F ut C ad B, & tres G, F & C dicantur cubi, erit & B cubus (*per* 25. 8). Similiter ostendam & A cubum esse contra suppositionem; non est ergo G cubus. Similiter ostendam E cubum non esse, aut alium quemcumque; exceptis iis quos suprà recensui.

PROPO

PROPOSITIO XI.

Theorema.

In serie continuè proportionalium ab unitate incipiente; quilibet minor majorem metitur per aliquem qui est intra seriem.

Unitas A, B, C, D, E, F, G, H.
3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Proponatur numerus G major, & C minor; dico quod C metietur numerum G per aliquem numerum qui est in serie. Inter C & G sint tres numeri, & sumantur totidem inter unitatem & D.

Demonstr. Quia ita est unitas ad D sicut C ad G, ut probatur ex æqualitate; productus ex C in D æquabitur producto ex unitate in G seu numero G (*per* 19. 7.) ergo C metietur G per numerun D.

Coroll. Quantùm metiens distat ab eo quem metitur nempe G, tantùm is per quem metitur nempe D, distat ab unitate. In eadem serie numerus C seipsum multiplicans producit numerum F tantum ab ipso distantem quantùm ipse distat ab unitate. Si duo numeri seriei se invicem multiplicent producent numerum qui tantum distet ab uno, quantùm alter distat ab unitate.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si fuerit series numerorum continuè proportionalium ab unitate incipiens, numerus primus metiens ultimum metietur & eum qui proximus est unitati.

A	B	C	D
1. 10.	100.	1000.	10000
E	H	G	F
5	20	200	2000

Sit series continuè proportionalium A, B, C, D ab unitate incipiens; sitque numerus E primus qui metiatur ultimum D; dico quod idem numerus E metietur primum A. Si enim non metiatur; cum A sit primus, erunt A & E primi inter se primi (*per* 31. 7.) quod tamen ostendo implicare, cum sequatur quod E metiatur ipsum A, atque adeo non sit primus ad A. Numerus enim E metiatur numerum D per numerum F; quare cum idem numerus D fiat ex A in C qui ex E in F, ita erit (*per* 19. 7.) primus A ad E ut F ad C. Et cum A & E inter se primi sint, erunt minimi in sua ratione, & æquemetientur numeros A quidem ipsum F, & E ipsum C. (*per* 23 *&* 21 *septimi.*) E metiatur C per G, ita ut E in G producat C; sed idem C producitur ex A in B. ergo (*per* 19. 7.) ita erit A ad E sicut G ad B; & cum A & E sint primi, seu minimi in sua ratione, æquemetientur G & B; nempe A ipsum G, & E ipsum B. numerus E metiatur numerum B per numerum H, hoc est E in H producat B. sed B producitur etiam ex A in A; ergo ita erit A ad E sicut H ad A. Et cum A & E sint primi, & minimi in sua ratione, æquemetientur numeros H & A; nempe A ipsum H, & E ipsum A; ergo E metitur ipsum A: quod erat demonstrandum.

Artificium hujus demonstrationis hoc habet peculiare, nempe ex eo quod E & A sint numeri primi, concludat non esse numeros primos.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si in serie continuè ab unitate proportionalium, unitati proximus primus sit; maximum nullus metietur præter eos qui sunt in serie.

	A	B	C	D
Unitas	5	25	125	625
	E	F	H	G	K

Sit series continuè proportionalium, ab unitate incipiens; sitque A proximus unitati, numerus primus: dico quòd maximum D nullus numerus metietur præter eos qui sunt in serie. Si enim id fieri potest numerus E metiatur numerum D; vel numerus E, erit primus, vel compositus, sed neutrum admitti potest; non primus: si enim E esset primus (*per præcedentem*) metiretur numerum A, qui tamen primus supponitur. Non etiam est compositus saltem diversus à 6 positis in serie. Si enim sit compositus, eum metietur aliquis numerus primus non alius quam A. Sit enim ille F, cum F metiatur ipsum E; & E ipsum D; F quoque metietur ipsum D: ergo (*per præcedentem*) metietur numerum A quod fieri non potest, cum A sit primus: ergo nullus alius metitur numerum E præter ipsum A.

Jam E metiatur D per H, & A eumdem D metitur per C; ita erit A ad E, sicut H ad C (*per* 19. 7.) sed A metitur E, ergo H metitur C; debet autem H esse diversus à numeris positis in serie; si enim H esset idem cum aliquo; ponamus cum B. Cum B metiatur D per aliquem contentum in serie (*per* 11. & H metiatur D per E, E esset contentus in serie; Item ostendam sicut ostendi de numero E numerum H compositum esse, quem metiatur numerus A: H ergo metiatur C per G; debebit etiam G non contineri in serie, alioquin etiam H in serie contineretur. Cùm ergo H metiatur C per G, & A metiatur C per B, ita erit A ad H sicut G ad B; sed A metitur numerum H, ergo G metietur numerum B. Et ostendam pariter numerum G esse compositum quem numerus A metiatur. Denique numerus G metiatur numerum B per K; sed eundem numerum B numerus A metitur per A; ergo ita erit A ad G; sicut K ad A sed A metitur numerum G, ergo etiam K metitur numerum A quod est absurdum cum A sit numerus primus. Hoc autem absurdum sequitur ex eo quod positus fuerit numerus E diversus ab iis qui sunt in serie. Non ergo numerus E diversus ab iis qui sunt positi in serie.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Minimum numerum quem primi metiuntur; nullus alius numerus primus metietur.

	A 30	
B	C	D
2	3.	5
E	F	

Sit numerus A minimus quem metiantur numeri primi B, C, D dico quod nullus alius numerus primus metietur numerum A. Metiatur enim eum si fieri potest numerus E per F.

Demonstr. E multiplicans F facit A; ergo (*per* 32. 7.) quilibet B, C, D metietur alterutrum numerorum E, F, non numerum E, qui primus supponitur;

ponitur, ergo numerum F, qui minor est quàm A: quod est contra suppositionem, quæ ponit numerum A esse minimum quem numeri primi B,C,D metiantur.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si fuerint tres continuè proportionales in ratione sua minimi, dico duos quoslibet simul sumptos ad reliquum primos esse.

A	B	
2	3	
AA	AB	BB
4	6	9

Sit ratio data A ad B, & A & B minimi & consequenter primi (*per* 24. 7.) sintque juxta (*prop.*2.8.) dati tres numeri minimi in ea ratione, nempe AA, AB, BB; dico AA † AB ad BB primum esse. item AB † BB ad AA. denique AA † BB ad AB primum esse.

Demonstr. Cum A ad B primus sit, etiam A†B. ad A aut ad B primus erit (*per* 30.7.) Cum igitur tam A † B quàm A ad B primi sint, productus ex eorum multiplicatione nempe AA † AB ad B primus erit. (*per* 26. 7.) item quadratus BB ad AA † AB primus erit.

Ostendam eodem modo BB † AB ad AA primum esse.

Denique cùm tam A quàm B ad A † B sint primi, genitus ex A in B, seu AB ad A † B, primus erit (*per* 26. 7.) & (*per* 27.) AB ad quadratum ipsius A † B primus erit. Constat autem (*per* 4.2.) quadratum A † B quadratis AA & BB, & duobus AB. Et (*per* 30. 7.) erit AB primus ad duos quadratos AA † BB; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Duobus numeris primis non datur tertius proportionalis.

A	B	B	C
2	3	3	

Sint dati numeri primi A & B. dico quod iis non invenietur tertius proportionalis. Repetatur numerus B.

Demonstr. Cum numeri A & B sint primi, erunt minimi in sua ratione (*per* 21. 7.) sed dicuntur B,C esse in eadem ratione, ergo (*per* 21.7.) A & B æquemetientur ipsos B & C: nempe A ipsum B, quod fieri non potest cum A & B sint primi.

Vel cum A, B, C sint continuè proportionales quadratus A æqualis erit producto ex A in C, hoc est A metietur quadratum B per C; quod fieri non potest cum (*per* 26.7.) A sit primus ad quadratum numeri B.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si in serie continuè proportionalium primus & ultimus primi inter se fuerint; Non poterit ulteriùs continuari hac series.

A B C D E

In serie A, B, C, D. continuè proportionalium extremi A & D sint inter se primi; dico hanc seriem ulteriùs continuari non posse; hoc est non posse alium numerum E inveniri, nempe ita se habeat D. ad E sicut A ad B, aut C ad D. Si enim id fieri potest, sit A ad B ut D ad E; erit permutando A ad D ut B ad E; sed A & D sunt primi inter se, ergo minimi in sua ratione (*per* 23. 7.) ergo æquemetientur numeros B & E, nempe A numerum B & D numerum E. Et cum sit ut A ad B ita B ad C, & C ad D B metietur C, & C metietur D. ergo A metietur D; contra suppositionem.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Determinare an, duobus datis numeris, possit tertius proportionalis exhiberi.

C	D		
A	B	BB	E
6.	4.	16.	

Proponantur duo numeri C & D, si fuerint C & D primi, non poterit tertius proportionalis exhiberi (*per* 16. *hujus*) intelliguntur hæ propositiones in numeris integris. Supponantur A & B non esse primi inter se, sed quadratus BB talis sit ut eum non metiatur numerus A; dico quod non poterit tertius proportionalis exhiberi. Detur enim tertius proportionalis E, ergo (*per* 20.7.) A in E æquabitur numero BB; hoc est A multiplicando E producet BB, hoc est A metietur BB per E; quod est contra suppositionem.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Considerare an, tribus datis numeris, possit quartus proportionalis inveniri.

A	B	C	D
2.	3.	6.	9.
	B C		
	18		

Proponantur tres numeri A,B,C; inquiritur an illis quartus proportionalis reperiri possit; ducatur B in C, fiatque B C. Si A metitur BC, metiatur per D: dico numerum D esse quartum proportionalem; nam cum A in D faciat BC, erit (*per* 20.7.) ita A ad B, ut C ad D.

Si verò A non metiatur BC, non dabitur quartus proportionalis. Si enim dicatur esse D, nempe ita esse A ad B ut C ad D: ergo (*per* 20.7.) A in D æquabitur C D, hoc est A per D metie- B C; contra suppositionem.

A	B	C	D
2	3	5	
	B C		
	18		

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Primi numeri sunt plures quâcumque propositâ multitudine.

A	B	C
2.	3.	5.

D 30. E 31

Sint propositi numeri A. B. C. dico & alios dari posse.

Sit enim numerus D minimus quem metiantur numeri A, B, C, & huic addatur unitas, ut fiat numerus E, vel numerus E primus, vel compositus.

Si

Si est primus: ergo dantur plures quàm tres numeri primi, nempe quatuor.

Si numerus E non est primus, erit compositus, eumque metietur aliquis numerus G, qui erit diversus à numeris A, B, C, atque adeò dabuntur quatuor. Si enim non est diversus à numero aliquo ex superioribus, sit idem ac numerus C; sed numerus C metiebatur numerum D: ergo & G metitur numerum D, sed metitur & totum E: ergo (*per axioma 12.*) metietur reliquum nempe unitatem quod est absurdum: ergo numerus G est diversus à prius positis: ergo dantur quatuor; quod erat demonstrandum.

A	B	C
3	5	7

D 105 E 106
G——

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Quotcumque numeri pares componunt parem.

A	B	C
D	E	F

Sint quotcumque numeri pares A, B, C; dico quod eorum summa sit numerus par, cum singuli A,B,C sint pares habebunt semissem *ex defin.* Sint D,E, F semisses singulorum cum sit A ad E, ut B ad E, & C ad F (*per* 12. 7.) ita erunt ABC simul ad DEF simul, ut A ad D, sed D est semissis numeri A: ergo D E F est semissis summæ A B C: ergo A B C semissem habens ex definitione est numerus par.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si multitudo numerorum imparium fuerit par: aggregatum par erit.

A B C D

Sit multitudo numerorum imparium par: dico aggregatum esse par.

Demonstr. Cum numerus impar unitate à pari differat, detracta à singulis unitate fient totidem numeri pares, quorum congregatum (*per præcedentem*) par erit. Multitudo etiam unitatum detractarum æqualis est multitudini numerorum, ideoque par erit: ergo addita numero pari, faciet aggregatum totale par.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Impares numeri multitudine impari, componunt imparem.

A B C D E

Sint numeri A B C D E impares, & multitudo impar: dico aggregatum esse impar. Si enim auferatur E; erit multitudo par, atque adeò aggregatum A B C D erit par (*per præcedentem.*) Addatur & E detracta tamen prius ab eo unitate fiet & aggregatum par (*per* 20.) & restitutâ unitate aggregatum totale erit impar.

Coroll. Impar additus pari facit imparem.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si à pari subtrahatur par, reliquus par erit.

A B
C

A numero pari A auferatur par B; dico reliquum C esse parem: si enim C esset impar, additus pari B, faceret summam A imparem contra suppositionem: dicitur enim esse par.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si à pari impar subtrahatur, reliquus erit impar.

Ex A pari auferatur impar B, dico reliquum C esse imparem. Si enim esset par cum impari B, summam A imparem efficeret (*per* 22.) quod est contra suppositionem.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si ab impare subtrahatur impar; reliquus erit par.

Si ab impare A auferatur B impar, dico reliquum esse parem. Si enim C esset impar cum impare B faceret summam A parem (*per* 23.) quod tamen esset contra suppositionem.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si ab impare subtrahatur, par restabit impar.

Si enim restaret par, cum pare subtracto, faceret totum parem, qui tamen supponitur impar.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si par & impar se invicem multiplicent producunt parem.

Cum numerus impar per parem multiplicatur, sumitur multitudo imparium æqualis numero pari, sed talis multitudo (*per* 22.) facit parem: ergo par & impar invicem multiplicati faciunt parem.

Coroll. Pariter impar est par.

Coroll. 2. Par multiplicans parem facit parem.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Impar multiplicans imparem facit imparem.

Cùm numerus impar multiplicat imparem, fit multitudo impar, numerorum imparium: sed hæc (*per* 23.) componit imparem: ergo impar multiplicatus per imparem producit imparem.

Coroll. 1. Numerus impar metitur imparem, per imparem.

Coroll. 2. Ex his demonstrare possumus numerum ita dividi non posse, ut totus multiplicatus per unam partem, producat numerum æquale quadrato alterius partis; ut in lineis perficitur *Prop.*11. 2.*Eucl.*

Sit enim si fieri potest numerus A B, qui ita

A——C—B
D——E—
E—

secetur in C, ut genitus ex A B in B C, æquetur quadrato numeri A C. Supponatur primo A C par, & CB impar, & consequenter A B impar per B C imparem producit imparem (*per* 29.) B C autem par, per seipsum producet parem: ergo non possunt esse æquales; quare hic casus implicat contradictionem.

2. Si A C sit impar & CB par, A B erit impar; quare A B impar per parem BC producet parem. A C autem impar seipsum multiplicans producit imparem, non ergo possunt esse æquales.

3. Uterque AC, CB impar sit, totus A C par erit, qui multiplicatus per imparem producit parem. Sed A C impar multiplicans seipsum facit imparem, non ergo est æqualitas. Denique si sint AC, CB pares qui solus casus examinandus restat: sint duo numeri D, E minimi in ratione AC, CB, qui per 24 primi inter se sunt; ergo non sunt ambo pares, alioquin eos metiretur binarius, quare respectu numerorum D & E recurrunt casus præcedentes: nam cum sit, ut AC ad CB ita D ad E, ita erit A B ad AC, ut D † E ad D; Et cum AB, AC, CB sint continuè proportionales, erunt D†E, D & E continuè proportionales: quare (*per* 19.7.) genitus ex D † E in E æquabitur quadrato medij D, quod fieri non posse probavimus, cum D & E non sint ambo pares.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si impar metiatur parem dimidium quoque ejus metietur.

A C
12 6.
B D E
3 4 2

Numerum parem A metiatur numerus impar B, dico quod dimidium ejus C idem numerus B metietur. Numerus impar B non potest metiri parem, nisi per parem metiatur: ergo eum per numerum D, qui cum sit par habebit semissem 2.

Demonstr. Eadem est ratio numeri D ad A, quæ semissis E ad semissem C, ergo numerus D æque metietur numerum A, ac E metietur numerum C, sed D metitur A per B, ergo E metietur numerum C per eumdem B, ergo vicissim B metietur numerum C per numerum E; quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Si impar ad aliquem primus sit; ad illius duplum primus erit.

A B
3 5
C 10 D—

Numerus A impar sit primus ad numerum B, dico quod primus erit ad numerum C duplum ipsius B: si enim A non est primus ad C eos metiatur D, qui necessario impar erit: nam si par esset, etiam multiplicaret numerum imparem, faceret tamen parem (*per* 28.) cum tamen A supponatur impar: est ergo numerus D impar, qui cum metiatur C parem; metietur etiam ejus dimidium B (*per præcedentem*) ergo A & B, habent mensuram communem D; ergo non sunt primi contra suppositionem.

Coroll. Si numerus impar fuerit primus ad aliquem numerum, erit etiam primus ad ejus quadruplum, octuplum, &c. hoc modò progrediendo in ratione dupla.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si dupla proportio continuetur; habentur omnes numeri pariter pares tantum.

1	A	B	C	D	E
	2	4	8.	16.	32
		K	H	G	F

Proportio dupla continuetur quantum libuerit; dico quod omnes termini erunt pariter pares tantum.

Demonstr. Ex (*prop.*11.9.) binarius quemlibet metitur per aliquem qui sit in ipsa serie, & qui sit par; ergo quilibet est pariter par.

Secundo ostendo eos esse pariter pares tantum, cum enim binarius sit numerus primus, nullus numerus metietur hos terminos, præter eos qui sunt in serie. (*per* 13. 8.

3. Addo nullum alium esse pariter parem præter eos: sit enim si fieri potest alius pariter par præter eos qui sunt in serie, nempe F, qui cum sit pariter par, debebit ejus semissis esse G par; alioquin binarius per imparem semissem, scilicet metiretur numerum F. Addo quod semissis numeri G nempe H, sit adhuc par; si enim esset impar numerus 4 per imparem H metiretur numerum F, qui consequenter esset impariter par. Idem dico de octava parte, donec tandem deveniamus ad unitatem, atque adeò per continuam duplationem inveniemus K, H, G, F esse numeros seriei.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si numerus dimidium habeat imparem pariter impar est tantum.

A 10
B 5 C 2
D—E—

Numerus A habeat semissem imparem; dico A esse pariter imparem tantum. Patet primò eum esse pariter imparem, cum binarius eum metiatur per numerum imparem.

Quod verò sit pariter impar tantum sic ostendo; sit ejus semissis B & C binarius. Si etiam numerus A esset pariter par, eum aliquis numerus par D metiretur per parem E. sit ergo A tam ex D in E, quàm ex B in C; erit ergo ut C ad D, ita E ad B. Sed binarius C metitur, parem D; ergo E metietur B, par imparem quod est absurdum, quare numerus A erit pariter impar tantum.

Coroll.

Coroll. Si numeri impares duplentur habebuntur omnes numeri pariter impares. Primò patet ex hoc theoremate eos esse pariter impares tantum, quod verò nulli sint alij pariter impares patebit ex sequenti.

3.	5.	7.	9.	11.
6	10	14	18	22
A	B	C	D	E

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Si numerus par, neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: pariter par est; & pariter impar.

A 12

Vocamus numerum à binario duplum, quem si continuò dividamus bifariam, incidimus tandem in ipsum binarium; tales sunt qui in proportione dupla ab unitate continentur. Sit ergo quilibet numerus A, qui sit par; qui neque à binario sit duplus, neque habeat dimidium imparem, sed parem: dico eum numerum & pariter parem esse, & pariter imparem. Primò erit pariter par, cum binarius per numerum parem eum metiatur.

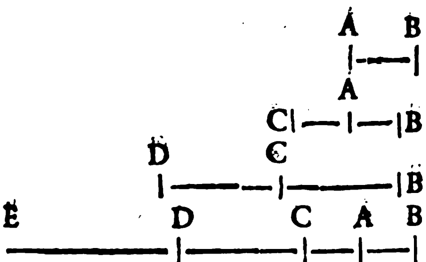
Erit etiam idem numerus pariter impar. Dividatur enim bifariam, & semissis bifariam, tandem vel deveniemus ad aliquem imparem, vel ad binarium; Non ad binarium quia numerus esset à binario duplus: ergo perveniemus ad numerum imparem qui eum metietur per numerum parem, alioquin produceretur numerus impar, contra suppositionem: ergo numerus A est pariter impar; quod erat demonstrandum.

Coroll. Præter numeros à binario duplos, & eos qui semissem habent imparem, reliqui omnes pares sunt & pariter pares, & pariter impares.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Si sint quotcumque quantitates continuè proportionales, ita erit excessus secundæ ad primam seu minimam, ut excessus maximæ supra minimam; ad reliquas omnes.



Sint quæcumque quantitates, seu numeri continuè proportionales nempe AB, CB, DB. EB. dico ita esse excessum secundæ supra minimam, ad minimam, seu CA ad AB, sicut excessus maximæ supra minimam, ad reliquas omnes, nempe sicut EA ad DB, CB, AB simul sumptas. Transferantur omnes in maximam EB.

Demonstr. Ita EB ad DB ut DB ad CB, & CB ad AB; & dividendo (*per* 17.5.) ita erit ED ad DB sicut DC ad CB; & sicut CA ad AB, & (*per* 12.5.) ut una antecedentium ad unam consequentium, nempe ut CA ad AB, ita omnes antecedentes, nempe ED, DC, CA ad omnes consequentes DB, CB, AB; sed omnes antecedentes ED, DC, CA æquantur excessui maximæ EB, supra minimam AB, nempe EA: ergo ita est excessus secundæ supra minimam ad minimam, ut excessus maximæ supra minimam ad reliquas omnes: quod demonstrandum erat.

Coroll. In continuè proportionalibus ita erit excessus cujuscumque ad sequentem minorem, ut excessus maximæ supra minimam ad reliquas omnes.

Quia verò denominator rationis ostendit rationem unius ad sequentem minorem, ut si sit proportio tripla, denominator 3 ostendit rationem unius termini ad minorem vicinum, nempe ut 3 ad 1; si auferatur unitas ex eo denominatore fiatque 2, habebitur ratio quam habet excessus unius termini ad proximè minorem, nempe ut 2 ad 1.

Si fiat ergo ut hic denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita excessus maximi supra minimum, ad reliquos omnes; & quia in hac regula trium intervenit unitas, vitatur multiplicatio. Si ergo differentiam maximi supra minimum dividas per denominatorem unitate mulctatum habebitur summa omnium terminorum, excepto maximo.

Ex hac propositione multa deducimus in fine Arithmeticæ, in ordine ad progressiones, etiam infinitas: veteres autem Geometræ & Arithmetici hæc non animadverterunt.

Coroll. 2. In proportione dupla quia denominator est 2 & imminutus unitate est 1, evanescit divisio, ideoque si minima auferatur ex maxima, habetur series tota exceptâ maximâ.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si proportio dupla ab unitate continuetur, donec summa omnium terminorum sit numerus primus; tota series in ultimum ducta, producet numerum perfectum.

1.	A	B	C	D
	2	4	8	16
E	F	G	H	K
31	62.	124.	248	496
	L	M		

Sit proportio dupla ab unitate incipiens quæ continuetur quantum libuerit donec numerus summa sit numerus primus. Id autem frequenter accidit. nam duo termini 1 & 2 efficiunt 3 numerum primum. 1. 2. 4. efficiunt 7 numerum primum. 1. 2. 4. 8. efficiunt 15 qui compositus est: 1. 2. 4. 8. 16 efficiunt 31 numerum primum: dico quod si 31 multiplices per 16 fiatque 496, quod ille numerus erit perfectus, nempe æqualis omnibus suis partibus aliquotis simul sumptis. quot sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur dupli ipsius E, nempe F. G. H. K.

Demonstr. Ita est ex æquo A ad D, sicut E ad H: ergo idem numerus fiet ex A in H, ac ex E in D: sed numerus genitus multiplicatione ex A in H est numerus K, cum A sit binarius, & K sit duplus numeri H. ergo productus ex E in D est numerus K; & cum E, F, G, H, K sint continuè proportionales in proportione dupla, si ex K auferatur E, habebitur aggregatum E F G H *per coroll. præcedens.* E autem est æqualis summæ 1. A. B. C. D. ergo K minus E, æquabitur numeris H. G, F. 1. A. B. C. D. adde utrinque E. fiet K æqualis omnibus numeris 1. A, B. C. D. E. F. G. H. qui numeri sunt partes aliquotæ numeri K. nam cum E F G H K. sint continuè proportionales in proportione dupla, singuli metientur numerum K; pariter 1 A B C metiuntur numerum D. D autem metitur numerum K, cum ductus in E fecerit K: quare hi omnes numeri sunt partes aliquotæ numeri K.

Restat probandum numerum K nullas habere alias partes aliquotas. Ponatur enim alia quævis L; hanc ostendo unam esse ex recensitis. Metiatur enim numerum K per M: ergo L in M producit K; sed etiam E in D produxit K, ergo ita est E ad M ut L ad D. Et quia A unitati proximus nempe 2 est numerus primus, & L est diversus ab omnibus A B C D, numerus L non metietur numerum D (*per* 13. 9.) ergo neque E metietur ipsum M. Et cum E sit primus, E & M inter se primi erunt (*per* 31. 7.) & in sua ratione minimi (*per* 23. 7. & (*per* 21. 7.) E metitur L & M metitur D. Et cum A primus sit, erit M aliquis ipsorum A, B, C, D, (*per* 13. 9.) sit idem cum B. & quot sunt B, C, D tot sumantur ab E dupli F. G. H. eritque ex æquo ut B ad D ita E ad H, fit ergo idem ex B in H, qui ex D in E, nempe K. Et quia idem L metitur K per M; M in L faciet K. idem ergo K fit ex L in M, & ex B in H; & cum M ostensus sit idem cum B, erit etiam L idem cum H. Nullus igitur F habet partes aliquotas quàm prius positas.

Ex hac propositione inveniemus omnes numeros perfectos: Summa enim ex 1 & 2 est numerus primus; quæ ducta in 2 efficit 6 numerum perfectum summa 1. 2. 4 efficit 7. quæ ducta in 4 efficit 28 numerum perfectum. Summa 1.2.4.8 efficit 15 numerum compositum. Summa 1.2.4.8.16 efficit 31. Ex quo ostendimus produci numerum perfectum. Facile autem habetur summa, si abiiciatur unitas ex aliquo, fit summa antecedentium. Pauci autem sunt hujusmodi reperti nempe tantũ undecim 6.28.496.8128. 23550336. 8589869056. 137438691328. 2385843008139952128.& nulli intermedii.

Sed ista sunt valde inutilia, atque adeo sufficiant.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

Definitiones.

1 Commensurabiles magnitudines, quas eadem communis mensura metitur.

2 Incommensurabiles, quas nulla communis mensura metitur.

3 Rectæ lineæ potentiâ sunt commensurabiles cùm eorum quadrata eadem communis mensura metitur.

4 Rectæ lineæ potentia sunt incommensurabiles cùm eorum quadrata nulla communis mensura metitur.

5 Linea cum qua comparantur reliquæ, & in ordine ad quam dicuntur commensurabiles aut incommensurabiles sive longitudine, sive potentia, dicatur rationalis.

6 Lineæ quæ sunt rationali commensurabiles, sive longitudine sive potentia tantum, dicantur rationales.

7 Quæ verò sunt rationali incommensurabiles, tam longitudine, quàm potentia, dicantur irrationales.

8 Quadratum lineæ rationalis dicatur rationale.

9 Omnes superficies quadrato rationali commensurabiles, dicuntur rationales.

10 Et huic incommensurabiles superficies, aut quadrata, irrationalia dicantur.

11 Lineæ verò quæ incommensurabilium quadratorum sunt latera, dicantur irrationales.

AXIOMA I.

Magnitudo quotcumque magnitudines metiens, metitur & ex iis compositum.

AXIOMA II.

Magnitudo quamcumque magnitudinem metiens, metitur & omnem quam illa metitur.

AXIOMA III.

Magnitudo metiens totam, & ablatam metitur; & reliquam.

PROPOSITIO I.

Si ex magnitudine auferatur plusquam dimidium, & ex reliquo plusquam dimidium, aut dimidium, & ita deinceps, relinquetur quantitas minor quacumque propositâ.

A. B

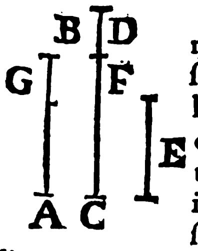
Sit quantitas A ex qua auferas dimidium, aut plusquam dimidium, & ex reliquo plusquam dimidium, & ita deinceps, dico id ita fieri posse, ut relinquatur quantitas minor quàm B. Multiplicetur quantitas B, donec sic multiplicata excedat magnitudinem A: Ponamus B: ter sumptam, excedere magnitudinem A; dico si fiant tres subtractiones dimidij ex quantitate A relinqui quantitatem minorem quàm B.

Demonstr. Si enim ex tripla ipsius B auferas B, aufers minus quàm dimidium, ex A minori aufertur dimidium: aut plusquam dimidium: ergo id quod relinquitur ex A, minus est quàm id quod relinquitur ex tripla B; nempe quam dupla B. Iterum ex dupla B auferatur B, & ex reliquo A auferatur

feratur plusquam dimidium, relinquetur quantitas minor quàm B; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Si ex duabus magnitudinibus minor ex majori detrahatur, & reliquum ex minori quoties potest, & ita deinceps alternatim, & nulla reliqua præcedentem metiantur, incommensurabiles erunt magnitudines.



Sint duæ magnitudines; A B minor, CD major, & AB ex CD subtrahatur quoties potest, & reliqua ex A B detrahatur, & reliqua magnitudinis AB subtrahatur ex reliqua lineæ CD, & hoc ita semper fiat, ut nunquam subsequens metiatur præcedentem: dico magnitudines esse incõmensurabiles. Si enim sint commensurabiles, habeant communem mensuram E; detrahatur AB ex CD quoties potest, & relinquatur F D ipsa minor pariter P F D subtrahatur ex A B quoties potest, & relinquatur G B minor quàm F D.

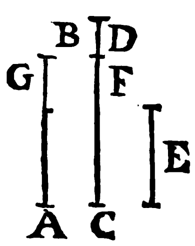
Demonstr. Cum hujusmodi detractionibus ex A B & C D auferatur plusquam dimidium, tandem (*per* 1.) relinquetur quantitas minor quàm E, sit hæc G B. Quoniam ergo E metitur AB, & AB metitur C F, E metietur C F, sed metitur totam C D, ergo metitur F D. Sed FD metitur A G, ergo E metitur A G; sed E metitur & totum A B, ergo metitur & reliquam G B, major minorem; quod est absurdum.

Coroll. Conversæ facile probantur, nempe quòd si sint incommensurabiles, facta alterna detractione, nunquam reliquam metiri præcedentem, & in commensurabilibus id evenire.

PROPOSITIO III.

Problema.

Magnitudinum commensurabilium maximam communem mensuram invenire.



Oporteat commensurabilium quantitatum AB, C D maximam communem mensuram reperire. Fiat alterna detractio, ut in præcedenti explicuimus, occurret tandem aliqua quæ præcedentem metietur; alioquin non essent commensurabiles magnitudines. Sit hæc GB, quæ metiatur FD, & cum FD ex constructione metiatur AG, & AG ipsum CF; G B metietur utramque A B, C D. Addo nullam majorem communem mensuram inveniri posse. Si enim detur, sit E.

Demonstr. E, dicitur metiri ipsas A B, C D; A B autem metitur C F; ergo & E metietur C F: sed E metitur & totam CD; ergo & reliquam FD, sed FD mettitur AG, ergo E metitur A G, & cum totam A B metiatur, metietur & reliquam GB; major minorem: quod est absurdum.

Coroll. Quæ metitur duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Trium commensurabilium maximam communem mensuram reperire.

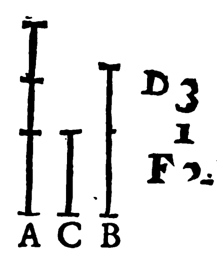
Inveniatur duarum maxima mensura, quæ si metiatur & tertiam: hæc erit quæsita trium communis maxima mensura. Si verò non metiatur tertiam erunt saltem commensurabiles: nam quæcumque mensura communis metietur tres magnitudines, metietur & duas primas: ergo *per Coroll.* communem earum mensuram. Ergo hæc mensura, & tertia sunt commensurabiles. Quæratur ergo earum maxima communis mensura; dico hanc esse trium magnitudinum maximam communem mensuram. Sit enim alia major, hæc metietur communem mensuram duarum primarum; & cum metiatur & tertiam, metitur & communem primæ mensuræ, & tertiæ magnitudinis communem mensuram (*per Coroll. præcedens;*) major minorem, quod est absurdum.

Coroll. Magnitudo, metiens tres, metitur & maximam earum mensuram.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Commensurabiles magnitudines eandem rationem habent quam numerus ad numerum.



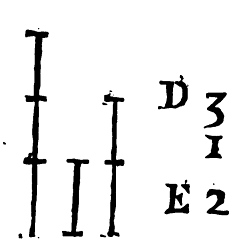
Sint magnitudines A & B commensurabiles, dico ita esse A & B ut numerus ad numerum. Sit enim C maxima communis earum mensura; & quoties C invenitur in A, toties unitas inveniatur in numero D; item quoties C invenitur in B toties unitas inveniatur in numero E.

Demonstr. Eadem est ratio A ad C ac numeri D ad unitatem, cum sint æquemultiplices. Pariter eadem est ratio C ad B quæ unitatis ad numerum E, cum sint similes partes aliquotæ: ergo ex æquo ita est A ad B ut D ad E, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Magnitudines quæ se habent ut numerus ad numerum, sunt commensurabiles.



Sit A ad B ut numerus D ad numerum E, dico magnitudines A & B esse commensurabiles. Sit A divisa in tot partes quot sunt unitates in numero D, sitque C uni earum partium æqualis.

Demonstr. Cùm C toties continéatur in A, ac unitas in D, eadem erit ratio C ad A ac unitatis ad D, sed ut A ad B ita D ad E; ergo

E; ergo ex æquo ita erit unitas ad E ut C ad B. Unitas autem est pars aliquota numeri E: ergo & C quantitatis B. Ergo C est communis utriusque mensura.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Incommensurabiles quantitates non sunt ut numerus ad numerum.

Quia per præcedentem essent commensurabiles; contra suppositionem.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

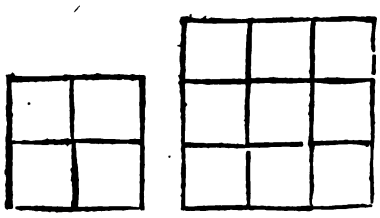
Duæ magnitudines rationem non habentes eandem quam numerus ad numerum, sunt incommensurabiles.

Si enim essent commensurabiles, se haberent (*per 5.*) ut numerus ad numerum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Quadrata linearum commensurabilium se habent ut numerus quadratus ad quadratum numerum. Et quadrata se habentia ut quadratus numerus ad quadratum, habent latera commensurabilia. Linearum incommensurabilium quadrata non se habent ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata non se habentia ut numerus quadratus ad quadratum, habent latera incommensurabilia.



A B C D
E 2 F 3
G 4 H 9

Sint lineæ AB, CD longitudine commensurabiles, dico se habere quadratum ex AB ad quadratum ex CD ut quadratus aliquis numerus ad quadratum numerum. Cùm enim AB CD sint commensurabiles, se habebunt ut numerus ad numerum. Se habeant ut numerus E ad numerum F, quorum quadrati sint G & H, dico quadratum ex AB ad quadratum ex CD, se habere ut numerus quadratus G ad numerum H.

Demonstr. Quadratum ex AB ad quadratum ex CD est in duplicata ratione AB ad CD, seu E ad F (*per 20.6.*) sed pariter G ad H est in duplicata ratione E ad F: ergo ita est quadr. ex AB ad quadratum ex CD ut G ad H; quod erat primum.

Secundum probatur; nempe si sit quadratum ex AB ad quadratum ex CD ut quadratus numerus G ad quadratum numerum H, lineas AB, CD esse commensurabiles.

Demonstr. Tam AB ad CD est in subduplicatâ ratione quadrati AB ad CD, quàm numerus E ad numerum F est in subduplicata ratione G ad H; ergo ita est AB ad CD ut E ad F; ergo *per 6.* sunt AB, CD, commensurabiles.

Tertium probatur nempe si AB, CD sint incommensurabiles, earum quadrata non se habere ut quadratus numerus ad quadratum. Si alioquin lineæ se haberent ut radices numerorum quadratorum, ergo & ut numerus ad numerum.

Quartum probatur; nempe si quadrata non se habeant ut quadratus numerus ad quadratum numerum, habere latera incommensurabilia. Si enim commensurabilia essent, eorum quadrata se haberent ut quadratus numerus ad quadratum; contra suppositionem.

Coroll. Lineæ longitudine commensurabiles, sunt & potentia, hoc est cum quadrata earum se habeant ut numerus quadratus ad quadratum, se habent absolutè ut numerus ad numerum.

Possunt tamen dari quadrata quæ se habeant ut numerus ad numerum, & non ut numerus quadratus ad quadratum. Possunt ergo dari lineæ incommensurabiles longitudine, quæ tamen sint potentia commensurabiles. Denique si lineæ sint incommensurabiles potentia, erunt & longitudine, quia si essent longitudine, essent & potentia, contra suppositionem.

PROPOSITIO X.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & prima secunda fuerit commensurabilis aut incommensurabilis; tertia quarta commensurabilis erit.

E F
4 2
A B C D

Sint 4 magnitudines proportionales, & prima A secundæ B sit commensurabilis, se habebit ut numerus v. g. E ad F; sed ita est C ad D ut A ad B, ergo C ad D erit ut E ad F: ergo per 6 sunt C & D commensurabiles.

Si A & B sint incommensurabiles, C & D etiam incommensurabiles erunt, alioquin A & B commensurabiles essent.

LEMMA.

Invenire duos numeros planos non similes & qui rationem non habeant quam quadratus ad quadratum.

A B	C D
4. 2.	6. 4
6	24
F	E

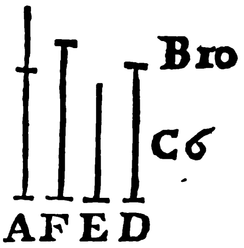
Numeros planos similes voco, qui producuntur ex multiplicatione numerorum non proportionalium, ut si A ad B non sit, ut C ad D & F & E producantur ex multiplicatione A per B, & C per D, numeri F & E sunt numeri plani non similes, seu quasi rectangula non similia. Clarum est autem numeros quadratos esse numeros planos similes.

PROPO

PROPOSITIO XI.

Problema.

Proposita linea invenire incommensurabilem longitudine tantum, item aliam omnino incommensurabilem.



Sit linea A cui incommensurabilis longitudine tantùm quæritur. Proponantur duo numeri B & C, qui non sint plani similes, fiatque ut A B ad C ita A ad D; nempe dividatur A in 10 partes æquales, & fiat D 6 partium; eritque A ad D ut numerus B ad C. Quæratur inter A & D media proportionalis E, eritque quadratum ex A ad quadratum ex E ut A ad D seu ut numerus B ad C. Sed B ad C non se habet ut numerus quadratus ad quadratum: ergo (*per 6.*) A & E sunt incommensurabiles. Quadrata tamen earum se habent ut numerus ad numerum: ergo sunt commensurabilia: ergo lineæ sunt potentiâ commensurabiles.

Sit jam invenienda incommensurabilis omnino eidem A. Inter A & E quæratur alia media proportionalis, eritque quadratum A ad quadratum F ut A ad E, sed A ad E non se habet ut numerus ad numerum cùm sint incommensurabiles: ergo quadratum A ad quadratum B non se habet ut numerus ad numerum: ergo incommensurabilia sunt quadrata. ergo lineæ omni ratione incommensurabiles.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles inter se commensurabiles sunt.

A B C   E 10, F 2 K 3 $\frac{1}{3}$, G 3, H 5

Magnitudines A & B eidem C sint commensurabiles, dico A & B inter se commensurabiles esse. Sit enim ut A ad C ita numerus E ad F, & ut B ad C; ita G ad H. Fiat item ut 5 ad 3 ita 2 ad 3 $\frac{1}{3}$. Erit ex æquo ut E ad K ita A ad B: ergo (*per 6.*) A & B erunt commensurabiles.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si duarum magnitudinum una tertiæ sit commensurabilis & altera eidem incommensurabilis, incommensurabiles erunt.

Sit A ipsi C commensurabilis, & B eidem C incommensurabilis, dico A & B esse incommensurabiles. Si enim A & B commensurabiles essent, cum C supponatur esse commensurabilis ipsi A, essent B & C commensurabiles, contra suppositionem.

PROPOSITIO XIV.

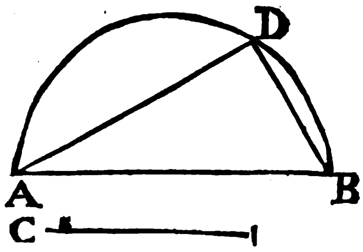
Theorema.

Si Duarum magnitudinum commensurabilium una sit tertiæ incommensurabilis, & reliqua eidem erit incommensurabilis.

Si enim secunda tertiæ esset commensurabilis, & prima eidem foret commensurabilis, contra suppositionem.

LEMMA.

Duabus datis lineis, invenire excessum quadrati majoris lineæ supra quadratum minoris.

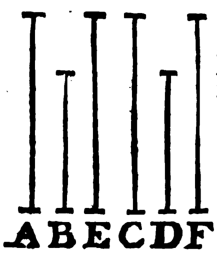


Sint lineæ A B major, C minor. Circa A B describatur semicirculus, in quo aptetur AD æqualis C; dico quadratum BD esse excessum quadrati AB, supra quadratum C. (*per* 47. 1.)

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si 4 lineæ proportionales fuerint, & prima quadratum superet secundæ quadratum, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, idem accidet tertiæ respectu quartæ; Si prima quadratum superet secundæ quadratum quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, idem accidet tertiæ respectu quartæ.



Sint lineæ A, B, C, D proportionales & quadratum A superet quadratum B, quadrato E hoc est; sint quadrata B, E quadrato A æqualia, sicut quadrata D & F quadrato C; dico si A & E sint commensurabiles, C & F erunt commensurabiles.

Demonstr. Cùm sit ut A ad B ita C ad D, erit etiam ut quadratum A ad quadratum B ita quadratum C ad quadratum D; seu ut quadrata BE ad E ita quadrata DF ad D; & dividendo ut quadratum B ad quadratum E ita quadratum D ad F, & ut B ad E ita D ad F; quare ita erit ex æquo A ad E sicut C ad F. Ideoque (*per præcedentem*) si A est commensurabilis aut incommensurabilis ipsi E; C item similiter erit respectu ipsius F.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Composita ex duabus commensurabilibus utrique commensurabilis est. Si composita uni partium commensurabilis fuerit, partes inter se commensurabiles erunt.

Demonstr. Utriusque partis facilis est & coincidit

cidit cum eo principio, Magnitudo quotcumque magnitudines metiens, metitur & ex iis compositam. Si enim partes sint commensurabiles habent communem mensuram, quæ cùm metiatur utramque, compositam ex iis metietur.

Secunda pars coincidit cum eo principio, Si magnitudo totam metiatur, & ablatam metietur, & reliquum.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, ex iis composita utrique erit incommensurabilis. Si composita magnitudo uni componentium fuerit incommensurabilis, erit & alteri incommensurabilis.

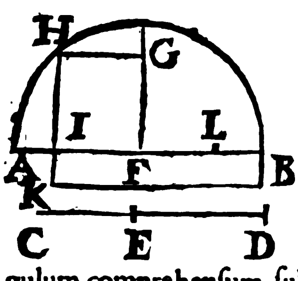
Prima pars facilè probatur. Si enim esset alterutri commensurabilis partes commensurabiles essent (*per præcedentem*) & per eandem utrique esset commensurabilis.

Secunda non minus facilis est; si enim alteri esset commensurabilis, esset & primæ. Omniaque forent commensurabilia.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si rectangulum comprehensum sub segmentis unius lineæ majoris, æquale fuerit quartæ parti quadrati minoris lineæ, & segmenta fuerint commensurabilia, recta linea potens excessum quadrati majoris supra quadratum minoris, erit commensurabilis majori. Vicissim si linea potens talem excessum fuerit majori commensurabilis, segmenta majoris erunt commensurabilia.



Primò proponantur duæ lineæ A B major, CD minor quæ dividatur bifariam in puncto E; eritque quadratum ex C E, quarta pars quadrati ex C D. Ita dividatur A B ut rectangulum comprehensum sub ejus segmentis æquale sit quadrato ex C E, quod facillimum est. Dividatur A B bifariam in F, descriptoque semicirculo excitetur perpendicularis F G, æqualis lineæ C E; ducatur G H parallela F I, & H I perpendicularis ad A B; sitque I K æqualis A I, eritque rectangulum B K (*per* 17. 6.) æquale quadrato H I, seu F G, hoc est C E.

Quâ facta suppositione; dico si segmenta B I, I A fuerint commensurabilia, linea quæ poterit excessum quadrati AB, supra quadratum CD, erit commensurabilis lineæ AB. Abscindatur FL æqualis F I, eruntque AI, L B æquales. Dico I L posse excessum quadrati AB supra quadratum C D, & esse commensurabilem lineæ A B.

Demonstr. Supponuntur B I, I A esse commensurabiles: ergo (*per* 16.) A B illis erit commensurabilis. Sunt item A I, L B, commensurabiles inter se; ergo & aliis segmentis, & composita ex A I, L B: cum ergo tota A B sit commensurabilis compositæ ex A I, L B, commensurabilis erit & reliquæ I L (*per* 16.) cum autem linea AB, sit divisa bifariam in F, & non bifariam erit (*per* 5. 2.) rectangulum B I A seu B K, cum quadrato I F, æquale quadrato A F; ergo quadratum I F est excessus quadrati AF supra rectangulum B K, seu quadratum C E; sed quadrata A B, C D, I L sunt quadrupla quadratorum AF, CE, IF; ergo quadratum I L est excessus quadrati AB supra quadratum CD.

Secundò iisdem positis si I L sit commensurabilis lineæ A B, (*per* 16.) erit reliqua seu composita ex A I, L B iisdem commensurabilis; est autem A I dimidia compositæ ex A I, L B, eidem commensurabilis; ergo A I toti A B est commensurabilis: ergo & (*per* 16.) A I, I B erunt commensurabiles.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

In eadem suppositione si majoris segmenta fuerint incommensurabilia, linea potens excessum quadrati majoris supra quadratum minoris erit incommensurabilis majori. Vicissim si linea potens excessum fuerit incommensurabilis majori, segmenta erunt incommensurabilia.

Fit eadem constructio & supponuntur segmenta A I, I B esse incommensurabilia: ergo & tota A B utrique segmento est incommensurabilis (*per* 17.) & cum composita ex A I, B L sit commensurabilis segmento A I, utpote dupla A B illi erit incommensurabilis: ergo & reliquæ I L erit incommensurabilis.

Secunda pars similiter demonstratur.

DEFINITIO I.

Rationales lineæ sunt quæ expositæ rationali vel longitudine, vel potentia tantum sunt commensurabiles.

Rationales autem dicuntur in ordine ad aliquam lineam primo expositam, quæ se habeat tanquam regula: possunt tamen duæ aliæ rationales comparari inter se tripliciter. Primo possunt duæ lineæ commensurabiles longitudine, ita se habere ut una sit expositæ rationali æqualis, & consequenter utraque primæ rationali erit commensurabilis.

Secundo potest neutra esse æqualis primæ rationali æqualis, sed tamen utraque eidem commensurabilis, & consequenter inter se.

Tertio possunt duæ rationales esse tantum potentia commensurabiles expositâ rationali, inter se autem commensurabiles longitudine vel potentia.

DEFINITIO II.

Spatium quod à prima rationali describitur est primum rationale, ita ut spatia illi commensurabilia dicantur rationalia. Si ergo sit spatium cuicumque alteri spatio rationali commensurabile, & ipsum rationale erit, hoc est primo rationali commensurabile.

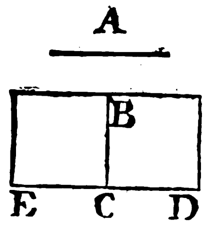
PROPO

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Rectangulum contentum sub lineis rationalibus inter se commensurabilibus longitudine rationale est.

Supponuntur duæ lineæ B C, C D commensurabiles longitudine inter se, quæ cum exposita rationali A ita se habeant, aut ut una illi sit æqualis, aut utraque illi commensurabilis longitudine, aut utraque potentia tantum illi commensurabilis; dico rectangulum BD sub talibus lineis comprehensum esse rationale, seu commensurabile quadrato primæ lineæ rationali seu A. Fiat quadratum lineæ B C sitque B E, sintque propterea BC, CE æquales.

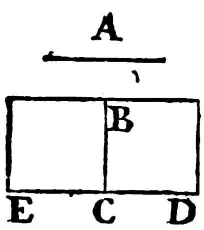


Demonstr. Quadratum B E commensurabile est quadrato A, cùm linea B C sit rationalis, hoc est expositæ rationali saltem potentia commensurabilis. Sed (*per* 1.6.) quadratum B E ad rectangulum B D se habet ut E C, seu BC ad C D, quæ sunt commensurabiles: ergo (*per* 10.) quadratum B E rectangulo B D erit commensurabile. Ergo & commensurabile quadrato A (*per* 12.) quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Si rationale ad rationale applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatur longitudine commensurabilem.



Supponitur rationalis A, item alia rationalis hoc est ei potentia saltem commensurabilis B C, cujus consequenter quadratum B E erit rationale. Sit spatium rationale, seu rectangulum BD, applicatum ad lineam B C, ita ut C D sit ejus latitudo seu ut ita dicam quotiens divisionis, qua BD divideretur per BC; dico igitur BC, CD esse commensurabiles, & CD esse lineam rationalem.

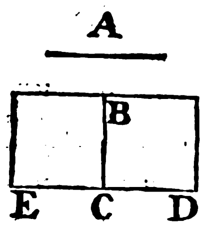
Demonstr. Ita est BC seu E C ad C D, sicut rectangulum B E ad rectangulum B D (*per* 1.6.) sed rectangula sunt commensurabilia: ergo & B C, C D sunt commensurabiles longitudine, & cum BC sit rationalis, hoc est saltem potentia commensurabilis cum A exposita rationali; erit item CD rationalis.

Coroll. Linea potens spatium irrationale est irrationalis. Si enim rationalis esset saltem potentia esset commensurabilis, hoc est ejus quadratum esset quadrato rationalis lineæ commensurabile, hoc est rationale esset.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

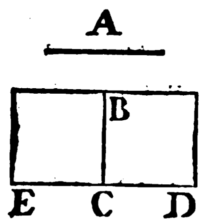
Rectangulum quod sub rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur, irrationale est, & recta ipsum potens irrationalis est, & vocatur media.



Supponitur A rationalis exposita, sitque rectangulum B D contentum sub rationalibus BC, CD, longitudine incommensurabilibus; dico rectangulum B D esse irrationale, & lineam quæ illud potest, esse irrationalem, & vocari mediam.

Demonstr. Quadratum B E lineæ rationalis BC, rationale est: huic autem est incommensurabile rectangulum BD, sub rationalibus potentiâ tantum commensurabilibus contentum. Si enim esset commensurabile, essent lineæ commensurabiles longitudine (*per præcedentem.*) Cùm ergo rectangulum B D sit incommensurabile quadrato B E, quod supponitur quadrato A commensurabile, rectangulum B D eidem quadrato A incommensurabile, ergo erit irrationale.

Linea quæ ipsum potest irrationalis erit & vocabitur media, eo quod sit media proportionalis inter duas potentia tantum commensurabiles. Medium est rectangulum sub duabus lineis potentia tantum commensurabilibus, vel quadratum illi æquale, aut aliud rectangulum huic æquale.



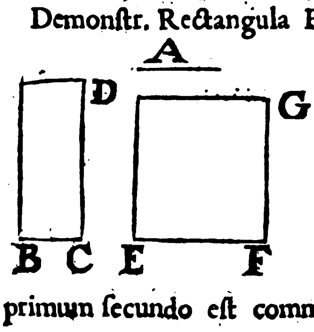
PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Medium ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem longitudine incommensurabilem ei cui applicatur.

Supponitur linea A media, cujus quadratum medium est; hoc est æquale rectangulo comprehenso sub rationalibus, seu potentiâ, sed non longitudine commensurabilibus. Detur quæcumque rationalis BC, cui applicetur rectangulum BD æquale quadrato ex A; dico CD esse quidem rationalem, sed BC, CD esse longitudine incommensurabiles. Cùm A sit media poterit rectangulum sub duabus rationalibus sed longitudine incommensurabilibus contentum. Sit illud EG.

Demonstr. Rectangula BD, EG sunt æqualia cum quadrata ex A sint æqualia: ergo ita est (*per* 13.6.) BC ad EF ut FG ad CD; & ita est quadratum BC ad quadratum EF ut quadratum FG ad quadratum C D. Sed primum secundo est commensurabile cum lineæ



ſunt rationales, ergo quadrata FG, CD ſunt commenſurabilia, & linea CD rationalis : quod erat primum.

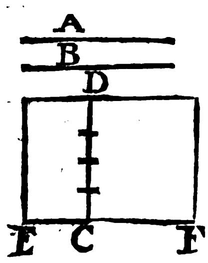
Secundo EF ad FG ſe habet ut quadratum EF ad rectangulum EG. Sunt autem EF & FG incommenſurabiles longitudine : ergo quadratum EF incommenſurabile eſt rectangulo EG, ſeu BD: ſed quadratum EF commenſurabile eſt quadrato BC cum EF, BC ſint rationales, ergo quadratum BC & rectangulum BD ſunt incommenſurabilia : ſed ut quadratum BD ad rectangulum CD ita BC ad CD (*per* 1.6.) ergo BC, CD ſunt incommenſurabiles.

Coroll. Si igitur ponantur duæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, rectangulum ſub iis contentum medium eſt ; quod ſi dividatur per quamcumque lineam potentia tantum commenſurabilem, facit quotientem potentiâ tantum commenſurabilem.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Media commenſurabilis media eſt.



Proponatur media A, cui linea B ſit commenſurabilis ſive longitudine, ſive potentia tantum, dico lineam B mediam eſſe. Sit CD rationalis ad quam applicetur rectangulum DE æquale quadrato A, & rectangulum DC æquale quadrato B.

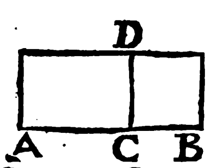
Demonſtratio. (*Per præcedentem*) erit EC rationalis longitudine cum CD incommenſurabilis, & cum A & B ſint commenſurabiles, eorum quadrata erunt commenſurabilia, & conſequenter rectangula ipſis æqualia ; ut autem ED ad DF ita EC ad CF, ergo EC, CF, ſunt commenſurabiles, quare (*per* 13.) lineæ CF, CD ſunt rationales, ſed longitudine incommenſurabiles ; quare rectangulum DF medium eſt, & conſequenter quadratum B ipſis æquale, & linea B media eſt;quod erat demonſtrandum.

Coroll. Sequitur ſpatium medio commenſurabile medium eſſe.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Spatium ſub mediis longitudine commenſurabilibus contentum medium eſt.



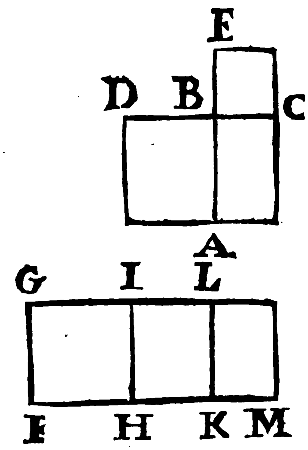
Sint mediæ AC, CD commenſurabiles;dico ſpatium AD medium eſſe. Super CD deſcribatur quadratum BD.

Demonſtr. Ita eſt AD ad BD ut AC ad CB (*per* 1.6.) quæ ſupponuntur commenſurabiles, ergo AD eſt commenſurabile quadrato BD, ſeu medio : ergo (*per* 24.) medium eſt.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Quod ſub mediis potentiâ tantum inter ſe commenſurabilibus continetur, vel rationale eſt, vel medium.

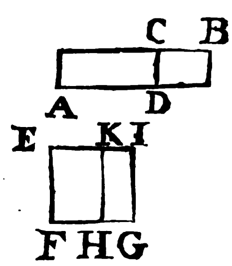


Sit rectangulum AC contentum ſub mediis AB, BC ; dico illud vel rationale eſſe, vel medium.Fiant quadrata AD, CE linearum AB, BC, quæ media erunt (*per* 21.) Sit rationalis GF ad quam applicentur primò quadratum AD, rectangulum AC, & quadratum CE;ſintque illis ordine æqualia rectangula GI, HL, KM, quare FI, ML erunt media applicata ad rationalem FG, & (*per* 23.) FH, KM erunt rationales, ſed rationali FG longitudine incommenſurabiles : inter ſe verò commenſurabiles erunt quia cum quadrata AD, CE ſint media,ſunt inter ſe commenſurabilia (*per* 24.)Ut autem quadratum AD ad CE, ita rectangulum FI ad ML, & (*per* 1.6.) ita FH ad KM & (*per* 20.) rectangulum ſub FH, KM rationale erit. Rurſus quadratum AD, rectang. AC, quadratum CE ſunt continuè proportionalia, & ipſis æqualia rectangula FH, HK, KM, & (*per* 1.6.) lineæ FH, HK, KM quare rectangulum ſub extremis FH, KM quod oſtendimus rationale eſſe, erit æquale quadrato mediæ HK quod conſequenter rationale erit, & linea HK rationalis ſaltem potentia commenſurabilis ipſi FG ſeu HI, & ſiquidem HK fuerit etiam longitudine commenſurabilis ipſi HI, erit rectangulum HL ſeu AC illi æquale rationale. Si verò potentiâ tantum fuerit commenſurabile,erit medium ; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Medium non ſuperat medium rationali.



Medium AB, ſuperet medium AC, rectangulo DB : dico DB non eſſe rationale. Exponatur rationalis FH ad quam applicetur AB,hoc eſt EG ſit æquale rectangulo AB, & EH ipſi AC : conſequenter reliquum KG, reliquo DB æquale erit.

Demonſtr. Rectangula EG, EH mediis æqualia media ſunt, & (*per* 23.) erunt lineæ FG, FH, rationales quidem potentia ; ſed rationali FE incommenſurabiles longitudine. Si vero dicatur DB eſſe rationale, & conſequenter HI, linea HG erit lineæ EF commenſurabilis longitudine. Sunt ergo FH, HG incommenſurabiles ; ſed ut FH ad HG, ita quadratum FH ad rectangulum ſub FH, HG;

HG; sunt ergo hæc duo incommensurabilia: quadrata autem FH, HG linearum rationalium sunt commensurabilia. Quadratum ergo HG, & rectang. sub FH, HG sunt incommensurabilia. Item duo quadrata FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo bis sub FH, HG; quare (*per* 10.) compositum ex his omnibus seu quadratum ex FG, erit incommensurabile quadratis FH, HG. Sed hæc duo quadrata sunt rationalia: ergo quadratum FG irrationale erit, & linea FG irrationalis cum tamen jam ostensa sit rationalis igitur medium non superat medium rationali.

COROLL. Rationale superat rationale rationali. Quia scilicet cum totum Rationale sit commensurabile rationali, utpote eidem quadrato expositæ rationalis commensurabile; erit reliquum & toti & alteri parti commensurabile.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Medias invenire potentiâ tantum commensurabiles, quæ rationale comprehendant.

A ——————
C ——————
B ————
D ————

Inveniantur primò duæ rationales A, & B potentiâ tantum commensurabiles (*per* 11.) inter quas sit media proportionalis C, fiatque ut A ad C ita B ad D; dico C & D esse duas medias potentia tantum commensurabiles, quæ rationale comprehendant.

Demonstr. A & B sunt potentia tantum commensurabiles, rectangulum sub ipsis contentum medium est (*per* 22.) & quadratum C ipsi æquale medium est & linea C media. Item ita est A ad B ut C ad D, & A & B sunt commensurabiles potentia; ergo C & D potentiâ commensurabiles erunt, & (*per* 24.) D media erit ipsi C potentia tantum commensurabilis. Item cum C sit media, ita erit A ad C ut C ad B, & B ad D: ergo rectangulum sub C & D, æquale est quadrato ex B quod rationale est, cum B rationali supponatur: ergo rectangulum sub C & D rationale est: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Medias invenire, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium contineant.

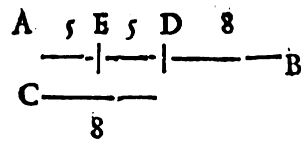
A ——————
D ——————
B ——————
C ————
E ————

Primò quærantur tres lineæ A, B, C potentiâ tantum commensurabiles, quod fiet si quærantur tres numeri primi, & quadrata linearum eam habeant rationem, ac hi numeri primi: nam in Arithmeticis ostenditur numeros quadratos non habere eamdem rationem ac numeri primi. Inter A & B sit media D, fiat item ut B ad C, ita D ad E; dico D & E, esse medias potentiâ tantum commensurabiles quæ medium contineant.

Demonstr. Cum A & B sint potentia tantum commensurabiles: medium continebunt (*per* 22.) & D ipsum potens media erit. Item quia ita est B ad C ut D ad E, & B & C sunt potentiâ tantum commensurabiles, erunt D & E potentiâ tantum commensurabiles; ergo (*per* 24.) E erit media. Item ita est B ad C ut D ad E, & alternando ut B ad D, seu A ad D, ita C ad E; & ut A ad C ita D ad E; sed A & C continent medium cum sint potentia tantum commensurabiles: ergo D & E medium tantum continebunt.

LEMMA.

Duos quadratos invenire, ita ut compositus ex ipsis sit quadratus.

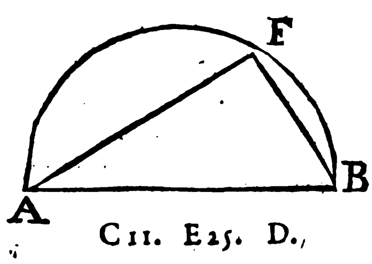


Primò inveniantur duo plani numeri similes, ita ut uterque sit par aut uterque impar; id autem fit si sumantur 4 numeri proportionales; productus ex primo in secundum similis est producto ex tertio in quartum. Sint igitur inventi duo numeri plani similes AB & C, ita ut uterque sit par vel impar, & minor de majori auferatur, restabit semper numerus par. Auferatur igitur ex AB, DB æqualis numero C, & reliquus AD bifariam dividatur in E; dico numerum productum ex AB in BD qui (*per* 1. 9.) quadratus est & quadratum ex ED satisfacere quæstioni: nam cum AD dividatur bifariam in E, eique addatur DB, erit rectangulum sub AD, DB, unà cum quadrato ED æquale quadrato EB (*ex* 14. 9.) Inventi etiam sunt duo numeri quadrati, quorum excessus quadratus est.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Invenire duas rationales potentiâ tantum commensurabiles, ita ut linea potens excessum quadratorum sit majori commensurabilis.



C 11. E 25. D.

Proponitur linea rationalis AB, inveniantur duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus ED quadratus non sit. Fiat item ut numerus CD ad numerum ED ita quadratum AB ad quadratum AF, & linea AF aptetur circulo, jungatúrque BF, ostendero AB, AF potentiâ tantum esse commensurabiles, & AB, BF esse etiam longitudine commensurabiles.

Demonstr. Quadratum AB ad quadratum AF est ut numerus CD ad numerum CE qui quadratus non est, quare AB, AF (*per* 9.) potentia tantum sunt commensurabiles. Erit autem quadratum AB ad BF, ut CD, ad ED qui sunt numeri quadrati: ergo AB, BF sunt etiam longitudine commensurabiles, sunt ergo inventæ duæ lineæ AB, AF potentia tantum commensurabiles, & linea BF potens excessum quadratorum majori AB etiam longitudine est commensurabilis.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Invenire duas rationales potentiâ tantum commensurabiles, & linea potens excessum quadratorum sit majori incommensurabilis.

A 9 B 4
C 9 E 4 D

Ad hoc requiruntur duo quadrati AB, BC qui simul juncti non quadratum AC efficiant; fiatque ut AC ad AB ita quadratum AB ad quadratum AF, & consequenter erit quadratum AB ad quadratum FB ut CD ad ED, hoc est utrinque ut numerus non quadratus ad quadratum: ergo utraque linea est lineæ AB commensurabilis tantum potentia.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Invenire duas medias potentia tantum commensurabiles quæ rationale contineant, & linea potens excessum quadratorum sit majori longitudine commensurabilis.

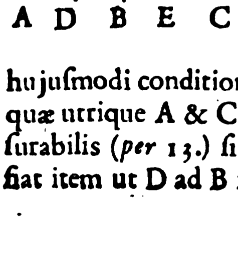
Sint (*per* 30.) inventæ duæ rationales A & B, potentia tantum commensurabiles, ita ut linea potens excessum quadratorum sit commensurabilis longitudine; majori A, tum inter A & B sit media C, fiatque ut A ad B ita C ad D; dico C & D satisfacere quæstioni.

Demonstr. Nam cum A & B, sint tantum commensurabiles potentia; erit (*per* 22.) C media, & cum ita sit C ad D ut A & B quæ sunt commensurabiles, D erit commensurabilis potentia ipsi C. Pariter cum A plus possit quàm C quadradrato lineæ sibi commensurabilis, C plus poterit quàm D, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit A ad C, ut C ad B, & sit etiam ut A ad C, ita B ad D, ita erit C ad B ut B ad D; quare rectangulum sub C & D æquale quadrato B rationalis lineæ rationale erit.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Invenire duas medias potentiâ tantum commensurabiles quæ medium contineant, ita ut linea potens excessum quadratorum sit majori longitudine commensurabilis.



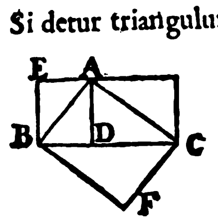
Quærantur primò tres rationales A, B, C potentiâ tantum commensurabiles, ita ut linea quæ potest excessum quadrati A supra quadratum C, sit ipsi A commensurabilis longitudine: hoc est inventis A & C quæ hujusmodi conditiones habeant, quæratur tertia B, quæ utrique A & C, sit potentia tantum commensurabilis (*per* 13.) sit item D media inter A & B, fiat item ut D ad B ita C ad E.

Demonstr. Ita est A ad C sicut rectang. AB ad rectangulum AC (*per* 1. 6.) cum eadem sit altitudo. Est autem rectang. AB æquale quadratum D, & rectangulo BC æquale rectangulum DE cum D, B, C, E sint proportionales; erit ergo ut A ad B ita quadratum D ad rectangulum DE, seu D ad E, (*per* 1. 6.) cum eadem sit altitudo. Sunt autem A & B potentia tantum commensurabiles: ergo etiam D & F, quare cum D sit irrationalis & media, erit similiter E media, quare invenimus duas medias D & E potentia tantum commensurabiles. Item rectangulum sub BC medium est, eo quod B & C sint tantum commensurabiles potentia; ergo rectangulum DE medium. Denique quia ita est A ad C sicut D ad E, & A plus potest quàm C quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, D pariter plus poterit quam E quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Pariter si A plus potuisset quàm C quadrato lineæ sibi commensurabilis, servatis aliis omnibus, D plus poterit quam E quadrato lineæ sibi incommensurabilis.

LEMMA.

Si detur triangulum rectangulum BAC, & demittatur perpendicularis AD, primo erit rectang. CB, BD æquale quadrato AB; Sunt enim triangula ABC, ABD æquiangula: ergo ita est CB ad AB ut AB ad BD.



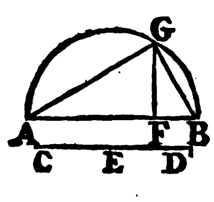
Eodem modò sequitur rectangulum sub BC, CD æquale esse quadrato AC.

Item rectang. BDC æquale quadrato AD, cum AD sit media proportionalis; denique rectangulum sub BC, AD æquale rectangulo sub AB, AC, quia utrumque duplum est trianguli ABC.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Invenire duas rectas potentia incommensurabiles, ita ut aggregatum quadratorum sit rationale, & rectangulum sub ipsis contentum sit medium.



Primò per 31 quærantur duæ rationales AB, CD potentia solùm commensurabiles, & major plus possit, quàm minor quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur CD bifariam in E, tum ita secetur AB (*per* 17.) ut rectangulum sub AF, FB æquale sit quadrato CE, describatur circa AB semicirculus, erigaturque perpendicularis FG, junganturque AG, BG.

Demonstr. Erit (*per* 19.) AF incommensurabilis longitudine ipsi BF. Est autem ut AF ad FB, ita rectang. sub AF, AB ad rectang. sub FB, AB (*per* 1. 6.) cum eadem sit altitudo; sed rectangulum sub AB, AF æquale est quadrato ex AG, & rectangulo sub AB, FB æquale est quadratum GB: quare quadrata AG, GB sunt incommensurabilia, & lineæ AG, GB potentia incommensurabiles. Erit tamen aggregatum quadratorum AG GB rationale,

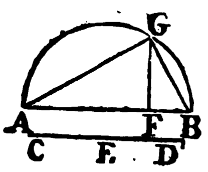
tionale, cum sit æquale (*per* 47. 1.) quadrato lineæ A B rationalis.

Rursus cum rectangulum AFB sit æquale quadrato C E, & quadrato FG, illæ erunt æquales,& F G dimidia lineæ C D : quare rectangulum sub A F, FG, erit dimidia pars rectanguli sub A B C D; quare sicut hoc ultimum medium est, utpote contetum sub rationalibus potentia tantum commensurabilibus, ergo & rectangulum sub A B F G, aut illi æquale (*per lemma præcedens*) rectangulum sub AG, GB, medium erit: invenimus ergo lineas AG,GB potentia incommensurabiles, quarum aggregatum quadratorum rationale est, & rectang. sub ipsis est medium.

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Invenire duas rectas potentia incommensurabiles, ita ut aggregatum quadratorum sit medium rectangulum sub ipsis comprehensum rationale.



Quærantur (*per* 32.) duæ mediæ AB,CD potentia tantum commensurabiles, quæ rationale contineant, & major plus possit quàm minor quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Fiantque cætera ut in præcedenti, ostendemusque similiter lineas AG GB esse potentia incommensurabiles.

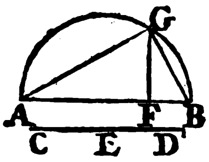
2. Cum quadratum mediæ AB sit medium & æquale aggregato quadratorum A G, G B, illud aggregatum medium erit.

3. Rectangulum sub AB, CD ostenditur ut in præcedenti duplum esse rectangul. sub A B, F G: quare cum primum supponatur rationale, secundum rationale erit, nempe rectangulum sub A B, FG, quod æquale est rectangulo sub A G, G B, quod proinde erit rationale: quare lineæ AG, GB satisfaciunt quæstioni.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles ita ut & aggregatum quadratorum sit medium, & rectangulum sub ipsis contentum sit medium, sed sint incommensurabilia.



Primo (*per* 33.) inveniantur duæ mediæ AB, C D potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium contineant, & major A B plus possit quàm minor quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: fiantque reliqua ut (*in prop*.34) ostendemus pariter lineas A G, G B potentia incommensurabiles esse; & quia quadratum ex media AB medium est aggregatum quadratorum A G, GB, illi (*per* 47. 1.) æquale medium erit.

2. Cum rectangulum sub A B, C D medium sit, rectangulum sub A B, F G ejus dimidium, & rectangulum sub A G, G B huic dimidio æquale, medium erit.

3. Cum AB, CD sint longitudine incommensurabiles, & C E erit ipsi A B incommensurabilis, ut autem AB aut CE, an FG, ita quadratum AB ad rectang. A B, FG, (*per* 1. 6.) seu rectangulum sub A G, GB: erit aggregatum quadratorum AG G B, incommensurabile rectangulo sub AG, GB.

Principium senariorum per compositionem.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

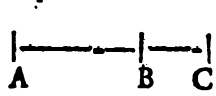
Si duæ rationales potentiâ tantum commensurabiles componantur, tota irrationalis erit. Vocetur ex binis nominibus.

Sint duæ lineæ A B, B C rationales, potentia solum commensurabiles, dico totam A C esse irrationalem: nam cum A B sit incommensurabilis longitudine ipsi B C, & ut A B ad B C ita quadratum A B ad rectangulum sub AB, B C cum eadem sit altitudo, quadratum A B erit incommensurabile rectangulo A B C, item rectang.ABC bis sumpto.Sunt item quadrata AB, BC commensurabilia ex suppositione: igitur quadrata AB, BC, rectangulo bis ABC sunt incommensurabilia; ergo compositum ex his omnibus nempe (*per* 4. 2.) quadratum ex A C quadratis AB, BC quæ sunt rationalia est incommensurabile (*per* 14.) ergo quadratum AB est irrationale, & linea ipsum potens irrationalis.Vocetur autem ex binis nominibus seu binomium. Binomium igitur componitur ex dnabus potentiâ tantum commensurabilibus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Si duæ mediæ potentiâ tantum commensurabiles, quæ rationale contineant componantur; Tota irrationalis erit, & vocetur ex binis nominibus prima.



Supponuntur duæ mediæ inventæ (*per* 28) AB, BC potentiâ tantum commensurabiles quæ rationale contineant, dico totam AC irrationalem esse.

Demonstr. Ita est A B ad BC ut rectangulum sub AB, BC ad quadratum BC; sed AB, BC sunt longitudine incommensurabiles: ergo rectangulum ABC etiam bis sumptum incommensurabile est quadrato BC, immò & quadratis AB, BC inter se commensurabilibus; quare (*per* 14.) compositum ex his omnibus nempe (*per* 4.2.) quadratum ex AC incommensurabile est rectangulo ABC quod rationale supponitur, ergo quadratum ex AC irrationale est, & linea AC irrationalis. Dicatur ex binis mediis prima; seu bimediale primum.

PROPO

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Si duæ mediæ potentiâ tantum commenſurabiles componantur quæ medium contineant; tota irrationalis erit, dicatur autem ex binis mediis ſecunda. ſeu bimediale ſecundum.

A B C

Supponuntur (*per* 29) inventæ AB, BC potentia tantum commenſurabiles, quæ medium contineant dico totam A C irrationalem eſſe.

Demonſtr. Eſt ut AB ad BC quæ ſunt incommenſurabiles longitudine; ita quadratum AB ad rectangulum ABC; quare quadratum AB rectangulo ABC etiam bis eſt incommenſurabile,& cum AB, BC ſint potentia commenſurabiles, quadrata AB, BC talia erunt. Ergo quadrata AB,BC ſimul, incommenſurabilia ſunt rectangulo bis ABC: ergo quadratum ex AC illis omnibus æquale, erit (*per* 14.) incommenſurabile quadratis AB, BC, quare erit irrationale, & linea AC irrationalis, quæ dicatur bimediale ſecundum.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis rationale & rectangulum ſub ipſis medium, tota irrationalis erit,dicetur quê major.

A B C

Supponuntur duæ rectæ AB, BC, inventæ (*per* 34.) ita ut rectangulum ABC ſit medium & conſequenter bis ſumptum, medium erit; ſed aggregatum quadratorum AB, BC ſupponitur rationale, quare (*per* 17.) rectangulum ABC bis medium, incommenſurabile eſt quadratis AB,BC: ergo (*per* 14.) quadratum AC iis omnibus æquale (*per* 4.2.) erit irrationale, & linea AC irrationalis.

Vocatur autem major, quia cum quadrata AB, BC, majora ſint rectangulo ABC bis ut facile probari poſſet, & quadrata AB,BC ſint rationalia, à majori parte ſumitur denominatio. Quare huic nomen erit major.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si duæ rectæ potentiâ incommenſurabiles componantur; quarum aggregatum quadratorum ſit medium, & rectangulum ſub ipſis rationale; tota irrationalis erit, & vocabitur rationale & medium potens.

Supponuntur duæ rectæ inventæ (*per* 35.) potentiâ incommenſurabiles ita ut aggregatum quadratorum ſit medium, & rectangulum ſub ipſis rationale, ſunt ergo incommenſurabilia, & quadratum AC erit irrationale, & linea irrationalis. Vocetur rationale & medium potens.

PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur, ſitque aggregatum quadratorum medium, ſicut & rectangulum ſub ipſis, ſed ſint incommenſurabilia. Tota irrationalis erit quæ dicitur bina media potens.

Supponuntur lineæ inventæ (*per* 36.) Clarum autem eſt ſi aggregatum quadratorum & rectangul. ſub lineis ſint in commenſurabilia, totum reſultans, ſeu quadratum totius irrationale eſſe, & lineam eſſe irrationalem. Dicatur autem bina media potens.

LEMMA A.

Si recta bis inæqualiter ſecetur, erunt quadrata partium magis inæqualium, ſimul majora quadratis partium minus inæqualium.

A E D C B

Linea AB dividatur inæqualiter in D & C. dico quadrata AC, CB ſimul majora eſſe quadratis AD,DB. Nam (*per* 5.2.) rectangulum ACB unà cum quadrato EC æquale eſt quadrato EB, cui æquale eſt rectangulum ADB, una cum quadrato ED. Et cum quadratum EC majus ſit quadrato ED, rectangulum ADB majus erit rectangulo ACB. Sed rectangulum ACB bis cum quadratis AC, CB æquantur quadrato AB (*per* 4. 2.) cui etiam æquantur rectangulum bis ſub AD, DB unà cum quadratis AD, DB.Quare ſublato minori ex una parte rectangulo bis ſub AC, CB, reſtat quadrata AC, CB majora eſſe quadratis ex AD,DB.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Binomium in uno tantum punctô dividitur in nomina.

A C D B

Sit A B binomium, diviſa in C in ſua nomina, ita ut AC, CB ſint rationales potentiâ tantum commenſurabiles: dico A B non poſſe in puncto D ita dividi ut AD, DB ſint rationales potentia tantum commenſurabiles. Primò conſtat neutram diviſionem dividere AB bifariam, quia ſingulæ partes eſſent etiam longitudine commenſurabiles, quare quadrata unius diviſionis inæqualia ſunt quadratis alterius; ſed aggregatum utrumque quadratorum utriuſque nempe diviſionis rationale eſt, rationale autem ſuperat rationale rationali (*per* 22.) ergo exceſſus unius aggregati quadratorum, ſupra aliud aggregatum rationale eſt, ſed idem exceſſus eſt reciprocè rectanguli bis ſub ſegmentis unius diviſionis, ſupra rectangulum bis ſub ſegmentis alterius, eo quod aggregatum quadratorum, & tale rectangulum bis in utraque diviſione adæquetur quadrato AB, rectangulum autem in utraque diviſione ſupponitur medium eſſe, ſed medium non ſuperat medium rationali

(*per* 27.)

(*per* 27.) ergo idem excessus esset rationalis & irrationalis, quod est absurdum.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema.

Ex binis mediis prima in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Sit AB ex binis mediis prima, divisa in sua nomina in puncto C dico in alio puncto D dividi non posse in sua nomina. Ostendimus enim (*in* 38.) rectangulum bis, sub segmentis esse rationale, & aggregatum quadratorum esse medium, & hoc in utraque divisione verum esse, quare cum excessus rectanguli bis sub segmentis unius divisionis, supra rectangulum bis sub segmentis alterius, debeat esse rationalis (*per* 27.) eo quod rationale superet rationale, rationali, & idem excessus sit unius aggregati quadratorum supra aliud aggregatum, & ista aggregata sint media, medium autem non superet medium rationali, idem excessus rationalis, & irrationalis esset.

PROPOSITIO XLV.

Theorema.

Ex binis mediis secunda, in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Ostendimus (*in* 39) quadratarum aggregatum esse incommensurabile rectangulo comprehenso sub partibus, quare idem excessus non potest esse aggregati quadratorum unius divisionis, supra aggregatum alterius, & esse rectanguli bis unius divisionis, supra rectangulum bis alterius, quia esset commensurabilis & non.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema.

Major in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Ostendimus (*in* 40) in majori, rectangulum bis sub segmentis medium esse, & aggregatum quadratorum esse rationale: ergo idem sequitur inconveniens, nempe idem excessus esset rationalis, & non rationalis.

PROPOSITIO XLVII.

Theorema.

Rationale ac medium potens in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Eadem est demonstratio petita ex eodem absurdo, nam in hâc aggregatum quadratorum est medium, & rectangulum bis sub segmentis rationale, atque adeo idem excessus esset rationalis, & irrationalis.

PROPOSITIO XLVIII.

Theorema.

Bina media potens, in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Ostendimus aggregatum quadratorum esse incommensurabile rectangulo bis sub segmentis, quare idem sequitur absurdum.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

Supponitur semper exposita rationalis, & quæ ex binis nominibus esse divisa in sua nomina, & majus nomen plus posse quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis.

DEFINITIO I.

Si majus nomen sit rationali commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus prima.

DEFINITIO II.

Si minus nomen fuerit rationali longitudine commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

DEFINITIO III.

Si Neutrum nomen sit rationali longitudine commensurabile, dicatur ex binis nominibus tertia.

Rursus si majus nomen plus possit quam minus quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

DEFINITIO IV.

Si majus nomen fuerit commensurabile longitudine, dicetur ex binis nominibus quarta.

DEFINITIO V.

Si minus nomen, vocetur quinta.

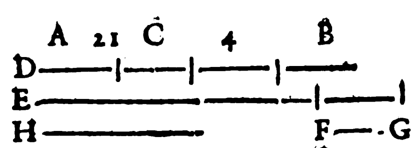
DEFINITIO VI.

Si neutrum, dicatur quinta.

PROPOSITIO XLIX.

Problema.

Invenire ex binis nominibus primam.



Primò inveniantur duo numeri quadrati AB, CB quorum excessus AC non sit quadratus. Sit rationalis linea D cui EF sit commensurabilis longitudine. Tum fiat ut numerus AB ad AC, ita quadratum E F ad quadratum FG; dico EG esse ex binis nominibus primam.

Demonstr. Ex primis nominibus prima ea est quâ divisâ in nomina majus nomen EF, plus potest quam minus FG quadrato lineæ, sibi commensurabilis. Sit autem A B numerus major quam AC, ergo EF erit majus nomen cujus quadratum ad quadratũ FG se habet ut AB ad ACB. Sit ergo excessus quadrati E F supra quadratum FG, quadratum lineæ H; quam ostendo esse com-

 mensura-

mensurabilem ipsi EF, cum enim ut AB ad AC, ita quadratum EF ad quadratum FG, ita etiam erit AB ad CB excessum quo AB superat AC; sicut EF ad excessum quo quadratum EF superat quadratum FG, seu ad quadratum H; sed AB, CB sunt numeri quadrati, ergo se habet quadratum EF ad quadratum H, ut numerus quadratus ad quadratum: ergo (*per* 9.) lineæ sunt commensurabiles longitudine. Est autem EF expositæ rationali commensurabilis longitudine; & rationalis, & minus nomen saltem potentia commensurabile: ergo adsunt omnes proprietates lineæ quæ vocatur binomium primum.

PROPOSITIO L.

Problema.

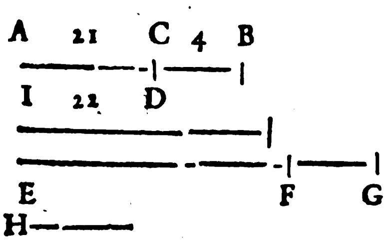
Invenire ex binis nominibus secundam.

Sint inventi duo numeri ut prius, sitque exposita rationalis D, cui FG sit commensurabilis longitudine, fiatque ut numerus AC ad AB, ita quadratum ex FG ad quadratum ex EF, eritque ut AB ad excessum CB, ita quadratum EF, ad excessum quadratorum; sit ille excessus quadratum ex H; sed AB, CB sunt quadrati numeri: ergo (*per* 9.) majus nomen EF plus potest quam minus quadrato lineæ H, sibi longitudine commensurabilis, quæ est prima conditio. Fecimus item FG esse commensurabilem longitudine lineæ rationali D, quare aderunt omnia quæ requiruntur ad hoc ut linea sit ex binis nominibus secunda; nempe ut minus nomen sit commensurabile longitudine lineæ rationali, & majus nomen plus possit quam minor, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis.

PROPOSITIO LI.

Problema.

Invenire ex binis nominibus tertiam.



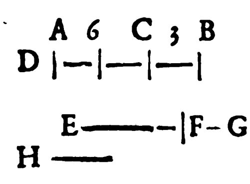
Ex binis nominibus tertia hoc habet, ut neutrum nomen sit expositæ rationali commensurabile longitudine, majus tamen nomen plus possit, quam minus quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Inveniantur duo numeri ut prius, sitque tertius numerus I qui neque ad AC neque ad AB, se habeat ut quadratus ad quadratum; nempe si sit unitate major quam AC, aut binario prout opus fuerit ut numerus I non sit quadratus. Exponatur rationalis D, fiatque ut numerus I ad AB, ita quadratum D ad quadratum EF, eruntque D & EF commensurabiles tantum potentia, & D rationalis. Fiat item ut AB ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum FG, eruntque EF, FG potentia tantum commensurabiles, & cum EF sit rationalis, FG quoque rationalis erit. Sunt ergo EF, FG rationales potentia tantum commensurabiles, & (*per* 37.) tota EG irrationalis est, & ex binis nominibus dico & tertiam esse.

Demonstr. Ita est I ad AB, ut quadratum D ad quadratum EF, ut AB ad AC ita quadratum EF ad quad. FG, ergo ex æquo ita erit I ad AC, ut quadrat. D ad quadr. FG. Et cum I ad AC non se habeat ut quadratus ad quadratum D & FG non erunt longitudine commensurabiles. Est ergo utrumq; nomen expositæ rationali incommensurabile longitudine. Denique cum sit ut AB ad AC ita quadratum EF ad quadratum FG, ita erit AB ad excessum AB supra AC, nempe ut AB ad CB, ut quadratum EF ad excessum quadrati EF, supra quadratum FG; nempe ad quadratum H, & cum AB, CB sint quadrati numeri EF plus poterit quàm FG quadratâ lineæ sibi commensurabilis longitudine: ergo EG est binomium tertium.

PROPOSITIO LII.

Problema.

Invenire binomium quartum.



Binomium quartum tale est, ut majus nomen plus possit quam minus quadratô lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & majus nomen sit expositæ rationali commensurabile longitudine: ad id præstandum inveniatur numerus AB quadratus, qui ita dividatur in partes AC, CB, ut neutra sit numerus quadratus. Exponatur rationalis D, cui EF sit longitudine commensurabilis quare & ipsa rationalis erit. Fiant eadem quæ in 49. & ostendam pariter totam EG ex binis nominibus esse, addo se esse quartam.

Demonstr. Quia est ut AB ad AC, ita est quadratum ex EF ad quadratum ex FG, ita erit AB ad BC, ut quadratum ex EF ad quadratum H; sed AB ad BC ex constructione non est ut quadratus ad quadratum: ergo (*per* 37.) H ipsi EF est incommensurabilis, & majus nomen EF plus potest quam minus FG quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: quare EG est binomium quartum.

PROPOSITIO LIII.

Problema.

Invenire binomium quintum.

Binomium quintum tale est ut majus nomen plus possit quàm minus, quadrato lineæ sibi incommensurabilis. Repetitis iisdem numeris, assumatur FG commensurabilis expositæ rationali D, fiatque ut AC ad numerum AB ita quadratum FG ad quadratum EF: ostendemus ut in 50 lineam EG esse binomium, addo esse quintum.

Demonstr. Erit enim ut AB ad CB, ita quadratum ex EF ad excessum, scilicet ad quadratum H, & cum AB CB non sint numeri quadrati, linea EF plus poterit quam FG, quadratô lineæ sibi incommensurabilis, & minus nomen FG est expositæ rationali commensurabile: ergo EG est binomium quintum.

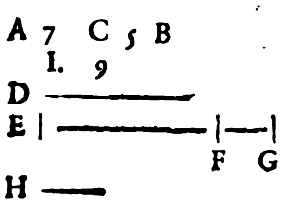
PROPOSITIO LIV.

Problema.

Invenire binomium sextum.

Binomium sextum tale est ut majus nomen plus possit quàm minus, quadratô lineæ sibi incommensurabilis, & neutrum nomen sit commensurabile lineæ rationali expositæ.

Sint numeri AC, CB plani dissimiles, quorum

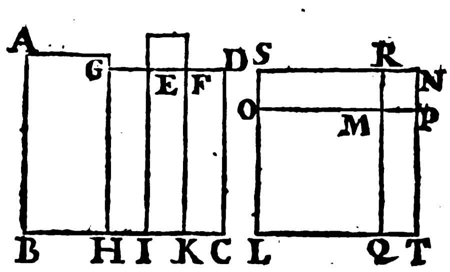


neuter sit quadratus, pariter A B quadratus non sit, nec habeat ad utrumlibet rationem, quam quadratus ad quadratum. Sit I quilibet numerus quadratus. Sit rationalis D, fiatque ut I ad A B, ita quadratum ex D ad quadratum ex E F, & ut A B ad A C ita quadratum ex A B ad quadratum ex A C. Eritque ex æquo ut I ad A C, ita quadratum ex D ad quadratum F G, & cum tam I ad A B, quam I ad A C non habeat rationem, quàm quadratus numerus ad quadratum; lineæ EF, FG expositæ rationali D potentia tantum commensurabiles, (*per 9.*) rationales igitur erunt, quare tota E G binomium erit. Addo & sextum esse; nam primò utrumq; nomen probatum est expositæ rationali incommensurabile longitudine, Secundò cum sit ut AB ad A C ita quadratum ex E F ad quadratum ex FG, ita erit AB ad reliquum seu CB, ut quadratum E F ad excessum quadratorum seu quadratum H, & cum A B ad C B non habeat rationem quàm quadratus ad quadratum, erunt (*per 9.*) EF & H incommensurabiles longitudine: quare majus nomen plus poterit quàm minus quadratô lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

PROPOSITIO LV.

Theorema.

Si spatium rationali & ex binis nominibus primâ contineatur; linea ipsum potens irrationalis erit, & ex binis nominibus.



Spatium A C contineatur rationali linea AB, & binomio primo AC; dico lineam cujus quadratum æquale est rectangulo AC, esse irrationalem, & ex binis nominibus. Sit AE majus nomen, E D minus, quod bifariam dividatur in F, eritque quadratum ex EF quarta pars quadrati ED, ita secetur majus nomen A E in G, ut rectangulum sub segmentis A G, G E, æquale sit quadrato E F. Et quia AE plus potest quam ED quadrato lineæ sibi commensurabilis (*per def. binomij primi*) erunt AG, GE, commensurabiles longitudine (*per 18.*) quare rectangula A H, G I erunt commensurabilia. Fiat rectangulo AH æquale quadratum L M, & rectangulo G I quadratum M N, quæ conjungantur ad angulum rectum. Perficiatur quadratum T S, quod ostendere debeo æquale esse rectangulo AC. Item lineam LT esse irrationalem & binomium.

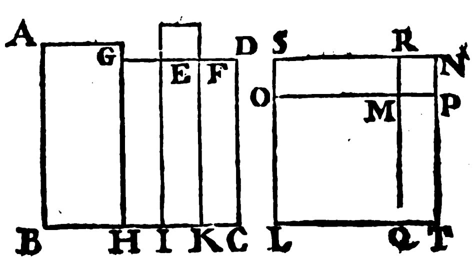
Demonstr. Cum rectangulum A G E æquale sit quadrato ex E F, erit E F media proportionalis inter A G & G E, quare (*per 1. 6.*) rectangulum EK erit medium proportionale inter AH, GI, seu inter quadrata LM, MN, sed pariter rectangulum MT est inter eadem medium proportionale, nam ita est LM ad MT ut L q ad q T, seu T P ad P N, Sed ut Tp ad PN; ita est qP ad MN, ergo qP est medium proportionale inter quadrata; ergo æquale rectangulo E K, & consequenter rectang. FC æquale est, rectangulo R o; ergo totum A C æquale est quadrato L N.

Secundò AG, GE sunt commensurabiles: ergo (*per 16.*) tota AE utrique erit commensurabilis, & cum in binomio primo, majus nomen sit rationali AB commensurabile; erunt AG, GE, eidem AB longitudine commensurabiles: erunt ergo rectang. AH, GI, & quadrata LM, MN, rationalia, & lineæ L q, q T rationales. Item A E majus nomen est incommensurabile longitudine minori ED, & ejus semissi EE; AF autem & A G sunt commensurabiles longitudine; igitur AG,EF sunt incommensurabiles; ergo & rectang. A H, EK, seu quadr. LM & rectangulum q P, erunt incommensurabilia, quare L q, q T sunt incommensurabiles longitudine, sunt tamen ostensæ rationales. Erit ergo (*per 37.*) tota oP rationalis, & ex binis nominibus.

PROPOSITIO LVI.

Theorema.

Si rectangulum contineatur sub rationali, & ex binis nominibus secunda, radix ejus quadrata erit irrationalis, & ex binis mediis prima.



Rectangulum A C contineatur sub rationali A B, & sub AD ex binis nominibus secunda; dico lineam potentem spatium A C esse irrationalem, & ex binis mediis primam. Sit A E majus nomen, E D minus, eruntque hæ lineæ rationales potentia tantum commensurabiles, & AE plus poterit quàm E D quadrato lineæ sibi commensurabilis & minus nomen E D erit rationali A B incommensurabile: fiat eadem constructio quæ priùs nempe rectangula AH, GI sint æqualia quadratis LM, MN, & rectangula EK, FC rectangulis q P, R o. Ostendam facile rectangulum AC, & quadratum LN esse æqualia, addo & lineam L T esse irrationalem & ex binis mediis primam.

Demonstr. Primò minus nomen E D est lineæ A B

A B commensurabile longitudine, A E vero rationalis eidem AB est incommensurabilis, sicut A G, GE ipsi AE commensurabiles, erunt rationales eidem A B incommensurabiles longitudine: sunt ergo (*per* 22.) rectangula A H, G I media, item quadrata L M, M N erunt media, inter se tamen commensurabilia, eo quod lineæ AG, GE sint inter se commensurabiles; ergo & rectangula A H, GI & quadrata LM, MN: erunt ergo lineæ Lq, qT potentia saltem commensurabiles, non tamen longitudine, quia AG, EF, sunt incommensurabiles, ergo & rectangula AH. EK, seu LM, q D; ergo & lineæ Lq, qT. Illæ autem mediæ sunt potentia tantum commensurabiles continentes rectangulum q P rationale, utpote æquale rationali EK; ergo (*per* 38.) linea LT est irrationalis, & ex binis mediis prima.

PROPOSITIO LVII.

Theorema.

Si Rectangulum contineatur sub rationali & ex binis nominibus tertia; recta illud potens, irrationalis erit, & ex binis mediis secunda.

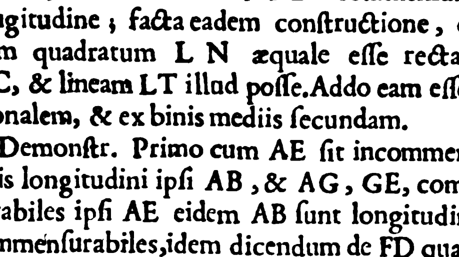
Rectangulum AC contineatur sub rationali AB, & sub AD quæ sit ex binis nominibus tertia, sitque quadratum LN æquale rectangulo AC, dico lineam LT esse irrationalem, & ex binis mediis secundam. Sit AE majus nomen, ED minus, eruntque A E, E D rationales potentia tantum commensurabiles, & AE plus poterit quam ED quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, & AE, ED sunt rationali AB incommensurabiles longitudine; facta eadem constructione, ostendam quadratum L N æquale esse rectangulo AC, & lineam LT illud posse. Addo eam esse irrationalem, & ex binis mediis secundam.

Demonstr. Primo cum AE sit incommensurabilis longitudini ipsi AB, & AG, GE, commensurabiles ipsi AE eidem AB sunt longitudine incommensurabiles, idem dicendum de FD quæ quidem est rationalis, sed (*per definitionem*) est rationali AB seu EI longitudine incommensurabilis: ergo (*per* 22.) IK, est medium sicut & QD ipsi æquale, ergo Lq, qT sub quibus continetur sunt potentia tantum commensurabiles eritque (*per eandem* 22.) LT irrationalis quæ ex binis nominibus secunda appellatur.

PROPOSITIO LVIII.

Theorema.

Si Rectangulum contineatur sub rationali, & ex binis nominibus quarta; recta quæ illud potest irrationalis est, quæ vocatur major.



Rectangulum AC contineatur sub rationali AB; & sub binomio quarto, dico lineam quæ potest spatium AC esse irrationalem quæ vocatur major. Sit AE majus nomen, ED minus. Sunt AE, ED lineæ rationales potentia tantum commensurabiles, & AE plus poterit quam ED, quadrato lineæ sibi incommensurabilis, & AE est commensurabilis longitudine rationali AB fiant reliqua ut prius.

Demonstr. Cum AE plus possit quam ED quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; Si secetur AE, ita ut rectangulum AGE, æquale sit (*per* 19.) quadrato EF; erunt AG, G E longitudine incommensurabiles, & consequenter (*per* 1. 6.) rectangula AH, GI, & quadrata LM, M N ipsis æqualia sunt incommensurabilia, & lineæ Lq, qT quæ ipsa possunt erunt potentiâ incommensurabiles. & cum AE sit commensurabilis longitudine ipsi AB, erit rectangulum AI sub rationalibus contentum rationale; ergo aggregatum ex quadratis LM, MN rationale est. Rursus cùm ED sit rationali AB incommensurabilis longitudine; erit & EF ejus dimidia eidem AB incommensurabilis longitudine, & cum EF sit rationalis, erit rectangulum EK & MT illi æquale medium (*per* 22.) quare cum Lq, qT sint potentia incommensurabiles & aggregatum quadratorum rationale habeant, & rectangulum medium, linea LT erit major (*per* 40.) quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO LIX.

Theorema.

Si rectangulum contineatur sub rationali & binomio quinto, recta illud potens irrationalis est quæ rationale & medium potens dicitur.

Spatium AC contineatur sub rationali AB, & sub AD binomio quinto, dico lineam illud potentem irrationalem esse, quæ dicitur rationale, & medium potens. Sunt ergo (*ex defin.*) AE, ED, rationales potentia tantum commensurabiles, & AE plus potest, quam ED quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & ED commensurabilis est longitudine ipsi AB. Fiat eadem constructio.

Demonstr. Cùm A E plus possit quam ED quadratô lineæ sibi longitudine in commensurabilis. Si ita dividatur AE, ut rectangulum AGD, æquale sit quadrato ex EF, erunt AG, GE longitudine incommensurabiles (*per* 19.) & consequenter (*per* 1.6.) rectangula AH, GI, & quadrata LM, MN sunt incommensurabilia, & rectæ L q, q T incommensurabiles potentia, A E est linea rationalis longitudine incommensurabilis est rationali AB, quare (*per* 22.) rectangulum A I aut aggregatum quadratorum medium erit. Denique cum ED sit rationali AB longitudine commensurabilis, erit & EF, quare E K erit rationale, sicut & MT illi æquale: cum ergo L q, q T sint potentia incommensurabiles, & aggregatum quadratorum sit medium, & rectangulum rationale linea LT (*per* 41.) erit irrationalis quæ dicitur potens rationale, & medium potens dicitur.

PROP

PROPOSITIO LX.

Theorema.

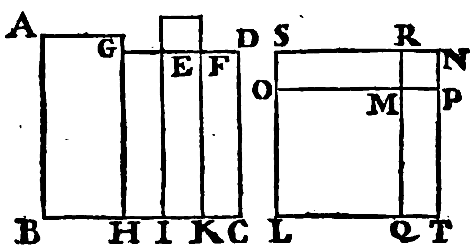
Si rectangulum contineatur sub rationali & binomio sexto, recta illud potens irrationalis est quæ bina media potens dicitur.

Sit rectangulum AC contentum sub Rationali AB, & AD binomio sexto, & quadratum LN sit illi æquale : dico lineam LT esse irrationalem quam 42 *propositione* descripsimus quæ dicitur bina media potens. Eadem fiant quæ in propositione præcedenti eadem etiam sequuntur, peculiare tamen erit cum in binomio sexto, neutrum nomen sit rationali lineæ commensurabile, tam AI hoc est aggregatum quadratorum, quam EK, seu MT medium erit: ergo (*per* 42.) linea LT irrationalis erit quæ bina media dicitur, quod erat demonstr.

PROPOSITIO LXI.

Theorema.

Quadratum lineæ quæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum, latitudinem facit binomium primum est.



Sit quadratum LN, ejus latus LT sit ex binis nominibus, sit item rectangulum AC æquale quadrato LN applicatum ad rationalem AB ; dico latitudinem AD esse binomium primum.

Demonstr. *Per* 55. si rectangulum AC contineatur sub rationali AB & binomio primo, linea LT illud potens est quæ ex binis nominibus dicitur ; ergo si quadratum lineæ LT quæ ex binis nominibus dicitur, applicetur ad rationalem AB, latitudo seu quotiens erit AD binomium primum, quod enim componit multiplicatio, divisio resolvit.

PROPOSITIO LXII.

Theorema.

Quadratum ejus quæ ex binis mediis prima ad rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

Demonstratio. Ex 56 binomium secundum per rationalem multiplicatum efficit quadratum ex binis mediis primæ : ergo quadratum ex binis primæ : ergo quadratum ex binis mediis primæ per rationalem divisum efficit binomium secundum.

PROPOSITIO LXIII.

Theorema.

Quadratum secundæ ex binis mediis ad rationalem applicatum, latitudinem efficit binomium tertium.

Demonstratio (*per* 57.) Vidimus rectangulum sub rationali, & binomio tertio contentum æquale esse quadrato ex binis mediis secundæ : ergo quadratum secundæ ex binis mediis, applicatum ad rationalem restituit binomium tertium.

PROPOSITIO LXIV.

Theorema.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem efficit binomium quartum.

Demonstratio (*per* 58.) rectangulum sub rationali, & binomio quarto contentum æquale est quadrato majoris : ergo quadratum majoris ad rationalem applicatum facit latitudinem binomium quartum.

PROPOSITIO LXV.

Theorema.

Quadratum ejus quæ rationale ac medium potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quintum.

Demonstratio (*per* 59.) binomium quintum per rationalem multiplicatum efficit quadratum ejus quæ rationale, ac medium potest divisum per rationalem restituit binomium quintum.

PROPOSITIO LXVI.

Theorema.

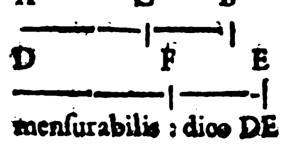
Quadratum ejus quæ bina media potest ad rationalem applicatum, latitudinem efficit binomium sextum.

Demonstr. (*Per* 60.) binomium sextum per rationalem multiplicatum efficit quadratum potentis bina media : ergo potentis bina media quadratum per rationalem divisum restituit binomium sextum.

PROPOSITIO LXVII.

Theorema.

Longitudine commensurabilis binomio, & ipsa binomium est simile.



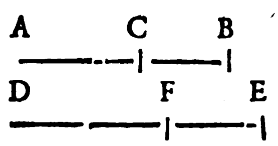
Sit binomium quodcumque AB divisum in sua nomina in C, sitque DE illi longitudine commensurabilis ; dico DE esse binomium simile, hoc est vel primum vel secundum; si AB primum aut secundum fuerit, fiat ut AB ad AC ita DE ad DF, eritque (*per* 10.) AC commensurabilis ipsi DF, & CB ipsi FE.

Demonstr. AC, CB cum sint nomina, sunt rationales potentia tantum commensurabiles (*per* 37.) erunt & DF, FE rationales potentia tantum commensurabiles, quare DE erit binomium. Similiter ostendam si AC sit rationali lineæ commensurabile, DF eidem esse commensurabile; quod si AC plus possit quàm CB quadrato lineæ sibi commensurabilis, ostendam (*per* 15.) DF plus posse quam FE, quadrato lineæ sibi potentiâ commensurabilis: ergo quæ est longitudine commensurabilis binomio, & ipsa simile binomium erit; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

Theorema.

Longitudine commensurabilis recta quæ ex binis mediis, & ipsa ex binis mediis erit & similis.



Sit AB ex binis mediis, divisa in sua nomina in C, & DE ei sit longitudine commensurabilis, fiatque ut AB ad AC ita DE ad DF, dico DE esse ex binis mediis, & divisam in F in sua nomina.

Demonstr. AC, CB sunt mediæ, & commensurabiles longitudine ipsis DE, EF: ergo (*per* 24.) DE, EF erunt mediæ, & sicut AC, CB, sunt potentiâ tantum commensurabiles, DE, EF potentiâ tantum commensurabiles erunt: eritque DE ex binis mediis. Item cum sit AC ad CB ut DE ad DF, & ut quadratum AC ad rectangulum ACB, & ut DE ad DF, ita quadratum DE, ad rectangulum DFE; ergo ita quadratum ex AC ad quadratum ex DE ut rectangulum ACB ad rectangulum DFE; & (*per* 10.) si rectangulum AC, CB fuerit rationale rectangulum, DEF rationale erit, vel contra: ergo si AC fuerit ex binis nominibus prima, aut secunda, DF erit pariter ex binis mediis prima aut secunda.

PROPOSITIO LXIX.

Theorema.

Majori commensurabilis, & ipsa major est.

Demonstr. Eadem adhibeatur, percurrendo omnes proprietates majoris, ostendendo compositum ex quadratis AC, CB commensurabile esse composito ex quadratis DE, EF, & cum primum sit rationale secundum esse rationale.

PROPOSITIO LXX.

Theorema.

Rationale & medium potenti commensurabilis, rationale, & medium potest.

Demonstr. Simili modo instituetur, ostendendo aggregatum quadratorum AC, CB quod medium est, esse commensurabile aggregato quadratorum DE, EF: ergo & medium erit; idem probabitur de rectangulis ACB, DEF.

PROPOSITIO LXXI.

Theorema.

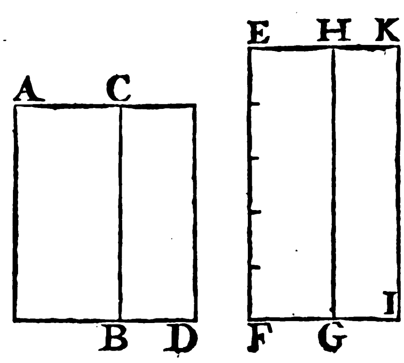
Commensurabilis bina media potenti, bina media potest.

Demonstratio eadem erit.

PROPOSITIO LXXII.

Theorema.

Si Rectangulum rationale cum medio componatur; Recta totum potens, irrationalis erit, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima, vel major; vel rationale, ac medium potens.



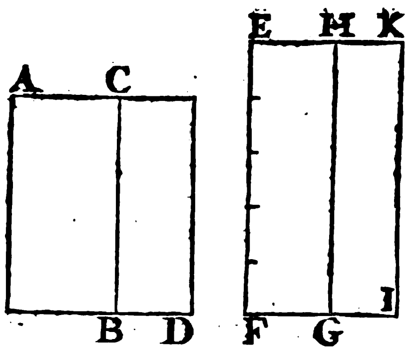
Sit rectangulum AB rationale, cui jungatur medium CD, dico lineam potentem totum spatium AD, esse irrationalem & unam ex supradictis. sit enim exposita rationalis EF, ad quam applicentur rectangula EG, HI prioribus æqualia. Cum AB, CD æqualia non sint, alioqui ambo vel rationalia essent, vel ambo media, erit EH major, aut minor quam HK (*per* 1. 6.) cum ergo EG sit rationale, erit (*per* 21.) EH rationalis ipsi EF longitudine commensurabilis, & (*per* 23.) HK, erit rationalis longitudine incommensurabilis ipsi EF; & cum EG, GI sint incommensurabilia nempe rationale cum medio, EH, HK erunt incommensurabiles. Sunt ergo EH, HK rationales potentiâ commensurabiles; quare EK est ex binis nominibus, & cum EH majus nomen, sit rationali lineæ EF commensurabile longitudine, si plus possit EH quam HK quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, erit EK ex binis nominibus prima; quare (*per* 55.) linea potens spatium EI contentum sub rationali EF, & ex binis nominibus prima erit irrationalis quæ ex binis nominibus. Si vero EH plus possit, quam HK, quadrato lineæ sibi incommensurabilis, erit EK binomium quartum, & (*per* 58.) linea potens spatium EI erit major. Si AB minus fuerit quam CD, erit EH minor quam HK, vel ergo minus nomen HK plus potest quam minus EH quadrato lineæ sibi commensurabilis, erit EK binomium secundum & (*per* 56.) erit linea potens spatium EI, ex binis mediis prima, vel HK plus poterit quam EH, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, eritque EK binomium quintum, & (*per* 59.) linea potens spatium EI, aut AD, irrationalis, quæ rationale & medium potens dicitur.

PROPO

PROPOSITIO LXXIII.

Theorema.

Si duo media inter se incommensurabilia componantur; linea illud potens irrationalis erit, vel quæ ex binis mediis secunda, vel bina media potens.



Duo media AB, CD incommensurabilia, componantur, dico rectam quæ totum spatiũ potest, esse aut ex binis mediis secũdam, vel bina media potentem. Omnia fiant ut in præcedenti propositione, si AB, majus sit quam CD, erit etiam EH major quam HK.

Demonstr. Cùm spatia AB, CD supponantur incommensurabilia, EG, HI erunt incommensurabilia, & (*per* 1.6.) EH, HK incommensurabiles longitudine, & (*per* 23.) utraque rationalis longitudine incommensurabilis rationali EF, eritque EK ex binis nominibus vel tertia, vel sexta.

Et (*per* 57.) linea potens spatium EI, erit irrationalis quæ ex binis mediis secunda.

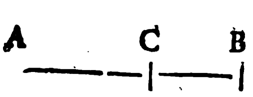
Si verò EK fuerit sexta, linea potens spatium EI erit irrationalis quæ bina media nominatur.

Principium senariorum per detractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

Theorema.

Si à rationali auferatur rationalis potentiâ tantum illi commensurabilis, reliqua irrationalis, erit, dicta Apotome.



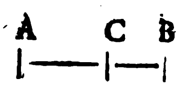
A Rationali AB auferatur rationalis AC, sed ipsi potentiâ tantum commensurabilis; dico reliquam BC esse irrationalem.

Demonstr. Sicut est AB ad AC, ita quadratum AB ad rectangulum sub AB, AC (*per* 1.6.) sed AB, AC sunt longitudine incommensurabiles: erunt ergo incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC; Cum autem AB, AC sint potentia commensurabiles, quadrata AB, AC sunt commensurabilia, immo & aggregatum quadratorum AB, AC quadrato AB, & consequenter idem aggregatum quadratorum AB, AC est incommensurabile rectangulo sub AB, AC, etiam bis sumpto. Sed (*per* 7.2.) aggregatum quadratorum AB, AC æquale est rectangulo bis sub AB, AC, unà cum quadrato BC: ergo (*per* 17.) aggregatum quadratorum AB, AC, quadrato BC est incommensurabile, ergo BC est irrationalis. nam quadratum AB rationale est, sicut & quadratum AC, & aggregatum.

PROPOSITIO LXXV.

Theorema.

Si à media, media auferatur, potentiâ tantum illi commensurabilis quæ cum tota rationale contineat, reliqua irrationalis erit, dicatur mediæ apotoma prima.



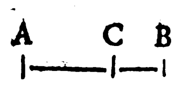
Subtrahatur à media AB mediâ AC illi potentiâ tantum commensurabilis; dico reliquam CB irrationalem esse.

Demonstr. Quadratum ex AC media, medium est & irrationale, & consequenter compositum ex quadratis AB, AC irrationale erit, & rectangulum sub AB, AC ponitur rationale. Est autem (*per* 7.2.) aggregatum quadratorum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC & quadrato BC; ergo (*per* 17.) rectangulum bis sub AB, AC, quod rationale est, incommensurabile est quadrato BC; ergo BC irrationalis est: dicatur mediæ Apotomæ prima.

PROPOSITIO LXXVI.

Theorema.

Si à media, media auferatur potentiâ tantum illi commensurabilis, quæ cum totâ medium contineat; reliqua irrationalis erit dicatur autem media apotoma secunda.

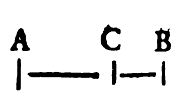


A media AB subtrahatur media AC potentia tantum illi commensurabilis, sitque rectangulum AB, AC medium. Ostendam facile aggregatum quadratorum AB, AC medium esse, sicut & rectangulum bis sub AB, AC. Cùm ergo quadrata AB, AC æqualia sint (*per* 7.2.) rectangulo bis sub AB, AC, & quadrato CB, & medium non superet medium rationali (*per* 67.) quadratum BC irrationale erit; ergo & linea BC: Vocetur autem mediæ apotomæ secunda.

PROPOSITIO LXXVII.

Theorema.

Si à recta linea, auferatur potentia ei incommensurabilis, ita ut compositum ex ipsarum quadratis & rectangulum sub ipsis contentum medium; reliqua irrationalis erit, quæ dicetur minor.



A linea AB subtrahatur AC, potentia ipsi incommensurabilis. Sit autem aggregatum quadratorum AB, AC rationale, & rectangulum sub AB, AC medium: dico reliquam AC irrationalem esse.

Demonstr. Cum aggregatum quadratorum AB AC rationale sit, & rectangulum sub AB, AC medium seu irrationale, erit aggregatum quadr. AB, AC, seu (*per* 7.2.) rectangulum sub AB, AC bis & quadratum BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. Quare (*per* 17.) aggregatum quadratorum AB, AC quod rationale est, quadrato BC est incommensurabile: ergo quadratum BC est

eſt irrationale: ergo linea BC eſt irrationalis; dicatur minor.

PROPOSITIO LXXVIII.

Theorema.

Si à recta ſubtrahatur potentiâ tantum commenſurabilis, ita ut aggregatum quadratorum ſit medium, & rectangulum ſub ipſis rationale, reliqua irrationalis erit. Vocetur autem cum rationali medium efficiens.

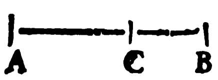
Subtrahatur ex recta AB, linea A C ipſi potentia incommenſurabilis, ſitque aggregatum quadratorum AB, AC, medium, & rectangulum ſub AB, AC rationale; dico reliquam C B eſſe irrationalem.

Demonſtr. Nam aggregatum quadratorum AB AC, hoc eſt (*per* 7.2.) rectangulum bis ſub AB AC unà cum quadrato BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB,BC: ergo rectangulum bis ſub AB, BC quod rationale eſt incommenſurabile eſt quadrato BC,quod proinde irrationale erit, ſicut & linea BC. Vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

PROPOSITIO LXXIX.

Theorema.

Si à recta ſubtrahatur linea ei incommenſurabilis potentiâ, ita ut tam aggregatum quadratorum quàm rectangulum ſub ipſis, ſit medium incommenſurabile quadratorum aggregato, reliqua irrationalis eſt, quæ dicetur cum medio medium totum efficiens.

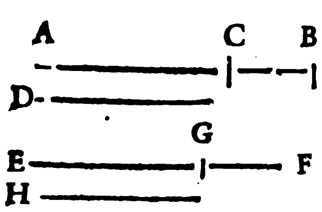


Ex linea AB ſubtrahatur AC ipſi potentia incommenſurabilis, ita ut aggregatum quadratorum medium ſit, ſed incommenſurabile quadrato bis ſub AB, AC; ſed aggregatum quadratorum AB, AC, (*per* 7.2.) æquale eſt rectangulo bis ſub AB,AC,una cum quadrato BC. Ergo BC eſt exceſſus unius ſupra aliud; ſed medium non ſuperat medium rationali (*per* 27.) Ergo quadratum BC irrationale,ſicut & linea BC. Dicatur autem cum medio medium totum efficiens.

LEMMA.

Si idem ſit exceſſus inter primam & ſecundam magnitudinem,qui inter tertiam & quartam; idem etiam erit inter primam & tertiam, qui inter ſecundam & quartam.

C B ſit exceſſus inter AB primam, & D ſecundam, æqualis G F exceſſui inter E F tertiam, & H quartam; dico eundem eſſe exceſſum inter primum A B & tertiam E F, qui inter

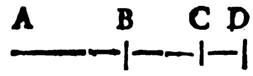


ſecundam D, & quartam H. Abſcindantur exceſſus, eruntque AC & D æquales, ſicut E G & H; ergo tam AC ſuperat EG, quam D ſuperat H, & additis CB, EF æqualibus non mutatur exceſſus; ergo tam A B ſuperat E F quàm D ſuperat H; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXX.

Theorema.

Apotoma una tantum congruit recta linea rationalis, potentia tantum commenſurabilis toti.



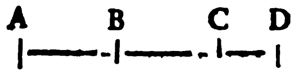
Sit Apotomæ AB, cui congruat B C potentia tantum commenſurabilis toti AC; hoc eſt ſi ex AC rationali auferatur BC illi tantum potentiâ commenſurabilis,reſtabit AB apotome, viciſſim proponatur apotome AB, cui addatur BC quæ ſit rationalis potentiâ tantum commenſurabilis toti AC, dico aliam ut BD non poſſe illi addi, quæ ſit rationalis potentiâ tantum commenſurabilis toti AD.

Demonſtr. Si hoc ita eſſet nempe tam BC,AC eſſent potentia tantum commenſurabiles quam BD, AD. Primò (*per* 7. 2.) aggregatum quadratorum AC B C ſuperat rectangulum bis ſub A C BC quadrato A B, ſicut aggregatum quadratorum A D, B D ſuperat rectangulum bis ſub A D, BD eodem quadratô AB. Ergo (*per lemma*) idem quadratum AB, erit exceſſus aggregati quadratorum A D, BD, ſupra aggregatum quadratorum AC,BC, qui rectanguli bis ſub AD, BD ſupra rectangulum bis ſub A C, B C. Sed tam quadrata AC, BC quam AD, BD ſunt rationalia, cùm dicantur lineæ eſſe rationales potentiâ commenſurabiles, & conſequenter exceſſus ille (*per* 16.) rationalis eſſet: rectangulum autem tam ſub A C, BC quam ſub AD, B D ſunt media utpote comprehenſa ſub lineis potentia commenſurabilibus, medium autem non ſuperat medium rationali (*per* 27.) ergo ille exceſſus non eſſet rationalis, quare ille exceſſus ſimul rationalis & irrationalis; quod implicat: ergo Apotomæ non poteſt duplex congruere linea rationalis potentia tantum toti commenſurabilis.

PROPOSITIO LXXXI.

Theorema.

Mediæ Apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, potentia ſolum commenſurabilis toti, & cum tota rationale continens.



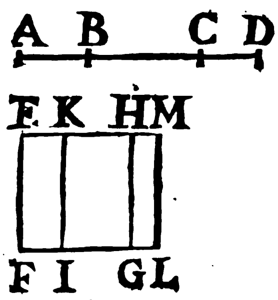
Sit A B mediæ Apotomæ prima, cui congruat B C media, toti A C potentia tantum commenſurabilis, ita ut rectangulum ſub AC BC ſit rationale; dico aliam B D cum iiſdem conditionibus ipſi AB non poſſe congruere.

Demonſtr. Linea AC, BC, ſicut & A D, BD dicuntur mediæ, & potentia commenſurabiles, ergo quadrata earum ſunt commenſurabilia: ergo tam aggregatum quadratorum A C, B C, quam AD, BD medium eſt; rectangulum autem ſub AC, BC, item ſub AD, BD ſupponitur rationale; ergo utrumque etiam bis ſumptum rationale erit, Oſtendam autem ſicut priùs, eundem eſſe exceſſum aggregati quadratorum AC, B C & aggregati quadratorum AD, BD, ac rectanguli bis ſub AC BC, & rectanguli bis ſub AD, BD, Sed primus

mus est irrationalis (*per* 27.) secundus rationalis (*per* 16.) ergo idem excessus simul rationalis, & irrationalis esset, quod implicat.

PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ Apotomæ secundæ una tantum congruit media potentiâ solum commensurabilis toti, & cum ea medium continens.



Sit A B mediæ Apotome secunda, cui congruat B C toti A C potentiâ tantum commensurabilis, ita ut rectangulum sub A C, BC sit medium: dico aliam BD cum iisdem conditionibus, non respondere lineæ A B. Si enim id fieri potest, exponatur rationalis E F ad quam applicetur E G æquale aggregato quadratorum AC, BC, & EI æquale quadrato AB. Item EL æquale aggregato quadratorum AD, BD, & quia aggregatum quadratorum AC, BC seu EG, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, & quadrato A B (*per* 7. 2.) seu E I, erit KG æquale rectangulo bis sub AC, BC. Sicut EI rectangulo bis sub AD, BD.

Demonstr. Dicuntur AC, B C mediæ potentia commensurabiles: ergo quadrata earum sunt commensurabilia, & aggregatum quadratorum AC, BC, medium erit, & (*per* 23.) erit EH rationalis rationali EF incommensurabilis longitudine. Pariter cum rectangulum sub AC, CB sit medium, ejus duplum erit etiam medium, & KH erit rationalis ipsi E F incommensurabilis longitudine. Item lineæ AC, BC sunt longitudine incommensurabiles, ut autem AC ad B C, ita quadratum ex AC ad rectangulum sub AC, AB erit quadratum ex A C, & aggregatum quadratorum AC, BC, incommensurabile rectangulo bis sub A C B C: quare EG & K G, & consequenter (*per* 1. 6.) lineæ EH, K H sunt incommensurabiles longitudine, rationales tamen: quare cum ex rationali E H auferatur rationalis KH, erit E K apotome, & illi congruens KH. Pariter ostendam eidem congruere linea K M: quod fieri non posse probavimus prop. 80.

PROPOSITIO LXXXIII.

Theorema.

Minori una tantum congruit recta linea potentiâ tantum incommensurabilis toti, & cum ea faciens aggregatum quadratorum rationale, & rectangulum medium.

Demonstratio eadem est quæ 82 propositionis. Ostendam enim si duæ tales lineæ minori congruerent, eundem esse excessum aggregati, quadratorum unius, supra aggregatum quadratorum alterius, ac rectanguli bis unius supra rectangulum bis alterius. Et cum aggregata quadratorum sint rationalia, ille excessus esset rationalis: ex alia verò parte, cum rectangula sint media, & medium non superet medium rationali; ille excessus irrationalis esset.

PROPOSITIO LXXXIV.

Theorema.

Lineæ quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruit recta, potentia tantum commensurabilis toti, & cum ea aggregatum quadratorum medium, & rectangulum rationale efficiens.

Eadem demonstratio vim suam habet.

PROPOSITIO LXXXV.

Theorema.

Lineæ quæ cum media medium totum facit, una tantum congruit potentiâ incommensurabilis toti, & cum ea faciens aggregatum quadratorum medium, & rectangulum medium, sed incommensurabile aggregato quadratorum.

Eadem demonstratio quâ usi sumus in 82, vim suam habet.

DEFINITIONES TERTIÆ.

Expositâ rationali & apotomâ, si tota plus possit, quàm congruens quadrato lineæ sibi commensurabilis.

Si tota sit expositæ rationali longitudine commensurabilis, dicatur apotome prima. 1

Si congruens sit expositæ rationali longitudine commensurabilis dicatur Apotome. 2

Si nec congruens nec tota fuerit rationali longitudine commensurabilis, dicatur Apotome. Quod si tota plus possit quàm congruens quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. 3

Si tota fuerit rationali longitudine commensurabilis, dicatur Apotome. 4

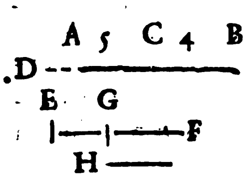
Si congruens fuerit rationali longit. commensurabilis, dicatur Apotome. 5

Si neutra fuerit rationali commensurabilis, dicatur Apotome. 6

PROPOSITIO LXXXVI.

Problema.

Invenire primam Apotomen.



Inventis duobus numeris quadratis AB, CB, quorum differentia A C non sit numerus quadratus, sit rationalis D, cui EF sit longitudine commensurabilis & consequenter sit rationalis. Fiat, ut numerus A B ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad quadratum G F: dico E G esse primam Apotomen.

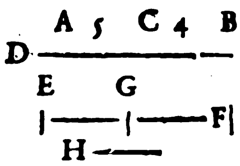
Demonstr. Primò cum E F sit rationalis, & EF GF quadrata commensurabilia, erunt E F, F G rationales potentiâ tantum commensurabiles, cum quadrata earum se habeant ut AB ad AC, hoc est non ut quadratus ad quadratum: quare per 74 E G est Apotome, quàm addo esse primam. Possit enim

enim E F plus quàm GF quadrato lineæ H. Cum ergo ita sit numerus AB ad numerum AC ut quadratum EF ad quadratum G F erit per conversionem rationis numerus AB ad reliquum BC,seu excessum AB supra AC sicut quadratum EF ad excessum seu quadratum H: sed numeri AB, BC; quadrati sunt: ergo quadratum EF ad quadratum H, se habet ut numerus quadratus ad quadratum: ergo lineæ EF & H sunt commensurabiles longitudine: ergo adsunt omnes conditiones ut linea E G sit Apotome prima.

PROPOSITIO LXXXVII.

Problema.

Invenire Apotomen secundam.



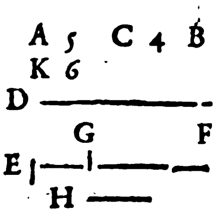
Inveniantur numeri ut in propositione præcedenti; expositaque rationali D, & ei longitudine commensurabili GF, fiat ut AC ad AB ita ad E F.

Demonstratio. GF, & EF erunt commensurabiles tantùm potentia & rationales, ut patet (*per* 9.) ergo reliqua G E erit apotome, quam dico secundam esse. Possit enim recta EF plusquam GF quadrato linea H. Quia ita est AB ad AC sicut quadratum EF ad quadratum GF, ita erit AB ad reliquum CB ut quadratum EF ad differentiam quadratorum seu ad quadratum H & cum AB, CB sint numeri quadrati, erunt E F & H longitudine commensurabiles: quare adsunt omnes conditiones requisitæ ut EG sit 2 Apotome.

PROPOSITIO LXXXVIII.

Problema.

Invenire tertiam Apotomen.

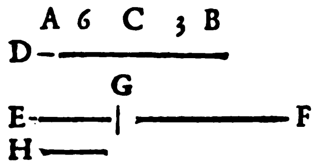


Sint duo numeri AB, AC, ut priùs: sitque tertius K qui ad neutrum rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum: fiat ut K ad AB ita quadratum D ad quadratum E F eruntque lineæ potentia commensurabiles, & cum D supponatur rationalis, E F rationalis erit. Fiat item ut A B ad AC: ita quadratum DF ad quadratum GF,eruntque E F, GF rationales potentiâ tantum commensurabiles; ergo EG (*per* 74.) erit Apotome quam dico tertiam esse eo quod neque GF, neque EF sit longitudine commensurabilis rationali D: quadratum enim D ad quadrata G F & E F rationem habet quam numerus K ad numerum AC aut AB, quæ non est numeri quadrati ad quadratum. Facile item ostendere possum, ut priùs, lineam E F plus posse quàm GF quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis.

PROPOSITIO LXXXIX.

Problema.

Invenire quartam Apotomen.



Inveniantur numeri ita ut A B ad neutram partem A C, & C B sit ut quadratus ad quadratum. Sit rationalis D cui sit longitudine commensurabilis E F; fiatque ut A B ad AC ita quadr. EF ad quadr. G F, & cum E F sit rationalis erit GF rationalis; sed potentiâ tantum commensurabilis, eò quod numerus A B ad A C non habeat rationem, quàm numerus quadratus ad numerum quadratum: quare (*per* 86.) E G erit apotome, quam dico esse quartam: cum enim sit ut AB ad AC; ita quadratum EF ad quadratum G F; ita erit per conversionem rationis AB ad CB ut quadratum EF ad differentiam quadratorum EF & GF, seu ad quadratum H, & cum AB ad CB non habeat rationem quam quadratus numerus ad quadratum, linea E F plus poterit quàm GF quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: quod etiam requirebatur ut E G esset Apotome quarta.

PROPOSITIO XC.

Problema.

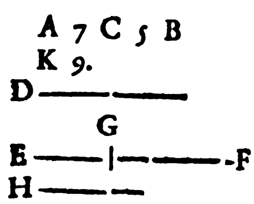
Invenire quintam Apotomen.

Sit eadem constructio, & inventio numerorum. Proponatur item rationalis D, cui G F sit commensurabilis longitudine. Fiat ut A C ad AB ita GF ad E F, clarum est GF,E F esse lineas rationales potentia tantum commensurabiles, & adesse reliquas conditiones ad hoc ut E G sit apotome quinta, cum GF sit rationali D incommensurabilis longitudine, & EF plus possit quam G F, quadrato lineæ H sibi incommensurabilis longitudine.

PROPOSITIO XCI.

Problema.

Invenire sextam Apotomen.



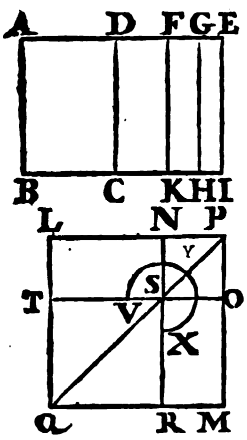
Reperiantur numeri qui tales sint ut A B ad neutrum illorum AC,CB, rationem habeat quam quadratus ad quadratum. Sit item numerus A, qui ad AB, AC rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum. Cætera fiant ut in propositione 88.Differet tamen hic casus in eo quod AB ad BC non habeat rationem, quam habet quadratus ad quadratum, & consequenter quadratum ex EF plus poterit quam quadratum ex GF quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Neutra etiam E F ad G F erit lineæ rationali D commensurabilis longitudine.

PROPO

PROPOSITIO XCII.

Theorema.

Si ſpatium contineatur ſub rationali & Apotoma prima, linea illud potens erit Apotome.



Rectangulum AC contineatur ſub rationali AB, & Apotoma AD, dico lineam potentem ſpatium AC eſſe Apotomen; hoc eſt ſi QR ſupponatur eſſe hæc linea quæ poteſt ſpatium AC, ita ut ſpatium AC,& quadratū TR ſint æqualia,debeo probare QM, RM eſſe rationales longitudine incommenſurabiles; unde ſequetur reliquā QR eſſe Apotomen.

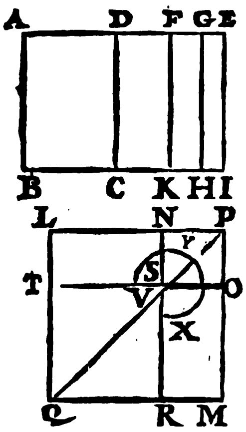
Demonſtr. Cùm AD ſit Apotome prima, ſupponatur DE eſſe illi congruens, eritque tota AE commenſurabilis longitudine rationali AB; item AE, DE erunt rationales longitudine incommenſurabiles;denique AE plus poterit quàm DE quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur ergo DE biſariam in F, quadratum ex DF erit quarta pars quadrati DE. Huic quadrato DF æquale fiat rectangulum AGE, eruntque(*per* 18.) AG, GE longitudine commenſurabiles: ergo & ipſi AB: ergo rationales erunt; & (*per* 20.) rectangula AH, GI rationalia erunt. DE rationalis quidem eſt, ſed incommenſurabilis longitudine rationali AB: ergo DF, FE illi commenſurabiles, rationales ipſi AB potentia tantum commenſurabiles erunt, quare (*per* 22.) erit utrumque rectangulum DK, FI medium.

Sit quadratum LM æquale rectangulo AH, & quadratum NO rectangulo GI, eritque utrumque quadratum rationale, & lineæ LP, NP rationales.Ex conſtructione rectangulum AGE æquale eſt quadrato DF; ergo tres lineæ AG, DF, GE ſunt continuè proportionales, & rectangula AH, DK, GI (*per* 1. 6.) ſunt continuò proportionalia,& DK erit medium inter AH, & GI,ſeu inter quadrata LM, NO; ſed pariter rectangulum LO eſt medium proportionale inter quadrata LM, NO: Eſt enim ut MP,OP ita quadratum LM ad rectangulum LO (*per* 1.6.) ita etiam eſt rectangulum LO ad quadratum NO ut LP ad NP, ſeu MP, ad OP: ergo rectangula DK, LO ſunt æqualia, ſi FI, NM, & quadratum NO æquale eſt rectangulo GI: ergo reliquum RO æquale eſt rectangulo FH & Gnomon VXY æquale eſt rectangulo DH; cùm ergo totum quadratum LM toti rectangulo AH factum ſit æquale, & rectangulum DH Gnomoni VXY, erit quadratum TR, rectangulo AC æquale, & linea QR poterit ſpatium AC; hanc dico eſſe Apotomen; ſunt enim quadrata LM, NO rationales, & lineæ QR, RM illa potentes rationales.Oſtendimus item DK medium eſſe: ergo LO illi æquale medium erit, quare incommenſurabilia ſunt LO, NO; ergo & lineæ LP, NP, ſeu QM, RM ſunt incommenſurabiles potentiâ: ergo (*per* 74.) reliqua QR eſt Apotome.

PROPOSITIO XCIII.

Theorema.

Si rectangulum contineatur ſub rationali & Apotoma ſecunda; recta linea illud potens media eſt Apotoma prima.



Rectangulum AC contineatur ſub rationali AB & apotoma ſecunda AD, dico rectam potentem ſpatium AC eſſe mediæ apotomen primam; ut ſi quadratum TR fuerit æquale rectangulo AC, debeo oſtendere lineas QM, RM medias eſſe potentia tantùm commenſurabiles, quæ contineant rationale,& cōſequenter lineam QR eſſe mediæ apotomen primam.

Ex defin. Apotomæ ſecundæ erunt AE, DE, rationales potentiâ tantum commenſurabiles, & congruens DC erit longitudine commenſurabilis rationali DE; & AE plus poterit quàm DE quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.Dividatur DE biſariam in F, & reliqua omnia conſtruantur ut in propoſitione præcedenti. Eruntque AG, GE longitudine commenſurabiles ipſi AE, & conſequenter incommenſurabiles longitudine rationali AB, ſunt tamen AG, GE, ſicut & AE, rationales: ergo rectangula AH, GI media erunt (*per* 21.) DF autem & FE, ſicut & tota DE ſunt longitudine commenſurabiles ipſi AB, & utrumque rectangulum DH, FI ſub rationalibus contentum rationale eſt. Oſtendemus item ut in præcedenti quadratum TR æquale eſſe rectangulo AC. Igitur oſtendere debeo QR eſſe mediæ Apotomen primam.

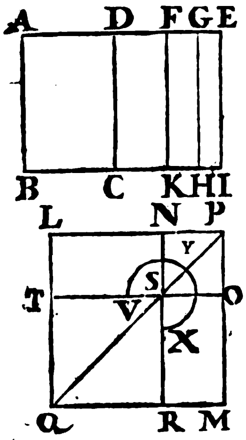
Demonſtr. Lineæ AG, GE ſunt longitudine commenſurabiles, ergo & rectangula AH, GI commenſurabilia ſunt (*per* 1. 6.) & quadrata LM,NO illis æqualia:ergo latera eorum QM,RM ſunt lineæ potentia commenſurabiles;ſed erant & mediæ, FI autem rationale eſt, & conſequenter illi æquale LO, & conſequenter medio NO incommenſurale; ſunt ergo lineæ QR, RM eandem cum illis rationem habentes longitudine incommenſurabiles: quare (*per* 75.) QR erit mediæ apotomæ prima.

PROPOSITIO XCIV.

Theorema.

Si rectangulum contineatur ſub rationali & Apotoma tertia; Recta illud potens eſt media apotome ſecunda.

Rectangulum AC contineatur sub rationali AB & apotoma tertia AD,dico lineam potentem spatium AC esse mediæ Apotomen secundam; hoc est ostendere debeo si quadratum TR fuerit æquale rectangulo AC, lineas QM, RM esse medias potentia tantum commensurabiles continentes medium.



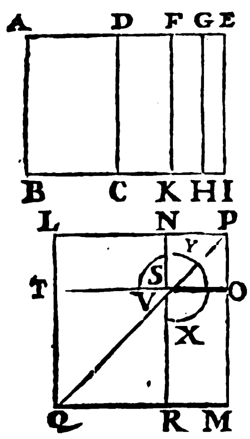
Primo (*ex definitione*) constat AE, DE rationales esse potentia tantum commensurabiles, neutram esse esse commensurabilem longitudine rationali AB; & AE plus posse quàm DE quadrato sibi longitudine commensurabilis. Divisa DE bifariam in F, si fiat rectangulum AGE æquale quadrato DF, erunt AG, GE ipsi AE longitudine commensurabiles (*per* 16.) & incommensurabiles rationali AB: quare rectangula AH, GI media sunt, sicut & DK, FI.

Facta igitur eadem constructione erunt quadrata LM, NO media, commensurabilia tamen sicut rectangula AH, HI, & rectæ AG, GE; eruntque rectæ QM, RM potentia commensurabiles. Deinde cum AE, DE sint longitudine incommensurabiles pariter (*per* 14.) GE, FE longitudine incommensurabiles erunt, sicut GI, FI, (*per* 1.6.) seu illis æqualia LO, NO, & lineæ QM, RM, quæ sunt mediæ potentia solum commensurabiles continentes LO medium; Quare (*per* 76.) erit QR, mediæ apotome secunda.

PROPOSITIO XCV.

Theorema.

Si rectangulum contineatur sub rationali & apotomâ quartâ, linea illud potens minor erit.



Sit rectangulum AC contentum sub rationali AB, & apotoma quartâ AD, & linea illud potens sit QR, hoc est sit quadratum TR æquale rectangulo AC, dico linea QR esse minorem, nempe QM, RM potentia esse incommensurabiles, & aggregatum quadratorum ex QM, RM esse rationale, & rectangulum LO sub ipsis contentum esse mediũ.

Cùm linea AD supponatur Apotoma quarta, erit AE rationali AB longitudine commensurabilis, erunt AE, DE rationales potentia commensurabiles & AE plus poterit quàm DE, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis juxta (*def.*) quartæ Apotomæ; quare facta eadem constructione erunt AG, GE, tam inter se quam lineæ AE, incommensurabiles. Est autem AI comprehensum sub rationalibus AE, AB rationale (*per* 20.)

Item cùm DE sit rationalis, sed rationali AB longitudine incommensurabilis erit, DI & eius dimidium FI erunt media. Rursus cùm AG, GE sint incommensurabiles, erunt incommensurabilia AH, GI & illis æqualia quadrata LM, NO.

Denique cùm AI æquale sit rationale, eo quod AB, AE sint commensurabiles, & AI sit æquale aggregato quadratorum LM, NO, illud aggregatum rationale erit, rectangulum aut LO, cùm sit æquale medio FI, medium erit; erunt igitur rectæ QM, RM potentia incommensurabiles, & aggregatum ex quadratis rationale, rectangulum sub ipsis contentum medium; ergo (*per* 77.) reliqua QR media erit; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCVI.

Theorema.

Si rectangulum contineatur sub rationali & Apotoma quinta; Recta spatium potens ea est qua cum rationali medium totum efficit.

Vide Figuram præcedentem.

Rectangulum AC contineatur sub rationali AB, & apotoma quinta AD, dico lineam potentem spatium AC, eam esse quæ cum rationali medium totum efficit; hoc est si quadratum TR æquale sit rectangulo AC, erunt lineæ QM, RM potentiâ incommensurabiles, & aggregatum quadratorum medium erit, rectangulum sub ipsis rationale. Sic enim reliqua QR erit quæ cum rationali medium totum efficit.

Supponitur ergo AD esse apotoma quinta, ergo per def. AE, DE potentiâ tantum commensurabiles, & DE rationali AB longitudine commensurabilis; item AE plus poterit quàm DE, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & quare si fiat quadrato DF æquale rectangulum AGE, erunt (*per* 22.) AG, GE incommensurabiles longitudine. Item cum AE sit longitudine incommensurabilis rationali AB, erit AI medium, & cum DE rationalis sit, sicut & ejus semissis DF, erunt DI, & FI rationalia. Facta eadem constructione erunt AH, GI incommensurabilia.

Demonstratio. AI medium est, sed AI æquale est ex constructione aggregato quadratorum LM, NO, ergo tale aggregatum medium est. Pariter cum FI rationale sit, erit LO illi æquale rationale.

Ostendemus item ut in præcedenti rectas QM, RM esse potentia incommensurabiles: ergo (*per* 78.) QR est ea quæ cum rationali medium totum efficit.

PROPOSITIO XCVII.

Theorema.

Si rectangulum contineatur sub rationali & Apotoma sexta, recta illud potens est ea qua cum medio medium totum efficit.

Vide Figuram præcedentem.

Rectangulum AC contineatur sub rationali AB, & apotoma sexta AB, dico lineam potentem spatium AC eam esse quæ cum medio medium totum efficit: hoc est si L quadratum TR æquale sit spatio AC, ostendere debeo rectas QM, RM potentia esse incommensurabiles: item aggregatum quadratorum LM, NO medium esse, sicut rectangulum sub QM, RM medium esse, sic enim probavero reliquam QR esse eam quæ cum medio, medium totum efficit.

Supponitur

Supponitur A D esse apotoma sexta, hoc nec AE, nec DE esse commensurabilem rationali A E; item AE, DE esse rationales potentia tantum commensurabiles. Et A E plus posse quam D E quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur pariter D E bifariam in F; fiatque quadrato D F æquale rectangulum A G E, eruntque A G, G E incommensurabiles longitudine. Quia autem tam AE quàm AF sunt rationes longitudine incommensurabiles rationali AB, erunt AI, DI, FI media; item ut in 95 erunt AH, G I incommensurabilia. Pariter AI, DI sunt incommensurabilia, eo quod rectæ AE, DE sint potentia tantum incommensurabiles; & cum DI, FI sint commensurabilia, erunt FI, AI incommensurabilia. Ostendimus AI medium esse; quare aggregatum quadratorum LM, NO, quod illi æquale est, medium erit.

Item quia AI, FI sunt incommensurabilia, erit aggregatum quadratorum incommensurabile rectangulo LO quod fecimus æquale rectangulo FI. Denique lineæ QM, RM eodem modo ostendentur incommensurabiles potentia ac in propositione 95; ergo (*per* 79.) linea Q R est ea quæ cum medio medium totum efficit.

PROPOSITIO XCVIII.

Theorema.

Quadratum Apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen primam.

Sit Apotome cujus quadratum applicetur ad rationalem; dico latitudinem seu quotientem, esse Apotomen primam.

Demonstr. Vidimus (*in* 92.) rectangulum comprehensum sub Apotome prima & rationali, esse æquale quadrato Apotomes; hoc est si multiplicetur Apotome prima, per rationalem, producetur quadratum Apotomes; ergo si quadratum Apotomes dividatur per rationalem, restituetur Apotomes prima.

Coroll. Si quadratum Apotomes, per Apotamen primam dividatur, quotiens erit rationalis.

PROPOSITIO XCIX.

Theorema.

Quadratum mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen secundam.

Vidimus (*in* 93.) spatium contentum sub rationali, & Apotoma secunda, æquale esse quadrato mediæ Apotome primæ: ergo cum divisio restituat primam latitudinem, quadratum mediæ apotome primæ, per rationalem divisum, facit latitudinem Apotomen secundam.

PROPOSITIO C.

Theorema.

Quadratum mediæ Apotomæ secundæ ad rationalem applitatum, latitudinem efficit Apotomam tertiam.

In 94. habemus spatium contentum sub rationali & Apotoma tertia, æquale esse quadrato mediæ Apotome secundæ: ergo quadratum mediæ apotome secundæ per rationalem divisum restituit mediam Apotomam tertiam.

PROPOSITIO CI.

Theorema.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

In 95 habemus, Rectangulum sub rationali & Apotome quarta contentum æquale esse quadrato minoris: ergo quadratum minoris per rationalem divisum, latitudinem facit Apotomen quartam.

PROPOSITIO CII.

Theorema.

Quadratum illius, quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

In 96 habemus rectangulum sub rationali & Apotome quinta æquale esse quadrato illius, quæ cum rationali medium totum efficit: ergo quadratum illius quæ cum rationali medium totum efficit, per rationalem divisum, seu ad rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

PROPOSITIO CIII.

Theorema.

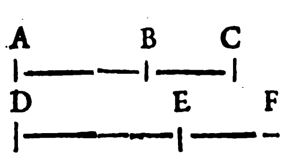
Quadratum illius quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen sextam.

Quia (*per* 97.) Rectangulum sub rationali & apotome sexta contentum æquale est quadrato illius quæ cum medio, medium totum efficit: ergo quadratum ejusdem per rationalem divisum latitudinem efficit Apotomen sextam.

PROPOSITIO CIV.

Theorema.

Apotomæ commensurabilis, similis est Apotome.



Sit Apotome A B, ipsique congruens BC, eruntque AC, BC rationales potentia tantum commensurabiles. Sit D E longitudine commensurabilis lineæ A B, dico D E Apotomen esse, imò & similem seu ordine eandem. Fiat ut A B ad D E ita B C ad E F, eritque (*per* 12.5.) ut AC ad DF, ita AB ad D E, aut BC ad EF, & (*per* 10.) erunt AC, D E; item BC, EF commensurabiles, & cum AC, BC sint rationales potentia commensurabiles, erunt D F, E F rationales potentia tantum commensurabiles, quare (*per* 74.) DE est Apotome. Addo & esse similem;

milem. Si enim AB plus possit quàm BC quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis (*per* 15.) DE plus poterit quàm quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel contra. Si AC expositæ rationali sit commensurabilis, erit & DF eidem commensurabilis, atque ita de cæteris: ergo si AB habeat omnes conditiones, ut sit quæcumque Apotome, ostendam DE eas omnes habere, & consequenter esse similem Apotomen.

Eôdem modò ostendam 105 mediæ Apotomæ commensurabilem mediam Apotomen esse & ordine eandem.

Propos. 106. Minori commensurabilem minorem esse.

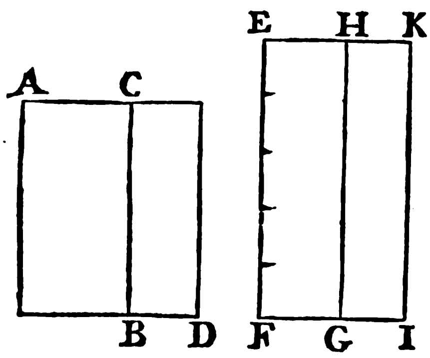
Propos. 107. Rectam lineam commensurabilem ei quæ cum rationali medium totum efficit, cum rationali medium totum efficere.

Propos. 108. Commensurabilem ei quæ cum medio medium totum efficit, & ipsam cum medio medium totum efficere.

PROPOSITIO CIX.

Theorema.

Medio à rationali detracto, linea reliquum potens vel Apotome vel minor est.



Sit rectangulum rationale AD, à quo subtrahatur medium CD, dico rectam quæ potest reliquũ spatium AB, unam esse ex duabus irrationalibus, nempe Apotomen aut minorem. Exponatur rationalis EF, ad quam applicentur rectangula EI, HI rectangulis AC, CD æqualia.

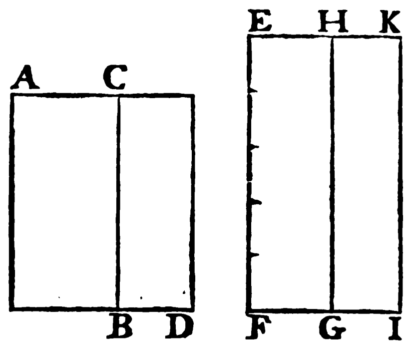
Demonstr. Rectangulum EI rationali AD æquale, rationale est, & (*per* 21.) erit EK rationali EF longitudine commensurabilis. Item cum HI medio CD, sit æquale, medium erit, & (*per* 23.) erit HK rationalis longitudine ipsi HG seu rationali EF incommensurabilis, & (*per* 13.) erunt EK, HK longitudine incommensurabiles, eritque EH Apotome, & HK congruens. Vel ergo EK plus potest quam HK quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si primum erit EH apotome prima; si secundum erit EH apotome quarta, & (*per* 92. & 95.) linea potens spatium EG, seu AB erit aut Apotome, aut minor.

PROPOSITIO CX.

Theorema.

Rationali à medio detracto, alia duæ irrationales fiunt, vel media Apotoma prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

Subtrahatur à medio AD, rationale CD; dico

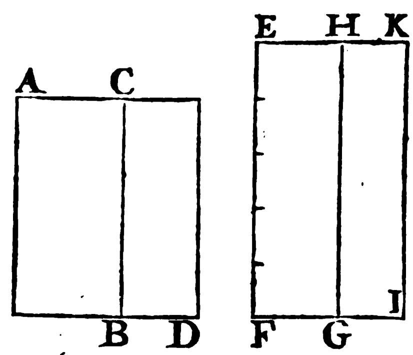


rectam quæ potest reliquũ AB vel esse mediæ Apotome primã, vel eam quæ cum rationali medium totum efficit. Factâ enim eâdem constructione; cum AD sit medium, erit EI illi æquale medium, eritque (*per* 23.) EK rationalis, rationali EF longitudine incommensurabilis. Et cum HI rationali CD æquale sit, & ipsum rationale erit; & HK longitudine commensurabilis erit rationali EF; Sunt ergo EK, HK rationales potentia tantum commensurabiles; quare (*per* 74.) reliqua EH est Apotome. Vel ergo EK plus potest quam HK quadrato lineæ sibi commensurabilis, vel incommensurabilis; si primum EH erit Apotome secunda, & (*per* 93.) linea potens spatium EG, seu AB mediæ est Apotome prima; si secundum EH (*ex def.*) est Apotome quinta, & (*per* 96.) linea potens spatium EG, seu AB, est ea quæ cum rationali medium totum efficit.

PROPOSITIO CXI.

Theorema.

Medio à medio detracto, quod sit toti incommensurabile, fiunt reliqua irrationales, vel media Apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.



Subtrahatur à medio AD medium CD, sed ipsi incommensurabile; dico rectam, quæ potest reliquum spatiũ AB, vel esse mediam Apotomen secundam, vel eam quæ cum medio medium totum efficit. Fiat eadem constructio.

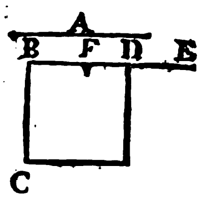
Demonstr. Cum AD & ei æquale EI, sit medium, & EF sit rationalis, erit EK rationalis ipsi EF potentia tantum commensurabiles. Idem dicendum de HK. Et cum AD, CD & eis æqualia EI, HI supponantur incommensurabilia; erunt EK, HK eamdem cum illis rationem habentes (*per* 1. 6.) incommensurabiles; Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles, & (*per* 74.) reliqua EH erit Apotome. Vel ergo EK plus potest quàm HK quadrato sibi longitudine commensurabilis; & sic EH erit Apotome tertia, & (*per* 94.) linea potens spatium EG, seu AB, est mediæ Apotome secunda. Vel EK plus potest quàm HK quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & tunc (*per def.*) linea EH erit Apotome sexta. Et (*per* 97.) linea potens spatium EG, seu AB, erit ea quæ cum medio medium totum efficit; quod erat demonstrandum.

PROPO

PROPOSITIO CXII.

Theorema.

Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus.



Sit Apotome A, dico A non esse eandem ac quæ ex binis nominibus. Sit enim si fieri possit A ex binis nominibus, exponaturque rationalis B C, ad quam applicetur quadratum ex A, seu rectangulum CD æquale quadrato ex A.

Demonstratio. A supponitur Apotome, ergo (*per* 98.) erit latitudo B D Apotome prima. Sit ei congruens D E, eruntque (*per definit.*) BE, DE rationales potentiâ tantùm commensurabiles, poteritque B E plus quàm D E quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, & ipsa B E erit rationali lineæ commensurabilis longitudine.

Ex alia verò parte si A esset ex binis nominibus, erit (*per* 61.) latitudo BD ex binis nominibus prima, sit majus nomen BF, & minus FD, eruntque (*per defin.*) BF, F D rationales potentiâ tantum commensurabiles, poterit B F plusquam FD quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, & BF erit longitudine commensurabilis rationali BC. Eruntque BE, B F commensurabiles, longitudine cum eidem B C sint commensurabiles, & reliqua F E eisdem commensurabilis, eritque consequenter FE rationalis. Rursus cum E F sit incommensurabilis longitudine, ipsi DE, erit quoque FE ipsi DE incommensurabilis; sed utraque F E, D E rationalis est ostensa, quare F E, D E, sunt rationales potentia tantum commensurabiles; erit ergo (*per* 74.) reliqua FD Apotome & irrationalis, cum tamen iam sit ostensa rationalis. Ergo Apotome, & ex binis nominibus eadem non est.

Coroll. Apotome & cæteræ ipsas consequentes, neque mediæ, neque inter se sunt eædem. Quia quadratum mediæ ad rationalem applicatum (*per* 23.) latitudinem efficit rationalem rationali lineæ longitudine incommensurabilem.

Quadratum Apotome eidem rationali applicatum latitudinē efficit Apotomen primam (*per* 98.)

Quadratum mediæ Apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem efficit Apotomen secundam (*per* 110.)

Quadratum mediæ Apotomæ primæ, Apotomen tertiam restituit.

Quadratum minoris, Apotomen quartam.

Quadratum ejus quæ cum rationali medium totum efficit Apotomen 5.

Denique quadratum ejus quæ cum medio medium totum efficit, Apotomen 6.

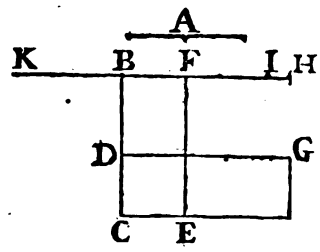
Ex quibus sequitur rationali cuipiam expositæ 13 esse lineas irrationales inter se differentes.

1. Mediam.
2. Ex binis nominibus cujus sunt 6 species.
3. Ex binis mediis primam.
4. Ex binis mediis secundam.
5. Majorem.
6. Rationale & medium potentem.
7. Bina media potentem.
8. Apotomen cujus sunt 6 species.
9. Mediæ Apotome primam.
10. Mediæ Apotomę secundam.
11. Minorem.
12. Cum rationali medium totum efficientem.
13. Cum medio medium totum efficientem.

PROPOSITIO CXIII.

Theorema.

Quadratum rationalis ad eam quæ ex binis nominibus applicatum, latitudinem facit Apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus eius quæ ex binis nominibus. Et Apotome quæ fit, eundem habet ordinem, ac quæ ex binis nominibus.



Sit rationalis A & ex binis nominibus BC, ad quam applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex A. Sitque latitudo DF; hanc dico esse Apotomen, & ipsius nomina, hoc est totam lineam, & ipsi congruentem, esse commensurabilia nominibus BD, DC ipsius BC. Addo hanc Apotomen eamdem esse ordine, ac BC. Applicetur idem quadratum A ad minus nomen DC, sitque rectangulum CG, æquale quadrato A.

Demonstr. Rectangula BE, CG eidem quadrato A æqualia, inter se sunt æqualia: ergo (*per* 13. 6.) ita est BC ad CD, sicut DG, seu BH ad BF, & dividendo ut BD ad DC, ita FH ad BF. Et cum BD sit majus nomen, erit F H major quàm BF. Sint BF, F I æquales. Fiatque ut H I ad I F ita FB ad BK; erit componendo ut H F ad I F, seu BF, ita FK ad B K. Est autem ut HF ad BF, ita BD ad DC, ergo ut est BD ad DC, ita FK ad BK. Sunt autem (*per* 10.) BD & DC rationales potentia tantum commensurabiles, ergo & FK, BK erunt rationales potentiâ tantum commensurabiles.

Deinde cum sit ut H F ad B F ita F K ad B K, erunt antecedentes simul ad consequentes ut una ad unam, nempe ita erit HK ad FK ut FK ad BK, & FK erit media proportionalis inter HK & B K: ergo ita erit quadratum H K ad quadratum F K ut H K ad B K.

Item CG quadrato rationalis A æquale rationale est, & (*per* 21.) applicatum ad DC facit latitudinem DG seu HB rationalem ipsi DC longitudine commensurabilem. Est autem ut B D ad D C ita F K ad B K, aut HK ad F K; ergo ut quadratum B D ad quadratum DC ita quadratum H K ad quadr. F K, sed quadrata B D, DC sunt commensurabilia, cum lineæ B D, DC supponantur rationales potentia commensurabiles: ergo quadratum H K commensurabile est quadrato ex F K, ut autem quadratum H K ad quadr. F K ita HK ad B K: Sunt ergo H K, BK longitudine commensurabiles, quare & reliqua BH quæ ostensa est rationalis. Est igitur H K rationalis sicut & B K; sed F K ipsi B K potentia commensurabilis est ostensa, quare cum FK, BK rationales sint potentia tantum commensurabiles, erit (*per* 74.) reliqua BF, Apotome & congruens F K; quod erat primum.

Ostendimus HK, BK longitudine commensurabiles esse: ergo (*per* 16) BK BH sunt longitudine commensurabiles, sed BH ipsi DC est commensurabilis;

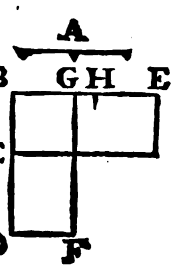
menſurabilis,ergo & BK. Item ita eſt BD ad DC; ut F K ad B K, & permutando erit B D ad F K, ſicut DC ad BK. Sed ultimæ ſunt commenſurabiles; ergo & BD, FK. Erunt ergo nomina Apotomes F K, BK nominibus B D, DC commenſurabilia, quod eſt ſecundum; immo & proportionalia.

Denique vel B D plus poteſt quàm D C quadrato ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Probabitur item FK plus poſſe quàm B K quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis vel incommenſurabilis ex ſimilitudine rationum, ſicut & cæteræ omnes conditiones: quare Apotome B F ipſi B C ordine reſpondet quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO CXIV.

Theorema.

Quadratum rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit binomium, ſuntque nomina utriuſque, & proportionalia & commenſurabilia: ſunt item amba in eodem ordine.



Sit rationalis A, Apotome BC, congruens CD; & applicetur ad BC rectangulum C E æquale quadrato rationalis A; dico B E eſſe binomium, cujus nomina erunt commenſurabilia & proportionalia nominibus lineæ B D. Applicetur ad BD rectangulum B F, æquale eidem quadrato A, eruntque CE, BF æqualia,& (*per* 13. 6.) erit ut B E ad B G ita B D ad B C; & per converſionem ut BE ad GE ita BD ad CD. Sit item EH ad HG ut BE ad G E.

Demonſtr. Quia eſt ut tota B E ad totam G E ita EH ad BE, ita erit reliqua BH ad HE ut tota BE ad totam G E, hoc eſt ut E H ad H G: ergo ita eſt BH ad HE ut HE ad HG; quare HE eſt media proportionalis inter BH & GH, erit ergo ut B H ad GH ita quadratum B H ad quadratum HE. Vidimus iam ita eſſe BD ad CD ut B F ad GE, ſeu BH ad HE. Sunt autem BD,CD nomina Apotomes lineæ rationales potentiâ tantum commenſurabiles,erunt BH, HE potentia commenſurabiles, & eorum quadrata commenſurabilia. Ut autem eorum quadrata ita BH ad GH: ergo BH, G H ſunt commenſurabiles longitudine. Quare reliqua BG eiſdem erit longitudine commenſurabilis. Item cum B D rationalis ſit, nempe majus nomen Apotome, & rectangulum B A quadrato rationali A æquale rationale; erit B G latitudo rationalis (*per* 21.) commenſurabilis longitudine ipſi BD; quare B H quoque rationalis erit. Sunt autem BH, H E potentiâ ſolum commenſurabiles, & B H rationalis. Sunt ergo rationales BH, HE potentia ſolum commenſurabiles. Eſt ergo BE binomium, quod erat primò demonſtrandum.

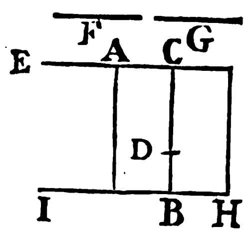
Oſtendimus item ita eſſe B H ad HE ſicut BD ad C D, & permutandoita erit BH ad BD ſicut HE ad CD; quare cùm BH, BD ſint longitudine commenſurabiles, erunt & HE, CD. Quare BH, HE nomina binomia, commenſurabilia ſunt ipſis BD, CD nominibus Apotomæ; immo & proportionalia; quod erat ſecundum.

Denique ſi BD plus poſſit quam CD, quadrato lineæ ſibi commenſurabilis vel incommenſurabilis, idem oſtendam de BH reſpectu HE, atque ita de reliquis conditionibus,& conſequenter Apotome & binomium in eodem erunt ordine. Hoc eſt vel utraque prima, vel utraque ſecunda &c.

PROPOSITIO CXV.

Theorema.

Si ſpatium contineatur ſub Apotoma, & binomio cujus nomina ſunt proportionalia, & commenſurabilia, recta ſpatium potens rationalis eſt.

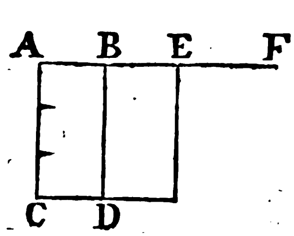


Spatium A B contineatur ſub Apotoma AC, & binomio C B, ita ut nomina illius C D, DB ſint commenſurabilia, & proportionalia, C E, A E nominibus apotomæ A C & in eadem ſint ratione, & recta F poſſit ſpatium AB, dico rectam F rationalem eſſe. Sit enim rationalis G, cujus quadratum applicetur binomio C B, fiatque rectangulum CH erit(*per* 113.)latitudo BH Apotome cujus nomina H I, B I erunt & proportionalia & commenſurabilia nominibus C D, D B, hoc eſt C E, AE, & permutando ut tota H I ad totam C E ita ablata B I ad ablatam A E: ergo & reliqua BH ad reliquam A C ut tota H I ad totam C E. Commenſurabiles autem ſunt longitudine H I, C E quod utraque eidem C D commenſurabilis ſit: ergo & BH, AC longitudine ſunt commenſurabiles, & HC ipſi BA; ſed H C æquale quadrato lineæ rationalis rationale eſt: ergo & AB. Ergo linea F illud potens rationalis erit.

PROPOSITIO CXVI.

Theorema.

A media infinita fiunt irrationales diverſa à ſuperiùs enumeratis.



Sit media AB, dico ex illa fieri irrationales infinitas diverſa à tredecim ſuprà recenſitis. Expoſita enim rationali A C ſpatium A D contineatur ſub A B media, & rationali AC, illud (*per* 38.) irrationale erit. Poſſit ipſum recta BE, quæ irrationalis erit; dico BE non eſſe eandem cum ſupra recenſitis.

Demonſtr. Quadratum mediæ ad rationalem AC applicatum latitudinem facit rationalem ipſi AC incommenſurabilem longitudine (*per* 23.) & quadrata reliquarum ad eamdem AC applicata faciant latitudines aut apotomas, aut binomia, & quadratum hujus irrationalis BE ſimiliter applicatum faciat mediam AB, hæc irrationalis BE ab iis omnibus erit diverſa.

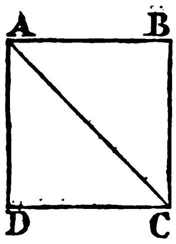
Quòd ſi compleatur rectangulum BE,illud contentum erit ſub rationali BD, & irrationali BE, irrationale

irrationale erit. Possit eum recta EF, hæc irrationalis erit: hanc ostendo esse diversam à tredecim supra recensitis, nec ipsi DE. Nam quadratum EF ad rationalem applicatum, faciat latitudinem BE, ostendam quadrata aliarum applicata ad BD facere aliam latitudinem à BE; sic aliæ atque aliæ irrationales diversæ comparari possunt.

PROPOSITIO CXVII.

Theorema.

Diameter quadrati, ejusdem lateri longitudine est incommensurabilis.



E... H ... F
G . . . .

Sit quadratum A B C D, sitque diameter AC, & latus AC; dico AB esse longitudine incommensurabilem ipsi AC. Si enim commensurabiles essent haberent rationem, quam numerus ad numerum. Habeant igitur si fieri potest eamdem quam numerus EF ad numerum G, sintque numeri EF & G minimi in sua proportione.

Demonstr. Ita dicitur esse A B ad A C ut numerus G ad EF: ergo ut quadratum AB ad quadratum A C, ita quadratus numeri G ad quadratum EF, sed (*per* 47.1.) quadratum AC duplum est quadrati AB: ergo & quadratus E F duplus erit quadrati ex G. Quadratus ex E F dividatur bifariam. Debet autem posse dividi; ergo par erit, & numerus E F ipsum producens par erit. Dividatur ergo E F bifariam in H, quadratus ex EF, quadruplus erit quadrati ex E H. Duplus autem est quadrati ex G, quare quadratus ex G duplus est quadrati ex EH, erit ergo quadratus ex H par cum habeat dimidium. Sed *in* 24 *septimi* demonstratum est si nmeri in sua proportione sint minimi, si unus sit par, alium esse imparem: si enim uterque par esset, divideretur uterque bifariam, & earum semisses in eadem essent ratione, ergo non essent minimi.

Aliter idem demonstratur AC ad AB dicantur rationem habere, quam numerus E F ad G, qui numeri minimi sunt in sua proportione & inter se primi; non erit G unitas, quia quadratus ex EF binarius esset. Quoniam autem quadratus ex E F duplus est quadrati ex G. quadratus ex G metietur quadratum ex E F, & (*per* 14. 8.) G latus metietur latus E F. Cùm ergo G seipsum metiatur, erunt numeri G & EF compositi; contra suppositionem.

SYNOPSIS TOTIUS LIBRI.

De commensurabilibus & incommensurabilibus.

CUM hæc vox commensurabilitatis sit respectiva debet ad aliquam magnitudinem respectum habere. Hæc prima magnitudo vocatur rationalis; cui commensurabiles sive potentiâ tantùm, sive lõgitudine, rationales dicuntur.

Possunt plures magnitudines quæ cum propositâ rationali comparantur, iterum inter se conferri. Licet enim rationales sint, possunt nonnunquam & ipsæ inter se commensurabiles esse longitudine, aliquando potentiâ tantum.

Antequam igitur ad peculiares lineas descendatur æquum fuit ut generales traderentur quibus commensurabilitas, & incommensurabilitas dignosceretur.

Et primò quidem dicitur quod si una magnitudo ab alia, & reliquum à secunda alternatim subtrahantur, erunt incommensurabiles, si nunquam reliquum præcedentem metiatur. Exinde docemus methodum quotcumque commensurabilium communem mensuram inveniendi. Stabilimus consequenter magnitudines commensurabiles eamdem habere rationem quam numerus ad numerum. Item linearum commensurabilium longitudine quadrata, eamdem habere rationem quam numerus quadratus ad quadratum cum suis conversis. Ex quo sequitur lineas longitudine commensurabiles, potentia tales esse, non tamen vicissim.

Quatuor proportionalium si prima secundæ fuerit commensurabilis, erit & tertia quartæ; si duæ eidem fuerint commensurabiles, erunt & inter se. In proportionalibus si prima plus possit quàm secunda quadrato lineæ sibi incommensurabili, idem dicendum de tertia respectu quartæ si partes commensurabiles sint, & totum singulis erit. Si partes incommensurabiles sint, & totum singulis erit incommensurabile, & vicissim.

Si rectangulum sub segmentis majoris æquale sit quadranti quadrati minoris, & segmenta illa sint commensurabilia, major plus poterit quàm minor quadrato lineæ sibi commensurabilis, & vicissim.

Eidem rectæ duas incommensurabiles unam potentiâ tantum, alteram omninò reperire.

Rectangulum contentum sub longitudine commensurabilibus lineis & rationalibus, hoc est propositæ rationali lineæ saltem potentiâ commensurabilibus, rationale est, seu quadrato rationalis lineæ commensurabile.

Rationale divisum per lineam rationalem; hoc est saltem potentia primæ rationali commensurabilem, quotientem efficit rationalem, & divisori longitudine commensurabilem.

Quod sub rationalibus potentiâ tantum incommensurabilibus continetur est irrationale, & radix ejus est irrationalis dicta media. Dicitur medium, quia est medium proportionale inter quadrata linearum.

Quadratum mediæ divisum per rationalem, hoc est primæ rationali saltem potentiâ commensurabilem, quotientem facit rationalem.

Mediæ commensurabilis saltem potentia media est.

Rectangulum contentum sub mediis longitudine commensurabilibus, medium est; sub commensurabilibus tantum potentiâ, vel rationale est vel medium.

Medium non superat medium rationali.

Invenire medias potentiâ tantum commensurabiles tabiles quæ rationale contineant, item quæ mediū.

Invenire duas rationales potentiâ tantum commensurabiles, ita ut major plus possit, quàm minor quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Item incommensurabilis similiter de duabus mediis rationale continentibus. Item de medium continentibus.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, ita ut aggregatum quadratorum sit rationale, & rectangulum sub ipsis medium. Vel contra. Vel utrumque medium, sed incommensurabile.

Binomium irrationalis est linea, ex duabus rationalibus potentiâ tantum commensurabilibus composita.

Ex duabus mediis prima constat duabus mediis potentia tantum commensurabilibus, quæ rationale contineant.

Ex duabus mediis 2. constat duabus mediis potentiâ tantum commensurabilibus quæ medium contineant.

Major est irrationalis linea ex duabus potentiâ incommensurabilibus constans, ita ut aggregatum quadratorum sit medium, & rectangulum sub ipsis medium.

Bina media potens est irrationalis linea, ex duabus potentia incommensurabilibus constans, ita ut tam aggregatum quadratorum, quàm rectangulum sit medium, sed sint incommensurabilia.

Quæ ex binis nominibus, in uno tantum puncto in sua nomina dividitur.

Sicut ex binis mediis prima, secunda, major, rationale & medium potens, & bina media potens.

Binomiorum sunt 6 species.

Prima talis est ut majus nomen plus possit quàm minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, & majus nomen sit expositæ rationale longitudine commensurabile.

2. Binomium vult minus nomen esse rationali expositæ commensurabile.

3. Neutrum.

Quartum binomium tale est ut majus nomen plus possit, quàm minus, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & majus nomen sit expositæ rationali commensurabile.

Quintum ut sit minus nomen.

Sextum ut neutrum.

Tum traduntur methodi ad eas inveniendas.

Linea potens rectangulum sub rationali, & binomio primo, irrationalis est, & est binomium.

Si sub rationali & binomio secundo, ex binis mediis prima erit.

Si sub rationali & binomio tertio, ex binis mediis secunda.

Si sub rationali & binomio quarto. Major.

Si sub rationali & binomio quinto, rationale & medium potens.

Si sub rationali & binomio sexto, bina media potens erit.

Binomij quadratum per rationalem divisum, quotientem exhibet binomium primum.

Quadratum ejus quæ ex binis mediis prima per rationalem divisum quotientem habet binomium 2.

Quadratum ex binis mediis secundæ, binomium tertium.

Quadratum majoris; binomium quartum.

Quadratum, rationale, & medium potentis, binomium quintum.

Quadratum bina media potentis, binomium sextum.

Binomio commensurabilis long. simile est binomium, idem dicito de binis mediis, de majore, de rationali & medio potente, de bina media potente.

Si rectangulum rationale & medium componantur, linea totum potens irrationalis est, vel binomium, vel quæ ex binis mediis prima, vel major, vel rationale, & medium potens.

Si duo media incommensurabilia componantur, linea totum potens vel erit ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

Si à rationali rationalis potentia tantum commensurabilis auferatur, restat Apotome, quæ est irrationalis, sicut & sequentes.

Si à media media auferatur potentia tantum commensf. quæ cum tota rationale contineat, vocetur mediæ Apotome prima. Si medium contineat erit mediæ Apotome secunda.

Si à recta alia auferatur potentiâ illi incommens. ita ut aggreg. quadratorum sit rationale rectangulum medium, dicatur minor. E contra si aggr. quadr. sit medium, & rectang. rationale, dicitur cum rationali medium totum efficiens. Si utrumque medium dicatur cùm medio, medium totum efficiens.

Omnibus his lineis unica tantum congruit linea, quæ habeat supradictas conditiones.

Sex sunt species Apotomæ. In tribus primis tota plus potest quàm congruens quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. In tribus posterioribus incommensurabilis.

In prima & quarta, tota est expositæ rationali commensurabilis longitudine. In secunda & quinta congruens. In tertia, & sexta neutra.

Exinde sequitur inventio Apotomarum.

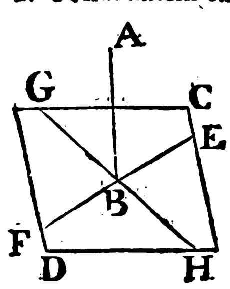
Si rectangulum contineatur sub rationali & Apotoma, prima linea illud potens est Apotome.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

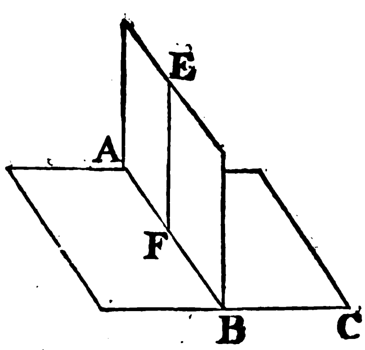
Definitiones.

1. Solidum est quantitas longitudinem, latitudinem, & crassitiem habens.

2. Solidi autem extrema sunt superficies.

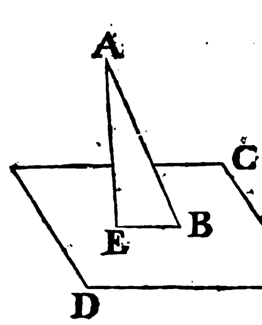


3. Linea dicitur ad planum recta, quæ est perpendicularis ad omnes lineas ductas in prædicto plano, & eam tangentes. *Ut linea AB dicitur recta ad planum CD, si ad omnes lineas ductas in plano CD per punctum B, quales sunt EF, GH fuerit perpendicularis ita ut anguli ABE, ABF, ABG, ABH, &c. sint recti.*

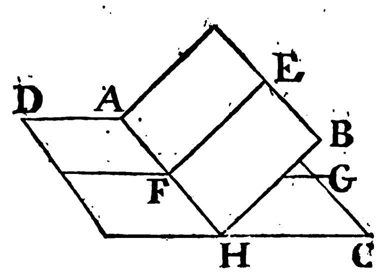


4. Planum ad planum rectum est, cum lineæ in uno plano ductæ perpendiculares communi planorum sectioni, ad alterum planum sunt rectæ.

Communem planorum sectionem vocamus lineam existentem in utroque plano, qualis est AB, quæ est tam in plano AC, quam in plano AE. Si igitur linea EF ducta in plano AE & perpendicularis ad communem sectionem AB; fuerit recta ad planum AC; planum AE ad planum AC, rectum est.



5. Si linea AB non fuerit recta ad planum CD, & ex ejus puncto sublimi A ducatur AE ad planum CD recta; ducatur item linea BE, angulus ABE est inclinatio lineæ AB, cum plano CD.



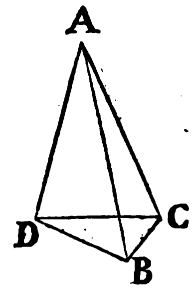
6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus, quem comprehendunt duæ lineæ in utroque plano ductæ, & perpendiculares ad communem eorum sectionem. *Ut plani AB ad planum CD inclinatio est angulus acutus EFG, quem comprehendunt lineæ EF, FG, utraque perpendicularis in suo plano, ad communem sectionem AH.*

7. Planum ad planum, similiter inclinatum est cum anguli inclinationum fuerint æquales.

8. Plana parallela sunt ea, quæ quantumvis producantur ex omni parte, æquali semper intervallo ubique distant.

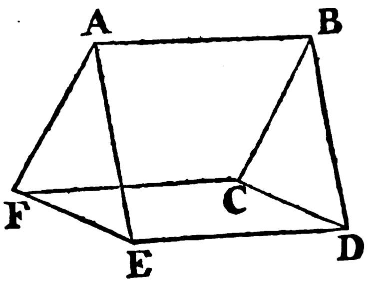
9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ totidem planis similibus continentur. *Ut duo cubi. Hæc tamen definitio convenit sphæris; tales autem figuræ angulos solidos æquales habent.*

10. Æquales & similes solidæ figuræ, sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur; nam si animo concipiantur se penetrare, neutra aliam excedet cum angulos & latera æqualia habeant.



11. Angulus solidus est plurium quam duarum linearum in diversis planis existentium mutua inclinatio. *Ut inclinatio quam habent tres lineæ AB, AC, AD in diversis planis existentes.*

12. Pyramis est figura solida, quæ triangulis continetur: quorum bases sunt in eodem plano; vertex vero communis. *Ut figura ABCD.*



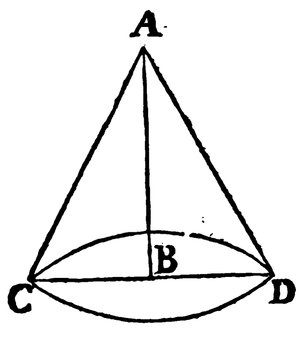
Prisma est figura solida, cujus adversa duo plana æqualia, similia, & parallela sunt, alia verò parallelogramma. *Possunt autem parallela latera esse quæcumque polygona ; ut in figura ABCDEF.*

12. Sphæra est figura solida, unicâ superficie contenta, ad quàm ab uno puncto intra figuram posito ductæ lineæ sunt æquales. *Alij sphæram definiunt per circumvolutionem semicirculi, circa diametrum quiescentem.*

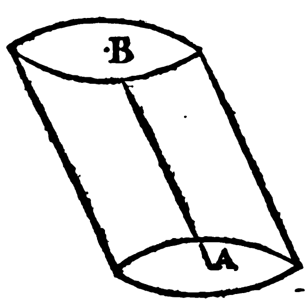
15. Axis est quiescens illa linea, circa quàm semicirculus convertitur.

16. Centrum sphæræ, est idem, ac centrum semicirculi. *Intellige illius semicirculi ; cujus circumvolutione generatur sphæra.*

17. Diameter est quæcumque linea, per centrum sphæræ transiens : & in ejus superficie utrinque terminata.



19. Si ex puncto sublimi, linea circumferentiam circuli decurrat, conum describet. *Ut si linea AC manens immobilis in puncto A, decurrat circumferentiam circuli CD describit conum, cujus vertex est punctum A in sublimi positum* ; basis subjectus circulus. Axis linea ducta à vertice ad centrum basis.



20. Si circa duos circulos parallelos moveatur linea, ita ut sit semper parallela lineæ connectenti centra circulorum ; describet cylindrum. Linea circulorum centra connectens dicitur axis ut AB.

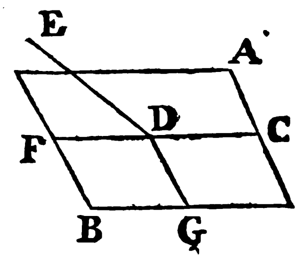
21. Similes coni, & cylindri si recti sint (voco autem rectos cum axis est perpendicularis ad basin) sunt quorum axes, & diametri basium sunt proportionales.

In inclinatis verò addendum est ; ut axes sint ad bases similiter inclinati.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Recta lineæ pars aliqua non est in aliquo plano, alia verò in sublimi.



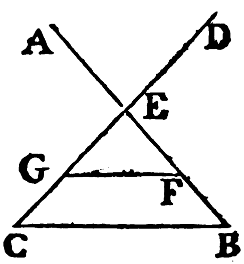
Sit in plano AB, alicujus lineæ rectæ pars CD, dico reliquam partem ejusdem lineæ non esse extra illud planum, qualis est DE.

Demonstr. Certum est in plano AB, esse aliquam lineam DF quæ in directum jaceat cum lineâ CD ; (nam possemus ducta linea DG, duos angulos CDG, GDF facere duobus rectis æquales, & tunc (*per* 14. 1.) DF unam lineam efficeret cum CD, quod tamen fieri non posset : nam duæ rectæ ED, FD, idem haberent segmentum commune CD, (*contra* 10. *pronunciatum.*

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si duæ rectæ se mutuò secent, in eodem sunt plano; & omne triangulum in eodem est plano.



Duæ rectæ AB, CD se mutuò secent in puncto E, & adjunctâ lineâ BC, fiat triangulum EBC; dico totum triangulum EBC, & totas lineas AB, BC in eodem esse plano.

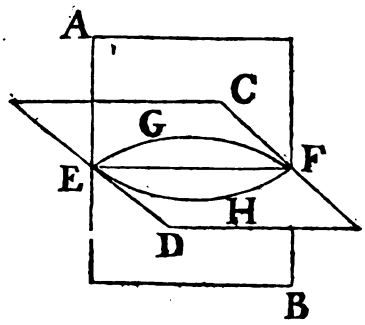
Demonstr. Si enim fieri potest pars BFGC trianguli EBC, in uno sit plano, & alia EFG, in alio : igitur linearum EB, FG, pars una EF, EG in uno erit plano ; alia FB, GC erit in alio (*contra* 1. *hujus*) & consequenter lineæ AB, CD quæ in eodem plano trianguli EBC existunt, totæ sunt in eodem plano.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si duo plana se mutuò secent communis eorum sectio est linea recta.

Plana



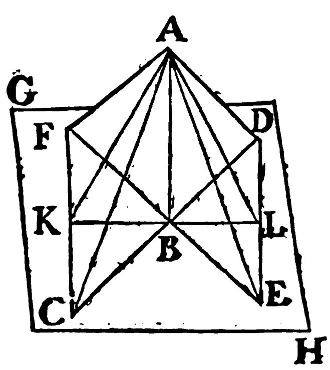
Plana AB, CD se mutuò secent; sitque eorum communis sectio linea E F, dico eam esse lineam rectam.

Demonstr. Si enim EF non est linea recta, ducatur in plano AB, à puncto E ad F linea recta EGF, & in plano C D linea recta EHF, quæ non coincident, alioquin illæ ad utrumque planum pertinerent, essentque communis eorum sectio; tunc igitur duæ lineæ rectæ EHF, EGF spatium clauderent; quod est *(contra 12. pronunciatum.)*

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si linea fuerit duabus lineis se mutuò secantibus ad rectos angulos, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit.



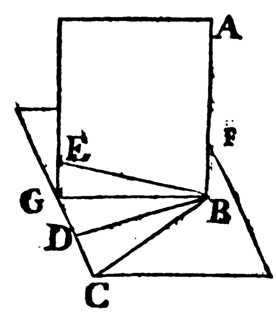
Sit linea AB perpendicularis duabus lineis CD, EF, se mutuò secantibus in B. Ita ut anguli ABC, ABD, ABE, ABF recti sint *(quod satis figura plana exhibere non potest)* dico lineam AB rectam esse ad planum GH in quo sunt lineæ CD, EF, hoc est si ducatur quæcumque linea KBL, lineam AB esse perpendicularem ad lineam K L; abscindantur 4 lineæ BC, B D, B E, B F æquales, ducanturque lineæ AC, AD, AE, AF, CF, DE.

Demonstr. In triangulis A B C, ABD, ABE, ABF, quia latus A B commune est, & latera B C, BD, BE, BF sunt facta æqualia & anguli in puncto B sunt recti & ideò æquales; erunt *(per 4. 1.)* bases AC, AD, AE, AF æquales: quia autem triangula CBF, EBD duo latera BC, BF, BE, BD habent æqualia, & angulos CBF, EBD, oppositos ad verticem *(per 15. 1.)* æquales; bases CF, ED, æquales erunt *(per 4. 1.)* Item anguli BED, BFC, in triangulis KBF, EBL, quia anguli KBF, EBL ad verticem sunt æquales, & anguli B E L, B F K ostensi sunt æquales, & latera FB, BE sunt æqualia, latera EL, KF; LB, KB, æqualia erunt: rursus quia triangula ACF, AED habent latera AC, AF, AE, AD æqualia, & bases CF, DE æquales: angulos omnes habebunt æquales *(per 8. 1.)* eruntque anguli AED, AFG æquales: quia verò in triangulis AEL, AFK, latera AE, AF; item EL, FK sunt æqualia; & anguli AEL, AFK ostensi sunt æquales; bases AK, AL *(per 4. 1.)* æquales erunt: tandem triangula A B K, A B L, quorum latus AB commune est, & latera BK BL ostensa sunt æqualia, item bases AL, AK; habebunt angulos A B K, A B L æquales, atque adeò rectos; quod ostendendum erat.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si recta linea perpendicularis sit ad tres lineas in eodem puncto se intersecantes, illæ sunt in eodem plano.



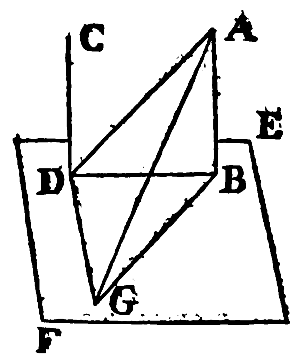
Sit linea AB perpendicularis ad tres lineas BC, BD, BE, se intersecantes in puncto E: dico illas in eodem esse plano.

Demonstr. Intelligatur planum A G in quo sunt lineæ AB, BE esse ductum. Item planum FG in quo sunt lineæ BD, B C, dico lineam B E esse communem sectionem planorum AG, FC, atque adeò eam esse in plano FC. Si enim non est communis sectio. Sit BG communis sectio. Quia linea AB est perpendicularis ad lineas BC, BD; perpendicularis erit *(per 4.)* ad planum FC, & consequenter ad lineam BG, igitur angulus ABG rectus est, sed iam angulus ABE rectus est: igitur anguli A B G, A B E in eodem plano existentes essent æquales: pars & totum quod est absurdum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Duæ lineæ ad idem planum rectæ, inter se sunt parallelæ.



Sint lineæ AB, CD ad idem planum E F rectæ, dico illas esse parallelas. Ductâ lineâ BD, *(per def. 3.)* anguli ABD, CDB sunt recti: quare si lineæ AB, CD probentur in eodem esse plano *(per 29. 1.)* erunt parallelæ, quod ita fiet: ducatur ad lineam BD perpendicularis DG, æqualis lineæ AB, junganturque lineæ AG, AD.

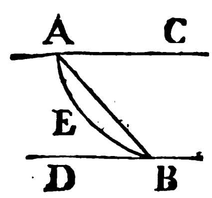
Demonstr. In triangulis ABD, BDG, latus BD, est commune, latera AB, DG sunt facta æqualia; anguli A B D, B D G sunt recti & æquales: igitur (*per* 4. 1.) bases A G, AD sunt æquales. In triangulis ABG, ADG, latera AB, DG; item BG, AD sunt æqualia, & basis AG communis, igitur (*per* 8. 1.) anguli ABG, ADG sunt æquales; sed ABG (*per def.* 3.) rectus est, igitur A D G, rectus erit: sed G D B jam rectus factus est, & G D C; item quia linea C D est recta ad planum E F. Igitur recta GD est perpendicularis ad tres lines CD AB, BD, quæ (*per* 5.) in eodem plano erunt, sed linea AB est in eodem plano in quo existunt A D, B D, (*per* 2.) igitur AB, CD in eodem plano.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Linea qua duo puncta parallelarum conjungit, in eodem cum ipsis est plano.

Linea A B, conjungat duo puncta A & B, parallelarum A C, D B; dico lineam A B existere in eodem plano in quo existunt lineæ AC, DB.



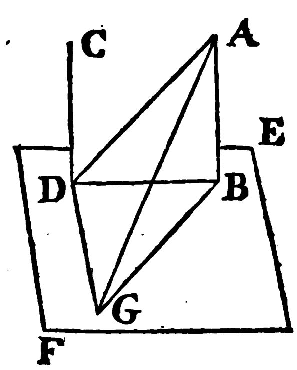
Demonstr. In eo plano ducatur recta linea à puncto A ad B, quæ nisi coincidat cum A B sit AEB: duæ rectæ A E B, A B spatium clauderent (*contra pron.* 12.) igitur linea A B est in eodem plano.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si parallelarum altera sit perpendicularis ad planum quidpiam; & alia ad idem perpendicularis erit.

Sint parallelæ A B, C D, quarum A B sit recta ad planum EF: dico & CD ad idem esse rectam. Ducatur in plano E F linea D G perpendicularis ad lineam BD & æqualis lineæ AB; junganturque lineæ AD, AG, BG.

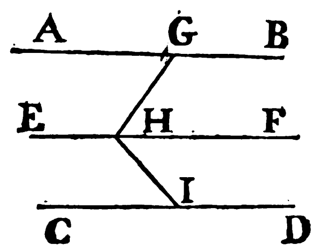


Demonstr. Primò lineæ A B, C D in eodem sunt plano, cum sint parallelæ; & anguli B A D, C D B sunt recti: lineæ etiam B D, A D, in eodem sunt plano in quo lineæ A B, CD. In triangulis autem A B D, B D G, latera A B, GD, sunt æqualia B D commune, & angulus ABG rectus (*per def.* 3.) & B D G factus est rectus, igitur anguli sunt æquales; quare (*per* 4. 1.) bases B G, A D æquales sunt. Rursus in triangulis A B G, ADG latera AB; DG, AD, BG sunt æqualia, & basis A G communis: igitur (*per* 8. 1.) anguli ABG, A D G sunt æquales, sed A B G rectus est, cum linea AB sit recta ad planum EF; igitur angulus G D A rectus est, quare linea G D recta est ad planum in quo sunt lineæ AD, BD (*per def.* 3.) & (*per def.* 5.) angulus G D C rectus erit. quare cum anguli C D B, C D G recti sint, linea C D recta erit ad planum E F.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Quæ eidem lineæ sunt parallelæ; licet non in eodem cum illa plano, inter se parallelæ.



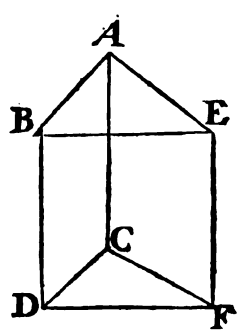
Sint lineæ AB, CD eidem lineæ E F parallelæ, licet non in eodem cum illa plano. Dico lineas AB, CD esse parallelas. Ducatur in plano linearum AB, EF; linea G H perpendicularis, & in plano linearum E F, C D ducatur perpendicularis H I.

Demonstr. Linea E H, perpendicularis ad lineas H I, & G H (*per* 4.) recta est ad planum per illas ductum: ergo (*per* 8.) lineæ AG, & CI ipsi parallelæ ad idem planum rectæ erunt: quare (*per* 5.) AB CD inter se parallelæ sunt.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si duæ rectæ concurrentes, sint parallelæ duabus aliis, licet non in eodem plano, æqualem angulum comprehendent.



Sit linea AB parallela lineæ C D, & A E ipsi C F, licèt non in eodem plano: dico angulos B A E, D C F esse æquales. Abscindantur lineæ A B.

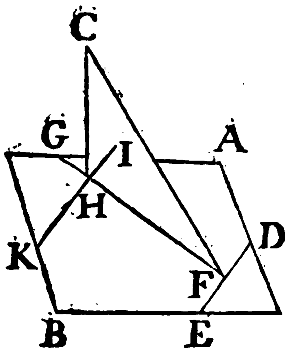
AB, CD; AE, CF æquales; ducanturque lineæ BD, AC, EF, BE, DF.

Demonstr. Cùm lineæ AB, CD sint æquales, & parallelæ, lineæ BD, AC (*per* 33. 1.) æquales erunt & parallelæ. Ita parallelæ erunt lineæ AC, EF; & (*per* 9.) lineæ BD, EF parallelæ erunt, & æquales; & lineæ BE, DF eas connectentes parallelæ erunt, & æquales. In triangulis verò BAE, DCF, cum latera AB, CD; AE, CF, facta sint æqualia; & basis BE basi DF; (*per* 8. 1.) anguli BAE, DCF æquales erunt.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Ad datum planum perpendicularem ducere ex puncto extra illud dato.



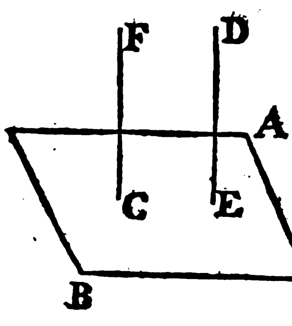
Sit planum AB, ad quod ex puncto C ducenda est perpendicularis. Ducatur linea DE utcumque, ad quam ex puncto C duc perpendicularem CF. Per F ad DE duc perpendicularem FG; ad quam ex C duc perpendicularem CH; dico CH esse rectam ad planum AB. Ducatur linea KI parallela lineæ DE.

Demonstr. Linea EF est perpendicularis ad lineas CF & FG: ergo & ad planum trianguli CFH (*per* 4.) & (*per* 8.) linea KI illi parallela ad idem planum recta est, quare (*per def.* 3.) angulus KHC rectus est: igitur cum linea CI faciat angulos rectos CIF CIK cum duabus lineis se intersecantibus, recta erit ad illorum planum quod est planum AB. (*per* 4.)

PROPOSITIO XII.

Problema.

Ad datum planum perpendicularem ducere, per punctum in eo datum.



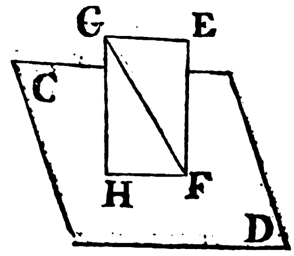
Ad planum AB per punctum C ducenda sit perpendicularis, ex quocumque puncto D. Ad idem planum ducatur perpendicularis DE (*per* 11.) cui (*per* 30. 1.) duc parallelam CF, hanc dico esse rectam ad planum BA.

Demonstr. Cùm enim lineæ DE, CF sint parallelæ, & DE sit recta ad planum AB; CF quoque (*per* 8.) ad idem recta erit.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Ex eodem plani puncto duæ perpendiculares ad illud non excitabuntur; neque ex eodem puncto extra illud posito.



Ex eodem puncto F plani DC non excitabuntur ad illud duæ perpendiculares.

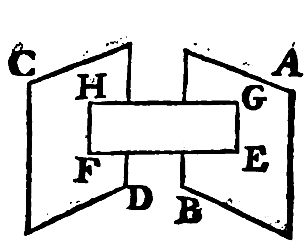
Demonstr. Sint enim si fieri potest duæ perpendiculares FE, FG, sitque planum per illas ductum FG, sequeretur (*per def.* 3.) angulos GFH, EFH esse rectos, & æquales, pars & totum; quod est absurdum.

Neque etiam ex eodem puncto G ad idem planum BC possunt duci duæ perpendiculares. Sint enim ductæ si fieri potest, nempe GF, GH, ducta linea HF; sequeretur in triangulo GFH angulos FHG, GFH esse rectos, (*contra* 17. 1.)

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Plana ad quæ eadem linea recta est; sunt parallela.



Sint plana AB, CD, sitque linea EF recta ad utrumque; dico plana AB, CD esse parallela. Ducatur linea GH lineæ EF parallela (*per* 30. 1.) junganturque lineæ GE, HF.

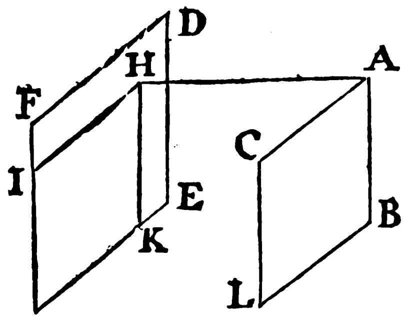
Demonstr. Quia lineæ CH, EF sunt parallelæ, & EF ad plana AB, CD recta est (*per* 8.) linea GH ad utrumque recta erit: igitur (*per def.* 3.) anguli FEG, HGE, GHF, EFH recti sunt, & (*per* 28. 1.) lineæ GE, HF, sunt parallelæ; igitur GEFH est parallelogrammum, in quo (*per* 34.) latera opposita GH & EF sunt æqualia, igitur etiam in G & H, plana æqualiter distant; ita ostendam in quocumque alio loco æqualiter distare; igitur sunt parallela.

PROPO

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si duæ rectæ coëuntes, sint parallelæ duabus se tangentibus, non in eodem plano; plana per ipsas ducta, sunt parallela.



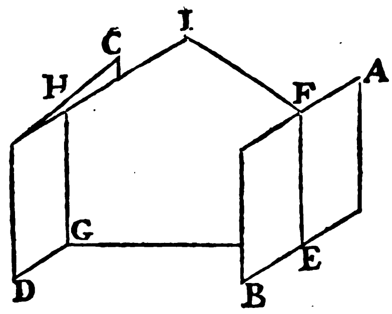
Rectæ AB, AC sint parallelæ rectis DE, DF in alio plano existentibus; dico plana AL, DI per AB, AC; & per DE, DF ducta, esse parallela. Ex puncto A ducatur (*per* 11.) linea AH recta ad planum DI, & per punctum H (*per* 30. 1.) ducantur lineæ HI, HK parallelæ lineis DE, DF, quæ (*per* 9.) parallelæ etiam erunt lineis AB, AC.

Demonstr. Quia lineæ AC, HI sunt parallelæ, (*per* 29. 1.) anguli AHI, HAC sunt duobus rectis æquales; sed AHI rectus est (cum linea AH, sit recta ad planum DG;) igitur HAC rectus est. Ita ostendetur rectus esse angulus HAB, quare (*per* 4.) linea AH recta est ad planum AL, igitur recta est ad utrumque scilicet ad plana AL, & DI: unde (*per* 14.) sunt parallela.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Si duo plana parallela eodem plano secentur, communes sectiones sunt parallelæ.



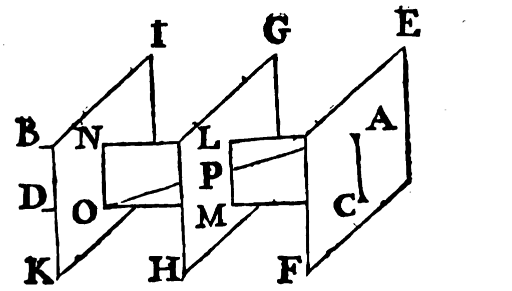
Sint duo plana parallela AB, CD, quæ secentur plano FG; dico communes sectiones FE, GH esse parallelas.

Demonstr. Si enim parallelæ non sunt, conveniant in puncto I, ergo si plana producantur, cum totæ lineæ (*per* 1.) sint in suis planis, convenient plana in puncto I: ergo parallela non sunt.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Duæ lineæ parallelis planis proportionaliter secantur.



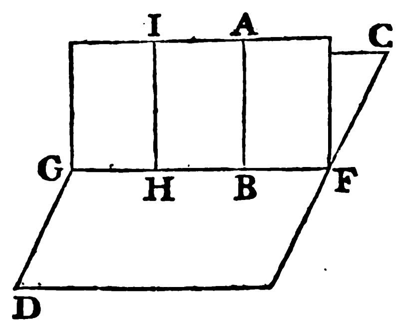
Sint lineæ AB, CD, quæ planis parallelis EF, GH, IK secentur in punctis A, C, L, M, N, O; dico illas proportionaliter secari, hoc est ita esse AL ad LN sicut CM ad MO. Ducatur linea AO, secans planum GH in puncto P. Ducantur item lineæ AC, NO; sintque communes sectiones plani trianguli ACO, & planorum EF, GH, lineæ AC, PM, quæ (*per* 16.) parallelæ erunt. Parallelæ item erunt NO, LP, communes sectiones planorum parallelorum GH, IK, & plani trianguli ANO.

Demonstr. Quia in triangulo AOC linea PM est parallela lateri AC, erit ut CM ad MO ita AP ad PO (*per* 4.6.) Pariter in triangulo ANO erit AL ad LN sicut AP ad PO; igitur est ut CM ad MO, ita AL ad LN; quod ostendendum erat.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si linea sit ad planum recta, omnia plana per ipsam ducta ad idem planum recta sunt.



Sit linea AB recta ad planum CD, dico omnia plana per AB ducta, hoc est in quo existet linea AB, quale est AH, esse rectum ad CD; hoc est, (*per def.*4.) lineam quamcumque IH perpendicularem ad communem sectionem planorum CD & FI, esse rectam ad planum CD.

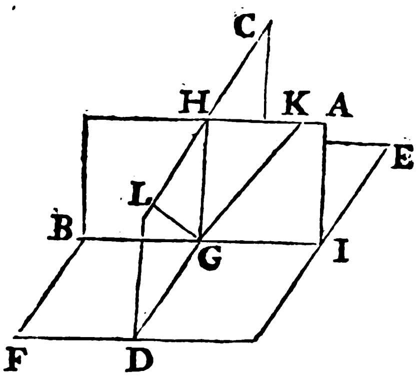
Demonstr. Cùm linea AB sit recta ad planum CD (*per def.*3.) angulus ABG rectus est: & cum linea IH sit perpendicularis ad lineam FG, angulus IHB rectus erit: igitur (*per* 28.1.) lineæ AB, IH sunt parallelæ; & cum AB sit recta ad planum CD, linea IH (*per* 8.) eidem plano recta erit.

PROPO

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si duo plana se invicem secantia, eidem sint ad rectos angulos; communis eorum sectio eidem plano recta erit.



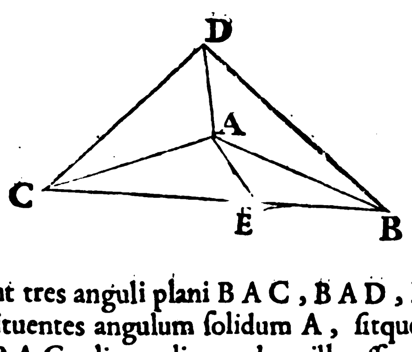
Sint plana AB, CD eidem plano EF, ad rectos angulos, dico communem eorum sectionem GH, esse rectam eidem plano E F.

Demonstr. Si enim hoc non sit ita. Ducatur in plano A B per punctum G perpendicularis ad communem sectionem I B; sitque K G, & in plano C D, linea G L perpendicularis ad communem sectionem G D. Quæ si non coincidant cum linea H L, duæ K G, G L perpendiculares ad communes sectiones planorum suorum rectorum ad planum E F, (*per def.*4.) illæ ad planum E F rectæ sunt. Igitur ad idem punctum G duæ perpendiculares ad idem planum ducerentur, (*contra* 13.) igitur illæ perpendiculares coincident cum linea G H : quæ propterea perpendicularis erit ad planum E F.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Ex tribus angulis planis solidum angulum componentibus, duo quilibet reliquo sunt majores.



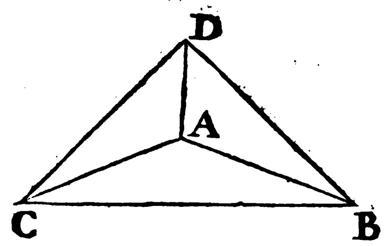
Sint tres anguli plani B A C, B A D, D A C, constituentes angulum solidum A, sitque maximus B A C; dico reliquos duos illo esse majores. Fiat angulus B A E æqualis angulo B A D, & linea AE, æqualis lineæ AD, ducanturque lineæ BEC, BD, DC.

Demonstr. In triangulis B A D, B A E, latus A B est commune, latus A D æquale lateri A E, & angulus B A E angulo B A D factus est æqualis; igitur (*per* 4. 1.) bases B D, B E sunt æquales. In triangulo B D C (*per* 20. 1.) latera B D, D C latere B C sunt majora: quare si auferas lineas BD, B E æquales, restabit linea D C major linea E C, quare in triangulis B A C, E A C, in quibus latus A C commune est; & latus A D æquale est lateri E A, basis autem D C est major basi EC. (*per* 20. 1.) angulus D A C, major erit angulo E A C. quibus si addas æquales angulos BAE BAD, erunt B A E, E A C simul seu totus BAC, ~~minor angulis~~ B A D, D A C; quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Omnes anguli componentes angulum solidum minores sunt 4 rectis.



Sit angulus solidus A compositus ex quotlibet angulis planis, dico illos tres DAC, CAB, BAD minores esse 4 rectis. Si componatur ex tribus fiat triangulum D C B.

Demonstr. In punctis B, C, D fiant anguli solidi quorum duo reliquo sint majores, ut in B, anguli ABD, ABC reliquo D B C sunt majores (*per* 20.) sed omnes anguli trianguli D B C æquivalent duobus rectis (*per* 31. 1.) igitur & anguli ACD, ADC, ACB, ABC, ABD, ADB; majores sunt duobus rectis : sed omnes anguli trium triangulorum ADC, ACB, ABD æquivalent præcisè sex rectis, ex quibus si auferas angulos A C D, A D C, A C B, ABC, ABD, ADB majores duobus rectis. Restabunt reliqui componentes angulum A minores 4 rectis.

Idem ostenderetur licet plures quàm tres anguli componerent angulum A.

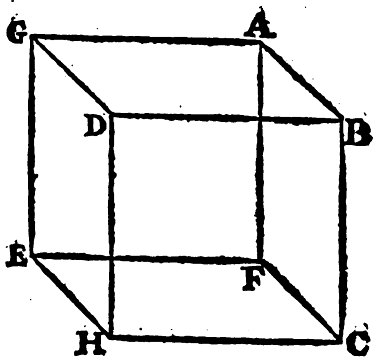
PROPOS. XXII. & XXIII.

Relinquantur.

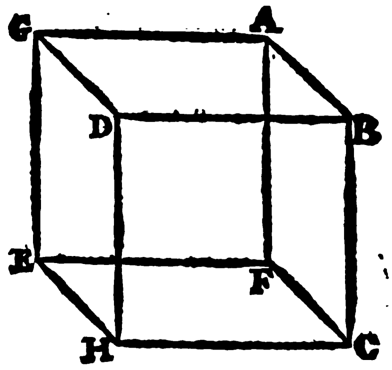
PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si solidum parallelis planis contineatur; adversa plana sunt parallelogramma similia, & æqualia.



Sit solidum A H parallelis planis contentum; dico adversa plana esse parallelogramma, similia & æqualia.

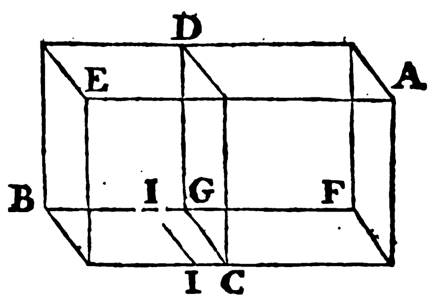


Demonstr. Quia enim plana B G, CE plano AC secantur, sectiones AB, C F, (*per* 16.) sunt parallelæ. Pariter quia parallela plana A E, B H secantur plano A C, sectiones B C, A F sunt parallelæ: quare parallelogrammum est A C. Ita ostendes D E esse parallelogrammum; anguli autem ostenduntur æquales in oppositis ut in C E, B G cum enim A B; B D, sint parallelæ lineis C F, C H anguli A B D, F C H (*per* 10.) sunt æquales; Ostendentur etiam latera oppositorum planorum BG, CE æqualia: nam AB est æquale lateri C F, quia A C est parallelogrammum pariter CF ipsi CH, & ita de aliis. Igitur sunt similia & æqualia.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si solidum parallelepipedum secetur plano parallelo planis oppositis; erit quemadmodum basis ad basin ita solidum ad solidum.



Sit solidum AB, quod secetur plano C D, parallelo planis oppositis BE, AF; dico ita esse, solidum AG ad solidum G E sicut basis C F ad basin C B.

Demonstr. Sit enim baseos C B, quæcumque pars C I verbi gratia quarta; per quam si intelligeretur duci planum parallelum plano CD, fieret parallelepidedum quod esset quarta pars solidi G E, nam supra reliquas partes basis tria alia æqualia solida constitui possent æqualibus scilicet planis & similibus constantia. Si autem parallelogrammum C I quod est quarta pars baseos CD, quinquies inveniatur in basi CF; in solido A G, quinque solida invenirentur æqualia (*per def.*10.) solido, quod supra C I constitui posset, & quod ostendimus esse quartam partem solidi G E. Haberent enim similia, & æqualia plana, ac illud, quod autem de quarta parte diximus de aliis omnibus partibus aliquotis ostendi potest, quare toties basis F C continet quamcumque partem aliquotam basis CB: quoties solidum A G, continet similem partem aliquotam solidi GE, igitur (*per def.*5. 5.) erit ut basis F C ad basin C B ita solidum AG ad solidum G F.

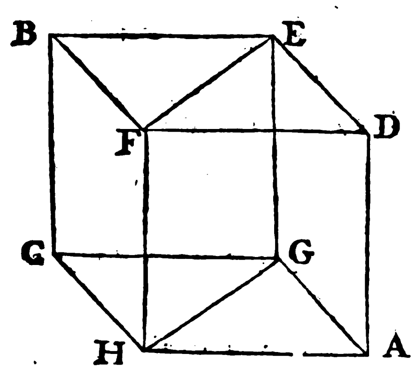
PROPOS. XXVI. & XXVII.

Relinquantur.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Parallelepipedum secatur bifariam plano per diametros adversorum planorum ducto.



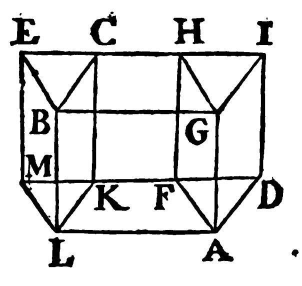
Sit parallelepidedum A B, in quo sint opposita plana AC, BD quorum diametri sint E F, G H: Dico planum per EF, GH ductum dividere solidum A B, bifariam.

Demonstr. Cum DG sit parallelogrammum lineæ A D, G E, erunt parallelæ & (*per* 34. 1.) æquales. Pariter F H, & A D sunt parallelæ, & æquales. Igitur G E, F H æquales & parallelæ uni tertiæ, æquales sunt, & (*per* 9.) parallelæ sunt: quare lineæ EF, & E H (*per* 33. 1.) & parallelæ sunt, & æquales. Est igitur EH parallelogrammum. Secantur autem parallelogramma DB, A C æqualia (*per* 24. 1.) in triangula æqualia: igitur fiunt duo prismata B H E, AFG constantia triangulis æqualibus, & parallelogrammis æqualibus, utpote oppositis: igitur prismata (*per def.*10.) sunt æqualia.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eâdem altitudine quorum insistentes in iisdem lineis collocantur sunt æqualia.



Super basi AB sint constituta duo parallelepipeda ABCD, ABEF, in eâdem altitudine: (id est inter duo plana parallela AB, DE) & lineæ insistentes utriusque nempe BC, BE sint in eâdem linea IE, dico solida ABCD, ABEF esse æqualia.

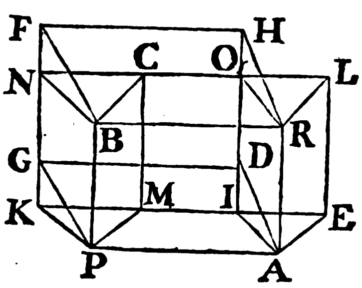
Demonstr. Parallelogramma GBEH, GBCI (*per* 35.

(*per* 35. 1.) sunt æqualia igitur si ab iis auferas, trapezium G B C H, restabunt triangula BCE; H G I æqualia; ita æqualia erunt triangula DAF KLM: item æqualia sunt (*per* 36. 1.) parallelogramma CM, IF: æqualia etiam sunt (*per* 24.) parallelogramma GF, BM, item DG, KB: quare prismata BMC, GFI, contenta æqualibus planis & æqualibus angulis ut patet æqualia sunt (*per def.* 10.) quibus si addas commune ABKH, fiunt parallelepipeda ABCD, ABEF æqualia.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Parallelepipeda super eâdem basi, & in eâdem altitudine, licet eorum insistentes non sint in iisdem lineis: sunt æqualia.



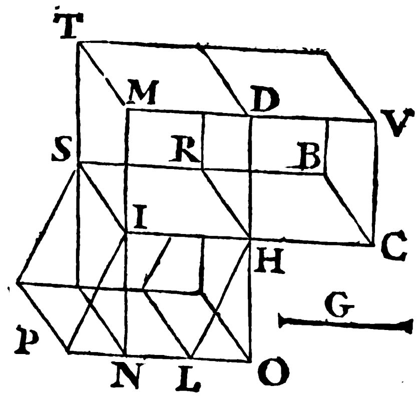
Supra basin AB sint constituta parallelepipeda ABCE, ABFD, in eadem altitudine, id est inter plana parallela A B, F E; & insistentes BC, BF, non sint in eâdem lineâ constitutæ; dico adhuc æqualia esse. Producantur lineæ FG, HD, donec secent L C, E M in punctis, O,N,K,I; junctisque lineis AI, PK, BN, RO, fiat parallelepipedum ABNI.

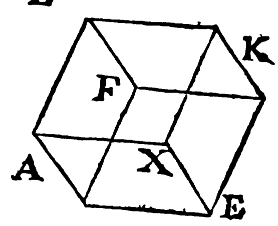
Demonstr. Parallelepipeda ABCE, ABNI, super eâdem basi AB inter plana parallela, quorum insistentes B C, B N sunt in eâdem linea L N (*per* 29.) sunt æqualia: sed parallelepipeda ABNI, ABFD, sunt in eâdem basi, in eâdem altitudine, & eorum insistentes BN, BF, sunt in eâdem linea FK. igitur sunt æqualia: ergo parallelepipeda ABCE, ABFD uni tertio ostensa æqualia esse, sunt æqualia inter se.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Parallelepipeda supra æquales bases constituta, & in eâdem altitudine sunt æqualia.





Sint parallelepipeda AK, BD, quæ sint supra bases CD,EF æquales; & in eâdem altitudine G, hoc est linea G sit distantia tam à plano C D ad sibi oppositum; quam à plano E F ad oppositum. dico illa esse æqualia. Sit linea HI æqualis lineæ K F, fiatque parallelogrammum I L, æquale & simile parallelogrammo E F, perficiatur item parallelogrammum H M, denique producantur lineæ DH, MI in NO, erunt (*per* 34. 1.) parallelogramma H N, N P æqualia, cum eandem basin H I habeant, sed H P est æquale ipsi E F, cui æquale supponitur C D; igitur C D, H N æqualia erunt.

Sint autem primò lineæ insistentes C B, E X perpendiculares ad plana CD, ED, quæ æquales erunt lineæ G, nam altitudines metimur per perpendiculares. Intelligantur parallelepipeda B D, RM, OS, LS, quorum insistentes cum æquales sint lineæ CB, & eidem parallelæ ut patet ex parallelogrammis: omnia habebunt altitudinem æqualem lineæ G.

Demonstr. Quia parallelepipedum CT secatur plano DR parallelo planis B, IT; erit (*per* 25.) ut basis C D ad basin H M, ita solidum BD, ad solidum HT. Pariter ita erit ut basis HN; ad basin HM, ita solidum OS ad solidum HT, sed bases C D, H N, cum sint quales) *per* 7. 5.) eamdem rationem habent ad basin HM: ergo solida BD, OS, eandem rationem habent ad solidum HT, quare (*per* 9. 5.) sunt æqualia; sed OS (*per* 30.) est æquale solido LS; igitur solida LS, vel AK illi simile & æquale, & B D sunt æqualia.

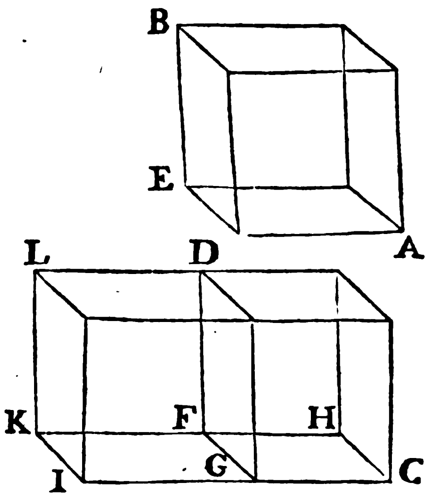
Si verò lineæ insistentes non essent perpendiculares: intelligantur supra utramque basin duo alia parallelepipeda, quorum insistentes sint perpendiculares, quæ erunt æquales altitudini G; illa autem parallelepipeda quorum insistentes sunt perpendiculares, sunt æquales inter se (*per priorem partem hujus*) & quodlibet (*per* 30.) æquale est illi quod supra suam basin describitur, & in eâdem altitudine, qualia sunt AK, BD: igitur parallelepipeda A K, B D sunt æqualia.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Parallelepipeda in eâdem altitudine constituta se habent ut bases.

Sint parallelepipeda AB, CD, ejusdem altitudinis; dico ita esse A B ad C D, sicut basis AE ad basin CF. Fiat (*per* 45. 1. supra lineam FG, parallelogrammum FI, æquale parallelogrammo AE habens angulum F G I æqualem angulo HCG, ita ut lineæ GI, FK jaceant in directum cum lineis C G, H F; perficiaturque parallelepipedum CL, solida CD, GL habebunt eamdem altitudinem quia componunt unum totale solidum; sed CD supponitur habere eandem altitudinem cum AB : igitur GL, & AB eandem habent altitudinem.

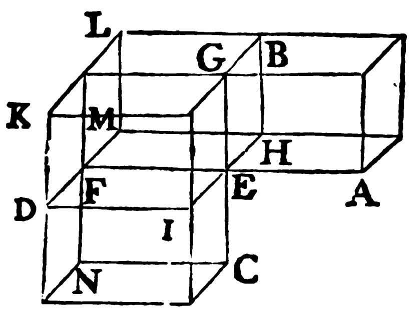


Demonstr. Parallelepipeda AB, G L ejusdem altitudinis super æqualibus basibus AE, GK (*per* 31.) sunt æqualia, sed C D ad G L se habet ut basis C F, ad basin G K, aut ad illi æqualem A E; igitur C D ad AB se habet, ut basis CF ad basin A E.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Similia parallelepipeda, sunt in triplicatâ ratione laterum homologorum.



Sint parallelepipeda A B, CF similia, hoc est singula plana unius sint similia singulis planis alterius, ad quod requiritur primò, ut omnes anguli sint æquales: unde collocari possunt parallelepipeda ut AE, GE, HE. Lineæ unius jaceant in directum cum lineis alterius. Secundo ut ita sit AE, ad E H sicut F E ad E I, & permutando ita sit A E ad E F sicut H E ad E I, & ita etiam sit GE ad EC sicut AE ad EF; dico igitur AB ad C D esse in triplicatâ ratione illius quæ est lateris AE, ad latus homologum E F: hoc est si perficiantur parallelepipeda EL, EK, ostendam esse 4. quantitates continuè proportionales in proportione AE ad EF; quarum A B sit prima, & C D quarta.

Demonstr. Quia parallelepipeda AB, AL, sunt ejusdem altitudinis, sunt inter se, ut basis A H, ad basin E M, (*per* 32.) sed basis A H ad basin E M se habet (*per* 1.6.) ut A E ad EF, igitur AB ad EL, se habet ut linea AE ad EF. Pariter solidum EL ad solidum EK, est ut basis HF ad ED, seu (*per* 1. 6.) ut H E ad E I; id est ut AE ad E F; igitur E L ad E K se habet ut B E ad E F, ultimò E K ad C F se habet ut basis GF, ad basin E N, hoc est ut linea GE ad EC, quæ se habet ut AE ad EF, igitur solidum EK ad CD se habet ut A E ad EF, quare sunt 4. parallelepipeda AB, EL, EK, CD continuè proportionalia in ratione lateris A E ad latus EF, quare (*per* 11.*def.*5.) AB ad C D erit in triplicatâ ratione lateris A E ad E F.

COROLLARIUM.

Si 4. lineæ continuè proportionales fuerint ut est prima ad quartam, ita erit parallelepipedum supra primam, ad parallelepipedum simile supra secundam descriptum. Ex quo vides quod problema celebre duplicationis cubi, solam difficultatem habeat, in inventione duarum mediarum proportionalium inter duas datas lineas.

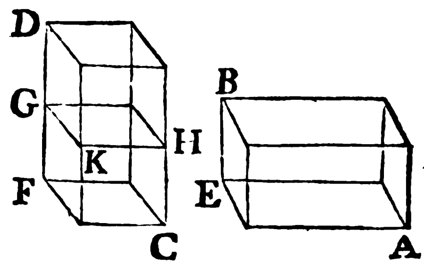
PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Æqualium parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, & ea quorum bases, & altitudines reciprocantur sunt æqualia.

Primò, quidem si æqualium parallelepipedorum bases sunt æquales, necessariò altitudines sunt æquales: quare evidens est reciprocatio.

Sint duo parallelepipeda æqualia AB, CD; sintque primò lineæ insistentes EB, FD perpendiculares ad bases, eruntque propterea vera altitudo solidorum, dico ita esse basin AE ad basin CF, ut altitudo DF ad altitudinem BE. Abscindatur ex altitudine FC altitudo FG æqualis altitudini BE, intelligaturque per G ductum planum GH, plano CF parallelum.



Demonstr. Quia parallelepipeda AB, CG, sunt ejusdem altitudinis, erit (*per* 32.) AB ad CG ut basis AE ad basin C F; sed ut AB ad CG, ita se habet (*per* 7.5.) CD illi æquale ad CG, igitur ut basis A E ad basin C F, ita C D ad C G; sed quia C D secatur plano H G, parallelo oppositis: erit (*per* 25.) DH ad C G, ut basis D K: ad basin FK, sed ut DK ad FK ita (*per* 1. 6.) D G ad G F, igitur erit ut DH ad CG ita DG ad GF, & componendo (*per* 18. 5.) erit ut DC ad CG, hoc est ut AB ad CG; ita DF ad GF, aut ad EB illi æqualem: ergo, erit ut basis A E ad basin C F, ita altitudo DF ad altitudinem B E.

Si verò sint in eâdem constructione bases, & altitudines reciprocæ, dico parallelepipeda AB, C D esse æqualia; cum enim ita se habeat A B ad C G, sicut basis AE ad CF, ut autem basis ad basin, reciprocè ita est altitudo F D ad E B aut ad F G, quare ita erit AB ad CG, sicut altitudo FD ad GF, sed ut FD ad FG, ita (*per* 1.6.) DK ad FK, & ut DK ad FK, ita (*per* 25.) H D ad CG, ad C G, igitur ita erit AB ad C G, sicut CD ad CG; quare (*per 9.5.*) AB, CD sunt æqualia.

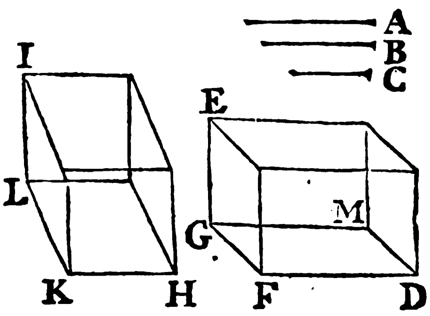
Quod si supra bases A E, CF intelligerentur duo parallelepipeda æqualia ejusdem altitudinis cum AB, CD quorum insistentes non essent perpendiculares; illa essent (*per 30.*) æqualia solidis A B, C D: quare sicut hæc æqualia, ita illa æqualia essent; ergo bases solidorum A B & C D quæ sunt communes aliis solidis reciprocantur cum altitudinibus quæ sunt etiam communes, igitur parallelepipeda æqualia reciprocas habent bases & altitudines, & è converso si reciprocantur bases & altitudines æqualia sunt parallelepipeda.

PROPOSITIO XXXV.

Relinquatur ut inutilis sequenti.

PROPOSITIO XXXVI.

Si tres lineæ continuè proportionales fuerint, quod ex iis fit parallelepipedum, æquale est parallelepipedo facto à media, & æquiangulo priori.



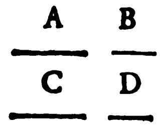
Sint tres lineæ A, B,C, continuè proportionales sitque parallelepipedum D E ex iis factum hoc est linea D F sit æqualis lineæ A, linea G E lineæ B; & F G ipsi C. Sit etiam aliud parallelepipedum cujus tres lineæ HK,KL, LI sint æquales mediæ B; sitque æquiangulum priori,dico illa esse æqualia.

Demonstr. Quia parallelogramma DG, HL; supponuntur æquiangula, & DF est æqualis ipsi A & FG, ipsi C; H K & KL mediæ B: erit ut DF ad KH ita K L ad F G: igitur cum reciproca habeant, (*per 15. 6.*) æqualia erunt. Quia autem anguli solidi G & L sunt æquales; si L poneretur in G anguli congruerent, & quia tam L I quàm G E, supponuntur æquales mediæ B, punctum I caderet in punctum E, ex quo si intelligatur demitti perpendicularis ad planum basium; hæc erit communis altitudo, quare solida DE, HI, habent bases æquales, & altitudinem eandem; igitur, (*per 31.*) sunt æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si 4. lineæ proportionales fuerint: parallelepipeda similia supra illas descripta proportionalia erunt. Si verò parallelepipeda similia supra 4. lineas descripta sint proportionalia, illæ proportionales erunt.



Sit A ad B, ut C ad D, dico si super A & B describantur parallelepipeda similia, item super C & D alia duo similia, ita esse parallelepipedum super A ad parallelepipedum super B, ut parallelepipedum super C ad parallelepipedum super D.

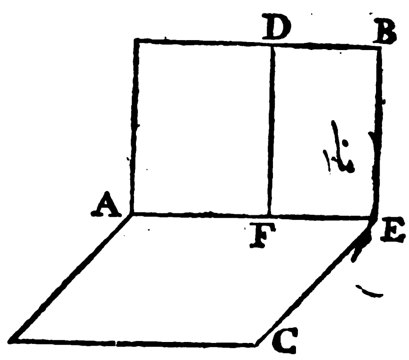
Demonstr. Cum enim solidum A ad solidum B, (*per 33.*) sit in triplicatâ ratione illius, quæ est lineæ A ad lineam B, ut autem linea A ad B, ita C ad D; igitur solidum A ad solidum B est in triplicatâ ratione illius,quæ est lineæ C ad lineam D. sed (*per eandem*) solidum C ad solidum D est etiam in triplicatâ ratione illius, quæ est lineæ C ad lineam D: igitur ut solidum A ad solidum B ita solidum C ad solidum D.

E contra si solidum A ad solidum B, sit ut solidum C ad solidum D; dico ita esse lineam A ad lineam B, sicut linea C ad lineam D: nam linea A ad lineam B (*per 33.*) est in subtriplicata ratione illius,quæ est solidi A ad B, aut solidi C ad D quæ est eadem; sed linea C ad D est etiam in subtriplicata ratione, illius quæ est solidi C ad D; igitur ita est A ad B ut C ad D.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Si duo plana ad invicem recta fuerint,& à quolibet puncto unius ad aliud perpendicularis ducatur, hæc in communem sectionem cadet.



Plana AB, AC sint ad invicem recta; dico si ex pnncto D plani A B ducatur perpendicularis ad planum AC,illam cadere in communem sectionem A E. Ducatur in plano A B ex puncto D perpendicularis ad lineam AE, sitque DF.

Demonstr. Linea DF perpendicularis ad communem sectionem cum plana sint recta ad invicem (*per 4.def.*) recta est ad planum AC, duæ autem ex puncto D duci non possunt perpendiculares ad planum AC, (*per 13.*) igitur nulla alia duci potest nisi hæc quæ in communem sectionem cadit.

PROPOSITIO XXXIX.

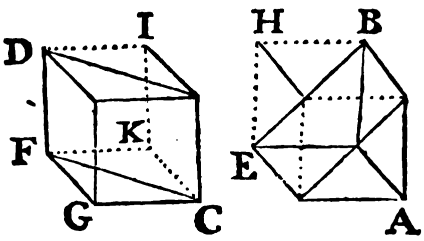
Relinquatur.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Si fuerint duo prismata triangularia æqualis altitudinis, quorum unum basin parallelogrammam duplam habeat basis alterius triangularis, prismata erunt æqualia.

 Sint



Sint prisinata A B, CD triangularia, quorum AB habeat basin A E parallelogrammam, duplam basis C F G triangularis, sint autem æqualis altitudinis, dico illa esse æqualia, intelligantur perfecta esse parallelepideda AH, G I.

Demonstr. Cum basis A E, sit dupla trianguli C F G, & parallelogrammum G K, sit etiam duplum ejusdem (*per* 34. 1.) æqualia erunt parallelogramma AE, GK; quia verò parallelepipeda AH, CD bases AE, GK habent æquales, & altitudo eadem est; (*per* 31.) æqualia erunt, sed prismata A B, CD, (*per* 28.) sunt mediæ partes parallelepipedorum: igitur prismata A B, C D sunt æqualia.

COROLLARIUM.

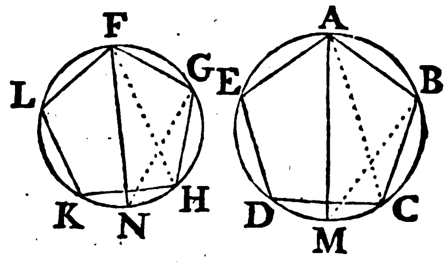
Ex hac propositione facile probari potest quod prismata quorum unum planum ex parallelis sumetur pro basi, si sint ejusdem altitudinis se habebunt ut bases, & primò quidem de triangularibus constat, nam vides prisma C G F D, esse dimidium parallelepipedi eandem altitudinem habentis, & basin ejus C G F esse dimidiam partem basis parallelepipedi: ergo si comparetur cum alio ejusdem altitudinis, ad illud ita se habebit ut parallelepipeda, igitur hæc se habebunt ut bases parallelepipedorum, & consequenter ut bases propriæ. Idem etiam probari poterit de prismatibus: quorum bases erunt unum ex planis oppositis polygonis, quia scilicet in triangularia prismata resolvi possunt.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Polygona similia circulis inscripta sunt ut quadrata diametrorum.

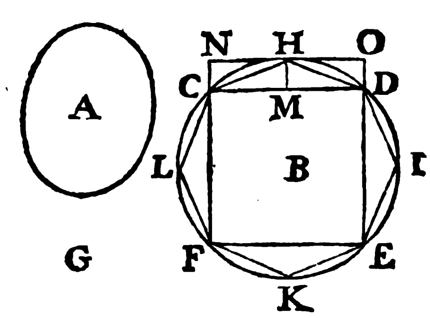


Sint polygona similia circulis inscripta ABCDE, FGHKL, sintque diametri circulorum AM, FN, dico ita esse polygonum ABCDE ad polygonum F G H K L sicut quadratum lineæ A M ad quadratum lineæ F N. Ducantur lineæ AC, BM, FH, GN.

Demonstratio. Quoniam polygona sunt similia, erunt (*per* 1. *def.*6.) anguli B & G, æquales; eritque ut A B ad B C: ita FG ad GH. Quare triangula A B C, F G H, (*per* 6. 6.) æquiangula erunt; sunt igitur anguli ACB, & FHG æquales. Sunt autem hi anguli æquales angulis M & N, (*per* 21. 3.) cum sint in eâdem portione: igitur anguli M & N sunt æquales; quare triangula ABM, F G N, quæ habent angulos M & N æquales, item angulos A B M & F G N in semicirculo (*per* 31. 3.) rectos, & æquales, æquiangula sunt. Ideoque erit (*per* 6. 6.) ut A B ad A M ita G F ad GN; & permutando, ut AB ad G F ita A M ad G N; quare (*per* 22. 6.) erit polygonum super A B quale est A B C D E ad simile polygonum F G H K L descriptum super G F; ut polygonum super A M, quale est ejus quadratum ad simile quadratum descriptum super F N, (*per* 22. 6.)

LEMMA.

Si sit quantitas minor circulo, describi poterit intra circulum poligonum ordinatum majus illa quantitate.



Sit magnitudo A minor, circulo B, dico intra circulum B, posse describi polygonum ordinatum majus

majus magnitudine A, sit magnitudo G, id quod deest magnitudini A, ad hoc, ut adaquet circulum B, inscribatur circulo B quadratum CDEF; quod si majus esset magnitudine A, factum esset quod desideratur; si verò sit minus, dividantur arcus CD, DE, EF, FC bifariam in H, IKL, ducanturque linea CH, HD &c. ut fiat octogonum; quod si adhuc majus non est magnitudine A: dividantur bifariam arcus octogoni, ut fiat polygonum sexdecim laterum: & si hoc non sufficit fiat polygonum triginta duorum laterum & ita deinceps per punctum H; ducatur tangens NO, producanturque latera FC, ED, in N & O.

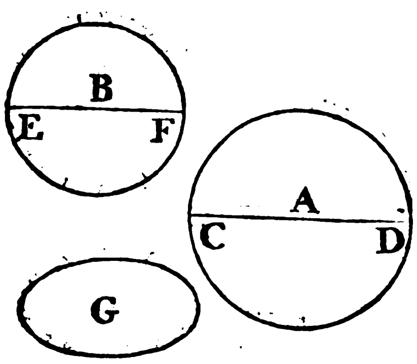
Demonstr. Quia ex circulo aufertur quadratum, quod est plusquam illius dimidium, cum sit dimidium quadrati circumscripti, & ex reliquo, id est ex segmentis DHC, CLF, FKL, EID aufertur plusquam dimidium; scilicet triangula DHC, CLF, FKL, EID (nam triangulum DHC est dimidium parallelogrammi CDON, quod majus est segmento DHC. Igitur triangulum DHC est majus dimidio segmenti DHC; & ita de reliquis triangulis) igitur aufertur plusquam dimidium reliqui. Et pariter dum fit polygonum sexdecim laterum, aufertur plusquam dimidium reliqui; & ita in aliis polygonis, tandem relinquetur minor quantitas quam G. Quare illud polygonum, minus relinquet ex circulo B, quàm quantitas B, cui deest quantitas G, ut circulum B adaquet. Quare illud polygonum majus erit quantitate A.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Circuli sunt inter se, ut quadrata diametrorum.

Sint circuli A & B, quorum diametri CD EF, dico ita esse A ad B, sicut quadratum lineæ CD ad quadratum lineæ EF.



Si hoc ita non est, unus circulus, verbi gratia A, habebit majorem rationem ad B quàm quadratum CD ad quadratum EF; igitur dari poterit G minor quantitas quàm A, quæ ad B eandem habebit rationem, quam quadratum CD habet ad quadratum EF, quâ quantitate G, ut minore quàm sit circulus A, potest dari (*per lemma superius*) polygonum majus intra circulum A descriptum, cui simile intelligatur descriptum intra circulum B.

Demonstr. Polygona A & B (*per* 1.) erunt ut quadrata diametrorum, sed magnitudo G ad circulum B supponitur ut quadrata diametrorum: igitur ita erit polygonum A ad polygonum B ut magnitudo G ad circulum B. Sed polygonum A majus est magnitudine G: igitur (*per* 14. 5.) polygonum B, id est intra circulum B descriptum, majus esset circulo B, pars toto quod est absurdum. Non igitur magnitudo G, minor circulo A, potest ita esse ad circulum B ut quadratum lineæ CD ad quadratum lineæ EF: quare A ad B majorem rationem non habet, quàm quadratum CD ad quadratum EF.

Corol. I. *Circuli sunt in duplicatâ ratione diametrorum: quia quadrata, ut similes figura* (per 20. 6.) *sunt in duplicatâ ratione laterum homologorum: circuli autem ostensi sunt in eâdem ratione cum quadratis: igitur in duplicatâ erunt ratione diametrorum.*

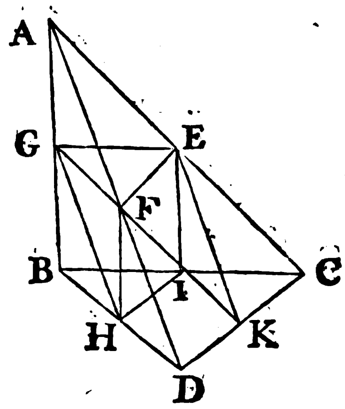
Corol. II. *Circuli sunt in eâdem ratione cum polygonis similibus, intra ipsos descriptis.*

Coroll. III. *Ex quibus vides quod si similes figura intra alias descripta, & ad illas magis, & magis accedentes; ita ut in illas quasi desinant semper inter se eandem rationem servent: etiam figura continentes eandem rationem servabunt; ut accidit polygonis similibus intra circulos descriptis: quia ita accedunt ad circulum, ut in ipsum desinant, & semper servant rationem quadratorum; circuli eandem rationem inter se habebunt.*

PROPOSITIO III.

Theorema.

Omnis Pyramis triangularem habens basin, dividi potest in duo prismata aqualia; qua simul sumpta majora sint dimidio Pyramidis; & in duas Pyramides aquales, & similes toti.



Sit Pyramis ABCD triangularem habens basin BCD; dico primo in illâ inveniri posse duo prismata æqualia EBFI, EHKF. Dividantur singula latera pyramidis bifariam in punctis E, F, G H, I, K, ducanturque lineæ EG, EF, FG, EI, FH, EK, KI, IH.

Demonstr. Quoniam in triangulo ABD est ut AF ad FD ita AG ad GB, cum AD, AB sint divisæ lineâ FG bifariam, GF, HB erunt parallelæ (*per* 2. 6.) similiter parallelæ erunt FH, GB: est igitur FGBH parallelogrammum. Ita ostendam BGEI, EFHI esse parallelogramma; item DHIK, DFEK. Quia autem EG, GF, sunt parallelæ lineis IB, BH; erunt (*per* 15. 11.) plana per ipsas ducta nempe EGF, IBH parallela, ideò prisma erit EBFI. Similì modo ostendam EHKF esse prisma. Quia autem hæc duo prismata sunt ejusdem altitudinis

nis, & parallelogrammum K H quod est basis unius, duplum est trianguli I B H (*per* 41. 1.) quod est basis alterius, erunt (*per* 40.11.) prismata EBFI, EHKF æqualia.

Dico secundò, inveniri etiam Pyramides æquales A E F H, E C K I, nam triangulum A F G, æquale est (*per* 8. 1.) triangulo F D H, & hoc sibi opposito E I K, ut patet propter parallelogramma; igitur triangula A F G, E I K sunt æqualia; triangula item A E G, E I C, A E F ECK; EFG, CIK, sunt æqualia; quia constant lateribus æqualibus, nempe dimidiis laterum pyramidis. Igitur pyramides sunt æquales (*per def.*10.11.)

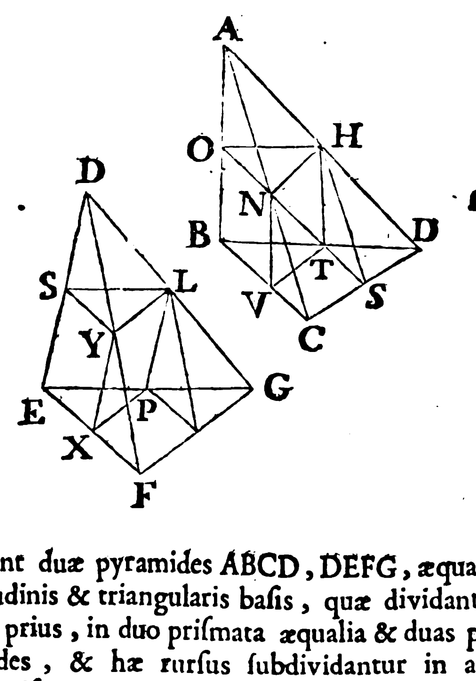
Dico tertiò, eas esse similes toti pyramidi ABCD, triangula AEG ACB quia linea EG est parallela lateri C B, (*per* 2.6.) sunt similia; ita ostendam reliqua triangula parvæ pyramidis, esse similia triangulis majoris.

Dico quartò, prismata esse majora dimidio pyramidis. Ducantur lineæ GI, GH; fit pyramis G I H B, æqualis pyramidi AEFG; nam primo triangula EFG, IBH æqualia sunt; & cum lineæ AG, FH sint parallelæ & æquales, lineæ G H, & AF (*per* 33.1.) æquales erunt; ita GI, & AE æquales erunt; quare triangula AEF, GIH, AEG GIB; AFG, GHB (*per* 8. 1.) sunt æqualia: igitur pyramides AEFG, GIHB sunt æquales, sed prisma EBFI, majus est pyramide GIKB, igitur & pyramide AEFG majus erit, & prisma EHKF alia pyramide E C K I majus erit: igitur duo prismata simul, majora sunt duabus pyramidibus; quare erunt plusquam dimidia pars totius pyramidis.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duæ pyramides æqualis altitudinis, & triangularis basis, dividantur singulæ in duo prismata æqualia, & duas pyramides, & hæ rursus dividantur similiter, erunt omnia prismata unius, ad omnia prismata alterius ut basis ad basin.



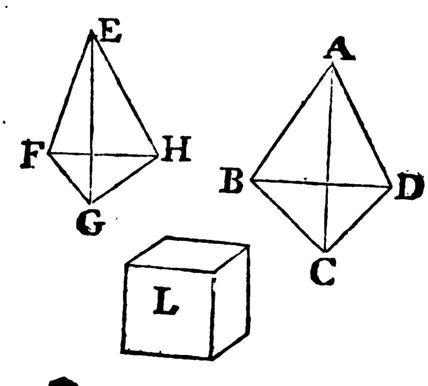
Sint duæ pyramides ABCD, DEFG, æqualis altitudinis & triangularis basis, quæ dividantur sicut prius, in duo prismata æqualia & duas pyramides, & hæ rursus subdividantur in alia duo prismata æqualia, & duas pyramides; & ita deinceps quantùm volueris, sintque tot divisiones in unâ, quot in aliâ, ita ut totidem generentur prismata in utraque; dico omnia prismata unius, se habere ad omnia prismata alterius; ut se habet basis D C B ad basin E F G.

Demonstr. Cùm pyramides ABCD, DEFG sint æqualis altitudinis & prismata orta ex prima divisione utriusque, sint dimidiæ altitudinis, ea etiam inter se æqualis altitudinis erunt; quare cum sint dimidia pars parallelepipedorum eamdem basin habentium ut propos.4. 11. ostensum est; & parallelepipeda ejusdem altitudinis (*per* 32. 11.) se habeant ut bases, prismata quoque se habebunt, ut bases. Est igitur prisma B H ad prisma E L sicut basis TVB ad basin P X E, sed T V B est quarta pars trianguli B C D, ut patet, quia parallelogrammum C T est duplum trianguli T V B, sicut & trianguli D S T, (*per* 41. 1.) item triangulum P X E, est quarta pars trianguli E F G: igitur prisma B H ad prisma E L se habet ut basis B C D ad basin G E F; & quia alia duo prismata C H, F L prioribus sunt æqualia: prismata ex primâ divisione orta se habent ut bases pyramidium. Pariter ea quæ fierent in pyramidibus A H N O, D L Y S se haberent ut bases HNO, LYS, quæ [cum sint æquales oppositis triangulis BVT, EPX, quæ sunt quartæ partes basium totalium BCD, EFG] se habent etiam ut bases totales; quare prismata ex secunda divisione orta se habent adhuc ut bases BCD, EFG, ita ostendam singula prismata ex quâcumque divisione orta, se habere ut bases totales; quare omnia simul prismata unius pyramidis, ad totidem alterius pyramidis, se habebunt (*per* 12. 5.) ut basis D B C, ad basin E F G.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Pyramides triangularis basis & ejusdem altitudinis se habent ut bases.



Sint pyramides A B C D, E F G H ejusdem altitudinis, dico ita esse pyramidem A B C D, ad pyramidem E F G H sicut basis B C D est ad basin F G H.

Si hoc ita non est una pyramis verbi gratiâ A B C D majorem rationem habebit ad aliam quàm basis BCD, ad basin FGH: igitur dari potest aliqua quantitas L minor pyramide A B C D, quæ eamdem rationem habeat ad pyramidem E F G H, quàm habet basis B C D ad basin F G H. Dividatur pyramis A B C D in duo prismata æqualia & duas pyramides: & hæ rursus dividantur; & ita deinceps quantum opus erit. Quia duo prismata sunt plusquam dimidium

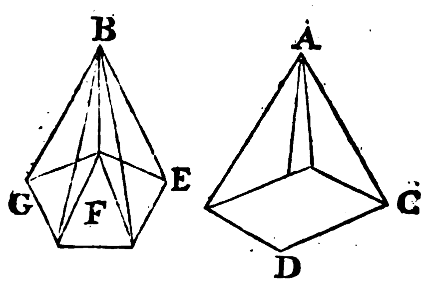
dimidium pyramidis (*per* 3.) & reliqui, id est paruarum pyramidum prismata, sunt plusquam dimidium, tandem tot fient prismata in pyramide ABCD, ut ea simul sumpta minus deficiant ab eâdem pyramide ABCD, quam magnitudo L; atque adeo sint majora magnitudine L, totidem fiant prismata in pyramide EFGH, per totidem divisiones.

Demonstr. Prismata facta in pyramide ABCD, sunt ad prismata EFGH ut basis BCD : ad basin FGH, sed ut BCD ad FGH : ita supponitur magnitudo L ad pyramidem EFGH, igitur ut prismata ABCD ad prismata EFGH, ita magnitudo L ad pyramidem EFGH, sed prismata ABCD majora sunt magnitudine L, igitur (*per* 14. 5.) prismata EFGH majora erunt pyramide EFGH, quod est absurdum: cum in illâ contineantur, & sint illius pars. Igitur nulla magnitudo L minor pyramide A B C D, habebit eandem rationem ad pyramidem E F G H, quam habet basis B C D ad basin F G H, quare neutra pyramis, ad pyramidem, majorem rationem habet: quam basis ad basin.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Pyramides quæcumque æquè altæ, eandem rationem habent ac bases.



Sint pyramides ACD, BEFG, æquè altæ. Dico ita esse primam ad secundam, sicut basis C D ad basim EFG; dividantur bases in triangula.

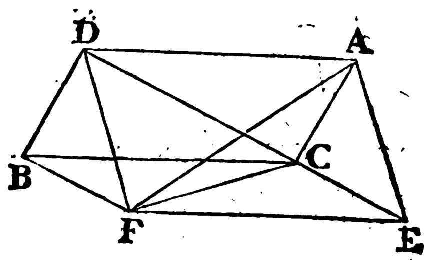
Demonstr. Quia pyramides BE, AC sunt triangulares, & æquè altæ erit (*per* 5.) prima ad secundam, ut basis E ad basin C. Pariter ita erit B F ad A C, sicut basis F ad basin C: quare (*per* 24. 5.) ita erit tota pyramis BEF ad AC sicut basis E F ad basin C. Quia verò (*per* 5.) etiam est pyramis BG ad AC sicut basis G ad basin C. (*per eandem* 24. 5.) ita erit tota pyramis BEFG ad pyramidē AC sicut basis EFG ad basin C. Sic ostendam, ita se habere pyramidem BEFG ad pyramidem AD, sicut basis EFG ad basin D. Cum igitur sit ut pyramis A C ad pyramidem BEFG, ita basis C ad basin E F C. Item ut pyramis A D ad pyramidem BEFG, ita basis D ad basin EFG, ita erit (*per* 24. 5.) tota pyramis A C D ad totam BEFG, sicut basis CD ad basin EFG.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Omnis pyramis, est tertia pars prismatis eandem basin, & altitudinem habentis.

Sit primò prisma triangulare A B, dico pyramidem eandem altitudinem, & eandem cum illo basin habentem, esse tertiam ejus partem. Dividantur parallelogramma ductis diametri A F, C D, C F.



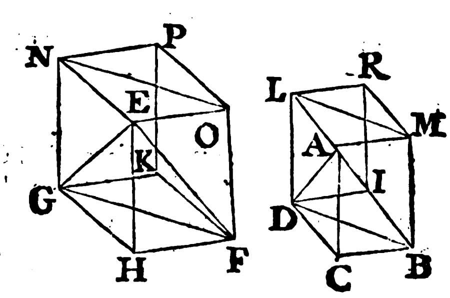
Demonstr. Divisum est prisma in tres pyramides A C F E, C F B D, D A C F, quas dicô esse æquales: nam A C F E, A C F D, cum habeant bases A F E, AFD (*per* 34. 1.) æquales & eandem altitudinem lineam scilicet ductam ex communi vertice C; rectam ad planum E D; erunt (*per* 5.) æquales. Pariter pyramides ACFD; CDFB, bases ADC, BCD æquales habent & pro altitudine lineam ductam ex communi vertice F ad planum A B. Sunt etiam æquales: quare pyramis A F E C cujus eadem altitudo cum prismate, & eadem basis ACE; est tertia ejus pars. Et quia omnes quæ haberent eandem basin A C E, & eandem cum illa altitudinem, essent illi æquales (*per* 5.) omnis pyramis triangula, est tertia pars prismatis ejusdem altitudinis, & basis.

Si verò prisma esset polygonum, divideretur in prismata triangularia. Pyramis quæ eandem basin haberet cum prismate & eandem altitudinem, dividi posset in totidem pyramides triangulares quarum quælibet esset tertia pars prismatis sibi respondentis, (*per primam partem hujus*) ergo tota pyramis (*per* 7. 12.) est tertia pars totius prismatis.

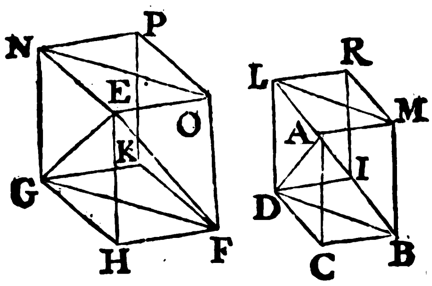
PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Similes pyramides sunt in triplicatâ ratione laterum homologorum.



Sint primô duæ pyramides similes triangularis basis A B C D, E F G H. Dico primam ad secundam habere triplicatam rationem, illius quam habet latus A C ad sibi homologum E H. Producantur plana triangularia A B C, A C D, B D C; E F H, E G H, F G H; ita ut perficiantur 6 parallelogramma CM, C L, C I; H O, HN, HK, ductisque lineis ML, NO, perficiantur



prismata MCLB, OHNF. Item perficiantur parallelepipeda RC, PH.

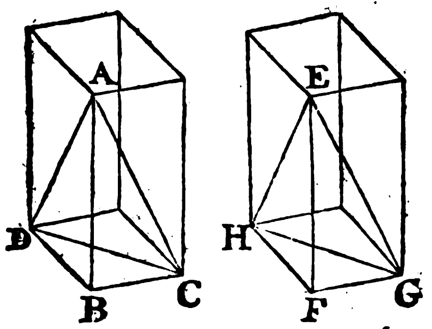
Demonstr. Cum pyramides sint similes, (*per def.9. 11.*) omnia triangula similia erunt, eritque ut AC ad CB: ita EH ad FH, & angulus ACB angulo EHF æqualis erit, quare parallelogramma MC, OH, similia erunt. Ita similia erunt parallelogramma LC, NH; CI, HK, & illis opposita (*per 24.11.*) Sunt igitur (*per def.9.11.*) parallelepideda RC, PH similia; quare (*per 33.11.*) erunt in triplicatâ ratione laterum AC, EH: sed prismata ut eorum dimidia, & pyramides prismatum tertiæ partes sunt in eâdem ratione. Igitur pyramides sunt in triplicatâ ratione laterum AC EH.

Si verò pyramides non essent triangulares, sed polygonæ, dividantur in triangulares. Cum igitur singulæ triangulares se habeant ad suas correspondentes, in triplicatâ ratione laterum; erunt (*per 7. 12.*) & omnes simul, ad omnes in eadem ratione triplicatâ.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Æquales pyramides reciprocant bases & altitudines: & quæ reciprocant bases, & altitudines æquales sunt.



Sint primò pyramides triangulares ABCD, EFGH æquales, dico ita esse basin CBD ad basin GFH; sicut altitudo pyramidis EFGH ad altitudinem primæ. Perficiantur parallelepipeda sicut priùs.

Demonstr. Parallelepipedorum bases, ut patet (*per 34. 1.*) sunt duplæ basium pyramidum, altitudines autem sunt eædem. Cum autem pyramides sint æquales, & sextæ partes parallelepipedorum, nempe tertiæ prismatum (*per 7. 12.*) parallelepipeda erunt æqualia, sed (*per 34. 11.*) parallelepipedorum æqualium reciprocantur bases, & altitudines: igitur bases pyramidum, quæ sunt dimidiæ basium parallelepipedorum, reciprocantur cum altitudinibus.

Secundò, si reciprocæ sint bases; & altitudines pyramidum; dico illas esse æquales. Quia cùm in eâdem constructione bases parallelepipedorum sint duplæ basium pyramidum, & altitudines eædem, reciprocabuntur bases, & altitudines parallelepipedorum: quare (*per 34. 11.*) illa sunt æqualia; ergo pyramides quæ sunt illorum sextæ partes etiam æquales erunt.

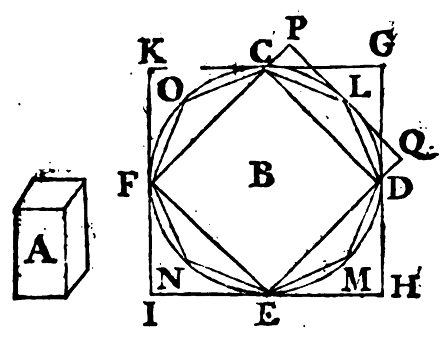
Si verò pyramides æquales, habeant bases polygonas. Fiant triangula æqualia, earum basibus; quod facillimum est: nam (*per 41. 1.*) fiat parallelogrammum basibus æquale, fiatque triangulum cujus basis sit dupla basis parallelogrammi; & quod sit inter easdem parallelas; eritque (*per 41. 1.*) triangulum æquale parallelogrammo, & consequenter basi polygonæ. Supra hæc triangula intelligantur pyramides ejusdem altitudinis cum pyramidibus polygonis, quæ (*per 6.*) illis æquales erunt, & inter se (*per primam partem*) triangulares bases reciprocantur cum altitudinibus: igitur bases polygonæ æquales triangularibus, reciprocantur cum altitudinibus.

LEMMA.

Si detur quantitas minor cylindro; intra cylindrum inscribi poterit prisma majus illa quantitate.

Sit quantitas A, minor cylindro, cujus basis B; dico intra cylindrum inscribi posse prisma majus quantitate A.

Sit enim circulo B quadratum inscriptum CDEF, & circumscriptum GHIK, fiat item octogonum CLDMENFO; productisque lateribus quadrati inscripti, in P & Q; ducatur tangens CLP, & supra hæc omnia polygona, tanquam supra bases, intelligantur prismata ejusdem altitudinis cum cylindro: quorum quod est supra quadratum circumscriptum ambit totum cylindrum.



Demonstr. Prismata ejusdem altitudinis, se habent ut bases, (per cor. 4. 11.) *sed quadratum inscriptum est media pars circumscripti; ergo prisma illius est media pars circumscripti: sed circumscriptum majus est cylindro; igitur prisma quadrati inscripti est plusquam media pars cylindri. Facto autem octogono & prismate supra illud: dico auferri ex cylindro, plusquam mediam partem reliqui. Nam triangulum DLC est media pars rectanguli DCPQ; igitur prisma supra triangulum DLC descriptum* (per cor.4. 11.) *est media pars prismatis descripti supra rectangulum DCPQ: igitur idem prisma trianguli DLC est plusquam dimidium, partis cylindri descripti supra segmentum DLC. Et ita de reliquis segmentis. Ita ostendam facto polygono sexdecim laterum auferri cylindro plusquam dimidium reliqui. Cum igitur ex cylindro dum aufertur prisma,*

quod

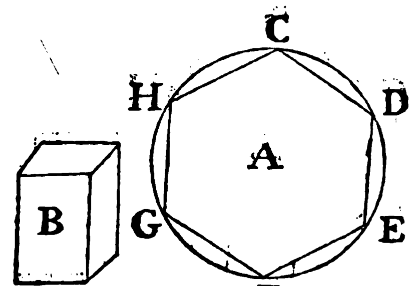
quod est supra quadratum; aufertur plusquam media pars; & dum aufertur prisma octogoni aufertur plusquam dimidium reliqui, & ita deinceps tandem relinquetur quantitas minor eâ, quâ cylindrus superat quantitatem A; quare dabitur aliquod prisma intra cylindrum B quod minus superabitur à cylindro B, quàm quantitas A, atque adeò majus erit quantitate A.

Idem de pyramidibus inscriptis cono ostendi possit, & eodem modo.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Omnis conus est tertia pars cylindri, eandem cum ipso basin, & altitudinem habentis.



Si supra circulum A sit conus, & cylindrus ejusdem altitudinis, dico cylindrum esse triplum coni.

Si enim cylindrus majorem rationem habeat ad conum quàm triplam, dari posset aliqua quantitas B cylindro minor; quæ ad conum haberet rationem triplam. Sit hæc quantitas B. Inscriptis autem circulo polygonis & factis prismatibus intra cylindrum, tandem poterit dari prisma intra cylindrum majus quantitate B (*per lemma superius*). Sit illius prismatis basis polygonū CDEFG; supra quod fiat intra conum pyramis, quæ consequenter erit ejusdem altitudinis cum cono, cylindro & prismate; prisma erit triplum pyramidis. Sed quantitas B est tripla coni; igitur eadem est ratio prismatis ad pyramidem quæ quantitas B ad conum: sed prisma est majus quantitate B, igitur (*per* 14. 5.) pyramis major erit cono; pars toto, cum intra conum tota contineatur. Hoc autem absurdum est.

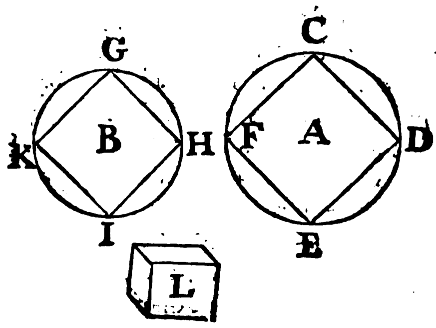
Si diceretur conus habere majorem rationem ad cylindrum quàm subtriplicatam, idem argumentum fieret, & eadem methodo.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Cylindri; & coni ejusdem altitudinis, inter se sunt ut bases.

Sint duo cylindri, vel duo coni ejusdem altitudinis supra circulos A & B, dico ita esse cylindrum A ad cylindrum B ut circulus A ad circulum B. Nam si hoc ita non est, alteruter cylindrorum ut A, majorem rationem habebit ad B quàm basis ad basin: Igitur possibilis erit quantitas L minor cylindro A, quæ ad cylindrum B eandem rationem habeat, ac basis A ad basin B, quare (*per lemma superius*) potest inscribi intra cylindrum A prisma aliquod majus quantitate L. Sit prisma cujus basis C D E F, inscribaturque circulo B simile polygonum G H I K, & intelligatur inscriptum cylindro B, prisma supra basin G H I K.



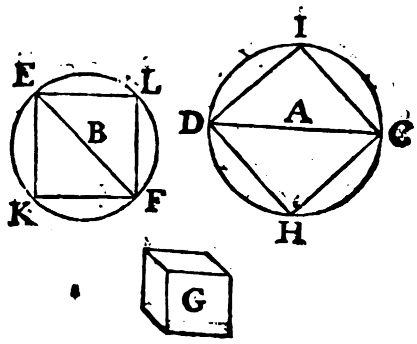
Demonstr. Ita est prisma supra CDEF ad prisma supra GHIK sicut bases (*per cor.*40. 11.) seu polygona; polygona autem similia se habent ut circuli (*per corol.*2.) igitur ita est prisma A ad prisma B sicut basis A ad basin B, sed ut basis A ad basin B ita quantitas L ad cylindrum B, igitur ut prisma A ad prisma B ita quantitas L ad cylindrum B; sed prisma A majus est quantitate L: Igitur (*per* 14. 5.) prisma B majus est cylindro B, quod est absurdum cum in eo contineatur & sit ejus pars: igitur cylindri sunt ut bases.

Cum autem cylindri sint tripli conorum, habebunt etiam coni ejusdem altitudinis eandem rationem, ac bases.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Similes cylindri, & coni sunt in triplicatâ ratione diametrorum suarum basium.



Sint duo coni similes quorum bases circuli A & B; dico conum A ad conum B esse in triplicata ratione diametri CD ad EF.

Si enim hoc ita non esset, alteruter majorem haberet rationem. Sit major ratio coni A ad B quàm triplicata rationis CD ad E F; igitur dabitur aliqua magnitudo G minor quàm conus A, quæ ad conum B habebit rationem triplicatam rationis C D ad E F. Quare (*per lemma superius*) inscribi poterit aliqua pyramis intra conum A major quantitate G. Sit illa cujus basis CHDI. Inscribatur circulo B polygonum EKFL simile priori; supra quod intelligatur pyramis similis priori, quæ eandem habebit altitudinem ac conus B, nam coni similes habent diametros & altitudines proportionales, (*per def.*21. 11.)

 ut

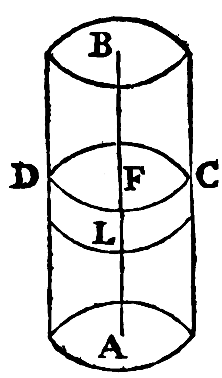
ut autem diameter C D ad E F, ita latus C H ad latus E K, (*ut ostendimus prop.*1.) igitur ut C H ad E K, ita altitudo coni A, ad altitudinem coni B; sed altitudo pyramidis inscriptæ cono A eadem est cum altitudine coni A: igitur ita est altitudo pyramidis A ad altitudinem coni B sicut CH ad EK, sed ut CH ad EK ita altitudo pyramidis A ad altitudinem pyramidis similis supra E K L F descriptæ; igitur altitudo pyramidis A eodem modo se habet ad altitudinem coni B & pyramidis cujus basis EKFL (*per* 75.) altitudines coni, & pyramidis sunt æquales. Supra eandem basin EKFL cono B inscribatur pyramis, quæ cum eandem habeat altitudinem & basin cum priori, illi erit æqualis (*per* 6.) Sed prior similis pyramidi A, (*per* 8.) erat in triplicatâ ratione lateris KF ad CH, aut diametri EF ad C D; igitur hæc pyramis inscripta cono B erit ad inscriptam cono A in triplicatâ ratione diametri EF ad C D; sed conus B ad magnitudinem G erat etiam in triplicatâ ratione diametri E F ad C D, igitur ut pyramis B ad pyramidem A ita conus B ad magnitudinem G, & convertendo, ut pyramis A ad pyramidem B ita magnitudo G ad conum B: sed pyramis A major est magnitudine G, igitur pyramis B hoc est inscripta cono B (*per* 14. 5.) major esset cono B; pars toto: quod absurdum est.

Quia verò cylindri sunt tripli conorum, eandem rationem habebunt ac coni; igitur etiam ipsi erunt in triplicata ratione diametrorum suarum basium.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si cylindrus secetur plano basibus parallelo; ita erunt inter se segmenta cylindri ac segmenta axis.



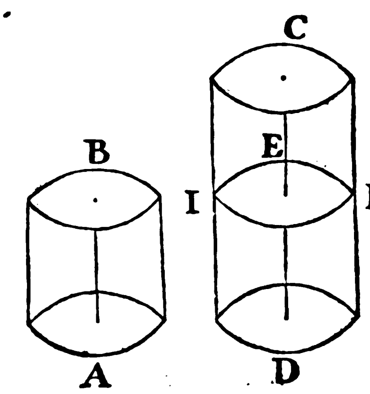
Cylindrus A B secetur plano CD, parallelo basibus A, & B; dico ita esse cylindri segmentum AF, ad segmentum FB; sicut est linea AF, ad FB. Sit enim lineæ AF quæcumque pars aliquota L F, sitque verbi gratiâ quarta pars, per quam intelligatur duci planum basibus parallelum.

Demonstr. Quoniam L F est quarta pars lineæ A F in reliquâ A L, invenientur tres partes lineæ LF æquales; per quas si ducerentur plana basibus parallela, fierent tria segmenta cylindri æqualia segmento LF (*per* 11.) cum æquales habeant bases, & æquales altitudines: igitur segmentum L F tam est quarta pars cylindri A F quam linea L F lineæ AF. Ponamus in linea F B bis inveniri lineam LF, & duci planum parallelum basibus. In segmento F B invenirentur saltem duo cylindri æquales cylindro L F; igitur quoties in lineâ F B continetur quarta pars lineæ AF, toties in cylindri segmento F B continetur quarta pars cylindri AF; & quod de quartâ parte ostendi, de quacumque parte aliquota ostendi potest; igitur ita est (*per def.*5.5.) linea F B ad AF sicut cylindri segmentum F B ad segmentum A F.

PROPOSITIO XIV.

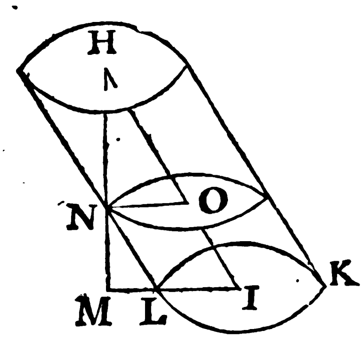
Theorema.

Cylindri, & coni quorum bases sunt æquales: se habent ut altitudines.



Sint primò duo cylindri recti A B, C D quorum bases sint æquales, dico ita esse cylindrum AB ad cylindrum C D sicut altitudo A B ad altitudinem C D. Ex majori altitudine abscindatur altitudo DE, æqualis altitudini AB; intelligaturque duci planum F I basibus parallelum.

Demonstr. Cylindri A B, ED, (*per* 11.) sunt æquales, sed cylindrus C D (*per* 13.) se habet ad Cylindrum E D sicut axis C D ad axin E D, aut A B illi æqualem; [nam in cylindris rectis axes, & altitudines eædem sunt:] igitur erit cylindrus C D ad cylindrum A B sicut altitudo C D ad altitudinem AB.



At verò si cylindri non essent recti quale est H I, demittatur à puncto H perpendicularis HM ad planum KL, quæ erit altitudo cylindri; ducaturque linea IM. Quia planum trianguli H I M secat duo plana NO, LK parallela (*per* 16. 1.) sectiones NO, IM parallelæ sunt: quare (*per* 2.6.) ita erit HO ad OI, sectiones axis, ac HN ad NM, sectiones altitudinis: igitur optimè sectiones axis pro altitudinibus assumi possunt, quod etiam notandum est in prop.13.

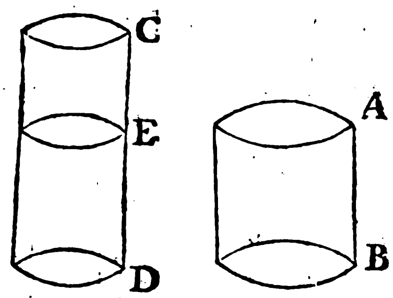
Quia autem coni sunt tertiæ partes cylindrorum

drorum (*per* 10.) ita se habebunt sicut cylindri; igitur coni quorum bases sunt æquales, ita se habent ut altitudines.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Æquales cylindri, & coni reciprocant bases & altitudines. Et qui reciprocant bases & altitudines, illi sunt æquales.



Sint duo cylindri æquales AB, CD; dico ita esse basin B ad basin D sicut est altitudo CD ad altitudinem AB. Ex majori altitudine CD, abscindatur altitudo DE, æqualis altitudini AB.

Demonstr. Quia cylindri AB, DE sunt ejusdem altitudinis: ita erit (*per* 11.) cylindrus AB ad cylindrum DE sicut basis B ad basin D: sed sicut AB ad DE ita cylindrus CD, æqualis ipsi AB ad ED. (*per* 7. 5.) & ut CD ad DE ita altitudo CD ad DE, aut illi æqualem AB; igitur ut basis B ad basin D ita altitudo CD ad altitudinem AB.

Dico secundò, si fit ut basis B ad basin D ita altitudo CD ad altitudinem AB, cylindros AB, CD esse æquales; in eadem suppositione, ut basis B ad basin D ita cylindrus AB ad cylindrum DE ejusdem altitudinis (*per* 11.) sed ut B ad D ita altitudo CD ad altitudinem AB, aut DE illi æqualem, igitur ita est AB ad DE sicut altitudo CD ad DE; sed ut altitudo CD ad altitudinem DE, ita est (*per* 13.) cylindrus CD ad DE, igitur ita est cylindrus AB ad DE sicut cylindrus CD ad DE; quare (*per* 9. 5.) cylindri AB, CD sunt æquales.

Idem intelligendum de conis, quia sunt tertiæ partes cylindrorum.

PROPOSITIO XVI. & XVII.

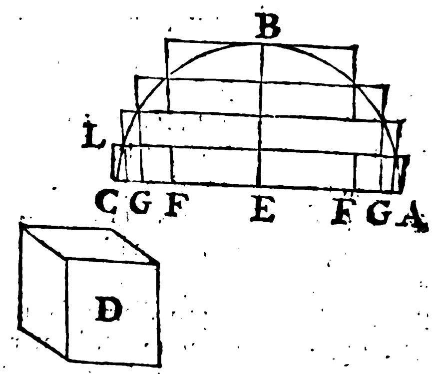
Relinquantur.

Quia istæ propositiones sunt difficilimæ, adhibenturque tantùm propter 18. quam aliâ methodo facilius cum P. Tacqueto ostendere possumus; ideo illas relinquimus, & loco illarum duo lemmata substituimus.

LEMMA I.

Si detur quantitas minor sphærâ; tot cylindri sphæræ inscribi poterunt, ut omnes simul sumpti illâ quantitate majores sint.

Sit sphæra cujus maximus semicirculus ABC: detur quantitas D sphærâ minor: dico tot sphæræ inscribi posse cylindros, ut omnes simul sumpti majores sint quantitate D. Semidiameter EB in quot volueris partes æquales dividatur per quas agantur parallelæ lineæ AC, fiantque parallelogramma inscripta; productis autem lateribus fiant parallelogramma circumscripta circulo, quorum numerus inscriptorum numerum superabit unitate; ut patet ex figurâ.

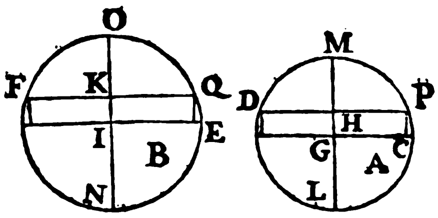


Demonstr. Parallelogramma circumscripta circulo superant inscripta parallelogrammis per quæ transit circulus, quæ simul sumpta æqualia sunt parallelogrammo AL. Si intelligatur volvi semicirculus diametro BE immotâ permanente; singula parallelogramma describent cylindros, tam inscriptos quam circumscriptos sphæræ; excessus autem cylindrorum circumscriptorum sphæræ, supra inscriptos omnes simul sumpti, æquales sunt cylindro descripto à rectangulo AL; sed sphæra minus excedit cylindros inscriptos quàm circumscripti eosdem inscriptos superent; cum intra circumscriptos contineatur: igitur excessus quo sphæra superat cylindros inscriptos, minor est cylindro descripto à parallelogrammo AL. Quo autem in plures partes dividitur semidiameter EB, eo minor est cylindrus parallelogrammi AL, cùm eius altitudo minor sit: igitur ita parvus esse potest cylindrus AL: ut excessus sphæræ supra cylindros inscriptos; minor sit quàm id quo sphæra superat quantitatem D; quare ita subdividi potest semidiameter EB ut cylindri inscripti simul sumpti, majores sint media parte quantitatis D, quod dixi de uno hemisphærio, de alio intelligi etiam potest; igitur potest ita dividi tota diameter, ut cylindri inscripti in tota sphæra simul sumpti majores sint quantitate D.

LEMMA II.

Similes cylindri in duabus sphæris inscripti; habent rationem diametrorum triplicatam.

In duabus sphæris A & B sint duo cylindri recti similes, producti ex circumvolutione similium rectangulorum CD, EF, circa immotas diametros LM, NO; dico cylindrum rectanguli CD esse ad cylindrum rectanguli EF, in ratione triplicata diametri LM ad diametrum NO.

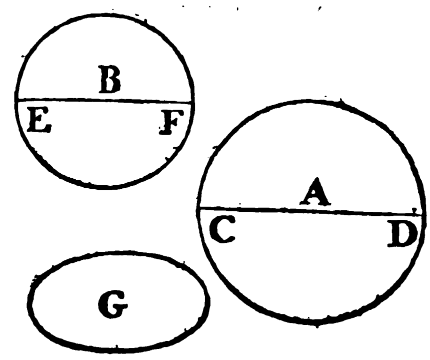


Demonstr. Cum rectangula C D, E F sint similia, ita erit (*per def. 5.*) P D ad P C, aut H G illi æqualem sicut Q F ad K I, & consequenter ita erit P H ad H G sicut Q K ad K I; quare si intelligantur duci lineæ P G, Q I, (*quæ in figura non sunt ductæ*) triangula P H G, Q K I (*per 6.*) proportionalia erunt, eritque ut P H ad P G, aut G M, ita Q K ad Q I, aut I O illi æquales; & consequenter erit P D, dupla ipsius P H, ad G M sicut Q F ad I O, vel sicut L M ad N O, (*per 5.*) sed cylindri generati circumvolutione rectangulorum P D, E F habent pro diametris basium lineas P D, Q F; quare (*per 12.*) habent rationem triplicatum illius quam habent lineæ P D, Q F: igitur habebunt rationem triplicatam illius quam habent lineæ L M, N O, quæ sunt diametri sphærarum. Quod si tot in una sphærâ inscriberentur quot in aliâ, cum singuli ad suos correspondentes habeant rationem triplicatam diametrorum sphærarum, omnes simul ad omnes simul (*per 12. 5.*) rationem habebunt triplicatam illius, quam habent sphærarum diametri.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Sphæræ habent rationem diametrorum triplicatam.



Sint sphæræ A & B, quarum diametri C D, E F; dico A ad B esse in ratione triplicata rationis, quæ est C D ad E F.

Demonstr. Si enim hoc ita non est, alterutra sphærarum, verbi gratia A, majorem rationem habeat ad B quàm triplicatam rationis C D ad E F, igitur possibilis est quantitas G minor sphærâ A, quæ ad B habeat rationem triplicatam rationis C D ad E F. Quia igitur G minor est sphærâ A, poterunt (*ex lemmate primo*) per subdivisionem diametri, tot inscribi cylindri sphæræ A, ut illi omnes simul sumpti majores sint magnitudine G. Intelligantur totidem, & similes inscripti sphæræ B, Cylindri A ad cylindros B (*per lemma 2.*) habebunt rationem triplicatam rationis C D ad E F; sed quantitas G ad sphæram B habet etiam rationem triplicatam rationis C D ad E F, igitur ita erunt cylindri A ad cylindros B, sicut quantitas G ad sphæram B; sed cylindri A majores sunt quantitate G, igitur (*per 14. 5.*) cylindri B majores essent sphæra B, quod est absurdum; nam sunt illius partes, & in ea continentur, cum sint inscripti.

Coroll. *Sphæræ sunt inter se ut cubi suarum diametrorum: cum enim cubi sint parallelepipeda similia, habebunt rationem laterum triplicatam* (per 33. 11.) *sed sphæræ habent etiam rationem diametrorum triplicatam (per præcedentem) ergo sphæræ sunt inter se, ut cubi diametrorum.*

EUCLI

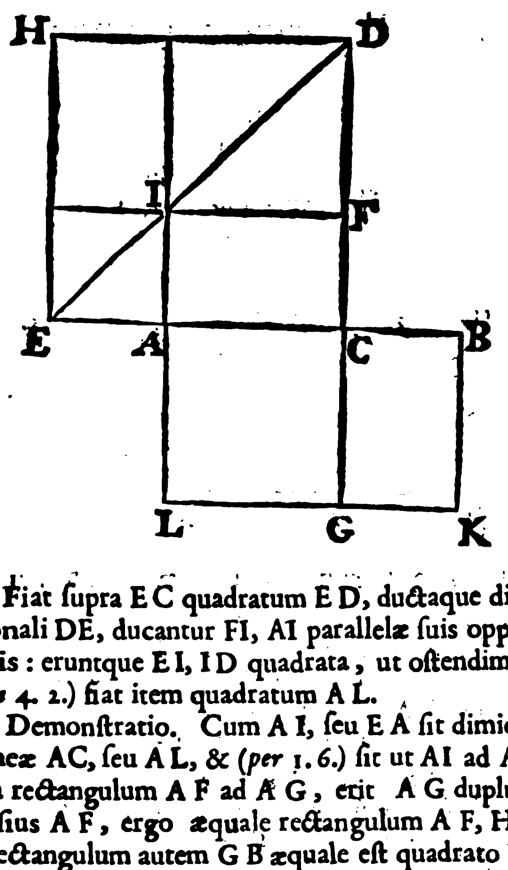
EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUSTERTIUS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si linea extremâ ac mediâ ratione secetur; composita ex majori segmento, & dimidiâ lineâ, quintupla est potentiâ, ipsâ dimidiatâ lineâ.

Linea A B extremâ, ac mediâ ratione secetur in C. Hoc est; ita sit linea AB ad majus segmentum A C ut A C ad C B, addaturque majori segmento A C, linea AE, æqualis AD, dimidiatæ AC; dico lineam AEC, quintuplam esse potentiâ ipsius A E, seu quadratum ex E C esse quintuplum, quadrati ex A E.



Fiat supra E C quadratum E D, ductaque diagonali DE, ducantur FI, AI parallelæ suis oppositis: eruntque E I, I D quadrata, ut ostendimus (*in* 4. 2.) fiat item quadratum A L.

Demonstratio. Cum A I, seu E A sit dimidia lineæ AC, seu A L, & (*per* 1. 6.) sit ut AI ad AL ita rectangulum A F ad A G, erit A G duplum ipsius A F, ergo æquale rectangulum A F, H I, Rectangulum autem G B æquale est quadrato ID (*per* 16. 6.) quia nempe AB, seu BK, AC & CB sunt continuæ proportionales; Ergo quadratum AK, æquale est Gnomoni HFA. Sed quadratum A K quadruplum est quadrati E I, eo quod A C sit dupla ipsius A E; ergo Gnomon H F A, est quadruplum quadrati E I. Et addendo ipsum quadratum EI, erit quadratum ED quintuplum quadrati E I, quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si linea quintuplum possit sui segmenti, reliqua pars erit majus segmentum, dupla prioris segmenti extrema ac media ratione secta.

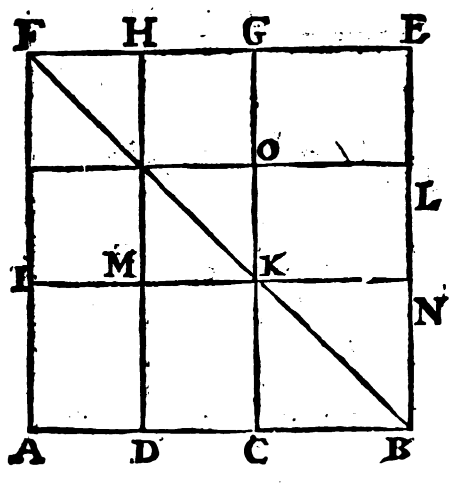
Lineæ EC quadratum quintuplum sit quadrati ex AE; dico reliquam A C esse majus segmentum lineæ A B duplæ prioris segmenti AE, sectæ extrema ac media ratione, hoc est ita esse A B ad A C, sicut A C ad C D; fiat eadem constructio.

Demonstr. Cum quadratum E D quintuplum sit quadrati E I, subtracto quadrato EI erit Gnomon H F A, quadruplum quadrati E I; sed quadratum ex A B, nempe A K, est etiam quadruplum ejusdem quadrati E I: ergo æquale est eidem Gnomoni, & cum A B, seu A L, dupla sit ipsius AE aut AI, & (*per* 1. 6.) ita sit AL ad AI, ut rectangulum AG ad AF, erit AL duplum ipsius A F, nempe æquale rectangulis H I, A F; ergo quadratum I D æquatur rectangulo C K, quare (*per* 16. 6.) ita est C G, seu AB, ad AC sicut AC ad C B, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si linea dividatur extremâ ac mediâ ratione; quadratum composita ex minori segmento, & dimidio majoris, quintuplum est quadrati dimidij ejusdem majoris segmenti.



Linea A B secetur extrema ac media ratione, sitque CB minus segmentum A C majus divisum bifariam

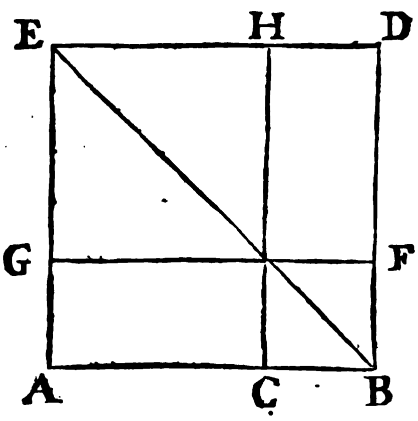
bifariam in D : dico quadratum lineæ D B compositæ ex C B & D C, esse quintuplum quadrati ex D C aut A D. Fiat supra A B quadratum A E ductâque diagonali F B, ducantur C G, D H, &c.

Demonstr. Cum sit ut AB ad AC ita AC ad CB, erit rectangulum A N sub extremis æquale quadrato mediæ AC, nempe quadrato IG; sed quadratum I G quadruplum est quadrati M O; ergo rectangulum A N, seu Gnomon D N O, illi æquale (translato scilicet A M in K L) est quadruplum quadrati M O: ergo addendo quadratum M O, quadratum DL quintuplum erit quadrati M O quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si linea extrema ac media ratione secetur; quadrata totius, & minoris segmenti simul, tripla erunt quadrato majoris.



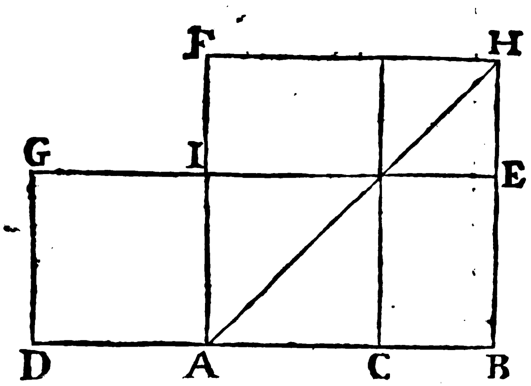
Linea A B extremâ, ac media ratione secetur; dico quadrata ex A B, & ex CB simul, tripla esse quadrato ex A C. Fiat supra AB quadratum AE, ductaque diagonali E B perficiatur constructio.

Demonstr. Cum sit ut A B ad A C ita A C ad CB; erit (*per* 17. 6.) rectangulum AF sub extremis æquale quadrato mediæ A C, seu quadrato G H ergo quadratum A D; continet bis quadratum GH, & præterea rectangulum HF, cui si addatur quadratum C F, fient quadrata AD, CF, tripla quadrati GH, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si linea extremâ ac mediâ ratione secta addatur majus extremum; composita ex utraque, secta erit extremâ ac mediâ ratione, priorque linea erit ejus majus segmentum.



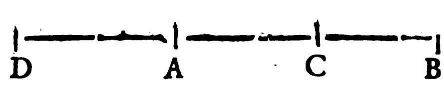
Lineæ A B extremâ ac mediâ ratione sectæ in C, addatur AD æqualis AC; dico DB extrema ac media ratione dividi in A, & AB esse ejus majus segmentum: nempe debeo probare ita esse DB ad A B sicut AB ad D A.

Demonstr. Cum sit ut A B ad AC ita AC ad CB, seu EH, erit (*per* 17. 6.) rectangulum E H æquale quadrato C I, seu AG, cum DA, AC, sint æquales. Addatur commune A E, erit rectangulum D E æquale quadrato AH; ergo ita est (*per* 17. 6.) DB ad AB, ut AB ad BE, seu DA.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si recta rationalis extrema, ac media ratione secetur; utrumque segmentum erit irrationalis linea dicta Apotome.



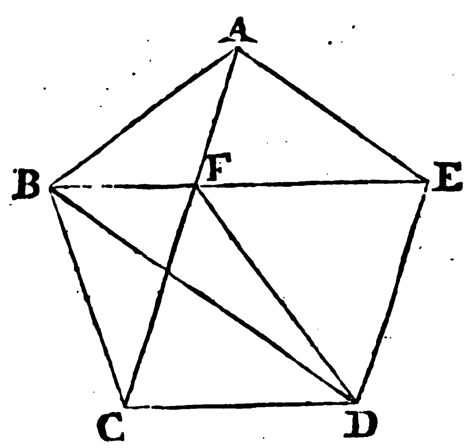
Recta rationali A B, extrema, ac media ratione secetur in C; dico utrumque segmentum AC, & CB esse lineam irrationalem dictam Apotomen. Addatur A D dimidia A B.

Demonstr. Quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati A D (*per* 1.) ergo commensurabilia sunt, & lineæ saltem potentia. Et cum A D sit rationalis, C D etiam rationalis erit: cum autem quadrata non habeant rationem quam habet numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt C D, A D longitudine incommensurabiles, sed potentia commensurabiles. Quare si ex rationali C D detrahatur A D rationalis potentia tantum toti incommensurabilis, restabit A G irrationalis quæ dicitur Apotome. Sit rectangulum AE comprehensum sub A B, B C, illud erit æquale quadrato ex AC; quare quadratum Apotome AC applicatum ad lineam rationalem A B, facit latitudinem B E, seu CB Apotomen primam (*per* 98. 10.)

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si Pentagoni æquilateri tres anguli æquales fuerint; æquiangulum erit.



Sint primò tres anguli A, B, C in pentagono æquilatero ABCDE æquales; dico pentagonum æquiangulum esse. Ducantur B E, AC, BD.

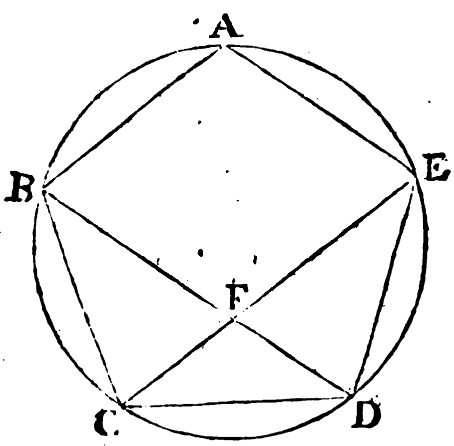
Demonstr. Comparentur tria triangula Isoscelia

celia BAE, ABC, BCD, quæ (*per* 4. 1.) & bases habebunt æquales, & omnes angulos ad bases. Nempe æquales erunt AEB, ABE, BAC, BCA, CBD, CDB. Sunt item æquales BED, BDE (*per* 5. 1.) cum BE, CD sint æquales: ergo totales AED, CDE æquales erunt. Rursus cum anguli BAF, FBA sint ostensi æquales, erunt (*per* 6. 1.) latera BF, FA æqualia, & consequenter reliqua FE, FC. Quare si considerentur triangula FED, FCD, hæc habent latera FE, FC; ED, CD æqualia; & basin FD communem: ergo anguli FED, FCD (*per* 8. 1.) æquales erunt, & additis æqualibus BCA, AEB, fient anguli BCD, AED æquales: ergo omnes anguli sunt æquales. Si verò anguli æquales non fuerint continui sint illi A, C, & D; ostendam sicut prius angulos AED, CDE esse æquales. Quare cum tres continui A, E, D sint æquales: erit pentagonum æquilaterum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si in pentagono æquilatero & æquiangulo duæ lineæ subtendant angulos vicinos; hæ extremâ ac mediâ ratione se secabunt invicem, & majus segmentum æquale erit lateri pentagoni.



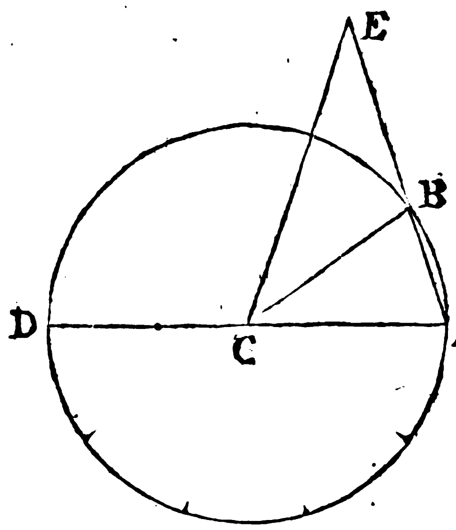
In pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, lineæ BD, CE subtendant angulos æquales C & D: dico utramque secari extremâ, ac mediâ ratione in F, ita ut majus segmentum BF æquale sit lineæ BC lateri pentagoni. Pentagono circulus circumscribatur.

Demonstr. Primò triangula BCD, EDC sunt (*per* 4. 1.) omninò æqualia, ergo & bases CE, BD. Sunt item 4 anguli CBD, CDB, CED, DCE æquales, quare latera CF, FD erunt æqualia (*per* 6. 1.) Item cum angulus externus BFC æqualis sit duobus internis FCD, FDC æqualibus, erit duplus anguli ECD, sed angulus BCE, duplus est anguli ECD, cum arcus BAE, sit duplus arcûs DE, ergo æqualis est angulo BFC. Et (*per* 6. 1.) BC, BF sunt æquales. Cum ergo triangula CFD, BCD sint æquiangula, eo quod anguli CBD, BDC, DCF sint æquales, erit (*per* 3. 6.) ut BD ad BC, seu FD, ita CD, seu BF, ad FD. Ergo BD extrema, ac media ratione secatur in F; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si latus exagoni, & decagoni componantur, linea erit secta extremâ ac mediâ ratione; majusque segmentum erit latus exagoni.



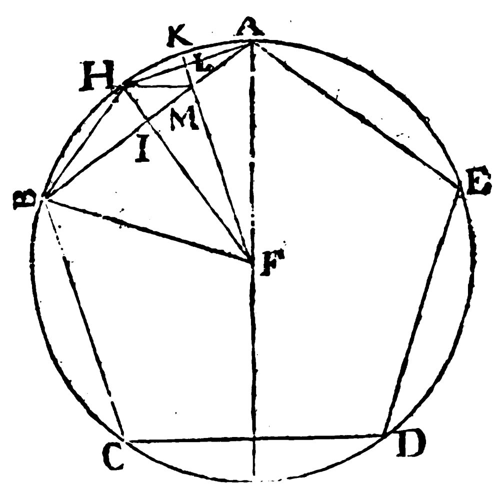
Sit AB latus decagoni, cui addatur BE latus exagoni in eodem circulo inscripti: dico lineam AE extremâ & mediâ ratione sectam esse in B, & majus segmentum esse BE, latus exagoni. Est BE æquale radio BC.

Demonstr. Cum AB sit latus decagoni, arcus AB erit graduum 36 divisis gradibus 360 per 10. quibus sublatis ex 180 erunt reliqui duo anguli trianguli ABC 144 graduum: sunt autem æquales; ergo quilibet est 72 graduum. Est ergo CBA graduum 72, sed est æqualis duobus internis æqualibus E & BCE, ergo quilibet est 36. Est ergo angulus E 36, & angulus ECA 72; sicut EAC. Sunt ergo triangula AEC, ACB æquiangula: ergo (*per* 3. 6.) ita est EA ad CA, seu CB, aut EB, sicut CB, seu EB, ad BA: ergo EA est divisâ extremâ, ac mediâ ratione; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Quadratum lateris pentagoni æquale est quadratis lateris exagoni & decagoni.



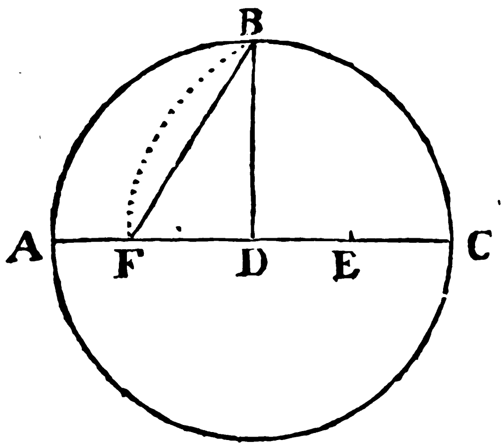
Sit pentagonum regulare ABCDE dico quadratum lateris AB æquale esse quadratis ex BF, radii
HK

radij ſcilicet exagoni, & BH lateris decagoni. Dividatur arcus BK bifariam in K, ducaturque HA, & H M.

Demonſtr. Angulus BFA eſt quinta pars quatuor rectorum nempe 72. quibus ſublatis ex duobus rectis erunt reliqui duo 108 ſeu ſinguli BAF, FBA 54. Eſt arcus BH 36 & HK 18. Ergo arcus BHK eſt 54: ergo angulus B F M eſt 54, æqualis angulo BAF. Sunt ergo triangula A B F, M B F æquiangula: ergo ita eſt A B ad BF, ſicut BF ad BM (*per* 3. 6.) ergo rectangulum ſub A B B M æquale eſt quadrato BF. (*per* 17. 6.)

Pariter æquiangula ſunt quadrata HIA, LMA, cum præter angulos rectos in I & L, habeant angulum LAM, communem: ergo æquiangula ſunt triangula ABH, HAM: ergo (*per* 3 6.) ita eſt AB ad BH, ſicut AH, ſeu BH, ad AL: ergo (*per* 17. 6.) rectangulum ſub AB, AM, æquatur quadrato ex B H. Ergo quadrata ex B F & B H, æquantur rectangulis ſub AB, BM, & ſub AB, AM: ſed hæc rectangula (*per* 2. 2.) æquantur quadrato ex AB: ergo quadratum ex AB, æquale eſt, quadratis ex BF, BH, quod erat demonſtraudum.

Corollarium. Invenire in circulo latus decagoni, & pentagoni.



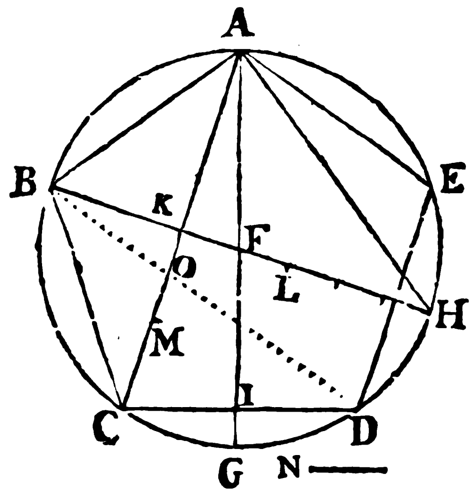
In circulo A B C ſit inveniendum latus decagoni & exagoni. Ducatur diameter ADC & perpendicularis DB, dividatur DC bifariam in E, ducatur E B cui fiat æqualis E F; dico FB eſſe latus pentagoni, & FD decagoni,

Demonſtr. Cum linea D C ſit diviſa bifariam in E, & ei addita FD, erit (*per* 6. 2.) rectangulum CFD, unà cum quadrato ex ED, æquale quadrato EF, ſeu EB, ſed quadrato EB æqualia ſunt quadrata ED, DB (*per* 47. 1.) ergo rectang. C F D cum quadrato E D æquatur quadratis E D, D B. Et abjecto quadrato ED, erit rectangulum CFD æquale quadrato DB; ergo ita eſt CF ad DB, ſeu DC, ut DC ad FD. Ergo linea CF diviſa eſt extremâ ac mediâ ratione, & cum majus ſegmentum DC ſit latus exagoni, erit (*per* 9.) FD latus decagoni: ſed quadratum lineæ F B æquale eſt quadratis ex FD & D B, nempe quadratis lateris decagoni. & exagoni; ergo FB (*per præcedentem*) eſt latus pentagoni.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si diameter circuli fuerit linea rationalis pentagoni, latus eſt linea irrationalis dicta minor.



Sit diameter AG rationalis, dico latus pentagoni eidem circulo inſcripti eſſe lineam rationalem quæ dicitur minor. Ducantur diametri AG, BH, quæ latera oppoſita divident bifariam, ducantur item AC, AH, abſcindanturque ex ſemidiametro FH quarta eius pars: ſicut & C M quarta pars lineæ AC; cum BH ſit rationalis, erit BF, ſicut & FL, rationalis, & tota BL erit rationalis.

Demonſtr. Triangula AKF, ACI habentia angulum CAI communem, & præterea angulos rectos in K & I, ſunt æquiangula; ergo (*per* 3. 6.) ita eſt CI ad F K ut CA ad FA, aut F H. Pro CA & FH ſumantur quadrantes CM, FL; ita erit C I ad FK ut CM ad FL; & permutando ut CI ad CM, aut ut dupla nempe CD ad CK, ita FK ad FL; & componendo ut CD, CK ſimul ad CK, ita KL ad FL, & earum quadrata in eadem ratione erunt. Supponamus duci lineam BD; AC, & BD ſe ſecabunt in O extremâ, ac mediâ ratione (*per* 8.) eritque AO æqualis CD, & (*per* 1.) quadratum compoſitæ ex A O ſeu C D, & ex CK, quintuplum eſt quadrati CK, ergo quadratum KL quintuplum eſt quadrati FL, illique commenſurabile, ergo cum F L ſit rationalis, & KL ſaltem illi potentia commenſurabilis, rationalis erit.

Deinde ſi B F ſit diviſa in quatuor partes, erit FL una, & BL 5. Igitur quadratum FL erit 1, & quadratum BL 25. Quadratum autem KL erit 5. ut vidimus. Sunt igitur lineæ BL, KL longitudine incommenſurabiles cum earum quadrata non ſe habeant ut numerus quadratus ad quadratum; ſunt autem rationales. Quare ſi ex rationali BL, auferatur K L rationalis potentiâ tantum commenſurabilis, reſtabit BK irrationalis dicta apotome, & ei congruens erit KL.

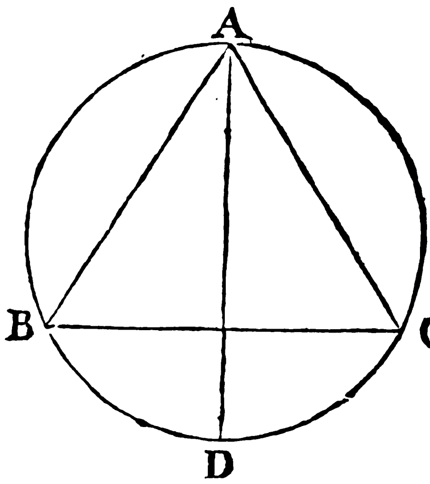
Jam verò linea BL plus poſſit quàm K L quadrato rectæ N, ſe habet autem quadratum B L ad quadratum KL, ut 25 ad 5; ſeu ut 5 ad 1, & in illa hypotheſi erit quadratum lineæ N, 4. Sunt ergo commenſurabilia quadrata BL & N, cum ſe habeant ut 5 ad 4, lineæ tamen potentia tantum ſunt incommenſurabiles; quare cum tota BL rationalis longitudine commenſurabilis primæ rationali BH, poſſitque plus quàm congruens KL, quadrato lineæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis; erit BK apotome quarta; ex definitione.

Denique cum AB ſit media proportionalis inter BH, & BK: eſt enim angulus BAH in ſemicirculo rectus, & triangulum ABK diviſum eſt perpendiculari A K in triangula ſimilia. Erit ergo ABH ad AB ut AB ad BK; quare quadratum AB æquale eſt rectangulo ſub BH, BK. Quare cum linea AB poſſit rectangulum contentum ſub rationali B H, & Apotoma quarta erit (*per* 95. 10.) AB linea minor; quod erat demonſtrandum.

PROPO

PROPOSITIO XII.

Quadratum lateris Trianguli æquilateri triplum est, quadrati ſemidiametri.



Sit triangulum æquilaterum ABC circulo inſcriptum; dico quadratum eius eſſe triplum quadrati radii ſeu ſemidiametri, aut lateris exagoni. Ducatur diameter AD, & jungatur BD.

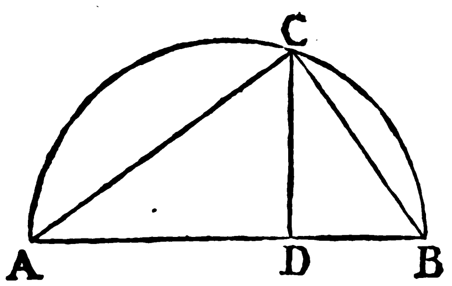
Demonſtr. Cùm arcus AB ſit tertia pars circuli ſeu duæ ſextæ, & ABD contineat tres ſextas, erit BD ſexta pars: erit igitur latus exagoni, ſed cum angulus ABD in ſemicirculo ſit rectus, quadratum ex AD æquale erit quadratis ex AB, & BD (*per* 47.1.) Ponatur quadratum ex A D, eſſe quatuor, eritque quadratum ex BD unum, cum BD æqualis ſit ſemidiametro: ergo quadratum ex AB erit tria: eſt ergo triplum quadrati lateris exagoni, ſeu ſemidiametri.

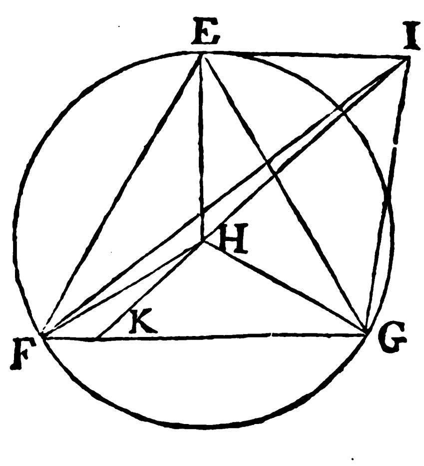
Coroll. Quadratum diametri ſe habet ad quadratum trigoni æquilateri, ut 4 ad 3.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Tetraedrum ſphæræ inſcribere, & oſtendere diametrum ſphæræ potentia ſeſquialterum eſſe lateris Tetraedri.





Sit datæ ſphæræ diameter A B, cujus BD ſit tertia pars: ducatur perpendicularis DC, junganturque CA, CB ex centro quocumque H, intervallo DC. Fiat circulus, cui inſcribatur (*per* 2.4.) triangulum æquilaterum EFG, eruntque HE, HF, HG æquales ipſi DC, ad planum G E F, in puncto H excitetur perpendicularis H I æqualis AD, junganturque I E, I G, I H; dico I E F G eſſe tetraedrum, ſeu pyramidem conſtantem quatuor triangulis æquilateris: item ſi ponatur H K æqualis DB, quod ſphæra ad cujus diameter I K, attinget pyramidem in punctis E F G & quod diameter ſphæræ KI, ſeu AB, ſit ſeſquialterum potentia lateris illius pyramidis.

Demonſtr. Primò cum triangula EHI, A D C; habeant angulos in H & D rectos, & latera DC, H E; A D, H I ſint æqualia: erunt (*per* 4.1.) A C, E I æquales, eodem modo oſtendo A D, F I, aut G I eſſe æquales.

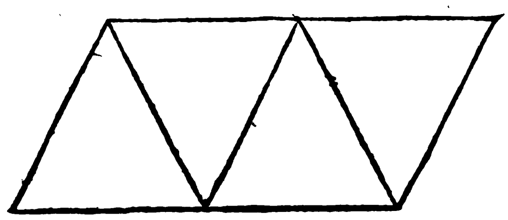
Secundò cum tres lineæ AD, DC, DB ſint proportionales, erit ut AD ad D B, ita quadratum AD ad quadratum DC: (*per* 8. 6.) ſed AD eſt dupla ipſius DB, cum D B ſit tertia pars totius AB: ergo quadratum AD, duplum eſt quadrati DC; ſed (*per* 47.1.) quadratum AC æquale eſt quadratis AD, DC: ergo AC eſt triplum quadrati DC, ſeu HE; ſed etiam quadratum F E triplum eſt quadrati HE: (*per* 12.) ergo lineæ A C, F E, ſunt æquales; ſunt igitur triangula I F E, I F G, I E G, E F G æquilatera.

Tertiò, cùm ita ſit AD ad DC, ut DC ad DB, erit etiam I K ad H E, ita H E ad H K, circulus deſcriptus ſupra diametrum K I tranſit per E, ita oſtendam tranſire per F & G: ergo tetraedrum eſt ſphæræ inſcriptum.

Quartò, cum quadratum AD ſit duplum quadrati DC, & illis ſit æquale quadratum AC, erit 3 & quadratum AD 2, ſeu ſi quadr. AD ponatur 4, quadratum AC erit 6: ſed cum AD ad AB ſit ut 2 ad 3, quadratum A D ad quadratum AB, erit ut 4 ad 9: ergo quadratum A B ad quadratum AC, ſeu ad quadratum I E, aut I F, erit ut 9 ad 6, ſeu ſeſquialterum.

Coroll. Facile ex his colligimus quadratum diametri ſe habere ad quadratum ſemidiametri circuli baſium tetraedri, ut 9 ad 2.

Secundò, perpendicularis ex centro ſphæræ ad baſin tetraedri eſſe ſextam partem diametri, & altitudo tetraedri continet duas tertias diametri.

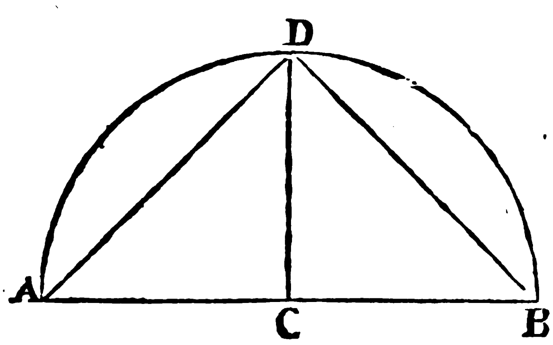


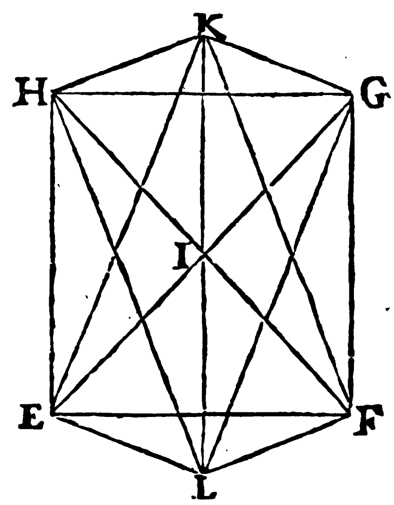
Coroll. 2. Si ex materia solida fiant triangula æquilatera quatuor, ut figura indicat, fiet tetraedrum regulare.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Octaedrum sphæræ inscribere; & ostendere diametrum sphæræ, esse duplum potentiâ, lateris octaedri.

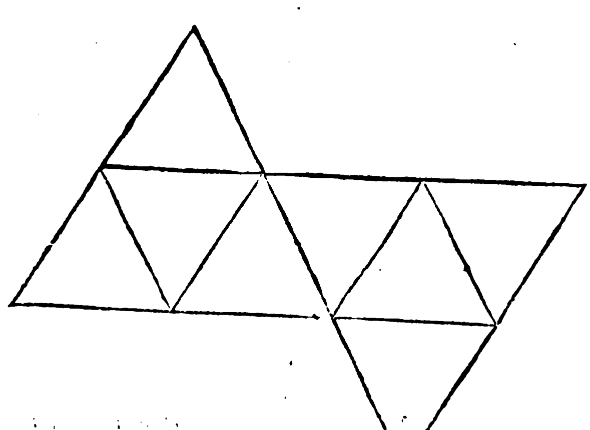




Sit sphæræ diameter AB divisa bifariam in C, ducatur perpendicularis C D, & jungantur AD, BD; sit E F æqualis D B, supra quam fiat quadratum EFGH, cujus diametri GE, FH se intersecantes in puncto I, per quod ad planum E G erigatur perpendicularis I K, I L æquales semidiametro A C; tum connectantur KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, LH, dico factum esse octaedrum.

Demonstr. In triangulo rectangulo EHG, cum angulus H, sit rectus & latera HG, H E æqualia erunt anguli HGE, HEG æquales & semirecti. Similiter idem ostendam in aliis triangulis H E F, EFG, quare ostendam in triangulo v. g. H I G, angulos H G I, I H G esse semirectos & consequenter latera H I, I G esse æqualia, & angulum G I H rectum esse, & cum (*per* 47. 1.) quadratum lateris I G æquale quadratis H I, I G, sit etiam æquale quadrato BD, quod æquale est quadratis C B, C D; erit H I æqualis semidiametro C B, & cum I K, eidem semidiametro sit æqualis, & anguli in I sint recti, erit quadratum E K æquale quadratis I E, I K, id est CD, BC: ergo latus E K æquale est DB, ita ostendam reliqua latera H K, F K, G K, L E, L F &c. esse æqualia lateri D B; est ergo solidum comprehensum octo triangulis æquilateris, quod sphæræ inscriptum est cum lineæ I H, I G, I K, I L &c. sint æquales semidiametro C B, manifestum autem est quadratum diametri A B duplum esse quadrati ex D B.

Coroll. In octaedro tres diametri se invicem secant ad angulos rectos in centro sphæræ, item tria plana HEFG, EKGL, FKHL esse quadrata, 6 plana opposita esse parallela, & dividi octaedrum in duas pyramides similes.



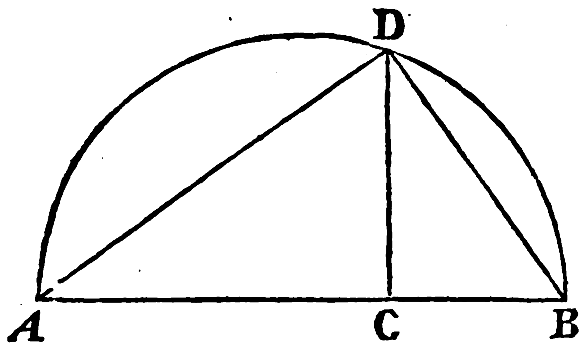
Coroll. 2. Si in materia solida fiant octo triangula qualia figura indicat ea coalescent in octaedrum.

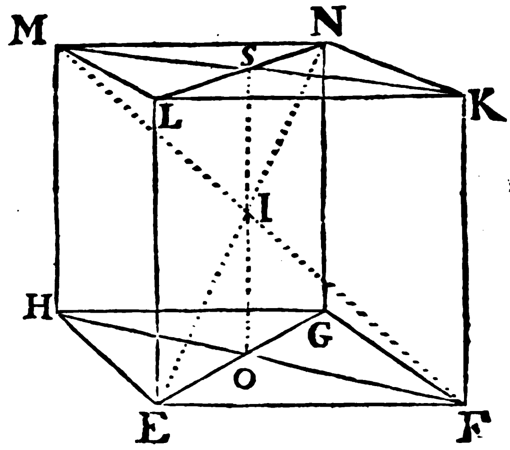
PROPO

PROPOSITIO XV.

Problema.

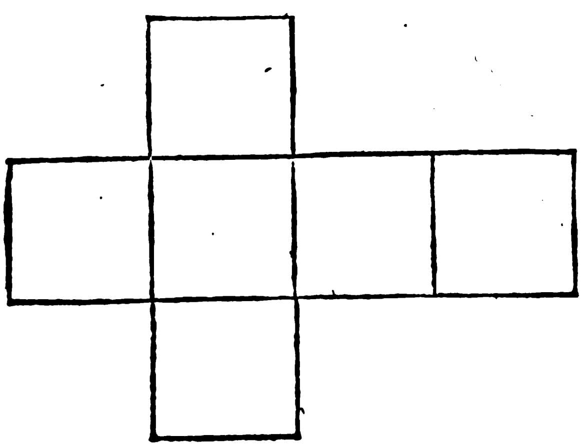
Cubum sphæræ inscribere, & ostendere diametrum sphæræ, esse potentiâ triplam lateris cubi ipsi inscripti.





Sit sphæra cujus diameter AB, & illius tertia pars sit BC, excitetur perpendicularis C D, junganturque A D, D B, assumatur E F æqualis ipsi D B; fiatque quadratum EFGH, & excitatis in punctis E, F, G, H, quatuor perpendicularibus ad planum EG perficiatur cubus; dico illum esse qui quæritur. Ducatur in planis oppositis LN, EG diametri LN, MK, HF, EG; item ducatur SO, ducantur item diametri cubi N E, M F, qui (*per* 35. 11.) se bifariam secabunt in puncto I; eruntque I M, I N, I E, I G æquales. Ergo I est centrum sphæræ transeuntis per M F, N E: si ducerentur aliæ diametri, ostenderem eandem sphæram transire per H, G, L, K; ostendo E N æqualem esse A B.

Demonstr. Cùm AB sit tripla C B, erit AC dupla, & cum A C, C D, C B; sint proportionales, erit ut A C ad C B, ita quadratum A C, ad quadratum C D: est ergo illius duplum, & cum quadratum A D sit illis æquale, erit quadratum AD triplum quadrati C D, & se habet ad quadratum AC ut 3 ad 2, & quadratum AC ad quadratum A B se habet ut 4 ad 9, cum se habeant lineæ ut 2 ad 3. Sunt ergo quadrata AC 4 AD, 6, AB 9, sunt autem quadrata AD, DB æqualia quadrato AB, ergo quadratum DB erit 3, cum E F sit æqualis D B, ejus quadratum erit 3, & quadratum E G illius duplum erit 6, & cum quadratum E N sit æquale quadrato E G 6, & G N 3, ejus quadratum erit 9; ergo E G æqualis est diametro AB, ejusque quadratum 9 triplum est quadrati E F 3; quod erit demonstrandum.

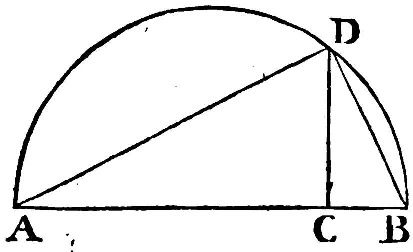


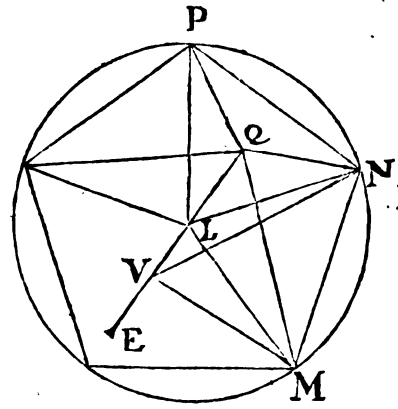
Coroll. Si ex materia solida fiant 6 quadrata æqualia ut figura indicat, ea coalescent in cubum.

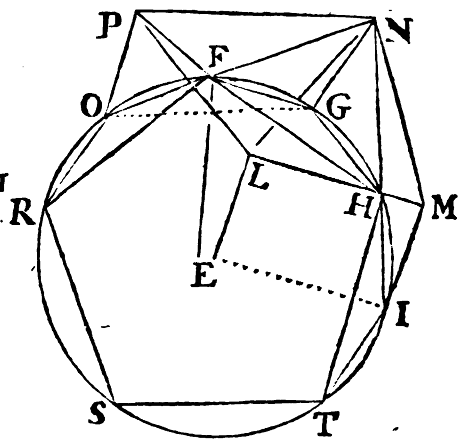
PROPOSITIO XVI.

Problema.

Icosaedrum sphæræ inscribere, & demonstrare eius latus esse lineam irrationalem, quæ dicitur minor.







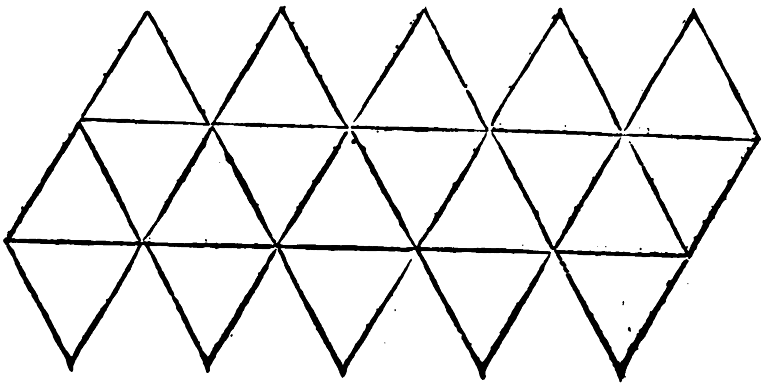
Sit AB diameter sphæræ, & C B illius quinta pars, excitetur perpendicularis C D, ducantur item AD , DB; tum intervallo DB centro E fiat circulus in quo inscribatur decagonum regulare, nempe inscripto prius pentagono, & divisis bifariam arcubus decagonum ; tum in punctis E, & alternatim in angulis decagoni excitentur perpendiculares ad planum circuli F G I , quæ sint æquales ipsi E F, nempe E L , I M , G N , O P, quæ conjungantur ductis lineis LP, LN, LM &c. & cum hæ perpendiculares sint parallelæ & æquales, lineæ eas conjungentes erunt parallelæ & æquales, ut LM, EI ; quare ductæ ex ML ad R, P, N, M omnes æquales erunt. Quare si ex centro L describeretur circulus, ille transiret per puncta P, N, M,&c. Item PN esset æqualis OG, si ducta esset & NM lineæ GI, atque adeò si perficerentur omnia fierent RP, PN, NM latera pentagoni æqualis pentagono F H T, &c. quia autem GN est linea æqualis semidiametro EF, seu lateri exagoni & FG est latus decagoni,estque angulus FGN rectus , lineæ F N quadratum æquale erit quadrato lateris decagoni & exagoni : quare (*per* 10.) erit FN latus pentagoni : Idem dicendum de NH : est ergo FNH æquilaterum triangulum. Pariter æquilaterum erit FNP licet figura id non exhibeat : est enim angulus POF rectus, & PF potest latus exagoni OP, & decagoni O F ; fiunt ergo si perficeretur figura 10 triangula æquiangula. Producatur perpendicularis LE , utrinque in q ita ut L q sit æqualis lateri decagoni circuli FGHI, & ut vitetur confusio repetatur separatim pentagonum P N M & linea E L dividatur bifariam in V. Cum E L sit semidiameter circuli FGI , seu latus exagoni , & Lq latus decagoni ejusdem , erit E q divisa in L extrema ac media ratione, (*per* 9.) & E L majus segmentum , (*per* 3.) erit quadratum ex Vq quintuplum quadrati ex VL. Ducantur ex puncto q ad singula puncta pentagoni PNM &c. lineæ q P , q N , q M , quas ostendo esse æquales lateri pentagoni : ducantur ex centro L lineæ LP, L N , L M, cùm anguli in L sint recti , quadratum ex q P æquale erit quadratis ex LP , Lq, nempe quadratis laterum exagoni, & decagoni;ergo (*per* 10.) qP est latus pentagoni. Pariter ostendam qN, qM, esse latera pentagoni, inscripti circulo cujus L P aut EF est radius:fiunt ergo in puncto q quinque triangula æquilatera , totidem fierent ex parte adversa : ergo habemus 20 triangula æquilatera.

Rursus cum omnes anguli in L recti sint nempe quos linea Eq comprehendit , sintque lineæ LP, LN, LM, aliæque æquales erunt VN, V M, V P æquales , earumque quadratum est quintuplum quadrati VL : nam EL supposita fuit æqualis radio E F , seu LN ; ergo quadratum V L est quarta pars quadrati LN ; ergo quadratum V N, utrique æquale (*per* 47. 1.) est quintuplum ergo linea VN, VP, & aliæ omnes ductæ ex centro V ad omnes angulos sunt æquales lineæ Vq. Ergo sphæra attingit hoc icosaedrum in omnibus angulis quod erat demonstrandum.

Deinde cum ita sit AB ad BD , ut BD ad C B ita erit quadratum AB ad quadratum DB, ut A B ad BC (*per* 20. 6.) sed A B est quintupla ipsius BC; ergo quadratum A B est quintuplum quadrati BD : sed quadratum radij V N est quintuplum quadrati V L , & consequenter quadratum diametri integræ illius spheræ quintuplum est quadrati totius EL, seu BD , ergo diameter sphæræ æqualis est lineæ A B.

Denique cum quadratum AB sit quintuplum quadrati BD, seu EF, & AB sit rationalis,erit E F radius circuli F G I rationalis , & (*per* 11.) latus pentagoni ipsi inscripti , seu latus icosaedri erit irrationalis linea quæ dicitur minor.

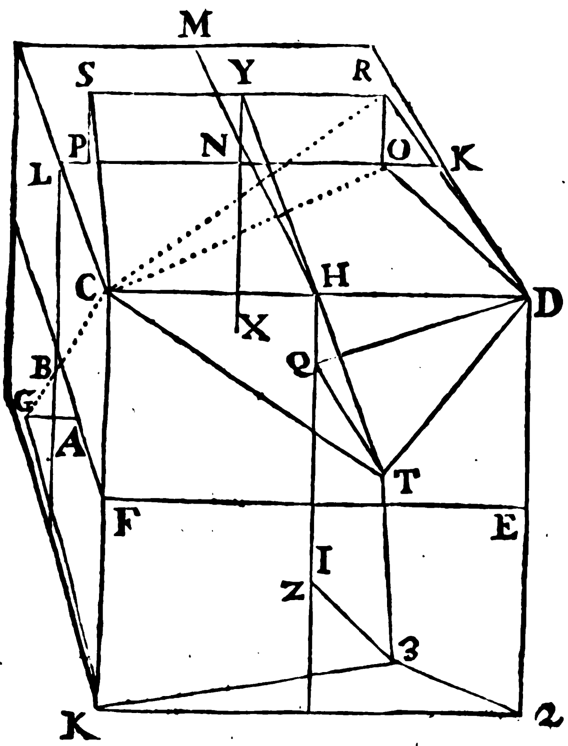
Si conjungantur viginti triangula æquilatera in materia solida, formabitur ex his icosaedrum regulans.



PROPOSITIO XVII.

Problema.

Dodecaedrum sphæra inscribere, & demonstrare eius latus esse irrationalem lineam quæ dicitur apotome.



Sphæræ inscribatur cubus A B, cujus latera omnia bisecentur, & per divisiones ducantur HG, HM, KL, FE, &c. Lineæ LN, NK, I H secentur extrema ac media ratione in punctis Q, P, & O; in quibus excitentur lineæ perpendiculares ad plana quadratorum DB, AC, æquales majoribus segmentis QI, NO, NP; ducantur lineæ CT, DT, C S, D R, R S: dico factum esse pentagonum SCTDRS, quod totum sit in eodem plano, sitque æquilaterum, & æquiangulum cujus puncta S, R, T sint in superficie sphæræ, fierique posse alia undecim similia supra alia latera cubi. Item latus ejus esse lineam irrationalem apotomen, posità nempe diametro sphæræ rationali. Ducatur N V parallela, quæ producta attinget centrum cubi, & sphæræ in puncto X, ducantur item lineæ CR, CO, DP, DS, DO, HV, HT, RX.

Ostendo primò totum pentagonum in uno esse plano.

Demonstr. Cum PS, O R sint rectæ ad idem planum, parallelæ erunt; & cum sint æquales, erunt SR, PO parallelæ & æquales (*per* 33.1.) & cum PO, CD sint parallelæ, erunt SRCD parallelæ: quare totũ trapesium SCDR in uno est plano. Dico triangulum CTD in eodem esse plano. Nam ita est NK ad NO, seu NH ad NY, sicut I H ad QT, seu ut QT ad QH. Sunt item anguli in N, & Q recti, cum utraque linea NYQ sit ad suum planum recta. Sunt igitur triangula similia, & sunt ita collocata ut latera homologa NY, QH sint parallela, utpote ad idem planum CM recta, quare (*per* 32.6.) lineæ TH, HY in directum jacent, & in uno sunt plano trianguli CTD, quod ducitur per rectas CD, TY; in quo etiam est trapesium CSRD.

Ostendo secundò illud esse æquilaterum.

Si ducerentur lineæ CP, DO, CQ, DQ, cum lineæ LP, OK, QH sint æquales & anguli recti, item CH, HD, LC, DK, illæ (*per* 4. 1.) essent æquales. Sunt autem (*per* 47.1.) quadrata DR, DT æqualia quadratis DQ, QT; DO, OR: ergo lineæ RD, DT, CT, TS simili modo sunt æquales.

Restat probandum rectas SR, RD esse æquales. Cum NK sit secta in K extremâ ac mediâ ratione, erunt (*per* 5.) quadrata NK, OK, seu DK, OK, tripla quadrati ON, sed quadratis OK, KD (*per* 47. 1.) æquale est quadratum OD; ergo quadratum OD est triplum quadrati ON, seu O R. Sed quadratum RD æquale est quadratis OR, OD; ergò quadratum R D quadruplum est quadrati ON. Sed pariter quadratum PO, seu SR, est quadruplum quadrati O N, ergo quadrata R D, S R æqualia sunt: ergo æquilaterum est pentagonum.

Ostendo tertiò esse æquiangulum nempe si ducatur C R, fieri triangulum C S R æquale triangulo CTD, & angulum CSR æquale esse angulo CTD; ad quod probandum sufficit ostendere lineam CR æqualem esse lineæ CD, seu LK. Cum linea LN sit secta in P, extremâ ac mediâ ratione, eique addatur majus segmentum N O, linea L O secabitur extremâ ac mediâ ratione in N (*per* 5.) eruntque (*per* 4.) quadrata LO, O N seu OR tripla quadrati LN, seu LC; quod ultimum si addatur erunt quadrata LO, LC, OR quadrupla quadrati L C. Pro duobus primis substitue quadratum C O illis æquale (*per* 47. 1.) erunt ergo quadrata CO, OR, seu quadratum CR, quadruplum quadrati LC, seu C H. Sed quadratum C D est quadruplum quadrati C H; ergo lineæ C R, C D sunt æquales & in triangulis C R S, CTD. Cum omnia latera sint æqualia erunt (*per* 8. 1.) anguli CTD, CSR æquales; ita ostendam reliquos angulos esse æquales.

Pariter si alia cubi plana similiter secentur, ostendam fieri similia & æqualia pentagona quale est C T 3, K G C, D T 3 2, & sic de cæteris quæ

quæ simili progressu ostendentur esse æquilatera, & æquiangula. Restat probandum lineas ductas ex centro sphæræ X ad angulos pentagoni esse æquales semidiametro sphæræ, ut si duceretur linea XR ad angulum pentagoni.

Linea XN æqualis est lineæ B L, seu L N, & NY æqualis lineæ NO. Est ergo X Y æqualis lineæ L O. Cum autem LN divisa sit extremâ ac mediâ ratione, eique additum sit majus segmentum O N, erit L O divisa extremâ ac mediâ ratione in N (*per* 5.) eruntque (*per* 4.) quadrata LO, ON, seu XY, YR tripla quadrati L N, seu XN. Sed si duceretur X R, ejus quadratum (*per* 47. 1.) æquale esset quadratis XY, YR; ergo quadratum XR triplum est quadrati LN. Sed vidimus (*in* 15.) quadratum diametri spheræ triplum esse quadrati lateris cubi; & consequenter quadratum semidiametri sphæræ triplum erit quadrati Semilateris cubi: ergo diameter sphæræ est æqualis lineæ X R: ergo sphæra attingit omnes angulos illius polygoni.

Denique dico latus dodecaedri esse lineam irrationalem dictam apotomen. Ponitur enim diameter sphæræ esse linea rationalis, quæ est potentia tripla lateris cubi; ergo latus cubi est linea rationalis potentiâ tantum commensurabilis. Idem dicendum de semilatere N K, & cum divisum sit extremâ ac mediâ ratione in O, erit (*per* 6.) N O irrationalis dicta apotome. Quod si sumeretur totum latus LK, quod divideretur similiter extremâ, ac mediâ ratione, esset P O, seu S R majus segmentum; ergo S R latus dodecaedri est apotome; quod erat demonstrandum.

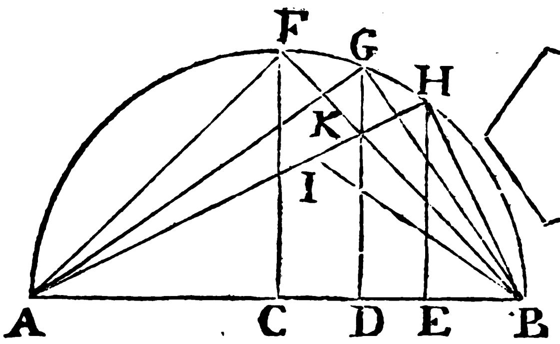
Coroll. 1. Si latus cubi extremâ ac mediâ ratione secetur, majus segmentum erit latus dodecaedri eidem sphæræ inscribendi; & si minus segmentum lineæ ita sectæ fuerit latus dodecaedri, majus erit latus cubi.

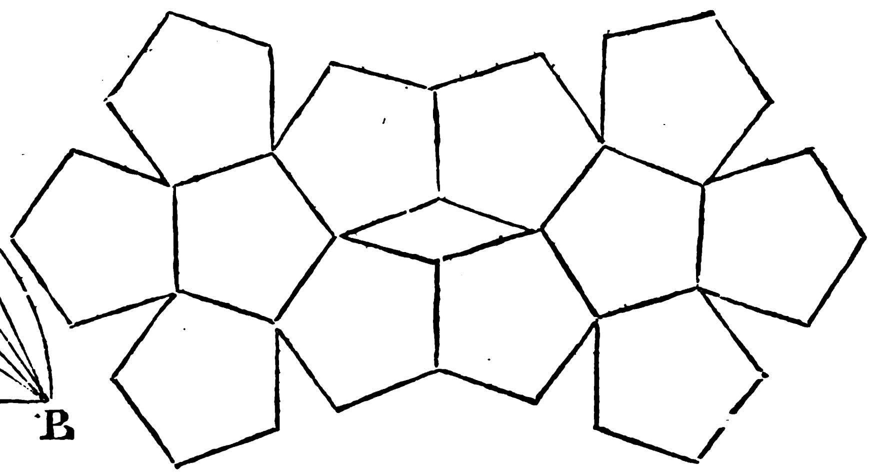
Coroll. 2. Si ex materia solida fiant duodecim pentagona æquiangula, & æquilatera, quæ conjungantur, ut figura indicat; ea dodecaedrum component.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Latera 6 figurarum comparare.





Linea A B dividatur bifariam in C, tum ita dividatur ut D B sit ejus tertia pars; & EB quinta, factóque circa AB semicirculo, excitentur perpendiculares CF, DG, EH; connectantur AF, FB; AG, G B, AH, H B, abscindatur H I æqualis lateri decagoni in eo circulo descripti cujus semidiameter B H, secetur G B extremâ ac media ratione in K.

Dico primo A G esse latus tetraedri.

Demonstr. Cum (*per* 8. 6.) sit ut AB ad AG ita AG ad AD, erit (*per* 20.) ita quadratum AB ad quadratum A G ut AB ad AD; est autem AB ipsius AD sesquialtera: ergo quadratum AB est sesquialterum quadrati AG; ergo (*per* 13.) A G est latus tetraedri.

Secundò, dico AF esse latus octaedri, quia AB est dupla potentiâ, lateris AF: ergo (*per* 14.) AF est latus octaedri.

Tertiò, Cum BG sit media proportionalis inter AB, BD, erit ut AB ad BD, seu ut 3 ad 1, ita quadratum AB ad quadratum BH, ergo per 15 BG est latus cubi.

Quartò, Pariter cum BH sit media proportionalis inter AB & BE, & AB sit quintupla ipsius BE; erit quadratum A B quintuplum quadrati BH: ergo (*per* 16.) erit B H diameter circuli ambientis quinque latera icosaedri. Est autem H I latus decagoni ejusdem circuli, & B H latus exagoni; ergo B I (*per* 16.) est latus icosaedri.

Denique cum BG latus cubi sit sectum in K extremâ, ac mediâ ratione erit (*per* 17.) B K latus dodecaedri.

Communiter interpretes ostendunt nullam posse dari figuram solidam regularem, (nempe quæ constet figuris planis regularibus) præter recensitas. Nam ad angulum solidum ad minimum tres requiruntur anguli plani, qui quatuor rectis sint minores, sex anguli trianguli æquilateri, 4 anguli recti & tres exagoni quatuor rectos adæquant: ergo angulum solidum perficere non possunt, quatuor pentagonici, tres heptagonici, tres octogonici quatuor rectos superant, ergo solum ex tribus, quatuor, & quinque angulis trianguli æquilateri, ex tribus angulis rectis, ex tribus angulis pentagoni effici potest angulus solidus; ergo præter recensita corpora solida regularia, nulla alia esse possunt.

Comparatio

Comparatio horum corporum ex Herigonio.

Diameter ſphæræ	2 ,	Superficies octaedri	69282^{IIIII}
Latus tetraedri	162299^{IIIII}	Superficies dodecaedri	1051462^{IIIII}
Latus cubi	11547^{IIIII}	Superficies icoſaedri	957454^{IIIII}
Latus octaedri	141421^{IIIII}	Soliditas ſpheræ	41879^{IIIII}
Latus dodecaedri	71364^{IIIII}	Soliditas tetraedi	5132^{IIIII}
Latus icoſaedri	105146^{IIIII}	Soliditas cubi	15396^{IIIII}
Superficies ſphæræ	1256637^{IIIII}	Soliditas octaedri	133333^{IIIII}
Area circuli majoris	314159^{IIIII}	Soliditas dodecaedri	278516^{IIIII}
Superficies tetraedri	46188^{IIIII}	Soliditas icoſaedri	253615^{IIIII}
Superficies cubi	8 ,		

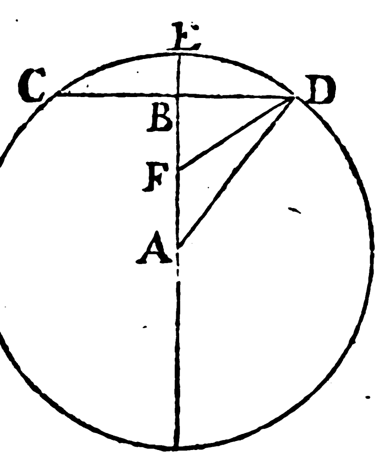
ELEMENTORUM EUCLIDIS aut potius Hypſiclis Alexandrini

LIBER DECIMUSQUARTUS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta; eſt ſemiſſis composita ex lateribus exagoni, & decagoni.



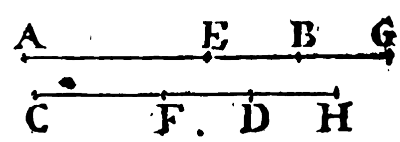
Linea A B ſit perpendicularis ad CD latus pentagoni; dico illam eſſe ſemiſſem compoſitæ ex lateribus exagoni, & decagoni. Abſcindatur BF æqualis BD, jungantur D F.

Demonſtr. Linea A B dividit biſariam lineam CD (*per* 3. 3.) & arcum CD, eritque linea E D latus decagoni, angulus E A D eſt quinta pars duorum rectorum, ergo in triangulo E A D reliqui AED, ADE æquales inter ſe quilibet continet duas quintas. Sed cum triangula EDB, EDF habeant latera BE, BF æqualia, BD commune, erunt (*per* 4. 1.) baſes ED, DF æquales & anguli DFE DEF; ergo angulus DFE continet duas quintas duorum rectorum. Sed (*per* 32. 1.) angulus externus EFD duobus internis F A D, F D A, æqualis eſt, & cum FAD ſit quinta pars duorum rectorum, erit F D A quinta pars duorum rectorum: ſunt ergo æquales, & (*per* 5. 1.) AF, ED, ſeu AF, ED ſunt æquales, ſed BF facta eſt æqualis lineæ BE, ergo AB æqualis eſt lineis DE, EB, ergo AB eſt ſemiſſis linearum A E, ED, ſeu lineæ compoſitæ ex A E latere exagoni, & E D latere decagoni; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si duæ lineæ extremâ ac mediâ ratione dividantur; proportionaliter ſecabuntur.



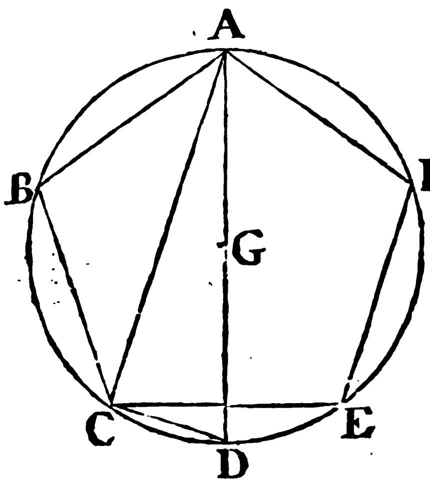
Linea AB, CD ſecentur extremâ, ac mediâ ratione in E & F; dico eas proportionaliter ſecari, ſeu ita eſſe AB ad CD, ſicut AE, CF, aut EB ad FD. Addatur BG æqualis EB, & DH æqualis FD.

Demonſtratio cum ſit ut AB ad AE ita AE ad EB, (*per* 17. 6.) erit rectangulum ſub A B, E B, æquale quadrato AE, ſicut rectangulum ſub CD, F D, æquale erit quadrato C F; ergo ita eſt rectangulum ſub A B, E B ad quadratum AE, ſicut rectangulum ſub AB, EB ad quadratum CF, ergo ita erit quadruplum rectanguli ABE ad quadratum A E ſicut quadruplum rectanguli C D F ad quadratum C F, & componendo ut quadruplum rectanguli ABE cum quadrato AE, hoc eſt (*per* 8. 2.) quadratum A G ad quadratum A E, ut quadruplum rectang. C D F cum quadrato C F ſeu quadratum C H ad quadratum C F; ergo ita eſt AG ad AE, ut CH ad CF, & permutando ita erit A G ad C H ut A E ad C F; & ita erit reliqua EG ad reliquam FH, & dimidia EB ad dimidiam FD. Cum ergo ita ſit AE ad CF, ut EB ad FD, ita erit tota AB ad totam CD ut AE ad CF; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si Pentagonum regulare circulo inſcribatur, quadrata lateris ejus, & lineæ ſubtendentis duo ejus latera, quintupla ſunt quadrati radij, ſeu lateris exagoni.



Pentagonum regulare ABCEF inſcriptum ſit circulo, ſitque ejus latus C E, & linea A C ſubtendat duo ejus latera, dico quadrata linearum AC, C E eſſe quintupla quadrati E F. Ducatur diameter AGD, quæ divídet bifariam latus C E. Ducatur CD quæ erit latus decagoni.

Demonſtr. Quadratum A D quadruplum eſt quadrati GD, ergo quadrata AC,CD illi æqualia (*per* 47. 1.) quadrupla ſunt quadrati G D. Addatur quadratum GD, eruntque quadrata A C, CD, GD quintupla quadrati C D, pro quadratis CD, GD ſubſtituatur quadratum C E illis æquale (*per* 10. 13.) ergo quadrata A C, C D quintupla ſunt quadrati GD, ſeu lateris exagoni; quod erat demonſtrandum.

Coroll. Quadratum lateris cubi, & lateris dodecadri, eidem ſphæræ inſcriptorum quintupla ſunt quadrati radij circuli pentagonum dodecaedri circumſcribentis. Si enim in aliqua ſphæra circulus A B C ambiat pentagonum dodecaedri, erit (*per* 17. 13.) linea AC latus cubi eidem ſphæræ inſcripti. Oſtendimus autem quadrata AC, & CE ſeu lateris dodecaedri quintupla eſſe quadrati G D.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si latus exagoni, extremâ ac mediâ ratione ſecetur; majus ejus latus erit decagoni latus.

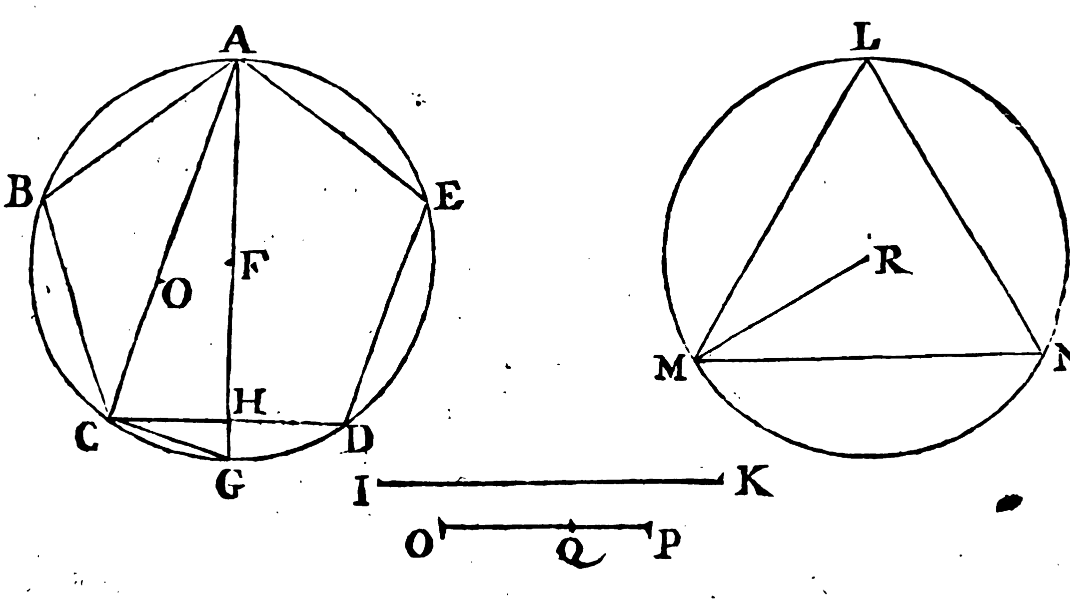
Sit AB latus exagoni, mediâ & extremâ ratione ſectum in C; dico majus extremum A C eſſe latus decagoni. Adjungatur AD æqualis A C.

Demonſtr. Cum lineæ A B ſectæ extrema ratione in C additum ſit AD, majus ſegmentum erit DB ſecta ſimiliter in A, & erit AB majus ſegmentum (*per* 5. 13.) & cum lineæ B D majus ſegmentum AB ponatur latus exagoni; erit (*per* 9. 13.) minus ſegmentum A D, ſeu A C latus decagoni; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum, eidem ſphera inſcriptorum.



Sit ABCDE pentagonum dodecaedri, & LMN unum ex triangulis icoſaedri inſcriptorum in eadem ſphera, cujus diameter IK; dico circulos ABCDE, LMN eſſe æquales.

Sit

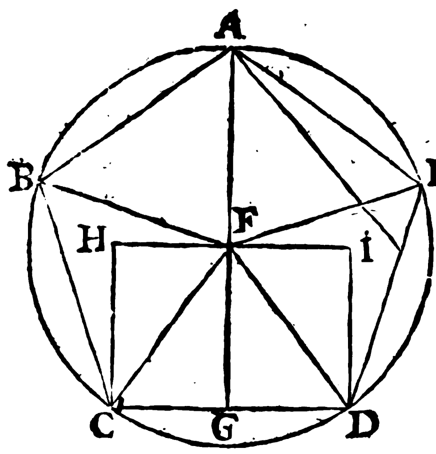
Sit quadratum IK quintuplum quadrati OP; tum OP extremâ ac mediâ ratione secetur in Q; eritque (*per corol.* 16. 13.) OP radius circuli quinque latera icosaedri ambientis.

Demonstr. Quadrata AB, AC (*per* 3.) quintupla sunt quadrati FG; sed (*per* 8. 13.) si AC extremâ ac mediâ ratione secetur; erit AO æqualis AB, ergo ita est AC ad AB sicut AB ad OC; sed ita est OP ad OQ sicut OQ ad QP, ergo (*per* 2.) ita est AC ad OP sicut AB ad OQ. Est autem AC latus cubi (*per* 17. 13.) cujus diameter sphæræ tripla est potentia. Ergo tria quadrata AC æquantur quadrato IK, seu quinque quadratis OP ergo tria quadrata AB æquantur quinque quadratis OQ. Sunt autem (*per* 10. 13). quinque quadrata ML, æqualia quindecim quadratis MR, & cum ML sit latus icosaedri, cujus quinque latera inscribuntur circulo, cujus radius OP erunt quinque quadrata ML æqualia quinque quadratis exagoni, nempe radij OP, & quinque decagoni seu OQ, nempe tribus quadratis AC, & tribus AB seu quindecim FG; ergo quadrata RM, FG æqualia sunt: ergo & radij RM, FG; ergo & circuli ABC; LMN, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Rectangulum comprehensum sub latere pentagoni, dodecaedri, & sub perpendiculari ductâ ab ejus centro ad idem latus trigesies sumptum, æquale est superficiei dodecaedri.



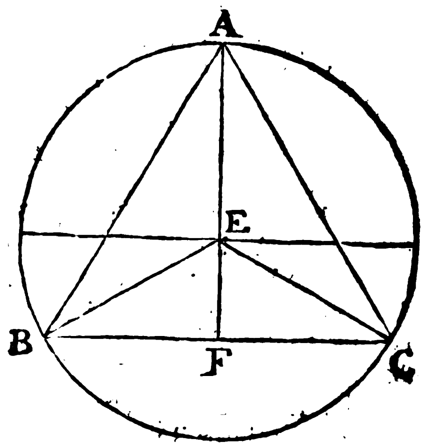
Sit dodecaedri pentagonum ABCDE circulo inscriptum, sitque ex centro F ducta perpendicularis FG ad latus CD, sitque rectangulum CI comprehensum sub dicta perpendiculari & latere CD. dico rectangulum CI trigesies sumptum æquari superficiei dodecaedri.

Demonstr. Rectangulum CI (*per* 41. *primi*) duplum est trianguli CFD. Sunt autem in dodecaedro sexaginta triangula æqualia triangulo CFD, nempe duodecies quinque: ergo triginta rectangula CI superficiei dodecaedri æqualia sunt, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Rectangulum comprehensum, sub latere trianguli icosaedri, & sub perpendiculari ducta ab ejus centro, trigesies sumptum, æquale est superficiei icosaedri.



Triangulum ABC sit unum ex constituentibus icosaedrum, sit ejus centrum E, ducatur EF perpendicularis ad latus BC, sitque rectangulum BC, comprehensum sub EF, & sub latere BC: dico rectangulum BC trigesies sumptum, æquale esse superficiei icosaedri.

Demonstr. In quolibet triangulo icosaedri sunt tria triangula æqualia triangulo BEC, ut patet (*per* 8. 1.) ergo sunt 60 in icosaedro, sed rectangulum BC duplum est (*per* 33. 1.) trianguli BEC: ergo rectangulum BC trigesies sumptum æquatur superficies icosaedri.

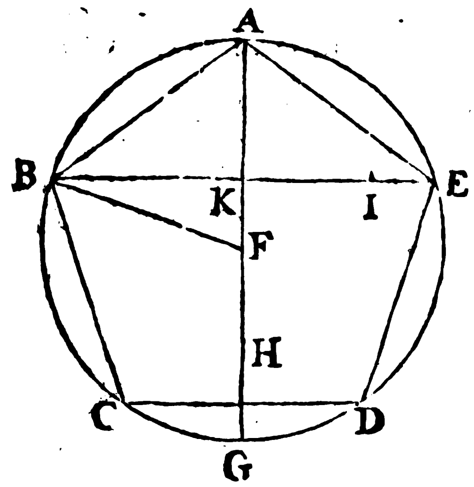
Coroll. Si fieret rectangulum sub AF & BC illud duplum esset trianguli ABC, atque adeò decies sumptum eamdem superficiem æquaret.

Coroll. Superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri se habet ut rectangulum sub perpendiculari & latere pentagoni ad rectangulum sub perpendiculari, & latere trianguli, & hoc in quibuscumque dodecaedris & icosaedris, etiam non in eadem sphæra descriptis.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Pentagonum æquilaterum inscriptum circulo æquale est rectangulo contento, sub tribus quadrantibus diametri, circuli, & sub quinque sextis lineæ subtendentis angulum pentagoni.



Proponatur pentagonum ABCDE circulo inscriptum, & linea A H contineat tres quadrantes diametri AG, & B I contineat quinque sextas lineæ BE, subtendentis angulum BAE; dico rectangulum comprehensum sub AH, BI æquale esse pentagono.

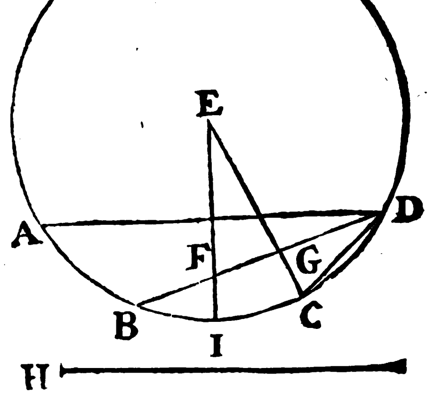
Demonstr. A H est sesquialtera lineæ A F, & B K sesquialtera lineæ B I: ergo ita est AH ad AF sicut B K ad K I; ergo rectangulum sub extremis AH, KI æquatur rectangulo sub mediis AF, BK, (*per* 16. 6.) sed rectangulum sub AF BK, duplum est trianguli A B F (*per* 33. 1.) cum habeant eandem basin AF, &c. Ergo rectangulum AH, KI duplum est trianguli ABF; sed rectangulum AH, KI duplum etiam est rectanguli sub AH, IE, cum F I sit dupla I E; ergo rectangulum sub AH, I E æquatur triangulo A B F; sed pentagonum ABCDE quintuplum est trianguli ABF, & rectangulum sub AH, B I, quintuplum est rectanguli sub AH, IE. Ergo rectangulum sub A H, B I æquatur pentagono ABCDE, quod erat demonstr.

Coroll. Rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli icosaedri ad unum ejus latus, & sub quinque sextis lateris cubi, æquale est pentagono icosaedri; nam illi perpendicularis æqualis est lineæ A H, seu continet tres quadrantes diametri, & latus cubi æquale est lineæ BE ut ostendimus (*in* 17. 13.)

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem rationem habet, ac latus cubi ad latus icosaedri.



Circulus A B C D circumscribat pentagonum dodecaedri, & cujus latus B D, & trigonum icosaedri cujus latus A D; & ad utrumque ex centro E ducantur perpendiculares E F, E G, sitque H latus cubi, dico ita esse superficiem dodecaedri ut H ad AD.

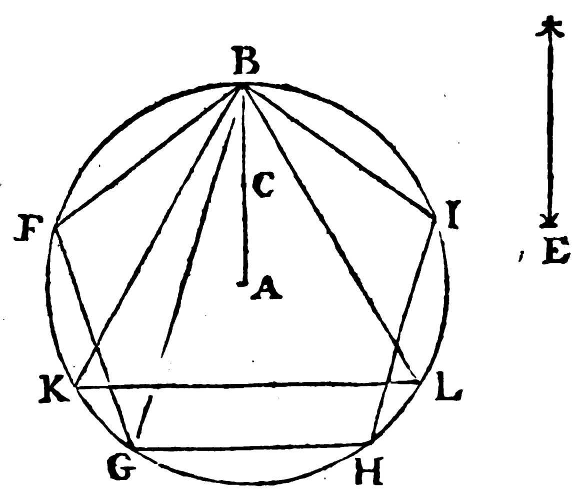
Demonstr. Si linea H extremâ ac mediâ ratione secetur, majus latus erit B D latus dodecaedri (*per* 17. 13.) Pariter si E G secetur, erit E F majus segmentum (*per* 2. 14) ita erit H ad EG, sicut BD ad EF, & (*per* 17. 6.) rectangulum sub extremis H, E F æquatur rectangulo sub mediis BD, EG. Est autem ut H ad AD ita rectangulum sub H, E F ad rectangulum sub AD, E F (*per* 1. 6.) Ergo ita erit H ad A B, ut rectangulum sub B D, E G, sed (*per* 7. *hujus*) ita est rectangulum sub BD, EG ad rectangulum sub AD, EF ut superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri: ergo ita erit H latus cubi ad A D latus icosaedri ut superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri; quod erat demonstrandum.

Videtur deesse ad perfectam demonstrationem quod si E G dividatur extremâ ac mediâ ratione quod EF sit majus segmentum. Suppono autem probatum esse (*in* 12. 13.) EF esse dimidiam E I, & (*in prima hujus*) lineam E G esse dimidiam compositæ ex E C latere exagoni, & latere decagoni, hæc enim composita secatur extrema ac media ratione, estque E C latus exagoni majus segmentum. Cum ergo ita se habeat composita ECD ad ejus dimidium EG ut EC ad suam semissem EF; si EG extrema ac media ratione secetur, erit EF, majus segmentum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si linea secetur extremâ ac mediâ ratione; ita erit linea cujus quadratum æquabitur quadratis totius, & majoris segmenti, ad lineam cujus quadratum æquabitur quadratis totius, & minoris segmenti, ut latus cubi, ad latus icosaedri ejusdem sphæra.



AB secetur extrema ac media ratione in C, linea B F potest quadrata A B & A C, nempe quadratum exagoni & decagoni (*per* 10. 13.) Ponatur quadratum E æquale esse quadratis AB, CB; dico ita esse BF ad E sicut BG latus cubi (*per* 17. 13.) ad BK latus icosaedri.

Demonstr. (*Per* 12. 13.) quadratum B K, triplum est quadrati AB, & (*per* 4. 13.) quadratum E triplum

E triplum est quadrati A C. Ergo ita est quadr. BK ad quadr. A B, ergo permutando ita est quadratum B K ad quadratum E ut quadratum A B ad quadratum AC. Sed ut quadratum AB ad quadratum AC ita quadratum BG ad quadratum BF, nam (*per* 8. 13.) si linea B G extremâ ac media ratione secetur, erit majus segmentum latus pentagoni. Ergo permutando ita erit quadratum B K ad quadratum BG, ut quadratum E ad quadratum BF, & (*per* 22. 6.) ita erit BK ad BG, ut E ad B F, seu ut BG ad BK ita BF ad E; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Soliditas dodecaedri ad soliditatem icosaedri in eadem sphærâ, est ut cubi latus ad latus icosaedri.

Sint dodecaedrum & icosaedrum descripta in eadem sphæra, dico soliditatem dodecaedri ad soliditatem icosaedri esse ut latus cubi ad latus icosaedri.

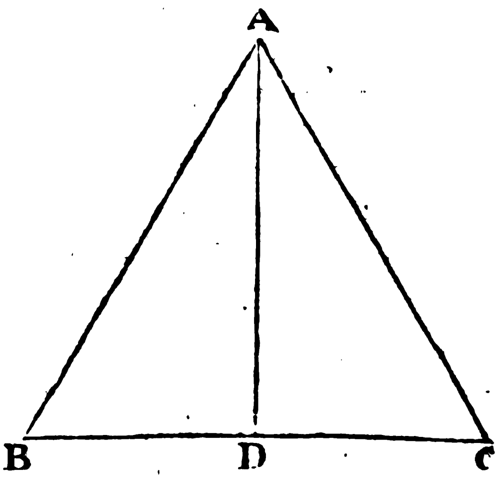
Demonstr. Superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri est ut latus cubi ad latus icosaedri (*per* 9.); sed ut superficies ita soliditates, quod ostendo: nam idem circulus comprehendit, & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum. Sed (*per* 6. *Theod.*) circuli æquales in sphæra æqualiter à centro distant, hoc est perpendiculares à centro sphæræ ad plana circulorum ductæ sunt æquales, illæ autem sunt altitudines pyramidum, habentium centrum sphæræ pro apice, & pro basibus pentagonum, dodecaedri, & triangulum icosaedri: pyramides æqualium altitudinum (*per* 6. 12.) se habent ut bases. Ergo omnes pyramides dodecaedri ad omnes icosaedri, se habent ut omnes bases pyramidum dodecaedri, seu ut superficies dodecaedri, ad superficiem icosaedri; quod erat demonstrandum.

Coroll. Ita est soliditas dodecaedri ad soliditatem icosaedri, ut superficies ejus ad superficiem alterius, ut latus cubi ad latus icosaedri, ut linea potens quadratum totius lineæ divisæ extremâ & mediâ ratione, & quadratum majoris segmenti ad lineam potentem quadratum lineæ totius, & quadratum minoris segmenti.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Latus pentagoni æquilateri, potentiâ sesquitertium, est perpendicularis ducta ab uno angulo ad latus oppositum.



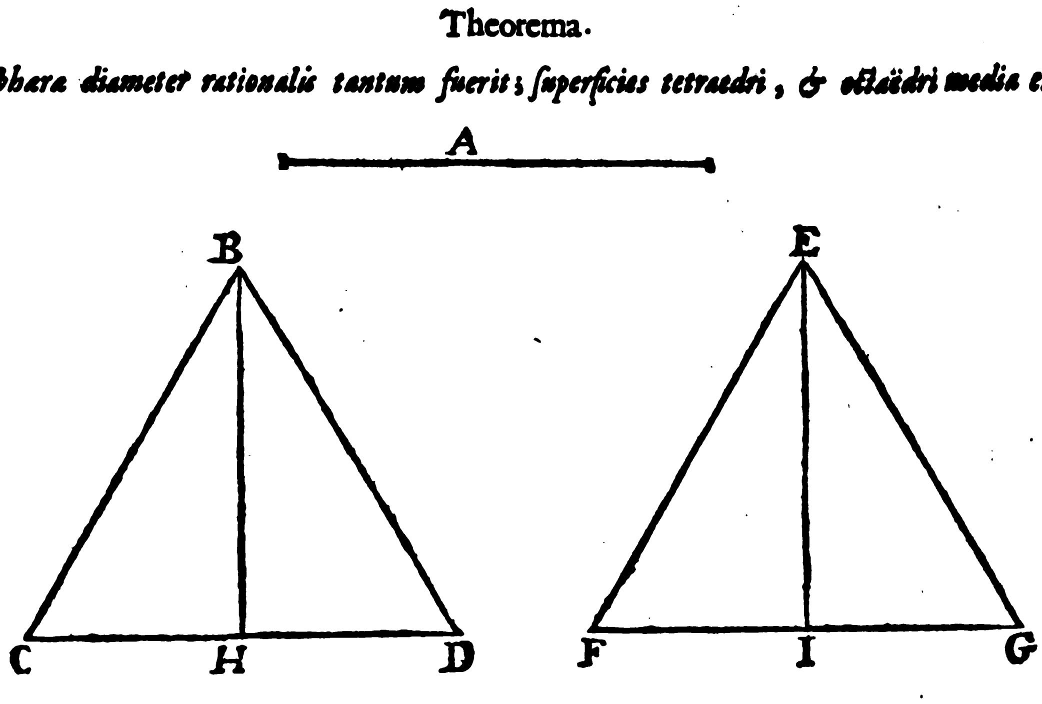
Sit triangulum A B C æquilaterum, sitque à puncto A demissa perpendicularis ad latus oppositum BC, dico latus AC esse potentiâ sesquitertium perpendicularis A D.

Demonstr. (*Per* 47. 1.) quadratum AC, aut AB æquale est quadratis AD, DC, aut AD, DB; & cum AB, AC sint æqualia, BD, BC æquales erunt. Est ergo DC semissis lineæ BC aut AC. Ergo quadratum A C quadruplum est quadrati D C. Sed æquale est quadratis A D, D C: ergo quadratum AD est trium partium qualium A C est quatuor; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si sphæra diameter rationalis tantum fuerit; superficies tetraedri, & octaëdri media erit.



Ponatur diameter sphæræ A esse linea rationalis, sitque B C D triangulum tetraedri, & E I G

 octaedri

octaedri eidem sphæræ inscriptorum. Dico utriusque superficiem esse mediam, nempe comprehendentur hæ superficies sub lineis rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Demittantur perpendiculares BH, EI.

Demonstr. (*Per* 13. 13.) linea A est potentiâ sesquialtera lineæ BC, & (*per* 14. 13.) & dupla lineæ E F; ergo earum quadrata se habent ut 6. 4. 3. quare cum sint commensurabilia, tam lineæ A, B C, E F quàm earum dimidiæ C H, F I erunt rationales, & item quadrata CH, HB; FI, IE habent rationem quam 1 ad 3. atque adeò commensurabilia sunt quadrata, & cum rationem non habeant quam numerus quadratus ad quadratum, illæ erunt longitudine incommensurabiles, quare (*per* 22. 10.) rectangula CH, HB; FI, IE, seu illis æqualia triangula BCD EFG media erunt, & cum superficies tetraedri sit commensurabilis triangulo BCD, & superficies octaedri triangulo EFG, (*per* 24. 10.) utraque superficies media erit.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Basis tetraedri sesquitertia est basis octaedri; & superficies octaedri sesquialtera est superficiei tetraedri.

Supponitur A esse diameter sphæræ, BCD basis tetraedri, E F G basis octaedri; dico primo B C D esse sesquitertiam trianguli EFG.

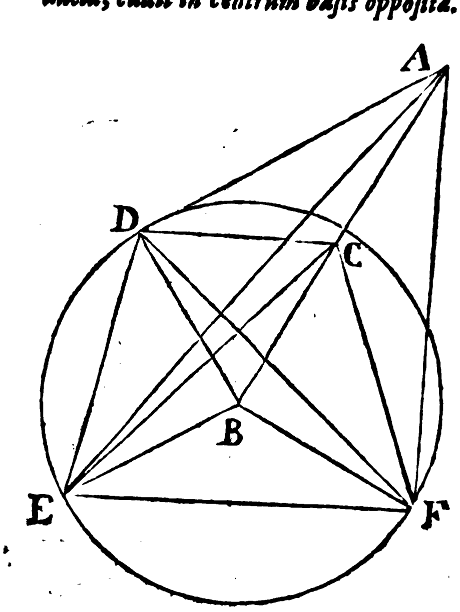
Demonstr. Quadratum A est sesquialterum quadrati CD, & duplum quadrati FG, (*per* 13. & 14. *libri* 13.) ergo se habent ut 6. 4. 3. ergo quadratum C D ad quadratum F G, est ut 4 ad 3, sed ut quadrata ita triangula (*per* 19. 6.) sunt enim similes figuræ: ergo triangulum BCD ad triangulum EFG se habet ut 4 ad 3.

Secundò superficies octaedri erit 24, superficies tetraedi erit 16; sed 24 ad 16 est ut 3 ad 2. seu sesquialtera. Ergo superficies octaedri est sesquialtera superficiei tetraedri, quod erat demonstr.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Linea recta ex angulo tetraedri per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis opposita.



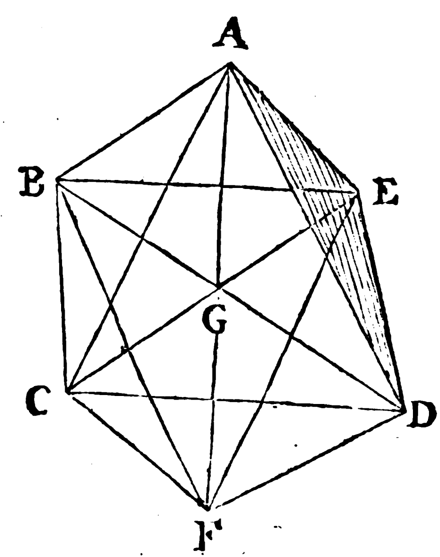
Sit punctum A angulus tetraedri, ducatur per centrum sphæræ C linea ACB; dico illam cadere in centrum B basis EFD. Ducantur BE, BF, BD, item CD, CE, CF.

Demonstr. In triangulis ACF, ACE, ACD cum latera AF, AE, AD sint æqualia, latus AC commune, & bases CE, C D, C F (*per defin.*) sphæræ æquales; erunt (*per* 8. 1.) anguli D A C, E A C FAC æquales. Rursus in triangulis B A F, B A E BAD, cum latera AD, AE, AF sint æqualia, latus AB commune, & anguli in A æquales, erunt bases BD, BE, BF æquales (*per* 4. 1.) ergo (*per* 9. 3.) B est centrum; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Octaedrum dividitur in duas Pyramides æquales, & similes; quarum æqualis altitudo; basis verò est quadratum subduplum quadrati diametri sphæra.



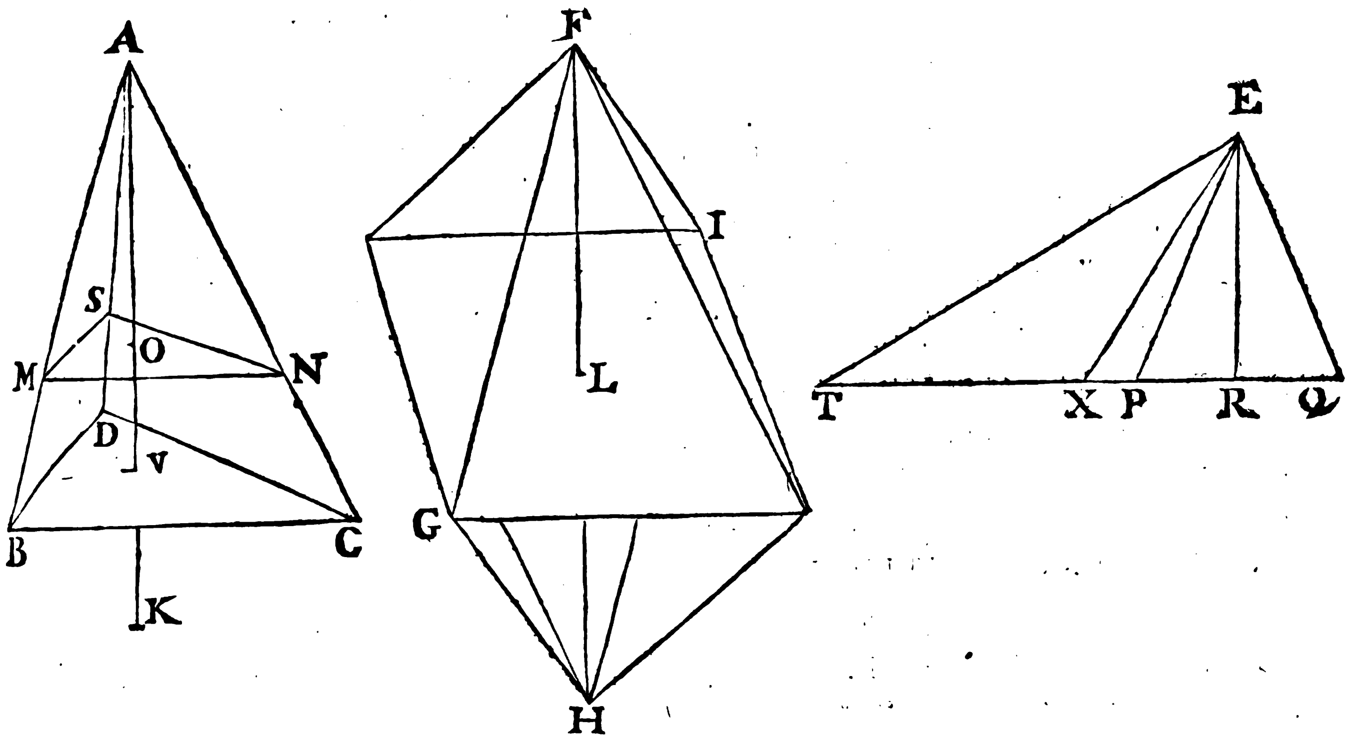
Sit octaedrum A B C D E, dico illud dividi in duas pyramides ABCDE, FBCDE, quæ sint æquales & similes, æqualis altitudinis, & quarum basis communis sit quadratum BCDE, subduplum quadrati diametri sphæræ. Ducantur ex puncto G ad singulos angulos lineæ rectæ.

Demonstr. Quadratum diametri sphæræ, est quadruplum quadrati semidiametri BG aut GC, & est duplum quadrati lateris octaedri BC, (*per* 14. 13.) ergo quadratum B C duplum est quadrati B G, ergo æquale est quadratis BG, CG; ergo (*per* 48. 1.) angulus BGC rectus est, & GBC, BCG semirecti. Pariter ostendam angulos BGE, DGE, DGC rectos esse; quare ex 4 angulis in G puncto non fiet angulus solidus (*per* 21 *undecimi*) sed lineæ BG, CG, DG, EG in uno erunt plano: & cum anguli BGC, BGE sint æquales, lineæ CG, GE in directum jacebunt. Item cum angulus CBE ex duobus semirectis constet, rectus erit, est ergo BCDE quadratum Pyramidis. Item A B C D E, F O D E habent omnia plana similia & æqualia; basin eandem, altitudines GA, GF æquales: ergo sunt similes & æquales: quadratum insuper BCDE supra latus octaedri descriptum subduplum est quadrati diametri sphæræ, ut ostendimus.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Tetraedrum se habet ad octaedrum ejusdem sphæræ, ut rectangulum sub linea potente 27 sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes ejusdem lateris, ad quadratum diametri sphæræ.



Sit tetraedrum ABCD, & octaedrum FGHI, ejusdem sphæræ, dico ita esse soliditatem tetraedri ABCD ad soliditatem octaedri FGHI ut rectangulum sub linea cujus quadratum continet 27 sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes lateris ejusdem ad quadratum diametri sphæræ: Sit AK diameter sphæræ AO FL, semidiameter ducatur per O planum MNO basi BCD parallelum.

Demonstr. Cum AO, FL altitudines sint æquales, erit (*per* 6. 12.) tetraedrum AMNS ad octoaedrum FGHI ut basis MSN ad duplum basis GI, nempe ad quadratum diametri (*per præcedentem*) Est autem pyramis ABCD ad pyramidem similem AMNS in ratione triplicata AC ad AN, (*per* 8. 12.) seu in ratione triplicata AV ad AO, & cum diameter sphæræ AK sit sesquialtera lineæ AV (*per* 13. 13.) erit AK 6. AV 4. AO 3. ratio autem triplicata 4 ad 3 est 64 ad 27. Igitur se habet pyramis ABCD ad pyramidem AMNS ut 64 ad 27.

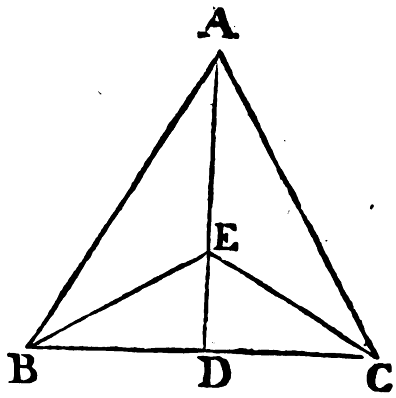
Sit triangulum EPQ, æquale triangulo MSN, sitque perpendicularis ER, latus EQ, seu SN, aut AN, sesquitertium potentia perpendicularis ER (*per* 12. 14.) quare si quadratum EQ, seu AN, ponatur 36, erit quadratum ER 27, quadratum autem AC, erit 64. nam AN ad AC se habent ut 3 ad 4, nempe ut 6 ad 8. & quadrata in duplicata se habebunt ut 64 ad 36. quare linea ER potest 27 sexagesimas quartas quadrati AC lateris tetraedri. Producatur latus QP in T fiatque ut 27 ad 64 ita QP ad QT dividaturque bifariam in X, & ducantur ET, EX; eritque QP 27 QX 32, QT 64. est autem AC 36. posito quod EQ aut QP sit 27. est enim proportio sesquitertia 36 ad 27. nempe ut 4 ad 3. quare linea QX ad AC se habet ut 32 ad 36. seu reducendo ad minores numeros ut 8 ad 9. Continet ergo QX octo nonas lateris AC tetraedri. Iam vero rectangulum contentum sub ER, & sub QX continetur sub QX continente octo nonas lateris AC tetraedri & sub linea RE, cujus quadratum se habet ad quadratum lateris AC ut 27 ad 64; sed hoc rectangulum æquale est triangulo ETQ (*per* 36. 1.) triangulum BTQ ad triangulum EPQ aut MSN se habet (*per* 1. 6.) ut QT ad PQ, nempe ut 64 ad 27. nempe ut pyramis ABCD ad pyramidem AMNS ut 64 ad 27. est autem pyramis AMNS ad tetraedrum ut basis MNS ad quadratum diametri. Sunt ergo tres quantitates aliis tribus proportionales, nempe rectangulum de quo supra triangulum EPQ, seu MNS, quadratum diametri. Et ex alia parte pyramis ABCD, pyramis AMNS; tetraedum ergo ex quo ita erit rectangulum sub RE potente 27 sexagesimas quartas quadrati AC lateris tetraedri, & sub linea XQ continente octo nonas ejusdem lateris ad quadratrum diametri sphæræ, ut tetraedrum ad octaedrum; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Perpendicularis ducta ab angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum, tripla est perpendicularis ducta à centro ejus ad idem latus.

In



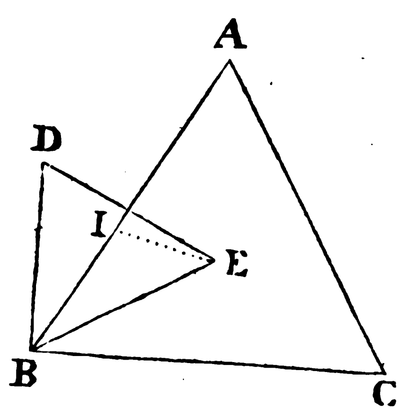
In triangulo æquilatero ABC sit AD perpendicularis ad BC, sitque E centrum dico AD, triplam esse lineæ ED.

Demonstr. Sunt tria triangula AEC, BEC, AEB, æqualia (*per* 8. 1.) est autem BED semissis trianguli BEC, ergo BED est semissis trianguli AEB, sed (*per* 1. 6.) ita est AE ad ED ut ABD ad BED: ergo DE est semissis lineæ AE, ergo AD est tripla ED quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Semidiameter sphæræ potentiâ tripla est perpendicularis ducta ex centro sphæra ad basin octaedri.



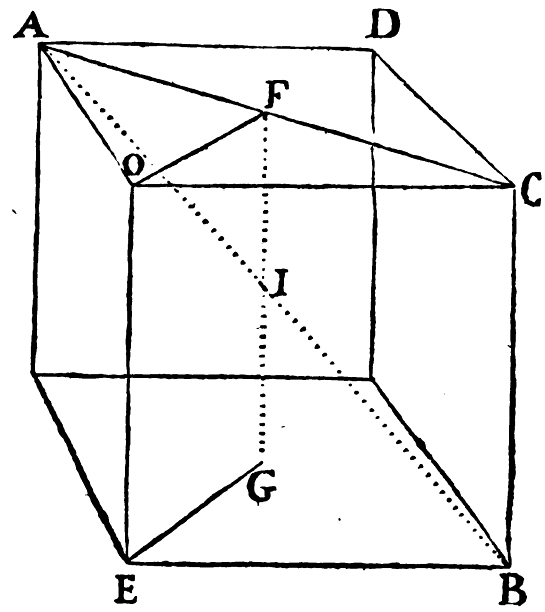
Sit basis octaedri ABC, ad quam ex centro sphæræ D cadat perpendicularis DE, quæ (*per coroll.* 10.) cadet in centrum trianguli ABC; dico DB semidiametrum sphæræ potentiâ triplam esse, perpendicularis DE.

Demonstr. Quadratum diametri, quadruplum est quadrati semidiametri DB & duplum quadrati lateris AB; ergo si quadratum diametri ponatur 12, erit quadratum AB 6, & DB 3: est autem AB triplum quadrati EB; nam cum EB sit dupla IE (*per præcedentem*) erit quadratum BE 4, IE unum, IB 3, AB 12: ergo AB est triplum BE; quare si AB ponatur 6, BE erit 2; cum ergo quadratum DB sit 3, BE 2, erit DB 1, (*per* 47. 1.) ergo quadratum DB triplum est quadrati DE.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Superficies cubi æqualis est duplo quadrati diametri sphæra: Perpendicularis ex centro sphæra ad basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateri cubi.



Sit cubus AB, dico duplum quadrati AB diametri sphæræ, æquale esse superficiei cubi.

Demonstr. Quadratum AB (*per* 47. 1.) æquale est quadrato ex BC, & quadrato AC, quadratum AC est duplum quadrati CD; ergo AB est æquale tribus quadratis cubi, sed sunt 6 in superficie cubi, ergo duplum quadrati AF æquatur superficiei cubi.

2. Perpendicularis FG æquatur lateri OE, ergo ejus semissis IG æqualis est lateri OF, quod erat demonstrandum.

Coroll. Si multiplices duas tertias partes quadrati diametri AB per altitudinem IG, habebis soliditatem cubi; nam 6 tertiæ partes quadrati diametri faciunt totam superficiem cubi; clarum est autem fieri 6 pyramides, quarum apex in centro, harum autem habetur soliditas si bases per tertiam partem altitudinis multiplicentur; vel tertia pars basium per totam altitudinem.

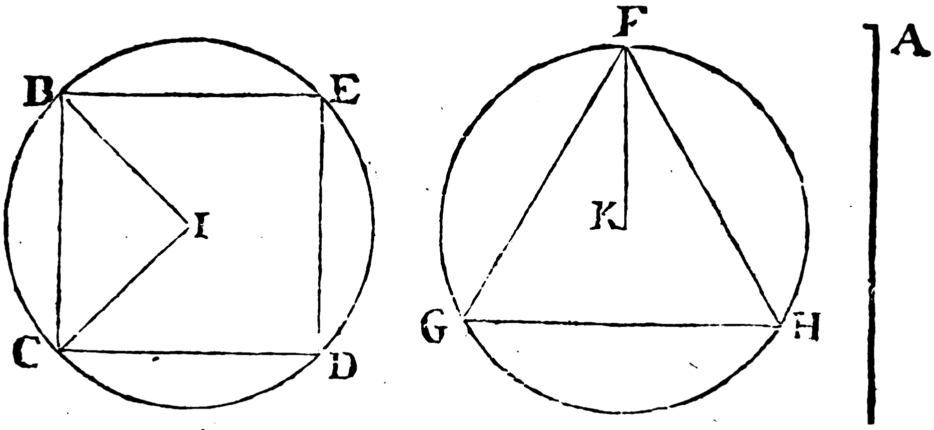
Item si multiplices latus cubi per tertiam partem quadrati lateris cubi, habebitur soliditas cubi.

PROPO

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Idem circulus circumſcribit & quadratum cubi, & triangulum octaedri.



Circulus BC DE circumſcribat quadratum circuli BCDE,& circulus FGH circumſcribat triangulum octaedri FGH, dico circulos eſſe æquales, ſeu radios IB,KF,eſſe æquales. Sit A diameter FK.

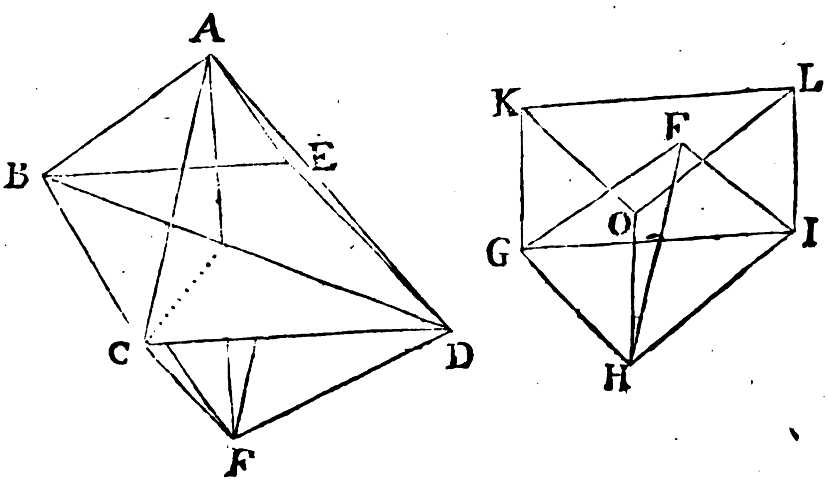
Demonſtr. Quadratum A triplum eſt quadrati BC (*per* 15. 13.) quadratum BC duplum eſt quadrati BI (*per* 47. 1.) ergo quadratum A ſextuplum eſt quadrati BI. Pariter quadratum A duplum eſt quadrati FG, (*per* 14.13.) & quadratum FG triplum eſt quadrati FK, ergo quadratum A ſextuplum eſt quadrati FK; ergo quadrata BI & FK ſunt æqualia quod erat demonſtrandum.

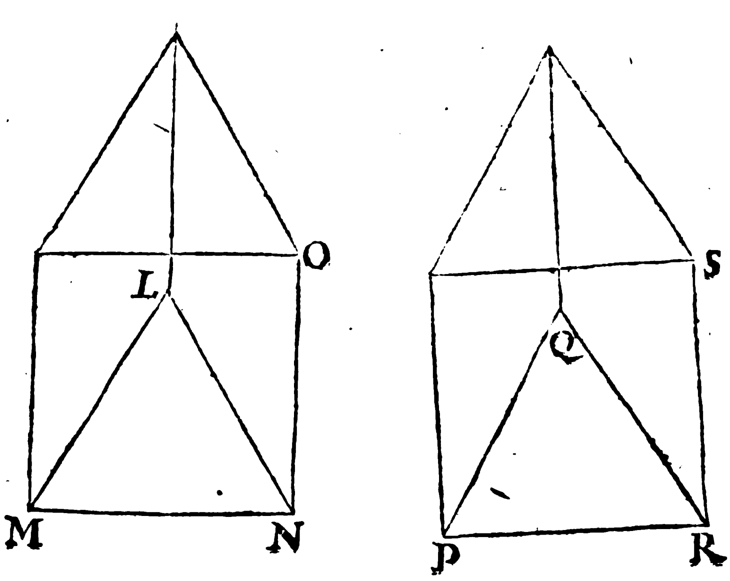
Coroll. HI. Circuli æqualiter à centro diſtant; ergo altitudines pyramidum quæ fiunt in centro ſunt æquales.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Octaedrum ſe habet ad triplum tetraedri ejuſdem ſphæræ; ut latus octaedri ad latus tetraedri.





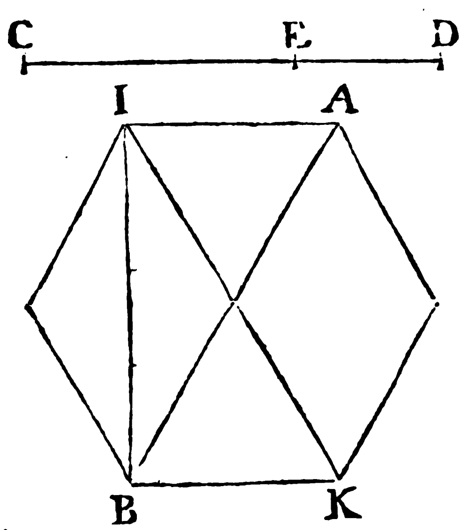
Octaedrum ABCDEF & tetraedrum FGHI ſint ejuſdem ſphæræ, dico ita eſſe octaedrum ad triplum tetraedri nempe ad prisma KGHIL; sicut B C latus octaedri ad GH latus tetraedri. Ducatur diameter AF in octaedro, dividaturque in quatuor pyramides æquales, comprehensas duobus triangulis octaedri, & aliis duobus, nempe fiant pyramides ABCF, ACDF, ADEF, ABEF. Assumatur altitudo unius talis pyramidis, sitque MLN basis unius æqualis uni triangulo octaedri; fiatque supra MLN, & supra P q R æqualem basi tetraedri, duo prismata quorum altitudo sit æqualis altitudini unius ex dictis pyramidibus; fiat item supra GHI basin tetraedri prisma æqualis altitudinis cum tetraedro.

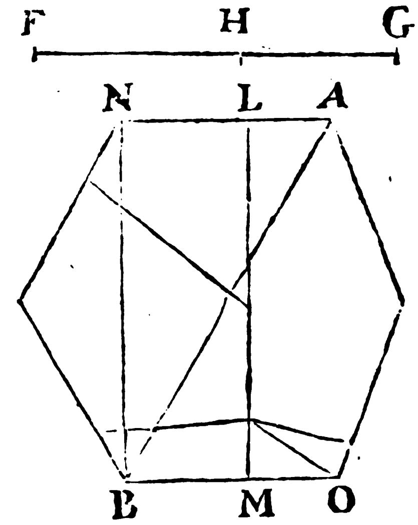
Demonstr. Octaedrum continet quatuor pyramides æquales, prisma LO triplum est unius pyramidis (*per* 17. 12.) ergo octaedrum est illius sesquitertium; sed prima MO ad prisma PS, se habet ut MLN triangulum octaedri, ad PQR, basin tetraedri, nempe ut 3 ad 4, cum basis tetraedi sesquitertia sit trianguli octaedri (*per* 14.13.) ergo octaedrum ABCDE æquale est prismati PS; sed prisma PS ad prisma GL, triplum tetraedri, se habet ut altitudo unius pyramidis ex recensitis, ad altitudinem tetraedi; se habet autem altitudo, ad altitudinem ut latus octaedri ad latus tetraedi: nam altitudo unius ex pyramidibus est latus cubi, quod ad altitudinem tetraedi se habet ut 3 ad 4, sicut latus octaedri, ad latus tetraedi se habet ut 3 ad 4, (*per* 13. & 15. *libri* 13.) ergo ita se habet octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Si linea possit totam lineam sectam extremâ ac mediâ ratione, & majus segmentum possit & aliam lineam similiter sectam & minus eius segmentum; si hac fiat diameter sphæra erit majus segmentum prioris, latus icosaedri, & minus latus dodecaedri.





Lineæ AB quadratum, sit æquale quadrato lineæ CD sectæ extremâ, ac mediâ ratione, & quadrato majoris segmenti CE; sit idem quadratum AB æquale quadrato lineæ FG similiter sectæ, & quadrato minoris segmenti HG; dico si AB fiat diameter sphæræ, CE æqualis erit lateri icosaedri, & HG æqualis lateri dodecaedri ejusdem sphæræ. Latera opposita icosaedri AI, BK conjungantur lineâ rectâ IB, ducaturque alia diameter IK.

Demonstr. Cùm AI, BK sint parallelæ, erunt (*per* 30. 1.) anguli AIK, IBK æquales duobus rectis, & cum triangula AIB, IBK habeant omnia latera æqualia, erunt (*per* 8.1.) anguli AIB, IBK æquales, ergo quadratum AB æquale est quadratis AI, IB; IB autem subtendit angulum pentagoni, & (*per* 8. 13.) si secetur extremâ, ac mediâ ratione, erit majus segmentum æquale lateri ejusdem pentagoni nempe IA, & (*per* 2.) ita erit CD ad CE ut IB ad IA, & similiter earum quadrata, & cum quadratum AB, sit tam quadratis CD, CE quam quadratis IA, IB æquale, & ita se habeant CD, CE, ad IA, IB, ut CD ad IA, erunt quadrata IA, CE æqualia.

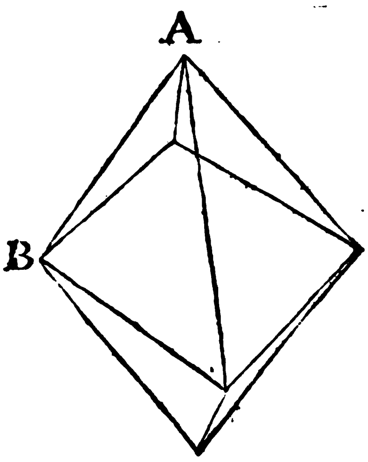
Secundò, dico NA latus dodecaedri æquale esse minori segmento HG; nam divisis bifariam dodecaedri lateribus oppositis NA, BO linea LM erit perpendicularis, ergo & NB erit perpendicularis, & angulus ANB rectus; item (*per* 17.13.) si linea LM extrema ac media ratione secetur, minus segmentum latus dodecaedri, quare adhibito superiori ratiocinio, erunt HG, AN æquales; quod erat demonstrandum.

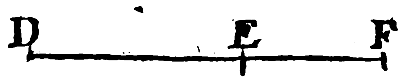
PROPOSITIO XXIV.

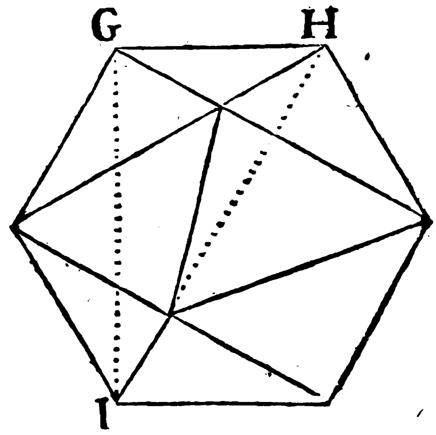
Theorema.

Si latus octaedri possit majus & minus segmentum linea, extremâ, ac mediâ ratione divisa; latus icosaedri eiusdem sphara poterit duplum minoris segmenti.

Latus







Latus octaedri AB possit majus, & minus segmentum DE, EF lineæ DF sectæ extremâ, ac mediâ ratione, dico latus icosaedri GH posse duplum minoris segmenti; seu ejus quadratum duplum esse quadrati EF.

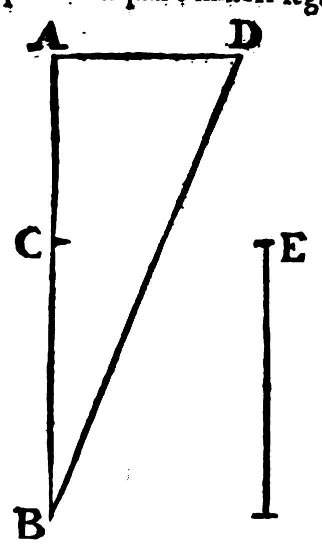
Demonstr. (*Per* 8. 13.) erit GH majus segmentum lineæ GI extremâ ac mediâ ratione sectæ, & (*per* 5. 13.) addita GH ad GI, composita GIH secabitur extremâ ac mediâ ratione, eritque GH minus segmentum; sed quadratum diametri GI æquale est quadratis GH, GI (*per* 47. 1.) sicut quadratum lateris AB æquale ponitur quadratis DE, EF, & lineæ similiter secantur; erit ut quadratum HI ad quadratum AB ita quadrata GI, GH ad quadrata DE, EF; sed quadratum diametri AB duplum est quadrati AB lateris tetraedri; ergo GI, GH dupla sunt DE, EF. Et cum similem habeant rationem inter se, cum lineæ similiter sectæ sint, erit quadratum GH duplum quadrati EF.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Latus octaedri potentiâ subduplum est illius lineæ, quæ potest lineam extremâ ac mediâ ratione sectam, & minus eius segmentum quod sit latus dodecaedri.

Sit linea AB extremâ ac mediâ ratione secta, sitque AD æqualis minori segmento AC, nempe lateri dodecaedri, sit angulus A rectus, atque adeo BD possit lineam AB, & lineam AD, sitque E potentiâ subdupla; dico E esse latus octaedri illius sphæræ, in qua AC est latus dodecaedri.

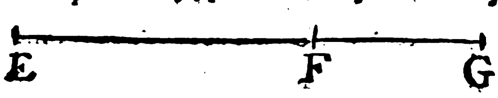


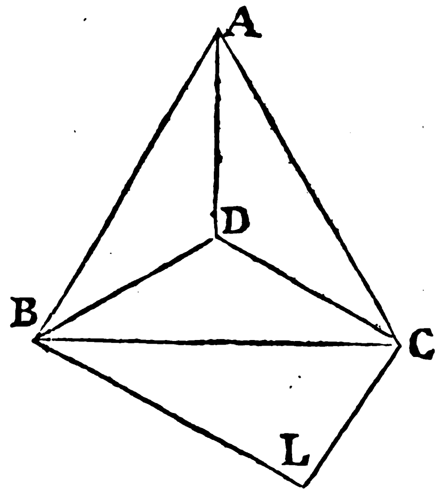
Demonstr. (*Per* 17. 13.) si AC ponatur latus dodecaedri, erit BC latus cubi, eritque illius sphæræ diameter potentiâ tripla majoris segmenti BC; sed (*per* 4. 13.) quadrata AB, AD tripla ejusdem majoris segmenti BC, & (*per* 47. 1.) quadratum BD est æquale quadratis AB, AD; ergo BD est diameter illius sphæræ; sed diameter sphæræ potentiâ dupla est lateris octaedri (*per* 14. 13.) ergo linea E est latus octaedri.

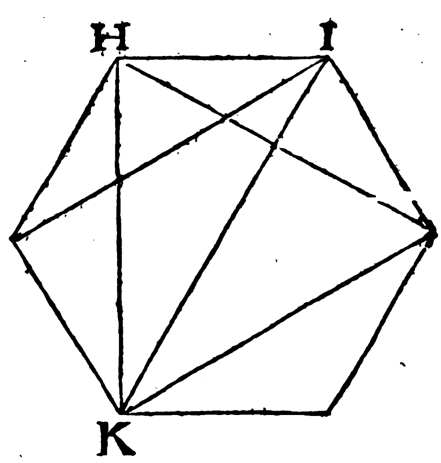
PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si latus tetraedri possit majus, & minus segmentum lineæ extremâ ac mediâ ratione sectæ; latus icosaedri potentiâ sesquialterum est minoris segmenti.







Tetraedri ABCD latus BC possit majus, & minus segmentum lineæ EG extremâ ac mediâ ratione sectæ in F; dico HI latus icosaedri ejusdem sphæræ potentiâ sesquialteram esse minoris segmenti FG.

Demonstr. Si HK dividatur extremâ ac mediâ ratione,& HI sit majus segmentum(*per* 8.13.) erit KHI extremâ ac mediâ ratione secta, eritque HI minus segmentum. Fiat ex tribus lineis BC, EF, FG triangulum BLC, & cum BC quadratum supponatur æquale quadratis EF, FG, seu BL, LC; erit angulus L rectus; sicut IHK rectus est, & cum tam BLC quàm KHI, sit secta extremâ ac mediâ ratione, erit ut BL ad LC, ita HK ad KI, ergo triangula æquiangula erunt; sed IK diameter sphæræ potentiâ sesquialtera est lateris tetragoni seu BC, ergo HI latus octaedri potentiâ sesquialterum est lateris LC, seu minoris segmenti FG, quod erat demonstrandum.

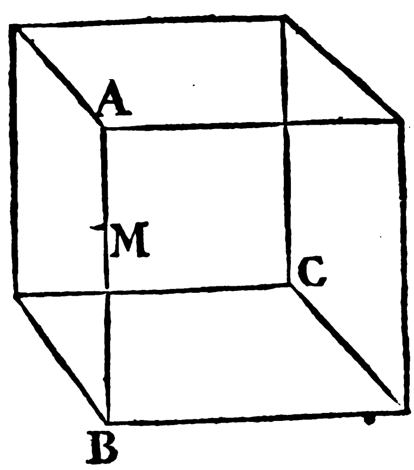
PROPOSITIO XXVII.

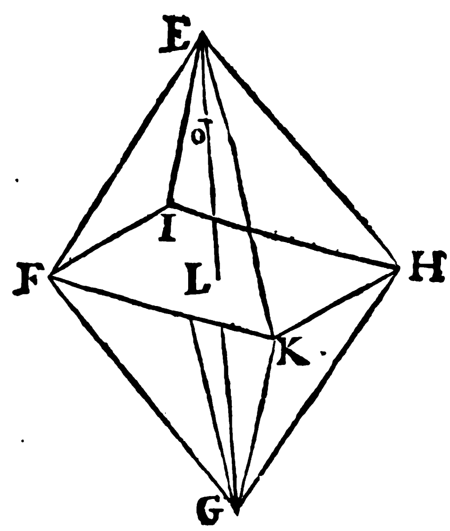
Theorema.

Cubus ad octaedrum se habet ut superficies cubi ad superficiem octaedri, & ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

Supponantur in eadem sphera describi cubus & octaedrum, dico ita se habere cubum ad octaedrum ut superficies cubi ad superficiem octaedri.

Demonstr. (*Per* 22.) idem circulus sphæræ circumscribit & quadratum cubi, & triangulum octaedri: sed æquales circuli æqualiter à centro sphæræ distant, ergo perpendiculares ductæ à centro sphæræ ad quadratum cubi, & ad triangulum octaedri, sunt æquales; sunt autem in cubo 6 pyramides,& in octaedro 8,habentes eandem altitudinem: ergo (*per* 6.12.) ut omnes bases pyramidum cubi ad omnes bases pyramidum octaedri ita omnes pyramides cubi ad omnes pyramides octaedri, hoc est ita est cubus ad octaedrum ut superficies cubi ad superficiem octaedri; quod erat primum.





Secundò, dico ita esse cubum AC ad octaedrum EFGH ut latus cubi AB ad LE semidiametrum sphæræ. Sit AM tertia pars lineæ AB, eritque MB illius sesquialtera; sit etiam EO tertia pars semidiametri LE.

Demonstr. Quadratum FKHI quod est basis duplicis pyramidis in quas resolvitur pyramis (*per* 18.13.) sesquialterum est quadrati BC; quare si supra quadratum FKHI fieret parallelepipedum ad altitudinem BM, illud æquale esset cubo (*per* 34.11.) nam bases & altitudines essent reciprocæ; deinde si supra idem quadratum FKHI fieret parallelepipedum ad altitudinem OE quæ esset tertia pars LE, illud (*per* 7.12.) esset æquale pyramidi EFKHI, ergo quod habebit altitudinem LO æquale erit octaedro; sed prius parallepipedum supra basin FKHI & altitudinem BM quod esse æquale cubo ostendimus, se habet ad hoc ultimum, seu ad octaedrum ut basis BM ad basin OL, seu ut tota AB ad totam LE (*per* 14.11.) ergo ita est cubus ad octaedrum ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ; quod erat demonstrandrum.

Ulterius non est progressus Hipsicles in comparatione horum corporum inter se. Addidit tamen unum librum de inscriptione unius figuræ intra aliam, quæ materia cum sit omnino inutilis, nullumque habeat in geometricis usum, non prosequar ulteriùs.

TRACTATUS

TRACTATUS II.

THEODOSII ELEMENTA SPHÆRICA.

PRÆCIPUA corpora, quæ sunt considerationis Mathematicæ, Sphærica sunt; ideoque non immeritò Sphæricorum Elementa hìc inserimus, ex quibus scilicèt præcipuæ cœlestium orbium proprietates demonstrantur, hæc à Theodosio concinnata sunt erudito, Mathematico, qui tempore Pompeij magni, aut Tripoli in Africa, aut in Phœnicia floruit. Tyrones primò & secundò libro contenti sunt; Tertium suo tempore resument.

LIBER PRIMUS.

Definitiones.

1. Sphæra est figura solida, unicâ superficie comprehensa, ad quam omnes lineæ ab uno, intra Sphæram posito punctò ductæ sunt, æquales.
2. Centrum Sphæræ est hujusmodi punctum.
3. Axis Sphæræ est linea recta, per centrum Sphæræ ducta, ad superficiem ejus utrinque terminata, & circa quam quiescentem Sphæra intelligitur circumvolui.
4. Poli Sphæræ sunt extrema puncta illius axis.
5. Polus alicujus circuli in sphærâ descripti, est punctum in Sphæræ superficie positum, à quo lineæ omnes ad prædicti circuli circumferentiam ductæ, sunt æquales.
6. Circuli in Sphærâ æqualiter distant à centro, cùm lineæ perpendiculares ab eo ad eorum plana ductæ, sunt æquales.

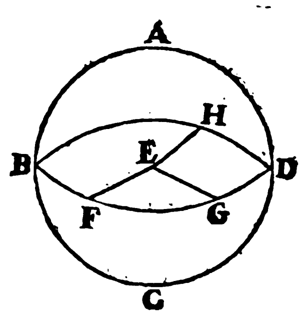
PROPOSITIO I.

Theorema.

Si Sphæra plano quomodocumque secetur communis sectio sphæræ, & illius plani est circulus.

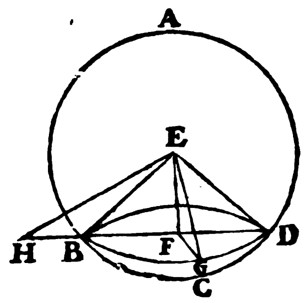
Sit Sphæra ABCD, quæ secetur plano BGDH, dico BGD quæ est communis sectio Sphæræ, & illius plani, esse circulum. Primò enim supponatur centrum Sphæræ E, esse in eo plano secante, ducantur lineæ FE, EG, EH.

Demonstr. Lineæ EG, EH, EF, & quæcumque aliæ sunt æquales (*per* 1. *defin. hujus*) ergo (*per def. circuli*) BGDH est circulus,



Secundò planum BGD secans Sphæram, non transeat per centrum E. Dico tamen figuram BGD communem sectionem Sphæræ, & plani propositi, esse circulum. Ex centro E in planum propositum cadat perpendicularis, hæc autem cadet intra Sphæram: nam si posset cadere extra Sphæram, hæc sit EH, attingens planum in punctò H. Ducatur linea H F D, secans Sphæræ superficiem in punctis B & D, ducantur item lineæ E B, E D, quæ (*per def. Sphæræ*) sunt æquales, dividatur bifariam linea BD in punctò F; & ducatur EF. Cum triangula EBF, EDF habeant omnia latera æqualia, erunt (*per* 8. 1.) anguli ad F æquales, & recti; ergo rectus non est angulus E H B, ergo E H & quæcumque alia extra Sphæram cadens, perpendicularis non erit ad planum B G D; quare illa cadet intra Sphæram: Sit ergo E F ductisque lineis B F, F G, F D, connectantur EB, GE, ED.

 Demonstr.



Demonſtr. Quadrata linearum EF, FB æqualia ſunt quadrato EB, & quadrata linearum E F, FG, quadrato E G : denique quadrata linearum E F, FD quadrato lineæ E D ; (*per* 47. 1.) ſed quadrata EB, EG, ED æqualia ſunt, cum lineæ ſint æquales : ergo quadrata EF, F B æqualia ſunt quadratis EF, FG, & quadratis EF, FD ; & ſubducto communi quadrato EF, quadrata FB, FG, FD æqualia erunt, & conſequenter lineæ ; quod probabo de quibuſcumque aliis : igitur (*per def. circuli*) BGD circulus erit.

COROLLARIUM I.

Idem eſt centrum Sphæræ, & circuli, in cujus plano centrum Sphæræ invenitur: oſtendimus enim punctum E eſſe centrum circuli F G H, in priori figura.

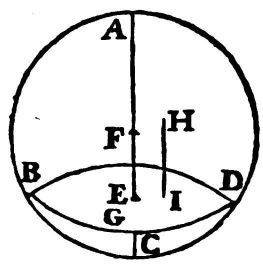
COROLLARIUM II.

Perpendicularis ducta à centro Sphæræ, ad planum quod non tranſit per illud, cadit in centrum circuli, qui eſt communis ſectio plani & Sphæræ.

PROPOSITIO II.

Problema.

Centrum Sphæræ reperire.



Proponatur Sphæra A B C D, cujus centrum quæritur, ſecetur Sphæra plano quocumque, cujus communis ſectio ſit circulus BGD, quæratur ejus centrum E (*per* 1. 3. *Eucl.*) & per illud excitetur perpendicularis EA (*per* 12. 11.) dividenda bifariam in F ; dico F eſſe centrum Sphæræ.

Demonſtr. Si circulus BGD tranſiret per centrum Sphæræ, ejus centrum eſſet punctum E, & ductâ perpendiculari diviſa bifariam punctum F coincideret cum puncto E (*per def. Sphæræ*) Si verò circulus BGD non ſit in eodem plano, in quo eſt centrum ; dico in perpendiculari E A eſſe centrum Sphæræ: non enim poteſt eſſe extra illam lineam, quale eſt punctum H, alioquin ex H ad planum BGD, ductâ perpendiculari H I, punctum I, eſſet centrum circuli BGD, (*per ſecundum coroll.*) cùm tamen centrum ejus priùs inventum, ſit punctum E, non poteſt autem centrum Sphæræ eſſe niſi in medio illius lineæ AC, (*per defin. Sphæræ.*)

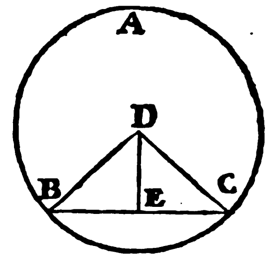
COROLLARIUM.

In perpendiculari per centrum minoris circuli ductâ, eſt centrum Sphæræ.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Sphæra planum in uno tantùm puncto tangit.



Sphæra ABC tangat planum, à quo non ſecatur ; dico planum à Sphæra in uno tantùm puncto tangi. Si enim fieri poteſt ſupponamus planum illud tangi in duobus punctis B & C. Ducantur linea B C, dividaturque bifariam in E ; tum ducantur lineæ BD, DE, DC.

Demonſt. Cum triangula D B E, DCE omnia latera habeant æqualia, angulos in puncto E, æquales habebunt (*per* 8. 1. *Eucl.*) & conſequenter rectos, eritque latus DC (*per* 18. 1. *Eucl.*) majus latere DE ; ergo punctum E erit intra Sphæram. Tota autem linea B C, conjungens duo puncta ejuſdem plani quod ſupponitur tangere Sphæram, erit tota in eodem plano tangente (*per* 1. 11.) ergo planum quod tangit circumferentiam Sphæræ in duobus punctis B & C, habet aliqua puncta intra Sphæram quod eſt contra ſuppoſitionem: igitur ſi Sphæram non ſecat, eam non attinget in duobus punctis, ſed in uno tantum.

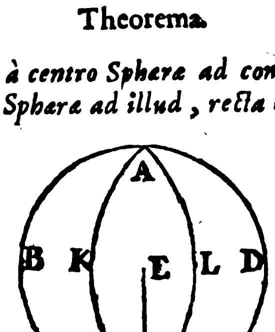
COROLLARIUM.

Linea recta conjungens duo puncta ſuperficiei, intra Sphæram cadit, & omnia ejus puncta. Nam ductâ lineâ D E, vel fient duo recti, & ſic vim habebit eadem demonſtratio, vel fiet unus acutus, & alius obtuſus. Ponamus angulum DEC eſſe obtuſum, erit (*per* 18. 1.) latus DC majus latere DE, atque adeò punctum E ; erit intra Sphæram, quod de quocumque alio puncto intra B & C poſito oſtendi poteſt.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Linea ducta à centro Sphæræ ad contactum plani, & Sphæræ ad illud, recta eſt.



A puncto E, centro Sphæræ ABCD, ducatur linea

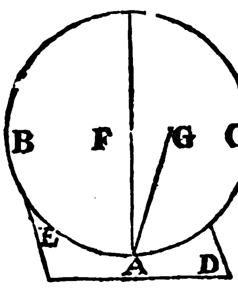
linea ad punctum C contactûs Sphæræ, & plani FGH; dico lineam CE, rectam esse ad illud planum. Intelligantur in Sphærâ duo plana per lineam FC ducta; hoc est linea EC sit communis sectio planorum ABCD, AKCL, quorum item communes sectiones cum plano tangente sint FH, GI.

Demonstr. Plana ABCD, AKCL efficiunt in Sphæra circulos (*per 1 hujus*) & cum in iis sit linea C E, & consequenter punctum E, illud erit centrum circulorum (*per primum corol. 1. hujus*) & linea FCH tanget circulum ABCD, nullum enim punctum habet commune cum circulo, nisi punctum C, alioquin planum FGHI, in quo hæc linea ducta est, Sphæram secaret: Cum sit item à centro ejusdem circuli ducta linea E C, erit (*per 18. 3. Eucl.*) linea E C perpendicularis ad FH: eodem modo ostendam eam esse perpendicularem ad GI; quare (*per 4. 11.*) erit linea EC, recta ad planum FGHI.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Perpendicularis ad planum tangens, per contactum ducta, per centrum Sphæræ transit.



Per punctum contactus A erigatur A F, recta ad planum tangens E D; dico in linea A F esse centrum Sphæræ. Si enim non sit in linea AF, assignetur centrum G, ducaturque linea GA.

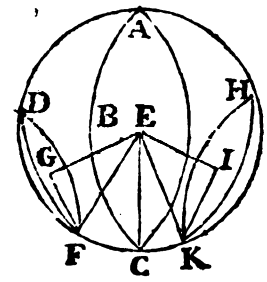
Demonstr. Linea G A, (*per 4. hujus*) recta est ad planum ED; ergo (*per 13. 11.*) linea AF, recta non est ad planum E D; quod est contra suppositionem. Ergo G non est centrum; nec inveniri poterit nisi in linea A F.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Circuli in Sphæra, per ejus centrum transeuntes sunt maximi. Et vicissim in maximis est centrum Sphæræ. Qui æqualiter à centro distant, æquales sunt. Et vicissim qui æquales sunt æqualiter à centro distant, & remotiores à centro minores sunt.

Sit circulus A B C in cujus plano inveniatur punctum E centrum Sphæræ. Sint & alij quicumque DF, KH; in quorum planis non inveniatur centrum Sphæræ: dico primò circulum ABC majorem esse circulis K H, DF. Ex centro E ducantur lineæ EG, EI, ad plana circulorum rectæ, (*quæ per corol. 2. 1. hujus*) in eorum centra cadent, ducantur lineæ GF, IK, EF, EK, EC.



Demonstr. Linea E C est semidiameter circuli ABC, cum E sit ejus centrum, sed hæc æqualis est lineis EF, EK, quæ majores sunt (*per 18. 1.*) lineis GF, IK, semidiametris circulorum DF, KH, cum anguli G & I sint recti; igitur semidiameter circuli A B C, major est semidiametris G F, I K, & consequenter circulus A B C major est circulis DF, KH.

Dico secundò quod si circulus A B C sit maximus, centrum Sphæræ est in ejus plano: si enim non est in ejus plano, circulus quicumque per centrum transiens eo major erit: ergo non erit maximus.

Dico tertiò. Quòd si circuli DF, KH æqualiter à centro distent, hoc est si lineæ EI, EG sint æquales, circuli DF, KH æquales erunt.

Demonstr. Cum quadrata linearum E G, G F, æqualia sint quadrato lineæ E F, & quadrata linearum E I, I K æqualia quadrato lineæ EK, (*per 47. 1.*) sunt autem quadrata EF, EK æqualia; ergo quadrata EG, GF quadratis EI, IK æqualia sunt, & subductis æqualibus quadratis videlicet earum EG, EI, restabunt quadrata GF, IK æqualia, & consequenter lineæ GF, IK; quæ cum sint semidiametri circulorum, circuli æquales erunt.

Dico quartò. Si circuli æquales sint, distantias GE, IE æquales esse.

Demonstr. Ostendam enim ut priùs quadrata EG, GF quadratis EI, IK æqualia esse, & cum circuli æquales sint, radij GF, IK æquales erunt, & eorum quadrata æqualia, quibus subductis, restabunt quadrata GE, EI, æqualia, & lineæ EG, EI quæ sunt distantiæ æquales erunt.

Dico quintò. Si circulus D F magis distet à centro, quàm circulus KH, eo minor erit.

Demonstr. Ostendam enim quadrata linearum EG, GF quadratis linearum EI, IK, æqualia esse; quare si auferatur quadratum majus E G, & ab alio aggregato, quadratum minus E I; restabit quadratum lineæ GF, minus quadrato lineæ I K, quare radius I K major erit radio G F, & consequenter circulus KH major erit circulo DF.

COROLLARIUM.

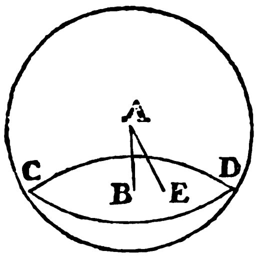
Omnes circuli maximi; seu per centrum Sphæræ transeuntes æquales sunt, quia ostendimus eorum radium esse radium Sphæræ.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Linea ducta à centro Sphæræ, ad centrum circuli; ad illius planum recta est.

Linea



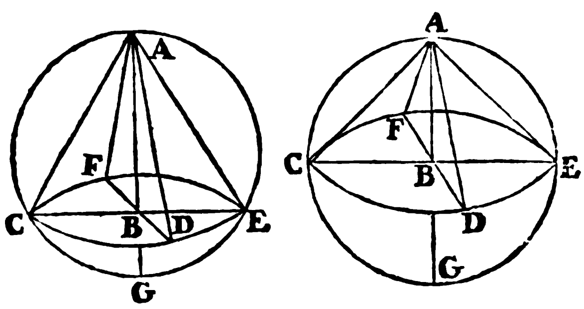
Linea AB ducatur à centro Sphæræ A ad centrum B circuli CD; dico AB rectam esse ad planum CD: si enim non est perpendicularis ad planum C D; ducatur AE perpendicularis ad idem planum.

Demonstr. (*Per coroll.1.primæ hujus*) punctum E esset centrum circuli CD, quod est contra suppositionem: Punctum enim B supponitur esse centrum ejusdem circuli.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Perpendicularis ducta à centro Sphæræ ad planum circuli; transit per ejus polos.



Linea AB, sit recta ad planum circuli CDEF, & transeat per centrum Sphæræ, sive illud coincidat cum puncto B, sive non: dico lineam A B productam transire per polos circuli CDEF. Hoc est lineas AC, AE, AD, AF æquales esse.

Demonstr. Cum linea AB per centrum Sphæræ transeat, & sit perpendicularis ad ejus planum, vel punctum B erit centrum Sphæræ, & circuli CDEF, vel (*per cor.1. 1.hujus*) eadem linea A B transit per centrum circuli CDEF; quare in omni casu punctum B erit centrum circuli CDEF. Ex quo fit, cùm triangula ABE, ABD, ABC, ABF habeant angulos in puncto B rectos & consequenter æquales, & lineas BC, BD, BE, BF æquales, & AB communem, erunt (*per* 4. 1.) bases AC, AD, A E, A F, æquales & (*per defin.5.hujus*) punctum A erit polus, quod erat demonstrandum. Idem probabitur de alio polo.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Perpendicularis à polo alicujus circuli ad planum ejus ducta; per centrum ejus, & per alterum polum transit.

In eâdem figurâ linea A B ducta sit ex puncto A, polo circuli CDEF, perpendiculariter ad ejus planum, dico punctum B esse centrum ejus, & lineam AB, transire per alium polum.

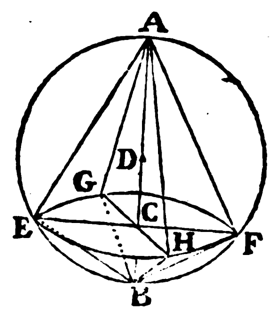
Demonstr. Cum A sit polus circuli C D E F, erunt (*per def.5.*) lineæ AC, AD, AE, AF æquales; & aliunde cum AB, perpendicularis sit ad planum CDEF, omnes anguli in puncto B recti erunt, & (*per* 47.*Eucl.*) erunt quadrata ex AC, AD, AE, AF, singula æqualia quadratis AB, BC; AB, BD; AB, BE; AB, BF, binis & binis; cum autem prædicta quadrata sint æqualia inter se, AB, BD; AB, B C, & reliqua bina & bina æqualia inter se erunt, & dempto communi A B, erunt quadrata linearum BC, BD, BE æqualia; ergo lineæ erunt æquales & B centrum circuli; & linea AB transibit per centrum Sphæræ (*per corollarium secundæ hujus*) & (*per præcedentem*) eadem linea AB producta per alium polum G ejusdem circuli transit.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Linea per polos alicujus circuli ducta, recta est ad planum ejus, transitque per centra circuli, & Sphæræ.

Linea AB per polos A & B circuli E H F G transeat, dico primò illam rectam esse ad planum E H F G. Ducantur per punctum C lineæ F E, GH; conjungantur lineæ AE, AH, AF, AG; item lineæ BE, BH, BF, BG.

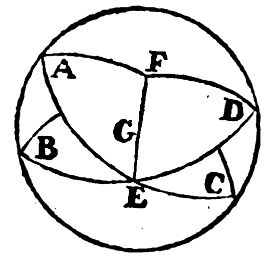


Demonstr. Triangula AEB, AHB, AFB, AGB, habent singula latera æqualia, nempe A B commune AE, AH, AF, AG æqualia inter se, sicut BE, BH, BF, BG, (*per def.5.*) ergo anguli BAE, BAH, BAF, BAG æquales sunt (*per* 8. 1.) & consequenter triangula EAC, HAC, FAC, GAC, (*per* 4. 1.) habent bases EC, CH, CF, CG æquales: ergo punctum C est centrum circuli, & A C erit perpendicularis quia anguli GCA, HCA; tum FCA, E C A sunt æquales atque adeò recti. Item (*per corol.1.hujus*) in ea erit centrum sphæræ.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

In Sphærâ, maximi circuli se mutuò bifariam secant.



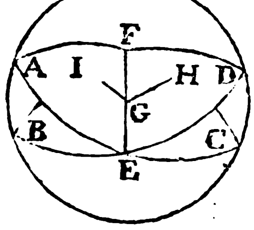
In sphæra A B C D sint duo maximi circuli AECF, BEDF, dico illos circulos se mutuò bifariam secare. Et primò quidem non possunt non se secare, quia in utroque est centrum sphæræ, cum sint maximi circuli, unde paralleli esse non possunt. Sit ergo centrum sphæræ G, per quod ab intersectione E, ducatur linea recta EG, dico illam in aliam intersectionem F incidere, & arcus EDF, FBE; ECF, EAF esse semicirculos.

Demonstr. Centrum sphæræ G, est in utriusque circuli plano, immò & (*per 1. coroll. 1. hujus*) est centrum utriusque circuli, sed puncta E, & F sunt in utroque plano, quare puncta E, F, G, sunt in communi sectione utriusque plani, ergo (*per 3. 11.*) linea ducta per puncta E, G, F, recta erit. Cum ergo E F per centrum utriusque circuli transeat, erit utriusque diameter, & bifariam utrumque circulum secabit.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Circuli in sphærâ, qui se mutuò bifariam secant sunt maximi.



In sphæra ABCD circuli BEDF, A E C F se mutuò bifariam secent, in punctis E, & F; dico illos esse maximos; seu in eorum plano esse centrum sphæræ, ducatur enim E F, quæ secetur bifariam in G, dico punctum G, esse centrum sphæræ.

Demonstr. Ostendo primò punctum G, esse centrum utriusque circuli: cum enim FDE, FBE, sint semicirculi; EF erit diameter circuli BEDF, in cujus medio erit centrum. Idem dico de circulo AECF. Quod si G non est centrum sphæræ; ducatur per punctum G, linea G I, recta ad planum BEDF, & G H quæ sit recta ad planum circuli AECF, in utraque erit centrum sphæræ (*per corol. 2. hujus*) ergo adhuc sequitur, quod punctum G erit centrum sphæræ, quia illæ lineæ conveniunt tantùm in puncto G.

Multi mirabilem hunc modum argumentandi existimant, quo scilicet ex eo quod punctum G dicatur non esse centrum sphæræ, concluditur illud esse centrum sphæræ.

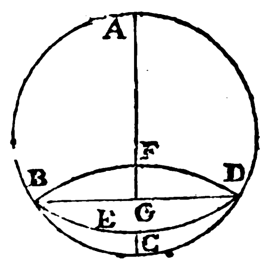
Tom. I.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

In sphæra, maximus circulus alium secans ad rectos angulos, bifariam illum secat, & per polos eius transit.

Circulus maximus A B C D circulum B E D secet ad rectos angulos, hoc est planum circuli ABCD, sit rectum ad planum circuli BED, & linea B D sit communis utriusque sectio, dico lineam B D esse diametrum circuli B E D. Sit centrum sphæræ F, à quo ad lineam BD ducatur perpendicularis FG, quæ utrinque producatur.



Demonstr. Cùm centrum sphæræ F, sit in plano circuli maximi A B C D (*per 6. huius*) Item punctum G in eodem sit plano, cum linea GBD sit communis utriusque plani sectio; tota linea FG erit in plano circuli ABCD quod supponitur esse rectum ad planum B E D, est item FG perpendicularis ad communem sectionem BD; quare (*per 4. def. 11.*) linea FG erit recta ad planum BED & (*per 2. coro'. 1. hu'us*) punctum G erit centrum circuli BED, & BD diameter, & arcus BEDF, BFD semicirculi. Denique (*per 8. huius*) puncta A & C sunt poli circuli B E D.

Hæc propositio vim suam obtinet, sive BED, sit maximus circulus, sive non.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Circulus maximus, non maximum bifariam secans, ad rectos angulos eum secat.

In eâdem figurâ, circulus maximus ABCD circulum minorem BED bifariam secet in punctis B & D; dico planum A B C D esse rectum ad planum BED. Ducatur linea B D, quæ erit diameter circuli B E D, & in ea erit centrum illius G. Ex centro sphæræ F, ducatur linea F G, utrinque producenda.

Demonstr. Centrum sphæræ F est in plano circuli maximi ABCD, sicut & punctum G cum sit in communi sectione utriusque plani; ergo tota FG est in plano circuli ABCD; sed (*per 7. huius*) linea G F est recta ad planum B E D; ergo (*per 18. 11.*) planum ABCD est rectum ad planum B E D.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si maximus in Sphara circulus, per polos alterius transierit, eum bifariam & ad rectos angulos secabit.

Maximus circulus ABCD transeat per polos A, & C circuli BED; dico quod bifariam illum secabit in punctis B, & D, & ad angulos rectos. Ducatur linea AC connectens duos polos, secans planum BED in puncto G.

Demonstr. Quoniam linea AC, per polos A & C ducitur, erit (*per* 10. *huius*) recta ad planum BED; & (*per* 18. 11.) planum ABCD per illam ductum rectum erit ad planum BED: quod erat Primum.

Item (*per eandem* 10.) linea AC transit per centrum circuli BEDH, ergo centrum ejus G, erit in communi sectione, & linea BGD erit diameter secans bifariam circulum BEDF, in punctis B & D; quod erat secundum.

Hæc propositio habet suam vim, etiamsi uterque circulus sit maximus.

COROLLARIUM I.

Si circulus maximus per alterius maximi polos transierit, vicissim secundus per polos primi transit, si enim primus transit per polos secundi erit ad eum rectus (*per hanc* 15.) & vicissim secundus, erit rectus ad primum, & (*per* 13.) per polos ejus transit.

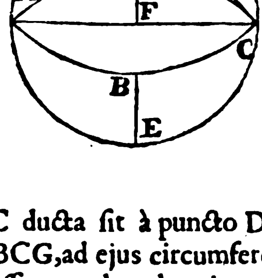
CORROLLARIUM II.

In Sphærâ, circulus per utrumque polum alterius circuli transiens, maximus est; quia linea à polo ad polum ducta transit per centrum Sphæræ (*per* 10. *huius*) sed illa tota est in plano circuli per utrumque polum transeuntis: ergo centrum Sphæræ invenitur in eius plano, & (*per* 6. *huius*) circulus ille maximus est.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Linea ducta à polo circuli maximi, ad eius circumferentiam, æqualis est lateri quadrati inscripti maximo circulo.



Linea DC ducta sit à puncto D, polo circuli maximi ABCG, ad ejus circumferentiam; dico lineam DC esse æqualem lateri quadrati inscribendi in quocumque circulo maximo illius Sphæræ.

Sit enim alter polus illius circuli, punctum E, transeatque per utrumque circulus AECD; ducatur linea DE, secans planum circuli ABCG, in puncto F. Ducatur item linea AFC.

Demonst. Linea DE, (*per* 10. *hujus*) recta est ad planum ABC, ergo (*per def.* 3. 11.) angulus DFC rectus est, & F est centrum circuli ABCG, qui cum sit maximus, punctum F erit centrum Sphæræ. Idem punctum F est etiam centrum circuli AECD, cum (*per corol.* 2. *pracedentis*) sit maximus, quare cum in circulo maximo AECD sint ductæ duæ diametri AC, DE, perpendiculares ad invicem erit linea DC, (*ut colligere licet ex* 6. 4. *Eucl.*) latus quadrati in ipso inscribendi.

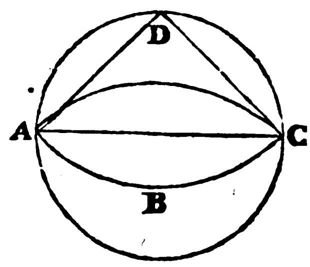
COROLLARIUM.

Circulus maximus distat à suis polis quadrante circuli, cum enim anguli ad F sint recti, erunt æquales: quare arcus AD, DC, CE, EA æquales erunt; ergo quadrantes.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Circulus in Sphara distans à suo polo lineâ æquali lateri, quadrati inscribendi in maximo circulo, maximus est.



Circulus ABC, distet à suo polo D, linea AD, quæ sit æqualis lateri quadrati inscribendi in maximo Sphæræ circulo, dico circulum ABC maximum esse. Intelligatur circa centrum Sphæræ & per puncta A & D, describi circulus ADC, qui (*per* 6. *hujus*) maximus erit, secans circulum ABC, in A & C. Ducantur lineæ AC, DC.

Demonstr. AD est latus quadrati inscribendi in circulo ADC, cui DC est æqualis (*per def. poli*) ergo AD, DC sunt quadrantes, & ADC semicirculus: igitur AC erit diameter maximi circuli ADC, & in ea erit centrum circuli ejusdem, quod etiam centrum est Sphæræ, sed linea AC, est etiam in plano circuli ABC; ergo in plano circuli ABC est centrum Sphæræ, & (*per* 6. *hujus*) circulus ABC erit maximus.

COROLLARIUM.

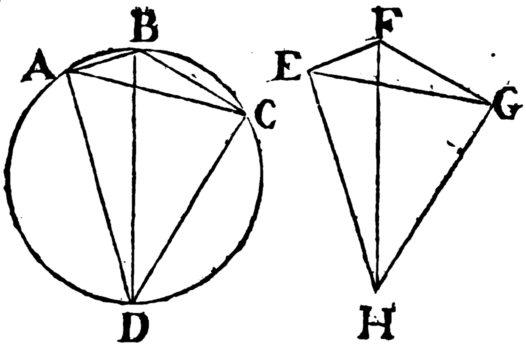
Circulus distans à suo polo quadrante circuli maximus est, quia distat lineâ æquali lateri quadrati inscribendi in maximo circulo.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Lineam æqualem diametro circuli in Sphara dati invenire.

Istud



Istud problema inutile non est, quia non possumus per centrum circuli in Sphæra dati, lineam rectam ducere.

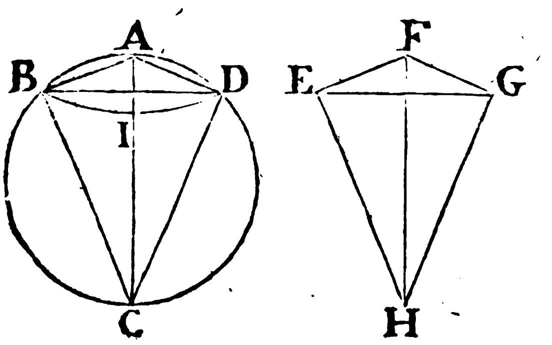
Proponatur circulus ABC, in cujus circumferentiâ tria puncta notentur A B, & C: fiat triangulum E F G, ita ut ejus latera singula æqualia sint lateribus trianguli A B C, & ad latera E F, FG; ducantur perpendiculares E H, G H, tum ducatur linea FH, hanc dico esse æqualem diametro circuli A B C: intelligatur ducta hæc diameter BD, & ductæ lineæ CD, AD.

Demonstr. Anguli BAD, BCD in semicirculo recti sunt, (*per* 31. 3.) sicut & anguli F E H, FGH, unde si intelligatur triangulum ABC superponi triangulo E F G, omninò quadrabit, & cum anguli BCD, FGH, sint recti, lineæ GH, CD congruent, sicut & lineæ A D, E H; ergo & lineæ BD, FH congruent, & æquales erunt.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Lineam æqualem diametro datæ Sphæræ assignare.



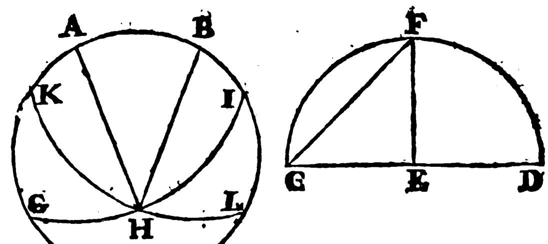
Proponatur Sphæra A B C D; quæritur linea æqualis ejus diametro. Ex A ut polo intervallo quocumque describatur circulus B I D, cujus diametro B D (*per præcedentem*) inveniatur linea æqualis EG, fiat triangulum EFG, cujus latus E G æquale sit diametro circuli BID: latera autem EF, F G æqualia lineæ AB, ad cujus intervallum descriptus est circulus ex polo A, tum ad latera FG, EF; ducantur perpendiculares GH, EH, convenientes in puncto H, tum ducatur linea FH; dico eam esse æqualem diametro Sphæræ. Intelligatur per polos A & C, transire maximus circulus CAB; hic transibit etiam per D, quia (*per* 15. *hujus*) dividit circulum BID bifariam, quemadmodum ipsa linea B D. Item ducatur per centrum Sphæræ, quod etiam est centrum circuli B A D, diameter AC; ducantur denique lineæ AB, AD, BC, DC.

Demonstr. Ostendam sicut priùs angulos ADC, ABC in semicirculo rectos esse (*per* 31. 3.) unde cum triangulum EFG, sit triangulo BAD æquilaterum, cum eo congruet, & in eâ superpositione cum anguli ADC, FGH recti sint; congruent lineæ DC, GH; sicut EH, BC; ergo & lineæ AC, FH congruent, & consequenter æquales erunt.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Per duo quælibet puncta, in superficie Sphæræ assignatâ circulum maximum describere.



Assignentur duo puncta A & B in superficie Sphæræ, per quæ ducendus est circulus maximus; habeatur Sphæræ diameter quæ sit CD, (*per præcedentem*) & dividatur bifariam in E; ducaturque perpendicularis E F, æqualis semidiametro; tum ducatur linea C F: hæc erit latus quadrati inscribendi in maximo Sphæræ circulo, ut patet si fiat semicirculus CFD.

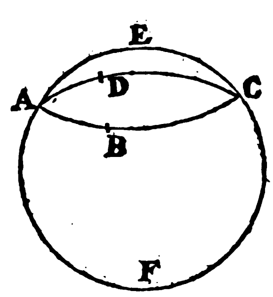
Intervallo C F, ex puncto A: describatur circulus GHI, & ex puncto B, eodem intervallo circulus K H L, qui duo circuli se intersecent in puncto H. Denique ex puncto H, ut polo, intervallo HA, aut HB, describatur circulus, qui transibit per utrumque punctum A & B, & maximus erit. Intelligantur duci duæ lineæ AH, BH.

Demonstr. Cum ex A, ut polo, descriptus sit circulus G H I, intervallo C F; linea AH æqualis erit lineæ C F, idem dico de BH, quare puncta A & B æqualiter distant à polo H, unde circulus descriptus ex H intervallo H A, transit per B; & cum circulus A B distet à suo polo, lineâ æquali lateri inscribendo in maximo Sphæræ circulo, (*per* 17. *hujus*) maximus erit.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Cujuslibet circuli Sphæræ, polum reperire.

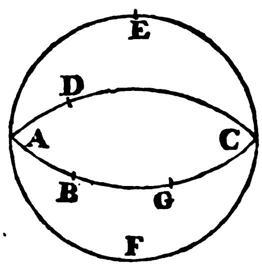


Proponatur primò. Circulus A B C non maximus cujus polus quæritur, determinentur utcumque duo puncta B & D, Dividanturque arcus B A D, B C D bifariam in punctis A & C, tum per A & C describatur maximus circulus

AECF (*per præcedentem.*) Denique arcus AEC, AFC dividantur bifariam in punctis E & F, quæ dico esse polos circuli A B C D.

Demonstr. Si arcubus æqualibus A B, A D addas æquales arcus BC, DC, erunt arcus ABC, A D C æquales, quare circulus ABCD, bifariam dividitur in punctis A & C, à circulo maximo AECF, quare (*per* 14. & 13. *hujus*) circulus A E C F per polos transit, unde puncta E & F æqualiter distantia à circulo A B C D, erunt ejus poli.

Proponatur secundò circulus maximus ABCD, cujus quæruntur poli, assumptis pariter in eo duobus punctis B & D, divisisque bifariam arcubus BAD, BCD, erunt arcus ABC, ADC æquales, & semicirculi. Dividatur semicirculus A G C bifariam in G, ita ut AG sit quadrans, tum ex G ut polò intervallo GA circulus describatur AECF; divisis denique bifariam arcubus AEC, AFC, in E & F; dico puncta E & F esse polos.

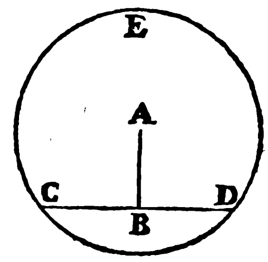


Demonstr. Circulus A E C F descriptus ex polo G, intervallo quadrantis GA (*per coroll.*17. *hujus*) maximus est, & quia circulus maximus ABCD per polum ejus G transit; ipse vicissim circulus AECF transit per polos circuli ABCD, (*per* 1. *coroll.*15. *hujus*) Quare poli erunt puncta E & F æqualiter distantia à punctis A & C.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si linea ex centro Sphæra ducta, aliam non per centrum ductam bifariam dividat; perpendicularis ad eam erit. Et vicissim si ad eam perpendicularis fuerit, bifariam eam dividet.



Recta A B per A centrum Sphæræ ducta, bifariam dividat lineam C D, non per centrum ductam: Dico A B esse perpendicularem ad C D.

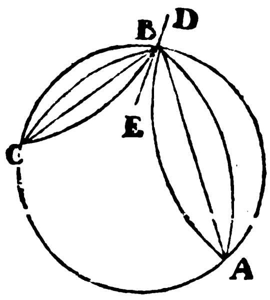
Ducatur enim planum per rectas A B, C D quod in Sphæra faciet circulum maximum CED, cum centrum Sphæræ nempe punctum A in eo inveniatur.

Demonstratio. In circulo CED, recta A B à centro A ducta lineam C D non per centrum ductam bifariam secat: ergo (*per* 3. 3. *Eucl.*) ad eam perpendicularis erit: pariter (*per eandem*) si ad eam perpendicularis fuerit, bifariam eam dividet.

THEODOSII

THEODOSII SPHÆRICORVM LIBER SECVNDVS.

Definitio unica.



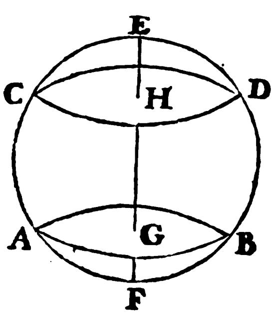
Circuli in Sphærâ se mutuò tangere dicuntur quando communis sectio planorum utrumque circulum tetigerit.

Ut si sint circuli AB, BC quorum plana producta habeant communem sectionem DE, quæ utrumque circulum tangat; hoc est anguli ABD, ABE, CBD, CBE sint recti: circuli se mutuò tangere dicentur.

PROPOSITIO I.

Theorema.

In Sphara, paralleli circuli eosdem polos habent.



Proponantur in Sphærâ paralleli circuli A B, CD, hoc est plana eorum sint parallela; dico illorum circulorum eosdem esse polos.

Sint enim circuli A B poli E, & F, assero eosdem esse polos circuli C D. Ducatur linea E F.

Demonstr. Linea E F. Ducta per polos circuli AB, recta est ad illius planum, & transit per centrum Sphæræ (*per* 10.1. *hujus*:) ergo (*per* 14.11.) erit etiam recta ad planum C D; & cum transeat per centrum Sphæræ (*ut vidimus*) transit per polos circuli C D (*per* 8. 1. *hujus*:) ergo puncta E & F sunt poli circuli C D.

PROPOSITIO II.

Theorema.

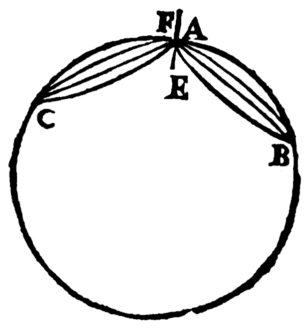
Circuli eosdem polos habentes sunt paralleli.

Circuli AB, CD habeant eosdem polos E, & F, dico illos esse parallelos, hoc est eorum plana esse parallela.

Demonstr. Linea E F recta est ad utriusque circuli planum (*per* 10. 1. *hujus*,) ergo (*per* 14. 11.) plana circulorum sunt parallela.

PROPOSITIO III.

Si in Sphara duo circuli sibi mutuò occurrunt, in eodem puncto, circuli maximi per polos eorum transeuntis, illi se mutuò tangent.



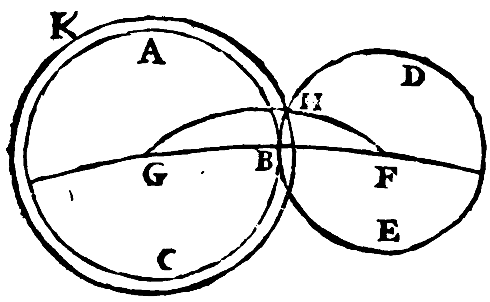
Circuli AB, A C sibi occurrant in puncto A circumferentiæ maximi circuli A B C per polos utriusque transeuntis, dico circulos AB, AC se mutuò tangere in puncto A: Hoc est si linea EF sit communis sectio planorum AB, AC, dico eam perpendicularem esse ad diametros AB, AC.

Demonstr. Circulus maximus ABC supponitur transire per polos circulorum A B, A C, ergo (*per* 15. 1. *hujus*) illos bifariam, & ad rectos angulos secat; ergo lineæ A B, A C communes sectiones circulorum AB, AC, & circuli A B C sunt eorum diametri; & (*per* 19. 11.) linea E F communis sectio planorum AB, AC, recta erit ad planum circuli ABC, quare (*per* 3. *def.* 11.) linea E F perpendicularis erit ad diametros AB, AC, & (*per def. hujus*) circuli AB, AC se tangunt in puncto A.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si in Sphara duo circuli se tangunt, maximus circulus per eorum polos transiens, transit quoque per contactum.



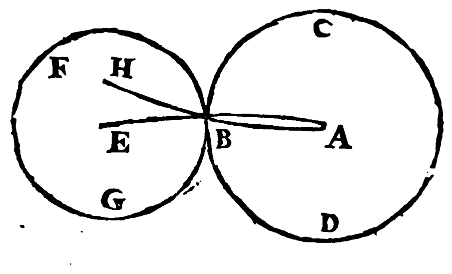
Circuli ABC, DBE se tangant in puncto B, & maximus circulus G F transeat per eorum polos G & F, dico eum circulum transire per punctum B; nam si dicatur non transire per contactum B, sed secare circulum B E D; in puncto H ex polo G, per punctum H describatur circulus H K, qui necessariò secabit circulum BHD, cum ad majus intervallum describatur quàm A B C.

Demonstr. Duo circuli DHE, KH, secant circumferentiam circuli maximi transeuntis per eorum polos G & F, ergo (*per* 3. *hujus*) se mutuò tangent in puncto H, quod est absurdum; cum se mutuò secent: ergo quicumque circulus maximus transit per polos, transit etiam per contactum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si duo circuli in Sphæra se tangant, maximus circulus per polos unius, & per contactum descriptus; per polos alterius transit.



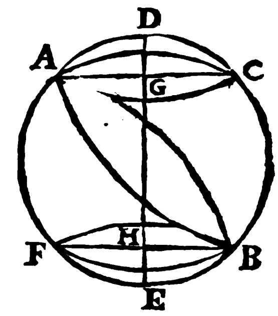
Maximus circulus AB, descriptus sit per polum A circuli C B D & per contactum B, dico eum transire per polum E circuli FBG. Si enim non transit qualis est ABH, sit alius circulus maximus transiens per polos A & E.

Demonstr. Circulus maximus AE, per polos circulorum se tangentium descriptus transit etiam per contactum B (*per præcedentem*) ergo duo circuli maximi ABH, ABE se secant in B & A, & cum bifariam se secent (*per* 11. 1. *hujus*) erit uterque arcus AB, semicirculus; quod est absurdum cum duo poli semicirculo distent.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Maximus circulus aliquem circulum tangens; tangit & alterum æqualem, & parallelum.



Maximus circulus AB tangat circulum A C in puncto A; sintque poli circuli AC puncta D, & E, per quæ, & per contactum A, transeat maximus circulus ADBE. Ex polo E, intervallo EB, describatur circulus BF; dico circulum BF & esse parallelum circulo AC, & tangere circulum A B in puncto B, denique esse æqualem circulo A C. Ducantur lineæ AC, BF, quæ erunt diametri circulorum, eò quòd (*per* 15. 1. *hujus*) bifariam dividantur, à circulo maximo ADBE, per polos eorum transeunte.

Demonstr. Primò circuli AC, B F eosdem polos habentes sunt paralleli (*per* 2.)

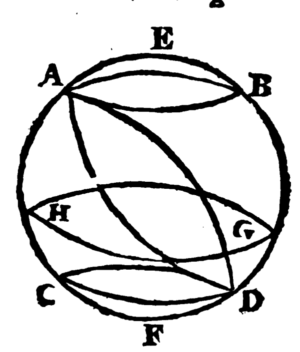
Secundò circulus maximus A C B transit per polos circuli AC, & per contactum A; ergo transit per polos circuli AB, (*per* 5.) cum ergo idem circulus ACB, transeat per polos circulorum AB, BF, sibi occurrentium in puncto B, (*per* 3.) circuli A B, B F se tangent.

Tertiò cum circuli maximi AB, ACB se bifariam secent (*per* 11. 1. *hujus*) erit arcus ADB semicirculus: sed etiam D C E semicirculus est; igitur ablatô communi arcu DCB, erunt arcus AD, B E æquales; eruntque etiam arcus dupli nempe ADC, BEF æquales, & (*per* 29. 3.) lineæ AC, BF, æquales erunt, ergo & circuli quorum sunt diametri.

Coroll. Sequitur puncta contactuum A & B esse opposita per diametrum, hoc est, distare semicirculo.

PROPOSITIO VII.

Si sint in Sphara duo circuli æquales, & paralleli; maximus circulus unum tangens, & alterum tanget.



Sint duo circuli AB, CD paralleli, & æquales, & circulus maximus AD, tangat circulum A B; dico

dico eum tangere circulum CD; si enim ideò non tangit circulum C D, quia illi non occurrit, secet circulum maximum ABD in puncto G, per quod ex polo F describatur circulus G H. Sequeretur quod circulus G H esset æqualis circulo A B, & consequenter æqualis circulo C D; quod tamen fieri non potest cum arcus G F H, sit major arcu DFC. Igitur circulus tangens ipsum A B, attinget circulum C D. Cum autem maximus circulus A E D F transeat per polos, tam circulorum AB, CD, quam circuli A D; circuli AD, CD, se mutuo tangent.

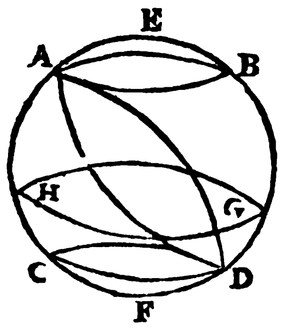
COROLLARIUM.

Plures quàm duo circuli paralleli, & æquales in Sphæra esse non possunt, quia nec supra nec infra CD duci potest circulus parallelus, & æqualis circulo AB.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si maximus circulus ad alium obliquus sit; ille tanget duos circulos, æquales inter se; & prædicto circulo parallelos.



Circulus maximus A D sit obliquus ad circulum G H; hoc est neque ad illum rectus sit, neque illum tangat, dico circulum A D, tangere duos circulos A B, CD inter se æquales, & parallelos circulo H G. Circulus maximus A G D H, transeat per polos circulorum A B, C D, sintque, puncta E, & F poli circuli H G, tum ex E intervallo EA, & ex F intervallo F D describantur circuli AB, CD.

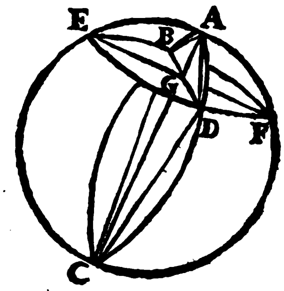
Demonstr. Erunt puncta E & F poli circulorum AB, C D, cum circulus A B C transeat per polos circulorum A B, CD, GH (*per 3. hujus*) circulus A D tangit circulos AB, CD, qui (*per 6.*) erunt inter se æquales, & cum eosdem polos habeant, ac circulus GH, illi etiam paralleli erunt. (*per 2.*

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si duo circuli in Sphæra se mutuò secent: maximus circulus per utriusque polos ductus, segmenta bifariam secat.

Duo circuli A B C D, B E D F, se mutuò in Sphæra secent, & maximus circulus AECF per eorum polos transeat, dico circulum AECF, bifariam secare segmenta utriusque circuli, nempe BAD, BCD, BED, BFD.

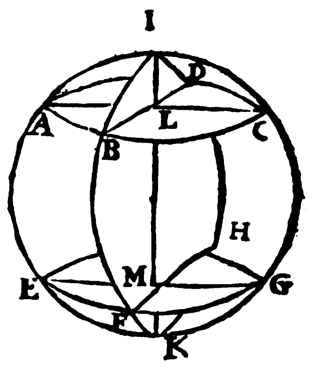


Demonstratio. Cum circulus A E C F transea per polos circulorum, erit rectus ad utriusque planum (*per 15. 1. hujus*) ergo (*per 19. 11.*) communis sectio utriusque hoc est B D recta erit ad planum circuli AECF; jam linea EF est diameter circuli E F, cum bifariam dividatur à circulo AECF, per polos ejus transeunte (*per 15. 1.*) ergo cum AC perpendiculariter dividat lineam BD, bifariam illam dividet (*per 3. 3.*) in triang. igitur BAG, GAD, cum latera GB; GD sint æqualia, & AG commune, & anguli in puncto G sint recti, erunt (*per 4. 1. Eucl.*) bases B A, A D æquales: ergo (*per 28. 3.*) arcus A B, AD æquales erunt. Eodem modò ostendam arcus BC, CD; EB, ED; FB, FD, esse æquales.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si per polos circulorum parallelorum describantur circuli maximi arcus parallelorum inter eos intercepti sunt similes; & arcus maximorum inter parallelos intercepti sunt æquales.



Sint circuli A B C D, EFGH paralleli quorum (*per 1. hujus*) sint iidem poli I & K, per quos ducantur duo, aut plures max. circuli IBKD, IAKC; dico arcus AB, EF, BC, FG parallelorum esse similes; & arcus AE, BF, CG, DH, esse æquales, intelligantur lineæ BD, AC, EG, FH, communes sectiones parallelorum, & maximorum circulorum.

Demonstr. Circuli ABC, EFG secantur bifariam à circulo maximo I A K C per eorum polos transeunte, (*per 15. 1. hujus*) igitur arcus A B C, EFG, sunt semicirculi, & AC, EG diametri: ostendam pariter lineas BD, FH esse diametros, & consequenter puncta L & M esse centra; cum autem plana ABC, EFG sint parallela, sectiones AC, EG, B D, F H, parallelæ erunt (*per 16. 11.*) *&* *per* 10. 11. anguli ALB, EMF, erunt æquales, qui cum ambo sint in centro constituti, arcus A B, E F similes erunt (*per 22. 3.*) hoc est A B tot gradus continebit, quot arcus E F.

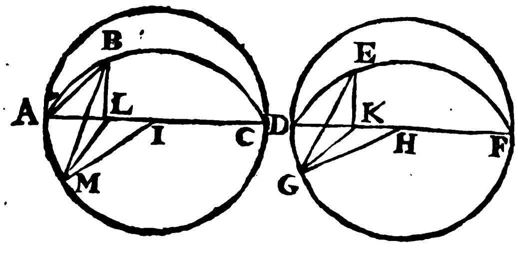
Secundò, cum polus I sit polus circuli A B C, erunt

erunt (*per* 5. *defin.*1. *hujus*) lineæ AI. IB æquales, & cum circuli I A K C, IBKD sint æquales, erunt arcus A I, I B æquales; similiter æquales erunt arcus IE, IF, ex quibus si æquales AI, B I auferas; remanebunt A E, BF æquales; similiter de aliis demonstrabo.

PROPOSITIO XI.

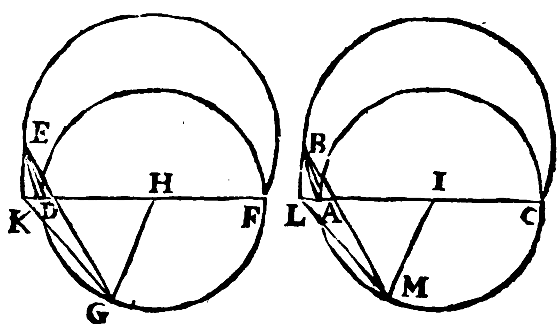
Theorema.

Si diametris circulorum æqualium, insistant perpendiculariter duo segmenta similia & æqualia in quibus sumpti sint arcus æquales, inæquales medietati & ab iis cadant in circumferentias circulorum lineæ æquales; illæ abscindent arcus æquales.

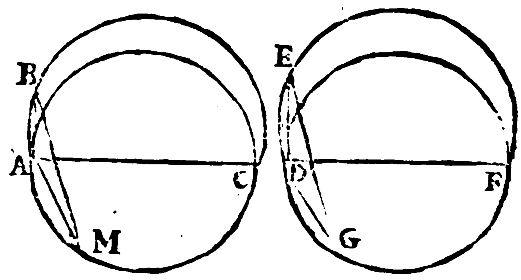


Diametris AC, D F circulorum æqualium, insistant perpendiculariter duo segmenta æqualia ABC, DEF; sumanturque in iis segmentis arcus æquales A B, D E, qui sint minores aut majores medietate arcuum A B C, D E F, & à punctis B, & E cadant in circumferentias circulorum duæ lineæ æquales B M, E G; dico arcus A M, D G æquales esse. Demittantur ex punctis B & E, duæ perpendiculares B L, E K, in plana circulorum, quæ (*per defini.*4. 11.) cadent in communes sectiones, seu in diametros quibus insistunt; hæ vel intra circulum cadent, vel extra circulum, vel in ipsam circumferentiam; hi enim tantum tres casus excogitari possunt. Cadant ergo primò intra circulum in puncta L, K; ducanturque lineæ LM, K G; & à centris I & H lineæ I M, H G, item AB, DE.

Demonstratio. Segmenta ABC, DEF supponuntur æqualia, & similia: arcus item A B, DE supponuntur æquales, & reliqui BC, E F erunt æquales: quare (*per* 29. 3.) lineæ A B, DE; æquales erunt; & (*per* 27. 3.) anguli BAC, FDE, arcubus æqualibus insistentes æquales erunt. Igitur triangula A B L, D E K, quæ habent angulos K & L rectos, & angulos BAL, EDK æquales, & latera AB, DE æqualia, erunt in omni sensu æqualia (*per* 26. 1.) Pariter triangula B M L, EGK, cum sint rectangula in L & K; erit quadratum lateris B M, æquale quadratis B L, L M; sicut quadratum EG æquale quadratis E K, K G, (*per* 47.) sunt autem quadrata BM, EG æqualia, cum lineæ supponantur æquales: igitur quadrata B L, L M, quadratis KE, K G æqualia sunt, à quibus si auferas quadrata æqualia BL, EK, restabunt quadrata L M, K G æqualia. Denique cum lineæ A I, D H, sint diametri circulorum æqualium, æquales erunt, & subductis æqualibus AL, DK, reliquæ LI KH æquales erunt: quare cum triangula M L I, GKH, singula latera æqualia habeant, erunt (*per* 8. 1.) æquianguli LIM, KHG æquales, qui cum sint in centro, erunt (*per* 26. 3.) arcus AM; DG æquales.



Secundò, cadant perpendiculares BL, EK, extra circulum. Cum arcus AB, DE æquales sint, ut priùs, lineæ A B, D E æquales erunt & anguli CAB, FDE, æqualibus arcubus insistentes æquales erunt: quare reliqui L A B, K D E, erunt æquales: & triangula L B A, K D E ut priùs æqualia erunt in omni sensu, eodem modò etiam ostendam in triangulis rectangulis B L M, EKG, lineas K G, L M æquales esse. Denique si lineis æqualibus L A, K D, addas semidiametros A I, DH æquales; fient lineæ L I, KH æquales: quare cum triangula, L I M, K G H habeant singula latera, singulis æqualia, (*per* 8. 1.) erunt anguli L I M, KHG æquales, & arcus A M, D G æquales.



Tertiò, perpendiculares cadant in circumferentias, sintque AB, DE.

Demonstr. Cum arcus AB, DE, supponantur æquales, erunt etiam lineæ AB, DE æquales. In triangulis igitur rectangulis B A M, E D G, (*per* 47. 1.) erunt quadrata BA, AM, æqualia quadrato BM; sicut quadrata D E, D G, quadrato EG; Sunt autem quadrata B M, E G æqualia, cum lineæ supponantur æquales; quare quadrata A B, A M, quadratis D E, D G æqualia sunt; à quibus si subtrahas quadrata æqualia AB, DE, relinquentur quadrata æqualia AM, D G: erunt igitur lineæ A M, D G æquales, & arcus pariter AM, DG in circulis æqualibus (*per* 28. 3.) æquales erunt.

PROPOSITIO XII.

Si segmenta æqualia, & similia insistant perpendiculariter diametris circulorum æqualium, & tam in segmentis, quàm in circulis abscindantur arcus æquales, lineæ conjungentes istos arcus æquales erunt.

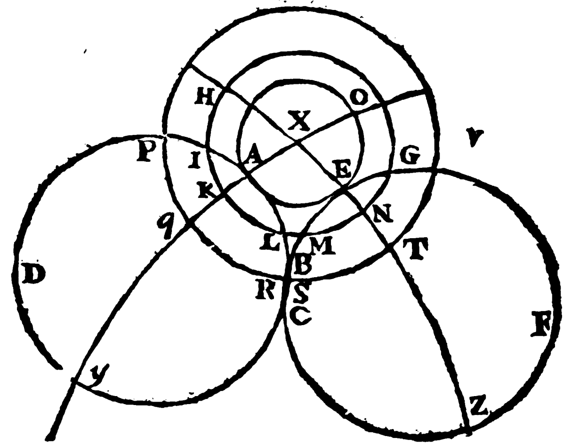
Hæc est conversa superioris, sint ut priùs segmenta similia, & æqualia quæ insistant perpendiculariter diametris circulorum æqualium; sintque

sintque arcus AB, DE; sicut AM, DG æquales: dico lineas BM, EG esse æqualesr. Pobabimus enim sicut suprà, lineas AB, DE esse æquales; unde in ultimo casu cum triangula BAM, DEG, habeant duo latera AB, DE, item AM, DG æqualia, eò quòd arcus AM, DG æquales sint, & anguli A & D æquales sint, ut pote recti; bases AM, EG æquales erunt (*per* 4. 1.) Eôdem modò applicari poterit demonstratio aliis casibus.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si maximi circuli eundem parallelum tangant reliquos verò parallelos secent; erunt arcus maximorum inter parallelos eosdem intercepti æquales: & parallelorum arcus inter maximos intercepti, quâ parte non concurrunt post utriusque contactum, similes.



Sint maximi circuli ABCD, EBCF tangentes eundem circulum AE, in punctis A, & E, & secantes alios parallelos IK, NO, Pq, TV in punctis I, L, M, G, P, R, S, V. concurrunt autem hi circuli in B, & C ita ut arcus BRC, BSC sint semicirculi, quamvis id figura non satis exprimat; ideoque arcus BEG, LPD sint ex ea parte quâ non concurrunt circuli maximi; dico quod arcus maximorum AI, AL, EM, EG, inter parallelos intercepti sunt æquales. Item dico quod arcus inter maximos intercepti quâ parte non concurrunt, hoc est arcus IM, LG, PR, SV, esse similes, probabo autem esse similes arcui AE. Per polum X & per puncta contactus A, & E, ducantur maximi circuli, XAQ, XET.

Demonstr. Circuli maximi XAQ, XET, per polum X, & per puncta contactuum A & E, ducti (*per* 5. *huius*) transeunt per polos circulorum maximorum ABCD, EBCF, & (*per* 15. 1. *huius*) illos bifariam, & ad angulos rectos secant; quare semicirculi AQY, ETZ insistunt perpendiculariter diametris circulorum ABCD, EBCF. & pariter alij semicirculi AXOY, EXHZ, inchoati à contactibus, & perfecti donec denuò secent eosdem circulos ABCD, EBCE, (*quod figura plana jam satis exprimere non potest*) insistent etiam ex alia parte; perpendiculariter diametris eorumdem circulorum, quare si intelligantur ductæ lineæ XG, XI, illæ æquales erunt (*ex defin. poli*;)

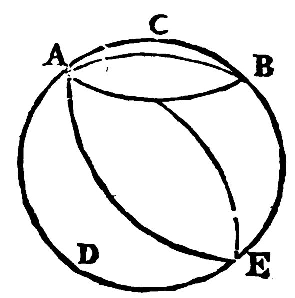
& (*per præced.*) arcus EG, AI æquales erunt. Pariter ostendam arcus AP, EV æquales esse; & cum (*per* 9. *huius*) arcus REV, PAS, item IAL, MEG, secentur bifariam à circulis maximis XAY XEZ, arcus IA, AL, ME, EG, item arcus PA, AS, RE, EV æquales erunt; quod erat primum.

Secundò cum arcus IAL, MEG, sint ostensi æquales, erunt eorum subtensæ æquales; quæ cum sint etiam subtensæ in circulo IKNG, erunt arcus IKL, MNG æquales; pariter eorum dimidia IK, KL; MN, NG æqualia. Si ergo arcui KM, ex una parte addas arcum MN, & ex alia parte arcum æqualem IK, erunt IM, KN æquales; sed KN (*per* 10. *huius*) est similis arcui AE, ergo & IM, eidem AE similis erit. Idem ostendere possum de LG; PR, SV; quod erat secundum.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Circulum maximum describere, qui minorem datum in assignato puncto tangat.



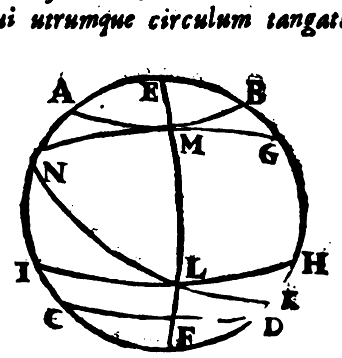
Sit minor circulus AB cujus polus C sitque describendus circulus maximus eum tangens in puncto A. Per punctum A, & polum C, describatur maximus circulus ABD (*per* 20. 1. *huius*) sitque AD quadrans; ex D ut polô, intervallô AD, describatur circulus AE, dico illum esse maximum; & tangere circulum AB in puncto A.

Demonstr. Circulus AE descriptus est intervallô quadrantis DA; ergo (*per* 17. 1. *huius*) maximus est; quia autem circulus ABD transit per polos utriusque, circuli AB, AE, (*per* 3. *huius*) se tangunt in puncto A.

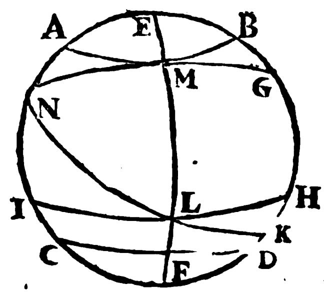
PROPOSITIO XV.

Problema.

Per datum punctum inter datos circulos parallelos æquales constitutum, maximum circulum describere qui utrumque circulum tangat.



Sint circuli AB, CD paralleli, & æquales; poli communes E & F, & punctum G datum



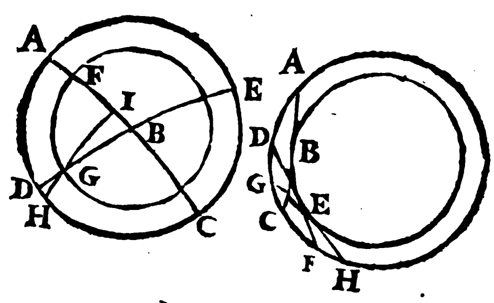
describendus proponitur maximus circulus, transiens per punctum G, & tangens utrumque circulum AB, CD. Per punctum G, & polum E describatur (*per* 20. 1. *hujus*) maximus circulus EGF; sintque GK, BH quadrantes; Ex polo F, intervallo F H, describatur parallelus H I, & ex puncto G ut polo, intervallo GK, describatur maximus circulus K L N, qui necessariò secabit parallelum HI. Cum enim BH sit quadrans, AI erit etiam quadrans (*per* 10. *hujus*) unde BI erit quadrante major: ergo circulus K L incipiens infra H I, debet productus cadere in N, supra punctum I, quare secabit parallelum HI, in puncto L. Per punctum L, & polum E, describatur circulus maximus FLME, secans parallelum A B in puncto M, tum ex L ut polo, intervallo L M, quod est quadrans, describatur maximus circulus; qui (*per* 3. *hujus*) circulum A B tanget, & (*per* 7.) alium parallelum æqualem. Dico illum circulum transire per punctum G.

Demonstratio. Cum circulus NL descriptus sit ad intervallum quadrantis; punctum L distabit quadrante à puncto G. Arcus autem ML est quadrans, cum sit æqualis arcui B H, qui suppositus est quadrans: quare circulus descriptus ex L, intervallo quadrantis, transit per punctum G, quamvis plurimi sint casus propositionis hi tamen non mutant demonstrationem.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Maximi circuli, similes arcus parallelorum intercipientes, aut ambo per polos eorum transeunt; aut eundem parallelum ambo tangunt.



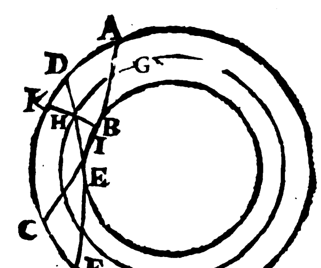
Sint in prima figura duo circuli maximi ABC, D B E, intercipientes in parallelis F G, AD arcus similes FG, AD. Dico primò si unus, nempe AB, per polum B parallelorum transit, alium transire etiam per polum B: si enim B ubi concurrunt non est polus, sit punctum I polus à quo ducatur circulus I G H.

Demonstratio. Circuli maximi A I, H I, per polum I parallelorum transeunt & intercipiunt (*per* 10. *hujus*) arcus AH, FG, similes: sed arcus A D supponebatur similis arcui F G; ergo etiam A H erit similis arcui A D, quod est absurdum.

Secundò, circuli ABC, DEF in secunda figura intercipiant in circulis parallelis, arcus similes A D, B E, & circulus A B C tangat parallelum BE. Dico quod circulus D E F eundem parallelum tanget in puncto E, si enim non tangit, sed secat parallelum BE, in puncto E; ducatur circulus G E H, tangens parallelum B E, in puncto E. Hic circulus non transit per D, alioquin arcus D E, G E essent semicirculi & consequenter A B, BC æquales ipsi GE (*per* 13. *hujus*) essent semicirculi, unde ABC esset circulus & puncta A & C coinciderent, quæ omnia sunt contra suppositionem.

Demonstratio. Arcus AD,BE sunt arcus similes ex suppositione; sed (*per* 13.) arcus AG, B E sunt etiam similes; ergo arcus A D, A G sunt etiam similes; pars & totum quod est absurdum.

Tertiò circuli maximi ABC, DEF in figura sequenti intercipiant in parallelis arcus similes AD, GH, ita ut uterque circulus parallelos secet, & per polos eorum non transeat: dico quod uterque eundem parallelum minorem tangit. Et primo (*per* 8. *hujus*) quia circulus A B obliquus est ad G H, cum per polos ejus non transeat; tanget duos minores ipsi parallelos. Tangat BE in puncto B, describatur (*per* 15. *hujus*) circulus maximus tangens circulum BE, & transiens per punctum H; dico quod talis circulus coincidet cum DEF, si enim non coincidit, sit ille circulus KHI.

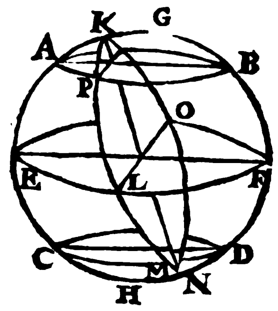


Demonstr. Cum circuli K H I, ABC, tangant eundem circulum BE, erunt arcus AK, G H similes (*per* 13. *hujus*) sed AD, G H supponebantur similes: igitur arcus AK, AD similes essent; pars & totum quod est absurdum: igitur, circulus transiens per puuctum H, & tangens parallelum BE, coincidit cum D F.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Circuli paralleli inter quos, & circulum maximum intercipiuntur arcus æquales maximorum circulorum, sunt æquales: Ille autem major est inter quem & maximum ipsi parallelum intercipiuntur arcus minores.



Sint paralleli circuli A B, C D, E F; quorum poli G & H; & circulus E F ſit maximus. Item arcus EC,AE ſint æquales:dico circulos AB, DC æquales eſſe. Supponatur primò circulus ADB, per polos parallelorum tranſire, & conſequenter eos bifariam ſecare (*per 15. hujus 1.*) ſunt igitur AB, EF, CD diametri.

Demonſtr. Plana parallela AB, CD, EF, (*per 16. 11.*) faciunt ſectiones A B, EF, CD parallelas, & cum arcus AE,EC ſint æquales : erunt arcus AGB, CHD æquales : & (*per 29. 3.*) lineæ AB, CD æquales erunt: & conſequenter circuli, quorum ſunt diametri. Quod ſi arcus AE, minor eſſet arcu EC ; arcus AGB,major eſſet arcu CHD, linea AB, major eſſet linea CD, quia uterque arcus AGB, CHD, minor eſt ſemicirculo, & conſequenter circulus AB, major eſſet CD.

Secundò ſi circulus maximus ut K L N. Non tranſeat per polos parallelorum deſcribatur circulus maximus ABDC per polos parallelorum, & per polos circuli K L N tranſiens, qui perpendiculariter inſiſtet diametro K N. Dico ergo quod ſi arcus L P, LM ſint æquales, circuli AB, C D æquales erunt.

Demonſtratio. Cùm circulus ACDB, tranſeat per polos circulorum EF, & KN; circuli EF, & K N viciſſim per ejus polos tranſeunt : (*per Corol.1. 15.1. hujus*) quare punctum L circuli ACDB polus erit; erunt ergo L K, L N quadrantes, & ablatis æqualibus arcubus LP LM, reſtabunt MN, PK æquales, æquales etiam ſunt arcus HN, GK, quare ſi intelligantur duci lineæ G P, H N, illæ (*per 11. hujus*) æquales erunt, quæ cum ſint ductæ ex polis circulorum; illi æquales erunt.

Si verò arcus LM, minor eſſet arcu L P, reſtaret arcus PK minor quàm M N, & conſequenter linea GP minor quàm H M.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

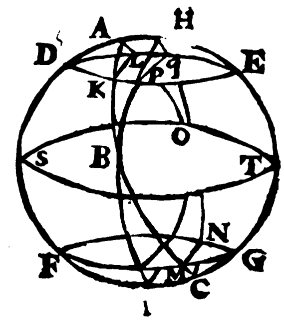
Arcus maximorum circulorum, intercepti inter circulos parallelos æquales, & circulum maximum ipſis parallelum æquales ſunt.

In figura ſuperiori ſint circuli AB, CD paralleli, & æquales, & E F maximus, ipſis parallelus, dico arcus AE, E C eſſe æquales : ſi enim AE eſſet major : circulus A B minor eſſet contra ſuppoſitionem. Idem dicendum eſt de arcubus P L, L M.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Circulus maximus parallelos minores ſecans, & per polos eorum non tranſiens, eos bifariam non ſecat. Eaque parallelorum ſegmenta majora ſunt, quæ ſpectant ad polum viciniorem.



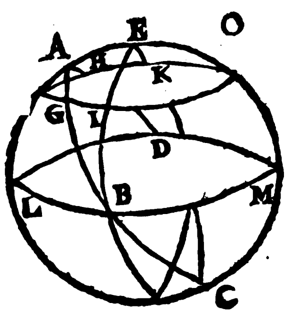
Circulus maximus ABC ſecans parallelos DE, FG, non tranſeat per polos eorum H & I. Dico eos non ſecari bifariam : ducatur enim per polos H & I, circulus HBI.

Demonſtr. Circulus HBI, parallelos DE, FG, ſecat bifariam, hoc eſt arcus PEq, eſt ſemicirculus; ergo arcus KEL major eſt ſemicirculo, ſpectat autem ad polum H igitur ſegmentum majus KEL, ſpectat polum H, viciniorem.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Maximus circulus non tranſiens per parallelorum polos; magis inæqualiter ſecat viciniores polo.



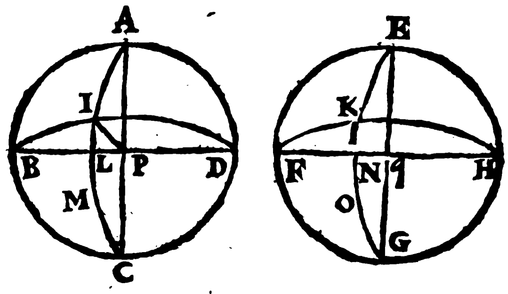
Circulus maximus ABCD non tranſeat per polos parallelorum LM, GO; dico quod magis inæqualiter ſecat parallelum GO, viciniorem polo E. Ex polo E, ducantur circuli maximi EIB, EMC.

Demonſtr. Arcus IO, BM,(*per 10. hujus*) ſunt ſimiles; ſicut & arcus DM, KO : igitur totus arcus IOK ſimilis eſt arcui BMD : ſed arcus GOH, major eſt arcu IOK : ergo GOH, major eſt,quàm ut ſit ſimilis arcui BMD.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

In Sphæris æqualibus, ille circulus ad alium inclinatior erit cujus polus ab alterius polo minus diſtabit, & æqualis polorum diſtantia, æqualem inclinationem producet.



In Sphæris æqualibus A B C D, EFGH, sint circuli BI D, FKH, inclinati ad circulos ABCD, EFGH. Dico quod si polus circuli B I D minus distet à polo circuli ABCD; quàm polus circuli FKH à polo circuli EFGH; quod inquam circulus BID inclinatior erit ad ABCD, hoc est angulus inclinationis planorum BID, ABCD acutior erit angulo inclinationis planorum FKH, EFGH. Ex punctis B & F communibus intersectionibus circulorum intervallo quadrantis ducantur circuli AIC, EKG, qui maximi erunt & cum circuli A B C D, BID, transeant per polum B circuli A I C, vicissim circulus A I C per polos eorum transit (*per cor.*1.15. 1. *hujus*) idem dico de circulo E K G. Sit igitur L polus circuli ABCD, & M polus circuli BID; N polus circuli EFG & O, circuli F K H. Ex centris P & q ducantur lineæ PI, qK.

Demonstr. Quoniam circuli ABCD,BID transeunt per polos B & D, circuli A I C ad ipsum recti sunt (*per* 15.1.*hujus*) & (*per* 19.11.) communis sectio B D ad planum A I C recta erit: & anguli DPA, DPI recti sunt; (*per* 6. *def.*11.) angulus API est inclinatio planorum ABCD, BID. Ita angulus EqK, est angulus inclinationis planorum EFGH, FKH. Supponitur autem ML, distantia poli à polo, minor esse quàm NO; & cum M I, L A sint quadrantes ablato communi L I erunt arcus M L, AI æquales: similiter æquales erunt N O, KE. Ergo arcus A I minor est arcu KE; & quia anguli API, EqK, sunt ad centrum Sphæræ seu maximorum circulorum, angulus API; minor erit angulo EqK.

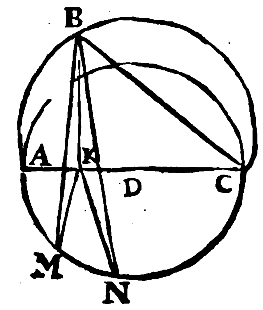
Quod si arcus LM, æqualis esset arcui NO, anguli quoque inclinationis æquales essent.

COROLLARIUM.

Sequitur si ex intersectione maximorum circulorum quasi polo, describatur maximus circulus, quòd arcus illius interceptus inter prædictos circulos, erit mensura inclinationis circulorum ut A I est mensura inclinationis circulorum ABCD, BID. Dum autem loquimur de angulo quem comprehendunt duo circuli in Sphæra, intelligimus semper angulum inclinationis planorum.

LEMMA I.

Si ex puncto quod circuli polus non sit, ducantur in ejus circumferentiam plurimæ lineæ: ea est brevissima, quæ attingit lineam ductam per ejus centrum, & per punctum in quod cadit perpendicularis, ea brevior aliis quæ isti vicinior, ea longissima quæ isti opposita.

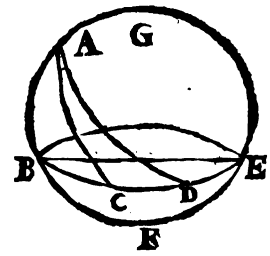


Ex puncto B, quod non sit polus circuli AMNC, in circumferentiam ejus, cadant plurimæ lineæ BA, BM, BN, BC, ductâque perpendiculari B K, linea AKDC, transeat per centrum D. Dico lineam BA, esse brevissimam, BC longissimam; BN, majorem quàm BM.

Demonstr. Cum enim punctum K non sit centrum circuli AMNC, alioquin punctũ B esset polus; AK erit brevissima KC maxima, K N major quam KM. (*per* 7. 3.) quare quadratum ex AK, minimum erit, quadratum ex K C maximum, quadratum ex KN majus quadrato ex KM, & addito communi quadrato B K, erunt quadrata ex B K, K C, maxima, & quadrata ex BK KA, minima, & quadrata ex BK, KN, majora quadratis ex BK, KM, sed primis (*per* 47. 1. *Eucl.*) æquale est quadratum BC, secundis quadratum ex BA, &c. ergo quadratum ex A C maximum est, A B minimum, BN majus quam B M, & consequentes lineæ eodem modò se habent. Alij casus faciles sunt nempe si perpendicularis B K cadat in peripheriam, aut extra, advocanda erit octava tertij Euclidis eademque methodus adhibenda.

LEMMA II.

Si ex quocumque puncto, quod alicujus circuli polus non sit, ad ejus peripheriam plurimi arcus ducantur; maximus erit, qui per polos eius transit, illi propinquior remotiore major erit.



Ex puncto A, ad peripheriam circuli BCD, arcus maximorum circulorum ducantur; nempe AB, AE, AD, AC. dico A G E transeuntem per polum G maximum esse; A D majorem esse quàm AC, modò quilibet semicirculo minor sit.

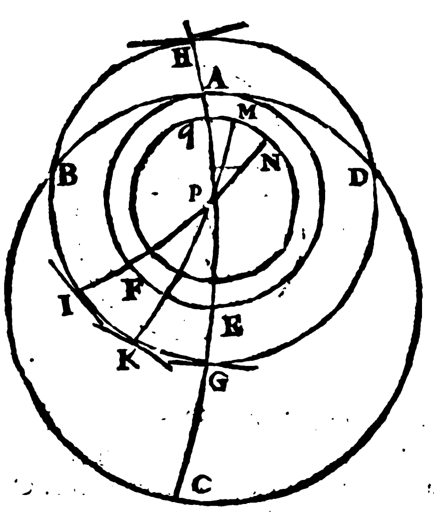
Demonstratio. Cum circulus A G E transeat per polos circuli B C D, bifariam & perpendiculariter eum secabit: igitur B E erit diameter, & segmentum B G E perpendiculariter insistet diametro circuli B C E, & cum punctum A non sit polus, arcus B A non erit media pars segmenti B G E. Quare (*per lemma præcedens*) erit linea A E si duceretur maxima, A D major quam A C: & A B minima, igitur arcus circulorum æqualium nempe maximorum, quos prædictæ lineæ subtendunt (*per* 28. 3.) ita se habebunt

bebunt, ut AGE sit maximus, AD major quam AC & AB minimus modò sint minores semicirc.

PROPOSITIO XXII.

Si in Sphærâ maximus circulus minorem tangat, & minorem alium parallelum in eodem hemisphærio secet; ita ut polus circuli tangentis sit inter utrumque parallelum, circuli maximi tangentes majorem parallelum, erunt inclinati, ad primum illum circulum tangentem: illeque magis erit inclinatus, qui tanget in eo puncto, in quo minus segmentum dividitur bifariam, ille rectissimus qui tanget parallelum in eo puncto in quo majus segmentum dividitur bifariam; ille magis inclinabitur, qui in loco remotiore eum tanget, & poli circulorum tangentium majorem parallelum erunt in eodem circulo minoribus parallelo, & ipsis minoribus etiam minore.

Circulus ABCD maximus tangens parallelum AF, secet parallelum HBGD, descriptum in eodem hemisphærio: sitque polus E, circuli tangentis ABCD, inter utrumque parallelum positus: sint item plurimi circuli tangentes majorem parallelum HIKG, in punctis H, I, K, G, sitque punctum H, illud in quo minus segmentum BHD divisus est bifariam, dico circulos tangentes parallelum HBGD, esse inclinatos ad circulum ABCD; item eum qui tangit in H esse maximè inclinatum, eum verò qui tangit in puncto G esse rectissimum, & alios esse magis inclinatos qui tetigerint in puncto viciniori puncto H,& omnium prædictorum circulorum tangentium polos, esse in eodem circulo minore, quàm sit AF, ipsi tamen parallelo.



Per polum E circuli ABCD, & per contactum A, ducatur maximus circulus EA, qui (*per 5. hujus*) transit per punctum P, polum circuli AF, quod punctum P est etiam polus circuli HBG, quare circulus EA bifariam secat segmenta BHD, BGD in punctis G & H.

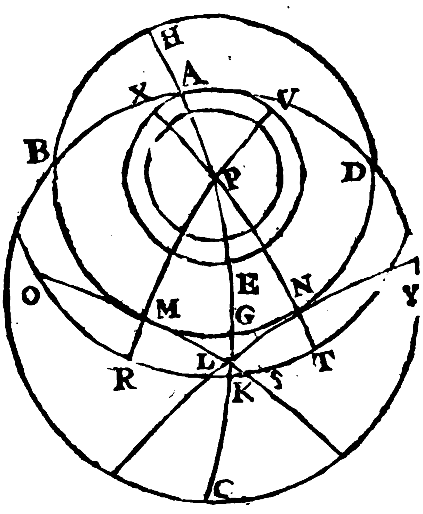
Demonstratio. Punctum E est polus circuli ABCD, igitur EA, est quadrans, polus autem circuli tangentis in G, est in circulo EA v. g. in q, ita ut Gq sit quadrans: debet ergo esse intra circulum AF; & quia arcus à puncto K ad polum circuli tangentis in K est quadaans, & talis polus est in circulo transeunte per polum circuli minoris qui tangitur; sublatis arcubus æqualibus KP, GP restabunt usque ad polos q, & M, arcus æquales; igitur poli circuli tangentis in K, erit in eodem circulo minore descripto ex P, tanquam polo, idem dicendum de reliquis omnibus circulis tangentibus.

Deinde quia arcus, Eq minor est quadrante, seu E, non est alius polus circuli qMN, si ex E, ducerentur arcus maximorum circulorum usque ad ejus circumferentiam; Eq esset maximus; EM maior, quàm EN, (*per lemm. 2. hujus*) quare (*per 21. hujus*) circulus tangens in H, est minimè inclinatus, tangens in G, maximè, & prout reliqui tetigerint in puncto viciniore ipsi H, minus inclinabuntur quia poli eorum magis distabunt à polo.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Iisdem positis si arcus circulorum tangentium intercepti inter contactus & nodos, æquales fuerint: circuli tangentes similiter inclinati erunt.



Sit maximus circulus ABC, cujus polus E tangens parvum circulum in A; secans illi parallelum GBHD, in eodem hemisphærio descriptum, & pariter polus E sit inter utrumque parallelum, & circuli maximi tangant parallelum GBHD in punctis MN, secantes circulum ABCD, in O & Y, quos nodos vocabimus, sintque arcus MO, NY, æquales: dico circulos OM, YN esse similiter inclinatos ad circulum ABCD. Ducatur ut priùs circulus EPA per polos E,& P, qui transit per contactum A; ducantur item MP, NP, qui (*per 5. hujus*) transeunt per polos circulorum tangentium & ad angulos rectos ipsos secant: debemus ostendere arcus GN, GM æquales esse, quia hoc posito (*per præcedentem*) circuli similiter inclinati erunt.

Demonstratio. Si arcus NP, MP intelligantur produci donec NX, MV sint semicirculi, erunt insistentes diametris circulorum tangentium; nam maximi circuli se bifariam secant, punctum autem P non est polus circulorum tangentium, & supponuntur arcus æquales YN,MO, igitur (*per 12. hujus*) essent lineæ PY, PO, æquales, quare circulus descriptus ex P, tanquam polo, per punctum O, transit etiam per Y, & esset parallelus circulo GBH, & segmentum BHD,

 dividitur

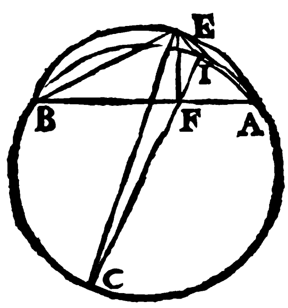
dividitur bifariam in H, & BGD, bifariam in G, igitur O K Y, dividitur bifariam in K. Pariter circuli N P, M P, cum transeant per polos circulorum tangentium, & circuli OKY, bifariam dividunt arcus YL, SO, qui consequenter æquales erunt, quia eorum medietates OM, NY, & suppositione æquales sunt; unde si subtenderentur lineæ LY, SO, illæ æquales essent, sed tales lineæ subtendunt etiam arcus LTY, O R S: ergo arcus LTY, ORS, & eorum medietates TL, SR æquales sunt, & ablato communi LS, erunt arcus TS, LR æquales, sed cum arcus YK, KO essent æquales, eo quod circulus E P transeat per polum E, circuli ABCD; & per polum P, circuli OKY; ablatis æqualibus T Y, O R: item TS, LR; restabunt arcus KS, KL æquales, quibus si rursus addas æquales ST, LR fient arcus TK, KR æquales. Unde erunt etiam æquales arcus M G, G N, *(per præcedentem)* circuli tangentes similiter erunt inclinati.

THEODOSII SPHÆRICORVM LIBER TERTIVS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si circuli segmentum insistat perpendiculariter lineæ quæ circuli diameter non sit: & à puncto quod segmenti dimidium non sit, in majorem circuli circumferentiam cadant plurimæ lineæ; omnium minima est, quæ minorem segmenti arcum subtendit, crescuntque usque ad circuli diametrum, decrescuntque donec ad eam perveniant quæ majorem arcum segmenti subtendit.



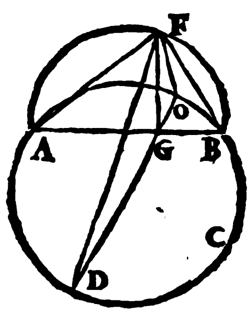
Supra lineam AB, quæ non sit diameter circuli ACB, insistat perpendiculariter segmentum circuli A E B, in quo assumatur punctum E, quod ejus dimidium non sit, à quo ad majorem circumferentiam A C B cadant plurimæ lineæ: dico minimam esse A E quæ subtendit minorem arcum EA; maximam E C, ductam ad diametrum FC transeuntem per punctum F, in quod cadit perpendicularis E F. Crescere item lineas à puncto A usque ad C, & decrescere à puncto C ad punctum B. Intelligatur enim circa puncta I, E, C, descriptum circuli segmentum quod insistat perpendiculariter diametro IC, cum linea FE, sit perpendicularis.

Demonstr. (*Per cor.* 12.) EC maxima est, & quæ illi vicinior erit, major erit: ergo lineæ crescunt semper ab A usque ad C; decrescunt autem à C usque ad B; immò si ulteriùs progrederemur decrescerent usque ad I. (*Ut vidimus in primo lemmate ante penultimam præcedentis.*)

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si segmentum circuli insistat rectæ lineæ, in alio circulo ductæ; quæque non sit illius secundi circuli diameter; sitque segmentum prioris circuli inclinatum ex parte segmenti non majoris semicirculo eadem accident quæ priùs.



Segmentum AFB insistat lineæ AB in circulo ABC ductæ quæ non est circuli ABC diameter, & inclinatum sit ex parte segmenti A O B, non majoris semicirculo, hoc est ita ut linea FG, recta ad planum ABG, cadat in minus segmentum AOB ductâ diametro GD, in circulo ABC; dico quod si sumatur punctum F, quod non sit dimidium arcus AFB, & cadant plurimæ lineæ in circumferentiam majorem, nempe A C B, quod inquam FB minima erit; F D, maxima, &c. Producatur diameter D G usque ad O, intelligaturque punctum F, in eadem Sphæra.

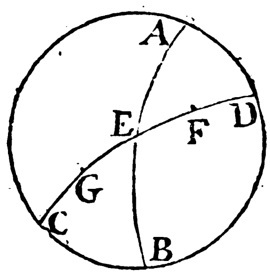
Demonstr. (*Per Lemma I. ante prop.* 17. *præcedentis lib.*) FD maxima est, FO minima, & quæ proximior erit diametro GD major erit.

PROPO

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si duo circuli maximi se mutuò secent, & à communi sectione in utroque æquales arcus assumpti sint, lineæ hujusmodi arcus connectentes æquales erunt.

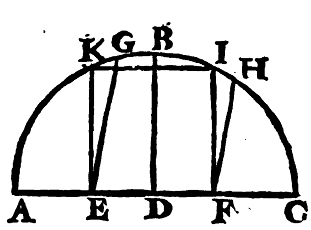


Duo circuli maximi AB, CD, se mutuò secent in puncto E; abscindanturque arcus æquales E A, EB, EF, EG, dico lineas BG, AF æquales esse. Ex puncto E, ut polo, intervallo majorum arcuum EA EB. describatur circulus ACBD.

Demonstr. Cùm circuli A B, C D transeant per polum E, circuli A C B D bifariam eum secabunt, & perpendiculariter (*per 15. 1. hujus*) quare perpendiculariter ejus diametro insistent: eruntque ADB, ACB, DBC, DAC, semicirculi, & arcus A D, C B æquales. Cum ergo segmentum CD perpendiculariter insistat diametro circuli D A C B, assumptaque sint puncta G, & F, æqualiter à punctis D & C distantia, item arcus AD, CB æquales sint, erunt (*per 12. 2. hujus*) lineæ AF, BG æquales.

LEMMA.

Si sumantur duo puncta æqualiter distantia à medio lineæ subtensæ alicui arcui; per quæ ducantur duæ parallelæ quarum una conveniat cum perpendiculari in medio excitatâ, altera verò non conveniat; quæ convenit minorem arcum abscindit.



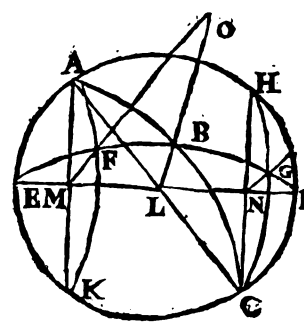
Linea AC subtendatur arcui A B C, quæ bifariam dividatur in puncto D. Sumantur autem lineæ DE, DF, æquales; & ducantur duæ parallelæ EG, FH, quarum una, nempe E G conveniat cum perpendiculari DB productâ, FH autem non conveniat versus easdem partes; dico arcum GB minorem esse arcu B H.

Demonstr. Si ducerentur perpendiculares EK, FI, essent arcus KB, BI æquales ut facilè est demonstratu; sed arcus BG minor est arcu KB, & BH major arcu BI; igitur arcus B H, major est arcu B G.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Si à communi intersectione circulorum maximorum, in eorum altero sumantur puncta æqualiter distantia, per quæ ducantur duo plana parallela, quæ alium circulum intersecent in minori distantiâ à communi intersectione, & horum planorum unum conveniat cum intersectione circulorum productâ, aliud verò non conveniat; quod convenit minorem arcum abscindit.



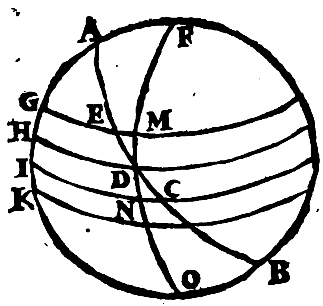
Duo maximi circuli ABC, EBD se mutuò intersecent in puncto B, in eorum altero duo arcus æquales AB, BC abscindantur; tum per puncta A, & C, ducantur plana C G H, AFK, (*quæ per 1. 1. hujus*) circulos in Sphæra facient; hi duo circuli alterum circulum EBD, secent in punctis F, & G, ita tamen ut arcus BF, BG minores sint arcubus AB, BC; unde ex puncto B, ut polo, intervallo BA, ductus circulus non attinget puncta G & F, cum autem circuli ABC, DBE transeant per polum circuli A E C D, bifariam eum secabunt, eruntque communes intersectiones A C, D E, diametri per centrum L transeuntes. Item linea L B recta est ad planum A E C D. Dico ergo quod si planum AFK convenit cum L O, productâ ad partes O, arcus BF, minor sit arcu BG.

Demonstr. Cum planum AFK supponatur convenire cum linea LO, in puncto O, punctum O erit in plano A F K; sed etiam illud est in plano EBD, ergo punctum O erit in communi intersectione planorum; hoc est in linea MF; cum autem planum CGH non conveniat cum LO, neque N G, quæ (*per 16. 11. Eucl.*) est parallela ipsi MF, cum ea conveniet. Sunt etiam lineæ M L, L N æquales, eò quod triangula AML, LCN habeant angulos alternos ad M, & N, & oppositos ad L æquales, & latera AL, LC æqualia, quare (*per lemma præcedens*) arcus BF, minor erit arcu BG.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si arcus æquales sumantur in circumferentia maximi circuli, & per punctum quod neque sit ejus polus, neque sit in ejus circumferentia, describatur maximus circulus ad ipsum rectus; item ex eo puncto ut polo per extremitates arcuum, circuli paralleli ducantur; illi arcus inæquales abscindent in hoc ultimo circulo, & qui à puncto prædicto magis distabit major erit.



In circumferentia maximi circuli A B, ſumantur arcus æquales C D, D E, & per punctum F, quod neque ſit in ejus circumferentia, neque ſit ejus polus, ducatur circulus F A B ad A B rectus. Item ex eodem puncto F, ut polo, deſcribantur paralleli E G, DH, CI, qui omnes ſint in eodem hemiſphærio; ita ut KN ſit maximus circulus illis parallelus. Dico quod iidem paralleli abſcindent in eodem circulo F A B, per polum F tranſeunte, arcus G H, H I, inæquales, ita ut arcus H I propior circulo maximo K N, major ſit quàm H G; per punctum D medium, & per polum F ducatur circulus maximus.

Demonſtr. Cum duo circuli maximi A B, FO ſe interſecent, ſumptique ſint arcus æquales E D, D C, & per C, & E ducta ſint plana parallela, ſcilicet circulorum GM, IC, ita ut ſi intelligeretur ex centro Sphæræ, duci linea per interſectionem D, tranſiens, cum ea conveniret planum GM, non autem I C, (*per 4. hujus*) arcus M D, minor erit arcu DN; ſed arcus MD, æqualis eſt (*per 10. 2. hujus*) arcui HG; ſicut DN, arcui HI, ergo arcus GH, minor eſt arcu H I.

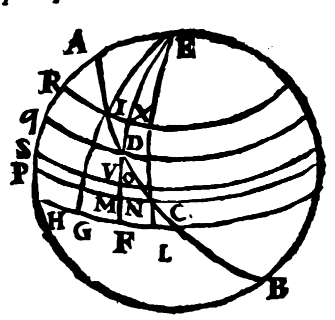
COROLLARIUM.

Ex hoc vides quare licèt ſol circa ſolſtitia percurrat æquales arcus iis quos percurrit circa æquinoctia, non tamen tanta fiat parallelorum, ſeu declinationis mutatio.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si in circumferentia circuli maximi ſumantur arcus æquales; & per punctum quod polus ejus non ſit, ducantur per extremitates arcuum circuli maximi, illi inæquales arcus abſcindent in alio circulo maximo, cujus punctum illud polus eſt, illeque arcus major erit qui ex arcu viciniore, ipſi polo proveniet.



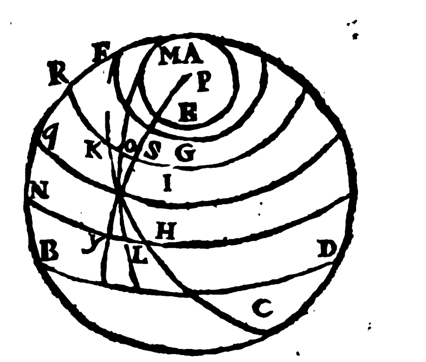
In circumferentia circuli A B ſumantur arcus æquales D I, D C, & ex puncto E, quod circuli A B polus non ſit, ducantur circuli maximi EIG, EDF, ECL, ita tamen ut HF ſit circulus maximus, cujus E polus eſt, & puncta I, D, C ſint in eodem hemiſphærio; dico arcum GF provenientem ex arcu DI, propiore ipſi polo E, majorem eſſe arcu F L. Per I, D, C ducantur paralleli IR, Dq, CP ex polo E; & quia (*per præcedentem*) arcus Pq major eſt arcu qR, abſcindatur arcus qS, æqualis arcui qR, ducaturque parallelus S O.

Demonſtr. Cum arcus DX, DV (*per 10. 2. hujus*) arcubus æqualibus qS, Rq æquales ſint, æquales erunt inter ſe. Item D I, & D C ſupponuntur æquales, quare (*per 3. hujus*) ſi ducerentur lineæ XI, VC, illæ æquales eſſent; aliunde cum circulus maximus LE tranſeat per polum paralleli SO, hic inſiſtet perpendiculariter circulo maximo EL, eſt autem OL ſi perficeretur circumferentia major ſemicirculo, ſi videlicet perficeretur donec iterum concurreret cum eodem parallelo SO, cum circulus H F ſit maximus; quare (*per 1. hujus*) linea VO minor erit quam VC; ergo minor quam IX, igitur linea major IX, ex minori circulo RX, ſegmentum majus abſcindit quàm ut ſimile ſit, ſegmento VO, ſed (*per 10. 2. hujus*) arcus IX, G F ſunt ſimiles ſicut VO, & FL: ergo arcus GF major eſt quàm ut ſimilis ſit arcui F L.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si circulus maximus parallelum minorem tangat, & maiorem ſecet, in puncto in quo alius circulus maximus eum tangit, ſumanturque in hoc circulo maximo arcus quales in eodem hemiſphærio, ducanturque paralleli: illi in primo circulo tangente, arcus inæquales abſcindent, & vicinior polo minor erit.



Circulus ABC tangat circulum minorem AE, & ſecet circulum F G in puncto F, in quo alius circulus F I C eundem parallelum FG, tangat. Sumantur in circulo FC arcus æquales HI, IK, in eodem hemiſpherio in quo eſt polus parallelorum. Dico quod ſi per puncta K, I H ducantur paralleli NH, Iq, RK, arcum N q majorem eſſe arcu qR, per punctum I. Ducatur circulus IM, tangens minorem circulum AE, item per polum P ducatur circulus I P.

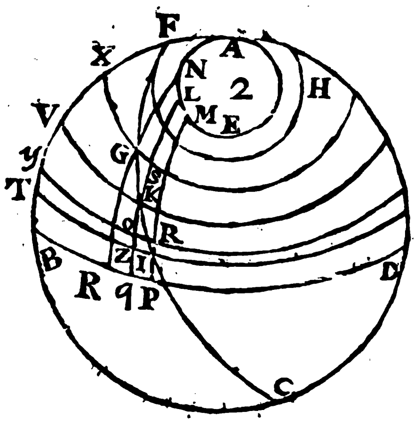
Demonſtr. Ex puncto I ductus eſt circulus maximus I P, rectus ad plana parallelorum N H, RS, cum per eorum polum tranſeat. Quare (*per 2. lemma ante 17. 2. huius*) arcus I Y minimus erit, & IL minor quam HI, & IO minor quàm I K; quia autem ducti ſunt duo majores circuli F I C, ML, ſe interſecantes in puncto I, ſuntque ſumpti in eorum altero arcus æquales I H, I K, ductaque ſunt plana parallela, &c. (*ſecundum propoſitionem 4 huius*) erit arcus IO minor quàm I L, ſed (*per 13, 2. huius*

2. *hujus*) arcus IO, qR, item IL, qN sunt æquales: ergo arcus Nq, major est quàm qR.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Iisdem positis sumptisque in circulo tangente majorem parallelum, arcubus æqualibus; si ducantur per eorum extremitates maximi circuli tangentes minorem parallelum; illi circuli tangentes intercipient in maximo parallelorum arcus inæquales, illeque major erit, qui ex arcu viciniore ipsi polo oritur.

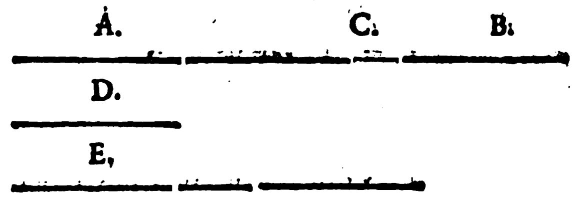


Circulus ABCD tangat minorem parallelum AE, in puncto A; & secet majorem FH in F; sit etiam circulus FC tangens eundem parallelum FH, in F, & in eo sumantur arcus æquales GK, KI, tum per puncta G, K, I ducantur circuli maximi RGN, qKL, PIM, tangentes minorem parallelum AE, in punctis M, L, N; dico arcum qP minorem esse arcu Rq. Ducantur per puncta G, K, I, circuli paralleli GX, KV, IT, & quia (*per præcedentem*) arcus TV major est arcu VX, abscindatur arcus VY, æqualis arcui VX; erit arcus KO æqualis arcui KS, quia (*per* 13.2. *hujus*) KO, & KS æquales sunt arcubus æqualibus Vy, VX.

Demonstr. Cùm arcus KS, KO; item KG, KI æquales sint (*per* 3. *hujus*) lineæ GS, OI, si ducerentur æquales essent; sed OI major est quam OR, nam segmentum paralleli RY insistit circulo RM, & inclinatum est ex parte M, quod patet ex eo quod si duceretur per polum 2. & per punctum R circulus maximus, ille transiret ad partes E, circumferentia etiam RP, producta major est semicirculo, cum BD sit parallelorum maximus; ideoque (*per* 2. *huius*) OR est minima omnium cadentium ex O ad circumferentiam RP: quare OI major etiam est quàm OR, & consequenter GS, major est quàm OR: Igitur GS major ex minori parallelo XS, majorem arcum GS abscindet, quàm ut similis sit arcui OR, quem minor linea abscindit ex majori parallelo YR; sed arcus GS similis est arcui Rq, & OR arcui Pq (*per* 13.2. *huius*) ergo Rq, maior est quàm Pq.

LEMMA.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus invenire intermediam, quæ alteri cujuscumque sit commensurabilis.

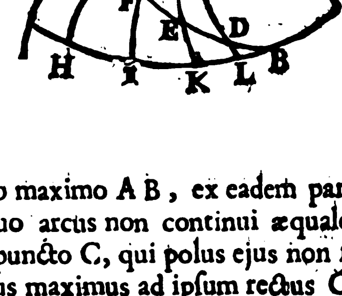


Sint datæ magnitudines AB, AC, inæquales; inveniendaque sit alia intermedia, hoc est major quàm AC, minor quàm AB, quæ sit commensurabilis alteri D. Vel magnitudo D, minor est differentiâ CB, vel non minor. Si primò minor sit, multiplicetur D, ita ut fiat E, proximè major quàm AC. Dico quod E non erit major quam AB, si enim major esset quàm AB, detractâ adhuc semel ipsâ D, quæ minor est quàm CB, major remaneret quàm AC; ergo non fuisset proximè accepta major quàm AC. Si verò D, non est minor quàm CB; dividatur D, per medium, & iterum per medium, donec inveniatur aliqua ejus pars aliquota minor quàm CB; multiplicetur hæc pars aliquota donec fiat magnitudo proximè major quàm AC: quæ etiam major non erit quàm AB, alioquin detrahi adhuc posset, hæc pars aliquota, quæ supponitur minor quàm BC. Hæc autem magnitudo producta major quàm AC, minor quàm AB, commensurabilis est magnitudini D, cum sit composita per multiplicationem partis ejus aliquotæ.

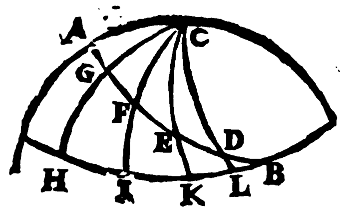
PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si in circulo maximo sumantur duo arcus non continui æquales, ex eâdem parte & ex puncto quod polus ejus non sit, ducatur circulus maximus ad ipsum rectus, & alij circuli majores per extremitates arcuum: Illi in parallelorum maximo, ascindent arcus inæquales; illeque major erit, qui ex arcu viciniore ipsi polo oritur.



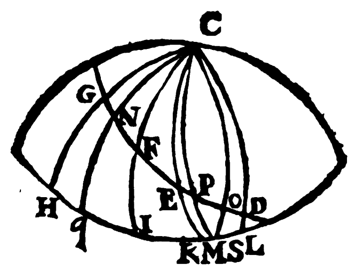
In circulo maximo AB, ex eadem parte, assumantur duo arcus non continui æquales GF, ED, & ex puncto C, qui polus ejus non sit, ducatur circulus maximus ad ipsum rectus CA, & per extremitates arcuum ducantur arcus maximorum circulorum, ex puncto C; nempe arcus CGH, CFI, CEK, CDL; dico autem KL, minorem esse arcu HI. Vel enim arcus intermedius FE commensurabilis est arcubus æqualibus GF, ED, vel incommensurabilis. Sit primò commensurabilis



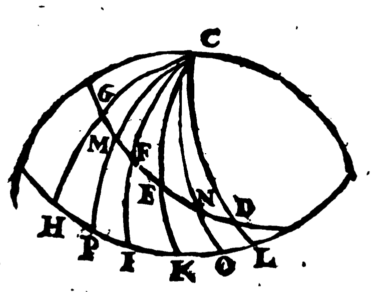
mensurabilis; dividantur tam arcus intermedius E F, quàm arcus F G, E D, in partes metientes utrumque arcum.

Demonstr. Ostendemus arcus factos in circulo H B, procedendo ex L versus H, semper crescere, quare si KL contineat tres arcus: H I continebit tres arcus singulos majores arcubus contentis in K L, quare arcus H I major erit quàm K L.

Si verò arcus intermedius F E sit incommensurabilis arcubus æqualibus G F, E D, dico adhuc arcum H I majorem esse arcu K L; neque enim minor esse potest neque æqualis. Sit enim si fieri potest minor, abscindatur ex K L majore, arcus KM æqualis ipsi H I, ductoque circulo M P C, inveniatur arcus E O, major quàm E P, minor quàm ED, & commensurabilis ipsi FE, & quia EO minor est quam ED qui æqualis, est ipsi GF, abscindatur ex GF arcus EN, æqualis ipsi EO.



Demonstratio. Quia arcus E O, F N æquales sunt, & commensurabiles arcui intermedio F E, erit *(per primam partem hujus)* arcus qI, major quam KS, quod est absurdum, cum arcus KM positus fuerit æqualis arcui H I.



Si denique posito E F incommensurabili arcubus E D, G F, dicatur HI æqualis ipsi KL, dividantur GF, ED bifariam, ducanturque circuli per divisiones.

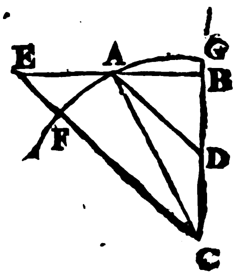
Demonstr. Cum arcus G M, M F sint æquales *(per 6. hujus)* erit arcus HP, major quàm PI, sicut etiam KO, major quàm OL, & PI, minor est, quàm dimidium arcus HI, sicut KO, major est quàm dimidium arcus KL, ponuntur enim arcus HI, KL, æquales, quare P I minor erit quàm K O; quod iam refutatum est secundâ parte.

COROLLARIUM.

Eadem methodo aliæ tres propositiones præcedentes probari possent in arcubus non continuis, quas Theodosius, tantum demonstravit in arcubus continuis.

LEMMA.

Si ab acuto angulo trianguli rectanguli linea ducatur ad latus oppositum, major erit ratio totius lateris ad partem qua est prope rectum angulum, quàm anguli ad angulum.



Sit triangulum rectangulum ABC, à cujus acuto angulo A, ducatur linea A D ad oppositum latus. Dico majorem esse rationem lateris B C ad segmentum DB, quàm anguli ADB, ad angulum ACB. Ducatur C E parallela lineæ A D, & ex puncto C ut centro, intervallo A C describatur circulus GAF, qui cum latus A C majus sit quàm CB, propter angulum B, rectum, secabit CB ultra B; & quia E C major est quàm C A, propter angulum obtusum EAC, secabit C E, inter C & E, scilicèt in puncto F.

Demonstr. Ut angulus FCA ad angulum ACG, ita sector FAC ad sectorem ACG, *(per ultimam 6.* sed triangulum ECA, majus est sectore FCA; ergo *(per 8. 5.)* major est ratio trianguli E C A ad sectorem A C G, & adhuc multò major ad triangulum A C B, quàm anguli E C A ad angulum A C B; & componendo major erit ratio totius trianguli ECB ad triangulum ACB, quàm anguli ECB, seu ADB, ad ACB; sed ut triangulum ad triangulum *(per 1. 6.)* ita basis BE ad basin AB; & cum AD, EC sint parallelæ, ut EB ad AB, ita *(per 4. 6.)* BC ad BD: ergo major erit ratio BC ad BD, quàm anguli ADB ad angulum ACD.

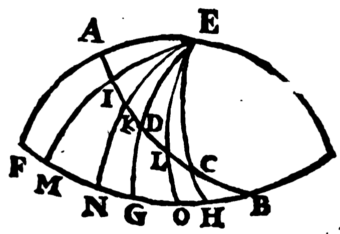
PROPOSITIO X.

Theorema.

Si in circulo maximo sumantur duo puncta ex eadem parte, per qua à puncto quod polus ejus non sit, ducantur maximi circuli, usque ad parallelorum maximum; ducatur item circulus ad ipsum rectus: major erit ratio arcuum maximi parallelorum, quàm arcuum circuli primi assumpti, incipiendo à circulo ad ipsum recto.

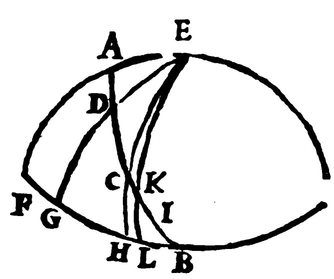
Sit maximus circulus AB, in quo sumantur duo puncta C & D, eâdem parte, tum per punctum E quod polus ejus non sit; ducatur maximus circulus EA, ad ipsum rectus, ducantur item maximi circuli EDG, ECH, terminati ad maximum parallelorum F B; dico esse majorem rationem arcus FG ad arcum CH, quàm arcus AD ad arcum DC. Vel enim arcus AD, DC sunt commensurabiles, vel incommensurabiles. Sint primò commensurabiles, inventâque

tâque communi mensurâ dividantur in I, K, & L, ducanturque circuli EIM, EKN, ELO.



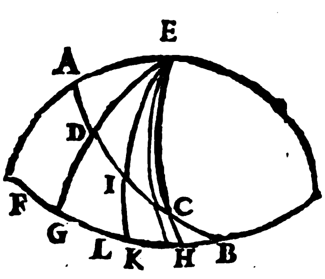
Demonstr. Cum arcus AI æqualis sit arcui IK, & F M major sit quàm arcus MN; major erit ratio (*per 6.defin.5.*) arcus FM ad MN, quàm AI ad IK; pariter major erit ratio MN, ad NG, quàm I K ad KD; & ita deinceps; ergo(*per 28.5.*)major erit ratio totius FG ad G H quàm totius A D ad DC.

Si verò arcus A D esset incommensurabilis cum DC; dico nihilominus majorem esse rationem arcus FG ad GH, quàm arcus A D ad D C. Si enim aliter se res habet erit ratio AD ad D C, aut æqualis rationi arcus FG, ad GH; aut major, ostendo primò non esse majorem rationem, sit enim si fieri potest major ratio AD ad D C, erit aliquis arcus major, quàm DC ad quem AC eandem rationem habebit, quàm habet FG ad GH. Sit ille arcus DI; inveniaturque (*per lemma proximè præcedens*) arcus DK commensurabilis cum AD,& medius inter DI, DC: ducaturque circulus maximus E K L.



Demonstr. Quoniam arcus AD, DK sunt commensurabiles, erit (*per primam partem huius propositionis*) major ratio FG ad GL, quàm AD ad DK; sed major est ratio (*per 8.5.*) FG ad GH; quàm F G ad GL: ergo major ratior FG ad GH quàm A D ad DK, ergo multò major erit ratio FG ad GH, quàm AD ad D I, contra id quod dictum fuerat, nempe dari posse aliquem arcum D I, majorem arcu D C, ad quem AD eandem rationem habeat quàm FG ad GH.

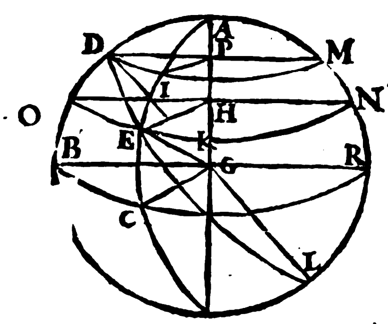
Denique sit si fieri potest eadem ratio arcus AD ad DC, quæ F G ad GH; dividatur arcus DC bifariam in I, ducaturque circulus EIK.



Demonstr. Quoniam arcus C I, I D sunt æquales, & continui (*per 6. huius*) erit. G K major quàm KH: ideoque GK,erit major dimidiò GH, sit GL dimidius arcus GH, major est ratio GK ad DI, quàm GL, ad DI, sed ut GL ad DI ita GH ad DC, & ex suppositione ita F G ad AD; ergo permutando major erit ratio GK ad FG, quàm DI ad A D, ideoque debebit dari arcus major quàm D I qui eandem rationem habeat ad AD, quàm GK ad FG; seu AD ad DI majorem habebit rationem quàm FG, ad GK, quod est contra id, quod est probatum secunda parte hujus.

PROPOSITIO XI.

Si in circumferentiâ maximi circuli sit polus parallelorum: quorum unum tangat alius circulus, & alium secet: ducatur item per sectionem, & per polum alius circulus, usque ad maximum parallelorum, major erit ratio diametri Sphæræ, ad diametrum paralleli qui tangitur, quàm circumferentia maximi parallelorum inter duos circulos per polum transeuntes intercepta, ad circumferentiam obliqui circuli inter duos parallelos interceptam.



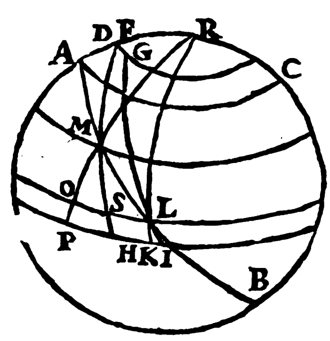
Sit polus A in circumferentia maximi circuli AB, sit item maximus circulus DEL, qui parallelum DM tangat in puncto D, secet vero parallelum E N in puncto E; per quod & per polum A ducatur circulus maximus AE, dico majorem esse rationem diametri Sphæræ BR, ad diametrum paralleli DM, quàm circumferentiæ BC ad circumferentiam DE. AG est communis sectio circulorum AEC & AB, ideoque (*per 15.1.huius*)transit per centra parallelorum, & recta est ad eorum plana; sunt igitur recti anguli in P, H, G; lineæ DM, ON, BR sunt diametri parallelorum, & DL diameter circuli obliqui, quia circuli maximi se bifariam secant; circulus DEL rectus est ad circulum AB, quia tangit circulum DM in puncto D; OEN, item rectus est, quare (*per 19.11.*) linea E I quæ vix apparet communis eorum sectio, recta est ad planum A B: eruntque anguli EIH, EIG recti; ducantur lineæ HE, CG, EG: & quia in triangulo I H G angulus I H G rectus est, & consequenter latus I G, majus quàm I H; abscindatur I K æqualis lateri IH, ducaturque linea EK.

Demonstr. Duo triangula EIH, EIK habentia commune latus EI, & latera IK, IH, æqualia,& angulos in I, rectos, (*per 4. 1.*) æqualia sunt,& habent angulos IHE,IKE,æquales; quia autem ab angulo E acuto, ducta est linea EK, ad latus IG, major erit ratio totius I G ad IK, quàm anguli IKE,seu IHE, ad EGI,(*per lemma superius.*)angulus autem EHI, æqualis est angulo BGC,cum arcus iis subtensi sint similes (*per 10.2.huius*) ergo minor est ratio anguli BGC, ad angulum DGE, hoc est arcus BC, ad arcum DE (sunt enim circuli æquales) quam lineæ GI ad IK, seu IH: ut autem GI ad IH ita D G, radius ad DP, aut tota DL, diameter Sphæræ, ad totam DM, ergo major est ratio diametri BR, ad DM, quàm arcus BC, ad arcum DE.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si circulus maximus tangens parallelum majorem quam sit ille, quem tangunt duo alij circuli maximi, illos secet inter parallelum maximum, & parallelum minorem: major erit ratio diametri Sphæræ ad diametrum paralleli illius maioris qui tangitur; quàm circumferentia maximi paralleli intercepta inter duos circulos tangentes ad circumferentiam circuli obliqui ab iis pariter interceptam.



Maximus circulus AB tangat parallelum AC, majorem quàm sit DG, qui tangatur à maximis circulis FH, GI, circulus autem AB secet circulos FH, GI, in punctis M & L, inter parallelum DG, & parallelum maximum PI: dico majorem esse rationem diametri Sphæræ, ad diametrum paralleli AC, quàm arcus HI ad arcum ML. Per polum R, & puncta A, M, L, describantur maximi circuli RA, RMP, RLK, & per L, parallelus LO.

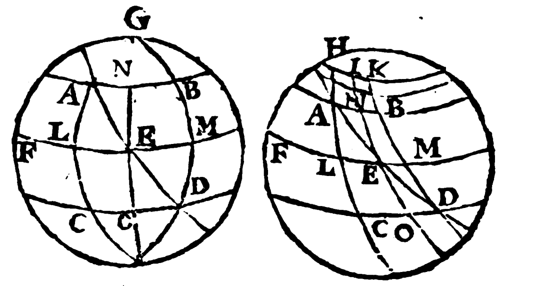
Demonstr. Major est ratio diametri Sphæræ ad diametrum AC, quàm arcus NP, ad arcum AM, (*per* 11. *huius*) sed (*per* 10. *huius*) est major ratio arcus NP ad PK, quam AM ad ML, & convertendo est major ratio NP ad AM, quàm PK, ad ML, ergo multo major erit ratio, diametri Sphæræ, ad diametrum AC, quàm PK ad ML; sed arcus HI, minor est arcu PK, nam OL & PK sunt similes (*per* 10. 2. *huius*) SL, & HI, sunt etiam similes (*per* 13. 2. *huius*) & OL, major est quàm SL; igitur & PK major erit quàm HI; ergo multo major erit ratio diametri Sphæræ ad diametrum AC quàm HI ad ML.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si duo paralleli secent eundem maximum circulum in duobus punctis utrinque æqualiter distantibus; ab interfectione maximi paralleli; & per hæc tria puncta ducantur tres maximi, aut per polum, aut tangentes eundem parallelum: illi in maximo parallelo arcus æquales intercipient.

Paralleli AB, CD secent maximum circulum AD, in punctis A & D æqualiter distantibus à maximo parallelo FE, hoc est sint arcus AE, ED, æquales: & per puncta A, E, D ducantur circuli maximi; aut per polum G transeuntes, aut tangentes eundem parallelum HK qui secent parallelum maximum in punctis L, E, M: dico arcus LE, EM æquales esse.

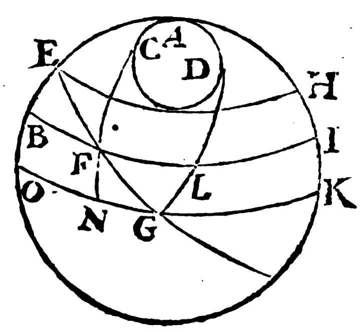


Demonstr. Quoniam arcus AE, ED sunt æquales erunt (*per* 17. 2. *huius*) paralleli AB, CD æquales, & (*per* 18. *eiusdem*) arcus LA, BM, DM, LC, EN, EO æquales; quare (*per* 3. *huius*) lineæ AN, OD æquales erunt; & consequenter arcus OD, AN æquales sunt; sed in prima figura (*per* 10. 2. *huius*) arcus OD, EM; item AN, LE, sunt similes: igitur LE, EM sunt similes, & cum sint ejusdem circuli, æquales erunt. In secunda verò figura, arcus AN, LE, item OD, EM (*per* 13. 2. *huius*) sunt similes; ergo arcus EM, LE æquales sunt.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si circulus maximus parallelum minorem tangat; & alius parallelum maiorem: illi intercipient in duobus aliis parallelis arcus dissimiles, quorum ille plures gradus continet, qui polo conspicuo, proprior est.



Circulus A B tangat in puncto A minorem parallelum ACD, sitque alius circulus maximus EFG, qui majorem circulum E H tangat, sintque paralleli BF, KG; dico arcus FI, GK esse dissimiles, ita ut FI qui propior est polo conspicuo plures gradus contineat. Per F, & G ducantur circuli maximi tangentes parallelum CD, ita ut semicirculi ABO, CF, item DLG, AIK conveniant tantum post alterutrius contactum, quemadmodum requisitum fuit in propositione decima tertia secundi hujus.

Demonstr. Arcus LI, GK (*per* 13. 2. *huius*) similes sunt: igitur F I plures gradus continet quam GK; vicissim BF, ON, sunt similes; igitur GO, (qui vergit ad alium polum conspicuum respectu illius hemisphærij) plures gradus continet quàm B F; quod erat demonstrandum.

TRACTATUS III.

DE SECTIONIBVS CONICIS.

APOLLONII *Conica omnia hôc tractatu complecti, itaque mollire ut Tyronum captum non superarent in animo fuerat. Re tamen diligentiùs perpensâ, cum in iis superflua deprehendissem quàm plurima, ab immensa rerum inutilium farragine hanc doctrinam expurgare, & selectis iis tantum, quæ ad sectionum conicarum naturam explicandam spectarent, parabolam, hyperbolam, & Ellypsin, independenter etiam à cono considerare decrevi. Quamvis enim Conicarum sectionum doctrinam eruditè, methodóque sublimi Apollonius tradiderit, summusque propterea Geometra ab omnibus jure habitus sit; minutias tamen omnes, & apices ita est prosecutus, ut tædio quod affert, multum de hujus doctrinæ dignitate detrahat.*

Neque verò in aliquibus tantum propositionibus hanc labem operi suo inussit; sed libros integros hoc vitio laborare deprehendet, qui in iis diligentiùs versatus fuerit. Enim verò qui in Geometricis propositionibus delectum nullum habuerit, utilesque ab inutilibus non separaverit; is jucundam alioquin, & utilem scientiam fœdissimè deturpabit; impossibilemque reddet. Inutilem autem voco cognitionem mathematicam, quæ aut ad usum communem hominum, aut ad effectus alicujus physici explicationem nihil conducit. In ea mente jam fueram cum cursum meum mathematicum concinnavi; & quia sectiones Conicas ad Catoptricam, & Dioptricam, immò & ad projectorum motum determinandum conferre judicabam; quantum ad hoc institutum sectiones Conicas etiam independenter à Cono consideravi, traditisque nonnullis earum descriptionibus, proprietates requisitas lineis ita descriptis inesse demonstravi. Id mihi tunc sufficere videbatur, ea ratione maximè persuasus; quod si omnia quæ de Conicis dici possent sine delectu colligerem, opus in ingentem pene molem excresceret, nam præter quatuor antiquos Apollonij libros, tres nuper in lucem editos videbam: Conica item Patris à S.Vincentio occurrebant in quibus plures quàm mille propositiones, utiliores multò, quàm pleræque quæ in Apollonio habentur; Alia multa opuscula de eadem materia proferebantur, ita ut de Conicis scribendi nullus finis, non magno tamen operæpretio videatur.

Quia tamen multos vidi qui in Conicis sectionibus aliquid latere reconditioris secreti existimarent, & in iis circuli quadraturam, duplicationem cubi, aliáque problemata diu expetita inesse suspicarentur, laborem etiam hunc suscipiendum existimavi, quem ut faciliorem reddam in quinque libros partior. Primus erit de parabola. Secundus de hyperbola. Tertius de Ellypsi. Quartus has figuras in Cono considerabit, & ex tribus consuetis eius sectionibus generari demonstrabit. Quintus Ellypsin in cylindro intuebitur.

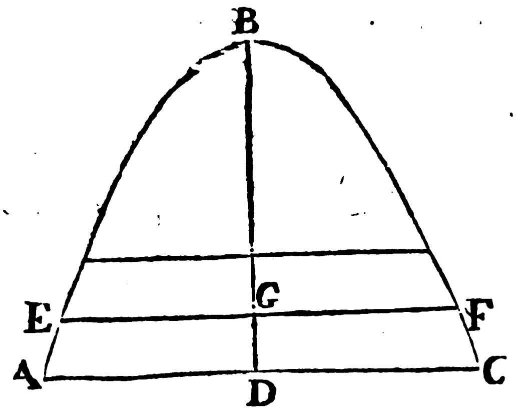
LIBER PRIMUS.

De Parabola.

DEFINITIONES.

Diameter figuræ curvilineæ in eodem plano descriptæ, est linea recta omnes eidem rectæ parallelas bifariam dividens. Ut si proponatur figura curvilinea peripheriâ contenta, in qua ducantur lineæ AC, EF, parallelæ, quas omnes linea BD bifariam dividat, erit BD diameter illius figuræ.

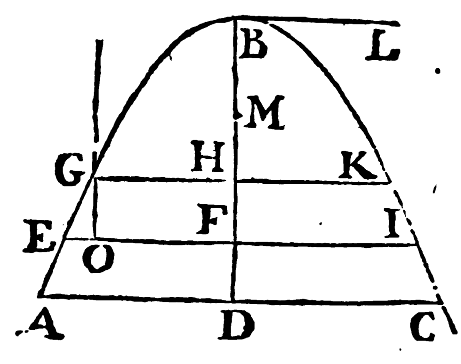
2. Ordinatìm applicata est una quælibet parallelarum à diametro bifariam divisarum, ut E F, A C est ordinatìm applicata. communiter tamen intelligitur eius dimidia pars, ut EG.



3. Axis est diameter ordinatìm applicata, bifariam, & perpendiculariter dividens; ut si linea BD non tantum bifariam dividat rectas lineæ AC parallelas, sed etiam ad angulos rectos, erit BD axis figuræ.

4. Vertex figuræ est extremitas axis, ut punctum B.

5. Sagitta est segmentum diametri, inter applicatam, & verticem interceptum, ut HB est sagitta applicatæ GH.



6. Parabola est figura cujus ordinatìm applicatarum quadrata, eamdem rationem habent, ac sagittæ. Proponatur figura, cujus diameter BD, ordinatim applicatæ AC, EI, GK, bifariam divisæ, sitque ut quadratum AD ad quadratum E F; ita sagitta B D ad sagittam FB, & ita de reliquis, sintque conjunctæ applicatarum extremitates lineâ curuâ; voco hanc figuram parabolam. In qua clarum est quod ipsæ applicatæ erunt in subduplicata ratione sagittarum, & sagittæ in duplicata ratione applicatarum; nam quadrata sunt in duplicata ratione laterum (*per* 2. 12.) & latera in subduplicata ratione quadratorum.

7. Latus rectum parameter, seu linea juxta quam mensurari possunt, est linea in extremitate diametri ad diametrum perpendiculariter ducta, quâ utimur tanquam mensurâ ad metiendum quadratum applicatarum; ut si linea BL sit perpendicularis ad diametrum BD, ostendamusque, quam rationem habeat quadratum cujuslibet applicatæ verbi gratia E F ad rectangulum comprehensum sub sagitta F B, & parametro B L; erit BL parameter figuræ.

8. Umbilicus seu focus parabolæ est punctum in axe, distans à vertice quarta parte lateris recti; ut si BD sit axis & BM sit quarta pars parametri B L, erit punctum M umbilicus, seu focus parabolæ; sic dictus quod peculiares habeat proprietates, præcipuè quod omnes radij axi paralleli in eo uniantur.

PROPOSITIO I.

Theorema.

In parabola tertia proportionalis sagitta, & applicata est parameter: suntque rectangula sub illa, & singulis sagittis comprehensa, æqualia quadratis applicatarum.

Sit parabola ABC sitque B L tertia proportionalis cuicumque sagittæ B D, & applicatæ AD, hoc est ita sit BD ad A D sicut A D ad BL; dico BL esse parametrum parabolæ, & insuper cæteras omnes ordinatas, esse mediàs proportionales inter suas sagittas, & B L; seu earum quadrata æqualia esse rectangulis comprehensis sub B L & suis sagittis.

Demonstr. Facta est AD media proportionalis inter DB, & BL; ergo quadratum ex AD æquale est rectangulo comprehenso sub BL, BD; sed ex definitione parabolæ quadratum AD ad quadratum E F se habet ut sagitta BD, ad sagittam B F, & sumptâ eadem altitudine BL (*per* 1.6.) ut rectangulum DBL ad rectangulum FBL, ergo ita est quadratum A D ad quadratum EF; ut rectangulum DBL ad rectangulum FBL; sed primum est æquale tertio, ergo & secundum quarto; idem demonstrabo de reliquis omnibus ordinatis.

COROLLARIUM I.

Clarum est ordinatas vertici propiores fieri minores; ut G H est minor quam E F, aut AD; cùm ejus quadratum sit minus; si ergo duceretur linea A G, hæc cum diametro BD concurreret extra sectionem.

COROLLARIUM II.

Si sagitta æqualis sit parametro, ejus ordinata eidem æqualis erit ut si sagitta B H, æqualis sit parametro B L ordinata G H eidem æqualis est; nam quadratum G H, æquale est rectangulo HBL, & cum lineæ HB, BL supponantur æquales, rectangulum illud erit quadratum lineæ B L, aut B H; sunt ergo tres lineæ GH, HB, BL æquales.

COROLLARIUM III.

Si sagitta minor fuerit parametro, ordinata eodem minor erit: est enim ordinata media proportionalis inter sagittam, & parametrum; ergo minor est parametro; pariter si major fuerit sagitta parametro, eâ & ordinata major erit.

COROLLARIUM IV.

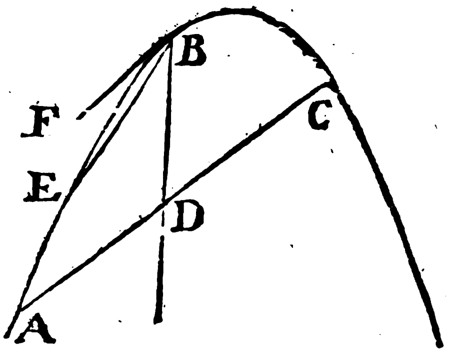
Omnis parallela diametro in uno tantum puncto punɗo parabolam ſecat, ut GO quia applicatæ ſupra GH, minores illâ erunt; ergo æquales extra parabolam cadent & infra GO majores ſunt.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si per extremitatem diametri ducatur linea ordinatim applicatis parallela: hæc erit tangens.

Sit parabola ABC cujus diameter BD ordinatim applicata AC, cui ſit parallela BF, dico illam eſſe tangentem. Si enim non ſit tangens, intra ſectionem cadat qualis eſt E B,



Demonſtr. Cum E B ſit parallela ordinatis, & intra ſectionem, (*per defin. diametri*) à diametro B D bifariam dividetur, ergo vel non eſt parallela, vel non pertingit ad punctum B extremitatem diametri.

COROLLARIUM I.

Linea intra ſectionem parallela tangenti bifariam dividitur à diametro, per punctum tactus tranſeunte. Si enim ſit parallela tangenti, erit parallela reliquis ordinatis: ergo ex definitione diametri, bifariam dividetur.

COROLLARIUM II.

Linea parallela ordinatis, aut tangenti, per aliquod punctum diametri ducta, bifariam dividitur, ſectionemque attingit in duobus punctis; id etiam ſequitur ex definitione diametri.

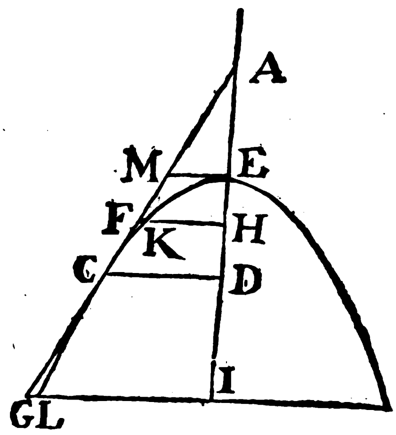
PROPOSITIO III.

Theorema.

Linea abſcindens in diametro productâ, ſegmentum ſagittæ æquale, tangit parabolam.

Ex aliquo punɗo C peripheriæ parabolæ ducatur linea AC. ductâque ordinata C D, ſint DE, EA æquales; dico lineam AC tangere parabolam in punɗo C, ita ut lineæ AC quodcumque aliud punctum F aut G ſit extra parabolam. Supponantur ex F, & G ductæ parallelæ lineæ C D, nempe FH, GI, oſtendo eas eſſe majores applicatis HK, IL.

Demonſtr. Quadratum CD ad quadratum FH, ſe habet ut quadratum D A ad quadratum HA, ſeu ut quadratum E D, quarta pars quadrati DA, ad quartam partem quadrati HA; ſed rectangulum H E A minus eſt quarta parte quadrati HA, (*per* 7.2.) ergo major eſt ratio quadrati E D ad rectangulum HEA, ſeu lineæ DE ad HE: cum ſit eadem altitudo EA, quam quadrati C D, ad quadratum FH; ſed ut DE ad HE, ita ex definitione parabolæ quadratum C D ad quadratum applicatæ KH; ergo quadratum C D ad quadratum KH majorem habet rationem quam ad quadratum FH; ergo FH major eſt quam KH, & punctum F lineæ CA eſt extra parabolam; idem & eôdem modô oſtendam de punɗo G & quocumque alio, excepto punɗo C; ergo linea ACG eſt tangens; quod erat oſtendendum.



COROLLARIUM I.

Sequitur tangentem illam in unico tantum punɗo tangere parabolam; cum reliqua omnia puncta ſint extra.

COROLLARIUM II.

Si per E ducatur tangens ME, hæc erit dimidia ordinatæ C D, ejuſque quadratum erit quarta pars rectanguli comprehenſi ſub DE, aut AE, & parametro. Eſt enim quarta pars quadrati CD, item tangens AC dividitur bifariam in M.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Tangens parabolam abſcindit in diametro lineam ſagittæ æqualem.

Linea A C parabolam tangat in C, & ordinatim applicetur CD; dico DE, EA eſſe æquales, ſi enim non ſunt, æquales ſint HE, EA, & ordinatim applicetur KH intelligatur A K, hæc tangens eſſet, & producta lineam AF ſecaret: ergo duæ lineæ rectæ ſpatium clauderent.

Idem inconveniens ſequitur ſi AE, EI dicantur æquales, ducta enim AL eſſet tangens; & cum jam A C ſupponatur tangens, producta ſecaret tangentem AL.

COROLLARIUM.

Ex eodem punɗo A duæ tangentes duci non poſſunt. Sicut neque ex eodem punɗo C.

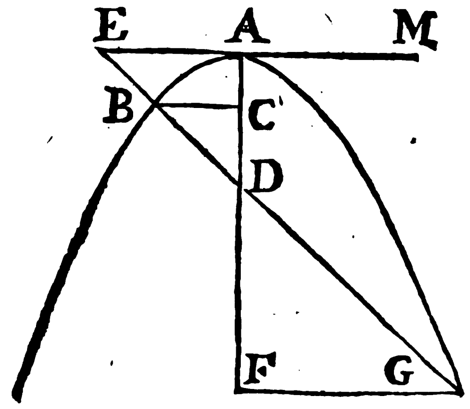
PROPOSITIO V.

Theorema.

Linea diametrum Parabolæ ſecans, producta utrinque parabolam ſecat.

Linea DE ſecet AF diametrum parabolæ, dico quod

quod producta parabolam utrinque secabit. Intelligatur per punctum A ordinatim applicata parallela nempe A E, si hæc linea secans diametrum illi est parallela, (*per cor. 1. 2.*) bifariam à diametro dividetur & parabolam in duobus punctis secabit.



Si verò linea proposita DB, tangenti AE parallela non fuerit; cum ea conveniet in puncto E, ergo priùs sectionem secabit, in puncto B, ducatur ordinata BC, sitque AM parameter, fiatque ut AC ad AD, ita AD ad AF; & ordinata F G cum BD conveniat in G; dico punctum G esse in sectione; atque adeò lineam BD convenire cum parabola in puncto G.

Demonstr. Cum ita facta sit AC ad totam AD, ut AD ad totam AF, ita erit reliqua CD ad DF, ut AD ad AF: & cum triangula BCD, FDG sint similia, ita erit BC ad FG sicut CD ad FD: ergo & ut AD ad AF: quadrata autem BC, FG sunt in duplicata ratione BC ad FG; ergo & in duplicata AD ad AF; hæc autem duplicata est ut AC ad AF, cum tres lineæ AC, AD, A F sint continuè proportionales: ergo quadratum B C ad quadratum FG, erit ut sagitta AC ad sagittam AE: ergo (*per defin. parabola*) punctum G ad parabolam pertinet, quod erat demonstrandum.

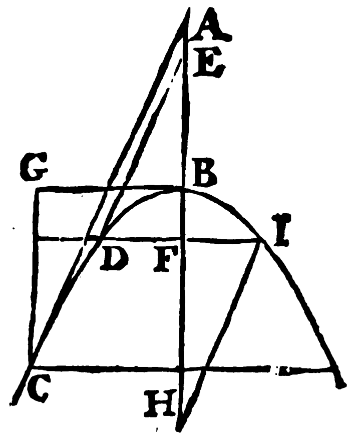
PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si ex quocumque puncto parabolæ, ducantur parallela tangenti, & ordinata in puncto contactus; erit triangulum ab his parallelis, & diametro factum, æquale rectangulo comprehenso sub applicata, & sagitta.

Sit A C tangens parabolam in puncto C, per quod ducatur ordinata CH, & ex quocumque parabolæ puncto D, ducantur D E, D F, parallelæ tangenti, & ordinatæ: dico triangulum DEF his parallelis, & diametro comprehensum, æquale esse rectangulo F G, comprehenso sub sagitta F B, & sub BG, seu ordinata CH.

Demonstr. Sunt (*per 3.*) AB, BH æquales, & AH, dupla BH; ergo (*per 35. 1. Eucl.*) triangulum ACH rectangulo HG est æquale. Item *per defin. parabola*, ita est quadratum C H ad quadratum D F ut H B ad F B, seu (*per 1. 6.*) ut rectangulum H G ad rectangulum F G, sed ut quadratum C H ad quadratum D F; ita triangulum A C H ad simile triangulum E D F; ergo ita est rectangulum H G ad rectangulum F G; sicut triangulum A C H ad triangulum E D F; sed primum est æquale tertio: ergo secundum quarto, nempe rectangulum F G, triangulo E D F, quod erat demonstrandum.

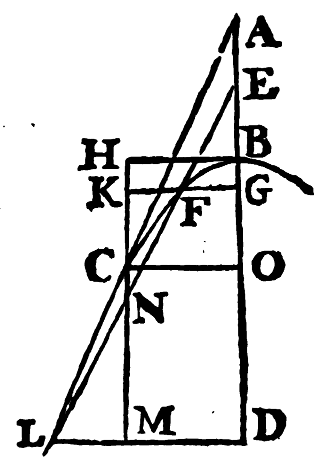


PROPOSITIO VII.

Theorema.

In parabola, linea diametro parallela diameter est, secatque bifariam lineas tangenti parallelas.

Linea CM sit diametro BD parallela; dico CM esse diametrum & secare bifariam omnes lineas tangenti A C parallelas, hoc est ductâ L F, tangenti AC parallelâ, dico lineas LN, NF esse æquales, quod probavero si ostendero triangula similia LNM, KNF esse æqualia.



Demonstratio. (*per præcedentem*) rectangulum GH, triangulo EGF æquale est. Item est quadratum L D ad quadratum FG (*per defin. parabola*) ut D B ad G B; seu ut rectangulum DH ad rectangulum G H. Ut autem quadratum L D ad quadratum F G; ita triangulum L E D ad triangulum EFG, cum sint pariter similes figuræ: ergo ut triangulum L E D ad triangulum E F G ita rectang. D H ad rectangulum GH; sed secundum est æquale quarto, ergo primum tertio æquale erit, nempe triangulum LED, rectangulo DH, & ablatis æqualibus triangulo E F G, & rectangulo G H; restat rectangulum D K, æquale trapezio GFLD; & ablato communi G F N M D, restant triangula æqualia LNM, KNF esse æqualia; quod demonstrandum erat.

Notan

Notandum autem licet locutus sim de rectangulis, tam benè procedere demonstrationem, licet pro rectangulis, parallelogramma posuissem.

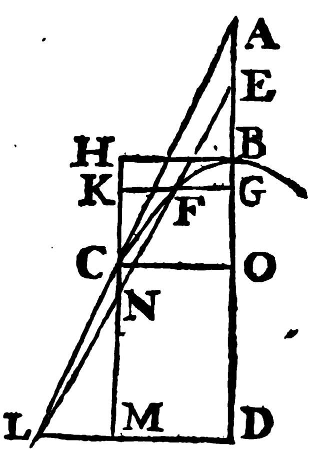
COROLLARIUM.

Sequitur per omne punctum etiam intra parabolam assumptum, duci posse diametrum, quia duci potest parallela diametro.

PROPOSITIO VIII.

In Parabola omnes diametri sunt axi parallelæ.

Sit in parabola axis A D, sitque HM diameter quæcumque, dico H M axi A D esse parallelam. Intelligatur per punctum C tangens C A, item per punctum B, tangens BH, quæ cum sit parallela ordinatis quæ perpendiculares sunt, & ipsa perpendicularis erit. Sit quæcumque LF parallela tangenti CA, & per punctum F. Agatur perpendicularis KFG, item LMD.



Demonstratio. Cum L F sit parallela tangenti C A; & C N sit diameter, erit LF ordinata *(per cor.1.2.)* & bifariam divisa in N. Quod si C N non sit parallela axi AD, ducatur per punctum C alia quæcumque parallela axi, hæc divideret bifariam lineam L F, in alio utique puncto quàm N, quod est absurdum; igitur alia parallela duci non potest, quàm CN; ergo CN parallela est, quod erat demonstrandum.

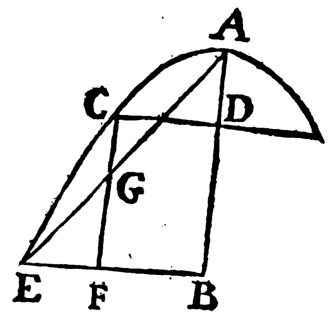
PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si in axe, & alià diametro abscindantur æquales sagittæ, & ordinatim applicentur; quæ ad axem applicabitur, minor erit.

Sit axis A B parabolæ. Dico quod si in eo abscindatur quæcumque sagitta, & in alia diametro æqualis abscindatur, & per utramque applicata ducatur, quæ ad axem applicabitur minor erit. Sit enim diameter quæ debeat per punctum C transire; ducatur applicata CD, fiatque AB quadrupla ipsius AD, & ducatur perpendicularis BE, quæ dividatur bifariam in F; jungaturque FC, ducaturque A E.

Demonstratio. A B facta est quadrupla A D, ergo (*per definitionem parabolæ*) quadratum E B, quadruplum est quadrati C D, & quadratum F B



æquale est quadrato C D, ergo F B, C D sunt æquales, sed sunt etiam parallelæ, ergo CF & A B sunt parallelæ; ergo CF (*per* 8.) est diameter, & E G applicata major est quam E F, seu FB, aut CD. Ostendo autem C G, AD esse æquales, est enim A B quadrupla AD, & dupla GF, cum ita sit EF ad EB; sicut FG ad AB, quare restabunt AD, CG esse æquales, quod erat propositum.

Cum autem se habeant singula quadrata applicatarum ad eamdem diametrum sicut sagittæ, semper quadrata applicatarum ad axem erunt minora, quam applicatarum ad quamcumque aliam diametrum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Latus Rectum axis minimum est.

Sit axis parabolæ AB, & quæcumque alia diameter C F; dico latus rectum axis, ~~nempe quo~~ utimur ad metienda quadrata applicatarum ad axem, minus esse latere recto diametri C F. Sint enim duæ sagittæ æquales AD, CG, & applicatæ EG, C D, quadratum CD (*per* 1.) æquale est rectangulo sub sagitta AD & parametro axis. Pariter quadratum EG, æquale est rectangulo sub CG, & parametro diametri CF; sed quadratum E G, majus est quadrato C D (*per præcedentem*) ergo rectangulum sub CG: & parametro diametri CF, majus est rectangulo sub AD, & parametro axis, & cum AD, CG sint æquales (*per* 1. 6.) erit parameter diametri C F, major parametro axis; quod erat demonstrandum.

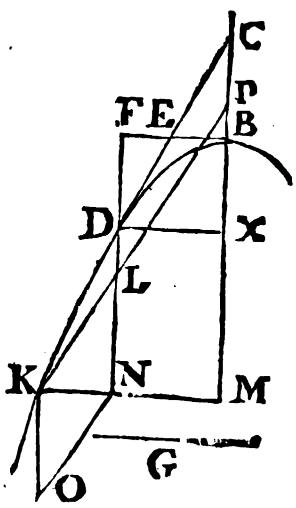
PROPOSITIO XI.

Theorema.

Tertia proportionalis quadruplæ sagittæ, & duplæ tangenti, est parameter diametri per contactum ductæ.

Linea CD tangat parabolam in puncto D, ducatur

ducatur diameter F D N, sitque alia quæcumque diameter C M, ad quam sit applicata D X, & sit sagitta X B, eruntque X B, BC æquales (*per* 3.) quæratur tertia proportionalis duplæ X C, & duplæ D C, sitque G. Dico lineam G esse parametrum diametri DN, hoc est quadratum KL æquale esse rectangulo comprehenso sub DL & G.



Demonstratio. (*Per* 3.) lineæ CB, BX seu FD, sunt æquales & consequenter similia triangula BEC, FED æqualia sunt; addatur communis figura DEBMND, fiet parallelogrammum F M, seu (*per* 6.) triangulũ PKM, æquale figuræ DCMND, & auferendo quod commune est, restat triangulum L K N, æquale parallelogrammo DCPL, & cum habeant angulum in L æqualem; rectangulum KLNO erit duplum parallelogrammi DLPC, & æquale parallelogrammo sub D L, & dupla DC. Fecimus autem ut quadrupla B X aut F D ad duplam DC, seu quadruplam DE, hoc est ut D F ad DE; aut L N ad K L propter similitudinem triangulorum, ita dupla ad DC ad G; erit ergo permutando ut LK ad LN, ita G ad duplam DC, & sumptâ eadem altitudine L K; ut quadratum LK ad rectangulum KLN; ita rectangulum sub G, & DL ad rectangulum sub dupla D C & DL, sed secundum & quartum sunt æqualia; ergo quadratum K L æquale est rectangulo sub sagitta DL & G; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

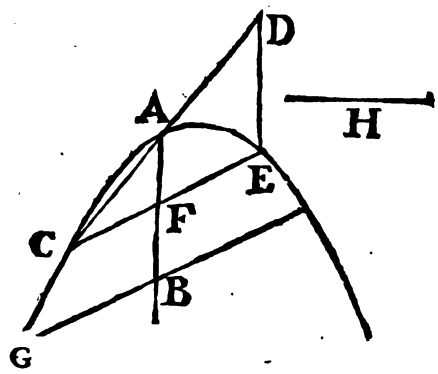
Ad datam parabolæ diametrum, ex dato puncto lineam ordinatim applicare: item lineam datæ æqualem.

Sit parabolæ data diameter A B ad quam ex puncto C ordinatim applicanda sit. Ducatur linea CA, quæ producatur, ita ut fiant C A, A D æquales, sitque D E parallela A B; dico CE, esse ordinatim applicatam.

Demonstratio. (*Per* 3. 6.) ita est CA ad A D; sicut C F ad F E; sed C A & AD sunt æquales: ergo & C F, F E.

Si punctum datum fuerit in diametro ut B. Primò ex puncto C in peripheria ordinatim applicetur C E, cui per punctum B, aut etiam aliud quodcumque datum ducatur B G, parallela C F.

Denique si linea ordinatim applicanda debeat esse æqualis lineæ H applicata CF, fiatque ut quadratum CF ad quadratum H, ita AF ad A B, & per B ducatur B G parallela C F; dico B G, esse ordinatim applicatam, & æqualem lineæ H; cum ad ejus quadratum se habeat quadratum CF; ut AF ad AB.

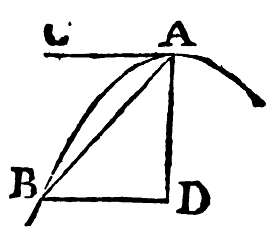


PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Linea dividens angulum tangentis, & diametri bifariam, secat parabolam in puncto per quod applicatur æqualis lateri recto.

Linea A B dividat bifariam angulum C A D, tangentis cum diametro AD: dico applicatam BD, æqualem esse lateri recto.



Demonstratio. Tangens AC est parallela applicatæ BD, (*per* 2.) ergo anguli alterni CAB, ABD sunt æquales, & (*per* 5. 1. *Eucl.*) lineæ B D, A D æquales sunt. Sed latus rectum est tertium proportionale lineis AD, BD, tertium autem proportionale æqualibus, æquale est: ergo lineæ B D, & A D singulæ sunt æquales lateri recto; quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Invenire latus rectum.

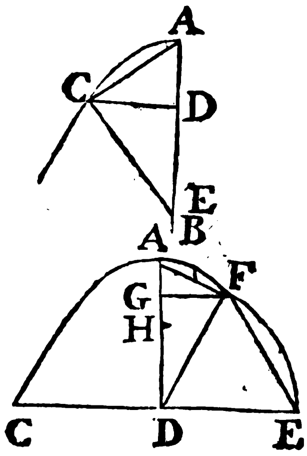
Sit quæcumque diameter AB; ad eam applicetur ordinata C D ad rectos; ducaturque A C, ad quam sit perpendicularis C E: dico D E esse latus rectum.

Demonstratio. Cum angulus A C E rectus sit, erit C D media proportionalis inter AD, & DE; ergo quadratum CD, æquale est rectangulo sub AD, DE, ergo DE est latus rectum.

Aliter fiat A D axis quæ major sit latere recto, per punctum C applicetur ordinatim CE, tum ex D ut centro, intervallo D E, fiat arcus E F secans parabolam in F, & applicetur ordinatim FG, dico GD æqualem esse lateri recto.

Demonstr-

Demonstr. Quadratum DE, seu FD, se habet ad quadratum F G, ut A D ad A G, & sumptâ eâdem altitudine DG, ut rectangulum A D G ad



rectangulum AGD, sed (*per* 47. 1.) quadratum DF æquale est quadratis GF, GD; ergo quadrata GF, GD simul ad quadratum GF, se habent ut rectangulum ADG ad rectangulum AGD, & dividendo erit quadratum G D ad G F ut quadratum GD ad rectangulum A G D; quare quadratum GF æquale est rectangulo AGD. Ergo G D est latus rectum.

Potest item inveniri punctum F, si divisâ A D bifariam in H, describeretur semicirculus, fieret angulus A F D rectus, quia esset in semicirculo: ergo per primam partem hujus, esset G D latus rectum.

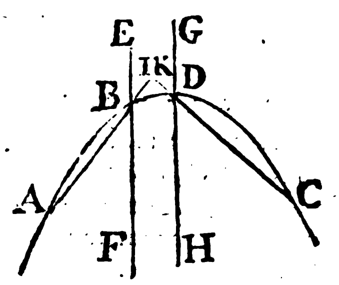
Facto igitur in F angulo recto, inventoque puncto D, erunt DF, FE æquales.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si parabolam duæ lineæ ita secent, ut puncta sectionum unius, non contineantur intra puncta alterius; hæ lineæ extra parabolam convenient.

Lineæ AB, CD, parabolam ABCD singulæ in duobus punctis secent, ita ut puncta sectionum



unius non contineantur intra puncta sectionum alterius; dico has lineas extra sectionem concurrere. Ducantur per puncta B & D duæ diametri EF, GH, quæ (*per* 8.) sunt inter se parallelæ, & sectionem singulæ in uno tantum puncto secabunt, & intelligatur ducta BD.

Demonstratio. Anguli EBD, GDB sunt duobus rectis æquales (*per* 30. 1. *Eucl.*) ergo anguli IBD, KDB sunt duobus rectis minores: ergo concurrunt hæ lineæ.

PROPOSITIO XVI.

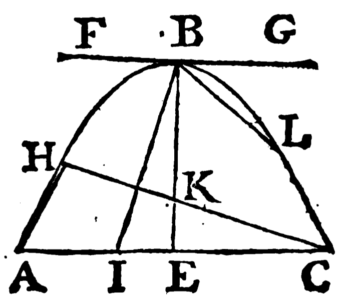
Theorema.

Si Parabolæ diameter lineam quampiam bifariam dividat, quæ per ejus extremitatem ducitur tangens, illi est parallela, & vicissim quæ illi est parallela, sectionem tangit.

Sit parabola ABC cujus diameter BE dividat bifariam lineam AC in puncto E, dico tangentem F B G, ductam per extremitatem diametri esse parallelam lineæ A C. Si enim non est parallela, ducatur per C parallela tangenti quæ sit C H.

Demonstr. (*Per* 7.) diameter BE dividit bifariam in K lineam HC, sed supponebatur AC divisa bifariam in E: ergo ita est CK ad C H, ut C E ad C A: ergo (*per* 4. 6.) A H, E K sunt parallelæ (*contra coroll.* 1. *primæ hujus.*)

Vicissim dico parallelam lineæ AC per extremitatem diametri ductam, esse tangentem, si enim



non sit tangens, parabolam secabit in duobus punctis qualis est B L, ergo (*per* 15. *hujus*) cum AC conveniet.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Linea per contactum ducta bifariam dividens parallelam tangenti, diameter est.

Parabolam A B C tangat recta linea FBG, & parallelam AC, dividat bifariam in E, linea BE; dico eam esse diametrum.

Demonstr. Si BE non est diameter, sit BI, quæ per præcedentem dividet bifariam lineam AC, in puncto I, quod est absurdum, cùm jam supponatur divisa bifariam in E: ergo alia diameter duci non potest quam BE.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

In Parabola, linea duas parallelas bifariam dividens est diameter.

Sint in parabola duæ lineæ parallelæ AB, CD, quas linea FE bifariam secet in E & F; dico lineam FE esse diametrum. Si enim non sit ducatur per F diameter F G.

 Demonstr.

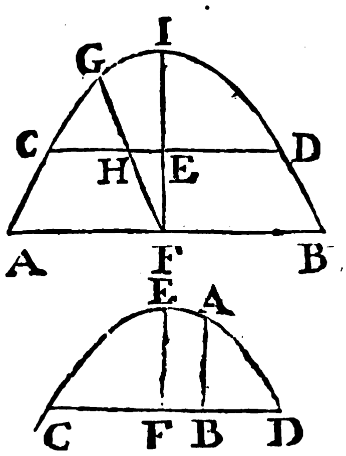
Demonstr. (*Per* 16.) tangens per punctum G ducta, erit parallela lineæ A B, ergo & parallela lineæ C D : ergo (*per* 17.) CD erit bifariam divisa in H, quod est absurdum cum jam supponatur bifariam divisa in E.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Data in parabola linea diametrum ducere, Item per quodcumque punctum.

Sit data in parabola, Linea AB, cujus diame-



ter ducenda est. Illi ducatur parallela C D, & utraque dividatur bifariam in F & E, clarum est *per superiorem* lineam F E esse diametrum lineæ A B.

Si per punctum C ducenda sit diameter, quæratur quæcumque diameter FE, cui per punctum C ducatur parallela, hæc etiam erit diameter per punctum C ducta.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Data parabola axem ducere.

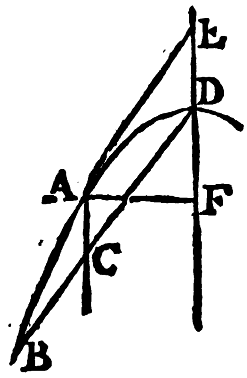
Inveniatur (*per præcedentem*) quæcumque diameter AB, ad quam ducatur perpendicularis CD, quæ dividatur bifariam. Si punctum medium coincidit cum B, linea A B erit axis cum illi conveniat definitio. Si autem non coincidit cum B, sit punctum F ; ducatur F E, parallela A B : dico E F esse axem, cum illi conveniat definitio, dividatque bifariam lineas ad ipsum perpendiculares.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Per datum quodcumque punctum tangentem ducere.

Sit datum primò in circumferentia punctum A per quod ducenda est tangens : per punctum A ducatur (*per* 19.) diameter AC, cui sit ordinatim applicata BD (*per* 11.) huic ducatur parallela AE, clarum est (*per* 16. AE tangentem esse. Vel ducatur quæcumque diameter E F, ad quam ex puncto A ducatur ordinatim applicata A F, fiantque FD, D E æquales; clarum est (*per* 4.) A E tangentem esse.



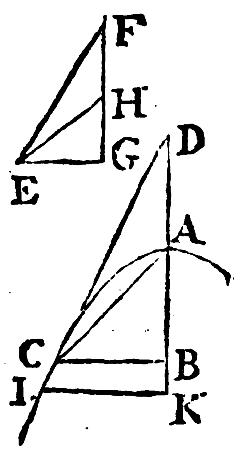
Sit propositum punctum E, ex quo ducenda est tangens. Primò per punctum E ducatur quæcumque diameter E D, sintque E D, DF æquales, & per punctum F ordinatim applicetur FA; dico lineam EA tangentem esse.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

In parabola tangentem ducere, quæ cum axe determinatum angulum comprehendat.

Sit parabola in qua ducenda est tangens, quæ cum axe A B angulum comprehendat æqualem angulo E F G. Ex quocumque puncto E ad F G :



ducatur perpendicularis EG, dividatur F G, bifariam in H ; ducaturque EH, tum angulo FHE fiat æqualis angulus D A C, ducaturque CB perpendicularis, sintque A B, A D æquales : dico lineam DC esse tangentem, & angulum C D A æqualem esse angulo F.

Demonstr. Triangula HEG, ACB sunt æquiangula ut patet; ergo (*per* 4.6.) ita erit EG ad GH; ut CB ad BA, & consequenter ita EG ad GF, duplam HG, ut CB ad BD. Quare (*per* 5. 6.) æquiangula sunt triangula EFG, CBD : ergo anguli D & F sunt æquales.

Et cum omnes diametri sint parallelæ faciet æqualem angulum cum omnibus parallelis.

Poterat hæc propositio fieri universalior, si nempe proponeretur pro axe quælibet diameter AB ad quam ordinatim applicanda esset IK, tum angulo A K I fieret æqualis H G E, cætera essent similia.

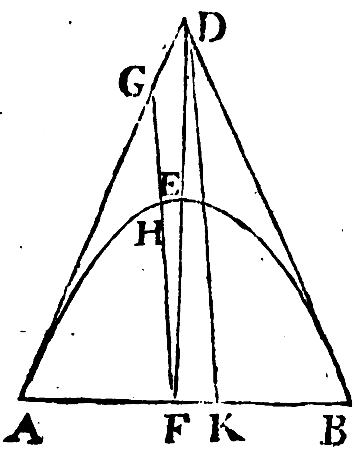
PROPO

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Tangentes ducta per extrema applicatæ, In eodem puncto illius diametrum secant.

Sint duæ tangentes AD, BD ductæ per extremitates ordinatim applicatæ A B; dico eas concurrere in eodem puncto D diametri DF.



Demonstr. Cum AD sit tangens (*per 4. huius*) erit punctum D concursus, ita ut EF, ED sint æquales; idem dicendum de linea D B: ergo conveniunt in puncto D; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si duæ tangentes conveniant, & à concursu ducta, dividat bifariam conjungentem contactus; hæc diameter erit.

Duæ lineæ AD, BD parabolam tangentes concurrant in puncto D, & linea D F dividat A B conjungentem contactus, bifariam in puncto F; dico FD diametrum esse. Si enim D F non sit diameter, sit GF, & AB quæ est bifariam divisa, erit ejus ordinata, & cum AG sit tangens, erunt (*per* 4.) HF, HG æquales, quod si duceretur GB, (*per eandem*) esset tangens, ergo DB non esset tangens contra suppositionem.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si tangentes conveniunt: diameter per concursum ducta bifariam dividit conjungentem puncta contactuum.

Tangentes parabolam conveniant in puncto D, sitque diameter D F: & linea conjungens contactus sit AB; dico AB divisam esse bifariam in F, si enim non sit divisa bifariam in F, dividatur bifariam in K, ducaturque DK.

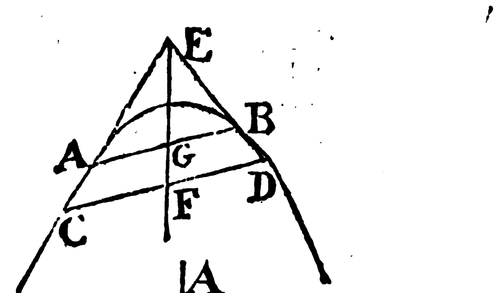
Demonstratio. Linea DK, (*per 24.*) esset diameter; ergo & parallela diametro D F, quod est absurdum cum in puncto D conveniant.

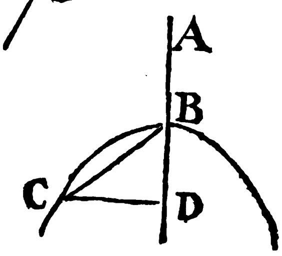
PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Conjungentes extrema applicatarum diametrum in eodem puncto secant & quæ à concursu ducta unam bifariam dividit est diameter.

Sint duæ quævis ordinatæ A B, C D quarum extrema conjungant duæ lineæ C A, DB, quæ (*per coroll. 1.*) cum diametro E F convenient dico illas convenire in eodem puncto E diametri.





Demonstratio Cum EF sit ordinatarum diameter, erunt divisæ bifariam in G & F, eritque ut CF ad A G, ita F D ad GB: sed ut CF ad AG; ita C E ad AE; & FE ad G E, & pariter ut FD ad G B, ita DE ad B E, & FE ad G E; ergo punctum E, est concursus trium linearum C A, F G, D B.

Secundam partem hujus propositionis facile eâdem methodo demonstrare possumus, nempe si ex concursu E; ducatur linea bifariam dividens unam parallelarum, dividere & aliam & esse diametrum.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si in axe producto sumatur latus rectum, quæcumque chorda per verticem ducta est media proportionalis inter sagittam, & compositam ex sagitta, & latere recto.

Sit A B latus rectum sumptum in axe, sitque chorda quæcumque B C, per verticem transiens, & ducatur ordinata C D, dico C B esse mediam proportionalem inter AD & DB, seu quod idem est quadratum C B esse æquale rectangulo A D B.

Demonstratio. Quadratum B C (*per 47. 1.*) æquale est quadratis D B & C D, pro hoc ultimo substitue rectangulum B D A, illi æquali (*per 1.*) erit quadratum BC, æquale rectangulo DBA, & quadrato B D, quæ duo efficiunt rectangulum

ADB (*per* 3. 2.) ergo quadratum B C, rectangulo ADB æquale est; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

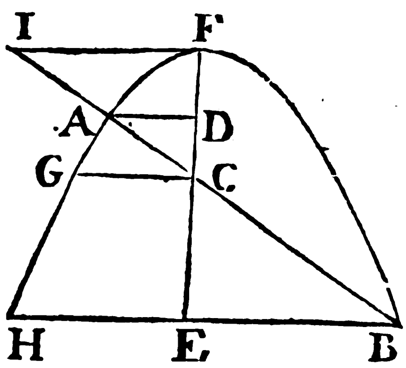
Hæc propositio potest esse utilis ad descriptionem parabolæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si diametrum secet utcumque linea per cujus extrema ducantur ordinatæ, secabitur diameter in tres continuè proportionales, & applicatæ erunt continuè proportionales.

Ducatur linea AB secans utcumque diametrum in puncto C, & per puncta A, & B ducantur applicatæ AD, BE: dico lineas FD, F C esse continuè proportionales. Item AD, GC, HE esse continuè proportionales. Ducatur tangens I F.



Demonstr. (*Per primam hujus*) ratio FE ad FD est sicut quadrati B E ad quadratum A D hoc est duplicata lineæ E B ad lineam A D, seu duplicata lineæ EC ad CD. Tota ergo EF ad segmentum DF est ut quadratum E C ad quadratum C D. Ponatur verum esse quod quæritur, hoc est FC mediam esse proportionalem inter FD, & FE. Quia ita est tota FE ad ablatam F C sicut tota FC ad ablatam FD, erit & reliqua C E ad reliquam C D ut tota FE ad totam FC; & cum FE ad FD sit in duplicata ratione FE ad FC, erit etiam in duplicata ratione CE ad CD, seu EB ad AD.

Hæc consideratio utilis est ad inveniendum punctum B in quo linea AC secat parabolam.

Secunda pars probatur nempe A D, G C, HE esse continuè proportionales, quæ sunt enim in subduplicata ratione continuè proportionalium, sunt etiam continuè proportionales. Sed HE, GC, AD (*per primam hujus*) sunt in subduplicata ratione sagittarum: ergo & continuè proportionales sunt.

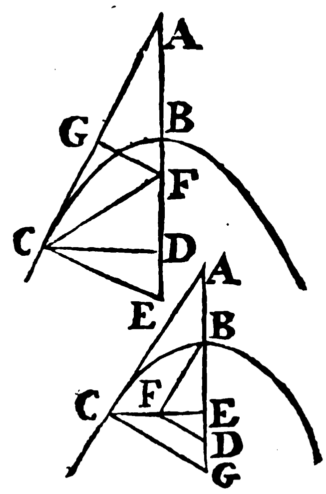
PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Parabolæ umbilicum reperire.

Primò umbilici inventio facilis est. Cum enim ex definitione umbilicus distet à vertice parabolæ quarta parte lateris recti, dederimusque suprà plurimas methodos inveniendi lateris recti. Consequenter, facile umbilicum cujuscumque parabolæ assignabimus.

Proponatur parabola BC cujus axis AE; sitque tangens A C ad quam sit perpendicularis CE, dividatur AE bifariam in F; dico punctum F esse umbilicum, & DF mediam partem lateris recti.



Demonstratio. Cum angulus A C E sit rectus, erit C D media proportionalis inter A D & D E, ergo ejus quadratum æquale est rectangulo sub AD, DE, (*per* 1.) idem quadratum C D, æquale est rectangulo sub B D, & latere recto & rectangulum sub BD, & latere recto æquale rectangulo sub AD, DE, & *per* 14. 6.) AD, BD, & latus rectum, & DE sunt proportionales, sed AD est dupla ipsius D B; ergo latus rectum duplum est lineæ D E.

Secundò, quia AE divisa est bifariam in F, ita erit A E ad AF sicut ablata A D ad ablatam A B; ergo reliqua D E ad reliquam B F est ut tota ad totam, nempe ut AE ad AF, nempe dupla; ergo BF est media pars ipsius DE.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si fiat angulus ad contactum æqualis angulo tangentis cum axe, habebitur focus; vicißim si linea à foco ad tactum, æqualis est lineæ interceptæ inter focum & concursum tangentis cum axe.

Fiat in eadem figura angulus ACF æqualis angulo CAF, dico punctum F esse umbilicum. Ducatur ad AC perpendicularis CE.

Demonstr. Cum anguli CAF, ACF sint æquales, erunt lineæ AF, FC æquales, ideoque semicirculus ductus ex F, ut centro, intervallo FC, transit per C, & cum angulus A C E sit rectus, transit etiam per E; & AE divisa est bifariam in F; ergo F focus est. quod erat primum.

Secundò F supponatur focus. Cum angulus ACE sit rectus, & AE divisa bifariam in F, si describatur semicirculus, hic necessario transit per C; ergo lineæ F A, F C sunt æquales.

COROLLARIUM I.

Anguli item FAC, ACF sunt æquales (*per* 5. 1.)

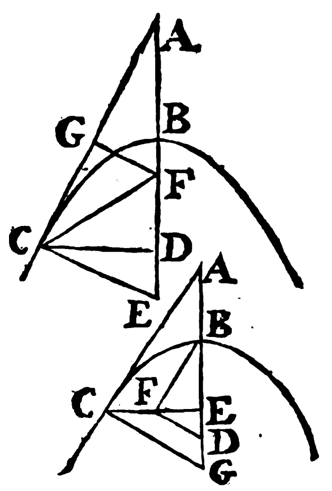
COROLLARIUM II.

Si ex F ut centro describatur circulus quocumque intervallo FA, qui secet parabolam in C, jungaturque AC, hæc erit tangens.

COROL.

COROLLARIUM III.

Si ex umbilico F ad tangentem AC ducatur perpendicularis F G, hæc secabit bifariam lineam AC in puncto G, fiunt enim triangula similia AGF, GFC; & AF, FC sunt æquales.



COROLLARIUM IV.

Aliter inveniri potest focus. Sit axis BD, ducatur quæcumque ordinata CE, quæ dividatur bifariam in F, ducatur linea BF ad quam sit perpendicularis FD, dico ED esse distantiam foci à vertice B. Fiat enim BA æqualis BE, jungaturque AC ad quam sit perpendicularis CG.

Demonstravimus EG esse dimidium lateris recti, sed E D est dimidia pars EG; est enim AC tangens, & cum tam CF sit semissis C E, quam AB ipsius AE, erunt AC, BF parallelæ; sunt item anguli ACG, BFD recti, quare E D erit semissis EG; ergo ED est quarta pars lateris recti.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

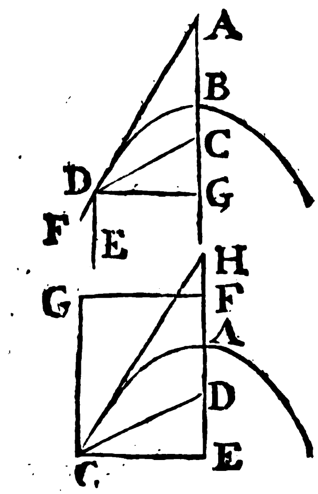
Omnis radius axi parallelus in superficiem parabolicam & reflexivam incurrens, in focum reflectitur.

Hæc est celebris illa propositio, & proprietas parabolæ, propter quam solam multi parabolæ doctrinam tradiderunt. Suppono ergo dari corpus parabolicum reflexionis capax, si nempe intelligeretur parabola circa immotum axem circumvolui, & superficiem aliquam parabolicam produxisse; & ad illius formam ex materia solida conflatum esse vas aliquod intus lævigatum; dico omnem radium luminis axi parallelum reflecti in focum.

Suppono autem omnem reflexionem fieri ad angulos æquales incidentiæ, & reflexionis: suppono item angulos ad superficies curvas, sumi penes tangentes.

Sit ergo AB axis parabolæ DB, sitque tangens quæcumque AD, & focus C; & radius incidens E D parallelus axi; dico hunc radium reflectendum in focum C.

Demonstr. Cùm lineæ ED, CA sint parallelæ; erunt anguli internus & externus ex eadem parte, nempe FDE, DAC æquales; sed anguli



DAC, CDA sunt æquales: ut ostendimus ergò anguli incidens E D F, & reflexus C D A sunt æquales; quod erat demonstrandum.

Quod autem demonstravi de puncto D de alio quovis ostendi potest.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si sumatur in axe linea æqualis distantiæ foci, à vertice per quam ducatur perpendicularis, omnes parallelæ axi, ab ea ad parabolam incurrentes, æquales sunt distantiæ foci.

Sit parabola AC umbilicus D, sint lineæ AD, AF æquales, & per punctum F, ducatur perpendicularis FG; sumatur punctum quodcumque C, sitque CG parallela axi, dico C G & C D esse æquales; sit tangens C H, & ordinata C E.

Demonstr. (*Per* 4. *huius*) AE, AH sunt æquales, & additis æqualibus AD, AF fiunt FE, seu CG, & DH æquales, & cum (*per* 30.) DC, DH sint æquales, erunt DC, GC æquales.

Ex hac propositione deduci potest praxis aliqua describendæ parabolæ.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

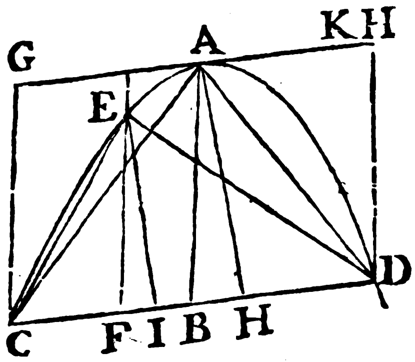
Diameter ad quam est ordinatim applicata, omnium diametrorum ad eamdem ordinatam terminatarum maxima est.

Sit in parabola diameter quæcumque A B, ad quam sit ordinatim applicata C B D, sitque alia quæcumque diameter E F, terminata eâdem lineâ C D; dico E F minorem esse quam A B, per punctum A ducatur G A ordinatim applicatæ C D parallela, hæc (*per* 4. *huius*) erit tangens cadens extra parabolam, ergo linea E F ad eam non pervenit, ergo F E minor est quam BA.

COROL

COROLLARIUM I.

C A D est maximum omnium triangulorum in parabola CAD inscriptibilium. Si enim ex pun-



ctis A & E ducantur ad C D, perpendiculares AH, EI, fient triangula æquiangula FEI, BAH, & cum EF minor sit, quam AB; E I minor erit quam AH, quare triangulum C A D majus est triangulo CED (*per* 1.6.) cum habeat eamdem basin, & majorem altitudinem.

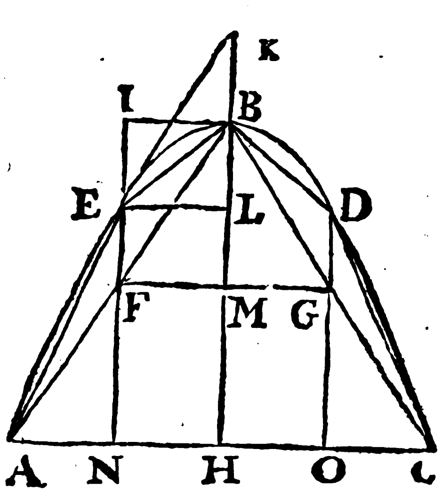
COROLLARIUM II.

Triangulum CAD majus est dimidiâ parabolâ, est enim dimidia pars CGHD majoris, quam sit parabola CAD.

PROPOSITIO XXXIV.

Si maxima triangula in parabola bifariam dividantur, & super segmentis alia triangula inscribantur, dico primum triangulum cæterorum esse quadruplum.

Sit maximum triangulum ABC in parabola inscriptum, & in segmentis BDC, AEB, inscribantur alia maxima triangula AEB, BDC, quod fiet si divisis bifariam lateribus AB, BC, in punctis G,& F ducantur diametri EF, GD; dico triangulum ABC, quadruplum esse triangulorum simul AEB, BDC. Per B ducatur B I occurrens diametro productæ in I, ducatur item per E tangens EK, & applicata E L.



Demonstr. Tangens EK est parallela ordinatæ AB (*per* 4.) sunt etiam diametri EF,BH parallelæ (*per* 8.) est ergo parallelogrammum FK,& lineæ EF, KB æquales. Sed (*per* 3.) KB, BL seu EI sunt etiam æquales, ergo E I, E F sunt æquales; ergo triangulum I B F, trianguli E B F est duplum. Et cum triangula E F A, E B F eundem verticem, & bases æquales habentia sint æqualia, erunt ergo triangula IBF, & AEB æqualia; sed IBF & BFM sunt æqualia, & cum triangula BFM, ABH sint similia, & latus AB duplum lateris F B, erit triangulum ABH quadruplum trianguli FBM, ut pote in duplicata ratione laterum; ergo triangulum ABH quadruplum est trianguli A E B. Similiter ostendam triangulum H B C quadruplum esse trianguli BDC. Ergo totum ABC,duorum AEB, & BDC simul quadruplum est.

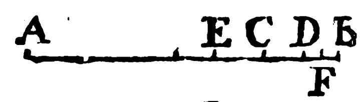
COROLLARIUM.

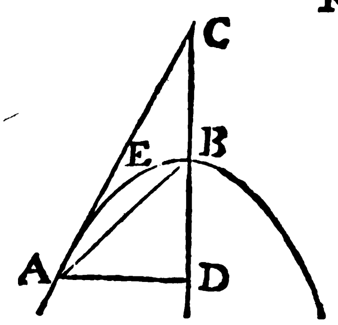
Ostendere similiter possumus triangulum AFB, quadruplum esse duorum triangulorum, quæ fieri possunt super BE, EA.

LEMMA.

Si detur series infinita quantitatum decrescentium in ratione quadrupla, erit aggregatum omnium ad primum terminum, ut quatuor ad tria.

Sit primò quantitas aliqua AB, sitque AC tres ejus quadrantes, sit item AC ad C D ut AB ad





BC, eritque CD quadrans ipsius AC minor quàm CB,quæ est quadrans totius AB. Abscindatur EC ipsi CD æqualis; cum sit tota AB ad ablatam CA sicut tota AC ad ablatam EA, erit reliqua CB ad EC seu CD, ut tota AB ad AC, nempe ut 4 ad 3. igitur CD ad DB se habet ut 3 ad 1. sicut AC ad C B se habebat ut 3 ad 1. ita ostendam si D B ita dividatur in F,sicut CB in D,aut AB in C,ita esse CD ad DF ut 4 ad 1. & DE ad FB ut 3 ad 1. Et ita consequenter nunquam pervenietur in B licet sit infinita series terminorum in proportione quadrupla, & semper id quod restabit erit proportionale,& erit cum libuerit minus quacumque quantitate proposita. Igitur si sit quantitas AB quæ se habeat ad primum terminum, ut 4 ad 3. & terminus quilibet ad sequentem ut 4 ad 1. infinita series terminorum hujusmodi se habebit, ad primum terminum ut 4 ad 3.

PROPOSITIO XXXV.

Parabola est sesquitertia trianguli maximi in ipsa inscripti.

Theorema.

Sit quæcumque parabola cui inscribatur maximum triangulum. Dico parabolam esse sesquitertiam

tiam trianguli illius : cum enim triangulum maximum sit quadruplum triangulorum in segmentis inscriptibilium (*per* 34.) & hæc sint quadrupla aliorum, & ita consequenter, & per singulas inscriptiones auferatur plusquam dimidium reliquæ parabolæ ; ita ut excessus parabolæ super triangula inscripta possit ostendi minor quâlibet quantitate, erit in Parabola series infinita terminorum in proportione quadrupla, ergo per Lemma superius tota series est sesquitertia termini, seu trianguli maximi ; quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Parabolæ terminatæ se habent inter se, ut triangula per axem.

COROLLARIUM II.

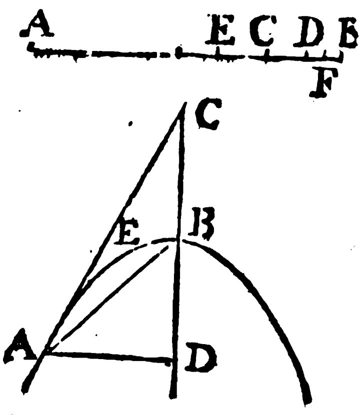
Facile dato segmento parabolæ æquale triangulum assignabimus, nempe si basin trianguli per axem quarta parte augeamus.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Triangulum mixtum concavum parabolicum duplum est segmenti convexi.

Sit segmentum parabolæ AEBC concavum terminatum parabolæ peripheria AB diametro BC, & tangente AC, dico illud segmentum concavum, esse duplum segmenti convexi AEBA, nempe comprehensi lineâ rectâ AB, & peripheria parabolæ. Ducatur ordinata AD.



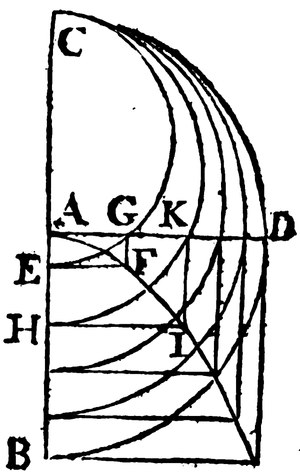
Demonstr. Per superiorem triangulum ABD seu ABC illi æquale propter lineas DB & BC æquales, se habet ad segmentum ABEA ut 3 ad 1; ergo segmentum AEBC ad AEBA se habet ut 2 ad 1 ; quod erat demonstrandum. Alia multa in hunc modum excogitari possunt.

PROPOSITIO XXXVII.

Problema.

Datâ Rectâ lineâ pro diametro Parabolæ, item angulô quem applicatæ efficere debeant ; & parametrô parabolam describere.

Sit data recta AB pro diametro futuræ parabolæ, sit item AC æqualis parametro ejusdem, describantur plurimi semicirculi transeuntes per C, & dividentes diametrum AB, in quotcumque partes sive æquales sive inæquales parum interest, quò plures & crebriores erunt, eò exactiùs describetur parabola, ducatur per A perpendicularis AD secans omnes circulos.



Fiat prima applicata comprehendens cum diametro AB quemcumque angulum AEF æqualis primæ lineæ AG, secunda HI æqualis secundæ AK, & ita consequenter ; dico puncta F, I & reliqua, esse in peripheria parabolæ.

Demonstr. Cum ducta sit AG perpendicularis ad CE diametrum primi circuli erit media proportionalis inter AC, & AE, ergo quadratum AG, seu EF, æquale est rectangulo sub AE, & parametro AC. Pariter ostendam AK seu HI, esse mediam proportionalem inter sagittam HA, & parametrum AC : ergo puncta F, I, & alia hac praxi inventa, sunt in peripheria parabolæ ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

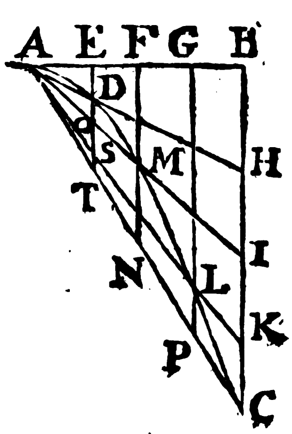
Si ita sit GF ad KI ut quadratum AG ad quadratum AK ; puncta F & I pertinebunt ad parabolam, quia cum AG, EF; AK, HI ; AE, GF; AH, KI sint æquales erunt quadrata EF, HI, ut sagittæ AE, AH juxta definitionem parabolæ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Alia descriptio Parabolæ.

Proponatur triangulum ABC, cujus punctum



A debeat esse vertex parabolæ, transeuntis per

per C, quæruntur alia puncta ejusdem parabolæ. Dividatur latus AB in quotcumque partes in punctis E, F, G; dividatur & BC in totidem partes prioribus proportionales, in punctis H, I, K; ducanturque radij AH, AI, AK, & per puncta E, F, G lineæ ED, FM, GL parallelæ BC; dico puncta D, M, L, pertinere ad parabolam.

Demonstr. Ita est ex constructione AE ad AF sicut BH ad BI; sed (*per* 4.6.) ita est BH ad BI sicut ED ad EO; ergo ita est AE ad AF ut ED ad EO. Pariter ita est (*per* 4.6.) EO ad FM sicut AE ad AF; ergo ED ad FM est in duplicata ratione AE ad AF, nempe ut quadrata; se habent ergo ED ad FM sicut quadrata linearum AE, AF: ergo per corollarium præcedens, puncta D, M & C; pertinent ad periferiam parabolæ quod erat demonstr.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Alia Parabolæ descriptio.

Proponatur. Idem triangulum ABC, sitque describenda parabola cujus vertex A & quæ debeat transire per C, & habere diametrum parallelam lineæ BC, ducantur quæcumque lineæ BC, GP, FN, ET parallelæ lineæ BC. Pariter ut BC ad GP, ita fiat GP ad GL; dico puncta A, L, C pertinere ad parabolam.

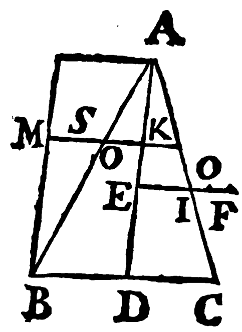
Demonstratio. BC ad GL est in duplicatâ ratione BC ad GP; sed ut BC ad GP ita est AB ad AG; ergo BC ad GL est in duplicata ratione AB ad GA, nempe ut quadratum AB ad quadratum AG; ergo puncta A, L, C pertinent ad parabolam (*per coroll.* 36.)

PROPOSITIO XL.

Problema.

Circa propositum triangulum Parabolam describere.

Proponatur describenda parabola circa triangulum ABC, hoc est, cujus peripheria transeat per puncta A, B, C, quærenda sunt alia puncta; dividatur basis BC bifariam in D, ducaturque AD,



tum EF sumatur æqualis DC, & inter EF, & EI quæratur media proporionalis EO, punctum O pertinebit ad parabolam, quia DC ad EO erit in subduplicata ratione AD ad AE.

COROLLARIUM I.

Pariter datâ diametrô AD, & applicatâ BC, facilè totam parabolam describemus, si nempe ducamus BM parallelam AD; tum AD dividamus in quotcumque partes, sitque AK una divisio; ducatur KM parallela BC; sitque KS media inter KM, & KO; clarum est punctum S pertinere ad parabolam.

COROLLARIUM II.

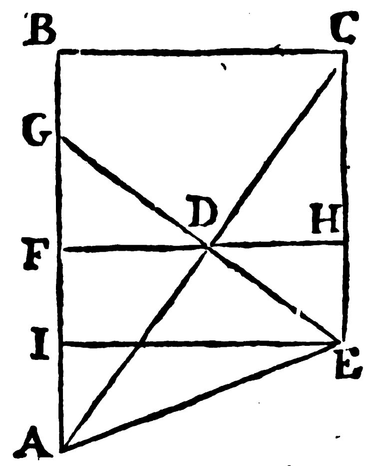
Constat cum EO sit media proportionalis inter EI, & EF quadratum EO æquale esse rectangulo sub EF, seu DC, & EI, & cum idem quadratum æquale sit rectangulo sub AE & parametro, rectangulum sub AE & parametro æquale erit rectangulo sub DC, EI; quare ita erit AE ad EI sicut DC ad parametrum.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si trianguli rectanguli basis bifariam dividatur, & per punctum divisionis ducatur parallela uni lateri & perpendicularis occurrens parallelæ alteri lateri, illud punctum occursûs pertinebit ad parabolam cujus focus est in extremitate basis, & vertex à prima parallela determinatur.

Sit triangulum rectangulum ABC, cujus hypothenusa AC bifariam dividatur in D, & per punctum D ducatur perpendicularis GDE occurrens lineæ CE parallelæ lateri AB, ducatur item HDF parallela DE, dico punctum E pertinere ad parabolam cujus vertex F, umbilicus A, tangens GE; ducatur EI parallela BC.



Demonstratio. Cùm AC sit dupla AD, (*per* 3.6.) erit AB dupla AF; item FD dimidia BC, seu FH, sunt igitur FD, DH æquales, & cùm triangula GDF, DHE sint similia, & FD, DH æquales, erunt FG, & HE, seu FI æquales, & (*per* 4.1.) in triangulis ADG, ADE, erunt bases AE, AG æquales, quare (*per* 29.) si F sit vertex parabolæ transeuntis per E, GE erit tangens, & A umbilicus.

Potest tamen ostendi quadratum IE esse æquale rectangulo sub FI, & quadrupla AF; cum angulus GDA sit rectus, & in semicirculo, FD erit media proportionalis inter FG, seu FI & AF, ejusque quadratum æquale erit rectangulo IFA, &

& quadratum totius F H seu I E prioris quadruplum æquale est rectangulo sub F I, & quadruplâ A F, quæ erit parameter; quod erat demonstrandum.

Coroll. AE, AG sunt æquales; item AF, FB, & ablatis æqualibus FG, FI, AI & GB supersunt æquales; & addita communi IG, sunt AG, IB, AE æquales.

PROPOSITIO XLII.

Problema.

Dato vertice, & umbilico, parabolam describere.

Sit parabolæ umbilicus A; B vertex, perficiendaque sit parabolæ descriptio; sumantur AB, BC æquales, excitenturque ad B, C, perpendiculares CE, BD; ducantur utcumque lineæ ADE secantes BD in punctis D, ducanturque per D perpendiculares DF, occurrentes EF parallelæ AC in punctis F, quæ dico esse in superficie parabolæ.

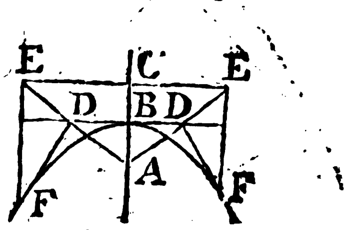
Demonstr. Cum A B, B C sint æquales, erunt A D, DE æquales (*per 2. 6.*) ergo (*per præcedentem*) puncta F sunt in superficie parabolæ.

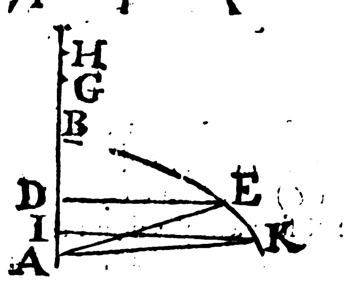
PROPOSITIO XLIII.

Problema.

Dato umbilico & vertice, parabolam describere.

Sit datus umbilicus A, vertex B, sitque perficienda parabola. Producatur axis A B, dividaturque in plurimas partes, & per divisiones du-





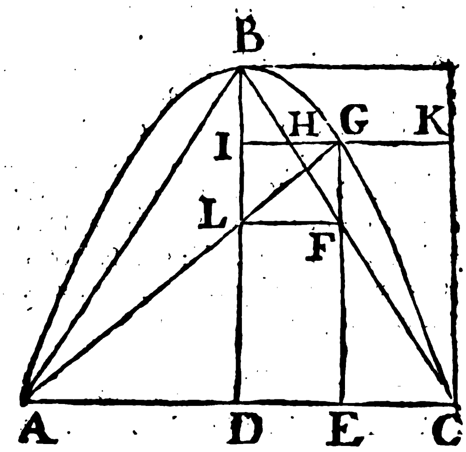
cantur ordinatim applicatæ ad axem ut D E, sit BG æqualis sagittæ BD, fiatque AE æqualis AG; clarum est (*per 41.*) punctum E ad parabolam pertinere. Sit pariter B H æqualis sagittæ I B, & A K æqualis A H, punctum K erit in peripheria parabolæ.

PROPOSITIO XLIV.

Problema.

Si intra parabolam triangulum inscribatur, ducaturque diametro parallela secans latus trianguli; erunt ejus segmenta, proportionalia basi, & applicatæ.

Proponatur parabola in qua sit inscriptum triangulum A B C: divisâque basi AC bifariam; ducatur diameter B D, & E F G illi parallelâ, secans latus trianguli; ducatur item K G I basi A C parallela: dico ita esse DC ad IG sicut EF ad FG.



Demonstr. Cum ostenderimus (*in 39.*) IG esse mediam proportionalem inter DC, seu IK & HI; ita erit tota DC ad totam I G, sicut ablata D E ad ablatam I H: ergo erit reliqua E C ad reliquam G H, sicut tota DC ad totam I G; & cum triangula E F C, F G H sint similia; erit ut EC ad G H ita E F ad F G: ergo ita erit D C ad IG seu D E, ut E F ad FG: quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

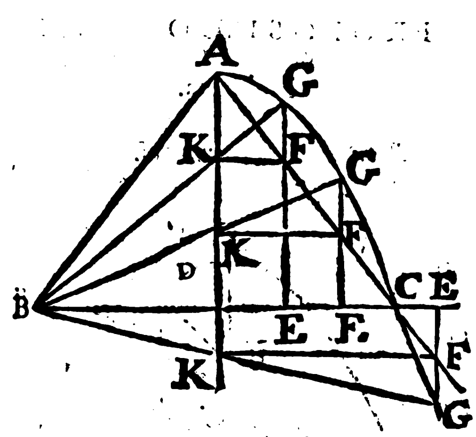
Per punctum F ducatur FL parallela DE, jungaturque AL LG; cum sit ut AD ad DE, seu LF, ita EF, seu DL ad FG, ita etiam erit alternando AD ad DL; sicut LF ad FG, & componendo ut AE ad E G, ita AD ad DL: ergo AL, LG sunt unica recta linea.

PROPOSITIO XLV.

Problema.

Circa datum triangulum parabolam describere.

Sit triangulum A B C circa quod describenda proponitur parabola. Divisa B C bifariam in D



ducatur diameter AD, dividatur basis BC in quotcumque partes in punctis E; per quæ ducantur EF parallelæ diametro A D, fiantque ut D C ad D E, ita EF ad FG: dico puncta G ad parabolam pertinere, quæ si apposite conjungas lineâ curvâ habebitur parabola (*per 44.*)

PROPOSITIO XLVI.

Problema.

Alia Parabola descriptio.

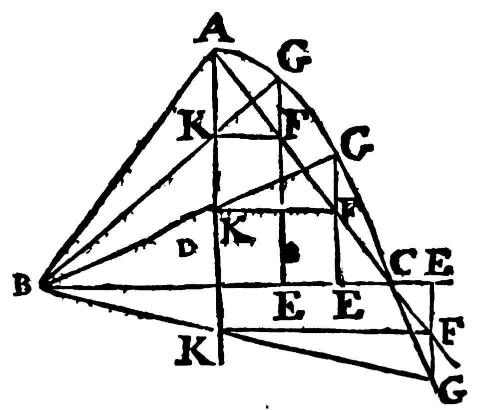
Sit propositum idem triangulum A B C, circa quod describenda sit parabola: divisâ pariter basi BC bifariam in D; ducatur diameter A D dividenda in quotcumque puncta K, per quæ ducantur KF parallelæ basi BC, & per F, lineæ FG parallelæ diametro; ducantur item lineæ B K occurrentes lineis F G in punctis G; Habebuntur puncta G quæ assero ad parabolam pertinere ut constat (*ex eadem* 44.)

PROPOSITIO XLVII.

Problema.

Parabolam continuare.

Sit propositum parabolam A C continuare: sit

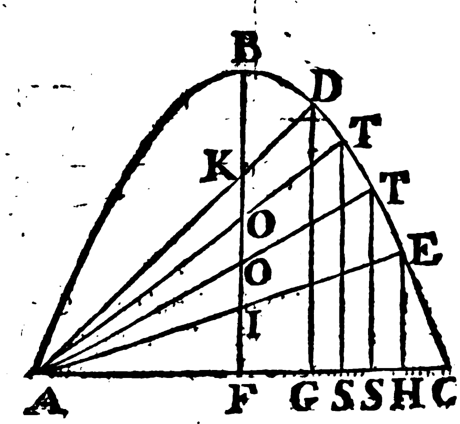


ducta diameter AD, & ordinata CD quæ ulterius producatur in E; ducatur EF parallela diametro, ducatur item F K ordinata, ducatur ex puncto B, linea B K G, secans E F in G, dico punctum G ad parabolam pertinere (*per* 44.)

PROPOSITIO XLVIII.

Problema.

Parabola segmentum restituere.



Proponatur Parabola A B C, cujus segmentum D E sit restituendum. Ducatur quæcumque diameter B F, ducanturque AD AE secantes diametrum BF in punctis K & I. Ducantur item D G, E H parallelæ diametro BF, dividatur K I in quotcumque partes æquales in punctis O, & GH in totidem, in punctis SS, per quæ ducantur parallelæ diametro, occurrentes lineis A O in punctis T, quæ assero ad parabolam pertinere.

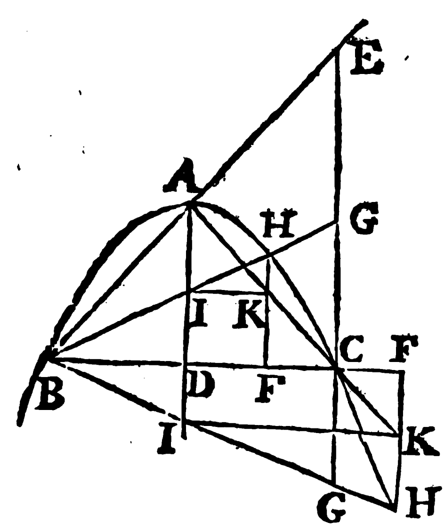
Demonstratio est eadem.

PROPOSITIO XLIX.

Problema.

Si circa triangulum describatur Parabola & fiat ut dimidia basis ad segmentum suum; ita parallela diametro ducta per extremitatem basis ad suum, ducaturque ab alia extremitate basis ad tale punctum recta linea; hæc occurret parallela diametri per divisionem basis ducta, in puncto pertinente ad parabolam.

Sit descripta parabola circa triangulum ABC, & divisâ basi bifariam in D, sit diameter A D, & illi parallela CE; fiatque ut DC ad C F; ita E C ad CG; ducaturque linea BG, occurrens FH parallelæ diametro in puncto H: dico punctum H pertinere ad parabolam. Ducatur linea K I.



Demonstratio. Ita est DC ad C F, sicut AD ad FK. (*per* 4. 6.) & ex constructione ut CE ad CG, & (*per* 4. 6.) ut CE ad CG, ita AD ad DI; ergo DI & F K sunt æquales sicut I K & D F. Est item ut BD ad DI, seu FK; ita IK, seu DF, ad KH: ergo permutando ita erit B D ad D F, sicut FK ad K H: ergo (*per* 44.) punctum H pertinet ad parabolam.

COROLLARIUM

Si dividatur D C in quotcumque partes æquales, & E C in totidem; singulæ parallelæ diametro, ductæ per divisiones lineæ D C, occurrent lineis ductis à puncto B, ad divisiones lineæ E C.

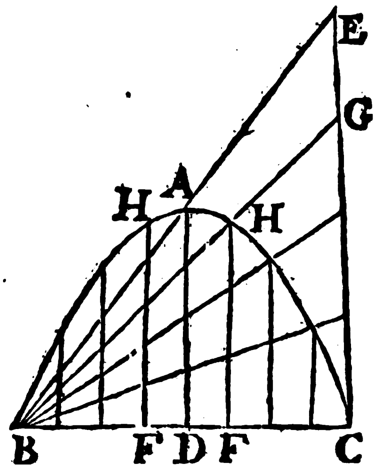
PROPOSITIO L.

Problema.

Circa datum triangulum Parabolam describere.

Proponatur triangulum A B C circa quod describenda

scribenda est parabola. Divisâ B C bifariam in D, ducatur diameter AD, & ei parallela C E, quæ uti



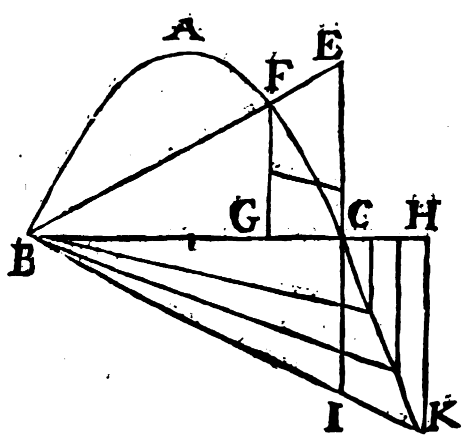
basis B C, in totidem partes æquales divisæ sint in punctis scilicet F & G. Ducantur ex puncto B lineæ BG, & per F parallelæ diametro quæ priores secent in punctis H. Clarum est *(per præcedentem)* hæc puncta H pertinere ad parabolam.

PROPOSITIO LI.

Problema.

Parabolam continuare.

Sit Parabolæ portio B A C continuanda. Per punctum C ducatur C E parallela diametro, quæ ulteriùs producatur, ducatur & BE secans sectionem in puncto F. Ducaturque F G parallela C E,



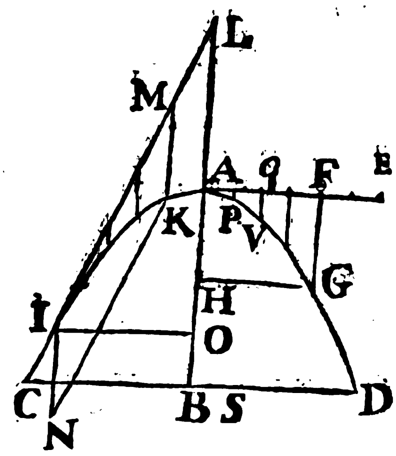
fiant GC, CH; sicut GF, CI æquales; dividanturque CI, & CH in totidem partes æquales, & per divisiones CH, ducantur diametro parallelæ. Item ducantur ex puncto B lineæ per divisiones C I: dico (*per* 48.) puncta concursuum esse in peripheria parabolæ.

PROPOSITIO LII.

Problema.

Alia descriptio Parabolæ.

Supponitur data diameter A B futuræ parabolæ, unà cum ordinatim applicata C D, quâ bifariam divisâ in B, fit diameter AB: fit item A E æqualis, & parallela B D, dividaturque in quotcumque partes æquales verbi gratia 6. Dividatur autem diameter AB, in partes æquales secundum numerum unitatum, quæ in quadrato lineæ A E continentur nempe in 36. prima A P contineat unam particulam, secunda quatuor, tertia 9. & ita consequenter dico hæc omnia puncta ad parabolam pertinere. Ducatur enim G H.



Demonstr. Ita se habet AB ad AH; sicut quadratum BD ad quadratum GH: ergo ex definitione parabolæ punctum G ad parabolam pertinet.

COROLLARIUM I.

Eâdem methodo parabolæ mutilæ segmentum restituemus, ut si parabolæ segmentum K I restituendum sit. Ducatur applicata IO sumanturque in diametro æquales OA, A L, ducaturque L I quæ tanget parabolam in puncto I. Ducantur per puncta K & I parallelæ diametro, & æquales K M, I N erit I N diameter transiens per contactum I. Dividatur I M in quotcumque partes æquales, & I N, in partes respondentes numero quadrati, lineæ I M. Sicut priùs, tum per divisiones tangentis I M; ducantur parallelæ diametro, quarum proximior puncto I, contineat unam particulam, lineæ I N. Secunda 4. tertia 9. & ita consequenter, clarum est hæc; puncta pertinere ad parabolam.

COROLLARIUM II.

In idem recidit alia praxis nempe B D dividatur in partes æquales verbi gratia 6. per quas ducantur parallelæ diametro A B, quæ dividantur in tot partes æquales; quot sunt unitates in quadrato lineæ BD, & prima parallela seu SP deficiat unitate à linea A B, secunda deficiat quatuor particulis, & ita consequenter habebuntur puncta ad parabolam pertinentia.

PROPOSITIO LIII.

Problema.

Datis tribus punctis, non in directum positis, & linea per unum transeunte pro una diametro, parabolam describere.

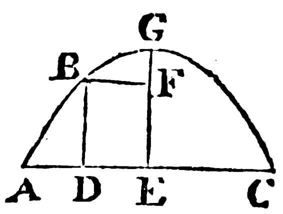
Proponantur tria puncta A,B,C, non in eâdem lineâ rectâ constituta, detur & linea B D, quæ debeat esse una diameter, sitque perficienda parabola; ducatur linea AC, quæ dividatur bifariam in in E,& ducatur EFG, parallela BD, fiatque ut AE quadratum ad quadratum BF,ita GE ad FG. Clarum est parabolam per B & G transeuntem, transire etiam per A & C.

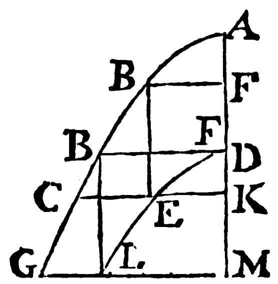
Eodem modò datis duabus lineis AC , B D se intersecantibus in puncto D, inveniemus parabolam cujus BD sit diameter.

PROPOSITIO LIV.

Datâ parabolâ, aliam æqualem describere.

Sit Parabola ABC in 2 fig. cui aliam æqualem describere volumus. Assumatur AD,sitque D vertex futuræ parabolæ. Ducatur B E æqualis & parallela ; dico punctum E pertinere ad parabolam æqualem priori.





Demonstr. Applicentur BF, EK, cum AD , BE sint æquales, & parallelæ ; item BE & FK ; erunt A F, D K æquales , quare eadem erit ratio B F ad sagittam FA, quæ EK ad sagittam K D, quare est omnimoda æqualitas.

COROLLARIUM.

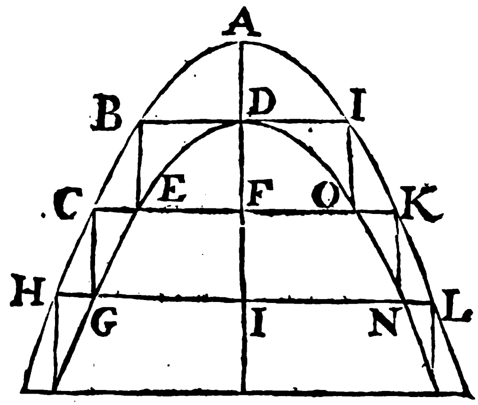
Clarum est hujusmodi parabolas,ita nempe descriptas non convenire : ergo erunt asymptoti.

PROPOSITIO LV.

Parabolæ asymptoti semper minus inter se distant.

Sint Parabolæ asymptoti productæ nempe eo modò quo diximus : dico illas semper minùs , & minùs distare. Ducatur enim per punctum D verticem interioris linea B D quæ erit tangens interioris,& applicata exteriori ; ex puncto B ducatur B E, æqualis AD ; & per punctum E ducatur ordinata CEF. Per punctum G alia ducatur. Ostendo primo rectangula C E K, H G L esse æqualia quadrato B D.

Demonstratio. Linea A F est dupla lineæ A D, sed ut AF ad AD , ita *(per defin. parabolæ)* quadratum C F ad quadratum BD ; quadratum autem CF *(per 5. 2.)* æquale est rectangulo C E K , & quadrato EF seu B D. Ergo rectangulum C E K cum quadrato BD duplum est quadrati BD. Ergo rectangulum CEK æquale est quadrato BD. Pari-



ter quadratum HI est sesquialterum quadrati CF & æquale rectangulo HGL, & quadrato G I , seu CF ; ergo ablato quadrato G I , restat rectangulum H G L esse dimidium quadrati CF ; ergo æquale quadrato BD , & ita consequenter : ergo omnia rectangula quæ fient sunt inter se æqualia, nempe CEK, HGL : ergo *(per 13.6.)* ita est CE, ad HG sicut GL ad EK ; sed GL *(per 1.)* est major quam EK ; ergo & CE, est major quàm HG.

COROLLARIUM.

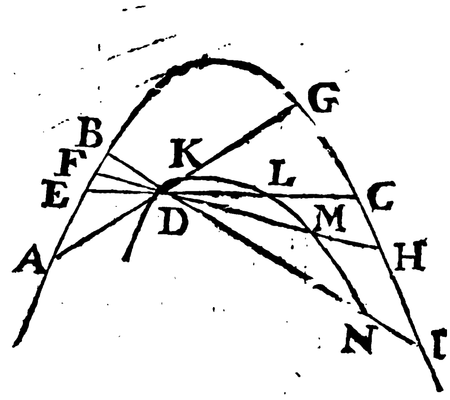
Patet etiam in his parabolis rectangula LGH, HNL esse æqualia & consequenter lineas N L, H G esse æquales.

PROPOSITIO LVI.

Problema.

Alia descriptio parabolæ asymptoti.

Proponatur parabola ABC assumaturque intrà illam quodlibet punctum D , à quo ducantur li-



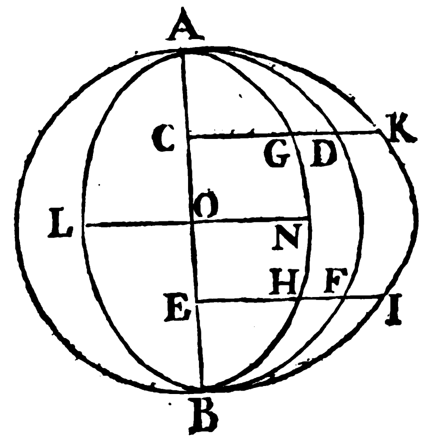
neæ rectæ ADG, EDC, FDH, BDI , sintque AD, KG: ED, LC ; FD, MH : BD, NI æquales. Clarum est *(per coroll. precedentis)* puncta K,L,M,N pertinere ad parabolam.

LIBER SECUNDUS
De Ellypsi.

DEFINITIONES.

1 Ellypsis est figura unâ lineâ curvâ contenta, cujus ordinatim applicatarum ad Axem quadrata, eandem rationem habent, ac rectangula sub segmentis Axis contenta, illis tamen æqualia non sunt.

Hic Ellypsin definio, ut diversam à circulo, quamvis circulus aliquam affinitatem habeat cum Ellypsi, eique conveniat principalis proprietas, quæ Ellypsi hoc nomen indidit; ut autem melius intelligatur sensus hujus definitionis. Pro-



ponatur circulus in quo sit diameter A B, & ordinatim applicata C D, quæ necessario debet esse perpendicularis ad diametrum, neque enim in circulo, quæ perpendicularis non est, potest esse ordinatim applicata, quia nempe non potest bifariam dividi, nisi quæ perpendicularis est ad diametrum. Certum est CD mediam esse proportionalem inter A C & C B, atque adeò ejus quadratum esse æquale rectangulo ACB. Pariter quadratum E F æquale est rectangulo AEB, ideoque erunt ut quadrata inter se, ita & rectangula. Volo igitur ut in Ellypsi quadrata applicatarum se habeant, ut rectangula sub segmentis, non tamen illis sint æqualia, sed aut majora, aut minora; ut si ita sit quadratum CG ad quadratum EH, ut rectangulum ACB ad rectangulum AEB, prima autem non sint secundis æqualia: Hanc figuram voco Ellypsin. Pariter, si quadratum C K ad quadratum EI, sit ut rectangulum ACB ad rectangulum AEB, sintque prima secundis majora: voco illam figuram Ellypsin.

Posui autem in definitione applicata ad axes, quia in Ellypsi, accidit, ut certæ duæ diametri conjugatæ scilicèt, sint æquales: & tunc quadrata applicatarum sunt æqualia suis rectangulis. Sed illæ diametri obliquæ sunt ad invicem.

Volui definire Ellypsin independenter à Cono, & eam quasi absolutè considerare, ut totam hanc doctrinam in unico plano positam faciliorem redderem.

2. Conjugatæ diametri sunt diametri, quarum utraque alteri æquidistantes bifariam dividit, ut diametri L N, & A B. Si nempe A B dividat bifariam omnes lineas parallelas lineæ LN, & vicissim L N dividat bifariam omnes parallelas diametro A B.

3. Axes conjugati sunt diametri conjugatæ se ad angulos rectos secantes.

4. Umbilici seu poli, aut puncta ex comparatione, sunt puncta in Axe majore sumpta ita eum dividentia, ut rectangulum sub segmentis ejus, æquale sit quartæ parti figuræ, hoc est æquale sit quadrato semiaxis majoris.

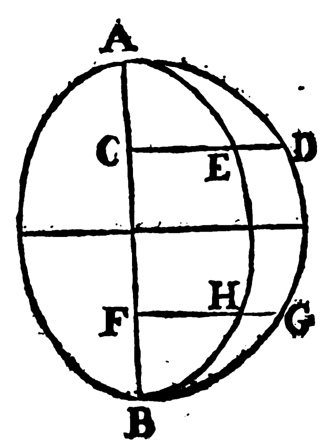
5. Centrum Ellypsis est punctum quod bifariam dividit illius diametros.

6. Diameter dicitur quæ ordinatim ei applicatas bifariam dividit.

PROPOSITIO I.

Theorema.

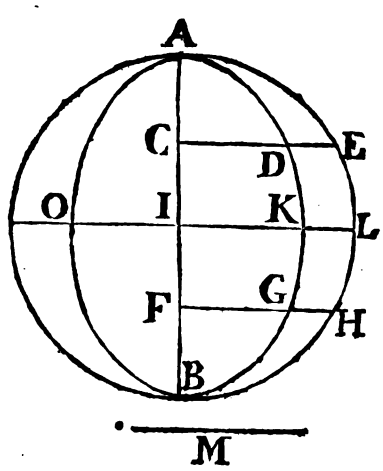
In Ellypsi ordinatim applicatæ ad Axem, eandem rationem habent ad ordinatim applicatas ad diametrum circuli circa Axem descripti sibi respondentes.



Sit AB Axis Ellypsis, sintque ordinatim appli-

cata

catæ CD,FG. Describatur item circa Axem A B, circulus AEB, in quo sint ordinatim applicatæ CE, FH, dico ita CD ad CE sicut FG ad FH.



Demonstratio. (*Per definitionem Ellypsis*) ita est CD ad FG; sicut rectangulum ACB, seu quadratum CE illi æquale, ad rectangulum A F B seu quadratum F H illi æquale, & alternando, ita est quadratum C D ad quadratum C E, sicut quadratum FG ad quadratum FH; & cum quadrata sint in duplicata ratione suorum laterum; ita erit CE ad CD; sicut FH ad FG.

COROLLARIUM I.

Clarum est ita esse C D ad D E, sicut FG ad GH, dividendo scilicet.

COROLLARIUM. II.

Ita est tota Ellypsis ad circulum descriptum circa majorem Axem, ut minor ad majorem Axem, per methodum scilicèt Indivisibilium. Ductis enim omnibus ordinatis ad Axem majorem, cùm sit ut CD ad CE, ita I K ad IL, seu AI, ita erunt omnes ordinatæ Ellypseos seu ipsa Ellypsis ad omnes ordinatas circuli, seu ad circulum, ut IK ad IL, aut ut dupla IK seu minor Axis ad majorem AB; quod erat demonstrandum. Eodem modò si describatur circulus circa minorem axem, ita erit Ellypsis ad eum; ut major Axis ad minorem.

COROLLARIUM III.

Ordinatæ æqualiter à verticibus distitæ, aut à centro, sunt æquales; ut si linea AC, BF sint æquales, erunt rectangula A C B, BFA æqualia, & cum quadrata C E, FH eodem modò se habeant, ac rectangula (*per definitionem Ellypsis*) & ipsa æqualia erunt: ergo & lineæ æquales erunt.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Circulum cujus diameter medius proportionalis est inter majorem axem & minorem, esse æqualem Ellypsi.

Sit linea M media proportionalis inter majorem axem A B, & minorem OK; dico si circa lineam M describatur circulus; eum æqualem esse Ellypsi.

Demonstratio. Circa majorem axem AB, intelligatur descriptus circulus, qui ad circulum M, erit in duplicata ratione lineæ A B ad lineam M; & cùm A B, M, O K sint continuè proportionales, erit AB ad M in subduplicata ratione A B ad OK, ut autem quadrata, ita & circuli (*per 2. 12. Eucl.*) & per corollarium præcedens circulus AB ad Ellypsin est ut AB ad OK; ergo Ellypsis proposita, & circulus M æquantur. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ellypses se habent ut Axium rectangula, nempe illæ Ellypses quarum æquales Axes majores se habent ut minores; & vicissim Ellypses, quæ reciprocant Axes, sunt æquales.

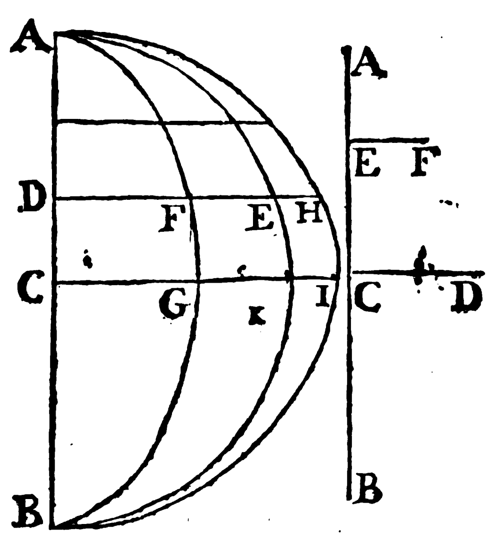
Aliæ multæ considerationes adhiberi possunt.

PROPOSITIO III.

Problema.

Ellypsis descriptio.

Proponatur Ellypsis describendæ diameter AB, super quâ describatur semicirculus AEB, tum divisâ A B in quotcumque partes, sive æquales, sive inæquales in C & D, & alias; ducantur perpendiculares CK, DE, quæ similiter dividantur in punctis F & G; hoc est ita sit D F ad DE, sicut CG ad CK. Dico puncta A, F, G, B pertinere ad eandem Ellypsin.



Demonstratio. Quadratum D E æquale est rectangulo A D B, & quadratum C K, rectangulo ACB, & cùm sit ut DF ad DE; ita CG ad KC, ita etiam erit quadratum D F ad quadratum D E, ut quadratum C G ad quadratum K C: ergo ita erit quadratum DF ad quadratum C G, ut rectangulum ADB ad rectangulum A C B: ergo ex definitione Ellypsis, puncta A, F, G, B in eâdem Ellypsi erunt.

Pariter si fiat, ut DE ad DH; ita CK ad C I, puncta H & I in eadem Ellypsi erunt, (*per defin.*

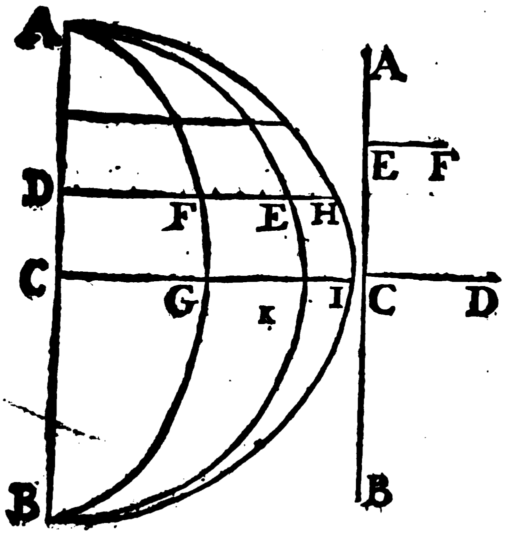
PROPO

PROPOSITIO IV.

Problema.

Secunda Ellypsis descriptio.

Proponatur primò linea AB, tanquam axis major Ellypsis describendæ; quia autem infinitæ pos-



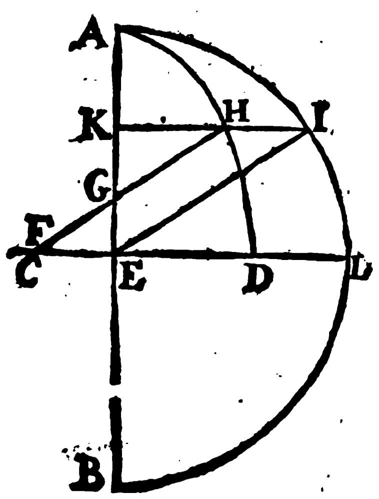
sunt describi Ellypses, dividatur AB bifariam in C, exciteturque perpendicularis CD, pro semiaxe minore. Si applicetur quæcumque EF, fiatque ut quadratum AC, seu rectangulum ACB ad quadratum CD; ita AEB rectangulum ad quadratum EF, punctum F ex definitione Ellypsis erit in ejus circumferentia: si quadrato CD, fiat æquale rectangulum AEB, habebitur ejus focus E.

PROPOSITIO V.

Problema.

Alia descriptio Ellypsis.

Proponatur major Axis AB, minor CD, se intersecantes ad rectos in puncto E, intelligatur



linea FGH, æqualis majori semiaxi AE, ita ut punctum ejus G, quod in diametrum AE cadit, eam ita dividat, ut GH sit æqualis minori semiAxi, & FG sit differentia inter majorem, & minorem semiaxem, sitque ejus extremum F in minore semiaxe; dico punctum H esse in Peripheria Ellypsis; ut hoc demonstrem, circa majorem Axem intelligatur descriptus semicirculus AIB, & ex puncto H ducta perpendicularis IHK, jungatur & EI.

Demonstr. Lineæ FH, EI æquales sunt, nempe utraque æqualis semiaxi majori, conjunguntque parallelas HI, FE, ergo parallelæ sunt. In triangulo autem EIK, ita est EI major semiaxis ad GH æqualem minori semiaxi, ut KI applicata in circulo, ad KH applicatam ad Ellypsin: ergo (*per defin.*) punctũ H pertinet ad Ellypsin; cum enim quadratum KI, æquale sit rectangulo AKB, & quadratum EL, rectangulo AEB, sitque ut AE ad ED, ita KI ad KH; ita erit rectangulum AKB ad quadratum KH, ut rectangulum AEB ad quadratum ED, quæ omnia sunt juxta definitionem Ellypsis.

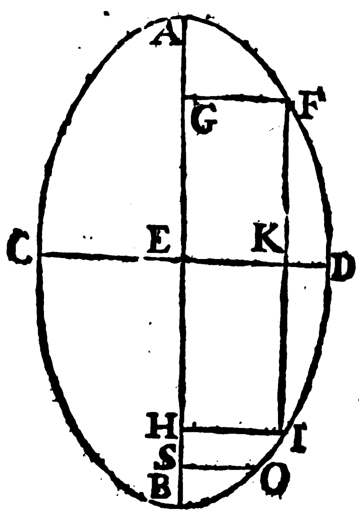
Praxis facilis est. Primò, si BM sit æqualis minori semiaxi, erit ME æqualis differentiæ inter utrumque semiaxem: si sumantur in axe AE plurima puncta, ut G ex quibus singulis intervallo differentiæ ME arcum GF describas secantem CE in F, & ducas lineam FGH, æqualem majori semiaxi, habebitur punctum H. Pariter si in materia quacumque solida notes lineam æqualem lineæ FH, pariterque divisam in G, & ita illam moveas, ut punctum G non discedat ex majore Axe, & punctum F semper insistat minori Axi, extremum H describet Ellypsin (*per hanc prop.*) cui innituntur aliqua instrumenta ad descriptionem Ellypsis accommodata.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Axis minor omnes Axi majori æquidistantes, bifariam dividit.

Sit Axis major BA, minor CD; dico axem minorem CD, dividere bifariam omnes Axi majori



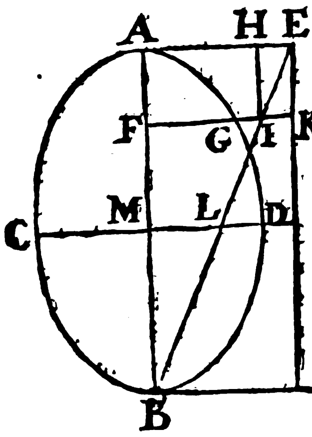
parallelas; abscindantur EH, EG æquales, ducanturque perpendiculares HI, GF, quæ (*per coroll. 1.*) erunt æquales, & FI, erit parallela AB, quia conjungit æquales, & parallelas, & cum HF sit parallelogrammum, & EG, EH æquales, erunt etiam KI, KF æquales. Idem ostendam de quacumque alia linea. Ergo CD dividit omnes lineas majori Axi parallelas, atque adeò erunt AB, CD, Axes conjugati.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Axis Ellypsis parametrum invenire.

Sit proposita Ellypsis Axis AB, cujus quæritur parameter seu latus rectum A E, fiat ut A B ad conjugatum Axem CD; ita CD, ad AE; dico A E esse parametrum Axis AB, seu mensuram quadratorum ordinatim ad Axem AB, ita ut quadratum cujuslibet applicatæ FG, æquale sit rectangulo FI, HA, comprehenso sub sagitta FA, & linea FI quæ est minor latere recto, ita ut defectus hujus rectanguli à rectangulo FE, comprehenso sub latere recto, & sagitta, sit rectangulum IE, habens eandem latitudinem, nempe sagittam AF, & simile sit comprehenso sub AB, AE; cum enim rectangulum IE sit circa diagonalem BE, simile est rectangulo BE. Propter hunc defectum nempe quod quadrata applicatarum minora sint rectangulo comprehenso, sub sagitta, & latere recto, huic sectioni indictum est nomen Ellypsis deficiens.



Demonstr. (*Per definitionem Ellypsis*) ita est quadratum FG ad quadratum M D, ut rectangulum A F B ad rectangulum AMB, seu quadratum A M, nempe in ratione composita laterum, AF ad AM, & F B ad AM. Sed rationem ex iisdem compositam, habet rectangulum FI, HA, ad rectangulum A M L, nempe AF ad AM, & FI ad ML quæ est eadem (*per* 4. 6.) ac FB ad AM, aut MB: ergo ita est rectangulum FIHA ad rectangulum AML, ut quadratum FG ad quadratum MD: sed quadratum M D æquale est rectangulo AML, ut probabo; ergo & rectangulum FIHA æquale est quadrato FG. Probo igitur ultimam minorem. Cum AB, CD, AE sint continuè proportionales, erit rectangulum sub extremis æquale quadrato mediæ C D, & eorum quadrantes æquales erunt; sed quadratum M D est quadrans quadrati C D & rectangulum AML seu L M B est quadrans rectanguli BAE, sunt enim similia, ergo sunt in duplicata ratione BA ad BM.

COROLLARIUM I.

AE parameter Axis majoris, Axis minor C D, Axis major A B, parameter axis minoris, sunt quatuor lineæ continuè proportionales, quare si quis datis parametris Ellypsin exhiberet, is duas medias proportionales inveniret.

COROLLARIUM II.

Ita est quadratum applicatæ FG ad rectangulum AFB, sub segmentis ut parameter AE, ad diametrum A B; nam sunt tres continue proportionales, AB, CD, AE; ergo ita est AB ad AE, ut quadratum A B ad quadratum C D, & ut quadratum A M ad quadratum MC; ergo invertendo ut AE ad AB; ita erit quadratum CM ad quadratum AM, seu rectangulum AMB; sed ut quadratum C M ad rectangulum AMB, ita est quadratum FG ad rectangulum AFB; ergo ut quadratum FG ad rectangulum AFB, ita AE ad AB.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Quadratum axis minoris, æquale est rectangulo sub majore axe, & parametro; & quadratum minoris Semi-axis est quarta pars figuræ.

Propositio per se patet ex inventione parametri majoris axis: voluimus enim minorem axem, esse medium proportionalem inter majorem axem, & parametrum; ergo ejus quadratum æquale est rectangulo comprehenso sub majore axe & eius parametro; quod rectangulum communiter vocant figuram; unde sequitur semiaxis quadratum æquale esse quartæ parti figuræ.

COROLLARIUM.

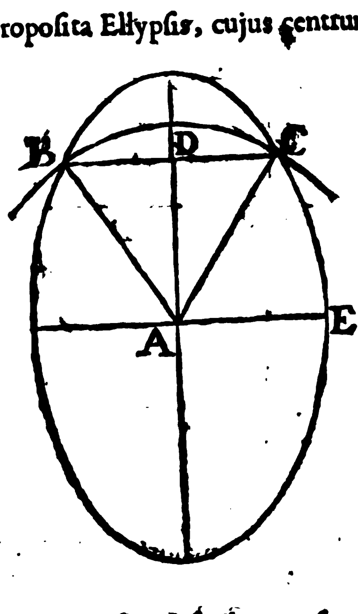
Quod diximus de majore axe, intelligendum est de minore; cujus parameter est tertia proportionalis minori axi, & majori. Atque adeò quadratum majoris axis æquale est rectangulo comprehenso sub minore axe & ejus parametro, & quadratum semiaxis majoris æquale erit ejus quartæ parti.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Data Ellypsis centrô datô axes ducere.

Sit proposita Ellypsis, cujus centrum A; Ex



eo ut centro circulus describatur, secans Ellypsim

ſim in duobus punctis B & C; ducatur linea BC, quæ dividatur bifariam in D, ducaturque AD pro majore axe, cui perpendicularis ducatur AE pro minore axe.

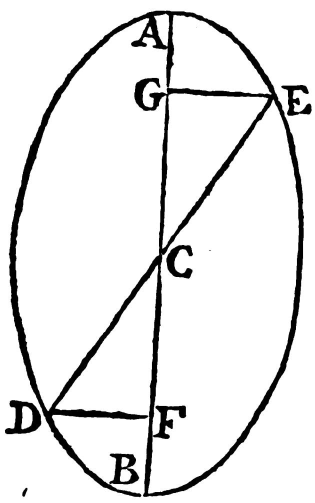
Demonſtratio. Linea BC (*per* 4.1.) & diviſa eſt bifariam in D, & perpendicularis eſt; ergo AD eſt major Axis, & conſequenter AE erit minor.

PROPOSITIO X.

Theorema.

In Ellypſi omnes lineæ per centrum ductæ, bifariam dividuntur in ipſo centro.

Sit Ellypſis cujus axis AB, ſitque centrum C; dico quamcumque lineam DE per centum C ductam bifariam dividi. Ducatur ex D perpendicularis DF, quæ erit ordinatim applicata, ſumatur linea CG æqualis FC, & per G perpendicularis GE, & jungatur CE.



Demonſtr. GE, DF (*per coroll.* 3. 1.) ſunt æquales, & (*per* 4.1.) DC, CE; Et cum omnia latera unius trianguli ſint æqualia ſingulis alterius, erunt anguli GCE, DCF æquales; ergo, lineæ DC, CE componunt unam lineam; ergo ſi producatur DC, cadet in E, eruntque DC, CE æquales; quod demonſtrandum erat.

COROLLARIUM I.

Omnis diameter per centrum tranſit; cum omnis diameter debeat dividere bifariam omnes lineas alicui parallelas; & quacunque propoſita poſſit illi duci parallela per centrum, ſi per centrum non tranſiret, illam bifariam non divideret; cum omnis linea per centrum ducta, in ipſo bifariam dividatur.

COROLLARIUM II.

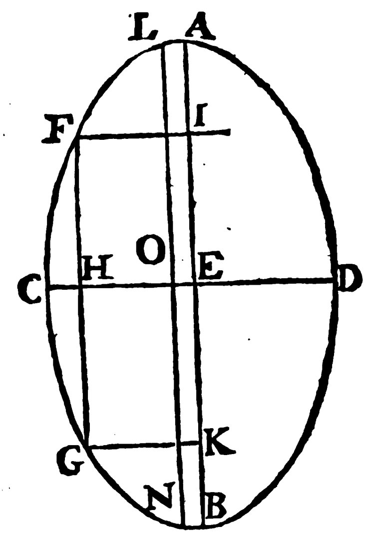
In quacumque diametro, applicatæ æqualiter à centro diſtantes, ſunt æquales. Sit enim quæcunque diameter AB, etiam ſi non ſit Axis, tranſiens nempe per centrum, in qua ſumantur duæ lineæ æquales CG, CF; applicentur duæ FD, GE, quæ parallelæ erunt *ex definitione applicatarum*; dico illas eſſe æquales. Ducatur per centrum linea DC, quam contendo productam concurrere in E. Nam ſi ex puncto E ad G, ducatur linea recta, hæc erit parallela lineæ DF, nam, (*per* 4.1.) triangula GEC, DCF ſunt omnino æqualia; ergo & anguli GEC, CDF æquales erunt; qui cum ſint alterni (*per* 29. 1.) GE, DF parallelæ erunt, & æquales. (*Per eandem*) viciſſim oſtendam ordinatas æquales, æqualiter à centro diſtare. Addo illam applicatam eſſe majorem, quæ eſt centro vicinior.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Ad diametrum ordinata ducta per centrum, eſt illius conjugata diameter.

Ad diametrum AB ſit ordinatim applicata CD, per centrum E tranſiens; dico CD eſſe conjugatam diametrum, reſpectu AB, hoc eſt CD bifariam dividere omnes parallelas lineæ AB. Sit enim FG parallela lineæ AB; hanc aſſero dividi bifariam in puncto H. Ducantur FI, GK ipſi CD parallelæ.



Demonſtr. Cùm tam FG, IK ſint parallalæ quàm FI, GK; FK parallelogrammum erit; FI, KG erunt æquales, & (*per coroll.* 2. *præcedentis*) erunt diſtantiæ IE, EK æquales: ergo FH, HG æquales erunt, quare FG diviſa eſt bifariam in H; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

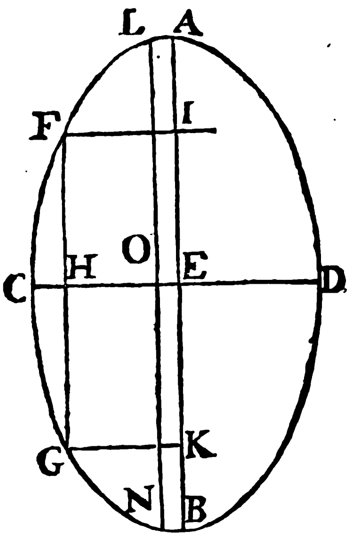
Cuicunque diametro, & conjugatam diametrum invenire, & applicatam, & centrum Ellypſis.

Sit diameter AB, quæ dividatur bifariam in E, ducatur & FG illi parallela quæ bifariam dividatur in H; dico lineam CHE eſſe conjugatam diametrum. Si enim duceretur alia conjugata diameter, tranſiens per E, divideret bifariam lineam FG, quod eſt abſurdum.

2. Lineæ CD ducatur quæcunque parallela FI; hæc erit ordinata ad AB, cùm à linea AB dividatur bifariam (*per præcedentem.*)

3. Sit inveniendum centrum, ducantur duæ quæcunque lineæ AB, FG, parallelæ, & diviſæ bifariam

biſariam in H & E, dico lineam C D tranſire per centrum; ſi enim non tranſiret per centrum; ſit illud centrum, O, per quod ducatur diameter LON, parallela lineis AB, FG; inveniatur il-



lius conjugata diameter, quæ debebit dividere bifariam parallelas LN, nempe AB, FG, in H & E, quod eſt abſurdum; duæ enim rectæ ſpatium clauderent.

COROLLARIUM I.

Sequitur ex eo, quod ſi diameter dividat, biſariam aliquam lineam non ductam per centrum, dividit etiam bifariam omnes illi parallelas.

COROLLARIUM II.

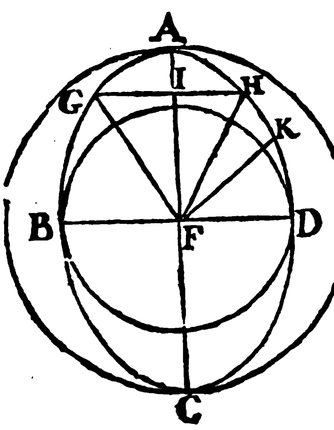
Quæcunque linea duas parallelas biſariam dividens, eſt diameter & per centrum tranſit.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Axis major eſt maxima omnium diametrorum, & axis minor minima; & diametri æqualiter ab axibus remotæ, æquales ſunt.

Sit axis major A C, dico omnem aliam diametrum eo minorem eſſe: ex centro F deſcribatur circulus intervallo F A, clarum eſt, quod tan-



get Ellypſin in puncto A. Si enim ſecaret eam, ex eo puncto ſi duceretur perpendicularis ad diametrum, ejus quadratum eſſet æquale rectangulo ſub ſegmentis, cum tamen id ſit contra definitionem Ellypſis prout diſtinguitur à circulo: ergo nulla alia diameter ad circulum perveniet: ergo minor erit Axe A C.

Pariter circulus ex eodem centro F, intervallo FD deſcriptus, totus intra Ellypſin cadet, propter eandem rationem; ergo omnis alia diameter, major erit Axe BD.

Tertiò ſit quæcunque diameter FH, & ex puncto H perpendicularis ducatur H I G; quæ erit ordinatim applicata, eruntque G I, I H, æquales, & (*per* 4. 1.) FH, FG æquales.

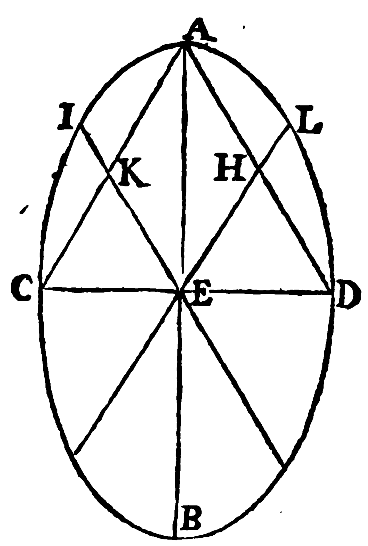
Quod ſi intervallo FH, deſcriberetur circulus, is ſecaret Ellypſin in puncto H, & ducta quælibet diameter, ut F K, ad illum non pertingeret; ergo diameter, quæ magis ab axe minore diſtat, minùs diſtante major eſt.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Datis axibus invenire duas conjugatas diametros æquales.

Sit Ellypſis cujus axes AB, CD, & inveniendæ ſint diametri conjugatæ æquales. Ducantur A C, AD quæ erunt æquales, dividantur bifariam in H & K, ducanturque E H, E K; dico eas diametros eſſe conjugatas, & æquales.



Demonſtratio. Primò in triangulis AEC, AED, anguli ſunt æquales, & baſes, quare in triangulis CEK, DEH, cum latera CE, ED. Item DH, CK, & anguli C & D ſint æquales; erunt baſes EH, EK, æquales, & anguli KEC, HED, quibus ſublatis ex angulis rectis, reſtant AEK, AEH æquales; ergo (*per præcedentem*) ſemidiametri EKI, EHL ſunt æquales: deinde cum angulus CEA ſit rectus circulus deſcriptus ex K per A, tranſit per E; ergo KA, KE ſunt æquales, & anguli KEA, KAE, ſunt oſtenſi æquales: ergo alterni KEA, EAH ſunt æquales, & conſequenter lineæ A D, I E ſunt parallelæ.

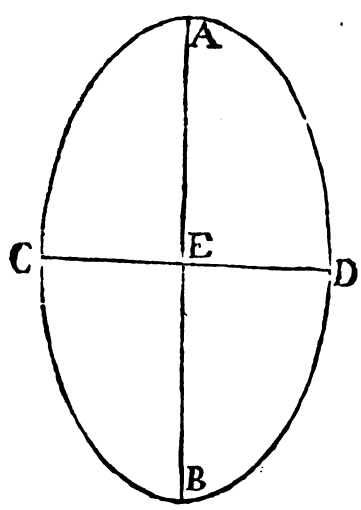
PROPO

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Omnis diameter Ellypsin bifariam dividit; diametri conjugatæ Ellypsin quadrifariam dividunt, & sectores oppositi ad verticem sunt æquales.

Sit primò diameter A B, dico Ellypsin ab ea dividi bifariam, per singula enim puncta A B, intelligantur ductæ ordinatim applicatæ, cum omnes, & singulæ bifariam dividantur (*ex defin. diametri*) tota Ellypsis bifariam dividetur.



Secundò, sint duæ diametri A B, C D se intersecantes in centro E, clarum est sectores ad verticem esse æquales.

Demonstratio. Cum enim AB, & C D bifariam dividant Ellypsin;erunt sectores ACB,CAD semissis Ellypseos: ergo æquales, & ablato communi CEA, restant æquales AED, CEB oppositi scilicèt sectores.

Tertiò,sint AB, CD, diametri conjugatæ: dico Ellypsin divisam esse quadrifariam. Cùm enim omnes lineæ applicatæ ad EA sint parallelæ lineæ CD & sint divisæ bifariam; erunt sectores CEA, AED æquales, sunt item oppositi æquales: ergo Ellypsis quadrifariam est divisa.

PROPOSITIO XVI.

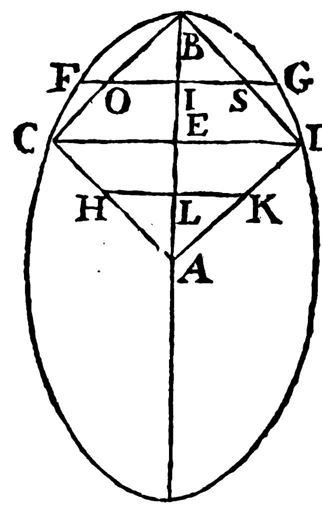
Theorema.

Linea ex centro dividens Subtensam bifariam, dividit & sectorem, & ductæ aliæ Subtensæ, à vertice abscindunt segmenta æqualia.

Sit diameter AB dividens bifariam in E subtensam C D: dico totum sectorem CAD divisum esse bifariam.

Intelligantur enim ductæ parallelæ lineæ CD, quia linea CD dividitur bifariam à diametro A B, omnes lineæ FG illi parallelæ, dividentur bifariam (*per coroll.* 12.) ergo totum segmentum CBD divisum est bifariam. Pariter ductis in triangulo CAD parallelis C D, qualis H K, cum omnes, (*per* 4.6.) bifariam dividantur,totum triangulum C A D bifariam dividitur.

Secundò ductis CB, BD, erunt segmenta CBF, DGB æqualia, si nempe ex segmentis æqualibus CEB, DEB, auferantur æqualia triangula CEB, D E B vel cum lineæ IF, I G sint æquales, ablatis



æqualibus IO, IS, restant FO,FG æquales; quod cum de omnibus probari possit, erunt segmenta æqualia.

COROLLARIUM.

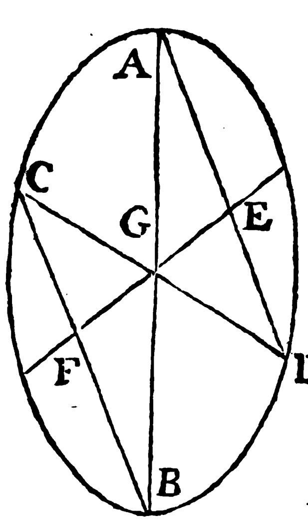
Dato sectori D A B, æqualem abscindemus, si ex puncto D ad diametrum A B ordinatim applicatam DEC ducamus.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si ab extremitatibus diametri ducantur parallelæ intra Ellypsin, illæ æquales erunt & linea illas conjungens erit diameter.

Ex punctis A & B diametri AB, ducantur parallelæ AD, BC; dico illas esse æquales, dividantur enim bifariam in E & F; ducaturque F E hæc erit diameter (*per coroll.*1. 12.) & transibit per



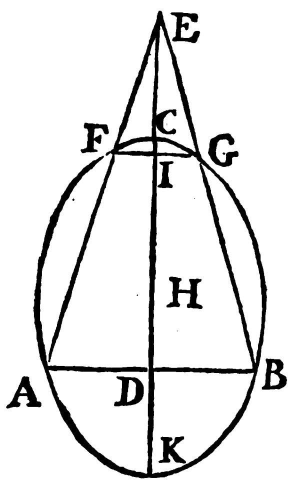
centrum G, & cum triangula A G E, BGF sint æquiangula & AG, B G æquales, erunt AE, F B æquales; & consequenter A D, C B: ducantur CG, GD, patet angulos ad verticem EGD, CGF esse æquales; ergo & lineas C G, G D in directum jacere.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si ex duabus extremitatibus ordinatim applicatæ duæ lineæ in eodem puncto diametri concurrentes, sectionem secent, linea conjungens erit ordinatim applicatæ parallela.

Sit diameter CD, ordinatim applicata AB, eruntque AD, DB æquales; ducantur AE, BE, convenientes in E, & secantes Ellypsin in punctis F & G; dico lineam F G esse ordinatam, & parallelam A B.



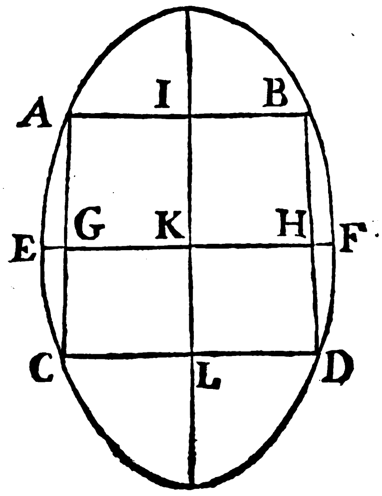
Demonstr. Ducatur ex F linea FI parallela AB, donec secet lineam E B in puncto G; dico punctum G esse in Ellypsi; nam (*per* 4.6.) cum A D, FG sint parallelæ, erit ut DE ad EI; ita tam D A ad FI, quàm DB ad IG; ergo F I, I G sunt æquales, ergo punctum G est in Ellypsi; ergo in puncto concursus.

Conversæ item facilè probantur, nempe si fuerint AB, FG parallelæ, & AB dividatur bifariam in D, ED esse diametrum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si duas parallelas in Ellypsi, jungant duæ lineæ, quas secet alia parallela; erunt sagittæ illius æquales.



Lineas A B, C D parallelas jungant duæ lineæ AC, BD, & in eas incidat alia parallela EF; dico sagittas ejus EG, HF esse æquales.

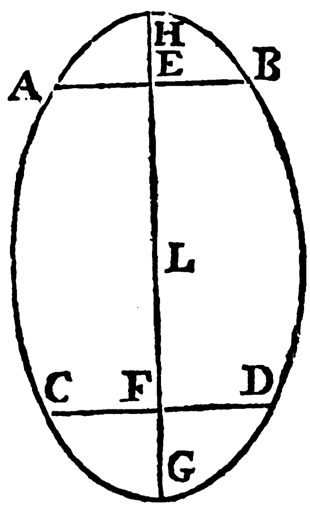
Demonstratio. Divisis lineis AB, CD bifariam in I & L, ducatur diameter IL, quæ omnes applicatas, ut EF bifariam dividet: erunt ergo KE, KF æquales, & ablatis æqualibus GK, KH, eo quod AI, IB; CL, LD sint æquales, restabunt EG, HF æquales.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Data Ellypsis centrum reperire.

Proponatur Ellypsis, cujus centrum reperiendum sit; ducantur utcumque duæ parallelæ A B, CD, quæ bifariam dividantur in E & F; ducatur



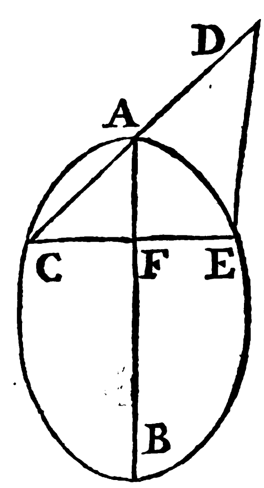
linea EF, hæc (*per cor.* 12.) erit diameter; quare si H G bifariam dividatur in L, erit L centrum Ellypseos.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Data diametro ordinatam ducere ex quocumque puncto.

Sit data diameter A B, sitque ducenda ordinatim



applicata ex C. Ducatur CAD, sintque CA, AD æquales, tum AB ducatur parallela DE, Ellypsin attingens

attingens in puncto E; dico CFE esse ordinatim applicatam, seu bifariam divisam.

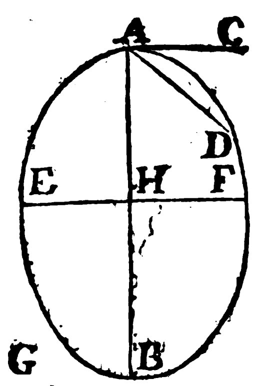
Demonstratio. (*Per* 4. 6.) ita est CA ad AD, sicut FC ad FE; sed primæ sunt æquales; ergo & secundæ.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Omnis linea per extremitatem diametri ducta, ordinatim applicatis parallela, est tangens.

Linea AC ducatur per extremitatem diametri AB parallela ordinatim applicatis: dico AC esse tangentem. Si enim non sit tangens, intra sectio-



nem cadat ut AD; cum AD sit parallela EF ordinatim applicatæ, bifariam à diametro dividi debet; ergo non attinget diametrum in puncto A.

COROLLARIUM I.

Sequitur ex eo, duas tangentes per extremitatem diametri ductas esse parallelas, ut AC, BG.

COROLLARIUM II.

Facilè per datum punctum A tangentem ducemus; nam invento centro & ducta diametro AB; ducta item ordinata quacumque; si per A, ei ducamus parallelam, tangentem duxerimus.

COROLLARIUM III.

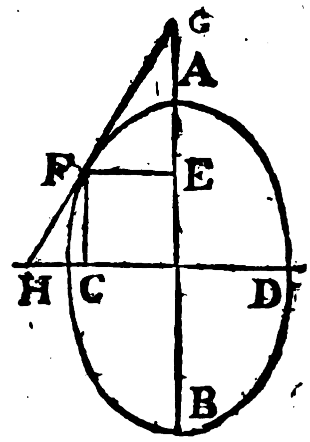
Diameter per tactum ducta, dividit bifariam parallelas tangenti; si enim non essent ordinatæ, duci possent aliæ ordinatæ, quibus tangens esset parallela.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Omnis linea inter duas diametros Ellypsin tangens, cum utraque diametro convenit extra sectionem.

Sint diametri conjugatæ AB, CD, & Ellypsin tangat linea HG inter duas diametros: dico lineam HG cum utraque diametro convenire extra Ellypsin. Ex puncto contactus F ducantur FE, FC applicatæ ad diametros: eruntque igitur FC, AB parallelæ, & cum linea HF, conveniat in F, cum una parallelarum, nempe CF, producta cum alia conveniet, nempe in G.



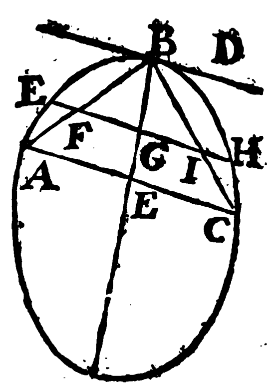
PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

In quocumque segmento, maximum triangulum habet verticem in diametro dividente bifariam basin illius: Et tam segmentum, quàm triangulum bifariam ab eâ dividitur.

Sit segmentum ABC, cujus basis AC bifariam dividatur in E, à diametro BE: dico triangulum ABC esse maximum, quod intra tale segmentum inscribi possit.

Intelligatur enim tangens BD.



Demonstr. Cum alia omnia triangula non attingant tangentem BD, quæ est parallela lineæ AC, minora erunt quam ABC.

2. Certum est omnes lineas basi AC parallelas dividi bifariam à diametro. Remanent item æquales sagittæ EF, IH, quod de aliis omnibus ostendi potest: ergo segmenta AEB, BHC sunt æqualia.

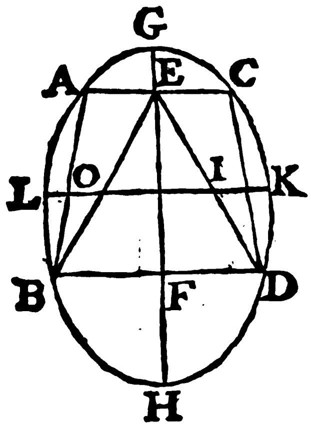
PROPOSITIO XXV.

Theorema.

In Ellypsi lineæ conjungentes parallelas, abscindunt segmenta æqualia & vicissim.

Multiplex est casus istius propositionis.

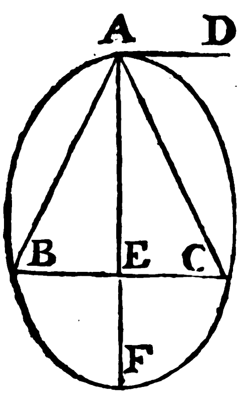
Proponantur lineæ AB, CD conjungentes parallelas AC, BD; dico segmenta ALB, CKD esse æqualia. Divisis lineis AC, BD bifariam in F & E; Ducatur EF quæ (*per coroll.12.*) erit diameter, dividetque divideturque totam Ellypsin bifariam. Item segmenta AGC, BGD dividuntur bifariam: nam si

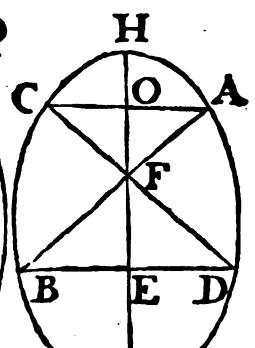


ducerentur quotcunque volueris applicatæ, in segmento B H D, singulæ bifariam à diametro dividerentur; ergo & totum segmentum secundum methodum indivisibilium. Pariter triangula BEF, FED, super æqualibus basibus BF, FD sunt æqualia, & triangula ABE, EDC; quibus omnibus hinc inde sublatis, restant segmenta AB, CD æqualia.

Vel (*per* 19.) sagittæ LO, IK, & aliæ quæcumque sunt æquales: ergo & segmenta A B, C D, quæ in hujusmodi sagittas resolvi possunt, erunt æqualia.

Secundò lineæ AB, AC conjungant lineas BC, AD parallelas, hoc est A D tangens sit parallela lineæ BC; dico segmenta AB, A C esse æqualia; divisâ enim BC bifariam in E, linea AE erit diameter (*per* 21.) dividetque bifariam Ellypsin, segmentum BFC, & triangulum BEC; quibus partibus hinc inde sublatis restant segmenta æqualia AB, AC.





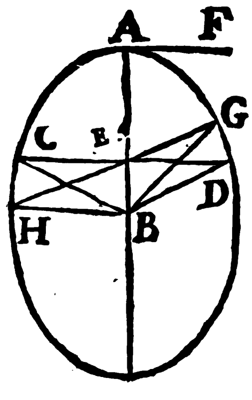
Denique lineæ AB, CD conjungant parallelas AC, BD; dico segmenta ACB, DAC esse æqualia. Dividatur BD bifariam in E, ducaturque E F. Ostendam facile AC dividi bifariam in O; quia ita est AO ad BE, sicut OF ad FE, propter similitudinem triangulorum. Pariter ita est C O ad E D, sicut OF ad FE, & cum BE, ED sint æquales, CO, OA æquales erunt; quare OF erit diameter dividens Ellypsin æqualiter, sicut & segmentum BGD, & triangulum BFD, quibus sublatis restant DFH, BFH æqualia, & additis segmentis C F H, AFH, fiunt segmenta C A D, ACB æqualia. Conversæ hujus propositionis facile probari possunt, nempe si segmenta fuerint æqualia, lineas, quæ his lineis conjunguntur, esse parallelas, quia si parallelæ non essent ductis parallelis fierent alia segmenta æqualia: & pars & totum æqualia essent.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Linea sectores æquales hinc inde à diametro sumptos conjungens ab ea bifariam dividitur, estque tangenti parallela.

Sint sectores æquales ABC, ABD; dico lineam CD à diametro bifariam dividi, & esse tangenti AF



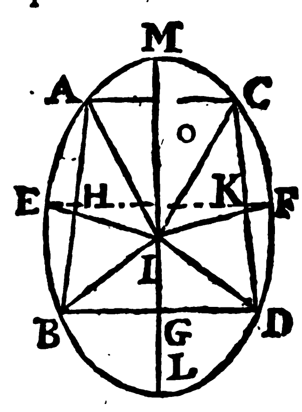
parallelam; si enim non esset parallela tangenti, seu non esset ordinatim applicata, sit HEG: segmenta GAE, HAE essent æqualia, quia nempe si omnes parallelæ H G ducerentur, dividerentur omnes bifariam à diametro BA. Pariter triangula HBE, BEG, habentia eundem verticem, & bases æquales, essent æqualia contra suppositionem.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Sectores segmentorum æqualium æquales sunt, & triangula maxima segmentis inscripta æqualia sunt.

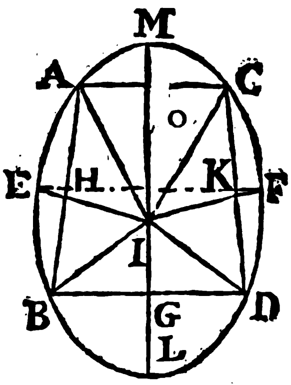
Sint segmenta AEB, CFD æqualia, eruntque (*per* 25. *hujus*) lineæ AC, BD parallelæ; quibus divisis bifariam in G & O, linea O I G erit diameter. Dividatur hæc diameter bifariam in I. ducanturque lineæ AI, I B, C I, ID: dico sectores AIB, CID æquales esse.



Demonstr. Triangula A I C, B I D, segmenta AMC, BLD dividuntur bifariam; quare hinc inde sublatis partibus æqualibus, restant sectores AIB, CID inter se æquales.

Item ablatis segmentis æqualibus AEB, CFD, restabunt triangula AIB, CID æqualia, dividantur A B, C D bifariam in H & K, ducanturque diametri I H E, I K F, fiantque triangula A E B, CFD, hæc (*per* 24.) erunt maxima, assero ea æqualia esse. Nam dividuntur bifariam à diametris, quare sectores

sectores A I E, C I F, erunt æquales, & additis æqualibus AIM, C I M, fient totales MIE, M I F



æquales, eritque linea E F parallela tangenti per punctum M ductæ, & lineæ AC (*per præcedentem*) ergo (*per 25.*) segmenta AE, CF æqualia sunt, quæ ablata ex dimidiis segmentis æqualibus, nempe AHE, CKF, relinquunt triangula AHE, CKF æqualia, & consequenter tota triangula AEB, CFD æqualia sunt.

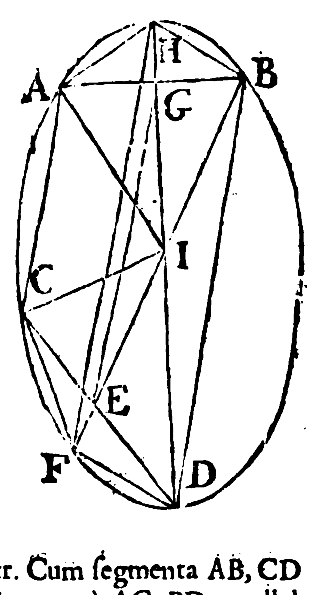
In omnibus aliis casibus idem ostendere possumus.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Diametri proportionaliter secantur, à lineis auferentibus segmenta Ellypsis æqualia.

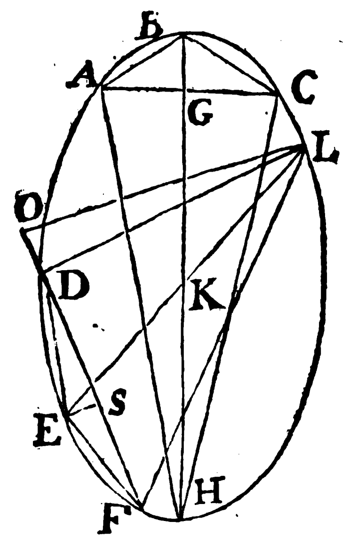
Lineæ AB, CD auferentes segmenta Ellypsis æqualia, dividant suas diametros, à quibus scilicet dividuntur bifariam in punctis E & G, dico ita esse IG ad GH, ut IE ad EF; Ducantur CI, ID, AI, IB, AH, HB, CF, FD, item BD, EG, FH, AC.



Demonstr. Cum segmenta AB, CD sint æqualia, erunt (*per 25.*) AC, BD parallelæ, quia autem in præcedente demonstravimus, segmenta AH, CF esse æqualia, erunt AC, FH parallelæ; demonstravimus item triangula IGB, I D E esse æqualia, item AHG, CFE, ergo ita est triangulum IGB, ad triangulum AGH, ut IG ad GH cum habeant bases similes, & angulos in G æquales, pariter triangulum E I D ad triangulum C E F, se habet, ut EI ad EF, ergo ita est EI ad EF, ut IG ad GH; quod erat demonstrandum. Posset idem probari ostendendo lineam E G esse parallelam lineæ F H.

COROLLARIUM

Non tantum triangula maxima in segmentis æqualibus minoribus inscripta sunt æqualia, sed etiam in segmentis majoribus; Sint enim segmenta æqualia ABC, DEF; Sintque triangula ABC, DEF æqualia, dico triangula DLF, AHC esse æqualia.



Demonstr. Cum (*per præcedentem*) ita sit BG ad GK, ut E I ad I K, componendo ita erit EK, seu KL ad EI, sicut KH ad BG, & iterum componendo, ita erit I L ad E I, sicut HG ad BG; Est autem ut E I ad I L, ita triangulum DEF ad triangulum DLF, cum habeant eandem basin, & ut BG ad GH, ita triangulum ABC, ad triangulum AHC, ergo ut triangulum ABC ad triangulum AHC, ita triangulum D E F ad triangulum DLF, sed primum & tertium æqualia sunt: ergo secundum & quartum æqualia sunt; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Si Axis & altera diameter à suis ordinatis proportionaliter secentur, erit ut rectangulum sub segmentis Axis ad rectangulum sub perpendicularibus alterius diametri, ita vicissim quadratum applicatæ huic diametro, ad quadratum applicatæ ad Axem.

Sit Ellypsis, cujus Axis B H, & quæcumque diameter EL, ab applicatis AC, DF, proportionaliter secentur in G & I, ducanturque perpendiculares LO, ES; Dico ita esse quadratum AC ad quadratum DF, ut rectangulum sub perpendicularibus LO, E S ad rectangulum sub BG, GH.

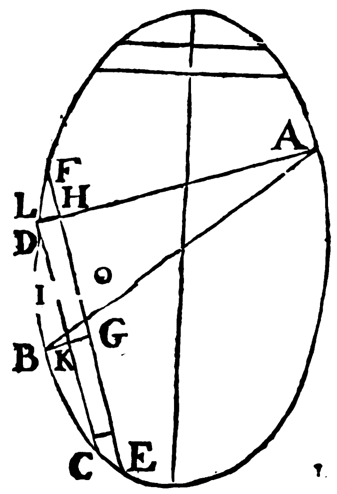
Demonstr. (*Per præcedentem & ejus coroll.*) segmenta ABC, DEF; AHC, DLF sunt æqualia, ut etiam triangula, quare (*per 5.6.*) ita est AC ad DF, sicut perpendicularis ES ad BG, item & sicut LO ad GH, cùm triangula æqualia reciprocent bases & altitudines, sed quadratum ES ad rectangulum ES, LO, se habet ut ES ad LO, seu ut BG ad GH, seu ut quadratum B G ad rectangulum BGH, ergo ut quadratum ES ad rectangulum ES, LO, ita quadratum BG, ad rectangulum BGH, & permutando ut rectangulum ES, O L ad rectangulum BGH, ita quadratum E S ad quadratum BG; sunt autem ut ES ad BG, ita reciprocè AC ad DF & earum quadrata similiter reciproca erunt, ergo ut rectangulum E S, LO ad rectangulum BGH, ita quadratum AC, ad quadratum FD.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si diameter obliqua dividatur utcumque ab applicatis, erunt rectangula sub perpendicularibus ad invicem, sicut rectangula sub partibus diametri.

Sit Ellypsis diameter quæcumque A B, divisa ab applicatis CD, EF, in punctis I, & O, sintque ductæ perpendiculares BG, AL, dico ita esse rectangulum BK, AL ad rectangulum BG, HA, ut rectangulum BIA ad rectangulum BOA.



Demonstratio. Triangula B I K, L A I sunt æquiangula ut patet: ergo ita est BK ad LA, sicut BI ad IA. Pariter ita est BG ad AH, sicut BO ad OA. Ratio rectanguli BK, LA ad rectangulum BG, HA, componitur ex ratione BK ad BG, seu BI ad BO, & ex ratione LA ad HA, seu IA ad OA, quæ est BIA ad BOA: ergo ita est rectangulum BK, LA ad rectangulum BG, HA; sicut rectangulum BIA ad rectangulum BOA.

PROPOSITIO XXXI.

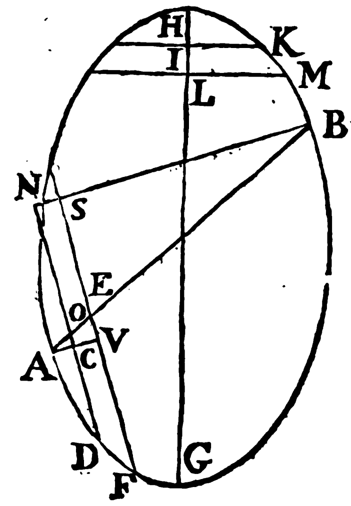
Theorema.

In Ellypsi quadrata applicatarum, ad quamcumque diametrum, sunt inter se, ut rectangula sub segmentis diametri.

Definitio Ellypsis ferebat quadrata applicatarum ad axem se habere ut rectangula sub segmentis diametri; poterat tamen dubitari, an hanc proprietatem haberent omnes applicatæ ad alias diametros, quod demonstro hîc.

Sit ergo Ellypsis diameter quæcumque AB, sintque applicatæ OD, EF; dico ita esse quadratum OD ad quadratum EF, ut rectangulum A O B ad rectangulum A E B. Sit enim axis H G qui dividatur proportionaliter sicut A O B diameter divisa est in punctis I & L, applicenturque IK, LM, & agantur ad rectos BSN, ACV.

Demonstratio. Ita est rectangulum A C, B N ad rectangulum HIG, ut quadr. IK ad quadratum OD. Et pariter ita est rectangulum AV, SB ad rectangulum H L G, ut quadratum L M ad quadratum E F. (*per* 29.) & convertendo. Sed ut quadratum I K ad quadratum L M, ita rectang.



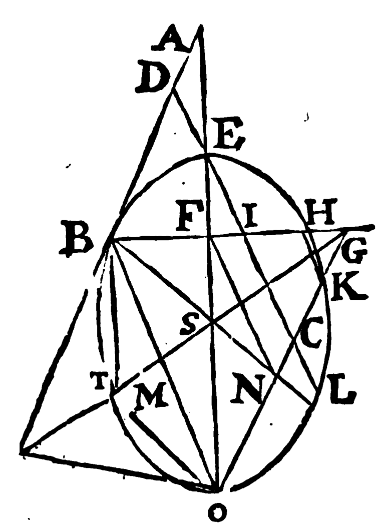
HIG ad rectangulum HLG; ergo ita erit rectangulum sub A C, N B, ad rectangulum sub AV, SB, ut quadratum OD ad quadratum EF. Sed (*per* 30.) Ita est rectangulum A O B ad rectangurum sub AC, N B, sicut rectangulum AEB ad rectangulum sub AV, SB. Ergo ex æquo ita erit rectangulum A O B ad rectangulum AEB sicut quadratum O D ad quadratum E F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

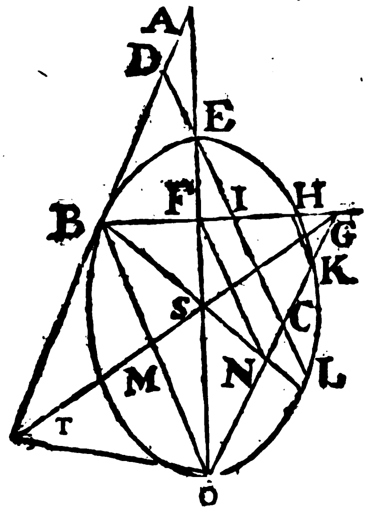
Si tangens Ellypsin conveniat cum diametro, & per tactum ducatur ordinata, & alia conjungens extremitatem diametri, cui parallela ducatur per verticem, hæc in eo puncto bifariam secabitur.

Linea AB Ellypsin tangat in B, sitque ordinata BH, & BO per extremitatem diametri O, cui sit parallela D E I: dico DE, EI esse æquales. Divisâ BO bifariam in M; ducatur diameter M S, concurrens cum BH in G, ducatur OKG, H K, & F N.



Demonstratio. Primò (*per* 18.) BO, HK sunt parallelæ, sicut ex constructione D L. Ostendo item F N esse parallelam B O; sume enim M T æqualem

æqualem M S, ducanturque TO , TB; facile ob similitudinem triangulorum oppositorum ad M; ostendam lineas TO , BS ; BT , SO esse paralle-



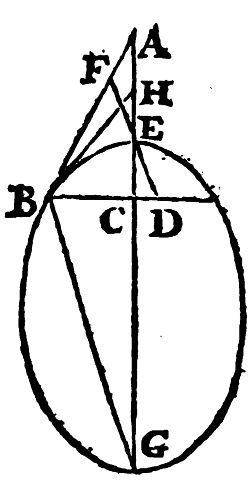
las; ergo (*per* 4.6.) ita erit ON ad NG, sicut TS ad SG, & pariter ita BF ad FG, sicut TS ad SG; ergo ita erit BF ad FG, sicut ON ad NG; ergo per eandem BO , & FN sunt parallelæ , & cum HK sit adhuc parallela ; erit ut B F ad F H , ita ON ad NK ; sed primæ sunt æquales, ergo & secundæ , ergo OK est ordinatim applicata ad diametrum B SN , & (*per* 22.) erit parallela tangenti AB ; item cum EL, BO, HK sint parallelæ; erunt sagittæ CL, EI æquales ; sunt item æquales EL, BO, & BO, DC , (*per* 34.1.*Eucl.*) ergo DC, EL sunt æquales inter se , & abjecta communi E C , restant DE , CL æquales , & consequenter DE, EI ; æquales erunt , quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si linea tangat Ellypsin & ducatur ordinata ; ut majus segmentum ad minus , ita secans ad exteriorem lineam & vicissim.

Sit ordinatim applicata B C, & AB tangens; dico esse, ut C G ad CE, ita GA ad AE ; ducatur FED lineæ B G parallela, eruntque F E, ED (*per præcedentem*) æquales.



Demonstratio, Triangula BCG, EDC, ob parallelas F D, BG sunt æquiangula : ergo ita est C G ad C E ; sicut BG ad ED , (*per* 4.6.) hoc est ad FE, & *per eandem*, ut BG ad FE ita GA ad EA; quod demonstrandum erat.

Conversa hujus facile demonstrari potest , si nempe ita sit GC ad CE , sicut AG ad AE , AB esse tangentem ; si enim non sit tangens ponatur B H esse tangens ; ergo ita erit GC ad CE ; sicut GH ad HE , sed jam ita erat G A ad A E : ergo ita esset GA ad AE , sicut GH ad HE , quod fieri non potest ; nam ita esset alternando tota A G ad totam G H, sicut ablata AE ad ablatam H E ; ergo ita esset reliqua EG ad reliquam E G , sicut tota AG ad totam HG, quod evidenter falsum est, cum EG & EG sit eadem sibi ipsi æqualis ; ergo AG & HG æquales essent.

COROLLARIUM.

Cum sit ut GC ad CE , ita GA ad AE, erit rectangulum sub extremis G C , AE æquale rectangulo sub mediis GA, CE.

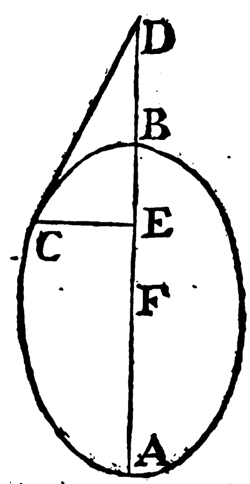
PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Si tangens Ellypsin , aut circulum cum diametro conveniat, & a tactu ordinatim applicetur linea : erit quadrato semidiametri æquale rectangulum sub distantiis applicatæ, & secantis à centro.

CD tangens Ellypsin , aut circulum, cum diametro A B conveniat in D , dico rectangulum DFE, quadrato FB esse æquale.

Demonstratio. Ita est (*per præcedentem*) A D ad D B , sicut A E ad BE , & componendo ut utraque AD , B D ad DB , ita utraque AE , EB ;



seu AB ad BE , & antecedentium dimidia eandem rationem habebunt ad consequentia , nempe ita erit D F ad D B , sicut F B ad BE, & alternando ita erit tota DF ad totam FB , sicut ablata DB ad ablatam BE ; ergo ita erit reliqua B F ad reliquam EF, ut tota DF ad totam BF ; quare rectangulum sub extremis B F , seu quadratum B F æquale est rectangulo sub mediis DF , FE ; quod erat demonstrandum.

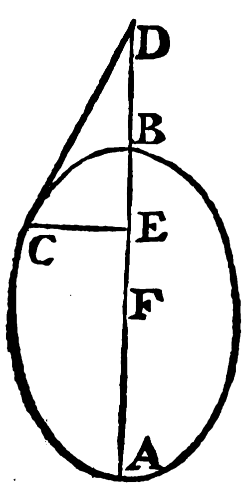
PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Si tangens Ellypsin aut circulum cum diametro conveniat, & à tactu ordinatim applicetur; erit rectangulum sub distantiis applicatæ, tum à centro, tum à secante, ad quadratum applicatæ, ut diameter ad parametrum.

Si fiat eadem constructio; dico rectangulum DEF ad quadratum C E esse, ut A B ad parametrum.

Demonstratio. Rectangulum DFE æquale est, (*per* 3.2.) rectangulo D E F, plus quadrato F E; item quadratum B F æquale rectangulo D F E, est etiam æquale (*per* 5. 2.) rectangulo A E B, plus



quadrato FE; quod si utrumque auferatur, erunt rectangula DEF, AEB æqualia, sed rectangulum AEB ad quadratum CE se habet ut diameter A B ad parametrum (*per coroll.*2. 7. *hujus*) ergo ita erit rectangulum DEF ad quadratum CE, ut diameter A B ad parametrum.

COROLLARIUM.

Sequitur FE distantiam applicatæ à centro, semidiametrum B F, & FD, à secante ad centrum usque esse continuè proportionales, cum quadratum mediæ æquetur rectangulo sub extremis.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si tangens cum diametro conveniat, erit rectangulum comprehensum sub secante & exteriori, æquale rectangulo comprehenso sub secante ad centrum usque; & sub exteriori ad applicatam usque.

Tangens C D cum diametro conveniat; dico rectangulum ADB æquale esse rectangulo FDE.

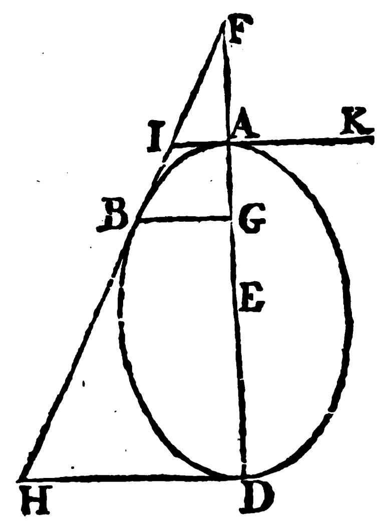
Demonstratio. (*Per præcedentem*) ita est tota DF ad totam BF sicut ablata BF ad ablatam E F; ergo est reliqua DB ad reliquam EB, ut tota D F ad totam BF; & componendo ut A D ad FB, ita DE ad BE; & rursus dividendo, ut AD ad F D, auferendo scilicet AF ex AD, ita DE ad DB, hinc rectangulum comprehensum sub extremis A D, B D, seu rectangulum A D B, æquatur rectangulo sub mediis FDE; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si linea Ellypsin, aut circulum tangat, sitque per tactum ordinatim applicata, & per extremitates diametri ei parallelæ ducta tangentem usque, rectangulum sub iis comprehensum, æquale erit quartæ parti rectanguli sub diametro & parametro comprehensi.

Tangens BF cum diametro concurrat in F, sitque ordinatim applicata BG, & per extremitates ejusdem diametri A & D ducantur tangentes DH, A I ad tangentem usque, sit item parameter AK; dico rectangulum, sub H D, AI contentum, esse æquale quartæ parti rectanguli sub A D, AK comprehensi.



Demonstratio. (*Per* 36.) rectangulum G F E æquale est rectangulo DFA; erit ergo ut quadratum GF ad rectangulum GFE, seu ut G F ad E F, ita quadratum GF ad rectangulum DFA; sed ratio quadrati GF ad rectangulum DFA, componitur ex ratione GF ad DF, seu B G ad H D, & ex ratione GF ad FA, seu BG ad AI, quare componendo ut quadratum G F ad rectangulum D F A, seu ut GF ad FE, ita erit quadratum B G ad rectangulum comprehensum sub AI, HD; ut autem GF ad F E, ita est rectangulum E G F ad rectangulum GEF, seu (*per* 35.) ad quadratum AE, quare ita erit rectangulum EGF ad AE quadratum ut quadratum B G ad rectangulum H D, AI & permutando, ut rectangulum EGF ad quadratum BG, seu ut DA ad A K, ita erit quadratum AE ad rectangulum H D, A I, sed ut DA ad AK; ita est quadratum DA ad rectangulum DAK, & ita quadratum A E ad quadrantem rectanguli DAK; ergo ut quadratum A E ad quadrantem rectanguli D A K, ita idem quadratum A E ad rectangulum sub H D, A I: ergo rectangulum H D, A I æquale est quadranti rectanguli DAK. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

COROLLARIUM I.

Eadem propositio potest intelligi de quibuscunque parallelogrammis, & Rhombis æquiangulis, qui se habent ut rectangula, & quadrata.

COROLLARIUM II.

Superiores propositiones intelligi debent de secunda diametro; sunt enim universales: quare si tangens cum secunda diametro conveniat, & à tactu ordinata ducatur, erit pariter quadratum secundæ semidiametri æquale rectangulo comprehenso sub distantia applicatæ à centro, & sub secante ad centrum usque.

Pariter ita erit rectangulum sub segmentis secantis ad centrum usque sumptæ ad quadratum applicatæ, ut parameter ad diametrum.

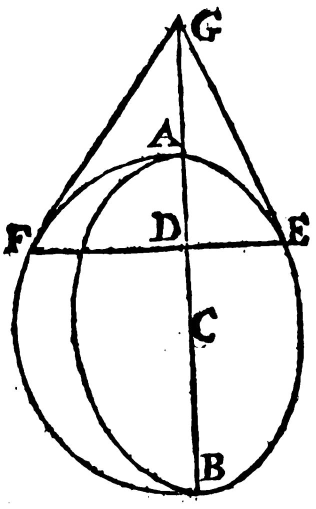
Denique ita sunt segmenta diametri ad tangentem, ut segmenta ad applicatam.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Si circa diametrum Ellypsis, circulus describatur, & ordinatim applicetur per idem punctum in circulo, & in Ellypsi, tangentes per hæc puncta ducta in eodem puncto diametri convenient.

Sit Ellypsis diameter A B, circa quam describatur circulus A F B, & ex eodem puncto D, applicentur in circulo quidem D F, quæ perpendicularis est, in Ellypsi DE; educanturque tangentes FG, GE: dico illas concurrere in eodem puncto G.



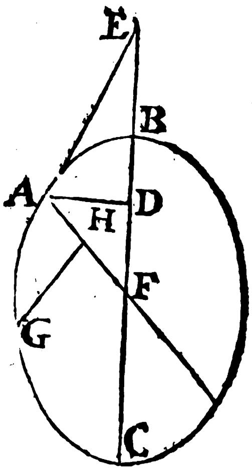
Demonstratio. (*Per* 35.) CD, CA & CG, tam respectu circuli, quàm respectu Ellypsis sunt continuè proportionales; ergo in utroque respondet eadem CG. Ergo idem punctum G.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Ex dato puncto ad Ellypsin tangentem ducere.

Proponatur primò quodcunque punctum A, in peripheria Ellypsis; ducaturque quæcumque diameter BC ad quam ordinetur A D, & BC, bifariam dividatur in F, tum fiant FD, FB, FE continuè proportionales, clarum est (*per* 34.) lineam AE tangentem esse; vel ducatur diameter AF, cui sit applicata G H, fiatque AE, parallela



GH, erit AE tangens. Punctum ex quo ducenda est tangens sit E; ducatur diameter E F, fiantque E F, BF, FD proportionales, & per D educatur ordinata DA; clarum est EA tangentem esse.

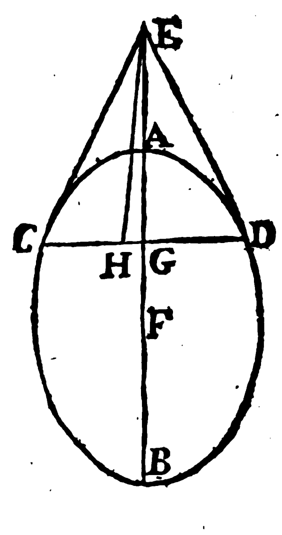
PROPOSITIO XL.

Theorema.

Tangentes per extremitates ejusdem ordinata ducta diametrum in eodem puncto secant, & vicissim si ex eodem puncto, &c.

Sit Ellypsis diameter AB, ad quam sit ordinata CD; educantur per C, & D tangentes CE, DE; dico illas occurrere diametro in eodem puncto E.

Demonstratio. Quia enim applicata secat diametrum in uno puncto G, tam respectu tangentis C E, quàm respectu DE, semper verum erit, ita esse FG ad FA, sicut FA ad FE; ergo eadem F E utrique respondet.



Secundò ex eodem puncto E, ducantur tangentes EC, ED, dico lineam CD esse ordinatim applicatam, nam ex C & D ducantur duæ ordinatim applicatæ, ostendam facile eas convenire in eodem

 puncto

puncto G, & cum debeant esse parallelæ, debent necessario esse una eademque linea.

COROLLARIUM.

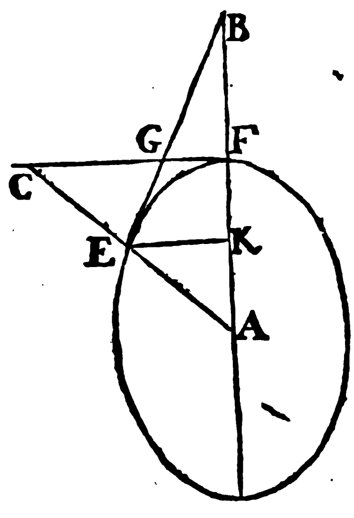
Si EC, ED tangentes conveniant in puncto E, sitque CD divisa bifariam in G, linea EG erit diameter. Si enim alia esset diameter, sit E H; ergo (*per primam partem,*) CD erit applicata, ergo (*ex defin.*) divisa bifariam in H contra suppositionem.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si per extremitates duarum diametrorum ducantur tangentes ad diametros usque, fient triangula æqualia.

Sint duæ diametri AB, AC; per quarum extremitates E & F ducantur tangentes F G, E B ad diametros usque; dico triangula BEA, CFA esse æqualia; ducatur enim applicata EK, quæ erit tangenti CF parallela.



Demonstratio. Triangula AKE, AFC sunt similia, ut patet; ergo sunt in duplicata ratione AK ad A F; hæc autem ratio duplicata est ut AK ad AB, cùm (*per* 34.) tres lineæ A K, A F, A B sint continuè proportionales; ergo ita est triangulum AKE ad triangulum ACF, ut AK ad AB, & (*per* 1.6.) ita est triangulum AKE ad triangulum ABE, ut basis AK ad basin AB. Ergo triangula A C F, AEB sunt æqualia. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Ablatô communi trapeziô AEGF, erunt triangula CGE, BGF æqualia.

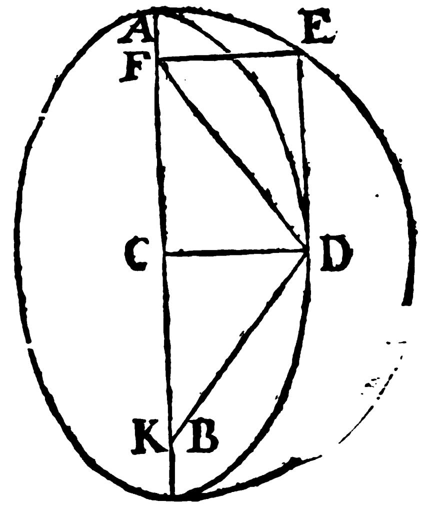
PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Si intervallô majoris Axis describatur circulus, & per extremitatem minoris Axis ducatur tangens occurrens illi circulo, ducaturque ex eo puncto applicata: erit rectangulum sub segmentis Axis æquale quartæ parti figuræ.

Sit Axis major A B, minor semiaxis C D; ducatur per D tangens D E, & applicetur E F, dico rectangulum A F B æquale esse quartæ parti figuræ.

Demonstratio. Rectangulum A F B æquale est quadrato FE, hoc est semiaxis CD; ergo est æquale quartæ parti figuræ.



COROLLARIUM.

Vides quomodo inveniendus sit focus. Nam in Ellypsi focus, seu polus, aut punctum ex comparatione, est illud quod ita dividit Axem majorem, ut rectangulum A F B, æquale sit quartæ parti figuræ, aut quadrato semiaxis.

PROPOSITIO XLIII.

Theorema.

Linea ab umbilico ad extremitatem minoris Axis ducta, æqualis est semiaxi majori.

Sit umbilicus F, jungaturque FD, dico eam æqualem esse lineæ AC.

Demonstr. (*Per præcedentem*) rectangulum AFB æquale est quadrato CD, & addito quadrato FC utrinque, cum rectangulum AFB plus quadrato FC, æquale sit (*per* 5.2.) quadrato AC; & quadratum CD, plus quadrato FC, æquentur quadrato FD, (*per* 47. 1.) erunt quadrata AC, FD æqualia, & consequenter lineæ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Facilè ex his data Ellypsi ejus umbilicum inveniemus; si enim ex puncto D, intervallo semiaxis majoris AC, arcum describamus, secantem axem majorem in puncto F, aut K, ea puncta erunt foci, ut patet.

PROPOSITIO XLIV.

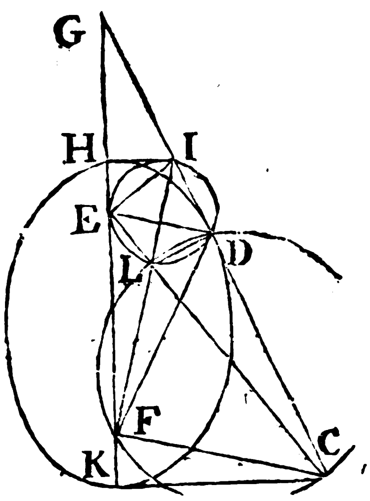
Theorema.

Si ab umbilicis ad tactum ducantur lineæ; hæ cum tangente æquales angulos comprehendent.

Sint umbilici E & F, & linea tangens C D G, tactus D, ducantur ED, DF; dico angulos EDG, FDC æquales esse. Ducantur tangentes HI, KC. Junganturque EC, IF, LD, FC, EI,

Demonstr. Primò (*per* 37.) rectangulum sub KC, HI, est æquale quartæ parti figuræ; ergo & rectang. KEH.

KEH quare (*per* 14. 6.) ut KC ad KE, ita EH ad HI, & cum anguli ſint recti in K, & H, triangula EHI, EKC erunt ſimilia, & anguli KEC, & HIE æquales: ſunt autem HEI, & HIE æquales uni recto, ergo HEI, & FEC æquantur uni recto, ergo reliquus IEC æqualis eſt uni recto. Eôdem modô oſtendam rectum eſſe CFI.



Secundò oſtendere debeo lineam LD eſſe perpendicularem ad IC. Supponatur non ducta tangens ID, & ſuper LI, LC, quæ non jacent in directum, deſcribantur circuli, hi ſe ſecabunt in duobus punctis, ſint hæc puncta L & D, tum ducantur lineæ ID, CD. Cum anguli LDC, LDI ſint recti lineæ ID, DC in directum jacent, ergo coincidunt cum priore tangente.

Denique cum anguli ELI, FLC oppoſiti ad verticem ſint æquales; & angulo ELI, æqualis ſit EDI, ut pote inſiſtens eidem arcui; item angulo FLC, æqualis ſit FDC, propter eandem rationem erunt EDI, FDC æquales.

COROLLARIUM I.

Anguli IEC, IFC ſunt recti.

COROLLARIUM II.

Linea LD perpendicularis eſt ad IC.

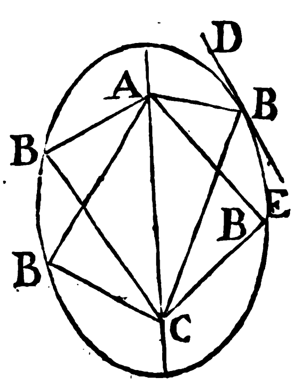
COROLLARIUM III.

Anguli LDE, LDF ſunt æquales.

PROPOSITIO XLV.

Theorema.

Si luminoſum ſtatuatur in uno foco, ſpeculi Ellyptici, reflexio fiet ad alium focum.



Mirabilis eſt hæc proprietas Ellypſis. Sit igitur corpus reflexivum Ellypticum; ſitque radius quilibet AB, procedens ab uno foco A, & incidens in ſuperficiem Ellypticam, dico radium reflexum illi reſpondentem, tranſire per punctum C. Cum enim in lineis curvis, angulos metiamur in ordine ad tangentem, ſi per B intelligatur duci tangens DBE, cum anguli ABD, CBE ſint æquales, & anguli incidentiæ & reflexionis tales eſſe debeant, radius AB, reflectetur in BC.

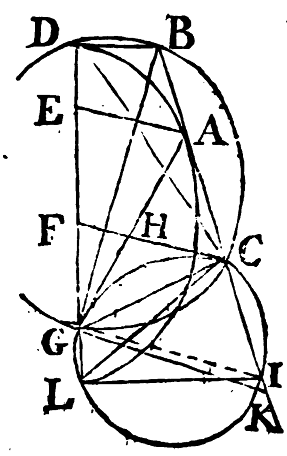
PROPOSITIO XLVI.

Theorema.

Si Ellypſin tangat recta linea, & à tactu ad focos ducantur duæ lineæ, & à centro ducatur parallela minori ad tangentem uſque, lineæ ducta à verticibus ad tale punctum, comprehendent angulum rectum.

Linea AB tangat Ellypſin in puncto A; ducanturque ex focis E & G, duæ lineæ EA, AG, & ex puncto F, ducatur FC lineæ AE parallela, junganturque DC, LC, dico angulum DCL eſſe rectum. Producatur AC in K, ſintque AC, CK æquales, jungaturque GK Ducantur item perpendiculares, ſeu tangentes DB, LI, item GI, BG.

Demonſtratio. Cùm EF, FG ſint æquales, ſicut



AC, CK; & EA, FC ſint parallelæ, erit GK iiſdem parallela; ergo angulus EAB, ſeu (*per* 44.) GAC erit angulo K æqualis; ergo latera AG, GK ſunt æqualia; & in triangulis AGC, GCK, cum latera ſingula ſingulis ſint æqualia, erunt anguli in C æquales, & conſequenter recti. Deſcribatur ſuper linea GI, circulus tranſiens per G & I, & cum anguli GCI, GLI ſint recti, tranſit hic circulus per L & C. Pariter ſi ſupra lineam BG deſcribatur alius circulus, cum anguli BCG, BDG ſint recti, tranſibit per D & C, eruntque anguli DCB, DGB eidem arcui DB inſiſtentes, æquales: ſicut anguli GCL, GIL, eidem arcui GL inſiſtentes, ſed jam probavimus ſuprà, angulos DGB, LIG eſſe æquales, ergo anguli GCL, DCA erunt æquales. Quare ſi ab angulo recto ACG, auferas angulum ACD, & pro illo ſubſtituas angulum æqualem GCL, erit angulus DCL rectus. Quod erat demonſtrandum.

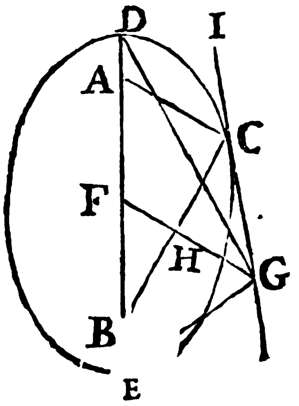
PROPO

PROPOSITIO XLVII.

Theorema.

Si ex focis Ellypsis, duæ lineæ in idem peripheriæ punctum concurrant; illæ simul sumptæ erunt æquales axi majori.

Sint foci A & B, à quibus ducantur duæ lineæ AC, BC, concurrentes in idem punctum C peripheriæ Ellypticæ; dico lineas AC, BC simul sumptas, æquales esse axi majori DE. Ex centro F, ducatur GF parallela AC, & per punctum C tangens GC.



Demonstr. Cùm FG, AC sint parallelæ, erunt anguli FGC, ACI æquales, sed ACI, BCG, (*per* 44.) sunt æquales, ergo HGC, HCG sunt æquales; ergo (*per* 5.) HC, HG sunt æquales, & HG erit dimidia lineæ CB; FH item est dimidia lineæ AC, (*per* 4. 6.) cum FB sit dimidia lineæ BA, ergo linea FG est dimidia linearum AC, CB simul; sed FG æqualis est semiaxi majori, cum angulus DGE (*per præcedentem*) sit rectus; ergo FG est æqualis semiaxi DF; & consequenter AC, CB æquales sunt toti axi; quod erat demonstrandum.

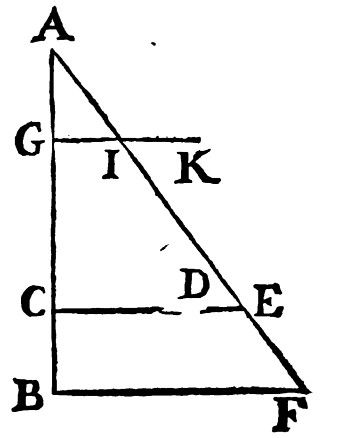
Huic propositioni innititur vulgaris methodus describendæ Ellypsis, ope funiculi.

PROPOSITIO XLVIII.

Theorema.

Circa datam diametrum datâ unâ applicatâ Ellypsin describere.

Sit data diameter AB, & applicata CD, in quocumque angulo DCA; perficienda proponitur Ellypsis. Quadrato CD, æquale fiat rectangulum BCE, ducatur linea AE, occurrens parallelæ BF in puncto F, sumptis quibuslibet punctis G, fiat rectangulo BGI æquale quadratum GK erit (*per* 7.) punctum K in peripheria Ellypsis.

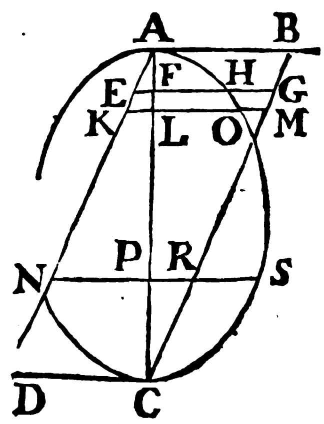


PROPOSITIO XLIX.

Problema.

Alia genesis Ellypsis.

Proponatur parallelogrammum ABCD in quo diagonalis AC, ducatur EFG, sitque FH media proportionalis inter EF, & FG, & LO media proportionalis inter KL & LM, & PS media inter NP, & PR, dico puncta H, O, S, pertinere ad Ellypsin.



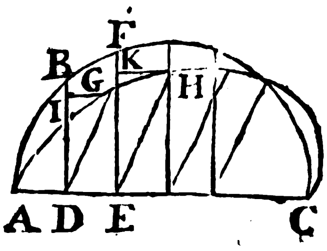
Demonstr. Ratio rectanguli EFG, ad rectangulum KLM, componitur ex ratione EF ad KL, seu AF ad AL, & ex ratione FG ad LM seu CF ad CL: sed ratio rectanguli AFC ad rectangulum ALC, componitur ex iisdem rationibus, nempe ex ratione AF ad AL, & ex ratione CF ad CL; ergo ita est rectangulum EFG, seu quadratum FH ad rectangulum KLM, seu quadratum LO; Ergo (*per def. Ell.*) puncta H & O pertinent ad Ellypsin. Idem similiter de quibuscumque aliis demonstrabo.

PROPOSITIO L.

Problema.

Alia genesis Ellypsis.

Sit semicirculus ABC, in quo ad diametrum AC, sint ductæ perpendiculares DB, EF, & aliæ quæcumque, quibus æquales ducantur inclinatæ eâdem inclinatione, hoc est, parallelæ inter se DG, EH, EH, & aliæ quæcumque, dico puncta G, H esse in eadem Ellypsi, cujus diameter AC.



Demonstratio. Cum DG, DB; EF, EH sint æquales, erunt eorum quadrata æqualia, sed quadratum DB æquale est rectangulo ADC, & quadratum E F, rectangulo A E C. Ergo ita est quadratum DG ad quadratum EH, sicut rectangulum ADC ad rectangulum AEC; ergo puncta G, H, & alia pertinent ad Ellypsin. Adde quod si ducantur GI, HK, & aliæ perpendiculares, puncta I & K ad aliam Ellypsin pertinebunt.

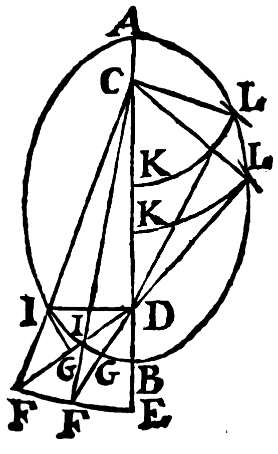
Demonstr. Cum lineæ DG,EH, sint parallelæ, erunt triangula EGD, KHE, æquiangula; ergo ita erit DI ad DG, seu DB; sicut EK ad EH, seu EF. Ergo pariter ostendam, ita esse quadratum DI ad quadratum EK; sicut rectangulum A D C ad rectangulum AEC,ergo (*ex defin.*)puncta A,I, K, C, ad eandem Ellypsin pertinent, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LI.

Problema.

Ellypsin describere.

Praxis per funiculum vix in Charta adhiberi potest, eò quòd nec clavos umbilicis, nec funes



adhibere possumus. Proponatur linea AB pro futura Ellypsis diametro, in qua determinentur umbilici C & D sit BE æqualis BD, & ex puncto C, ut centro, intervallo C E, circulus describatur, eritque C E æqualis axi majori A B; ducantur quæcumque lineæ C F, junganturque D F, quæ dividantur bifariam in puncto G, educanturque perpendiculares G I, dico puncta I, pertinere ad Ellypsin.

Demonstratio. In triangulis IGF, IGD, (*per* 4. 1.) sunt latera I D, I F æqualia; ergo latera CI, I D æqualia sunt lineæ C F, seu C E, hoc est axi majori: ergo puncta I (*per* 45.) pertinent ad Ellypsin.

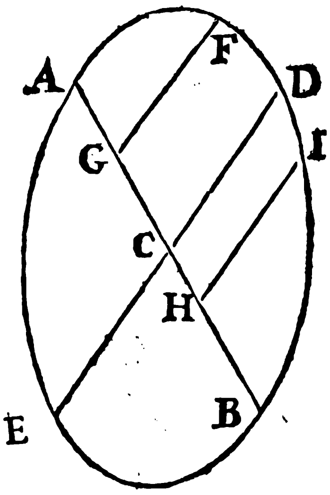
In idem recidit alia praxis. Sit pariter CE æqualis axi majori, fiat ex C, ut centro, quilibet arcus K L, sumaturque circino reliquum intervallum K E, & ex D, ut centro, intervallô K E, arcus secans priores in punctis L; dico puncta L pertinere ad Ellypsin propter eandem rationem.

PROPOSITIO LII.

Theorema.

Si in Ellypsi conjugatæ diametri æquales fuerint; erunt applicatarum quadrata, æqualia rectangulis sub segmentis.

Proponantur in Ellypsi duæ diametri æquales A B, E D. Dico quadrata applicatarum, ut G F æqualia esse rectangulis sub segmentis, nempe rectangulo AGB.



Demonstratio. Cum ita sit quadratum G F ad quadratum C D, sicut rectangulum A C B ad rectangulum A G B, & quadratum C D æquale sit rectangulo ACB, seu quadrato AC, cùm diametri AB, CD sint æquales; quadratum G F æquale erit rectangulo AGB.

COROLLARIUM.

Si fieret circulus circa diametrum A B; quæ similiter divideretur in G, applicata in circulo in puncto G, æqualis esset applicatæ G F, sed incideret perpendiculariter, in Ellypsi non item.

LIBER TERTIUS

De Hyperbola.

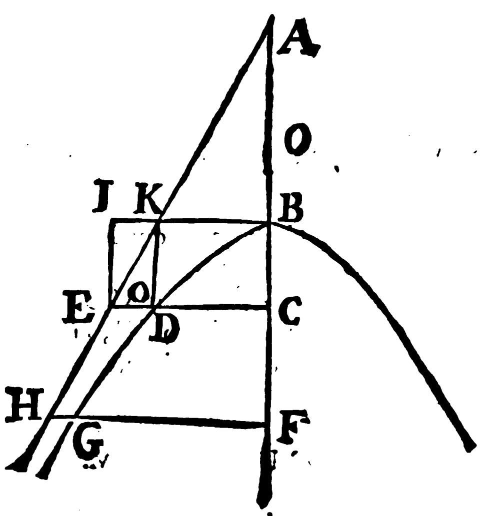
DEFINITIONES.

I. HYPERBOLA est figura lineâ curvâ contenta, in qua ordinatarum quadrata, magis crescunt, quàm crescant sagittæ, seu interceptæ inter ordinatas & verticem. Ut autem non inconcinnè, sed cum aliqua regula crescant; hanc regulam ponimus, nempe ut assumatur extra hyperbolam aliqua linea quæ sit A B pro diametro, fiatque ut B C ad CD, ita CD ad CE. Ducaturque AE quæ producatur, natura hyperbolæ hoc habet, ut G F sit media proportionalis inter sagittam B F & H F, nempe ut quadratum GF æquale sit rectang. BFH.

Ex qua proprietate datum est illi nomen hyperbolæ; ductâ enim lineâ BK, quæ sumatur pro mensurâ quadratorum applicatarum, dicaturque parameter, seu latus rectum; in parabola rectangulum comprehensum sub latere recto & sagittâ æquale est quadrato applicatæ.

In Ellypsi quadratum applicatæ deficit à rectangulo sub sagittâ, & latere recto.

In hyperbola verò quadratum applicatæ ut CD æquale rectangulo C I, atque adeò superat rectangulum CK comprehensum sub sagittâ, & latere recto, ita ut excessus sit parallelogrammum IO, cujus unum latus KO, æquale est sagittæ BC, & est simile rectangulo comprehenso sub AB, BK.



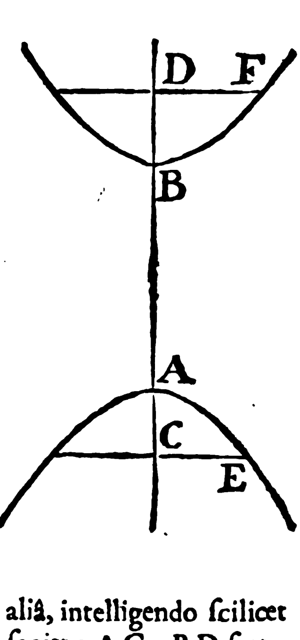
Atque sunt hæ proprietates quas ostendit inesse hyperbolæ Apollonius.

Volo igitur ut assumptâ lineâ AB, & quæsitâ, duabus B C, C D, tertiâ proportionali C E; lineis B F, F H, sit mediâ proportionalis F G, & aliæ eandem observent regulam: tum extremitates harum applicatarum intelligantur conjungi lineâ curvâ, quod fieri non repugnat, hanc figuram voco hyperbolam, & ex hac ejus naturâ, nihil attendendo quod ex cono desumpta sit, cæteras omnes ejus proprietates demonstrandas suscipio.

II. Linea exteriùs assumpta ut A B vocetur transversa diameter, hæc si dividatur bifariam in O, punctum O dicatur centrum hyperbolæ.

III. Oppositæ hyperbolæ sunt quarum vertices opponuntur, eandemque diametrum habent; suntque omninò similes.

Quamvis generatio propria hyperbolarum oppositarum oriatur ex sectione conorum oppositorum ad verticem, ut tamen etiam hyperbolas oppositas independenter à Cono consideremus, aliquas illis conditiones adhibemus, nempe ut communem habeant diametrum: Deinde ut sint similes, nempe ut applicatæ eidem diametro in unâ, æquales sint, & parallelæ applicatis eidem diametro in aliâ, intelligendo scilicet sub iisdem sagittis ut si sagittæ A C, B D sint æquales: applicatæ C E, D F sint inter se parallelæ, & æquales.



PROPOSITIO I.

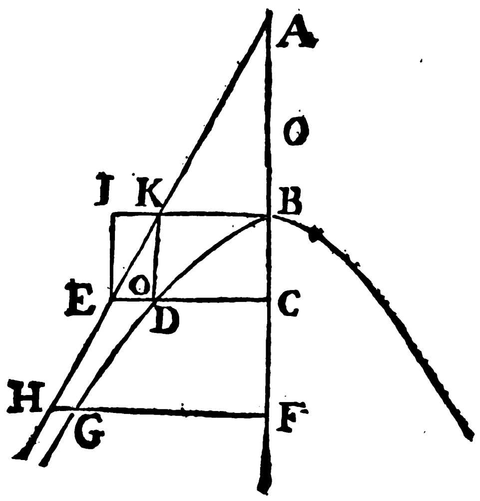
Theorema.

In hyperbolâ, quadrata applicatarum se habent ad invicem sicut rectangula sub sagittis, & lineâ compositâ ex sagittâ, & diametro.

Sit hyperbola BDG, in qua applicatæ DC, GF; sagittæ BC, BF; diameter AB, dico ita esse quadratum D C ad quadratum G F, sicut rectangulum ACB ad rectangulum AFB.

Demonstr,

Demonstr. (*Per definitionem hyperbolæ*) quadratum DC, æquale est rectangulo BCE, & quadratum GF rectangulo BFH, sed rectangulum



BCE, se habet ad rectangulum ACB, cujus eadem altitudo BC, ut EC ad AC, seu ut HF ad AF (*per* 4. 6.) & rectangulum BFH ad rectangulum AFB ejusdem altitudinis, FB se habet ut FH ad AF; ergo ita se habet quadratum DC ad quadratum GF ut rectangulum ACB ad rectangulum AFB, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ita se habet quadratum DC ad rectangulum ACB, sicut latus rectum ad diametrum; nam vidimus rectangulum BCE æquale quadrato DC, se habere ad rectangulum ACB, ut CE ad AC, hoc est ut KB ad BA.

COROLLARIUM II.

Si duceretur linea GD, hæc producta cum diametro conveniet. Cùm enim rectangulum ACB minus sit rectangulo AFB, quadratum CD minus erit quadrato GF, ergo linea CD minor est lineâ GF, & cum sint parallelæ, linea GD conveniet cum AB.

COROLLARIUM III.

Ex his vides quòd si fieret ut rectangulum ACB ad rectangulum AFB, ita quadratum CD ad FG; puncta D & G essent in hyperbolâ.

PROPOSITIO II.

Theorema.

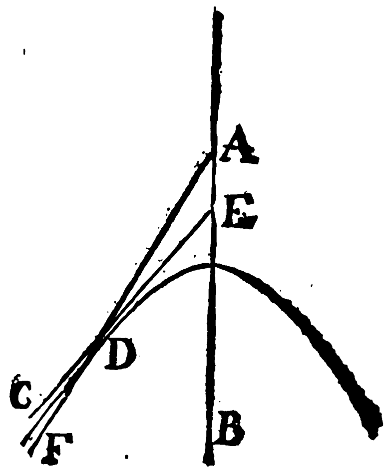
Si linea occurrens hyperbolæ utrimque extra sectionem cadat hac producta cum diametro conveniet.

Hyperbolæ cujus diameter AB occurrens recta linea CDE in puncto D, utrinque producta extra sectionem cadat: dico lineam CDE cum diametro AB convenire. Assumatur in peripheriâ quodlibet punctum F, ducaturque recta FD.

Demonstr. Linea FD (*per coroll.* 2. 1.) producta cum diametro conveniet; conveniat igitur in puncto A; cum linea CDE sit inter sectionem & punctum A, necessariò cum diametro conveniet; Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si ducatur linea diametro hyperbolæ parallela, hæc in uno tantum puncto hyderbolæ peripheriam attinget, si enim in duobus cum diametro



conveniret (*per coroll.* 2. 1.) contra suppositionem, supponitur enim ei parallela.

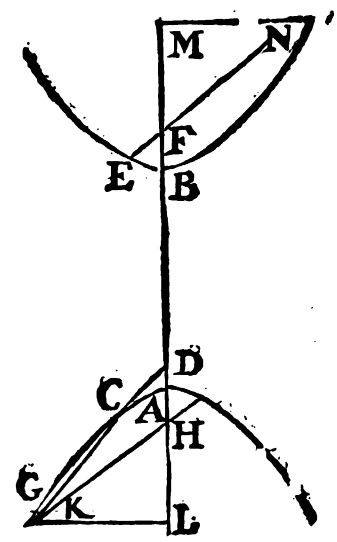
PROPOSITIO III.

Theorema.

Si unam oppositarum sectionum tangat recta linea cui intra alteram ducatur parallela, hac producta utrinque sectionem attinget.

Sint oppositæ hyperbolæ quarum communis diameter AB, sitque tangens CD, cui intra oppositam hyperbolam ducatur parallela EF, dico lineam EF utrinque cum hyperbola concurrere.

Demonstr. (*Per præcedentem*) linea CD cum diametro AB convenit; ergo EF illi parallela cum eadem conveniet; conveniat in puncto F; sumatur AH æqualis BF, ducatur HK parallela CD; ducaturque quæcumque GC.



Cùm CD conveniat cum lineâ GC, lineâ HK; cum eadem conveniet; vel intra, vel extra sectionem, & utroque modo, fieri non potest ut sectionem non attingat. Attingat igitur sectionem in puncto K, ex quo intelligatur ordinatim applicata KL, sumatur FM æqualis HL, & ordinatim applicata MN occurrens lineæ EFN in puncto N, quod assero esse in peripheria hyperbolæ;

perbolæ; triangula enim KHL, MFN sunt similia & æqualia ob parallelas FN, KH, & MN, KL. (*Ex definitione oppositarum hyperbolarum*) debet punctum N esse in superficie hyperbolæ.

Eodem modo ostendam lineam E F convenire cum sectione ad partes E; ergo convenit utrinque cum sectione; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

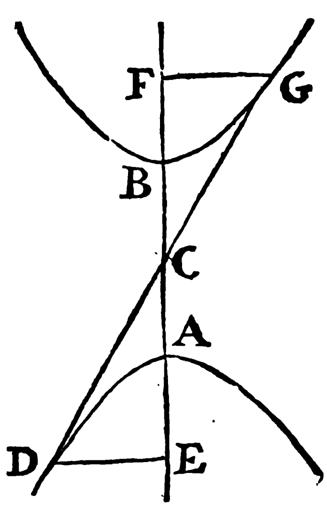
Linea tangenti parallela convenit utrinque cum sectione, ut linea KH, & quæcumque diametrum intra sectionem secat.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si linea recta per centrum oppositarum hyperbolarum transiens uni earum occurrat, alteri etiam occurret.

Sit punctum C centrum oppositarum hyperbolarum, ducatur recta C D, occurrens uni hyperbolæ in puncto D, dico lineam C D productam, alteram quoque hyperbolam attingere. Intelligatur ordinatim applicata DE, sintque AE, B F æquales, ducaturque ordinatim applicata F G.



Demonstratio. Cum EA, BF sint factæ æquales, & A B sit communis; rectangulum B E A rectangulo AFB æquale erit; & quia ut rectangulum BEA ad quadratum D E ita diameter A B ad parametrum (*per cor.* 1. 1.) rectangulum etiam AFB priori æquale ad quadratum FG eandem rationem habebit. Eodem modo & punctum G in sectione erit. Ergo DC producta, attinget sectionem in puncto G.

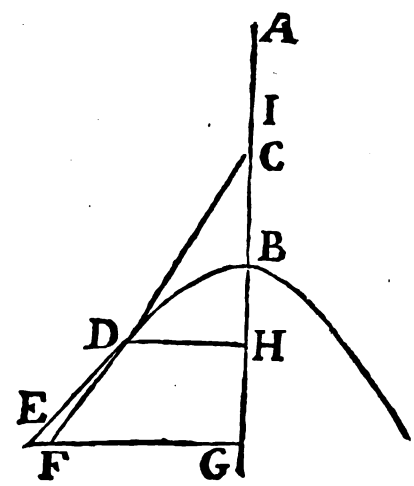
PROPOSITIO V.

Theorema.

Si ab aliquo puncto diametri hyperbolæ quod non minus distet ab ejus vertice quàm semidiametro linea recta hyperbolæ occurrat; eam secabit.

Sit punctum C centrum hyperbolæ, A B diameter, punctum I non minus distet à vertice B, quàm semidiametro, & linea C D sectioni occurrat in puncto D, dico eam productam intra sectionem cadere seu illam secare. Sit enim primò punctum C centrum hyperbolæ, hoc est lineæ AC, C B sint æquales, & linea C D dicatur ulterius producta cadere extra sectionem in E. Ordinatim applicatæ intelligantur DH, FG.

Demonstratio. Si C D producta caderet extra hyperbolam in E, quadratum E G ad quadratum DH majorem rationem haberet quam quadratum FG, sed ut quadratum EG ad DH; ita quadratum C G ad quadratum C H (*per* 4. *&* 22. 6.) & ut quadratum FG ad quadratum DH, ita (*per* 1. *hujus*)



rectangulum AGB ad rectangulum AHB. Ergo major esset ratio quadrati CG ad quadratum CH, quàm rectanguli AGB ad rectangulum AHB. Et permutando major esset ratio quadrati CG ad rectangulum A G B, quàm quadrati CH ad rectangulum AHB. Cum autem linea A B sit divisa bifariam in C, eique recta adjiciatur B G, (*erit per* 6. 2.) rectangulum AGB, unà cum quadrato CB, æquale quadrato CG, & rectangulum A H B unà cum quadrato C B, æquale quadrato C H; quare dividendo, auferendo scilicet consequens ex antecedenti, erit major ratio quadrati B C ad rectangulum AGB, quam quadrati CB ad rectangulum AHB, quod est absurdum, nempe ut idem ad majus majorem habeat quàm ad minus. Non ergo CD producta cadit extra sectionem, sed intra.

Multò magis si punctum assumptum esset inter A & C quale est punctum I, & duceretur linea ID, hæc intra sectionem caderet.

COROLLARIUM.

Tangens hyperbolam, si producatur secat diametrum inter verticem, & centrum.

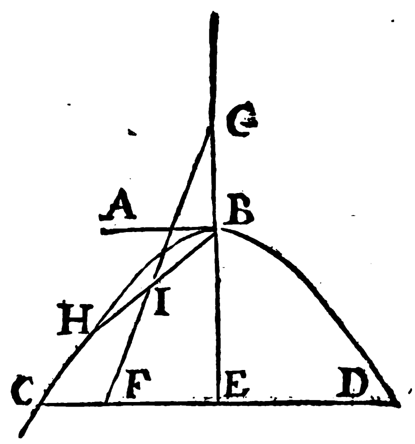
PROPOSITIO VI.

Theorema.

Omnis linea per verticem hyperbolæ ducta & parallela ordinatis ad eandem diametrum, est tangens.

Sit linea AB per verticem B ducta, & parallela lineæ C D ordinatæ ad diametrum G E. Dico lineam AB extra sectionem cadere. Si enim caderet intra sectionem, ut BH, dividatur BH in I, bifariam

riam, eritque H B ad diametrum ordinatim applicata; ergo diameter G I F, lineam C D bifariam divideret in F, (*ex definitione diametri, & applicatæ*); quod est absurdum; cum jam supponatur divisâ bifariam in E.

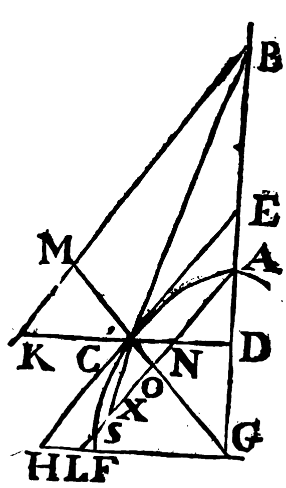


PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si ducatur ordinata & ita sit composita ex diametro, & sagittâ ad sagittam, sicut partes diametri, linea erit tangens.

Sit AB diameter hyperbolæ, à cujus puncto C ducatur ordinata C D, sitque ut BD ad D A; ita BE ad E A; dico lineam E C esse tangentem. Si enim fieri potest secet hyperbolam; sit ECF linea recta; per F ordinatim applicetur G F H, & per puncta A & B ducantur parallelæ EC, nempe AL, BK; jungaturque BCX, DCK.



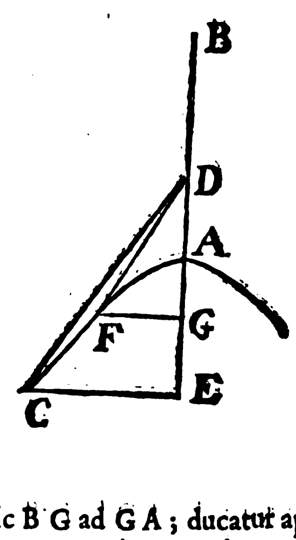
Demonstratio. Supponitur esse B D ad D A, seu (*per* 4. 6.) B K ad A N, ut BE ad EA; seu BC ad CX (*per eandem*) & B K ad X N, ob similitudinem triangulorum BCK, XCN. Ergo ita est B K ad A N, sicut B K ad X N. Sunt igitur A N, X N æquales, & cum AX sit divisâ bifariam in N, erit rectangulum A N X majus rectangulo A O X; ergo erit major ratio lineæ N X ad XO, quàm OA ad AN. Nam si fieret rectangulum A O S æquale rectangulo A N X, ita esset N X ad O S, ut A O ad A N; sed major est ratio NX ad XO, quàm OA ad AN: sed ut NX ad XO, ita BK ad BM, propter similitudinem triangulorum: Igitur rectangulum sub K B, A N, majus est rectangulo B M, A O; & consequenter primum ad quadratum C E majorem habet rationem quàm secundum. Sed ut rectangulum K B, A N ad quadratum C E, sic rectangulum B D A ad quadratum D E (*per* 4. 6.) Pariter ut rectangulum sub M B, A O ad quadratum C E, ita rectangulum B G A ad quadratum G E. Major igitur est ratio rectanguli B D A ad quadratum D E, quàm rectanguli B G A ad quadratum G E; & permutando major erit ratio rectanguli primi ad secundum quam quadrati primi ad secundum; sed (*per* 1.) ut rectangulum B D A ad rectangulum AGB, ita quadratum CD ad quadratum GH; & ut quadratum DE ad quadratum GE, ita quadratum CD ad quadratum FG. Major est ergo ratio quadrati C D ad quadratum G H, quam quadrati C D ad quadratum GF; quod est absurdum. Non igitur E C producta intra sectionem cadet, sed extra.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si recta tangat hyperbolam; & à puncto contactûs ducatur ordinata; ita erit composita ex diametro, & sagittâ ad sagittam, sicut partes diametri.

Sit hyperbolæ diameter A B, linea tangens C D, & C E ordinata, dico ita esse BE ad A E, sicut B D ad D A. Si enim non ita sit, fiat ut B D ad D A, sic B G ad G A; ducatur applicata GF; essetque (*per præcedentem*) linea D F tangens, quæ post tactum in puncto F extra sectionem erit; ergo rursùs secabit lineam D C, quod est absurdum; duæ enim lineæ rectæ clauderent spatium.

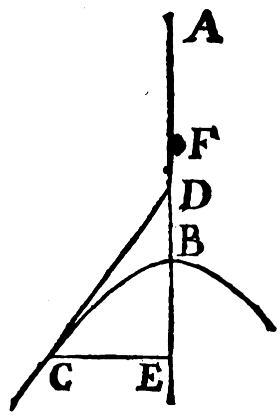


PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si per contactum ducatur ordinata, erit quadratum semidiametri æquale rectangulo comprehenso sub compositâ ex semidiametro, & sagittâ, & sub interjectâ inter tangentem & centrum.

Sit hyperbolæ diameter AB, & centrum F, tangens CD, ordinata CE. Dico quadratum FB, rectangulo EFD esse æquale.



Demonstr. Ita est (*per* 8.) AD ad DB, sicut AE ad EB; ergo componendo ut utraque AD, DB ad DB, ita AE, EB ad EB, & antecedentium semisses, nempe ita erit FB, seu AF ad DB, sicut FE ad EB; nam FE est dimidia linearum AE, EB. Ergo per conversionem rationis, ita erit EF ad FB, sicut FB ad FD. Ergo quadrato FB æquale est rectangulum EFD; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si per contactum ducatur applicata, erit ejus quadratum, ad rectangulum sub compositâ ex semidiametro, & sagittâ, & sub distantiâ applicatæ à tangente, ut rectum latus ad diametrum.

Sit tangens CD, applicata CE; dico ita esse rectangulum FED, ad quadratum CE, ut diameter AB ad parametrum. Vidimus enim in superiori ita esse FE ad EB; ut AF ad BD; ergo permutando ut FE ad AF ita DB ad EB, & componendo, ut AE ad EF, ita DE ad BE. Quare (*per* 14 6.) rectangula AEB, FED sunt æqualia; sed rectangulum AEB, est ad quadratum CE, (*per coroll.* 1. 1.) ut diameter AB ad parametrum; ergo rectang. FED est ad quadratum CE, ut diameter, ad parametrum; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si per tactum ducatur ordinata; erit rectangulum sub segmentis diametri, æquale rectangulo sub distantiâ applicatæ à tangente, & sub distantiâ tangentis à vertice.

Sit eadem suppositio quæ priùs, dico rectangulum ADB, rectangulo EDF esse æquale.

Demonstr. Vidimus (*in* 9.) ita esse EF ad FB sicut FB ad DF. Ergo componendo, ut EA ad FA; ita AD ad FD, & permutando, ut EA ad AD; ita FA ad FD, & dividendo, ut ED ad AD; ita BD ad DF. Quare rectangula sub mediis & extremis æquantur, nempe ADB, & EDF; quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si per tactum ducatur ordinata, erit rectangulum sub sagittâ, & sub compositâ ex sagittâ & diametro, æquale rectangulo sub compositâ ex semidiametro, & sagittâ, & sub distantiâ ordinatæ ab applicatâ.

Sit eadem suppositio dico rectangulum AEB æquale esse rectangulo FED.

Demonstr. (*Per* 9.) ita est ED ad BF; ut BF ad DF; & per conversionem rationis, ut EF ad EB; ita FB ad DB; & permutando ut EF ad FB; ita EB ad BD, & componendo, ut EF ad AE, ita EB ad ED. Quare pariter rectangula sub mediis & extremis æquantur, nempe AEB, & FED; quod erat demonstrandum.

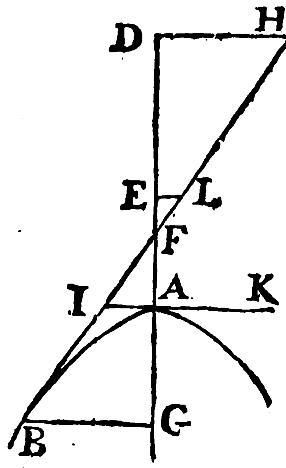
PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si in hyperbola per contactum applicetur ordinata, & per extremitates diametri ducantur duæ parallelæ ordinatis, ad tangentem usque; rectangulum sub ipsis comprehensum æquale est quartæ parti figuræ.

Sit linea BF tangens, ordinata BG, cui per extremitates diametri A, & ducantur parallelæ IA, DH, ad tangentem usque, sitque parameter AK; dico rectangulum comprehensum sub AI, DH esse quartam partem rectanguli sub AD, AK comprehensi; quod rectangulum, figuram vocat Appollonius.

Demonstratio. Cùm FB sit tangens, erunt (*per* 11.) rectangula GFE, DFA æqualia; eritque ut GF quadratum ad rectangulum GFE, seu ut GF ad E, ita quadratum GF ad rectangulum DFA, quæ ratio componitur ex ratione GF ad DF, seu BG ad DH; & ex ratione GF ad FA, seu BG ad IA; & hæ duæ rationes componunt rationem quadrati BG ad rectangulum sub AI, DH comprehensum, igitur ita se habet GF ad ad E F; seu rectangulum EGF ad rectangulum GEF, hoc est (*per* 9.) quadratum AE, sicut quadratum BG ad rectangulum DH, AI, & permutando, ut rectangulum EGF ad quadratum BG eu (*per* 10.) ut diameter DA ad parametrum AK,



ita erit quadratum AE ad rectangulum AI, DH: sed ut DA ad AK, ita est quadratum DA, ad rectangulum DAK; ergo ita est quadratum AE ad rectangulum AI, DH, sicut quadratum DA ad rectangulum DAK; sed primum est quarta pars secundi, nempe quadratum AE, quadrati AD; ergo rectangulum AI, DH, est quarta pars rectanguli DAK; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si in hyperbola per tactum ducatur ordinata, & per centrum, ei parallela ad tangentem usque; erit rectangulum sub applicatâ, & parallelâ comprehensum, æquale quartæ parti figuræ.

Linea FB tangat hyperbolam in B, & applicetur B G, cui per centrum E ducatur parallela E L ad tangentem usque; dico rectangulum sub E L, B G æquale esse quartæ parti figuræ, seu rectangulo DAK.

Demonstr. (*Per* 11.) rectangula DFA, GFE, sunt æqualia, ergo ita est DF ad GF, seu DH, ad BG, sicut FE ad FA, seu ut EL ad IA; (*per* 4.6.) Ergo ita est DH ad BG, ut EL ad IA; & rectangulum BG, EL, æquatur rectangulo DH, IA, seu (*per præcedentem*,) quartæ parti figuræ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

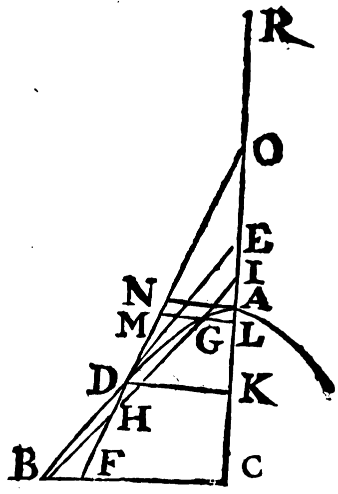
Ex his plurimos modos eliciemus tangentem ducendi, qui ex his propositionibus faciles sunt.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si hyperbolam tangat recta linea, & per contactum ducatur ex centro linea, hæc omnes parallelas tangenti, bifariam secat.

Sit hyperbola cujus diameter, aut etiam axis AC, centrum O, quam tangat linea DE; huic parallela ducatur BG; ducatur ex centro O, per contactum D, linea ODF; dico lineam BG, à linea OD, bifariam secari.



Demonstr. Quadrato OA æquale est rectangulum KOE; hoc est, ita est KO ad OA, ut OA ad OE. Quare ita est KO ad OE, sicut quadratum KO ad quadratum OA, seu triangulum KOD, ad simile triangulum AON; sed ut KO ad OE; ita est triangulum K O D ad triangulum O D E; (*per* 1.6.) habent enim eundem verticem D. Ergo ita est triangulum KOD ad triangulum ODE, ut idem triangulum KOD, ad triangulum A O N; sunt ergo æqualia triangula, A O N, ODE; & ablato eo quod commune est & addito communi, fient quadrilaterum N K, & triangulum DEK, æqualia. Vidimus item ita esse quadratum OK ad quadratum O A, ut triangulum KOD ad triangulum AON; & permutando ita erit totum quadratum O K ad totum triangulum KOD, ut ablatum quadratum OA ad ablatum OAN; ergo ita erit reliquum ex quadratis, nempe rectangulum RKA, ad reliquum quadrilaterum N K, ut totum ad totum, nempe quadratum OK, ad triangulum OKD. Eodem modo ostendam, ita esse totum quadratum OL ad triangulum OLM, ut reliquum rectangulum RLA ad reliquum quadrilaterum N L. Item ostendam, ita esse quadratum CO, ad triangulum COF, ut reliquum rectangulum R C A, ad quadrilaterum NACF; est enim similis ratio: sed triangulo DKE, ostensum est æquale quadrilaterum N K; ergo & triangulo G L I, æquale erit quadrilaterum N L, & triangulo BIC, æquale quadrilaterum N C; ablatis ergo hinc inde æqualibus primò triangulo G I L, & quadrilatero N L, erit reliquum quadrilaterum L M F C, quadrilatero B G L C, æquale; & ablato eo quod commune est, erunt triangula BHF, GMH, æqualia; quæ cum sint similia ob angulos ad verticem in puncto H æquales, & parallela MG, BF habent necessariò bases B H, H G, æquales, ergo linea ODF, per centrum O, & tactum D ducta, dividit bifariam lineam B G, tangenti parallelam; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Constat ex his lineam O D, esse diametrum.

PROPO

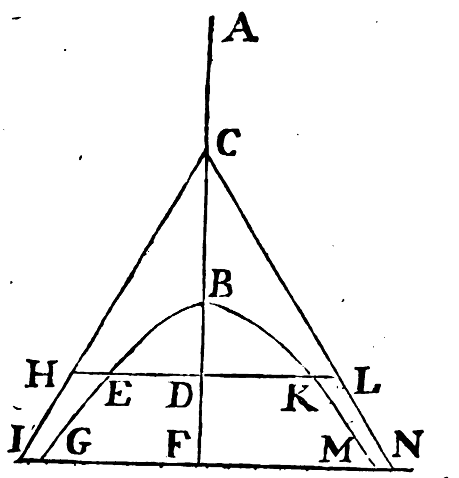
PROPOSITIO XVI.

Theorema.

In hyperbola, si fiat ut rectangulum sub composita ex diametro & sagitta, & sub sagitta, ad idem rectangulum, plus quadrato semidiametri; ita quadratum applicatæ ad quadratum alterius; linea ex centro ducta conjungens hæc puncta recta erit, & asymptotos; & quo magis producetur, eò magis ad hyperbolam accedet.

Supponatur hyperbola, cujus diameter AB, centrum C, eritque (*per* 1. *hujus*) ut rectangulum ADB ad rectangulum AFB, ita quadratum DE, ad quadratum FG, fiat ut rectangulum ADB ad rectangulum ADB plus quadrato CB, ita quadratum DE ad quadratum DH.

Pariter fiat ut rectangulum AFB ad rectangulum AFB, plus quadrato CB, ita quadratum GF ad quadratum FI; dico CHI esse lineam rectam asymptoton, &c.



Demonstr. Cùm recta AB divisa sit bifariam in C, & addita BD, erit rectangulum ADB, unà cum quadrato BC, æquale quadrato CD, (*per* 7. 2.) Pariter rectangulum AFB, unà cum quadrato BC, æquatur quadrato CF; ergo ita erit rectangulum ADB ad quadratum CD, sicut quadratum DE ad quadratum DH; & ut rectangulum AFB ad quadratum CF, ita quadratum FG ad quadratum FI; ergo ita erit quadratum CD, ad quadratum DH, ut quadratum CF ad quadratum FI; & lineæ eandem etiam rationem habebunt; ergo CHI est linea recta, (*per* 4. 6.) Quia autem quadratum FI superat quadratum FG, puncta G, & I non coincident.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si fuerint asymptoti, & applicata; erunt rectangula applicatarum inter se æqualia.

Sint asymptoti CI, CN, & applicatæ eo ordine quo explicuimus in præcedenti; dico rectangula HEL, IGN, esse æqualia.

Demonstr. Ita est quadratum CD, ad quadratum CF, ut quadratum DH, ad quadratum FI; & pariter ita est rectangulum ADB ad rectangulum AFB, sicut quadratum DE ad quadratum FG, quæ sunt partes quadratorum CD, CF, DH, FI; ergo & reliqua in eadem ratione erunt; nempe ut quadratum CB ad quadratum CD, ita rectangulum HEL ad rectangulum IGN; supponitur enim DL æqualis HD, & IF, æqualis FN; cum ergo HL divisa sit bifariam in D, & non bifariam in E, erit quadratum dimidiæ DH, æquale rectangulo HEL. Quare constat rectangula HEL, IGN, esse æqualia; immò cum ED, DK supponantur æquales, ex definitione applicatæ; erunt rectangula HEL, HKL, æqualia.

COROLLARIUM.

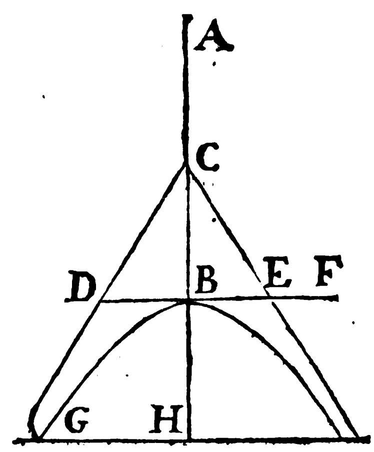
IG minor erit quam HE; cum enim rectangula HEL, IGN, sint æqualia, erit ut HE ad IG, ita GN ad EL; sed GN, major est quam EL; ergo & HE, major quam IG.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si hyperbolam linea per verticem tangat, cujus quadratum æquetur quartæ parti figuræ; linea ex centro per ejus extremitates ducta erit asymptotos.

Sit hyperbolæ diameter AB, centrum C, linea DE sectionem tangat in puncto B, vertice scilicet, sitque quadratum BD, aut BE æquale quartæ parti figuræ, hoc est rectanguli comprehensi, sub diametro AF & parametro BF; dico lineas CD, CE, esse asymptotos, seu non convenire, cum sectione: conveniat enim si fieri potest CD, cum hyperbola in puncto G, & ordinatim applicetur GH, quæ erit parallela DB.



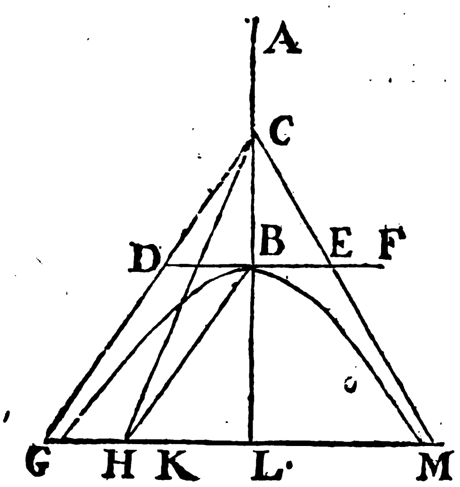
Demonstr. Ita est AB ad BF, ut quadratum AB ad rectangulum ABF, sed quadratum BC est quarta pars quadrati AB, & quadratum BD, supponitur quarta pars rectanguli ABF; ergo ita est AB ad BF, ut quadratum BC, ad quadratum BD, seu (*per* 4.6.) ut quadratum CH, ad quadratum HG; sed (*per* 1. *hujus*) ut AB ad BF, ita est rectan rectangulum A H B ad quadratum HG; ergo ita erit rectangulum AHB ad quadratum HG, ut quadratum CH ad quadratum HG; essent ergo æqualia rectangulum AHB & quadratum CH (*contra 6.2. Eucl.*) Quare linea CD producta non convenit cum sectione; Est ergo asymptotos.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Ex centro nulla intra asymptoton duci potest, quæ cum hyperbola non conveniat.

Factâ eâdem suppositione, dico intra asymptotos C G, C M, ex centro C, nullam aliam asymptoton duci posse: sit enim ducta quæcumque C H, hanc assero cum hyperbola convenire. Ducatur enim B H asymptoto CDG parallela; quia igitur CH convenit in C, cum CDG, unâ parallelarum, conveniet etiam cum alterâ nempe B H; conveniat in H, fiantque æquales DG, BH; ducatur G H, hæc erit parallela tangenti D B E, & consequenter producta erit ordinatim applicata; eruntque GL, LM, æquales, eò quod DB, BE sint æquales: sunt item G H, D B æquales; quare si dicatur punctum H esse extra sectionem, ita ut sectio secet lineam GL in puncto K, quod sit intra punctum H esset GK major quam DB.



Demonstr. (*Per 6. 2.*) rectangulum A L B cum quadrato B C, æquale est quadrato CL. Item rectangulum MKG majus est rectangulo DBE, seu quadrato DB; est autem ut AB ad BF, ita quadratum AB ad rectangulum ABF, & quadratum CB ad quadratum B D, quartam scilicet partem rectanguli ABF: & ut AB ad BF, ita (*per coroll. 1.*) rectangulum ALB ad quadratum LK; & ut quadratum BC ad quadratum BD, ita quadratum CL, ad quadratum L G: ergo ita est quadratum C L ad quadratum LG, ut rectangulum ALB ad quadratum LK: cum ergo sit totum quadratum C L ad totum quadratum L G, ut ablatum rectangulum A L B ad ablatum quadratum LK; erit reliquum quadratum B C ad reliquum rectangulum MKG, ut totum ad totum; nempe ut quadratum CL ad quadratum L G, seu ut quadratum B C ad quadratum BD: ergo ita erit quadratum B C ad quadratum BD, ut idem quadratum BC ad rectangulum MKB; quod fieri non potest, cum rectangulum MKB, in hac suppositione haberet lineas GK, KM, majores quàm DB, BE.

COROLLARIUM.

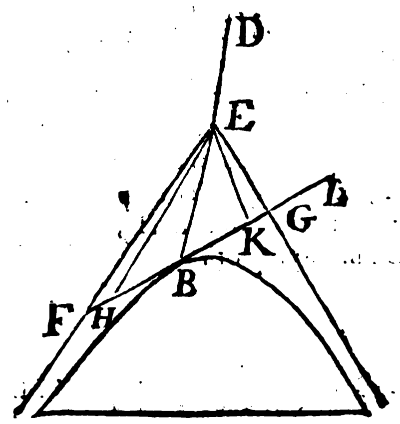
Ostendimus in hac propositione rectangulum MKG æquale esse quadrato B C: Quare rectangulum quodcumque applicatarum cum asymptotis, est æquale quartæ parti figuræ.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Omnis tangens hyperbolam; utramque secat asymptoton, bifariamque in puncto tactûs secatur; & quadratum dimidiæ æquatur quartæ parti figuræ.

Linea BL tangat hyperbolam ABC, in puncto B: sit E centrum, & asymptoti EF, EG, dico



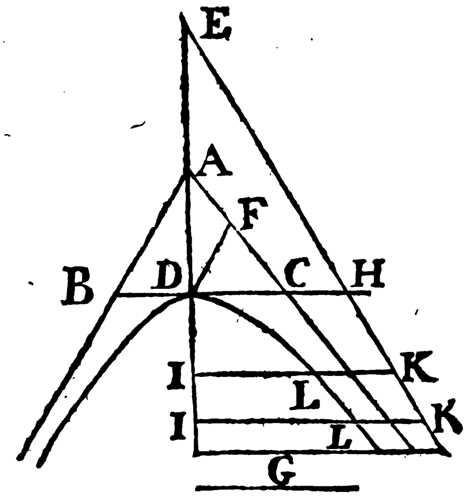
primò tangentem BG, secare utramque asymptoton. Ducatur BE, sintque BE, ED æquales; eritque BD diameter (*per 7. hujus*) abscindantur hinc inde BK, BH æquales, ita ut totius quadratum æquale sit rectangulo comprehenso sub diametro B D, & parametro; essentque EK, EH, asymptoti quod est contra præcedentem: Quare necessariò B L producta utramque asymptoton secat; & BG, BF quadrata æqualia sunt quartæ parti figuræ; alioquin abscindendo lineas, quarum quadrata æqualia essent quartæ parti figuræ, darentur aliæ asymptoti.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Datis duabus lineis angulum comprehendentibus, per punctum intra angulum positum, hyperbolam describere, cujus prædictæ lineæ sint asymptoti.

Sint datæ duæ lineæ AB, AC, angulum BAC, comprehendentes, sitque assignatum punctum D, per quod describenda est hyperbola, cujus AB, AC sint asymptoti; ducatur D A, sintque D A, AE, AE, æquales; ducatur DF, parallela AB, fiantque AF, FC, æquales, & ducatur BDC; eruntque (*per* 4. 6.) BD, DC æquales; tum lineis ED,



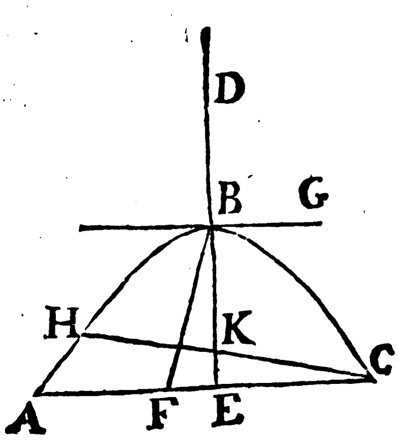
BC quæratur tertia proportionalis G, quæ assumatur parameter. Datâ autem diametro DE, & parametro G, facilè hyperbolam describes. Ponatur enim DH, æqualis parametro, ducaturque EH, quæ ulterius producatur; fiantque singulis rectangulis DIK, singula quadrata IL, æqualia; habebitur hyperbola, cui nempe conveniet definitio: & cum BC sit media inter ED & DH parametrum, erit quadratum BC, æquale rectangulo EDH; & consequenter quadratum DC, erit quarta pars rectanguli EDH; ergo (*per* 18.) AB, AC sunt asymptoti.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si hyperbola diameter lineam bifariam secet: quæ per verticem ducitur tangens, ei est parallela.

Hyperbolæ diameter BD dividat bifariam lineam AEC, in puncto E, ducaturque per punctum B, tangens BG, dico tangentem BG, esse



ctum B, tangens BG, dico tangentem BG, esse parallelam lineæ AEC; si enim non sit parallela; ducatur CKH, parallela lineæ BG, quæ (*per* 15.) bifariam dividetur in K; & cum jam AEC, supponatur divisa bifariam; erit ut CK ad KH, ita CE ad AE; ergo (*per* 2. 6.) AH, erit parallela KE; cum tamen (*per corol.* 2. 1.) cum illâ conveniat extra sectionem.

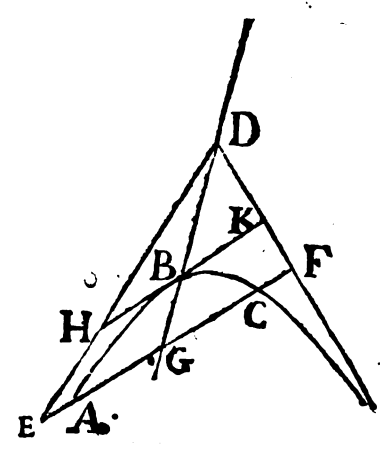
COROLLARIUM.

Si sit BG, tangens hyperbolam, in puncto B, sitque ei parallela AC, divisa bifariam in E, clarum est lineam BE, esse diametrum: si enim daretur alia, ut BF hæc divideret bifariam lineam AC in puncto F.

PROPOSITIO XXIII.

Linea secans hyperbolam in duobus punctis, utramque asymptoton secat; & ejus segmenta sunt æqualia.

Linea AC hyperbolam secet in punctis A & C, dico AC productam, cum utraque asymptoto DE, DF convenire; item segmenta AE, CF esse æqualia: dividatur AC bifariam in G, ducaturque ex centro D linea DG, sectionem secans in puncto B, per quod ipsi AC parallela ducatur HBK.



Demonstr. DG (*per* 22.) est diameter, & HK, est tangens (*per* 22.) quæ (*per* 20.) utramque secat asymptoton; ergo & AC ipsi parallela cum utraque conveniet, eruntque (*per* 20.) HB, BK æquales; ergo EG, GF æquales erunt, & subtractis AG, GC, restabunt EA, CF, æquales.

COROLLARIUM.

Si recta linea utramque asymptoton secans, bifariam ab hyperbola secetur, in uno tantum puncto sectionem secat.

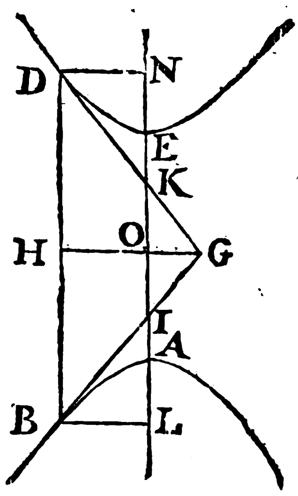
PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si duæ rectæ tangentes hyperbolas oppositas conveniant; & à concursu ad medium lineæ conjungentes contactus, recta ducatur, hæc erit diameter conjugata illi diametro, conjungenti parallela.

Sint lineæ BG, DG tangentes hyperbolarum oppositarum, & hæ conveniant in puncto G; sit BD conjungens contactus B & D, quæ dividatur

tur bifariam in H; Dico lineam G H esse diametrum conjugatam diametro EA, parallelæ ipsi DB. Sint ad diametrum A E applicatæ ordinatim BL, DN, quæ erunt parallelæ inter se; & cum DB, AE, supponantur parallelæ, erunt DN, BL, æquales; & (*per 1. hujus*) rectangula A N E, ELA, erunt æqualia, & consequenter dividendo erunt EN, AL, æquales, sicut AN, EL.



Demonstr. Cùm DG sit tangens, & DN, applicata, ita erit (*per 7.*) A N ad N E, sicut AK ad KE: pariter cum BI sit tangens, ita erit EL ad LA; sicut E I ad IA; sed ita se habet E L ad LA, sicut AN ad N E; ergo ita erit AK ad KE, sicut E I ad IA, & componendo ut AE ad EK; ita EA ad AI; sunt ergo æquales IA, KE. Item cum DH, HB, sint æquales ex constitutione, & sint DB, KI, parallelæ, erunt IO, OK æquales; quare OE, OA, æquales erunt, & punctum O erit centrum; & (*per defin.*) GOH erit conjugata diameter ipsi AE, cum eam dividat bifariam, sicut lineam B D.

COROLLARIUM.

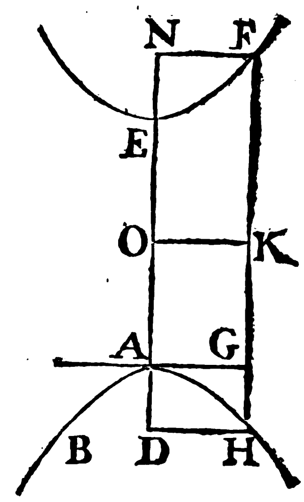
Si recta utrinque oppositis sectionibus occurrens dividatur bifariam in H, & ex centro O ducatur linea O H; hæc erit conjugata diameter ipsi AE, quæ ducitur parallela BD.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si unam ex oppositis hyperbolis, recta linea tangat cui per centrum ducatur parallela, hæc erit conjugata diameter diametro per contactum ducta.

Unam ex oppositis sectionibus tangat linea AG, cui per centrum O, ducatur parallela OK; dico esse conjugatam diametro OA, per contactum A transeunti: Ducatur enim quæcumque H F, ipsi AO parallela, occurrens utrique hyperbolæ in punctis H, & F, ducanturque FN, DH, ordinatim applicatæ; quæ sicut in antecedente ostendentur æquales esse, sicut A D, E N; item O N, O D, & illis parallelæ F K, K H: quare H F, bifariam divisa est in puncto K; quod cum de quacumque aliâ parallela demonstrari possit, erit OK diametri A E, conjugata diameter.

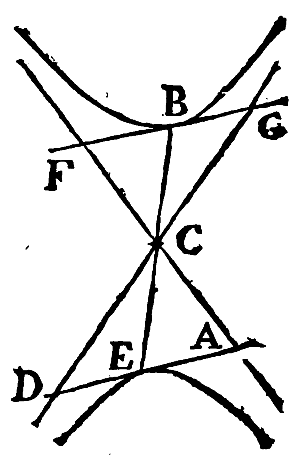


PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Oppositarum hyperbolarum asymptoti communes sunt.

Sint oppositæ hyperbolæ, quarum aliqua diameter E B, centrum C; dico asymptotos communes esse utrique. Ducantur per puncta E, & B duæ tangentes FBG, DEA, quæ erunt parallelæ ordinatim applicatis; sint lineæ AE, ED, B F, B G, æquales, sitque singularum quadratum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum AB constituitur, junguntur que C D, C G, C A, C F.



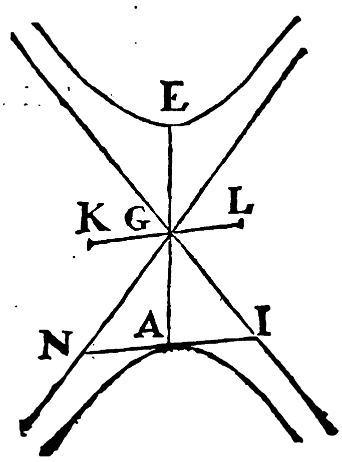
Demonstr. Cùm lineæ BG, DE sint parallelæ, erunt alterni anguli CDA, CGB æquales, & cum tam BG, DE, quam BC, CE, sint æquales, (*per 4. 1.*) triangula E C D, B G C sunt æqualia, & anguli BCG, ECD æquales, qui cum sint oppositi ad verticem, lineæ D C, C G, in directum jacebunt; & quia lineæ DE, AE, FB, BG possunt quartam partem figuræ, erunt (*per 18. hujus*) D G, F A asymptori, respectu utriusque hyperbolæ.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si tangenti unam hyperbolarum oppositarum, asymptotis terminatæ, ducatur per centrum æqualis parallela, & bifariam divisa; hæc erit hyperbolarum communis secunda diameter.

Sint oppositæ hyperbolæ quarum commune centrum G, asymptoti NG, GI; tangat autem alterutrum linea NAI, terminata asymptotis, cui æqualis & parallela ducatur KGL bifariam secta in puncto G; dico KGL esse oppositarum hyperbolarum secundam diametrum. Ducatur per contactum A diameter AGE.

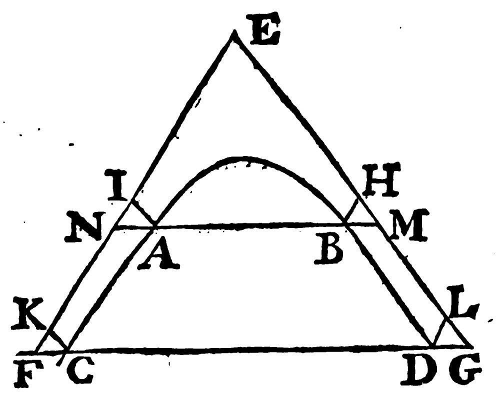


Demonstratio. (*Per* 20.) quadratum AI æquale est quartæ parti figuræ, seu rectanguli sub A E & parametro contenti; & consequenter quadratum totius N I, seu K L, erit æquale rectangulo sub diametro A E, & parametro; ergo K L, est media proportionalis inter diametrum AE, & parametrum; & cum transeat per centrum G, sitque bifariam divisa, habebit omnes conditiones secundæ diametri.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si hyperbolam inter asymptotos constitutam secent duæ parallelæ, & per puncta ducantur lineæ asymptotis parallelæ; illæ erunt proportionales.



Lineæ AB, C D parallelæ inter se, secent hyperbolam inter asymptotos EF, E G constitutam & per puncta sectionum A, B, C, D, ducantur AI, CK parallelæ EG; item BH, DL, parallelæ E F, dico ita esse DL ad BH, sicut KC ad IA.

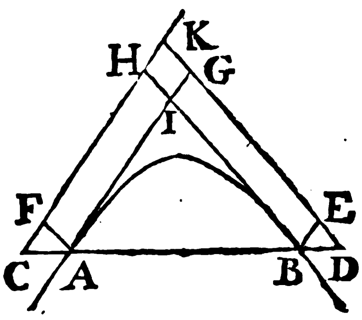
Demonstratio. (*Per* 17.) NA, BM; FC, DG, sunt æquales; sunt item triangula D L G, BHM, similia; cum constent parallelis lineis; sicut FKC, N I A, quæ tam inter se quam prioribus sunt similia; ergo habent latera proportionalia; nempe ita est DL ad BH, sicut KC ad IA.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Si linea hyperbolam secet, & per puncta sectionum ducantur asymptotis parallelæ, formabuntur rectangula æqualia.

Linea AB, secet hyperbolam inter sectionem A & B; ducantur B E, A F parallelæ asymptotis, dico rectangulum F A G æquari rectangulo E B H.



Demonstratio. (*Per* 17.) C A, DB sunt æquales & triangula B E D, CFA similia; ergo erunt BE, CF, ED, AF, æquales. Pariter cum similia sint triangula EBD, DKC; ita erit B E ad K C, sicut DE, seu FA ad DK; & dividendo, ut B E ad K F, ita FA ad K E. Ergo rectangulum, aut parallelogrammum æquiangulum sub extremis BE & KE æquabitur parallelogrammo sub mediis KF, FA.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si uni asymptoto ducantur parallelæ, erunt segmenta asymptoti reciproca parallelis.

Ducantur in figura sequenti lineæ AB, CD, quæ sint parallelæ asymptoto EF, dico ita esse CD ad AB sicut BE ad DE. Ducatur enim linea C A F, secans hyperbolam in A & F, & per A, & C. Lineæ C H, A G, asymptoto DE parallelæ; eruntque parallelogramma AGEB, CDEH, æqualia, ergo latera habent reciproca: nempe ut C D ad AB, ita BE ad ED.

COROLLARIUM.

Constat item ductis EC, EA, triangula E B A, EDC æqualia esse.

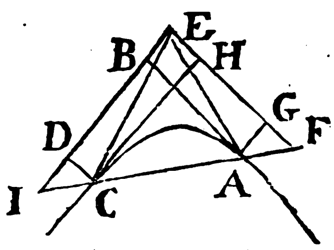
PROPO

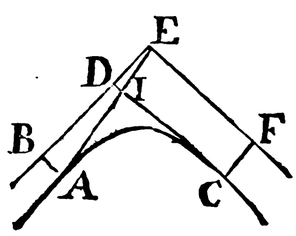
PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Si eidem asymptoto ducantur parallelæ, & cum minore earum conjungatur ex angulo linea; hæc minor linea erit media proportionalis inter majorem, & ejus segmentum.

Sint in 2. fig. asymptoti, BE, EF; & EF ducantur parallelæ AB, CD; ducatur EA, secans CD, in I, dico ita esse DI ab BA, ut BA ad CD.





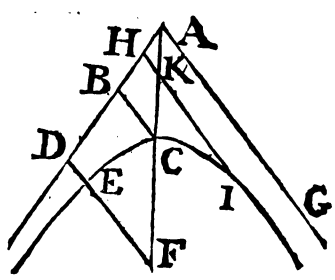
Demonstratio. Per præcedentem ita est CD ad BA, sicut BE ad DE: sed sicut BE ad DE, ita est BA ad DI; ergo CD, BA, DI, sunt tres continuè proportionales; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si uni asymptoto ducantur duæ parallelæ, ducaturque ex angulo ad unam linea recta, fient tres continuè proportionales.

Sint asymptoti AD, AG; fiantque lineæ AG, duæ parallelæ BC, DE; ducatur ACF, & producatur DEF. Dico DE, BC, DF, esse continuè proportionales.



Demonstratio. (*Per penultimam*) ita est DE ad BC, sicut AB ad AD; sed sicut AB ad AD, ita est BC ad DF; ergo DE, BC, DF sunt continuè proportionales.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si per divisiones unius asymptoti proportionales, ducantur alteri asymptoto parallelæ, illæ erunt proportionales.

Sit ut AH ad AB, ita AB ad AD; ducanturque parallelæ alteri asymptoto per H, B, D, nempe DE, BC, HI, dico lineas DE, BC, HI proportionales esse.

Demonstratio. (*Per 30.*) ut AH ad AB, ita est BC ad HI, & ut AB ad AD, ita DE ad BC: & AH, AB, AD supponuntur proportionales: ergo DE, BC, HI proportionales sunt.

COROLLARIUM I.

HI & DF, sunt æquales; vidimus enim in ultimâ DE, BC, DF, proportionales esse; ita erunt HK & DE, æquales.

COROLLARIUM II.

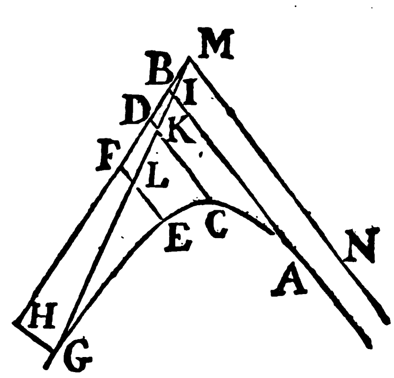
Sequitur item in eadem suppositione, AK, AC, AF proportionales esse.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Si ducantur plurimæ parallelæ uni asymptoto, & proportionales; & ad ultimam earum ex centro ducatur recta linea, continuabitur eadem proportio.

Asymptoto MN, ducantur parallelæ AB, CD, FE, HG, proportionales, jungaturque MG. Dico AB, CD, FE, HG, FL, DK, BI esse in eadem proportione.



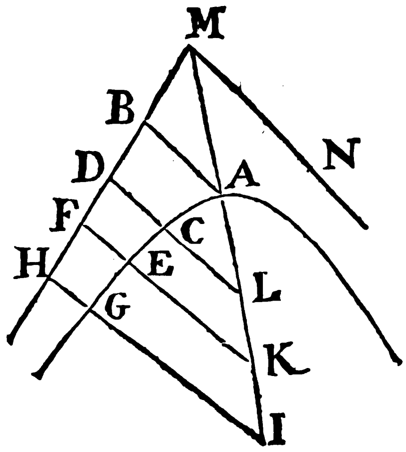
Demonstratio. Cum AB, CD, EF, GH sint continuè proportionales, etiam MB, MD, MF, MH in eadem erunt ratione, sed inverso ordine; nempe erit, ut EF ad GH, ita HM ad FM (*per 30.*) sed ut HM ad MF, ita HG ad FL (*per 4. 6.*) Ergo continuatur eadem ratio.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Si ducantur plurimæ proportionales parallelæ uni asymptoto, & ducatur ex centro ad primam recta linea; continuabitur eadem proportio.

Sint AB, CD, EF, GH, parallelæ MN, & proportionales; dico HG, FE, DC, AB, DL, FK, HI, esse proportinnales.



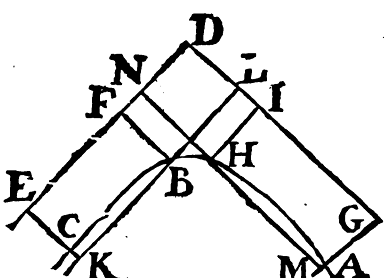
Demonstr. Ita est (*per* 29.) D C ad A B sicut B M ad M D, sed ut MB ad MD ita est BA ad D L; ergo continuatur eadem ratio DC, AB, DL, &c. quod erat demonstrandum.

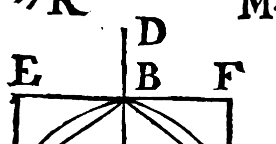
PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si duabus asymptotis ducantur utrinque bina parallelæ proportionales; fient duo quadrilatera æqualia.

Sit hyperbola CBHA; ducantur asymptotis





parallelæ AG, HI; EC, FB proportionales; dico quadrilaterum AGIH, quadrilatero BFEC, esse æquale. Fiant EK, FB; HI, MG, æquales, producanturque lineæ ad asymptotos ut figura exhibet.

Demonstr. Supponitur ita esse AG ad HI, sicut EC ad BF; sed (*per* 29.) ut AG ad H I, ita D I ad DG, & ut EC ad BF, sic DF ad DE: ergo ita est D I ad DG, sicut DF ad D E; ergo ut rectangulum DH ad rectangulum DM, ita rectangulum DB ad rectangulum D K; sed duo prima sunt æqualia (*per* 29.) ergo & rectangula DM, DK æqualia sunt, sicut residua I M, F K. Item quia ita est AG ad H I, seu G M, sicut EC ad FB, seu E K; ita erit AG ad AM, sicut EC ad C K; & componendo G M ad AM, sicut EK ad CK: sed ut MG ad AM, ita rectangulum M I, ad rectangulum AMH, & ut EK ad CK, ita rectangulum KF ad rectangulum C K B: sed rectanguli AMH, dimidium est triangulum AHM, & rectanguli C K B, triangulum C K B; ergo ea triangula sunt æqualia, quibus utrinque ablatis restant ECBF, AHIG, quadrilatera æqualia; quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Triangulum habens verticem cum hyperbola communem, est maximum omnium quæ illi inscribi possunt, majusque est dimidia hyperbolâ.

Sit hyperbola ABC, terminata lineâ AC; sit centrum D, dividatur AC bifariam in G, ducatur diameter DG, eritque B vertex. Per B ducatur BF parallela AC; quæ tanget hyperbolam in puncto B, ductis A B, B C; dico triangulum ABC esse maximum quod in hyperbolâ inscribi potest. Pertingit enim ad tangentem BF; alia omnia ad eam non pertingerent, & consequenter sub eadem basi minorem haberent altitudinem: ergo (*per* 1.6.) minora essent.

Addo triangulum A B C majus esse dimidiâ hyperbolâ. Ducantur enim AE, C F, parallelæ B G; triangulum A B C æquale est dimidio parallelogrammo A E F C; sed parallelogrammum A E F C majus est hyperbolâ A B C; ergo triangulum ABC majus est dimidiâ hyperbolâ.

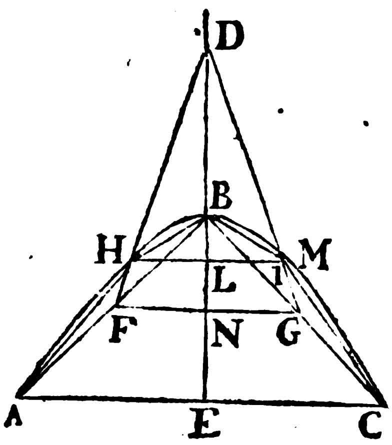
PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Si segmento hyperbolæ inscribatur maximum triangulum; triangula maxima inscripta segmentis sibi hinc inde respondentibus sunt inter se æqualia.

Triangulum ABC sit maximum quod in hyperbolâ inscribi potest, sit D centrum, & linea DBE dividat bifariam lineam AC; divisis bifariam AB, BC in F, & G, ducantur diametri DIG, DHF; dico triangula AHB, BIC, quæ (*per præcedentem*) sunt maxima, quæ in segmentis AHB, B I C inscribi possunt, esse æqualia. Ponatur ex H ordinatim applicata H M, quæ bifariam dividetur

dividetur in L; ducatur item FG, quæ erit parallela A C, dividetur bifariam in N. Applicata H M est parallela AC; ergo & parallela FG, & bifariam dividitur in L, sicut H I bifariam dividitur; ergo H M, H I coincidunt.



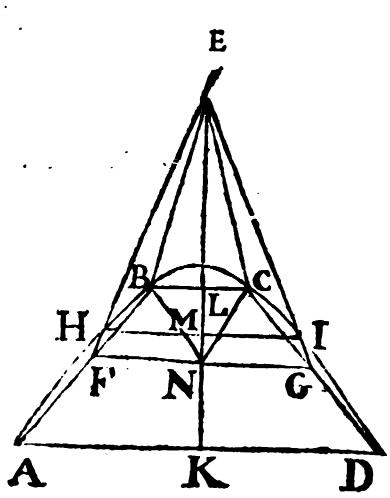
Demonstr. Cùm F G, H I, sint parallelæ, erit (*per* 3.6.) ut G I ad M D, ita F H ad HD; cum FN, N G sint æquales; erunt triangula D N F, DNG æqualia, sicut FBN, NBG; ergo reliqua FBD, GBD erunt æqualia, & cum ut GI ad I D, ita sit triangulum GBM ad triangulum IBD (*per* 1. 6.) & ut GI ad ID, ita sit HF ad HD, & triangulum FBH ad triangulum HBD; ita erit G B I ad I B D, sicut FBH ad HBD; & componendo FBD ad HBF, ut GBD ad GIB; sed primum & tertium sunt æqualia; ergo secundum & quartum, nempe FBH, GIB, sunt æqualia, & eorum dupla AHB, BIC, sunt æqualia; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

In hyperbolâ, conjungentes duas parallelas, auferunt segmenta, quorum triangula maxima sunt æqualia.

Lineæ AB, DC conjungant in hyperbolâ duas parallelas AD, BC, dico triãgula maxima segmen-



torum AB, CD esse æqualia. Dividatur AD, bifariam in K, ducatur ex centro E diameter EK; hæc dividet bifariam lineam BC; dividantur item bifariam AB, CD in F, & G, ducaturque FG; Item ducantur diametri E H F, E I G; ducatur item ordinata H M, quæ ut in præcedenti ostendetur incidere in punctum I, item H I esse parallelam AD, & consequenter FG; eritque (*per* 3.6.) ut GI ad IE, ita FH ad HE; ducantur item BN, CN, BE, CE.

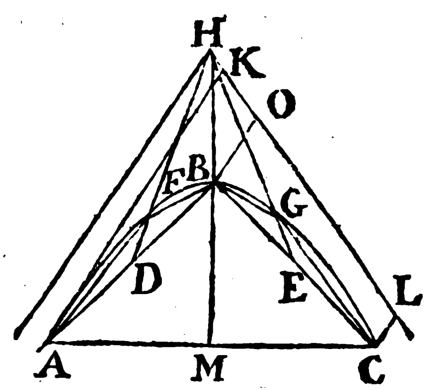
Demonstr. Cùm BC, A D sint parallelæ, sintque AB, D C bifariam divisæ in F, & G, erunt FG, A D parallelæ, & FG, erit bifariam divisa, sicut BC & AD: sunt ergo triangula FBN, NCG; BNL, CNL; BEL, CEL æqualia; quibus sublatis ex triangulis æqualibus EFN, EGN, restant æqualia triangula FBE, GEC: & cum H I sit parallela FG, erit ut G I ad I E, ita FH ad H E; & ductis BH, CI, ostendam sicut in priore similiter dividi triangula FEB, IEC, & consequenter triangula CIG, BHF, & eorum dupla CID, ABH esse æqualia; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Si ad diametrum ordinatim applicentur ducta ab eius extremitatibus ad verticem lineæ auferunt segmenta convexa æqualia; & ductis per easdem extremitates & verticem parallelis uni asymptoto; auferuntur segmenta concava æqualia.

Sit diameter HM, ad quam applicetur AC, & à punctis A, & C, ducantur ad verticem B, lineæ AD, BC; dico segmenta AFB, BGC esse æqualia. Nam divisis AB, B C bifariam in D & E, ductisque diametris HD, & HE; ductisque AF, BF, BG, CG, fiunt triangula æqualia; tum supra BF, BG, possunt fieri alia duo æqualia, & super FA, CG, possunt fieri (*per præcedentem*) æqualia trian-



gula; & per has subdivisiones tot fient in uno segmento, quot in alio; & cum singula triangula auferant ex segmento cui inscribuntur plusquam mediam partem, tot fient divisiones in uno, ut id quod relinquetur, sit omni quantitate minus; cum ergo quodlibet triangulum in uno segmento habeat sibi æquale respondens in alio, erunt segmenta æqualia.

Per puncta A, C, & B, ducantur tres lineæ parallelæ AK, BO, CL, dico segmenta concava CLOB, ABOK, esse æqualia.

Demonstr. (*Per* 28.) tres lineæ CL, BO, AK sunt continuè proportionales, & rectilinea CL BO, ABOK, (*per* 30.) sunt æqualia; à quibus si auferas segmenta æqualia convexa, restabunt segmenta concava CLOB, ABOK æqualia; quod secundo loco propositum fuerat.

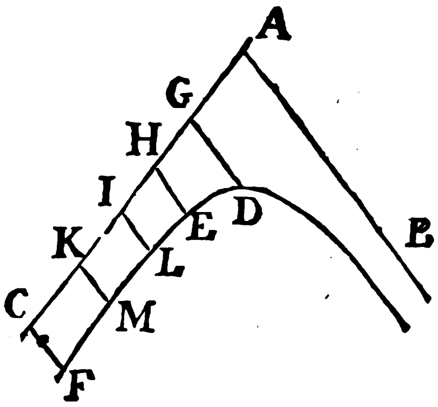
PROPO

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si in hyperbola secetur una asymptotos proportionaliter, & per ea puncta ducantur lineæ alteri parallelæ; illæ erunt proportionales, & intervalla erunt æqualia. Ergo decrescentibus lineis Geometricè, intervalla habebunt rationem logarithmorum.

Asymptotos A C dividatur proportionaliter, hoc est sint lineæ AG, AH, AI, AK, AC in continua proportione; dico segmenta concava GHED, HILE, IKLM esse æqualia.



Demonstratio Cum AG, AH, AI, &c. sint in continua analogia, ergo (*per præcedentem*) erunt segmenta concava CM, KL, IE, HD, æqualia.

Atque hæc est proprietas mirabilis hyperbolæ à P. à S. Vincentio primùm demonstrata, & à nonnullis non citato authore proposita, exhibens logarithmos & numeros ipsis respondentes. Parallelæ enim numeros Geometricè crescentes exhibent, & segmenta eorum logarithmos.

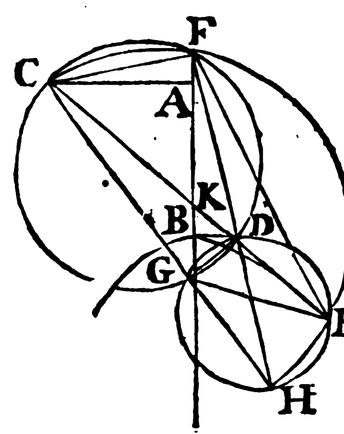
PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Lineæ ab umbilicis ad contactum ductæ æquales angulos cum tangente comprehendunt.

Sint hyperbolæ umbilici G & F; hoc est sit AB axis & rectangula AGB, BFA sint singula æqualia quartæ parti figuræ; & recta EDC, hyperbolam tangat in puncto E, dico si ducantur ab umbilicis G & F, lineæ F E, G E, angulum GED angulo FED esse æqualem. Ordinatim applicentur AC, BD ad tangentem usque in punctis C & D.

Demonstratio. (*Per* 13. *hujus*) rectangulum AC, BD æquale est quartæ parti figuræ, ergo & rectangulo A G B, aut BFA: quare ut AC ad AG, ita GB ad BD; & cum anguli in A & B, sint recti, triangula C A G, BGD, erunt similia, & angulus BDG angulo AGC æqualis, & consequenter C G D erit rectus: eodem modò ostendetur rectus CFD; si ergo fiat circulus circa diametrum CD, is per puncta F & G transibit. Sit EH perpendicularis ad D E, occurrens lineæ FD productæ in H; ducatur item H G, quam contendo unam lineam efficere cum C G; fientque trian-



gula CFD, DEH, æquiangula, cum anguli CFD, DEH sint recti, & anguli in puncto D ad verticem æquales; quare ita erit FD ad DC, ut DE ad DH; sunt item triangula CDF, CAG, similia cum præter angulum rectum in A & F habeant angulos CGA, CDF, eidem arcui insistentes æquales; sed CAG triangulum est jam ostensum simile triangulo GBD; sunt igitur triangula CDF, CGA, GBD similia, triangulum H D E, habens angulum E rectum, & HDE æqualem opposito CDF, illis adhuc erit simile. Angulus B G D est complementum anguli CGA ad angulum rectum, cum angulus C G D fuerit ostensus rectus; Sunt ergo æquales anguli CGA & B D G; est ergo ut FD ad DC, ita BD ad DG: ergo ut B D ad D G, ita est ED ad DH, & permutando, ut BD ad DE, ita GD ad DH; item ut GD ad DH, ita F C ad CG; quare C G, GH sunt una eademque linea: Si ergo circa CH describatur circulus, is transibit per puncta E, & F; cum anguli in E & F sint recti: Pariter circulus descriptus circa DH, transit per G & E. Jam in majori circulo CFEH, anguli CEF, CHF, eidem insistentes arcui CF, sunt æquales: in parvo circulo GHED anguli CHD, G E D, eidem insistentes arcui G D, sunt etiam æquales; ergo anguli G E D, D E F sunt inter se æquales.

COROLLARIUM.

Cum angulus GEB dividatur bifariam, ita erit GK ad KF, sicut GE ad FE.

PROPOSITIO XLIII.

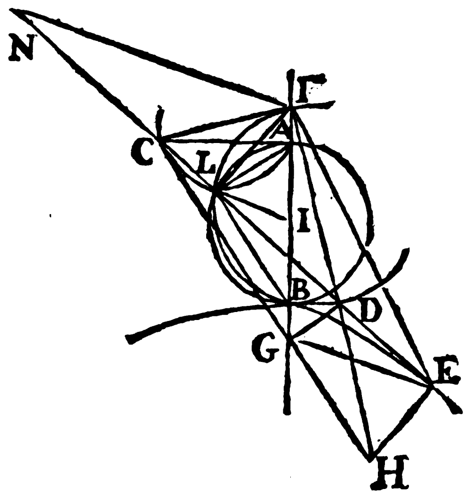
Theorema.

Si ab utroque umbilico, ad idem superficiei hyperbolicæ punctum, duæ ducantur lineæ; quæ uni earum parallela per centrum ducetur ad tangentem usque, erit æqualis semidiametro.

Fiat eadem constructio quæ in præcedenti, & per centrum I, ducatur IL, parallela GE; dico IL esse æqualem semidiametro IA. Ducatur FN parallela G E, erunt anguli alterni G E N, F N E, æquales.

Demonstr. Habemus ex præcedenti, angulos GEN, FEN esse æquales; ergo anguli FNE, FEN sunt

ſunt æquales ; & conſequenter lineæ NF,FE, ſunt quoque æquales : & cum L I, ſint parallelæ N F,



GE,ſintque GI,IF æquales, erunt EL,LN, æquales ; & (*per* 7. 1.) erunt anguli FLN, FLE æquales & recti. Cum igitur anguli CLF, CAF ſint recti, circulus diametro C F deſcriptus tranſit per L, & per A. Pariter cum anguli FLD, FBD, ſint recti, circulus circa lineam F D deſcriptus tranſibit per B & L. Probavimus autem(*in ſuperiori*)angulos FCA, BFD, eſſe æquales eo quod lineæ AF, CA, BD, BF ſint proportionales, cum tam rectangulum ſub extremis quàm ſub mediis æquetur quartæ parti figuræ. Sunt autem anguli FCA, FLA æquales, item BFD, BLD, cum inſiſtant eidem arcui ; ergo anguli FLA,BLD erunt æquales : quare ſi loco prioris ſubſtituas ſecundum, fiet angulus ALB rectus ; & conſequenter ſi centro I, deſcriberetur circulus intervallo I A, aut IB, tranſibit per B ; ſunt igitur LI,IA æquales; quod erat demonſtrandum.

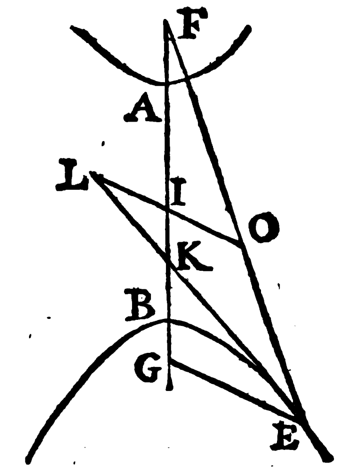
PROPOSITIO XLIV.

Theorema.

In hyperbola ſi ab umbilicis ad idem peripheriæ punctum, duæ inclinentur lineæ, major minorem ſuperabit quantitate tranſverſi axis.

Sit AB axis tranſverſus hyperbolæ, umbilici F & G, ad idem peripheriæ punctum E, ducantur duæ lineæ F E, G E ; dico rectam G E ſuperari à lineâ FE,quantitate axis AB. Sit tangens EKL; ducaturque per centrum I, linea L I O, parallela GE.

Demonſtratio. (*Per præcedentem*) anguli KEO & KEG æquales ſunt, item æquales alterni KEG, KLO ; ſunt igitur æquales anguli KLO, OEK ; ergo lineæ OL,OE, ſunt æquales. Pariter (*per* 4. 6.) ita eſt F O ad O E, ſicut F I ad I G, quæ ſunt æquales; ergo F O, O E æquales erunt ; quare F E ipſius OE, aut LO, erit dupla; ſed (*per præcedentem*) L I, æqualis eſt IB ; ergo F E eſt dupla IB, IO ; ſed AB eſt dupla IB, & G E dupla I O, (*per* 4. 6.) Ergo FE eſt æqualis A B, GE. Quod erat demonſtrandum.

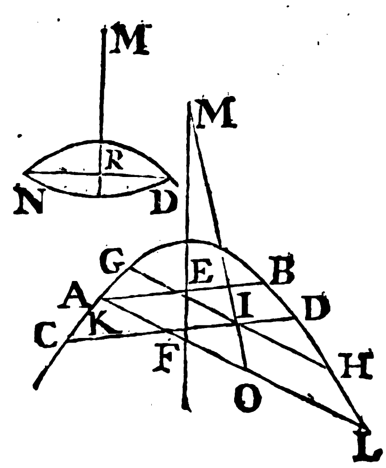


PROPOSITIO XLV.

Problema.

Data hyperbolæ diametrum, centrum, axem reperire.

Proponatur hyperbola, cujus quæritur primò diameter. Ducantur duæ lineæ utcumque parallelæ A B, C D, quæ dividantur bifariam in E & F ; ducatur linea F E, hæc (*per* 15.) dividet omnes parallelas A B bifariam ; ergo diameter erit.



2. Quæritur centrum. Ducantur aliæ duæ parallelæ G H, KL, quæ pariter dividantur bifariam in punctis I & O, ducatur diameter O I, hæc ſecabit priorem diametrum in puncto M : clarum eſt (*per def.*) punctum M eſſe centrum.

3. Ducendus ſit axis ex centro M. deſcribatur arcus ſecans hyperbolam in duobus punctis N & D ; ducat N D, dividaturque bifariam in R ; linea MR erit axis ; incidit enim ut patet perpendiculariter in applicatam ND.

PROPOSITIO XLVI.

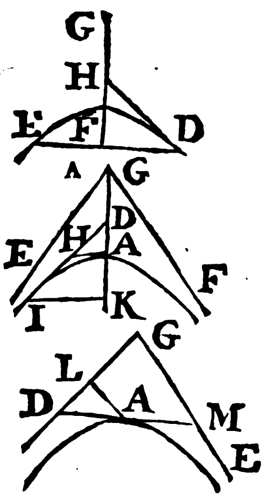
Problema.

Ex dato puncto lineam ducere quæ hyperbolam tangat.

Sit datum punctum D fig.1. in peripheria hyperbolæ. Ducatur linea DE utcumque; quâ divisâ bifariam in A, inventoque (*per præcedentem*) centro G, ducatur diameter GA; tum quadrato FG, æquale fiat rectangulum AGH; dico lineam esse tangentem.

Demonstratio. Ostendimus (*in* 9.) si ducatur tangens HD, semidiametrum FG esse mediam proportionalem inter AG, HG.

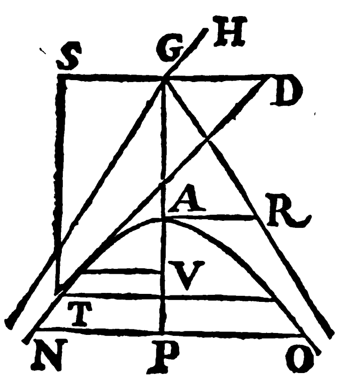
Secundò. Si punctum per quod ducenda est illa tangens, sit in aliqua diametro, inter verticem scilicet F, & centrum G, ut in H; fiat quadrato FG æquale rectangulum HGA; ad diametrum per A applicetur EAD; erit pariter HD, tangens.



Sit rursus datum punctum D fig.2. intra asymptotos GE, GF. Ducatur diameter GDAK; fiatque ut GD ad DA, ita GA ad AK; & per punctum A ducatur tangens AH, cui fiat parallela IK. Dico lineam DI esse tangentem.

Sit datum punctum D in unâ asymptoto. Dividatur DG bifariam in L; ducaturque LA, parallela GE; dico lineam DAM esse tangentem cum dividatur bifariam in A.

Denique punctum datum sit in angulo qui



deinceps est. Inveniatur centrum G; ducaturque DGS; ducaturque item NO, divisâque bifariam in P, ducatur diameter GP, secans sectionem in puncto A; ducatur AR, parallela NO, & quadrato AR æquale fiat rectangulum DGS; ducatur ST, parallela GP & TV, parallela AR; dico lineam DT esse tangentem.

Demonstratio. Clarum est GP esse diametrum, NO applicatam, AR item esse tangentem; & (*per* 18.) quadratum AR æquale erit quadrati figuræ, seu quartæ parti rectanguli sub parametro comprehensi, huic autem quadrato AR, æquale fecimus rectangulum DGS, seu DG, TV: ergo (*per* 14.) linea DT, hyperbolam tanget in puncto T.

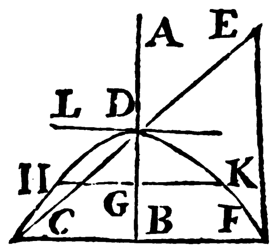
Si punctum datum esset in angulo opposito ad verticem, ei qui continet hyperbolam, impossibile erit problema.

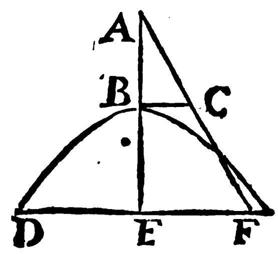
PROPOSITIO XLVII.

Problema.

In hyperbola ad datam diametrum ordinatam applicare ex dato puncto; & tangentem per verticem ducere.

Sit in hyperbola data diameter AB, sitque ducenda ordinatim applicata per punctum C, in peripheria. Ducatur CDE, per verticem D; fiantque CD, DE, æquales & ducatur EF diametro AB parallela, clarum est ita esse CD ad DE, sicut CB ad BF, & consequenter CF esse divisam bifariam & ordinatim applicatam.





2. Sit ducenda ordinata per punctum G diametri. Primò ex puncto C peripheriæ, ducatur ordinata CBF, cui per punctum G, duces parallelam HGK, quæ ut patet erit ordinata.

3. Denique per punctum D, ducta LD, parallela HK, erit tangens ducta per verticem.

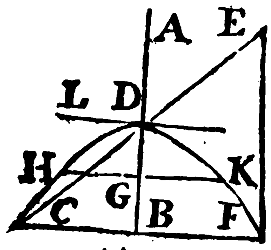
PROPOSITIO XLVIII.

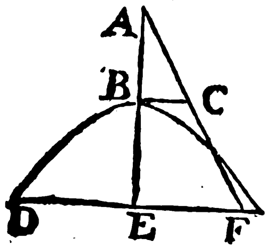
Problema.

Datâ hyperbola diametro parametrum invenire.

Sit hyperbolæ quæcumque diameter AB, tum (*per præcedentem*) ducatur per punctum B, tangens

gens BC, & applicata DE: fiat item quadrato DE æquale rectangulum BEF; ducatur FA se-





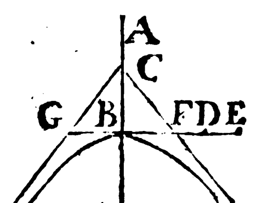
cans tangentem BC in puncto C; dico lineam BC esse diametri contiguam parametrum, ut constat (*ex prima.*)

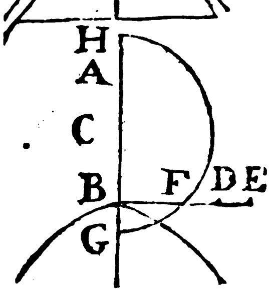
PROPOSITIO XLIX.

Problema.

Data hyperbolæ asymptotos reperire.

Inveniatur datæ hyperbolæ quæcumque diameter AB, & centrum C, & per præcedentem inveniatur BD; tum inter AB, BD sit media proportionalis BE, quæ dividatur bifariam in F: fiat item BG æqualis BF. Ducantur ex centro C, lineæ CG, CF. Dico CG, CF esse asymptotos.





Demonstratio. Quadratum BG, aut BF, est quarta pars quadrati BE, cum BE divisâ sit bifariam in F, & cum BE, sit media proportionalis inter diametrum AB & parametrum BD; ergo ejus quadratum æquale est figuræ, seu rectangulo comprehenso sub AB, DB; Ergo quadratum BF æquale est quartæ parti figuræ & erit CF, asymptotos, sicut & CG.

PROPOSITIO L.

Problema.

Hyperbolæ umbilicos reperire.

Proponantur hyperbolæ assignandi umbilici. Quærantur per præcedentes, axis hyperbolæ; qui sit AB, & parameter BD, ductâ scilicet tangente perpendiculari BD, sit BE media proportionalis inter AB, BD, quæ dividatur bifariam in F; tum ex C, ut centro, intervallô CF, fiat semicirculus GFH; hic dabit umbilicos H, & G.

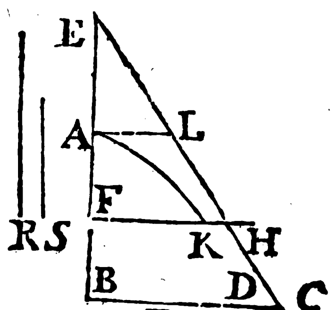
Demonstratio. Ostendam ut in præcedenti quadratum ex BF, æquale esse quartæ parti figuræ, sed rectangulum HBG, seu AGB, æquale est quadrato BF, ut patet: est enim BF media proportionalis inter HB & BG, seu AG, GB; ergo puncta G & H, secundum definitionem, sunt umbilici.

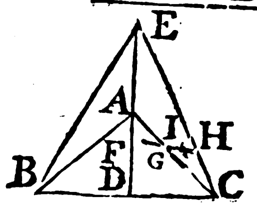
PROPOSITIO LI.

Problema.

Circa datam diametrum, & applicatam, hyperbolam cujuscumque speciei describere.

Sit futuræ hyperbolæ diameter AB, & applicata BD: sit etiam ratio diametri transversæ ad contiguam parametrum, eadem quæ lineæ R ad S. Primò quadrato BD æquale fiat rectangulum ABC, hoc est sit BD, media inter AB, BC; fiatque





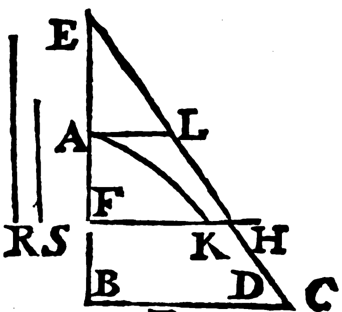
que ut S ad R, ita BC ad BE, juxtà EC, ducantur AL per verticem, & FH utcumque parallelæ BD; sit FK media proportionalis inter AF, FH, punctum K, pertinebit ad hyperbolam, cujus vertex A, transversa diameter AE, parameter AL. Atque ita habebis quotcumque volueris puncta, quæ lineâ curva conjunges.

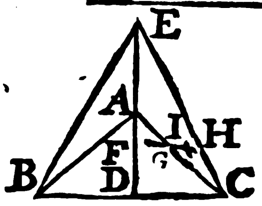
PROPOSITIO LII.

Problema.

Circa triangulum hyperbolam describere.

Sit datum quodcunque triangulum ABC; basis BC, bifariam dividatur in puncto D, ducatur DA producenda in E, quantum libuerit; ducatur EC; ducatur quæcunque FG, parallela BC, sitque FI media inter FG, FH, hoc est sit quadratum FI, æquale rectangulo GFH; dico puncta B, A, I, C, in eadem esse hyperbola.





Demonstr. Ita est (*per* 4.6.) DC ad FH, sicut DE ad FE; & ut DC ad FG, ita est AD, ad AF: ratio autem quadrati DC, ad rectangulum GFH, componitur ex ratione DC ad FH, & ratione DC ad FG, seu DE ad FE & DA ad AF; quæ duæ componunt rationem rectanguli EDA ad rectangulum EFA: quare (*per* 1.) si AE sit transversa diameter, erunt DC, FI ordinatim applicatæ. Sunt igitur puncta B, A, I, C, in eadem hyperbola.

Demonstrationi servit 2. fig.

PROPOSITIO LIII.

Problema.

Dato utroque umbilico & axe transverso, hyperbolam describere.

Sint dati umbilici A, & B vertex C, abscindatur CE æqualis CB; tum intervallo AE, describatur arcus EFG, ducatur quæcumque recta AFH secans arcum EG, in puncto F, jungaturque BF quæ dividatur bifariam in I, ducta perpendiculari IH, quæ occurrat lineæ AF, in puncto H; dico punctum H pertinere, ad hyperbolam, cujus sint umbilici A, & B, vertex C.

Demonstr. Patet (*per* 4.1.) BH, FH, esse æquales; AH autem superat FH, linea AF, seu diametro AE; ergo AH superat BH, diametro AE, seu DC; ergo lineæ AH, BH sunt ad idem punctum peripheriæ ab umbilicis A, & B, ductæ, (*per* 43.)

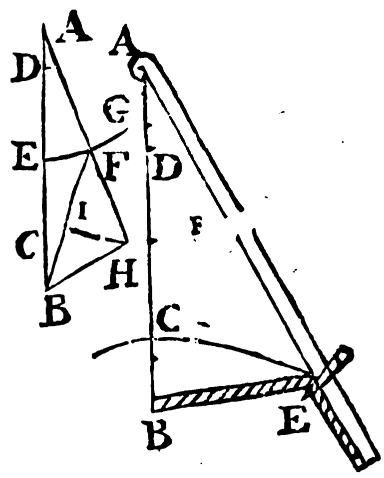
Demonstrationi servit sequentis 1. fig.

PROPOSITIO LIV.

Problema.

Alia descriptio hyperbolæ.

Proponatur describenda hyperbola cujus umbilici A & B, vertex D, diameter DC. Habeatur regula volubilis circa umbilicum A, in qua notetur AF æqualis diametro transversæ DC: assumatur funiculus BEG, æqualis lineæ FG, illiusque unum extremum B annectatur umbilico B, aliud verò puncto extremo regulæ G; habeatur autem stylus, qui ita applicet funem ipsi regulæ, ut cum illa congruat secundum segmentum EG; dico punctum E ad hyperbolam pertinere.



Demonstr. Cùm funiculus æqualis supponatur linea GF, & funiculus EG sit æqualis lineæ EG, reliquum BE æquabitur reliquo EF, quare tota AE, superabit lineam BE, linea AF, quam æqualem fecimus diametro DC; ergo (*per* 43.) lineæ BE AE, sunt ad idem punctum E, superficiei inclinatæ.

PROPOSITIO LV.

Problema.

Datis umbilicis & vertice hyperbolam describere.

Sint dati umbilici A & B, vertex C, assumatur CD æqualis AC; ideoque erit reliqua BD, æqualis diametro EC. Ex centro B fiat quicunque arcus AF, & ex centro A intervallo FD fiat arcus G secans arcum AG in puncto G; dico punctum G, pertinere ad hyperbolam. Pariter si ex B, ut centro, intervallo BH, fiat arcus HI; & ex A intervallo HD fiat arcus secans arcum HI, in I; dico punctum I pertinere ad hyperbolam cujus vertex C, & umbilici A & B.

Demonstr. Lineæ AE, BF sunt æquales, item AG, FD, ex constitutione; sed BF superat FD, diametro BD; ergo BG, superat AG diametro, ergo, (*per* 43.) AG, BG, sunt inclinatæ, ad idem punctum peripheriæ.

Hanc descriptionem facilè in numeris absolves. Supponatur enim BC esse partium 100. & AC,

20,

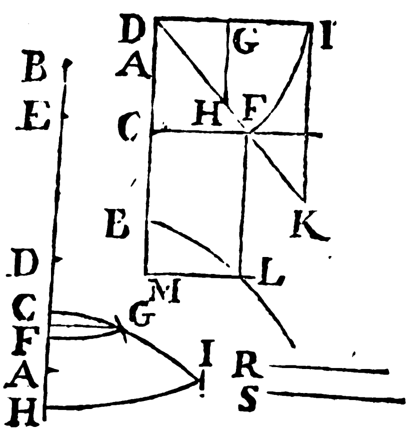
20, eritque differentia inter utramque seu B D, partium 80. Supponatur AG, 24. partium, debebit BG eam superare diametro, seu partibus 80. Erit ergo 104. Si fuerit AG, 25. Erit BG, 105. & ita consequenter habebis omnes inclinatas, ex punctis B, & A, sibi respondentes, quibus facilè totam descriptionem absolves.

PROPOSITIO LVI.

Problema.

Dato axe & ratione illius ad parametrum describere hyperbolam.

Sit data diameter AB, quæ bifariam dividatur in puncto C; sitque ratio diametri ad parametrum ut R, ad S. Fiat ut R ad S, ita BC, quadratum ad quadratum C D, tum productis perpendicularibus DG, C H sit DG, æqualis DC; & GH, æqualis AC, aut BC; tum producatur DH: assumatur quodcunque punctum I, per quod ducatur perpendicularis I K, & ex centro D, fiat arcus I F; per punctum F, ducatur perpendicularis FL, æqualis I K; dico punctum L esse in hyperbolâ, cujus vertex B, diameter AB, ratio diametri ad parametrum ut R, ad S. Ducatur perpendicularis LM.



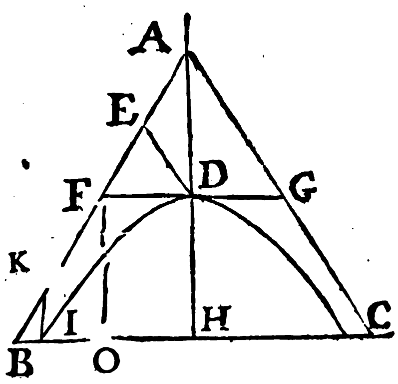
Demonstr. Ita est quadratum D F ad quadratum F L, sicut quadratum D I, ad quadratum I K, aut D G ad G H, seu D C ad BC, hoc est ut S ad R: est autem D F; æquale quadratis DC, C F; & F L quadratum quadrato C M, hoc est rectangulo A M B plus quadrato B D (*per* 7. 2.) Cùm ergo ita sit totum quadratum D F ad rectangulum A M B, plus quadrato BC, ut ablatum quadratum DC, ad ablatum quadratum BC, erit reliquum quadratum C F seu M L, ad reliquum rectangulum AMB, ut totum ad totum, aut ut ablatum ad ablatum, nempe ut quadratum D C ad BC, nempe ut S ad R, seu ut parameter ad diametrum: ergo(*per coroll.*1.1.) punctum L, est in hyperbolâ; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVII.

Problema.

Datis hyperbola asymptotis, & puncto pro vertice, hyperbolam perficere.

Sint datæ asymptoti AB, AC, & punctum D, pro vertice ducatur A D pro diametro; tum per D ducatur D E, parallela AC, sitque E F, æqualis AE, jungatur FDG, eritque FDG, bifariam divisa in D; cùm enim E D, A C, sint parallelæ; erit ut F E ad EA, ita FD ad DG; sed primæ factæ sunt æquales, ergo & secundæ. Ducantur quæcunque parallelæ BC, quæ pariter erunt divisæ bifariam in H; ex singulis quadratis HB, auferantur quadrata F D, ita ut relinquantur quadrata H I: Erit ut in superiori punctum I, in hyperbola.



Quod si volumus ut punctum datum non sit vertex, sed inveniatur in peripheria hyperbolæ. Supponatur punctum datum esse I. Dividatur angulus BAC bifariam lineâ ADH, & ex I, ducatur ad AH, perpendicularis I H: ex quadrato BH, ut in præcedente auferatur quadratum H I, & supponatur restare quadratum HO: ducatur per O linea OF parallela AH, secans AB in F, & per F agatur, FG parallela BC; punctum D, erit vertex; cætera ut priùs perficientur.

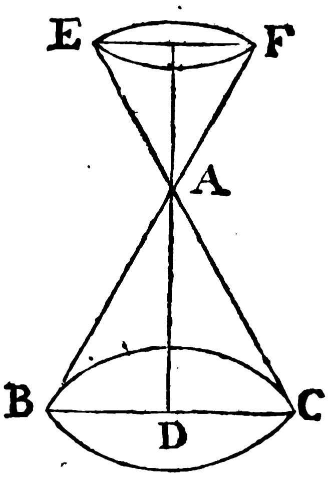
LIBER QVARTVS

De Conicis Sectionibus.

Quas seorsim, & absolutè consideravimus figuras nempe Parobolam, Ellypsin, & hyperbolam, in ipso cono intuebimur; ostendemusque facile easdem esse quas superioribus libris descripsimus, easdemque proprietates habere. Quia autem Ellypsis & circulus non tantum ex coni sectione generantur, sed in cylindro locum etiam habent, de sectione cylindri aliquid dicemus in sequenti.

DEFINITIONES.

1. Conica superficies ea est, quæ describitur à linea percurrente integram circuli circumferentiam, circa punctum extra planum circuli assumptum.



Ut si linea AB ex puncto A immoto, & extra planum circuli BC posito ducta, percurrat totam circuli BC circumferentiam; duæ generabuntur coni superficies ABC, EAF, concurrentes in puncto A.

2. Vertex coni aut superficiei conicæ, est punctum illud immotum A.

3. Axis coni, aut superficiei conicæ, est recta linea, à vertice coni ad centrum circuli supradicti ducta, ut AD.

4. Conus est figura solida, conicâ superficie, & circulô comprehensa, ut ABC.

5. Vertex coni idem qui superficiei conicæ, sicut & axis.

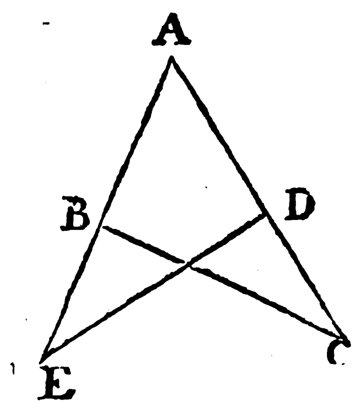
6. Basis coni, aut superficiei conicæ, est circulus cujus circumferentiam percurrit linea, conicam superficiem producens.

7. Conus rectus cujus axis ad planum suæ basis rectus est. *ut si linea AD ad planum basis BC fuerit recta.*

8. Conus scalenus cujus axis ad planum suæ basis obliquus est.

9. Subcontraria positio duorum triangulorum, est duorum triangulorum similium & eundem angulum verticalem habentium, dispositio, quâ bases nec congruentes, nec parallelas habent.

Ut si triangula similia ABC, ADE communem angulum A habentia, bases BC, DE, parallelas non habeant, sed angulus ABC angulo ADE sit æqualis.



10. Subcontraria coni sectio ea est quâ conus ita secatur, planis ad triangulum per axem rectis, ut fiant duo triangula subcontrariè posita.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Recta linea à vertice coni ad quodcumque superficiei conicæ punctum ducta, in ipsa est superficie.

A vertice coni A fig. 1. ad punctum quodcumque B, superficiei conicæ ducatur recta AB, dico hanc lineam totam esse in superficie conica.

Demonstratio. Cùm superficies conica, producta sit motu rectæ per punctum A semper transeuntis; hæc linea motu suo aliquando per punctum B transibit, alioquin esset aliqua pars superficiei conicæ quæ à tali linea non describeretur: ergo linea recta à puncto A ad B ducta tota est in superficie conica; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Si à vertice coni, ad punctum intra superficiem

ficiem Conicam positum ducatur linea recta; hæc tota intra superficiem Conicam cadet.

COROLLARIUM II.

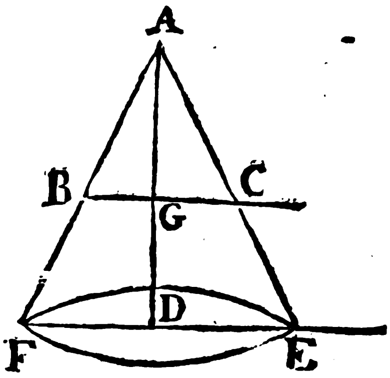
Si à vertice Coni ad aliquod punctum extra superficiem Conicam assumptum, ducatur recta linea, hæc tota extra superficiem Conicam erit.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si linea duo qualibet puncta superficiei Conicæ conjungens, per verticem non transeat; intra Conum erit; & producta cadet extra.

Superficiei Conicæ duo qualibet puncta B & C conjungat linea recta B C, quæ per verticem A non transeat; dico totam lineam AC, intra Conum cadere, à puncto A per puncta B & C ducantur duæ rectæ AB, AC, quæ productæ basin attingent in F & E; linea E F (*per* 2. 3.) tota intra circulum erit, fietque triangulum AFE.



Demonstr. Trianguli AFE latera AF, AE sunt (*per* 1.) in superficie Conica, ergo triangulum AFE est totum intra superficiem Conicam; ergo linea BC, quæ lineis AF, AE, clauditur; erit intra conum, & producta ex cono egredietur.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si Conus per verticem plano secetur; communis plani, & Coni sectio erit triangulum.

Conus cujus vertex A, basis E F, secetur plano per verticem A; dico communem plani secantis, & coni sectionem esse triangulum. Si enim F E communis sectio plani secantis, & basis, hæc (*per* 3. 11.) erit linea: ducantur A F, A E, quæ erunt in superficie conica (*per* 1.) & in eodem plano, in quo & linea E F (*per* 1. 11. *Eucl.*) ergo communis sectio plani secantis, & coni erit triangulum A F E.

COROLLARIUM.

Si conus plano per axem secetur communis sectio erit triangulum.

PROPOSITIO IV.

Si in triangulo per axem omnes ordinatim applicatæ ad axem seu parallelæ basi fuerint, bifariam ab eo dividuntur; suntque inter se sicut distantia à vertice.

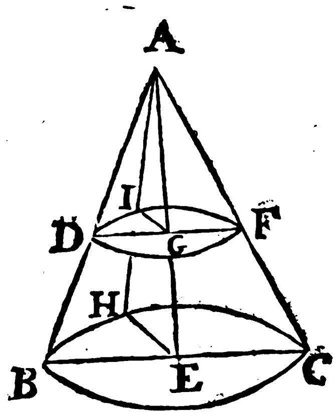
Sit A F E communis sectio coni, & plani per axem ducti; eritque (*per* 3.) AFE triangulum; dico omnes parallelas lineæ E F, ut B G C bifariam dividi ab axe; nam ita est (*per* 4. 6.) AD ad DE; sicut AG ad GC; item A D ad DF, sicut AG ad BG, & cum FE sit circulus sunt F D & DE æquales; ergo & BG, GC æquales erunt; eritque ut EF ad BC; ita AD ad AG, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si conus plano basi parallelo secetur; communis sectio, erit circulus, cujus centrum in axe.

Conus ABC secetur plano DF, parallelo basi BC; dico DIF communem plani secantis, & coni sectionem, esse circulum, cujus centrum sit in axe A E.



Sit enim conus sectus per axem plano; seu triangulo A B C, eruntque communes sectiones planorum parallelorum, & trianguli ABC, BC; DF, parallelæ (*per* 16. 11.) ergo (*per* 3. 6.) cum BC, DF sint parallelæ, ita erit AG ad AE, sicut DG ad BE, & sicut GF ad EC; & posito quocumque alio plano AEH per axem; ita erit AG ad AE; sicut GI ad HE; & cum tres consequentes BE, EC, HE, (*ex defin.*) circuli æquales sint, tres antecedentes G D, G I, GF æquales erunt; ergo D I F est circulus cujus centrum est in axe A E.

COROLLARIUM

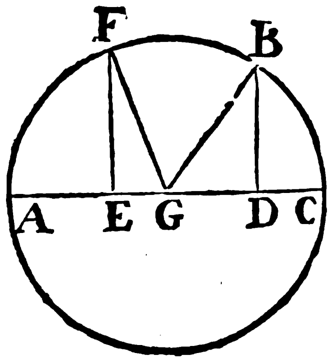
Figura D A F est etiam conus.

LEMMA

L E M M A

Si in figura curvilinea perpendiculares ad aliquam, eam ita dividant ; ut quadrata perpendicularium , æqualia sint rectangulis segmentorum, circulus erit hæc figura.

Sit figura curvilinea in qua ducantur DB , EF perpendiculares ad AC , sitque quadratum DB æquale rectangulo A D C, aut quadratum E F æquale rectangulo AEC, dico figuram A B C esse circulum , & AC ejus diametrum. Dividatur AC bifariam in G, ducanturque GB, & GF.



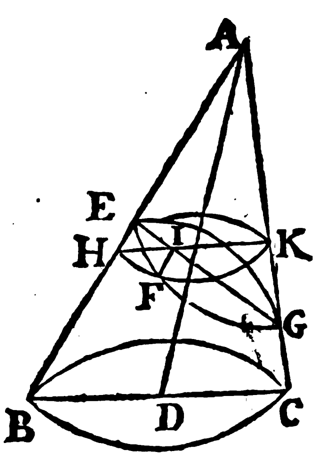
Demonstr. Cùm AC sit divisa bifariam in G, & non bifariam in D , erit (*per 5.2. Eucl.*) rectangulum ADC plus quadrato G D æquale quadrato GC ; sed rectangulo ADC æquale supponitur quadratum B D , ergo quadratum DB cum quadrato G D , æquale erit quadrato GC ; sed (*per* 47.1.) quadrato DB & quadrato GD æquale est quadratum GB, ergo quadrata GB,GC,AG sunt æqualia & consequenter lineæ : ergo A B C est circulus ; quod erat demonstr.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Coni scaleni sectio subcontraria circulum exhibet.

Sit conus scalenus ABC, sitque ABC trian-



guli per axem planum , ad basin coni rectum ; secetur item conus planò E F G recto ad planum ABC , sitque communis planorum sectio linea EG & triangulum AEG , triangulo ABC simile, sed subcontrarie positum ; dico EFG communem coni , & plani secantis sectionem circulum esse. Ducatur enim in eo plano secante, recta I F perpendicularis ad EG, quæ (*per 3. def. 11.*)erit recta ad planum ABC , ducatur per I F planum HFK parallelum basi , cujus consequenter communis sectio HIK erit parallela basi BC, & (*per 5.hujus*) erit HFK circulus.

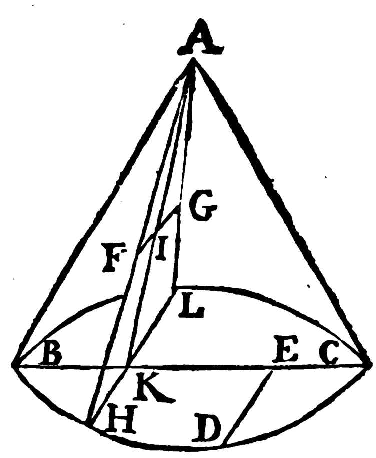
Demonstr. Linea F I communis sectio utriusque plani recta est ad planum ABC,ergò erit perpendicularis ad HK , & media proportionalis inter H I , & I K , seu quadratum F I æquale est rectangulo H I K ; sed rectangulum E I G æquale est rectangulo H I K sunt enim triangula EIH, KIG , similia cum anguli ad verticem in puncto I sint æquales , & angulus E H I æqualis angulo B, supponatur æqualis angulo EGK , ergo (*per 5.6. Eucl.*) ita est E I ad H I ; sicut I K ad IG. Ergo (*per 13.6.*) rectangulum E I G sub extremis, æquale est rectangulo H I K sub mediis ; ergo quadratum I F æquale est rectangulo E I G , & (*per lemma superius*) figura EFG circulus est ; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Omnis parallela perpendiculari ad basin trianguli per axem plano eius occurrit, ab eoque bifariam dividitur.

Proponatur conus ABC sectus per axem plano, seu triangulo ABC , cujus basis BC ad quam perpendicularis sit DE ; tum ex quolibet superficiei conicæ puncto F ducatur FG parallela DE; dico lineam F G occurrere plano ABC, trianguli per axem, & productam ad superficiem usque conicam , ab eo plano dividi bifariam. Per punctum F ex A ducatur recta A F H secans basin in puncto H (*per 1.*) ducaturque HKL perpendicularis ad BC & consequenter parallela lineis DE, FG , jungantur AL & AK.



Demonstr. Cùm H K occurrat lineæ AK , ipsi parallela FG , in eodem plano existens , occurret eidem in puncto scilicet I , & cum A K sit communis sectio trianguli per axem , linea F I occurret

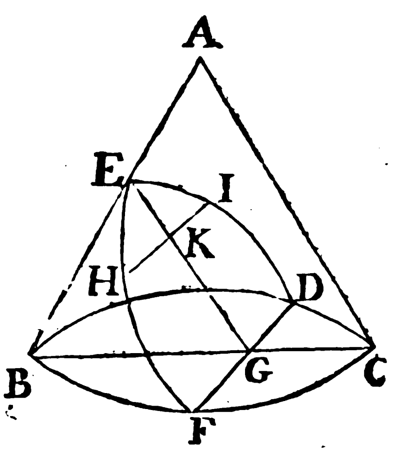
occurret plano trianguli per axem quod est primum. Deinde cum ita sit AK ad AI; ut HK ad FI & ut KL ad IG, sintque HK, & KL æquales: erunt FI, IG æquales; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si Conus plano per axem secetur, secetur & alio plano; cujus communis sectio cum base Coni perpendicularis sit ad basin trianguli per axem, communis sectio utriusque plani secantis, dividet bifariam omnes lineas in secundo plano ductas parallelas huic perpendiculari. In Cono quidem recto perpendiculariter, in Cono scaleno non semper.

Conus ABC secetur per axem triangulo ABC, cujus basis BC; secetur idem Conus alio plano DEF, sitque DF communis ejus sectio cum base Coni, perpendicularis ad BC basin trianguli per axem, sit item communis sectio hujus secundi plani, & superficiei Conicæ curva DEF in qua ducatur HI parallela FD; dico HI bifariam dividi à linea EG communi sectione utriusque plani.



Demonstr. (*Per 7.*) linea HI parallela perpendiculari DF, occurrit plano trianguli per axem, & ab eo bifariam dividitur; non occurrit autem huic plano nisi in communi sectione, utriusque plani, nempe EG; ergo communis sectio EG dividit bifariam lineam HI, & quamcumque illi parallelam dicatur EG diameter sectionis.

Secundò si triangulum per axem sit rectum ad basin Coni erit FG, quæ supponitur perpendicularis ad BC, recta ad planum trianguli ABC, (*cor.4. def.11.*) ideoque angulus FGE rectus erit; & cum HI sit parallela DF; angulus HKG rectus erit, quod in Conis rectis semper verum est, eò quòd cum axis rectus sit ad basin coni, omne planum per axem ad eandem basin rectum erit, in scalenis id tantum aliquandò accidit.

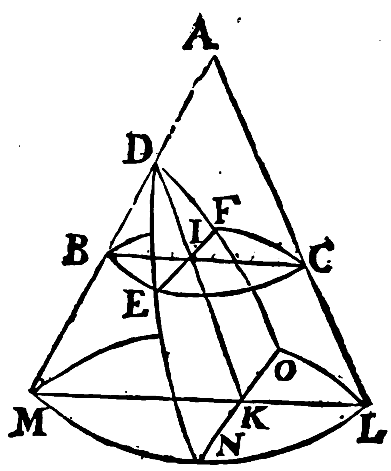
Notandum posse planum sectionis, secare lineam BC extra conum, in quo casu non desinit demonstratio totam suam vim obtinere.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si sectionis diameter alterum latus trianguli per axem, infra verticem non secet; in infinitum produci poterit sectio.

Suppono dari Coni sectionem observatis legibus supra positis, quas deinceps semper observari supponemus, nempe ut Conus ABC plano ABC per axem secetur, item alio plano EDF cujus communis sectio cum base Coni sit EF perpendicularis ad BC basin trianguli per axem. Volo autem ut sectionis diameter DK, non attingat infra verticem rectam AL, latus scilicet trianguli per axem; sed aut illi sit parallela, aut attingat AL productam supra verticem A. Dico sectionem EDF augeri posse quantum libuerit; sit enim linea DK cujuscumque longitudinis, & intelligantur produci tam planum sectionis EDF, quàm Conus; & per punctum K ducatur linea NKO parallela EF & ML parallela BC.



Demonstr. Planum per lineas ML, NO ductum parallelum est plano BEC, & (*per 5. hujus*) MNLO circulus erit, eruntque N & O in superficie Conica, & in plano DEF: ergo in communi utriusque sectione, quæ consequenter producta erit; quod intendebatur.

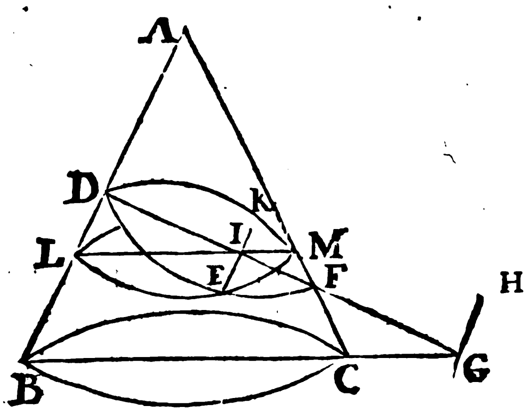
PROPOSITIO X.

Theorema.

Si sectionis diameter cum utroque latere trianguli per axem conveniat; nec sit parallela basi, aut subcontrariè posita; sectio circulus non erit.

Ponantur omnia ut priùs, sed DF diameter sectionis

sectionis secet utrumque latus trianguli per axem, non tamen sit aut parallela basi BC, aut subcontrariè posita: dico sectionem D E F non esse circulum.



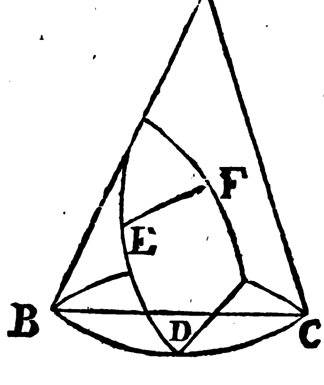
Demonstr. Si DEF esset circulus, DF esset subcontrariè posita, contra suppositionem, quod ita demonstro. Sit E I parallela G H, quæ perpendicularis supponitur ad BC, ducaturque LIM parallela B C, eritque E I perpendicularis ad LIM parallela BC, eritque E I perpendicularis ad LIM, & planum per IE & LIM ductum parallelum erit basi B C, & (*per 5. hujus*) circulus. Igitur I E media est proportionalis inter LI, IM; sed dicitur etiam DEF circulus esse; ergo & I E est media proportionalis inter D I, I F; sunt igitur æqualia rectangula DIF, LIM, ut pote æqualia eidem quadrato IE. Quare (*per* 14. 6.) ita erit L I ad DI; sic ·t I Fad I M; & cum anguli ad verticem in puncto I sint æquales, erunt triangula LID, FIM æquiangula, & consequenter sectio subcontraria; contra suppositionem.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Recta conjungens duo puncta sectionis intra sectionem & Conum cadit.

Sit sectio DEF, puncta E & F, quæ conjungantur lineâ rectâ EF; dico lineam EF totam & intra Conum, & intra sectionem esse.



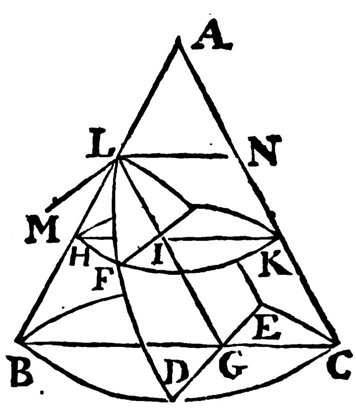
Demonstr. Linea E F non transit per verticem: ergo (*per* 2.) est intra Conum, & cum D E F sit in superficie Conica, linea EF intra sectionem erit.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Sectio cujus diameter parallela est lateri trianguli per axem, parabola est.

Supponitur sectio facta servatis conditionibus consuetis, nempe ut Conus secetur triangulo per axem, secetur & alio plano DLE ita ut DE communis ejus sectio cum basi Coni sit perpendicularis ad BC, & diameter LG, sit parallela lineæ AC lateri trianguli per axem; dico sectionem DLE esse parabolam. Sit enim FI parallela DE, hæc secabitur bifariam à diametro LG in puncto I (*per* 8.) ducatur item per punctum I linea HK parallela BC.



Demonstr. Cùm HK, BC; FI, DE sint parallelæ, planum per HK, IF ductum, parallelum erit plano per BC, DE ducto, hoc est basi Coni: ergo (*per* 5.) HFK circulus erit, & cum FI sit perpendicularis ad HK, sicut DE parallela ad BC; FI erit media proportionalis inter HI, IK; sicut GD inter BG, GC; quare quadratum FI æquale erit rectang. HIK, & quadratum GD rectangulo BGC. Rectangulum autem BGC ad rectangulum HIK, cum habeant latera GC, IK æqualia ob parallelas LG, AC; se habet ut BG, ad HI; seu (*per* 4. 6.) ut LG ad LI, ergo ita est quadratum DG, ad quadratum FI; ut sagitta LG ad sagittam LI; ergo (*per definitionem parabolæ*) sectio DLE erit parabola; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ea omnia quæ de parabola primo libro demonstravimus huic sectioni parallelæ conveniunt.

COROLLARIUM II.

Si uni sagittæ, & ordinatæ quæratur tertia proportionalis LM hæc erit parameter, seu latus rectum, ut si FI, sit media proportionalis inter sagittam LI, & lineam ML, erit ML latus rectum; nempe quadratum FI, ut patet æquale erit rectangulo ILM.

Addo quod aliarum applicatarum quadrata æqualia erunt, rectangulo sub sagitta, & linea ML, ut quadratum DG æquale est rectangulo GLM,

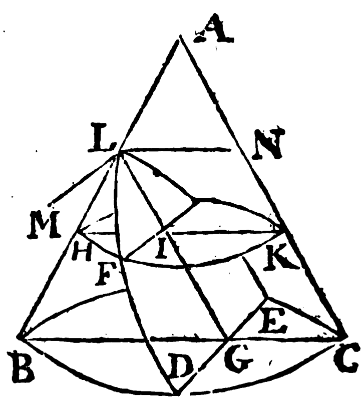
GLM, est enim quadratum DG, ad quadratum FI, ut GL ad IL & sumptâ eâdem altitudine ML, ut rectangulum GLM ad rectangulum ILM, sed quadratum FI æquale est rectangulo ILM: ergo quadratum DG rectangulo GLM æquale erit.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

In parabola parameter se habet ad interceptam Coni, & sectionis verticibus; ut quadratum basis trianguli per axem, ad rectangulum sub ejusdem cruribus.

Sit Parabola DLE, cujus parameter LM dico ita esse LM ad LA, ut quadratum BC, ad rectangulum BAC. Ducatur LN parallela BC.



Demonstr. Primò constat LG, AC esse parallelas, sicut & LN, GC, est ergo parallelogrammum, GN & lineæ oppositæ LN, GC sunt æquales. Certum est item (*per* 12.) quadratum DG æquale esse rectangulo MLG. Sed rectangulum MLG ad quadratum LG se habet ut ML ad LG, (*per* 6.1.) cum habeant eamdem altitudinem LG, seu sumptâ eâdem altitudine LA ut rectangulum MLA ad rectangulum GLA, ita erit rectangulum MLG seu quadratum DG, aut etiam rectangulum BGC ad quadratum LG, & permutando ut rectangulum BGC ad rectangulum MLA, ita quadratum LG, ad rectangulum GLA, est autem ut quadratum LG ad rectang. GLA ita LG ad LA & sumpta eadem altitudine GL, ut rect. GLA ad quadratum LG: ergo ita erit rectang. BGC ad rectang. MLA, ut rectang. GLA ad quadratum LA; & permutando ita erit rect. BGC ad rect. GLA, ut rect. MLA, ad quadratum LA; seu ut LM ad LA; sed ratio rectanguli BGC ad rectangulum GLA componitur ex ratione BG ad GL, seu BC ad CA; quæ eadem est: & ex ratione GC seu LN ad LA; seu BC, BA. Ratio autem sic composita est eadem ac quadrati BC ad rectangulum BAC: ergo ut ML ad LA; ita quadratum BC ad rectangulum BAC; quod erat demonstrandum. Breviùs.

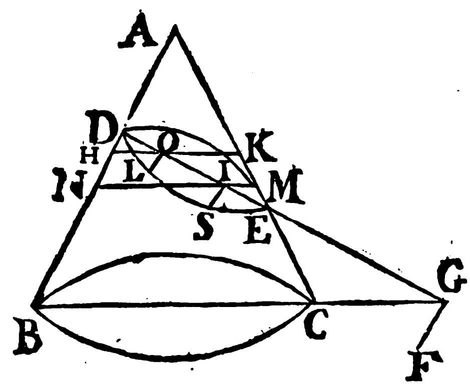
Demonstr. Quadratum BC est ad rectangulum BAC, in ratione compositâ, 1. ratione BC ad BA, seu CG ad AL; 2. Ratione BC ad CA, seu GB ad LG; hoc est ut rectangulum CGB, vel quadratum GD, vel rectangulum MLG ad rectangulum ALG; hoc est ut ML ad AL; quod erat probandum.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Si sectionis diameter cum utroque latere trianguli per axem conveniat non sub contrariè sectio erit Ellypsis.

Sit Conus ABC qui secetur per axem triangulo ABC, item alio plano DLE, cujus communis sectio cum basi Coni sit FG perpendicularis ad BG, basin trianguli per axem; DE communis plani secantis, & trianguli per axem sectio, cum utroque latere AB, AC infrà verticem conveniat; dico sectionem DLE esse Ellipsin. Sint enim LO, SI lineæ FG parallelæ, & consequenter ordinatim applicatæ (*per* 7.) tum per O, & I ducantur HOK, NIM, parallelæ BC.



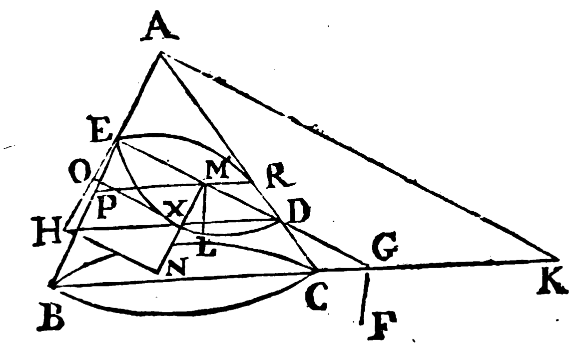
Demonstr. Cùm HK, OL; SI, MN sint lineis BG, FG parallelæ, plana per eas ducta basi Coni erunt parallela, & (*per* 5.) circuli erunt, & LO ad HK; SI ad NM, sicut FG ad BG perdiculares erunt: ergo quadratum LO æquale erit rectangulo HOK, sicut quadratum SI, rectangulo NIM; ratio autem rectanguli HOK, ad rectangulum NIM, componitur ex ratione HO ad NI, seu DO ad DI, & ex ratione OK ad IM; seu OE ad IE, ratio autem sic composita ex ratione DO ad DI; & OE ad IE est eadem ac ratio rectanguli DOE ad rectangulum DIE, ergo ita se habet quadratum LO ad quadratum SI, ut rectangulum DOE ad rectangulum DIE ergo (*ex definitione Ellypsis traditâ*), sectio DLE est Ellypsis. Si esset sub contraria sectio & triangula DOH, KOE essent similia; rectangulum HOK esset æquale rectangulo DOE, atque adeò quadratum LO æquale esset rectangulo DOE, fieretque circulus, saltem si LO esset perpendicularis ad DO.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si fiat ut quadratum parallelæ diametro Ellypsis, per verticem ductæ, ad rectangulum sub basis segmentis; ita sectionis diameter ad quartum terminum; hic parameter erit: deficietque quadratum applicatæ à rectangulo comprehenso sub sagitta & parametro, rectangulo sub sagitta, cujus latera eam rationem habent quam diameter, ad parametrum.

Conus ABC secetur per axem triangulo ABC, item alio plano E L D, cujus communis sectio cum plano basis sit EDG ducaturque FG, perpendicularis ad BCK basin trianguli, per axem, sitque sectio ELD, cujus diameter ED, utrumque trianguli per axem latus secet in E & D, non tamen subcontrariè, sit E H perpendicularis ad ED, ductaque per verticem A, lineâ A K, parallela diametro E D; fiat ut quadratum AK ad rectangulum BKC; ita DE ad E H; E H erit parameter. Perficiatur E N rectangulum; tum ductâ lineâ DH fiat rectangulum MEOX, sitque ML ordinatim applicata ad diametrum E D, dico quadratum ML æquale esse rectangulo MO, & deficere à rectangulo M H comprehenso sub sagitta ME, & parametro E H, rectangulo X O H N, cujus unum latus est sagitta EM, aut O X habetque ad alterum latus H O rationem quam diameter D E ad parametrum EH. Ducatur per M linea P M R parallela B C.



Demonstratio. Ita est DE ad EH, ut quadratum AK ad rectang. BKC, ex suppositione, quæ ratio componitur ex ratione AK ad KB; seu EG ad GB, aut EM ad MP, & ex ratione AK ad KC; seu D G ad G C, aut D M ad MR: quare ratio DE ad E H componetur ex ratione EM ad M P, & ex ratione DM ad MR. Sed ratio sic composita eadem est ac rectanguli E M D ad rectang. PMR; ergo ita est DE ad EH sicut rectangulum EMD ad quadratum ML, ut autem DE ad E H, ita DM ad MX (*per* 4. 6.) & sumptâ eâdem altitudine ME, ita rectangulum D M E ad rectangulum X M E; ergo ita est rectangulum EMD ad quadratum M L, sicut idem rectangulum E M D ad rectangulum X M E; ergo quadratum M L æquale est rectangulo XME.

Propter hunc defectum inditum est huic sectioni nomen Ellypsis.

COROLLARIUM I.

Hæc Ellypsis habet omnes conditiones & proprietates Ellypsis descriptæ secundo libro, atque adeò applicatæ æqualiter à centro distantes æquales sunt. Contra sensum aliquorum qui eò quòd Conus versus apicem sit gracilior, existimant Ellypsin ex Coni sectione generatam, esse graciliorem ex parte verticis, quod tamen falsum est: cum ostenderimus posita simplici definitione Ellypsis sequi applicatas à centro æqualiter distantes æquales esse, & huic figuræ convenire definitionem Ellypsis.

COROLLARIUM II.

Ita est quadratum majoris semidiametri, ad quadratum minoris, ut quadratum parallelæ diametro per verticem Coni ductæ; ad rectangulum sub segmentis basis trianguli per axem. Ut in superiori figura si E D esset bifariam divisa in M, ita esset quadratum FM ad quadratum ML ut quadratum A K ad rectangulum B K C, nam ratio quadrati EM ad quadratum M L, est eadem ac quadrati EM ad rectangulum P M R: quæ componitur ex ratione E M ad P M, seu A K ad BK; & ex ratione EM, seu MD ad M R, seu A K ad KC. Ratio autem quadrati AK ad rectangulum BKC eisdem rationibus componitur, nempe AK ad B K, & A K ad KC; ergo ita est quadratum EM ad quadratum ML, ut quadratum AK ad rectangulum BKC.

COROLLARIUM III.

Ut universalius fiat præcedens Coroll. ita erit rectangulum sub segmentis diametri nempe EMD ad quadratum applicatæ ML, ut quadratum A K ad rectangulum BKC.

COROLLARIUM IV.

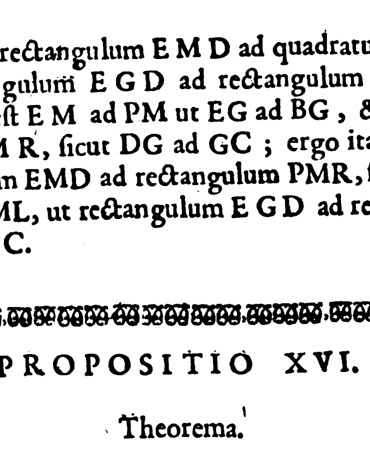
Ita est rectangulum E M D ad quadratum ML, ut rectangulum E G D ad rectangulum B G C, quia ita est E M ad PM ut EG ad BG, & ita est MD ad M R, sicut DG ad GC; ergo ita est rectangulum EMD ad rectangulum PMR, seu quadratum ML, ut rectangulum E G D ad rectangulum B G C.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

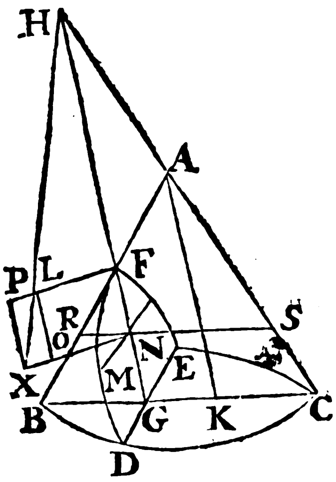
Si sectionis diameter cum utroque latere trianguli per axem extra conum conveniat; sectio erit hyperbola.

Proponatur Conus, cujus sectio per axem sit ABC, sectus item alio plano DFE, cujus communis sectio cum basi Coni sit D E perpendicularis



ad BC basin trianguli per axem, diameter item sectionis cum CA latere trianguli per axem conveniat

veniat supra verticem, in puncto H; dico sectionem DFE esse parabolam. Ducatur M N parallela DE, qua bifariam dividetur (*per* 7.) agatur per N lineæ RNS basi BC parallela.



Demonstratio. Cum R S, BC; MN, DG sint parallelæ erit planum per RS & MN ductum basi BDC parallelum; & (*per* 5.) circulus erit; ergo quadratum M N rectangulo R N S æquale erit. Sicut quadratum DG æquale est rectangulo BGC, ergo quadrata se habent ut rectangula. Sed ratio B G C ad R N S, componitur ex ratione G C ad NS, seu HG ad HN; & ex ratione B G ad RN, seu F G ad F N, & ratio sic composita est ratio rectanguli H G F ad rectangulum H N F. Ergo ita est quadratum D G ad quadratum M N; ut rectangulum H G F ad rectangulum H N F: ergo (*ex definitione hyperbolæ*) sectio D F E est hyperbola.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

In hyperbola si sit ut quadratum parallelæ diametro per verticem Coni ductæ, ad rectangulum sub segmentis basis, ita diameter ad aliam, hæc erit parameter & quadratum applicatæ superabit rectangulum sub sagitta & parametro, rectangulo quod unam sagittam habeat pro uno latere, & ad aliud se habeat ut diameter ad parametrum.

Sit hyperbola producta ex sectione Coni priùs descriptâ, sitque diameter F H, & ei parallela A K per verticem ducta, sitque ut quadratum AK ad rectangulum B K C; ita diameter H F ad parametrum L F. Sitque ordinatim applicata MN, dico ejus quadratum æquale esse rectangulo N P, hoc est excedere rectangulum sub sagitta N F, & parametro FL, rectangulo OP, cujus latus OL æquale sit sagittæ F N, & sit ad aliud O X, ut HF ad LF: per N agatur RNS lineæ BC parallela eritque, ut priùs quadratum M N rectangulo RNS æquale.

Demonstratio. Supponitur ita esse HF ad F L, ut quadratum A K ad rectangulum B K C, quæ ratio componitur ex ratione A K ad K C; seu HG ad GC; aut HN ad NS; & ex ratione A K ad KB seu FG ad GB aut FN ad N R; ergo ratio H F ad F L componitur ex ratione H N ad NS; FN ad N R quæ ratio sic composita est eadem ac rectanguli H N F ad rectang. R N S, seu quadratum MN. Ergo ita est rectangulum H NF ad quadratum MN ut HF ad FL seu HN ad NX, & sumptâ F N communi altitudine ut rectangulum HMF ad rectangulum F N X; quare rectangulum HNF ita se habet ad quadratum MN, ac ad rectangulum F N X: sunt ergo æqualia quadratum MN & rectangulum FNX; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Propter hunc excessum, quo quadratum applicatæ superat rectangulum sub sagitta, & parametro; huic sectioni inditum est nomen hyperbolæ, seu excedentis.

COROLLARIUM II.

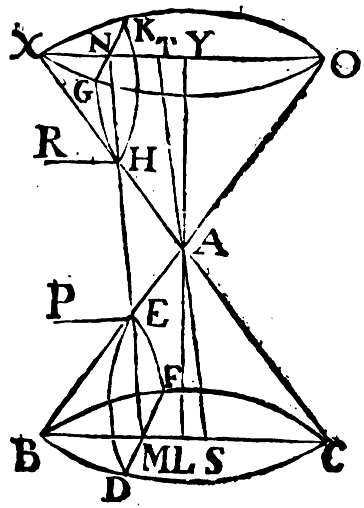
Vides lineam F H quam in hyperbola absolutè considerata sine ullo respectu ad Conum consideravimus, esse interceptam inter verticem hyperbolæ, & latus Coni productum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si duo Coni contrapositi eodem plano secentur, producetur in utroque hyperbola; & utriusque erit eadem diameter. Ideoque transversum latus, seu diameter, & latera recta erunt æqualia.

Sint duæ Conicæ superficies quarum idem axis Y L idem vertex A, & productæ motu ejusdem lineæ circa punctum A, hæ superficies secentur eodem plano faciente communes sectiones DEF, G H K dico eas sectiones esse hyperbolas. Sit enim circulus BDCF basis Coni ABC cui pa-



rallelum sit planum GOKX; producatur linea LY ducaturque per punctum Y, linea XO parallela BC; ostendam facile sicut BC bifariam dividitur in L, XO bifariam dividi in Y, & alias omnes ex centro Y ductas, lineæ Y O esse æquales: suppono autem adesse omnes conditiones quas supra posuimus, nempe DF esse perpendicularem ad BC, basin trianguli per axem, quare GK quæ (*per* 13. 11.) DF est parallela, erit etiam ad XO perpendicularis. Triangulum per axem secent sectiones in E & H, eritque E H communis sectio plani secantis & trianguli per axem, & producta attinget bases

 triangulorum

triangulorum per axem in M, & N ducantur per E & H, EP, HR perpendiculares ad MN; & per verticem A linea T A S parallela diametro E H, fiatque ut quadratum A S ad rectangulum BSC ita HE ad EP; & ut quadratum AT ad rectangulum X T O, ita H E ad E R.

Dico Primò utranque sectionem esse hyperbolam.

Demonstr. Uterque Conus sectus est plano per axem, secatur & uterque altero plano secante basin trianguli perpendiculariter, ita ut diameter sectionis, alterum latus trianguli per axem secet supra verticem ergo utraque sectio est hyperbola.

Secundò clarum est lineam H E esse utriusque transversum latus.

Tertiò dico parametros seu latera recta utriusque sectionis esse æqualia.

Demonstratio. Ita est AS ad SC, sicut AT ad TX ob similitudinem triangulorum, pariter ita est AS ad SB, sicut AT ad TO; quare ita erit quadratum AT ad rectangulum TXO, sicut quadratum AS, ad rectangulum BSC, sed ut quadratum AT ad rectangulum XTO, ita supposuimus lineam H E ad HR, & ut quadratum AS ad rectangulum BSC, ita voluimus esse HE ad EP: ergo ita est H E ad RH, sicut ad E P ergo parametri, HR, E P sunt æquales.

COROLLARIUM.

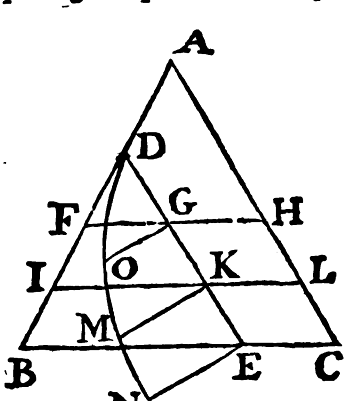
Sequitur hyperbolas prædictas esse omninò similes, nam cum applicatæ in una, sint parallelæ applicatis in alia, & sit eadem parameter, applicatæ æqualiter à verticibus distantes, æquales erunt: iis igitur convenient omnes proprietates, quas hyperbolis oppositis tribuimus.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Parabolam describere.

Sit describenda parabola proponatur triangulum ABC repræsentans triangulum per axem, ponatur DE parallela AC, ducanturque FH, I L parallelæ BC, tum applicentur OG, M K, N E, in quocumque angulo, quæ sint mediæ proportionales, OG quidem inter FG, GH; MK inter IK KL: NE inter BE, EC, dico figuram DOMN esse parabolam.



Demonstr. Quadratum OG æquale est rectangulo FGH, quadratum MK rectangulo IKL, ergo ita est quadratum MK, ad quadratum OG, ut rectangulum IKL ad rectangulum F G H; habent autem altitudines æquales KL, HG, ergo rectang. IKL ad rectangulum FGH se habet ut IK ad FG, seu ut KD ad GD, ergo quadratum MK ad quadratum O G se habet ut sagitta K D ad sagittam G D.

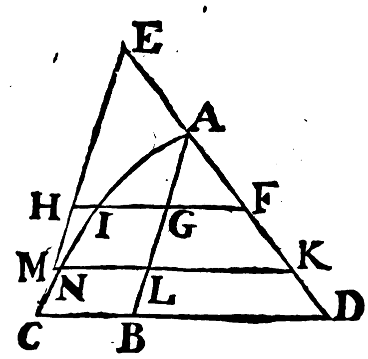
Quod si ulterius determinare velis; fiat ut quadratum BC ad rectangulum BAC ita parameter ad DA, & vicissim.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Circa datas diametrum, & basin in quocumque angulo convenientes, parabolam describere.

Sit data diameter AB, basis CD divisa bifariam in B, conveniant in quocumque angulo, ex puncto C ducatur C E, diametro A B parallela, cui occurrat DA in puncto E, ducantur FH, KM basi parallelæ, quæraturque lineis FG, GH, media proportionalis GI; lineis KL, LM media proportionalis LN; dico figuram AINC esse parabolam.



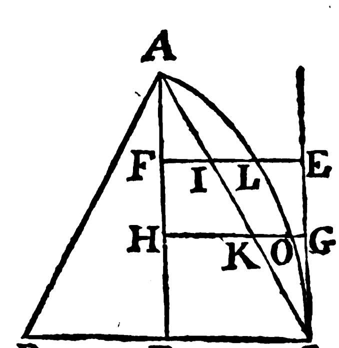
Demonstr. Quadratum I G rectangulo F G H æquale est, sicut quadratum NL, rectangulo KLM; rectangula autem æquales habent altitudines HG, ML; ergo se habent ut KL ad FG, seu ut sagitta AL ad AG; ergo quadratum NL ad quadratum IG, se habet ut sagitta AL ad sagittam AG: ergo figura AI, NC est parabola; quod erat demonstr.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Aliter Parabolam describere circa datum triangulum.

Sit datum triangulum ABC circa quod sit describenda parabola; dividatur BC bifariam in D, ducaturque AD & CE illi parallela, ducantur FE, GH parallelæ basi BC, fiantque FL, HO mediæ proportionales inter FE, FI, HK, HG, dico ALOC esse parabolam.



Demonstr.

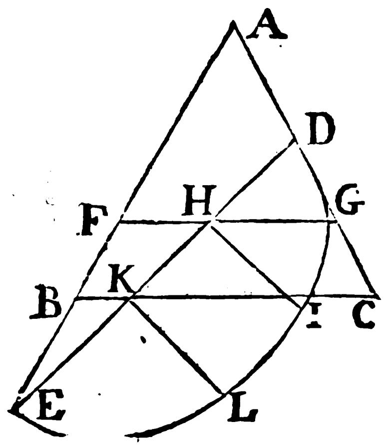
Demonstr. Quadratum FL æquale est rectang. EFI, & quadratum HO, rectangulo GHK, sed rectangula habentia eamdem altitudinem FE, HG, se habent ut HK ad FI, seu AH ad AF, ergo quadratum HO, ad quadratum FL se habet ut AH, ad AF: ergo figura ALOC est parabola (*per definitionem parabolæ.*)

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Ellypsin describere.

Proponatur quodcumque triangulum ABC, in quo ducatur linea DE, secans utrumque latus trianguli in D & E ducanturque quotcumque lineæ ut FG basi BC parallelæ, applicenturque HI, media proportionalis inter FH, HG & KL inter BK, KC dico figuram DIL esse Ellypsin.



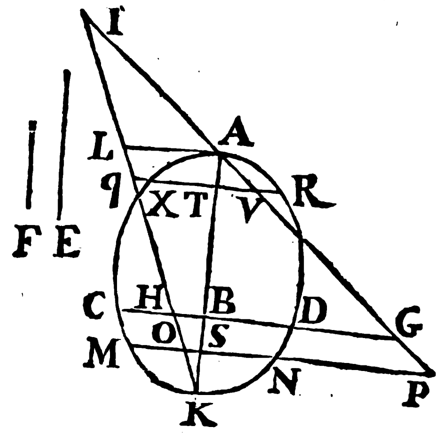
Demonstr. Quadrata HI, KL sunt rectangulis FHG, BKC, æqualia; ratio autem rectanguli FHG ad rectang. BKC, componitur ex ratione FH ad BK: seu HE ad EK; & HG ad KC, seu HD ad HK. Sed ratio rectanguli DHE ad rectangulum DKE, ex iisdem componitur, nempe ex ratione HD ad DK, & ex ratione HE ad KE, ergo ita est rectangulum GHF ad rectangulum, BKC, seu quadratum HI ad quadratum KL, ut rectangulum DHE ad rectangulum DKE; ergo (*per defin. Ellyp.*) DILE est Ellypsis; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Circa datam diametrum, & basin; in dato angulo, Ellypsin specie notam describere.

Sit data diameter AB non quidem integra & basis CD convenientes in quocumque angulo, sitque posita Ellypsis perficienda specie nota, cujus nempe datur ratio diametri ad parametrum, sitque ut E ad F. Sit BG æqualis AB, fiatque ut BG ad BD, ita BD ad BH. Fiat item ut F ad E, seu ut parameter ad diametrum, ita BH ad BK, ducanturque KH, GA convenientes in puncto I: ducantur quæcumque parallelæ QR, MP, fiatque inter TV; QT media proportionalis TX, sicut inter OS & SP media proportionalis SM, aut SN, & ita de aliis, dico figuram ARDK esse Ellypsin propositam. Ducatur AL parallela CD, hæc erit parameter, est enim ut KB ad BH; seu E ad F; ita AK ad AL.



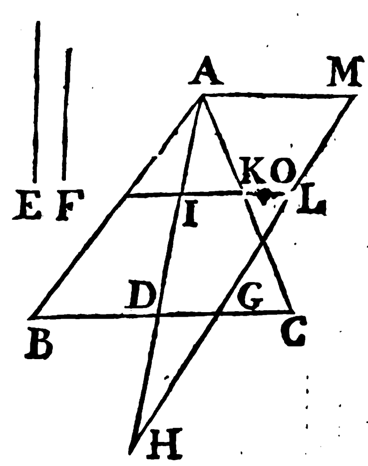
Demonstr. Quadratum BC (*ex constructione*) æquale est rectangulo GBH seu ABH, sunt enim AB & BG æquales, item quadratum SM æquale est rectangulo PSO seu ASO, ergo (*per 14.*) figura est Ellypsis.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Circa datum triangulum Ellypsin specie notam describere.

Proponatur circa triangulum ABC describenda Ellypsis specie nota, nempe cujus diameter ad parametrum sit ut E ad F; divisâ basi BC bifariam in D, sit DC media proportionalis inter AD, DG, fiatque ut parameter ad diametrum seu ut F ad E, ita DG ad DH.



Fiat rectangulo AIL æquale quadratum IO, dico punctum O esse in Ellypsi transeunte per ABC, cujus parameter AM se habet ad diametrum AH, sicut DG ad DH patet.

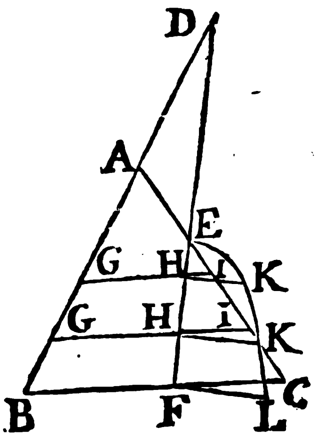
PROPOSITIO XXV.

Problema.

Hyperbolam describere.

Proponatur triangulum ABC repræsentans triangulum

angulum per axem, ducatur linea DF ſecans latus AB ſupra verticem in puncto D, ducantur GHI parallelæ baſi, ſit HK media proportionalis inter GH, HI, ſicut FL inter BF, FC dico figuram EKL eſſe hyperbolam.



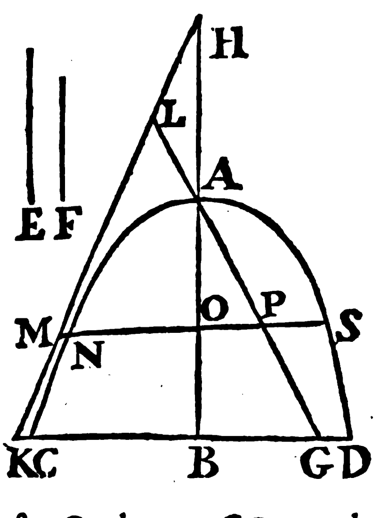
Demonſtr. Ita eſt DF ad DH ſicut BF ad GH, & EF ad EH ſicut FC ad HI. Sed ratio rectanguli BFC ad rectangulum GHI componitur ex rationibus BF ad GH, & FC ad HI; & ratio rectanguli DFE ad rectangulum DHE componitur ex rationibus DF ad DH, & EF ad EH; ergo ita eſt rectangulum DFE, ad rectangulum DHE, ſicut rectangulum BFC ad rectangulum GHI, ſeu ut quadratum FL ad quadratum HK, ergo (*ex defin.*) EKL eſt hyperbola.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Circa diametrum & baſin hyperbolam ſpecie notam deſcribere.

Proponatur diameter AB, baſis CD, diviſâ baſi CD bifariam in B, factoque quôcumque angulo ABC, ſit deſcribenda hyperbola ſpecie nota, id eſt cujus diameter ad parametrum ſit ut E ad F; ſit lineæ AB æqualis BK; fiatque quadrato BC æquale rectangul. KBG, item fiat ut parameter ad diametrum, ſeu ut F ad E, ita BG ad BH, junganturque GAL, HK, ducatur quæcumque parallela MS; fiatque quadratum NO, OS æquale rectangulo MOP; dico puncta N & S eſſe in hyperbola CAD.



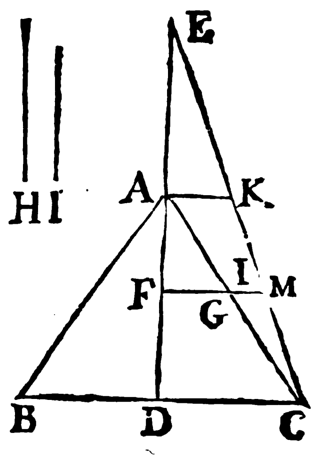
Demonſtr. Quadratum CB æquale eſt rectangulo KBG, & quadratum NO rectangulo MOP ex conſtructione, ſed ratio rectanguli KBG, ad rectangulum MOP componitur ex ratione KB ad MO, ſeu HB ad HO, & ex ratione BG ad OP; ſeu AB ad AO, ratio autem rectanguli HBA ad rectangulum HOA, ex iiſdem componitur, nempe ex ratione HB ad HO & AB ad AO; ergo ita eſt rectangulum HBA ad rectang. HOA, ſicut quadratum BC ad quadratum NO: igitur jam habemus eſſe hyperbolam; eritque ita diameter tranſverſa ad parametrum ut rectangulum HBA ſeu HBK ad quadratum BC, ſeu rectangulum KBG. Et cum eadem ſit altitudo KB ſeu AB, ſe habet rectangulum HBA ad rectangulum KBG ut HB ad BG; ergo ita diameter tranſverſa ad parametrum, ſicut HB ad BG, ſeu ut E ad F, quod faciendum erat.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Circa datum triangulum hyperbolam ſpecie notam deſcribere.

Proponatur triangulum ABC circa quod deſcribenda ſit hyperbola ſpecie nota, nempe cujus data ſit ratio diametri, ad parametrum, qualis eſt H ad I, diviſâ baſi BC bifariam in D; ductâque diametro DA, fiat ut parameter, ad diametrum, ita quadr. DC, ad rectang. ADE, jungaturque EC. Tum inter FD, & FG quæratur media proportionalis FI; dico punctum I pertinere ad eandem hyperbolam.



Demonſtr. Cum ratio quadrati DC ad rectangulum GFD, ſeu quadratum FI componatur ex rationibus DC ad FG; ſeu DA ad AF; & DC ad FD; ſeu ED ad EF, & ex iiſdem rationibus componatur AD ad AF, & ED ad EF, ex quibus componitur ratio rectanguli EDA ad rectangulum EFA; ita erit rectangulum EDA ad rectangulum EFA ſicut quadratum CD ad quadratum FI, eritque diameter ad parametrum ut rectangulum EDA ad quadratum CD; ergo eſt parabola propoſita.

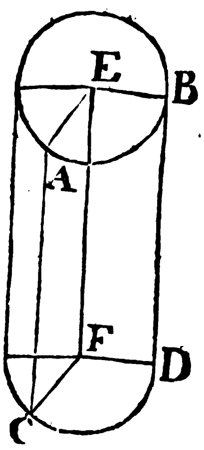
LIBER QVINTVS

De Sectionibus cylindricis.

P*Arabolam Ellypsin & hyperbolam absolutè, & in Cono consideravimus, æquum est ut circulum & Ellypsin in cylindrocont emplemur; parabola enim & hyperbola in eo locum non habent. Primus hanc materiam attigit Serenus philosophus qui in eo præcipuè versatur, ut Ellypsin ex cylindro quocumque progenitam eandem esse cum Conica Ellypsi ostendat. Nos ejus vestigiis inhærentes paucis propositionibus complectemur totam hanc materiam.*

DEFINITIONES.

1. CYlindrica superficies ea est quæ producitur motu lineæ conjungentis radios circulorum æqualium, & parallelorum æquidistanter translatæ. *Sint duo circuli æquales & paralleli AB, CD, quorum radij AE, CF moveantur*, ita ut paralleli semper sint, linea AC conjungens extremitates radiorum describet cylindricam superficiem.



2. Cylindrus est figura solida tali superficie, & circulis parallelis comprehensa.
3. Basis cylindri sunt quilibet ex prædictis circulis.
4. Axis cylindri est recta linea centra circulorum conjungens.
5. Latus cylindri est recta linea cujus translatione producitur cylindrica superficies.
6. Cylindrus Rectus ille est cujus axis est ad bases rectus.
7. Cylindrus scalenus cujus axis est ad bases inclinatus.
8. Diameter sectionis est linea recta, omnes uni parallelas bifariam dividens, cujus medium punctum centrum est.
9. Ordinatim applicatæ dicantur, quæ bifariam à diametro dividuntur.
10. Ordinata per centrum transiens secunda diameter, seu conjugata dicatur.
11. Similes Ellypses sunt quarum conjugatæ diametri ad angulos æquales se secantes eandem habent rationem.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si cylindrus plano secetur, aut per axem, aut axi parallelo sectio parallelogrammum erit.

Ex generatione cylindri patet utraque pars propositionis, si enim secatur per axem sectiones in utraque basi erunt parallelæ, & cum lineæ conjungentes extrema diametrorum parallelorum & æqualium ipsam cylindricam sectionem producant, illæ erunt parallelæ & æquales; ergo sectio parallelogrammum erit.

Secunda item patet, ut sit sectio parallela axi; debent sectiones communes plani secantis, & basium, non tantum esse parallelæ; sed etiam æqualiter à centris distare, & consequenter æquales esse, ergo lineæ eas conjungentes erunt & æquales & parallelæ: ergo hac sectione generabitur parallelogrammum.

COROLLARIUM.

Sectio parallela axi est parallelogrammum parallelum ei quod fit per axem.

PROPOSITIO II.

Theorema.

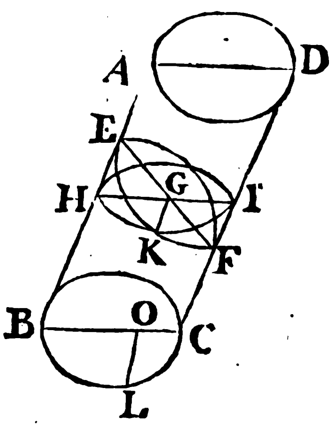
Si cylindrus plano basibus parallelo secetur; sectio erit circulus.

Cylindrus quilibet plano basibus parallelo secetur, dico sectionem esse circulum: si enim cylindrus secetur quolibet plano per axem, erunt sectiones in basibus, & in plano secante parallelæ, ergo æquales; ergo omnes lineæ ductæ à puncto in quo secatur ab axe sunt æquales: ergo sectio erit circulus.

PROPOSITIO III.

Si cylindrus scalenus plano per axem ad bases recto secetur, secetur & alio plano sectionem subcontrariè positam faciente, sectio erit circulus.

Sit cylindrus scalenus ABCD, qui secetur parallelogrammô per axem ABCD, cujus planum sit rectum ad bases, secetur idem cylindrus alio plano recto ad parallelogrammum per axem, cujus communis sectio sit EF subcontrariè posita; hoc est angulus GEH angulo ADG aut ABC sit æqualis: dico communem sectionem cylindri plani secantis EKF, esse circulum. Assumatur in EF communi sectione plani secantis & parallelogrammi per axem, punctum G, per quod ducatur perpendicularis G K, quæ recta erit ad parallelogrammum per axem, cum secundum planum sit rectum ad idem, ducatur per G, linea HGI parallela AD, aut BC ad quam erit recta linea KG (*per* 4. 11.) ducatur O L perpendicularis ad B C. Cum lineæ H I, GK, sint parallelæ lineis BC, OL, plana per ipsas ducta erunt parallela; ergo planum HKI erit circulus.



Demonstratio. Cum anguli GEH, ADC, seu G I F sint æquales, & anguli in puncto G, oppositi ad verticem sint æquales; erunt triangula EGH, IGF similia; ergo ita erit HG ad GE; sicut GF ad GI, immò lineæ EG, GH; GI, GF æquales sunt, sed G K est media proportionalis inter E G, G F; ergo ex lemmate proposito, cum de sectione subcontraria Coni, sectio E K F circulus erit.

COROLLARIUM.

Conversa hujus propositionis facilè demonstrari potest, nempe quod si servatis conditionibus, angulus GEH fuerit inæqualis angulo D, seu GIF, erunt quidem triangula semper similia non tamen reciproce, hoc est erit quidem ut HG ad GE, ita GI ad G F, atque adeò rectangulum comprehensum sub HG, GI, seu quadratum GK erit inæquale rectangulo comprehenso sub EG, GF; ergo sectio EKF circulus non erit.

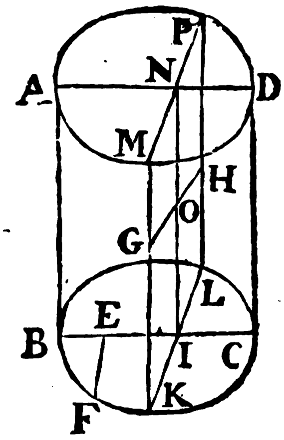
PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si cylindrus plano per axem secetur & à quolibet puncto superficiei cylindrica ducatur parallela perpendiculari ad basin parallelogrammi per axem; hac eidem plano occurret & ab eo bifariam dividetur.

Sit cylindrus divisus parallelogrammo per axem, nempe ABCD, sitque E F perpendicularis ad B C basin parallelogrammi per axem, cui ex quocumque puncto G ducatur parallela GH; dico eam occurrere plano parallelogrammi per axem, & ab eo bifariam dividi.

Ducatur per G linea G K parallela axi, secans basin cylindri in puncto K, ducatur K L perpendicularis ad BC, eruntque KL, GH in eodem plano, ducatur L H P parallela axi, item NI, quæ erit in plano parallelogrammi per axem.



Demonstratio. Lineæ KL, GH, in eodem sunt plano MKLP, & cum KL, MP sint divisæ bifariam in N & I, cum sint perpendiculares ad diametros circulorum, linea G H, dividetur bifariam in O, à linea N I, quæ est communis sectio parallelogrammorum; ergo GH occurrit plano parallelogrammi per axem, & ab eo bifariam dividitur.

PROPOSITIO V.

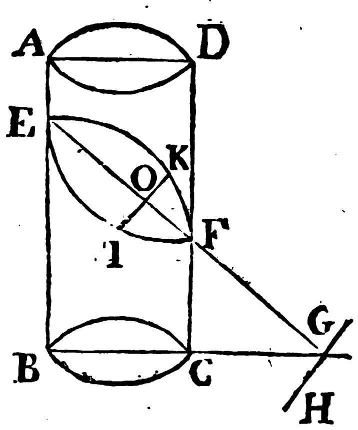
Theorema.

Si cylindrus plano ita secetur, ut communis plani secantis, & basis cylindri sectio sit perpendicularis ad basin parallelogrammi per axem: omnes recta in sectione huic linea parallela, bifariam secabuntur, & in cylindro recto perpendiculariter, in scaleno non semper.

Cylindrus secetur per axem parallelogrammo ABCD, secetur & alio plano EFG, cujus communis sectio cum plano basis cylindri sit linea GH, perpendicularis ad BC, productam basin nempe parallelogrammi per axem; dico 1. lineam quamcumque I K parallelam H G bifariam dividi à linea EF communi sectione plani secantis & parallelogrammi per axem.

Demonstr.

Demonstratio. Cum in superficie cylindrica sit sumptum punctum I per quod ducitur I K parallela, lineæ GH perpendiculari ad BC linea IK dividetur bifariam in O à plano paralelogrammi ABCD (*per præcedentem*) sed huic plano non occurrit nisi in linea E F communi sectione utriusque plani; ergo IK à linea EF, bifariam dividitur quod primò propositum fuit.



Dico secundò quòd in cylindro recto, & in scaleno quando parallelogrammum per axem rectum est ad basin cylindri, quod IK sit perpendicularis ad E F.

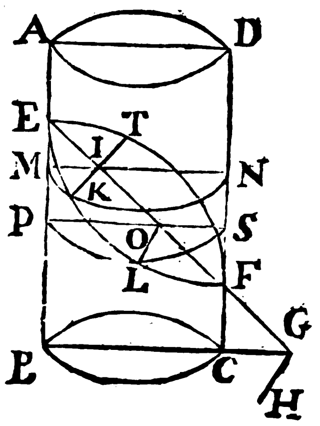
Demonstratio. Cum enim planum ABCG sit rectum, ad planum basis cylindri & GH supponatur perpendicularis ad BG, erit recta ad idem planum; & (*per* 4. 11.) erit angulus HGE, rectus; & consequenter angulus IOE rectus erit; in omni autem cylindro recto cum axis sit rectus ad basin omne planum per axem erit ad bases rectum, in scaleno non omne.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si cylindrus plano per axem secetur & alio plano cujus communis sectio cum plano basis, sit perpendicularis ad basin diametri per axem, nec sit sectio subcontraria generabitur Ellypsis.

Sit cylindrus sectus per axem parallelogrammo ABCD sectus item alio plano EKF cujus commu-



nis sectio cum plano basis cylindri, nempe G H sit perpendicularis ad BC, basin parallelogrammi ABCD; dico sectionem EKF esse Ellypsin. Sint enim IK, OL ordinatim applicatæ E F & per I & O ducantur M I N, P O S; parallelæ BC cum lineæ M N, I K; PS, OL, sint parallelæ lineis BG, GH plana M K N, PLS erunt basi parallela & (*per* 4. 3.) circuli erunt, & cum GH sit perpendicularis ad BG, erunt I K, L O, perpendiculares ad MN, PS, & quadratum I K æquale rectangulo M I N, sicut quadratum L O rectangulo P O S.

Demonstratio. Ita est quadratum K I ad quadratum OL, sicut rectang. MIN ad rectangulum POS, sed ratio rectanguli MIN ad rectang. P O S componitur ex ratione IN ad OS, seu IF ad OF, & ratione MI ad PO, seu EI ad EO, & ratio rectanguli EIF ad rectangulum EOF componitur ex iisdem, nempe ex ratione EI ad EO; & IF ad O F; ergo ita est quadratum I K ad quadratum OL; sicut rectangulum EIF ad rectangulum EOF.

Quando autem sectio non erit subcontraria IE, IM non erunt inter se æquales neque IF, IN; sed EI erit major quam M I, erit rectangulum E I F majus quam rectangulum MIN, & consequenter, quam quadratum I K; immo si esset rectangulum EIF æquale quadrato IK, si tamen angulus EIK, rectus non esset non produceretur circulus, sed Ellypsis.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

In Ellypsi cylindrica rectangulum sub segmentis diametri ad quadratum applicata eam rationem habet quam quadratum diametri Ellypsis ad quadratum basis rectanguli per axem.

Proponatur Ellypsis cylindrica, cujus sit diameter EF applicata KI; dico ita esse rectangulum EIF ad quadratum I K, sicut quadratum F E ad quadratum BC.

Demonstratio. Cum sit ut EI ad IM; ita IF ad I N, ita erit rectangulum E I F ad rectangulum M I N, seu quadratum IK, ut ratio duplicata E I ad M I, seu componendo ut ratio duplicata F E ad MN; seu quadrati EF ad quadratum MN, seu BC quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Tota doctrina Ellypsium est revocanda: est enim hæc Ellypsis omninò similis Conicæ Ellypsi cum ei conveniat eadem definitio, quare quæcumque diximus de parametro, aliisque ejus proprietatibus applicanda sunt.

COROLLARIUM II.

In Ellypsi cylindrica secunda diameter æqualis est diametro basis cylindri; si enim E F esset divisa bifariam in I nempe I esset centrum, & K I T secunda diameter cum rectangulum E I F seu in tali casu quadratum E I, se habeat ad quadratum KI, ut quadratum E F ad quadratum B C. Ut autem quadratum E I ad quadratum K I, ita quadratum E F ad quadratum K T; ergo ita erit quadratum EF ad quadratum B C, sicut quadratum E F ad quadratum KT: ergo quadrata BC, KT æquantur.

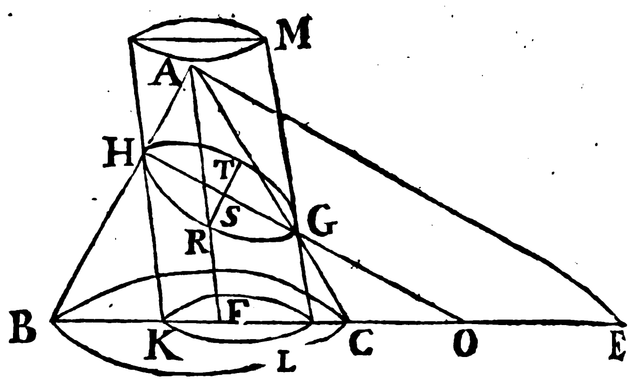
PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Conus, & cylindrus eadem Ellypsi secari possunt.

Proponatur quodcumque triangulum per axem A B C, Coni ABC; qui secetur Ellypsi HRG; tum divisâ HG bifariam in S ordinatim applicetur RST, sit AE parallela HO, sitque E F media proportionalis inter BE & C E, ducaturque A F cui sint parallelæ HK, GL. Perficiatur parallelogrammum KM sitque cylindrus cujus KM sit parallelogrammum per axem & basis circulus supra KL descriptus, dico eandem Ellypsin HRG esse Ellypsin cylindricam. Erit autem eadem Ellypsis cylindrica & conica, si eadem sit ratio utriusque diametri.

Demonstr. Cum H K, A F; A E, H O; sint parallelæ; triangula AEF, HOK erunt simila: itaque erit quadratum AE ad quadratum E F, ut quadratum HO ad quadratum OK. Sed quadratum E F æquale est rectangulo B E C, eò quòd E F sit media proportionalis inter B E, E C, (*& per* 13. 4. *hujus*) ut quadratum AE ad rectangulum B E C, ita rectangulum H S G ad quadratum S R, aut quadratum H G ad quadratum R T in Ellypsi Conica: ergo ita erit quadratum H G ad quadratum R T Ellypsis Conicæ, ut quadratum HO ad quadratum OK; sed ut quadratum HO ad quadratum OK, ita quadratum H G ad quadratum K L & ut quadratum HG ad quadratum L K, ita (*per precedentem*) quadratum H S ad quadratum R S; aut quadratum H G ad quadratum R T in Ellypsi cylindrica: ergo ita est quadratum H G ad quadratum R T applicatæ, in Ellypsi Conica, sicut quadratum H G ad quadratum R T in Ellypsi cylindrica; ergo prima & secunda diameter in utraque Ellypsi eadem est.



COROLLARIUM I.

Dato quôcumque Cono A B C, & Ellypsi H R G, quærendo mediam proportionalem EF, & alia peragendo prout jacent in propositione, inveniemus cylindrum cui congruat eadem Ellypsis.

COROLLARIUM II.

Pariter dato cylindro secto Ellypsi G H, inveniemus Conum cui eadem Ellypsis congruat, si nempe ex quocumque puncto F educatur F A, parallela K H aut LG; fiat item ut B E ad F E, ita F E ad C E; ex puncto E ducatur E A parallela H O, & ex puncto A ducantur A H B, A G C, determinatur cylindrus ABC, cui eadem Ellypsis congruit ut applicanti demonstrationem superiorem facilè patebit: atque hæc sufficiant.

LIBER

TRACTATUS IV.

ARITHMETICA.

QVAMVIS innumeri vulgò circumferantur libri Arithmetici, elementares regulas explicantes; quia tamen ut plurimùm demonstrationibus carent, solasque continent praxes satis intricatas, maléque explicatas ut huic incommodo obviam irem, & ne nostro operi, pars alioquin utilissima deesset; Arithmetices principia omnia, perspicuitate quàm potero maximâ explicanda, & demonstranda suscipio. Libros quatuor continebit hic tractatus. Primus erit de Regulis elementaribus. Secundus de Fractionibus. Tertius de Extractione radicum, quadratæ, & cubicæ, cætera ut ad algebram pertinentia hic non attingo. Quartus erit de calculari Arithmetica, & divinatoria. Tyro initiò solum primum librum addiscat, & extractionem radicis quadratæ. Secundum librum, dum provectior erit, evolvet.

LIBER PRIMUS.

De regulis elementaribus.

AXIOMA PRIMUM.

Denarius numerus decem unitatibus æqualis est.

Centenarius numerus centum unitatibus; Millenarius mille unitatibus, & ita consequenter.

Hoc axioma quod ferè identicum est; ideóque nonnulli nugatorium videretur, demonstrationibus nostris inutile non erit; iisque lucem aliquam affundet. Supponamus autem denarium posse unico charactere designari, volo ut quocumque modo significetur, sit tamen æqualis decem unitatibus, separatim significatis, seu separatis characteribus, quod enim unico, aut pluribus characteribus scribatur, ejus naturam non mutat. Ut autem meliùs vis istius principij penetretur, [tyronibus enim loquimur] fictum aliquod exemplum mihi comminisci liceat, supponamus principem diversæ speciei monetam cudere, quarum prima seu infima sit ærea, voceturque assis, secunda sit argentea decem assibus æquivalens, voceturque semifrancus; tertia sit aurea centum assibus æquivalens, voceturque nummus; quarta sit aurea, mille assibus æqualis, dicaturque duplio; dico quod sicut perinde esset in vulgari æstimatione in marsupio semifrancum ac decem asses habere, nummum ac centum asses, duplionem ac mille asses, ita etiam perinde sit in chartâ notare duplionem, ac mille asses, duos semifrancos, ac viginti asses, si peculiares notas haberemus ad notandum semifrancum, centum asses & mille asses.

AXIOMA II.

Novem tantum sunt Arithmetici characteres, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. aliquid significantes, qui characteres pro diversitate locorum, in quibus ponuntur; modò significant unum, duos, 3. 4. 5. asses, modò totidem nummos, upliones, aliásque species, semper decuplò majores; quæ possunt excogitari; hoc est nota 5. verbi gratiâ nonnumquam significat quinque asses, aliquando quinque semifrancos, aliàs totidem nummos, aut dupliones; quæ omnia ex instituto pendent, nec aliâ probatione indigent.

AXIOMA III.

Sedes ultima, quæ nempe maximè vergit ad dexteram respicientis, est propria assium seu unitatum simplicium; penultima erit decadum, seu semifrancorum; antepenultima erit centenariorum, seu nummorum; proantepenultima millenariorum; quinta decem millium, sexta centum millium, septima millemillium, seu ut vulgò vocant millionum, ut in apposito exemplo, A. A. 4 5 8 5 7 8 2. cyphra 2. quæ est in ultima sede significat duas unitates, seu duos quasi asses; cyphra 8 quæ in penultimâ, significat octo decades, seu octoginta unitates, hoc est octo quasi semifrancos, character, qui in antepenultimâ sede, indicat septem nummos, quorum quilibet centum asses continet; ideóque dicit septingentos asses; cyphra 5 in proantepenultima significat quinque dupliones;

AXIOMA IV.

Duo characteres in una sede ne scribantur.

Sensus hujus axiomatis est, quòd in ultima, verbi gratia, sede, quæ unitatum propria est, non liceat nisi unicum characterem apponere; idem dicendum est de reliquis sedibus, si enim inscriberentur duo characteres fierent duæ sedes, nec divinare quis posset, utrumque characterem ad eamdem sedem pertinere. Undè maximus numerus, qui in qualibet sede inveniri potest, est novenarius, hoc est in sede unitatum, non possunt esse plures quàm novem unitates; nec in sede semi-francorum, seu decadum plures, quàm novem decades, seu semifranci. Ratio est, quia decem unitates unam decadem efficiunt, quare in casu quo decem unitates invenirentur, nihil in sede unitatum notandum esset, sed unitas sola in sede decadum, pariter cum decem decades centenarium efficiant; si invenirentur decem decades, hæ notandæ non essent in sede decadum, sed tantùm unitas in sede centenariorum. Idem dicendum erit de reliquis sedibus.

AXIOMA V.

Nulla sedes anteriorem habens vacua sit, sed aut habeat aliquem ex supradictis characteribus aut saltem characterem expletivum o. Ratio est, quia si sedes illa vacaret, numerus anterior ad illam pertinere videretur, unde ordo sedium turbaretur; ut si sint quatuor centenaria, decades nullæ, cum quinque unitatibus; debet poni in secunda sede, seu decadum cyphra expletiva, o. hoc modo, 405. si enim poneretur 45. cyphra 4. quæ significare debebat centenaria; decades tantùm indicaret; hoc est sedes tertia incipiendo ab ultima inciperet esse secunda.

PROPOSITIO I.

Datum numerum notis Arithmeticis designatum appellare.

A.

213. 875. 469.

Sit numerus A, quotcumque cyphris notatus vocibus appellandus, & exprimendus. Primò per Axioma tertium, certum est sedem ultimam seu 9. pertinere ad unitates: penultimam nempe 6. ad decades, antepenultimam 4. centenaria indicare; quare more arabico legendum esset, novem unitates, sex decades seu sexaginta; quadringenta; quinque millia, septuaginta millia, octingenta millia, tres milliones, decem milliones, ducenti milliones: Arabes enim litteras ab Hebræis acceperunt, & à dextra incipiunt; nostro autem more ita dicendum est; bis mille, tredecim milliones, octingenta septuaginta quinque millia; quadringenta, sexaginta novem unitates.

Quare nonnulli memoriæ causa post ternas quascumque cyphras incipiendo ab ultima, punctum apponunt, ultimaque trias denominationem habet, ab unitatibus, penultima à millibus, tertia à millionibus, ut in hoc exemplo. Ducenti tredecim milliones, octingenta septuaginta quinque millia, quadringenta sexaginta novem unitates.

Quoties numerus plurium est, quàm novem characterum; defectu vocum, difficile est illum appellare, immò hæc vox millio latina non est; quare ut vocibus latinis numerum quemcumque exprimamus, notantur pariter puncta post singulos ternos characteres, quibus apponuntur ordine characteres Arithmetici, sed ordine retrogrado 1. 2. 3. 4. ut punctum 4. significat quater repetendam esse vocem hanc millium semel in casu nominativo, & ter adverbialiter, ut in hoc exemplo,

412. 543. 298. 754. 097.
4 3 2 1.

quadringenta duodecim millia millies, millies millies; quingenta quadraginta tria millia millies millies, ducenta nonaginta octo millia millies. Septigenta quinquaginta quatuor millia, nonaginta septem.

Alij voces fingunt post millionem, billionem, trillionem, quatrilionem, quinquilionem hoc est appositis post singulas triades characterum incipiendo ab ultima, punctis, ultima trias, ad unitates pertinebit, penultima ad millia, antepenultima ad milliones, proantepenultima ad billiones, ut in apposito exemplo, quadringenti duodecim trilliones, quingenti quadraginta tres billiones, ducenti nonaginta octo milliones, septingenta quinquaginta quatuor millia nonaginta septem.

Hæc autem nullâ demonstratione indigent, cùm pendeant ex instituto, nempe quòd cyphræ in sede anteriori decuplo augeant suum valorem.

PROPOSITIO II.

Problema II.

Quemcumque numerum notis Arithmeticis designare.

Singula membra ex quibus constat appellatus numerus, in suis sedibus scribo, quæ autem sedes vacuæ erunt, notam o. habeant, & perfectum erit problema.

Sit hoc exemplum propositum centum & quatuor milliones, viginti quinque millia, centum viginti. Fiant tria intervalla notatis aliquibus punctis; quia nempe milliones, millia & unitates habemus; ultimum intervallum tres sedes habens unitatum, decadum, & centenariorum.

104. 025. 120.

Penultimum item tres; millium, decadum millium, & centenariorum millium. Antepenultimum, millionum, decadum millionum, & centenariorum millionum. Incipiamus ergo ab ultimo intervallo, more Arabico, habet autem centum viginti & nullam unitatem: ideoque in sede unitatum quæ est ultima apponatur cyphra o. ponam ergo, 120. in penultimo membro sunt tantum centum viginti quinque millia, sine ullo centenario millium, sedes ergo centenariorum millium habeat cyphram expletivam o. in tertio intervallo nempe centum & quatuor milliones, quia nulla fit mentio decadum millionum, secunda sedes habeat notam expletivam o. & perfectum erit problema.

Demonstratio. Quælibet sedes sui significativam habet cyphram & nulla est vacua, quæ

non

non habeat, saltem cyphram expletivam O: igitur bene expressus est appellatus numerus. In hac autem cautione, nempe ut nulla sedes vacua sit, totum negotium consistit; addiscant igitur diligenter tyrones modum notandi, aut legendi, unum membrum trium sedium, ex eo enim, additis tantum vocibus millium, millionum cætera enumerabuntur.

Memoriæ item mandent ordines sedium, incipiendo ab ultima, unitates, decades, centenaria, millia, decades millium, centenaria millium, milliones, decades millionum, centenaria millionum, Billiones, &c.

PROPOSITIO III.

Problema III.

Additio numerorum integrorum.

Additio numerorum integrorum, est plurium numerorum in unam summam collectio, hoc est methodus conficiendi unicum numerum ex pluribus; qui numerus omnibus his simul sumptis sit æqualis. Exemplô patebit definitio, Imperator habet fundibularios 2340. levis armaturæ pedites 5800. gravis armaturæ 2500. hastatos 4315. equites lanceatos 1253. cataphractos 13200. quæritur quot capitibus constet exercitus; alia exempla tyronibus proponuntur, ut meliùs teneant statum quæstionis.

Præceptum primum, subscribe numeros numeris, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenaria centenariis immineant.

	L.G.H.I.K.
A.	2 3 4 0.
B.	5 8 0 0.
C.	2 5 0 0.
D.	4 3 1 5.
E.	1 2 5 3.
F.	1 3 2 0 0.
M.	2 9 4 0 8.

Secundum, in unum collige quidquid in eadem sede invenitur, incipiendo ab ultima.

Tertium, si quod in una sede colligitur, novenarium numerum non excedat, subscribatur.

Quartum, si quod collectum est in una sede novenarium, aut novenarium supra decadem, aut supra duas, tres, quatuor decades superavit, minor subscribatur, decades pro sede anteriori reserventur; hoc est, si id quod collectum est duabus cyphris scribendum est, ultima scribatur, prima reservetur pro sede anteriori.

Sint dati numeri A, B, C, D, E, F, qui ita scribantur ut unitates unitatibus respondeant, cæteræque sedes suis correspondentibus; ut quia numerus F continet quinque cyphras, alij tantùm quatuor, iste excessus in anteriora rejiciatur.

Collige numeros sedis K. qui quia novenarium non excedunt; 5. enim & 3. efficiunt & subscribatur lineolæ character 8.

Colligantur numeri sedis I, dicaturque 4. & 1. sunt 5. & 5. sunt 10. qui numerus cum excedat novenarium, hoc est duobus characteribus sit exprimendus, scribatur ultimus character 0, & reservetur primus 1.

Collige numeros sedis H additâ unitate reservata, unum & tria sunt 4. & 8. fiunt 12. & 5. sunt 17. & 3. sunt 20. & duo binarij sunt 24. cum hic numerus scribatur duobus characteribus, scribetur ultimus, 4. reservabitur primus 2. addendus numeris sedis G. efficiet autem cum illis 19. scribatur ultima ciphra 9. reservetur prima quæ addi debet cyphræ 1. sedis L, efficietque cum illa binarium, quare Imperator propositus habet exercitum constantem militibus 29408. dico ergo numerum M æqualem esse omnibus numeris A. B. C. D. E. F. simul sumptis.

Demonstratio. Numerus M, est æqualis prædictis numeris, si tot præcisè contineat unitates, decades, centenaria, quot prædicti numeri simul sumpti; sed tot continet unitates decades, &c. nam numerus M. sub unitatibus continet 8. quot sunt in prædictis numeris in sede unitatum, nempe 5, & tria quæ æquantur numero octonario. Pariter in propositis numeris sunt decem decades, pro quibus numerus M addit in sede centenariorum unum centenariũ; clarum est autem unum centenarium æquari decem decadibus; pariter sunt in propositis numeris sub littera H, centenaria viginti tria, erat autem jam unum ex decadibus collectum: sunt igitur viginti quatuor centenaria: hoc est bis mille, & quatuor centenaria. Ponit autem numerus M quatuor millenaria, & in sequentem sedem duo reservat; colliguntur sub littera G septemdecim millenaria in numero M cum duobus reservatis efficiunt novemdecim millia, scribuntur novemdecim millia & reservatur una decas millium, quæ additur alteri decadi, ut fiat duplex decas millium, igitur nihil est in prædictis numeris, quod non sit in numero M. quod erat demonstrandum.

Hîc apponam nonnulla exempla ut videat tyro utilitatem operationis.

Mercator debet uni	36453.	alteri	2324.
	13644.		3242.
Et ita consequenter	7853.		4234.
	6452.		3242.
	8732.		2423.
Quæritur quantum debeat.	6886.		2434.
			4324.
	80 00.		
			22223.

Dominus aliquis duas habet villas, ex quarum prima reditus annuos percipit nummorum 2324. ex secunda 3242. quæritur summa redituum annuorum quæ erit 5566.

2324.
3242.
5566.

Quæstor recepit ex variis diversas nummorum summas, quæritur quid illæ summæ efficiant.

2040.	40307.	200.
3050.	23040.	300.
4020.	7203.	400.
6020.	10020.	800.
7030.	304.	1700.
22160.	30000.	
	52032.	
	6200.	
	169106.	

Quoties

A.		2	3	2.
B.		3	2	1.
C.		1	3	2.
D.		4	2	3.
E.	1	1	0	8.
F.		2	3	1.
G.		3	1	2.
H.		2	2	1.
I.		1	2	1.
K.		8	8	5.
L.		5	3	2.
M.		2	3	4.
N.		8	9	4.
O.		7	8	1.
P.	2	4	4	1.
E.	1	1	0	8.
K.		8	8	5.
P.	2	4	4	1.
	4	4	3	4.

Quoties longiores sunt additiones & periculum est erroris; dividantur in ternas & quaternas, tum summæ ex illis collectæ in unam summam colligantur.

PROPOSITIO IV.

Problema. IV.

Examen additionis.

Quia fieri potest ut logista superiores praxes, & notationes non observet exactè, aut in colligendis singularum sedium numeris nonnumquam hallucinetur, præcipuè dum longiores sunt, ideò aliqua examina explicanda sunt, quibus suum errorem detegere possit.

Primum examen erit, si eamdem additionem repetas, sed mutato paulisper ordine, ut si in collectione numerorum ejusdem sedis, ab imo sursum processeris, in examine à summo deorsum progrediaris, ut si in ultimo exemplo dixisti 8. & 5. sunt 13. & unum sunt 14. in hoc examine dicas unum & quinque sunt 6. & 8. sunt 14.

A.	8	9	1	0.
B.		6	5	4.
C.		1	2	3.
D.	9	6	8	7.
C.		1	2	3.
E.	9	5	6	4.
B.		6	5	4.
A	8	9	1	0.

Secundum examen fiat, per substractionem, ut si secundùm praxim superioris propositionis in unam summam D, collegeris, tres numeros A, B, C, tum ex summa D, substraxeris numerum C, fietque residuum E. ex quo pariter si numerum B. substraxeris, debet nisi erratum fuerit relinqui numerus A.

Demonstratio. Numerus D. æqualis est omnibus suis partibus A, B, C simul sumptis, quare si ab eo auferas partem C, & iterum ex residuo partem B, necessariò relinqui debet numerus A.

Alia examina adhuc intelligi non possunt, nisi tradita substractione, examen autem per abjectionem novenarij indiget sequenti Theoremate.

PROPOSITIO V.

Theorema I.

Si ex numero quocumque novenarius detrahatur quantùm potest: idem numerus relinquetur, qui residuus esset, detracto novenario, ex numero qui fieret, si omnes characteres ejusdem numeri colligerentur in unum quasi omnes ad unitatem pertinerent.

Sit numerus quicumque A, ex quo subtrahatur novenarius quantùm potest, nempe ter; sitque residua unitas, tum addantur characteres

A. 2 8.

8. & 2. quasi ambo ad unitates pertineant, ita ut fiat numerus 10. ex quò detrahatur novenarius, dico fore ut pariter relinquatur unitas, quod assero in omni omninò numero evenire.

Demonstr. Pendet ex institutione cyphrarum, quæ sunt in anterioribus sedibus continent decies similes cyphras in sequenti sede positas, ut cyphra 3. in penultimâ sede, decies continet 3. in ultimâ sede positam, hoc est eam continet novies & semel, ergo abjectis novenariis relinquitur eadem cyphra 3. ergo cyphra in penultima sede posita abjectis novenariis significat unitates quæ relinquuntur ex numero quem significat abjectis novenariis; ut 40. abjectis novenariis, 4. unitates habet: 50. quinque: 60. 6: 70. 7: 80: 8: 90. nihil.

Pariter cyphræ antepenultimæ sedis, continent similes cyphras ultimæ sedis centies, hoc est nonagies novies & semel, ergo abjectis novenariis relinquuntur tot unitates quot ipsæ significarent, si essent in ultima sede, hoc est 700. continet septenarium centies, seu nonagies novies & semel, nonagies autem & novies septem sunt novenarij, quibus abjectis relinquitur semel septem; idem dico de cyphris proantepenultimæ sedis, quæ millies continent cyphras ultimæ, hoc est nongenties nonagies novies & semel, seu abjectis novenariis semel: ergo vera est propositio posita.

COROLLARIUM I.

Si ex numero totali 4 5 8 1. primò ex quatuor millibus auferas novenarium quantum potest, relinquuntur quatuor, si ex quingentis 5. ex octoginta, octo; quare addantur figuræ 4 5 8 1. quasi essent simplices digiti, hoc est, quasi omnes in ultima sede versarentur, fient 18. ex quo numero si auferatur novenarius, nihil relinquitur: quare ex numero 4 5 8 1. abjectis novenariis, nihil relinquitur.

COROLLARIUM II.

Si duos characteres simul addideris v.g. 7. & 8. ita ut 15 fiant: dico si addas 1. & 5. & fiant 6. hunc numerum relinqui ex 15. abjecto novenario; nam ex numero 10. abjecto novenario relinquitur unum, & 5. fiunt 6.

PROPOSITIO VI.

Examen additionis per abjectionem novenarij.

Abjice ex cyphris, tam numeri ex additione geniti, quàm ex numeris colligendis novenarium, quantùm potest, si utrinque idem numerus relinquitur, signum est satis certum nullum errorem in additionem irrepsisse. Quod si idem numerus non relinquatur necessariò erratum est.

A	4	8	5	7.	
B		5	1	7.	
C.			7	1.	E.7.
D.	5	2	4	5.	F.7.

Sint numeri addendi A, B, C, collectus autem ex additione sit D. Aufer primò ex eo novenarium quantùm potest, & incipe à quacumque parte; dicito 5 & 4 sunt novem; hunc numerum abjice, relinquunturque 2. & 5. hoc est 7. quos notabis in littera F.

Idem præsta in numeris addendis, & incipe verbi gratia, à numero A; & dicito 4. & 8 sunt 12. abjecto novenario restant tria, tria & 5 sunt 8. & 7 sunt 15. abjecto novenario restant 6. sex & tria numeri B. fiunt 9. quem numerum abjice, unum & 7. fiunt octo, octo & unum numeri C, fiunt novem; quem numerum abjice restant 7. qui numerus notandus est in E; cum ergo numeri E & F æquales sint, assero non esse erratum.

Demonstratio. Non est erratum si sit æqualitas, inter numeros A, B, C, simul sumptos, & numerum D. Si autem sit æqualitas idem numerus restare debet, nam si ab æqualibus æqualia demas quæ remanent sunt æqualia, idem autem numerus restat ex numeris methodo tradita, qui restat si cyphræ suum valorem retinerent (*per præcedentem*) ergo idem numerus restare debet; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Problema VI.

Additio numerorum denominatorum.

Quamvis hæc regula ad fractiones pertineat, videaturque divisione indigere, quia tamen hæc divisio sine artificio, mente fieri potest, hanc prætermittendam non censui. Numeri denominati sunt numeri affecti, aliqua voce indicante materiam cui applicantur, ut si addendi essent nummi, franci, asses, denarij, quæ additio apud mercatores communis est, vel si addendi sint dies, horæ, minuta prima, minuta secunda, quæ additio communis est astronomis, vel addenda millenaria, passus, pedes, palmi, digiti, &c.

Si additio fiat in materia unius tantùm speciei verbi gratia dum nummi nummis adduntur, nihilque aliud in regula proponitur, est additio communis. Si verò nummi nummis, franci francis addendi sunt; numquam in sede posteriori ponendus est numerus, qui adæquet valorem anterioris, ut si proponantur nummi, franci, asses, denarij. Sunt autem tres franci in nummo, viginti asses in franco, duodecim denarij in asse, in sede francorum nunquam plures duobus ponantur; si enim tres occurrant, ex his fiat nummus. In sede assium numquam plures sint quàm 19 asses; quoties enim erunt viginti asses, tot francos notabis.

Idem dicito in aliis exemplis.

Ut signa, gradus, minuta, minuta secunda,

In sede minutorum secundorum nunquam ponitur numerus superans 59. si enim sit numerus 60, fit unum minutum primum, sexaginta minuta prima gradum efficiunt, 30 gradus unum signum, quæ omnia pendent ex instituto; sicut in cyphra communi, in sedibus posterioribus nunquam ponitur numerus major novenario, quia decem unitates decadem efficiunt, decem decades centenarium.

	Nummi.	franci.	asses.	denarij.
A.	30.	2.	16.	10.
B.	17.	1.	19.	8.
C.	4.	2.	7.	11.
D.	53.	1.	4.	5.

Scribantur numeri addendi singuli sub titulo suo, ut vides in numeris A, B, C, quorum primus A, significat nummos 30. francos 2. asses 16. denarios 10. & ita de cæteris.

Adde simul numeros sedium posteriorum, & quoties fiet numerus cujus valor adæquet unitatem sedis anterioris, tot unitates reserva pro sede anteriori, quod in exemplo patebit, adde simul denarios, fiuntque 29. hoc est bis 12. & quinque, scribe quinque reserva bis 12. denarios seu duos asses; collige asses additis tamen duobus reservatis fiuntque 44. hoc est duo franci cum quatuor assibus, scribantur quatuor asses, reserventur duo franci, colligantur franci additis duobus reservatis fiuntque septem, seu duo nummi & unus francus qui scribatur, reserventur duo, qui additi reliquis nummis efficiunt 53.

E.	51.	5.	42.	29.

Demonstratio supponatur numerus E fieri ex additione simplici numerorum A, B, C, neglecta illa cautione quæ vetat in sedibus posterioribus poni numerum cujus valor adæquet unitatem anterioris sedis. Cum ergo numerus E procedat secundùm methodum additionis communis, æqualis erit numeris A, B, C, sed numerus E, æqualis est in valore numero D, nam perinde est in ultima sede scribere denarios 29. aut in eadem scribere 5. reservando scilicet duo asses pro anteriori; nam duo asses, viginti quatuor denariis adæquantur, idem dicito de aliis sedibus, igitur est æqualitas inter numerum E & D. Ergo erit etiam æqualitas inter numerum D, & numeros A, B, C; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Problema VII.

Subtractio.

Subtractio est inventio excessus, quò major numerus minorem superat.

Primò subscribatur minor numerus majori, ita per unitates unitatibus, decades decadibus, respondeant, ducta lineolà aufer unitates numeri subtrahendi, ex unitatibus numeri superioris scribaturque reliquum infra lineolam, idem fiat in decadibus & centenariis, & absoluta erit regula.

A.	8 7 5 3.
B.	6 3 1.
D.	8 1 2 2.

Exemplum sit numerus B subtrahendus ex numero A, aufer primò unitatem ultimam numeri B ex ternario numeri A; relinquuntur duo subscribenda, si ex quinque numeri A auferantur tria, relinquuntur duo, si ex septem auferas 6. relinquitur unum, si ex octo nihil aufferas relinquuntur octo; dico numerum D esse excessum numeri A supra numerum B; hoc est B & D, simul esse æquales numero A.

Demonstratio. Tot sunt in numeris B & D, unitates, decades, centenaria, quot in numero A, nam subducendo unitatem ex ternario, scribitur binarius; nempe numerus qui cum numero 1. adæquet ternarium; igitur 1. & 2. numerorum B. & D. adæquant ultimam cyphram numeri A; idem dicito de reliquis: igitur invenitur æqualitas, quod erat demonstrandum. Atque hæc, dum singulæ cyphræ numeri subducendi, non superant cyphras sibi respondentes numeri superioris.

Dum verò cyphra inferioris numeri superat sibi respondentem superioris, ita ut ex ea subduci non possit, cyphræ superiori addatur decas, & anterior sedes minuatur unitate. Exemplum.

7		
4 8 4.	A.	Debebat aliquis nummos
2 3 6.	B.	quorum persolvit jam
2 4 8.	C.	quæritur quantùm debeat.

Subscribantur numeri more consueto; tum ductâ lineolâ subduc numerum 6. ex 4. quod cum fieri non possit, intellige ex numero decadum qui est 8. acceptam esse decadem, quæ addita 4. unitatibus efficit quatuordecim. Subtrahe 6. ex quatuordecim, restant octo subscribenda, sed memento jam ablatam esse decadem ex numero 8. superiori, quare non ampliùs subtrahes tria ex octo, sed ex 7. restabuntque 4. denique subtrahe 2. ex 4. restabuntque 2.

Notandum autem perindè esse sive minuatur unitate numerus superior 8. sive augeatur unitate numerus inferior 3. idem enim sequetur numerus, sive tria ex septem subducas, sive quatuor ex octo, unde plurimi quoties denarium mutuantur, augent unitate numerum inferiorem sequentem.

Demonstratio. Ostendam pariter ut supra numeros B & C, æquales esse numero A, atque adeò numerum C. esse excessum numeri A supra numerum B. Cæteræ difficultates in variis exemplis apparebunt, exercitus constabat militibus: occisi sunt in pugna, quæritur quot restent.

3 4 5 9 6.
1 0 3 0 0.
2 4 2 9 6.

Ita loqueris, qui ex 6. nihil aufert, restant 6. pariter qui ex novem nihil subtrahit, restant 9. ex quinque subduc tria, restant 2. ex 4. subduc nihil, restant 4. ex tribus unum, restant duo.

5 4 3 4 2.
2 4 2 4 2.
3 0 1 0 0.

Mercator frumenti habebat modia quorum jam vendidit quæritur quot restent.

Ita operaberis, qui ex duobus duo subducit restat o. scribendum, pariter qui ex 4. subducit 4. restat o. subscribendum, qui ex 3. subtrahit 2. reliquam habet unitatem, qui ex 4. quatuor aufert, relinquitur o. ex quinque, duo, restant tria.

7 0 0.
4 0 0.
3 0 0.

Si auferas o. ex o. relinquitur o. & iterum o, ex o, relinquitur o, ex 7. quatuor, restant 3. ratio cur ablato o. ex o. relinquitur o. ideò tantùm quia sedes vacua esse non debet.

6 0 0 0 8.	B.
2 4 8 6 9.	H.
3 5 1 3 9.	

Auferendus sit numerus H. ex numero B. quia subduci non potest 9. ex 8. subducatur ex 18. restabitque novenarius subscribendus, sed memento te mutuatum esse decadem; ideóque aut minuendam superiorem cyphram aut augendam inferiorem additò memoriæ causa punctò, subduc igitur 7. non ex o. quod fieri non potest, sed ex 10. restabuntque tria; pariter memento te mutuatum esse decadem, ideò auge unitate numerum 8. & subtrahe novenarium ex 10. restabitque unitas.

Quoties numerus aliquis subtrahendus est ex pluribus; illi plures numeri in unam summam colligantur.

PROPOSITIO IX.

Problema VIII.

Subductionis examina.

A.	1 6 3 8.
B.	1 4 2 1.
C.	2 1 7.
D.	1 6 3 8.

Certum est ex superioribus, quod si facta est bona subtractio in qua scilicèt numerus B subductus est ex numero A, & sit reliquus C; quod numeri B & C æquales esse debeant numero A; ideóque eadem examina quæ supra dedimus pro additione, hîc etiam locum habent.

Primum examen erit per abjectionem novenarij; hoc est abjecto novenario ex numero A, quantum abiici potest, idem numerus relinqui debet abjecto novenario ex numeris B & C.

Secundum examen erit per additionem; nempe si numeros B & C simul, addas debet restitui numerus A.

Tertium per subductionem procedet; cum enim numeri B & C æquales esse debeant numero A, si subducas numerum C; ex numero A; debet relinqui numerus B.

PROPO

PROPOSITIO X.

Problema IX.

Subtractio numerorum denominatorum.

	Dies,	hora,	min.	sec.
A.	40.	21.	32.	40.
B.	31.	19.	36.	22.
C.	9.	1.	56.	18.

Disponantur ambo numeri singuli in suis sedibus, subtrahe inferiorem ex superiori, ejusdem denominationis si fieri potest, quod si superior minor sit ita ut subtractio fieri non possit, mutuanda est unitas ex anteriori, quæ dividenda est in tot unitates posterioris numeri quot ipsa continet; sint propositi dies, horæ, minuta prima, & minuta secunda. Dies autem æqualis est horis 24. hora minutis primis 60. minutum primum minutis secundis 60. sit ergo numerus B. subducendus ex numero A, subtrahe 22. ex 40. more solito, restabitque 18. subtrahe 36. ex 32. quod fieri non potest, quare ita procedes, subtrahe 6. ex 2. non potes ex 12. restant 6. augendusque est numerus 3. unitate; ita ut fiant 4. aufer 4. ex tribus non potes, assume unam horam ex numero 21. quæ cum minutis sexaginta æquivaleat, non amplius quatuor numeros inferioris subtrahis, ex triginta minutis, sed ex nonaginta; restabuntque quinquaginta subscribenda, augeatur numerus 9. unitate secundum præceptum superioris propositionis, subducesque 20. ex 21. restabit unitas, denique 31. subduces ex 40. restabunt 9.

Demonstratio. Ostendere debeo numeros B, & C, æquales esse numero A, nempe tot esse dies, horas, minuta prima & secunda; in B & C, quot innumero A, exponatur enim numerus D. Quem dico æqualem esse numero A, eò quòd minuta 96. horam unam efficiant. Cum minutis 36. sed numeri B & C æquales sunt numero D, nam in singulis

	Horæ	dies	mi.	30.
D.	40.	20.	96.	40.

sedibus quæsivimus numerum, qui cum sibi correspondente numeri B adæquaret correspondentem in numero D: ergo B & C æquales sunt numero D, ergo & numero A.

Examen hujus subtractionis multiplex esse potest: primum erit si numeros B & C simul addas, invenia sque numerum A.

Secundum si numerum C subtrahas ex numero A relinqui debet numerus B.

Alia examina non sunt hujus loci.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Quid sit multiplicatio.

Multiplicatio numeri per numerum, est investigatio numeri, qui toties contineat numerum multiplicandum, quot sunt unitates in multiplicante ut si numerus A multiplicandus sit, per

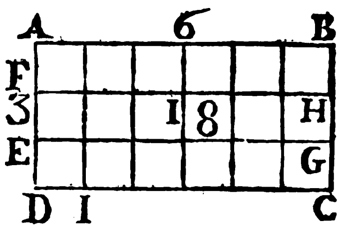
A.	12.
B.	4.
C.	48.

B, quærimus numerum C. in quo toties sit numerus A, quod sunt unitates in numero B. quæ multiplicatio est virtualis additio, quærimus enim quis numerus colligeretur ex numero A quater posito hoc modo.

12.
12.
12.
12.
48.

Ex quo sequitur, in multiplicatione, quæri numerum, ad quem numerus multiplicandus, eandem habeat rationem, quam habet unitas, ad numerum multiplicantem. Quæritur enim numerus C, qui toties contineat numerum A, quoties B continet unitatem; erit ergo, ut unitas ad B, ita A ad C. Qui solam arithmeticam quærit cætera relinquere potest.

Diximus jam aliàs in secundo libro Elementorum Euclidis, per multiplicationem generari superficiem aliquam, & idem esse unum numerum per alium multiplicare, ac ex duabus lineis rectangulum constituere, verbi gratiâ, ex lineis AB, AD. Exprimimus autem in rectangulis tantùm duas lineas, quia cum adversæ lineæ sint æquales nempe AB, CD, sicut & AD, BC: sufficienter exprimitur rectangulum, si duplicem ejus dimensionem exprimamus, nempe longitudinem, & latitudinem.



Produceretur autem rectangulum A C, si A B perpendiculariter semper insistens, lineæ A D; percurrat totam AD, unde dicitur una linea duci in aliam. Clarum autem est idem rectangulum produci, sive linea A B percurrat lineam A D, sive linea AD percurrat lineam AB; nam dum linea A B perpendiculariter insistens movetur super AD, describit lineam B C parallelam lineæ AD, seu æquali semper intervallo distantem à lineâ A D: ergo rectangulum illud definietur lineâ BC parallelâ ipsi A D, sed AD est perpendicularis ad AB; ergo & BC eidem AB perpendicularis erit. Dum autem A D perpendiculariter semper insistens ipsi AB pervenerit in B, cadet supra B C alioquin mutaret suum situm perpendicularem, contra suppositionem: ergo sive A B percurrat ipsam A D, sive AD percurrat ipsam A B idem semper parallelogrammum rectangulum generatur.

Idem in numeris accidit. Sint enim duo numeri AB, AD sive dicatur ter sex; sive dicatur sexties, tria idem numerus 18. producetur.

Ut autem meliùs hoc intelligatur. Quoties unum numerum per alium multiplicamus; utrumque non per modum unius lineæ intelligimus, sed quasi per modum alicujus rectanguli constantis, tot parvis quadratis, quot sunt in eo unitates; ut verbi gratia, numerus 6. intelligitur per modum rectanguli D G constantis 6. parvis quadratis. Ideoque dum numerum D C, multiplicamus per numerum CB quærimus quot essent

 parva

parva quadrata si rectangulum D G toties sumeretur, quot sunt unitates in numero CB. Ex quo fit ut dum unum multiplicamus per alium perinde sit, ac si tot ordines sex quadratorum constitueremus, quot sunt unitates in C B. Clarum est autem, quod si tres ordines sex quadratorum, hoc modo constituamus, sex etiam erunt ordines trium quadratorum, nam singula quadrata rectanguli debent in superioribus ordinibus, habere sibi correspondentia; ergo tot poterunt esse ordines trium quadratorum, quot sunt unitates in numero A B. Unde rursus sequitur, quòd sive numerus A B multiplicet numerum A D, sive A D multiplicet numerum A B, idem semper numerus 18. inveniatur. Quòd ulteriùs ostenditur: numerus B multiplicet numerum C, & producatur numerus D; dico quòd si numerus C multiplicet numerum B; ita ut producatur numerus E, quòd numeri E & D æquales erunt. Nam cum (*per defin. hanc*) in multiplicatione numeri C per B quæratur numerus qui toties contineat ipsum C, quoties numerus B, continet unitatem A; ita erit A ad B, sicut C ad D; ergo alternando ita erit A ad C, sicut B ad D; quare si quæratur numerus E, qui toties contineat ipsum B, quoties C continet ipsum A; erit ut A ad C, ita B ad E, ergo erit B ad D sicut B est ad E, ergo E & D sunt æquales (*per* 7. 5.) quod erat demonstrandum.

A.	B.	C.	D.
1.	3.	5.	15.
C.	B.	E.	
5.	3.	15.	

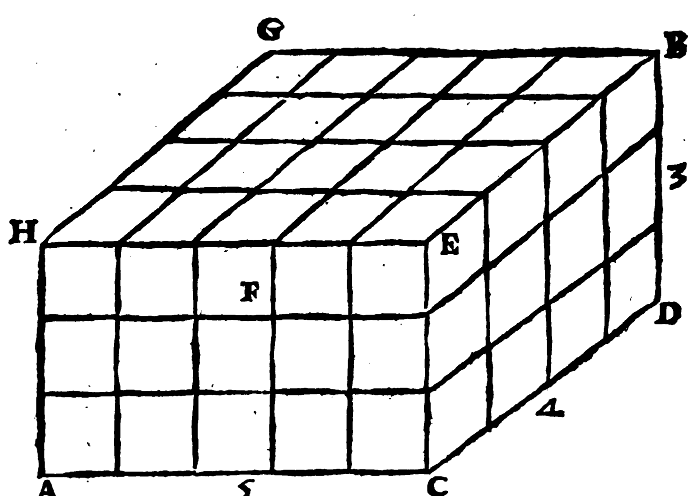
Ex hoc sequitur, quod in multiplicatione perinde sit quicumque dicatur multiplicans aut multiplicandus. Idemque sit dicere ter quinque & quinquies tria.

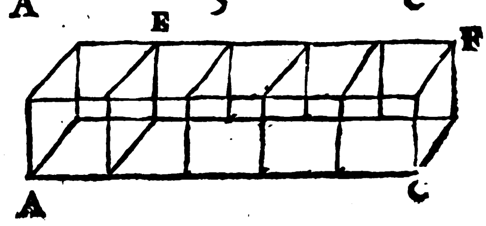
Quotiescumque aliquis numerus est aut solus; aut in additione, quasi linearis spectatur, sicut ergo licet nobis quamcumque lineam rectam quantùm voluerimus, producere; aut ab eâ resecare partem quamcumque, ita etiam per additionem numerum numero addimus in longitudinem; & à numero numerum abscindimus per subtractionem, nullam concipiendo, in eo numero, latitudinem. Quoties autem numerum per numerum multiplicamus, ut eum exhibere possimus sub specie alicujus rectanguli; numerum multiplicandum concipere debemus per modum rectanguli, constantis tot parvis quadratis, quot continet unitates. Quæ consideratio libera est, hoc est fuit licitum Mathematicis suos numeros in ordinem quem volunt digerere. Fateor enim quòd poterat intelligi multiplicatio numeri per modum productionis lineæ ita ut bis, ter, quater, quinquies, centies repeteretur. Voluerunt tamen aliter considerare; quia ex ea consideratione mirabiles oriuntur proprietates, ita ut quæ figuris exhibent, etiam in numeris faciliùs ostendant.

Ex eâ consideratione oritur, quòd quoties unus numerus, alium multiplicat; qui oritur numerus planus vocetur, hoc est imaginando eos numeros cum aliquâ latitudine, ut dixi, oriatur aliqua area, tot continens quadrata, quot sunt unitates in numero producto; ut in figura priùs proposita, oritur rectangulum A C continens 18. parva quadrata. Unde quoties numerum unum per alium multiplicamus, possumus productum considerare per modum rectanguli, & tunc ille planus erit, & numeri illum producentes, dicentur ejus latera.

Ex hac consideratione benè intelligi potest, quo sensu dicatur aliquis numerus quadratus. Cum enim duo numeri æquales, se invicem multiplicaverint, fit rectangulum cujus longitudo æqualis est latitudini. Tale autem rectangulum quadratum est, ideoque numerus quadratus erit; ut si tria per tria multiplices producitur numerus novenarius, qui quadratus est, & latus ejus seu ternarius, vocatur etiam radix quadrati.

Similis est consideratio numeri sub ratione solidi alicujus; tunc autem primus numerus intelligi debet tanquam parallelepipedum rectangulum. Numerus igitur solidus est ille, qui producitur ex multiplicatione trium numerorum. Sensus est quod quoties tres numeri se invicem multiplicant, liceat considerare numerum productum tanquam aliquod solidum: Seu quod idem est, licet ordinare omnes unitates in modum solidi alicujus, ita ut numeri illi se invicem multiplicantes ejus latera dici possint. Ut si sit numerus AC, nempe 5. C D 4. & DB tria. Multiplica AC 5. per CD 4. & fient 20. quæ multiplica per tria fientque 60. debet autem primus numerus A C intelligi, per modum parallelepipedi constantis, quinque parvis cubis, & per triplicem illam multiplicationem, exurgit numerus 60. quot nempe constaret cubis unius pedis, illud solidum rectangulum cujus unum latus esset quinque, aliud 4. aliud trium pedum.





Producitur autem illud solidum, si rectangulum unum verbi g. AE insistendo ad rectos, basi A D intelligatur ferri supra lineam C D, ita ut semper linea A C sit perpendicularis ad CD. Et quia generatur idem solidum sive superficies A E feratur in superficiem D C sive superficies C B feratur in A C, sive basis AD ascendat in E C, ideò

ideò sive hæc duplex multiplicatio hoc modo instituatur, hoc est numerus 5. per 3. multiplicetur, & fiat 15. quasi superficies A F, & iterum illa multiplicetur per 4. hoc est intelligatur ferri in DG; sive hoc modo, ut incipiamus à multiplicatione 4. per tria, & fiat superficies CB, seu 12. quæ iterum multiplicetur per 5. hoc est feratur in A G, sive multiplicemus 5. per 4. & fiat rectangulum A D nempè 20. quod multiplicetur iterum per tria hoc est ascendat in EB; idem solidum 60. generatur.

A.	B.	C.
3.	4.	5.
E.	G.	F.
12.	15.	20.
H.	I.	K.
60.	60.	60.

Quod alio modo ostendemus supponendo quod quoties idem numerus, alios duos multiplicat producti eandem habeant inter se rationem, ac illi duo: ut numerus B multiplicet A, & C; producti eandem habebunt rationem, quia quater A, & quater C eandem habent rationem ac A, & C; cum (*per* 15. 5.) A & C productorum sint partes aliquotæ similes, nempe quadrantes, quæ eandem habebunt rationem ac tota. Quibus positis.

Sint numeri A, B, C quomodocumque multiplicandi: dico eundem numerum proditurum, & primò A & B multiplicent se invicem, & producatur E, qui multiplicetur per C, fiatque H; item B & C in se ducantur & fiat F, qui multiplicetur per A, fiatque K, item A & C in se ducantur, & fiat G; qui multiplicetur per B fiatque I; dico H, I, K esse æquales.

Demonstratio. B multiplicans A & C facit E & F; ergo ita est A ad C, sicut E ad F; ergo rectangulum sub A primo & F ultimo quod fit multiplicando F per A; nempe K, est æquale rectangulo sub C & E, quod fit multiplicando C per E, nempe H; pariter quia C multiplicando A & B, facit G & F; ita erit A ad B, sicut G ad F; ergo rectangulum sub primo A & ultimo F, nempe K, æquale erit rectangulo sub B & G, nempe rectangulo I. Si tres numeri æquales multiplicentur qui producetur numerus cubus erit, cum enim tres numeri se invicem multiplicantes; sint latera illius solidi rectanguli, solidum autem rectangulum lateribus omnibus æqualibus constans, vocetur cubus; numerus etiam eodem modo productus cubus erit. Et latus ejus vocabitur radix cubica.

Quamvis in bono sensu liceat fingere omnem numerum quasi quadratum, & quasi cubum, illi tamen propriè vocantur quadrati, qui producuntur ex aliquo numero per seipsum multiplicato ut numeri propositi. Quorum radices quadratæ sunt numeri integri, alij intermedij non vocantur propriè quadrati, licèt aliquando fingantur quasi quadrati, & eorum radix quadrata extrahatur.

4. 9. 16. 25. 36. 49.
Sunt
2. 3. 4. 5. 6. 7.

Non habebitur autem præcisa, quia præcisa in numeris exhiberi non potest. Si enim daretur linea tot continens mensuras certas, quot quadratum v. g. 18. continet unitates, licèt possit assignari linea cujus quadratum contineat octodecim pedes quadratos, hæc tamen erit incommensurabilis cum linea unius pedis, aut octodecim pedum; atque adeò numeris exprimi non poterit, supposito, quòd alia numeris exprimatur, & in eo sensu numeri nullum habent numerum pro radice; licèt verè si, non hoc modò abstractè, sed in subjectâ materiâ exhiberentur quadrata, daretur & assignaretur eorum latus, seu radix quadrata.

Idem intelligendum est de numeris non cubicis, sunt autem isti cubi 8. 27. 64. 125. 216, & alij.

Nam bis duo sunt quatuor, bis quatuor sunt 8. pariter 27. 64. 125. 216. sunt numeri cubi; alij omnes intermedij integri, non sunt cubi in strictâ significatione, hoc est, quorum præcisa radix cubica seu latus, possit assignari.

PROPOSITIO XII.

Digitum per digitum multiplicare.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.	40
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.	60.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.	80.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.	90.

Totum artificium multiplicationis, in eò positum est, ut ex multiplicatione singulorum characterum, per singulos characteres, quasi essent simplices digiti, erumpat multiplicatio totius numeri per totum numerum. Ideóque necessariò tanquam fundamentum, præmittenda fuit methodus multiplicandi digitum, per digitum; hoc est multiplicandi numerum unico charactere constantem per alium numerum unico item charactere constantem, verbi gratia, inquirendi quis numerus exurgat si 7. per tria multiplicentur, seu ter septem quid producant, 21.

Prima methodus erit ope tabulæ Pythagoricæ, quam etiam memoriter scire debent Tyrones; constat autem lineis novem quarum prima incipit ab unitate. 2. à binario. 3. à ternario, & ita deinceps usque ad novenarium. Prima crescit semper unitate. 2. binario. 3. ternario, & ita deinceps; & hoc modo absolvitur tota tabula.

Usus tabulæ talis est; minorem numerum quem adverbialiter proferre debes, quære in primo ordine perpendiculari. Secundum in prima linea, communis concursus dabit numerum quæsitum. Dentur hi duo numeri multiplicandi 3. per 8. seu quot sint ter octo. Quæro in primo ordine perpendiculari tria; jam habeo quod in linea ternariorum debeat inveniri numerus quæsitus; tum in linea superiori quæro 8. & in communi concursu invenio 24. igitur ter 8. sunt 24.

Domonstr. Cùm (*per constructionem,*) tertia

 linea

linea semper crescat ternario, in octava sede dabit octo ternarios, octo autem ternarij aut tres octonarij idem sunt; ut ostendimus, igitur communis concursus dat numerum quæsitum. Ut autem Tyrones ea possint memoriter addiscere; volui illud hic describere eo modo quo pronunciari debet.

Bis duo sunt quatuor. Bis tria sunt sex. Bis quatuor sunt octo. Bis quinque sunt decem; Bis sex sunt duodecim. Bis septem sunt quatuordecim. Bis octo sunt sexdecim. Bis novem sunt octodecim.

Ter tria sunt novem. Ter quatuor sunt duodecim. Ter, quinque, sunt quindecim; Ter, sex, sunt octodecim. Ter septem viginti unum. Ter octo viginti quatuor. Ter novem sunt viginti septem.

Quater quatuor, sunt sexdecim. Quater quinque, viginti; Quater, sex, viginti quatuor; Quater, septem, viginti octo. Quater octo, triginta duo. Quater novem sunt triginta sex.

Quinquies quinque sunt viginti quinque; quinquies sex triginta. Quinquies septem triginta quinque. Quinquies octo quadraginta. Quinquies novem, quadraginta quinque.

Sexies sex, triginta sex. Sexies septem, quadraginta duo; sexies octo quadraginta octo. Sexies novem quinquaginta quatuor.

Septies septem quadraginta novem. Septies octo, quinquaginta sex. Septies novem, sexaginta tria.

~~Octies octo~~, sexaginta quatuor. Octies novem septuaginta duo. Novies novem, octoginta unum.

Viderentur deesse aliqua, ut novies tria. Novies quatuor sed secundùm regulam priùs traditam inverte & dicito ter novem. Quater novem: & ita quoties major numerus ponitur adverbialiter, incipio à minori.

Quia præcipuæ difficultates sunt circa characteres majores. Circa novenarium hæc regula observari poterit. Quoties novem multiplicatur, per quemcumque digitum, producetur numerus decadicus illius digiti; minus illo digito. Hoc est bis novem sunt 20. minus duobus. Hoc est octodecim. Ter, novem, sunt triginta minùs tribus. Quater novem, 40. minùs quatuor, & ita de reliquis. Ratio clara est, quia à singulis decadibus novenarius deficit unitate. Igitor tot unitates detrahendæ, sunt, quot sunt decades.

Pariter si octo multiplicanda sint per quemcumque digitum, fiet numerus decadicus illi digito respondens, detracto bis illo digito. Ut ter, octo, sunt triginta minus 6. quater octo sunt quadraginta minus octo, & ita de reliquis. Ratio eadem quæ superior.

Alij tradunt methodos multiplicandi digitum per digitum, per differentiam eorum à numero denario. Sed opus est ut Tyrones tabulam Pythagoricam diligenter addiscant; nec aliis immorentur.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Numerum quemcumque per alium quemcumque multiplicare.

A.	4 5 8 3.
B.	1 2 3.
C.	1 3 7 4 9.
D.	9 1 6 6.
E.	4 5 8 3.
F.	5 6 3 7 0 9.

Sit numerus A per numerum B multiplicandus. Primò ita disponantur, ut digiti, digitis; decades decadibus; respondeant; & numerus minor supponatur majori, 2o. per ultimam figuram numeri B, multiplica singulas figuras numeri A; ita tamen, ut si illud quod per multiplicationes singulas productum fuerit, non superet novenarium scribatur; si verò superet, scribatur ultima cyphra alia verò seruetur. Hoc modo ter tria sunt 9. quia non superat denarium scribuntur novem. Deinde dico, ter octo sunt 24. scribo 4. & reservo duo. Ter quinque sunt 15. cum duobus quæ reservaram; fiunt septendecim scribo 7. & reservo unum. Ter quatuor sunt 12. cum uno priùs reservato sunt 13. quæ scribo atque hic numerus 13749. est ille qui producitur ex multiplicatione numeri A per tria. Tertiò multiplico totum numerum A, per penultimam figuram numeri B, nempe per 2. eodem modo, nisi quòd, numerus D productus retrahatur in anteriora unâ sede. Hoc modo bis tria sunt 6. scribantur 6. sub serie decadum. Bis octo sunt 16. scribo 6. reservo unum. Bis quinque sunt 10. & unum sunt 11. scribo 1. reservo unum. Bis, quatuor; sunt 8. & unum reservatum sunt 9. Quartò multiplico eundem numerum A per antepenultimam cyphram numeri B, retrahendo numerum E productum una sede.

Quintò simul addo numeros C, D, E productos, ita ut fiat numerus F, dico numerum F esse quæsitum nempe numerum F, toties continere numerum A, quod sunt unitates in numero B; seu eum continere centies vigesies & ter.

Demonstr. Primò. Si numerus A multiplicaretur per ultimam cyphram numeri B tantùm, produceretur numerus C. nam dicere ter 4583.

4 5 8 3.
4 5 8 3.
4 5 8 3.
1 3 7 4 9.

idem est ac si hi tres numeri simul adderentur, sed si tres numeri simul adderentur, produceretur numerus C, easdem enim cautiones adhibuimus, in hac multiplicatione, quæ in simplici additione observantur; nempe ut quoties in una sede resultat numerus novenarium superans ultimus ejus scribatur character; reservetur prior in sedem anteriorem: ergo numerus C tot continet unitates quot numerus A ter sumptus.

Secundò numerus D ortus ex multiplicatione numeri A, per penultimum characterem numeri B nempe 2. qui 2. significat viginti; est enim in sede decadum. tot continet unitates quot numerus A vigesies sumptus; nam cum diximus

diximus bis tria sunt 6, & posuimus 6; sub sede decadum, idem est ac si dixissemus, vigesies tria, seu 60, sunt enim 6. decades. Pariter dum diximus bis 8 sunt sexdecim, idem præstitimus, ac si dixissemus vigesies octo decades, sunt centum sexaginta decades seu 1600. scripsimus autem 6. in tertia sede quia pertinet ad centenarios numeros, & ita deinceps in reliquis. Ideóque per simplicem retractationem in anteriorem sedem, idem præstitimus ac si numerum A per viginti multiplicavissemus: igitur numerus D continet tot unitates, quot numerus A vigesies sumptus; intelligendo tamen quod ultima cyphra numeri D sit decadum.

Idem probarem de numero E, qui tot continet unitates quot numerus A centies sumptus. Intelligendo tamen cyphram ultimam numeri E pertinere ad centenarios numeros. Igitur tres numeri C, D, E, tot continent unitates quot numerus A centies vigesies & ter sumptus. Sed numerus F genitus ex additione numerorum C, D, E, atque adeò illis simul sumptis æqualis tot continet unitates, quot numerus A centies vigesies & ter sumptus quod erat faciendum.

COROLLARIUM I.

Numerus quilibet per decem multiplicatur si illi addatur in fine o, ostendimus enim quod per simplicem retractionem in anteriorem sedem, idem præstamus multiplicando, per digitum, ac si multiplicaremus per numerum decadicum ei respondentem. Sed si multiplicaretur per unitatem, non mutaretur ille numerus & per additionem numeri o in fine, retrahitur in anteriorem sedem; ergo multiplicatur per 10. vel singulæ cyphræ, in sede anteriori decuplò augent valorem suum; sed per additionem cyphræ o, in fine; singulæ sunt in anteriori sede. Hoc est quæ erat ultima fit penultima, & ita de reliquis; igitur fit multiplicatio per denarium numerum; si duo o addantur, fit multiplicatio per 100. si tria o mille.

COROLLARIUM II.

Pariter si numerus habens in fine unum, duo, tria, quatuor o, decurretur, per deletionem unius o, dividitur per denarium numerum, hoc est restat tantum decima ejus pars, priùs enim singuli characteres decuplò majorem habebant significationem.

COROLLARIUM III.

Si numero bis sumpto addatur o. idem est ac si multiplicatus fuisset per 20. si ter sumpto idem est ac si multiplicaretur per 30. & ita deinceps. Si bis sumpto adderentur duo o idem est ac si multiplicaretur per 200.

COROLLARIUM IV.

Si numerum decurres ultimâ cyphrâ quæ sit o, & residui accipias dimidium, idem est ac si talis numerus divisus esset per 20. & ita de reliquis.

COROLLARIUM V.

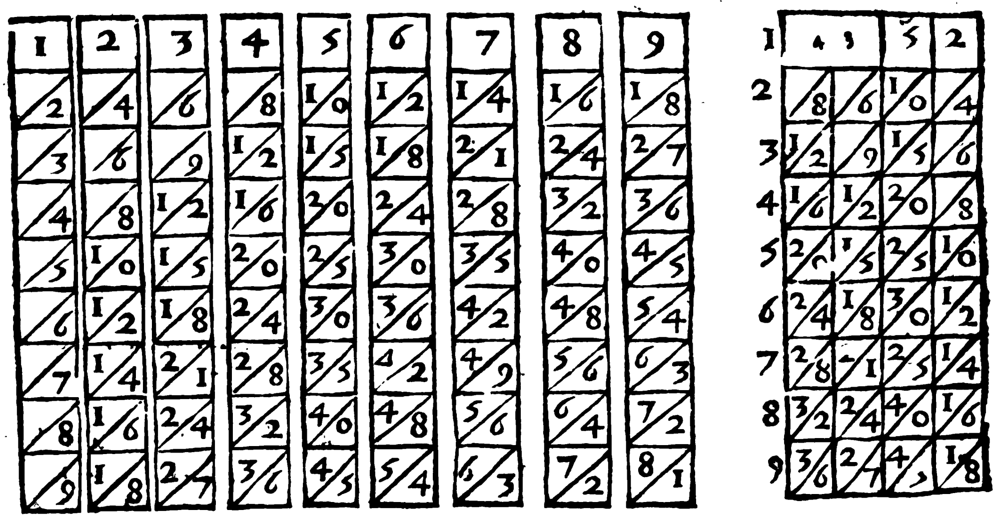
Ex hac multiplicandi numeri per numerum methodo, facile praxim Neperi rabdo Logicam concipies, qui nempe ope prismatum quadrangularium multiplicationem, & divisionem absolvit. Quæ praxis ut intelligatur præpono aliam non absimilem potius ut intelligatur, Neperiana quàm ullius compendij causa; nisi forsitan, in maximis operationibus ad sublevandum tædium.

A	4583.	1.	4583.	A.
B.	764.	2.	9166.	D.
——		3.	13749.	E.
F.	18332.	4.	18332.	F.
		5.	22915.	G.
H. 2	7498.	6.	27498.	H.
K. 3	2081.	7.	32081.	K.
——		8.	36664.	
	3501412.	9.	41247.	

Ita autem habet, sint A & B numeri multiplicandi. Paretur tabella, verbi gratia. Sit numerus A multiplicandus. Primò scribatur, & è regione illius ponatur 1. duplicetur & è regione ponatur 2. triplicetur & è regione ponatur 3. & ita deinceps usque ad novenarium. Hæc autem multiplicatio per solam additionem fieri potest. Si enim numerum A numero A addas, producitur numerus D, illius duplus. Si numero D addas numerum A, exurgit numerus E illius triplus. Si numero E addas numerum A, fiet numerus F & ita deinceps, quâ paratâ tabellâ ita uteris. Sit numerus A multiplicandus per numerum B, primò quia multiplicari debet per ultimum characterem 4. excerpe numerum F, cui præfigitur character 4. deinde quia eundem numerum A multiplicare debes per penultimam cyphram numeri B nempe per 6. excerpe numerum H. Tandem quia idem numerus A per 7. multiplicandus est, scribe numerum K; cætera ut in multiplicatione perficies.

Tota difficultas est in paranda tabella, qua semel parata nullam habet difficultatem multiplicatio, quæ non fit in simplici additione. Unde excogitavit Neperus tabulam aliquam quæ esset idonea omnibus numeris multiplicandis. Vult igitur ex quacumque materia solida verbi gratia ex aurichalco, ligno, imo & crassiori seu compactâ chartâ parari plura rectangula longiuscula, quæ novem quadrata contineant, quorum singula scribendis saltem duabus cyphris idonea sint. Vult autem haberi plura hujusmodi verbi gratia triginta; in utraque facie notata, eo qui sequitur modo.

In



In rectangulis illis oblongis, scribe tabellam pythagoricam. Quoties autem in eodem quadrato sunt duæ cyphræ, hæ separentur ductâ diametro: si unica fuerit scribatur infra diametrum relicto triangulo supra diametrum vacuo. Usus autem talis est.

Sit numerus A multiplicandus per numerum B. Ita dispone tua rectangula, ut in fronte referant numerum A. & paratam habebis tabulam numeri A, & quia numerus A, multiplicari debet per ultimam cyphram numeri B quæ est 3. tertia linea scribenda est non simpliciter, sed addendi sunt characteres quando est unus in superiori triangulo quadrati, & alius in inferiori præcedenti.

A. 4 3 5 2.
B 4 5 3.
1 3 0 5 6.
2 1 7 6 0.
1 7 4 0 8.
1 9 7 1 4 5 6

Quod in exemplo clarum erit. In tertiâ igitur lineâ: ultima cyphra est 6. scribatur hæc, & quia in triangulo supra diametrum nihil est, scribatur sequens character 5. Deinde quia in superiori triangulo est 1, & in inferiori est 9. adde simul & fiunt 10. scribe 0. & retine 1. unum & duo sunt tria scribe tria. Deinde 1. ad habendum numerum qui oritur ex multiplicatione numeri A. per penultimam cyphram numeri B, nempe per 5. excerpe quintam lineam, & primo scribe 0. deinde adde 1. superioris trianguli, cum 5. inferioris antecedentis quadrati, quæ enim ita sunt dispositæ notæ ad eandem sedem pertinent, & fiunt 6. Pariter adde 4. & 5. & fiunt 7. deinde 1. & 0. ad multiplicandum numerum A per 4. excerpenda est quarta linea eâdem methodo, reliqua fiunt ut in praxi communi, voluimus haberi plusquam novem hujusmodi rectangula quia aliquando numerus totalis semel, bis, aut pluries eandem cyphram repetit. Ut si talis numerus esset multiplicandus 45444. & alius quilibet, unde in utraque facie rectangula notanda sunt; ita ut ille qui incipit à novenario, in facie adversa incipiat à binario. Hic demonstratione opus non est, cum res sit satis per se nota.

PROPOSITIO XIV.

Multiplicationem examinare.

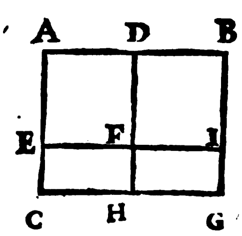
A. 2 4 1.
B. 1 4 3.
7 2 3.
9 6 4.
2 4 1.
D. 3 4 4 6 3.

B. 1 4 3.
A. 2 4 1.
1 4 3.
5 7 2.
2 8 6.
D. 3 4 4 6 3.

Primus multiplicationis examinandæ modus erit, si qui fuit multiplicans transeat in multiplicandum, ut si numerum A multiplicaveris per numerum B, factusque fuerit numerus D. si rursus numerum B per numerum A multiplicaveris ut in secundo exemplo, idemque numerus D productus fuerit, erit signum licèt non infallibile, te benè fuisse operatum.

Si autem fuerit diversitas, certum est in alterutrâ operatione fuisse erratum, nam *propositione* 12. ostendimus eundem numerum prodire quicumque sit multiplicans, aut multiplicandus.

LEMMA.



Si duo rectanguli latera sint divisa utcumque: erit rectangulum illud æquale, rectangulis quæ sub singulis segmentis unius, & singulis alterius comprehenduntur.

Sint rectanguli latera AB, AC, divisa utcumque in D & F; dico rectangulum totum A G æquale esse 4. rectangulis, quorum primum comprehenditur sub AD, unius & AE, alterius, item alteri comprehenso sub AD, & EC item duobus aliis comprehensis sub D B & A E, item sub

sub DB & EC; nam rectangulum AB est æquale omnibus suis partibus simul sumptis, Illæ autem sunt rectangula AF, CF, BF, FG, sed AF comprehenditur sub AD, AE, CF autem sub EF seu AD & EC; BF; sub DB, DF seu AE; denique FB; sub FI seu DB & FH seu EC: ergo rectangulum totum æquale est rectangulis comprehensis sub singulis segmentis unius lateris, & sub singulis segmentis alterius.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si numerus, per mutuam multiplicationem aliorum duorum producatur, idem numerus relinquetur, abjectis novenariis, ex producto, qui relinquitur abjectis novenariis, ex eo qui producetur per multiplicationem reliqui, ex iisdem numeris, subducto prius ex iis novenario quoties potest.

	K.	
B.	4 3 3.	E. 1.
C.	3 5 4.	F. 3. G. 3.
	L.	I. 3.
A.	1 5 3 2 8 2.	H. 3.

Sit numerus A productus ex multiplicatione numerorum B, C; dico si ex A auferatur novenarius quantùm potest, & reliquus sit H; item si ex numeris B & C auferatur novenarius, ita ut relinquantur E & F qui multiplicati in se invicem producant G, ex quo auferatur novenarius & reliquus sit I, dico numeros H & I esse æquales.

Demonstr. Numerus A est rectangulum, cujus latera sunt B & C; divisa per rejectionem novenariorum in partes, quas vocamus K & E; item L & F, ita ut K contineat novenarios omnes numeri B & E sit reliquum, & L novenarios numeri C & F sit reliquum; *(per lemma superius)* rectangulum A est æquale rectangulis sub KL, KF, LE, FE: igitur toties invenitur novenarius in rectangulis sub E, F sub KF & sub EL; quoties in numero A, & idem numerus relinquetur: sed subductis novenariis ex rectangulis K, L, K, F, E L, nihil relinquitur cum ea rectangula metiatur novenarius L nam numeri K & L sunt novenarij, ergo subducto novenario ex numero G, si tamen potest subduci, reliquus I æqualis erit, residuo H numeri A, postquam ablati sunt novenarij quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Examen multiplicationis per rejectionem novenariorum.

B.	3 5 4.
C.	8 3.
H.	1 0 6 2.
K.	2 8 3 2.
A.	2 9 3 8 2.

6 G
E 2 X 3 F
6 D

Sit numerus A, productus ex multiplicatione numerorum B, C, sitque examinandum an fuerit bona operatio, subduc ex numero A, novenarium quoties potest, & restet 6. scribe 6. ut vides in infima parte D. subduc novenarium ex C; sitque 2. residuus, qui scribatur in E, item residuus ex B sit 3. scribendus in F. multiplica F per E; & ex producto aufer novenarium; si residuus G sit æqualis numero D, signum est bonam esse operationem. Demonstratio patet, nempe si illæ duæ cyphræ non essent æquales erratum esse.

Ut autem error detegatur, quia potest error esse, vel in linea H; hoc est quod malè multiplicatus sit numerus B per ultimam cyphram numeri C, nempe 3. vel in linea K, hoc est, quòd perperàm multiplicatus sit idem numerus B, per primam cyphram numeri C, nempe per 8. Eâdem methodo id examinabis, hoc modo. Aufer ex numero B novenarium, quantùm fieri potest relinquitur 3, hanc cyphram multiplica per ultimam cyphram numeri C; producitur 9. abiecto novenario nihil relinquitur: dico quod si ex linea H, abjiciatur novenarius, si erratum non est, nihil relinquetur. Pariter examinabis lineam K, multiplicando 3. reliquum numeri B, abjectis novenariis, per 8. numeri B, fiuntque 24. hoc est 6. dico in linea K abjectis novenariis relinquendum numerum 6. si autem error nullus sit in singulis multiplicationibus necessariò erit in additione.

PROPOSITIO XVI.

Varia multiplicationis exempla.

Vt addiscant Tyrones diversos multiplicationis usus, neque enim solis mercatoribus, sed etiam Imperatoribus, & Ducibus utilis est; varia ejus proferam exempla.

A.	5 8 6 4.
B.	4 0 6 5.
H.	2 9 3 2 0.
K.	3 5 1 8 4.
N.	0 0 0 0.
L.	2 3 4 5 6.
C.	2 3 8 3 7 1 6 0.

G
3
E 6 X 5 F
3
D

Sit agmen militum in cujus fronte milites 5864. in latere quolibet 4065. quæritur numerus militum in tali agmine comprehensorum.

Multiplica primò numerum A per 5. ultimum scilicet cyphram numeri B, fietque numerus H, tum multiplicabis eundem numerum A per B penultimam cyphram numeri B, fietque numerus K retrahendus una sede in anteriora; tertiò multiplicetur idem numerus A per o, fietque numerus N pariter retrahendus. Denique multiplicetur numerus A per 4. nempe per primum characterem numeri B, fietque numerus L pariter retrahendus unâ sede, addantur simul numeri H, K, N, L, fietque C numerus militum tale agmen componentium, è quo ablatis novenariis restat numerus D. pariter ablatis novenariis ex B restat E, & ex A ablatis novenariis restat F; multiplica E per F, & ex producto aufer novenarium; relinquitur numerus G; qui cum sit æqualis numero D benè processisse operationem concludendum est.

8 0 0
6
4 8. 0 0.

Sunt aliqua compendia in diversis exemplis quæ regulam non variant; ut si scire velis pretium octingentarum ulnarum oloserici, cujus ulna venit nummis 6. multiplica 8. per 6. & producto 48. adde suas cyphras 00. Ratio clara est quia per numerum 6. multiplicandi essent singulæ cyphræ o. ut nempe 48. suam sedem obtineret.

A.	3 0 0.
B.	2 0 0.
C.	6 0 0 0 0.

Aliud exemplum. Sit A multiplicandum per B, multiplica primam cyphram numeri A per primam numeri B; fientque 6. cui addes cyphras o, tam numeri multiplicantis, quam numeri multiplicati. Ratio est quia si 2. multiplicaret 300. fierent 600. sed centuplo debet fieri major numerus, eò quod 200. sit numerus centuplus numeri 2.

D.	2 3 4 6.
E.	8 0 0.
F.	1 8 7 6 8 0 0.

Alia exempla simila fieri possunt, ut si numerum D per E multiplices; multiplica numerum D, per 8. primam cyphram numeri E, producetur numerus 18768. cui postpones duo o.

Dum numerus multiplicandus est per 10. ipsi addatur unum o, si per 100 duo oo addantur, per 1000 tria 000.

Pistolæ	3 4 5.
	1 1.
	3 4 5.
Faciunt	3 4 5.
Francos	3 7 9 5.

Per multiplicationem majores monetæ species, ad minores reducemus, exemplum; nummos aureos in francos: multiplicando eorum numerum per 11.

Franci	4 5 2.
	2
Asses	9 0 4 0.

Francos in asses reducemus si numerum duplicemus, & producto addamus o.

3 6 5.	dies	
2 4.		
1 4 6 0.		
7 3 0.		
8 7 6 0.	horæ	
6 0.		
5 2 5 6 0 0.		
6 0.		
3 1 5 3 6 0 0 0.	minuta	

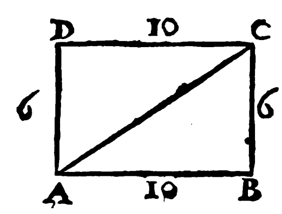
Ita sciemus quot sint horæ in anno si 365. dies multiplices per 24.

Solâ etiam multiplicatione omnes superficies metimur v. gr. sit longitudo unius cubiculi pedum 35. & latitudo 25.

3 5.
2 5.
1 7 5.
7 0.
8 7 5.

Si multiplicamus unum numerum per alium, exurget area cubiculi pedum quadratorum 875.

Si velimus scire quot necessarij sint lateres ut totam cubiculi aream tegant cognoscere debemus quot lateres in longum disponi possint; quot item in latum, si unum numerum per alium multiplicemus, exurget numerus laterum necessariorum ad pavimentum; idem dicito de tegulis.

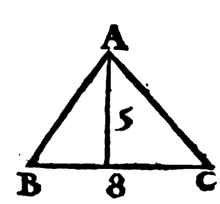


Parallelogrammum rectangulum, ut diximus metimur si unum latus DC 10. per aliud AD 6. multiplicamus.

Omne triangulum rectangulum metimur si unum latus comprehendens angulum rectum, per aliud latus multiplicemus: producti dimidium erit area trianguli. Ut si trianguli ABC aream volumus cognoscere, AB 10. per 6. multiplicamus, fiuntque 60. cujus dimidium 30. est area trianguli, quia nempe hâc multiplicatione, exurgit area totius rectanguli ABCD, cujus dimidium est triangulum ABC.

Hac methodo metieris omnes muros, ut quoties latomis merces numeranda est, priùs metiri debemus quot sint octopedæ quadratæ, hoc est quot sint quadrata, quorum longitudo seu latus sit octopedum, longitudo muri per altitudinem multiplicanda est, productus enim erit numerus quadratarum octopedarum.

Si occurrant triangula rectangula ut ABC; longitudinem AB, per dimidiatam altitudinem BC multiplica, & productum exhibebit aream trianguli ABC.



In triangulis quibuscumque, si ab angulo quocumque ad oppositam basin ducas perpendicularem; area ejus comprehendetur sub dimidiata diatâ basi & perpendiculari, quare si dimidiatam basin multiplices per perpendicularem exurget area trianguli, ut si dicas in hoc exemplo quater quinque fiunt 20. alia necessaria ad mensurationem, non sunt hujus loci cum peculiarem sibi vendicent tractatum, hæc tamen notasse non piguit.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Examen additionis numerorum denominatorum.

Diximus suprà intelligi non posse examen additionis numerorum denominatorum, nisi traditâ multiplicatione, ideoque locus est, ut illud explicemus. Tradam autem primò praxin deinde demonstrationem.

	Dies	horæ	min.	secund.
A.	32.	19.	43.	8.
B.	14.	8.	9.	53.
D.	47.	3.	53.	1.

Sint numeri A & B addendi, sit etiam numerus D. productus per additionem propriam numerorum denominatorum. Primum ex 47, primo intervallo dierum numeri D, auferatur 9. quantùm fieri potest, restat 2. illud 2 multiplicetur per denominationem horarum, id est 24. sed priùs ab illo denominatore aufer 9 si fieri potest, restant 6 multiplica igitur 6 per 2, fiunt 12. aufer 9, relinquuntur 3. addenda tribus, seu secundo membro numeri D. illa 6 multiplica per numerum 60. denominatorum minutorum decurtatum tamen omnibus novenariis, id est per 6. fiuntque 36. ex quo abjecto novenario nihil relinquitur, ideoque abjectis novenariis ex numero D relinquitur unitas.

Secundò eâdem methodo abjice novenarium ex numeris A & B addendis: id est ex primo membro dierum numerorum A & B; si âbjiciatur novenarius, relinquitur I, multiplica per 24 denominatorem horarum, abjectis prius novenariis, id est 6. fiunt 6. quæ si addas secundo membro horarum seu 19. & 8. & abjicias novenarium relinquetur 6. quem numerum multiplica per 60. decurtatum novenariis, id est per 6. fiunt 36. & abjectis novenariis nihil relinquitur; ex tertio membro minutorum aufer novenarium, relinquuntur 7. quæ multiplica per 60. numerum minutorum secundorum decurtatum novenario, seu per 6. fiunt 48. seu abjectis novenariis 3. quæ 3. adde ultimo membro secundorum, & abjice novenarium relinquitur unitas, ut in numero D. Ostendere debeo benè processisse operationem.

Demonstratio. Dico quod si numeri A & B converterentur in minuta secunda, & pariter, quod si numerus D converteretur in minuta secunda quod relinqueretur utrobique unitas abjectis novenariis, hoc est dico idem esse abjicere novenarium ex numero D, methodo traditâ, ac si numerus D esset in minuta secunda conversus, & ex producto aufferretur novenarius numerus & hoc ostendo in breviori exemplo. Sit numerus

	Dies	horæ
A.	147.	1. 9.
	horas 24	

B.	D	E.
3547.	3528.	19.
C I.		

A, dico quod si 147 multiplicaretur per 24. & illi adderetur 19, ita ut fieret numerus B ex quo abjectis novenariis relinqueretur unitas, quod si ex numero A auferatur novenarius, & reliquum nempe 3 per 24. seu abjectis novenariis per 6. multiplicetur, ita ut fiant 18. seu abjectis novenariis nihil relinquitur (si autem aliquid relinqueretur illud addendum esset sequenti membro) & ex reliquo abjiciendus novenarius quod relinquitur, erit pariter unitas. Sit numerus D ortus ex multiplicatione 147 per 24. ideoque numeri D & E sint æquales numero B: ergo *(per propositionem quintam hujus)* idem relinquitur numerus ex B abjectis novenariis, qui ex D & E: sed idem relinquitur ex D & E, qui relictus fuit ex toto A methodo traditâ, nam *(per 15. hujus)* idem numerus relinquetur si ex D auferatur novenarius, ac si ex 147 & 24 auferantur novenarij, & reliqui nempe 3 & 6. multiplicentur, & ex producto auferatur novenarius; id autem quod relinquitur ex numero D addendum erat numero E, nempe 19, ut subducatur novenarius; ergò etiam id quod relinquetur per nostram methodum addi debet numero horarum. Ergo idem numerus abjectis novenariis per nostram methodum relinquetur qui relictus esset ex numero B. Quod erat demonstrandum.

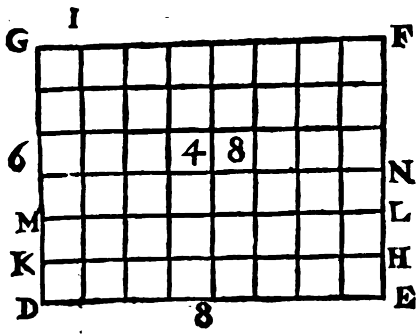
Quod autem ostendi in his membris; ostendi potest in reliquis; atque adeò cum numeri A & B prioris figuræ, æquales esse debeant numero D; tot debent esse minuta secunda in numero D, si reduceretur in talia minuta, quot in numeris A & B, unde si ex summa utraque abjiciatur novenarius, debet idem numerus relinqui utrobique.

PROPOSITIO XVIII.

Quid sit divisio.

Divisio numeri dividendi per numerum divisorem, est investigatio numeri qui indicat per unitates suas quoties numerus divisor invenitur in dividendo, unde vocatur quotiens: Quare numerus quotiens, seu qui quæritur, toties unitatem continet, quoties dividendus continet divisorem, atque adeo est eadem ratio quotientis ad unitatem; quæ est dividendi ad divisorem. Sit numerus A, dividendus per B, quæritur numerus C qui indicet quoties numerus B divisor invenitur in numero A, seu qui toties unitatem contineat, quoties numerus A continet numerum B, vel quod idem est, quærimus numerum qui multiplicando numerum B, producat numerum A, & sub hac consideratione ultimâ, quia diximus superiùs quoties numerus alium multiplicat, quòd productus considerari possit sicut numerus planus, seu quasi rectangulum tot constans quadratulis

A.	48.
B.	8.
C.	6.



quod continet unitates numerus A, divisor seu numerus DE, intelligitur propriè per modum rectanguli DH, cujus omnia quadratula sint in unum ordinem digesta. Quæritur ergo quotnam in rectangulo D F 48 quadratulorum; inveniantur ordines quadratulorum æquales rectangulo D H; quot autem fiunt ordines, tot erunt quadratula in rectangulo D I; quot autem sunt quadrata in rectangulo D I, tot linea DG continebit partes æquales; igitur per divisionem cognitâ areâ rectanguli D F, & uno latere nempe D E innotescit aliud latus DG, & est illud quod quæritur.

Ex quo fit ut sæpè hæc divisio numeri, per numerum vocetur ab aliquibus applicatio numeri ad numerum; nam ut sciatur quot vicibus, inveniatur rectangulum D H in rectangulo D F illi applicari intelligitur: primo in H D deinde in KL, MN, &c. donec exhauriatur rectangulum F D.

Quod si numerus dividendus intelligeretur per modum solidi: numerus etiam dividens intelligi deberet ad modum alicujus solidi, quæ omnia indicare volui ut discant Tyrones numeros quantitati continuæ aptare.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Numerum quemcumque majorem, per minorem dividere.

1 2 2 3
A 5 8 8 7 0
B 1 4 5 (406
C 1 4 5
D 1 4 5

Sit numerus A major, dividendus per numerum B.

Præceptum primum subscribatur divisor B, numero dividendo A; ita tamen ut divisor B non sit major membro, cui primò applicatur ut, hîc vides; nam 145 non est major quam 588.

Secundum præceptum est, ut quæramus quoties numerus divisor 145 inveniatur in membro 588, cui applicatur, quod si tam fœlicis imaginationis essemus, ut unico intuitu id præstare possemus, compendiosior esset operatio, ut dum unicâ tantùm cyphrâ divisor constat; id facilè possumus: quia autem id primò non possumus, dum divisor pluribus constat cyphris, per attentationem id experimur. Quæramus ergo quoties unitas quæ est prima cyphra divisoris invenitur in 5. invenio esse quinquies, antequam scribam 5. in divisore, experiri debeo mente, an si multiplicavero 145. per 5. non fiat numerus major quam 188. Dico ergo si multiplico unitatem numeri B per 5. fiunt 5. quæ si subtrahas ex quinario numeri A nihil relinquitur. Multiplica cyphram 4. numeri B per 5. fiunt 20. quæ subduci non possunt ex 8. quare signum est, te nimis magnam cyphram posuisse in quotiente. Experire an 4. meliùs procedat, multiplica unitatem numeri B per 4. fiunt 4. quæ si subducas ex quinque restat unitas, tum multiplica 4. numeri B, per cyphram 4. inventam, fiuntque 16. quæ subtrahi possunt ex 18. quare jam tutò scribere potes 4. in quotiente. Præceptum tertium debes multiplicare totum numerum B, per 4. & productum subtrahere ex primo membro numeri A. nempe ex 588. quia tamen nimis operosum esset, tot cyphras scribere, eâdem opera, multiplicabis numerum B, & productum subtrahes ex 588. Hoc modo multiplica primam cyphram 1. per 4. fiuntque 4. quæ si subtrahas ex 5. restat unum, dele unum numeri B, & 5. numeri A; & scribe unitatem reliquam. Tum multiplicabis secundam cyphram numeri B seu 4. per 4. fiuntque 16. quæ subtrahes ex 18. numeri A, restabuntque duo, dele 4. numeri B, & 18. numeri A, scribeque quod relinquitur nempe 2. denique multiplica ultimum characterem numeri B, per 4. fientque 20. quæ subduces ex 28. restabuntque 8. si benè operatus es, numerus relictus ex primâ parte numeri A; nempe ex 588. debet esse minor numeri B, si enim major esset, prima cyphra quotientis nimis parva esset.

Præceptum quartum. Promove divisorem uno gradu versus dextram; ut expendas quoties invenitur in 87. quia autem 145. major est quàm 87. ideò in quotiente ponenda est cyphra o quæ significat 145. non inveniri in 87. deleatur igitur divisor 145. secundo loco positus. Promoveaturque ulteriùs, & quia sic unitas numeri D, subjacet numero 8. quære quoties unitas inveniatur in 8. certum est inveniri octies, sed si notarentur octo in quotiente, multiplicando unitatem per 8. fierent 8. quibus ablatis ex 8. nihil relinqueretur, & dum eadem cyphra quotientis nempe 8. multiplicaret 4. divisoris, fierent 32. quæ subduci non possent ex 7. unde cyphra quotientis minor esse debet, si poneretur 7. adhuc, idem sequeretur inconveniens.

Quare antequam scribatur 6. in quotiente experire an benè procedat. Si multiplices 1. divisoris per 6. fient 6. quæ si subtrahas ex 8. restant duo; tum si per eundem 6. multiplices 4. secundam cyphram divisoris fient 24. quæ si subtrahas ex 27. restant 3. denique si multiplices per 6. ultimam cyphram divisoris 5. fient 30. quæ adæquant id quod relinquitur in numero A.

Quare ponere potes 6. tum multiplicare debes 145. per 6. & productum auferre ex 870. quod eâdem operâ præstabis; multiplica igitur 1. per 6. fient 6. quæ si auferas ex 8. restant 2. scribenda; deletis 1. & 8. multiplica 4. per 6. fiunt 24. quæ si auferas ex 27. restant tria scribenda, & dele 2. 7. & 4. denique multiplica 5. per 6. fient 30. quæ si subtrahas ex 30. nihil relinquetur.

Demonstratio. Per divisionem quærimus quotientem

tientem, qui ostendat quoties divisor invenitur in dividendo; seu qui multiplicando divisorem producat dividendum: sed hâc methodo id præstamus, nam jubemur invenire primam cyphram quotientis, quæ quia duas sequentes habere debet, pertinet ad centenaria, & multiplicando numerum B producat numerum minorem primo membro dividendi, nempe 588. non tamen ita ut relinquatur numerus major, quam 145. qui numerus productus ex 4. per 145. quia cyphra 4. illum producens pertinet ad centenaria, post se debet intelligi habere duo o. hoc est si scriberetur relinqueret adhuc duas cyphras vacuas. Hoc enim idem est. Hic autem numerus productus ex multiplicatione 145. per 4. quamvis non scribatur, subintelligitur & verè aufertur ex 588.

Jubemur exinde promovere divisorem uno gradu; ita ut ejus ultima respondeat penultimæ dividendi. Cum enim divisor non ampliùs per centenaria multiplicari debeat. Sed per decades, ejus ultima esse debet sub decadibus. Sed hoc modo, collocatus divisor, neque semel invenitur in membro dividendi sibi competente. Ideo notatur o, tantùm ut expleatur sedes, nempe ut prior cyphra suum valorem centenariorum obtineat.

Denique promovetur divisor, ut multiplicetur per unitates, quærimúsque numerum qui multiplicando numerum 145. faciat 870. vel proximè minorem; invenimúsque esse 6. quare prima figura quotientis, quæ est 400. multiplicando 145. efficit 58000. secunda quæ est o. nihil efficit; ultima quæ est 6. multiplicando 145. efficit 870. quæ addita numero 58000. numerum 58870. producit, quod efficiendum erat.

PROPOSITIO XX.

Alia praxes divisionis.

Quamvis omnes praxes in idem recidant, & æquivalenter, sint eædem, in specie tamen aliquam habent diversitatem: inter eas illæ commodiores censendæ sunt, quæ paucioribus characteribus utuntur.

Omnes divisionis praxes primò, in hoc conveniunt quod eodem modò applicent, aut applicatum intelligunt divisorem numero dividendo: hoc est ita ut membrum dividendi cui applicatur divisor, eodem divisore minus non sit.

A.	8 9 4 5 0.	B.	4 3 2.
D.	8 6 4.		
E.	3 0 5 0.		
F	3. 0 2 4.	C.	2 0 7.
G.	2 6.		

Secundò omnes eodem modo per attentationem in mente factam quærunt singulas quotientis cyphras. Proponam igitur praxin quæ satis ostendit totum artificium. Sit ergo numerus A dividendus, numerus B divisor qui subintelligatur applicari dividendo, ita ut primus character 4. primo 8. respondeat, secundus 3. secundo 9. tertius 2. tertio 4. sub quo notetur punctum. Quæratur prima cyphra quotientis per attentationem, eò modo quo diximus, quæ sit 2. per hanc cyphram 2. multiplica divisorem 432. fientque D. 864. quem ita scribes subdividendo A, ut ultimus character respondeat puncto notato. Hunc numerum D subtrahe ex membro 894. restabunt 30. huic numero 30 addes cyphram sequentem numeri A nempe 50.

Intellige divisorem B applicatum numero 305. ita ut ultima ejus cyphra respondeat notæ 5. & quære quoties divisor 432 inveniatur in numero 305. certum est non inveniri, quare nota o in quotiente.

Numero 3050. intellige divisorem B applicatum, ita ut ultima ejus cyphra 2. respondeat ultimæ numeri 3050. inveniesque per attentationem esse septies, scribe 7 in quotiente, multiplicabisque divisorem B, per 7. & productum F scribes sub numero 3050. & ab eo subtrahes relinquetur 26. dico ergo numerum C esse quotientem & relinqui 26.

Ex quibus vides in singulis membris, primò applicandum esse divisorem membro dividendi sibi competenti.

Secundò quærendum characterem quotientis per attentationem, tertiò per characterem inventum, multiplicandum esse divisorem.

Quartò productum subtrahendum esse, ex membro dividendi proposito, ita tamen ut id quod relinquitur minus sit divisore.

Tertia praxis numerum genitum ex multiplicatione divisoris, per cyphram quotientis non scribit, sed multiplicando subducit ex membro dividendi sibi competente.

Compendium & utilitas hujus praxis in eo consistit; quòd paucissimas scribat cyphras, nihilque deleat, hujus exemplum hic apponam.

A.	8 4 5 6 7.
	1 9 7 6.
	3 2 7.
	3.
B.	3 2 4.
C.	2 6 1.

Sit dividendus A, divisor B, quæritur quotiens C. Scribatur divisor infra dividendum, relicto spatio intermedio, ad operationem; scribatur etiam quotiens infra divisorem.

Intelligatur applicari divisor B membro sibi competenti, ut in hoc exemplo, ultima ejus cyphra respondet tertiæ dividendi 5. sub qua notetur punctum.

Tum more consuetó per attentationem, quære primam cyphram quotientis, quæ sit 2. (*per hanc*) multiplicandus est divisor, & productus subtrahendus ex 845. sed id unâ eâdemque operâ facile perficies. Dic ergo bis quatuor sunt octo, quæ subtrahi non possunt ex 5. subtrahantur ex 15. restant 7. scribenda sub 5. & memento te retinere unum, eo quod processeris ultra decadem. Dicito bis duo sunt quatuor, & unitas retenta efficiunt quinque, quæ subtrahi non possunt ex 4. subtrahantur ex 14. restant 9. scribenda sub 4. dividendi; & memento te retinere unum. Bis tria sunt 6. & unum retentum sunt septem, quæ si auferas ex 8. restat unum subscribendum. Adde numero relicto 197 cyphram 6 sequentem in dividendo: iam quærere debes quoties divisor 324. inveniatur in 1976 deprehendo per attentationem inveniri sexies; scribe 6 in quotiente, & per cyphram 6 multiplico divisorem; incipiendo ab ultima & dicendo sexies 4 sunt 24. quæ aufferri non possunt neque ex 6. neque ex 16. sed ex 26. & restant duo scribenda, & quia subtractio facta

facta est ex viginti, retine duo; sexies duo sunt 12, & duo retenta, sunt 14. quæ auferri non possunt ex 7; auferantur ex 17, restant tria subscribenda, & retine unum: sexies tria sunt octodecim, & unum retentum sunt 19, quæ si auferantur ex 19, nihil restat. Adde cyphram 7, dividendi numero 32. & quæro quoties 324 in 327. invenio semel; scribe 1 in quotiente. Multiplicando divisorem per unum facta subtractione restabunt tria.

Notandum primò, in singulis membris id quod relinquitur minus esse debere divisore, si enim majus, aut æquale esset, divisor adhuc semel in dividendo inveniretur, atque adeò nimis parvus assumptus esset quotiens.

Notandum 2. Id quod relinquitur facta divisione, minus semper esse divisore. Illudque esse numeratorem fractionis cujus divisor sit denominator, ut in exemplo superiori fiet fractio $\frac{3}{324}$

Illud autem quod relinquitur debet reduci in minutiores partes ut sciatur quantùm competat quotienti. Quod ut meliùs intelligatur supponantur 84567 nummi dividendi, seu distribuendi trecentis hominibus, certum est per regulam superiorem cuilibet competere nummos 261, & restare tres nummos; qui ut distribui possint trecentis viginti quatuor hominibus; debent mutari in francos fientque novem franci. Sed neque adhuc distribui possunt 324. hominibus. Quare ex francis fiunt asses multiplicatione per 20; fientque 180 asses. Sed adhuc sic distribui non possunt tot hominibus, fiant ergo denarij multiplicatione per 12. fientque 2160 denarij. Instituatur ergo divisio numeri 2160 per divisorem 324, quotiens erit 6. & restabunt adhuc 216 denarij non distributi, ex quibus si fiat moneta adhuc minor, ulterior distributio fieri poterit.

Ut autem meliùs intelligatur usus divisionis, varia exempla proferam quæ Tyronibus proponi poterunt.

Sunt 4 mercatores qui societatem inierunt, lucrum autem fuit 900. quæritur quantùm cuilibet competat, invenio 225.

Imperator milites habet 35294. quos distribuere debet in septem agmina æqualia. Quæritur quot militibus constet unum agmen; invenio 5042.

A. 3 5 2 9 4.
2 9.
1 4.
D. 7.
C. 5 0 4 2.

Hominibus 8000 distribuendi sint 400000. quæritur quot nummi unicuique eveniant; invenio 50.

Emit aliquis equos 432. deditque nummos 13824. singuli equi veniunt nummis 32.

Quoties numerus aliquis dividendus est per 10. 100. 1000. toties ejus ultima cyphra, vel duæ vel tres delendæ sunt. Et si 8460. per 10. erit quotiens 846. Si in fine habeat cyphras significativas, illæ cum quotiente fractionem efficient ut si numerus 43567 per 100. sit dividendus quotiens erit 435. $\frac{67}{100}$

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Reductio minorum specierum monetæ ad majores.

Si minores species monetæ ad majores reduci debeant, dividendus est numerus inferioris monetæ per numerum significantem, quoties minor in majori continetur. Sit exemplum primum librarum Turonensium 411. vis scire quot nummos efficiant, divide numerum propositum per tria, quotiens 137. erit numerus nummorum.

Si ex libris nummos aureos velis efficere, numerus propositus per 11 dividatur. Ut ex assibus francos efficias reservatâ ultimâ cyphrâ reliqui, sume dimidium; Sit exempli causa numerus assium 5834; reservatâ ultimâ cyphrâ 4. numeri reliqui sume dimidium, fiunt 291, restatque 1. hoc est 10 asses. Cum 4 primo ablatis fiunt 14. & ita de reliquis.

Notandum item datâ parallelogrammi rectanguli areâ, & uno latere; per divisionem aliud latus innotescere, ut jam dixi.

Divisio examinatur, eo modo quo multiplicatio solùm haberi debet ratio residui, quoties divisione facta aliquid relinquitur in dividendo. Sit ergo ut supra dividendus numerus A 35294. per 60. fit quotiens 588. & relinquitur 14. Ex numero A aufer novenarium quantùm fieri potest, restant 5, scribenda in D. ex divisore, ablato novenario si fieri potest restant 6. ex quotiente restant 2, scribenda in E & F; multiplica 6. per 3. fiunt 18. adde quæ restant nempe 14. fiunt 32. à quibus si auferas novenarium restant 5. scribenda in G; quia numeri D & G æquales sunt; bona fuit operatio.

A. 3 5 2 9 4.
4 9 4.
1 4.
B. 6 0.
C. 5 8 8.

5 G
E 6 X 3 F
5 D

PROPOSITIO XXII.

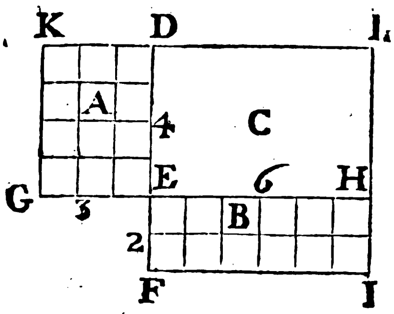
Theorema.

Si 4 numeri proportionales fuerint, numerus productus ex multiplicatione primi, & ultimi; æqualis est numero producto, ex multiplicatione secundi, & tertij.

Vocamus numeros proportionales, cum primus ad secundum eandem rationem habet, ac tertius ad quartum, quid autem hoc sit explicuimus satis fusè, initiò libri quinti elementorum Euclidis. Hæc etiam propositio est 16 sexti libri Elementorum Euclidis.

Revocandum autem est, id quod initio multiplicationis diximus, nempe per multiplicationem produci rectangulum aliquod, cujus numeri multiplicantes sint latera, numerus verò productus sit area.

Sint



Sint igitur quatuor numeri 3. 6. 2. 4. proportionales repræsentati per lineas. Sitque numerus A, seu rectangulum quod producitur ex multiplicatione, primi 3. per ultimum 4. pariter fit rectangulum B quod oriatur ex multiplicatione secundi numeri 6. per tertium 2. dico rectangulum A nempe 12. æquale esse rectangulo B. Jungantur enim rectangula, ita ut GEH, & FED sint rectæ lineæ, perficiaturque rectangulum, C productis lineis KD, IH, donec concurrant in L.

Demonstratio. (*Per* 1. 6.) ita est rectangulum A ad C; sicut GE ad EH; seu 3. ad 6. sed ut 3. ad 6. ita supponitur 2. ad 4. seu FE ad DE: ergo A ad C se habet ut FE ad ED; sed ut FE ad ED; ita (*per* 1. 6.) B ad C: ergo ut A ad C, ita B ad idem C. ergo (*per* 9. 5.) A & B sunt æqualia quod erat demonstrandum.

Eodem modò demonstrabimus, quod si A & B sint æquales erit ut GE ad EH, ita FE ad ED.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Tribus datis numeris quartum proportionalem invenire.

A. B. C. D.
3. 6. 5. 10.

Sint tres numeri dati A, B, C, quæritur quartus proportionalis. Hoc est quæritur quartus numerus D ad quem tertius C eandem rationem habeat, quam habet, primus A ad secundum B. Multiplica secundum B per tertium C, & productum divide per A; quotiens divisionis, erit numerus D. quæsitus.

Demonstratio. (*Per superiorem*) numerus productus ex multiplicatione B per C æqualis est numero producto, ex multiplicatione A, per D; ergo multiplicando B per C, habetur numerus qui produceretur ex multiplicatione numeri A per D, nempe cognoscitur ejus area; sed (*per* 17. *hujus*) si cognita area, per unum latus nempe A dividatur, divisionis quotiens, erit aliud latus; ergo si per primum A dividatur numerus productus ex multiplicatione secundi per tertium, quotiens divisionis, erit quartus qui quæritur.

A. B. C. D.
3. 6. 5. 10.
F. 1. E. 2.

Alio modo idem problema absolvemus. Secundum per primum divide, & quotientem per tertium multiplica, productus erit qui quæritur. Sint numeri A, B, C, quibus quæritur quartus proportionalis D divide B, secundum per primum A erit quotiens E dico quod si multiplicetur C per E, producitur numerus D.

Demonstratio. Cùm enim dividitur B, per A, fitque quotiens E, quot erunt unitates in E toties A continetur in B. Hoc est ita est unitas F ad E, ut A ad B seu ut C ad D, quare rectangulum sub F & D æquale est rectangulo sub E & C, rectangulum autem sub F unitate, & D est ipsum D, nam unitas multiplicando quemcumque numerum nihil immutat, sed eundem numerum facit: ergo numerus D est idem ac productus ex multiplicatione E per C.

Alio item modò Primum divide per secundum; & tertium per quotientem quartus, erit numerus qui quæritur. Licèt iste modus possit habere locum, etiam quando primus minor est secundo cùm ejus demonstratio sit universalis nihilominus potest maximè adhiberi quando secundus minor est primo.

A. B. C. D.
6. 3. 10. 5.
E. 2. F. 1.

Sint ergo tres numeri dati A, B, C, quæritur quartus D ignotus. Dividatur primus A per secundum B, fiatque quotiens E, per quem dividatur tertius C. Dico quotientem istius ultimæ divisionis esse numerum D, seu quartum proportionalem.

Demonstratio. Cum B dividit A, quotiens est E; erit ut A ad B; ita E ad unitatem, ut autem A ad B; ita C ad D: ergo ut E ad unitatem, ita C ad D; ergo rectangulum sub unitate & C, æquale est rectangulo sub E & D. Quare cognito rectangulo nempe numero C, cum enim unitas numerum multiplicat, nihil immutat ut habeatur illius latus D debet fieri divisio per aliud latus E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Duobus datis numeris tertium continuè proportionalem invenire.

A, B, B, C.
2. 4. 4. 8.

Sint duo numeri dati A, & B. Quæritur tertius continuè proportionalis, hoc est, quæritur numerus ad quem B eandem rationem habeat, quam A habet ad B. Ponatur bis numerus B, fiatque ut A ad B, ita B ad C. Hoc est, multiplicetur B per B, seu per seipsum, & productus dividatur per A. & quotiens divisionis, erit C. qui quæritur.

Demonstratio. Eadem est quæ in superiori propositione.

Notandum qu[illegible]scumque dati numeri habent aliquam demonstrationem adjunctam; tunc ut regula sine errore fiat, debent, vel primus & tertius eadem denominatione affici, tunc autem secundus & quartus eadem etiam afficientur, vel

duo

duo primi. Nempe primus & secundus eâdem denominatione afficiuntur, & tunc tertius & quartus eâdem etiam denominatione afficiantur. Ut si ita enuncietur. Si 4. hominibus dantur 5. nummi, 7. hominibus qui dabitur. Vides autem primum, & tertium ejusdem esse denominationis, sicut etiam 2. & quartum vel si quæras ut se habent 4. homines ad 7. ita se habebunt 5. nummi ad 8. cum $\frac{1}{4}$ ex quo fit ut in quæstione tres numeri diversæ denominationis proponi non debeant. Ut 4. palmi ad quinque pedes. Ita 10. ulnæ ad digitos, quia licet numeri in abstracto post operationem factam sint proportionales. In concreto tamen propter variam illam, & incognitam denominationem manerent non proportionales, saltem quantitates significatæ.

PROPOSITIO XXIV.

Variæ quæstiones.

Proportio alia est directa alia inversa. Directa est quando primus est ad secundum ut tertius ad quartum. Inversa verò dicitur quando primus est ad secundum ut quartus ad tertium.

Rursus utraque subdividitur in simplicem & compositam. Simplex est, quando constat tantum tribus vel quatuor terminis. Composita vero est, quando constat tam pluribus quam quatuor terminis.

Ut meliùs intelligant Tyrones has proportionum quæstiones, addiscantque sensim methodum regulas inveniendi, proponendas hac propositione varias diversarum proportionum quæstiones censui.

Si quatuor homines expendunt 24. nummos intra 12 dies, quot expendent 20. homines intra dies 30. Hæc proportio est composita.

Duobus modis solvi potest hæc quæstio. Primò duplici regula trium, directa hoc modo.

Si 4 homines expendunt 24 nummos, quot expendent 20. Subintellecto, in utroque casu; eodem duodecim dierum tempore; quare multiplicando 24. per 20. provenient 480. quæ si dividas per 4. invenies 120.

Rursus dices si 12. dies dant expensas 120. nummorum: quas expensas dabunt dies 30. multiplica 120. per 30. provenient 3600. quæ si dividas per 12. quotiens erit 300. numerus scilicet quæsitus.

Alio modo solvi potest hæc quæstio 4. homines intra 12. dies, multiplica 12. per 4. habebis 48. expensas diurnas. Pariter 20. homines intra 30. dies, multiplica 30. per 20. fient 600. fiat simplex regula trium si 48. expensæ diurnæ ad 24. nummos ascendunt, quid dabunt 600. invenie sque pariter 300. nummos.

Opus erit regula proportionum inversa in aliquibus exemplis, quale est illud. Si 4. homines intra 12. dies expendunt nummos 24. intra quot dies 20. homines expendent 300 nummos. Multiplica pariter 12. per 4. ut habeas numerum expensarum diurnarum nempe 48. si 24. nummi dant expensas 48. quot dabunt expensas diurnas 300. nummi, secundum hanc propositionem fiat regula trium communis multiplicando 48. per 300. fient 14400. quæ si dividas per 24. quotiens erit 600. numerus expensarum diurnarum, quem numerum si dividas per 20. homines, qui singulis diebus 20. expensas diurnas faciunt, quotiens nempe 30. erit numerus dierum quæsitus.

Octo homines singulis mensibus singuli expendunt sex nummos; quot iidem expendent intra 4. annos. Unus uno mense expendit 6. nummos intra 4. annos hoc est 48. menses quot expendet. Fiat simplex multiplicatio 48. per 6. producentur 288. nummorum expensæ unius hominis pro 4. annis. Fiat alia regula trium, si unus homo expendit nummos 288. octo homines quot expendent, opus est solâ multiplicatione numeri 288. per 8. fient 2304.

Poterat aliter ordinari hæc regula si unus homo in mensem expendit 6. nummos, quot 8. expendent eodem tempore, inveniòque 48. rursus si octo homines intra mensem expendunt 48. nummos, quot expendent intra 48. menses. Multiplica 48. per 48. similiterque fient 2304. Pro 200 libris mercium avehendis per 100 leucas dantur nummi 4. quid dabitur pro 100. libris transferendis per 40. leucas.

Multiplica 200. libras per 100. ut fiat 20000. nempe numerus librarum translatarum per unam leucam. Pariter multiplica 400. per 100. fiunt 40000. libræ per unam leucam, tum instituatur regula trium si 2000 dant 4 nummos, 40000 dabunt nummos 8.

Aliquis nummis 10. lucratus est 4. nummos tribus mensibus, quod tempus requiritur, ut 100. nummis, lucretur 2000. nummos. Primò multiplica tres menses per 10. fiunt triginta nummi menstrui 4. nummi lucri exigunt 30. nummos menstruos. 2000. nummi lucri quid requirent, inveniòque multiplicando 2000. per 30. fieri 60000. & dividendo per 4. quotientem esse 5000. habeo autem 100 nummos per quos si divido 5000. quotiens erit 50. quæ iterum si divido per 12. habeo annos 12. & 6. menses.

Singulis militibus dantur 4 nummi singulis mensibus, quid dabitur militibus 13000 novem mensibus. Multiplica 13000 per novem menses, fient 117000. quæ iterum multiplica per 4. fient 468000.

12 Messores 20. jugera metunt novem diebus, intra quod tempus 30 messores 45 jugera metent. Primò multiplica 12. per 9. ut fiant operæ diurnæ 108. tum dices 20. iugera dant operas 108. 45. iugera quot exigent, provenientque 243. quæ si dividas per 30 messores, provenient octo dies & $\frac{1}{10}$ seu $\frac{1}{10}$.

Margarita emitur, quæ denuò venditur nummis 200. ita tamen ut jactura sit decem pro 200. quæritur quanti fuerit empta initio.

Fiat ut 90 ad 100. ita 200 ad 4. 222 $\frac{2}{90}$.

Nam si empta esset 100. nummis, & vendita 90. esset jactura decem pro 100.

Mercator pannum emit illumque vendit nummis 3600. quæritur quanti emerit, si tamen emisset tribus nummis, minus, lucrum fuisset decem pro centum; fiat ut 110. ad 100. ita 3600 ad 3272 $\frac{8}{11}$. quibus si addas tria, fient $\frac{8}{11}$.

Mercator emit in Indiis 50000. libras piperis, fuitque pretium 10000. nummi. Portorium autem pependit in Lusitania 500. nummos. Pro naulo 300. Portorium in Italia 200 vectoribus dedit mille nummos.

Quanti debet vendere singulas libras, ut lucretur duos asses in singulas.

Pretium

pretium	10000.
Lusi portorium.	300.
naulus	500.
Italicum port.	200.
vectoribus	1000.
Fient A	12000.
	60.
B.	720000.
	120000.
	2000. $14\frac{2}{5}$
	50000.

Primò quæcumque soluta sunt in unam summam coalescant,qualis est summa A, quæ in asses convertatur multiplicando per 60, fietque summa B quæ dividatur per 50000. quotiens erit $14\frac{2}{5}$, quibus si addas duos asses fient $16\frac{2}{5}$.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datis tribus numeris invenire quartum qui ita se habeat ad primum, ut secundus ad tertium.

A.	B.	C.	D.
4.	6.	3.	8.

Sint tres numeri A, B, C. quæritur D quartus qui ita se habeat ad primum A, sicut secundus B ad tertium C, multiplicentur duo priores A, B, & productus dividatur per tertium C. Sit divisoris quotiens D; dico D ita se habere ad A, sicut B se habet ad C.

Demonstratio, Cum enim rectangulum sub A, B, æquale sit rectangulo sub D, C, si D statuatur primus numerus; & C ultimus (*per prop. 19. hujus*) erit ut D ad A, ita B ad C. Quod erat demonstrandum.

Atque hæc est quam vocant communiter regulam proportionum eversam: quæ tunc adhiberi debet, cum invenitur iam aliqua æqualitas, quod exemplis potiùs, quàm vocibus præcipuè abstractis explicari potest. Cursor aliquis certum, & determinatum iter conficit intra 8 dies, singulis diebus conficiendo 24 leucas, ut idem spatium perficiat intra 6 dies, quot leucas conficere debet. In quo vides, quod utrobique sit idem iter conficiendum. Multiplicando autem A per B habetur totum iter; quod si dividatur per 6 dies, habetur illud quod singulis diebus conficiendum est.

A.	B.	C.	D.
Dies	mill.	dies	millaria.
8.	24.	6.	32.

Aliud signum eversæ illius regulæ erit, quoties eò major est numerus quæsitus, quò minor est ille qui ponitur in quæstione. Ut 20 homines intra 10 dies perficiunt aliquod opus, quot requirerentur ut idem opus perficerent, intra sex dies, in quo vides; quod quò pauciores erunt dies, eò plures requirentur homines, ideò multiplicabis primum, per secundum, ut habeas numerum operarum diurnarum, quem numerum divides per dies, ut habeas numerum hominum.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Usus varij Regulæ proportionum directæ.

Quamvis ea quæ diximus supra videantur sufficere ad intelligentiam regulæ proportionum, ad faciliorem tamen eius usum; putavi nonnulla hic ejus exempla esse adhibenda.

Intra 4 menses expenduntur nummi 400, quot expendentur intra 12, vides autem eandem debere esse rationem numerorum 400. ad nummos quæsitos, quæ est 4 mensium ad 12. Ita ergo operaberis.

Disponantur numeri.

menses.	nummi.	menses.	nummi.
4.	400.	12.	1200.

12.
800.
400.
4800. 1200.
4 4.

Multiplica numerum 400 per 12, productum deinde per 4. prodibit numerus 1200. quæsitus.

Si proponatur hæc quæstio. pro 15 nummis habeo tres ulnas panni alicujus; quot nummi requirentur ut habeam 20 ulnas. Ita debet proponi quæstio, 3 ulnæ væneunt 15 nummis, 20 ulnæ quot nummos exigent.

3. 15. 20. 100.
15.
100.
20.
300.

Multiplica 15. per 20. productum 300. divide per primum 3. quotiens 100. erit numerus quæsitus. Si intra 4 menses expenduntur 243 nummi, quot expendentur intra 4 annos, debent priùs mutari anni in menses, ut fiat eadem denominatio mensium; sunt autem 4 anni menses 48.

4 menses, nummi 243. menses 48. nummi 2916.
48.
1944.
972.
11664. C 2916.
4.

Eodem modo operaberis quoties plures sunt denominationes, hoc est si 4 menses dant nummos 243. quot dabunt 4 anni & menses 6. ponendi enim sunt 54 menses pro 4 annis & 6 mensibus. Alia similia exempla innumera fieri possunt, modò nullæ ponantur fractiones; Docebo enim sequenti parte, quomodo versandæ sint fractiones.

Exempla regulæ trium Eversæ.

Cum sextarius frumenti vænit libris turonensibus sexdecim, pro 12 assibus habentur sex libræ panis, quot libræ dabuntur pro 12 assibus cum sextarius venditur libris turonensibus 14. Ita disponantur numeri.

Libræ Tur. libræ panis. libræ Tur. $6.\frac{12}{14}$.

16.	6	14.
6.		
96.	$6.\frac{12}{14}$.	
14.		
12.		

Tum multiplica primum per secundum, & productum divide per tertium; quartus qui proveniet erit is qui quæritur.

Demonstratio est, quia in hac regulâ quo major est primus numerus eo minor est is qui quæritur, hoc est eâ proportione, quâ 14 superantur à 16, eâdem numerus quæsitus superat 6 unde debet fieri ut 14 ad 16. ita 6 ad numerum quæsitum, quod fiet juxta principia posita, si 16 per 6 multiplices, & productum dividas per 14.

Congius vini vænit libris turonensibus 44. & cotylæ octo, assibus 24. quot cotylæ habebuntur pro iisdem 24 assibus, dum congius venditur libris 14. Animadvertis autem pro 24 assibus plures haberi cotylas, si congius minori pretio vendatur. Ita disponantur numeri.

Libræ 44. Cotylæ. libræ $25\frac{2}{14}$.

8.	8.	14.
352.		
72.		
2.		
14.		

Requiruntur ad exercitum uno die dolia 32. quorum singula continent Cotylas 360. quot requirentur pro eodem exercitu dolia continentia cotylas 240.

Cotylæ.	dolia.	cotylæ.	dolia.
360.	32.	240.	48.

Si multiplices dolia 32 per cotylas 360, efficies numerum cotylarum requisitarum; quem numerum divides per 240. In duobus prioribus exemplis si modica fieret mutatio, eadem ratio adhiberi posset. Ponamus enim dum sextarius frumenti vænit 16 francis haberi 6. libras panis pro franco: Per multiplicationem habetur numerus librarum panis quæ sunt in sextario, detractâ mercede pistoris. Qui numerus divisus per francos 14. ostendit quot libræ competant singulis francis, ut autem se habet francus ad francum, ita 12 asses ad 12 asses.

Ex Panno cujus latitudo duorum palmorum, requiruntur palmi 36, ut certam supellectilem efficias, quæritur quot palmi sint necessarij ad eandem supellectilem perficiendam, si latitudo panni fuerit trium palmorum. Si multiplices 36 per duos palmos efficies 72, numerum palmorum quadratorum requisitorum ad propositam supellectilem, quem numerum si dividas per tria habebitur longitudo panni nempe 24.

Die horas 12 habente, veredarius certum iter conficit intra dies 10, quot requirentur dies, cum sol supra horizontem per 16 horas manebit. Si multiplices 12, per 10, efficies 120, numerum horarum, quibus veredarius tale iter emetiri potest, si ergo talem numerum 120 dividas per 16, habebis dies $7.\frac{8}{16}$ seu $\frac{1}{2}$

Imperator obsessus cum militibus 7000, victum habet ad alendos milites, pro 4 mensibus, dando singulis victum 14 assium, sed sperare, non potest auxilium nisi post septem menses, eadem autem ratio, quæ est 4 mensium ad 7 menses eadem est 4 dierum ad 7 dies. Si autem haberet tantum, ad dandum militibus per 4 dies, 14 asses; multiplicando 14 per 4 haberetur stipendium unius militis pro 4 diebus, nempe 56, quæ si dividas per 7. fient 8 asses, quamvis autem non unus miles, sed 7000. perinde tamen, sicut enim multiplicantur 14 asses per 7000, multiplicantur etiam 8 asses per eundem numerum.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Datis diversæ denominationis numeris, quartum proportionalem invenire.

Aliquando accidit ut plures, quàm tres numeri proponantur, quibus alius proportionalis quærendus est; cum tamen regula hæc aurea, seu proportionum non plures quàm tres admittat; ideò vel in duas regulas proportionum operatio dividenda est, vel numeri illi plures ad tres revocandi sunt. Sit exemplum illud propositum, operarij 25, intra 6, dies absolvunt fossam longam 100 passus, quàm longam absolverent operarij 30, spatio 8, dierum.

Ex duobus primis numeris fac unum numerum per multiplicationem 25, operarij intra 6 dies, multiplica 25. per 6, ut habeas laborem diurnum 150. operariorum, idem præsta in correspondentibus; & totam regulam ad tres terminos revocaveris hoc modo.

Si 150 operæ diurnæ, dant fossam longam 100 passus, operæ 240, quàm longam efficient invenies 160 passus, vel hoc modo partire operationem.

Si operarij 25 dant passus 100, operarij 30 dabunt passus 120, si nempe idem sit numerus dierum 6, ideoque rursus dicendum est.

Si 6. dies, dant passus 120, quid dabunt dies 8. & invenio 160.

Demonstrationem hîc apponere supervacaneum puto cum rem ita se habere sit satis notum per se.

Potest fieri ut in diversis hujus regulæ exemplis, inveniantur variæ difficultates, ideò volui varia hic apponere exempla. Sit igitur istud primum 20. aurei, spatio trium annorum dant lucrum 8 aureorum, 30 aurei spatio 4 annorum quod lucrum dabunt. Utroque modo solvi potest quæstio. 1. si multiplices 20 aureos, per tres annos fiantque 60 aurei annui; pariter multiplices 30 aureos per 4 annos fiantque 120

aurei

aurei annui; hoc modo regulam instituo; 60 dant 8, 120 dabunt 16. vel hoc modo.

20 Aurei dant 8 aureos; quid dabunt 30 aurei, si eodem tempore nempe per 3 annos referant lucrum, inveniesque 12. Denuo dices; si 3 anni dant 12 quid dabunt 4 & invenies 16.

Aliquando autem in una ex his regulis proportionum, opus est Inversa regula trium, Ut aurei 4000 militibus 300, debentur in stipendium mensibus 4. quæritur quot mensium stipendium sint nummi 6000, militibus 200.

Si dicas aurei 4000 dant stipendium militibus 300, aurei 6000 quot militibus dabunt stipendium, si militent eodem tempore nempe 4 mensibus, invenioque milites 450. Unde rursus dico.

Si summa 6000 sufficit stipendio 4 mensium pro 450 quot mensium stipendium erit pro militibus 200. In quo vides, quò plures erunt milites eò mensibus paucioribus sufficiet, ideoque eversa regulâ trium opus est, nempe ut multiplices 450 per 4. faciasque numerum stipendiorum menstruorum, quæ divides per 200, inveniesque 9 menses.

Alio item modo poterat solvi quæstio; Si enim multiplices 300 milites per 4 menses habebis menstruorum stipendiorum numerum, quæ in 4000 aureis inveniuntur; Unde per regulam auream, dices si 4000 aurei dant 1200, quot dabunt 6000, habebisque 1800. Quem numerum si dividas per 200 milites; provenient 9 menses.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Regula societatis, seu datum numerum secare in partes, quæ datam servent proportionem.

Sint tres quorum primus contulerit aureos 6, alius 10, alius 12. Peractâ autem negotiatione invenitur lucrum aureorum 60. quæritur quantùm debeat quilibet accipere, seu dividendus est numerus 60; in tres partes quæ ita se habeant ut 6. 10. 12. nam quilibet debet habere lucrum secundùm proportionem sortis: ita ut se habeat lucrum ad lucrum; sicut se habet, sors ad sortem.

Addantur simul illi numeri, secundùm quotum proportionem dividendus est numerus 60; nempe sortes seu 6. 10. 12. fientque 28.

Fiat triplex

6.	28.	6.	60.	A.	12.	24.	regula aurea.
						—	In prima di-
10.	28.					28.	catur ut 28,
12						—	ad 6, ita 60
						12.	ad A. In se-
—	28.	10.		B.	21.	—	cunda ut 28
28.						28.	ad 10, ita 60
						20.	ad B, ut 28
						—	ad 12. ita 60
28.	12.	60.		C.	25.	28.	ad C, dico

A, B, C esse partes numeri 60. eandem habentes rationem quam habent 6. 10. 12. & adæquantes ipsum 60. Cùm enim sit ut 28 ad 6, ita 60 ad A, erit invertendo ut 6 ad 28, ita A ad 60. Quia igitur est ut 6 ad 28, & 28 ad 10, ita A ad 60, & 60 ad B erit ex æquo ordinatè ut 6 ad 10, ita A ad B. Ostendam pariter ita se habere 10 ad 12, sicut B ad C; jam ostendere debeo A, B, C simul adæquare numerum 60. Cum numeri 6. 10. 12. & A, B, C sint proportionales (*per 12.5. Euclidis*) erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes, ut 6 ad A; sed ut 6 ad A, ita 28 ad 60. (*ex constructione*): igitur ita 6. 10. 12 simul ad A, B, C simul, ut 28 ad 60; & alternando ut 6. 10. 12. simul ad 28. ita A, B, C, ad 60; sed 6. 10. 12 sunt æquales ipsi 28. (*ex constructione*; cum sit facta eorum summa; ergo & A, B, C æquales sunt ipsi 60. quod erat demonstrandum.

Quod si numeris principalibus adhæreant alij numeri minùs principales, multiplicandi sunt numeri principales per minùs principales, cætera ut in præcedenti regulâ fiant. Res in exemplis clara erit; Aliquando accidit ut non tantùm unius rei habenda sit ratio, sed duarum, verbi gratiâ. Sint iidem qui easdem sortes in communem societatem contulerint, sed diversum sit tempus; ut qui 6 nummos contulit, eos reliquerit in communi societate per 6. menses, alius qui 10 per 8 menses, qui 12 per 4 menses, multiplica 6 nummos per 6 menses, eruntque 36 nummi menstrui, pariter 10 per 8 fient octoginta nummi menstrui; denique 12 per 4 menses, fientque 48. dividendum erit lucrum in partes quæ habeant rationem, quam habent illi tres numeri 36. 80. 48.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Notanda pro Regulâ societatis.

Primò eandem praxin observari pro damno ac pro lucro, hoc est, quòd lucrum uniuscujusque societatis se habere debet ad lucrum alterius, sicut se habent summæ collatæ.

Unus contulit merces nummis.	2 0 0.
Secundus contulit.	4 0 0.
Tertius.	6 0 0.
Quartus.	8 0 0.

Pensatis autem omnibus exurgit summa 2000.

Damnum nummorum 400. Quantum damnum quisque pati debeat.

Fiat ut 2000 ad 400. ita	2 0 0.	ad	4 0.
	4 0 0.	ad	8 0.
	6 0 0.	ad	1 2 0.
	8 0 0.	ad	1 6 0.
	2 0 0 0.		4 0 0.

Examen hujus regulæ erit si addantur omnia damna simul, fiatque summa æqualis damno proposito.

Societas mercatorum emit 2000. ulnas alicujus panni, nummis 500. fiat ut 2000 ad 500.

Primus accipit	200. ad 50.
Secundus	300. ad 75.
Tertius	400. ad 100.
Quartus	500. ad 125.
Quintus	600. ad 150.
	500.

Quæritur quantum quisque solvere debeat, Fiat ut 2000 ad 500. ita 200 ad 50. ita 300 ad 75. ita 400 ad 100. &c.

Aliis innumeris exemplis accommodari potest regula societatis, neque enim solis mercatoribus convenit; nam in regula societatis partimur, lucrum, damnum, pretium, in partes quæ datam rationem habeant, ideoque in aliis quam plurimis rebus usurpari potest.

Ut si proponantur 7 Pistrina, quorum primum singulis diebus sextarium molere possit, secundum duos, tertium tres, quartum quatuor, quintum quinque, sextum sex, septimum septem; quidam habet sextarios 600. quos his septem pistrinis distribuere debet, ut eodem tempore suum opus perficiant. Clarum autem est quod quando primum unum habebit, secundum debeat habere duos, tertium tres, ideoque fiat summa competens.

Nempe 28. & dicas 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.

Summa 28.

Ut 28. ad 600. ita

Ut 28. ad 600. ita

1. ad	$21\frac{3}{7}$
2. ad	$42\frac{6}{7}$
3.	$64\frac{2}{7}$
4.	$85\frac{5}{7}$
5.	$107\frac{1}{7}$
6.	$128\frac{4}{7}$
7.	150.
	600.

Exempla societatis diversorum temporum.

Mercatores quatuor lucrati sunt francos 240.
Primusque dedit 60 nummos pro 4 mensibus.
Secundus 120 nummos pro 5 mensibus.
Tertius 180 nummos pro 6 mensibus.
Quartus 180 nummos pro 7 mensibus.

Quæritur quantum lucrum quisque habere debeat, Multiplica nummos per menses ut habeas nummos menstruos.

Primus 240. nummos menstruos.
Secundus 600.
Tertius 1080.
Quartus 1260.

Summa 3180.

Fiat ut 3180.
Ad 240.

	240. ad	$18.\frac{36}{3180}$
ita	600 ad	$9.\frac{82}{3180}$
	1080.	$50.\frac{200}{3180}$
	1260.	$98.\frac{760}{3180}$

Sunt 20. duces, & 24. vexilliferi, quibus ita distribuendi sunt 2752 nummi: ut dum dux habet 10 nummos, vexillifer habeat 6 nummos, quæritur quantum quilibet habere debeat; multiplica numerum ducum, seu 20 per nummos quos accipere debent, nempe per 10 fiunt 200. multiplica numerum vexilliferorum seu 24. per nummos quos quilibet accipere debet, fiuntque 144. adde illas summas 200 & 144. fiunt 344. dic ergo ut 344. ad 2752. ita 10 ad 80.
ita 6. ad 48.

Habebitur quid competat unicuique duci nempe 80 nummi, quid unicuique vexillifero nempe 48.

Sicut ex sortibus deducimus lucra, ita nonnunquam ex lucris sortes concludimus.

Tres mercatores societarij, lucrantur mille nummos.
Primus posuerat 300 nummos decem mensibus.
Secundus posuit nummos 700. Ignoratur tempus.
Tertius 800. cujus etiam tempus ignoratur.
Primus habuit lucrum nummorum 500.

Secundus 300. tertius 200. quæritur tempus quo sors secundi, & tertij in societate remanserunt, multiplica sortem primi nempe 300 per 10 menses, fiunt nummi menstrui 3000. tum ita dices; si lucrum 500 nummorum, provenit ex sorte 3000. lucrum secundi nempe 300. proveniet à 1800. quæ si dividatur per sortem ejusdem, nempe 700. exurgent menses duo $\frac{4}{7}$ Eôdem modo habebis tempus tertij, esse mensem cum dimidio.

Tres mercatores in societatem contulerunt nummos 1420. lucrum fuit nummorum 190. primus habuit lucrum 120. secundus 40. primò quæritur lucrum tertij, quod fit subtrahendo 120. & 40. ex 190. restat 30. sors unius cujusque habebitur si fiat ut lucrum totale 190 ad sortem communem 1520 ita lucrum unicujusque ad suam sortem.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Regula alligationis.

Per alligationem intelligimus, definitionem pretij alicujus medij inter res diversi pretij permixtas

mixtas inter se, quæ quidem diversimodè inter se permisceri possunt. Nam potest esse permixtio ut tantumdem ex utraque ponatur, vel plus unius quàm alterius.

Proponatur famosissimum illud exemplum Archimedicum, in quo aurifex coronam Hieronis regis adulteravit. Ponatur aurifex recepisse à rege 15 libras auri purissimi, cujus pretium erat 24. & admiscuisse 5 libras, cujus pretium esset tantum 8: Quæritur cujus valoris sit quælibet libra hujus auri mixti. Multiplicentur singulæ materiæ per suum pretium. Hoc est 15 per 24 & 5 per 8. habebisque pretium 15 librarum esse 560. & 5 librarum esse 8. Hæc pretia simul adde: fient 400. pretium nempe tam 15. librarum, quàm 5. quod pretium si dividas per 20. habebis pro quotiente 20. pretium unius libræ ita mixtæ.

24.	8.
15.	5.
360.	40.
adde	40.
400.	
20.	divide
20.	

Hic puto alia opus non esse demonstratione. Cum enim 400 sit pretium totius massæ 20 librarum si dividatur tale pretium per 20. habebitur pretium unius libræ.

In aliis exemplis manifestior fiet tota regula: Sint duo vini genera, quorum aliquæ mensuræ permiscentur; quæritur commune pretium, nempe pretium unius mensuræ vini,

Mensuræ.	3.	pret.	4.	assium.	12.
Mensuræ.	5		3.	assium.	15.
Summa	8.	commune.			
Mensurarum.		pretium.			27.

$3.\frac{3}{8}.$

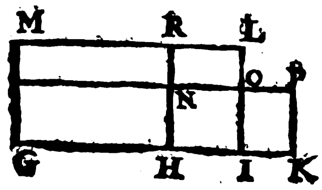
ita permixti. Sint igitur mensuræ 3 vini cujus mensura valeat 4 asses, & quinque mensuræ vini cujus pretium sit 3 assium, Multiplica utrobique mensuras per suum pretium exurget 12. & 15. quæ simul adde ut fiat 27. pretium totius illius vini. Quod si dividas per summam mensurarum, clarum est, quòd $3\frac{3}{8}$ erit pretium cujuslibet mensuræ.

Neque est major difficultas in miscendis pluribus, quàm duabus materiis.

Alia pars ejusdem regulæ est, dato pretio aliquo medio, ita duas aut tres materias miscere, ut eo pretio vendi debeant. Sint duæ species vini A quarum una vendatur 7 assibus, alia duobus, debent autem sic misceri viginti mensuræ, ut sic mixtarum quælibet valeat 4. asses. Sit numerus E 3. differentia inter majus pretium, & mediocre; item D differentia inter minus, & mediocre, primò si tot mensuras melioris vini sumas quot sunt unitates in D, & tot mensuras, infimi quot sunt unitates in E, easque misceas erit pretium cujuslibet æquale ipsi B. Hoc est si D & E simul addantur fiantque F, quod F in A, productum fit æquale. Duobus simul productis D in A, & E in C, seu quod 5 mensuræ

A.	7.	D.	2.
B.	4.	F.	5.
C.	2.	E.	3.

pretij medij B tantum valeant quantum valent 2. D pretij A, & 3. E, infimi pretij C.



Demonstratio. Sit pretium A representatum lineâ GK, pretium medium B, representatum lineâ GI, & infimum C, representatum linea G H, sitque HK aggregatum, ex differentiis GI, IK, seu numerus F. Sitque rectangulum GL comprehensum sub GI & G M æquale ipsi H K, hoc est F, multiplicet ipsum B, sitque IO æqualis ipsi HI. Dico quod rectangulũ G L, æquale sit, rectangulis GP, & MN quorum GP comprehenditur sub maximâ lineâ G K, & linea PK, seu I O aut HI differentiâ minoris à mediocri (hoc est si D multiplicet A) rectangulum autem MN comprehenditur sub MR, hoc est; GH & NR, quæ est æqualis ipsi IK. (Nam HK & H R sunt factæ æquales, item HI & HN. Ergo & reliquæ NR & IK.) quod rectangulum repræsentat numerum productum ex multiplicatione C per E. Nam rectangula IP, NL sunt æqualia; Ostendimus enim I K & N R esse æquales; item IO & NO. Quare additis rectangulis GO, & MN, fiet rectangulum GL, æquale rectangulis GP, MN; seu quod idem est, si F multiplicet B, eundem producet, ac si D multiplicet A & E multiplicet C. Ergo benè hoc modo mixtum vinum erit pretij medij, sed loco quinque requiruntur 20 mensuræ, Fac igitur ut F 5. ad D 2. ita 20. ad 4, provenient 8. mensuræ vini A, & 12. vini C quod ultimum per se patet.

Si verò tres, aut 4. materiæ diversi pretij ita sint miscendæ in certâ mensurâ, ut quælibet sit medij alicujus pretij, duas quaslibet alligabis modo tradito, & iterum unam illarum cum aliâ, & ita deinceps.

		A.	20.	E. 2.	G. 6.
D.	18.	B.	16.	F. 2.	
		C.	12.	H. 2.	

Proponatur exemplum vas aureum conflandum est, ex tribus auri generibus quorum unum sit pretij 20. secundum pretij 16. tertium pretij 12. debeat autem esse medij alicujus pretij nempe 18. & pendere libras 14.

Alligabis primò ut traditum est duo auri genera A & B, inveniesque utriusque libras duas, alliga deinde A & C. quia 18. inter utrumque invenitur: inveniesque esse ponendas adhuc libras 6 auri A, & duas auri C. Dico ergo, si misceas 8. libras auri A, duas auri B, & totidem auri C. fiet materia totalis cujus singulæ libræ erunt pretij 18.

Demonstratio. In prima alligatione A cum B, certum est fieri materiam constantem 4. libris, cujus singulæ libræ sint pretij 18. pariter in secunda alligatione fit materia 8. librarum cujus singulæ mensuræ etiam sunt pretij 18. sed dum materia, materiâ ejusdem pretij, totum quod exurgit est etiam ejusdem speciei pretij; ergo si misceantur 8 libræ auri A, cum duabus auri B, & duabus auri C, fiet totum 12 librarum, cujus quælibet est pretij 18. sed loco 12 librarum requiruntur 14. Adhibeatur ergo regula societatis. Si 12 libræ exigunt 8 ex auro A; quot requirunt 14, invenies que esse adhibendas $9\frac{1}{3}$, & ita de reliquis.

Quod diximus de pretio, intelligi potest de quolibet alio effectu, quod per modum pretij intelligemus. Ut si ponderemus aquam quam expellent ex vase pleno diversa metalla, alligabimus ea in unam massam, tanti ponderis, ita ut quælibet illius massæ libra tantam determinatè aquam expellat; idem dicendum est de pondere quod metallum amittit dum aquæ immergitur: ita de aliis effectibus hujusmodi, qui loco pretij ponantur.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Ex falso ad arbitrium assumpto eruere verum.

Hæc est regula quam communiter vocant falsi, & quæ algebræ occasionem dedit, in qua quidem aliquid assumitur, tanquam verum; ex quo deinde eruitur numerus ille, qui quæritur. Tribus præceptis tota regula absolvitur. Primum est ut eum numerum ponas pro quæsito, qui tibi videbitur aptus. Secundum, ut examines an verè ille sit qui quæritur. Tertium ut adhibeas regulam proportionis, seu regulam societatis. In exemplo res clara erit. Sit numerus 100, dividendus in tres partes quarum prima sit tripla secundæ, secunda dupla tertiæ. Supponatur illa minima pars esse 2. (Incipio autem potiùs à minimâ, quàm ab aliis ad vitandas fractiones, quæ semper quantum fieri potest vitandæ sunt.) Secunda erit 6. Tertia erit 12.

Secundum præceptum vide an illæ tres partes 2. 6. 12. efficiant 100. Si enim efficerent 100 solutum esset problema; hoc autem experiri potes illas addendo. Per additionem earum exurgunt tantum 20.

Tertium præceptum fiat regula societatis. Hoc modo si 20 dat 2 pro primâ parte, quid dabunt 100, invenioque 10. Dico peractum esse problema. Nempe 100. dividi in 10. 30. 60. quarum partium 60 est dupla 30. & 30 est tripla ipsius 10.

Demonstratio. Primò partes 2. 6. 12. assumptæ sunt quæ habeant eam conditionem, quam exigit problema. Secundò per additionem eæ sunt inventæ æquales numero 20. Tertiò per regulam trium factum est, ut 20 ad 2. ita 100 ad 10. & ita de reliquis. Ergo ut 20 ad 2. 6. 12. simul ita 100 ad 10. 30. 60 simul, sed 20. æqualis est partibus 2. 6. 12. Ita etiam 100. ipsis 10. 30. 60. simul erit æqualis.

Proponatur aliud. Sit leo lapideus, qui si ex oculis aquam profundat intra 10 horas, subjectum receptaculum implet; si ex auribus intra 5 horas; si ore intra 20 horas; intra quot horas implebit, si aquam profundat simul oculis, auribus, & ore. Supponamus intra horam, aut potiùs per horam, aquam ex omnibus partibus profluere. Igitur replebit ore unam partem vigesimam, auribus unam quintam, & oculis decimam, quæ ut ad eumdem denominatorem reducantur, una quinta æquatur duabus decimis, seu 4 vigesimis, una decima duabus vigesimis. Sunt igitur $\frac{4}{20}\ \frac{2}{20}\ \frac{1}{20}$ quæ simul addantur faciunt $\frac{7}{20}$.

Sed debuerant esse $\frac{20}{20}$ ut tota cupa impleretur. Quare instituatur regula trium. Si 7 nempe vigesimæ dant horam, seu 60 minuta, quid dabunt 20. Exurgentque horæ duæ cum minutis 51.

Alia exempla hujusmodi fieri possunt. Aliquis pecuniæ seu summæ quam habebat partem dimidiam in ludo perdidit. Quartam egenis erogavit, quæ ipsi reliqua est sunt nummi 10. quæritur quid habuerit.

Vel aliud pecuniæ suæ mediam partem ludo amisit, reliqui quartam partem dedit egenis, residuos habet 10 nummos.

Ad demonstrationem hujus propositionis debent assumi aliqua, quæ ne non demonstrata remaneant, nonnulla præmittam lemmata.

LEMMA I.

Si tres numeri aliis tribus proportionales fuerint, eorum differentiæ proportionales erunt.

A.	B.	C.	G.	H.
6.	4.	3.	2.	1.
D.	E.	F.	L.	K.
12.	8.	6.	4.	2.

Sint tres numeri A, B, C, tribus D, E, F proportionales, sitque differentia inter A & B, numerus G. Nempe excessus quo A superat B, pariter H sit excessus quo B superat C. L sit differentia inter D & E. Et K differentia, inter E F; dico ita esse G ad H, sicut L ad K.

Demonstr. Quia ita est A ad B sicut D ad E: erit permutando ut A ad D; ita B ad E; supponatur auferri B ab A, reliquum erit G; sicut si auferatur E ex D relinquitur L; Quia ergo ita est totum A ad totum D sicut ablatum B ad ablatum E; ita erit (*per* 15.5.) reliquum G ad reliquum L, ut totum A ad totum D, vel etiam ut ablatum B ad ablatum E; Ita ostendam esse H ad K ut C ad F: igitur ita erit G ad L sicut H ad K, nempe ut B ad E; ergo & permutando erit G ad H, ut L ad K. Quod erat demonstrandum.

LEMMA II.

Si duobus numeris idem numerus addatur, aut ab illis idem numerus auferatur, differentiæ summarum aut residuorum eadem erunt quæ priorum numerorum.

Sint numeri A & B, quorum differentia sit C; illis autem addatur numerus D, ita ut fiant numeri E & F; dico eorum eamdem esse differentiam G. Item si à numeris A & B idem numerus D subtrahatur; ita ut restent numeri H & K; dico illorum eandem esse differentiam L.

A. 8. B. 6. C. 2.
D. 4.
E. 12. F. 10. G. 6.
H. 4. K. 2. L. 2.

Demonstratio. Numerus E, continens numeros D & A; continet numerum B, & insuper excessum numerum A, supra numerum B. Nempe C, numerus autem F continet numeros B & D; ergo numerus E superat tantùm numerum F numero C

Idem

Idem ostendere possumus in numeris H & K quibus si addas eundem numerum D fiunt numeri A & B.

LEMMA III.

Si numeri tres, per eundem multiplicentur, aut per eundem dividantur; productorum differentiæ, erunt proportionales differentiis numerorum.

A. 4. B. 6. C. 8. E. 2. F. 4.
D. 2.
G. 8. H. 12. K. 16. L. 4. M. 8.
N. 2. O. 3. P. 4. R. 1. S. 2.

Sint tres numeri A, B, C, ita ut differentia inter A & B sit E, differentia inter A & C sit F; multiplicentur tres numeri A, B, C, per numerum D, fiantque tres numeri G, H, K, ita ut differentia inter G & H sit L & inter G, & K, sit M; dico ita esse E ad F; sicut L ad M.

Demonstratio. Cum numerus idem D, multiplicat A, B & C, fiunt tres numeri G, H, K, æquemultiplices ipsorum A, B, C: ergo & proportionales (*per 15. 5.*) ergo (*per primum Lemma*) differentiæ eorum proportionales erunt.

Pariter dum idem numerus D dividit numeros A, B, C. quotientes N, O, P, sunt numerorum A, B, C, eædem partes aliquotæ; ergo & (*per eandem 15.*) proportionales erunt; ergo (*per primum Lemma*) differentiæ eorum proportionales erunt.

COROLLARIUM.

Ex hoc sequitur quòd errores positionum, eamdem habeant rationem, ac errores numerorum ex ipsis positionibus genitorum, voco errorem positionis falsæ, differentiam inter numerum falsum assumptum, & numerum qui assumi debuerat; errorem autem genitorum, differentiam numerorum, qui ex talibus positionibus oriuntur, ab eo qui oriri debuerat. Ratio autem est quia in omni operatione quatuor tantùm, interveniunt regulæ, nempe additio, subtractio, divisio, multiplicatio. Hoc est vel idem numerus in utráque positione additur, vel subtrahitur ab ipsis positionibus, vel per eundem numerum multiplicantur positiones. Primæ regulæ nempe additio, & subtractio, easdem relinquunt differentias, multiplicatio, & divisio faciunt differentias proportionales; ergo semper differentiæ genitorum proportionales erunt differentiis positionum, sed hoc meliùs intelligetur ex sequentibus.

LEMMA IV.

Si quatuor numeri, arithmeticè proportionales fuerint, aggregatum ex primo, & ultimo; æquale erit aggregato ex duobus mediis, & vicissim. Si aggregatum ex duobus mediis æquale fuerit Aggregato ex primo, & ultimo; illi quatuor numeri arithmeticè proportionales erunt. Voco arithmeticè proportionales numeros qui ita se habent ut primus superet secundum, aut ab eo superetur eodem prorsus excessu, quò tertius superat quartum, aut ab eo superatur.

A. 4. B. 6. C. 10. D. 12.
E. 4. G. 10.
F. 2. H. 2.

Sint 4. numeri A, B, C, D, arithmeticè proportionales, hoc est B eodem excessu superet A, quò D superat C; dico A & D simul æquales esse B & C simul.

Demonstratio. B dividatur in E, ipsi A æqualem, & excessum F, ita ut E, F sint ipsi B æquales; pariter D dividatur in G ipsi C æqualem, & H excessum, ita ut F, & H sint æquales ipsi D; si numero A, ex unâ parte; & numero E ex aliâ addas ipsi A numerum G, & numero E ipsum C; fient A & G ipsis E & C æquales. Addantur deinde ipsi A & G excessus H, ipsis autem E, & C excessus B, F fient A, & G, H, seu A & D; ipsis E, F, seu B & C æquales; quod erat demonstrandum.

E conversò si A & D sint æquales, ipsis B & C; dico illos numeros A, B, C, D esse arithmeticè proportionales. Sit enim pariter excessus ipsius B, supra A, numerus F, & excessus numeri D, supra C, numerus H; dico F & H esse æquales. Cùm enim additis A & C, ex unâ parte, & ex aliâ E & C fit æqualitas. Si F & H essent inæquales, addit ex unâ parte F & ex aliâ ipso H, fierent A, G, H, seu A, D inæquales ipsis E, F, C, seu ipsi B, C contra suppositionem.

LEMMA V.

Si duo numeri eundem multiplicent, & productus minor, à majori subtrahatur, relinquitur numerus æqualis producto, multiplicatione, ejusdem numeri, per differentiam multiplicantium.

A. 4. K. 3.
B. 3. C. 5. G. 2.
E. 12. F. 20.
H. 8. L. 12. M. 8.

Sit numerus A, multiplicatus per B & C; ita ut fiant numeri E & F subtrahatur E minor, à majori F: ita ut relinquatur H; differentia autem inter B & C, sit G dico numerum H, æqualem esse producto ex G in A; intelligatur numerus C dividi in K ipsi B æqualem & differentiam G.

Demonstratio. Numerus A multiplicans K & G; producat L & M; L & M æquales erunt ipsi F producto ex A in C; (*per primam 2. Euclid.*) sed E & H æquales sunt ipsi F. Cùm subtracto E ab F relinquatur H; igitur E & H æquales sunt ipsis L & M, sed E, æqualis est; ipsi L. Cùm B & K sint æquales: ergo H & M æquales sunt, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Ex duobus suppositis falsis verum eruere.

Sit

A. 100. B. 60.

R. 2880. G. 48. H. 36. S. 2880.

K. 720. C. 12. D. 24. L. 1920.

Minus X Minus

E. 80. F. 60.

M. 1200.

N. 20. P. 60.

Sit numerus A dividendus, ita ut prima pars sit dupla secundæ, hæc tripla tertiæ; quæritur prima illa pars, quæ licèt sit B 60, incognita tamen supponitur.

Sit prima positio C, hoc est assumam illum numerum, seu primam partem esse C 12 quam examino. Illius media pars est 6, & tertia pars ipsius 6 est 2; jam 12. 6. 2. efficiunt 20, cum tamen efficere deberent 100; igitur genitus deficit à vero numero E 80.

Sit alia positio D, quæ si examinetur tota operatio producetur 40 cum 100 produci debuisset. Igitur error est numerus F 60; est autem utrobique defectus, quod notandum est.

Multiplica decussatim errores genitorum nempe E, & F, per ipsas positiones C & D ita ut fiant numeri K & L; subduc minorem K à majori L, quia errores sunt similes; nempe uterque per defectum (nam si essent diversi generis, nempe unus error per defectum, alius per excessum addendi essent & relinquitur M) pariter subduc errorem F ex errore E relinquitur N, dico si dividas numerum M per N quotientem P esse veram positionem seu esse primam illam partem, numeri A.

Demonstratio. Sint G & H licèt ignorentur errores positionum, seu differentiæ positionum assumptarum, à numero B qui assumi debuerat (*Ex corollario 3. Lemmatis*) erunt isti errores positionum nempe G & H, proportionales erroribus genitorum nempe ipsis E & F, hoc est G ad H; ita E ad F. (*Ergo per 19 hujus*) Idem numerus producetur si primus G multiplicet quartum F, qui producitur ex multiplicatione secundi H per tertium E, hic numerus sit 2880, qui scribatur bis, nempe in R & S, quia numeri G, C sunt æquales numero B, & numerus F multiplicando utrumque facit R & K (*per primam 2. Euclid.*) numeri R & K simul æquales sunt, illi qui producere-tur, ex multiplicatione numeri B per F. Pariter

A. 100. B. 60.

R. 2880. G. 48. H. 36. S. 2880.

K. 720. C. 12. D. 24. L. 1920.

Minus X Minus

Err. gen. E. 80. F. 60.

M. 1200.

N. 20. P. 60.

S & L simul æquales sunt illi qui fieret ex multiplicatione B, per E. Quare si subtrahantur R, K, ex S, L, idem fiet, ac si productus ex B per F; subtraheretur, à producto ex B per E; sed si subtrahantur, R, K, ex S, L, cum R & S; sint æquales, idem relinquitur, ac si subtraheretur K ab L, nempe relinquitur M; cum igitur duo numeri E & F multiplicando eundem B, fecerint duos, quorum unus ab alio subtrahitur, id quod relinquitur nempe M, (*per 5. Lemma*) est æquale producto, ex multiplicatione numeri B; per differentiam numerorum E & F; nempe N; ergo divisione numeri M, per N; idem numerus B restituitur quod erat demonstrandum.

Probatus est primus casus in quo utrobique

A. 100. B. 60.

R. 1206. G. 6. H. 12. S. 120.

K. 1320. C. 66. D. 72. L. 720.

Plus X Plus

Err. gen. E. 10. F. 20.

M. 600.

N. 10.

P. 60.

peccatum fuerat per defectum: nunc probandus est casus ille, in quo in utràque positione peccatum est per excessum.

Ponatur ergo Prima positio esse C 66. & examine facto, loco 100, invenitur 110, igitur est error E 10 per excessum.

Ponatur secunda positio esse D, & examine facto, invenitur produci 120, cum 100 tantùm produci debuerant; est ergo error F 20. per excessum.

Multiplica decussatim errores E & F per ipsas positiones C, D, fiantque K & L, subduc minorem ex majori nempe L ex K, ita ut reliquus sit M; sitque N differentia inter errores E & F, divide M per N; sitque quotiens P, dico P esse æqualem, numero B ignoto.

Demonstr. Sint G & H licèt ignorentur errores positionum nempe G, quantùm C superat B & pariter H excessus ipsius D supra B, erunt (*per coroll. Lemmatis tertij,*) Errores positionum nempe G & H erroribus genitorum nempe ipsis E & F proportionales; hoc est ut G ad E; ita H ad F; ergo (*per 19. hujus*) productus ex G primo, in F quartum, æqualis est producto ex H secundo, in E tertium. Sit ille numerus 120 scribendus in R & S; quia numerus C continet numerum B, & insuper numerum G; si per eundem numerum F multiplicetur C & B, (*per 5. Lemma*) & subtrahatur productus ex F in B, ex producto ex F in C, relinquetur R, productus ex F in differentiam G hoc est numerus K æqualis est numero R, & producto ex F, in B; pariter numerus L productus ex E in D, æqualis est numero S, producto ex E in H, & producto ex ex E, in B, quare si subtrahatur L, ex K, idem numerus M relinquetur, ac si S productus ex E, in B; subtraheretur ex R, & ex producto ex F in B & quia R & S sunt æquales, idem fit ac, si productus ex E in B, subtraheretur ex producto ex F, in B, quare (*per 5. lemma*) numerus M est æqualis producto, ex B in differentiam numerorum E & F, quæ est N; quare si M dividitur per N quotiens erit numerus æqualis ipsi B; quod erat demonstrandum.

A. 1 0 0. B. 6 0.

R. 4 8 0. G. 4 8. H 6. S. 4 8 0.

K. 1 2 0. C. 1 2. D. 6 6. L. 5 8 0.

Minus X Plus

Err. Gen. E. 8 0. F. 1 0.

N. 9 0. M. 4 5 0 0.

P. 6 0.

Restat ultimus casus in quo erratur in una positione per defectum; in alia per excessum; sit idem numerus A, dividendus in tres partes, quorum prima sit dupla secundæ, & secunda tripla tertiæ, sitque illa prima pars numerus B ignoratus. Prima positio sit C & examine facto generetur numerus 20, cum tamen numerus 100 produci debuisset; est ergo 80 error producti, per defectum; sit secunda positio 66 examine facto invenitur 110, pro ipso 100; est ergo 10 error producti excedens.

Multiplica alternatim positiones C & D, per errores genitorum E & F; producaturque K & L, adde minorem K majori L quia errores sunt diversi generis; fiatque M, adde pariter errores E & F fiatque N, divide M per N, sitque quotiens P; dico numerum P æqualem esse numero B.

Demonstratio. Sint G & H errores positionum hoc est sit G, excessus quò B superat ipsum C; seu sint C & G ipsi B æquales, & H sit excessus quò B superat C, hoc est sint B, H, ipsi D æquales, erunt autem isti errores positionum, erroribus genitorum proportionales, (*per coroll. 31. lemmatis*) hoc est ita erit G ad E; sicut H ad F & consequenter (*per 19. huius*) erit genitus, ex multiplicatione primi G, per quartum F, æqualis genito ex H in E; sit illud 480 qui scribatur in R & S; cum autem C & G æquentur ipsi B & F multiplicando ipsos C & G fecerit R, K; erunt R, K, simul æquales producto ex F, in B. Quia autem D major est, quàm B; ita ut B & H sint æquales numero D; si intelligatur E multiplicare D, H, B; numerus L ortus, ex multiplicatione D per E, continebit ortum ex multiplicatione ipsius B & per E & H, per E quare numeri K, L, additi æquales sunt producto ex B per E; & producto ex B, per F seu producto ex B per E, F (*per primam secundi Euclid.*) igitur si addantur K & L fiatque M, addantur item E, F fiatque N, dividatur M per N quotiens erit æqualis numero B quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

Alius modus regulæ falsi duplicis positionis.

A. 1 0 0. B. 6 0.
H. 4 8. K. 3 6.
C. 1 2. L. 1 2. D. 24.

Minus X Minus

E. 8 0. F. 6 0.
G. 2 0.
6. 2 0. L. 1 2. E. 8 0. M. 4 8.
6. 2 0. L. 1 2. F. 6 0. N. 3 6.

Alius tradi potest modus inveniendi verum ex duobus falsis; in quo quidem multa sunt similia; primò quidem ponuntur duæ positiones ad libitum, examinantur, & notantur errores genitorum notis consuetis plùs, minùs.

Sit idem exemplum numerus nempe A dividendus in tres partes, quarum prima sit dupla secundæ. Secunda tripla tertiæ, supponatur illa prima pars, numeri A quæ est B, sed ignoratur; esse C factòque examine invenitur, produci tantùm 20, cum produci debuisset 100, sit error geniti E; pariter alia positio sit 24, & error F, differentia errorum genitorum sit G; errores positionum sint H & K; ignoti quidem, si enim cognoscatur error verbi gratiâ H, ille additus numero C, daret numerum B. Sit duarum positionum differentia L, quæratur tribus numeris G, L, & uni ex erroribus genitorum verbi gratia E, quartus numerus proportionalis M; hunc dico esse æqualem errori H; positionis C, ex qua natus est error geniti E, vel si assumptus fuisset pro tertio numero error geniti F quartus esset error K; quare si hic error positionis addatur in hoc casu in quo erratum est per defectum suæ positionis, habebitur numerus B quæsitus.

Demonstratio. (*Per coroll. lemmatis 3.*) duo errores genitorum nempe E, F proportionales sunt duobus erroribus positionum nempe H, K. Secundò quia error H, & positio C, eundem numerum faciunt nempe B; quem faciunt D & error K; quatuor numeri H, K, D, C arithmeticè proportionales sunt (*per lemma quartum*) ergo erit eadem differentia priorum, & posteriorum; ergo L, quæ est differentia positionum C D; est etiam differentia errorum H, K quia ita est E ad F, sicut H ad K, & excessus E, supra F est, G, sicut excessus H, supra K, est L; per conversionem rationis ita erit E, ad excessum G; sicut H ad L. Et convertendo sicut G ad F, ita L ad H, sed ita factus est L ad M ergo M & H æquales sunt. Pariter quia est ut E ad F; ita H ad K; & excessus E, supra F est G; sicut excessus H, supra K est L, erit ut F ad G; ita K ad L; ergo & convertendo, ut G ad F; ita L ad K: sed ita erat L ad N; igitur N & K æquales sunt: ergo addendo N ipsi errori D, habebitur numerus B; quod erat faciendum.

Si peccatum foret per excessum utrobique; ita etiam ratiocinaremur, suppositis omnibus

A. 1 0 0. B. 6 0.
H. 6. K. 1 2.
L. 6.
C. 6 6. D. 7 2.

Plus Plus

E. 1 0. F. 2 0.
G. 1 0.
G. 1 0. L. 6. E. 1 0. M. 6.
G. 1 0. L. 6. F. 2 0. N. 1 2.

iisdem erroribus E, F, & erroribus H, K, proportionalibus, secundò quia auferendo eundem numerum B ex positionibus C, D, restant errores H & K, (*per lemma secundum*) erit eadem differentia priorum, & posteriorum; nempe L, eadem valet regula trium quæ priùs nisi quod numeri M & N æquales erroribus auferendi sunt à positionibus.

A. 1 0 0. B. 6 0.
H. 4 8. K. 6.
L. 5 4.
C. 1 2. D. 6 6.

Minus Plus

E. 8 0. F. 1 0.
G. 9 0.
G. 9 0. E. 8 0. L. 5 4. M. 4 8.
G. 9 0. F. 2 0. L. 5 4. N. 6.

Si denique in una positione erratum sit, per defectum, in alia per excessum, pariter errores E, F, erroribus H, K proportionales sunt; secundò si auferatur C ex D, relinquitur L, ergo C & L sunt æquales ipsi D; D autem est æqualis ipsis B & K, & B est æqualis ipsis C & H. Igitur C & L æquales erunt ipsis C, H, K, ablato autem utrinque C, restabunt H, K; simul æquales ipsi L; sed L est differentia positionum, ergo idem L erit aggregatum errorum H, K. Quia autem est ut H ad K; ita E ad F; erit componendo ut E, F seu G ad E, ita H, K; seu L ad H; aut ut E F, seu G ad F, ita H, K, seu L ad K; unde si fiat regula trium numeri M, N, erunt errores positionum, quorum M qui fuit per defectum, addi debet suæ positioni C; ut B inveniatur: N verò qui fuit per excessum subtrahi debet à sua positione D, ut habeatur idem numerus B.

COROLLARIUM I.

Ex hac ultimâ praxi poterimus difficultatem hujus regulæ minuere, cum enim unitas dividendo aut multiplicando aliquem numerum, eundem relinquat, si terminus aliquis regulæ proportionis sit unitas, vitabimus, aut multiplicationem, aut divisionem, quod ut præstemus, secundo positio fiat aut major, aut minor primâ positione, solâ unitate, quod in exemplo manifestum erit.

A. 1 0 0. B. 6 0.
H I.
C. 1 2. D. 1 3.
E. 8 0. F. 7 8 $\frac{1}{3}$.
G. 1 $\frac{2}{3}$
Fiat ut.
G. 1. $\frac{2}{3}$ ad H. I. ita F. 7 8. $\frac{1}{3}$. L. 4 7.
G. 1. $\frac{2}{3}$ [illegible] H. I. E. 8 0. M. 4 8.

Proponatur idem numerus A, dividendus in tres partes; quarum prima sit dupla secundæ: & hæc tripla tertiæ; sit prima positio C 12. & examine facto error inveniatur E, per defectum, fiat secunda positio D, unitate major, invenieturque error 78 $\frac{1}{3}$, sit differentia errorum genitorum G, & differentia positionum H, nempe unitas debet fieri ut G ad H, ita error F ad L; qui erit error positionis D, qui additus eidem positioni D dabit numerum B. Vel per alium errorem fiat ut G ad H; ita E ad M, M erit error positionis C, qui illi additus dabit pariter numerum B quæsitum, vitatur autem multiplicatio.

COROLLARIUM II.

Si positiones differant denario vitatur item multiplicatio qua fiet addito 0.

ARITHMETICÆ de numeris fractis.

LIBER SECVNDVS.

Definitio prima numerus fractus ille est, qui constat aliquot particulis, in quas divisa est unitas, sicut enim unitas per sui multiplicationem, est parens omnium numerorum integrorum; ita etiam per sui divisionem generat omnem minutiam. Supponatur ergo unitas divisa in quotcumque particulas, & ex iis particulis assumptas esse aliquot: id quod assumptum fuerit minutia dicitur, ex quo fit, ut necessarium sit ad minutiam exprimendam; primò significare in quot particulas divisa sit unitas: deinde quot hujusmodi particulæ unitatis assumptæ sint; unde duplici charactere, quamlibet minutiam exprimimus, quorum inferior dicitur denominator, ideò quia significat, in quot particulas divisa sit unitas: & dat denominationem particulis assumptis; nempe an sint decimæ, vigesimæ, trigesimæ. Secundus numerus qui supra lineolam scribitur, dicitur numerator quia indicat quot, hujusmodi particulæ assumptæ. Ut $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{8}{20}$ duo trientes, tres quadrantes, octo vigesimæ. Vides autem denominationem, trientis, quadrantis, vigesimæ partis sumi ab inferiori charactere; numerum verò talium partium exprimi superiori charactere, numerus inferior seu deminator pro ipsâ unitate ponitur, hoc est unitatem divisam exhibet. Character superior, exhibet partes aliquot istius unitatis, omnes igitur denominatores, eamdem unitatem significant, sed modò divisam in plures, modò in pauciores partes, numeratores autem indicant quot unitatis ita divisæ, partes fractio sibi vendicet.

Fieri autem potest ut denominator sit æqualis numeratori, vel illo minor, vel illo major. Si sit æqualis fractio illa significat & æquivalet unitati, verbi gratia $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$ tres trientes, quatuor quadrantes, significat enim unitatem divisam esse in tres partes, & ex hujusmodi partibus tres acceptas esse, hoc est omnes, igitur totam unitatem quæ æqualis est tribus illis partibus. Ita quatuor quadrantes: nam partes in quas dividitur unitas, sunt partes aliquotæ, nempe quæ aliquoties repetitæ nnitatem præcisè metiuntur. Si denominator sit minor numeratore, fractio major erit unitate, ut $\frac{5}{4}$ $\frac{8}{3}$ quinque quadrantes, octo trientes; cùm enim denominator repræsentet unitatem divisam, numerus major denominatore major erit unitate.

Denique denominator est major numeratore, in propriè dictâ fractione, quæ propterea significat aliquid minus unitate, ut $\frac{1}{2}$ una media pars, $\frac{2}{3}$ duo trientes, & ita deinceps.

Ex hoc sequitur, quod in omni omninò minutiâ exhibeatur, quam rationem habeat numerus fractus ad unitatem. Cùm enim denominator sit ipsa unitas, & numerator exhibeat, quot hujusmodi partes aliquotæ acceptæ sint, exhibebit etiam habitudinem, quam habet minutia, ad unitatem. Unde omnis omninò numerus ad modum fractionis exhiberi potest, si nempe ipse fiat numerator, & unitas fiat denominator. Ut 100. ita exhiberi potest $\frac{100}{1}$ seu centum unitates. Immo dicere possumus virtualiter id semper fieri & subintelligi; omnis enim numerus exhibet quot unitates contineat. Dum enim dicimus 100. intelligimus centum unitates, & non centum medietates, aut centum trientes, nisi hoc exprimatur.

Unde quidquid dicitur de fractionibus, de rationibus etiam consequenter demonstratur, ut si rationes addere, subtrahere, multiplicare dividere velis: fractiones adde, subtrahe, multiplica, divide quarum numerator ad denominatorem prædictas rationes habeat, & peractum erit negotium. Quare clarum est omnem fractionem ad unitatem (hoc est ad totum cujus est fractio) eandem habere rationem quam habet numerator, ad denominatorem.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Fractiones quarum numeratores eandem habent rationem ad suos denominatores, æquales sunt.

A $\frac{2}{4}$ B $\frac{1}{2}$

Sint duæ, aut plures fractiones A, & B, quarum numeratores eandem habeant rationem ad suum denominatorem; dico illas esse æquales.

Demonstratio. In omni fractione (*per 1. defin.*) denominator est unitas; & numerator ipse numerus fractus; ergo quam rationem habet numerator ad suum denominatorem, numerus fractus eandem habet rationem ad unitatem; sed (*per 7. 5. Euclid.*) quæ ad idem eandem habent rationem sunt æqualia; ergo fractiones in quibus numerator, ad denominatorem,

torem, eandem habet rationem sunt æquales.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Fractiones eundem habentes denominatorem, eam rationem habent inter se, quam numeratores.

A	5	C	3
B.	10	D.	10

Sint duæ fractiones AB,CD, eundem habentes denominatorem B, D. Dico eam esse rationem fractionis A B ad fractionem CD; quæ est numeratoris A ad numeratorem C.

Demonstratio. Ita se habet fractio AB ad unitatem; sicut A ad B, seu D, ita se habet unitas ad fractionem CD, ut D ad C. Ergo ex æquo ita est fractio AB ad fractionem C D, ut A ad C quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Fractiones eundem habentes numeratorem se habent reciprocè ut denominatores.

A.	5	C.	5
B.	10.	D.	15.

Sint duæ fractiones A B, CD, eundem habentes numeratorem A & C, dico ita esse AB ad C D, sicut denominator B ad denominatorem D, & hoc vocatur reciprocè.

Demonstratio. Est AB ad unitatem,ut A ad B. Est autem unitas ad C D, ut D ad C, seu ad A. Ergo ex æquo perturbatè ita est AB ad CD; sicut D ad B, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Fractio qualibet, eandem rationem habet, ad numerum absolutum, æqualem suo numeratori; quam unitas ad numerum absolutum denominatori æqualem.

A.	2
B.	3.

Sit fractio AB. Dico ita esse fractionem A B ad numerum absolutum seu integrum 2, æqualem numeratori A, sicut se habet unitas ad numerum integrum 3, æqualem denominatori B. Hoc est quod sicut unitas est tertia pars numeri 3, quod fractio $\frac{2}{3}$ sit tertia pars numeri 2, hoc est, quod sex trientes faciant duas unitates.

Demonstratio. Fractio AB, est ad unitatem ut 2 ad 3: ergo alternando erit fractio AB ad 2, ut unitas ad 3. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Si duarum minutiarum numeratores, per denominatores decussatim multiplicentur: producti eandem rationem habebunt quam ipsæ fractiones.

A.	2	C.	3
B.	3.	D.	4.
E.	8	F.	9
G.	12.	H.	12.

Sint duæ fractiones A B, CD, multiplicetur autem numerator primæ nempe A, per denominatorem secundæ nempe D, fiatque E; item numerator secundæ nempe C, per denominatorem primæ nempe B, multiplicetur & fiat F, dico ita se habere fractionem AB ad CD, sicut E ad F.

Demonstratio. Multiplicentur denominatores B, D, fiatque numerus 12. qui subscribatur G & H, ita ut fiant minutiæ E G, F H, numerus D multiplicans numerum B produxit G, & multiplicans numerum B produxit G, & multiplicando ipsum A fecit 8. Ergo G ipsius B æquè multiplex est ac E ipsius A, ergo (*per 15. 5. Euclidis*) eadem est ratio A ad B, quæ E ad G, quare (*per primam hujus*) EG & AB sunt æquales minutiæ; Pariter ostendam CD, FH esse æquales minutias: sed illæ habent eundem denominatorem G, H. Ergo (*per 2. hujus*) se habebunt, ut numeratores E, F, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Animadvertere potes hic, modum reducendi duas fractiones, ad eundem denominatorem, si nempe decussatim numeratores multiplices, per denominatores; habebis autem denominatorem, si denominatores inter se multiplices.

COROLLARIUM II.

Sequitur, quòd si per decussatam multiplicationem numeratorum, per denominatores, numerus æqualis producatur, æquales erunt minutiæ.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Minutiam, Minutiæ, ad simplicem minutiam ipsi æqualem revocare.

Explicatur. Non tantùm dantur minutiæ ipsius unitatis, hoc est, non tantùm unitas dividitur in plures partes aliquotas, quarum aliquot sumantur, & ita fiat fractio; sed etiam aliquando ipsæmet minutiæ, in partes aliquotas dividuntur, quarum aliquot assumantur ad generandam minutiam, minutiæ: ita si dentur tres quadrantes duarum quintarum, quæritur; illi duo quadrantes duarum quintarum partium, quænam sunt partes unius unitatis, seu quomodo se habent ad unitaté, quod in exemplo concreto meliùs patebit. Passus geometricus sit quasi unitas, hoc est numeri absoluti supponantur pro passibus geometricis, passus autem geometricus contineat pedes quinque, singuli autem pedes contineant palmos, 4. Quæritur tres quadrantes duarum quintarum unius passus geometrici, quomodo

modo se habent ad passum geometricum; hoc est si tres numeri constituantur, quorum primus sit quasi pes geometricus, qui se habeat ad secundum ut 5 ad 2. secundus se habeat ad tertium, ut 4 ad tria, quomodo primus se habebit, ad ultimum. In exemplo nostro cum passus geometricus contineat quinque pedes, duæ quintæ sunt duo pedes, duo autem pedes sunt 8 palmi, quare tres quadrantes octo palmorum sunt 6 palmi. Passus autem continens 5 pedes continet quater quinque palmos; igitur hæc fractio se habet ad unitatem, seu ad passum, ut 6 ad 20. Quod in exemplo isto attulimus, in quo istæ partes aliquotæ videntur jam admitti, in aliis omnibus facere possumus; quia licet mihi dividere unitatem, in quotcumque partes voluero. Jam ad problema veniamus.

A. 2.	C. 3.	E. 6.	G. 8.
B. 5.	D. 4.	F. 20.	H. 20.

Sit data fractio fractionis, nempe C D, sit fractio ipsius AB, multiplica utriusque denominatores inter se nempe B D, & fiat denominator F, Multiplica item numeratores A,C; fiatque numerator E; dico fractionem C D ita se habere ad unitatem, ut E ad F, ut autem E ad F; ita fractio E F intellecta ut simplex ad unitatem; ideoque dico, E, F, ut simplicem æqualem esse C D intellectæ, prout est fractio, fractionis.

A. 2.	C. 3.	E. 6.	G. 8.	K. 20.
B. 5.	D. 4.	F. 20.	H. 20.	L. 20.

Denominator fractionis fractionis C D, nempe D multiplicando A faciat G, & multiplicando iterum B, faciat H; erunt igitur C D & F, H æquales, addatur fractio K, L, æqualis unitati, hoc est cujus denominator, & numerator sint æquales inter se, & numeris F & H.

Demonstratio. Cùm A multiplicando C fecerit E, & multiplicando D fecerit G, erit (*per 15. quinti Euclid.*) E ad G, ut C ad D; ut autem C ad D, ita fractio C D ad suum totum, nempe ad AB, ut autem AB ad unitatem ita A ad B, & cum D multiplicando A & B fecerit G & H; seu K; erit ut A ad B; ita G ad K; & ut AB, ad unitatem; ita G ad K; igitur sunt tres numeri aliis tribus continuè proportionales. Nempe fractio C D, fractio AB, unitas; & ex aliâ parte E, G, K: igitur ex æquò; erit, ut fractio fractionis nempe C D, ad unitatem; ita E ad K. Ut autem E ad K; ita fractio EF; simplex ad unitatem KL, cum eundem habeant denominatorem. Igitur C D & E F sumpta pro simplici fractione, eodem modo se habent ad unitatem, ergo sunt æquales: quod erat ostendendum.

Definitio secunda numerus primus ille est quem sola unitas metiri potest.

Numerus verò compositus ille est quem aliquis alius numerus, præter unitatem, metiri potest; per (metiri) autem intelligimus, ut mensura aliquoties repetita præcisè adæquet totum. Quare facilè intelligetur utraque definitio, si dicatur numerus ille esse primus, cujus nullus numerus integer præter unitatem est pars aliquota, ut numerus 3. 5. nam binarius non est pars aliquota ternarij, cum binarius semel tantùm sumptus non adæquet ternarium; bis autem sumptus illum superet. Numerus compositus ille erit, qui præter unitatem habet alium numerum qui sit ejus pars aliquota, ut 4 cujus binarius est media pars, 6 cujus ternarius est media pars, & binarius tertia; sunt igitur compositi.

Definitio 3. Numeri inter se primi, sunt illi qui nullum integrum numerum, habent pro communi mensurâ, præter unitatem; hoc est numeri illi sunt inter se primi; si nullus inveniri possit integer numerus præter unitatem, qui utrumque metiatur.

Compositi verò numeri sunt illi, quos integer aliquis numerus præter unitatem metitur tanquam communis mensura; ut numeri 12 & 9, quos ternarius numerus metitur; quæ definitio satis per se patet.

Primò omnis numerus par cum alio pari, comparatus, compositus est, quia binarius utrumque metitur.

Secundò si duorum numerorum major, est primus, illi inter se sunt primi; quia major minorem metiri non potest, nec habet ullam mensuram, ergo neque habebit communem; licèt autem minor sit primus, fieri tamen poterit ut sint compositi, nempe ut minor majorem metiatur.

AXIOMA I.

Numerus metiens duos numeros, metitur & aggregatum ex iis numeris, quòd per se patet, si benè intelligatur quid sit, metiri.

AXIOMA II.

Numerus qui metitur numerum, & partem ejus ablatam, metitur & reliquam, aut illi æqualis est; si enim nec metiretur reliquam, nec illi æqualis esset, aliquoties repetitus non adæquaret totum, sed illa pars residua esset, atque adeò non metiretur totum contra suppositionem.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Expendere, an duo numeri sint primi inter se; & maximam eorum communem mensuram reperire.

A.	1 5 2 4.
B.	7 3 8.
C.	4 8.
D.	1 8.
E.	1 2.
F.	6.
G	

Sint duo numeri A, major; B minor, examinandi; an sint primi, an compositi; dividatur major A per minorem B, & notetur id quod relinquitur factâ divisione, nullâ habitâ ratione quotientis. Sit illud C; per C; dividatur B; & notetur id quod relinquitur post divisionem; sitque illud D; dividatur C per D, quòd si divisione factâ relinquatur E, per illud dividatur D. donec tandem inveniatur divisor qui dividat exactè præcedentem. Si ille divisor est unitas, ita ut nullus anteà occurrerit; dico quòd numeri sunt inter se primi, si verò occurrerit alius numerus, dico illos esse compositos & maximam illorum mensuram esse illum divisorem.

Demonstratio. Quia F metitur E, E autem metitur numerum D, decurtatum numero ipsi F æquali, quare numerum D, hoc modo imminutum metietur numerus F, sed numerus F metietur & seipsum, igitur numerus F metitur totum D, ſed D metitur numerum C imminutum parte æquali ipſi E, ergo eundem C ita imminutum metietur F, ſed etiam ipſum E metietur F, igitur totum C metietur; & ita de reliquis. Oſtendo autem F eſſe maximam numerorum A & B menſuram, ſi enim non eſt, ſit alius numerus G talis communis menſura, quia ergo G metitur totum A & ablatum B, aut illius multiplicem, metietur & reliquum C: oſtendam autem numerum G metiri ipſum F: ergo major non eſſet numero F.

PROPOSITIO VIII.

Fractionem ad minimos terminos revocare.

Demonſtravimus ſupra propoſitione primâ, fractiones illas eſſe æquales, quarum numeratores, ad ſuos denominatores eandem haberent rationem; quia autem quò termini erunt minores, eò meliùs concipitur habitudo quam habet unus terminus ad alium, ideo meliùs eſt exhibere eam rationem numeratoris ad denominatorem, ſeu fractionis ad unitatem ſub minimis terminis.

Inveſtiga *(per præcedentem)* maximam terminorum, ſeu numeratoris, & denominatoris, menſuram; & utrumque per talem menſuram divide, quotientes erunt termini minimi ſub quibus exhiberi poſſit eadem fractio.

A. 30.	15.	D. 2.		
B. 75.	C.	E. 5.		

Sit fractio AB revocanda ad minimos terminos. quære numerorum A & B maximam menſuram, ſitque C, per quam divides numeros A & B; ita ut ſint quotientes D & E; dico fractionem D, E æqualem eſſe fractioni A B, & ſub minoribus terminis exhiberi non poſſe.

Demonſtratio. Numeri A & B, per eundem C diviſi, dant quotientes D & E, ergo eadem eſt ratio D ad E, quæ A ad B, ergo *(per primam)* fractio DE, æqualis eſt fractioni A B.

Secundò oſtendo numeros D & E eſſe minimos in eâdem ratione. Primò enim ſunt primi numeri, nam alioquin

A. 30.	C. 15.	D. 2.
B. 75.	F.	E. 5.

haberent communem menſuram præter unitatem; ſit illa F, & quia F metitur D, & E metietur etiam A & B quos ipſi D & E metiuntur, & quia F minor eſt quam D & E, pluries invenietur in A & B quàm ipſi D & E, ergo per majorem numerum, quàm C, metietur A & B; ergo dabitur aliqua menſura numerorum A & B, major quàm C contra ſuppoſitionem.

Quod ſi D & E ſint primi; erunt etiam minimi eandem rationem habentium ut demonſtr. Euclides (23. *libri* 7.)

Si verò accidat fractionis primò propoſitæ terminos eſſe inter ſe primos. Jam hæc fractio eſt in minimis terminis, neque ulteriùs aliquid tentandum eſt.

Alia etiam praxis adhiberi poteſt, ſume medietatem, tertiam partem quadrantem, tàm denominatoris, quàm numeratoris, minutia, erit reductâ ad minorem, unde ſi inveniatur o in fine utriuſque tam denominatoris quam numeratoris rejiciantur, quia tunc accipitur decima pars utriuſque.

PROPOSITIO IX.

Minutiam ad integros revocare.

Accidere poteſt ut ex collectione minutiarum, aliquid exurgat unitate majus, in quô caſu, neceſſarium eſt, ut minutia, ad integros revocetur; quod facilè fiet, ſi numeratorem, per denominatorem dividas, quotiens erit numerus integer.

Sit hæc minutia $\frac{52}{3}$ quæ ad integros revocanda ſit; divide 52 per 3 quotiens erit 17. relinqueturque unitas; dico 17 $\frac{1}{3}$ æquari minutiæ $\frac{52}{3}$.

Demonſtratio. Cùm denominator 3 oſtendat in tali hypotheſi quamlibet unitatem diviſam eſſe in tres partes, & 52. trientes eſſe in numero propoſito; quoties ternarius in 52 invenietur, toties in eo erit unitas; invenitur autem decies ſepties, & relinquitur una pars indiviſa; igitur 17 $\frac{1}{3}$ æquabuntur minutiæ $\frac{52}{3}$.

Hâc regulâ Aſſes in francos, francos in nummos facilè reducemus, ſint propoſiti 2916. denarij reducendi in aſſes, eſt autem denarius duodecima pars aſſis, divido 2916 per 12 quotiens 243, exhibebit numerum aſſium.

Sint reducendi 489 Aſſes in nummos argenteos, hunc numerum divide per 60, quotiens 81 erit numerus nummorum, reſtantque 3 aſſes.

PROPOSITIO X.

Numerum integrum ad minutiam reducere.

Multiplicetur numerus integer per denominatorem fractionis; fietque numerator; ſit numerus 20 reducendus in fractionem cujus denominator ſit 5 multiplica 20 per 5 fientque $\frac{100}{5}$.

Si numero integro adhæreret fractio facilè adderetur; ut ſi proponatur numerus 20 $\frac{3}{5}$ reducendus ad minutiam, cujus denominator ſit 5 poſt multiplicationem numeri 20 per 5, ita ut fiant 100 addere debeo 3; ita ut fiat minutia $\frac{103}{5}$.

Demonſtr. Cùm in hâc hypotheſi, quælibet unitas intelligatur diviſa in quinque partes, multiplicando numerum propoſitum per quinque, ſcietur quot in eo ſint quintæ partes, quibus addendæ ſunt illæ 3.

Hâc praxi quamlibet ſpeciem majoris monetæ, ad minorem ſpeciem revocabimus, ut ex nummis aſſes, ex aſſibus denarios, &c.

Sint propoſiti nummi 2450, hos ad aſſes revocare volo, multiplico prædictum numerum per 60 fient 147000 numerus aſſium qui continentur in nummis 2450. ſi multiplices iterum 147000 per 12 habebis 1764000 numerum denariorum, qui in eodem numero continentur.

Hâc item methodo quoties valor monetæ ſuperioris, continebit plures inferiores fiet etiam facilè reductio, proponantur nummi 1434, ſitque valor unius nummi trium librarum, 5 aſſium & denariorum 8 ter ſcribatur numerus 1434.

Multipli

1434.	1434.	1434.
3	5.	8.
4302.	7170.	11472.
406	956.	67.
		72.
		0. (956.
4708.	8126.	12.
	06. (406.	
	20.	

Multipliceturque per 35 & 8. habebisque libras 4302. asses 7170. denarios 11472. ex denariis divisione per 12 fac asses, quotiens erit 956. qui numerus addi debet assibus, fientque asses 8126. & divisione per 20, fient libræ 406. & relinquentur 6 asses. Hic numerus 406 addatur numero librarum 4302; invenies in nummis 1434. ita ut valor cujuslibet sit trium librarum, assium quinque & denariorum octo, libras 4708. & 6 asses.

Ex his regulis facilè deducemus methodum omnium computorum. Sit propositum exemplum. Volo scire quot sint franci in 234 nummis, quorum quilibet asses 65, continet, & in 324 ducatis, quorum quilibet continet asses 58, & in 460 testonibus, quorum quilibet 19 asses habet.

234.	324.	460.
65.	58.	19.
1170.	2592.	4140.
1404.	1620.	460.
15210.	18792.	8740.
18792.		
8740.		
42742.		
2. (2137.		

Invenio in nummis esse asses 15210. in ducatis esse 18792. in testonibus esse 8740. Hi numeri simul addantur, fient 42742. quem numerum si dividas per 20 fient franci 2137 cum duobus assibus.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Duas aut plures minutias immò & integros cum minutiis, ad eandem denominationem reducere.

A. 3	C. 4	E. 2
B. 4.	D. 5.	C. 3.
H. 15	L. 16	
K. 20.	M. 20.	
N. 45	R. 48	S. 40
P. 60	P. 60	P. 60

Primò si duæ fractiones revocandæ sint ad eandem denominationem, id præstabis (*per quintam*), ut constat (*ex eius corollario.*)

Si verò sint tres nempe AB, CD, EF. Primò, revocentur AB, CD ad eundem denominatorem (*per coroll. 5.*) fiantque HK, LM; tum multiplica per denominatorem C tertiæ fractionis denominatores K, M; ut fiant novi denominatores P.P. Item per eundem C multiplica numeratores H, L; fiant novi numeratores N, R. Denique per denominatorem K vel M multiplica terminos fractionis E, C; fiatque S. P; dico fractiones N P, RP, SP ejusdem denominationis esse æquales ipsis AB, CD, EC.

Demonstratio. Primò sunt ejusdem denominationis quia tres denominatores P, P, P, sunt generati multiplicatione K, M æqualium, per C. Sunt etiam æquales ipsis AB, CD, EC. Primò enim HK, LM æquales sunt ipsis AB, CD, & cum NP, RP, producantur multiplicatione terminorum H, K, L, M, per eundem numerum C, erunt NP, RP, ipsis HK, LM & consequenter ipsis AB, CD æquales. Pariter quia idem denominator M, multiplicando EC producit S. P. Eadem erit ratio S ad P; quæ E ad C: igitur (*per primam*) fractio SP æqualis est fractioni EF.

Quòd si integri, ad eandem denominationem sint reducendi cum minutiis, ex iis fiat minutia subscriptâ unitate, hoc modo $\frac{100}{1}$ hoc est centum unitates, tum reducantur ad eandem denominationem.

PROPOSITIO XII.

Assignare minutiam cujuscumque integri.

Quia in terminis abstractis sæpè difficilis est sensus propositionis, facilis in exemplo, ideo, illam in exemplo propono. Aliquis injunxit murum extruendum invenit autem $\frac{11}{12}$ unius octopedæ quadratæ; octopedæ autem pretium est francorum 18. Quærimus igitur $\frac{11}{12}$ octodecim francorum.

Id per regulam trium efficitur, hoc modo. Si octopeda seu 12. duodecimæ dant francos 18; quid dabunt 11 duodecimæ; multiplica 88 *per* 11; fient 198; quæ si dividas per 12, quotiens erit $16\frac{6}{12}$ seu $\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Additio fractionum.

A. 3	C. 2	E. 2
. 4	D. 3.	F. 5.
G. 45	K. 40	L. 24
H. 60.	H. 60.	H. 60
	M. 109	I. 49
	H. 60.	60.

Sint duæ, aut plures minutiæ addendæ. Sint tres fractiones AB, CD, EF, addendæ (*per præcedentem*) reducantur ad eundem denominatorem, sintque illis æquales GH, KH, LH, addantur numeratores G, H, L, fiatque M, illis simul sumptis æqualis subscribatur illi: idem denominator H: dico fractionem MH tribus fractionibus AB, CD, EF, æqualem esse.

Demonstratio,

Demonstratio. Cum minutia GH, ad unitatem se habeat ut G ad H, & pariter KH ad unitatem sicut K ad H, & LH ad unitatem ut L ad H tres illæ fractiones, simul sumptæ, ad unitatem se habebunt ut G, H, E, simul hoc est M ad H. Sed ita etiam se habet ad unitatem fractio M H sicut M ad H: igitur fractio M H æqualis est tribus fractionibus G H, K H, L H Sed illæ æquales sunt fractionibus A B, CD, EF; igitur fractio M H iisdem æqualis erit quod erat demonstrandum.

Si verò hanc fractionem reducere velis ad unitates; dividatur eius numerator per denominatorem, videbisque, quoties in ea fractione inveniatur unitas; quotiens enim erit numerus unitatum; & reliquum erit adhuc numerator fractionis eundem denominatorem habentis. Ratio clara est, ex definitione fractionis, cum enim denominator sit ipsa unitas divisa in partes; per divisionem invenitur quoties unitas est in fractione. Reliquum etiam erit numerator fractionis, eundem denominatorem habentis: ut in hoc exemplo si dividatur 109. per 60. invenies pro quotiente 1. $\frac{49}{60}$

Quòd si numeros integros, minutiis addere velles; & ex iis totalem minutiam componere; ex integro formanda esset minutia subscribendo unitatem; quæ se haberet eodem modo ac fractio.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Fractionem minorem, ex majori subtrahere.

A.	5	C.	3
B.	6	D.	4
E.	20	G.	18
F.	24	H.	24.
K.	2	M.	1
L.	24	N.	21

Sit ex fractione majori A B, subducenda minor C D. Primò reduc hujusmodi fractiones ad eundem denominatorem. Sitque fractio E F æqualis, fractioni AB, quæ habeat eundem denominatorem F, ac fractio GH quæ sit æqualis fractioni CD, tum numeratorem G, aufer ex numeratore E, relinquatur numerator K cui tribuatur denominator idem. Dico factum esse quod quæritur. Hoc est fractionem K L superesse subtractâ fractione G H ab E F, hoc est C D ab A B, seu quod idem est dico fractiones K L, & G H esse æquales fractioni E F.

Demonstratio. Cum ita sit fractio GH ad unitatem, ut G ad H; seu ad L, pariter ita sit fractio K L ad unitatem ut K ad L, ita erunt fractiones G H, K L simul ut G & K simul ad L, seu ad F illi æqualem. Sed ut GK ad L ita E ipsis G K æqualis ad F, & ut E ad F ita fractio E F ad unitatem; ergo ita est EF ad unitatem ut fractiones GH, KL ad unitatem; ergo (*per 7. 5. Eucl.*) fractiones GK, KL, sunt fractioni EF æquales, quod erat demonstrandum: quòd si plurimæ fractiones ab unica subducendæ essent, priùs colligantur in unam fractionem, antequam fiat subtractio.

A.	12.		C.	4
			D.	5
11.	E.	5	11	1
	F.	5		5

Denique si ex numero integro subducenda esset fractio, ex unica unitate numeri A, fac fractionem aliquam ejusdem denominationis cum ea quæ subducenda est, in qua ut priùs dictum idem est denominator, & numerator ita in hoc exemplo si ex 12. subtrahas fractionem $\frac{4}{5}$

PROPOSITIO XV.

Additio & subtractio fractionum fractionum, ex fractionibus fractionum.

Quoties fractiones fractionum, ex fractionibus fractionum subtrahendæ sunt, primæ fractiones fractionum in unam summam addantur. Addantur item fractiones, fractionum, à quibus subtractio fieri debet ut si subtrahere debeas, à $\frac{2}{3}$ ex $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ ex $\frac{3}{4}$.

Ad simplices fractiones revoca juxta (*prop.6.*) prima erit $\frac{6}{12}$ secunda erit $\frac{3}{8}$ tum ad eundem denominatorem reducantur fiet denominator 96. prima ergo erit $\frac{48}{96}$ secunda $\frac{36}{96}$ aufer 36 ex 48. restat $\frac{12}{96}$ si ad minimos numeros revocentur fiet $\frac{1}{8}$.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Minutiam, per minutiam multiplicare.

A.	5	C.	3	E.	15
B.	6	D.	4	F.	4
		G.	18.		

Sit minutia A B, multiplicanda per minutiam C D, multiplica numeratores A & C, fiatque numerator E, multiplica denominatores B, D, fiatque denominator F; dico fractionem E F, esse numerum productum ex multiplicatione fractionis A B per fractionem C D. Hoc est sicut diximus cum de multiplicatione simplici, quæritur ut unitas se habeat ad A B, sicut C D ad F E, numerus C multiplicando B faciat G.

Demonstratio. Ut unitas ad A B; ita B ad A (*per definitionem fractionis*) & quia C multiplicando B & A, fecit G & E, ita etiam erit G ad E; si fiat autem fractio G F hæc erit æqualis fractioni C D, cum idem numerus B multiplicando C & D, fecerit G & F. Ergo G F, ita se habebit ad E F, sicut C D ad E F, sed ita se habet ad E F ut G ad E, (*per secundam hujus*) cum eundem denominatorem habeant; igitur C D, se habebit ad E F, ut G ad E. Ergo ita est unitas ad A B, sicut C D ad E F; quod erat demonstrandum. In quo vides idem esse minutias minutiæ reducere ad simplicem minutiam, ac minutiam multiplicare.

Alio modo faciliori. Cum multiplicare volumus AB, per D, quærimus quid sint tres quadrantes quinque sextarum; ergo volumus minutiam minutiæ

minutiæ revocare ad simplicem minutiam, sed hoc fit per multiplicationem numeratorum, & denominatorum; ergo eodem modo fiet multiplicatio minutiæ per minutiam, nempe multiplicando tum denominatores; tum numeratores inter se.

Si numerus integer per minutiam multiplicandus esset; verbi gratiâ numerus A per minutiam BC. Numero A subscribatur unitas, ut fiat minutia, tum multiplica numeratores A & B, tum denominatores ut fiat minutia D E.

A. 4.	B. 3.	D. 12.
1	C. 5.	E. 5.

Si integer cui adhæret fractio, per fractionem multiplicandus sit, verbi gratia A cui adhæret fractio BC, multiplicandus sit per fractionem E F, vel multiplica per EF, seorsim A & BC, ita ut fiant GH, KL, quas fractiones addes, fietque fractio MN; vel primò colliges fractiones AD BC, fiatque unica fractio OP, illis æqualis; quæ multiplicetur per E F; fietque eadem fractio MN.

A. 4.	B. 2.	E. 3.	G. 12.	K. 6.
D. 1.	C. 3.	F. 5.	H. 5.	L. 15.
O. 14.			M. 42.	
P. 3.			N. 15.	

PROPOSITIO XVII.

Multiplicatio fractionum fractionum, per fractiones fractionum.

Converte ad simplices fractiones, fractiones fractionum; item alias fractiones fractionum, ita ut fiant duæ fractiones simplices, tum fiat multiplicatio per præcedentem.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Minutiam per minutiam dividere.

A. 6.	C. 3.	G. 18.	E. 24.
B. 20.	D. 4.		F. 60.

Sit minutia AB dividenda per minutiam C D, multiplica dividendæ fractionis numeratorem, per denominatorem D divisoris, & habebitur numerator E, item multiplica denominatorem B fractionis B, per numeratorem C divisoris, & habebis F denominatorem, dico fractionem EF esse quotientem divisionis, per quam divisa est fractio AB, per C D, hoc est, ut diximus in explicatione divisionis, ita est AB ad EF, sicut CD, ad unitatem; C enim numerator multiplicando A faciat G.

Demonstratio. Quia C multiplicando A & B facit G & F; erit fractio GF æqualis ipsi A B, ergo ita se habebit G F ad EF, sicut AB ad EF, ut autem se habet GF ad E F, ita G ad E, cum eundem habeant denominatorem F; igitur ita se habet A B ad E F sicut G ad E; quia autem A multiplicando ipsum C, fecit G; & multiplicando ipsum D fecit E, ita erit C ad D; ut G ad E; sed ut C ad D, ita CD ad unitatem; ergo ut G ad E, seu ut AB ad E F, ita C D ad unitatem quod erat demonstrandum; ergo EF est verus quotiens divisionis A B per C D.

COROLLARIUM

Ut dividatur C D per A B; fractio E F invertenda est, & quotiens erit fractio F E; ratio clara est cum enim ad dividendam AB per C D, denominator D multiplicet numeratorem A, ut faciat numeratorem E, & numerator C multiplicet denominatorem B minutiæ dividendæ, ut fiat denominator F quotientis, è contrà ut AB dividat C D; debet denominator B, multiplicare numeratorem C; ut fiat numerator F, & numerator A multiplicare denominatorem D ut fiat denominator E; ideò debet inverti fractio E F, ita ut fiat fractio F E.

PROPOSITIO XIX.

Alius modus reducendi minutias ad eamdem denominationem.

Quia plerumque accidit ut reducendo minutias, ad eamdem denominationem, producantur minutiæ, non sub minimis terminis conceptæ; atque adeò sæpe opus est reductione illâ tædij plenâ, proponam aliquas praxes, quibus minutiæ sub minimis terminis oriuntur. Proponantur duæ minutiæ AB, CD reducendæ ad eandem denominationem, quæratur maxima communis mensura denominatorum B & D, hæc erit G; per hanc divide denominatores; fient quotientes E & F; multiplica terminos minutiarum per alternos quotos, hoc est, multiplica terminos minutiæ A B per quotientem F, & terminos minutiæ CD per quotientem E, fient minutiæ HK, LM, æquales prioribus, & reductæ ad eandem denominationem.

A. 13	C. 7.	
B. 16.	D. 12.	
E. 4.	G. 4.	F. 3.
H. 39	L. 28	
K. 48.	M. 48.	

Demonstratio. Cum idem numerus G dividat numeros B & D, erit E ad F, ut B ad D, quare si B ponatur primus numerus, D secundus, E tertius F quartus idem producetur numerus ex B in F, qui ex E in D; cum igitur E multiplicet C & D faciatque L & M, erunt fractiones C D, LM æquales, pariter cum F multiplicet A & B; faciatque hujusmodi multiplicatione numeros HK, erunt fractiones AB, HK, æquales. Quâ reductione factâ poterit fieri additio, & subtractio in numeratoribus. Cætera fiant eodem modò quo diximus supra.

PROPOSITIO XX.

Multiplicatio fractionum.

E. 1.	G. 5.		
A. 9.	C. 20.	180.	5
B. 16.	D. 27.	432.	12.
H. 4.	F. 3.		

Antequam instituatur multiplicatio fractionum, reducantur termini heterogenei ad minimos, hoc est, numerator unius fractionis, cum denominatore

natore alterius, ut propositis fractionibus AB, CD, reducantur ad minimos terminos A & D. inventa communi mensurâ, quæ est ipsum A, seipsum metiens; & metiens numerum D si fiat divisio utriusque per hanc communen mensuram, fient quotientes E & F quære item maximam communem mensuram, numerorum C & B. hæc est 4. per quam si utrumque dividas fient quotientes H, & G, multiplica E per G fiet 5. multiplica H per F fiet 12. eritque fractio $\frac{5}{12}$ quam dico esse æqualem fractioni $\frac{180}{432}$. quæ oritur methodô communi, multiplicando B per D, & A per C. Nam cum eadem communis mensura diviserit A & D feceritque E & F, ita erit A ad D, sicut E ad F. est etiam B ad C sicut H ad F, est autem 5. ad 12. in composita ratione E ad G & H ad G. & pariter 180. ad 432. est in composita ratione A ad D, & B ad C; ergo ita est 5 ad 12 sicut 180 ad 432, ergo erunt fractiones æquales quod erat ostendendum. Ergo multiplicavimus fractionem, ita tamen, ut termini essent minimi in sua ratione, cùm otiatur ex multiplicatione minimorum in sua ratione.

PROPOSITIO XXI.

Divisio fractionis per fractionem.

Ad divisionem fractionis per fractionem peragendam, ita ut quotiens proveniat sub minimis terminis, debent priùs reduci ad minimos, termini homologi, hoc est duo numeratores dividi, per maximam communem mensuram & pariter denominatores.

3.	5.	
9.	15.	(20.
16.	28.	21.
4.	7.	

Proponatur fractio $\frac{9}{16}$ dividenda per fractionem $\frac{15}{28}$ duorum numeratorum quæratur maxima communis mensura quæ erit 3. per hanc divide 9. & 15. eruntque quoti. 3 & 5 Communis mensura denominatorum 16 & 28 est 4, per quam si utrumque dividas, fient quotientes 4 & 7. Ut habeas denominatorem multiplica 7 quotum denominatoris divisoris per 3, quotum numeratoris dividendæ, producetur 21; & ut habeas numeratorem, multiplica 5, quotum numeratoris divisoris, per 4 quotum denominatoris dividendi, fietque 20. Habebis ergo quotientem $\frac{20}{21}$, hæc operatio probatur sicut superior ostendendo eandem esse rationem 20 ad 21 quæ est terminorum fractionis ortæ ex divisione communi.

PROPOSITIO XXII.

Varia exempla divisionis, numerorum integrorum, per fractiones, vel vicissim.

Si dividendus sit integer per fractionem, vel vicissim fractio, per integrum: subscribatur integro fractio, ita ut ex integro fiat fractio; octo homines emerunt $\frac{4}{5}$ unius prædij, cujus pretium erat 400 francorum, quæritur pretium, quod quilibet dare debet, & quam partem prædij debeat obtinere.

Dividenda est fractio $\frac{4}{5}$ in octo seu per $\frac{8}{1}$ multiplica numeratorem 4 per 1, denominatorem divisoris fit 4 numerator quotientis, item multiplica 5 denominatorem dividendi, per 8 numeratorem divisoris, fietque 40 denominator quot. quotiens ergo erit $\frac{4}{40}$ seu $\frac{1}{10}$ quilibet ergo habet decimam partem prædij, & solvere debet decimam partem numeri 400, hoc est 40.

Sit dividenda fractio $\frac{2}{3}$ per 4 & $\frac{4}{5}$ fiat fractio $\frac{24}{5}$ tum multiplica 5 per 2 fiet 10 numerator, multiplica 24 per 3 fiet 72 denominator habes ergo $\frac{10}{72}$.

Integer cum fractione nempe 6 $\frac{1}{2}$ per fractionem $\frac{1}{4}$ sit dividendus, primò fiat unica fractio ex 6 $\frac{1}{2}$ nempe multiplica 13 per 4 fiet 52 numerator fractionis, tum multiplica 2 denominatorem dividendi, per numeratorem divisoris fiet 2 denominator quotientis, erit ergo fractio $\frac{52}{2}$.

Reliqua exempla facilè ex his intelliguntur, nempe si fractio fractionis, dividenda sit per fractionem fractionis, aut per integrum, cui adhæreat fractio; fractio fractionis, ad simplicem fractionem revocanda est, sicut & integer, cui adhæret fractio.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Alio modo minutiam, per minutiam dividere.

Sit minutia AB, dividenda per CD, divide numeratorem A per numeratorem C, ut fiat numerator E, divide item denominatorem B per denominatorem D, ut fiat denominator F, dico fractionem EF esse quotientem illius divisionis.

Demonstratio. Si multiplicanda esset minutia EF, per CD multiplicarentur denominatores inter se, ut fieret denominator B, tum numeratores ut fieret numerator A; ergo ut dividatur fractio AB per fractionem CD adhibenda est contraria divisio.

Alia demonstratio per divisionem. Quærimus numerum, qui toties contineat unitatem, aut ita se habeat ad unitatem, sicut numerus dividendus, ad divisorem, hoc est debet ita se habere fractio EF ad unitatem seu E ad F; sicut AB ad CD, numerator C multiplicando denominatorem F; faciat G 15; quoniam F multiplicando C & D produxit G & B; erit fractio GB, æqualis fractioni CD, igitur AB se habebit ad GB, sicut se habet ad CD, se habet autem ad GB, ut A ad G, cùm eumdem denominatorem B habeant; igitur AB ad CD ita se habet, ut A ad G. Quia autem C multiplicando E, produxit A, & multiplicando F produxit G, ita erit A ad G, ut E ad F, seu fractio EF ad unitatem; igitur ita erit AB ad CD ut EF ad unitatem, quod erat demonstrandum.

Hic tamen modus non debet adhiberi nisi quando occurrerit quod rarum erit, ut divisoris termini nempe numerator, & denominator exactè

exactè metiantur terminos fractionis dividendæ, alioquin adhærebit fractioni genitæ fractio fractionis, quæ cum majori difficultate ad communem minutiam reducetur.

Notanda autem sunt aliqua, primum est quòd multiplicatio numeri per fractionem sit potiùs divisio quàm multiplicatio, quod explicabimus primò, in numero aliquo integro.

A. $\frac{24}{1}$ B. $\frac{2}{}$ C 3 D. 16.

Sit integer numerus A multiplicandus per fractionem B C, quærimus quid faciant duæ tertiæ partes numeri 24. Si igitur numerum A dividas per C 3, & quotientem multiplices per numeratorem B, habebitur numerus D qui quæritur. Quod alio modo fieri potest, si nempe numerum A reducas ad minutiam, subscriptâ unitate, & multiplices denominatores inter se, idem producetur numerator C & multiplices numeratorem A per numeratorem B, fietque 48, qui numerus divisus per 3 dat numerum D; quòd verò id quæramus ostendo. Nam volumus per multiplicationem invenire numerum; qui ita se habeat ad multiplicantem, sicut multiplicatus ad unitatem. Verbi gratia, volo multiplicare 4 per 6, hoc est quæro numerum, qui toties contineat 6, quot sunt unitates in 4; itaque fiunt 4, numeri proportionales 1, 4, 6, 24, in superiori exemplo idem præstamus 1. $\frac{2}{3}$ 24, 16. Hoc est ut se habet unitas ad duas tertias, ita 24, ad 16.

Quod si dividendus esset numerus 24 per $\frac{2}{3}$ quærimus, ut sicut se habet dividendus ad divisorem; ita se habeat quotiens ad unitatem, vel permutando, ut se habeat dividendus ad quotientem sicut divisor ad unitatem. Divisor est $\frac{2}{3}$ quæ fractio se habet ad unitatem ut 2 ad 3: Quærimus ergo numerum ad quem se habeat 24, ut 2 ad 3 erit; ille 36 quod mirum videtur, ut nempe per divisionem major numerus producatur, quàm sit ipse divisus, & per multiplicationem minor numerus producatur.

Quod tamen mirum videri non debet. Nam primò in divisione quò minor est divisor, eò major est quotiens; ut si sit dividendus numerus 24 per 4, divisor erit 6, si per 8, divisor erit 3: sed si numerus divideretur per unitatem, produceretur numerus ipsi dividendo æqualis: ergo si dividatur per numerum minorem unitate, quotiens major erit numero dividendo.

Praxis igitur talis erit, sit dividenda fractio $\frac{2}{3}$ per fractionem $\frac{3}{4}$ multiplica 2 numeratorem minutiæ dividendæ, per 4 denominatorem divisionis, fient octo; nempe numerator quotientis. Secundò multiplica denominatorem 3 dividendæ fractionis, per numeratorem 3 divisoris, fitque 9 denominator fractionis: igitur si dividas $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$ exurgit $\frac{8}{9}$.

PROPOSITIO XXIV.

Regula proportionis cum fractionibus.

Regula proportionis, seu ut vocant regula trium cum fractionibus eodem modò fit, ac regula trium in numeris integris, hoc est, secundus numerus per tertium multiplicetur, & productus per primum dividitur. Sola difficultas oritur ex fractionibus, quæ invicem multiplicari debent. Quæ omnia in exemplis meliùs innotescent.

Si $\frac{1}{4}$ unius ulnæ valent $\frac{11}{12}$ unius nummi, quodnam erit pretium competens tribus quadrantibus? nempe $\frac{3}{4}$, multiplica $\frac{11}{12}$ per $\frac{3}{4}$, fientque $\frac{33}{48}$, qui dividendus est per $\frac{1}{4}$, fiunt $\frac{132}{48}$ seu nummi 2 $\frac{36}{48}$ seu $\frac{3}{4}$.

Eædem ferè cautiones adhibendæ sunt quæ in superioribus regulis sunt adhibitæ; nempe si integri cum fractis adjunguntur.

Si $\frac{1}{5}$ unius ulnæ valet nummos 4, quod erit pretium $\frac{3}{4}$? supponatur unitas cyphræ 4, fiatque $\frac{4}{1}$ multiplica $\frac{3}{4}$ per $\frac{4}{1}$ fiet $\frac{12}{4}$, quæ dividi debent per $\frac{1}{5}$ fient $\frac{60}{4}$ seu 15 nummi.

Potest item aliter fieri: fractiones quæ ad invicem referuntur, verbi gratia, in hoc exemplo $\frac{1}{5}$ unius ulnæ & $\frac{3}{4}$ unius ulnæ ad eundem denominatorem reducantur, fient $\frac{4}{20}$ $\frac{15}{20}$. Fiat ergo regula trium si 4 subintelligendo vigesimæ, dant 4 nummos, quid dabunt 15, subintellige, vigesimæ, quotiens erit 15 nummi.

Si 4 ulnæ & $\frac{2}{3}$ dant nummos 4 $\frac{2}{5}$ quid dabunt 5 ulnæ $\frac{1}{2}$. reducantur omnia ad simplices fractiones, nempe $\frac{14}{3}$ $\frac{22}{5}$ $\frac{11}{2}$, multiplica duos ultimos, fient $\frac{244}{10}$ divide per $\frac{14}{3}$ fient $\frac{732}{140}$ seu 5 $\frac{32}{140}$ seu 5 $\frac{8}{35}$.

Si detur regula trium cum francis, assibus, denariis, tres numeri ad unum reducantur.

Si 8 ulnæ cum $\frac{2}{3}$ valent francos 10, asses 15, denarios 8, quot valent 36 ulnæ cum $\frac{3}{4}$. fieri potest multiplicatio in hunc modum; omnes numeri reducantur ad fractiones simplices. Nempe 8, cum $\frac{2}{3}$ $\frac{26}{3}$; 36 $\frac{3}{4}$ $\frac{147}{4}$ fiant ex 10 francis, assibus 15, denariis 8, simplices denarij. Multiplica 10 per 20, & adde 15, fient 215 asses; multiplica 215 per 12, & adde 8, fient 2588, cui subscribe 1, ut fiat $\frac{2588}{1}$ multiplica $\frac{2588}{1}$ per $\frac{147}{4}$ fient $\frac{380436}{4}$ quam summam divide per $\frac{26}{3}$ fient $\frac{1141308}{104}$ seu 10976. $\frac{4}{104}$ numerus denariorum, qui dividatur per 12 fient asses 914, & relinquuntur 8 denarij, si hanc summam dividas per 20 fient 45 franci; relinquuntur 14 asses; denarij 8 $\frac{4}{104}$.

Posset fieri hæc regula variis modis.

Reducantur duæ fractiones ulnarum ad eandem denominationem nempe $\frac{26}{3}$ $\frac{147}{4}$ fiet denominator 12, & fractiones erunt $\frac{104}{12}$ $\frac{441}{12}$. dic ergo si 104, dant franc. 10, asses 15 den. 8, quid dabunt 441.

Ex francis 10 fiant asses 200, quibus addes 15, fient 215 asses; quos iterum mutabis in denarios, addendo 8, fientque denarij 2588. dic ergo, si 104, dant 2588, quid dabunt 441? multiplica 2588 per 441, fient 1141308, qui numerus si dividatur per 104, fient denarij 10976, numerus denariorum ut priùs.

Paulò aliter fieri poterat per multiplicationem, ut vocant rationalem.

Sit ergo proposita hæc quæstio.

36. $\frac{3}{4}$

Franc. 10.	Asses 15.	Denar. 8.
360.	10.	3.
7.	9.	6.
27.	2.	
	24.	
396.	5	9.
	Per 3.	
1188.	15.	27.
148.	360.	132.
18.	375.	159.
	115.	3.
45.		6.
	11.	14.
		26.
26.	26.	

Si 8 $\frac{2}{3}$ dant francos 10, asses 15, den. 8 quid dabunt 36 $\frac{1}{4}$, primò multiplica 38 $\frac{1}{4}$ per 10 francos, 15 asses, denarios 8, hoc modò. Primo multiplico 36 per 10 francos fiunt 360, tum 10 francos per $\frac{1}{4}$ funtque 7 franci cum dimidio seu cum 10 assibus.

Secundò multiplico 36 per 15 asses, hoc est per $\frac{3}{4}$ unius franci, quod fit sumendo $\frac{3}{4}$ numeri 36, hoc est 27, multiplico item 15 asses per $\frac{1}{4}$ & primò sumo $\frac{1}{4}$ numeri 12, hoc est 9. quæ scribo; item tres quadrantes reliqui numeri 3, hoc est 2 asses cum tribus denariis. Denique multiplico 36 per 8 denarios, seu $\frac{2}{3}$ unius assis, si essent duo trientes unius franci fierent 24 franci, sed quia sunt tantùm duo trientes unius assis fiunt 24 asses. Tum multiplico octo denarios per $\frac{1}{4}$ sunt 6 denarij. Colligantur hæc omnia fient franci 396, 5 asses, 9 denarij, quæ dividere debeo per 8, $\frac{2}{3}$ fiat fractio unica $\frac{26}{3}$ reducanturque summæ dividendæ in trientes multiplicatione per tria, fientque 1188, trientes franci, 15 asses, denarij 27, dividatur prima summa per 26; quotiens erit francorum 45, restantque octodecim quæ per 20 multiplicari debent fiunt 360. hæc addantur assibus 15 fiunt 375, si dividantur per 26, quotiens erit 14 & 7 relinquentur. Quæ per 12 multiplicari debent, fientque 132, quæ addita summæ 27 faciunt 159, quæ divisa per 26, dant 6 denarios.

PROPOSITIO XXV.

De fractionibus decadicis.

In toto hujus libri progressu animadvertere potuisti, quanta oriatur ex fractionibus difficultas, & quàm facilis evaderet arithmeticus computus si numeris tantum integris constaret, aut praxes integrorum in minutiis usurparentur. Hoc arithmetices compendium fractiones decadicæ nobis, exhibent, quæ cum in eadem sint ratione, in qua numeri integri, qui in sedibus anterioribus decuplo augent suum valorem, si usurpentur fractiones tantum decadicæ easdem operationes exigent.

Sunt autem fractiones decadicæ, quæ denominatorem habent decadicum. Nempe 10, 100, 1000, 10000, & ita de reliquis, quæ ita comparantur, cum antecedentibus. Ut semper sint earum partes decimæ. Ut autem melius earum natura innotescat, Tabulam unam proferam totum tam integrorum, quam minutiarum decadicarum ordinem exhibentem.

8. 7. 6. M. M. M. C. D.	5. 4. 3. M. M. M. C. D.	2. 1. 0. C. D. N.
1. 2. D. C.	3. 4. 5. M. M. M. C. D.	6. 7. 8. M' M M' D. C.

Hæc tabula exhibet primo incipiendo ab N, versus sinistram sedes numerorum integrorum, estque N sedes digitorum, D versus sinistram sedes decadum, C. centenariorum, M. millium, MD. decadum millium, MC. centenariorum millium; M'millionum, M'D decadum millionum, M'C centenariorum millionum. Additi sunt numeri 1. 2. 3. 4. 5. &c. qui sunt quasi exponentes, vel potius indices sedium, nempe ostendunt quam sedem ab unitate N occupent singuli numeri. Hæc series numerorum integrorum, ita procedit à dextera ad sinistram, ut semper crescat valor numerorum decuplo. Adhibuimus item aliam seriem incipiendo à littera N cui item addidimus lineam separatricem integrorum à fractis. Hæc series igitur est fractorum ita ut prima sedes D sit fractionum decadicarum. Secunda C centesimarum. Tertia M millesimarum. Quarta MD, decies millesimarum.

Progressio integrorum est 1, 10, 100, 1000, 10000, & ita de cæteris progrediuntur tamen à dextera ad sinistram. Progressio autem minutiarum decimalium est ab unitate $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{1000}$ $\frac{1}{10000}$.

Partes decimales suam appellationem habent à figura sua ultima, ut si scriberetur 34 [5. significaretur 34 cum quinque partibus decimis. Si hoc modo scriberetur 34 [58. triginta quatuor integri cum 58 partibus centesimis 34 [056. triginta quatuor, cum quinquaginta sex partibus millesimis.

Ex hoc clarum est cyphram o, post partes decimales inutilem esse. Ut 84 [500, 84 integri cum 5 partibus decimis, idem enim est [00005 partes decimæ,

decimæ, ac quingentæ millesimæ, Quare cyphra o non apponitur partibus decimalibus ultimo loco, quia in tali casu inutiliter adhiberetur.

Partes igitur decimales adhærent numeris integris, & ab iis distinguuntur lineâ separatrice, quæ nunquam abesse debet, quia autem partes decrescunt eo modo quo numeri, non variabitur operatio etiamsi adjunctæ sint partes decimales, quare hæc decimalium partium computatio longe facilior censetur quam sexagenaria, quâ nonnulli in astronomicis utuntur.

PROPOSITIO XXVI.

Additio numerorum quibus adhærent partes decimales.

4794	[236
584	[3
947	[08
4720	[7439
48	[5
10094	[8599

Ut clarior evadat usus partium decimalium, appono exemplum additionis.

Sint plurimi numeri integri, quibus adhæreant partes decimales, ita disponantur, ut unitates, seu digiti integrorum sibi respondeant, & defectus, si quis est in numeris integris fit ad sinistram, defectus autem si quis est in partibus decimalibus fit ad dexteram. Fiat additio communi methodo, & quia in ultima sede est tantum 9, illud scribatur, in penultima sede invenitur 6 & 3, scribe 9, in antepenultima invenitur 8, 4 & 3, quæ efficiunt 15, scribo 5, & retine 1 pro antecedenti, in qua invenitur 5, 7, 3, 2, cum unitate retenta efficiunt 18; scribo 8 partes decimas; retinendo unitatem, eo quod decem partes decimæ unitatem in integro efficiant. Perficiatur tota additio more consueto in quo vides opus non esse, ulla reductione ad eandem denominationem.

PROPOSITIO XXVII.

Subtractio numerorum quibus adhærent partes decimales.

A.	794	[236.
B.	947	[08.
C.	2847	[156.

Proponatur numerus A, è quo subducendus est numerus B, uterque habeat adhærentes partes decimales. Ita pariter disponantur, ut digiti digitis respondeant. Incipe ab ultima nota, & ex 6 aufer nihil, restant 6 ex 3 superioris, subtrahe 8 restant 5, & retine 1 quod subtrahes ex 2, restabit 1, perficies subtractionem ut solet in numeris integris, & perfecta erit operatio.

D.	489	[05.
E.	243	[4876.
F.	245	[5624.

Pariter si subtrahendus sit numerus E ex D, partium decadicarum, ita subtractionem institues. Si 6 ex o, subtrahas, potes enim subintelligere duo o, in numero superiori, nam 5 partes centesimæ sunt idem ac quingentæ partes. Partes decies millesimæ; quare subintellectis illis duobus o o, in numero superiori facile perficietur subtractio.

PROPOSITIO XXVIII.

Multiplicatio numerorum quibus adhærent partes decimales.

Major est difficultas in multiplicatione partium decimalium, ut nempe habeatur locus conveniens singulorum characterum producti. Quæ difficultas ut intelligatur suppono primò in multiplicatione, singulos characteres multiplicati, duci in singulos characteres multiplicandi. Suppono item quod si digitus multiplicantis ducatur in digitos multiplicandi, efficiet digitos, si in decades efficiet decades; si in partes decimales efficiet partes decimales, si in partes centesimas efficiet partes centesimas, si in millesimas, millesimas: Quare si numerus partibus seu fractione carens, alium numerum, cui adhæret fractio multiplicaverit, tot erunt sedes partium decimalium in facto quot erant in multiplicando.

F.	452	[32.
G.	362.	
	904	64.
	27139	2.
	135696.	
H.	163739	[84.

Ut si numerus F habens duas sedes partium, multiplicetur per numerum G, cui nullæ adhærent partes, in producto H, tot erunt sedes partium, quot erant in F.

Ratio est quia digitus ductus in partes centesimas producit partes centesimas, ductus in decimas, producit decimas. Ergo tot erunt sedes partium decadicarum in producto quot erant in uno multiplicante.

K.	362	[421.
L.	12	[01.
	362421.	
	00000	0.
	6248	42.
	36242	1.
M.	4252	[67621.

Secundò sit multiplicandus numerus K habens tres sedes partium: per numerum L, duas habentem sedes partium, dico in producto M deberé esse quinque sedes partium.

Ratio est quia si numerus L nullas haberet partes; productus haberet tres sedes partium, sed habet duas, quæ multiplicando partes non nisi partes efficere possunt.

Si numerus solas partes habens, ducatur in alium: regula generalis est quod in producto solo tot sint partium sedes, quot sunt in duobus multiplicantibus simul sumptis.

PROPOSITIO XXIX.

Divisio numerorum quibus adhærent partes decadicæ.

Primum axioma erit, ut numerus dividendus, totidem saltem partium sedes habeat quot divisor. Si autem non habeat illi adjungi poterunt tot cyphræ expletivæ o, quot necessariæ sunt. Ut si numerus A, dividendus sit per numerum B, subintelligi debet in numero A, una cyphra o, ratio est quia in applicatione numeri B ad numerum A debet tandem digitus seu unitates numeri B inveniri sub unitatibus numeri A, quod fieri non posset nisi subintelligeretur in numero A unum o.

A. 4 5. [7 6.
B. 1 5. [2 5 1. (3.

Ex hoc sequitur numerum minorem dividi posse per majorem modo minori dividendo, tot cyphræ o addantur quot sunt necessariæ, ut si numerus 32 per 160 sit dividendus, subintelligatur addita cyphra o numero D, sed quæ ad partes decimales pertineat, fiat divisio more consueto erit quotiens F 2, sed quia tot sunt sedes partium decimalium in dividendo, quot sunt in quotiente, & divisore simul sumptis, & nullæ sunt partes decimales in divisore E, cum tamen subintelligatur una, in dividendo, quotiens F significabit partem decadicam seu $\frac{2}{10}$ est ergo 32 quinta pars numeri E. Secundum axioma erit tot esse sedes partium decimalium in solo dividendo quot in divisore, & quotiente simul sumptis, ut suprà in multiplicatione vidimus, ex quo facile constituemus, quot sint sedes partium in quotiente, quæ tamen est præcipua difficultas divisionis partium, nam cæteroquin divisio partium, à divisione integrorum non differt, ut si numerus G dividendus sit per numerum H, fiat divisio methodo communi: invenieturque divisor K, & quia in dividendo sunt duæ sedes partium decimalium, debent totidem esse in divisore H, & quotiente K, quare cum una sedes inveniatur in divisore H, una erit in quotiente K.

D. 3 2. [o.
E. 1 6 o. [2.
F.

G. 7 6 o. [4 3.
H. 2 2. [3.
K. (3 4. [1.

PROPOSITIO XXX.

Minutiam quamcumque ad minutiam decadicam revocare.

Sit proposita minutia A, revocanda ad decadicam: eius numeratori adde unum aut duo o, aut plura si sit opus, numeratorem sic auctum divide per denominatorem 4 donec, vel divisio fiat quæ nihil relinquat, & quotiens hujus divisionis nempe $\frac{75}{100}$ exhibebit minutiam decadicam, quam requiris.

A. $\frac{3}{4}$ 3 0 0. $\frac{75}{100}$
4
C. $\frac{1}{3}$ 1 0 0 0.
(3 3 3.

Demonstratio. Illæ minutiæ sunt æquales in quibus, eadem est ratio numeratoris ad denominatorem, & jam suprà sæpe diximus, sed per praxim nostram id præstamus, instituimus enim regulam proportionum, & dicimus si denominator 4 dat numeratorem 3, denominator 10 vel 100, vel 1000, quem numeratorem exhibebit. Regula autem proportionum jubet, ut secundum numerum ducamus in tertium, & productum dividamus per primum.

Dixi in regula donec divisio nihil relinquat. Si enim voluissem revocare hanc minutiam ad denominatorem 10 non potuissem, eo quod 10 non habeat quadrantem, sed deveniendum est ad numerum 100, qui habet quadrantem.

Aliquando accidit ut reductio præcisa fieri non possit, ut si fractio C reducenda sit ad decadicam nunquam præcisa invenietur. Quia tamen ulterius progredi possumus in ordine ad usum, possumus tam magnam sumere, ut defectus ille sit insensibilis, eodem artificio in vulgarem minutiam datæ denominationis, decadicam convertes institutâ scilicèt regulâ proportionum.

Integrum in minuta decadica cujuscumque denominationis convertes additis cyphris o, ut si numerum 34 in partes centesimas convertere velis, ita scribes 34. [oo minutiam minoris denominationis in minutiam majoris denominationis convertes additis pariter cyphris o ut [21 centesimas convertes in millesimas addito o [021. Pariter delendo aliquas cyphras minutiam decadicam majoris denominationis reduces in minutias minoris denominationis.

PROPOSITIO XXXI.

Numeros denominatos ad minutias decadicas revocare.

Proponantur plures numeri dies 25, horæ 6, min.8, sec.30, revocandi ad simplicem numerum; horæ autem in dies sunt 24 minuta in die 1440, secunda 86400, quare hæ fractiones sunt $\frac{6}{24}$ $\frac{8}{1440}$ $\frac{30}{86400}$ quæ reduci possunt singulæ. Primò dividatur 600 per 24, habebis pro prima $\frac{25}{100}$ divide 80000, per 1440, quotiens erit $\frac{00555}{100000}$ ultimo divide 30 per 386400, quotiens erit $\frac{0000037}{1000000}$ adde omnia ista fient partes 2555537, seu dies 25. [2555537.

Præcipuus usus istarum fractionum est propter logarithmos, nam istæ fractiones eumdem habent logarithmum cum integris, exceptâ characteristicâ, & quod logarithmus fractionum sit defectivus, ut numeri 436 logarithmus est 2.6394865, & numeri 436000, log. est 4.6394865, & numeri 4 [36. log. est o. 6394865. fractionis o [00436, logarithmus est-3.6394865.

ARITHMETICÆ
de extractione Radicum.

LIBER TERTIVS.

DEFINITIO I.

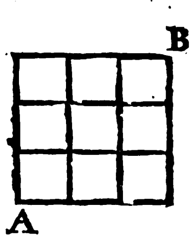
POTESTAS, aut potentia alicujus numeri, est quicumque numerus qui ex eo semel, aut pluries in se ducto generatur. Ipse verò prior numerus dicitur eius radix, aut latus.

A. 5. B. 25. C. 125. Sit numerus A, qui per seipsum multiplicetur, fiatque quadratum eius B, quod quadratum per eundem numerum A multiplicetur, fiatque C; & ita deinceps, numeri B, C & reliqui dicentur potentiæ & potestates numeri A, numerus autem A dicetur eorum radix, & latus.

Ratio harum appellationum est, quod numeri B & C, sint id quod numerus A potest producere, & quasi effectus, & mensura potentiæ ejusdem numeri A. Dicitur autem numerus A radix, quia illi omnes numeri constituunt aliquam seriem numerorum geometricè continuè proportionalium, cum ènim fiant illæ potentiæ, ex continuâ multiplicatione numerorum productorum, per ipsam radicem, fit ut eandem semper rationem habeant. Ut cum B fiat per multiplicationem ipsius A, per seipsum B erit quintuplus ipsius A, & C quintuplus numeri B, & ita consequenter, cujus proportionis denominatio petitur ab ipso A, ita ut quam rationem habet numerus A ad unitatem, eam habeat B ad A, & C ad B. Quare A est radix illius proportionis. Dicitur autem idem numerus, latus; quia ut iam diximus, licet nobis concipere numeros, ad modum quantitatis continuæ; cum ergo numerus seipsum multiplicat, producitur rectangulum æqualium laterum, cujus ipse numerus est latus, idem dicendum est in cubo.

DEFINITIO II.

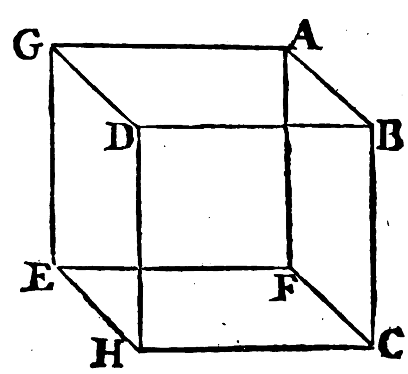
Quadratus numerus est ille, qui oritur ex multiplicatione numeri alicujus per seipsum, ut novenarius est numerus quadratus, quia oritur ex multiplicatione numeri ternarij, per seipsum. Quia ille numerus concipi potest ad modum quadrati A B divisi in novem quadratula.



Licèt autem in strictâ acceptione, ille tantùm numerus sit quadratus, qui ex multiplicatioone oritur numeri per seipsum, nihilominus sæpè licet nobis imaginari quemcumque numerum, ad modum quadrati & ejus radicem investigare, quæ licèt non sit numerus integer, poterit tamen dari numerus fractus, qui quàm proximè accedat ad ejus radicem. Ita numerum 12. imaginabimus tanquam quadratum, & quæremus quænam sit eius radix quadrata, quæ quidem nec erit 3. nec 4. sed aliquid intermedium, quam etiamsi exactè nùmeris exprimere non possimus; poterimus tamen ad illam propiùs accedere.

DEFINITIO III.

Numerus cubus, est numerus productus ex multiplicatione quadrati per radicem, quæ definitio ex superiùs dictis jam satis intelligitur, nam



si radix A B produxit per sui multiplicationem quadratum A B D G quod iterum intelligatur multiplicari per eandem radicem, ita ut A F sit æqualis ipsi A B producetur cubus, ut si A B constet tribus unitatibus quadratum AD erit novem quadratulorum & cubus AH constabit 27. parvis cubis.

Licèt nullam aliam speciem quantitatis continuæ habeamus, nihilominus non tantùm radix per seipsam multiplicari potest, ut fiat quadratum, & quadratum per eandem radicem, ut fiat cubus sed etiam cubus per eandem radicem, & genitus adhuc per eandem radicem, atque ita deinceps in infinitum, qui omnes numeri sunt potestates ejusdem radicis, sortiunturque varia nomina prout opus fuit pluries repetere multiplicationem, ut producerentur tales numeri.

Ut autem faciliùs possimus singulis potestatibus sua nomina tribuere, animadvertendum est quantum à radice distent; hoc est quot opus sit multiplicationibus, ad hoc ut producatur. Unde illis subjicimus characteres numerales ordinarios, qui exponentes dicuntur, quia exponunt quantùm quilibet numerus in sua serie distet à radice quod ut intelligatur ponatur radix 2. per continuam multiplicationem produxisse suum quadratum, cubum cæterasque potestates.

Cui

A. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

2. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Cui radici 2, si præponatur unitas; erunt numeri continuò dupli, supponatur radici unitas, quadrato 4 binarius; cubo 8 ternarius, & ita deinceps, illi numeri qui subjiciuntur denominationis causâ potestatibus, dicuntur exponentes, quia exponunt quænam sint illæ potestates, quibus subjiciuntur. Tales autem exponentes vel sunt numeri primi, vel sunt numeri compositi; si sint numeri primi, potestates quibus subjiciuntur, dicuntur numeri surde solidi, vel supersolidi non quod careant radice, sed quia sunt supra solidum, hoc est plures, quam tres dimensiones habent, hoc est; opus est pluribus multiplicationibus quam requirantur, ad solidum efformandum, ideoque excipiendæ sunt duæ primæ potestates nempe quadratum & cubus, aliæ verò potestates in quas incidunt exponentes, qui sunt numeri primi, vocantur supersolidi, ita ut ille cujus exponens est 5. dicatur primus supersolidus, cujus exponens est 7 supersolidus. Secundus, cujus 11 erit exponens supersolidus. Tertius & ita deinceps.

Illæ verò potestates quarum exponentes sunt numeri compositi, habent denominationem compositam, ad quam inveniendam quæratur minimus numerus primus, per quem dividi possit eius exponens, & fiat continua divisio donec quotiens sit etiam numerus primus; habebit illa potestas compositam denominationem ex omnibus, denominationibus illorum numerorum, qui sunt quotientes in illis divisionibus, quod exemplis patebit.

Proponatur potestas cujus exponens sit numerus 4, qui componitur ex 2 dividatur 4 per 2, quotiens erit etiam 2, qui binarius multiplicando seipsum facit 4, denominatio competens binario (nempe denominatio quadrati, nam binarius est exponens quadrati) repetita dabit denominationem competentem illi potestati, & dicetur quadrato-quadratum, potestas cujus denominator 6, dicetur quadrato cubus, quia exponens 6; fit per multiplicationem binarij, & ternarij qui sunt exponentes cubi, & quadrati. Sit potestas cujus exponens 8; dividatur 8 per 2, fiunt 4; dividatur 4, iterum per duo fiunt 2, igitur 8 componitur ex binario ter sumpto. Igitur potestas cujus 8 exponens est, quadrato quadrato-quadratum, dicetur potestas cujus exponens 9 est cubo-cubus, cujus exponens 10 est supersolidi primi quadratum. Potestas cujus exponens 12 est quadrato quadrato-cubus, quia ad producendum 12, opus est 2. 2. 3. hoc est, ut 2, multiplicent duo, fiantque 4 quæ multiplicentur per tria.

Ratio autem est, quia verbi gratia in potestate cujus exponens 4, & quam vocabimus quadrato-quadratum, licèt opus sit ut radix quater multiplicetur, ut generet potestatem 4, nempe in unitatem, ut seipsam generet. Secundò in seipsam ut producat quadratum, deinde in quadratum ut producat cubum. Tertiò in cubum, ut producat quartam potestatem: eadem potestas producetur aliâ viâ, si nempe quadratum seipsum, multiplicet faciatque suum quadratum, nempe quadrato quadratum.

Ostendimus enim cùm de multiplicatione, tres, aut plures numeros seipsos invicem multiplicantes, eundem numerum producere; quomodocumque instituatur illa multiplicatio; sed ad producendam quartam potestatem quatuor multiplicationes adhibendæ, sunt. Prima unitatis ut generet radicem, secunda radicis per seipsam, ut generet quadratum. Tertia quadrati ut generet cubum. Quarta cubi ut generet quartam potestatem; sed multiplicando quadratum, per seipsum idem est, ac si multiplicarem quadratum per radicem, deinde productum per radicem, cum in productione ipsius quadrati, jam interveniat multiplicatio una per radicem; igitur eadem producetur potestas multiplicando quadratum, per quadratum, quæ ducendo quadratum in radicem, & productum multiplicando per radicem, quod etiam verum est respectu omnium, quorum exponentes sunt compositi.

Ex quo sequitur, quòd potestatis compositæ non tantùm nomina sunt reciproca, hoc est dici potest quadrato cubus, vel cubo quadratum, sed etiam perinde, sit vel incipere ab extractione radicis cubicæ, & postea ab eâ extrahere radicem quadratam vel incipere ab extractione radicis quadratæ, tum ab ea extrahere radicem cubicam. Cùm enim ostenderim quando fit multiplicatio plurium numerorum eundem numerum generari, quocumque ordine fiat multiplicatio. Cum divisio contraria multiplicationi, restituat eum primum numerum à quo inceperunt multiplicationes, sequitur quòd in extractione radicum (quæ extractio, est species divisionis) quocumque ordine extrahantur radices, idem tamen quotiens inveniatur.

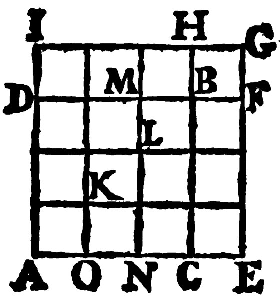
Quærimus autem in totâ hac parte, ut potestate quâlibet datâ, inveniatur primus numerus progressionis geometricæ denominativus, ut si in progressione geometrica superiùs proposita; daretur potestas cujus exponens 6. nempe quadrato cubus 64, quæritur initium progressionis geometricæ nempe binarius, qui est radix totius illius progressionis: incipiemus autem à radice quadrata, nempe ut quæratur ille numerus dato eius quadrato. Extractio autem radicis quadratæ est investigatio numeri qui seipsum multiplicando datum numerum producat præmittemus autem aliqua Theoremata.

PROPOSITIO I.

Theorema I.

Si ad quadratum numerum eius radix duplicata addatur, simul cum unitate; fiet quadratus proximè major.

Sit



Sit quadratum A B cujus radix quadrata A C vel AD; dico quòd si radix quadrata AC duplicata ipsi quadrato AB addatur, & insuper unitas, quòd fiet quadratum proximè majus; hoc est quadratum radicis unitate majoris, quàm sit AC. Sumatur enim hæc radix AE, perficiaturque eius quadratum AG, producanturque C B, DB in H & F, ostendam quòd in quadrato AG præter numerum quadratulorum quæ continet AB, adhuc inveniuntur bis quot sunt unitates in AC, & insuper unum.

Demonstratio. (*Per 4. 2. Eucl.*) quia linea AE divisa est in C; erit quadratum lineæ AE, æquale quadratis linearum AC, CE, C E autem est unitas, & rectangulo bis sub A C, CE, sed rectangulum sub AC, CE tot continet quadratula quot sunt unitates in AC, cum multiplicetur AC, tantum per unitatem C E; igitur quadratum A E continet tot quadratula, quot sunt in AB, & insuper bis quot sunt unitates in AC, nempe rectangula C F, DH, & insuper unum BG, nempe quadratum unitatis; quod erat ostendendum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si à numero quadrato duplicatam eius radicem auferas, minus tamen unitate; quadratum numerum proximè minorem habebis.

Sit quadratus numerus AG, cujus radix quadrata seu latus AE; dico, quòd si à tali quadrato AG auferas duplicatam radicem AE, minùs tamen unitate, hoc est si radix sit 4, & duplicata sit octo, auferas tantum 7 restabit quadratus numerus proximè minor; seu quadratus numerus radicis, quam AE superat unitate.

Demonstratio. Quadratum AG superat quadratum AB Gnomone DGC, sed Gnomon DGC; habet tot quadratula, quot sunt in linea A E bis sumptâ, uno excepto, ergo si tot auferas unitates quot sunt in radice AE bis sumptâ, minùs tamen uno, habebis sequentem minorem quadratum numerum A B; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Numerus quadratus, ex tot imparibus numeris constat, ab unitate incipientibus quot ejus radix unitates continet.

Sit quadratus numerus AG cujus radix contineat 4 unitates: dico quadratum A G, æqualem esse quatuor primis numeris imparibus 1. 3. 5. 7. simul sumptis.

Demonstr. Ut ex quadrato unitati, nempe AK, fiat quadratum binarij, nempe AL, debet duplicari radix, & addi insuper unitas, nempe addi ternarius, ut ex quadrato A L binarij fiat quadratum ternarij, debet duplicari binarius, & addi unitas; & hoc est addi quinarius: pariter ut fiat quadratum AB debet insuper addi ternarius duplicatus cum unitate: igitur quadratus numerus AG continebit tot numeros impares, quot radix eius quadrata continet unitates.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Omnis numerus integer carens radice integrâ, caret & fractâ.

Sit numerus A inter duos proximos quadratos B & K positus; dico illum carere radice integrâ, & fractâ. Quod autem inter duos numeros quadratos cadant aliqui numeri facilè constat; Cùm enim dato quadrato verbi gratiâ AL (*in figurâ superiori*) ad habendum quadratum proximum, seu radicis unitate majoris, debeat duplicari radix, & addi unitas, si addatur numerus minor, duplicatâ radice, fiet numerus minor quadrato radicis unitate majoris, sit talis numerus assumptus A M; certum est illum non esse quadratum radicis A N cujus quadrato sunt additæ duæ unitates; neque etiam erit quadratus sequentis radicis A C, quia non est addita duplicata radix: ergo restat ut talis numerus non habeat radicem integram. Probo autem nullam habere fractam radicem, hoc est nullam partem aliquotam, aut radicum AN, AC, aut etiam assumptæ unitatis A O; immò neque integrum cum partibus quibuscumque posse esse radicem præcisam illius AM, seu 6.

A. 6. B. 4. K. 9.
C. $\frac{21}{3}$ D. $\frac{7}{}$ E. $\frac{49}{}$
G. 3. F. 9.

Demonstratio. Sit enim si fieri potest numerus C, integer cum fractione, radix quadrata numeri A reducatur ad simplicem fractionem DG quæ per seipsam multiplicata faciat E F; igitur EF est ipsius quadratum. Cum autem supponatur C, seu DG esse radix numeri A, erunt A & EF æquales; reducatur EF ad integros (quod fit si F dividat E) ut autem exurgat per hanc divisionem numerus A integer, debet F metiri E; sed E est quadratum nempe radicis D & F est quadratum radicis G (ostendit autem Eucl. propos. 14. 1. 8. quod quoties quadratus numerus metitur alium quadratum, quod etiam radix prioris metitur radicem posterioris, ut quia quadratus numerus 4 metitur quadratum 16, radix eius 2, metietur radicem 4,) igitur G metietur D. Sed quoties denominator metitur numeratorem fractio æqualis est integro; ergo fractio DG esset æqualis integro, ergo numerus C non potest esse numerus integer cum fractione, sed integer; quod est contra suppositionem; ergo numerus A non habet radicem fractam.

Hoc etiam de cubicâ probari potest.

Notandum autem quid intelligamus dum dicimus numerum 6 non habere ullam radicem quadratam quæ numeris exprimi possit. Primò certum est quod si detur rectangulum AM poterit fieri quadratum illi æquale cujus radix quadrata linearis assignabitur: sed illa exprimi non poterit numeris in eâ suppositione in quâ rectangulum AM 6, unitatibus expressimus; hoc est si assignetur linea quæ sit radix quadrata, quadrati æqualis rectangulo AM, hæc linea erit incommensurabilis cum linea AO; quæ tanquam prima unitas assumpta est in hâc hypothesi, ita ut illam lineam non possint metiri, quæcumque partes aliquotæ, ipsius AO. Et in eo sensu intelligendæ sunt omnes illæ demonstrationes, & propositiones algebraicæ, nempe quòd aliqui numeri habeant radices surdas, quæ audiri & nominari non possint, nempe, quæ per numeros exprimi non possint manendo in eâdem hypothesi, in quâ communis aliqua mensura, nempe eadem unitas, aut partes ejus aliquotæ suppositæ sunt; nam ut dixi si quilibet numerus exprimi potest rectangulo, si inter ejus latera quæratur media proportionalis, hæc erit radix quadrati æqualis dicto rectangulo, sed illa non poterit habere communem mensuram, cum lateribus prioris rectanguli, neque quadratum ejus poterit habere communem mensuram planam, cum priori rectangulo, hoc est si rectangulum, in quadratula divisum sit, hæc quadratula non poterunt exactè metiri illud quadratum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Quadratus numerus constans duabus cyphris, radicem habet unicâ constantem cyphrâ, qui tribus & quatuor, habet radicem duabus constantem, qui quinque & 6 tribus constantem.

Certum est numerum 9 maximum esse unicâ figura expressorum; certum est item numerum 9, multiplicando seipsum, non facere novem decades; sed aliquid minus; novem autem decades ex institutione cyphrarum, & earum significatione, possunt exprimi per cyphras, quæ pertineant ad penultimam sedem, quadratum verò numeri 10, quæ est prima radix duabus, constans figuris, exprimi non potest duabus cyphris. Vetuimus enim ut in aliquâ sede verbi gratiâ decadum, plures quàm novem decades proponerentur: ergo quodcumque quadratum duabus cyphris constans; habet radicem unicâ constantem cyphrâ.

Numerus 99 est maximus qui duabus cyphris exprimi possit; sed ille per seipsum productus facit numerum minorem centum centenariis. Centum autem centenaria seu decies mille, est primus numerus qui exprimi debet quinque cyphris: ergo quadratum maximæ radicis quæ exprimi possit duabus cyphris; exprimi potest quatuor cyphris.

Pariter 999 est maximus numerus qui exprimi possit tribus cyphris, cujus quadratum minus est quam mille millia, mille autem millia est numerus primus qui exprimi debeat septem cyphris; igitur quadratum maximi numeri qui constet tantum tribus cyphris, exprimi potest sex cyphris. Sed post 9. 99. 999 sequuntur immediate 10. 100. 1000. quorum quadrata exprimuntur tribus, quinque, 7 cyphris; igitur si quadratum unicâ, vel duabus cyphris constet, eius radix unicam cyphram habebit; si tribus vel quatuor, eius radix duas habebit; & ita deinceps; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si cubus tres tantùm, aut pauciores figuras contineat, radix eius cubica unicam continebit; Si quatuor, quinque, sex, radix duas; si septem, octo, novem radix tres.

Demonstratio. Cubus cujus radix cubica est 10, prima constans duabus figuris est 1000 primus numerus constans quatuor figuris; ergo si cubus pauciores contineat figuras quam quatuor, radix cubica pauciores continebit figuras quam duas, ergo unam.

Pariter radix cubica 100, prima constans tribus figuris habet cubum 1000000, qui est primus numerus constans 7 figuris; ergo si cubus pauciores contineat nempe 4 sex, quinque & quatuor, radix constabit duabus, atque ita deinceps.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Numeri quadrati radicem quadratam invenire.

```
        o o o o
A.  4 1 2 1 6 4.
     .   .   .
     6.          ( 6 4 2.
    1 2 4.
      1 2 8 2.  B.
```

Sit numerus A quadratus, cujus radix quadrata quæritur.

Primò, sub ultimâ cyphrâ notetur punctum, deinde sub antepenultimâ, & ita deinceps; quot autem erunt puncta tot erunt figuræ numerales in quadrata radice (*per 4 huius*) ut in hoc exemplo erunt tres; quæ sunt inveniendæ sigillatim, methodo ferè quâ in divisione usi sumus.

Secundò, membri per primum punctum ad sinistram designati. Quære radicem quod facile erit cum nulla debeat haberi ratio cæterorum membrorum, sit autem facilè memoriâ tenere, quadrata novem cyphrarum, numeralium; nempe unitas habet pro quadrato unitatem; binarius

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9.
	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

quaternarium ut in apposito exemplo, numeri 41; maxima radix est 6. hæc scribatur tanquam quotiens,

quotiens, scribatur item sub primo puncto tanquam divisor, tum multiplica 6 per 6 ut fiant 36, quem numerum subtrahes ex 41 relinquuntur 5.

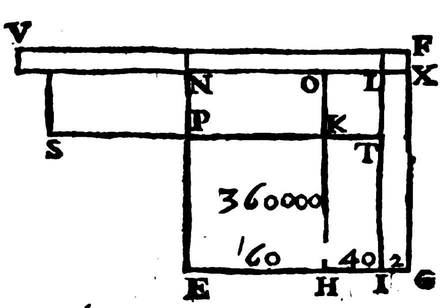
Tertiò prima figura quotientis inventa nempe 6 duplicetur, fiatque 12 : numerus 12 scribatur tanquam divisor, sed ita tamen ut eius ultima non attingat secundum punctum. Examina quoties 12 in 52 invenitur,inveniesque 4 qui numerus 4 scribi debet tam in quotiente, quàm in divisore,multiplicetur 124 per 4, & productus subtrahatur ex 521, relinquetur 25.

Quartò iterum duplicentur inventæ duæ figuræ quotientis, nempe 64, ut fiat 128, qui numerus ita scribatur sub reliquo numero dividendo; ut non attingat ultimam cyphram 4 puncto notatam, & quære ut in divisione quoties invenitur 128 in 256, inveniesque 2. scribe 2, tam in quotiente, quàm in divisore, ita ut totus divisor illius membri sit 1282.quare 1282. multiplicetur per 2, & productus auferatur ex reliquo dividendi, nempe ex 2564, si nihil restat, numerus propositus erat quadratus; dico inventum quotientem B,esse radicem quadratam numeri A. Hoc est B multiplicatum per seipsum producere numerum A.

A.	4 1 2 1 6 4.
	. . .
B.	4 1 0 0 0 0.
C.	2 1 0 0.
D	6 4.

Demonstratio. Primò quidem per subscriptionem punctorum sub numero A illum quasi dividimus in aliqua membra, nempe B, C, D; ipsi æqualia, & cum 6 constet cyphris numerus A; eius radix constabit tribus (*per propositionem quartam hujus*) quærimus autem primò radicem maximam numeri 41 subintellectis cyphris 0000. Pariter eius radici 6, subintelligimus duas cyphras, quasi esset 600, nam eum valorem obtinebit cum addantur ipsi duæ aliæ figuræ. Quod si 6, productus per 6, non producit 41, sed tantum numerum quadratum minorem 36, productus per 600, non producet 410000,sed numerum 360000. Pariter si 7 productus per 7 producit plusquam 41 & 700, productus per 700, numerum majorem produccet quam 410000. quare prima cyphra debet esse 6 & non 7.

Supponatur ergo numerus primò propositus esse quadratum E F cujus radix quadrata quæritur nempe E G, & quia scimus eam radicem seu latus E G, constare tribus figuris numeralibus supponatur prima ignota esse linea E H, secunda esse H I, tertia I G.



Quærimus ergo radicem quadratam maximam numeri 41 seu 410000, quam invenimus esse 6 seu 600, quia illi addentur duæ figuræ, jussimus illam multiplicari per seipsam, ut fieret eius quadratum 36 aut 360000, quod voluimus auferri ex 41 seu 410000, ut relinqueretur 50000, igitur formavimus quadratum EK 360000, quod ablatũ ex EF relinquit Gnomonem HFP nempe 52164.

Tertiò 6 prima figura inventa seu linea EH duplicatur. Ut habeatur tota linea S K erit enim totum rectangulum S L æquale Gnomoni P L H, illius autem rectanguli non tota longitudo S T cognoscitur. Quæ si cognosceretur, per divisionem simplicem cognosceretur eius latitudo T L, seu K T, aut H I. Nam cognoscitur area nempe membrum secundum relictum factâ subtractione primi quadrati E K. Ideoque Gnomon PLH, seu rectangulum SL supponitur esse 52100, vides ergo rationem cur duplicetur figura 6 seu 600 inventa; ut fiat 12 seu 1200, divide ergo 52100 per 1200 seu 521 per 12, hoc est SL per SK; ita tamen ut quotiens L T, addatur ipsi S K, ut fiat tota S T. Invenio per eam divisionem L T esse 4 seu 40, perfectâ autem divisione relinquitur 25 quæ pertinent ad tertium membrum.

Quartò iterum propter eandem rationem jubemus duplicari duas cyphras radicis, nempe 64 seu 640, ut habeatur N L bis, seu VL; rectangulum autem VF æquale est, Gnomoni N F I; quæritur autem latitudo XF, aut LX seu IG, & supponitur Gnomon N F I, seu rectangulum V F, esse reliquum numeri propositi nempe 2564, qui numerus dividi debet per VX, cum tamen sciatur tantum VL; nempe bis 64 seu 128, quare quotiens FX, addi debebit ipsi VL, ut fiat V X totus divisor; invenitur autem 2, pro linea FX; quare totus divisor VX erit 1282.

Igitur 642, erit linea E G latus quadrati E F, seu radix quadrata numeri A primò propositi.

Praxes divisionis traditæ superiùs, cum de divisione; possunt extractioni radicis quadratæ adhiberi; ut nempe evitetur multiplicitas cyphrarum scribendarum, aut delendarum ideoque. Secunda methodus divisionis quæ præ cæteris arridet hic adhiberi potest.

Pariter illa omnia examina quæ divisioni adhibentur hic etiam valent, sive per multiplicationem, sive per abjectionem novenarij, sola diversitas quæ hic reperitur est, quod divisor & quotiens sint idem. Nam radix quadrata alicujus numeri, est numerus qui seipsum multiplicans producit numerum propositum.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

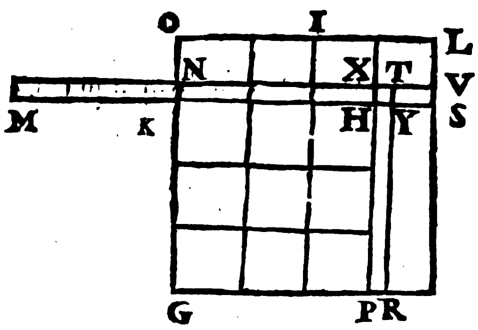
Numeri non quadrati, radicem propinquiorem vera investigare.

Demonstravimus propositione 4. numerum non quadratum, seu carentem radice integrâ, carere & fractâ, possumus tamen ad veram magis,ac magis accedere. Ita ut sæpè error ita sit exiguus,ut ferè evanescat; quærimus ergo numerum qui per seipsum multiplicatus producat quàm proximè datum numerum.

Detur igitur numerus A, cujus methodo præcedenti sit inventa radix quadrata B, relinquatur autem totâ operatione peractâ numerus D : duplicetur radix inventa B, ita ut fiat numerus C denominator fractionis, cujus numerator sit numerus D relictus. Dico numerum B, cum fractione D C, esse radicem numeri A justo majorem, quòd si denominatori fractionis addatur unitas, ita ut fiat fractio E F; dico numerum B unà cum fractione E F, esse radicem numeri A justâ minorem.

A.	11.	D.	2.
B.	3.	D. / C.	$\frac{2}{6}$.
B.	3.	E. / F.	$\frac{2}{7}$.

Demonstratio. Sit numerus A repraesentatus per quadratum G H, & duo quadratula K I. Hoc est formavimus ex numero A, primò quadratum G H, novem unitatum, cujus radix qua-



drata B 3. & K I erit numerus D residuus. Si radix quadrata B duplicetur & addatur quadrato G H, simul cum unitate; fiet quadratum G L proximè majus nempe 16. hoc est cujus radix unitate superaret radicem inventam. Igitur ut augeatur quadratum duplicatâ radice & unitate, necessaria est unitas in radice. Ut augeatur quadratum numero D residuo seu duabus unitatibus ut fiat 11. quasi regulam trium instituimus. Licèt omninò regula trium rem non absolvat, neque enim radices, ad sua quadrata eandem habent rationem, sed dum radices non multum differunt, error non erit magnus. Id autem praestamus factâ fractione cujus numerator est E, & denominator F. Nam haec fractio se habet ad unitatem ut 2 ad 7. nempe ut numerator ad denominatorem. Supponatur ergo unitas KO divisa esse in N, ita ut K N sit duae septimae lineae KO, hoc enim exhibet fractio $\frac{2}{7}$, intelligatur KM esse aequalis ipsi K H, aut H P, eritque M H radix B duplicata, cui addita est H S unitas. Clarum etiam est quod rectangulum M N sit aequale rectangulo HR, atque adeò rectangulum M T sit aequale gnomoni M T P, sed rectangulum M T linea K N adjecta radici addit quadrato GH; & rectangulum M T minus est rectangulo K I, hoc est numero D residuo, cum enim ut M S, seu 7 ad O I, seu 2, ita O K ad M K, erit rectangulum M V aequale rectangulo K I (*per 16. 6. Eucl.*) ergo O I majus est quam M T, seu gnomon K T P: ergo fractio K N nimis parva sumpta fuerat. Neque enim radix G N habet quadratum GT aequale numero A, sed deficit ab eo rectangulo T S.

Jam verò sit alia fractio D C, hoc est KN, quae sit duae sextae lineae KO. Assero Gnomonem K T P additum, superare numerum D seu rectangulum K I. Cum enim sit ut M H seu 6 ad OI 2. Ita O K ad K N, (*per 16. 6.*) erunt rectangula M X K I aequalia, sed Gnomon K T P majus est rectangulo M X, addit enim insuper quadratum H T; igitur quadratum totum G T, quod fit ex radice G H, hoc est radice 3 $\frac{2}{6}$ superat numerum A: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

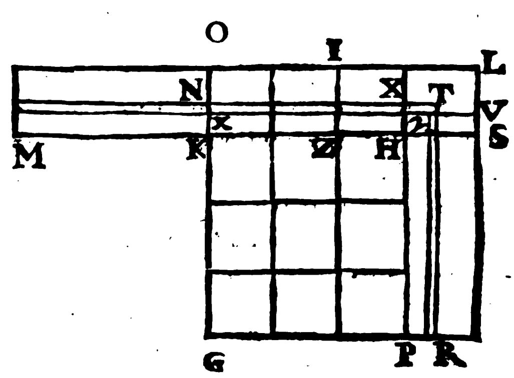
Si numerus relictus major est radice, aut illi aequalis, radix minor verâ exactior est, si minor sit, radice, radix major verâ exactior erit, quàm minor verâ.

Sit primò numerus D aequalis radici, supponatur enim numerus A fuisse 12. ita ut relinquatur 3. post extractionem numeri novenarij seu quadrati. Dico quod si addatur fractio $\frac{3}{6}$ haec minùs exacta erit quam $\frac{3}{7}$.

Demonstratio. Cum enim in fractione $\frac{3}{6}$ numerator sit media pars denominatoris, linea N K erit media pars lineae K O, & consequenter H Y media pars lineae H S: igitur Y S erit etiam aequalis lineae H Y, sed rectangulum Y V non habet altitudinem aequalem ipsi N K, nam tres septimae sunt minores, quàm tres sextae; igitur rectangulum Y V, quo quadratum radicis minoris verâ, superatur à numero A proposito, minus erit quàm quadratum H T, quo quadratum radicis majoris verâ, superat numerum propositum.

Multò magis si numerus relictus superaret radicem, verbi gratiâ si esset 4. nam facta fractio $\frac{4}{6}$ superaret mediam partem unitatis, atque adeò adhuc tunc quadratum H T multò magis superaret rectangulum Y V.

Quod si numerus relictus D minor esset radice primò inventâ, verbi gratia supponatur primus numerus esse 11. ita ut quadrato GH seu 9. ablato, relinquatur 2. seu K I. Dividatur K O in 6



partes. Accipiatur K N duarum partium, & per N ductâ parallelâ ipsi K H, caeterisque ut priùs, erit primò rectangulum M X, aequale rectangulo KI. Cum enim sit ut M H, nempe 6. ad K Z nempe 2. ita K O quae divisa est in 6 partes ad N K, quae est duarum, erit (*per 16. 6.*) rectangulum sub primâ M H, & quarta K N, nempe rectangulum M X, aequale rectangulo K I: sed dum additur fractio $\frac{2}{6}$ radici 3. fit quadratum G T. Et additur priori quadrato Gnomon KTP, qui superat rectangulum M X, quadrato H T: igitur radix aucta fractione $\frac{2}{6}$ paulò majorem numerum producit. Iterum dividatur KO in 7 partes

tes accipianturque duæ nempe KX. ducaturque XV. erit pariter rectangulum MV. æquale rectangulo KI; sed addendo fractionem $\frac{1}{7}$ nempe KX ipsi radici, additur quadrato priùs invento nempe 9. Gnomon MYP qui minor est, quam rectangulum MV, & deficit ab eo rectangulo YS; sed rectangulum SY majus est quadrato HT; ergo constat propositum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Quadratus quadratum multiplicans quadratum producit, cujus radix est numerus productus ex multiplicatione radicum.

A. 4. B. 9. C. 36.
D. 2. E. 3. F. 6.

Sit numerus quadratus A, cujus radix D, qui multiplicet numerum quadratum B, cujus radix E; & producat numerum C, dico si multiplicentur D, & E, ita ut fiat F; quod numerus F multiplicatus per seipsum producet C.

Demonstratio. Quia numerus D multiplicando, & seipsum & numerum E, producit A & F, erit (*per* 17. 5.) ut A ad F; ita D & E; & quia E multiplicans & seipsum & numerum D, facit B & F; ita erit B ad F; ut E ad D; & invertendo ut F ad B; ita D ad E; sed ut D ad E; ita jam erat A ad F; igitur ita est A ad F; ut F ad B; igitur (*per* 17. 6.) rectangulum sub A & B; seu numerus C, æqualis est quadrato medij, nempe numeri F; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

Si quadratus numerus quadratum metiatur, illum metietur per quadratum numerum; cujus radix habebitur si radix divisi, per dividentis radicem dividatur.

In eodem exemplo quadratus numerus C, dividatur per quadratum numerum B, & quotiens sit numerus A, dico numerum A, esse quadratum, cujus radix D habebitur, si radix numeri C divisi, nempe F, dividatur per radicem E, numeri dividentis.

A. 4. B. 9. C. 36.
D. 2. E. 3. F. 6.

Demonstratio. Cum numerus C, sit quadratum numeri F; & oriatur ex multiplicatione numeri B, per A; erit ut A ad F; ita F ad B, & cum E multiplicando D, faciat F, & multiplicando seipsum faciat B; erit ut F ad B; ita D ad E; igitur ita est D ad E; sicut A ad F; si ergo D, multiplicet seipsum, & numerum E; fiet numerus qui se habebit ad F, ut A ad F, ergo fiet numerus æqualis numero A; sed numerus ortus ex multiplicatione numeri D per seipsum quadratus est; igitur numerus A, quadratus est; cujus radix D est quotiens divisionis, in qua numerus F, per E divisus est, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si numerus quadratus numerum non quadratum multiplicet, numerum non quadratum producet.

Si enim numerum quadratum produceret, dividendo hunc numerum quadratum productum per quadratum producentem, quotiens esset ille alius numerus qui per præcedentem quadratus esset; contra suppositionem.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Fractionis quadratus numerus, est fractio cujus numerator est quadratum numeratoris & denominator quadratus denominatoris.

A. $\frac{3}{5}$. B. C. $\frac{3}{5}$ D. E. $\frac{9}{25}$ F.

Sit fractio AB; dico si multiplicetur A per seipsum, fiatque E, quadratus numerus numeratoris A, item B multiplicetur per seipsum, fiatque F: dico inquam quòd quadratum fractionis AB, erit fractio EF. Sit enim fractio CD æqualis ipsi AB; si multiplicetur AB per CD idem erit ac si AB, per seipsam multiplicaretur: sed si AB multiplicetur per CD, ut vidimus, debent multiplicari denominatores, inter se, item & numeratores; igitur EF erit quadratum, ipsius AB. Pariter ut quæratur radix fractionis, quærenda est radix, tam denominatoris, quam numeratoris, nam tunc fiet radix, cujus quadratus numerus erit prior propositus, quæ omnia per se patent.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Numeri non quadrati, radicem exactiorem quantum libuerit constituere.

A 32.
B. 36.
C. 1152.
D. 33.
E. 6.
F. 5. G. $\frac{3}{6}$ H.

Sit numerus quicumque A, non quadratus; cujus quæritur radix quadrata, semper exactior; hinc multiplica per numerum quemcumque quadratum B, oriaturque numerus C, cujus quæratur radix quadrata D, neglectâ fractione, si quæ illi adhæret. Hæc radix quadrata D dividatur per E radicem numeri B, exurget numerus F cum fractione GH, dico hunc numerum esse radicem verâ quidem minorem, quâ aliam propiorem inveniemus, si numerum A per alium quadratum majorem numero B multiplicaverimus.

A. $\frac{32}{1}$ K. B. 36. C. $\frac{1152}{36}$ D. D. $\frac{33}{6}$ E. F. 5. G. $\frac{3}{6}$ H.

Demonstr. Numerus A intelligatur per modum fractionis subscriptâ illi unitate; K multiplicetur per numerum B, tam denominator, quàm numerator illius, fiet fractio CD æqualis fractioni AK; quia (*per 6.5. Eucl.*) C ad D eandem rationem habet, ac A ad K. Extrahatur radix tam numerat. C, quàm denominatoris D. eritque (*per prop. decimam hujus*) fractio DE radix fractionis CD: ergo & fractionis AK, illi æqualis; ergo & numeri A, ut autem reducatur ad integrum numerum dividatur numerator D, per denominatorem E, fietque radix numerus F, cum fractione GH; quod erat ostendendum.

Numeri autem aptissimi ad id facilè præstandum, sunt numeri quadrati decadici, quarum radices sunt etiam decadicæ ut 100, cujus radix est 10 vel 10000, cujus radix est 100; nam ad multiplicandum numerum addendi sunt duo 00, vel quatuor 0000 vel sex 000000, & ex radice inventa auferuntur tot ultimæ figuræ quot sunt in radice quadrata. Proponatur idem numerus A, hunc multiplica per B; quot fit facile additis quatuor 0000; ut fiat numerus C, ex quo si extrahas radicem quadratam hæc erit D; radix autem numeri B est E: divide D per E, quod fiet assumptis duabus ultimis figuris nempe 70 pro numeratore quia radix E bis continet 0, vel quia addidisti duos binarios figuræ 0, post numerum A fietque F, cum fractione G H quæ est semper minor verâ: sed quò major fuerit numerus productus, eò erit exactior.

A. 3 2.
B. 1 0 0 0 0.
C. 3 2 0 0 0 0.
D. 5 7 0.
E. 1 0 0.
F. 5. G. 70 / H. 100.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Fractio potest esse numerus quadratus & terminis non quadratis constare.

A. $\frac{4}{9}$ B. C. 3. D. $\frac{12}{27}$ E.

Sit fractio AB quæ sit quadrata & constet terminis quadratis A & B; dico posse dari aliam illi æqualem, & consequenter quæ quadrata sit, cujus tamen nec numerator, nec denominator sint quadrati. Numerus enim quicumque C non quadratus multiplicet numeros quadratos A & B producantúrque numeri D & E; fractio DE ut patet æqualis est fractioni AB, sed (*per Coroll.9. hujus*) numeri D & E non erunt quadrati; ergo dari poterit fractio quadrata cujus termini quadrati non erunt, quod erat ostendendum.

Ex quò sequitur, quod ex fractione DE, his terminis concepta erui non possit radix quadrata præcisa, cum tamen præcisam habeat.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Expendere an fractio quadrata sit, licèt terminis quadratis non constet.

A. 15 B. 27 C. 324. D. 18.

Sit fractio A B terminis non quadratis expressa, expendere debemus, an sit quadrata; duc A, in B, ita ut fiat C; ex quo si erui possit radix quadrata præcisa D: dico fractionem A B esse quadratam.

Demonstr. Cùm A, multiplicando B producat C, & pariter C producatur ex multiplicatione radicis D per seipsam; erit (*per 16. 6. Eucl.*) ut A ad D ita D ad B; ergo sunt continuè proportionales A, D, B; igitur (*per 20. 8. Eucl.*) A & B erunt plani similes, plani autem similes (*per 26. l.8. Eucl.*) eam habent rationem quam aliqui quadrati numeri. Ergo dantur aliqui quadrati numeri, qui eandem habent rationem quæ est A ad B; ergo illi quadrati constituent fractionem æqualem fractioni A B, ergo fractio A B exprimi potest numeris quadratis.

E. $\frac{6}{15}$ F. H. 90. G. 9.

Detur autem alia fractio EF, & ducendo E in F producatur numerus H, cujus radix G, non sit præcisa. Dico fractionem E F terminis quadratis exprimi non posse.

Demonstr. Si enim fractio E F quadrata esset, & terminis quadratis exprimi posset, haberet E ad F eandem rationem ac quadrati numeri (*per 26.8.Eucl.*). & (*per 8. ejusdem*) caderet inter E, F numerus medius proportionalis, cujus quadratus æqualis esset numero H, ergo numerus H haberet radicem quadratam contra suppositionem.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Quadrata fractionis terminos, ad quadratos revocare.

A. $\frac{12}{27}$ B. C. $\frac{4}{9}$ D.

Sit fractio quadrata A B, terminis non quadratis expressa, hæc sit revocanda ad terminos quadratos, seu exprimenda quadratis; revocetur ad minimos terminos C D; dico illos quadratos esse.

Demonstr. Cùm AB sit fractio quadrata (*per 13. hujus*) inter A & B cadet medius proportionalis, & erunt plani similes. Sed C & D eandem rationem habent ac A ad B, ergo & ipsi erunt plani similes, & inter eos cadet medius proportionalis; cum ergo numeri C, D, minimi sint in eadem ratione, seu numeri primi, & inter eos cadat medius proportionalis: ergo (*per Coroll. 1. prop.2. lib.8. Eucl.*) C & D quadrati erunt, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Radicem quadratam ex fractione quadrata educere.

Fractio quadrata si terminis quadratis non exprimitur (*per precedentem*) ad terminos quadratos revocetur; ex quibus singulis, si eruatur radix quadrata; fiet fractio quæ dictæ fractionis radix erit præcisa.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Fractionis non quadratæ, radicem quadratam eruere,

Sit

A. 15 C. 3. D. 6 L. 27 P. 246
B. 24 E. 7 N. 7 Q. 63

F. 4. G. 8 M. 44 R. 303
H. 9 O. 9 S. 63

T. 246
V. 308

Sit fractio AB, quam constet non esse quadratam (*ex propos.13*) sitque eruenda illius radix quadrata. Numerorum A, & B eruantur radices, quibus etiam addantur fractiones, ita ut C cum fractione D E, sit radix numeri A; & F cum fractione G H, sit radix numeri B; numerus C cum DE simul addantur, sicut E & GH, fiatque fractio L N æqualis numero C & fractioni D E; sicut fractio M O sit æqualis numero F, & fractioni G H; tum fractiones L N, M O ad communem denominatorem reducantur. Sintque P Q, R S. Abjiciatur communis denominator, & numerator fractionis pertinentis ad numerum A fiat numerator, & numerator fractionis RS pertinentis ad numerum B fiat denominator: fiatque fractio TV, hæc erit radix fractionis A B.

Demonstratio. Numerus C cum fractione EF, seu fractio L N, aut P Q sunt radix numeri A, sicut RS est radix numeri B, se habent autem istæ fractiones eodem constantes denominatore, ut numeratores: fractiones item sunt æquales quorum termini eandem rationem habent; ergo ponendo numeratores, unum vice denominatoris alium vice numeratoris, eadem exurget fractio, ac si ipsæ fractiones positæ essent: igitur fractio T V ita composita, est radix fractionis A B.

A. 15 C. 100.
B. 24

D. 1500
E. 2400

F. 38
G. 48

Alius modus facilior. Sit fractio AB, illius tam denominator, quam numerator per eundem numerum, præcipuè vero decadicum multiplicentur, verbi gratia per numerum C; ita ut fiat alia fractio æqualis, longè majoribus terminis constans. Eruaturque tam radix numeri D, quàm numeri E, nullâ habitâ ratione adhærentis fractionis. Sitque F, radix numeri D; & G radix numeri E. Dico fractionem FG esse radicem fractionis A B.

Demonstratio. Fractio F G est radix fractionis DE (*per propos.10.hujus*) sed fractio ED est æqualis ipsi AB; igitur fractio F G erit radix fractionis AB. Quod erat ostendendum.

DE RADICE CUBICA.

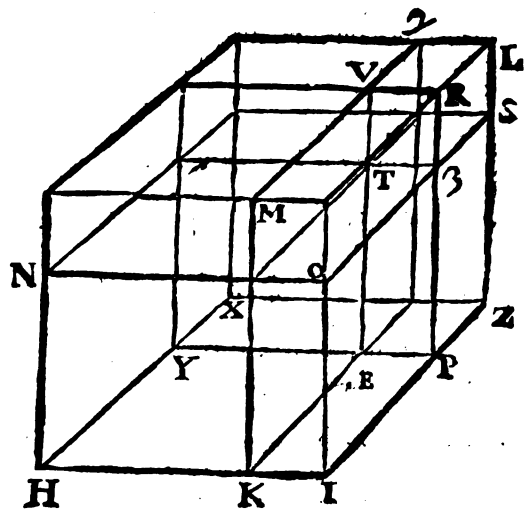
PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si numerus in partes secetur, cubus totius æqualis est cubis partium, & parallelepipedo quod toto numero, & ejus partibus continetur ter sumpto.

A. 8. B. 6. C. 2.
D. 512. E. 216. F. 8. G. 96.

Sit numerus A, divisus in duas partes B, & C. Dico cubum numeri A, nempe D, hoc est A multiplicetur per seipsum, fiatque 64. qui numerus multiplicetur per A, fiatque cubus D; dico inquam hunc cubum, æqualem esse cubis partium B & D, & parallelepipedo comprehenso sub A, B, C, hoc est si A per B multiplicetur, & productus per C multiplicetur, fiet figura solida constans 6. parallelogrammis; quorum opposita plana parallela sunt. Dico igitur numerum D æqualem esse numeris E, F, & numero G ter sumpto, seu triplicato.



Cujus propositionis demonstratio ex figura geometrica pendet, & ex iis quæ diximus per duplicem multiplicationem produci figuram solidam.

Supponatur numerus A esse linea HI, divisa in K, ita ut HK sit 6 partium & KI duarum, fiat cubus lineæ HI, sitque HL, ex K ducatur perpendicularis KM, sit NH ipsi HK æqualis: eritque ut patet quadratum KN, sicut MO, sit item IP ipsi HK, aut NH æqualis, ducatur perpendicularis PR, intelligantur per NO, MK, PR duci plana parallela suis oppositis; quorum sectiones (*per 16. 11.*) erunt lateribus adversorum planorum parallelæ.

Demonstratio. Cubus HL cujus latus est linea HI, æqualis est omnibus suis partibus simul sumptis: sed omnes eius partes sunt solida corpora primum HT, quod probo esse cubum lateris HK; comprehenditur enim 6 quadratis nempe NK, NY, NT, & oppositis. Secundum corpus solidum SV, quod dico esse cubum lateris KI: cum enim linea IZ, æqualis sit (*ex definitione cubi*) ipsi HI, & IP ipsi HK, erit reliqua PZ, ipsi KI æqualis; est autem 35 ipsi PZ æqualis: ergo & æqualis ipsi KI. Quare demonstrabo plana comprehendentia solidum SV esse quadrata. Tertium erit corpus KS, cujus longitudo IZ æqualis est ipsi HI, nempe toti lineæ. Latitudo est ipsa KI, altitudo est IO æqualis ipsi HK; idem probabo de solido NR. Idem de solido YV quæ omnia sunt parallelepipeda, duximus enim plana parallela. Igitur cubus totius HI, æqualis est cubis partium HK, KI, & parallelepipedo sub tota HI, & partibus HK KI comprehenso, ter sumpto; quod erat demonstrandum.

PROPO

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Si numerus in duas partes secetur: erit cubus totius, æqualis cubis partium; & sex parallelepipedis, quorum tria comprehenduntur, sub prima parte bis, & sub secunda semel, tria item alia comprehenduntur sub secundâ parte bis, & sub primâ semel.

Sit linea HI repræsentans numerum quemcumque divisum in partes HK, KI; dico cubum lineæ HI, æqualem esse, cubis partium HK, KI, & sex parallelepipedis, quorum tria comprehenduntur bis sub primâ parte HK, & semel sub secunda KI. Hoc est latitudinem, & longitudinem habent æqualem lineæ HK; & altitudinem æqualem habent lineæ KI, & altitudinem æqualem lineæ HK.

Demonstratio. Quodlibet parallelepipedum comprehensum sub tota, & partibus; verbi gratiâ parallelepipedum KS, æquale est duobus parallelepipedis K 3. ES, quorum K 3 habet duas dimensiones, nempe IP, IO æquales lineæ HK, aliam verò ipsam KI. aliud autem nempe ES habet duas dimensiones EP, PZ æquales ipsi KI, aliam verò nempe P 3, æqualem ipsi HK; sed cubus HL, *(per præcedentem)* continet præter cubos partium HK, KL tria parallelepipeda contenta sub totâ, & partibus; ergo præter cubos partium continebit 6 parallelepipeda qualia descripsimus; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Si alicui cubo addatur ter ipsa radix, & ter quadratum radicis cum unitate, producetur cubus proximè major.

Sit in figura superiori cubus HT 8. cujus radix HK 2. Dico si illi cubo addas ter ipsam radicem seu 6, & ter quadratum radicis, nempe 12. & insuper unitatem, fiet 27. cubus proximè major, hoc est cubus cujus radix superabit radicem HK unitate. Supponatur enim HI, esse illius radix, HK continebit duas unitates, & KI unam unitatem.

Demonstratio. *(Per præcedentem)* cubus HL, radicis HI, est æqualis cubo HT, nempe segmenti HK, & cubo segmenti KI, nempe unitati (cum cubus unitatis sit unitas) & tribus parallepipedis contentis sub parte HK bis, & sub KI, hoc est quadrato lineæ HK: nam si HK per seipsum multiplicetur fit ejus quadratum, quod si multiplicetur per unitatem nihil additur, & insuper tribus parallelepipedis contentis sub linea KI bis, & sub linea HK. multiplicatio autem quæ fit per unitatem KI nihil immutat: ergo est sola multiplicatio lineæ HK per HI: ergo singula illa parallelepipeda sunt æqualia ipsi lineæ HK: ergo si cubo HT addatur ter ipsa radix, & ter quadratum radicis & unitas, habebitur cubus proximè major: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Ex dato numero cubo, radicem cubicam extrahere.

A. 3 4 3 2 8 1 2 5
C. 2 1. B.
D. 7 3 2 8. 3.

Sit datus numerus A, ex quo extrahenda est radix cubica. Ultimæ figuræ numeri A subscribatur punctum; deinde relictis duabus sedibus, pro antepenultimæ aliud punctum subscribatur & ita deinceps, ut vides relictis inter duo puncta duabus sedibus non notatis. Quot erunt puncta, tot erunt in radice characteres, ut radix cubica numeri A habebit tres tantum figuras (*ut demonstravimus prop. 7.*)

Primò quæratur radix cubica maximi cubi in primo membro numeri A contenti; nempe in 34; ad quod exequendum opus est memoria tenere cubos novem numerorum.

Radices.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cubi	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Maximus numerus in 34 contentus est 27, cujus radix cubica est 3, scribatur hæc in quotiente B, ejusque cubus 27 subtrahatur ex primo membro 34, reliquus fiet numerus 7, qui simul cum tribus notis sequentibus componit secundum membrum; ad inveniendam secundam figuram quotientis, habendus est divisor methodo sequenti.

Secundò, radicis iam inventæ, nempe 3, fiet quadratum 9, quod triplicetur, fietque 27, hic numerus erit divisor secundi membri. Illi igitur subscribatur, & ut aptè collocetur intelligatur cyphra 3 non esse tantum 3, sed 30, cujus quadratum erit 900, & triplum quadrati 2700. igitur ultima cyphra nempe 0. collocetur sub puncto 0.

D. 7 3 2 8.
E. 2 7 0 0. (B. 3 2.
L. 5 7 6 8.
M. 1 5 6 0. F. 9 2.
2.
H. 1 8 4.
E. 2 7 0 0.
K. 2 8 8 4.
2.
L. 5 7 6 8.

Tertiò quære quoties numerus E inveniatur in numero D more consueto: memento tamen numerum E non esse totum divisorem; sed illi debere addi alios numeros qui orientur ex ipsa quotientis figurâ quæ quæritur, ideoque per attentationem res perficienda est: in quo tota hujus operationis difficultas posita est. Attentemus igitur, an si ponatur binarius res benè succedat.

Quartò radicem iam priùs inventam nempe 3 seu 30, triplica fietque 90, cui addes hanc figuram 2 ita ut fiat numerus 92.

Quintò multiplica hunc numerum F per figuram

ram ultimo loco inventam nempe 2. fietque numerus H.

Sextò addatur numerus H numero E, nempe tribus quadratis radicis B, fietque numerus K.

Septimò hunc numerum K iterum multiplica per binarium ultimo inventum; fietque numerus L, quem subtrahes ex numero D & reliquus numerus erit M, qui pertinebit ad sequens membrum appositis ipsi reliquis figuris.

Notandum tamen 1, quod numerus L debet posse subduci ex numero D, si enim illum superaret, quotiens justô major sumptus fuisset. Secundò numerus M reliquus non debet esse major triplô radicis inventæ 32, & triplô quadrato ejusdem, ut in hoc exemplo, radicis 32 quadratum, est 1024 triplicatum erit 3072, tripla radix est 96 aggregatum autem est 9120, qui numerus non superatur à numero M; ergo benè operati sumus. Si enim numerus M triplum radicis & triplum quadratum superaret, radix nimis parva sumpta fuisset.

L.	1 5 6 0 1 2 5.		
E.	3 0 7 2 0 0.	B.	3 2 5.
		B.	3 2 0.
F.	9 6 0.	C.	1 0 2 4 0 0.
G.	9 6 5.		3.
	5.	E.	3 0 7 2 0 0.
K.	4 8 2 5.	K.	4 8 2 5.
		H.	3 1 2 0 2 5.
		Mult.	5.
		M.	1 5 6 0 1 2 5.

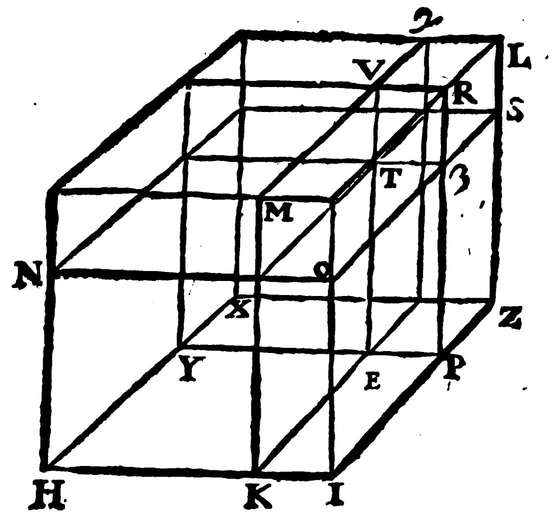
Restat ergo ultima cyphra eruenda ex L ultimo scilicet membro, radici B cubicæ, addidi 0, quia verè talis est, imò illud 0 mutandum erit in aliam figuram, quadratum illius erit C, quod triplicandum est, fietque numerus E. Ille numerus est divisor, itaque scribendus, ut ultima cyphra illius respondeat, ultimæ numeri L dividendi.

Inquiratur quoties tria inveniuntur in 15, inveniuntur quinquies experiamur an quinquies benè succedant.

Primò fiat triplum radicis prioris nempe 320, eritque F, huic adde 5, fietque 965. Hunc numerum multiplica per 5, figuram ultimò inventam, fiet numerus K; hunc adde numero E; fiet numerus H, hunc iterum multiplica per 5 fiet numerus M, hunc subtrahe ex numero L. Si nihil relinquatur, numerus primò propositus cubus est: cujus radix est B nempe 325, restat ostendendum radicem B in se ductam bis, generare cubum A seu numerum primò propositum.

Demonstratio. Primum præceptum jubet interpungi numerum propositum ut in totidem membra dividatur, quod præceptum iam probatum est supra. Probabimus autem hic benè eductam esse radicem cubicam duorum primorum membrorum & quod de illis probabimus de reliquis etiam probatum intellige.

Cum ergo certi simus numeri 34328, radicem cubicam constare duabus figuris, quarum prima ad primum membrum 34 seu 34000 pertinet; secunda ad numerum 328. Intelligitur cubus H L, divisus in plures partes, eo modo quo dicemus. Et primò quidem sit linea H I divisa in duas partes, sicut radix constat duabus cyphris, quæritur primo HK. Contendo eam be-



nè esse inventam, si quæratur radix cubica cubi maximi qui in 34 invenitur. Licet enim 34 habeat adhuc tres figuras sibi additas, ita ut sit 34000, si tamen inveniatur radix cubica numeri 34, cui addatur postea una cyphra, perinde erit, quia pro tribus additis ipsi cubo; unica tantum addi debet radici, juxta ea quæ jam supra probavimus.

Invenitur autem HK esse 3 seu 30, alia verò invenietur 2. igitur HI divisa est in 30 & 2.

Quia autem totus cubus H L, est æqualis cubo partium H K & K I, & 6 parallelepipedis, quorum tria comprehenduntur sub quadrato partis H K, & linea K I, & alia tria sub quadrato segmenti K I, & lineâ H K. Ideò primò cubum segmenti H K, nempe 27 seu 27000 subducimus, à toto numero; ita ut reliqua corpora sint æqualia numero 7328, restat inquirenda secunda cyphra nempe K I. Quæ multiplicando tria quadrata lineæ H K; item multiplicando lineam H K per tria quadrata lineæ KI, & assumendo cubum K I: ea inquam omnia non debent superare reliquum numerum 7328, nec etiam ita superari ab eo numero, ut linea KI major assumi potuerit.

Unde primò quia maxima corpora quæ relinquuntur, subducto cubo partis H K, sunt parallelepipeda contenta sub quadrato segmenti H K, & lineâ K I. Ideò quadratus radicem HK, & quadratum eius triplicamus. Numerumque productum E nempe 2700, facimus divisorem, ut possimus judicare quanta sit linea K I. Monuimus autem numerum E non esse divisorem integrum, quia præter tria parallelepipeda contenta sub quadrato lineæ H K, & sub K I. Sunt etiam alia tria, & cubus.

Quare ut habeantur alia tria parallelepipeda contenta sub linea H K, nempe radice iam inventâ, & sub quadrato K I, jubemus radicem triplicare; postea verò deberet hæc radix triplicata, multiplicari bis per lineam K I, quia nempe tria hæc parallelepipeda continentur sub radice H K, & quadrato lineæ K I. Ut autem eadem operâ habeatur cubus lineæ K I, debet etiam KI multiplicari bis, per seipsam, quod ut eadem operâ fiat, addimus radici triplicatæ ipsam lineam K I, & aggregatum multiplicamus semel per lineam K I, exurgitque numerus H, qui adhuc semel multiplicandus esset. Quia autem tria quadrata radicis inventæ, etiam semel multiplicari debent ut illæ duæ multiplicationes in unam coalescant; primò addatur numerus H, numero E, aggregatum nempe numerus K multiplicetur per lineam K I, habebitur numerus L æqualis sex illis parallelepipedis, & cubo, partis K I.

Monuimus autem. Primò ut numerus L non superet residuum numerum nempe D, haberetur enim ut patet radix cubica numeri majoris quam sit HL.

Secundò monuimus, quòd residuus numerus M, factâ illa subductione non superet triplum quadratum radicis inventæ 32. & ipsam ter sumptam; si enim illam superaret unitate, inveniretur (*per 13. hujus*) in numero H L cubus alius major cujus radix superaret priorem unitate, ideóque nimis parva assumpta fuisset illa ultima figura.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Radicem cubicam examinare.

A. 4 3 2 8 2. (B. 35

C. 4 0 7.
D. 4 2 8 7 5.
E. 4 3 2 8 2.

Sit numerus A, cujus radix cubica inventa sit B, factis autem operationibus reliquus numerus sit C; fiat cubus radicis B, sitque numerus D, cui addatur numerus C, fiatque E; si E est æqualis numero A radix B est radix cubica, maximi numeri in numero A contenti, modò tamen numerus C non superet triplam radicem B, & triplum quadratum ejus; quadratum autem radicis B est 1225.

Demonstratio. Seipsâ patebit, debet enim, si benè operati sumus B esse radix cubica cubi maximi in A contenti; & C esse residuum, B est radix numeri D; est autem maximus si C non superat tria quadrata &c. C est etiam verum residuum, si additum numero D restituit numerum A.

ALIUD EXAMEN.

A. 4 3 2 8 2. D. 1.
B. 3 5. E. 8. F. 1.
C. 4 0 7. G. 8.

Ex numero A abjiciatur novenarius & reliquus sit numerus D; ex radice B abjiciatur novenarius reliquus sit E, qui in se multiplicatus dat 64. ex quo aufer novenarium relinquitur F, qui iterum multiplicatus per E dat G; ex G & C auferatur novenarius: datur iterum D nempe 1, igitur benè operati sumus.

Demonstr. Auferendo novenarium ex radice B, & reliquum nempe E multiplicando per seipsum; ita ut ex producto auferatur novenarius, idem relinquitur numerus nempe F, qui relinqueretur, ex quadrato radicis; ut ostendimus in multiplicatione, multiplicando autem talem numerum F, iterum per 8. residuum radicis ablato novenario, idem relinquitur, qui relinqueretur ex cubo ablatis novenariis, cum autem numerus A, debeat esse æqualis cubo, & numero C; debet idem relinqui numerus abjectis novenariis ex numero A qui relinquitur, & ex cubo D, ex numero C; hoc est ex G & C.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Numeri non cubici exactiorem radicem invenire.

A. 4 3 2 8 2.
B. 3 5.
C. 4 2 8 7 5.
D. 4 0 7.
E. 1 2 2 5.
B. 3 5.
F. 1 2 6 0.
3.
D. 4 0 7.
———
G. 4 7 8 1.

Sit numerus A non cubicus: sitque radix maximi cubi in eo contenti B; sit autem C, maximus cubus in numero A contentus, reliquus autem numerus sit D, sit radicis quadratum numerus E, cui adde radicem B, fiatque numerus F; hunc triplica, & genito adde unitatem, ut fiat numerus G dico si fiat fractio cujus numerator sit numerus relictus D, & denominator numerus G, dico hanc fractionem cum radice B, constituere radicem numeri majoris quam C; & minoris quam A, atque adeo esse radicem minorem verâ.

Demonstr. Si numerus D reliquus factâ extractione, esset æqualis tribus quadratis radicis, B & radici ter sumptæ & insuper unitatem contineret, hoc est æqualis esset numero G; radici B unitas addi posset (*per tertiam hujus*) quod si esset eadem ratio radicum, & cuborum, institueremus regulam trium, diceremusque si 4781, seu numerus G additus numero C auget radicem unitate, numerus D qui tantum additur, quantùm augebit, exurgetque fractio, quæ ad unitatē eam rationem habet, quam D habet ad G hoc est fractio DG. Quare ita est numerus G ad D, sicut unitas ad fractionem D G, sed major est ratio cuborum, quàm radicum, cum cuborum ratio sit triplicata rationis radicum; ergo minor est ratio unitatis ad veram radicem, quàm ad D G. Ergo vera radix major est quàm DG; hic sumpsi excessus cuborum pro ipsis cubis, & excessus radicum, pro ipsis radicibus cum habeant eandem rationem.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Fractionis radicem cubicam investigare.

A. $\frac{27}{}$ C. $\frac{3}{}$
B. 64 D. 4

Sit fractio A B, hæc autem vel cubica erit, vel non cubica; si primò cubica sit, nec tamen cubicis terminis exprimatur, ad minimos terminos revocetur, tunc (*per prop. 2. 8. Eucl.*) cubicis terminis exprimetur.

Sit igitur fractio data AB; numeratoris A radix cubica sit C, & denominatoris B radix sit D; dico fractionem C D esse radicem cubicam fractionis A B.

Demonstratio. C D esse radicem cubicam fractionis AB; est radicem C D cubicè multiplicatam, producere fractionem A B; sed ad hoc requiritur ut tàm denominator, quàm numerator per seipsos cubicè multiplicentur, quod fit in nostro casu, cum A sit cubus ipsius C; & B, ipsius D: ergo C D est radix cubica

bica fractionis A B; quod erat demonstrandum.

Si verò fractio proposita non esset cubica, tam denominatoris quam numeratoris extrahatur radix, quàm fieri potest exacta, quod si exurgant fractiones, illæ ad simplices revocentur; ut docuimus suo loco; & habebitur fractionis etiam non cubicæ radix cubica.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Numeri non cubici; radicem propiorem verâ in infinitum invenire.

A. $\frac{40}{1000}$. C. $\frac{40000}{1000}$. D. $\frac{34}{10}$

A. $\frac{40}{1}$

F. 1.

Sit numerus A non cubicus, cujus quæritur radix cubica exactior; hunc multiplica per quemcumque numerum cubicum, aptissimi autem sunt decadici, & quò major fuerit hic cubus, assumptus, eò præcisior erit operatio; assumatur ergo numerus B, per quem multiplicabis numerum A, fiat numerus C, cujus extrahatur radix cubica, sitque D; radix autem cubica numeri B assumpti sit E, dico radicem numeri A esse fractionem DE. Subscribatur enim numero C numerus B, fiatque fractio C B.

Demonstr. Fractio DE est radix numeri C B; (minor tamen verâ, quia numero D adhærere deberet fractio quæ neglecta est) sed numerus A æqualis est fractioni C B. Nam si numero A subscriberetur unitas F, fieret fractio A F æqualis numero A, sed B multiplicans A fecit numerum C; & multiplicans unitatem fecit seipsum, seu numerum B; ergo est ut A ad F, ita C ad B; ergo fractiones A F, C B sunt æquales; sed A F æqualis est, numero A; ergo & C B. Ergo est D E radix cubica numeri A.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Cubus numerus tot continet numeros Arithmeticæ progressionis, quot radix eius continet unitates. Medius autem numerus erit quadratum radicis, si cubus impar fuerit. Si verò fuerit par quadratum radicis bis ponatur.

A. 27.

B. 3.

C. 8. D. 9. E. 10.

Sit cubus A cujus radix B, tribus unitatibus constet; dico numerum A æqualem esse, tribus numeris progressionis vulgaris Arithmeticæ sibi immediatis, quorum quadratum radicis sit numerus medius qui semel sumatur, quia cubus est impar. hoc est 8.9.10. sunt æquales numero A. 27.

Demonstratio. Cubus generatur ex multiplicatione quadrati D per radicem B; ergo quot sunt unitates in B, toties quadratum D, continetur in numero A: C autem, & E simul sunt dupli ipsius D, est enim proprietas progressionis Arithmeticæ, ut duo extremi numeri simul æquales sint medio, bis sumpto; ergo numerus A æqualis erit numeris C, D, E.

F. 64.

G. 4.

K. 15. H. 16. 16. L. 17.

Si verò numerus cubus F, sit par, quadratum radicis par erit; immò & radix, ut facilè ostendi potest, ex Eucl. cum numerus impar imparem multiplicando, imparem generet. Sit igitur quadratum H, qui si bis sumatur; pro duabus unitatibus radicis, & quot erunt binarij in radice, tot sumantur bini numeri progressionis Arithmeticæ, illi etiam erunt dupli ipsius quadrati: ergo erunt simul æquales numero F, qui toties continet quadratum H, quot sunt unitates in radice G.

COROLLARIUM I.

Sequitur quòd si sumantur tot numeri progressionis Arithmeticæ vulgaris, æqualiter à quadrato remoti, quot sunt unitates in radice idem habebitur cubus.

COROLLARIUM II.

Quod demonstravi de cubo respectu quadrati, & numerorum progressionis Arithmeticæ vulgaris, ipsi vicinorum, probari potest de quadrato respectu radicis, hoc est numerum quadratum imparem componi, ex tot numeris progressionis Arithmeticæ, quot eius radix unitates continet; ita tamen ut radix sit medius. Sit numerus quadratus 9, cujus radix 3. dico 2. 3. 4. esse æquales ipsi 9, quia tres sunt unitates in radice, ipsa radix ponetur pro una, & alij duo numeri pro reliquis duabus unitatibus; quantum enim 1. deficit à ternario, tantùm quaternarius superat eundem ternarium.

Si verò numerus quadratus fuerit par; vel bis sumatur quadratus, vel omninò relinquatur, ut verbi gratiâ numerus, cujus radix quadrata 4. dico 3.4.4.5. simul æquales esse numero 16. vel 2.3.5.6. relicto intermedio 4.

COROLLARIUM III.

Idem probari potest de quacumque potestate, respectu antecedentis, ut quia quadrato quadratus, fit producendo cubum; per radicem, tot continebit numeros progressionis Arithmeticæ vulgaris quot sunt unitates in radice, quorum cubus medius erit vel semel sumptus, si fuerit numerus impar, vel bis sumptus aut omissus si fuerit par.

COROLLARIUM IV.

Quæ doctrina ut sit universalior, quoties numerus numerum multiplicat; Productus tot numeros vulgaris progressionis Arithmeticæ continet, quot sunt unitates in multiplicante; ita ut multiplicatus, sit medius ut si 4 multiplicet 5; dico numerum productum nempe 20, æqualem esse 4 numeris vulgaris progressionis Arithmeticæ, ita ut numerus 5 sit medius, bisque sumatur aut omittatur quoties alius est par;

par; dico ergo quòd 4.5.5.6. æquales sint numero 20. pariter 3.4.6.7.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Numeri impares progressionis Arithmeticæ vulgaris; ita concurrunt ad generationem cuborum; ut primo cubo, primus assignetur, secundo secundus, & tertius tertio, quartus, quintus, sextus, & ita consequenter.

A.	B.	C.	D.	E.		
1.	2.	3.	4.	5.		
E.	F.	G.	H.	I.		
1.	8.	27.	64.	125.		
K.	L.	M.	N.	O.	P.	Q.
1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.

Sit series numerorum progressionis Arithmeticæ, supponanturque illi numeri esse radices.

Supponatur item E F G H I esse series cuborum respondentium radicibus.

Denique sit series numerorum imparium progressionis Arithmeticæ vulgaris K L M N O P Q; dico primum cubum esse æqualem primo numero impari K; secundum F, esse æqualem duobus sequentibus numeris L M; tertium G sibi vindicare tres N, O, P: quartum D æqualem esse quatuor consequentibus Q R S T, & ita de cæteris, tot scilicet quod sunt unitates in radice.

Demonstratio. Vel cubus est par, vel impar, hoc est, erit par si radix par fuerit, erit impar, si radix impar fuerit; si cubus sit impar, tot continebit numeros progressionis Arithmeticæ communis, quot radix ejus continebit unitates, seu quotus ipse fuerit, per præcedentem propositionem, sed totidem numeri impares, modò quadratum fuerit numerus medius, illis æquales sunt.

Ergo cubus tot continebit impares numeros, quotus ipse fuerit; quorum quadratum radicis erit medius numerus: sed quadratus ille numerus tot continet impares incipiendo ab unitate, quot ejus radix continet unitates: ergo &c. Extractiones radicum aliarum potestatum dabuntur suo loco. Atque hæc de Arithmetica sufficiant abstrusiora dicemus deo dante, in Algebra.

ARITHMETICÆ LIBER QVARTVS.

Arithmetica calculatoria, & divinatoria.

Calculatoria Arithmetica differt à vulgari, quòd calculis, aut metallicis nummis pro characteribus utatur, in principiis autem omninò convenit; censetur in multis ad usum communem magis accommodata, eò quòd sensibilibus notis rudiorum imaginationi meliùs serviat, ideoque in pluribus galliæ provinciis à mercatoribus adhibeatur, hanc igitur utpote facilem paucis propositionibus complector.

PROPOSITIO I.

Numeratio calculatoria.

Dispositio numerorum, aut potiùs calculorum, in hac Arithmeticæ specie, non à dextra ad sinistram; sed ab imo sursum procedit, ita ut numeri inferiores minores sint, superiores decuplum observent valoris augmentum. Quare eædem vigent regulæ vulgaris Arithmeticæ, nempe ne in una sede numerus novenario major scribatur, aut potiùs notetur; ideoque non plures quàm novem calculi in una sede ponantur.

Quia tamen videbatur incommodum tot calculos in una sede statuere, quamlibet sedem in duas partimur, quarum una 4 tantum calculos continere potest, alia unicum, sed quinque calculis æquivalentem.

Nonnulli communiter unam lineam, & unum intervallum cuilibet sedi assignant, ita ut calculus qui quinario æquivalet non in eadem linea cum reliquis jaceat.

Sedes igitur eodem ordine procedunt, ac in Arithmetica communi, nempe digiti, seu unitates sunt infimæ, exinde sequuntur ascendendo decades, tum centenaria, millia, decades millium, centenaria millium; milliones. Volunt autem plerique ut sedes una, lineam & intervallum unum sibi vendicet.

Ducantur ergo 7 lineæ ut in figura vides, è quarum regione appones characteres 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000. & intervallis appones characteres 5.50.500.5000.50000.500000. 5000000.

Secundum hanc methodum hæc regula observatur quod in lineis quatuor tantum calculi apponi possint, in intervallis unicum, sed qui valeat quinque; sic enim in una sede, constante linea & superposito intervallo novem tantum ponuntur, æquivalenter, nempe unus in intervallo, seu quinque æquivalenter & 4. in linea,

valor

valor autem primi intervalli est 5, secundi 50, tertij 500, quarti 5000, &c.

Milliones	5000000.		o.
	1000000.		—o o.
Centenaria millium.	500000.		o.
	100000.		—o o o.
Decades millium.	50000.		o.
	10000.		—o o o o.
Millia.	5000.		
	1000.		—o o o o.
Centenaria	500.		o.
	100.		—o.
Decades.	50.		
	10.		—o o o.
Unitates.	5.		o.
	1.		—o.

Secundum hanc methodum proponatur numerus 7 6 9 4 6 3 6 notandus seu calculis designandus: incipe ab infimo. Habes in ultima sede 6, quia in linea ponere potes tantum 4, qui non sufficerent, depone calculum in intervallo cujus valor erit 5, & unum in linea cujus valor est 1: sic enim posueris 6, in secunda sede habemus 3. Apponantur tres calculi è regione lineæ & intervallum sit vacuum: eo quod numerum 3, non perveniat ad quinarium. In tertia sede habemus 6, quare ut priùs collocetur unus calculus in linea, alius in intervallo. In quarta sede seu millium habemus 4, qui numerus cum ad quinarium non perveniat, depono 4, calculos in linea. In quinta sede habemus 9, notanda uno quinario in intervallo & quatuor calculis in linea. In sexta habemus 8, notanda uno calculo in intervallo & tribus in linea. In septima sede habemus 7, depone calculum unum in intervallo & duos in linea.

Ex quibus colliges posse tam intervalla, quam lineas esse vacuas, cum hæc numerandi methodus cyphra expletiva o. careat.

Hæc divisio linearum, & intervallorum in abaco, seu mensa notari debet eaque semper subintelligi, quoties hac utendum est methodo.

Hæc methodus licèt satis communis non artidet, eò quòd distinctio linearum & intervallorum confusionem pariat, ita ut sæpe intervallum pro linea, linea pro intervallo accipi possit, præcipuè si linea aut intervallum vacet. Quare multi consultiùs, quinarios calculos in eadem cum reliquis linea reponunt. Sic enim pauciores fiunt ordines meliusque sedes internoscuntur & hanc methodum deinceps usurpabimus.

	Quinarij
Milliones.	— o o o o.
Cent. Millium	—o o.
Decades mill.	—o o o o.
Millia.	— o o o.
Centenar.	— o o o o.
Decades.	—o.
Digiti.	—o o.

Proponatur numerus 4 6 8 3 4 5 6. notandus. Intelligantur ductæ 7, lineæ nulla habita ratione intervallorum, sed quinarij calculi cum opus erit ponantur primi & separati. In proposito exemplo in ultima sede digitorum habemus 6. Pone unum in columna quinariorum, & unum separatim. Sic enim primus quinque significat & cum alio efficit 6.

In secunda sede decadum, habes 5, appone calculum in columna quinariorum. In tertia sede centenariorum habes 4, depone quatuor calculos in linea centenariorum. In quarta sede millium habes 3, repone tres calculos. In quinta sede, decadum millium, habes 8 repone tres & unum quinarium. In sexta sede habes sex, repone quinarium & unum. Denique in sede millionum repone quatuor calculos.

Totum ergo discrimen à communi Arithmetica in eo positum est. Quòd Arithmetica communis utatur characteribus diversis, hæc similibus: deinde vulgaris Arithmetica possit ascendere usque ad novenatium in eadem sede, hæc quoties ad quinarium ascenditur reponit unum quinarium cæterosque etiam notat.

PROPOSITIO II.

Additio simplex.

Additionem simplicem voco, collectionem plurimorum numerorum in unam summam: quæ ita calculis peragitur. Numeri addendi è regione sibi respondeant in abaco, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenaria centenariis respondeant: in columnis scilicet separatis. Tum in tertiam columnam colligantur, in qua unam summam constituant.

	— C	D.	— o E
100.	—o.	-oooo.	—
10.	— o o o.	o.	o o o.
1.	—o o o o.	o ooo.	o o.
	5 7 8.	4 5 8.	1 0 3 6.

Sint duo numeri C, & D colligendi in unam summam nempe 5 7 8. 4 5 8. Notentur calculis in C, & D (*per præcedentem*), ita ut digiti, digitis, decades, decadibus respondeant. In infima sede unitatum, in numeris C & D, habes 6 calculos simplices & duos quinarios, quæ omnia efficiunt 16, nota 6, in numero E, nempe quinarium, & simplicem calculum, retines autem duos quinarios; seu unam decadem, quam si reponas cum cæteris decadibus numerorum C & D, fient 13 decades, repone 3 in numero E, & retines duos quinarios, seu unum centenarium. Collige centenaria numerorum C & D, quibus unum retentum adjicies fiunt 10, nihil pones in sede centenariorum, unumque repones in millibus. Habes igitur summam.

Non dissimili ratione in aliis exemplis operaberis, in quibus se exercebit Tyro antequam ulteriùs progrediatur. Meminerit tantum duos calculos quinariorum efficere unum sedis superioris.

PROPOSITIO III.

Subtractio simplex.

Subtractio unius numeri ab alio, est inventio excessus, quo major superat minorem, ut explicuimus suo loco: hæc subtractio ut ritè calculis perficiatur, supponit tres columnas, unam in qua notetur, seu calculis exhibeatur numerus major, à quo scilicet debet fieri subtractio, secundam in qua exhibeatur numerus subtrahendus; tertiam in qua exhibeatur differentia, seu excessus majoris numeri supra minorem.

F.	G.	H.
o.		
ooo.	o o.	o o.
o oo.	o oooo.	o oooo.
o.	ooo.	oo o.
1 3 7 5.	6 8 2.	6 9 3.

Sit subtrahendus numerus G ex numero F, incipe ab ultima sede, & subtrahe duos calculos ex quinario, restant tres reponendi in infima sede numeri H. Tum subtrahe tres calculos, decadum numeri G ex duobus numeri F, seu melius 8, numeri G ex 7, id non potes, sumendus est calculus centenariorum numeri F, qui æquivalet decem decadibus, si igitur subtrahas 8 decades numeri G ex decem decadibus, remanebunt 2 cum 7 decadibus numeri F, fiunt novem notandæ in numero H. Subtrahe 6 centenaria numeri G, non jam ex tribus centenariis numeri F, cum jam unum acceperimus: sed ex duobus quod cum non possit; accipe calculum millium numeri F, qui cum valeat 10, subtrahes 6 centenaria, ex 12 remanent 6, notanda in numero H.

Verum examen subtractionis est additio. Quare, si addendo numeros G & H, denuò fiat numerus F, proba fuerit subtractio.

PROPOSITIO IV.

Multiplicatio.

Multiplicatio eodem ferè modo calculis instituitur, ac in Arithmetica vulgari. Hoc est si multiplicator unico charactere scribatur, unicâ operatione opus erit: si duabus duæ. Debet enim totus multiplicandus, duci in singulas notas numeri multiplicatoris.

K	L	M
o.		o.
o o o.		o o.
o o o o.		o o o.
o o.	o o o.	o o o o.
1 7 4 6	3.	5 2 3 8.

Sint ergo tres columnæ prima in qua multiplicandus exhibeatur. Secunda multiplicatorem repræsentet. Tertia quæ productum. Sit igitur K multiplicandus, L multiplicator unius characteris. M sit columna destinata producto.

Primò multiplica vel 6, numeri K per multiplicatorem 3, vel si velis primum calculum per 3, fiunt 3, notandi in M, tum multiplica quinarium numeri K per 3, fiunt 3 quinarij, quorum duo sufficientes ad decadem reservabuntur, & notabitur alter in M. Multiplica 4 decades numeri K per multiplicatorem 3 fiunt 12, quibus addes decadem reservatam, fientque tredecim notabis 3 in M, reservabis centenarium. Multiplica duo centenaria separata numeri K, per multiplicatorem 3 fiunt 6, & unum retentum incipio scribere 7 in M. ponendo duos calculos sed retine adhuc quinarium, multiplica quinarium centenariorum numeri K per 3 fiunt 3 quinarij, quibus addes 1, retentum fiunt 4, seu duæ decades retinendæ. Denique multiplica unum calculum millium numeri K, per multiplicatorem 3 fiunt 3, cum duobus retentis fiunt quinque; depone unum quinarium in M; atque ita habebis productum 5238.

Quando multiplicator constat pluribus characteribus, totidem sunt operationes faciendæ, atque propterea nonnulli totidem parant columnas pro singulis productis, quorum praxim hic apponemus, ut viam ad aliam meliorem sternamus.

Sit numerus N multiplicandus per numerum P constantem duobus characteribus, multiplica primò numerum N per duos inferiores calculos numeri P ut fecimus suprà, fiatque numerus R.

Secundo

N	P	R	S	T
oo			o oo	o oo
ooo		o oo	o oo	oooo
o	ooo	o	oooo	o
o ooo	oo	o o		o o
2358	32	716	70740	70456

Secundo multiplicandus eſt idem numerus N, per 3, nempe primum characterem numeri P, qui cum ſint in linea decadum, productus S inchoandus erit à ſecunda linea, ſeu linea decadum. Multiplica igitur tres inferiores calculos numeri N per 3 fiunt 9, inchoa notare 9, in numero S nempe in linea decadum ponendo quatuor calculos, & retinendo quinarium; tum multiplica primum quinarium numeri N, per 3 fiunt tres quinarij qui cum uno retento efficiunt quatuor quinarios, ſeu duo centenaria retinenda, & quia in decadibus numeri N, nulli ſunt calculi ſimplices, poſſunt reponi duo centenaria retenta. Tertio multiplica quinarium decadum numeri N per 3 fiunt tres quinarij, notandus unus in S, retinendi duo, qui conſtituant unum millenarium, multiplica tria centenaria numeri N per tria fiunt 9, cum uno fiunt decem, nihil ſcribe in ſede millenariorum numeri S, ſed retine unum: denique multiplica duo millenaria numeri N per 3 fiunt 6, cum uno retento efficiunt 7, decades millium notandæ in S. fietque numerus 70740.

Addantur numeri R & S eo modò quo notati ſunt habebiſque numerum T.

Notandum igitur quoties ex multiplicatione quinarij, oritur binarius aut plures binarij, pro ſingulis binariis, reſervandam unitatem pro ſede ſuperiori.

Notandum ſecundò non eſſe opus duas aut tres columnas conſtituere, etiam quando multiplicator conſtat duobus characteribus nec faciendam ſummam ſed eadem operâ, quâ producitur ſecundus productus, eâdem addi poſſe primo producto, quod ut clariùs fiat, proponatur numerus A, multiplicandus per numerum B conſtantem duabus ſedibus.

A	B.	C.	D.
oooo		ooo	o
o ooo		oooo	ooo
o oooo	oo	o o	o o
ooo	o oo	o	o
		o	o
			o
4893	27	34251	132111

Supponatur ergo numerus C eſſe productus ex ductu numeri A in 7, ſedem ſcilicet inferiorem numeri B, tum multipl. num. A per duas decades num. B, & dices bis tria ſunt 6 ſeu 6 decades, quæ addendæ ſunt quinque decadibus num. C. ita ut fiant undecim decades, nota 1. decadem in num. D, & retine unum centenar. Exinde dices bis novem ſunt 18, & unum retentum fiunt 19. & duo cent. num. C fiunt 2. pone unum cent. in num. D & retineo 2. Exinde multiplico 8. cent. num. A, per duo; fiunt 16. & duo quæ retinent. ſunt 18. & quatuor millenaria num. C efficiunt 22, pono duo millenaria in num. D, & retineo 2. denique multiplico 4. millia num. A, per duo fiunt 8, cum duobus retentis ſunt 10. cum tribus decadibus millium numeri C ſunt 13 ſcribe tria in ſede decadum millium numer. D, & unum in centenariis millium ejuſdem num. D.

PROPOSITIO V.

Diviſio.

Difficilior paulò videtur hæc regula dum calculis proceditur, quam dum calamo, & characteribus: habet tamen id commodi, quod unâ operatione factâ meliùs apparet quid relinquatur. Tota praxis in exemplo manifeſta fiet.

A.	B.	C.	D.
o			
oo			
o ooo	o o	o o	
ooo		o	o o
oo	o oooo	oo	o
12832	608	652	21

Proponitur numerus A, 12832. dividendus per numerum B 608, uterque numerus exhibeatur calculis in A & B, intelligaturque diviſor B applicari dividendo A, & quia primus character diviſoris B eſt 6 non poterit applicari primo, ſeu ſupremo membro numeri A, ſed tantum ſecundo, quod notabis appoſito digito huic ſecundo memb. num. A, & tunc infimum memb. diviſoris B, reſpondere intelligetur penultimo dividendi, ſeu 8 diviſoris, reſpondebit num. 3. dividendi, quo ita notato. Examina quoties primum membrum diviſoris, inveniatur in duobus ſupremis dividendi ſeu in 12 invenio 2, pro quotiente; per quem num. multiplicandus eſt diviſor B, & productus ſubtrahendus ex dividendo A, quod unâ eâdemque opera præſtari poteſt, multiplica igitur infim. memb. diviſoris ſeu 8 per 2 fiunt 16, quæ ſubtr. non potes ex penult. memb. ſed neque ex 13, ſed tantum ex 23. duo igitur calculi antepenultimi memb. aſſumendi ſunt & reſolvendi in decad. ut fiant 23, ſi ergo 16 ſubtrahas & 23. reſt. 7. ſcribe 7. repoſui eos in num. C, memento tamen antepenultimum diviſoris imminutum eſſe duobus calculis. Rurſus multiplica primum membr. diviſoris, ſeu 6 per 2 fiunt 12 ſubtr. 12, ex duobus primis memb. dividendi, ſeu ex 12 nihil relinquitur, reſt. igitur in dividendo 652, ut vides in col. tertia, rurſus intellige applicari diviſorem divid. apponendo digitum ſequenti membro dividendi, inquire quot. diviſor 608, inveniatur in 652, invenies ſemel, nota calculum in quotiente D; cum ergo hæc unitas multipl. diviſorem nihil immutet, ſubtrahes ſimpliciter diviſorem B, ex num. C; ſubtractione factâ relinquitur 44, quare quotiens erit 21, reſtantque 44 indiviſa, quæ in minutiores monetas reducenda ſunt v. g. ſi ſint franci, reducendi erunt in aſſes 880, ut inſtitui poſſit diviſio per 608. Totum ergo artificium diviſionis conſiſtit in applicatione diviſoris, & tum quærendo quoties diviſor ſubtrahi poſſit ex dividendo: quæ ſubtractio commodiùs fieri poteſt calculis, quàm characterib. poſſet enim perfici per attentat. ſubtrahendo ſemel, atque iterum, donec id quod relinquitur minus ſit diviſore.

divisore. Idem præstandum in secunda applicatione quæ omnia calculis ipsis explicare possumus quam longo verborum circuitu, neque enim in charta possum calculos ponere & resumere quod tamen hanc regulam facilitat.

PROPOSITIO VI.

Additio numerorum denominatorum.

Vocamus numeros denominatos, ut explicui in Arithmetica communi, numeros addictos rebus diversis, seu diversæ speciei, ut si franci, francis; asses assibus, denarij denariis addendi sint, singuli autem franci in 20 asses, singuli asses in 12 denarios dividuntur.

Hæc additio inchoatur ab inferiori moneta; ut in nostro casu, primo ex denariis asses conficimus, quos aliis assibus addimus; tum ex assibus francos conflamus, addimusque aliis francis, sint addendi 523 franci 15 asses, denarij 10, francis 352, assibus 18, denariis 8.

	A.	B.	C.
Franci	o oo ooo	ooo o oo	o ooo o oo o o
Asses	o o	o o ooo	o oooo
Denarij	o	o ooo	o o

Incipe à denariis adde denarios 10 & 8 fiunt 18 seu assis, cum 6 denariis; pone 6 in columna C, & retine assem. Adde quinque asses numeri A cum octo numeri B, & asse retento fiunt 14: pone 4 asses in columna C & retine 1 seu 10, & cum aliis duabus decadibus, efficiunt 30 asses seu unum francum, & 10 asses; scribe 10 asses in columna C & retine francum: denique adde francos numerorum A & B; cum franco retento fiunt 876 franci, asses 14, denarij 6.

PROPOSITIO VII.

Subtractio numerorum denominatorum.

	D.	E.	F.
Franci	o ooo	ooo o	o ooo
Asses	o ooo	o oo	o o
Denarij	1 oo	o o	o ooo

Proponatur numerus E, subtrahendus ex numero D, nempe 35 franci, 16 asses 11 denarij; ex francis 18, assibus 8, denariis 7. Incipe ab infimo ordine seu denariorum: Et quia subtrahere non potes 11 denarios ex 7, intellige desumptum esse, unum assem ex numero D, & esse resolutum in 12 denarios. Subtrahe 11 ex 12, restat unus, cum 7 numeri C, restant octo denarij notandi in col. F.

Secundò subtrahe 16 asses ex 8. quod cum fieri non possit, assume ex ordine superiori numeri C calculum resolvendum in 20 asses, ex quibus si subtrahas 16, restant 4 cum septem assibus numeri D; restant enim tantum 7, eo quod unus fuerit resolutus.

Denique subtrahe 35 francos ex 52, restant enim tantum 52, reliqui erunt 17. In hunc modum perficies similes subtractiones.

Cum regulæ omnes ad quatuor elementares reducantur, facilè ex dictis methodum versandi calculos colliges.

ARITHMETICA Divinatoria.

Problema I.

Numerum ab alio cogitatum divinare.

Jube ut numerus cogitatus triplicetur, & productus dividatur bifariam si possit: si verò dividi non possit sine fractione, hunc unitate, auctum divide bifariam, ejusque semissem rursus triplica, & pete quoties novenarius in hoc ultimo producto inveniatur; dico si pro singulis novenariis ponas binarium, invenies numerum cogitatum.

Si numerus primo productus per 3 dividi non possit bifariam, illi addetur unitas, ut dividatur. Sit verbi gratia cogitatus numerus 5, qui multiplicatus per 3 producat 15, & addendo unitatem fiat 16, dividatur bifariam fiet 8, multiplicetur per 3 producetur 24, in quo bis invenitur numerus 9, pro singulis vicibus assume 2, fient 4, cui propter additam prius unitatem addes etiam unitatem.

Cogitetur unitas quæ multiplicata per 3 efficit 3, dividatur bifariam, priùs addita unitate, fit 2; triplica exurget 6, in quo numero non invenitur novenarius quare exhibebis solam unitatem additam ad divisionem faciendam.

Demonstratio. Duplici multiplicatione per tria, idem facis, ac si multiplicares per novenarium, ergo si solæ essent hæ multiplicationes, tot deberent esse novenarij, quot sunt in numero cogitato unitates, sed divisisti per binarium; ergo debes habere mediam tantum partem numeri cogitati; ergo si numerum novenariorum multiplices per duo, habebis numerum cogitatum.

Quando vero numerus est impar verbi gratia 5. primò triplicas habesque 15; dividis bifariam habere deberes $7\frac{1}{2}$ multiplica iterum per tria proveniet $22\frac{1}{2}$ media pars novenariorum qui fierent si 5 multiplicaretur per 9, fierent enim 45, & media pars est $22\frac{1}{2}$ si divideres $22\frac{1}{2}$ per 9, haberes quotientem $2\frac{1}{2}$ quem numerum si multiplices per binarium fiet 5, quia tamen volumus vitare fractiones, pro $7\frac{1}{2}$ assumimus 8, & triplicamus

mus rursus fitque 24 numerus paulò major quam oporteat; non tamen tantus qui proveniret si primus numerus esset 6, quare sufficit neglectis fractionibus addere unitatem.

PROBLEMA II.

Aliter numerum cogitatum invenire.

Ex dictis superiori propositione facilè viam aperiemus, aliis praxibus loco multiplicantium 3 & 3, assumantur 4 & 3, quæ efficiunt 12, hoc modo numerum cogitatum multiplica per 4; tum divide bifariam, & multiplica per 3, tum exquire quoties inveniatur 12, dico numerum illum multiplicatum per 2, exhibere numerum quæsitum.

Sit cogitatus numerus 6, qui quadruplicetur fit 24, divide bifariam, fiet 12, multiplica per 3, producentur 36, quære quoties inveniatur 12, erit ter; duplica hunc numerum, habebis intentum seu 6.

Ratio eadem est quia hoc modo exurgit dimidius numerum duodecadum, qui sunt in tali numero propter divisionem per 2.

Quod si incipiamus multiplicationem per 3, fiatque numerus impar, si nempe cogitatus fuerit numerus impar, adde producto unitatem, ut dividi possit; tum multiplica per 4, ut si cogitatus fuerit numerus 5, multiplica per 3, producentur 15, adde unum ut dividi possit, & divide per 2 fiet 8, multiplica per 4 producentur 32, quære quoties duodenarius inveniatur in hoc ultimo producto, pro singulis vicibus sume binarium, fient 4, cui addes unitatem quæ adjecta fuerat ad divisionem peragendam: habebisque 5 numerum cogitatum. Eò recidunt omnes ferè praxes quæ communiter à multis afferuntur.

PROBLEMA III.

Varii modi divinandi numerum ab alio cogitatum.

Primò Numerus cogitatus triplicetur, productus dividatur bifariam, si par fuerit; si impar, addatur unitas ut divisio peragi possit. Hæc medietas iterum triplicetur, dividaturque bifariam, additâ unitate si divisio aliter fieri nequit. Quære quoties inveniatur novenarius in reliquo, & pro singulis assume quaternarium, additâ tamen unitate, si in prima divisione adjecta est, vel duabus si in secunda, & si in utraque adjecta est tribus unitatibus, ut si cogitatus fuerit numerus 6, multiplicando per tria producitur 18, dividendo bifariam fit numerus 9, multiplicando per tria fiunt 27, dividendo bifariam addita unitate fiunt 14, in quo novenarius invenitur semel; assume 4, & adde duo, eò quòd addita sit unitas in secunda divisione.

Ratio est quòd duplici multiplicatione per 3 æquivalenter multiplicetur numerus cogitatus per 9, & duplici divisione per 2 dividitur per 4, ergo benè pro singulis novenariis quaternarium assumis.

Secundò numerus cogitatus duplicetur, tum productus multiplicetur per 5, & iterum multiplicetur per 10, si manifestetur tibi hic numerus, erit centuplus producti; nam multiplica hos numeros 2.5.10. produces 100. quare si quilibet multiplicetur per 2.5.10. perindè est ac si multiplicaretur per 100. ex quo alium modum inveniemus.

Tertiò numerum cogitatum duplica, huic duplicato adde 5. tum multiplica summam per 5. tum adde 10. & summam multiplica per 10. si manifestetur tibi productus & ex eo auferas 350, & numerus relictus erit centuplus cogitati.

Ratio est quod si numerum cogitatum duplicares, tum multiplicares per 5, & per 10, fieret numerus centuplus cogitati per præcedens punctum; sed primò addis 5, quem numerum multiplicas per 5, fiunt 25, huic addis 10, fiunt 35, multiplicas per 10, producitur numerus 350, ergo producitur numerus centuplus producti, auctus numero 350.

Quartò multiplicetur numerus cogitatus per quemcumque numerum, dividaturque per alium, & iterum multiplicetur, & dividatur per quoscumque alios, ad arbitrium; sed eodem tempore; tu secretò assume aliquem numerum alium quem pariter multiplicabis, & divides per eosdem numeros, in fine tamen jube ut ultimum numerum dividat per numerum cogitatum, tu pariter divide tuum ultimum numerum per numerum primò assumptum, eundem quotientem habebis ac alius, huic ergo jube addi numerum cogitatum, & summam tibi manifestari, à quâ eumdem quotientem subtrahes, habebisque numerum cogitatum.

Sit numerus cogitatus 5, qui multiplicetur per 4, producitur 20, dividatur bifariam fient 10. multiplicetur per 6, productus erit 60, dividatur per 4, relinquetur 15, tu similiter assume ad libitum numerum 4, quem multiplica per 4, divide per 2, multiplica per 6, divide per 4, & habebis 12. Jube ut dividat relictum 15, per cogitatum seu per 5, quotiens erit 3, tu similiter divide 12, per numerum assumptum 4, idem erit quotiens 3, tibi cognitus. Quare si tibi manifestetur summa ex numero cogitato, & tali quotiente nempe 8, subtrahendo hunc quotientem 3, habebis numerum cogitatum 5.

Quintò poteris numerum divinare nihil petendo hoc est si supra numerum assumptum easdem operationes peragas, ac ille supra numerum cogitatum, tum ut supra imperes ut reliquum dividat per numerum cogitatum; tu pariter dividas tuum reliquum per numerum assumptum, cum eumdem habeas quotientem eum exhibere poteris, & divinare nihil petendo.

Sextò numerus cogitatus multiplicetur per 4, & producto adde quemcumque numerum verbi gratiâ 15, omnia divide per 3, dico quod si dividas multiplicatorem 4, per divisorem 3, sitque quotiens $1\frac{1}{3}$ si jubeas ex reliquo auferri semel numerum cogitatum; cum triente; relinquetur numerus 5, quem divinabis si dividas numerum additum 15, per 3, cogitaverit aliquis numerum 5, jubeo illum quadruplicari producitur 20, cui addo 12, fiunt 32, jubeo summam dividi per 2, erit quotiens 16, divido multiplicatorem 4. per 2. quotiens erit 2. quare subtrahe ex quotiente 16. bis numerum cogitatum, relinquetur idem numerus 6. qui relinquitur, dividendo numerum additum per primum divisorem 2. quare hunc numerum divinabis nihil petendo. Ratio hujus praxis fundatur ex parte in prima secundi, nam numerus 32 coalescit ex numero 20. & numero addito 12. qui dividatur per 2. quotiens erit 6. si igitur summam 32. dividas per 2. habebis mediam partem numeri 20. seu numerum cogitatum bis sumptum, & mediam partem numeri 12. seu 6. quare si 4. auferas, bis numerum cogitatum, relinquetur idem numerus 6.

Hæc praxis variari potest, assumptis aliis numeris.

PROBLEMA IV.

Ex duobus numeris pari, & impari divinare quem duo elegerint.

Proponantur duo numeri 8. & 7 par & impar seligendi à Petro & Paulo, divinandum est quem selegerit Petrus an parem aut imparem, assumantur duo alii numeri, quorum unus sit par, alter sit impar verbi gratiâ 2. & 3. jube ut Petrus multiplicet suum numerum per 2. & Paulus suum per 3. Si summa productorum est par; numerus 2. imparem multiplicavit, & numerus 3. parem, sic enim utrobique nascitur numerus par, si summa fuerit impar, impar 3. imparem multiplicavit; quare ut scias an summa sit impar; jube ut dividatur bifariam, si nequit adde unitatem, & alias operationes facito inutiles, certò tamen cognosces eum esse imparem.

Idem præstari potest in duobus numeris paribus quorum unus fuerit pariter par, alter pariter impar.

PROBLEMA V.

Plures numeros cogitatos denario minores divinare.

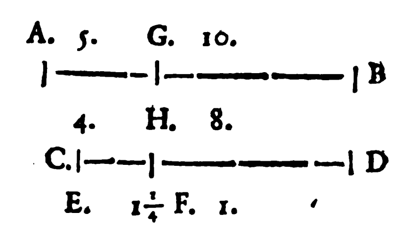
Multiplicetur primus numerus per 2. producto adde 5. summam multiplica per 5. & producto adde 10. huic adde secundum numerum, & summam multiplica per 10. tum adde tertium numerum, & multiplica per 10. & adde numerum quartum & ita consequenter si plures fuerint, dicatur tibi summa, ex qua subtrahes 35. si duo sint numeri, 350. si tres, 3500. si quatuor &c. tum character digitorum exhibebit ultimum cyphra decadum penultimum, centenariorum ante penultimum. Sint cogitati 3. 5. 8. 2. primum 3. multiplico per 2. fit 6. cui addo 5. fit summa 11. quam summam multiplico per 10. producitur 55. cui addo 10. fit 65. huic addo secundum numerum 5. fit 70. multiplico per 10. producitur 700. addo tertium numerum 8. fit 708. multiplico per 10. erit 7080. addo quartum numerum seu 2. fiet 7082. quia sunt quatuor numeri, subtraho 3500. restabit 3582. nempe numeri propositi 3. 5. 8. 2. Ratio clara est; si enim ponatur primus numerus 3. qui per 10. multiplicetur, & addatur secundus, & ita consequenter, clarum est quod ordine disponentur numeri propositi; prima autem operatio multiplicat per 2. & per 5. seu per 10. sed inserit numerum 5. post primam multiplicationem, ut nempe lateat artificium; cætera sunt facilia.

PROBLEMA VI.

Si duo accipiant certos numeros calculorum divinare quot unus habeat.

Petrus & Paulus accipiant quilibet numerum calculorum qui certam rationem habeant, Petrus accipiat 15. Paulus 12. Est autem ratio 15. ad 12. ut $1\frac{1}{4}$ ad 1. estque $1\frac{1}{4}$ denominator hujusmodi proportionis; det Paulus Petro quemcumque numerum calculorum, qui habeat quadrantem verbi gratia 8. tum Petrus reddat Paulo numerum calculorum, qui ad eos quos habet Paulus rationem habeat quam habet $1\frac{1}{4}$ ad 1. divinabis hoc modo quot calculos habeat Petrus. Denominatori proportionis adde 1. ut fiat $2\frac{1}{4}$ Primum numerum quem Paulus dedit Petro, nempe 8. multiplica par $2\frac{1}{4}$ fient 18. dico Petrum habere 18. calculos.

Sit numerus calculorum à Petro acceptorum 15. numerus calculorum à Paulo sumptorum sit 12. proportio sit $1\frac{1}{4}$ ad 1. translatis à Paulo ad Petrum 8. restant Paulo 4. Petrus autem habet 23. tum si reddantur Paulo calculi 5. secundùm denominationem proportionis 1 ad $1\frac{1}{4}$; hoc est ut sit eadem ratio reliqui 4. ad numerum qui addetur, quæ est 1. ad $1\frac{1}{4}$ hoc est 4. ad 5. restabunt Petro 18. quem numerum ita invenies ad $1\frac{1}{4}$ adde 1. ut fiant $2\frac{1}{4}$ per hunc numerum multiplica primum numerum 8. quem Paulus dedit Petro.



Sint A B, C D, numeri calculorum AB eorum quos accepit Petrus, & C D illorum quos accepit Paulus; si se habeant ut E ad F, sit H D numerus calculorum quos Paulus dat Petro; sitque ut E ad F, hoc est ut AB ad C D, ita AG ad C H, ita erit reliquum G B ad H D ut E ad F, & ut F ad E & F, simul ita H D ad summam G B, H D; quare multiplicando H D per E & F, & dividendo per F, quæ divisio per unitatem nihil immutat, habebimus summam G B, H D, quam habet Petrus; quod erat demonstrandum.

PROBLE

PROBLEMA VII.

Si duo, certos numeros calculorum accipiant: divinare quot quisque acceperit.

Quia per præcedentem cognovisti numerum calculorum, quos habet Petrus, si petas quam proportionem habeat hic numerus, ad eum quem habet Paulus; per regulam trium innotescet hic numerus, atque adeò, & tota summa, & per regressum quantum quisque acceperit.

PROBLEMA VIII.

Quot sint puncta, in una chartula Lusoria divinare.

Suppono omnes Lusorias chartulas esse numero 52, volo autem ut unitas æquivaleat unitati,& singulæ personæ denario æquivaleant, ex quo sequitur numerum punctorum omnium chartularum, habere denarium pro communi mensura. Seligat alius sibi chartulam, quam non ostendat, tu exinde puncta primæ chartulæ addes punctis secundæ, & summam addes punctis tertiæ, rejecto denario quoties occurret, quod summa celeritate fieri potest; differentia numeri ultimi à denario, erit is qui quæritur nempe punctorum detractæ chartulæ.

PROBLEMA IX.

Chartularum in plures ordines digestarum, divinare quam quis cogitaverit.

Disponantur in quatuor aut quinque ordines, quotcumque chartulæ lusoriæ, verbi gratiâ sint 25, digestæ in 5 ordines, & interroga in quo ordine inveniatur chartula cogitata, supponatur esse in tertio ordine; collige chartulas, secundum alios ordines, ita ut singulæ tertii ordinis, fiant singulæ tertiæ in suo ordine, hoc est fiat alia dispositio in qua.

A. B. C. D. E.	A. F. L. Q. X.
F. G. H. I. K.	B. G. M. R. Y.
L. M. N. O. P.	C. H. N. S. Z.
Q. R. S. T. V.	D. I. O. T. 2.
X. Y. Z. 2. 3.	E. K. P. V. 3.

Fiant alii ordines ut verbi gratiâ, si primus ordo sit ABCDE, Secundus FGHIK, &c. In secundâ dispositione sit primus AFLQX; secundus BGMRY &c. dico quod si rursus interroges ordinem in quo invenitur chartula cogitata, dico (inquam) esse tertiam sui ordinis, nam tertius ordo primæ dispositionis ita in secunda digeritur, ut eius chartulæ obtineant tertiam sedem in singulis ordinibus. Totum artificium positum est in eo ut fiat apposite hæc ordinum transmutatio.

PROBLEMA X.

Divinare chartulam quam quis cogitaverit.

Ostende alicui ordine chartulas, & jube ut cogitet unam, & simul mente retineat numerum illius, nempe an sit prima, secunda, tertia; tu etiam certum numerum chartularum, numera: Verbi gratiâ, numera triginta chartulas in quarum scilicèt massa invenitur chartula cogitata, easque ita dispone ordine retrogrado, hoc est ut ultima sit prima, penultima secunda; interroga numerum chartulæ cogitatæ; supponamus esse septimam, hunc numerum assignabis ultimæ, dicesque septima, numerabisque ordine retrogrado, trigesima erit chartula cogitata. Ponamus exempli gratia numerum breviorem, sint chartulæ ABCDEFGHI novem numero & aliquis cogitaverit tertiam seu C, dico si ponas supra I. tertiam, & H fiat quarta, & numeres ad nonam usque, novenarius cadet supra C. Si enim addas BA in fine, erit numerus AI, numero AC retrogrado æqualis, sed numerus AC retrogradus facit chartulam I tertiam: ergo numerando hoc modo, numerus novenarius chartulam cogitatam exhibebit.

PROBLEMA XI.

Ex pluribus chartulis in orbem dispositis, divinare quam quis cogitaverit.

A
K B
I C
H D
G G
F

Sint 10. chartulæ, aut quæcumque aliæ res in orbem dispositæ, sitque A prima; B secunda, C tertia, aliquis cogitet quamcumque verbi gratiâ E quintam, vidimus superiori propositione, quòd si ab ultima K incipiat cui addicat numerum chartulæ cogitatæ nempe dicat K quinta, I sexta, H septima, G octava, F nona, decima erit E, chartula cogitata: ergo si incipiat numerare ab A, erit addenda unitas, si incipiat à B, erit procedendum ad numerum 12; si à C usque ad 13, addendo scilicèt numero chartulæ à qua incipiendum est, denarium numerum.

Potest artificium hujus problematis occultari, si nempe jubeas inchoari numerationem à quocumque volueris; addasque numero duas aut tres unitates, sic enim non finietur numeratio in ipsa chartula cogitata, sed in alia distante duobus, aut tribus gradibus ab ea, ideoque regrediendo totidem gradibus, chartulam cogitatam invenies.

PROBLEMA XII.

De dispositione Christianorum, & Turcarum ut sedes novenaria in Turcam semper incurrant.

Ita solet proponi hæc quæstio 15 christiani, & 15 Turcæ in eâdem navi inveniuntur; ingruente procellâ, exoneranda est navis, sortitione autem id peragendum est, navarchus qui Christianus supponitur, omnes in orbem disponit, eâ conditione ut novenarius quique pereat; quæritur dispositio apta, ut primi pereant omnes Turcæ, nullo christiano pereunte. Id communiter efficitur hoc versu.

Populeam virgam mater regina tenebat.

In quo versu attendendus est tantum ordo vocalium, ut (*po*) significat inchoandum à 4, christianis (*pu*) indicat 5. Turcas addendos, cum vocalis u sit quinta in ordine vocalium, exinde duo Christiani, unus Turca, tres Christiani.

Methodus autem id præstandi in aliis quibuscumque numeris nulla datur alia nisi attentatio, nempe ut assumptis quotcumque calculis incipias numerationem, notesque eos in quibus numerus propositus verbi gratia novenarius, aut alius quilibet ceciderit, tum notato ordine facilè memoriæ causâ similis versus excogitandus erit.

PROBLEMA XIII.

Propositis tribus rebus, & tribus hominibus divinare quam quilibet acceperit.

Sint tres homines Primus, Secundus, Tertius, sume 24 nummos, seu calculos; & da unum primo; duos secundo, tres tertio, relictisque reliquis octodecim supra mensam, permitte ut ex tribus rebus propositis nempe A, E, I, quilibet unam sibi vindicet; tum jube ut qui accepit A tot nummos accipiat quot ei dedisti initio, qui accepit B duplum accipiat sibi initio collatæ pecuniæ, & qui accepit C, quadruplum accipiat, tum reliquum nummorum cognosces, restabit autem 1 vel 2 vel 3 vel 5 vel 6 vel 7, numquam 4, nec plures: communiter hic versus traditur.

Par fer Cesar jadis devint si grand Prince.

Sex constans vocibus, prima tribuitur primo casui in quo restat unus calculus. Secunda secundo, in quo restant 2. Tertia tertio in quo restant tria. In quâlibet voce duæ sunt syllabæ prima primæ personæ, secunda secundæ convenit, vocalis autem significat rem, si ergo restat I; uteris primâ voce (*Par fer*) & dices primum hominem qui nempe habuit unum calculum accepisse A seu primam rem, & secundùm accepisse E secundam, si restant duo calculi utere secunda, voce nempe (*Cesar*) & dices primum hominem accepisse E, & secundùm A, si restant 3, utere tertia voce (*jadis*) & dices primum hominem accepisse A, & secundum accepisse tertiam rem propter illud I.

Hæc problemata quamvis vulgaria, & alias proposita à Domino Bachet Demeseriac, nolui ommittere, ne scilicet Mathematicus noster hujusmodi ludicrorum esset penitus ignarus.

TRACTATUS V.

TRIGONOMETRIA.

TRIGONOMETRIA, *seu triangulorum scientia, metiendorum triangulorum methodum docet, cognitisque aliquibus in triangulo partibus, cæteras investigat. Sex autem tantum partes in triangulo agnoscimus; nempe tres angulos, & tria latera; quarum si tres saltem heterogeneæ cognoscantur, cæteræ hujus ope scientiæ innotescent. Triangula vel rectilinea sunt, quorum nempe latera rectis lineis constant; vel Sphærica quorum latera sunt arcus maximorum circulorum in superficie globi, seu Sphæræ descriptorum, quare triangulorum Sphæricorum solutionem ne attingat ille qui primum librum Sphæricorum Theodosii, & mediam saltem partem secundi non viderit; hærebit enim haud dubiè in plerisque. Trigonometriam verò rectilineam, ille facilè intelliget, qui Euclidis Elementorum libros sex priores tenuerit; modò tamen Arithmeticam sciat mediocriter, & saltem in quatuor primis regulis Elementaribus versatus sit. Quàm autem utilis sit hic tractatus, vix quisquam in mentem inducat: si enim rectilineam facillimam quidem in se spectemus, ex eâ tot geodesiæ instrumenta & praxes oriuntur, ut quæ alioquin abstrusa videbantur, ipso intuitu à trigonometra demonstrentur; si verò de Sphæricâ sit quæstio, nullus aut in cœlestibus, aut etiam in terrestribus certò pedem figere potest, qui illâ caruerit.*

Ut ergo ad rem veniamus, hanc scientiam in sex partes, seu libros divido. Primus Liber, sinus tangentes & secantes investigabit, & canonis construendi methodum tradet. Quamvis autem Sphæricam trigonometriam Tyro non usque adeò perfectè conciperet, praxes saltem addiscat, usu enim & praxi sensim & plana, & facilis evadet.

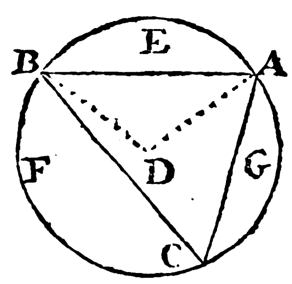
Secundus logarithmorum originem, & naturam aperiet.

Tertius triangula rectilinea solvet.

Quartus erit Isagogicus ad triangula Sphærica.

Quintus Sphærica triangula rectangula solvet.

Sextus denique obliquangula.



Primi duo libri sunt quasi prævii, parantque instrumenta, ad triangulorum omnium solutionem necessaria; alii rem ipsam absolvunt. Ut autem hujus communis instituti cognitio habeatur, cum omne triangulum rectilineum circulo inscribi possit; sequitur quòd ejus quodlibet latus subtendat aliquem arcum circuli. Ut si triangulum ABC inscribatur circulo cujus centrum D, latus AB subtenditur arcui AEB, & BC arcui BFC; item AC arcui AGC: quare si cognosceretur habitudo, seu ratio quam habent subtensæ singulæ arcuum, vel inter se, vel ad diametrum, illud multum conferret ad cognoscenda aut latera aut arcus, aut etiam angulos. Atque hoc sufficiat ut habeatur aliqua notitia generalis, cur ad triangulorum solutionem requiratur cognitio subtensarum in circulo inscriptarum, quod tamen meliùs infrà patebit.

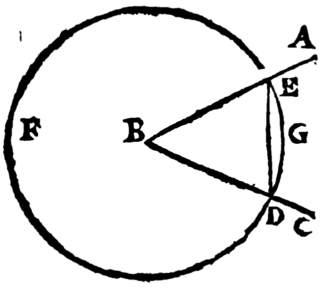
Quia omnis operatio trigonometica in regulâ porportionum posita est, quam communiter vocant regulam auream, aut regulam trium, quâ nempe datis tribus numeris, quartus proportionalis reperitur; quæ regula multiplicationem, & divisionem continet, operationes in numeris longioribus difficiles, & tædii plenas; nos eo labore sublevavit Nobilis Scotus Neperus, omni laude dignus, & de mathematicis disciplinis ideò benè meritus, qui substituit aliis numeris, quos logarithmos vocat, multiplicationem in additionem; divisionem in subtractionem commutavit; ita ut intra horæ quadrantem plura triangula solvere possimus illius methodo, quàm aliàs intra duas horas. Atque hæc in genere sufficiant.

LIBER PRIMUS Trigonometriæ.

De sinubus, tangentibus, & secantibus.

DEFINITIO I.

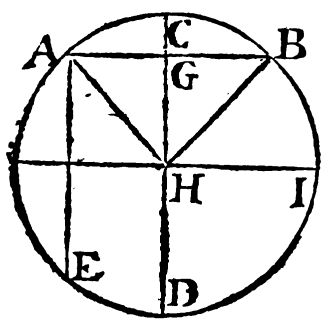
Anguli rectilinei mensura est arcus circuli, ex concursu linearum tanquam centro, ad quodlibet intervallum descripti, inter lineas angulum comprehendentes interceptus. Ut anguli ABC mensura est arcus DGE, circuli DEF descripti ex puncto B, apice ipsius anguli, tanquam centro, qui arcus DGE intercipitur inter lineas AB, CB comprehendentes angulum ABC.



Ex hoc sequitur, quòd subtensa alicujus arcus dicatur etiam subtensa anguli ejus, ut linea DE tàm dicitur subtendere arcum EGD, quàm angulum EBD. Quidquid igitur dicemus de arcubus, de angulis dictum intelligatur.

Communis est divisio circumferentiæ circuli in 360 partes æquales. Ideoque tam benè dicimus arcum constare 20, verbi gratiâ gradibus, quàm angulum.

DEFINITIO II.



Subtensa seu chorda alicujus arcus, est linea connectens extremitates illius arcus.

Ut linea AB est subtensa arcus ACB; dicitur autem chorda metaphorâ ductâ, ex arcu quo sagitæ emittuntur.

In quo notandum est, si linea AB non transeat per centrum circuli, eam tàm subtendere arcum ACB minorem semicirculo, quam ADB majorem; communiter tamen potiùs respicitur arcus minor qui potest esse mensura alicujus anguli quam major.

DEFINITIO III.

Subtensa residui ad semicirculum, est linea connectens extremitates arcus qui relinquitur ad semicirculum, ut si loquamur de arcu ACB sitque BAE semicirculus; linea AE est subtensa residui ad semicirculum.

DEFINITIO IV.

Sinus rectus alicujus arcus, aut anguli, est linea perpendicularis, ducta ab extremitate unius arcus ad lineam ductam à centro per aliam extremitatem.

Sit arcus CB, ducatur ex puncto B ad lineam HC, perpendicularis BG; hæc vocatur sinus rectus arcus CB, vel anguli BHC.

Vel est dimidia subtensa arcus dupli: si enim producatur BG ad A, & BA dividatur bifariàm in G, (*per* 3.3.) GH erit perpendicularis, & arcus AC, CB æquales: est igitur BG dimidia subtensa arcus ACB, qui duplus erit arcus BC, & AB erit subtensa illius, cujus BG dimidia est sinus anguli BHG. Ex qua definitione sequitur, quòd cognitis subtensis cognoscentur omnes sinus. Ideoque possumus quærere subtensas, ut inveniamus sinus.

Notandum item est, quòd sicut subtensa duos arcus subtendit, ita etiam sinus, est sinus duorum arcuum; unius quidem minoris quadrante, & alterius majoris quadrante. Ita BG est sinus arcus CB, item arcus BD, reliqui ad semicirculum. Respectu enim utriusque illi convenit definitio. Ex quo fit, ut in canone, seu tabulâ sinuum, sufficiat scribere arcus, usque ad quadrantem, seu ad nonaginta gradus. Cognito enim sinu recto unius arcus minoris quadrante, cognoscitur & sinus, reliqui ad semicirculum: hoc est sinus idem, est arcus 20 graduum, & reliqui ad semicirculum, seu arcus 160 graduum.

Notandum item; quoties simpliciter dicimus sinum alicujus arcus, nos intelligere sinum rectum.

DEFINITIO V.

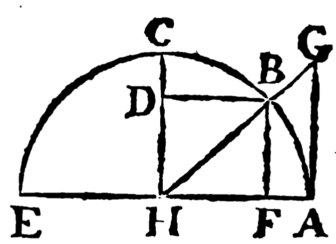
Sinus totus, est sinus rectus quadrantis circuli; seu arcûs nonaginta graduum, qui æqualis est radio, seu semidiametro.

Ut si arcus CBI sit quadrans circuli, linea HI, aut HC erit ejus sinus rectus: quia nempè est, perpendicularis ducta ab extremitate unius arcus, nempè C, ad lineam ductam à centro H per aliam extremitatem.

Hic autem sinus est omnium maximus, nam arcus majores quadrante habent sinum minorem; est item æqualis radio, seu semidiametro.

DEFINITIO VI.

Complementum alicujus arcus, aut anguli, est excessus quo exceditur à quadrante, si illo minor sit; vel quo excedit quadrantem, si illo major sit.



Sit arcus AB, minor quadrante ACB, BC est excessus, quo superatur à quadrante, vel si sumatur arcus ECB major quadrante; idem arcus CB, erit illius complementum. Quia CB est excessus quo excedit quadrantem.

DEFINITIO VII.

Sinus complementi, qui ab aliquibus vocatur sinus secundus, est sinus rectus complementi alicujus arcus. Ut linea DB est sinus arcus CB; qui comparatus cum AB, aut cum ECB, est complementum illorum. Unde linea DB est sinus complementi arcus AB aut arcus ACB.

DEFINI

DEFINITIO VIII.

Sinus versus alicujus arcus, est linea intercepta inter sinum rectum illius, & peripheriam circuli, ut arcus AB sinus versus, est linea FA, quæ intercipitur inter sinum rectum BF, & peripheriam circuli.

Hic autem sinus versus, est residuum semidiametri, ablato ab eo sinu complementi. Ut si ex semidiametro HA, auferas lineam HF, æqualem sinui complementi, nempe lineæ DB relinquitur sinus versus.

DEFINITIO IX.

Tangens alicujus arcus, est linea tangens circulum in extremitate illius arcus, & terminata ad lineam ex centro, per aliam extremitatem arcus ductam. Ut linea AG, quæ tangit circulum in puncto A, extremitate arcus AB, & terminantur ad lineam ABG, quæ ducitur ex centro H, per aliam extremitatem B, est tangens arcus AB.

DEFINITIO X.

Secans alicujus arcus, est linea à centro circuli, per extremitatem illius ducta, & ad tangentem extra circulum terminata. Ut linea HG ducta à centro H, per extremitatem B, arcus AB; & terminata extra circulum, ad tangentem AG, est secans arcus AB. Dantur tangentes, & secantes complementorum.

Notandum autem, ut jam monui, non tantùm dari sinus, tangentes, secantes arcuum; sed etiam easdem lineas vocari sinus, secantes, & tangentes angulorum, nempè angulorum quorum arcus sunt mensuræ. Ut quia arcus AB est mensura anguli BHA, linea FB dicetur sinus, AG tangens; HG secans, anguli AHB.

SUPPOSITIO I.

Suppono ex arithmetica, datâ longitudine alicujus lineæ in numeris, posse per multiplicationem cognosci eius quadratum; si nempè multiplicetur numerus datus per seipsum.

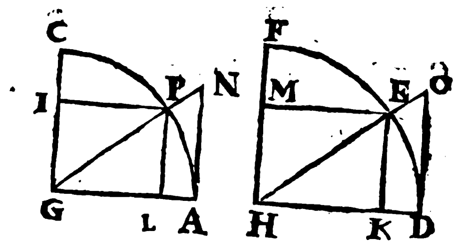
SUPPOSITIO II.

Suppono item datâ in numeris areâ alicujus quadrati, posse per extractionem radicis quadratæ, haberi in numeris longitudinem illius lineæ. Unde dixi initio hujus tractatus, neminem trigonometriam attingere debere, qui non fuerit in arithmeticis exercitatus.

PROPOSITIO I.

In circulis quibuscumque eadem est ratio, radij, ad sinum rectum, sinum versum, secantem, tangentem, & subtensam arcuum similium.

Sint circuli APC, DEF, etiam inæquales, sintque arcus AP, DE, similes; dico ita esse semidiametrum GP ad sinum rectum PL, aut sinum versum LA; tangentem AN; secantem GN; sinum complementi IP; subtensam AP: sicut radius EH, ad sinum rectum EK; sinum versum KD; tangentem DO: secantem HO sinum complementi EM subtensam ED.



Demonstratio. Arcus AP, DE supponuntur similes; igitur (*per defin.* 9. 1.) anguli PGL, EHK, sunt æquales: anguli autem, L & K sunt recti (*per def. sinus*) ergo triangula PGL, EHK sunt æquiangula: quare (*per* 4. 6.) erit ut GP ad PL, ita HE ad EK; quòd est primum. Pariter ut GP ad GL, aut ad IP, illi æqualem, sinum nempè complementi: ita HE ad HK, aut ad illi æqualem EM, sinum pariter complementi; propter eandem æqualitatem angulorum PGA, EHD, concludam triangula AGN, DHO, rectangula in D, & A esse etiam æquiangula: erit igitur ut radius AG ad tangentem AN, ita radius HD ad tangentem DO. Et ut idem radius AG ad secantem GN, ita radius HD ad secantem HO. Denique triangula APG, EHD; ductis lineis AP, DE essent etiam æquiangula, cum haberent angulos AGP, DHE æquales, & reliqui duo sint æquales inter se (*per* 5. 1.) cùm latera GP, GA sint æqualia ex definitione circuli; sicut HD, HE: igitur (*per eandem* 4. 6.) erit ut sinus totus seu radius GA ad subtensam AP; ita radius HD ad subtensam ED; quod erat ultimò demonstrandum. De sinubus versis idem demonstratur.

COROLLARIUM.

Ex hoc sequitur quod si semel habeantur rationes diametri, aut semidiametri unius circuli, ad subtensas, sinus, secantes, & tangentes omnium arcuum, ejusdem circuli, habebitur pariter ratio quam habent diametri omnium circulorum ad subtensas sinus, tangentes, secantes suorum circulorum.

Supponitur igitur diameter divisa in aliquot partes æquales, in quâ suppositione quæritur quot partium sint subtensæ singulorum arcuum, aut sinus, tangentes, secantes.

Ptolomæus & communiter antiqui dividebant diametrum in 120 partes æquales, ita ut semidiameter esset 60 partium; hunc autem numerum assumebant potiùs quam alium, quia plurimas continet partes aliquotas. Quia tamen eâ suppositione factâ plurimæ subtensæ adjectas habebant fractiones, quæ in operationibus geometricis multùm tædii afferebant, ideò recentiores diametrum in multò plures partes dividunt, ut si quæ in reliquis lineis fractiones inveniantur, facilè sine periculo erroris notabilis, negligi possint. Communiter autem dividitur à recentioribus diameter in 20000000. & radius in 10000000 partes æquales; in quâ hypothesi, quærimus quotnam partium sit sinus, secans, & tangens uniuscujusque arcus; faciliùs autem est uti

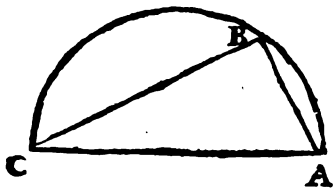
sinubus,

ſinubus, quàm ſubtenſis, ideóque canon continebit tantùm ſinus.

PROPOSITIO II.

Problema.

Cognitâ ſubtenſa alicujus arcus, cognoſcere ſubtenſam reliqui arcus ad ſemicirculum.



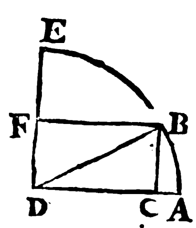
Sit cognita ſubtenſa AB, in partibus diametri AC, cognitæ (ſupponitur enim in omnibus iſtis diameter cognita) quæritur longitudo ſubtenſa CB, reliqui arcus ad ſemicirculum. Cognita AB, cognoſcitur eius quadratum per ſuppoſitionem primam. Item cognoſcitur quadratum AC. Aufer quadratum AB, à quadrato AC, & habebis quadratum CB, & per ſuppoſitionem ſecundam lineam ipſam CB.

Demonſtratio. Angulus ABC, in ſemicirculo (*per* 31.3.) rectus eſt, ergo (*per* 47.1.) quadratum AC, æquale eſt quadratis AB, BC. Ergo auferendo quadratum AB, ex quadrato AC, relinquitur quadratum ex BC.

PROPOSITIO III.

Problema.

Dato ſinu arcus, invenire ſinum complementi.



Sit datus CB ſinus arcus AB; quæritur FB ſinus arcus BE, eius complementi.

Aufer quadratum CB, ex quadrato DB, nempè ſemidiametri, relinquitur quadratum lineæ DC, ſeu FB illi æqualis.

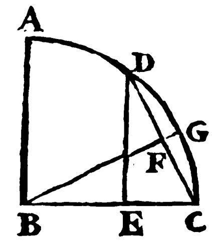
Demonſtratio. Eadem eſt, cum angulus BCD rectus ſit ex definitione ſinus.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Dato ſinu alicujus arcus, invenire ſinum arcus dupli, & dimidÿ.

Cognoſcatur ſinus CF, quæritur ſinus arcus CD, dupli, nempè DE, BE eſt ſinus complemenri, aut certè illi æqualis, nam in figurâ ultimâ, linea BF, eſt ſinus complementi cui æqualis eſt DC



intercepta inter centrum, & ſinum rectum; fiat igitur ut ſinus totus BC, ſeu radius ad ſinum complem. BE; ita ſinus arcus duplicatus, nempe DC, ad DE.

Demonſtr. Triangula BFC, EDC, ſunt æquiangula, cum habeant angulum communem C, & angulos DEC, BFC, æquales, utpote rectos; ergo erit ut BC radius, ad BF, ſinum complementi arcus CG, ita CD, dupla ſinus CF, ad DE, ſinum arcus CD qui duplus eſt ipſius CG.

COROLLARIUM I.

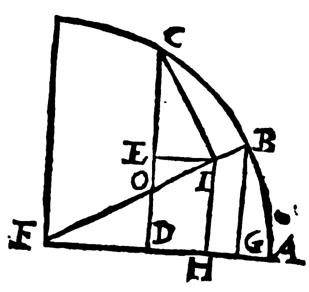
Sinus dimidii arcus eſt medius proportionalis inter ſinum verſum totius arcus, & dimidium radium, cum enim ſit ut BC ad CD; ita CF ad CE; ut autem BC, ad CD, ita dimidius radius ad dimidiam CD, ſeu CF; ergo erit dimidius radius ad CF ſinum dimidii arcus, ut CF ad CE ſinum verſum totius arcus.

COROLLARIUM II.

Cognito ſinu DE, dabitur ſinus arcus dimidii, ſeu dimidium ſubtenſæ DC; nam cognito DE, datur per tertiam BE, qua ablatâ ex radio BC, reſtat EC; ſed (*per* 47. 1.) quadrata ex DE, EC æqualia ſunt quadrato ex DC, ergo habetur DC, cujus dimidium CF, eſt ſinus arcus dimidii.

PROPOSITIO V.

Datis ſinubus duorum arcuum invenire ſinum aggregati eorum.



Proponatur arcus AB, BC, ſintque cogniti eorum ſinus, nempe BG ſinus arcus AB, & CI, ſinus arcus BC, ſupponitur enim CI perpendicularis ad FB. Quæritur linea CD, ſinus arcus ABC, compoſiti ex utroque.

Demonſtratio. Primò triangula FOD, OCI æquiangula ſunt, cum pariter angulos rectos ODF, CIO habeant angulos ad Verticem in puncto ctô O quales. Item triangula OCI, ECI æquiangula sunt, & per 4. 5. ita erit radius F B ad FI, sinum complementi arcus BC, cognitum per 3, ut sinus B G cognitus, ad H I, seu E D. Rursus ita est F B ad F G sinum complementi arcus BA item cogniti, ut CI, ad EC. Quare addendo CE, E D dabitur tota CD quæ quærebatur.

PROPOSITIO VI.

Datis sinubus duorum arcuum, invenire sinum differentiæ eorum.

Sint dati sinus arcuum AB, AC, hoc est BG, CD; dico cognosci posse lineam CI, sinum differentiæ illorum arcuum; iisdem enim positis ut priùs, cum detur sinus CD, datur (*per tertiam*) sinus complementi seu FD. Fiat ut FG ad BG, ita FD ad DO, habebitur D O, & consequenter OC. Fiat item ut FB ad FG, ita O C ad C I; triangula enim OCI, FBG, sunt æquiangula: ergo dabitur CI.

PROPOSITIO VII.

Sinus arcuum minimorum sunt sensibiliter in eâdem ratione cum arcubus.

Sint duo arcus minimi verbi gratiâ arcus unius minuti; & arcus trientis minuti; dico eorum arcuum sinus esse in eâdem ratione cum arcubus; non quidem exactè, sed physicè. In initio quadrantis circumferentia circuli perpendicularis est ad diametrum, & cum perpendiculari physicè coincidit; sed sinus arcuum sunt etiam perpendiculares ad diametrum, ut fert eorum definitio: ergo cum circumferentia sensibiliter coincidunt: ergo eandem physicè & sensibiliter habent rationem, ac arcus cujus sunt sinus.

Quia tamen aliquid deest ad perfectam æqualitatem rationis, prout majorem requiremus præcisionem, minores arcus erunt assumendi; quare si sumendo duos arcus quorum teneatur ratio, si inveniamus eorum sinus eandem habere sensibiliter, ita ut differentia si quæ est, non adæquet unam particulam æqualem illis in quas divisus est radius. Verbi gratiâ si radius assumptus est partium centies mille, si id quod deest sinui, ut sit ad alium, ut arcus ad arcum, minus est centies millesima parte radii, tutò assumere possumus in ordine ad institutum nostrum, eandem esse rationem sinus illius ad alium, sicut arcus ad arcum.

PROPOSITIO VIII.

Si eadem quantitas duplici divisione dividatur erit numerus partium primæ divisionis, ad numerum partium secundæ, ut una pars secundæ divisionis ad unam partem primæ divisionis reciprocè.

A. B. C. D. E. Numerus A dividatur in
60. 6. 10. 15. 4. quotcumque partes, numero B æquales, sitque C, numerus earum partium, ita ut ducendo B in C, fiat A: dividatur pariter idem A, in parte numero D æquales, sitque E, numerus talium partium, hoc est multiplicando D per E, fiat idem A: dico ita esse C, numerum partium primæ divisionis, ad E numerum partium secundæ; ut pars D ad partem B: cum enim idem rectangulum comprehendatur sub C, & B, quod sub E, & D: si B ponatur ultima, (*per* 16. 6.). ita erit C ad E, sicut D, ad B, quod erat demonstrandum.

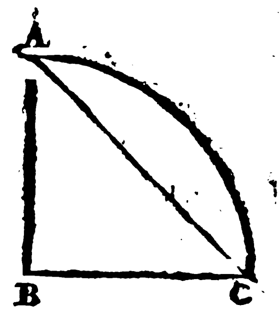
PROPOSITIO IX.

Subtensa arcus 60 graduum, æqualis est semidiametro.

Demonstratio. Cùm totus semicirculus contineat gradus 360 arcus 60 erit sexta ejus pars, & consequenter ejus subtensa latus exagoni: sed latus exagoni ex coroll. (*propos.* 15 *l.* 4) est æquale radio seu semidiametro; Ergo habetur subtensa arcus 60, & consequenter ejus semissis est sinus arcus graduum 30.

PROPOSITIO X.

Quadratum subtensæ graduum 90 est duplum quadrati semidiametri.



Sit quadrans circuli, arcus AC hoc est 90 graduum, sitque ejus subtensa AC, dico illius quadratum duplum esse quadrati semidiametri. Sit centrum circuli B, ducanturque BA, BC.

Demonstratio. Angulus ABC rectus est, cum mensura ejus sit AC, quadrans, ergo (*per* 47. 1.) quadratum AC, erit æquale quadratis AB BC, hoc est duobus quadratis semidiametri, quod est esse duplum.

PROPOSITIO XI.

Canonem sinuum construere.

Supponitur sinus totus seu radius quotcumque partium, seu divisus in partes verbi gratiâ 10000000. huic (*per* 13.) æqualis est subtensa graduum 60, & ejus semissis æqualis erit sinui graduum 30, & subdividendo hunc arcum bifariam habebitur (*per* 4.) sinus arcus 15 gr. & subdividendo iterum sinum arcus 7. 30. & ita consequenter subdividendo habebimus istorum arcuum sinus, ita ut duodecimâ divisione pervenîamus niamus ad ſinus qui eandem rationem habent, ac arcus (*per* 7.) Quod deprehendemus facilè,

Gr.	Mi.	Sec.	Terti.		
30.					
15.					
7.	30.				
3.	45.				
1.	52.	30.			
0.	56.	15.			
	28.	7.	30.		
	14.	3.	45.		
	7.	1.	52.	30.	
	3.	30.	56.	15.	
	1.	45.	28.	7.	30.
		52.	44.	3.	45.

inveniemus enim rationem ſinus penultimi, ad ultimum eſſe duplam ſenſibiliter, ſicut unus arcus eſt duplus alterius.

Supponatur idem arcus 30 graduum diviſus in minuta, eruntque minuta in 30 gradibus 1800. Per primam autem diviſionem numerus partium erat in 2048 partes diviſus, ſed ſinus ſe habent ut arcus ſenſibiliter, & (*per* 8. *hujus*) ita eſt numerus partium duarum diviſionum, ut ipſæ partes reciprocè: ergo ita erit 1800. ad 2048. ut ſinus qui ſupponitur ultimò inventus pro arcu ſecundorum 52. 44. 3. 45. ad ſinum unius minuti qui quæritur.

Cognito ſinu unius minuti dabitur per quartam ſinus duorum minutorum.

Dato ſinu unius minuti & ſinu duorum (*per* 5.) datur ſinus trium.

Dato ſinu trium & unius, per eandem dabitur ſinus quatuor, & ita conſequenter uſque ad 30 gradus.

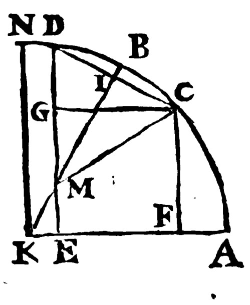
Tum (*per* 10.) uſque ad ſexageſimum gradum, & per 9, uſque ad gradus 90.

Hæ propoſitiones ſufficere poſſent abſolutè, ad conſtruendum canonem ſinuum, ſequentes tamen ſunt neceſſariæ ad minuendum laborem.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Differentia ſinuum duorum arcuum, æqualiter à gradu ſexageſimo diſtantium, æqualis eſt ſinui diſtantiæ alterutrius à gradu ſexageſimo.



Sit arcus AB 60 graduum, ſintque arcus AC, AD æqualiter diſtantes ab arcu AB, hoc eſt tam arcus AD ſuperet arcum AB, quàm arcus AB, ſuperat arcum AC, ſeu arcus BC, BD ſint æquales. Ducatur CG. parallela ipſi EF: DE, ſit ſinus arcus AD. & FC ſinus arcus AC, & quia tàm CG, EF, quàm EG, CF, ſunt parallelæ propter angulos rectos ad E, & F, parallelogrammum erit EFCG, eruntque CF, EG, æquales; (*per* 34.1.) quare GD, erit exceſſus quo DE, ſinus arcus AD, ſuperat lineam FC, ſinum arcus AC. Dico illum exceſſum æqualem eſſe lineæ CI, ſeu ſinui arcus CB, ducatur linea CM.

Demonſtratio. Contendo triangulum CDM, eſſe æquilaterum; nam triangula MID, MIC, habent unus latus MI commune, latera DI, IC, ſunt æqualia, (*per* 3.3.) cum arcus DB, & BC ſint æquales, & anguli ad I, ſint recti erunt (*per* 4.1.) anguli MDI, MCI, æquales & latera MD, MC æqualia; item anguli DMI, BMC, æquales erunt. Cum autem angulus DMB, externus in parallelis NK, DE æqualis ſit interno NKB, qui eſt 30. graduum; igitur totus DMC eſt 60 graduum; & alii duo MDC, MCD qui æquales probati ſunt, erunt etiam 60 graduum, ut perficiantur duo recti. Quare æquiangulum eſt triangulum DMC, & (*per cor. quintæ* 1.) æquilaterum: ergo æquales ſunt CD, MD: linea autem GD, eſt dimidia pars lineæ MD; cum enim CG facta ſit parallela lineæ KA, & angulus E rectus ſit, ex (*definitione ſinus*) anguli ad G recti ſunt. Cum igitur triangula CGD, CMG, habeant duos angulos, & duo latera CD, CM, æqualia, erunt (*per* 26.1.) lineæ GD, GM æquales: ergo GD eſt dimidia lineæ GM, ergo æqualis lineæ CI, quæ eſt dimidia lineæ CD. Quod erat demonſtrandum.

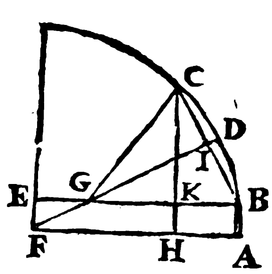
COROLLARIUM.

Sequitur ex hoc, quòd datis ſinubus arcuum uſque ad 60. dabuntur facilè reliqui per ſolam additionem. Sit enim datus ſinus arcus gr. 59. huic adde ſinum arcus unius gradus efficieſque ſinum arcus 61. ſi ſinui arcus 58. addas ſinum arcus duorum graduum efficies ſinum arcus graduum 62.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si ſint duo arcus æqualiter à gradu trigeſimo diſtantes, quadratum ſinus diſtantiæ eſt tertia pars quadrati differentiæ ſinuum illorum arcuum.



Sit arcus AD, triginta graduum, ſintque arcus AB, AC, æqualiter ab illo diſtantes, hoc eſt ſint BD, DC arcus æquales. Ducaturque linea BC, & linea FD, eritque BC ſicut priùs diviſa bifariàm, & ad angulos rectos. Sit CH. ſinus arcus AC, & AB ſinus arcus AB, erit CK differentia ſinuum, & BI, ſinus arcus BD, ſeu differentiæ inter arcum AB, & AD. Dico quadratum lineæ BI eſſe tertiam partem quadrati KC, jungatur linea CG.

Demonſtratio. Triangulum CGB oſtendetur ut priùs eſſe æquilaterum; quare triangula CKB; GIB, quorum communis eſt angulus CBK, & anguli gulì ad K, & I recti, & latera GB, & BC æqualia; (*per* 26.1.) sunt æqualia, & latera BK, BI æqualia sunt, sed (*per* 47.1.) quadratum BC, quod est quadruplum quadrati BI, (cum BC sit dupla ipsius BI,) est æquale quadratis CK, & KB seu BI. Ergo si ab utroque auferas quadratum BI, erunt tres quadrantes quadrati BC æquales quadrato KC. Ergo quadratum KC est triplum quadrati BI, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

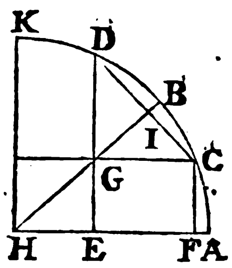
Ex hoc Theoremate cognitis sinubus arcuum ad trigesimum gradum cognoscentur reliqui usque ad sexagesimum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si sint duo arcus æqualiter ab arcu graduum 45 distantes; erit quadratum sinus arcus quo ab arcu 45 differunt, media pars quadrati differentiæ sinuum.

Sit arcus AB 45 graduum, sintque duo arcus AC, AD æqualiter distantes ab eo; hoc est arcus BC, BD sint æquales. Sintque eorum sinus DE, FC; DE autem secet HB, in G, ducatur GC quæ erit parallela lineæ AH. Nam cum lineæ HK, DE,



sint perpendiculares ad eandem AH, & parallelæ erunt inter se: igitur angulus DGB externus, æqualis est interno KHB, qui semirectus est. Triangula autem GDI, GIC, sunt æqualia (*per* 4. *primi*) quare æquales sunt anguli DGB, BGC: semirectus ergo est BGC, ergo etiam æqualis angulo interno GHE, & (*per* 28.1.) parallelæ sunt GC, EF: parallelæ item sunt DE, CF cum sint perpendiculares ad eandem HA. Igitur (*per* 34.1) æquales sunt CF, EG; ergo GD est differentia sinuum. Dico autem illius quadratum duplum esse quadrati DI, vel IC.

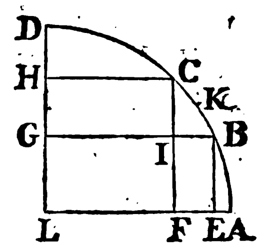
Demonstratio. In triangulo GID, angulus in I, rectus est, cum arcus DB, BC supponantur æquales, angulus DGI, est jam probatus semirectus; ergo & GDI semirectus erit, ut perficiantur duo recti: ergo (*per* 6.1.) latera DI, GI sunt æqualia. Sed (*per* 47.1.) quadratum GD est æquale quadratis GI, ID; ergo duplum est quadrati DI, quod erat demondrandum.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Aggregatum ex quadratis differentiæ sinuum arcuum, & differentiæ sinuum complementorum, est quadruplum quadrati sinus semidifferentiæ arcuum.

Sint duo arcus AB, AC, quorum differentia CB, semidifferentia KB; sint sinus eorum BE; CF, quorum differentia CI; sinus complementorum CH, BG, quorum differentia IB: dico aggregatum quadratorum CI, IB, esse quadruplum quadrati sinus arcus KB.



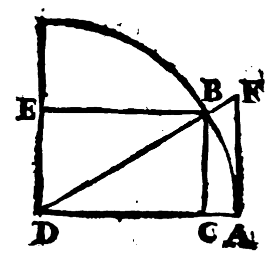
Demonstratio. Angulus CIB est rectus, ut facilè colligi potest ex definitionibus sinuum; ergo (*per* 47.1.) quadratum CB æquale est quadratis CI, IB, sed quadratum CB est quadruplum quadrati sinus arcus KB. Nam sinus arcus KB est dimidia subtensa arcus CB dupli. Ergo quadrata CI, IB sunt quadrupla quadrati sinus KB.

Sequuntur propositiones necessariæ ad compositionem canonis Tangentium & Secantium.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Ut sinus complementi ad sinum arcus, ita sinus totus ad tangentem ejusdem arcus.



Sit arcus AB, cujus sinus BC; tangens AF; sinus complementi EB, aut illi æqualis DC, dico ita esse DC ad CB, sicut DA radius, ad DF.

Demonstratio. BC (*per definit. sinuum*) est perpendicularis ad DA. Item AF est ad eandem perpendicularis, cùm sit tangens. Ergo (*per* 28.1.) sunt CB, AF parallelæ: ergo in triangulo FDA est ducta CB parallela basi: igitur (*per* 2.6.) ita est DC ad CB, sicut DA ad AF.

Ex hâc solâ propositione confici potest canon tangentium, licèt simus daturi alias utiles ad facilitatem.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Radius est medius proportionalis, inter sinum complementi, & secantem arcus.

Sit in eâdem figurâ sinus complementi EB aut illi æqualis DC, & secans DF: dico ita esse CD ad DA, ut DA ad DF, secantem.

Demonstratio. In triangulo ADF, ducta est ut ostendimus CB parallela basi AF; ergo (*per* 2. 6.) ita est DC ad DB (aut DA illi æqualem)

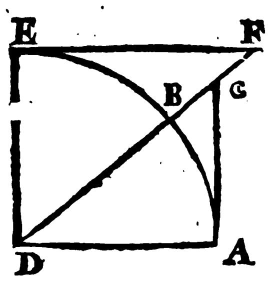
lem) sicut DA ad DF, quod erat ostendendum.

Hâc sola propositione absolvi potest canon secantium.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Radius est medius proportionalis, inter tangentes arcûs, & complementi.



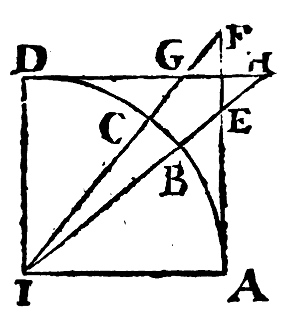
Sit arcus AB, cujus tangens AC, complementum ejus sit BE, cujus tangens EF: dico ita esse tangentem AC ad radium, sicut radius ad EF.

Demonstratio. Cùm linea ED sit perpendicularis ad DA, ex constructione (supponitur enim AE esse quadrans, & consequenter ADE, esse angulus rectus ; ED sit etiam perpendicularis ad EF, cum EF sit tangens ; erunt DA, EF parallelæ : quare (*per* 29.1.) anguli alterni ADC, DFE, sunt æquales. Item anguli A, & E sunt recti, & æquales, & triangula DEF, DAC sunt æquiangula ; unde (*per* 4. 6.) erit ut tangens AC, opposita angulo D ad AD radium, ita ED radius oppositus angulo F, (qui æqualis est angulo D) ad tangentem EF, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Tangentes arcuum ; tangentibus complementorum sunt reciprocè proportionales.



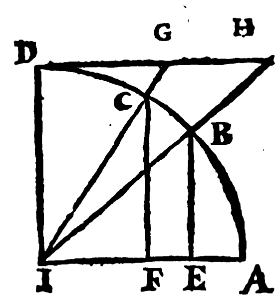
Sint arcus AB, AC, quorum complementa BD, CD, sitque tangens arcus AB, linea AE ; tangens arcus AC, sit AF ; tangens complementi arcus AB, nempe BD, sit DH ; & complementi AC ; nempe arcus CD sit DG ; dico ita esse AE ad AF, sicut DG ad DH ; & hoc est reciprocè, nempè prima sit tangens arcus secundi, tertia sit tangens complementi arcus secundi, quarta erit tángens complementi arcus primi.

Demonstratio. Radius est medius proportionalis inter tangentem arcûs AB, & tangentem complementi, hoc est ; ita est tangens EA, ad radium, ut radius ad DH, igitur rectangulum sub EA, DH, æquale est quadrato radii. Pariter rectangulum sub AF, DG, æquatur eidem quadrato radii : ergo rectangulum sub EA, DH æquale est rectangulo sub AF, DG, quare (*per* 16.6.) ita est EA ad AF, sicut DG ad DH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Sinus arcuum, & secantes complementorum reciprocè sunt proportionales.



Sint arcus AB, AC, quorum complementa BD, CD, sinus BE. CF, secantes IH, IG, dico ita esse sinum primi AB, nempè BE ad sinum secundi, nempè CF ; ut IG, secans complementi secundi, ad IH, secantem complementi primi arcus.

Demonstratio. (*Per* 17.*hujus*) radius est medius proportionalis inter sinum arcus, & secantem complementi : quare ut EB ad radium ; ita radius ad IH : ergo rectangulum sub EB, IH æquatur quadrato radii, pariter rectangulum sub CF, IG æquabitur eidem quadrato: ergo(*per* 16.6.) erit ut EB, ad CF ; ita IG, ad IH ; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Ut tangens arcus, ad secantem ejus ; ita radius ad secantem complementi.

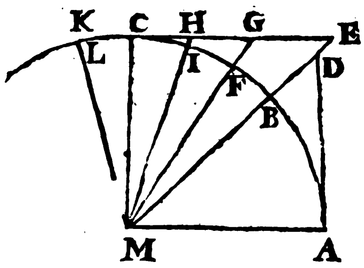
In figurâ proportionis 18. ostendimus triangula CAD, DEF esse æquiangula ; igitur ut tangens AC, opposita angulo ADC, ad secantem DC, oppositam angulo recto A ; ita radius DE, oppositus angulo F, (qui angulo ADC est æqualis) ad DF secantem complementi, oppositam angulo recto E ; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Differentia tangentium arcuum, qui simul sumpti æquales sunt quadranti, est dupla tangentis arcus, quo major minorem superat.

Sint duo arcus AB, BC qui simul sumpti quadranti sint æquales sive qui sint sibi invicem complementa ; sitque AD, tangens minoris ; & CE, tangens majoris ; sitque arcus BI æqualis arcui AB, AB, & consequenter IC erit differentia arcuum, & CH, erit tangens illius; sumatur item CF



æqualis ipsi AB, eritque CG, ejus tangens, æqualis tangenti AD. Dico GE, excessum tangentis CE supra CG, aut AD, illi æqualem, esse duplam lineæ CH, tangentis differentiæ arcuum. Sumatur arcus CL, æqualis ipsi CI, sitque KC illius tangens, æqualis ipsi CH, ideoque tota KH, illius erit dupla. Volo probare lineam GE æqualem esse lineæ KH.

Demonstratio. Arcus BI, factus est æqualis arcui AB, ergo (*per 27.3.*) anguli AMB, HMB, sunt æquales, sed AMB, & MEC alterni, sunt etiam æquales: ergo anguli E, & BMH sunt æquales: ergo (*per 6.1.*) lineæ MH, seu MK, & HE æquales sunt.

Pariter cum arcus AB, CF sint facti æquales, si addantur utrinque arcus CL, FB æquales; erunt arcus AF, FL æquales, & consequenter æquales erunt anguli KMG, AMG; sed AMG, MGK, alterni sunt etiam æquales; ergo anguli KMG, MGK, sunt æquales; ergo (*per 6.1.*) latera KM, GK, sunt æqualia: quare æquales erunt lineæ KG, HE, ut pote eidem MK, æquales; igitur ablatâ communi HG, erunt æquales KH, GE, quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Datâ tangente differentiæ duorum arcuum, qui simul sunt æquales quadranti, & tangente minoris, habebitur tangens majoris; si nempe tangenti minoris addatur dupla tangens differentiæ arcuum. Et vicissim.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Tangens differentiæ arcuum, qui simul æquales sunt quadranti, unâ cum tangente arcûs minoris, æqualis est secanti differentiæ.

Ostendimus enim lineam KG, compositam ex CG æquali ipsi AD, & ex KC tangente differentiæ, æqualem esse, lineæ KM, quæ est secans differentiæ.

Quare datâ tangente differentiæ, & tangente arcus minoris, dabitur per solam additionem, secans differentiæ arcuum.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Tangens differentiæ arcuum, qui simul æquales sunt quadranti, & secans ejusdem differentiæ simul, æquales sunt tangenti majoris arcus.

Ostendi enim lineas HE, HM, esse æquales, quibus si addatur CH tangens differentiæ, fiet linea CE, æqualis lineis CH, MH.

TRIGONOMETRIÆ LIBER SECVNDVS.

De Logarithmis.

OMNIS ferè solutio trianguli ope canonis subtensarum, sinuum, tangentium, & secantium absolvitur per regulam proportionum; in quâ tribus numeris datis, quartus proportionalis invenitur. Hæc autem regula perficitur, multiplicando secundum per tertium, & productum dividendo per primum. Numeri autem qui inveniuntur in tabulis secantium, sinuum, tangentium, ut vitentur fractiones, eamque habeant accurationem quæ requiritur, septem aut octo characteribus constant; ex quo fit ut operationes trigonometricæ multùm laboris, & tædij contineant, immò & periculi, ne in tam longis operationibus aliquid erroris irrepat. Unde valde sapienter Neperus de totâ mathesi propterea benè meritus, & nunquam satis laudandus, alios numeros, pro sinubus tangentibus aut secantibus substituit, quorum ope idem sola additione præstamus, quod multiplicatione, idem subtractione quod aliàs divisione efficiebamus: eos quasi exponentes numerorum cossicorum logarithmos vocat, quorum naturam, proprietates, inventionem & usum, toto hoc libro explicamus.

DEFINITIO I.

Numeri proportionales geometricè sunt qui eandem habent inter se rationem, nempe quorum primus secundi tot partes aliquotas quascumque continet, quot tertius similes partes aliquotas secundi. Ut 2. 4. 3. 6. qui sunt (*per 15. 6.*) eam habent proprietatem, ut rectangulum comprehensum sub extremis 2, & 6, æquetur rectangulo comprehenso sub mediis: nam bis sex efficiunt 12, sicut ter quatuor. Hi numeri possunt esse continuè proportionales, ut 2. 4. 8. 16. 32. Nempe est eadem ratio 2 ad 4, quæ 4 ad 8, & 8 ad 16.

Numeri proportionales arithmeticè sunt numeri æqualis excessu se superantes, ut 2. 4. 3. 5. sicut enim secundus superat primum binario, ita quartus 5 superat binario numerum 3. Hanc autem habent proprietatem hi numeri ut summa extremorum, æquetur summæ mediorum, nempe 2 & 5 efficiunt 7. sicut 4 & 3.

Possunt hi numeri esse continuè proportionales, ut 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. qui numeri continuè se excedat unitate, ut 1. 3. 5. 7 9. 11. qui se continuè binario excedunt.

DEFINITIO II.

Logarithmi sunt numeri proportionales arithmeticè, numeris geometricè proportionalibus applicati. Seu numeri æqualibus semper differentiis se excedentes, pro numeris geometricè proportionalibus substituti.

Sit verbi gratiâ series A numerorum geometricè proportionalum, quibus è regione, scribatur series numerorum æquali semper excessu se superantium, sive se superent unitate, ut in serie B, sive binario ut in serie C; sive ternario ut in serie D, sive quocumque alio excessu. Numeri serierum B, C, D aut alterius cujuscumque possunt esse Logarithmi numerorum in serie A positorum. Singuli igitur numeri serierum arithmeticarum, sunt Logarithmi numerorum sibi respondentium in serie geometrica.

A.	B.	C.	D.
1.	1.	2.	1.
2.	2.	4.	4.
4.	3.	6.	7.
8.	4.	8.	10.
16.	5.	10.	13.
32.	6.	12.	16.
64.	7.	14.	19.
128.	8.	16.	22.

Ut autem jam ab ipso initio percipias finem cujus gratiâ inventi sunt hujusmodi logarithmi; supponamus me velle, datis tribus numeris quærere quartum numerum proportionalem. Sint dati tres numeri seriei A. 2. 4. 8. quibus quæritur quartus proportionalis. Regula consueta jubet multiplicari 8 per 4. & productum nempe 32. dividi per primum 2. quotiens scilicèt 16. est ille qui quæritur. Nos aliter operabimur per logarithmos, si trium numerorum geometricorum 2. 4. 8. logarithmis in prima serie acceptis: 2. 3. 4. addamus duos ultimos 3. & 4 fientque 7. Ab hoc numero 7. auferatur primus nempe 2. restant 5. Dico hunc numerum 5. esse logarithmum numeri quæsiti. Ideoque si tabulam inspicias videasque numerum geometricum in serie A, respondentem numero 5. seriei B, invenies pariter 16.

Liberum est cuique logarithmorum, seriem quam voluerit adhibere; determinatis tamen logarithmis duorum numerorum; jam ampliùs liberum non est quoscumque logarithmos assignare cæteris numeris. Verbi gratiâ posito quod logarithmus unitatis sit 1 & binarii sit 2 necessariò logarithmus quaternarii erit 3. & octonarii erit 4 & ita de cæteris seriebus quæ applicari possunt.

Facillimum quidem esset datâ qualibet serie numerorum geometricorum, assignare seriem numerorum arithmeticè proportionalium, seu eorum logarithmos invenire; quia tamen in quacumque serie geometricâ multi desunt numeri intermedii, quibus in nostris operationibus indigere possumus; ideò logarithmi applicati cuicumque seriei geometricæ, debent maximo excessu se invicem superare, ut intermediis, possint etiam sui logarithmi, sine ulla fractione assignari. Quod ut intelligere faciliùs possis, ponamus seriem B continere logarithmos seriei A; cùm unitas sit logarithmus unitatis binarii, ternarius quaternarii, hic jam deesset logarithmus ternarii. Pariter nullus inveniretur logarithmus numerorum 5. 6. 7. item 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. in quo esset maximus defectus; nam quotiescumque occurrerent numeri hujusmodi, cessaret omnis logarithmorum usus.

Ex quo fit ut si logarithmus unitatis esset 0, pro logarithmo binarii possent accipi 1000000, & pro logarithmo quaternarii 2000000, pro logarithmo octonarii 3000000, & tunc possent suppetere aliqui logarithmi pro intermediis: sicut enim logarithmus unitatis superatur à logarithmo binarij, hoc numeri 1000000, ita etiam logarithmus binarii superatur à logarithmo quaternarii eodem excessu, atque ita observatur definitio logarithmorum.

Notandum item posse logarithmos decrescere æquali semper decremento, interea dum numeri geometricè crescunt, proportionalibus semper incrementis. Ut si sint duæ series E, & F, quarum prima crescat geometricè alia vero decrescat arithmeticè, idem tamen habe-

E.	F.	G.
1.	20.	20.
2.	19.	17.
4.	18.	14.
8.	17.	11.
16.	16.	8.
32.	15.	5.
46.	14.	2.
128.	13.	—1.
256.	12.	—4.

tur emolumentum; nempe ut per additionem, & subtractionem logarithmorum, idem efficiatur, quod per multiplicationem, & divisionem numerorum geometricorum. Sequitur autem in eâ serie quod cum series geometricorum semper crescere possit in infinitum, series autem logarithmorum quæ decrescit per æqualia decrementa, non possit decrescere in infinitum, inveniatur tandem aliquis numerus qui habeat pro logarithmo aliquid minus quam o ideoque habeat numerum deficientem. Ut eidem seriei geometricæ E, respondeat series arithmeticè decrescens G, cum logarithmus numeri geometrici 64. sit 2. & logarithmus sequentis nempè 128. debeat decrescere tribus unitatibus, debet logarithmus esse —1. hoc est una unitas infra o. & logarithmus numeri geometrici 256. esse —4. seu quatuor unitates infra o. Ut autem videas etiam eos logarithmos deficientes posse esse utiles, dentur tres numeri geometrici

metrici 2, 4, 128, quibus methodo logarithmicâ debet quæri quartus proportionalis. Sumantur datorum numerorum logarithmi 17, 14, — 1, adde duos ultimos, id est quatuordecim & minus unitate fiet 13, aufer 17 ex 13; desunt quatuor; ideoque restabit — 4, logarithmus numeri quæsiti.

Isti autem numeri defectivi sunt communes in algebrâ.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si quatuor quantitates sint arithmeticè proportionales: prima & quarta simul sumptæ, æquales sunt, tertiæ, & secundæ, item simul sumptis.

	F.		H.
	2.		2.
	E.		G.
4.	4.	3.	3.
A.	B.	C.	D.

Sint quatuor quantitates, A, BF, C, DH; arithmeticè proportionales, hoc est eodem excessu se superantes, ut in apposito exemplo secunda quantitas, BF superet primam A, eodem prorsus excessu, quo quarta DH, superat secundam C, dico A, & DH, simul æquales esse, quantitatibus C, & BF, simul sumptis. Sit EF excessus quantitatis BF supra A, & excessus quo, quantitas DH superat C sit GH, supponuntur igitur EF, & GH, æquales.

Demonstratio. Si quantitati A, addatur GH, fient A, GH, æquales ipsi BF; nam A, & BE, sunt æquales, cum EF sit excessus lineæ BE, supra A. Quare si æqualibus A, & BE, addantur GH, & EF, æquales, ex suppositione; fient A, & GH simul, æquales toti BF. Si iterum æquales lineas DG & C æqualibus addas, fient A, DG, & GH, seu A, DH, æquales lineis BF, & C. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Sequitur ex hâc propositione, quòd si ex quatuor numeris arithmeticè proportionalibus, dentur tres primi, facilè innotescet quartus per additionem, & subtractionem. Supponantur enim cognitæ quantitates A, BF, C, & ignota esse DH; simul addantur BF, & C, cognoscitur aggregatum, ex BF, & C, cui cum aggregatum ex A & DH æquale sit; cognoscitur etiam illud. Ex hoc aggregato subtrahatur A. Relinquitur DH.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si tres quantitates fuerint arithmeticè proportionales, prima, & tertia simul sumptæ, duplæ sunt quantitatis mediæ.

Sint tres quantitates A, B, C, arithmeticè proportionales; hoc est quantitas A eodem excessu superet quantitatem B, quo quantitas B superat quantitatem C; dico A, & C, simul esse duplas quantitatis B. Ponatur enim quantitas D æqualis ipsi B.

A. B. D. C.

Demonstratio. Cum quantitas B supponatur eodem excessu superare quantitatem C, quo quantitas A superat B; & D facta sit æqualis ipsi B: D etiam superabit eodem excessu quantitatem C, quo A superat quantitatem B. Ergo A, B, D, C, sunt quatuor quantitates arithmeticè proportionales. Quare (*per præcedentem*) A, & C simul æquales sunt, quantitatibus B, & D simul etiam sumptis; hoc est duplo ipsius B. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si ex tribus numeris continuè arithmeticè proportionalibus, detur primus, & secundus, dabitur etiam tertius; si nempe secundum duplices, & ab eo sic duplicato subtrahas primum.

PROPOSITIO III.

Si sint quotcumque quantitates arithmeticè continuè proportionales, earum differentiæ erunt intervallis geometricè proportionales.

4.	A.
5.	B.
6.	C.
7.	D.
8.	E.
9.	F.

Sint quot volueris quantitates arithmeticè, & continuè proportionales; hoc est B superet quantitatem A, eodem excessu, quo C superat ipsam B; & quo D superat ipsam C, & E ipsam D, & F ipsam E. Dico differentias esse intervallis proportionales; hoc est differentiam quâ F superat A, esse quintuplam differentiæ quâ B superat ipsam A, eò quòd intervallum F supra A sit quintuplum intervalli inter B & A.

Demonstratio. Quoties multiplicatur intervallum toties multiplicatur eadem differentia: sed æquè multiplicia sunt in eâdem ratione, ac quantitates, quorum sunt multiplicia, (*per* 15.5.) ergò ut se habet intervallum ad intervallum, ita etiam differentia, ad differentiam.

PROPOSITIO IV.

Si sint quotcumque quantitates continuè arithmeticè proportionales; excessus ultimæ supra primam divisus per numerum intervallorum, dat differentiam quâ se excedunt invicem.

Sint iidem numeri A, B, C, D, E, F, continuè proportionales arithmeticè; dico quòd si excessus quo F superat quantitatem A, dividatur per numerum intervallorum, quæ sunt inter F, & A, dabitur differentia quâ se invicem superant singulæ quantitates.

Demonstratio. (*Per præcedentem*) ita se habet intervallum ad intervallum, sicut differentia ad differerentiam; quæritur autem differentia unius intervalli. Si ergo fiat ut quinque verbi gratiâ intervalla ad differentiam 10, ita unum intervallum ad quartum numerum; erit rectangulum sub mediis æquale rectangulo sub extremis (*per* 16.6.) Cum autem ut fiat rectangulum sub mediis debeat multiplicari 10 per unitatem, & unitas nihil immutet; igitur si dividatur differentia per numerum intervallorum quotiens erit excessus, quo numeri se invicem superant.

PROPO

PROPOSITIO V.

Si sint quatuor numeri geometricè proportionales, Logarithmi mediorum simul sumpti, æquales sunt logarithmis extremorum.

A.	B.	C.	D.
4.	6.	8.	12.
E.	F.	G.	H.

Sint quatuor numeri A, B, C, D, geometricè proportionales; dico illorum Logarithmos E, F, G, H, ita se habere, ut F, G, simul sumpti, æquales sint numeris E, H, simul etiam sumptis.

Demonstratio. Logarithmi sunt numeri arithmeticè proportionales pro geometricis substituti; sed numeri arithmeticè proportionales ita se habent, ut summa mediorum æqualis sit summæ extremorum: igitur, & logarithmi ita se habebunt.

COROLLARIUM.

Si à summa mediorum auferas logarithmum primi, relinquitur logarithmus quarti.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si sint tres numeri continuè proportionales geometricè, logarithmi extremorum sunt dupli logarithmi medii.

Demonstratio. Logarithmi (*ex defin.*) sunt numeri arithmeticè proportionales, pro geometricè proportionalibus substituti: sed numeri arithmeticè continuè proportionales, ita se habent, ut extremi sint dupli medii: ergo & logarithmi ita se habebunt.

COROLLARIUM.

Ex tribus numeris continuè proportionalibus, si detur logarithmus primi, & secundi, dabitur logarithmus tertii. Si enim duplices logarithmum secundi, & ab eo sic duplicato, auferas logarithmum primi, restabit logarithmus tertii.

PROPOSITIO VII.

Si duo numeri se invicem multiplicantes, alium produxerint; erunt multiplicantium logarithmi, æquales logarithmo producti, & unitatis.

D.	A.	B.	C.
1.	4.	6.	24.

Sint duo numeri A, & B qui se invicem multiplicantes, producant numerum C; dico logarithmos numerorum A, & B, simul sumptos, æquales esse logarithmo numeri C, & logarithmo unitatis. Præponatur his numeris unitas D.

Demonstratio. Cum per multiplicationem numeri B per A, producatur numerus C, toties numerus C continebit numerum B, quot A continet unitates. Ergo (*ut jam demonstravimus in arithmeticis cum de multiplicatione*) ita erit unitas D ad A, sicut B ad C. Ergo (*per 4. hujus*) logarithmus mediorum A, & B æqualis est logarithmis numeri C, & unitatis. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

In illa serie logarithmorum, in qua unitas habet logarithmum 0, logarithmi multiplicatorum simul sumpti æquales sunt logarithmo producti.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Logarithmus alicujus numeri duplicatus, & imminutus logarithmo unitatis; æqualis est logarithmo quadrati eius.

D.	A,	B.	C.
1.	4	4.	16.

Sit numerus A, dico si ab eius logarithmo duplicato, auferas logarithmum unitatis; relinquetur logarithmus eius quadrati. Sit enim eius quadratum C, ponaturque numerus B, æqualis ipsi A, & præponatur unitas D.

Demonstratio. (*Per præcedentem*) logarithmi numerorum A, & B æquales sunt logarithmis D & C: sed logarithmi A, & B sunt logarithmus A duplicatus, cum A & B sint æquales, igitur logarithmus A duplicatus; æqualis est logarithmo numeri C, & logarithmo unitatis. Ergo si à logarithmo A duplicato, auferatur logarithmus unitatis, relinquetur logarithmus numeri C.

COROLLARIUM I.

Si logarithmo quadrati addas logarithmum unitatis, habebis duplum logarithmum radicis.

COROLLARIUM II.

In serie in qua logarithmus unitatis est 0, logarithmus quadrati est duplus logarithmi radicis; ideóque dato logarithmo quadrati, facilè dabitur logarithmus radicis, & vicissim.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Logarithmus radicis triplicatus, æqualis est logarithmo cubi, & duplo logarithmo unitatis.

D.	A.	B.	C.
1.	4.	16.	64.

Sit radix A, cubus eius C; dico logarithmum numeri A triplicatum, æqualem esse logarithmo numeri C, & logarithmo unitatis duplicato. Sit enim B, quadratus numerus ipsius A; præponatur etiam unitas D.

Demonstratio. Quoniam radix A, multiplicando quadratum B producit cubum C; erunt logarithmi A, & B simul sumpti, æquales logarithmis D & C. Sed (*per præcedentem*) logarithmus B, simul cum logarithmo unitatis, est duplus logarithmi A. Ergo logarithmi A & B simul cum logarithmo unitatis æquales sunt triplo logarithmi A. Sed (*per 5. huius*) logarithmi D, & C æquales, sunt logarithmis A, B, ergo logarithmi D & C, simul cum logarithmo unitatis æquales sunt triplo logarithmi A. In hoc autem aggregato bis invenitur logarithmus unitatis. Ergo duplus logarithmus unitatis, cum logarithmo cubi, æquantur triplo radicis; quod erat ostendendum.

COROLLA

COROLLARIUM I.

In ſerie in quâ logarithmus unitatis eſt o, cubi logarithmus eſt præcisè triplus logarithmi radicis. Quare ſi habeatur tabula logarithmorum, facilè eruitur radix cubica, vel facilè datâ radice habetur cubus.

COROLLARIUM II.

Logarithmus tertiæ poteſtatis ſimul cum triplo logarithmo unitatis, eſt quadruplus logarithmi radicis, & ita conſequenter de reliquis proportionalibus ab unitate incipientibus.

PROPOSITIO X.

Problema.

Si fuerint quotcumque numeri geometricè continuè proportionales, cognito logarithmo primi, & ſecundi; reliquorum dare logarithmos.

Sint numeri A, B, C, D, E, F, continuè proportionales, deturque logarithmus primi A, & ſecundi B, quæritur logarithmus reliquorum. Subtrahe logarithmum minorem à majori, & differentiam habebis quam ſubtrahes à logarithmo B, ſi logarithmi decreſcunt, aut addes logarithmo numeri B, ſi creſcunt; & habebis logarithmum numeri C.

Demonſtratio. Numerorum geometricè proportionalium logarithmi, æquali exceſſu ſe ſuperant: ergo ſi ſemel hunc exceſſum habeas, eum ſemper addendo, vel ſubtrahendo, habebis logarithmos conſequentes.

Vel duplica logarithmum numeri B, & ab eo ſic duplicato aufer logarithmum numeri A, & habebis logarithmum numeri C. Pariter ſi duplicaveris logarithmum numeri C, & ab eo ſic duplicato auferas B, habebis logarithmum D.

Demonſtratio patet ex 6 hujus.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Si dentur quotcumque numeri geometricè continuè proportionales, cognito logarithmo primi, & ultimi; & numero intervallorum aſſignare logarithmos reliquorum.

Sint quotcumque numeri A, B, C, D, E, F, continuè proportionales geometricè, deturque logarithmus primi A & ultimi F; item ſciatur numerus intervallorum, quæritur logarithmus uniuſcujuſque. Ex logarithmis primi, & ultimi, ſubtrahes majorem à minori, & differentiam divides per numerum intervallorum, ut habeas differentiam unius logarithmi ab alio vicino, quam addes, vel ſubtrahes, prout logarithmi creſcent aut decreſcent.

Demonſtratio. Logarithmi numerorum geometricè proportionalium continuè, ſunt arithmeticè continuè proportionales. Nam ſi A eſt ad B, ut B. ad C, debebit logarithmus medius æquè ſuperare primum ac tertius medium, & ita conſequenter. Sed (*per* 4. *huius*) quando numeri ſunt arithmeticè continuè proportionales, ita habetur differentia uniuſcujuſque ab antecedente, ergo eodem modo habebitur differentia logarithmorum.

Præcedentes propoſitiones omnibus omnino logarithmis communes ſunt. Iam ad logarithmos communes veniamus.

DE LOGARITHMIS communibus.

Logarithmi communes ſunt à Nepero indicati, qui aſſerit eam fore optimam ſpeciem Logarithmorum in qua unitatis Logarithmus eſſet o. Logarithmus denarii eſſet 10000000. Logarithmus centenarii eſſet 20000000, millenarii, &c. Sed ut puto nimio labore deterritus hanc aliis ſuſcipiendam provinciam reliquit. Horum autem Logarithmorum conſtruendorum methodum hîc tradendum ſuſcipio.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Omnium numerorum in proportione decupla procedentium, Logarithmos aſſignare.

Supponuntur ad libitum duo Logarithmi dati; nempe unitatis qui eſt o, & denarii qui eſt 10000000, dico quod ſi dupletur hic Logarithmus denarii, habebitur Logarithmus centenarii, ſi tripletur millenarii, ſi quadrupletur, numeri 10000. Si continuè augeatur eodem augmento habebuntur cæterorum in proportione decupla procedentium Logarithmi, ut hæc tabula indicat.

Numeri abſoluti. A	B *Logarithmi.*
1	0. 0000000
10	1. 0000000
100	2. 0000000
1000	3. 0000000
10000	4. 0000000
100000	5. 0000000
1000000	6. 0000000
10000000	7. 0000000
100000000	8. 0000000
1000000000	9. 0000000
10000000000	10. 0000000

Demonſtratio. Cùm ita ſit unitas ad 10, ſicut 10 ad 100; logarithmus denarii duplicatus, æqualis erit logarithmo unitatis, & logarithmo centenarii, (*per* 6 *hujus*) ergo ſi ex logarithmo denarii duplicato auferas logarithmum unitatis, qui eſt o, reſtabit logarithmus centenarii: ergo logarithmus centenarii eſt duplus logarithmi denarii.

Pariter quia ita eſt 1 ad 10, ut 100 ad 1000, erunt logarithmi mediorum 10 & 100, æquales logarithmo unitatis & millenarii; quare ſi addas eos ſimul, fiatque ſumma 30000000, & ab ea ſubtrahas logarithmum unitatis, nempe o, reſtabit logarithmus millenarii, triplus logarithmi unitatis. Cùm igitur reliqui procedant in eâdem ſerie Geometricâ continuâ, eorum logarithmi ſe ſuperabunt æquali ſemper exceſſu (*per* 10. *hujus*) quare

quare si continuè addas logarithmum denarii, habebis logarithmos sequentium numerorum in ratione decuplâ continuâ procedentium.

COROLLARIUM I.

Solemus in Algebra quoties proponitur series continuè Geometricè proportionalium unitati componere, o, primo numero quem radicem vocamus apponimus 1, secundo numero ab unitate, seu quadrato 2, tertio qui semper cubus est 3, & quarto, qui quadratoquadratus numeratur 4, & ita consequenter; hosque numeros exponentes vocamus, eò quòd exponant quam sedem ab unitate occupent. Id etiam præstamus modò, suntque logarithmi quasi exponentes: sed quia debemus intermediorum logarithmos invenire, ideo illos multis cyphris augemus. Consideranda tamen est prima cyphra, quæ propterea dicitur characteristica, eò quòd indicare possit quot characteres contineat numerus cui respondet. Quare omnes numeri qui sunt inter unitatem & denarium, seu qui unico charactere scribuntur, habent logarithmum cujus characteristica est o, qui inter 10 & 100, seu qui duplici charactere constant, habent logarithmũ cujus characteristica 1, qui triplici, characteristicâ 2, qui quadruplici, suntque inter 1000 & 10000, habent logarithmum insignitum characteristica 3, & ita consequenter, characteristica logarithmi minor est unitate, numero characterum quibus scribitur numerus respondens.

Colligo hîc regulas hujus speciei logarithmorum.

1. Logarithmi multiplicatorum æquales sunt logarithmo producti, ut si numeri B & C se multiplicantes, faciant numerum D, dico addendo logarithmos, numerorum C & D, fieri logarithmum numeri D. Est enim ut vidimus in proportione Arithmetica, unitas ad B, ut C ad D, ergo logarithmi B & C æquantur logarithmo A & D; quapropter cùm logarithmus unitatis A sit o, logarithmi B & C æquantur logarithmo D.

A	B	C	D
1	3	4	12

2. Pariter si dividendo D per C, fiat quotiens B ex logarithmo numeri D, aufer logarithmum numeri C, fiet logarithmus numeri B.

3. Logarithmus quadrati duplus est logarithmi radicis; cùm enim radix seipsum multiplicando faciat quadratum, (*per 1. regulam.*) addendo logarithmum radicis ejusdem radicis logarithmo, habetur logarithmus quadrati. Quare dato logarithmo quadrati, facilè habetur logarithmus radicis, vel vicissim.

4. Logarithmus cubi est triplus logarithmi radicis. Est enim ut unitas ad radicem, ita quadratus ad cubum; ergo logarithmi mediorum, nempe radicis & quadrati, æquales sunt logarithmis cubi & unitatis, quæ unitas habet logarithmum o, ergo logarithmi radicis, & quadrati æquales sunt logarithmo cubi, sive triplo logarithmo radicis.

5. Si quotcumque numeri se multiplicent, dico logarithmos omnium multiplicantium simul sumptos, æquales esse logarithmo ultimi producti. Ut si numeri 2. 4. 5. 3. se invicem multiplicent, efficiantque numerum 120, erit logarithmus numeri 120 æqualis logarithmo numerorum 2. 4. 5. 3. Prima enim multiplicatione 2 per 4 fiat 8, logarithmus numeri 8 æquabitur logarithmis 2 & 4. (*per 1 regulam.*) Tum secundâ multiplicatione si 8 multiplicentur per 5, fient 40, cujus logarithmus æquabitur logarithmis 8, id est 2 & 4, & logarithmo 5. Pariter si 3 multiplicando per 40, faciat 120, logarithmus 120 æqualis est logarithmo 40, seu 2, 4, 5, & logarithmo 3.

6. Si plurimi numeri ab unitate incipientes sint continuè proportionales, logarithmus ultimi divisus per numerum intervallorum, pro quotiente exhibet logarithmum primi, seu radicis. Ut si sint numeri A, B, C, D, E, ab unitate A continuè proportionales, sitque datus logarithmus 12, numeri E, cùm logarithmus unitatis sit o, & logarithmi se excedant eodem excessu, erit 3 logarithmus primi post unitatem, differentia scilicet cujuslibet sequentis supra antecedentem, & logarithmus ultimus, seu 12, coalescet ex omnibus his differentiis. Sunt autem tot differentiæ, seu excessus, quot intervalla; ergo si dividas numerum 12 per numerum intervallorum qui est 4, quotiens 3 erit differentia seu logarithmus primi, quæ continuè reliquis addita, reliquorum logarithmos exhibet.

1.	2.	4.	8.	16
A	B	C	D	E
o.	3.	6.	9.	12

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Inter unitatem & denarium, quot volueris media proportionalia invenire.

Sint invenienda multa proportionalia inter unitatem, & denarium; ex denario extrahe radicem quadratam, dico illam radicem esse proportionalem inter unitatem & denarium, hoc est ita esse unitatem ad hanc radicem sicut hæc radix ad denarium. Si enim intelligatur unitas multiplicare denarium, numerus productus erit denarius, cum unitas multiplicando, & dividendo nihil immutet. Igitur rectangulum comprehensum sub unitate, & denario, est æquale quadrato radicis illius: ita ergo est unitas ad radicem quadratam, sicut radix quadrata ad denarium. Si velis inter hanc radicem & unitatem alium numerum proportionalem, illius extrahe radicem quadratam, & ita deinceps.

In quo notandum est hæc media proportionalia non esse continua, hoc est non ita esse unitatem ad ultimò inventum, sicut illud ultimum ad penultimum, & istud ad antepenultimum, & antepenultimum ad proantepenultimum; sic enim illi numeri essent in proportione continuâ geometricâ, sed semper unitas ita se habet ad quemcumque ex his numeris, sicut ille se habet ad præcedentem.

PRAXIS.

Quia difficile est tot extrahere radices ex numeris tam parvis, augeatur tam unitas quam denarius quot volueris cyphris o, intelligendo verbi gratiâ unitatem divisam esse in centum partes, & pariter denarii quamcumque unitatem esse divisam in centum partes, fient ergo mille in denario, tunc multiplicentur mille partes denarii per centum partes unitatis, fientque in denario 100000 partes, vel si velis, supponatur unitas divisa in mille partes, & denarius consequenter in decies mil-

le;

le ; intelligatur facta multiplicatio, proveniet 10000000 ; ita ut numerus cyphrarum additarum denario, sit semper impar, quod necessariò debet fieri ut in extrahendâ radice quadratâ. Quæratur prima cyphra radicis, nempe radix quadrata numeri 10.

Numerus autem denarius scribi potest vel ut in A vel ut in B.

$$\text{A.}\quad 10.\frac{0000000000000000000000000.}{10000000000000000000000000.}$$

B. 100000000000000000000000000.

Primo modo ita enunciatur 10, cum nullis partibus centies millesimis &c. in secundo mille centesimæ partes, si divisa esset unitas tantùm in centum partes, & in hoc secundo modo reducitur totus numerus in fractionem, subintelligendo illius denominatorem.

Quod ut intelligatur, in numero minori posset scribi denarius, hoc modo suppositâ divisione unitatis in centum partes $10\frac{00}{100}$ decem cum nullis partibus centesimis, vel hoc modo $\frac{1000}{100}$ mille partes centesimæ, & subticendo denominatorem 100. intelligendo tamen hunc numerum non esse absolutum.

Quæratur ergo inter unitatem ita auctam, & denarium similiter auctum, medius proportionalis. proveniet numerus D, cui subintelligendus est

$$\begin{array}{ll} \text{D.} & \underline{3162277660168379331998893\,54.} \\ \text{E.} & 0000000000000000000000000. \end{array}$$

Denominator E, & quia numerator major est significat aliquas unitates absolutas, ut vides hîc.

$$3.\frac{162277660168379331998893\,54.}{10000000000000000000000000.}$$

Hujus numeri D denuò extrahatur radix quadrata, fiet alius numerus F.

F. 177827941003892280119730413.

Atque ita deinceps si semper extrahas, radicem quadratam quinquagesimus secundus erit.

G. 10000000000000000255638298640064 70.

Qui potest scribi hoc modo.

$$\text{H. I.}\ \frac{25563829864006470.}{10000000000000000000000000000000.}$$

Hic numerus major est unitate, & fractio habet in suo denominatore 15, cyphras plures quam sint in numeratore, quod manifestum est.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Primus modus inveniendi logarithmum numero dato respondentem.

Proponatur numeri cujuscumque logarithmus quærendus, verbi gratia numeri 9, inter unitatem A, auctam pluribus cyphris exactioris præscisionis causâ, & denarium B, quæratur medius proportionalis C, qui facilè habebitur, si denarii aucti cyphris totidem extrahatur radix quadrata, nam ita est unitas ad radicem quadratam ut radix quadrata, ad quadratum: cùm numerus ortus ex mul-

		Logarithmi.
A	1. 0000000	0. 0000000
C	3. 1622777	0. 5000000
B	10. 0000000	1. 0000000
D	5. 6234162	0. 7500000
E	7. 4989421	0. 8750000
F	8. 6596432	0. 9375000
G	9. 3057204	0. 9687500
H	8. 9768713	0. 9531250
I	9. 1398170	0. 9609375
K	9. 0579777	0. 9570312
L	9. 0000004	0. 9542425. 3
M	9. 0000000	0. 9542425. 1
N	8. 9999998	0. 9542425. 0

tiplicatione radicis quadratæ, æqualis sit contento sub unitate, & ultimo. Illius autem logarithmus habetur dividendo bifariam denarii logarithmum, nempe *per precedentem regulam*, si sint numeri continuè proportionales, ab unitate incipientes, diviso logarithmo ultimi per numerum intervallorum habetur logarithmus secundi. Hic numerus C non est ille cujus logarithmus quæritur, est enim 9. 0000000, quare inter numerum C & denarium quæratur medius proportionalis qui habetur, si multiplices numerum C per denarium B, & ex producto extrahes radicem quadratam. Habetur eius logarithmus, si addas logarithmos numerorum B & C, & hujus summæ assumas dimidium. Quia autem hic numerus D differt à proposito, quæratur inter B & D, medius proportionalis E eadem methodo, & eius logarithmus, sumendo dimidium aggregati ex logarithmis numerorum B & D. Quia autem numerus E nimis adhuc distat à numero proposito qui debet esse 9. 0000000, quæratur inter B & E, alius medius F, cum suo logarithmo. Hic numerus adhuc minor est numero 9. 0000000. Quare iterum alter medius inter F & E quæratur, qui erit G major numero proposito. Quare inter G, & F. quæratur alius numerus medius H, qui minor est proposito, quare inter G majorem & H minorem quæratur medius I cum suo logarithmo.

Hic quidem numerus I jam satis accedit ad propositum, quare inter H minorem proximè, & I majorem proximè, quæratur alius K, tum alius inter K, & H, & ita consequenter inter proximè minorem, & majorem post 25 medios proportionales tandem invenies numeros L, & N, & medium proportionalem M, qui exactè convenit cum proposito, ita ut si quæ sit differentia, inveniatur ultra terminos præscriptos, hoc est ut exacta sit operatio, tam logarithmis quam numeris plures adduntur cyphræ quæ post operationem abjiciuntur.

Hæc prima operatio pro inveniendo numero 9, usui esse potest ad inveniendos alios numeros, verbi gratia numerus D est minor numero 6.0000000, & numerus E major, quare quæsito inter D & E, medio, invenies numerum, magis accedentem ad 6, atque ita deinceps, donec occurrat 6.

Invento numero 9, habebis numerum 3, nam cum sit ut 1 ad 3, ita 3 ad 9, logarithmus numeri 3 erit semissis logarithmi numeri 9, si inveneris logarithmum numeri 6, habebis logarithmum binarii, cum enim binarius multiplicando 3 efficiat 6, erit logarithmus 6 æqualis logarithmis 3 & 2.

& 2; quare subtrahendo logarithmum 3 à logarithmo 6, restat logarithmus 2.

Dato logarithmo 2, dantur logarithmi omnium numerorum in serie dupla 1, 2, 4, 8, 16, 32 &c. per continuam additionem logarithmi 2, logarithmus 3 dat logarithmos totius seriei in proportione tripla 3, 9, 27, 81. &c.

Multiplicando 10 per 2 fit 20, adde logarithmos 10 & 2, habebis logarithmum 20.

Dividendo 10 per 2 habes 5, subtrahe log. 2, ex logarithmo 10, restat logarithmus 5, subtrahe iterum log. 2, ex log. 5, restat log. $2\frac{1}{2}$, & iterum restat logarithmus $1\frac{1}{4}$, subtrahe iterum logar. 2, ex log. $1\frac{1}{4}$, fit logarithmus $\frac{5}{8}$ & quia major numerus ex minori subtrahitur, fit numerus defectivus.

Quare si habeantur logarithmi numerorum 9, 6, habentur logarithmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, & omnium compositorum ex ipsis 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100; & quia bis sex sunt 12, habetur illius logarithmus; ter 5 sunt 15, habetur logarithmus eius per additionem logarithmorum 5 & 3, & ita de reliquis.

Hæc methodus melius succedit in numeris majoribus, verbi gratiâ. Sit datus logarithmus 30 & 32, quæritur logarithmus 31, quæratur medius proportionalis geometricè, qui vix aberrabit à numero 31, ita ut paucissimis operationibus sit opus.

Sequens methodus est paulò difficilior, eam tamen prætermittere non ausim; qui eam non poterit intelligere, prima contentus sit.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si aliquis numerus minor binario, & major unitate in denominatore suæ fractionis 15 cyphras habeat, antequam numerator aliquam habeat, & hujus numeri radix quadrata extrahatur; dico quod numerator fractionis hujus primi numeri, duplus erit numeratoris fractionis radicis suæ, demptâ utrinque sua unitate.

Sit numerus H propositus unitatem habens, & adjunctam fractionem, cujus denominator habet quindecim o antequam numerator habeat aliquem significativum characterem. Dico si extrahatur ejus radix quadrata, quæ pariter erit major unitate; cùm unitas habeat pro radice unitatem, hæc inquam radix quadrata major unitate, habebit numeratorem fractionis, quâ unitatem excedit, qui erit media pars numeratoris fractionis quâ prior item numerus unitatem excedit.

Proponatur enim numerus H subticendo denominatorem, ut ab eo extrahi possit radix quadrata.

H. 100000000000000025563829864006470.

Hic numerus multiplicari priùs debet per unitatem suis cyphris auctam, quæ non immutat numerum, sed tantum in fine illi addit multoties o.

In extractione radicis quadratæ, jubemur extrahere radicem ex primo puncto, quæ erit unitas, quæ extracta ex primo puncto nihil relinquit. Hæc radix quadrata duplicatur, & sic duplicata dividit sequentem cyphram & quia sequens cyphra est o, semper quotiens erit o, donec veniatur ad aliquam cyphram significativam, & semper radix interea crescet & erit 1000000000000000, quot nempe sunt cyphræ o, ante significativas propositi numeri. Tunc demum duplicanda est radix jam inventa quæ dividere debet numerum reliquum L. 25568298640064700000. &c.

Et quia constat 15 cyphris quotiens qui addetur radici in singulis progressionibus cadet in cyphras quæ post operationem rejiciendæ sunt, hoc est L. 25568298640064700. 00000.
K. 20000000000000001.

Si applicetur radix duplicata nempe K, ipsi L numero residuo, cum primus character ipsius K, sit 2, dividet primum characterem numeri L bifariam, addeturque ipsi radici quotiens 1. id est dimidia pars primi characteris numeri L, & licet etiam idem quotiens addatur in fine ipsius radicis duplicatæ, quia tamen respondet cyphris quæ sunt post trigesimam primam, quæque ideo post operationem abjici debent, ille defectus pro nullo haberi debet. In secunda promotione radix eodem modo applicabitur secundo characteri 5, eodemque modo dividet bifariam, intactique remanent reliqui, quia cyphræ o quæ sunt in radice, intactis relinquunt cyphras numeri superioris; ergo in promotionibus sequentibus usque ad trigesimam secundam vel tertiam, semper binarius, qui primus est radicis duplicatæ, dividet numerum L, ergo radix quæ proveniet post quindecim cyphras o, habebit medietatem numeri L; quod erat demonstrandum. Quod accidet quoties hoc modo in aliqua fractione denominator constans unitate & pluribus cyphris o, duplò plures habebit characteres quàm numerator, demptâ nimirum ipsa unitate.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Numerorum mediorum proportionalium inter denarium, & unitatem, logarithmos assignare.

Logarithmus denarii dividatur bifariam, & habebitur logarithmus primi medii proportionalis, nempè illius qui est medius inter unitatem & denarium; vocetur ille numerus A.

Demonstratio. Cùm enim ita sit unitas ad numerum A, ut numerus A ad denarium, logarithmus medii duplicatus æqualis erit logarithmo extremorum: sed logarithmus unitatis est o, ergo logarithmus numeri A duplicatus, æquabitur logarithmo denarii; & quia secundus numerus inventus nempe B, est medius inter unitatem & A, logarithmus numeri A bifariam dividatur; & ejus pars dimidia erit logarithmus numeri B: atque ita de cæteris usque ad quinquagesimum secundum.

Habeantur ergo illi omnes logarithmi cum respondentibus sibi numeris: præcipuè verò logarithmi illorum numerorum ultimorum quos descripsimus superiori propositione.

PROPO

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Cujuscumque numeri primi logarithmum invenire.

Sit numerus primus 2 cujus logarithmus quæritur. Primò ex numero 2 cyphris aucto quantùm volueris, & multiplicato per unitatem totidem cyphris auctam, extrahatur radix quadrata; & hujus radicis similiter multiplicatæ extrahatur radix quadrata; & ita deinceps, donec occurrat aliquis, qui præter unitatem habeat fractionem aliquam cujus denominator 15 cyphras habeat; antequam numerator aliquam significativam contineat: erit (*per* 29.) numerator fractionis duplus numeratoris suæ radicis, demptâ utrinque unitate, hoc est ita procedunt logarithmi sicut numeratores istarum fractionum: sint ergo fractionum numerorum ultimò inventorum, numeratores A, & B logarithmi ignoti E, & F, & sint duo ultimi numeri inventi per propos. 28. & eorum fractionis numeratores C, D, & logarithmi cogniti G, & H, (*per coroll.* 30.) istæ omnes rationes A ad B, C ad D, E ad F, G ad H sunt æquales, cum logarithmi majores sint dupli minorum: sicut numeratores majorum fractionum, sunt dupli minorum; ergo alternando erit ut A ad E, ita B ad F, & C ad G, & D ad H. Cùm ergo sit ut numerator C ad suum logarithmum cognitum, ita numerator A, ad suum logarithmum E, cognoscetur logarithmus numeri cujus A est numerator fractionis. Quare si toties dupletur quoties sunt inventa media proportionalia inter binarium, & unitatem, tandem habebitur logarithmus binarij.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Numeri primi paulò majoris logarithmum invenire.

Quia tamen, cùm numeri primi quorum quæruntur logarithmi, sunt majores; plures essent inveniendi numeri proportionales, antequam ita proximè deveniretur ad unitatem, ut post unitatem adderetur fractio, cujus numerator duplò pauciores cyphras contineat, quàm denominator, Ita operaberis. Numerum primum propositum multiplica per seipsum, & productum per ipsummet, ita ut fiat ejus quadratum cubus &c. donec aliquis occurrat numerus qui incipiat per 1, & 0, hunc divides per aliquem numerum cujus cognoscitur logarithmus nempe 10. 100. 10000. &c. sed immediatè ipso minorem, fiet fractio unitate major, & binario, minor, quæ jam satis ad unitatem accedet. Si verò adhuc illius fractionis numerator non habet conditionem superiùs descriptam; extrahantur radices, donec aliquis occurrat, habens talem conditionem. Rem in eodem binario ostendo licèt sit aptior ad majorum numerorum inveniendos logarithmos. Primò binarius multiplicetur per seipsum 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. numerus 1024. aptus est. Dividatur per 1000, fietque quotiens $1\frac{24}{1000}$ inter hunc numerum, & unitatem, quære media proportionalia, donec aliquis habeat conditionem supra allatam; cujus per præcedentem quæres logarithmum; quem toties duplicabis quot invenisti proportionalia inter numerum $1\frac{24}{1000}$ & unitatem; & ita habebis logarithmum istius numeri cui addes logarithmum millenarii, & (*per coroll.* 7. *hujus*) habebis logarithmum hujus numeri 1024. & quia isti numeri 1. 2. 4. &c. usque ad 1024. sunt continuè proportionales, sciturque logarithmus extremorum, si differentia eorum dividatur per numerum intervallorum (*per* 11. *hujus*) habebis logarithmum reliquorum.

COROLLARIUM.

Invento logarithmo binarii, inveniuntur logarithmi omnium numerorum compositorum ex binario, seipsum multiplicante, ut si fiat series 1. 2. 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, &c. numerorum 10, 20, 40, 80, 160, 320, &c. numerorum 5, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$, si enim subtrahas logarithmum binarii ex logarithmo denarii, habebis logarithmum quinarii: Ex quo si adhuc subtrahas logarithmum binarii, habebis logarithmum istius numeri $2\frac{1}{2}$ unde si etiam auferas logarithmum binarii habebis logarithmum istius $1\frac{1}{4}$, quod si adhuc auferres logarihmum binarii ex logarithmo numeri $1\frac{1}{4}$ quia logarithmus binarii major est, fiet numerus defectivus logarithmus hujus fractionis $\frac{5}{8}$ & aliarum ut $\frac{5}{16}$ si adhuc auferatur logarithmus binarii.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Inventis numerorum primorum logarithmis: invenire numerorum compositorum logarithmos.

Sint inventi logarithmi numerorum primorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c. quærendi sunt logarithmi numerorum compositorum. Primò si logarithmum binarii duples, triples, quadruples &c. habebis logarithmos totius seriei 2, 4, 8, 16, 32, &c. si eodem modo facias pro ternario, habebis seriem 3, 9, 27, 81, &c. & seriem 5, 25, 125, & omnium numerorum, quos 2, & 3, metiuntur verbi gratiâ 6, 12, 18, 24, 36, &c. Cum autem omnis numerus compositus oriatur ex multiplicatione numerorum primorum, quorum logarithmi supponuntur cogniti, si addas eorum logarithmos, habebis logarithmos omnium compositorum. Quod erat faciendum.

VSVS LOGARITHMORVM.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Dati numeri absoluti logarithmum reperire.

Tres aut quatuor casus accidere possunt. Primò sit numerus aliquis absolutus, minor numero 10000, maximo tabularum, quæratur in tabulis ille numerus, invenieturque è regione logarithmus ipsi correspondens.

Si numerus cujus quæritur logarithmus fuerit fractio, cujus tàm numerator, quam denominator non excedant 10000, quæratur utriusque logarithmus; quod si fuerit fractio propriè dicta, in qua denominator excedat numeratorem, minor logarithmus à majori subtrahatur; & differentia erit logarithmus præpositæ fractionis sed defectivus, ideoque huic præponi debet hæc nota—

Demonstr. Primò quod defectivus sit ostenditur, quia omnis fractio simplex minor est unitate; ergo eius logarithmus minor est logarithmo unitatis in hac specie logarithmorum; qui cum sit o, fractionis logarithmus, minor erit quam o, seu erit defectivus. Quod etiam differentia duorum logarithmorum numeratoris, & denominatoris sit logarithmus fractionis, ostendetur. Sit enim iste numerus propositus $\frac{13}{14}$; hæc fractio est quotiens divisionis in qua 13 per 14, divideretur, ut constat ex arithmetica: si enim 13, nummi essent dividendi inter 14, quilibet tredecim decimas quartas accipere deberet: ergo (*per 7.hujus*) logarithmus divisoris 14, & quotientis, æquabuntur logarithmo divisi nempe 13, ergo si ex logarithmo numeri 13, auferas logarithmum numeri 14, restabit logarithmus fractionis $\frac{13}{14}$ sed dum aufertur major numerus ex minori, restat differentia eorum cum signo —; quod erat demonstrandum.

Tertiò detur numerus cui fractio adhæreat, reducatur ille numerus in fractionem totalem, ut $34\frac{2}{5}$ mutetur in $\frac{172}{5}$ & utriusque numeri, hoc est tàm numeratoris, quàm denominatoris, logarithmus in tabula accipiatur, & differentia eorum erit logarihmus quæsitus.

Alio modo sumatur logarithmus numeri 34, qui auferatur à proximè sequenti, ut habeatur quantùm crescat logarithmus, eò quòd numerus ei respondens crescat unitate, & dices si unitas seu $\frac{5}{5}$ augent logarithmum tot cyphris, quantùm augebunt $\frac{2}{5}$.

Qui tamen modus non est accuratus, quia non crescunt logarithmi in eâdem ratione in quâ crescunt numeri ipsis respondentes; sed minus crescit logarithmus respectu totius unitatis, quàm crescat respectu primarum partium ejusdem numeri.

Si numerus datus cujus quæritur logarithmus sit major numero 10000, maximo scilicèt tabulæ, si compositus est, & sciantur qui numeri eum producant, addantur logarithmi numerorum eum producentium, & habebitur eius logarithmus. Ut si numerus 36480, qui oritur ex multiplicatione numerorum 304, & 120, quæratur logarithmus utriusque; eorum summa (*per 7. huius*) est logarithmus numeri 36480.

Quia tamen hæc operatio supponit numerum esse compositum, & cognosci numeros ipsum producentes, aliam regulam proponam universaliorem. Dividatur numerus major quam 10000, per 10, 100, 1000, 10000, donec quotiens sit minor quam 10000. Si enim adhuc ille quotiens major esset, divideretur adhuc. Hujus quotientis quære logarithmum quem addes logarithmo numeri 10, 100, 1000, &c. per quem facta est divisio, quod si facta est duplex divisio addatur bis logarithmus illius numeri, per quem facta est divisio. Ut si numeri 453507, quæratur logarithmus, dividatur per 1000, fietque quotiens $453\frac{507}{1000}$ hujus numeri adhærentem habentis fractionem, quæratur logarithmus, qui addatur logarithmo numeri 1000, & (*per 6.huius*) prodibit logarithmus numeri propositi.

Coincidit hæc methodus cum praxi traditâ ab Ulac. Sit enim (inquit) propositus numerus 3567894. Primò quæratur numeri 3567, log. 3. 5523031, qui auferatur ex logarithmo sequenti 3. 55242 $\frac{48}{1217}$ nempe numeri 3568 & restabit differentia. Et quia numerus 3567894 supponitur divisus per mille, ita ut sit facta fractio decadica, hoc est fractio cujus denominator est 10!, vel 100, vel 1000, &c. hoc modo 3567 $\frac{894}{1000}$ instituenda est regula trium. Si numerus 3567 cresceret unitate seu $\frac{1000}{1000}$, cresceret logarithmus hoc numero 1217. sed crescit tantùm 894 partibus, quantum igitur crescet ejus logarithmus; multiplica 1217 per 894, fietque 1087998, quem ut dividas per 1000, delendæ sunt tres ultimæ figuræ, ita ut restet 1087, quem addes logarithmo invento 3. 5523031.

Fietque logarithmus nempe hujus numeri 3567 $\frac{894}{1000}$ sed iste numerus est tantum quotiens factæ divisionis; huic ergo, adde logarithmum uumeri 1000, qui cum sit 3.0000000, tantum addenda est characteristica nempe 3, fietque 6. 5524118.

COROLLARIUM.

Datus numerus 356 $\frac{7894}{1000}$ eundem habet logarithmum exceptâ characteristâ ac numerus 3567894. Quia est quotiens divisionis in qua 10000, fuit divisor, ideoque tantoperè extollunt authores decadicas fractiones quæ logarithmos non immutant, nisi penes characteristicam logarithmi, quæ tenetur ferè memoriter, nam ab unitate ad denarium est o, à denario ad centenarium est 1, à centenario ad millenarium est 2, à millenario ad decem millia est 3.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Dato logarithmo numerum respondentem assignare.

Si propositus logarithmus invenitur in tabulis exactè, è regione invenies numerum cuius est logarithmus

Si verò non invenitur exactè, sed invenitur in tabulis logarithmus in reliquis æqualis, excepta tamen charactetistica, ut si proponeretur logarithmus 2. 5523031, qui non inveniretur in tabula, sed inveniretur 3. 5523031, ita ut tota differentia sit in characteristica, numerus respondens huic ultimo est 3567. Certum est autem numerum respondentem logarithmo cujus characteristica est 2, inveniri inter 100, & 1000. unde abjicienda est numeti inventi ultima cyphra, & facienda fractio hoc modo 356 $\frac{7}{19}$. Quod si datus fuisset logarithmus 1. 5523031, abjiciendæ essent duæ cyphræ, hoc modo 35 $\frac{56}{19}$. si daretur 4. 5523031, qui inveniretur in tabula, exceptâ characteristica quæ esset 3, numero respondenti 3561, addenda esset cyphra o, 35670.

Tertiò si lagarithmus propositus nullo modo invenitur in tabula, nec ei similis, sed datur logarithmus eo major, & logarithmus eo minor, sumatur pro numero ei respondente, numerus respondens

pondens logarithmo proximè minori, & differentia inter hunc minorem & propositum fiat numerator fractionis, differentia verò inter hunc minorem, in tabula inventum, & sequentem majorem etiam in tabula positum, sit denominator fractionis. Sit datus logarithmus 2. 5211976. proximè minor est 2. 5211380. proximè major est 2. 5212741. logarithmo proximè minori convenit numerus 332. differentia inter datum logarithmum, & proximè minorem est 596. differentia autem inter minorem & majorem est 1361. fiat 332. $\frac{595}{1361}$ dico hunc numerum esse eum qui respondet prædicto logarithmo.

DEMONSTRATIO.

Patet ex superioribus nam 1361 est differentia logarithmi numeri 332, & logarithmi numeri 333. quare si differentia 1361. dat unitatem, seu partes unitatis 1361. differentia 596. dabit $\frac{596}{1361}$.

Ostendimus autem supra hanc fractionem non esse exactam, sed paulò majorem. Unde quia logarithmi majores habent minores differentias; ideò potiùs per majores operandum est. Sit ergo logarithmus datus 2. 5211976. addatur hujus characteristicæ 2, ut fiat major logarithmus, seu illi addatur logarithmus centenarii, fietque logarithmus 4. 5211976, proximè minor in tabulis inventus est 4. 5211904. numerus illi respondens est 33204; differentia inter logarithmum inventum minorem, & datum est 72. differentia inter hunc minorem, & proximè majorem est 130, fiat ut 130. ad 72 ita unitas ad aliud; quam unitatem augent 6 cyphris exactioris calculi gratiâ; fietque pro $\frac{72}{130}$ alia fractio æqualis $\frac{553846}{1000000}$. ideoque numerus respondens logarithmo 4. 5211976, esset 33204, $\frac{553846}{100000}$. sed quia numerus ille nimis magnus est, dividatur per 100, numerus 33204, divisus per 100, est 332.

Progressus ostendit rationem, quia enim logarithmus habebat cyphram majorem characteristicâ logarithmi propositi, ideò debuit minui; ergo numerus ipsi respondens dividi. Cætera sunt clara. Hîc ut ostenderetur progressus; volui dividi denominatorem 553846, per 100; unde inutilis fuit illa divisio: hoc tamen debui indicare ut ostenderem rationem operationis.

Sit logarithmus quicumque defectivus 415634, cujus quæritur valor, seu quæritur numerus ei respondens: addatur ei logarithmo, quicumque logarithmus verbi gratiâ numeri 360, fiatque ex his duobus numeris logarithmus, cujus exquiratur numerus: sit 219. dico hujus primò exhibiti logarithmi, numerum esse $\frac{219}{360}$, ratio est, cùm additur logarithmus numeri 360, idem est ac si numerus 360 multiplicaret talem fractionem (*per 7. hujus*) & ut est unitas ad hanc fractionem: ita 360 ad 219; ergo per ea quæ diximus in arithmeticis benè explicatur fractio per $\frac{219}{360}$; quod erat ostendendum.

Sit denique aliquis magnus logarithmus. Ab eo auferatur logarithmus alicujus ex in frascriptis 10, 100, 1000, 10000, vel alter ejusdem rationis, donec fit non major ultimo tabulæ quâ uteris. Hujus logarithmi quæratur valor, inventus numerus multiplicetur per 10, 100, 1000, &c. & habebis numerum quæsitum.

Sit inveniendus numerus logarithmi, 5. 8734670; si ab eo detrahatur logarithmus numeri 1000, restabit logarithmus 2. 8734670. cujus numerus quæsitus, ut supra est 747 $\frac{1464}{5810}$ qui multiplicatus per 1000, dabit 747252.

Ratio eadem est quæ in superioribus.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Cujuscumque numeri dati radicem quadratam, cubicam, aut cujuscumque potestatis invenire.

Cujuscumque numeri quære logarithmum (*per 31.*) quem bifariàm divides, numerus respondens huic dimidio logarithmo, est radix quadrata; si per 3 divisus fuisset, habuisses logarithmum radicis cubicæ, si per quatuor tertiæ potestatis, habuisses logarithmum. Hæc propositio per se patet.

Demonstratio supponit in serie quacumque geometricâ ita se habere unitatem ad primum numerum, qui est radix cæterorum omnium, & à quo tota series suam denominationem accipit, sicut hæc radix ad quadratum; quadratus, ad cubum; cubus ad quadratoquadratum, & ita consequenter. Hæc enim est natura seriei geometricæ, ut termini sint in eadem semper proportione geometrica continua. Dum ergo quæritur radix quadrata, alicujus numeri; quæritur series geometrica, in qua numerus propositus sit secundus ab unitate. Supponitur autem cognitus illius numeri logarithmus, inter quem & logarithmum unitatis, debet intercedere aliquis medius proportionalis arithmeticè, habetur autem logarithmus unitatis qui est o, qui subtractus ex logarithmo proposito, eum relinquit intactum. Quare logarithmus numeri propositi est differentia inter hunc logarithmum & logarithmum unitatis. Jubet autem praxis ut logarithmus propositus dividatur bifariam, quo facto habentur tres numeri arithmeticè proportionales, nempe logarithmus unitatis, media pars logarithmi propositi, & logarithmus propositus, qui est logarithmus propositi numeri; si habeantur numeri iis respondentes, nempe unitas, numerus intermedius, & numerus propositus illi erunt geometricè proportionales, ergo secundus erit radix quadrata numeri propositi.

Idem applicari potest cubo; si enim numerus pro cubo sumatur, debent quæri duo numeri intermedii proportionales inter unitatem & cubum; cùm ergo habeatur logarithmus primi numeri, & unitatis, qui est o, bene trifariam dividimus hunc logarithmum. Sic enim habetur logarithmus primi intermedii, qui est radix cubica, & ita de aliis omnibus potestatibus intelligendum est.

PROPOSITIO XXIII.

Usus tabularum logarithmicarum respondentium arcubus quadrantis.

Primò sciendum est tabulas communes continere 6 ordines, seu columnas. Prima columna continet minuta, gradus illius notatus est in fronte ipsius paginæ; progressusque talium minutorum

nutorum fit deſcendendo. Singulis minutis reſpondent in ſecundâ columnâ ſinus proprius, in tertia tangens, in quarta ſecans, in quinta logarithmus ſinûs. Ultimâ logarithmus tangentis. Logarithmus ſecantis non eſt adhibitus, quia facilè haberi poteſt ſi logarithmum ſinus complementi auferas à logarithmo ſinûs totius duplicato. Cum enim ita ſit ſinus complementi ad ſinum totum, ut ſinus totus ad ſecantem erunt logarithmi extremorum æquales duplo logarithmo medii.

Alia pagina totidem habet columnas. Prima continet minuta gradûs in fronte paginæ notati, progreſſuſque minutorum fit aſcendendo; ut cuilibet arcui alterius paginæ ſuum in iſta reſpondeat complementum; ſequuntur eodem ordine reſpondentes ſinus, tangentes, ſecantes, logarithmi ſinuum, logarithmi tangentium.

Inveniuntur tantùm arcus uſque ad quadrantem, quia arcus majores quadrante, eundem habent ſinum, tangentem, & ſecantem, ac ſua complementa ad ſemicirculum; tabulæ autem ita ſupponunt ſinum totum eſſe partium 10000000.

Primus uſus, & præcipuus tabularum in eo conſiſtit, ut propoſito arcu, tot graduum, & minutorum; eius aſſignes ſinum, tangentem, & ſecantem. In partibus quas ſinus totus ſupponitur continere 10000000. Quod facillimum eſt, ſi arcus contineat tantùm gradus, & minuta; ſi enim adhuc minuta ſecunda haberet adjuncta talis arcus, pars proportionalis addenda eſſet. Ut ſi ſit ſinus arcus grad. 36, 25′, 34″, ſume differentiam inter ſinum grad. 36, 25′, & ſinum arcus 36, 26′, invenieſque differentiam 1712. Fiat regula aurea, ſi unum minutum primum ſeu 60 minuta ſecunda dant 1712, quid dabunt 34, ſec. & invenies 970, addenda ſinui grad. 36, 25′, qui eſt 9.7735327, fietque 9.7736297, quod intelligendum ſi exactiſſimè velis procedere, nam in pleriſque operationibus iſta negligi poſſunt. Idem intelligendum eſt de tangentibus & ſecantibus, & logarithmis.

Si velis ſinum verſum, aufer ſinum complementi à ſinu toto, relinquetur ſinus verſus, ſimplex & linearis.

Si logarithmum ſinûs verſi requiris, quia ita eſt ſemiradius, ad ſinum arcûs; ut ſinus arcus ad ſinum verſum arcûs dupli (*per* 1. *coroll. prop.* 4. 1 *huius*) ex logarithmo ſinûs dimidii arcûs duplicato, aufer logarithmum ſemiradii, ſive logarithmum ſinûs arcûs graduum 30, relinquitur logarithmus ſinûs verſi quæſiti.

Secunda pars iſtius uſûs conſiſtit in eo, ut dato ſinu, tangente, ſecante, logarithmo ſinus, aut tangentis, aſſignetur arcus illis reſpondens; ſi ſinus datus, tangens, aut ſecans, inveniantur in tabulis, arcus illis reſpondens in primâ columna, eſt ille qui quæritur. Si verò non inveniatur in tabula, quæratur in tabula proximè major, & minor; ſubtrahaturque minor à majori, ut habeatur eorum differentia, tum minor à propoſito etiam auferatur, ut habeatur differentia eorum: tum fiet regula aurea; ſi differentia majoris à minori, dat minuta ſecunda 60, quot dabit ſecunda differentia minoris à propoſito. Sit datus iſte ſinus 9.7736297, in tabula proximus eo minor eſt 9.7735327. Cui reſpondent gradus 36, 25′ & proximè major 9.7737039 graduum 36, 26′, differentia inter hos tabulatos eſt 1712, differentia inter propoſitum & minorem eſt 970. Fiat regula trium, ſi differentia 1712 dat ſecunda 60, differentia 970 dabit ſecunda 34, igitur arcus reſpondens eſt grad. 36, min. 25. ſecunda. 34.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Uſus logarithmorum.

Uſus proprius logarithmorum conſiſtit in eo ut propoſitis duobus numeris, tertium proportionalem invenias per ſolam additionem, & ſubtractionem.

Dupletur logarithmus ſecundi, & ab hoc duplo auferatur logarithmus primi, reſtabit logarithmus numeri quæſiti quod manifeſtum eſt ex definitione logarithmorum.

Pariter datis tribus numeris quartum proportionalem inveniemus, ſi addamus logarithmos ſecundi & tertii, & à ſummâ eorum ſubtrahamus logarithmum primi; relinquetur logarithmus quarti. Dentur num. 25, 60, 120, inveniendus eſt quartus proportionalis 288.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datis tribus numeris, quartum proportionalem invenire in ratione inverſâ.

Logarithmi primi, & ſecundi ſimul addantur, & ab eorum ſumma, ſubtrahatur logarithmus tertii, reſtabitque logarithmus quarti. Quod clariſſimum eſt ex definitione logarithmorum & praxi communi regulæ proportionis inverſæ.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire in ratione duplicatâ illius, quæ eſt primi ad ſecundum.

Sint dati numeri A, & B, & tertius C, cui quartus proportionalis inveniendus in ratione duplicata illius quæ eſt A ad B: logarithmus A, ſubtrahatur ex logarithmo B, & differentia duplata addatur logarithmo C, ſumma dabit logarithmum numeri quæſiti.

Ratio eſt, quia ſi differentia adderetur logarithmo numeri C; fieret logarithmus quarti numeri, & ita eſſet A ad B; ut C ad quartum illum numerum; cum proportionalium æquè differentes ſint logarithmi. Si rurſus addatur ſemel hæc differentia, fiet ut A ad B, ita quartus ille numerus ad quintum. Sed idem factum eſt cum differentia duplicata addita eſt: ergo inventus eſt quintus ad quem C habet rationem duplicatam illius quæ eſt A ad B. Eâdem methodo inveniemus numerum in triplicata ratione, in quadruplicatâ, &c.

PROPO

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Inter datos numeros quotcumque medios proportionales invenire.

Differentia logarithmorum datorum numerorum dividatur bifariàm, si unicam mediam proportionalem velis; trifariàm si duas; in quatuor partes si tres. Hæc differentia addita logarithmo primi numeri dabit logarithmum primi medii, & huic adhuc addita dabit logarithmum secundi medii.

Ut inter datos numeros A, & B sint inveniendi duo medii proportionales.

A B
8. 64. 512. 4096.

Differentia logarithmorum divisa per 3, dat 9.030900, quæ si addatur logarithmo minoris 9.030909, dabit logarithmum primi medii 1.806,800, & huic logarithmo iterum addita, dabit logarithmum: 2.7092700, igitur inter 8, & 4096 erunt duo medii proportionales 64, 512, hoc est ut 8 ad 64, ita 64 ad 512; & 512 ad 4096.

Ratio clara est, quia logarithmi illorum numerorum sunt æquèdifferentes; ergo numeri sunt continuè proportionales.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Usus ultimæ tabulæ.

Quia ultima tabula solummodo continet logarithmos numerorum ab unitate ad 10000, modum docebo quo logarithmus cujuscumque numeri 10000000 non excedentis inveniatur & vicissim, licet autem jam de hoc locutus sim supra, hîc melius demonstrabo.

Quære in ultima tabula quatuor primarum figurarum numeri dati 2, subtrahe logarithmum inventum ex logarithmo proximo sequenti, ut habeas eorum differentiam, quam per reliquas figuras numeri dati multiplicabis, & ex producto abscinde ad dexteram tot figuras quot reliquæ fuerint; reliquum adde logarithmo prius invento, mutetur item characteristica quæ unitate minor esse debet numero characterum, quibus numerus respondens constat exempli gratiâ, quæratur logarithmus numeri 3567894, qui est 3.5523031, quo subtracto ex sequenti 3.5524248, restat 1217, fit autem regula trium, si 1000 dederint 1217, quid dabunt 894, fit multiplicatio 1217 per 894, reliquas cyphras numeri dati, habeturque productum 1087998, & facta divisione, per rejectionem trium characterum in fine, restat fere 1088, quibus adjectis ad primum logarithmum 3.5523031, & mutata characteristica 3 in 6, fit logarithmus 6.5524118, numero 3567894 respondens: pariter ut exercearis; logarithmus 125607 est 5.0990137, & numeri 2358069 est 6.3725454.

Demonstratio petitur ex eo quod in tam magnis numeris unitate tantum differentibus, logarithmi intermediorum proportionales sunt proximè numeris ipsis, quare numerorum 3567 & 3568, vel numerorum 3567.000 & 3568.000, intermedii logarithmi sunt proximè proportionales, hoc est si logarithmus secundi superat logarithmum primi partibus 1217, seu si unitas aut 1.000, aut $\frac{1000}{1000}$ dat 1217, intermedia fractio 0.894 seu $\frac{894}{1000}$ tribuet quartum proportionalem, atque ita invenio logarithmum numeri $3567\frac{894}{1000}$ esse 3.5524118. Multiplicetur numerus propositus per 1000, secundum regulam decadicarum fractionum in Arithmetica traditas, fiet numerus 3567894, addendus autem est logarithmus numeri 1000, ut logarithmus producti, æqualis sit logarithmis multiplicantium, est autem logarithmus numeri 1000, 3.0000000; fit ergo logarithmus numeri propositi 6.5524118, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hi numeri $3\frac{567894}{1000000}$ vel $35\frac{67894}{100000}$ vel $356\frac{7894}{10000}$ vel $3567\frac{894}{1000}$ vel $35678\frac{94}{100}$ vel $356789\frac{4}{10}$ vel 3567894 eosdem habent logarithmos, excepta characteristica nempe primi numeri logarithmus est 0.5524118, secundi, 1.5524,18, tertii 2.5524118, quarti 3.5524118, quinti 4.5524118, sexti 5.5524118, septimi 6.5524118.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Numeri integri cum fractione adhærente logarithmum invenire.

Si detur numerus integer cum fractione decimali adhærente, ita ut in numero & in numeratore fractionis simul, sint quatuor tantum cyphræ eius in tabula logarithmum inveniemus mutata tantum charasteristica. Ut si proponatur numerus $3.\frac{567}{1000}$ vel $35\frac{67}{100}$ vel $356\frac{7}{10}$ idem est logarithmus ac numeri 3567, sed primus habet characteristicam 0, secundus 1, tertius 2, quartus 3.

Si numerus cum denominatore fractionis adhærentis plures quam quatuor cyphras contineret ut $356\frac{7894}{10000}$ quare ut prius logarithmum numeri $3567\frac{894}{1000}$ deinde decurtabis, aut augebis characteristicam prout exiget numerus characterum. Secundò si alia species fractionis, revocari facilè poterit ad decadicam prout docuimus in Arithmetica, tum per priùs dicta hujus numeri cum fractione adhærente logarithmum invenies.

Quod si non lubet fractionem propositam ad decimalem revocare, ex numero integro, & fractione fac fractionem impropriè dictam, & subtrahe logarithmum denominatoris, ex logarithmo numeratoris, restabit logarithmus aggregati ex integro, & fractione. Ut si proponatur $3\frac{3}{4}$ fiat fractio impropria $\frac{15}{4}$ logarithmus 0.6020600 numeri 4, subtrahatur ex 1.1760913 logarithmo numeratoris 15, relinquetur 0.5740313 logarithmus quæsitus.

Demonstratio. In omni fractione intelligitur numerator dividi per denominatorem, sed cùm unus numerus alium dividit, subtrahendus est logarithmus divisoris ex logarithmo divisi, fitque logarithmus quotientis. Ut si 15 dividas per 4, erit quotiens $\frac{15}{4}$; ergo hoc modo habetur logarithmus hujus numeri $3\frac{3}{4}$.

PROPOSITIO XXX.

Invenire logarithmum fractionis propriè dictæ.

Proponatur fractio propriè dicta, cujus nempe numerator est minor denominatore verbi gratiâ $\frac{2}{5}$ subtrahatur numeratoris 2 logarithmus 0. 3010300 ex denominatoris 5 logarithmo 0. 6989700, & reliquo præponatur nota defectiva, restabitque —0. 3979405.

Demonstratio. Logarithmus fractionis est minus quam 0, cùm enim fractio sit minor quam unitas, unitas autem habeat logarithmum 0, fractio necessariò numerum minorem quam 0, habebit pro suo logarithmo. Quod verò ita habeatur probatur fractio $\frac{2}{5}$ est quotiens divisioni, in qua numerus 2 esset dividendus, & numerus 5 divisor, quotiens enim esset $\frac{2}{5}$, sed si ex dato logarithmo dividendi subtrahatur logarithmus divisoris, restat logarithmus quotientis; ergo si subtraheretur logarithmus 5, ex logarithmo 2, haberetur logarithmus quæsitus. Sed id non potest, cùm subtrahendus sit major, tunc ergo subtrahitur minor ex majore, & residuo præponitur nota defectus — ut si aliquis habeat duos nummos & debeat creditori 5, non tantum nihil habet, sed si haberet adhuc tria nihil haberet. Igitur, hujusmodi praxi bene exurgit fractionis logarithmus.

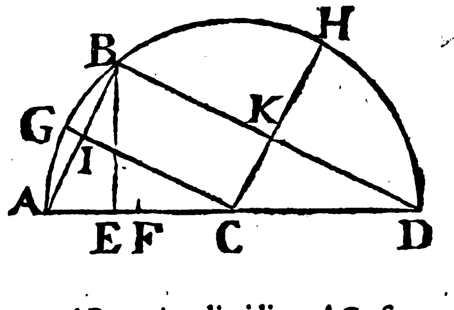
FACILIOR CONSTRUCTIO CANONIS Logarithmorum, sinubus, tangentibus & secantibus respondentium.

Quamvis construere tabulas logarithmorum sinubus, tagentibus & secantibus respondentium, non sit difficilius, quàm numeris absolutis suos tribuere logarithmos; cum sinus, tangentes, & secantes sint etiam numeri simplices: sunt tamen propositiones nonnullæ quæ compendia suppeditant. In genere igitur dicere possumus, ubi sinus aliquis invenitur per regulam proportionum geometricam, logarithmum inveniri posse per regulam trium Arithmeticam, seu per additionem, & subtractionem: præmitto tamen unam propositionem.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Ut dimidium sinus totius ad sinum dimidii arcus, ita sinus complementi ipsius dimidii ad sinum totius arcus.



Sit arcus AB, cujus dimidium AG, sitque AF semissis sinus totius AC, ducantur AB, BD quæ dividantur bifariam in I & K, junganturque ex centro C, lineæ CIG, CKH quæ (*per* 2. 3.) perpendiculares erunt, eruntque AI, BK sinus arcuum AG, BH, qui sunt dimidii arcuum AB, BD. Dico ita esse AF, dimidium sinus totius ad AI sinum dimidii arcus AG; sicut IC, sinus complementi ejusdem dimidii arcûs AG, ad BE, sinum arcus AB.

Demonstratio. Triangula ABD, BED, habent angulum communem BDA; angulus ABD in semicirculo rectus est, angulus item E rectus est, (*per defin. sinus*;) ergo sunt æquiangula, & (*per* 3. 6.) Eucl. ita est AD ad AB, in majori, sicut BD ad BE in minori, quare & dimidium AD seu AC eodem modo se habet ad AB, sicut dimidium BD, nempe IC, ad BE, ut autem AC ad AB, ita AF ad AI utriusque dimidium; ergo ita est AF ad AI, sicut IC ad BE; quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Dato logarithmo sinus arcus AG, & logarithmo sinus complementi, datur logarithmus sinus arcus dupli. Si nempe addas logarithmos datos, & à summa subtrahas logarithmum dimidii sinûs totius, qui facilè habetur, si ex logarithmo sinûs totius subtrahas logarithmum binarii.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Canonem logarithmicum tangentium construere.

Quoniam ita sinus complementi ad sinum alicujus arcûs, ut sinus totus ad tangentem (*per* 22. *præcedentis*) & logarithmi mediorum æquantur logarithmis extremorum (*per* 5. *hujus*) si ex aggregato logarithmorum sinus arcûs, & sinus totius, auferas logarithmum sinus complementi, dabitur logarithmus tangentis.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Canonem logarithmicum secantium construere.

Quoniam (*per* 23. *præcedentis*) sinus totus est medius proportionalis inter sinum complementi & secantem arcus, erit (*per* 6. *hujus*) logarithmus sinus totius bis sumptus æqualis logarithmis secantis, arcus, & complementi. Quare si ex logarithmo sinus totius duplicato auferas logarithmum complementi, habebis logarithmum secantis.

COROLLARIUM.

Quia in adversa pagina logarithmorum pro sinubus habentur logarithmi complementorum, teneturque memoria logarithmus sinus totius duplicatus, facilis est subtractio hujus logarithmi complementi à duplo logarithmo sinus totius, ut non sit posita tabula logarithmorum pro secantibus. Quoties igitur indiges logarithmo secantis, subtrahe logarithmum complementi ex 20. 0000000.

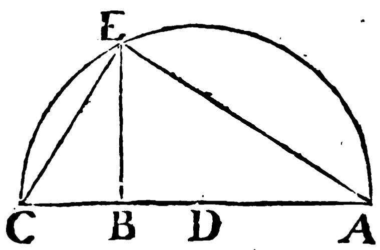
PROPO

Pro sinubus versis.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Subtensa est media proportionalis inter diametrum, & sinum versum.



Sit arcus CE, cujus chorda CE, sinus versus CB, dico cordam CE esse mediam proportionalem inter diametrum AC, & sinum versum CB.

Demonstratio. Triangula CEA, CEB habent angulum communem C; item angulus AEC in semicirculo rectus est, sicut angulus B; ergo (*per* 3. 6.) ita est AC ad CE in magno triangulo, ut in parvo CE ad CB, quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM I.

Dato logarithmo chordæ, datur logarithmus sinus Versi, subtrahendo scilicet ex chordæ duplo logarithmo, logarithmum diametri: est autem logarithmus diametri, logarithmus sinus totius auctus logarithmo binarii, & logarithmus chordæ est logarithmus sinus arcus dimidii auctus eodem logarithmo binarii.

COROLLARIUM II.

Pariter ita est CB ad BE, sicut BE ad AB sinum complementi auctum sinu tota DA.

DE LOGARITHMIS A NEPER traditis.

Quamvis ea quæ reliquo hoc libro continentur, sint minimè necessaria, atque adeò sine ullo dispendio omitti possint; in honorem tamen Neperi Nobilis Scoti, qui logarithmorum inventor fuit, peculiarem eorum rationem, qua ipse ingeniosissimè usus est, breviter aperiendam censui; quod inutile non erit, cum in eo authore non ita facilè percipi possit.

SUPPOSITIO.

Supponit Neperus in logarithmis majoribus, omnem errorem qui ad unitatem non perveniat negligi posse, & illius nullam rationem haberi. Id usurpatur in sinubus, tangentibus, & secantibus; nã ratio cur semidiameter, seu sinus totus non assumitur 120 partium, ut eum fecerunt Ptolemæus, & alii veteres, sed 10000000 non est alia, nisi ut sine fractionibus sinus singulorum arcuum, aut etiam chordæ assignarentur sine ullo erroris notabilis periculo; in majoribus enim numeris error non adæquans unam unitatem, est tam parva pars sui totius, ut evanescat. Multò minus fractionum haberi debebit ratio, si majori numero majoris accurationis gratiâ multas addamus cyphras. Ut si numero A 10000000. 00 adderemus duas cyphras interpunctione notatas, deinde operandò exurgeret hic numerus A 10000000. 04 dico hanc fractionem posse tutò negligi post omnes operationes, licet dum operamur illius rationem habeamus ne repetitione augeatur. Ratio est quia illa additio duarum cyphrarum numerum multiplicat per 100, significaretque 10000000. $\frac{4}{100}$ decem milliones, cum 4 centesimis partibus unius unitatis.

Ut autem accuratissima sit operatio, sinui toti addit alias 7 cyphras hoc modo 10000000. 0000000. Colliges primò sufficienter cognosci aliquam quantitatem in ordine ad tabulam conficiendam, si dicatur minor esse aliquo numero maximo, & major alio item maximo. Ut si dicatur aliqua quantitas esse minor numero 9999999. 0000006, & major numero 9999999. 0000004, dicam enim in ordine ad tabulam nostram quæ negligit errores minores unitate, eam quantitatem esse 9999999 simpliciter & sine addito.

Hæc ratio nova non est, nam Archimedes positâ diametro circuli 497 circumferentiam definit esse inter terminos 1562. & 1561, hoc est minorem primo, majorem secundo numero.

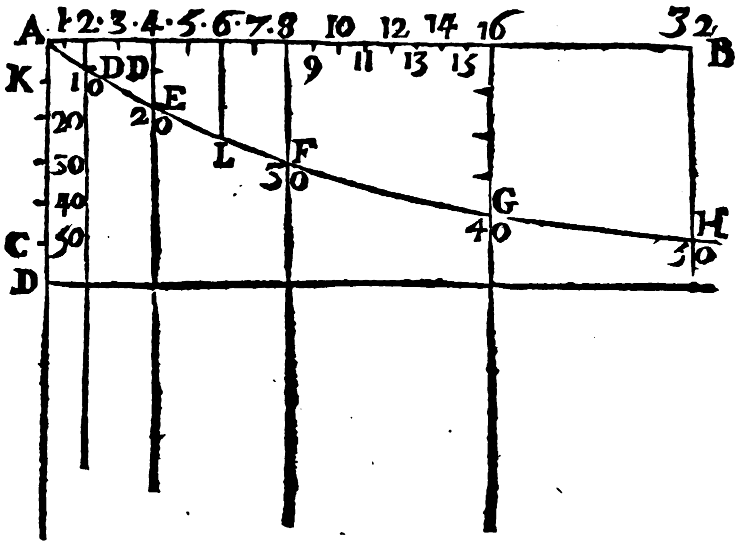
Colliges 2, loco quantitatis ignotæ posse illius terminos usurpari, pariterque addi, subtrahi, multiplicari, dividi, ac si hanc quantitatem haberemus, ut si semidiametrum circuli 248$\frac{1}{2}$ multiplicemus per 781, fiet area circuli 194078$\frac{1}{2}$ verâ major, si eandem semidiametrum multiplicemus 780$\frac{1}{2}$ exurget verâ minor 193908$\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

De linea logarithmica.

Neperus genesin logarithmorum explicat exemplo duorum mobilium, quorum unum æquabiliter, aliud motu secundum aliquam rationem moveatur. Ut autem explicationem addam de meo, quæ melius rem oculis subjiciat: supponantur esse duæ lineæ AB, AC se invicem perpendiculariter secantes, quarum altera AB immobilis sit, alia verò AC ita moveatur supra AB, ut semper perpendiculariter insistat. Moveatur autem accelerato motu, ita ut primo quocumque tempore transferatur in 2, secundo in 4, tertio in 8, quarto in 16, hæc linea AB quæ hoc modo percurritur repræsentabit numeros simplices. Supponatur simul cum linea AC transferri aliquod mobile, verbi gratia muscam, quæ moveatur æquabiliter in linea AC translata, & quo tempore linea motu accelerato percurrit A2, musca percurrat AK, ita ut cum linea AC erit in puncto 2, musca erit in puncto D, pariter dum linea AC pervenerit in 4, musca æquabiliter mota sit in E, sintque 4D, DE



æquales. Dum linea A C erit translata in punctum 8, musca percurrerit in sua linea tria intervalla intervallo AK æqualia, dum linea AC erit in puncto 16 musca percurrerit quatuor intervalla sitque in G, dum erit in puncto 32, musca erit in H.

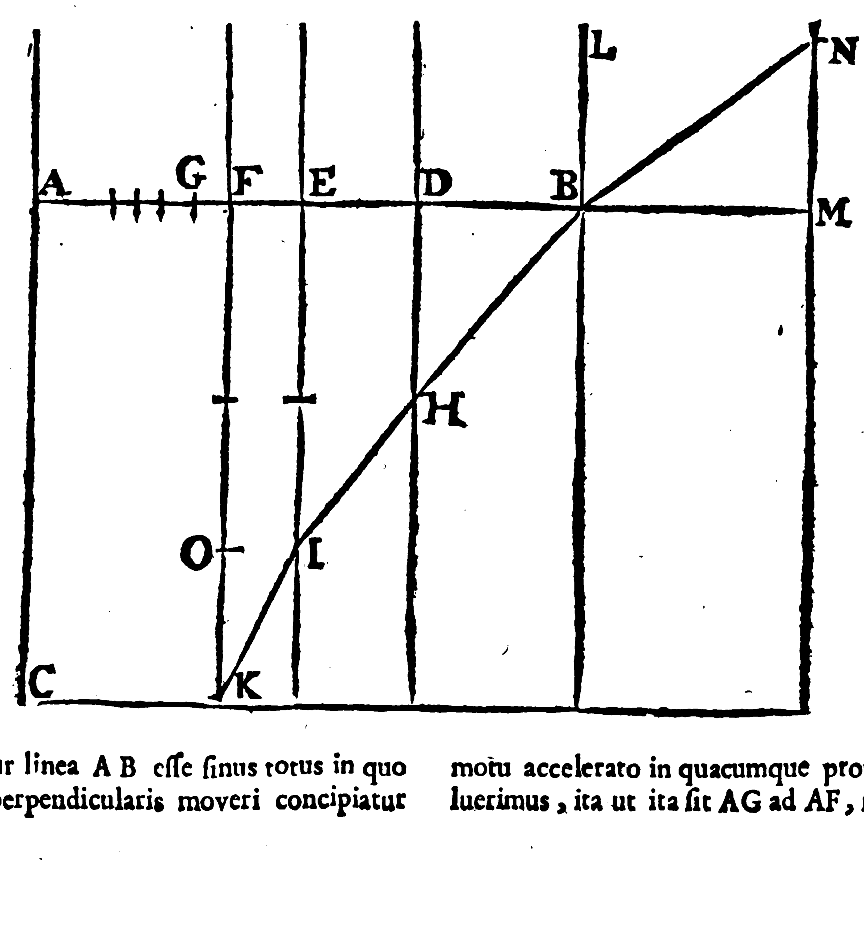
In linea AB sunt numeri absoluti & simplices, lineæ perpendiculares 2D, 4E, 8F, 16G, 32, H sunt logarithmi numerorum 1, 4, 8, 16, 32 &c. Linea autem ex duplici illo motu resultans, nempe linea curva ADEFGH fit linea logarithmica. Si divideretur A B in partes æquales, exciperetque omnes numeros, in ea inveniremus logarithmos omnium numerorum intermediorum, ut si numeri 6 quærendus esset logarithmus ducta in puncto 6 perpendicularis 6L, erit eius logarithmus, & sic aliæ perpendiculares ad lineam usque logarithmicam terminatæ exhibent logarithmos omnium numerorum. Neperus rem non ita subjicit oculis, neque hanc figuram facit, quæ tamen meo judicio satis apposite rem demonstrat. Immo si in maximo plano aliquis operaretur, hancque figuram fidelissimè describeret, haberet instrumentum in quo logarithmos omnium numerorum quantum ad praxes geometricas pertinet, satis exactè determinaret.

Poterat linea A B dividi simpliciter in partes æquales, ita ut motus lineæ AC supra lineam A B esset æquabilis; motus autem muscæ supra lineam AC translatam, esset acceleratus quod figuram omnino diversam exhiberet; & quidem prior suppositio rectè explicat logarithmos communes, hæc verò posterior necessaria est ad logarithmos Neperi quos propositione sequenti explico.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Explicatio logarithmorum propositorum à Nepero,



Intelligatur linea A B esse sinus totus in quo linea A C, perpendicularis moveri concipiatur motu accelerato in quacumque proportione voluerimus, ita ut ita sit AG ad AF, sicut AF ad

A E,

AE, & AE ad AD, & AD ad AB, & dividendo ita sit GF ad FE, sicut FE ad ED, & ED ad DB, & convertendo ut DB ad DE, ita DE ad EF, & EF ad GF, & componendo ut AB ad AD, ita AD ad AE, & AE ad AF, & AF ad AG, & ita consequenter. Volo autem ut linea AC translata motu accelerato perpendiculariter semper insistat lineæ AB. Suppono item in linea AC muscam moveri æquabiliter non ex A versùs C, sed ex C versùs A, ita ut dum linea AC translata fuerit in B, musca etiam mota æquabiliter ex C versùs A, perveniat in A; hoc est inveniatur in B. Volo insuper ut motus muscæ in ipso puncto B, inveniatur æqualis, seu æque velox, ac motus translationis ipsius lineæ AC, qui computatur in AB, ex quo fit, ut quia motus translationis lineæ AC, est acceleratus, velocior fit in B quam in D, quia omnis motus acceleratus minuitur versùs initium motûs; ex quo fit etiam ut æquè velox sit motus muscæ in H ac in B; ergo motus muscæ velocior est in H, quam ipse motus translationis sit velox in D, quare à puncto C usque ad punctum B semper musca movebitur velocius quam linea; quare cum eodem tempore quo linea AC, transfertur ex D in B, ac super AB musca percurrat lineam HD, & velocitatem æqualem habeat velocitati translationis in B, quæ major est quam in DB cùm crescat, linea HD quam percurret musca major erit quam linea DB; ita ostendam lineam EI esse majorem quam ED, & FK majorem quàm FD. Quod probabo de aliis omnibus similiter.

Suppono secundò muscam ubi pervenerit in B ulterius continuare suum motum æquabilem versùs partes L, item lineam AC ultra B transferri motu accelerato in eadem ratione, ita ut sit eadem ratio AE ad AD & AD ad AB, quæ AB ad AM, & pariter dividendo eadem sit ratio ED ad DB, quæ DB ad BM. Quia autem motus muscæ est semper æquè velox ac erat in B, motus autem translationis sit velocior in tota BM, quam erat in B cum sit acceleratus, ideo in BM motus translationis major erit motu muscæ. Supponamus igitur interea dum linea transfertur ex B in M, muscam conficere lineam MN, clarum est lineam BM, majorem esse linea MN, quod de aliis omnibus probabo ultra punctum B.

Quia autem diximus suprà, nos posse ponere logarithmos decrescere, interea dum numeri geometricè proportionales crescunt, sint lineæ AG, AF, AE, AD, AB, AM, numeri geometricè crescentes, sintque lineæ FK, EI, DH logarithmi decrescentes æquabiliter, erunt igitur logarithmi, distantia muscæ à linea AB, quæ in puncto B nulla est, cum musca sit in linea AB, est igitur logarithmus lineæ AB, seu sinus totius O. Quia autem logarithmi eundem semper tenorem observare debent, utpote in proportione Arithmetica continua, cùm decrescant usque ad B, decrescere etiam debent ultra B, seu ultra nihilum, id est O; igitur in tota linea AB logarithmi decrescunt usque ad O, at verò ultra B recedent à zero, è contraria parte nempe erunt numeri defectivi. Ponamus logarithmum EI esse 200, & DH esse 100. in B esse O, logarithmus MN erit—100. Hoc est minus 100. Explicuimus autem jam supra quomodo intelligendi sint numeri defectivi.

COROLLARIUM.

In hac logarithmorum specie, omnis numerus major sinu toto habet logarithmum defectivum, quare tangentes omnes arcuum majorum gradibus 45 habent sinum defectivum sicut & secantes omnes. Ratio autem quare Neperus selegit hanc speciem logarithmorum in qua sinus totus haberet logarithmum o, hæc videtur esse, quod ut plurimum in operationibus trigonometricis fit regula trium, in qua sinus totus primum locum obtinet, quare secundùm regulam proportionum subtrahendus esset logarithmus sinus totius, qui cum sit o, subtractio nulla est quare sola additione tunc peragitur tota operatio.

Sequitur item cum numeri minores infra sinum totum majores habeant logarithmos, initio lineæ A habere pro logarithmo lineam infinitam, cùm enim dividitur linea AB in partes proportionales, quarum BD sit prima incipiendo à puncto B, & & decrescant in certa proportione, erunt in AB termini infiniti, sed pro singulis terminis augetur logarithmus lineâ, quæ sit æqualis lineæ DH, logarithmus initii lineæ AB erit linea continens infinitas lineas, æquales lineæ DH, quæ necessariò infinita esse debebit.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Logarithmus cujuscumque sinus major est excessu sinu totius supra illum, & minor est excessu quo tertia proportionalis huic sinui, & sinui toti, superat sinum totum.

Proponatur sinus quicumque AD, qui necessariò sinu toto AB minor erit, sit DB excessus quo à sinu toto superatur, sit item AM tertia proportionalis huic sinui AD, & sinui toti AB, hoc est ita sit AD ad AB, sicut AB ad AM, sit BM excessus hujus tertiæ proportionalis supra sinum totum AB, dico DH logarithmum sinus AD, majorem esse quam DB, & minorem quam BM.

Demonstratio. Cum musca nostra seu mobile æquabile, æquè velociter moveatur dum percurrit HD, ac movetur in B, & motus translationis sit minus velox quam in B, & eodem tempore percurrantur DH & DB, erit DH major quam DB, è contra cum eodem tempore percurratur BM, quo DB, & DH, & in BM motus translationis, utpote acceleratus major sit quam in B, velocior erit quam motus muscæ; ergo DH minor erit quam BM, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Cujuslibet sinus exhibere terminos logarithmicos, seu numeros intra quos positus sit eius logarithmus.

Sit sinus datus AD prioris figuræ, 9999999, cujus logarithmus quæritur; qui quia non potest facilè inveniri, quæruntur termini intra quos existat.

S	10000000 . 0000000
T	9999999 . 0000000
V	1 . 0000000
X	1 . 0000001

Ex numero S, sinu toto septem cyphris aucto, subtrahe sinum propoſitum T, ſeptem cyphris pariter auctum, reſtabit numerus V, repræſentans in figura lineam DB, fiat ut T ad S, ita V ad X, eritque numerus X repræſentans figuræ lineam BM, dico logarithmum ſinus T, conſiſtere intra numeros V & X, ſeu majorem eſſe numero V, & minorem numero X.

Demonſtratio. Cum ita ſit in priori figura AD ad AB, ſicut AB ad AM, erit viciſſim ut AM ad AB, ita AB ad AD; auferatur ex AM linea AB, ex AB auferatur AD, erit ut totum AM ad totum AB, ita ablatum AB ad ablatum AD, ergo reliquum BM ad reliquum DB erit ut totum AM ad totum AB, ergo etiam erit ut AD ad AB, ita DB ad BM, ſeu ut numerus T ad S, ita V ad X; igitur numerus X eſt idem ac linea BM prioris figuræ: logarithmus autem DH major eſt quam DB, ſeu quam numerus V, & minor quam BM, ſeu quam numerus T; quod erat demonſtrandum.

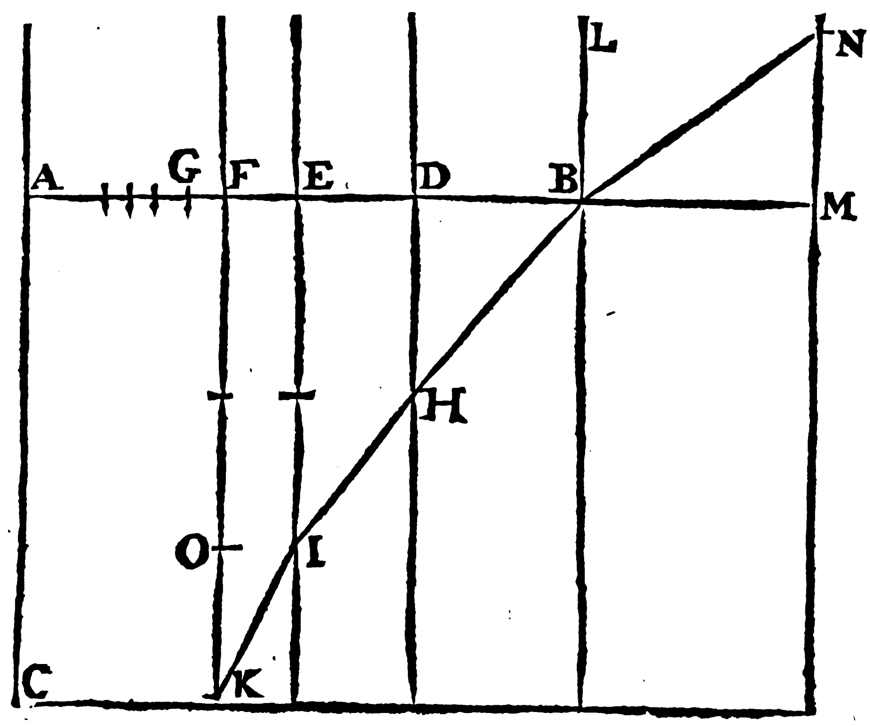
COROLLARIUM.

Si dentur plurimi ſinus decreſcentes in eadem ratione quæ eſt AB ad AD, ſciaturque numerus terminorum, habebis (*per 4. huius*) logarithmum ultimi, ſcilicet multiplicando logarithmum primi per numerum intervallorum.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Sinus totus ad differentiam logarithmorum ſinuum maiorem rationem habet, quam minor ſinus ad differentiam ſinuum, & minorem quam maior ſinus.



Proponantur duo ſinus AF, AE, quorum differentia FE, ſint eorum logarithmi FK, EI, quorum differentia ſit OK; dico majorem eſſe rationem ſinus totius AB ad OK, quam AF ad FE, & eius ſinus totius AB ad OK minorem eſſe rationem quam AE ad eandem FE; fiat ut AF ad FE, ita AB ad BM, & ut AE ad FE ita AB ad BD.

Demonſtratio. Cum ſit ut AF ad FE, ita AB ad BM, erit componendo ut AE ad EF ita AM ad BM, ſed ut AE ad EF; ita fecimus AB ad BD, igitur ita eſt AM ad BM ſicut AB ad BD: & per converſionem rationis ut AE ad AF, ita AB ad AD, ergo logarithmi erunt æquè differentes; ſed logarithmus ſinus AD major eſt quam linea DB, & minor quam DM, & ſeipſo toto differt à logarithmo ſinus totius AB qui eſt O; ergo etiam OK differentia ipſorum FK, EI major eſt quam DB, & minor quam BM. Sed ut AF ad FE, ita AB ad BM; AB autem ad BM majorem, minorem habet rationem quam ad OK minorem, ergo ſinus totus ad OK majorem habet rationem quam AF ad FE, pariter ita eſt AE ad EF, ſicut AB ad BD, ſed AB ad BD minorem, majorem habet rationem quam ad OK majorem; ergo minor eſt ratio AB ad OK, quam AE ad EF, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ex cognito alicujus ſinus logarithmo, alterius cujuſcumque ſinûs logarithmum eliciemus, verbi gratia detur ſinus 9900473, & alius quicumque ſinus 9900000, ſitque cognitus logarithmus prioris, differentia ſinuum eſt 473, fiat ut major ſinus ad differentiam 473, ita ſinus totus ad 477, & ut minor ſinus ad 473, ita ſinus totus ad 479, ſinus totus ad differentiam logarithmorum majorem rationem habebit, quam ad 479, & minorem quam ad 477, ergò differentia bene conſtitui poteſt 478.

PROPOSITIO XL.

Problema.

Sinuum majorum quam 999700 logarithmos exhibere.

Subtrahatur ſinus datus, à ſinu toto, & ille erit logarithmus,

logarithmus. Quamvis enim logarithmus ſit paulò major, non tamen differentia erit unitatis, quod potius ipſa operatione probatur, quàm ulla demonſtratione.

PROPOSITIO XLI.

Problema.

Continuare 100 numeros in proportione Geometrica quæ eſt inter ſinum totum, & ſinum eo minorem unitate nempe 9999999.

Jam ad praxin accedimus, & quia facilè numerorum non magno intervallo à ſinu toto diſtantium facilè logarithmos invenimus, qui proximo eſt exceſſus ſinus totius, ſupra propoſitum ſinum; & aliunde datis pluribus numeris geometricè proportionalibus, & dato logarithmo primi, facilè exceſſum logarithmi ſinus totius ſupra iſtius logarithmum, (quæ eſt ipſemet logarithmus, cum logarihmus ſinus totius ſit o) multiplicando per numerum intervallorum, habetur logarirhmus ultimi, ideo plurimos numeros proportionales inveſtigamus incipiendo ſcilicet à ſinu toto, id autem hoc modo præſtamus.

Primò majoris accurationis gratiâ augetur ſinus totus 7 cyphris, eſtque numerus A. Secundus numerus eſt B qui fit per ſubtractionem numeri C, qui eſt 10000000 pars illius. Ut habeas numerum auferendum ex B, fiat ut A ad C, ita B ad D, quod ut præſtes multiplica B per C quod fit additione 7 cyphrarum cum ſit numerus decadicus, divide per A, qui cum ſit numerus etiam decadicus diviſio fiet abjectione 14 cyphrarum ex producto

A	10000000	. 0000000
	C I	. 0000000
B	9999999	. 0000000
		D 9999999
E	9999998	. 0000001
		F 9999998
G	9999997	. 0000003
		H 9999997
I	9999996	. 0000006
		K 9999996
L	9999995	. 0000010
		M 9999995
N	9999994	. 0000015
		O 9999994
P	9999993	. 0000021
		Q 9999993
R	9999992	. 0000027
S.	9999900	. 0000021

habebiſque numerum D qui ſubtractus ex B dat tertium numerum E. Fiat item ut A ad C ita E ad F, nempe multiplica E per C additione 7 cyphrarum habebitque numerus E ſic multiplicatus cyphras 14, diviſio autem per A fit abjectione 14 cyphrarum, unde quotiens eſt F qui ſubtractus ex E, efficit quartum numerum G, fiat ut A ad C ita G ad H, atque ita deinceps intra unam horam poteris continuare centum numeros in proportione numeri A ad B, quorum ultimus ſi bene operatus es, erit numerus S.

Quia autem primi habes logarithmum nempe differentiam inter numerum A & B quæ eſt C hæc multiplicata per numerum intervallorum dabit logarihmum numeri 5, nempe 100.

PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Continuare quinquaginta numeros, in proportione, quæ eſt 10000000 ad 9999900.

Secunda tabula quam Neperus proponit eſt quinquaginta numerorum continuè proportionalium quorum primus ſit ſinus totus A, ſecundus ſit C, proximè inventus, hæc ratio ut ad minores numeros revocetur ablatis utrinque duabus cyphris, eſt ut 100000 ad 99999, hæc autem proportio habetur delendo ex quolibet numero partem 100000, quod fit delendo numeri quinque ultimas cyphras.

A	10000000 . 0000000
	B 100 . 0000000
C	9999900 . 0000000
	D 99 . 9990000
E	9999800 . 0010000
	F 99 . 9980000
G	9999700 . 0030000
	Quinquageſimus
H	9995001 . 222927

Sit ergo ſinus totus A 7 cyphris auctus, cujus ſi deleas quinque ultimas cyphras fiet numerus B, qui ſi ſubtrahatur ex A, fiet C, ſecundus. Hujus numeri ſi deleantur quinque ultimæ cyphræ, fiet numerus D, quo ſubtracto ex D, reliquus erit tertius E, atque ita ſemper operando uſque ad quinquageſimum qui erit numerus H, quinquaginta fient numeri in ratione numeri A ad C, nam auferendo 100000 partem numeri A, fit numerus C, pariter auferendo 100000 partem ex numero C fit numerus E, atque ita conſequenter. Non continuatur tamen ulterius hæc ſeries, quia fractio eſt jam ſatis magna, nempe major quinta parte unitatis. Cum igitur habeatur logarithmus primi nempe ſinus totius, & ſecundi qui eſt C, cujus cognitus eſt logarithmus per præcedentem, multiplicato ejus logarithmo per 50 numerum intervallorum habebitur logarithmus numeri H.

PROPOSITIO XLIII.

Problema.

Continuare numeros 2 in proportione quæ eſt ſinus totius 10000000 ad numerum 9995000.

Primò cognito logarithmo numeri 9995001 facilè habetur logarithmus numeri 9995000, nam ſinus totus majorem habet rationem ad differentiam logarithmorum quam ſinus minor ad differentiam ſinuum nempe unitatem, & minorem quam major ſinus ad eamdem unitatem, ideoque (*per coroll. 39.*) habebitur logarithmus numeri 9995000.

Reducatur ſinus totius ad propoſitum numerum ratio ad minores terminos; deletis utrinque tribus cyphris, eritque ut 1000 ad 9995. Fit autem ex numero 10000, numerus 9995, ſi auferas 5, nēpe partem ejus bis milleſimam; quare ex ſingulis auferre debes partem bis milleſimam, habetur autem numeri cujuſlibet pars milleſima, ſi ejus deleas tres ultimas cyphras, & bis milleſima, ſi reliquum dividas per medium, ut ſi numeri A deleas tres ultimas cyphras, & reliqui aſſumas dimidium, habebis numerum B, partem bis milleſimam numeri A, quo numero B ſubtracto ex numero A fit numerus C, pariter habebis numeri C partem bis milleſimam D deletis tribus ultimis ejus cyphris & reliquo bifariam diviſo.

A	10000000 . 0000000
	B 5000 . 0000000
C	9995000 . 0000000
	D 4997 . 5000000
E	9990002 . 5000000
	F 4995 . 0012000
G	9985007 . 4987500
H	9900473 . 5780800

diviso. Hoc numero D subtracto ex C fit numerus E, atque ita consequenter numeros 2 absolves, eritque H vigesimus primus si benè operetis. Horum omnium habebis logarithmos, cùm enim habeas logarithmum primi nempe sinûs totius, & secundi C, hic logarithmus continuè additus singulorum.

PROPOSITIO XLIV.

Problema.

Construere viginti unam seriem in proportione sinûs totius ad numerum H, in quibus numeri præcedenti propositione inventi, primum locum occupent.

Numerus præcedenti propositione inventus fuit 9900473. 57808000. cujus consequenter habetur logarithmus, quæratur (*per prop. 39.*) logarithmus numeri 9900000, continuenturque quotquot poterunt numeri in proportione quæ est sinus totius 10 00000 ad 9900000 est seu 100 ad 99, habetur autem centesima pars alicujus numeri si ejus duas ultimas cyphras deleas, quare singulas hujusmodi series continuare poteris quamdiu fractio major non erit, quoties verò fiet aliqua fractio, (*per 39 hujus*) invenies numeri vicinioris integri logarithmum, atque ita eandem seriem & in eadem proportione continuabis ut si numeri R. 9806049. 5000000 scias logarithmum facilè numeri 9806049. invenies logarithmum (*per 39.*)

A 10000000 . 0000000
K 100000 . 0000000
L 9900000 . 0000000
M 99000 . 0000000
N 9801000 . 0000000

Secunda series

C 9995000 . 0000000
O 99950 .
P 9905050 . 0000000
Q 99050 . 5000000
R 9806049 . 5000000

Tertia series

E 9990001 . 5000000

Quarta series.

G 9985007 . 49875000

Istæ omnes series in eadem ratione procedunt, atque adeo logarithmi se eodem excessu superant.

Atque hoc modo habentur omnes numeri procedentes geometricè quantum sufficit ad construendum canonem præcipuè cum ope prop. 39. facilè lacunas replere possimus; constitutis etiam logarithmis sinuum facilè logarithmos numerorũ absolutorum ex iis eruemus. Nam sinus est aliquis numerus absolutus. Si desunt nonnulli numeri absoluti intermedii prop. 39. ejus inveniet logarithmum.

PROPOSITIO XLV.

Problema.

Usus logarithmorum Neperi.

Quia ut diximus suprà, omnes numeri majores sinu toto, logarihmos habent deficientes, seu minores nihilo qui hanc notam defectus habent —, quæ minus significat, debet igitur logista accersere ex Algebra modum addendi, aut subtrahendi hujusmodi numeros; ne autem cogatur ad alia recurrere, hîc breviter praxin & explicationem perstringo.

Solent hujusmodi numeri defectivi explicari exemplo debitorum, & numeri positivi exemplo creditorum, quo major est numerus debitorum eo pauperior est mercator, quare si debeat 10, & habeat tantum 6, compensatis omnibus, debebit adhuc 4, hoc est nihil habet, immo minus habet 4 nummis, nempe si alicunde illi accederent 4 nummi, nihil haberet, deberet enim illos creditori reddere.

Debita ergo signentur notâ — & credita nota †.

Omnis numerus cui nullum signum præponitur positivus est, censeturque habere signum † quod plus significat.

Omnis numerus cui præponitur signum — defectivus est, hoc est si huic numero adderentur positivæ unitates totidem quod significat, adhuc nihil efficeretur.

1 Regula Additionis si numeri eodem signo notentur debeantque addi fiat additio simplex & summæ prænotetur idem signum, ut si numeri A & B addendi sint fiet numerus C, si D & E fiet numerus F.

A † 100	D — 36
B † 400	E — 40
C † 500	F — 36

Ratio quia si mercator habeat credita A & B, verè habebit creditum C quod illis duobus æquale est, pariter si debeat ex una parte 36, & ex alia 40, verè debebit 76.

2 Regula additionis, si signa fuerint diversa, minor à majori subtrahatur & reliquo præponatur signum majoris. Ut si numeri G & H addendi sint, subtrahatur H & G, & reliquo P, præpone signum majoris G mercator habet 50, & debent 40, debet fieri additio, seu componendæ sunt partes, compensatione facta habebit adhuc 10.

G + 50	K — 60
H — 40	L + 40
P + 10	M — 20

Quod si debeat 60, & habeat 40, compensatione facta debebit adhuc 20.

1 Regula subtractionis si signa fuerint eadem, debeatque minor numerus subtrahi ex majore, fiat subtractio simplex servatis iisdem signis, ut si B subtrahendus sit ex A relinquitur C, si E subtrahi debeat ex D relinquitur F.

A + 50	D — 60
B + 40	E — 20
C + 10	F — 40

2 Regula subtractionis, si signa fuerint eadem, subtrahique debeat major numerus à minori, tunc subtrahatur minor numerus à majore, & reliquo præponatur signum contrarium, nam dum subtrahis H ex G, perinde est ac si adderes —70 ad + 50, sed tunc subtrahis 50 à 20, & reliquo præponis signum —; ergo id etiam in tali casu præstare debes.

G + 50	K — 30
H + 70	L — 90
I — 20	M + 60

3 Regula subtractionis si signa fuerint dissimilia fiat additio, maneat signum illius à quo fit substractio, ut si ex numero N subtrahere velis numerum O, fiet numerus P, neque enim auferre potes — 50 nisi ponendo 50, pariter ex q — 60 auferre debes R + 35, dico subtractionem fieri si augeas negationem seu numerum defectivum.

N + 40	q — 60
O — 50	R + 35
P + 90	S — 95

Pro Tangentibus.

In talibus Neperi logarithmi tangentium sunt differentiæ

differentiæ inter sinum, & sinum complementi, quæ differentiæ sumptæ cum signo † plus inserviunt arcubus minoribus quadragesimo gradu, & prout defectivæ sunt inserviunt arcubus majoribus gradu 45.

Demonstratio. Vidimus in propositione 16, præcedentis libri; ita esse sinum complem. ad sinum arcus, ut sinus totus ad tangentem. Erunt logarithmi mediorum nempe sinûs totius qui est 0, & sinûs arcûs, æquales logarithmis extremorum. Si ergo ex mediis nempe ex logarithmo sinûs arcus auferatur logarithmus complementi qui est minor restat differentia abundans & positiva pro logarithmo tangentis.

In arcubus verò majoribus quadrante, cum logarithmus sinus complementi sit major quam sinûs arcûs, debebit fieri subtractio majoris à minore, quare per 2 regulam subtractionis, subtrahi debet minor à majori, & reliquo, seu differentiæ præponitur signum.

Quare differentiæ sinuum arcûs & complementi ut abundans, est logarithmus tangentis illius arcûs qui ad sinistram est, minoris scilicet gradu 45, & ut defectiva est, logarithmus tangentis arcus ad dexteram, majoris quadrante, ideo hæc differentia in medio habet utrumque signum. Videnda esset tabula Neperi in ipso Nepero, quæ ingeniosissimè constructa est.

Pro secantibus.

Per propositionem 17 præcedentis, sinus totus medius est proportionalis inter sinum complementi, & secantem arcûs (*ergo per 6. hujus*) erit logarithmus medii bis sumptus æqualis logarithmis extremorum seu complementi, & secantis. Sed logarithmus sinus totius ex constructione, est 0, qui bis sumptus est 0; ergo logarithmi sinus complementi, & secantis arcus debent efficere 0. Quod ut præstetur, cum logarithmus sinus complementi sit abundans, seu positivus, habeatque signum †, logarithmus secantis debebit habere easdem cyphras, & signum — ut si logarithmus complementi esset † 1000, logarithmus secantis arcus deberet esse — 1000. sic enim additi efficerent 0.

Atque hæc de logarithmis Neperi sufficiant tam ad eorum constructionem, quam ad eorum usum. Facilitatem autem summam habent ut construantur, & in multis operationibus trigonometricis compendiosius rem quæsitam exhibent unica ut plurimum additione.

PROPOSITIO XLVI.

Problema.

Usus nonnulli logarithmorum in Arithmeticis.

Cum regulæ præcipuæ quæ in arithmetica traduntur, in regula proportionum sitæ sint, & hæc nullo negotio per logarithmos absolvatur, in logarithmis totius Arithmeticæ compendium habemus. Absolvitur autem (*ut dixi supra*) regula proportionum si datis tribus numeris logarithmos secundi, & tertii addamus, & ex summa auferamus logarithmum primi. Alios etiam usus supra tradidimus. Restat tantum unus, aut alter quem omittere nolui. Dabo etiam postea usum logarithmorum in geometricis.

Propositis quotcumque continuè proportionalibus Geometricè, inter datos quemlibet ejusdem seriei invenire.

Primò quidem si proponatur aliquis numerus qui dicatur obtinere certam sedem in continua serie proportionalium, incipientium ab unitate, facilè hunc primum invenies, dividendo ejus logarithmum per numerum intervallorum usque ad unitatem habebis logarithmum primi numeri ab unitate, ut si dicatur numerus 64 obtinere sextam sedem ab unitate, quæritur ejus radix, seu primus numerus in tali serie. Logarithmum numeri 64, dividè in 6, & habebis logarithmum binarii qui est primus numerus post unitatem & ratione dupla 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

Demonstratio clara est. Cum enim hi 7 numeri sint continuè proportionales, eorum logarithmi æquali excessu se superabunt, & cum logarithmus unitatis sit 0 (de logarithmis enim communibus quæstio est) si dividas logarithmum ultimi per numerum intervallorum, habebis logarithmum binarii. Ita logarithmum quadrati qui in serie continuè proportionalium ab unitate incipientium secundus est ab ea, bifariam dividimus ut logarithmum radicis habeamus. Logarithmum cubi in tres partes dividimus, quadratoquadrati in quatuor partes &c. ut radicem ipsam habeamus.

Secundò. Proponantur duo numeri 729. 15625, inter quos dicantur esse quinque medii proportionales, minoris logarithmus à majoris logarithmo subtrahatur, ut eorum differentia habeatur, quæ dividi debet in 6, nempe per numerum intervallorum, ut habeatur differentia inter unius logarithmum sequentem, hæc ultima differentia multiplicetur per sedem numeri quæsiti, ut si quæras tertium horum intermediorum, & addatur logarithmo numeri 729. exurget logarithmus tertii intermedii. Res per se patet. Hinc solvitur Problema Deliacum, non tamen Geometricè, eò quòd constitutio logarithmorum Geometrica non sit, sed consistat in extractionibus radicum quæ per attentationem absolvuntur.

COROLLARIUM.

Hæc propositio potest habere locum in exemplo mercatorio. Nempe in Anatocismo ut vocant. Supponamus fœnus mercatorium esse 6 in singula centenaria, ita tamen ut fœnus sorti accedat pro ratione temporis decursi; sitque initio data sors 123, & cupio scire quantum sorti accedat in fine singulorum annorum. Sumantur logarithmi numerorum principalium 100 & 106, sitque eorum differentia quasi annua, quæ in partes 12 divisa, dabit differentiam menstruam. Quæratur quantum accedere debeat sorti 123 in fine annorum 7, mensium quinque.

Multiplicetur differentia annua per 7 & menstrua per 5. fiatque summa quæ logarithmo sortis 123. addatur exurgetque logarithmus justi pretii, ita invenies 123 nummos in fine annorum 7, mensium 5, & dierum 9, exigere nummos 189. $\frac{7649}{10000}$.

Ratio est quod in tali praxi constituuntur tot continue proportionalia in ea ratione quæ est 100 ad 106, quot sunt anni, multiplicatione differentiæ logarithmorum, idem præstatur circa menſem, in ea ratione quæ eſt ſortis ad lucrum menſtruum.

Converſa præcedentis praxis facilè habebitur. nempe nummorum.

Data ſorte, & quotlibet annorum lucro, Rationem ſortis ad lucrum annuum exhibere.

Hic caſus propriè loquendo in inventione mediorum proportionalium conſiſtit. Sit ergo data ſors 1234, & decennii ſpatio lucrum ſorti additum fuerit 766. Quæritur quæ ſit ratio ſortis ad lucrum annuum.

Fiat ſumma ſortis & lucri 2000, ſumatur differentia logarithmorum ſortis 1234, & ſummæ 2000, hujus differentiæ pars decima addita logarithmo numeri 100, dabit logarithmum ſortis auctæ fœnore, invenieſque 104 $\frac{9473517}{10000000}$.

Demonſtratio. Addita parte decima differentiæ logarithmorum, logarithmo ſortis invenis primum medium proportionalem è novem continuis proportionalibus, qui ſunt inter ſortem & ſummam ex ſorte & lucro decennali, & quia ut hæc ſors ad ſummam ſortis & lucri annui, ita vis facere 100 ad idem 100, cum ſuo lucro annuo & quatuor proportionalium logarithmi ſunt æque differentes: ergo ſi hanc decimam partem differentiæ addas logarithmo centenarii, habebis hunc quartum numerum proportionalem qui quæritur.

Invenire pretium quo redimi debet annua penſi in 10 annos, ante tempus conſtitutum.

Supponitur annua penſio 57 nummorum, quæ annuatim pendi debet in 10 annos. Quæritur pretium quo redimatur, facta æſtimatione ſecundùm uſuram quæ ſingulis annis addit 6 centeſimas.

Primò quæratur ſumma quæ annuatim reddat nummos 57 facta regula trium ſi 6 dant 100, quid dabunt 57, nempe exceſſum logarithmi numeri 100. Supra logarithmum numeri 6. adde logarithmo numeri 57, invenieſque 950 pro ſorte quæ annuatim efficit uſuram 57, ſed prima ſolutio fieri debet tantum ad finem quinquennii.

Secundò exceſſum logarithmi 106, ſupra logarithmum 100, multiplica per 10 annos & adde logarithmo ſortis inventæ 950, habebiſque logarithmum ſortis auctæ ad finem decennii, quæ erit 1701 $\frac{30551}{100000}$, è qua ſi auferas ſortem prius inventam, reſtabit 751.

Sed cum ſolutio fieri non debeat niſi poſt exactum quinquennium, ſumma expectanda eſſet poſt annos 14. Quæritur ergo quantum imminui debeat. Ex logarithmo ſummæ 751 aufer differentiam logarithmorum prius inventam, multiplicatam per 14, habebiſque logarithmum hujus numeri 332; debet igitur redimi hoc pretio.

Aliæ multæ quæſtiones Arithmeticæ fieri poſſunt quæ in hunc modum per logarithmos facilè ſolventur.

CANON

Sinuum, Tangentium & Secantium. Item Logarithmorum Sinuum, & Tangentium.

Sinus

Grad. 0. 89. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	0	0	100000.00	0	0	60	10000000	Infinit.	Infinit.	10.0000000	Infinit.
1	29.09	29.09	100000.00	6.4637261	6.4637261	59	99999.99	343774667.	343774682.	9.9999999	13.5362739
2	58.18	58.18	100000.02	6.7647561	6.7647562	58	99999.98	171887319.	171887348.	9.9999999	13.2352438
3	87.27	87.27	100000.04	6.9408473	6.9408470	57	99999.96	114591530.	114591574.	9.9999998	13.0591525
4	116.36	116.36	100000.07	7.0657860	7.0657863	56	99999 93	85943630.	85943689.	9.9999997	12.9342137
5	145.44	145.44	100900 11	7.1626960	7.1626964	55	99999.89	68754887.	68754960.	9 9999995	12.8373036
6	174.53	174.53	100000.16	7.2418771	7.2418778	54	99999.85	57295721.	57295809	9.9999993	12.7581221
7	203.62	203.62	100000.21	7.3088239	9.3088249	53	99999 79	49110600.	49110702.	9.9999991	12, 6911752
8	232.71	232.71	100000.27	7.3668157	7.3668169	52	99999 73	41971757.	41971873.	9.9999988	12.6331831
9	261.80	261.80	100000.34	7.4179681	7. 417969	51	99999.66	38197099.	38197230.	9.9999985	12.5820304
10	290.89	290.89	100000.42	7.4637255	8.4637273	50	99999.58	34377371.	34377516.	9.9999982	12.5362727
11	319.98	319.98	100000.51	7.5051181	7.5051203	49	99999.49	31252137.	31252297.	9.9999978	12.4948797
12	349.06	349.07	100000.61	7.5429065	7.5429091	48	99999.39	28647773.	28647948.	9.9999974	12.4570909
13	378.15	378.16	100000.72	7.5776684	7.5776715	47	99999.28	26444080.	26444269	9.9999969	12.4223285
14	407.24	407.25	100000.83	7.6098530	7.6098566	46	99999.17	24555198.	24555402.	9.9999964	12.3901434
15	436.33	436.33	100000.95	7.6398160	7.6398201	45	99999.05	22918166.	22918385.	9.9999959	12.3601799
16	465.42	465.42	100001.08	7.6678445	7.6678492	44	99998.92	21485762.	21485995.	9.9999953	12.3321508
17	494.51	494.51	100001.22	7.6941733	7.6941786	43	99998.78	20221875.	20222122.	9.9999947	12.3058214
18	523.60	523.60	100001.37	7.7189966	7.7190026	42	99998.63	19098419.	19098680.	9.9999940	12.2809974
19	552.68	552.69	100001.53	7.7424775	7.7424841	41	99998.47	18093220.	18093496.	9.9999934	12. 2575159
20	581.77	581.78	100901.70	7.7647537	7.7647610	40	99998.31	17188540.	17188831.	9.9999927	12.2352390
21	610.86	610.87	100001.87	7.7859427	7.7856508	39	99998.13	16370019	16370325.	9.9999919	12.2140492
22	639.95	639.96	100002.05	7.8061458	7.8061547	38	99997.95	15625908.	15626228.	9 9999911	12. 1938453
23	669.04	669.05	100002.24	7.8254507	7.8254604	37	99997.76	14946502.	14946837.	9.9999903	12. 1745396
24	698.13	698.14	100002.44	7.8439338	7.8439444	36	99997.56	14323712.	14324061.	9.9999994	12. 1560556
25	727.21	727.23	100002.65	7.8616623	7.8616738	35	99997.36	13750745	13751108.	9 9999885	12. 1383262
26	756.30	756.32	100002.86	7.8786953	7.8787077	34	99997 14	13221851.	13222229.	9 9999876	12.1212923
27	785.39	785.41	100003.08	7.8950854	7.8950988	33	99996.92	12732134.	12732526.	9 9999866	12.1049012
28	814.48	814.50	100003.31	7.9108793	7.9108938	32	99996.68	12277396	12277803.	9.9999856	12. 0891062
29	843.57	843.60	100003.55	7.9261190	7.9261344	31	99996.44	11854018	11854440.	9. 9999845	12.0738656
30	872.65	872.69	100003.80	7.9408419	7.9408584	30	99996.19	11458865.	11459301.	9. 9999835	12. 0591416
31	901.74	901.78	100004.06	7.9550819	7.9550996	29	99995.93	11089205 1	11089656.0	9 9999823	12.0449004
32	930.83	930.[illegible]	100004.33	7.9688698	7.9588886	28	99995.66	10742648 4	10743113. 8	9. 9999812	12. 0311114
33	959.92	959.96	100004.61	7.9822334	7.9822534	27	99995. 39	10417094.5	10417574. 5	9.9999800	12.0177466
34	989.00	989.05	100004.89	8.9951980	7.9952192	26	99995. 11	10110690.2	10111184.8	9. 9999788	12.0047808
35	1018.09	1018.14	100005.18	8.0077867	8.0078092	25	99994.82	9821794.3	9822303 3	9. 9999775.	11.9921908
36	1047.18	1047.24	100005.48	8.0200207	8.0200445	24	99994. 52	9548947.5	9549471.1	9. 9999762	11. 9799555
37	1076.27	1076.33	100005.79	8.0319195	8.0319446	23	99994.21	9290848.7	9291386.9	9.9999748	11. 9680554
38	1105.35	1105.42	100006.11	8 0435009	8.0435274	22	99993. 89	9046333.6	9046886.3	9. 9999735	11. 9564726
39	1134.44	1134.51	100006 44	8.0547814	8.0548094	21	99993.56	8814357.2	8814924 4	9. 9999721	11. 9451985
40	1163.53	1153.61	100006.77	8.0657763	8.0658057	20	99993.23	8593979 1	8594560 9	9.9999706	11. 9341943
41	1192.61	1192.70	100007.11	8.0764997	8.0765306	19	99992.89	8384350.7	8,84947.0	9. 9999691	11. 9234694
42	1221.70	1221.79	100007.46	8.0869646	8.0869970	18	99992.54	8184704. 1	8185315.0	9.9999676	11. 9130030
43	1250.79	1250.88	100007.82	8.0971832	8 0972172	17	99992.18	7994343.0	7994968 4	9.9999660	11. 9027828
44	1279.87	1279.98	100008.19	8.1071669	8.1072025	16	99991.81	7812634. 2	7813274.2	9.9999644	11. 8927975
45	1308.96	1309.07	100008.57	8.1169262	8.1169634	15	99991.43	7639000.9	7639655.4	9. 9999628	11. 8830366
46	1338.05	1338.17	100008.96	8.1264710	8.1265099	14	99991.04	7472916.5	7473585.6	9. 9999611	11. 8734901
47	1367.13	1367.26	100009.35	8.1358104	8.1358510	13	99990.65	7313899 1	7314582.7	9. 9999594	11. 8641490
48	1396.22	1396.35	100009.75	8.1449532	8.1449956	12	99990.25	7161507.0	7162205.2	9.9999577	11.8550044
49	1425.30	1425.45	100010.16	8.1539075	8.1539516	11	99989.84	7015334.6	7016047.4	9. 9999559	11. 8460484
50	1454.39	1454.54	100010.58	8.1626808	8.1627267	10	99989.42	6875008.7	6875736.0	9. 9999541	11. 8372733
51	1483.48	1483.64	100011.01	8.1712804	8.1713282	9	99988.99	6740185.5	6740927.2	9.9999522	11. 8286718
52	1512.56	1512.72	100011.45	8.1797129	8.1797626	8	99988.55	6610547.3	6611303.6	9. 9999503	11.8202374
53	1541.65	1541.83	100011.89	8.1879848	8.1880364	7	99988.11	6485800.8	6486571.6	9. 9999484	11. 8119636
54	1570.73	1570.93	100012.34	8.1961020	8.1961556	6	99987.66	6365674.1	6366459.5	9. 9999464	11. 8038444
55	1599.82	1600.02	100012.80	8.2040703	8.2041259	5	99987.20	6249915.4	6250715.3	9. 9999444	11. 7958741
56	1628.90	1629.12	100013.27	8.2118949	8.2119526	4	99986.73	6138290.9	6139105.0	9. 9999424	11.7880474
57	1657.99	1658.21	100013.75	8.2195811	8.2196408	3	99986.25	6030582.0	6031411.0	9 9999403	11. 7803592
58	1687.07	1687.31	100014.24	8.2271335	8.2271953	2	99985.76	5926587.2	5927430.8	9. 9999382	11. 7728047
59	1716.16	1716.41	100014.73	8.2345568	8.2346208	1	99985.27	5826117.4	5826975.5	9. 9999360	11. 7653792
60	1745.24	1745.51	100015.23	8.2418553	8.2410215	0	99984.77	5728996.2	5729868.9	9. 9999338	11. 7580785

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang
0	1745.24	1745.51	100015.23	8.2418553	8.2419215	60	99984.77	5728996.16	5729868.85	9.9999338	11.7580785
1	1774.32	1774.60	100015.74	8.2490332	8.2491015	59	99984.26	5635058.96	5635946.19	9.9999316	11.7508985
2	1803.41	1803.70	100016.26	8.2560943	8.2561649	58	99983.74	5544151.67	5545053.45	9.9999294	11.7438351
3	1832.49	1832.80	100016.76	8.2630424	8.2631153	57	99983.21	5456130.03	5457046.35	9.9999271	11.7368847
4	1861.58	1861.90	100017.33	8.2698810	8.2699563	56	99982.67	5370858.75	5371789.62	9.9999247	11.7300437
5	1890.66	1891.00	100017.88	8.2766136	8.2766912	55	99982.12	5288210 91	5289156.37	9.9999224	11.7233088
6	1919.74	1920.10	100018.43	8.2832434	8.2833234	54	99981.57	5208067.26	5209027.22	9.9999200	11.7166766
7	1948.83	1949.20	100018.99	8.2897734	8.2898559	53	99981.01	5130315.66	5131290.17	9.9999175	11.7101441
8	1977 91	1978.30	100019.56	8.2962067	8.2962917	52	99980.44	5054850.59	5055839.65	9.9999150	11.7037083
9	2006 99	2007.40	100020.14	8.3025460	8.3026335	51	99979.86	4981572.64	4982576.23	9.9999125	11.6973665
10	2036.08	2036.50	100020.73	8.3087941	8.3088842	50	99979.27	4910388.06	4911406.20	9.9999100	11.6911158
11	2065.16	2065.60	100021.33	8.3149536	8.3150462	49	99978.67	4841208.41	4842241.10	9.9999074	11.6849538
12	2094.24	2094.70	100021.94	8.3210269	8.3211221	48	99978.06	4773950.14	4774997.38	9.9999047	11.6788779
13	2123.32	2123 80	100022.55	8.3270163	8.3271143	47	99977.45	4708534.30	4709596.08	9.9999021	11.6728857
14	2152.41	2152.91	100023.17	8.3329243	8.3330249	46	99976.83	4644886.20	4645962.53	9.9998994	11.6669751
15	2181.49	2182.01	100023.80	8.3387529	8.3388563	45	99976.20	4582935.12	4584025.99	9.9998966	11.6611437
16	2210 57	2211.11	100024.44	8.3445043	8.3446105	44	99975.56	4522614.07	4523719.49	9.9998939	11.6553895
17	2239.65	2240.21	100025.09	8.3501805	8.3502895	43	99974.91	4463859.56	4464979.52	9.9998911	11.6497105
18	2268.73	2269.32	100025.75	8.3557835	8.3558953	42	99974.25	4406611.32	4407745.83	9.9998882	11.6441047
19	2297.81	2298.42	100026.41	8 3613150	8.3614297	41	99973.59	4350812.16	4351961.22	9.9998853	11.6385703
20	2326.90	2327.53	100027.08	8.3667769	8.3668945	40	99972.92	4296407.73	4297571.34	9.9998824	11.6331055
21	2355.98	2356.63	100027.76	8.3721710	8.3722915	39	99972.24	4243346.39	4244524.54	9.9998794	11.6277085
22	2385.06	2385.74	100028.45	8.3774988	8.3776223	38	99971.55	4191578.99	4192771.68	9.9998764	11.6223777
23	2414.14	2414.84	100029.15	8.3827620	8.3828886	37	99970.85	4141058.76	4142266.00	9.9998734	11.6171114
24	2443.22	2443.95	100029.86	8.3879622	8.3880918	36	99970.14	4091741.16	4092962.95	9.9998703	11.6119082
25	2472.30	2473.05	100030.58	8.3931008	8.3932336	35	99969.43	4043583.75	4044820.09	9.9998672	11.6067664
26	2501 38	2502.16	100031.30	8.3981793	8.3983152	34	99968.71	3996546.05	3997796.94	9 9998641	11.6016848
27	2530 46	2531.27	100032.03	8.4031990	8.4033381	33	99967.98	3950589.46	3951854.89	9.9998609	11.5966619
28	2559.54	2560.38	100032.77	8.4081614	8.4083037	32	99967.24	3905677.11	3906957.09	9.9998577	11.5916963
29	2588.62	2589.48	100033.52	8.4130676	8.4132132	31	99966.49	3861773.81	3863068.34	9.9998544	11.5867868
30	2617.69	2618.59	100034.28	8.4179190	8.4180679	30	99965.73	3818845.93	3820155.00	9.9998512	11. 5819321
31	2646.77	2647.70	100035.05	8.4227168	8 4228690	29	99964.96	3776861.30	3778184.92	9.9998478	11.5771310
32	2675.85	2676.81	100035.82	8.4274621	8.4276176	28	99964.19	3735789.17	3737127.34	9.9998445	11.5723824
33	2704.93	2705.92	100036.60	8.4321561	8.4323150	27	99963.41	3695600.11	3696952.82	9.9998411	11.5676850
34	2734.01	2735.03	100037.39	8 4367999	8.4369622	26	99952.62	3656265.92	3657633.18	9.9998376	11.5630378
35	2763.09	2764 14	100038.19	8.4413944	8.4415603	25	99961.82	3617759.62	3619141.43	9.9998342	11.5584397
36	2792.16	2793.25	100039.00	8.4459409	8.4461103	24	99961.01	3580055.33	3581451.68	9.9998306	11.5538897
37	2821.24	2822.36	100039.82	8.4504402	8.4506131	23	99960.19	3543128.25	3544539.15	9.9998271	11.5493869
38	2850.32	2851.48	100040.65	8 4548934	8.4550699	22	99959.36	3506954.58	3508380.03	9.9998235	11.5449301
39	2879.40	2880.59	100041.48	8.4593013	8.4594814	21	99958.53	3471511.50	3472951.50	9 9998199	11.5405186
40	2908.47	2909.70	100042.32	8.4636649	8.4638486	20	99957.69	3436777.09	3438231.63	9.9998162	11.5361514
41	2937.55	2938.82	100043.17	8.4679850	8.4681725	19	99956.84	3402730.29	3404199.39	9.9998125	11.5318275
42	2966.62	2967.93	100044.03	8.4722626	8.4724538	18	99955.98	33693,0.89	3370834.53	9.9998088	11.5275462
43	2995.70	2997.05	100044.90	8.4764984	8.4766933	17	99955.11	3336619.45	3338117.63	9.9998050	11.5233067
44	3024.78	3026.16	100045.78	8.4806932	8.4808920	16	99954.24	2304517.27	3306030.00	9.9998012	11.5191080
45	3053.85	3055.28	100046.67	8.4848479	8.4850505	15	99953.36	3273026.37	3274553.65	9.9997974	11.5149495
46	3082.93	3084.39	100047.56	8.4889632	8.4891696	14	99952.47	3242129.46	3243671.29	9.9997935	11. 5108304
47	3112.00	3113. 51	100048.46	8.4930398	8.4932502	13	99951.57	3211809.88	3213366.26	9.9997896	11.5067498
48	3141.08	3142.63	100049.37	8.4970784	8.4972928	12	99950.66	3182051.60	3183622.52	9.9997856	11.5027072
49	3170.15	3171.74	100050.29	8.5010798	8.5012982	11	99949.74	3152839.16	3154424.63	9.9997817	11.4987018
50	3199.22	3200.86	100051.22	8.5050447	8.5052671	10	99948.81	3124157.67	3125757.70	9.9997776	11.4947329
51	3228.30	3229.98	100052.15	8.5089736	8.5092001	9	99947.88	3095992.80	3097607.37	9.9997736	11.4907999
52	3257.37	3259.10	100253.09	8.5128673	8.5130978	8	99946.94	3068330.70	3069956.82	9.9997695	11.4869022
53	3286.44	3288.22	100054 05	8.5127264	8.5169610	7	99945.99	3041158.02	3042801.69	9.9997653	11.4830387
54	3315.52	3317.34	100055.01	8.5205514	8.5207902	6	99945.03	3014461.89	3016120.10	9.9997612	11.4792098
55	3344.59	3346.46	100055.98	8.5243430	8.5245860	5	99944.06	2988229.86	2989902.63	9.9997570	11.4754140
56	3373.66	3375.58	100056.96	8.5281017	8.5283490	4	99943.08	2962449.95	2964137.26	9.9997527	11.4716510
57	3402.73	3404.71	100057.95	8.5318281	8.5320797	3	99942.09	2937110.55	2938812.41	9.9997484	11.4679203
58	3431.81	3433.83	100058.94	8.5355228	8.5357787	2	99941.09	2912200.47	2913916.88	9.9997441	11.4642213
59	3460.88	3462.95	100059.94	8.5391863	8.5394466	1	99940.09	2887708.88	2889439.84	9.9997398	11.4605534
60	3489.95	3492.08	100060.95	8.5428192	8.5430838	0	99939.08	2863625.33	2865370.83	7.9997354	11.4569162

3489.95

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	3489.95	3492.08	100060.95	8.5428192	8.5430838	60	99939.08	2863625.33	2865370.83	9.9997354	11.4569162
1	3519.02	3521.20	100061.97	8.5464218	8.5466909	59	99938.06	2839939.69	2841699 74	9.9997309	13.4533091
2	3548.09	3550.33	100063.00	8.5499948	8.5502683	58	99937.03	2816642.18	2818416.78	9.9997265	11.4497317
3	3577.16	3579.45	100064.04	8.5535386	8.5538166	57	9993[illegible].99	2793723.33	2795512 48	9.9997220	11.4461834
4	3606.23	3608.58	100065.09	8.5670536	8.5573362	56	99934.95	2771173.99	2772977.69	9.9997174	11.4426638
5	3635.30	3637.71	100066.15	8.5605404	8.5608276	55	99953.90	2748985.28	2750803.53	9.9997128	11.4391724
6	3664.37	3666.83	100067.21	8.5639994	8.5642912	54	99932.84	2727148.61	2728981.41	9.9997082	11.4357088
7	3693.44	3695.96	100068.28	8.5674310	8.5677275	53	99931.77	2705655.68	2707503.03	9.9997036	11.4312725
8	3722.51	3725.09	100069.36	8.5708357	8.5711360	52	99930.60	2684498 43	2687360.33	9.9995989	11.4288632
9	3751.58	3754.22	100070.45	8.5742139	8.5745197	51	99929.69	2663669.04	2665545.49	9.9996942	11.4254803
10	3780.65	3783.35	100071.55	8.5775660	8.5778766	50	99928.51	2643159 96	2645050.96	9.9996894	11.4221234
11	3809.71	3812.48	100072.66	8.5808923	8.5812077	49	99927.40	2622963.84	2624859.39	9.9996846	11.4187923
12	3838.78	3841.61	100073.77	8.5841933	8.584[illegible]136	48	99926.[illegible]9	2603073.58	2604993.68	9.9996798	11.4154864
13	3867.85	3870.74	100074.89	8.5874694	8.5877945	47	99925.17	2583482.27	2585416.92	9.9996740	11.4122055
14	3896.91	3899.88	100076.02	8.5907209	8.5910809	46	99924.04	2564183.23	2566132.43	9.9996709	11.4089491
15	3925.98	3929.01	100077.16	8.5939483	8.5942832	45	999[illegible]2.90	2545169 96	2547133 71	9.9996650	11.4057168
16	3955.05	3958.14	100078.31	8.5971517	8.5974917	44	99921.75	2526436.15	3528414.45	9.9996601	11.4025083
17	3984.11	3987.28	100079.47	8.6003317	8.6006767	43	99920.60	2507975.68	2509968.53	9.9996550	11.3993233
18	4013.18	4016.41	100080.63	8.6934886	8.6038386	42	99919.44	2489781.62	2491790.02	9.9996500	11.3961614
19	4042.24	4045.55	100081.80	8.6056226	8.6069777	41	99918.27	2471851.19	2473873.14	9.9996449	11.3930223
20	4071.31	4074.69	100082.98	8.6097341	8.6100943	40	99917.09	2454175.78	2456212.28	9.9996398	11.3899057
21	4100.37	4103.83	100084.17	8.6128235	8.6131889	39	99915.90	2436750 95	2438802.00	9.9996346	11.3868111
22	4129.44	4132.96	100085.37	8.6158910	8.6162616	38	99914.70	2419571.40	2421637.00	9.9996294	11.3837384
23	4158.50	4162.10	100086.58	8.6189369	8.6193127	37	99913.49	2402631.99	2404711.14	9.9996242	11.3805873
24	4187.57	4191.24	100087.80	8.6219616	8.6223427	36	99912.28	2385927.72	2388022.42	9.9996189	11.3776573
25	4216.63	4220.38	100089.02	8.6249653	8.6253518	35	99911.06	2369453.72	2371562.97	9.9996136	11.3746482
26	4245.69	4239.52	100090.25	8.6279484	8.6283402	34	99909.83	2353205.25	2355329.05	9.9996082	11.3716598
27	4274.75	4278.66	100091.49	8.6309111	8.6313083	33	99908.59	2337177.72	2339316.07	9.9996028	11.3686917
28	4303.82	4307.81	100092.74	8.6338537	8.6342563	32	99907.34	2321365.65	2323519.55	9.9995974	11.3657437
29	4332.88	4336.65	100094.00	8.6367764	8.6371845	31	99906.08	2305767.6[illegible]	2307935.13	9.9995919	11.3628155
30	4361.94	4366.09	100095.27	8.6396796	8.6400931	30	99904.82	2290376 55	2292558.56	9.9995865	11.3599059
31	4391.00	4395.24	100096.55	8.6425634	8.6429825	29	99903.55	2275189.16	2277385.72	9.9995809	11.3570175
32	4420.06	4424.38	100097.83	8.6454282	8.6458528	28	99902.27	2260201 48	2262412.59	9.9995753	11.3541472
33	4449.12	4453.53	100090.12	8.5482742	8.6487044	27	99900.98	2245409.55	2247635.25	9.9995697	11.3512956
34	4478.18	4482.68	100100.42	8.6511016	8.6515375	26	99899.86	2230809.67	2233049.89	9.9995641	11.3484625
35	4507.24	4511.82	100101.73	8.6539107	8.6543522	25	99898.37	2216398.02	2218652.78	9.9995584	11.3456478
36	4536.30	4540.97	100103.05	8.6567017	8.6571490	24	9989[illegible].05	2202171.0[illegible]	2204440.32	9.9995527	11.3428510
37	4565.36	4570.12	100104.38	8.6594748	8.6599279	23	99895.73	2188125.10	2190408.97	9.9995469	11.3400721
38	4594.42	4599.27	100105.71	8.6622303	8.6626891	22	99894.40	2174256.87	2176555.29	9.9995411	11.3373109
39	4623.47	4628.42	100107.05	8.6649684	8.6654331	21	99893.06	2160562.96	2162875 93	9.9995353	11.3345669
40	4652.53	4657.57	100108.40	8.6676893	8.6681598	20	99891.71	2147040.10	2149367.63	9.9995297	11.3318402
41	4681.59	4686.73	100109.76	8.6703932	8.670869[illegible]	19	99890.35	2133685.11	2136027.19	9.9995236	11.3291305
42	4710.64	4715.88	100111.13	8.6730804	8.6735628	18	99888 98	2120494.88	2122851.51	9.9995176	11.3264372
43	4739.70	4745.03	100112.51	8.6757510	8.6762393	17	99887.61	2107466.37	2109837.55	9.9995116	11.3237607
44	4768.76	4774.19	100113.90	8.6784052	8.6785996	16	99886.28	2094596.63	2096982.36	9.9995056	11.3211004
45	4797.81	4803.34	100115.30	8.6810433	8.6815437	15	99884.84	2081882.76	2084283.05	9.9994996	11.3184565
46	4826.87	4832.50	100116.70	8.6836654	8.6841719	14	99883.44	2066321.96	2071736.70	9.9994935	11.3158281
47	4855.92	4861.66	100118 11	8.6862718	8.6867844	13	99882.03	2056911.47	2059340.86	9.9994874	11.3132156
48	4884.98	4890.82	100119.53	8.6888625	8.6893813	12	99880.61	2044648.61	2047092.55	9.9994812	11.3106187
49	4914.03	4919.97	100120.96	8.6914379	8.6919629	11	99879.18	2032530.75	2034989.25	9.9994750	11.3080371
50	4943.08	4949.13	100122.40	8.6939980	8.6945292	10	99877.75	2020555.35	2023028 40	9.9994688	11.3054708
51	4972.14	4978.29	100123.85	8.6965431	8.6970806	9	99876.31	2008719.89	2011207.50	9.9994625	11.3029194
52	5001.19	5007.46	100125.30	8.6990734	8.6996173	8	99874 86	1997021.95	1999524.11	9.9994562	11.3003828
53	5230.24	5036.62	100126.76	8.7015889	8.7021390	7	99873.40	1985459.12	1987975.84	9.9994498	11.2938610
54	5059.29	5065.78	100128.23	8.7040899	8.7046465	6	99871.93	1974029.10	1976560.36	9.9994435	11.2953535
55	5088.35	5094.95	100129.71	8.7065766	8.7071395	5	99870.45	1962729.59	2965275.41	9.9994370	11.2928605
56	5127.40	5124.11	100131.20	8.7090490	8.7096185	4	99868.97	1951558.37	1954118.74	9.9994306	11.2903815
57	5146.45	5153.28	100132.70	8.7115075	8.7120834	3	99867.25	1940513.27	1943088.20	9.9994241	11.2879166
58	5175.50	5182.44	100134.20	8.7139520	8.7145345	2	99865.98	1929592.17	1932181.65	9.9994176	11.2854655
59	5204.55	5211.61	100135.71	8.7163829	8.7169719	1	99864.47	1918792.98	1921397.01	9.9994110	11.2830281
60	5233.60	5240.78	100137.23	8.7188002	8.7193958	0	99862.95	1908113 67	1910732.26	9.9994044	11.2806042

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	5233.60	5240.78	100137.23	8.7188002	8.7193958	60	99862.95	1908113.67	190873. 26	9.9994044	11.2806042
1	5262.64	5269.75	100138.76	8.7212040	8.7218063	59	99861.41	1897552.26	1900185.40	9.9993978	11.2781937
2	5291.69	5299.12	100140.30	8.7235946	8.7242035	58	99859.89	1887106.80	1889754.50	9.9993911	11.2757965
3	5320.74	5328.29	100141.85	8.7259721	8.7265877	57	99858.35	1876775.39	1879437.65	9.9993844	11.2734123
4	5349.79	5357 49	100143.41	8.7283366	8.7289589	56	99856.80	1866556.18	1869232.99	9 9993776	11.2710411
5	5378.83	5386.63	100144.98	8.7306882	8.7313174	55	99854.24	1856447.34	1859138.71	9.9993708	11.2686826
6	5407.88	5415.81	100146.55	8.7330272	8.7336631	54	99853.67	1846447.09	1849153.01	9.9993640	11.2663369
7	5436.93	5444.98	100184.13	8.7353535	8.7359964	53	99852.09	1836553.70	1839274.17	9.9993572	11.2640035
8	5465.97	1474.16	100149.72	8.7376675	8.7383172	52	99850.50	1826765.44	1829500.48	9.9993503	11.2616828
9	5495.02	5503.33	100151.32	8.7399691	8.7406258	51	99848.91	1817080.67	1819830.26	9.9993433	11.2593742
10	5524.06	5532.91	100152.93	8.7422586	8.7419222	50	99847.31	1807497.74	1810261.88	9.9993364	11.2570778
11	5553.11	5561.69	100154.53	8.7445360	8.7452067	49	99845.70	1798015.05	1800793.75	9.9993293	11.5547933
12	5582.15	5590.87	100156.17	8.7468015	8.7474792	48	99844.08	1788631.04	1791424.29	9.9993223	11.2525208
13	5611. 19	5620.05	100157.80	8.7490553	8.7497400	47	99842.45	1779344.17	1782151.98	9.9993152	11.2502600
14	5640.24	5649.23	100159.44	8.7512973	8.7519892	46	99840.81	1770152.94	1772975.31	9.9993081	11.2480108
15	5669.28	5678.41	100161.09	8.7535278	8.7542269	45	99839.16	1761055.88	1763892.80	9.9993009	11.2457731
16	5698.32	5707.59	100162.75	8.7557469	8.7564531	44	99837.51	1752051.55	1754903.03	9.9992938	11.2435469
17	5727.36	5736.78	100164.42	8.7579546	8.7586681	43	99835.85	1743138.54	1746004.57	9.9992865	11.2413319
18	5756.40	5765.96	100166.10	8.7601512	8.7608719	42	95834.18	1734315.46	1737196.05	9.9992793	11.2391281
19	9785.44	1795.15	100167.78	8.7623366	8.7630647	41	95832.50	1725580.95	1728476.10	9.9992720	11.2369353
20	5814.48	5824.34	100169.47	8.7645111	8.7652465	40	99830.81	1716953.69	1719843.40	9.9992646	11.2347553
21	5843.52	5853.52	100171.17	8.7666747	8.7674175	39	99829.11	1708372.38	1711296.64	9 9992572	11.2325825
22	5872.56	5882.71	100172.88	8.7688275	8.7695777	38	99827.41	1699895.74	1702834.56	9.9992498	11.2304223
23	5901.60	5911.90	100174.60	8.7709697	8.7717274	37	99825.70	1691502.51	1694455.89	9.9992424	11.2282726
24	5930.64	5941.09	100176.33	8.7731014	8.7738665	36	99823.98	1683191.48	1686159 41	9.9992349	11.2261335
25	5959.67	5970.29	100178.07	8.7752226	8.7759952	35	99822.25	1674961.44	1677943.92	9.9992274	11.2240048
26	5988 71	5999.48	100179.81	8.7773334	8.7781136	34	99820.51	1666811.20	1669808.25	9 9992198	11.2218864
27	6017.75	6028.67	100181.56	8.7794340	8.7802218	33	99818.76	1658739.62	1661751.22	9.9992122	11.2197782
28	6046 78	6057.87	100183.32	8.7815244	8.7823199	32	99817.01	1650745.55	1653771.71	9.9992046	11.2176801
29	6075.82	6087.06	100185.79	8.7836048	8.7844079	31	99815.25	1642827.89	1645868.61	9.9991969	11.2155921
30	6104.85	6116.26	100186.87	8.7856753	8.7864861	30	99813.48	1634985.55	1638040.82	9.9991892	11.2135139
31	6133.89	6145.46	100188.66	8.7877359	8 7885544	29	99811.70	1627217.44	1630287.28	9.9991815	11.2114456
32	6162.92	6174.66	100190.46	8.7897867	8.7906130	28	99809.91	1619522.53	1622606.93	9.9991737	11.2093870
33	6191.96	6203.86	100192.26	8.7918278	8.7926620	27	99808.11	1611899.79	1614998.74	9.9991659	11.2073380
34	6220.99	6233.06	100194.07	8.7938594	8.7947014	26	99806.30	1604348.19	1607481.70	9.9991580	11.2052986
35	6250.02	6262.26	100195.89	8.7958814	8.7967313	25	99804.49	1596866.74	1599994.81	9.9991501	11.2032687
36	6279 05	6291.47	100197.72	8.7978941	8.7987519	24	99802.67	1589454.48	1592597.11	9.9991422	11.2012481
37	6308.08	6320.67	100199.56	8.7998974	8.8007632	23	99800.84	1582110 45	1585267.64	9.9991342	11.1992368
38	6337.11	6349.88	100201.41	8.8018915	8.8027653	22	99799.00	1574833.71	1578005.45	9.9991262	11.1972347
39	6366.14	6379.08	100203.26	8.8038764	8.8047583	21	99797.15	1567623.33	1570809.63	9.9991182	11.1952417
40	6395.17	6408.29	100205.12	8.8058523	8.8067422	20	99795.29	1560478.41	1563679.27	9.9991101	11.1932578
41	6424.20	6437.50	100206.99	8.8078192	8.8087172	19	99793.43	1553398.05	1556613.48	9.9991020	11.1912828
42	6453.23	6466.71	100208.87	8.8097772	8.8106834	18	99791.56	1546381.41	1549611.39	9 9990938	11.1893166
43	6482.26	6495.92	100210.76	8.8117264	8.8126407	17	99789.68	1539427.60	1542672.15	9.9990856	11.1873593
44	6511.29	6526.13	100212.66	8.8136668	8.8145894	16	99787.49	1532535.80	1535784.90	9.9990774	11.1854106
45	6540.31	6554.35	100214.57	8.8155985	8.8165294	15	99785.79	1525705.17	1528978.83	9.9990691	11.1834706
46	6569.34	6583.56	100216.49	8.8175217	8.8184608	14	99783.98	1518994.90	1522223.12	9.9990608	11. 1815392
47	6598.36	6612.78	100218.41	8.8194363	8.8203838	13	99782.06	1512224.20	1515526.98	9.9990525	11.1796162
48	6627.39	6641.99	100220.34	8.8213425	8.8222984	12	99780.14	1505572.27	1508889 61	9.9990441	11.1777016
49	6656.41	6671.21	100222.28	8.8232404	8.8242046	11	99778.21	1498978.36	1502310.26	9.9990357	11.1757954
50	6685.44	6700.43	100224.23	8.8251299	8.8261026	10	99776.27	1492441.70	1495788.16	9.9990273	11.1738974
51	6714.46	6729.65	100226.19	8.8270112	8.8279924	9	99774.32	1485961.55	1489322.58	9.9990188	11.1770076
52	6743.48	6758.87	100228.16	8.8288844	8.8298741	8	99772.36	1479537.18	1482912.77	9.9990103	11.1701259
53	6772.51	6788.09	100230.13	8.8307495	8.8317478	7	99770.39	1473167.87	1476558.02	9.9990017	11. 1682522
54	6801.53	6817.32	100232.11	8.8326066	8.8336134	6	99768 42	1466852.92	1470257.63	9.9989931	11. 1663866
55	6830.55	6846.54	100234.10	8.8344357	8.8354712	5	99766.44	1460591.63	1464010.90	9.9989845	11. 1645288
56	6859.57	6875.77	100236.10	8.8362969	8.8373211	4	99764.45	1454383.32	1457817.15	9.9989758	10.1626789
57	6888.59	6904.99	100238.11	8.8381304	8.8391633	3	99762.45	1448227.32	1451676.91	9.9989671	11. 1608367
58	6917.62	6934.22	100240 13	8.8399561	8.8409977	2	99760.44	1442122.97	1445585.92	9.9989584	11.1590023
59	6946.63	6963.45	100242.16	8.8417741	8.8428245	1	99758.42	1436069.61	1439547.13	9.9989496	11.1571755
60	6975.65	6992.68	100244.19	8.8435845	8.8446437	0	99756.40	1430066 63	1433558.70	9.9989408	11.1553563

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	6975.65	6992.68	100244.19	8.8435845	8.8446437	60	99756.40	1430066.63	1433558.70	9. 9989408	11. 1553563
1	7004.66	7021.91	100246.23	8.8453874	8.8464554	59	99754.37	1424113.37	1427620.01	9. 9989319	11. 1535446
2	7033.68	7080.83	100248.28	8.8471827	8.8482597	58	99752.33	1418209.24	1421730.45	9. 9989230	11. 1517403
3	7062.70	7051.15	100250.34	8.8489707	8.8500566	57	99750.28	1412353.63	1415889 39	9. 9989141	11. 1499434
4	7091.71	7109.61	100252.41	8.8507512	8.8518461	56	99748.22	1406545.93	1410096.25	9.9989052	11.1481539
5	7120.73	7138.85	100254 49	8.8525245	8.8536283	55	99746.15	1400785.56	1404350.45	9 9988962	11. 1463717
6	7149.74	7168.09	100256.58	8.8542905	8.8554034	54	99744.67	1395091.94	1398651 39	9.9988871	11. 1445966
7	7178.76	7197.33	100258.68	8.8560493	8.8571713	53	99741.99	1389404.51	1392998.52	9. 9988780	11. 1428287
8	7207.77	7226.57	100260.78	8.8578010	8.8589321	52	99739 90	1383782.70	1387391.28	9.9988689	11.1410679
9	7236.78	7255.81	100262.89	8.8595457	8.8606859	51	99737.80	1378205.98	1381829.12	9.9988598	11. 1393141
10	7265.80	7285.05	100265.01	8.8612833	8.8624327	50	99735.69	1372673 79	1376311.49	9.9988506	11. 1375673
11	7294.81	7314.30	100267.14	8.8630139	8.8641725	49	99733.57	1367185.60	1370837.87	9.9988414	11.1358275
12	7323.82	7343.54	100269.28	8.8647376	8.8659055	48	99731.44	1361740 89	1365407.71	9.9988321	11. 1340945
13	7352.83	7372.79	100271.43	8.8664545	8.8676317	47	99729.31	1356339.15	1360020.54	9. 9988228	11.1323683
14	7381.84	7402.03	100273.58	8.8681646	8.8693511	46	99727.17	1350979.86	1354675.82	9.9988135	11. 1306489
15	7410 85	7431.28	100275.74	8.8698680	8.8710638	45	99725.02	1345662.53	1349373.06	9. 9988041	11.1289362
16	7439.86	7460.53	100277.91	8.8715646	8.8727699	44	99722.86	1340386.67	1344111.76	9. 9987947	11. 127230
17	7468.87	7489.79	100280.09	8.8732546	8.8744694	43	99720.69	1335151.79	1338891.44	9. 9987853	11. 1255306
18	7497.87	7519.04	100282.28	8.8749381	8.8761623	42	99718.51	1329957.41	1333711.63	9.9987758	11.1238377
19	7526.88	7548.29	100284.48	8 8766150	8.8778487	41	99716.32	1324803 07	1328571.86	9.9987663	11. 1221513
20	7555.89	7577.55	100286.68	8.8782854	8.8795286	40	99714.13	1319688.30	1323471.65	9. 9987567	11. 1204714
21	7584.89	7606.80	100288.89	8.8799493	8.8812022	39	99711.93	1314612.66	1318410.57	9.9987471	11.1187978
22	7613.90	7636.06	100291.11	8.8816069	8.8828694	38	99709.72	1309575.68	1313388.16	9 9987375	11.1171306
23	7642.90	7665.32	100293.34	8.8832581	8.8845303	37	99707.50	1304576.93	1308403.98	9.9987278	11.1154697
24	7671.90	7694.58	100295.58	8.8849031	8.8861850	36	99705.17	1299615.98	1303457.60	9.9987181	11.1138150
25	7700.91	7723.84	100297.83	8.8865418	8.8878334	35	99703.03	1294692.40	1298548.58	9. 9987084	11.112 1666
26	7729.91	7753.11	100300.09	8.8881743	8.8894757	34	99700.79	1289805.77	293676.51	9. 9986986	11.1105243
27	7758.91	7782.37	100302.36	8.8898007	8.8911119	33	99698.54	1284955.66	1288840.97	9.998 [illegible]	11.1088881
28	7787.91	7811.64	100304.64	8.8914209	8.8927420	32	99696.28	1280141 6[illegible]	1284041.55	9.9986790	11.1072580
25	7816.91	7840.9[illegible]	100306.93	8.8930351	8.8943660	31	99694.02	1275363.41	1279277.86	9. 9986691	11.1053640
30	7845.91	78[illegible].17	100309.22	8.8946433	8.8959842	30	99691.73	1270620 4[illegible]	1274549.48	9.9986591	11. 1040158
31	7874.91	7899.44	100311.52	8.8962455	8.8975963	29	99689.44	1265912.46	1269856.04	9 9986492	11.1024037
32	7903.91	7928.71	100313.83	8.8978418	8.8992026	28	99687.15	1261239.00	1265197.15	9 9986392	11.1007974
33	7932.90	7957.98	100316.15	8.8994322	8.9008030	27	99684.85	1256599.71	1260572.42	9.9986292	11. 0991970
34	7961.90	7987.26	100318.48	8.9010168	8.9023977	26	99682.54	1251994.20	1255981.48	9. 9986191	11. 0976023
35	7990.90	8016.53	100320.81	8.9025955	8.9039866	25	99680.22	1247422.12	1251423.97	9. 9986090	11. 0960134
36	8019.89	8045.81	100323.15	8.9041685	8.9055697	24	99677.89	1242883.10	1246899.52	9.9985988	11.0944303
37	8048.89	8075.09	100325.50	8.9057358	8.9071472	23	99675.55	1238376.79	1242407.77	9. 9985886	11. 0928528
38	8077.88	8104.37	100327.86	8 9072975	8.9087190	22	99673.20	1233902.82	1237948 37	9.9985784	11. 0912810
39	8106.87	8133.65	100330.23	8.9088535	8.9102853	21	99670.85	1229460.85	1233520 97	9.9985682	11.0897147
40	8135.87	8162.93	100332.61	8.9104039	8.9118460	20	99668.49	1225050.55	1229125. 23	9.9985579	11. 0881540
41	8164.86	8193.21	100335.00	8.9119487	8.9134012	19	99666.12	1220671.56	1224760.82	9.9985475	11. 0865988
42	8193.85	8221.50	100337.40	8.9134881	8.9149509	18	99663.74	1216323.46	1220427.39	9.9985372	11. 0850491
43	8222.84	8250.78	100339.80	°.9150219	8.9164952	17	99661.35	1212006.22	1216124. 62	9.9985268	11. 0835048
44	8251.83	8280.07	100342.21	8.9165504	8.9180340	16	99658.95	1207719.22	1211852.18	9.9985163	11.0819660
45	8280.82	8309.36	100344.63	8.9180734	8.9195675	15	99656.55	1203462.23	1207609.76	9 9985058	11.0804325
46	8309.81	8338.65	100347.06	8.9195911	8.9210957	14	99654. 14	1199234.95	1203397.05	9.9984953	11.0789043
47	8338.80	8367.94	100349.50	8.9211034	8.9226186	13	99651.72	1195037.05	1199213 73	9.9984848	11.0773814
48	8367.78	8397.23	300351.95	8.9226105	8.9241363	12	99649.29	1190868.24	1195059. 48	9.9984742	11. 0758637
49	8396.77	8426.53	100354.42	8.9241123	8.9256487	11	99646.85	1186728.21	1190934.02	9.9984636	11. 0743513
50	8425.76	8455.83	100356.87	8.9256089	8.9271560	10	99644.40	1182616.67	1186837. 05	9.9984529	11.0728440
51	8454.74	8485.12	100359.34	8.9271003	8.9286581	9	99641.94	1178533.31	1182768. 27	9.9984422	11. 0713419
52	8483.73	8514.42	100361.82	8.9285866	8.9301552	8	99639.48	1174477.86	1178727.39	9. 9984315	11.0698448
53	8512.71	8543.72	100364.31	8.9300678	8.9316471	7	99637.01	1170450.03	1174714. 12	9.9984207	11.0683529
54	8541.69	8573.02	100366.81	8.9315439	8.9331340	6	99634.53	1166449.53	1170728. 19	9.9984099	11.0668660
55	8570.67	8601.33	100369.32	8.9330150	8.9346160	5	99632.04	1162467.08	1166769. 32	9.9983990	11.0653840
56	8599.66	8631.63	100371.84	8.9344811	8.9360929	4	99629.54	1158529.42	1162837.23	9.9983881	11.0639071
57	8628.64	8660.94	100374.36	8.9359422	8.9375650	3	99627.03	1154609 27	1158931.65	9.9983772	11.0624350
58	8657.62	8690.25	100376.89	8.9373983	8.9390321	2	99624.52	1150715.36	1155052. 31	9.9983663	11.0609679
59	8686.60	8719.56	100379.43	8.9288496	8.9404944	1	99622.00	1146847.43	1151198.96	9.9983553	11.0595056
60	8715.57	8748.87	100381.98	8.9402960	8.9419518	0	99619.47	1143005.23	1147371.42	9.9983442	11.0580482

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	8715.57	8748.87	100381.98	8.9402960	8.9419518	60	99619.47	1143005.23	1147371.32	9.9983442	11.0580482
1	8744.55	8778.18	100384.54	8.9417376	8.9434044	59	99616.93	1139188.49	1143569.16	9.9983332	11.0565956
2	8771.53	8807.49	100387.11	8.9431743	8.9448523	58	99614.38	1135396.96	1139792.20	9.9983220	11.0551477
3	8802.51	8836.81	100389.69	8.9446063	8.9462954	57	99611.82	1131630.40	1136040.21	9.9983109	11.0537046
4	8831.48	8866.12	100392.28	8.9460335	8.9477338	56	99609.26	1127888.55	1132312.93	9.9982997	11.0522662
5	8860.46	8895.42	100394.97	8.9474561	8.9491676	55	99606.69	1124171.17	1128610.13	9.9982885	11.0508324
6	8889.43	8924.76	100397.47	8.9488739	8.9505967	54	99604.11	1120478.03	1124931.56	9.9982772	11.0494033
7	8918.40	8954.08	100400.08	8.9502871	8.9520211	53	99601.52	1116808.88	1121276.99	9.9982660	11.0479789
8	8947.38	8983.41	100402.70	8.9516957	8.9534410	52	99598.92	1113163.50	1117646.17	9.9982546	11.0465590
9	8976.35	9012.73	100405.33	8.9530996	8.9548484	51	99596.31	1109541.64	1114038.90	9.9982433	11.0451436
10	9005.32	9042.06	100407.97	8.9544991	8.9562672	50	99593.69	1105943.10	1110454.92	9.9982318	11.0437328
11	9034.29	9071.38	100410.61	8.9558940	8.9576735	49	99591.07	1102367.63	1106894.03	9.9982204	11.0423265
12	9063.26	9100.71	100413.26	8.9572845	8.9590754	48	99588.44	1098815.01	1103355.99	9.9982089	11.0409246
13	9092.23	9130.04	100415.92	8.9586703	8.9604728	47	99585.80	1095285.04	1099840.59	9.9981974	11.0395272
14	9121.19	9159.38	100418.59	8.9600517	8.9618659	46	99583.15	1091777.49	1096347.61	9.9981859	11.0381341
15	9150.16	9188.71	100421.27	8.9614288	8.9632545	45	99580.49	1088292.14	1092876.84	9.9981743	11.0367455
16	9179.13	9218.04	100423.96	8.9628014	8.9646386	44	99577.82	1084828.80	1089428.07	9.9981629	11.0353612
17	9208.09	9247.38	100426.66	8.9641697	8.9866188	43	99575.15	1081387.24	1086001.39	9.9981510	11.0339812
18	9237.06	9276.72	100429.37	8.9655337	8.9673944	42	99572.47	1077967.27	1082595.29	9.9981393	11.0326056
19	9266.02	9306.06	100432.08	8.9668934	8.9687658	41	99569.78	1074568.68	1079211.68	9.9981275	11.0312342
20	9294.99	9335.40	100434.80	8.9682487	8.9701330	40	99567.08	1071191.26	1075848.84	9.9981158	11.0298670
21	9323.95	9364.74	100437.53	8.9695999	8.9714959	39	99564.37	1067834.84	1072506.99	9.9981040	11.0285041
22	9352.91	9394.09	100440.27	8.9709468	8.9728547	38	99561.65	1064499.19	1069185.92	9.9980921	11.0271453
23	9381.87	9423.44	100443.02	8.9722895	8.9742092	37	99558.92	1061184.14	1065885.45	9.9980802	11.0257908
24	9410.83	9452.78	100445.78	8.9736280	8.9755597	36	99556.19	1057889.50	1022605.38	9.9980683	11.0244403
25	9439.79	9482.13	100448.55	8.9749624	8.9769060	35	99553.45	1054615.07	1059345.53	9.9980563	11.0230940
26	9468.75	9511.48	100451.33	8.9762926	8.9782483	34	99550.70	1051360.57	1056105.70	9.9980443	11.0217517
27	9497.71	9540.84	100454.11	8.9776188	8.9795865	33	99547.94	1048126.11	1052885.72	9.9980323	11.0204135
28	9526.66	9570.19	100456.90	8.9789408	8.9809206	32	99545.17	1044911.22	1049685.41	9.9980202	11.0190794
29	9555.62	9599.55	100459.70	8.9802589	8.9822507	31	99542.40	1041715.81	1046504.58	9.9980081	11.0177493
30	9584.58	9628.90	100462.51	8.9815729	8.9835769	30	99539.62	1038539.71	1043343.05	9.9979960	11.0164231
31	9613.53	9658.26	100465.33	8.9828829	8.9848991	29	99536.83	1035382.74	1040200.66	9.9979838	11.0151009
32	9642.48	9687.63	100468.16	8.9841889	8.9862173	28	99534.03	1032244.73	1037077.23	9.9979716	11.0137827
33	9671.44	9716.99	100470.99	8.9854910	8.9875317	27	99531.22	1029125.51	1033972.59	9.9979593	11.0124683
34	9700.39	9746.35	100473.83	8.9867891	8.9888421	26	99528.40	1026024.90	1330886.56	9.9979470	11.0111579
35	9729.34	9775.72	100476.68	8.9880834	8.9501487	25	99525.57	1022942.76	1027818.99	9.9979347	11.0098513
36	9758.29	9805.09	100479.54	8.9893737	8.9914514	24	99522.74	1019878.90	1024769.71	9.9979223	11.0085486
37	9787.24	9834.46	100482.41	8.9906602	8.9927503	23	99519.90	1016833.16	1021738.55	9.9979099	11.0072497
38	9816.19	9863.83	100485.29	8.9919429	8.9940454	22	99517.05	1013805.39	1018725.36	9.9978975	11.0059546
39	9845.14	9893.20	100488.18	8.9932217	8.9953367	21	99514.19	1010795.42	1015729.98	9.9978850	11.0046633
40	9874.08	9922.57	100491.08	8.9944968	8.9966243	20	99511.32	1007803.11	1012752.24	9.9978725	11.0033757
41	9903.03	9951.95	100493.99	8.9957681	8.9979081	19	99508.44	1004828.28	1009792.00	9.9978599	11.0020918
42	9931.97	9981.33	100496.90	8.9970356	8.9991883	18	99505.55	1001870.80	1006849.09	9.9978473	11.0008117
43	9920.92	10010.71	100499.82	8.9982994	9.0004647	17	99502.66	998930.50	1003923.38	9.9978347	10.9995353
44	9989.86	10040.09	100502.65	8.9995595	9.0017375	16	99499.76	996007.24	1001014.70	9.9978220	10.9982625
45	10018.81	10069.47	100505.69	9.0008160	9.0030066	15	99496.85	993100.88	998122.91	9.9978093	10.9969934
46	10047.75	10098.85	200508.64	9.0020687	9.0042721	14	99493.93	990211.25	995247.87	9.9977966	10.9957279
47	10076.69	10128.24	100511.60	9.0033179	9.0055340	13	99491.00	987338.23	992389.43	9.9977838	10.9944660
48	10108.63	10157.63	100514.57	9.0045634	9.0067924	12	99488.06	984481.66	989547.44	9.9977710	10.9932076
49	10143.57	10187.02	100517.54	9.0058053	9.0080471	11	99485.12	981641.40	986721.76	9.9975582	10.9919529
50	10163.51	10216.41	100520.52	9.0070436	9.0092984	10	99482.17	978817.32	983912.27	9.9977493	10.9907016
51	10192.45	10245.80	100523.51	9.0082784	9.0105461	9	99479.21	976009.27	981118.80	9.9977323	10.9894539
52	10221.38	10275.20	100526.51	9.0095096	9.0117903	8	99476.24	973217.13	978341.24	9.9977194	10.9882097
53	10250.32	10304.60	100529.52	9.0107374	9.0130310	7	99473.26	970440.75	975579.44	9.9977074	10.9869690
54	10279.25	10334.00	100532.54	9.0119616	9.0142682	6	99470.27	967680.00	972833.27	9.9976933	10.9857318
55	10308.19	10363.40	100535.57	9.0131823	9.0155021	5	99467.28	964534.75	970101.60	9.9976803	10.9844979
56	10337.12	10392.80	100538.60	9.0143996	9.0107025	4	99464.28	962204.86	967387.30	9.9976672	10.9832675
57	10366.05	10422.20	100541.64	9.0156135	9.0179594	3	99461.27	959490.22	964687.24	9.9976540	10.9820406
58	10394.99	10451.60	100544.69	9.0168239	9.0191831	2	99458.25	956790.68	962002.29	9.9976408	10.9808169
59	10423.92	10481.01	100547.75	9.0180309	9.0204033	1	99455.22	954106.13	959332.33	9.9976276	10.9795967
60	10452.85	10510.24	100550.42	9.0192346	9.0216202	0	99452.18	951436.45	956677.22	9.9976143	10.9783798

Grad. 6. | 83. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	10452.83	10510.42	100550.82	9.0192346	9.0216202	60	99452.18	951436.45	956677.25	9.9976143	10.9783798
1	10481.78	10539.83	100553.90	9.0204348	9.0228338	59	99449.14	948781.49	954036.86	9.9976011	10.9771662
2	10510.70	10569.24	100556.99	9.0216318	9.0240441	58	99446.09	946141.16	951411.10	9.9975877	10.9759559
3	10539.63	10598.66	100560.09	9.0228254	9.0252510	57	99443.03	943515.31	948799.84	9.9975743	10.9747490
4	10568.56	10628.08	100563.20	9.0240157	9.0264548	56	99439.96	940903.84	946202.96	9.9975609	10.9735452
5	10597.48	10657.50	100566.31	9.0252027	9.0276552	55	99436.88	938306.63	943620.33	9.9975475	10.9723448
6	10626.41	10686.92	100569.43	9.0263865	9.0288524	54	99433.79	935723.55	941051.84	9.9975340	10.9711476
7	10655.33	10716.34	100572.56	9.0275669	9.0300464	53	99430.69	933154.50	938497.38	9.9975205	10.9699531
8	10684.25	10745.76	100575.70	9.0287442	9.0312373	52	99427.59	930599.36	935956.82	9.9975069	10.9687628
9	10713.18	10775.19	100578.85	9.0299182	9.0324249	51	99424.48	928058.02	933430.06	9.9974933	10.9675751
10	10742.10	10804.62	100582.01	9.0310890	9.0336093	50	99421.36	925530.35	930916.99	9.9974797	10.9663907
11	10771.02	10834.05	100585.18	9.0322567	9.0347906	49	99418.23	923016.27	928417.49	9.9974660	10.9652094
12	10799.94	10863.48	100588.35	9.0334212	9.0359688	48	99415.09	920515.64	925931.45	9.9974523	10.9640312
13	10828.85	10892.91	100591.53	9.0345825	9.0371439	47	99411.94	918028.38	923458.77	9.9974386	10.9628561
14	10857.77	10922.34	100594.72	9.0357407	9.0383159	46	99408.79	915554.36	920999.34	9.9974248	10.9616841
15	10886.69	10951.78	100597.92	9.0368958	9.0394848	45	99405.63	913093.48	918553.05	9.9974110	10.9605152
16	10915.60	10981.22	100601.13	9.0380477	9.0406506	44	99402.46	910645.64	916119.80	9.9973971	10.9593494
17	10944.52	11010.66	100604.35	9.0391926	9.0418134	43	99399.28	908210.74	913699.49	9.9973833	10.9581866
18	10973.43	11040.10	100607.58	9.0403424	9.0429731	42	99396.09	905788.67	911292.00	9.9973693	10.9570269
19	11002.34	11069.54	100610.81	9.0414852	9.0441299	41	99392.89	903379.33	908897.25	9.9973554	10.9558701
20	11031.26	11098.99	100614.05	9.0426249	9.0452836	40	99389.69	900982.61	906515.12	9.9973414	10.9547164
21	11060.17	11128.44	100617.30	9.0437617	9.0494343	39	99386.48	898598.43	904145.53	9.9973273	10.9535657
22	11089.08	11157.89	100620.56	9.0448954	9.0475821	38	99383.26	896226.68	901788.37	9.9973132	10.9524179
23	11117.99	11187.34	100623.83	9.0460261	9.0487270	37	99380.03	893867.26	899443.54	9.9972991	10.9512730
24	11146.89	11216.79	100627.11	9.0471538	9.0498689	36	99376.79	891520.08	897110.95	9.9972850	10.9501311
25	11175.80	11246.25	100630.40	9.0482786	9.0510078	35	99373. 4	889185.05	894790.51	9.9972708	10.9489922
26	11204.71	11275.71	100633.70	9.0494005	9.0521439	34	99370.28	886862.06	892482.11	9.9972566	10.9478561
27	11233.61	11305.17	100637.01	9.0505194	9.0532771	33	99367.02	884551.0	890185.6	9.9972423	10.9467229
28	11262.52	11334.63	100640.32	9.0516354	9.0544074	32	99363.75	882251.86	887901.09	9.9972280	10.9455926
29	11291.42	11364.09	100643.64	9.0527485	9.0555349	31	99360.47	879964.46	885628.28	9.9972137	10.9444651
30	11320.32	11393.56	100642.97	9.0538588	9.0566595	30	99357.18	877688.74	883367.15	9.9971993	10.9433405
31	11349.22	11423.03	100650.31	9.0549661	9.0577813	29	99353.88	875424.61	881117.61	9.9971849	10.9422187
32	11378.12	11452.50	100653.66	9.0560706	9.0589002	28	99350.58	873171.98	878879.57	9.9971704	10.9410998
33	11407.02	11481.97	100657.02	9.0571723	9.0600164	27	99347.27	870930.77	876652.95	9.9971559	10.9399836
34	11435.92	11511.44	100660.39	9.0582711	9.0611297	26	99343.95	868700.88	874437.66	9.9971414	10.9388703
35	11464.82	11540.91	100663.77	9.0593672	9.0622403	25	99340.62	866482.23	872233.61	9.9971268	10.9377597
36	11493.71	11570.39	100667.15	9.0604604	9.0633482	24	99337.28	864274.75	870040.71	9.9971122	10.9366518
37	11522.61	11599.87	100670.54	9.0615509	9.0644533	23	99333.93	862078.33	867858.89	9.9970976	10.9355467
38	11551.51	11629.35	100673.94	9.0616386	9.0655556	22	99330.57	859892.90	865688.05	9.9970829	10.9344444
39	11580.40	11658.83	100677.35	9.0637235	9.0666553	21	99327.20	857718.38	863528.12	9.9970682	10.9333447
40	11609.29	11688.31	100680.77	9.0648057	9.0677522	20	99323.83	855554.68	861379.01	9.9970535	10.9322478
41	11638.18	11717.80	100684.20	9.0658852	9.0688465	19	99320.45	853401.74	859240.65	9.9970387	10.9311531
42	11667.07	11747.29	100687.64	9.0669619	9.0699381	18	99317.06	851259.43	857112.95	9.9970239	10.9300619
43	11695.96	11776.78	100691.08	9.0680360	9.0710270	17	99313.66	849127.72	854995.84	9.9970090	10.9289-30
44	11724.85	11806.28	100694.53	9.0691074	9.0721133	16	99310.25	847006.51	852889.23	9.9969941	10.9278867
45	11753.74	11835.78	100697.99	9.0701761	9.0731969	15	99306.84	844895.73	850793.04	9.9969792	10.9268031
46	11782.63	11865.28	100701.46	9.0712421	9.0742779	14	99303.42	842795.31	848707.21	9.9969642	10.9257121
47	11811.51	11894.78	100704.94	9.0723055	9.0753563	13	99299.99	840705.15	846631.65	9.9969492	10.9246437
48	11840.40	11924.28	100708.43	9.0733663	9.0764321	12	99296.55	838625.19	844566.29	9.9969342	10.9235679
49	11869.28	11953.78	100711.93	9.0744244	9.0775053	11	99293.10	836555.36	842511.05	9.9969191	10.9224947
50	11898.16	11983.28	100715.44	9.0754799	9.0785760	10	99289.64	834495.57	840465.86	9.9969040	10.9214240
51	11927.04	12012.79	100718.96	9.0765329	9.0796441	9	99286.17	832445.77	838430.65	9.9968888	10.9203559
52	11955.93	12042.30	100722.48	9.0775832	9.0807096	8	99282.70	830405.86	836405.34	9.9968736	10.9192904
53	11984.81	12071.81	100726.01	9.0786310	9.0817726	7	99279.22	828375.79	834389.86	9.9968584	10.9182274
54	12013.68	12101.32	100729.55	9.0796762	9.0828331	6	99275.73	826355.47	832384.15	9.9968431	10.9171669
55	12042.56	12130.84	100733.10	9.0807189	9.0838911	5	99272.23	824344.85	830388.12	9.9968278	10.9161089
56	12071.44	12160.36	100736.66	9.0817590	9.0849466	4	99268.72	822343.84	828401.71	9.9968125	10.9150534
57	12100.31	12189.88	100740.23	9.0827966	9.0859996	3	99265.21	820352.39	826424.85	9.9967971	10.9140004
58	12129.19	12219.40	100743.81	9.0838317	9.0870501	2	99261.69	818370.41	824457.48	9.9967817	10.9129499
59	12158.06	12248.93	100747.40	9.0848643	9.0880981	1	99258.16	816397.86	822499.52	9.9967662	10.9119019
60	12186.93	12278.46	100750.99	9.0858945	9.0891438	0	99254.62	814434.64	820550.90	9.9967507	10.9108562

Grad. 7. — 82. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	12186.03	12276.46	100750.99	9.0858945	9.0891438	60	99254.62	814434.64	820550.90	9.9967507	10.9108562
1	12215.81	12307.99	100754.59	9.0869221	9.0901869	59	99251.07	812480.71	818911.57	9.9967352	10.9098131
2	12244.68	12337.52	100758.20	9.0879473	9.0912277	58	99247.51	810535.99	816681.45	9.9967196	10.9087723
3	12273.55	12367.05	100761.82	9.0889700	9.0922660	57	99243.94	808600.42	814760.48	9.9967040	10.9077340
4	12302.41	12396.58	100765.45	9.0899903	9.0933020	56	99240.36	806673.94	812848.60	9.9966884	10.9066980
5	12331.26	12426.12	100769.09	9.0910082	9.0943355	55	99236.78	804756.47	810945.73	9.9966723	10.9056645
6	12360.15	12455.66	100772.74	9.0920237	9.0953669	54	99233.19	802847.96	809051.82	9.9966570	10.9046333
7	12389.01	12485.20	100776.39	9.0930367	9.0963955	53	99229.59	800948.35	807166.81	9.9966412	10.9036045
8	12417.88	12514.74	100780.05	9.0940474	9.0974219	52	99225.98	799057.56	805290.62	9.9966254	10.9025781
9	12446.74	12544.29	100783.73	9.0950556	9.0984460	51	99222.36	797175.55	803423.21	9.9966096	10.9015540
10	12475.60	12573.84	100787.40	9.0960615	9.0994678	50	99218.74	795302.24	801564.50	9.9965937	10.9005322
11	12504.46	12603.39	100791.09	9.0970651	9.1004872	49	99215.11	793437.58	799714.45	9.9965778	10.8995128
12	12533.32	12632.94	100794.79	9.0980661	9.1015044	48	99211.47	791581.51	797872.98	9.9965616	10.8984956
13	12562.18	12662.49	100798.50	9.0990651	9.1025192	47	99207.82	789733.96	796040.03	9.9965459	10.8974808
14	12591.04	12692.05	100802.22	9.1000616	9.1035317	46	99204.26	787894.89	794215.56	9.9965299	10.8964683
15	12619.90	12721.61	100805.95	9.1010558	9.1045420	45	99200.49	786064.23	792399.50	9.9965138	10.8954580
16	12648.75	12751.17	100809.69	9.1020477	9.1055500	44	99196.81	784241.91	790591.79	9.9964977	10.8944500
17	12677.61	12780.73	100813.43	9.1030373	9.1065557	43	99193.13	782427.90	788792.38	9.9963816	10.8934423
18	12706.46	12810.29	100817.18	9.1040246	9.1075591	42	99189.44	780622.12	787001.20	9.9964655	10.8924409
19	12735.31	12839.86	100820.94	9.1050096	9.1085604	41	99185.74	778824.53	785218.21	9.9964493	10.8914396
20	12764.16	12869.43	100824.71	9.1059924	9.1095594	40	99182.03	777035.06	783443.35	9.9964330	10.8904406
21	12793.01	12899.00	100828.49	9.1069729	9.1105562	39	99178.31	775253.66	781676.56	9.9964167	10.8894438
22	12821.86	12928.57	100832.28	9.1079512	9.1115508	38	99174.59	773480.28	779917.78	9.9964004	10.8884492
23	12850.71	12958.15	100836.07	9.1089272	9.1125431	37	99170.86	771714.85	778166.97	9.9963841	10.8874569
24	12879.56	12987.73	100839.88	9.1099010	9.1135333	36	99167.12	769957.35	776424.06	9.9963677	10.8864667
25	12908.41	13017.31	100843.70	9.1108726	9.1145213	35	99163.37	768207.69	774689.01	9.9963513	10.8854787
26	12937.25	13046.89	100847.52	9.1118420	9.1155072	34	99159.61	766465.84	772961.66	9.9963348	10.8844028
27	12966.09	13076.48	100851.35	9.1128092	9.1164909	33	99155.84	764731.74	771242.27	9.9963183	10.8835091
28	12994.94	13106.07	100855.19	9.1137742	9.1174724	32	99152.06	763005.33	769530.47	9.9963018	10.8825276
29	13023.78	13135.66	100859.04	9.1147370	9.1184518	31	99148.28	761286.57	767826.31	9.9962852	10.8815482
30	13052.62	13165.25	100862.90	9.1156977	9.1194291	30	99144.49	759575.41	766129.76	9.9962686	10.8805709
31	13081.46	13194.84	100866.77	9.1166562	9.1204043	29	99140.69	757871.79	764440.75	9.9962519	10.8795957
32	13110.30	13224.44	100870.65	9.1176125	9.1213773	28	99136.88	756175.67	762759.23	9.9962352	10.8786227
33	13139.13	13254.04	100874.53	9.1185667	9.1223482	27	99133.06	754486.99	762085.16	9.9962185	10.8776518
34	13167.97	13283.64	100878.42	9.1195188	9.1233171	26	99129.23	752805.71	759418.49	9.9962017	10.8766829
35	13196.81	13313.24	100882.32	9.1204688	9.1242839	25	99125.39	751131.78	757759.16	9.9961849	10.8757161
36	13225.64	13342.85	100886.23	9.1214167	9.1252486	24	99121.55	749465.14	756107.13	9.9961681	10.8747514
37	13254.47	13372.46	100890.15	9.1223624	9.1262112	23	99117.70	747805.76	754462.36	9.9961512	10.8737888
38	13283.30	13401.07	100894.08	9.1233061	9.1271718	22	99113.84	746153.57	752824.78	9.9961343	10.8728282
39	13312.13	13431.68	100898.01	9.1242477	9.1281303	21	99109.97	744508.55	751194.37	9.9961174	10.8718697
40	13340.96	13461.29	100901.97	9.1251872	9.1290868	20	99106.09	742870.64	749571.06	9.9961004	10.8709132
41	13369.79	13490.91	100905.92	9.1261246	9.1300413	19	99102.21	741239.78	747974.82	9.9960834	10.8699587
42	13398.62	13520.53	100909.88	9.1270600	9.1309937	18	99098.32	746345.95	746345.60	9.9960663	10.8690063
43	13427.44	13550.15	100913.85	9.1279934	9.1319442	17	99094.42	737999.09	744743.35	9.9960492	10.8680558
44	13456.27	13579.77	100917.83	9.1289247	9.1328926	16	99090.51	736389.16	743148.03	9.9960321	10.8671074
45	13485.09	13609.40	100921.82	9.1298539	9.1338391	15	99086.59	734786.10	741559.59	9.9960149	10.8661609
46	13513.92	13639.03	100925.82	9.1307812	9.1347835	14	99082.66	733189.89	739977.98	9.9959977	10.8652165
47	13542.74	13668.66	100929.83	9.1317064	9.1357260	13	99078.72	732600.47	738403.18	9.9959804	10.8642740
48	13571.56	13698.29	100933.85	9.1326297	9.1366665	12	99074.78	730017.80	736835.12	9.9959631	10.8633335
49	13600.38	13727.93	100937.88	9.1335509	9.1376051	11	99070.83	728441.84	735273.77	9.9959458	10.8623949
50	13629.19	13757.57	100941.92	9.1344702	9.1385417	10	99066.87	726872.55	733719.09	9.9959284	10.8614583
51	13658.01	13787.21	100945.96	9.1353875	9.1394764	9	99062.90	725309.87	732171.02	9.9959111	10.8605236
52	13686.83	13816.85	100950.01	9.1363028	9.1404092	8	99058.92	723753.78	730629.54	9.9958936	10.8595908
53	13715.64	13849.50	100954.07	9.1372161	9.1413400	7	99054.93	722204.22	729094.60	9.9958761	10.8586600
54	13744.45	13876.15	100958.14	9.1381275	9.1422689	6	99050.94	720561.16	727566.16	9.9958586	10.8577311
55	13773.27	13905.80	100962.22	9.1390370	9.1431959	5	99046.94	719124.56	726044.17	9.9958411	10.8568041
56	13802.08	13935.45	100966.31	9.1399445	9.1441210	4	99042.93	717594.37	724528.59	9.9958235	10.8558790
57	13830.89	13965.10	100970.41	9.1408501	9.1450442	3	99038.91	716070.56	723019.40	9.9958059	10.8549558
58	13859.70	13994.76	100974.52	9.1417537	9.1459655	2	99034.88	714553.08	721516.53	9.9957882	10.8540345
59	13888.50	14024.42	100978.64	9.1426555	9.1468850	1	99030.84	713041.90	720019.96	9.9957705	10.8531150
60	13917.31	14054.08	100982.76	9.1435553	9.1478025	0	99026.80	711536.97	718529.65	9.9957528	10.8521975

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	13917.31	14054.08	100982.76	9.1435553	9.1478025	60	99026.80	711536.97	718529.65	9.9957528	10.8521975
1	13946.12	14083.74	100986.89	9.1444532	9.1487182	59	99022.75	710038.26	717045.56	9.9957350	10.8512818
2	13974.92	14113.41	100991.05	9.1453493	9.1496321	58	99018.69	708545.73	715567.64	9.9957172	10.8503679
3	14003.72	14143.08	100995.18	9.1462435	9.1505441	57	99014.62	707059.34	714095.87	9.9956993	10.8494559
4	14032.52	14172.75	100999.34	9.1471358	9.1514543	56	99010.54	705579.05	712630.19	9.9956815	10.8485457
5	14061.32	14202.43	101003.51	9.1480262	9.1523627	55	99006.45	704104.82	711170.58	9.9956635	10.8476373
6	14090.12	14232.11	101007.69	9.1489148	9.1532692	54	99002.36	702636.62	709717.00	9.9956456	10.8467308
7	14118.92	14261.79	101011.81	9.1498015	9.1541739	53	98998.26	701174.41	708269.41	9.9956276	10.8458261
8	14147.72	14291.47	101016.07	9.1506864	9.1551769	52	98994.15	699718.06	706827.77	9.9956095	10.8449231
9	14176.51	14321.15	101020.27	9.1515694	9.1559780	51	98990.03	698267.81	705392.05	9.9955915	10.8440220
10	14205.31	14350.84	101024.48	9.1524507	9.1568773	50	98985.90	696823.35	703962.20	9.9955734	10.8431227
11	14234.10	14380.53	101028.70	9.1533301	9.1577748	49	98981.76	695384.73	702538.20	9.9955552	10.8422252
12	14262.89	14410.12	101032.93	9.1542076	9.1586706	48	98977.62	693951.92	701120.01	9.9955370	10.8413294
13	24291.68	14439.91	101037.17	9.1550834	9.1595646	47	98973.47	692524.89	699707.60	9.9955188	10.8404354
14	14320.47	14469.61	101041.42	9.1559574	9.1604569	46	98969.31	691103.59	698300.92	9.9955005	10.8395431
15	14349.26	14499.31	101045.68	9.1568296	9.1613473	45	98965.14	689687.99	696899.94	9.9954822	10.8386527
16	14378.05	14529.01	101049.95	9.1577000	9.1622361	44	98960.96	688278.07	695504.64	9.9954639	10.8377639
17	14406.84	14558.71	101054.23	9.1585686	9.1631231	43	98986.77	686873.78	694114.96	9.9954455	10.8368769
18	14435.62	14588.42	101058.51	9.1594354	9.1640083	42	98952.57	685475.08	692730.89	9.9954272	10.8359917
19	14464.40	14618.13	101062.80	9.1603005	9.1648919	41	98948.37	684081.96	691352.39	9.9954087	10.8351081
20	14493.19	14647.84	101067.10	9.1611639	9.1657737	40	98944.16	682694.37	689979.42	9.9953902	10.8342263
21	14521.97	14677.55	101071.41	9.1620254	9.1666538	39	98939.94	681312.27	688611.95	9.9843717	10.8333462
22	14550.75	14707.27	101075.73	9.1628853	9.1675322	38	98935.71	679935.68	687249.95	9.9953531	10.8324678
23	14579.53	14736.99	101080.06	9.1637434	9.1684089	37	98931.47	678564.46	685893.38	9.9953345	10.8315911
24	14608.30	14766.71	101084.40	9.1645998	9.1692839	36	98927.23	677198.67	684542.22	9.9953159	10.8307161
25	14637.08	14796.44	101088.75	9.1654544	9.1601572	35	98922.98	675838.26	683196.42	9.9952972	10.8298428
26	15665.85	14826.17	101093.11	9.1663074	9.1710289	34	98918.72	674483.18	681855.97	9.9952785	10.8289711
27	14694.63	14855.90	101097.47	9.1671586	9.1718989	33	98914.45	673133.41	680520.82	9.9952597	10.8281011
28	14723.40	14885.63	101101.84	9.1680081	9.1727672	32	98910.17	671788.91	679190.95	9.9952409	10.8272328
29	14752.17	14915.36	101106.22	9.1688559	9.1736338	31	98905.88	670449.66	677866.32	9.9952221	10.8263662
30	14780.94	14945.10	101110.61	9.1697021	9.1744988	30	98901.58	669115.62	676546.91	9.9952033	10.8255012
31	14809.71	14974.84	101115.01	9.1705465	9.1753622	29	98897.28	667786.77	675232.68	9.9951844	10.8246378
32	14838.48	15004.58	101119.42	9.1713893	9.1762239	28	98892.97	666463.07	673923.60	9.9951654	10.8237761
33	14867.24	15034.33	101123.84	9.1722305	9.1770840	27	98888.65	665144.49	672619.65	9.9951464	10.8229160
34	14896.01	15064.08	101128.27	9.1730699	9.1779425	26	98884.32	663831.00	671320.79	9.9951274	10.8220575
35	14924.77	15093.83	101132.71	9.1739077	9.1787993	25	98879.98	662522.58	670026.99	9.9951084	10.8212007
36	14953.53	15123.58	101137.15	9.1747439	9.1796546	24	98875.63	661219.19	668738.22	9.9950893	10.8203454
37	14982.30	15153.33	101141.60	9.1755784	9.1805082	23	98871.28	659920.80	667454.46	9.9950702	10.8194918
38	15011.06	15183.09	101146.06	9.1764112	9.1813602	22	98866.92	658627.39	666175.68	9.9950510	10.8186398
39	15039.81	15212.83	101150.53	9.1772425	9.1822106	21	98862.55	657338.52	664901.84	9.9950318	10.8177894
40	15068.57	15242.61	101155.01	9.1780721	9.1830595	20	98858.17	656055.38	663632.93	9.9950126	10.8169405
41	15097.33	15272.38	101159.50	9.1789001	9.1839068	19	98853.78	654776.72	662368.90	9.9949933	10.8160932
42	15126.08	15302.15	101164.00	9.1797265	9.1847525	18	98849.38	653502.93	661109.73	9.9949740	10.8152475
43	15154.84	15331.92	101168.51	9.1805512	9.1855966	17	98844.98	652233.96	659855.40	9.9949546	10.8144034
44	15183.59	15361.89	101173.03	9.1813744	9.1864392	16	98840.57	650969.81	658605.87	9.9949352	10.8135608
45	15212.34	15391.47	101177.56	9.1821960	9.1872802	15	98836.15	649710.43	657361.12	9.9949158	10.8127198
46	15241.09	15421.25	101182.09	9.1830160	9.1881196	14	98831.72	648455.81	656121.23	9.9948964	10.8118804
47	15269.84	15451.03	101186.63	9.1838344	9.1889575	13	98827.28	647205.91	654885.86	9.9948769	10.8110425
48	15298.58	15480.83	101191.18	9.1846512	9.1897939	12	98822.83	645960.70	653655.28	9.9948573	10.8102061
49	15327.33	15510.61	101195.74	9.1854665	9.1906287	11	98818.38	644720.17	652429.38	9.9948377	10.8093713
50	15356.07	15540.40	101200.31	9.1862802	9.1914621	10	98813.92	643484.28	651208.12	9.9948181	10.8085379
51	15384.82	15570.19	101204.89	9.1870923	9.1922939	9	98809.45	642253.01	649991.48	9.9947985	10.8077061
52	15413.56	15599.98	101209.48	9.1879029	9.1931241	8	98804.97	641026.33	648779.44	9.9947788	10.8068759
53	15442.30	15629.78	101214.08	9.1887120	9.1939529	7	98800.48	639804.22	647571.95	9.9947591	10.8060471
54	15471.04	15659.58	101218.69	9.1895195	9.1947802	6	98795.98	638586.65	646369.01	9.9947393	10.8052198
55	15499.78	15689.38	101223.31	9.1903254	9.1956059	5	98791.48	637373.59	645170.59	9.9947195	10.8043941
56	15528.51	15719.19	101227.93	9.1911299	9.1964302	4	98786.97	636165.02	643976.66	9.9946997	10.8035698
57	15557.25	15749.00	101232.56	9.1919328	9.1972530	3	98782.45	634960.92	642787.19	9.9946798	10.8027470
58	15585.98	15778.81	101237.20	9.1927342	9.1980743	2	98777.92	633761.26	641602.16	9.9946599	10.8019257
59	15614.72	15808.62	101241.85	9.1935341	9.1988941	1	98773.38	632566.01	640421.54	9.9946399	10.8011059
60	15643.45	15838.44	101246.51	9.1943324	9.1997125	0	98768.83	631375.15	639245.32	9.9946199	10.8002875

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	15643.45	15838.44	101246.51	9.1943324	9.1997125	60	98768.83	631375.15	639245.32	9.9946199	10.8002875
1	15672.18	15868.26	101251.18	9.1951293	9.2005294	59	98764.28	630188.66	638073.47	9.9945999	10.7994706
2	15700.91	15898.08	101255.86	9.1959247	9.2013449	58	98759.72	629006.51	636905.95	9.9945798	10.7986551
3	15729.63	15927.91	101260.55	9.1967186	9.2021588	57	98755.15	627828.68	635742.76	9.9945597	10.7978411
4	15758.36	15957.74	101265.25	9.1975110	9.2029714	56	98750.57	626655.14	634583.86	9.9945396	10.7970286
5	15787.08	15987.57	101269.96	9.1983019	9.2037825	55	98745.98	625485.88	633429.23	9.9945194	10.7962175
6	15815.81	16017.40	101274.67	9.1990913	9.2045922	54	98741.38	624320.86	632278.84	9.9944992	10.7954078
7	15844.53	16047.24	101279.49	9.1998793	9.2054004	53	98736.77	623160.07	631132.69	9.9944789	10.7945996
8	15873.25	16077.08	101284.12	9.2006658	6.2062072	52	98732.16	622003.47	629990.73	9.9944587	10.7937928
9	15901.97	16106.92	101288.86	9.2014509	9.2070126	51	98727.54	620851.06	628852.95	9.9944383	10.7929874
10	15930.69	16136.77	101293.61	9.2022345	9.2078165	50	98722.91	619702.79	627719.33	9.9944180	10.7921835
11	15959.40	16166.62	101298.37	9.2030167	9.2086191	49	98718.27	618558.67	626589.84	9.9943975	10.7913809
12	15988.12	16196.47	101303.14	9.2037974	9.2094203	48	98713.62	617418.65	625464.46	9.9943771	10.7605797
13	16016.83	16226.32	101307.92	9.2045766	9.2102200	47	98708.97	616282.72	624343.16	9.9943566	10.7867800
14	16045.55	16256.17	101312.71	9.2053545	9.2110184	46	98704.31	615150.85	623225.94	9.9943361	10.7889816
15	16074.26	16286.03	101317.51	9.2061309	9.2118153	45	98699.64	614023.03	622112.75	9.9943156	10.7881847
16	16102.97	16315.89	101322.31	9.2069059	9.2126109	44	98694.96	612899.23	621003.59	9.9942950	10.7873891
17	16131.67	16345.76	101327.12	9.2076795	9.2134051	43	98690.27	611779.43	619898.43	9.9942743	10.7865949
18	16160.83	16375.63	101331.94	9.2084516	9.2141980	42	98685.57	610663.60	617797.25	9.9942537	10.7858020
19	16189.09	16405.50	101336.77	9.2092224	9.2149894	41	98680.86	609551.74	617700.03	9.9942330	10.7850105
20	16217.79	16435.37	101341.61	9.2099917	9.2157795	40	98676.15	608443.81	616606.74	9.9942122	10.7842205
21	16246.50	16465.25	101346.46	9.2107597	9.2165683	39	98671.43	607339.79	615517.36	9.9941914	10.7834317
22	16275.20	16495.13	101351.32	9.2115263	9.2173556	38	98666.70	606239.67	614431.89	9.9941706	10.7826444
23	16303.91	16525.01	101356.19	9.2122914	9.2181417	37	98661.96	605143.43	613350.28	9.9941498	10.7818583
24	16332.62	16554.89	101361.07	9.2130552	9.2189264	36	98657.21	604051.03	612272.53	9.9941289	10.7810736
25	16361.29	16584.78	101365.95	9.2138176	9.2197097	35	98652.46	602962.47	611198.61	9.9941079	10.7802903
26	16389.99	16614.67	101370.84	9.2145787	9.2204917	34	98647.70	601877.72	610128.50	9.9940870	10.7795083
27	16418.68	16644.56	101375.74	9.2153384	9.2212724	33	98642.93	600796.76	609062.19	9.9940659	10.7787276
28	16447.38	16674.46	101380.65	9.2160967	9.2220718	32	98638.15	599719.57	607999.64	9.9940449	10.7776482
29	16476.07	16704.36	101385.57	9.2168536	9.2228298	31	98633.36	598646.14	606940.85	9.9940238	10.7771702
30	16504.76	16734.26	101390.50	9.2176092	9.2236065	30	98628.56	597576.44	605885.80	9.9940027	10.7763935
31	16533.45	16764.16	101395.44	9.2183635	9.2243819	29	98623.75	596510.45	604834.45	9.9939815	10.7756181
32	16562.14	16794.07	101400.39	9.2191164	9.2251561	28	98618.94	595448.15	603786.80	9.9939603	10.7748439
33	16590.82	16823.98	101405.35	9.2198680	9.2259289	27	98614.12	594389.52	602742.82	9.9939391	10.7740711
34	16619.51	16853.89	101410.32	9.2206182	9.2267004	26	98609.29	593334.55	601702.50	9.9939176	10.7732996
35	16648.19	16883.81	101415.30	9.2213671	9.2274706	25	98604.45	592283.22	600665.81	9.9938965	10.7725294
36	16676.87	16913.73	101420.29	9.2221147	9.2282395	24	98599.60	591235.50	599632.74	9.9938752	10.7717605
37	16705.55	16943.65	101425.29	9.2228909	9.2290071	23	98594.74	590191.38	598603.26	9.9938538	10.7709929
38	16734.23	16973.58	101430.29	9.2236059	9.2297735	22	98589.88	589150.84	597577.37	9.9938324	10.7702265
39	16762.91	17003.51	101435.30	9.2243495	9.2305386	21	98585.01	588113.86	596555.04	9.9938109	10.7694614
40	16791.39	17033.44	101440.32	9.2250918	9.2313024	20	98580.13	587080.42	595536.25	9.9937894	10.7686976
41	16820.26	17063.37	101445.35	9.2258328	9.2320650	19	98575.24	586050.51	594520.98	9.9937679	10.7679350
42	16848.94	17093.31	101450.39	9.2265725	9.2328262	18	98570.34	585024.10	593509.22	9.9937463	10.7671738
43	16687.01	17123.25	101455.44	9.2273110	8.2335863	17	98565.44	584001.17	592500.95	9.9937247	10.7664137
44	16906.28	17153.19	101460.50	9.2280481	9.2343451	16	98560.53	582981.72	591496.14	9.9937030	10.7656549
45	16934.95	17183.14	101465.57	9.2287839	9.2351026	15	98555.61	581965.72	590494.79	9.9936813	10.7648974
46	16963.62	17213.09	101470.64	9.2295185	9.2358589	14	98550.68	580953.15	589496.88	9.9936596	10.7641411
47	16992.28	17243.04	101475.72	9.2302518	9.2366139	13	98545.74	579944.00	588502.38	9.9936378	10.7633861
48	17020.95	17273.00	101480.81	9.2309838	9.2373678	12	98540.79	578938.25	587511.28	9.9936160	11.7626322
49	17049.61	17302.96	101485.91	9.2317145	9.2381203	11	98535.83	577935.88	586523.56	9.9935942	10.7618797
50	17078.28	17332.92	101491.02	9.2324440	9.2388717	10	98530.87	576936.88	585539.20	9.9935723	10.7611283
51	17106.94	17362.88	101496.14	9.2331722	9.2396218	9	98525.90	575941.22	584558.20	9.9935504	10.7603782
52	17135.60	17392.85	101501.27	9.2338992	9.2403708	8	98520.92	574945.59	583580.53	9.9935285	10.7596292
53	17164.25	17422.82	101506.41	9.2346249	9.2411185	7	98515.93	574959.88	582606.17	9.9935065	10.7587815
54	17192.91	17452.79	101511.56	9.2332494	9.2418650	6	98510.93	572974.16	581635.10	9.9934844	10.7581350
55	17221.56	17482.77	101516.72	9.2360726	9.2426103	5	98505.92	571991.73	580667.32	9.9934624	10.7573897
56	17250.22	17512.75	101521.89	9.2367946	9.2433543	4	98500.91	571012.56	579702.80	9.9934403	10.7566457
57	17278.87	17542.73	101527.07	9.2375153	9.2440972	3	98495.89	570036.63	578741.53	9.9934181	10.7559028
58	17307.52	17572.72	101532.26	9.2382349	9.2448389	2	98490.86	569063.94	577783.50	9.9933959	10.7551611
59	17336.17	17602.71	101537.46	9.2389532	9.2455794	1	98485.82	568094.46	576828.67	7.9933737	10.7544206
60	17364.82	18632.70	101542.67	9.2396702	9.2463188	0	98480.77	567128.18	575877.05	9.9933515	10.7536812

13764.82

Grad. 10. | 79. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.
0	17364.82	17632.70	101542.67	9.2396702	9.2463188	98480.77	567128.18	575877.05	9. 9933515	10. 7536812	60
1	17393.46	17662.69	101547.88	9.2403861	9.2470569	98475.71	566165.09	574928.61	9. 9933292	10. 7529431	59
2	17422.11	17692.69	101553. 10	9.2411007	9.2477939	98470.65	565205.16	573983.33	9. 9933068	10. 7522061	58
3	17450.75	17722.69	101558. 33	9.2418141	9.2485297	98465.58	564248.38	573041.21	9. 9932845	10. 7514703	57
4	17479.39	17752.69	101563.57	9.2425264	9.2492643	98460.50	563294.74	572102.23	9. 9932621	10. 7507357	56
5	17508.03	17782.70	101568.82	9.2432374	9.2499978	98455.41	562344.21	571166.36	9. 9932396	10. 7500022	55
6	17536.67	17812.71	101574.08	9.2439472	9.2507301	98450.31	561396.80	570233.60	9. 9932171	10. 7492699	54
7	17565.31	17842.72	101579.35	9.2446558	9.2513612	98445.21	560452.47	569303.93	9. 9931946	10. 748 388	53
8	17593.95	17872.74	101584. 35	9.2443632	9.2521912	98440.10	559511.21	568377.34	9. 9931720	10. 7478088	52
9	17622.58	17902.76	101589 92	9.2460695	9.2529200	98434.98	558573.02	567453.80	9. 9931494	10. 7470800	51
10	17651.21	17932.78	101595. 21	9.2467746	9.2536477	98429.85	557637.86	566533.31	9. 9931268	10. 7463523	50
11	17679.84	17962.81	101600.51	9.2474784	9.2543743	98424.71	556705.74	565615.84	9. 9931041	10. 7456257	49
12	17708.47	17992.84	101605.82	9.2481811	9.2550997	98419.56	555776.63	564701.40	9. 9930814	10. 7456003	48
13	17737.10	18022.87	101611. 14	9.2488827	9.2558240	98414.40	554850 52	563789.95	9. 9930587	10. 7441760	47
14	17765.73	18052.91	101616.47	9.2495830	9.2565472	98409.24	553927.40	562881.48	9. 9930359	10. 7434528	46
15	17794.35	18082.95	101621. 81	9.2502822	9.1572691	98404.07	553007.24	561975.99	9. 9930131	10. 7427308	45
16	17822.98	18112.99	101627. 16	9.2509803	9.2579901	98398.89	552090.05	561073.45	9 9929902	10. 7420099	44
17	17851.60	18143.03	101632.52	9.2516772	9.2587099	98393.70	551175.79	560173.82	9. 9929673	10. 7412901	43
18	17880.22	18173.08	101637. 89	9.2523729	9.2594285	98388.50	550264 46	559277.19	9. 9929444	10. 7405715	42
19	17908.84	18203.13	101643.27	9.2530675	9.2601461	98383.29	549356.04	558383.43	9. 9929214	10. 7398539	41
20	17937.46	18233.18	101648.[illegible]6	9.2537609	9.2608625	98378.08	548450.52	557492.58	9. 9928984	10. 7391375	40
21	17966.07	18263.24	101654.06	9.2544532	9.2655779	98372.86	547547.88	556604.60	9. 9928753	10. 7384221	39
22	17994.69	18293.30	101659.46	9.2551444	9.2622921	98367.63	546648.12	555719.50	9 9928522	10. 7377079	38
23	180 23.0	18323.36	101664.87	9.2558344	9.2630053	98362.39	545751.21	554837.26	9. 9928291	10. 7369947	37
24	18051.91	18353.43	101670.29	9.2565233	9.2637173	98357.14	544857.15	553957.86	9. 9928059	10. 7362827	36
25	18080.52	18383.50	101675.72	9.2572110	9.2644283	98351.89	543965.92	553081.29	9. 9927827	10. 7355717	35
26	18109.13	18413.57	101681.16	9.2578977	9.2651382	98346.63	543037.50	552207.54	9. 9927595	10. 7348618	34
27	18137.74	18443.65	101686.61	9.2585832	9.2658470	98341.36	541191.88	551336.59	9. 9927362	10. 7341530	33
28	18166.35	18473.73	101692.07	9.2592676	9.2665547	98336.08	541309 06	550468.43	9. 9927129	10. 7334453	32
29	18194.95	18503.81	101697.54	9.2599509	9.2672613	98330.79	540429.01	549603.05	9. 9926895	10. 7328387	31
30	18223.55	18533.90	101703.02	9.2606330	9.2679669	98325.49	539551.72	548740.43	9. 9926661	10. 7320331	30
31	18252.15	18563.99	101708.51	9.2613141	9.2686714	98320.18	538677.18	547880.55	9 9926427	10. 7313286	29
32	18280.75	18594.08	101714.01	9.2619941	9.2693749	98314.87	537805.38	547023.42	9 9926192	10. 7306251	28
33	18309.35	18624.18	101719.52	9.2626729	9.2700772	98309.55	536936.30	546169.01	9. 9925957	10. 7299228	27
34	18337.95	18654.20	101725.04	0.2633507	9.2707786	98304 22	536069 63	545317 31	9. 9925722	10. 7292214	26
35	18366.54	18684.38	101730. 56	9.2640274	9.2714788	98298.88	535206.26	544468.31	9. 9925486	10. 7285212	25
36	18395.13	18714.49	101736.09	9.2647030	9.2721780	98293.53	534345.28	543621.99	9. 9925250	10. 7278220	24
37	18423.73	18744.60	101741.63	9.2653775	9.2728762	98288.17	533486 96	542778.35	9. 9925013	10. 7271238	23
38	18452.32	18774.71	101747.18	9.2660509	9.2735733	98282.81	532631.31	541937.37	9. 9924776	10. 7264267	22
39	18480.91	18904.83	101752.74	9.2667232	9.2742694	98277.44	531778.30	541099.03	9. 9924539	10. 7257306	21
40	18509.49	18834.95	101758. 31	9.2673945	9.2749644	98272.06	530927.95	540263.33	9. 9924301	10. 7250356	20
41	18538.08	18865.07	101763.31	9.2680647	9.2756584	98266.67	530080.18	539430.26	9. 9924063	10. 7243416	19
42	18566.66	18895.20	101769.48	9.2687338	9.2763514	98261.27	529235.05	538599.79	9. 9923824	10. 7236486	18
43	18595.24	18925 33	101775.08	9.2694019	9.2770434	98255.87	528392.51	537771.92	9. 9923585	10. 7229566	17
44	18623.82	18955.46	101780.69	9.2700689	9.2777343	98250.46	527552.55	536946.64	9. 9923346	10. 7222657	16
45	18652.40	18985.59	101786.31	9.2707348	9.2784242	98245.04	526715.17	536123.93	9. 9923106	10. 7215758	15
46	18680.98	19015.73	101761.94	9.2713997	9.2791131	98239.61	525880.35	535303.79	9. 9922866	10. 7208869	14
47	18709.56	19045.87	101797.58	9.2720635	9 2798009	98234.17	525048.09	534486.20	9. 9922626	10. 7201991	13
48	18738.13	19076.02	101803.22	9.2727263	9.2804878	98228.72	524218.36	533671.14	9. 9922385	10. 7195122	12
49	18766.70	19106.17	101808.87	9.2733880	9.2811736	98223.27	523391.16	532858.62	9. 9922144	10. 7188264	11
50	18795.27	19136.32	101814.53	9.2740487	9.2818585	98217.81	522566.47	532048.60	9. 9921902	10. 7181415	10
51	18823.84	19166.48	101820.20	9.2747083	9.2824423	98212.34	521744.28	531241.09	9. 9921660	10. 7174577	9
52	18852.41	19196.64	101825.88	9.2753669	9.2832251	98206.86	520924 59	530436.08	9. 9921418	10. 7167749	8
53	18880.98	19226.80	101831.57	9.2760245	9.2839070	98201.37	520107.38	529633.54	9. 9921175	10. 7160930	7
54	18909.54	19256.96	101837.27	9.2766811	9.2845878	98195.87	519292.64	528833.47	9. 9920932	10. 7154122	6
55	18938. 11	19287. 13	101842.99	9.2773366	9.2852677	98190.36	518480.35	528035.87	9. 9920689	10. 7147323	5
56	18966.67	19317. 30	101848.70	9.2779911	9.2859466	98184.85	517670.71	527240.70	9. 9920445	10. 7140534	4
57	18995.23	19347. 48	101854.43	9.2786445	9.2866245	98179.33	516863.11	526447.98	9. 9920201	10. 7133755	3
58	19023.79	19377. 66	101860.17	9.2792970	9.2873014	98173.80	516058.13	525657.68	9. 9919956	10. 7126986	2
59	19052.34	19407.84	101865.92	9.2799484	9.2879773	98168.26	515255.57	524869.79	9. 9919711	10. 7120227	1
60	19080.90	19438.03	101871.68	9.2805988	9.2886523	98162.71	514455.40	524084.31	9. 9919466	10. 7113477	0

Grad. 11. — 78. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	19080.90	19438.03	101871.68	9.1805988	9.2886523	60	98162.71	514455.40	524084.31	9.9919466	10.7113477
1	19109.45	19468.22	101877.44	9.2812483	9.2893263	59	98157.16	513657.63	523301.21	9.9919220	10.7106737
2	19138.00	19498.41	101883.21	9.2818957	9.2899993	58	98151.60	512862.24	522520.50	9.9918974	10.7100007
3	19166.55	19528.61	101888.99	9.2825441	9.2906713	57	98146.03	512069.21	521742.16	9.9918727	10.7093287
4	19195.10	19558.81	101894.78	9.2831905	9.2913424	56	98140.45	511278.55	521966.18	9.9908480	10.7086576
5	19223.65	19589.01	101900.58	9.2838359	9.2920126	55	98134.86	510490.24	520192.54	9.9918233	10.7079874
6	19252.20	19619.22	101906.39	9.2844803	9.2926817	54	98129.26	509704.26	519421.25	9.9917986	10.7073183
7	19280.74	19649.43	101912.21	9.2851237	9.2933500	53	98123.66	508920.61	518652.28	9.9917737	10.7066500
8	19309.28	19679.64	101918.04	9.2857671	9.2940172	52	98118.05	508139.28	517885.63	9.9917489	10.7059828
9	19337.82	19709.86	101923.88	9.2864076	9.2946836	51	98112.43	507360.25	517121.28	9.9917240	10.7053164
10	19366.36	19740.08	101929.73	9.2870480	9.2953489	50	98106.80	506583.52	516359.24	9.9916991	10.7046511
11	19394.90	19770.30	101935.59	9.2876875	9.2960134	49	98101.16	505809.07	515599.48	9.9916741	10.7039866
12	19423.44	19800.53	101941.46	9.2883260	9.2966769	48	98095.51	505036.90	514841.99	9.9916492	10.7033231
13	19451.97	19830.76	101947.34	9.2889636	9.2973395	47	98089.86	504267.00	514086.77	9.9916241	10.7026605
14	19480.50	19861.00	101953.23	9.2896001	9.2980011	46	98084.20	503499.35	513333.81	9.9915990	10.7019989
15	19509.03	19891.24	101959.12	9.2902357	9.2986618	45	98078.53	502733.95	512583.09	9.9915739	10.7013382
16	19537.56	19921.48	101965.02	9.2908704	9.2993216	44	98072.85	501970.78	511834.61	9.9915488	10.7006784
17	19566.09	19951.72	101970.93	9.2915040	9.2999804	43	98067.16	501209.84	511088.35	9.9915236	10.7000196
18	19594.61	19981.97	101976.85	9.2921367	9.3006383	42	98061.46	500451.11	510344.31	9.9914984	10.6993617
19	19623.14	20012.22	101982.78	9.2927685	9.3012954	41	98055.76	499694.69	509602.48	9.9914731	10.6987046
20	19651.66	20042.48	101898.72	9.2933993	9.3019514	40	98050.05	498940.27	508862.84	9.9914478	10.6980486
21	19680.18	20072.74	101994.67	9.2940291	9.3026066	39	98044.33	498188.13	508125.39	9.9914228	10.6973934
22	19708.70	20103.00	102000.63	9.2946580	9.3032609	38	98038.60	497438.17	507390.12	9.9913975	10.6967391
23	19737.22	20133.27	102006.60	9.2952859	9.3039143	37	98032.86	496690.37	506657.01	9.9913717	10.6960857
24	19765.73	20163.54	102012.58	9.2959129	9.3045667	36	98027.11	495944.74	505926.06	9.9913462	10.6954333
25	19794.25	20193.81	102018.57	9.2961390	9.3052183	35	98021.36	495201.25	505197.26	9.9913207	10.6947817
26	19822.76	20224.09	102024.57	9.2971641	9.3058689	34	98015.60	494459.90	504470.60	9.9912952	10.6941311
27	19851.27	20254.37	102030.58	9.2977883	9.3065187	33	98009.83	493720.67	503746.07	9.9912696	10.6934813
28	19879.78	20284.65	102036.60	9.2984116	9.3071675	32	98004.05	492983.58	503023.67	9.9912440	10.6928325
29	19908.29	20314.94	102042.63	9.2990339	9.3078155	31	97998.26	492248.59	502303.37	9.9912184	10.6921845
30	19936.79	20345.23	102048.67	9.2996553	9.3084626	30	97992.47	491515.70	501585.17	9.9911927	10.6915374
31	19965.30	20375.52	102054.71	9.3002758	9.3091088	29	97986.67	490784.91	500869.07	9.9911670	10.6908912
32	19993.80	20405.82	102060.76	9.3008953	9.3097541	28	97980.86	490056.20	500155.05	9.9911412	10.6902459
33	20022.30	20436.12	102066.82	9.3015140	9.3103985	27	97975.04	489329.56	499443.11	9.9911154	10.6896015
34	20050.80	20466.43	102072.89	9.3021317	9.3110421	26	97969.21	488604.99	498733.23	9.9910896	10.6889579
35	20079.30	20496.74	102078.97	9.3027485	9.3116848	25	97963.37	487882.48	498025.41	9.9910637	10.6883152
36	20107.79	20527.05	102085.06	9.3033644	9.3123266	24	97957.52	487162.01	497319.64	9.9910378	10.6876734
37	20136.29	20557.37	102091.16	9.3039794	9.3129675	23	97951.67	486443.59	496615.91	9.9910119	10.6870325
38	20164.78	20587.69	102097.27	9.3045934	9.3136076	22	97945.81	485727.19	495914.21	9.9909859	10.6863924
39	20193.27	20618.01	102103.39	9.9052066	9.3142468	21	97939.94	485012.82	495214.53	9.9909598	10.6857532
40	20221.76	20648.34	102109.52	9.3058189	9.3148851	20	97934.06	484300.45	494516.87	9.9909338	10.6851149
41	20250.24	20678.67	102115.66	9.3064303	9.3155226	19	97928.17	483590.10	493821.20	9.9909077	10.6844774
42	20278.73	20709.00	102121.81	9.3070407	9.3161592	18	97922.28	482881.74	493127.54	9.9908815	10.6838408
43	20307.21	20739.34	102127.97	9.3076503	9.3167950	17	97916.38	482175.36	492435.86	9.9908553	10.6832050
44	20335.69	20769.58	102134.14	9.3082590	9.3174299	16	97910.47	481470.96	491746.16	9.9908291	10.6845701
45	20364.17	20800.03	102140.32	9.3088668	9.3180640	15	97904.55	480768.54	491058.44	9.9908029	10.6819360
46	20392.65	20830.38	102146.50	9.3094737	9.3186972	14	97898.62	480068.08	490372.67	9.9907766	10.6813028
47	20421.13	20860.73	102152.69	9.3100798	9.3193295	13	97992.68	479369.57	489688.86	9.9907502	10.6806705
48	20449.61	20891.09	102158.89	9.3106849	9.3199611	12	97886.74	478673.00	489007.01	9.9907239	10.6800389
49	20478.08	20921.45	102165.10	9.3112892	9.3205918	11	97880.79	477978.37	488327.07	9.9906974	10.6794082
50	20506.55	20951.81	102171.32	9.3118926	9.3212216	10	97874.83	477285.67	487649.07	9.9906710	10.6787784
51	20535.02	20982.18	102177.55	9.3124951	9.3218506	9	97868.86	476594.90	486972.99	9.9906445	10.6781494
52	20563.49	21012.55	102183.79	9.3130968	9.3223788	8	97862.88	475906.03	486298.83	9.9906180	10.6775212
53	20591.95	21042.93	102190.04	9.3136976	9.3231061	7	97856.89	475219.07	485627.57	9.9905914	10.6768939
54	20620.42	21073.31	102196.30	9.3142975	9.3237327	6	97850.90	474534.01	484956.21	9.9905648	10.6762673
55	20648.88	21103.69	102202.57	9.3148965	9.3243584	5	97844.90	473850.83	484287.74	9.9905382	10.6756416
56	20677.34	21134.07	102208.85	9.3154947	9.3249832	4	97838.89	473169.54	483621.14	9.9905115	10.6750168
57	20705.80	21164.46	102215.14	9.3160921	9.3256073	3	97832.87	472490.12	482956.43	9.9904848	10.6743927
58	20734.26	21194.85	102221.44	9.3166885	9.3262305	2	97826.84	471812.56	482293.57	9.9904580	10.6737695
59	20762.71	21225.25	102227.75	9.3172841	9.3268529	1	97820.80	471136.86	481632.58	9.9904312	10.6731471
60	20791.17	21255.65	102234.07	9.3178789	9.3274745	0	97814.76	470463.01	480973.43	9.9904044	10.6725255

20791.17

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	20791.17	21255.65	102234.07	9.3178789	9.3274745	60	97814.76	470463.01	480973.43	9.9904044	10.6725255
1	20819.62	21286.06	102240.40	9.3184728	9.3280953	59	97808.71	469791.00	480316.13	9.9903775	10.6719047
2	20848.07	21316.47	102246.73	9.3190659	9.3287153	58	97802.65	469120.83	479660.66	9.9903506	10.6712847
3	20876.52	21346.88	102253.07	9.3196581	9.3293345	57	97796.58	468452.48	479007.02	9.9903237	10.6706655
4	20904.97	21377.30	102259.42	9.3202495	9.3299528	56	97790.50	467785.95	478355.20	9.9902967	10.6700472
5	20933.41	21407.72	102265.78	9.3298400	9.3305704	55	97784.41	467121.24	477705.19	9.9902697	10.6694296
6	20961.86	21438.14	102272.15	9.3214297	9.3311872	54	97778.32	466458.32	477056.99	9.9902426	10.6688128
7	20990.30	21468.57	102278.53	9.3220186	9.3318031	53	97772.22	465797.21	476410.58	9.9902155	10.6681969
8	21018.74	21499.00	102284.92	9.3226066	9.3324183	52	97766.11	465137.88	475765.96	9.9901883	10.6675817
9	21047.18	21529.44	102291.32	9.3231938	9.3330327	51	97759.99	464480.34	475123.12	9.9901612	10.6669673
10	21075.61	21559.88	102297.73	9.3237802	9.3336463	50	97753.86	463824.57	474482.06	9.9901339	10.6663537
11	21104.05	21590.32	102304.15	9.3243657	9.3342591	49	97747.73	463170.56	473842.77	9.9901067	10.6657409
12	21132.48	21620.77	102310.58	9.3249505	9.3348711	48	97741.59	462518.32	473205.23	9.9900794	10.6651289
13	21160.91	21651.22	102317.02	9.3255344	9.3354823	47	97735.44	461867.83	472569.45	9.9900521	10.6645177
14	21189.34	21681.67	102323.47	9.3261174	9.3360927	46	97729.28	461219.08	471935.42	9.9900247	10.6639073
15	21217.77	21712.13	102329.93	9.3266997	9.3367024	45	97723.11	460572.07	471303.13	9.9899973	10.6632976
16	21246.19	21742.59	102336.40	9.3272811	9.3373113	44	97716.93	459926.80	470672.56	9.9899698	10.6626887
17	21274.62	21773.06	102342.88	9.3278617	9.3379194	43	97710.75	459283.25	470043.72	9.9899423	10.6620806
18	21303.04	21803.53	102349.37	9.3284416	9.3385267	42	97704.56	458641.41	469416.60	9.9899148	10.6614733
19	21331.46	21834.00	102355.87	9.3290205	9.3391333	41	97698.36	458001.29	468791.19	9.9898873	10.6678667
20	21359.88	21864.48	102362.38	9.3295988	9.3397391	40	97692.15	457362.87	468167.48	9.9898597	10.6621609
21	21388.29	21894.96	102368.90	9.3301761	9.3403441	39	97685.93	456726.14	467545.48	9.9898320	10.6596559
22	21416.71	21925.44	102375.43	9.3307527	9.3409484	38	97679.90	456091.11	466925.16	9.9898043	10.6590519
23	21445.12	21955.93	102381.96	9.3313285	9.3415519	37	97673.47	455457.76	466306.52	9.9897766	10.6584481
24	21473.53	21986.42	102388.50	9.3319035	9.3421546	36	97667.23	454826.08	465689.56	9.9897489	10.6578454
25	21501.94	22016.92	102395.05	9.3324777	9.3427566	35	97660.98	454196.08	465074.27	9.9897211	10.6572434
26	21530.35	22047.42	102401.61	9.3330511	9.3433578	34	97654.72	453567.73	464460.64	9.9896952	10.6566422
27	21558.76	22077.93	102408.18	9.3336237	9.3439583	33	97648.45	452941.05	463848.67	9.9896654	10.6560417
28	21587.16	22108.44	102414.76	9.3341955	9.3445580	32	97642.17	452316.01	463238.35	9.9896374	10.6554420
29	21615.56	22138.95	102421.35	9.3347665	9.3451570	31	97635.[illegible]	451692.61	462629.67	9.9896095	10.6548430
30	21643.96	22169.47	102427.95	9.3353368	9.3457552	30	97629.60	451070.85	462022.63	9.9895815	10.6542448
31	21672.36	22199.99	102434.56	9.3359062	9.3463527	29	97623.30	450450.72	461417.22	9.9895535	10.6536473
32	21700.76	22230.51	102441.18	9.3364749	9.3469494	28	97616.99	449832.21	460813.43	9.9895254	10.6530506
33	21729.15	22261.04	102447.81	9.3370428	9.3475454	27	97610.67	449215.32	460211.26	9.9894973	10.6524546
34	21757.54	22291.57	102454.45	9.3376099	9.3481407	26	97604.35	448600.04	459610.70	9.9894692	10.6518593
35	21785.93	22322.11	102461.10	9.3381762	9.3487352	25	97598.02	447986.36	459011.74	9.9894410	10.6512648
36	21814.32	22352.65	102467.76	9.3387418	9.3493290	24	97591.68	447374.28	458414.39	9.9894128	10.6506710
37	21842.71	22383.19	102474.43	9.3393055	9.3499220	23	97585.33	446763.79	457818.62	9.9893845	10.6500780
38	21871.10	22413.74	102481.11	9.3398706	9.3505143	22	97578.97	446154.89	457224.44	9.9893562	10.6494857
39	21899.48	22444.29	102487.80	9.3404338	9.3511059	21	97572.60	445547.56	456631.83	9.9893279	10.6488941
40	21927.86	22474.85	102494.49	9.3409963	9.3516968	20	97566.23	444941.81	456040.80	9.9892995	10.6483832
41	21956.24	22505.41	102501.19	9.3415580	9.3522869	19	97559.85	444337.22	455451.34	9.9892711	10.6477131
42	21984.62	22535.97	102507.90	9.3421190	9.3528763	18	97553.46	443734.99	454863.44	9.9892427	10.6471237
43	22013.00	22566.54	102514.62	9.3426792	9.3534650	17	97547.06	443133.92	454277.09	9.9892142	10.6465350
44	22041.37	22597.11	102521.35	9.3432386	9.3540530	16	97540.65	442534.39	453692.29	9.9891856	10.6459470
45	22069.74	22627.69	102528.09	9.3437973	9.3546402	15	97534.23	441936.41	453109.03	9.9891571	10.6453598
46	22098.11	22658.87	102534.84	9.3443552	9.3552267	14	97527.81	441339.96	452527.30	9.9891285	10.6447733
47	22126.48	22688.85	102541.60	9.3449124	9.3558126	13	97521.38	440745.04	451047.11	9.9890998	10.6441874
48	22154.85	22719.44	102548.37	9.3454688	9.3563977	12	97514.94	440151.64	451368.44	9.9890711	10.6436023
49	22183.21	22750.03	102555.15	9.3460245	9.3569821	11	97508.49	439559.76	450791.29	9.9890421	10.6430179
50	22211.58	22780.63	102561.94	9.3465794	9.3575658	10	97502.03	438969.40	450215.65	9.9890137	10.6424342
51	22239.94	22811.23	102568.74	9.3471336	9.3581487	9	97495.56	438380.54	449641.52	9.9889849	10.6418513
52	22268.30	22841.83	102575.55	9.3476870	9.3587310	8	97489.09	437793.17	449068.89	9.9889560	10.6412690
53	22296.66	22872.44	102582.37	9.3482397	9.3593126	7	97482.61	437207.31	448497.75	9.9889271	10.6406874
54	22325.01	22903.05	102589.20	9.3487917	9.3598935	6	97476.12	436622.93	447928.10	9.9888982	10.6401065
55	22353.37	22933.67	102596.04	9.3493429	9.3604736	5	97469.62	436040.03	447359.93	9.9888693	10.6395264
56	22381.72	22964.29	102602.85	9.3498934	9.3610531	4	97463.11	435458.61	446793.24	9.9888403	10.6389469
57	22410.07	22994.92	102609.79	9.3504432	9.3616319	3	97456.60	434878.66	446228.03	9.9888113	10.6383681
58	22438.41	23025.55	102616.60	9.3509922	9.3622100	2	97450.08	435300.18	445664.28	9.9887822	10.6377900
59	22466.76	23056.18	102623.50	9.3515405	9.3627874	1	97443.55	433723.16	445101.98	9.9887531	10.6372126
60	22495.11	23086.82	102630.39	9.3520880	9.3633641	0	97437.01	433147.59	444541.15	9.9887239	10.6366359

Grad. 13. — 76. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	22945.11	23086.82	102630.39	9.3520880	9.3633645	60	97437.01	433147.59	444541.15	9.9887239	10.6366359
1	22523.45	23117.46	102637.29	9.3526349	9.3639401	59	97430.46	432573.47	443981.76	9.9886947	10.6360599
2	22551.79	23148.11	102644.20	9.3531810	9.3645155	58	97423.90	432000.79	443423.82	9.9886655	10.6354845
3	22580.13	23178.76	102651.12	9.3537264	9.3650901	57	97417.34	431429.55	442867.31	9.9886363	10.6349099
4	22608.46	23209.41	102658.05	9.3542710	9.3656641	56	97410.77	430859.74	442312.24	9.9886070	10.6343359
5	22636.80	23240.07	102664.99	9.3548150	9.3662374	55	97404.19	430291.36	441758.59	9.9885776	10.6337626
6	22665.13	23270.73	102671.94	9.3553582	9.3668100	54	97397.60	429724.40	441206.37	9.9885482	10.6331900
7	22693.46	23301.40	102678.90	9.3559007	9.3673819	53	97391.00	429158.85	440655.56	9.9885188	10.6326181
8	22721.79	23331.07	102685.87	9.3564426	9.3679532	52	97384.39	428594.72	440106.16	9.9884894	10.6320468
9	22750.12	23362.74	102692.84	9.3569836	9.3685238	51	97377.78	428031.99	439558.17	9.9884599	10.6314762
10	22778.44	23393.42	102699.82	9.3575240	9.3690937	50	97371.16	427470.66	439011.58	9.9884303	10.6309063
11	22806.77	23424.10	102706.81	9.3580637	9.3696629	49	97364.53	426910.72	438466.38	9.9884008	10.6303371
12	22835.09	23454.79	102713.81	9.3586027	9.3702315	48	97357.89	426352.18	437922.57	9.9883712	10.6297685
13	22863.41	23485.48	102720.82	9.3591409	9.3707994	47	97351.24	425795.01	437380.15	9.9883415	10.6292006
14	22891.72	23516.17	102727.84	9.3596785	9.3713667	46	97344.58	425239.23	436839.10	9.9883118	10.6286333
15	22920.04	23546.87	102734.87	9.3602154	9.3719333	45	97337.92	424684.82	436299.43	9.9882821	10.6280667
16	22948.35	23577.58	102741.91	9.3607515	9.3724992	44	97331.25	424131.77	435761.13	9.9882523	10.6275008
17	22976.66	23608.29	102748.96	9.3612870	9.3730645	43	97324.57	423580.09	435224.19	9.9882225	10.6269355
18	23004.97	23639.00	102756.02	9.3618217	9.3736391	42	97317.88	423029.77	434688.61	9.9881927	10.6263709
19	23033.28	23669.72	102763.09	9.3623558	9.3741930	41	97311.18	422480.80	434154.38	9.9881628	10.6258070
20	23061.59	23700.44	102770.17	9.3628892	9.3747563	40	97304.48	421933.18	433621.50	9.9881329	10.6252437
21	23089.89	23731.36	102777.26	9.3634219	9.3753190	39	97297.77	421386.90	433089.96	9.9881029	10.6249810
22	23118.19	23761.89	102784.36	9.3639539	9.3758810	38	97291.05	420841.96	432559.77	9.9880729	10.6241190
23	23146.49	23792.62	102791.47	9.3644852	9.3764423	37	97284.32	420298.35	432030.90	9.9880429	10.6235577
24	23174.79	23823.36	102798.59	9.3650158	9.3770030	36	97277.58	419756.06	431503.36	9.9880128	10.6229970
25	23203.09	23854.10	102805.72	9.3655458	9.3775631	35	97270.84	419215.10	430977.15	9.9879827	10.6224369
26	23231.38	23884.85	102812.86	9.3660750	9.3781225	34	97264.09	418676.46	430452.25	9.9879525	10.6218775
27	23259.67	23915.60	102820.01	9.3666039	9.3786813	33	97257.33	418137.13	429928.67	9.9879223	10.6213187
28	23287.96	23946.35	102827.17	9.3671315	9.3792394	32	97250.56	417600.11	429406.40	9.9878921	10.6207606
29	23316.25	23977.11	102834.34	9.3676587	9.3797969	31	97243.78	417064.40	428885.43	9.9878618	10.6202031
30	23344.54	24007.87	102841.52	9.3681853	9.3803537	30	97236.99	416529.98	428365.76	9.9878315	10.6196453
31	23372.82	24038.64	102848.71	9.3687111	9.3809100	29	97230.19	415996.85	427847.38	9.9878012	10.6190900
32	23401.10	24069.41	102855.91	9.3692363	9.3814655	28	97223.39	415465.01	427330.29	9.9877708	10.6185345
33	23429.38	24100.19	102863.12	9.3697608	9.3820205	27	97216.58	414934.46	426814.49	9.9877404	10.6179725
34	23457.66	24130.97	102870.34	9.3702847	9.3825748	26	97209.76	414405.19	426299.96	9.9877099	10.6174252
35	23485.94	24161.76	102877.57	9.3708079	9.3831285	25	97202.93	413877.19	425786.71	9.9876794	10.6168715
36	23514.21	24192.55	102884.81	9.3713304	9.3836816	24	97196.09	413350.46	425274.74	9.9876488	10.6163184
37	23542.48	24223.34	102892.06	9.3718527	9.3842340	23	97189.25	412824.99	424764.02	9.9876183	10.6157660
38	23570.75	24254.14	102899.32	9.3723735	9.3847858	22	97182.40	412300.79	424254.57	9.9875876	10.6152142
39	23599.02	24284.94	102906.58	9.3728940	9.3853370	21	97175.54	411777.84	423746.37	9.9875570	10.6146630
40	23627.29	24315.75	102913.85	9.3734139	9.3858876	20	97168.67	411256.14	423239.43	9.9875263	10.6141124
41	23655.55	24346.56	102921.13	9.3739331	9.3864376	19	97161.79	410735.69	422733.73	9.9874955	10.6135624
42	23683.81	24377.37	102928.42	9.3744517	9.3869869	18	97154.91	410216.49	422229.28	9.9874648	10.6130131
43	23712.07	24408.19	102935.72	9.3749696	9.3875356	17	97148.02	409698.52	421726.06	9.9874339	10.6124644
44	23740.33	24439.01	102943.03	9.3754868	9.3880837	16	97141.12	409181.78	421224.08	9.9874031	10.6119163
45	23768.59	24469.84	102950.35	9.3760034	9.3886312	15	97134.21	408666.27	420723.33	9.9873722	10.6113688
46	23796.84	24500.67	102957.68	9.3765194	9.3891781	14	97127.29	408151.99	420223.80	9.9873413	10.6108219
47	23825.10	24531.51	102965.02	9.3770347	9.3897244	13	97120.36	407638.92	419725.49	9.9873103	10.6102756
48	23853.35	24562.35	102972.37	9.3775493	9.3902700	12	97113.43	407127.07	419228.40	9.9872793	10.6097300
49	23881.59	24593.20	102979.73	9.3780633	9.3908151	11	97106.49	406616.43	418732.52	9.9872482	10.6091849
50	23909.84	24624.05	102987.10	9.3785767	9.3913595	10	97099.54	406107.00	418237.85	9.9872171	10.6086405
51	23938.08	24654.91	102994.48	9.3790894	9.3919034	9	97092.58	405598.77	417744.28	9.9871860	10.6080966
52	23966.33	24685.77	103001.87	9.3796015	9.3924466	8	97085.61	405091.74	417252.10	9.9871549	10.6075534
53	23994.57	24716.63	103009.27	9.3801129	9.3929893	7	97078.63	404585.90	416761.02	9.9871236	10.6070107
54	24022.80	24747.50	103016.68	9.3806237	9.3935313	6	97071.65	404081.25	416271.14	9.9870924	10.6064687
55	24051.04	24778.37	103024.10	9.3811339	9.3940727	5	97064.66	403577.79	415782.43	9.9870611	10.6059273
56	24079.27	24809.25	103031.53	9.3816434	9.3946136	4	97057.66	403075.50	415294.91	9.9870298	10.6053864
57	24107.51	24840.13	103038.97	9.3821523	9.3951538	3	97050.65	402574.40	414808.56	9.9869984	10.6048462
58	24135.74	24871.02	103046.42	9.3826605	9.3956935	2	97043.63	402074.46	414323.39	9.9869670	10.6043065
59	24163.96	24901.90	103053.88	9.3831682	9.3962326	1	97036.60	401575.70	413839.39	9.9869356	10.6037674
60	24192.19	24932.80	103061.35	9.3836752	9.3967711	0	97029.57	401078.09	413356.55	9.9869041	10.6032289

Grad. 14.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	24192.19	24932.80	103061.35	9.3836752	9.3967711
1	24220.41	24963.70	103068.83	9.3841815	9.3973089
2	24248.63	24994.60	103076.32	9.3846873	9.3978463
3	24276.85	25025.51	103083.82	9.3851924	9.3982830
4	24305.07	25056.42	103091.33	9.3856969	9.3989191
5	24333.29	25087.34	103098.85	9.3862008	9.3994547
6	24361.50	25118.26	103106.38	9.3867040	9.3999896
7	24389.71	25149.19	103113.92	9.3872067	9.4005240
8	24417.92	25180.12	103121.47	9.3877087	9.4010578
9	24446.13	25211.06	103129.03	9.3882101	9.4015910
10	24474.33	25242.00	103136.60	9.3887109	9.4021237
11	24502.54	25272.94	103144.18	9.3892111	9.4026558
12	24530.74	25303.89	103151.77	9.3897106	9.4031873
13	24558.94	25324.84	103159.36	9.3902096	9.4037182
14	24587.13	25365.80	103166.97	9.3907079	9.4042486
15	24615.33	25396.76	103174.59	9.3912057	9.4047784
16	24643.52	25427.73	103182.22	9.3917028	9.4053076
17	24671.71	25458.70	103189.85	9.3921993	9.4058363
18	24699.90	25489.68	103197.50	9.3926952	9.4063644
19	24728.09	25520.66	103205.16	9.3931905	9.4068919
20	24756.27	25551.65	103212.82	9.3936852	9.4074189
21	24784.45	25582.64	103220.50	9.3941794	9.4079453
22	24812.63	25613.63	103228.18	9.3946729	9.4084712
23	24840.81	25644.63	103235.88	9.3951658	9.4089965
24	24868.99	25675.63	103243.59	9.3956581	9.4095212
25	24897.16	25706.64	103251.30	9.3961499	9.4100454
26	24925.33	25737.66	103259.03	9.3966410	9.4105690
27	24953.50	25768.68	103266.76	9.3971315	9.4110921
28	24981.67	25799.70	103274.51	9.3976215	9.4116146
29	25009.84	25830.73	103282.27	9.3981109	9.4121366
30	25038.00	25861.76	103290.03	9.3985996	9.4126581
31	25066.16	25892.80	103297.81	9.3990878	9.4131789
32	25094.32	25923.84	103305.59	9.3995754	9.4136993
33	25122.48	25954.88	103313.39	9.4000625	9.4142191
34	25150.63	25985.93	103321.19	9.4005489	9.4147383
35	25178.79	26016.99	103329.01	9.4010348	9.4152570
36	25206.94	26048.05	103336.83	9.4015201	9.4157752
37	25235.08	26079.11	103344.67	9.4020048	9.4162928
38	25263.23	26110.18	103352.51	9.4024889	9.4168099
39	25291.37	26141.26	103360.37	9.4029724	9.4173265
40	25319.52	26172.34	103368.23	9.4034554	9.4178425
41	25347.66	26203.42	103376.11	9.4039378	9.4183580
42	25375.79	26234.51	103383.99	9.4044196	9.4188729
43	25403.93	26265.60	103391.88	9.4049009	9.4193874
44	25432.06	26296.70	103399.79	9.4053816	9.4199013
45	25460.19	26327.80	103407.70	9.4058617	9.4204146
46	25488.32	26358.91	103415.63	9.4063413	9.4209275
47	25516.45	26390.02	103423.56	9.4068203	9.4214398
48	25544.58	26421.14	103431.51	9.4072987	9.4219515
49	25572.70	26452.26	103439.46	9.4077766	9.4224628
50	25600.82	26483.39	103447.43	9.4082539	9.4229735
51	25628.94	26514.52	103455.40	9.4087306	9.4234838
52	25657.05	26545.66	103463.38	9.4092068	9.4239935
53	25685.17	26576.80	103471.38	9.4096824	9.4245026
54	25713.28	26607.94	103479.38	9.4101575	9.4250113
55	25741.39	26639.09	103487.40	9.4106320	9.4255194
56	25769.50	26670.25	103495.42	9.4111059	9.4260271
57	25797.60	26701.41	103503.46	9.4115793	9.4265342
58	25825.70	26732.57	103511.50	9.4120522	9.4270408
59	25853.81	26763.74	103519.55	9.4125245	9.4275469
60	25881.90	26794.92	103527.62	9.4129962	9.4280525

75. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	97029.57	401078.09	413356.55	9.9869041	10.6032289
59	97022.53	400581.65	412874.87	9.9868726	10.6026911
58	97015.48	400086.36	412394.35	9.9868410	10.6021537
57	97008.42	399592.23	411914.98	9.9868094	10.6016170
56	97001.35	399099.24	411436.75	9.9867778	10.6010809
55	96994.28	398607.39	410959.67	9.9867461	10.6005453
54	96987.20	398116.69	410483.74	9.9867144	10.6000104
53	96980.11	397627.12	410008.93	9.9866827	10.5994760
52	96973.01	397138.68	409535.26	9.9866509	10.5989422
51	96965.90	396651.37	409062.73	9.9866191	10.[illegible]090
50	96958.79	396165.18	408591.30	9.9865872	10.5978763
49	96951.67	395680.11	408131.00	9.9865553	10.5973442
48	96944.54	395196.15	407651.81	9.9865233	10.5968127
47	96937.40	394713.31	407183.74	9.9864913	10.5962818
46	96930.25	394231.57	406716.77	9.9864593	10.5957514
45	96923.09	393750.94	406250.91	9.9864273	10.5952216
44	96915.92	393271.41	405786.15	9.9863952	10.5946924
43	96908.75	392792.97	405322.49	9.9863630	10.59416[illegible]
42	96901.57	392315.63	404859.92	9.9863308	10.5936356
41	96894.38	391839.37	404398.44	9.9862986	10.5931081
40	96887.18	391364.20	403938.04	9.9862663	10.5925811
39	96879.98	390890.11	403478.72	9.9862340	10.5920547
38	96872.77	390417.10	403020.48	9.9862017	10.5915288
37	96865.55	389945.16	402563.32	9.9861693	10.5910035
36	96858.32	389474.29	402107.22	9.9861369	10.5904788
35	96851.08	389004.48	401652.19	9.9861045	10.5899546
34	96843.83	388535.74	401198.23	9.9860720	10.5894310
33	96836.57	388068.05	400745.32	9.9860394	10.5889079
32	96829.31	387601.42	400293.47	9.9860069	10.5883854
31	96822.04	387135.84	399842.67	9.9859742	10.5878634
30	96814.76	386671.31	399392.92	9.9859416	10.5873419
29	96807.47	386207.82	398944.21	9.9859089	10.5868211
28	96800.18	385745.37	398496.54	9.9858762	10.5863007
27	96792.88	385283.96	398049.91	9.9858434	10.5857809
26	96785.57	384823.58	397604.31	9.9858106	10.5852617
25	96778.25	384364.24	397159.75	9.9857777	10.584743[illegible]
24	96770.92	383905.91	396716.21	9.9857449	10.5842248
23	96763.58	383448.61	396273.69	9.9857119	10.5837072
22	96756.23	382992.33	395832.19	9.9856790	10.5831901
21	96748.88	382537.07	395391.71	9.9856460	10.5826735
20	96741.52	382082.81	394952.24	9.9856129	10.5821575
19	96734.15	381629.57	394513.79	9.9855798	10.5816420
18	96726.77	381177.33	394076.33	9.9855467	10.5811271
17	96719.38	380726.09	393639.88	9.9855135	10.5806126
16	96711.99	380275.85	393204.43	9.9854803	10.5800987
15	96704.59	379826.61	392769.97	9.9854471	10.5795854
14	96697.18	379378.35	392336.51	9.9854138	10.5790725
13	96689.76	378931.09	391904.03	9.9853805	10.5785602
12	96682.33	378484.81	391472.54	9.9853471	10.5780485
11	96674.90	378039.51	391042.03	9.9853138	10.5775372
10	96667.46	377595.19	390612.50	9.9852803	10.5770265
9	96660.01	377151.85	390183.95	9.9852468	10.5765162
8	96652.55	376709.47	389756.37	9.9852133	10.5760065
7	96645.08	376268.07	389329.76	9.9851798	10.5754974
6	96637.60	375827.63	388904.11	9.9851462	10.5749887
5	96630.12	375388.15	388479.43	9.9851125	10.5744806
4	96622.63	374949.63	388055.70	9.9850789	10.5739729
3	96615.13	374512.07	387632.93	9.9850452	10.5734658
2	96607.62	374075.46	387211.12	9.9850114	10.5729598
1	96600.10	373639.80	386790.25	9.9849776	10.5724531
0	96592.58	373205.08	386370.33	9.9849438	10.5719479

Grad. 15. — 74. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	25881.90	26794.92	103527.62	9.4129962	9.4280525	60	96592.58	373205.08	386370.33	9.9849438	10.5719475
1	25910.00	26826.10	103535.69	9.4134674	9.4285575	59	96585.05	372771.31	385951.35	9.9849099	10.5714425
2	25938.10	26857.28	103543.78	9.4139381	9.4290621	58	96577.51	372338.47	385533.32	9.9848760	10.5709379
3	25966.19	26888.47	103551.87	9.4144082	9.4295661	57	96569.96	371906.58	385116.22	9.9848420	10.5704339
4	25994.28	26919.67	103559.98	9.4148078	9.4300697	56	96562.40	371475.61	384700.05	9.9848081	10.5699303
5	26022.37	26950.87	103568.09	9.4153468	9.4305727	55	96554.83	371045.58	384284.82	9.9847740	10.5694273
6	26050.45	26982.07	103576.21	9.4158152	9.4310753	54	96547.26	370616.48	383870.51	9.9847400	10.5689247
7	26078.53	27013.28	103584.35	9.4162832	9.4315773	53	96539.68	370188.30	383457.13	9.9847059	10.5684227
8	26106.61	27044.49	103592.49	9.4167506	9.4320789	52	96532.09	369761.03	383044.67	9.9846717	10.5679211
9	26134.69	27075.71	103660.65	9.4172174	9.4325799	51	96524.49	369334.69	382633.13	9.9846375	10.5674201
10	26162.77	27106.93	103608.81	9.4176837	9.4330804	50	96516.88	368909.27	382222.51	9.9846033	10.5669196
11	26190.85	27138.16	103616.99	9.4181495	9.4335805	49	96509.27	368484.75	381812.80	9.9845690	10.5664195
12	26218.92	27169.40	103625.17	9.4186148	9.4340800	48	96501.65	368061.15	381404.19	9.9845347	10.5659200
13	26246.99	27200.64	103633.37	9.4190795	9.4345791	47	96494.02	367638.45	380996.10	9.9845004	10.5654209
14	26275.06	27231.88	103641.57	9.4195436	9.4350776	46	96486.38	367216.65	380589.11	9.9844660	10.5649224
15	26303.12	27263.13	103649.79	9.4200073	9.4355757	45	96478.74	366795.76	380183.01	9.9844316	10.5644243
16	26331.18	27294.38	103658.01	9.4204704	9.4360733	44	96471.07	366375.75	379777.82	9.9843971	10.5639267
17	26359.24	27325.64	103666.25	9.4209330	9.4365704	43	96463.41	365956.65	379473.52	9.9843626	10.5634296
18	26387.30	27356.90	103674.49	9.4213950	9.4370670	42	96455.74	365538.44	378970.11	9.9843281	10.5629330
19	26415.36	27388.17	103682.75	9.4218566	9.4375631	41	96448.06	365121.11	378567.60	9.9842935	10.5624369
20	26443.42	27419.44	103691.01	9.4223176	9.4380587	40	96440.37	364704.67	378165.96	9.9842589	10.5619413
21	26471.47	27450.72	103699.29	9.4227780	9.4385538	39	96432.67	364289.11	377765.22	9.9842242	10.5614462
22	26499.53	27482.01	103707.57	9.4232380	9.4390485	38	96424.97	363874.44	377365.35	9.9841895	10.5609515
23	26527.57	27513.30	103715.87	9.4236974	9.4395426	37	96417.26	363460.64	376966.36	9.9841548	10.5604574
24	26555.61	27544.59	103724.17	9.4241563	9.4400363	36	96409.54	363047.71	376568.24	9.9841200	10.5599637
25	26583.65	27575.89	103732.49	9.4246147	9.4405295	35	96401.81	362635.66	376171.00	9.9840852	10.5593705
26	26611.69	27607.19	103740.82	9.4250726	9.4410222	34	96394.07	362224.47	375774.62	9.9840503	10.5589778
27	26639.73	27638.50	103749.15	9.4255299	9.4415145	33	96386.33	361814.15	375379.11	9.9840154	10.5584855
28	26667.77	27669.81	103757.50	9.4259867	9.4420062	32	96378.58	361404.69	374984.47	9.9839805	10.5579938
29	26695.41	27701.13	103765.85	9.4264430	9.4424975	31	96370.82	360996.09	374590.68	9.9839455	10.5575025
30	[illegible]723.84	27732.45	103774.22	9.4268988	9.4429883	30	96363.06	360588.35	374197.75	9.9839105	10.5570117
31	26751.87	27763.78	103782.60	9.4273540	9.4434786	29	96355.27	360181.46	373805.68	9.9838755	10.5565214
32	26779.89	27795.12	103790.98	9.4278089	9.4439685	28	96347.48	359775.43	373414.46	9.9838404	10.5560315
33	26807.92	27826.46	103799.38	9.4282631	9.4444579	27	96339.69	359370.24	373024.09	9.9838052	10.5555421
34	26835.94	27857.80	103807.79	9.4287169	9.4449468	26	96331.89	358965.90	372634.57	9.9837701	10.5550532
35	26863.96	27889.15	103816.21	9.4291701	9.4454352	25	96324.08	358562.41	372245.89	9.9837348	10.5545648
36	26891.98	27920.50	103824.63	9.4296228	9.4459232	24	96316.26	358159.75	371858.05	9.9836996	10.5540768
37	22920.00	27951.86	103833.07	9.4300750	9.4464107	23	96308.43	357757.94	371471.05	9.9836643	10.5535893
38	26948.01	27983.22	103841.52	9.4305267	9.4468978	22	96300.59	357356.96	371084.89	9.9836290	10.5531122
39	26976.02	28014.59	103849.98	9.4309779	9.4473843	21	96292.75	356956.81	370699.56	9.9835936	10.5526157
40	27004.03	28045.97	103858.44	9.4314286	9.4478704	20	96284.90	356557.49	370315.06	9.9835582	10.5521296
41	27032.04	28077.35	103866.92	9.4318788	9.4483561	19	96277.04	356159.00	369931.39	9.9835227	10.5516439
42	27060.04	28108.73	103875.41	9.4323285	9.4488413	18	96269.17	355761.33	369548.54	9.9834872	10.5511587
43	27088.05	28140.12	103883.91	9.4327777	9.4493260	17	96261.30	355364.49	369166.52	9.9834517	10.5506740
44	27116.05	28171.52	103892.42	9.4332264	9.4498102	16	96253.42	354968.46	368785.32	9.9834161	10.5501898
45	27144.04	28202.92	103900.94	9.4336746	9.4502940	15	96245.53	354573.25	368404.93	9.9833805	10.5497060
46	27172.04	28234.32	103909.47	9.4341223	9.4507774	14	96247.63	354178.86	368025.36	9.9833449	10.5492226
47	27200.03	28265.73	103918.00	9.4345694	9.4512602	13	96229.72	353785.28	367646.60	9.9833092	10.5487398
48	27228.02	28297.15	103926.53	9.4350161	9.4517427	12	96221.80	353392.51	367268.65	9.9832735	10.5482573
49	27256.01	28328.57	103935.11	9.4354623	9.4522246	11	96213.87	353000.54	366891.51	9.9832377	10.5477754
50	27284.00	28359.99	103943.68	9.4359080	9.4527061	10	96205.94	352609.38	366515.18	9.9832019	10.5472939
51	27311.98	28391.42	103952.26	9.4363532	9.4531872	9	96198.00	352219.02	366139.64	9.9831661	10.5468128
52	27339.96	28422.86	103960.85	9.4367980	9.4536678	8	96190.05	351829.46	365764.91	9.9831302	10.5463322
53	27367.94	28454.30	103969.45	9.4372422	9.4541479	7	96182.69	351440.70	365390.97	9.9830942	10.5458521
54	27395.92	28485.75	103978.06	9.4376859	9.4546276	6	96174.13	351052.73	365017.83	9.9830583	10.5453724
55	27423.90	28517.20	103986.69	9.4381292	9.4551069	5	96166.16	350665.55	364645.48	9.9830223	10.5448931
56	27451.87	28548.66	103995.32	9.4385719	9.4555857	4	96158.18	350279.16	364273.92	9.9829862	10.5444143
57	27479.84	28580.12	104003.96	9.4390142	9.4560641	3	96150.19	349893.56	363903.15	9.9829501	10.5439359
58	27507.81	28611.59	104012.61	9.4394560	9.4565420	2	96142.19	349508.74	363533.16	9.9829140	10.5434580
59	27535.78	28643.06	104021.27	9.4398973	9.4570194	1	96134.18	349124.70	363163.95	9.9828778	10.5429806
60	27563.74	28674.54	104029.94	9.4403381	9.4574964	0	96126.17	348741.44	362795.53	9.9828416	10.5425036

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang
0	27563.74	28674.54	104029.94	9.4403381	9.4574964	60	96126.17	348741.44	362795.53	9.9828416	10.5425036
1	27591.70	28706.02	104038.63	9.4407784	9.4579730	59	96118.15	348358.96	362427.88	9.9828054	10.5420270
2	27619.65	28737.51	104047.32	9.4412182	9.4584491	58	96110.12	347977.26	362061.01	9.9827691	10.5415509
3	27647.61	28769.00	104056.02	9.4416576	9.4589248	57	96102.08	347596.32	361694.90	9.9827328	10.5410752
4	27675.56	28800.50	104064.73	9.4420965	9.4594001	56	96094.03	347216.16	361329.57	9.9826964	10.5405999
5	27703.52	28832.01	104073.46	9.4425349	9.4598749	55	96085.98	346836.76	360965.01	9.9826600	10.5401251
6	27731.47	28863.52	104082.19	9.4429728	9.4603492	54	96077.92	346458.13	360601.21	9.9826236	10.5396508
7	27759.41	28895.03	104090.94	9.4434103	9.4608232	53	96069.85	346080.26	360238.18	9.9825871	10.5391768
8	27787.36	28926.55	104099.69	9.4438472	9.4612967	52	96061.77	345703.15	359875.90	9.9825506	10.5387033
9	27815.30	28958.08	104108.45	9.4442837	9.4617697	51	96053.68	345326.79	359514.39	9.9825140	10.5382303
10	27843.24	28989.61	104117.23	9.4447197	9.4622423	50	96045.58	344951.20	359153.63	9.9824774	10.5377577
11	27871.18	29021.14	104126.01	9.4451553	9.4627145	49	96037.48	344576.35	358793.62	9.9824408	10.5372855
12	27899.11	29052.68	104134.81	9.4455904	9.4631863	48	96029.37	344202.26	358434.37	9.9824041	10.5368137
13	27927.04	29084.23	104143.62	9.4460250	9.4636576	47	96021.25	343828.91	358075.86	9.9823674	10.5363424
14	27954.97	29115.78	104152.43	9.4464591	9.4641285	46	96013.12	343456.31	357718.10	9.9823306	10.5358715
15	27982.90	29147.34	104161.26	9.4468927	9.4645990	45	96004.98	343084.46	357361.08	9.9822938	10.5354010
16	28010.83	29178.90	104170.09	9.4473259	9.4650690	44	95996.84	342713.34	357004.81	9.9822569	10.5349310
17	28038.75	29210.47	104178.94	9.4477586	9.4655386	43	95988.69	342342.97	356649.28	9.9822201	10.5344614
18	28066.67	29242.05	104187.80	9.4481909	9.4660078	42	95980.53	341973.33	356294.48	9.9821831	10.5339922
19	28094.59	29273.63	104196.67	9.4486227	9.4664765	41	95972.36	341604.43	355940.42	9.9821462	10.5335235
20	28122.51	29305.21	104205.54	9.4490540	9.4669448	40	95964.18	341236.26	355587.10	9.9821092	10.5330552
21	28150.42	29336.80	104214.43	9.4494849	9.4674127	39	95956.00	340868.82	355234.50	9.9820721	10.5325873
22	28178.33	29368.39	104223.33	9.4499153	9.4678802	38	95947.81	340502.10	354882.63	9.9820351	10.5321198
23	28206.24	29399.99	104232.24	9.4503452	9.4683473	37	95939.61	340136.12	354531.49	9.9819979	10.5316527
24	28234.15	29431.60	104241.16	9.4507747	9.4688139	36	95931.40	339770.85	354181.07	9.9819608	10.5311861
25	28262.05	29463.21	104250.09	9.4512037	9.4692801	35	95923.18	339406.31	353831.38	9.9819236	10.5307199
26	28289.95	29494.83	104259.03	9.4516322	9.4697459	34	95914.95	339042.49	353482.40	9.9818863	10.5302541
27	28317.85	29526.45	104267.98	9.4520603	9.4702112	33	95906.72	338679.38	353134.14	9.9818490	10.5297888
28	28345.75	29558.08	104276.94	9.4524879	9.4706762	32	95898.48	338316.99	352786.60	9.9818117	10.5293238
29	28373.64	29589.71	104285.91	9.4529151	9.4711407	31	95890.23	337955.31	352439.77	9.9817744	10.5288593
30	28401.53	29621.35	104294.89	9.4533418	9.4716048	30	95881.97	337594.34	352093.65	9.9817370	10.5283952
31	28429.42	29652.99	104303.88	9.4537681	9.4720685	29	95873.70	337234.08	351748.24	9.9816995	10.5279315
32	28457.31	29684.64	104312.89	9.4541939	9.4725318	28	95865.43	336874.53	351403.54	9.9816620	10.5274682
33	28485.20	29716.30	104321.90	9.4546192	9.4729947	27	95857.15	336515.68	351059.54	9.9816245	10.5270055
34	28513.08	29747.96	104330.92	9.4550441	9.4734571	26	95848.86	336157.53	350716.25	9.9815870	10.5265428
35	28540.96	29779.62	104339.95	9.4554686	9.4739192	25	95840.56	335800.08	350373.65	9.9815494	10.5260808
36	28568.84	29811.29	104349.00	9.4558926	9.4743808	24	95832.25	335443.33	350031.75	9.9815117	10.5256192
37	28596.71	29842.97	104358.05	9.4563161	9.4748421	23	95823.94	335087.28	349690.55	9.9814740	10.5251579
38	28624.58	29874.65	104367.12	9.4567392	9.4753029	22	95815.62	334731.91	349350.05	9.9814363	10.5246971
39	28652.45	29906.24	104376.19	9.4571618	9.4757633	21	95807.29	334377.24	349010.24	9.9813986	10.5242367
40	28680.32	29938.03	104385.28	9.4575840	9.4762233	20	95798.95	334023.26	348671.10	9.9813608	10.5237767
41	28708.19	29969.73	104394.37	9.4580058	9.4766829	19	95790.60	333669.97	348332.67	9.9813229	10.5233171
42	28736.05	30001.44	104403.48	9.4584271	9.4771421	18	95782.25	333317.36	347994.92	9.9812850	10.5228579
43	28763.91	30033.15	104412.59	9.4588480	9.4776009	17	95773.89	332965.43	347657.85	9.9812471	10.5223991
44	28791.77	30064.86	104421.72	9.4592684	9.4780592	16	95765.52	332614.19	347321.46	9.9812091	10.5219408
45	28819.63	30096.58	104430.86	9.4596884	9.4785172	15	95757.14	332263.62	346985.76	9.9811711	10.5214828
46	28847.48	30128.31	104440.01	9.4601079	9.4789748	14	95748.75	331913.73	346650.73	9.9811351	10.5210252
47	28875.33	30160.04	104449.17	9.4605270	9.4794319	13	95740.35	331564.52	346316.37	9.9810950	10.5205681
48	28903.18	30191.78	104458.33	9.4609456	9.4798887	12	95731.95	331255.98	345982.69	9.9810569	10.5201113
49	28931.03	30223.52	104467.51	9.4613638	9.4803451	11	95723.54	330868.11	345649.69	9.9810187	10.5196549
50	28958.87	30255.27	104476.70	9.4617816	9.4808011	10	95715.12	330520.91	345317.35	9.9809805	10.5191989
51	28986.71	30287.03	104485.90	9.4621989	9.4812566	9	95706.69	330174.38	344985.68	9.9809423	10.5187434
52	29014.55	30318.79	104495.11	9.4626158	9.4817118	8	95698.29	329828.51	344654.67	9.9809040	10.5182882
53	29042.39	30350.55	104504.33	9.4630323	9.4821666	7	95689.81	329483.30	344324.33	9.9808657	10.5178334
54	29070.22	30382.32	104513.57	9.4634483	9.4826210	6	95681.36	329138.76	343994.65	9.9808273	10.5173790
55	29098.05	30414.10	104522.81	9.4638639	9.4830750	5	95672.90	329794.87	343665.63	9.9807889	10.5169250
56	29125.88	30445.88	104532.06	9.4642790	9.4835286	4	95664.43	328451.64	343337.27	9.9807505	10.5164714
57	29153.71	30477.67	104541.32	9.4646938	9.4839818	3	95655.95	328109.07	343009.56	9.9807120	10.5160182
58	29181.53	30506.46	104550.60	9.4651081	9.4844346	2	95647.47	327767.15	342682.51	9.9806735	10.5155654
59	29209.35	30541.26	104559.88	9.4655219	9.4848870	1	95638.98	327425.88	342356.11	9.9806349	10.5151130
60	29237.17	30573.07	104569.18	9.4659353	9.4853390	0	95630.48	327085.26	342030.36	9.9805963	10.5146610

Grad. 17.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	29237.17	30573.07	104569.18	9.4659353	9.4853390
1	29264.99	30604.88	104578.48	9 4663483	9.4857907
2	29292.80	30636.69	104587.80	9.4667609	9.4862419
3	29320.61	30668.51	104597.12	9.4671730	9.4866928
4	29348.42	30700.34	104606.46	9.4675848	9.4871433
5	29376.23	30732.18	104615.81	9.4679960	9.4875933
6	29404.03	30764.02	104625 16	9.4684069	9 4880430
7	29431.83	30795.86	104634.53	9.4688173	9.4884924
8	29459.63	30827.71	104643.91	9.4692273	9.4889413
9	29487.43	30859.57	104653.30	9 4696369	9.4893898
10	29515.22	30891.43	104662.70	9.4700461	9.4898380
11	29543.01	30923 30	104672.11	9.4704548	9.4902858
12	29570.80	30955.17	104681.53	9.4708631	9 4907332
13	29598.59	30987.05	104690.96	9.4712710	9.4911802
14	29626.38	31018.93	104700.40	9.4716785	9.4916269
15	29654.16	31050.82	104709.86	9.4720856	9.4920731
16	29681.94	31082.72	104719.32	9.4724922	9.4925190
17	29709.71	31114.62	104728.79	9.4728985	9.4929646
18	29737.49	31146.53	104738.28	9.4733043	9.4934097
19	29765.26	31178.44	104747.77	9.4737097	9 4938545
20	29793.03	31210.36	104757.28	9.4741146	9.4942988
21	29820.79	31242.29	104766.79	9.4745192	9.4947429
22	29848.56	31274.22	104776.32	9.4749232	9 4951865
23	29876.32	31306.16	104785.86	9.4753271	9.4956298
24	29904.08	31338.10	104795.40	9.4757304	9.4960727
25	29931.84	31370.05	104804.96	9.4761334	9.4965152
26	29959.59	31402 00	104814.53	9.4763359	9.4969574
27	29987.34	31433.96	104824.11	9.4769380	9.4973991
28	30015.09	31465.93	104833.70	9.4773396	9.4978406
29	30042.84	31497.90	104843.30	9.4777409	9.4982816
30	30070.58	31529.88	104852.91	9.4781418	9 4987.223
31	30098.32	31561.86	104862.53	9.4785423	9.4991626
32	30126.06	31593.85	104872.17	9.4789423	9.4996026
33	30153.80	31625.85	104881.81	9.4793420	9.5000422
34	30181.53	31657.85	104891.46	9.4797412	9.5004814
35	30209.26	31689 86	104901.13	9.4801401	9.5009203
36	30236 99	31721.87	104910.80	9.4805385	9.5013588
37	30264.71	31753.89	104920.49	9.4809366	9.5017969
38	30292.44	31785.91	104930.19	9.4813342	9.5022347
39	30320.16	31817.94	104939.89	9.4817315	9.5026721
40	30347.88	31849.98	104949.61	9.4821283	9.5031092
41	30375.59	31882.02	104959.34	9.4825248	9.5035459
42	30403.31	31914.07	104969.08	9 4829208	9.5039822
43	30431.02	31946.13	104978.83	9.4833165	9.5044182
44	30458.72	31978.19	104988.59	9.4837117	9.5048538
45	30486.43	32010.25	104998.36	9.4841066	9.5052891
46	30514.13	32042.32	105008.15	9.4845010	9.5057240
47	30541.83	32074.40	105017.94	9.4848951	9.5061586
48	30569.53	32106.49	105027.74	9.4852888	9.5065928
49	30597.23	32138.58	105037.56	9.4856820	9.5070267
50	30524.92	32170.67	105047.38	9.4860749	9.5074602
51	30652.61	32202.77	105057.22	9.4864674	9.5078933
52	30680.29	32234.88	105067.06	9.4868595	9.5083261
53	30707.98	32267.00	105076.92	9 4872512	9.5087586
54	30735.66	32299.12	105086.79	9.4876426	9.5091907
55	30763.34	32331.25	105096.67	9.4880335	9.5096224
56	30791.02	32363.38	105106.56	9.4884240	9.5100539
57	30818.60	32395.52	105116.46	9.4888142	9.5104849
58	30846.36	32427.66	105126.37	9.4892040	9.5109156
59	30874.03	32459.81	105136.29	9.4895934	9.5113460
60	30901.70	32491.97	105146.22	9.4899824	9.5117760

72. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	95630 48	327085.26	342030.36	9.9805963	10.5146610
59	95621.97	326745.29	341705.26	9.9805577	10.5142093
58	95613.45	326405.96	341780.80	9.9805190	10.5137581
57	95604 92	326067.28	341056.99	9.9804803	10.5133072
56	95596.39	325729.24	340733.82	9.9804415	10.5128567
55	95587.85	325391.84	340411.30	9.9804027	10.5124067
54	95579.30	325055.08	340089.31	9.9803639	10.5119570
53	95570.74	324718.95	339768.16	9.9803250	10.5115076
52	95562.17	324383.46	339447.54	9.9802860	10.5110587
51	95553.60	324048.60	339127.55	9.9802471	10.5106102
50	95545.02	323714.38	338808.20	9.9802081	10.5101620
49	95536.43	323380.78	338489.48	9.9801690	10.5097142
48	95527.83	323047.80	338171.38	9.9801299	10.5092668
47	95519.22	322715.46	337853.91	9.9800908	10.5088198
46	95510.61	322383.73	337537.07	9.9800516	10.5083731
45	95501.99	322052.63	337220.84	9.9800124	10.5079269
44	95493.36	321722.15	336905.24	9.9799732	10.5074810
43	95484.72	321392.28	336590.26	9.9799339	10.5070354
42	95476.07	321063.04	336275.89	9.9798946	10.5065903
41	95467.42	320734.40	335962.14	9.9798552	10.5061455
40	95458.76	320406.38	335649.00	9.9798158	10.5057012
39	95450.09	320078.97	335336 47	9.9797764	10.5052571
38	95441.41	319752.17	335024.55	9.9797369	10.5048135
37	95432.72	319425.98	334713.24	9.9796973	10.5043702
36	95424.03	319100 39	334402.54	9.9796578	10.5039273
35	95415.33	318775.40	334092.44	9.9796282	10.5034848
34	95406.62	318451.02	333782.94	9.9795785	10.5030426
33	95397.90	318127.24	333474.05	9.9795388	10.5026009
32	95349.17	317804.06	333165.75	9.9794991	10.5021594
31	95380 43	317481.47	332858.05	9.9794593	10.5017184
30	95371.69	317159.48	332550.95	9.9794195	10.5012777
29	95362.94	316838.08	332244.44	9.9793790	10.5008374
28	95354.18	316517.28	331938.53	9.9793398	10.5003974
27	95345.41	316197.06	331633.20	9.9792998	10.4999578
26	95336.64	315877.44	331328.47	9.9792599	10.4995186
25	95327.86	315558.40	331024.32	9.9792198	10.4990797
24	95319.07	315239.94	330720.76	9.9791798	10.4986412
23	95310.27	314922 07	330417.78	9.9791397	10.4982031
22	95301.46	314604.78	330115.39	9.9790996	10.4977653
21	95292.64	314288 07	329813.57	9.9790594	10.4973279
20	95283.82	313971.94	329512.34	9.9790192	10.4968908
19	95274.99	313656.39	329211.68	9.9789789	10.4964541
18	95266.15	313341.41	328911.60	9.9789386	10.4960178
17	95257.30	313027.01	328612.09	9.9788983	10.4955818
16	95249 44	312713.17	328313.16	9.9788579	10.4951462
15	95239.58	312399.91	328014.79	9.9788175	10 4947109
14	95230.71	312087.22	327717.00	9.9787770	10.4942760
13	95221.83	311775.09	327419.77	9.9787365	10.4938414
12	95212.94	311463.53	327123.11	9.9786960	10.4934072
11	95204.04	311152.54	326827.02	9.9786554	10.4929733
10	95195.14	310842.10	326531.49	9.9786148	10.4925398
9	95186.23	310532.23	326236.52	9.9785741	10.4921067
8	95177.31	310222.91	325942.11	9.9785334	10.4916738
7	95168.38	309914.16	325648.25	9.9784927	10.4912414
6	95159.44	309605.96	325354.96	9.9784519	10.4908093
5	95150.49	309298 31	325062.22	9.9784111	10.4903776
4	95141.54	308991.22	324770.03	9.9783702	10.4899461
3	95132.58	308684.68	324478.40	9.9783293	10.4895151
2	95123.61	308378.69	324187.32	9.9782883	10.4890844
1	95114.63	308073.25	323896.78	9.9782474	10.4886540
0	95105 65	307768.35	323606.80	9.9782063	10.4883240

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	30901.70	32491.97	105146.22	9.4899824	9.5117760	60	95105.65	307768.35	323606.80	9.9782063	10.4882240
1	30929.36	32524.13	105156.17	9.4903710	9.5122057	59	95096.66	307464.00	323317.36	9.9781683	10.4877943
2	30957.02	32556.30	105166.12	9.4907592	9.5126351	58	95087.66	307160.20	323028.46	9.9781241	10.4873649
3	30984.68	32588.48	105176.08	9.4911471	9.5130641	57	95078.65	306856.93	322740.11	9.9780830	10.4869359
4	31012.34	32620.66	105186.06	9.4915345	9.5134927	56	95069.63	306554.21	322452.30	9.9780418	10.4865073
5	31039.99	32652.85	105196.05	9.4916216	9.5139210	55	95060.60	306252.03	322165.03	9.9780006	10.4860790
6	31067.64	32685.04	105206.04	9.4923083	9.5143490	54	95051.57	305950.38	321878.30	9.9779593	10.4856510
7	31095.29	32717.24	105216.05	9.4926946	9.5147766	53	95042.53	305649.28	321592.10	9.9779180	10.4852234
8	31122.94	32749.44	105226.07	9.4930806	9.5152039	52	95033.48	305348.70	321306.44	9.9778766	10.4847961
9	31150.58	32781.65	105236.10	9.4934661	9.5156309	51	95024.42	305048.66	321021.37	9.9778353	10.4843691
10	31178.22	32813.87	105246.14	9.4938513	9.5160575	50	95015.36	304749.15	320736.73	9.9777938	10.4839425
11	31205.86	22846.10	105256.19	9.4942361	9.5164838	49	95006.29	304450.18	320452.66	9.9777523	10.4835162
12	31233.49	32878.33	105266.25	9.4946205	9.5169097	48	94997.21	304151.73	320169.13	9.9777108	10.4830903
13	31261.12	32910.56	105276.33	9.4950046	9.5173353	47	94988.12	303853.81	319886.13	9.9776693	10.4826647
14	31288.75	32942.80	105286.41	9.4953883	9.5177606	46	94979.02	303556.41	319603.65	9.9776277	10.4822394
15	31316.38	32975.05	105296.51	9.4957716	9.5181855	45	94969.91	303259.54	319321.70	9.9775860	10.4818145
16	31344.00	33007.31	105306.61	9.4961545	9.5186101	44	94960.80	302963.20	319040.28	9.9775444	10.4813899
17	31371.63	33039.57	105316.73	9.4965370	9.5190344	43	94951.68	302667.37	318759.37	9.9775026	10.4809656
18	31399.25	33071.84	105326.86	9.4969192	9.5194583	42	94942.55	302372.07	318478.99	9.9774609	10.4805417
19	31426.86	33104.11	105336.99	9.4973010	9.5198819	41	94933.41	302077.28	318199.12	9.9774191	10.4801181
20	31454.48	33136.39	105347.14	9.4976824	9.5203052	40	94924.26	301783.01	317919.78	9.9773772	10.4796948
21	31482.09	33168.68	105357.30	9.4980635	9.5207282	39	94915.11	301489.26	317640.95	9.9773354	10.4792718
22	31509.69	33200.97	105367.47	9.4984442	9.5211508	38	94905.95	301196.03	317362.64	9.9772934	10.4788492
23	31537.30	33233.27	105377.65	9.4988245	9.5215730	37	94896.78	300903.30	317084.84	9.9772515	10.4784270
24	31564.90	33265.57	105387.85	9.4992045	9.5219950	36	94887.60	300611.09	316807.56	9.9772095	10.4780050
25	31592.50	33297.88	105398.05	9.4995840	9.5224166	35	94878.41	300319.39	316530.78	9.9771674	10.4775834
26	31620.10	33330.20	105408.26	9.4999633	9.5228379	34	94869.22	300028.20	316254.52	9.9771253	10.4771621
27	31647.70	33362.52	105418.49	9.5003421	9.5232589	33	94860.02	299737.51	315978.76	9.9770832	10.4767411
28	31675.29	33394.85	105428.73	9.5007206	9.5236795	32	94850.81	299447.34	315703.51	9.9770410	10.4763205
29	31702.88	33427.19	105438.97	9.5010987	9.5240999	31	94841.59	299157.66	315428.77	9.9769988	10.4759001
30	31730.47	33459.53	105449.23	9.5014764	9.5245199	30	94832.36	298868.50	315154.53	9.9769566	10.4754801
31	31758.05	33491.88	105459.50	9.5018538	9.5249395	29	94823.13	298579.83	314880.79	9.9769143	10.4750605
32	31785.63	33524.24	105469.78	9.5022308	9.5253589	28	94813.89	298291.66	314607.56	9.9768722	10.4746411
33	31813.21	33556.60	105480.07	9.5026075	9.5257779	27	94804.64	298004.00	314334.83	9.9768296	10.4742221
34	31840.79	33588.97	105490.37	9.5029838	9.5261966	26	94795.38	297716.83	314062.59	9.9767872	10.4738034
35	31868.36	33621.34	105500.68	9.5033597	9.5266150	25	94786.11	297430.16	313790.86	9.9767447	10.4733850
36	31895.93	33653.72	105511.01	9.5037353	9.5270331	24	94776.84	297143.99	313519.62	9.9767022	10.4729669
37	31923.50	33686.11	105521.34	9.5041105	9.5272508	23	94767.56	296858.31	313248.87	9.9766597	10.4725492
38	31951.06	33718.50	105531.69	9.5044853	9.5278682	22	94758.27	296573.11	312978.62	9.9766171	10.47213 8
39	31978.63	33750.90	105542.04	9.5048598	9.5282853	21	94748.97	296288.42	312708.86	9.9765745	10.4717147
40	32006.19	33783.30	105552.41	9.5052339	9.5287021	20	94739.66	296004.22	312439.59	9.9765318	10.4712979
41	32033.74	33815.71	105562.79	9.5056077	9.5291186	19	94730.35	295720.50	312170.81	9.9764891	10.4708814
42	32061.30	33848.13	105573.18	9.5059811	9.5295347	18	95721.03	295437.27	311902.52	9.9764464	10.4704653
43	32088.85	33880.56	105583.58	9.5063542	9.5299505	17	94711.70	295154.53	311634.72	9.9764036	10.4700495
44	32116.40	33912.99	105593.99	9.5067268	9.5303661	16	94702.36	294872.27	311367.40	9.9763608	10.4696339
45	32143.95	33945.43	105604.41	9.5070992	9.5307813	15	94693.01	294590.50	311100.57	9.9763179	10.4692187
46	32171.49	33977.87	105614.85	9.5074712	9.5311961	14	94683.66	294309.21	310834.22	9.9762750	10.4688039
47	32199.03	34010.32	105625.29	9.5078428	9.5316107	13	94674.30	294028.46	310568.35	9.9762321	10.4684893
48	32226.57	34042.78	105635.75	9.5082141	9.5320250	12	94664.93	293748.07	310302.96	9.9761891	10.4679750
49	32254.10	34075.24	105646.21	9.5085850	9.5321389	11	94655.55	293468.22	310038.05	9.9761461	10.4675611
50	32281.64	34107.71	105656.69	9.5089556	9.5328526	10	94646.16	293188.85	309773 63	9.9761030	10.4671474
51	32309.17	34140.19	105667.18	9.5093258	9.5332659	9	94636.76	292909.95	309509.67	9.9760599	10.4667341
52	32336.70	34172.67	105677.68	9.5096956	9.5336789	8	94627.36	292231.52	309246.20	9.9760167	10.4663211
53	32364.22	34205.15	105688.19	9.5100651	9.5340916	7	94617.95	292353.58	308983.19	9.9759736	10.4659084
54	32391.74	34237.65	105698.71	9.5104343	9.5345040	6	94608.53	292076.10	308720.66	9.9759303	10.4654960
55	32419.26	34270.15	105709.24	9.5108031	9.5349161	5	94599.10	291799.09	308458.60	9.9758870	10.4660839
56	32446.78	34302.66	105719.78	9.5111716	9.5353278	4	94589.67	291522.56	308197 02	9.9758437	10.4646722
57	32474.29	34335.18	105730.34	9.5115397	9.5357393	3	94580.23	291246.49	307935.90	9.9758004	10.4642607
58	32501.80	34367.70	105740.90	9.5119074	9.5361505	2	94570.78	290970.89	307675.25	9.9757570	10.4638495
59	32529.31	34400.23	105750.48	9.5122749	9.5365613	1	94561.32	290695.76	307415.07	9.9757135	10.4634387
60	32556.82	34432.76	105762.07	9.5126419	9.5369719	0	94552.85	290421.09	307155.35	9.9756701	10.4630281

Grad. 19. — 70. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	32556.82	34432.76	105762.07	9.5126419	9.5369719	60	94551.85	290421.09	307155.35	9.9756701	10.4630281
1	32584.32	34465.30	105772.67	9.5130086	9.5373821	59	94542.38	290146.88	306896.10	9.9756265	10.4626179
2	32611.82	34497.85	105783.28	9.5133750	9.5377920	58	94532.90	289873.14	306637.31	9.9755830	10.4622080
3	32639.31	34530.40	105793.90	9.5137410	9.5382017	57	94523.41	289599.86	306378.98	9.9755394	10.4617983
4	32666.81	34562.96	105804.53	9.5141067	9.5386110	56	94513.91	289327.04	306121.11	9.9754957	10.4613890
5	32694.30	34595.53	105815.17	9.5144721	9.5390200	55	94504.40	289054.67	305863.70	9.9754521	10.4609800
6	32721.79	34628.10	105825.83	9.5148371	9.5394287	54	94494.89	288782.77	305606.75	9.9754083	10.4605713
7	32749.28	34660.68	105836.49	9.5152017	9.5398371	53	94485.37	288511.32	305350.26	9.9753646	10.4601629
8	32776.76	34693.27	105847.17	9.5155660	9.5402453	52	94475.84	288240.33	303094.23	9.9753208	10.4597547
9	32804.24	34725.86	105837.86	9.5159300	9.5406531	51	94466.30	287969.79	304838.64	9.9752769	10.4593469
10	32831.72	34758.46	105868.55	9.5162936	9.5410606	50	94456.75	287699.70	304583.52	9.9752330	10.4589394
11	32859.19	34791.07	105879.26	9.5166569	9.5414678	49	94447.20	287430.07	304328.84	9.9751891	10.4585322
12	32886.66	34823.68	105889.99	9.5170198	9.5418747	48	94437.64	287160.88	304074.62	9.9751451	10.4581253
13	32914.13	34856.30	105900.72	9.5173824	9.5422813	47	94428.07	286892.15	303820.84	9.9751011	10.4577187
14	32941.60	34888.93	105911.46	9.5177447	9.5426877	46	94418.49	286623.86	303567.52	9.9750570	10.4573123
15	32969.06	34921.56	105922.21	9.5181066	9.5430937	45	94408.90	286356.02	303314.64	9.9750129	10.4569063
16	32996.52	34954.20	105932.98	9.5184682	9.5434994	44	94399.31	286088.63	303062.21	9.9749688	10.4565006
17	33023.98	34986.85	105943.76	9.5188295	9.5439048	43	94389.71	285821.68	303810.23	9.9749246	10.4560952
18	33051.44	35019.50	105954.54	9.5191904	9.5443100	42	94380.10	285555.17	302558.68	9.9748804	10.4556900
19	33078.89	35052.16	105965.34	9.5195510	9.5447148	41	94370.48	285289.11	302307.59	9.9748361	10.4552852
20	33106.34	35084.83	105976.15	9.5199112	9.5451193	40	94360.85	285023.49	302056.93	9.9747918	10.4548807
21	33133.79	35117.50	105985.97	9.5202711	9.5455236	39	94351.21	284758.31	301806.72	9.9747475	10.4544764
22	33161.23	35150.18	105997.81	9.5206307	9.5459276	38	94341.57	284493.56	301556.94	9.9747031	10.4540724
23	33188.67	35182.87	106008.65	9.5209899	9.5463312	37	94331.92	284229.26	301307.60	9.9746587	10.4536688
24	33216.11	35215.56	106019.51	9.5213488	9.5467346	36	94322.26	283965.39	301058.70	9.9746142	10.4532654
25	33243.55	35248.26	106030.37	9.5217074	9.5471377	35	94312.60	283701.96	300810.24	9.9745697	10.4528623
26	33270.98	35280.97	106041.25	9.5220656	9.5475405	34	94302.93	283438.96	300562.21	9.9745252	10.4534595
27	33298.41	35310.68	106052.14	9.5224235	9.5479433	33	94293.25	283176.39	300314.62	9.9744806	10.4520570
28	33325.84	35346.40	106063.04	9.5227811	9.5483452	32	94283.56	282914.26	300067.46	9.9744359	10.4516548
29	33353.27	35379.13	106073.95	9.5231383	9.5487471	31	94273.86	282652.56	299820.73	9.9743913	10.4512529
30	33380.69	35411.86	106084.87	9.5234953	9.5491487	30	94264.15	282391.29	299674.43	9.9743466	10.4508513
31	33408.10	35444.60	106095.80	9.5238518	9.5495500	29	94254.43	282130.45	299328.56	9.9743018	10.4504500
32	33435.52	35477.35	106106.75	9.5242081	9.5499511	28	94244.71	281870.03	299083.12	9.9742570	10.4500489
33	33462.93	35510.10	106117.70	9.5245640	9.5503519	27	94234.98	281610.04	298838.11	9.9742122	10.4496481
34	33490.34	35542.86	106128.67	9.5249196	9.5507523	26	94225.24	281350.48	298593.52	9.9741673	10.4492477
35	33517.75	35575.60	106139.65	9.5252749	9.5511525	25	94215.50	281091.34	298349.36	9.9741224	10.4488475
36	33545.16	35608.40	106150.64	9.5256298	9.5515524	24	94205.75	280832.63	298105.63	9.9740774	10.4484476
37	33572.56	35641.18	106161.64	9.5259844	9.5519521	23	94195.99	280574.33	297862.31	9.9740324	10.4486479
38	33599.96	35673.97	106172.65	9.5263387	9.5523514	22	94186.22	280316.46	297619.42	9.9739873	10.4476486
39	33627.45	35706.76	106183.67	9.5266927	9.5527504	21	94176.44	280059.01	297376.95	9.9739422	10.4472496
40	33654.75	35739.56	106194.71	9.5270463	9.5531492	20	94166.65	279801.98	297134.90	9.9738971	10.4468508
41	33682.14	35772.37	106205.75	9.5273997	9.5535477	19	94156.85	279545.37	296893.27	9.9738519	10.4464523
42	33709.53	35805.18	106216.81	9.5277526	9.5539459	18	94147.05	279289.17	296652.05	9.9738067	10.4460541
43	33736.91	35838.00	106227.88	9.5281053	9.5543438	17	94137.24	279033.39	296411.25	9.9737615	10.4456562
44	33764.29	35870.38	106238.96	9.5284577	9.5547415	16	94127.42	278778.02	296170.87	9.9737162	10.4452585
45	33791.67	35903.67	106250.05	9.5288097	9.5551388	15	94117.60	278523.07	295930.90	9.9736709	10.4448612
46	33819.05	35936.51	106261.15	9.5291614	9.5555359	14	94107.77	278268.53	295691.35	9.9736255	10.4444641
47	33846.42	35969.36	106272.27	9.5295128	9.5559327	13	94097.93	278014.40	295452.21	9.9735801	10.4440673
48	33873.79	36002.22	106283.39	9.5298638	9.5563292	12	94088.08	277760.69	295213.46	9.9735346	10.4436708
49	33901.16	36035.08	106294.53	9.5302146	9.5567255	11	94078.22	277507.38	294975.16	9.9734891	10.4432745
50	33928.53	36067.95	106305.68	9.5305650	9.5571214	10	94068.35	277254.48	294737.25	9.9734435	10.4428786
51	33955.89	36100.83	106316.84	9.5309151	9.5575171	9	94058.48	277001.99	294499.75	9.9733980	10.4424829
52	33983.25	36133.71	106328.01	9.5312649	9.5579125	8	94048.60	276749.90	294262.65	9.9733523	10.4420875
53	34010.60	36166.60	106339.19	9.5316143	9.5583077	7	94038.71	276498.22	294025.97	9.9733067	10.4416923
54	34037.95	36199.50	106350.38	9.5319635	9.5587025	6	94028.81	276246.95	293789.68	9.9732620	10.4412975
55	34065.30	36232.40	106361.58	9.5323123	9.5590971	5	94018.90	275996.08	293553.80	9.9732152	10.4409029
56	34092.65	36265.31	106372.80	9.5326608	9.5594914	4	94008.99	275745.61	293318.33	9.9731694	10.4405086
57	34120.00	36298.23	106384.03	9.5330090	9.5598854	3	93999.07	275495.54	293083.26	9.9731236	10.4401146
58	34147.34	36331.15	106395.27	9.5333569	9.5602792	2	93989.14	275245.88	292848.58	9.9730777	10.4397208
59	34174.68	36364.08	106406.52	9.5337044	9.5606727	1	93979.20	274996.61	292614.31	9.9730318	10.4393273
60	34202.02	36397.02	106417.78	9.5340517	9.5610659	0	93969.26	274747.74	292380.44	9.9729858	10.4389341

34202.02

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.
0	34202.02	36497.92	106417.78	9.5340517	9.5610658	93969.26	274747.74	292380.44	9.9729858	10.4389341	60
1	34229.35	36429.97	106429.05	9.5343986	9.5614588	93959.31	274499 27	292146.97	9.9729398	10.4385412	59
2	34256.68	36462.92	106440.33	9.5347452	9.5618515	93949.35	274251.20	291913.89	9.9728938	10.4381485	58
3	34284.01	36495.88	106451.63	9.5350915	9.5622439	93939.38	274003.52	291681.21	9.9728477	10.4377561	57
4	34311 33	36528.85	106462.94	9.5354375	9.5626360	93929.40	273356.23	291448.92	9.9728016	10.4373640	56
5	34338.65	36561.82	106474.26	9.5357832	9.5630278	93919.42	273509.34	291217.03	9.9727554	10.4369722	55
6	34365.97	36594.80	106485.59	9.5361286	9.5634194	93909.43	273262.84	290985.53	9.9727092	10.4365806	54
7	34393.29	36627.79	106496.93	9.5364737	9.5638107	93899.43	273016.74	290754.43	9.9726626	10.4361893	53
8	34420.60	36660.79	106508.28	9.5368184	9.5642018	93889.42	272771.02	290523.72	9.9726166	10.4357982	52
9	34447.91	36693.79	106519.64	9.5371628	9.5645925	93879.40	272525.69	290293 39	9.9725703	10.4354075	51
10	34475.22	36726.80	106531.01	9.5375069	9.5649831	93869.37	272220.75	290063.47	9.9725239	10.4350169	50
11	34502.52	36759.82	106542.40	9.5378508	9.5653733	93859.34	272036.20	289833.91	9.9724775	10.4346267	49
12	34529.82	36792.84	106553.80	9.5381943	9.5657633	93849.30	271792.04	289604.75	9.9724310	10.4342367	48
13	34557.12	36825.87	106565.21	9.5385375	9.5661530	93839.25	271548.26	289375.98	9.9723845	10.4338470	47
14	34584.42	36859.91	106576.63	9.5388804	9.5665424	93829.19	271304.87	289147 60	9.9723380	10.4334576	46
15	34611 71	36891.95	106588.07	9.5392230	9.5669316	93819.13	27106886.	288919.59	9.9722914	10.4330684	45
16	34639.00	36925.00	106599.51	9.5395653	9.5671205	93809.06	270819.23	288691.98	9.9722448	10.4326795	44
17	34666.29	36958.06	106610.97	9.5399073	9.5677091	93798.98	270576.99	288464.74	9.9721981	10.4322909	43
18	34693.57	36991.13	106622.43	9.5402489	9.5680975	93788.89	270335.13	288237.89	9.9721514	10.4319025	42
19	34720.85	37024.20	106633.91	9.5405903	9.5684856	93778.79	270093.64	288011.42	9.9721047	10.4315144	41
20	34748.13	37057.28	106645.40	9.5409314	9.5688735	93768.69	269852.54	287785.32	9.9720579	10.4311265	40
21	34775.40	37090.37	106656.90	9.5410721	9.5692611	93758.58	269611.81	287559.61	9.9720110	10.4307389	39
22	34802.67	37123.46	106668.42	9.5416126	9.5696484	93748.46	269371.47	287334 28	9.9719642	10.4303516	38
23	34829.94	37156.56	106679.94	9.5419527	9.5700355	93738.33	269131.49	287109.32	9 9719172	10.4299645	37
24	34857.21	37189.67	106691.48	9.5422926	9.5704223	93728.19	268891.90	286884.74	9 9718703	10.4295777	36
25	34884.47	37222.78	106703.02	9.5426321	9.5708088	93718.05	268652.67	286660.53	9.9718233	10.4291912	35
26	34911.73	37255.90	106714.58	9.5429713	9.5711951	93707.90	268413.83	286436.70	9.9717762	10.4288049	34
27	34938.99	37289.03	106726.15	9.5433103	9.5715811	93697.74	268175.35	286213.24	9.9717291	10.4284189	33
28	34966.24	37322.17	106737.74	9.5436489	9.5719669	93687.57	267937.25	285990.15	9.9716820	10.4280331	32
29	34993.49	37355.32	106749.34	9.5439873	9.5723524	93677.40	267699.51	285767.44	9.9716348	10.4276476	31
30	35020.74	37388.47	106760.94	9.5443253	9.5727377	93667.22	267462.15	285554.09	9.9715876	10.4272623	30
31	35047.99	37421.63	106772.55	9.5446630	9.5731227	93657.03	267225.16	285323.12	9.9715404	10.4268773	29
32	35075.23	37454.79	106784.18	9.5450005	9.5735074	93646.13	266988.53	285101.52	9.9714931	10.4268773	28
33	35102.47	37487.97	106795.82	9.5453376	9.5738919	93636.62	266752.27	284880.28	9.9714457	10.4261081	27
34	35129.70	37521.15	106807.47	9.5456745	9.5742761	93626.40	266516.38	284659.41	9.9713984	10.4257239	26
35	35156.93	37554.34	106819.14	9.5460110	9.5746601	93616.18	266280.85	284438.91	9.9713509	10.4253999	25
36	35184.16	37587.53	106830.81	9.5463472	9.5750438	73605.95	266045.69	284238.77	9.9713035	10.4249562	24
37	35211.39	37620.73	106842.50	9.5466832	9.5754272	93595.71	265810.89	283998.99	9.9712560	10.4245728	23
38	35238.62	37653.94	106854.20	9.5470189	9.5758104	93585.46	265576.45	223779.58	9.9712084	10.4241796	22
39	35265.84	37687.16	106865.91	9.5473542	9.5761934	93575.21	265342.38	283560.54	9.9711608	10.4238066	21
40	35293.06	37720 38	106877.63	9.5476893	9.5765761	93564.95	265108.67	283341.85	9.9711132	10.4234239	20
41	35320.27	37753.61	106889.36	9.5480240	9.5769585	93554.68	264875.31	283123.53	9.9710655	10.4230415	19
42	35347.48	37786.85	106901.10	9.5483585	9.5773407	93544.40	264642.32	283905.56	9.9710178	10.4226593	18
43	35374.69	37820.10	106912.86	9.5486927	9.5777226	93534.11	264409 69	282687.96	9.9709701	10.4222774	17
44	35401.90	37853.35	106924.63	9.5490266	9.5781043	93523.82	264177.41	282470.71	9.9709223	10.4218959	16
45	35429.10	37886.61	106936.41	9.5493602	9.5784858	93513.52	263941.49	282253.82	9.9708744	10.4215142	15
46	35456.30	37919.88	106948.20	9.5496935	9.5788669	93503.21	263713.92	282037.29	9.9708265	10.4211331	14
47	35483.50	37953.16	106960.00	9 5500265	9.5792479	93492.89	263482.71	281821.11	9.9707786	10.4207521	13
48	35510.70	37986.44	106971.82	9.5503592	9.5796286	93482.96	263251.86	281605.29	9.9707306	10.4203714	12
49	35537.89	38019.73	106983.64	9.5506916	9.5800090	93472.23	263021.36	281389.82	9.9706826	10.4209910	11
50	35565.08	38053.03	106995.48	9.5510237	9.5803892	93461.89	262791.21	281174.71	9.9706346	10.4196108	10
51	35592.26	38086.33	107007.33	9.5513556	9.5807691	93451.54	262561.41	180959.95	9.9705865	10.4192309	9
52	35619.44	38119.64	107019.19	9.5516871	9.5811488	93441.18	262331.96	280745.54	9.9705383	10.4188512	8
53	35646.62	38152.96	107031.06	9.5520184	9.5815282	93430.82	262102.86	280531.48	9.9704902	10.4182718	7
54	35673.80	38186.29	107042.95	9.5523494	9.5819074	93420.45	261874.11	280317.77	9.9704419	10.4180926	6
55	35700.97	38219.63	107054.84	9.5526801	9.5822864	93410.07	261645.71	280104.41	9.9703937	10.4177136	5
56	35728.14	38252.96	107066.75	9.5530105	9.5826651	93399.68	261417.66	279891.40	9.9703454	10.4173349	4
57	35755.31	38286.31	107078.67	9.5533406	9.5830435	93389.28	261189.95	279678.73	9.9702970	10.4169565	3
58	35782.48	38319.67	107090.60	9.5536704	9.5834217	93378.87	260962.59	279466.41	9.9702486	10.4165783	2
59	35809.24	38353.03	107102.54	9.5539999	9.5837997	93368.46	260735.58	279254.44	9.9702002	10.4162003	1
60	35836.79	38386.40	107114.50	9.5543292	9.5841774	93358.04	260508.91	279042.81	9.9701517	10.4158226	0

Grad. 21.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	35836.79	38386.40	107114.50	9.5543292	9.5841774
1	35863.95	38419.78	107126.47	9.5546581	9.5845549
2	35891.10	38453.17	107138.44	9.5549868	9.5849321
3	35918.25	38486.56	107150.43	9.5553152	9.5853091
4	35945.40	38519.96	107162.44	9.5556433	9.5856859
5	35972.54	38553.37	107174.45	9.5559711	9.5860624
6	35999.68	38586.79	107186.47	9.5562987	9.5864386
7	36026.82	38620.21	1071[illegible].51	9.5566259	9.5868147
8	36053.95	38653.64	107210.56	9.5569529	9.5871904
9	36081.08	38687.08	107222.61	9.5572796	9.5875660
10	36108.21	38720.53	107234.69	9.5576060	9.5879413
11	36135.33	38753.98	107246.78	9.5579321	9.5883163
12	36162.46	38787.44	107258.87	9.5582579	9.5886912
13	36189.58	38820.91	107270.98	9.5585835	9.5890657
14	36216.69	38854.39	107283.10	9.5589088	9.5894401
15	36243.80	38887.87	107295.23	9.5592338	9.5898142
16	36270.91	38921.36	107307.37	9.5595585	9.5901881
17	36298.02	38954.86	107319.53	9.5598829	9.5905617
18	36325.12	38988.37	107331.70	9.5602071	9.5909351
19	36352.22	39021.83	107343.88	9.5605310	9.5913082
20	36379.32	39055.41	107356.07	9.5608546	9.5916812
21	36406.41	39088.94	107368.27	9.5611779	9.5920539
22	36433.50	39122.48	107380.48	9.5615010	9.5924263
23	36460.59	39156.02	107392.71	9.5618237	9.5927985
24	36487.68	39189.57	107404.95	9.5621462	9.5931705
25	36514.76	39223.13	107417.20	9.5624685	9.5935422
26	36541.84	39256.70	107429.46	9.5627904	9.5939138
27	36568.92	39290.28	107441.73	9.5631121	9.5942851
28	36595.99	39323.86	107454.02	9.5634335	9.5946561
29	36623.06	39357.45	107466.31	9.5637546	9.5950269
30	36650.13	39391.05	107478.62	9.5640754	9.5953975
31	36977.19	39424.66	107490.95	9.5643960	9.5957679
32	36704.25	39458.28	107503.28	9.5647163	9.5961380
33	36731.31	39491.89	107515.62	9.5650363	9.5965079
34	36758.36	39525.52	107527.98	9.5653561	9.5968776
35	36785.41	39559.16	107540.35	9.5656756	9.5972470
36	36812.46	39592.80	107552.73	9.5659948	9.5976162
37	36839.50	39626.45	107565.12	9.5663137	9.5979852
38	36866.54	39660.11	107577.53	9.5666324	9.5983540
39	36893.58	39693.78	107589.95	9.5669508	9.5987225
40	36920.62	39727.46	107602.37	9.5672689	9.5990908
41	36947.65	39761.14	107614.81	9.5675868	9.5994588
42	36974.68	39794.83	107627.27	9.5679044	9.5998267
43	37001.70	39828.53	107639.73	9.5682217	9.6001943
44	37028.72	39862.24	107652.21	9.5685387	9.6005617
45	37055.74	39895.96	107664.70	9.5688555	9.6009289
46	37082.76	39929.58	107677.20	9.5691721	9.6012958
47	37109.77	39963.41	107689.71	9.5694883	9.6016625
48	37136.78	39997.15	107702.24	9.5698043	9.6020290
49	37163.79	40030.89	107714.77	9.5701200	9.6023954
50	37190.80	40064.65	107727.32	9.5704355	9.6027613
51	37217.80	40098.41	107739.88	9.5707506	9.6031271
52	37244.80	40132.18	107752.46	9.5710656	9.6034927
53	37271.79	40165.96	107765.04	9.5713802	9.6038581
54	37298.78	40199.75	107777.64	9.5716946	9.6042233
55	37325.77	40233.54	107790.25	9.5720087	9.6045882
56	37352.75	40267.34	107802.87	9.5723226	9.6049529
57	37379.73	40301.15	107815.50	9.5726362	9.6053174
58	37406.71	40334.97	107828.15	9.5729495	9.6056817
59	37433.69	40368.79	107840.80	9.5732626	9.6060457
60	37460.66	40402.62	107853.47	9.5735754	9.6064096

68. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	93358.04	260508.91	279042.81	9.9701517	10.4158226
59	93347.61	260282.58	278831.53	9.9701032	10.4154451
58	93337.17	260056.59	278620.59	9.9700547	10.4150679
57	93326.73	259830.95	278409.99	9.9700061	10.4146909
56	93316.28	259605.64	278199.73	9.9699574	10.4143141
55	93306.82	259380.68	277989.82	9.9699087	10.4139376
54	93295.35	259156.06	277780.24	9.9698600	10.4135614
53	93284.87	258931.77	277571.00	9.9698112	10.4131853
52	93274.29	258707.82	277362.11	9.9697624	10.4128095
51	93263.90	258484.21	277153.55	9.9697136	10.4124340
50	93253.40	258260.94	276945.32	9.9696647	10.4120587
49	93242.89	258038.00	276737.43	9.9696158	10.4116837
48	93232.38	257815.39	276529.88	9.9695668	10.4113088
47	93221.86	257593.12	276322.66	9.9695177	10.4109343
46	93211.33	257371.18	276115.78	9.9694687	10.4105599
45	93200.79	257149.57	275909.23	9.9694196	10.4101858
44	93190.24	256928.30	275703.01	9.9693704	10.4098119
43	93179.68	256707.35	275497.12	9.9693212	10.4094383
42	93169.12	256486.74	275291.57	9.9692720	10.4090649
41	93158.55	256266.45	275086.34	9.9692227	10.4086918
40	93147.97	256046.49	274881.42	9.9691734	10.4083188
39	93137.38	255826.86	274676.87	9.9691240	10.4079461
38	93127.79	255607.56	274472.63	9.9690746	10.4075737
37	93116.19	255388.58	274268.71	9.9690252	10.4072015
36	93105.58	255169.92	274065.12	9.9689757	10.4068295
35	93094.96	254951.60	273861.86	9.9689262	10.4064577
34	93084.33	254733.59	273658.92	9.9688766	10.4060862
33	93073.70	254515.91	273456.30	9.9688270	10.4057149
32	93063.06	254298.55	273254.00	9.9687773	10.4053439
31	93052.41	254081.51	273052.03	9.9687276	10.4049731
30	93041.75	253864.79	272850.38	9.9686779	10.4046025
29	93031.09	253648.36	272649.05	9.9686281	10.4042321
28	93020.42	253432.31	272448.04	9.9685783	10.4038620
27	93009.74	253216.55	272247.35	9.9685284	10.4034921
26	92999.05	253001.11	272046.98	9.9684785	10.4031224
25	92988.35	252785.98	271846.93	9.9684286	10.4027530
24	92977.65	252571.17	271647.19	9.9683786	10.4023838
23	92966.94	252356.67	271447.77	9.8683285	10.4020148
22	92956.22	252142.49	271248.66	9.9682784	10.4010460
21	92945.45	251928.63	271049.87	9.9682283	10.4012775
20	92934.75	251715.07	270851.39	9.9681781	10.4009092
19	92924.01	251501.83	270653.23	9.9681279	10.4005411
18	92913.06	251288.90	270455.38	9.9680777	10.4001733
17	92902.50	251076.29	270257.84	9.9680274	10.3998057
16	92891.73	250863.98	270060.61	9.9679771	10.3994383
15	92880.95	250651.98	269863.70	9.9679267	10.3990711
14	92870.17	250440.29	269667.09	9.9678763	10.3987042
13	92859.38	250228.91	269470.79	9.9678258	10.3983375
12	92848.58	250017.84	269274.80	9.9677753	10.3979710
11	92837.78	249807.07	269079.12	9.9677247	10.3976047
10	92826.96	249596.61	268883.74	9.9676741	10.3972387
9	92816.14	249386.45	268688.67	9.9676235	10.3968729
8	92805.31	249176.60	268493.91	9.9675728	10.3965073
7	92794.47	248967.06	268299.45	9.9675221	10.3961419
6	92783.62	248757.81	268105.30	9.9674713	10.3957767
5	92772.77	248548.87	267911.45	9.9674205	10.3954118
4	92761.91	248340.23	267717.60	9.9673697	10.3950471
3	92751.04	248131.90	267524.65	9.9673188	10.3946826
2	92740.16	247923.86	267331.70	9.9672679	10.3943183
1	92729.28	247716.12	267139.06	9.9672169	10.3939543
0	92718.39	247508.69	266946.72	9.9671655	10.3935904

37460.66

Grad. 22. | 67. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	37460.66	40402.62	107853.47	9.5735754	9.6064096	60	92718.39	247508.69	266946.72	9.9671659	10.3935904
1	37487.63	40436.46	107866.16	9.5738880	9.6067732	59	92707.41	247301.55	266754.67	9.9671148	10.3932268
2	37514.59	40470.31	107878.85	9.5742003	9.6071366	58	92696.58	247074.70	266562.92	9.9670637	10.3928634
3	37541.56	40504.17	107891.56	9.5745123	9.6074997	57	92685.66	246888.18	266371.48	9.9670125	10.3925003
4	37568.52	40538.04	107904.27	9.5748240	9.6078627	56	92674.73	246681.91	266180.33	9.9669614	10.3921373
5	37595.47	40571.91	107917.00	9.5751356	9.6082254	55	92663.80	246475.69	266989.47	9.9669101	10.3917746
6	37622.43	40605.79	107929.75	9.5754468	9.6085880	54	92652.86	246270.30	265798.91	9.9668588	10.3914120
7	37649.38	40639.68	107942.50	9.5757578	9.6089503	53	92641.91	246064.64	265608.65	9.9968075	10.3910497
8	37676.32	40673.58	107755.27	9.5760685	9.6093124	52	92630.96	245859.87	265418.68	9.9667562	10.3906876
9	37703.27	40707.48	107968.05	9.5763790	9.6096742	51	92620.00	245655.09	265229.01	9.9667048	10.3903258
10	37730.21	40741.39	107980.84	9.5766892	9.6100359	50	92609.03	245450.61	265039.62	9.9666533	10.3899641
11	37757.14	40775.31	107993.64	9.5769991	9.6103973	49	92598.05	245246.42	264850.54	9.9666018	10.3896027
12	37784.08	40809.24	108006.46	9.5773088	9.6107586	48	92587.06	245642.52	264661.74	9.9665503	10.3892414
13	37811.01	40843.18	108019.28	9.5776183	9.6111196	47	92576.06	244838.91	264473.23	9.9664987	10.3888804
14	37837.91	40877.13	108032.12	9.5779275	9.6114804	46	92565.06	244635.59	264285.02	9.9664471	10.3885196
15	37864.86	40911.08	108044.97	9.5782364	9.6118409	45	92554.05	244432.56	264097.09	9.9663954	10.3881591
16	37891.78	40945.04	108057.84	9.5785450	9.6122013	44	92543.03	244229.82	263909.46	9.9665437	10.3877987
17	37918.70	40979.01	108070.71	9.5788535	9.6125615	43	92532.00	244027.56	263722.11	9.9662920	10.3874585
18	37945.62	41012.99	108083.60	9.5791616	9.6129214	42	92520.97	243925.19	263535.05	9.9662401	10.3870785
19	37972.53	41046.97	108096.50	9.5794695	9.6132812	41	92509.93	243623.31	263348.28	9.9661884	10.3867188
20	37999.44	41080.97	108109.42	9.5797772	9.6136407	40	92498.88	243421.72	263161.80	9.9661365	10.3863593
21	38026.34	41114.97	108122.34	9.5800845	9.6140000	39	92487.82	243220.41	262975.60	9.9660846	10.3860000
22	38053.24	41148.98	108135.28	9.5803917	9.6143591	38	92472.75	243019.28	262789.69	9.9660326	10.3856409
23	38080.14	41183.00	108148.23	9.5806986	9.6147180	37	92465.68	242818.64	262604.06	9.9659806	10.3852820
24	38107.04	41217.03	108161.19	9.5810052	9.6150766	36	92454.60	242618.19	262418.72	9.9659285	10.3849234
25	38133.93	41251.06	108174.17	9.5813116	9.6154351	35	92443.51	242418.01	262233.66	9.9658764	10.3845649
26	38160.82	41285.10	108187.15	9.5816177	9.6157934	34	92432.41	242218.12	262048.88	9.9658243	10.3842066
27	38187.70	41319.15	108200.15	9.5819236	9.6161514	33	92421.31	242018.51	261864.39	9.9657721	10.3838486
28	38214.59	41353.21	108213.16	9.5822292	9.6165093	32	92410.20	241819.18	261680.18	9.9657199	10.3834907
29	38241.47	41387.28	108226.18	9.5825345	9.6168669	31	92399.08	241620.13	261496.24	9.9656677	10.3831331
30	38268.34	41421.36	108239.22	9.5828397	9.6172243	30	92387.95	241421.36	261312.59	9.9656153	10.3827757
31	38295.22	41455.24	108252.27	9.5831445	9.6175815	29	92376.81	241222.86	261129.22	9.9655630	10.3824185
32	38322.09	41489.53	108265.53	9.5834491	9.6179385	28	92365.67	241024.65	260946.13	9.9655106	10.3810615
33	38348.95	41523.63	108278.40	9.5837535	9.6182953	27	92354.52	240826.72	260763.32	9.9654582	10.3817047
34	38375.82	41557.74	108291.49	9.5840576	9.6186519	26	92343.36	240629.06	260580.78	9.9654057	10.3813481
35	38402.68	41591.86	108304.58	9.5843615	9.6190083	25	92332.19	240431.67	260398.52	9.9653532	10.3809917
36	38429.53	41625.99	108317.69	9.5846651	9.6193645	24	92321.02	240234.57	260216.54	9.9653006	10.3806355
37	38456.39	41660.12	108330.81	9.5849685	9.6197205	23	92309.84	240037.74	260034.84	9.9652480	10.3801795
38	38483.24	41694.26	108343.95	9.5852716	9.6200762	22	92298.61	239841.18	259853.41	9.9651952	10.3799238
39	38510.04	41728.41	108357.09	9.5855745	9.6204318	21	92287.45	239644.90	259672.25	9.9651426	10.3795682
40	38536.93	41762.57	108370.25	9.5858771	9.6207872	20	92276.24	239448.89	259491.37	9.9650899	10.3792128
41	38563.77	41796.74	108383.42	9.5861795	9.6211423	19	92265.03	239253.16	259310.77	9.9650371	10.3788577
42	38590.60	41830.91	108396.61	9.5864816	9.6214973	18	92253.81	239057.69	259130.43	9.9649843	10.3785027
43	38617.44	41865.09	108409.80	9.5867835	9.6218520	17	92242.58	238862.50	258950.37	9.9649314	10.3781480
44	38644.37	41899.28	108423.01	9.5870851	9.6222066	16	92231.34	238667.58	258770.58	9.9648785	10.3777934
45	38671.10	41933.48	108436.23	9.5873865	9.6225609	15	92220.09	238472.93	258591.07	9.9648256	10.3774391
46	38697.92	41967.69	108449.47	9.5876876	9.6229150	14	92208.84	238278.55	258411.82	9.9647726	10.3770850
47	38724.74	42001.91	108462.71	9.5879885	9.6232690	13	92197.58	238084.44	258232.44	9.9647195	10.3767310
48	38751.56	42036.13	108475.97	9.5882892	9.6236227	12	92186.21	237890.60	258054.14	9.9646665	10.3763773
49	38778.37	42070.36	108489.24	9.5885896	9.6239763	11	92175.03	237697.03	257875.70	9.9646133	10.3760237
50	38805.18	42104.60	108502.52	9.5888897	9.6243296	10	92163.75	237503.72	257697.53	9.9645602	10.3756704
51	38831.99	42138.85	108515.82	9.5891897	9.6246827	9	92152.46	237310.68	257519.64	9.9645069	10.3753173
52	38858.80	42173.11	108529.13	9.5894893	9.6250356	8	92141.16	237117.91	257341.99	9.9644537	10.3749644
53	38885.60	42207.38	108542.45	9.5897888	9.6253884	7	92129.85	236925.40	257164.52	9.964404	10.3746116
54	38912.39	42241.66	108555.78	9.5900880	9.6257409	6	92118.54	236733.16	256987.52	9.9643470	10.3742591
55	38939.19	42275.94	108569.12	9.5903869	9.6260932	5	92107.22	236541.18	256810.69	9.9642937	10.3739068
56	38995.98	42310.23	108582.48	9.5906856	9.6264454	4	92095.89	236349.46	256634.12	9.9642402	10.3735546
57	38992.77	42344.53	108595.85	9.5909841	9.6267973	3	92084.55	236158.01	256457.81	9.9641862	10.3732027
58	39019.55	42378.84	108609.24	9.5912823	9.6271491	2	92073.20	235966.83	256281.76	9.9641332	10.3728509
59	39046.33	42413.16	108622.63	9.5915803	9.6275006	1	92061.85	235775.90	256105.99	9.9640797	10.3724994
60	39073.11	42447.49	108636.04	9.5918780	9.6278519	0	92050.49	235585.24	255930.47	9.9640261	10.3721481

Grad. 23.

66. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	39073.11	42447.49	108636.04	9.5918780	9.6278519	60	92050.49	235585.24	255930.47	9.9640261	10.3721481
1	39099.89	42481.82	108649.46	9.5921755	9.6282031	59	92039.12	235394.83	255755.21	9.9639724	10.3717969
2	39126.66	42516.16	108662.89	9.5924728	9.6285540	58	92027.74	235204.69	255580.22	9.9639187	10.3714460
3	39153.43	42550.51	108676.34	9.5927698	9.6289048	57	92016.35	235014.81	255405.48	9.9638650	10.3710952
4	39180.19	42584.87	108689.79	9.5930666	9.6292553	56	92004.96	234825.19	255231.01	9.9638112	10.3707447
5	39206.95	42619.27	108703.26	9.5933631	9.6296057	55	91993.56	234635.82	255056.80	9.9637574	10.3703943
6	39233.71	42653.62	108716.75	9.5936594	9.6299558	54	91982.15	234446.72	254882.84	9.9637036	10.3700442
7	39260.47	42688.00	108730.24	9.5939555	9.6303058	53	91970.73	234257.87	254709.15	9.9636496	10.3696942
8	39287.22	42722.39	108743.75	9.5942513	9.6306556	52	91959.31	234069.28	254535.71	9.9635957	10.3693444
9	39313.97	42756.79	108757.27	9.5945469	9.6310052	51	91947.88	233880.95	254362.53	9.9635417	10.3689948
10	39340.71	42791.20	108770.80	9.5948422	9.6313545	50	91936.44	233692.87	254189.61	9.9634877	10.3686455
11	39367.45	42825.62	108784.35	9.5951373	9.6317037	49	91924.99	233505.05	254016.94	9.9634336	10.3682963
12	39394.19	42860.05	108797.91	9.5954322	9.6320527	48	91913.53	233317.48	253844.53	9.9633795	10.3679473
13	39420.93	42894.49	108811.48	9.5957268	9.6324015	47	91902.07	233130.17	253672.38	9.9633253	10.3675985
14	39447.66	42928.94	108825.06	9.5960212	9.6327501	46	91890.60	232943.11	253500.48	9.9632711	10.3672499
15	39474.39	42963.39	108838.66	9.5963154	9.6330985	45	91879.12	232756.30	253328.83	9.9632168	10.3669015
16	39501.11	42997.85	108852.27	9.5966093	9.6334468	44	91867.63	232569.75	253157.44	9.9631625	10.3665532
17	39527.83	43032.32	108865.89	9.5969010	9.6337948	43	91856.14	232383.45	252986.30	9.9631082	10.3662052
18	39554.55	43066.80	108879.52	9.5971965	9.6341426	42	91844.64	232197.40	252815.41	9.9630538	10.3658574
19	39581.27	43101.29	108893.17	9.5974897	9.6344903	41	91833.13	232011.60	252644.78	9.9629994	10.3655097
20	39609.98	43135.79	108906.8	9.5977827	9.6348378	40	91821.61	231826.06	252474.40	9.9629449	10.3651622
21	39634.69	43170.30	108920.50	9.5980754	9.6351850	39	91810.08	231640.76	252704.26	9.9628904	10.3648150
22	39661.39	43204.81	108934.18	9.5983679	9.6355321	38	91798.55	231455.71	252134.38	9.962835	10.3544979
23	39688.09	43239.33	108947.88	9.5986602	9.6358790	37	91787.01	231270.91	251964.75	9.9627812	10.3641210
24	39714.79	43273.82	108961.59	9.5989523	9.6362257	36	91775.46	231086.36	251795.37	9.9627266	10.3637743
25	39741.48	43308.40	108975.31	9.5992441	9.6365722	35	91763.90	230902.06	251626.24	9.9626719	10.3634278
26	39768.17	43342.95	108989.04	9.5995357	9.6369185	34	91752.34	230718.01	251457.35	9.9626172	10.3630815
27	39794.86	43377.51	109002.79	9.5998271	9.6372646	33	91740.77	230534.20	251288.71	9.9625624	10.3627354
28	39821.55	43412.08	109016.55	9.6001181	9.6376106	32	91729.19	230350.64	251120.32	9.9625076	10.3623894
29	39848.23	43446.66	109030.32	9.6004090	9.6379563	31	91717.60	230167.32	250952.18	9.9624527	10.3620437
30	39874.91	43481.24	109044.11	9.6006997	9.6383019	30	91706.01	229984.25	250784.28	9.9623978	10.3616981
31	39901.58	43515.83	109057.91	9.6009901	9.6386473	29	91694.41	229801.43	250616.63	9.9623428	10.3613527
32	39928.25	43550.43	109071.72	9.6012803	9.6389925	28	91682.80	229618.85	250449.23	9.9622878	10.3610075
33	39954.92	43585.04	109085.54	9.6015703	9.6393375	27	91671.18	229436.51	250282.07	9.9622328	10.3606625
34	39981.58	43619.66	109099.38	9.6018600	9.6396823	26	91659.55	229254.42	250115.15	9.9621777	10.3603177
35	40008.24	43654.29	109113.23	9.6021495	9.6400269	25	91647.91	229072.57	249948.47	9.9621226	10.3599731
36	40034.90	43688.93	109127.09	9.6024388	9.6403714	24	91636.24	228890.96	249782.04	9.9620674	10.3596286
37	40061.56	43723.58	109140.97	9.6027278	9.6407156	23	91624.62	228709.59	249615.86	9.9620122	10.3592844
38	40088.21	43758.23	109154.86	9.6030166	9.6410597	22	91612.96	228528.46	249449.91	9.9619569	10.3589403
39	40114.86	43792.89	109168.76	9.6033052	9.6414036	21	91601.30	228347.58	249284.21	9.9619016	10.3585964
40	40141.50	43827.56	109182.67	9.6035936	9.6417473	20	91589.63	228166.93	249118.74	9.9618463	10.3582527
41	40168.14	43862.24	109195.59	9.6038817	9.6420908	19	91577.95	227986.53	248953.52	9.9617909	10.3579092
42	40194.78	43896.93	109210.53	9.6041696	9.6424342	18	91566.26	227806.36	248788.54	9.9617355	10.3575658
43	40221.41	43931.63	109224.48	9.6044573	9.6427773	17	91554.56	227626.43	248623.80	9.9616800	10.3572227
44	40248.04	43996.34	109238.45	9.6047448	9.6431203	16	91542.86	227446.74	248459.29	9.9616245	10.3568797
45	40274.67	44001.06	109252.43	9.6050320	9.6434631	15	91531.15	227267.29	248295.03	9.9615689	10.3565369
46	40301.29	44035.78	109266.42	9.6053190	9.6438057	14	91519.43	227088.07	248131.00	9.9615133	10.3561943
47	40327.91	44070.51	109280.42	9.6056057	9.6441481	13	91507.70	226909.09	247967.21	9.9614576	10.3558519
48	40354.53	44105.25	109294.44	9.6058923	9.6444903	12	91495.96	226730.35	247903.66	9.9614020	10.3555097
49	40381.14	44140.00	109308.47	9.6061786	9.6448324	11	91484.22	226551.84	247640.34	9.9613463	10.3551676
50	40407.75	44174.76	109322.51	9.6064647	9.6451743	10	91472.47	226373.57	247477.26	9.9612904	10.3548257
51	40434.36	44209.53	109336.56	9.6067506	9.6455160	9	91460.71	226195.53	247314.42	9.9612346	10.3544840
52	40460.95	44244.31	109350.63	9.6070362	9.6458575	8	91448.95	226017.73	247151.81	9.9611787	10.3541425
53	40487.56	44279.10	109364.71	9.6073216	9.6461988	7	91437.18	225840.16	246989.43	9.9611228	10.3538012
54	40514.16	44313.90	109378.80	9.6076068	9.6465400	6	91425.40	225662.83	246827.29	9.9610668	10.3534600
55	40540.75	44348.71	109392.91	9.6078918	9.6468810	5	91413.61	225485.72	246665.38	9.9610108	10.3531190
56	40567.34	44383.53	109407.03	9.6081765	9.6472217	4	91401.81	225308.85	246503.71	9.9609548	10.3527783
57	40593.93	44418.35	109421.16	9.6084611	9.6475624	3	91390.00	225132.21	246342.27	9.9608987	10.3524376
58	40620.51	44453.18	109435.30	9.6087454	9.6479028	2	91378.19	224955.80	246181.06	9.9608426	10.3520972
59	40647.09	44488.02	109449.46	9.6090294	9.6482431	1	91366.37	224779.62	246020.08	9.9607864	10.3517569
60	40673.66	44522.87	109463.63	9.6093133	9.6485831	0	91354.54	224603.68	245859.33	9.9607302	10.3514169

40673.67

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	40673.66	44522.87	109463.63	9.6093133	9.6485831
1	40700.23	44557.73	109477.81	9.6095969	9.6489230
2	40726.80	44592.60	109492.01	9.6098803	9.6492628
3	40753.37	44627.48	109506.22	9.6101635	9.6496023
4	40779.93	44662.37	109520.44	9.6104465	9.6499417
5	40806.49	44697.27	109534.67	9.6107293	9.6502809
6	40833.05	44732.17	109548.92	9.6110118	9.6506199
7	40859.60	44767.08	109563.18	9.6112941	9.6509587
8	40886.15	44802.00	109577.46	9.6115762	9.6512974
9	40912.69	44836.93	109591.74	9.6118580	9.6516359
10	40939.23	44871.87	109606.04	9.6121397	9.6519742
11	40965.77	44906.82	109620.36	9.6124211	9.6523123
12	40992.30	44941.78	109634.68	9.6127023	9.6526503
13	41018.83	44976.75	109649.02	9.6129833	9.6529881
14	41045.36	45011.73	109663.37	9.6132641	9.6533257
15	41071.89	45046.72	109677.74	9.6135446	9.6536631
16	41098.41	45081.72	109692.12	9.6138250	9.6540004
17	41124.93	45116.73	109706.51	9.6141051	9.6543375
18	41151.44	45151.74	109720.91	9.6143850	9.6546744
19	41177.95	45186.76	109735.33	9.6146647	9.6550112
20	41204.46	45221.79	109749.76	9.6149441	9.6553477
21	41230.96	45256.83	109764.20	9.6152234	9.6556841
22	41257.46	45291.88	109758.66	9.6155024	9.6560204
23	41283.95	45326.94	109793.13	9.6157812	9.6563564
24	41310.44	45362.01	100807.61	9.6160598	9.6566923
25	41336.93	45397.09	109822.11	9.6163382	9.6570280
26	41363.42	45432.18	109836.62	9.6166164	9.6573630
27	41389.90	45467.28	109851.14	9.6168944	9.6576989
28	41416.38	45502.39	109865.68	9.6171721	9.6580351
29	41442.85	45537.51	109880.23	9.6174496	9.6583692
30	41469.32	45572.64	109894.79	9.6177270	9.6587041
31	41495.79	45607.77	109909.36	9.6180041	9.6590387
32	41582.26	45642.91	109923.95	9.6182809	9.6593733
33	41548.72	45678.06	109938.55	9.6185576	9.6597076
34	41575.18	45713.22	109953.17	9.6188341	9.6600418
35	41601.63	45748.39	109967.79	9.6191103	9.6603758
36	41628.08	45783.57	109982.43	9.6193864	9.6607097
37	41654.53	45818.76	109997.09	9.6196622	9.6610434
38	41680.97	45853.96	110011.76	9.6199378	9.6613769
39	41707.41	45889.17	110026.44	9.6202132	9.6617103
40	41733.85	45924.39	110041.13	9.6204884	9.6620434
41	41760.28	45959.62	110055.84	9.6207634	9.6623765
42	41786.71	45994.86	110070.56	9.6210382	9.6627093
43	41813.13	46030.11	110085.29	9.6213127	9.6630420
44	41839.55	46065.37	110100.04	9.6215871	9.6633745
45	41865.97	46100.64	110114.80	9.6218612	9.6637069
46	41892.39	46135.91	110129.57	9.6221351	9.6640391
47	41918.80	46171.19	110144.36	9.6224088	9.6643711
48	41945.21	46206.48	110159.16	9.6226824	9.6647030
49	41971.61	46241.78	110173.97	9.6229557	9.6650346
50	41998.01	46277.09	110188.79	9.6232287	9.6653662
51	42024.41	46312.42	110203.63	9.6235016	9.6656975
52	42050.80	46347.76	110218.49	9.6237743	9.6660288
53	42077.19	46383.11	110233.35	9.6240467	9.6663598
54	42103.58	46418.46	110248.23	9.6243190	9.6666907
55	42129.96	46453.82	110263.13	9.6245911	9.6670214
56	42156.34	46489.19	110278.03	9.6248629	9.6673519
57	42182.72	46524.57	110292.95	9.6251346	9.6676823
58	42209.09	46559.96	110307.89	9.6254060	9.6680126
59	42235.46	46595.36	110322.83	9.6256772	9.6683426
60	42261.83	46630.77	110337.79	9.6259483	9.6686725

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log. Tang.
60	91354.54	224603.66	245859.33	9.9607302	10.3514169
59	91342.71	224427.96	245698.82	9.9606739	10.3510770
58	91330.87	224252.47	245538.53	9.9606176	10.3507372
57	91319.02	224077.21	245378.48	9.9605612	10.3503977
56	91307.16	223902.18	245218.65	9.9605048	10.3500583
55	91295.29	223727.38	245059.05	9.9604484	10.3497191
54	91283.42	223552.80	244899.68	9.9603919	10.3493801
53	91271.54	223378.25	244740.54	9.9603354	10.3490413
52	91259.65	223204.33	244581.63	9.9602788	10.3487026
51	91247.75	223030.43	244422.94	9.9602222	10.3483641
50	91235.84	222856.76	244264.48	9.9601655	10.3480258
49	91223.93	222683.31	244106.24	9.9601088	10.3476877
48	91212.01	222510.09	243948.23	9.9600520	10.3473497
47	91200.08	222337.09	243790.45	9.9599952	10.3470119
46	91188.14	222164.32	243632.89	9.9599384	10.3466743
45	91176.20	221991.77	243475.55	9.9598815	10.3463369
44	91164.25	221819.44	243318.44	9.9598246	10.3459996
43	91152.29	221647.33	243161.55	9.9597676	10.3456625
42	91140.32	221475.45	243004.89	9.9597106	10.3453256
41	91128.35	221303.79	242848.44	9.9596535	10.3449888
40	91116.37	221132.34	242692.22	9.9595964	10.3446523
39	91104.38	220961.12	242536.22	9.9595393	10.3443159
38	91092.38	220790.12	242380.44	9.9594821	10.3439796
37	91080.38	220619.34	242224.88	9.9594248	10.3436436
36	91068.37	220448.78	242069.54	9.9593675	10.3433077
35	91056.35	220278.43	241914.32	9.9593101	10.3429720
34	91044.32	220108.31	241759.52	9.9592528	10.3426364
33	91032.28	219938.40	241604.84	9.9591954	10.3423011
32	91020.24	219768.71	241450.38	9.9591380	10.3419659
31	91008.19	219599.23	241296.13	9.9590805	10.3416308
30	90996.13	219429.97	241142.10	9.9590229	10.3412960
29	90984.06	219260.93	240988.29	9.9589653	10.3409613
28	90971.98	219092.10	240834.69	9.9589077	10.3406267
27	90959.90	218923.49	240681.32	9.9588500	10.3402924
26	90947.81	218755.10	240528.15	9.9587923	10.3399582
25	90935.71	218586.91	240375.20	9.9587345	10.3396241
24	90923.61	218418.94	240222.47	9.9586767	10.3392903
23	90911.50	218251.19	240069.95	9.9586188	10.3389566
22	90899.38	218083.64	239917.64	9.9585609	10.3386231
21	90887.25	217916.31	239765.55	9.9585030	10.3382897
20	90875.11	217749.20	239613.67	9.9584450	10.3379568
19	90862.97	217582.29	239462.01	9.9583869	10.3376235
18	90850.82	217415.59	239310.55	9.9583288	10.3372907
17	90838.66	217249.11	239159.31	9.9582707	10.3369580
16	90826.49	217082.83	239008.28	9.9582125	10.3366255
15	90814.32	216916.77	238857.46	9.9581543	10.3362931
14	90802.14	216750.91	238706.85	9.9580961	10.3359609
13	90789.95	216585.27	238556.45	9.9580378	10.3356289
12	90777.75	216419.83	238406.25	9.9579794	10.3352970
11	90765.54	216254.60	238256.27	9.9579210	10.3349654
10	90753.33	216089.58	238106.50	9.9578626	10.3346338
9	90741.11	215924.76	237956.93	9.9578041	10.3343025
8	90728.88	215760.15	237807.58	9.9577456	10.3339712
7	90716.64	215595.75	237658.43	9.9576870	10.3336402
6	90704.40	215431.56	237509.49	9.9576284	10.3333093
5	90692.15	215267.57	237360.75	9.9575697	10.3329786
4	90679.89	215103.78	237212.22	9.9575110	10.3326481
3	90667.62	214940.20	237063.90	9.9574522	10.3323177
2	90655.35	214776.83	236915.71	9.9573934	10.3319874
1	90643.07	214613.66	236767.87	9.9573346	10.3316574
0	90630.78	214450.69	236620.16	9.9572757	10.3313275

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	42261.83	46630.77	110337.79	9.6259483	9.6686725	60	90630.78	214450.69	236620.16	9.9572757	10.3313275
1	42288.19	46666.19	110352.77	9.6262191	9.6690023	59	90618.48	214287.93	236472.65	9.9572168	10.3309977
2	42314.55	46701.62	110367.75	9.6264897	9.6693319	58	90606.17	214125.27	236325.35	9.9571568	10.3306681
3	42340.90	46737.06	110382.75	9.6267601	9.6696613	57	90593.86	213963.01	236178.26	9.9570988	10.3303387
4	42367.25	46772.51	110397.77	9.6270303	9.6699906	56	90581.54	213800.85	236031.36	9.9570397	10.3300094
5	42393 60	46807.97	110412.79	9.6273003	9.6703197	55	90569.21	213638.89	235884.67	9 9569806	10.3296803
6	42419.94	46843.43	110427.83	9.6275701	9.6706486	54	90556.88	213477.14	235738.18	9.9569219	10.3293514
7	42446.28	46878.90	110442.89	9.6278397	9.6709774	53	90544.54	213315.59	235591.89	9.9568623	10.3290226
8	42472.61	46914.38	110457.95	9.6281090	9.6713060	52	90532.19	213154.23	335445.81	9.9568030	10.3286940
9	42498 95	46949 88	110473.03	9.6283782	9.6716345	51	90519.83	212993.08	235299.92	9.9567437	10.3283655
10	42525.28	46985.39	110488.13	9.6286472	9.6719628	50	80507.46	212832.13	235154.24	9.9566844	10.3280372
11	42551.61	47020.90	110503.24	9.6289160	9.6722910	49	90495.09	212671.37	235008.75	9.9566250	10.3277090
12	42577.93	47056.43	110518.36	9.6291845	9.6726190	48	90482.71	212510.82	234863.47	9.9565656	10.3273810
13	42604 25	47091.96	110533.49	9.6294529	9.6729468	47	90470.32	212350.46	234718.38	9.9565061	10.3270532
14	42630.56	47127.51	110548.64	9.6297211	9.6732745	46	90457.92	212190.30	234573.49	9.9564466	10.3267255
15	42656.87	47169.06	110563.80	9.6299890	9.6736020	45	90445.51	212030.34	234428.80	9.9563870	10.3263980
16	42683.18	47198.63	110578.98	9.6302568	9.6739294	44	90433.10	211870.57	234284.31	9.9563274	10.3260706
17	42709.49	47234.20	110594.17	9.6305243	9.6742566	43	90420.68	211711.01	234140.02	9.9562678	10.3257434
18	42735.79	47269.78	110609.37	9.6307917	9.6745836	42	90408.25	211551.64	233995.93	9.9562081	10.3254164
19	42762.09	47305.38	110624.58	9.6310589	9.6749105	41	90395.82	211392.46	233852.03	9.9561483	10.3250895
20	42788.38	47340.98	110639.81	9.6313258	9.6752372	40	90383.38	211233.48	233708.33	9.9560886	10.3247628
21	42814.67	47376.59	110655.06	9.6315926	9.6755638	39	90370.93	211074.70	233564.82	9.9560287	10.3244362
22	42840.95	47412.22	110670.31	9.6318591	9.6758902	38	90358.47	210916.11	233421.52	9.9559689	10.3241097
23	42867.23	47447.85	110685.58	9.6321255	9.6762165	37	90346.00	210757.71	233278.40	9.9559089	10.3237835
24	42893.51	47485.49	110700.87	9.6323916	9.6765426	36	90333.53	210599.51	233155.48	9.9558490	10.3234574
25	42919.79	47519.14	110716.16	9.6326576	9.6768686	35	90321.05	210441.50	232992.76	9.9557890	10.3231314
26	42946.06	47554.81	110731.47	9.6329233	9.6771944	34	90308.56	210283.69	232850.23	9.9557289	10.3228056
27	42972.33	47590.48	110746.80	9.6331889	9.6775201	33	90296.06	210126.07	232707.90	9.9556688	10.3224799
28	42998.59	47626.16	110762.14	9.6334542	9.6778456	32	90283.56	209968.64	232565.75	9.9556087	10.3221544
29	43024.85	47661.85	110777.49	9.6337194	9.6781709	31	90271.05	209811.40	232423.81	9.9555485	10.3218291
30	43051.11	47697.55	110792.85	9.6339844	9.6784961	30	90258.53	209654.36	232281.05	9.9554882	10.3215039
31	43077.36	47733.26	110808.23	9.6341491	9.6788211	29	90246.00	209497.51	232140.49	9.9554280	10.3212589
32	43103.61	47768.99	110823.63	9.6345137	9.6791460	28	90233.47	209340.84	231999.11	9.9553679	10.3208540
33	43129.86	47804.72	110839.03	9.6347780	9.6794708	27	90220.93	209184.37	231857.94	9.9553073	10.3205292
34	43156.10	47840.46	110854.45	9.6350422	9.6797953	26	90208.38	209028.09	231716.95	9.9552459	10.3202047
35	43182.34	47876.21	110869.89	9.6353062	9.6801198	25	90195.82	208872.00	231576.15	9.9551864	10.3198803
36	43208.57	47911.97	110885.33	9.6355699	9.6804440	24	90183.25	208716.10	231435.54	9.9551259	10.3195560
37	43234.80	47947.74	110900.79	9.6358335	9.6807682	23	90170 68	208560.39	231295.13	9.9550653	10.3192318
38	43261.03	47983.52	110916.27	9.6360969	9.6810921	22	90158.10	208404.86	231154.90	9.9550047	10.3189079
39	43287.26	48019.32	110931.76	9.6363601	9.6814160	21	90145.51	208249.53	231014.86	9.9549441	10.3185840
40	43313.48	48055.12	110947.26	9.6366231	9.6817396	20	90132.91	208094.38	230875.01	9.9548834	10.3182604
41	43339.70	48090.93	110962.77	9.6368859	9.6820632	19	90120.31	207939.42	230735 35	9.9548227	10.3179368
42	43365.91	48126.75	110978.30	9 6371484	9.6823865	18	90107.70	207784.65	230595.88	9.9547619	10.3176135
43	43392.12	48162.58	110993.85	9.6374108	9.6827098	17	90095.08	207630.07	230456.60	9.9547011	10.3171902
44	43418.33	48198.42	111009.41	9.6376731	9.6830328	16	90082.45	207475.67	230317.51	9.9546402	10.3169672
45	43444.53	48234.27	111024.98	9.6379351	9 6833557	15	90069.82	207321.46	230178.60	9 9545793	10.3166443
46	43470.73	48270.14	111040.56	9.6381969	9.6836785	14	90057.18	207167.43	230039.88	9.9545184	10.3163215
47	43496.92	48306.01	111056.16	9.6384585	9.6840011	13	90044.53	207013.59	229901.34	9.9544574	10.3159989
48	43523.11	48341.89	111071.77	9.6387199	9.6843236	12	90031.87	206859.93	229762.99	9 9543963	10.3156764
49	43549.30	48377.78	111087.40	9.6389812	9.6846459	11	90019.21	206706.46	229624.83	9.9543352	10.3153541
50	43575.48	48413.68	111103.04	9.6392422	9.6849681	10	90006.54	206533.18	229486.85	9.9542742	10.3150319
51	43601.66	48449.59	111108.69	9.6395030	9.6852901	9	89993.86	206400.08	229349.06	9.9542129	10.3147099
52	43627.84	48485.52	111134.36	9.6397637	9.6856120	8	89981.17	206247.16	229211.45	9.9541517	10.3143880
53	43654.01	48521.45	111150.04	9.6400241	9.6859338	7	89968.48	206094.42	229074.03	9.9540904	10.3140662
54	43680.18	48557.39	111165.73	9.6402844	9.6862553	6	89955.78	205941.87	228936.79	9.9540291	10.3137447
55	43706.34	48593.34	111181.44	9.6405445	9.6865768	5	89943.07	205789.50	228799.74	9.9539677	10.3134232
56	43732.50	48629.31	111197.16	9.6408044	9.6868981	4	89930.35	205637.32	228662.86	9.9539063	10.3131019
57	43758.66	48665.28	111212 90	9.6416640	9.6872192	3	89917.62	205485.31	228526.18	9.9538448	10.3127808
58	43784.82	48701.26	111228.65	9.6413235	9.6875402	2	89904.89	205333.49	228389.87	9 9537833	10.3124598
59	43810.97	48737.26	111244.42	9.6415828	9.6878611	1	89892.15	205181.84	228253.34	9 9537218	10 3121389
60	43837.12	48773.29	111260.19	9.6418420	9.6881818	0	89879.40	205030.38	228117.20	9.9536602	10.3118182

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	43837.12	48773.26	111260.19	9.6418420	9.6881818	60	89879.40	205030.38	228117.20	9.9536602	10.3118182
1	43863.26	48809.27	111275.98	9.6421009	9.6885023	59	89866.65	204879.10	227981.24	9.9535985	10.31114977
2	43889.40	48845.30	111291.79	9.6423596	9.6888227	58	89853.89	204728.00	227845.46	9.9535369	10.31111773
3	43915.53	48881.33	111307.61	9.6426182	9.6891430	57	89841.12	204577.08	227709.86	9.9534751	10.3108570
4	43941.66	48917.37	111323.45	9.6428765	9.6894631	56	89828.34	204426.34	227574.45	9.9534134	10.3105369
5	43967.79	48953.43	111339.30	9.6431347	9.6897831	55	89815.55	204275.78	227439.21	9.9533515	10.3102169
6	43993.92	48989.49	111355.16	9.6433926	9.6901030	54	89802.76	204125.46	227304.15	9.9532897	10.3098970
7	44020.04	49025.57	111371.03	9.6436504	9.6904226	53	89789.96	203975.19	227169.27	9.9532278	10.3095774
8	44046.16	49061.66	111386.91	9.6439080	9.6907422	52	89777.51	203825.17	227034.57	9.9531658	10.3092578
9	44072.27	49097.75	111402.82	9.6441654	9.6910616	51	89764.33	203675.32	226900.05	9.9531098	10.3089384
10	44098.38	49133.86	111418.74	9.6444226	9.6913809	50	89751.51	203525.65	226765.71	9.9530418	10.3086191
11	44124.48	49169.97	111434.67	9.6446796	9.6917000	49	89738.68	203376.15	226631.55	9.9529797	10.3083000
12	44150.58	49206.10	111450.62	9.6449365	9.6920189	48	89725.84	203226.83	226497.56	9.9529175	10.3079811
13	44176.68	49242.24	111466.58	9.6451931	9.6923378	47	99712.99	203077.69	226363.75	9.9528553	10.3076622
14	44202.78	49278.38	111482.55	9.6454496	9.6926565	46	89700.13	202928.73	226230.12	9.9527931	10.3073435
15	44228.87	49314.54	111498.54	9.6457058	9.69[illegible]9750	45	89687.27	202779.94	226096.67	9.9527308	10.3070250
16	44254.96	49350.71	111514.54	9.6459919	9.6932934	44	89674.40	202631.33	225963.39	9.9526685	10.3067066
17	44281.04	49386.89	111530.56	9.6462178	9.6936117	43	89661.52	202482.89	225830.29	9.9526061	10.3063883
18	44307.12	49423.08	111546.59	9.6464735	9.6939298	42	89648.64	202334.62	225697.36	9.9525437	10.3060702
19	44333.20	49459.28	111562.63	9.6467290	9.6942478	41	89635.75	202186.53	225564.61	9 9524813	10.3057522
20	44359.27	49495.49	111578.69	9.6469844	9.6945656	40	89622.85	202038.62	225432.04	9.9524188	10.3054344
21	44385.34	49531.71	111594.76	9.6472395	9.6948833	39	89609.94	201890.88	225299.64	9 9523562	10.3051167
22	44411.40	49567.94	111610.84	9 6474945	9.6952009	38	89597.03	201743.31	225167.41	9.9522936	10.3047991
23	44437.46	49604.18	111626.94	9.6477492	9.6955183	37	89584.11	201595.92	225035.37	9.9522310	10.3044817
24	44463.52	49640.43	111643.06	9.6480038	9.6958355	36	89571.18	201448.69	224903.48	9.9521683	10.3041641
25	44489.57	49676.69	111659.19	9.6482582	9.6961527	35	89558.24	201301.64	224771.78	9.9521055	10.3038473
26	44515.62	49712.97	111675.33	9.6485124	9.6964697	34	89545.29	201154.77	224640 24	9.9520428	10.3035303
27	44541.67	49749.25	111691.49	9.6487665	9.6967865	33	89532.34	201008.06	224508.89	9.9519799	10.3032135
28	44567.71	49785.54	111707.66	9.6490203	9.6971032	32	89519.38	200861.53	224377.70	9.9519171	10.3028968
29	44593.35	49821.85	111723.84	9.6492740	9.6974198	31	89506.41	200715.16	224246.69	9.9518541	10.3025802
30	44619.78	49858.16	111740.04	9.6495274	9.6977363	30	89493.43	200568.97	224115.84	9 9517912	10.3022637
31	44645.81	49894.49	111756.25	9 6497807	9.6980526	29	89480.45	200422.95	223985.17	9.9517282	10.3019474
32	44671.84	49930.82	111772.48	9.6500338	9.6983687	28	89467.46	200277.10	223854.67	9.9516651	10.3016313
33	44697.86	49967.17	111788.72	9.6502868	9.6986847	27	89454.46	200131.42	223724.35	9.9516020	10.3013153
34	44723.88	50003.52	111804.98	9.6505395	9.6990006	26	89441.45	199985.90	223594.19	9. 9515389	10.3009994
35	44749.90	50039.89	111821.25	9.6507920	9.6993164	25	89428.44	199840.56	223464.20	9.9514757	10.3006836
36	44775.91	50076.27	111837.53	9.6510444	9.6996320	24	89415.42	199695.39	223334.38	9.9514126	10.3003680
37	44801.92	50112.66	111853.83	9.6512966	9.6999474	23	89402.39	199550.38	223204.74	9.9513492	10.3000526
38	44827.92	50149.06	111870.14	9.6515486	9.7002628	22	89389.36	199405.54	223075.26	9.9512858	10.2997372
39	44853.92	50185.47	111886.47	9.6518004	9.7005780	21	89376.32	199260.87	222945.95	9.9512224	10.2994220
40	44879.92	50221.89	111902.81	9.6520521	9.7008930	20	89363.27	199116.37	222816.81	9.9511590	10.2991070
41	44905.91	50258.32	111919.16	9.6523035	9.7012080	19	89350.21	198972.04	222687.83	9.9510956	10.2987929
42	44971.90	50294.76	111935.53	9.6525548	9.7015227	18	89337.14	198827.87	222559.03	9.9510320	10.2984773
43	44957.89	50331.21	111951.91	9.6528059	9.7018374	17	89324.06	198683.87	222430.39	9.9509685	10.2981626
44	44983.87	50367.67	111968.31	9.6530568	9.7021519	16	89310.98	198540.03	222301.92	9.9509049	10.2978481
45	45009.85	50404.15	111984.72	9.6533075	9.7024663	15	89297.89	198396.36	222173.62	9.9508412	10.2975337
46	45035.82	50440.63	112001.15	9.6535581	9.7027805	14	89284.79	198252.86	222045.48	9.9507775	10.2972195
47	45061.79	50477.13	112017.59	9.6538084	9.7030946	13	89271.69	198109.52	221917.51	9.9507138	10.2969054
48	45087.76	50513.63	112034.05	9.6540586	9.7034086	12	89258.58	197966.35	221789.71	9.9506500	10.2965914
49	45113.72	50550.15	112050.52	9.6543086	9.7037225	11	89245.46	197823.34	221662.07	9.9505861	10.2962775
50	45139.68	50586.68	112067.00	9.6545584	9.7040362	10	89232.33	197680.50	221534.60	9.9505223	10.2959638
51	45165.63	50623.22	112083.50	9.6548081	9.7043497	9	89219.20	197537.82	221407.30	9.9504583	10.2956503
52	45191.58	50659.77	112100.01	9.6550575	9.7046632	8	89206.06	197395.31	221280.16	9.9503944	10.2953368
53	45217.53	50696.33	112116.53	9.6553068	9.7049765	7	89192.91	197252.96	221153.18	9.9503303	10.2950235
54	45243.47	50732.90	112133.07	9.6555559	9.7052897	6	89179.75	197110.77	221026.37	9.9502663	10.2947103
55	45269.41	50769.48	112149.63	9.6558048	9.7056027	5	89166.59	196968.74	220899.72	9.9502022	10.2943973
56	45295.35	50806.07	112166.20	9.6560536	9.7059156	4	89153.42	196826.88	220773.23	9.9501380	10.2940844
57	45321.48	50842.67	112182.78	9.6563021	9.7062284	3	89140.24	196685.18	220646.91	9.9500738	10.2937716
58	45347.21	50879.28	112199.38	9.6565505	9.7065410	2	89127.05	196543.64	220520.75	9.9500095	10.2934590
59	45373.13	50915.91	112216.00	9.6567987	9.7068535	1	89113.85	196402.27	220394.76	9.9499452	10.2931465
60	45399.05	50952.54	112232.62	9.6570468	9.7071659	0	89100.65	196261.05	220268.93	9.9498809	10.2928341

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	45399.05	50952.54	112232.62	9.6570468	9.7071659	60	89100.65	196261.05	220268.93	9.9498809	10.2928341
1	45424.97	50989.19	112249.26	9.6572946	9.7074781	59	89087 44	196120.00	220143.26	9.9498165	10.2925219
2	45450.88	51025.85	112265.92	9.6575423	9.7077902	58	89074.22	195979.10	220017.75	9.9497521	10.2922098
3	45476.79	51062.52	112282.59	9.6577898	9.7081022	57	89061.00	195838.37	219894.40	9.9496876	10.2918978
4	45502.69	51099.19	112299.18	9.6580371	9.7084141	56	89047.77	195697.80	219767.21	9.9496230	10.2915859
5	45528.19	51135.88	112315.98	9.6582842	9.7087258	55	89034.53	195557.39	219642.19	9.9495585	10.2912742
6	45554.49	51172.59	112332.69	9.6585312	9.7090374	54	89021.28	195417.13	219517.33	9.9494938	10.2909626
7	45580.38	51209.30	112349.42	9.6587780	9.7093488	53	89008.02	195277.04	219392.62	9.9494292	10.2906512
8	45606.27	51246.02	112366.16	9.6590246	9.7096601	52	88994 76	195137.11	219268.08	9.9493645	10.2903399
9	45632.16	51282.75	112382.92	9.6592710	9.7099713	51	88981.39	194997.33	219143.70	9.9492997	10.2900287
10	45658.04	51319.50	112399.69	9.6595173	9.7102834	50	88968.21	194857.71	219019.47	9.9492349	10.2897176
11	45683.92	51356.25	112416.48	9.6597634	9.7105933	49	88954.93	194718.26	218895.41	9.9491700	10.2894067
12	45709.79	51393.02	112433.28	9.6600093	9.7109041	48	88941.64	194578.96	218771.50	9.9491051	10.2890959
13	45735.66	51429.80	112450.10	9.6602550	9.7112148	47	88928.34	194439.81	218647.75	9.9490402	10.2887852
14	44761.53	51466.58	112466.93	9.6605005	9.7115254	46	88915.03	194300.83	218524.17	9.9489752	10.2884746
15	45787.39	51503.38	112483.77	9.6607459	9.7118358	45	88901.71	194162.00	218400.74	9.9489101	10.2881641
16	45813.25	51540.19	112500.63	9.6609911	9.7121461	44	88888.39	194023.33	218277.46	9.9488450	10.2878539
17	45839.10	51577.02	112517.50	9.6612361	9.7124562	43	88875.04	193884.81	218154.35	9.9487799	10.2875438
18	45864.95	51613.85	112534.39	9.6614810	9.7127662	42	88861.72	193746.45	218031.39	9.9487147	10.2872338
19	45890.80	51650.69	112551.29	9.6617257	9.7130761	41	88848.37	193608.25	217908.59	9.9486495	10.2869239
20	45916.64	51687.55	112568.21	9.6619701	9.7133859	40	88835.02	193470.20	217785.94	9.9485842	10.2866141
21	45942.48	51724.41	112585.14	9.6622145	9.7136956	39	88821.66	193332.31	217663.46	9.9485189	10.2863044
22	45968.32	51761.29	112602.09	9.6624586	9.7140051	38	88808.29	193194.57	217541.12	9.9484535	10.2859949
23	45994.15	51798.18	112619.05	9.6627026	9.7143145	37	88794.92	193056 98	217418.95	9.9483881	10.2856855
24	46019.98	51835.08	112636.03	9.6629464	9.7146237	36	88781.54	192919.56	217296.93	9.9483227	10.2853763
25	46045.80	51871.99	112653.02	9.6631900	9.7149329	35	88768.15	192782.28	217175.06	9.9482572	10.2850671
26	46071.62	51908.91	112670.03	9.6634335	9.7152419	34	88754.75	192645.16	217053.35	9.9481916	10.2847581
27	46097.44	51945.84	112687.05	9.6636768	9.7155508	33	88741.34	192508.19	216931.80	9.9481260	10.2844492
28	46123.25	51982.78	112704.08	9.6639199	9.7158595	32	88727.93	192371.38	216810.40	9.9480604	10.2841405
29	46149.06	52019.74	112721.13	9.6641628	9.7161682	31	88714.51	192234.72	216689.15	9.9479947	10.2838318
30	46174.86	52056.70	112738.19	9.6644056	9.7164767	30	88701.08	192098.21	216568.06	9.9479289	10.2835233
31	46200.66	52093.68	112755.27	9.6646482	9.7167851	29	88687.64	191961.86	216447.12	9.9478631	10.2832149
32	46226.46	52130.67	112772.37	9.6648906	9.7170933	28	88674.20	191825.65	216326.33	9.9477973	20.2829067
33	46252.25	52167.67	112789.48	9.6651329	9.7174014	27	88660.75	191689.60	216205.70	9.9477314	10.2825986
34	46278.04	52204.68	112806.60	9.6653749	9.7177094	26	88647.29	191553.70	216085.22	9.9476655	10.2822906
35	46303.82	52241.70	112823.74	9.6656168	9.7180173	25	88633.83	191417.95	215964.89	9.9475995	10.2819827
36	46329.60	52278.74	112840.89	9.6658586	9.7183251	24	88620.36	191282.36	215844.71	9.9475335	10.2816749
37	46355.38	52315.78	112858.06	9.6661001	9.7186327	23	88606.88	191146.92	215724.69	9.9474674	10.2813673
38	46381.15	52352.84	112875.24	9.6663415	9.7189402	22	88593.39	191011.62	215604.82	9.9474013	10.2810598
39	46406.92	52389.90	112892.44	9.6665828	9.7192476	21	88579.89	190876.47	215485.10	9.9473352	10.2807524
40	46432.69	52426.98	112909.65	9.6668238	9.7195549	20	88566.39	190741.47	215365.53	9.9472689	10.2804451
41	46458.45	52464.07	112926.88	9.6670647	9.7198620	19	88552.88	190606.63	215246.11	9.9472027	10.2801380
42	46484.21	52501.17	112944.12	9.6673054	9.7201690	18	88539.36	190471.93	215126.84	9.9471364	10.2758318
43	46509.96	52538.29	112961.37	9.6675459	9.7204759	17	88525.83	190337.38	215007.72	9.9470700	10.2795241
44	46535.72	52575.41	112978.64	9.6677863	9.7207827	16	88512.30	190202.99	214888.75	9.9470036	10.2792173
45	46561.46	52612.54	112995.93	9.6680265	9.7210803	15	88498.76	190068.74	214769.93	9.9469372	10.2789107
46	46587.19	52649.69	113013.23	9.6682665	9.7213958	14	88485.21	189934.64	214651.27	9.9468707	10.2786042
47	46612.93	52686.85	113030.55	9.6685064	9.7217022	13	88471.66	189800.68	214532.75	9.9468042	10.2782978
48	46638.66	52724.02	113047.88	9.6687461	9.7220085	12	88458.10	189666.88	214414.37	9.9467376	10.2779915
49	46664.59	52761.20	113065.22	9.6689856	9.7223147	11	88444.53	189533.22	214296.15	9.9466710	10.2776853
50	46690.12	52798.19	113082.58	9.6692250	9.7226207	10	88430.95	189399.71	214178.08	9.9466043	10.2773795
51	46715.84	52835.59	113099.96	9.6694642	9.7229266	9	88417.36	189266.34	214060.15	9.9465376	10.2770734
52	46741.56	52872.81	113117.35	8.6697032	9.7232324	8	88403.77	189133.13	213942.38	9.9464708	10.2767676
53	46767.27	52910.04	1131434.75	9.6699420	9.7235381	7	88390.17	189000.06	213824.75	9.9464040	10.2764619
54	46792.98	52947.27	113152.17	9.6701807	9.7238436	6	88376.56	188867.13	213707.26	9.9463371	10.2761564
55	46818.69	52984.52	113169.61	9.6704192	9.7241490	5	83362.94	188734.36	213589.93	9.9462702	10.2758510
56	46844.39	53021.78	113187.06	9.6706576	9.7244543	4	88349.32	188601.72	213472.74	9.9462032	10.2755457
57	46870.09	53059.06	113204.52	9.6708958	9.7247595	3	88335.69	188469.24	213355.70	9.9461362	10.2752405
58	46895.78	53096.34	113222.00	9.6711338	9.7250646	2	88322.05	188336.90	213238.80	9 9460692	10.2749354
59	46921.47	53133.64	113239.50	9.6713716	9.7253695	1	88308.41	138208.70	219122.05	9.9460021	10.2746305
60	46947.16	53170.94	113257.01	9.6716093	9.7256744	0	88294.76	188972.65	213005.45	9.9459349	10.2743256

46947.16

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Min.
0	46947.16	53170.92	113257.01	9.6716093	9.7256744	88294.76	188072.65	213005.45	9.9459346	10.2743256	60
1	46972.74	53208.26	113274.5[illegible]	9.6718468	9.7259791	88281.10	187940.74	212888.69	9.9458677	10.2740209	59
2	46998.52	53245.59	113292.07	9.6720841	9.7262837	88267.43	187808.98	212772.67	9.9458005	10.2737163	58
3	47024.19	53282.93	113309.62	9.6723213	9.7265881	88253.75	187677.36	212656.51	9.9457332	10.2734119	57
4	47049.86	53320.29	113327.19	9.6725583	9.7268925	88240.09	187545.88	212540.48	9.9456659	10.2731075	56
5	47075.53	53357.65	113344.78	9.6727952	9.7271967	88226.38	187414.55	212424.60	9.9455985	10.2728033	55
6	47101.19	53395.03	113362.38	9.6730319	9.7275008	88212.68	187283.36	212308.87	8.9455310	10.2724992	54
7	47126.85	53432.42	113379.99	9.6732684	9.7278048	88198.98	187152.31	212193.28	9.9454636	10.2721952	53
8	47152.50	53469.82	113397.62	9.6735047	9.7281087	88185.27	187021.41	212077.83	9.9453960	10.2718913	52
9	47178.15	53507.23	113415.27	9.6737409	9.7284124	88171.55	186890.64	211962.53	9.9453285	10.2715876	51
10	47203.80	53544.65	113432.93	9.6739769	9.7287161	88157.82	186760.03	211847.37	9.9452606	10.2712839	50
11	47249.44	53582.08	113450.60	9.6742128	9.7290196	88144.09	186629.55	211732.35	9.9451932	10.2709804	49
12	47255.08	53619.53	113468.29	9.6744485	9.7293230	88130.35	186499.21	211617.48	9.9451255	10.2706770	48
13	47280.71	53656.99	113486.00	9.6746840	9.7296263	88116.60	186369.02	211502.74	9.9450577	10.2703737	47
14	47306.34	53694.46	113503.72	9.6749194	9.7299295	88102.84	186238.95	211388.15	9.9449899	10.2700705	46
15	47331.17	53731.94	113521.46	9.6751546	9.7302325	88089.07	186109.05	211273.71	9.9449220	10.2697675	45
16	47357.59	53769.43	113539.21	9.6753896	9.7305354	88075.30	185979.28	211159.40	9.9448541	10.2694646	44
17	47383.21	53806.94	113556.98	9.6756245	9.7308383	88061.52	185849.65	211045.23	9.9447862	10.2691617	43
18	47409.82	53844.45	113574.76	9.6758592	9.7311410	88047.73	185720.15	210931.21	9.9447182	10.2688590	42
19	47434.43	53881.98	113592.55	9.6760937	9.7314436	88033.94	185590.80	210817.33	9.9446501	10.2685564	41
20	47460.04	53919.52	113610.36	9.6763281	9.7317460	88020.14	185461.59	210703.59	9.9445821	10.2682540	40
21	47485.64	53957.07	113628.19	9.6765623	9.7320484	88006.33	185332.52	210589.98	9.9445139	10.2679516	39
22	47511.24	53994.64	113646.03	9.6767963	9.7323506	87992.51	185203.58	210476.52	9.9444457	10.2676494	38
23	47536.83	54032.21	113663.89	9.6770302	9.7326527	87978.69	185074.79	210363.20	9.9443775	10.2673473	37
24	47562.42	54069.80	113681.76	9.6772640	9.7329547	87964.86	184946.13	210250.02	9.9443092	10.2670453	36
25	47588.01	54107.40	113699.65	9.6774975	9.7332566	87951.02	184817.61	210136.98	9.9442409	10.2667434	35
26	47613.59	54145.01	113717.55	9.6777309	9.7335584	87937.17	184689.23	210024.08	9.9441725	10.2664416	34
27	47639.17	54182.63	113735.47	9.6779642	9.7338601	87923.32	184560.99	209911.31	9.9441041	10.2661399	33
28	47664.74	54220.27	113753.40	9.6781972	9.7341616	87909.46	184432.89	209798.69	9.9440356	10.2658384	32
29	47690.31	54257.91	113771.35	9.6784301	9.7344631	87895.56	184304.92	209686.20	9.9439671	10.2655369	31
30	47715.88	54295.57	113789.32	9.6786629	9.7347644	87881.71	184177.09	209573.85	9.9438985	10.2652356	30
31	47741.44	54333.24	113807.30	9.6788955	9.7350656	87867.83	184049.39	209461.64	9.9438299	10.2649344	29
32	47767.00	54370.92	113825.29	9.6791279	9.7353667	87853.94	183921.84	209349.57	9.9437612	10.2646333	28
33	47792.55	54408.62	113843.30	9.6793602	9.7356677	87840.04	183794.42	209237.64	9.9436925	10.2643323	27
34	47818.10	54446.32	113861.33	9.6795923	9.7359685	87826.13	183667.13	209125.84	9.9436238	10.2640315	26
35	47843.64	54484.04	113879.37	9.6798243	9.7062693	87812.22	183539.99	209014.18	9.9435549	10.2637307	25
36	47869.18	54521.77	113897.43	9.6800560	9.7365699	87798.30	183412.97	208902.65	9.9434861	10.2634301	24
37	47894.72	54559.51	113915.50	9.6802877	9.7368705	87784.37	183286.10	208791.27	9.9434172	10.2631295	23
38	44920.26	54597.26	113933.59	9.6805191	9.7371790	87770.43	183159.36	208680.02	9.9433482	10.2628291	22
39	44945.79	54635.03	113951.69	9.6807504	9.7374712	87756.49	183032.75	208568.90	9.9432792	10.2625288	21
40	47971.31	54672.81	113969.81	9.6809816	9.7377714	87742.54	182906.28	208457.92	9.9432102	10.2622286	20
41	47996.83	54710.60	113987.94	9.6812126	9.7380715	87728.58	182779.94	208347.08	9.9431411	10.2619285	19
42	48022.35	54748.40	114006.09	9.6814434	9.7383714	87714.61	182653.74	208236.37	9.9430720	10.2616286	18
43	48047.86	54786.21	114024.25	9.6816741	9.7386713	87700.64	182527.67	208125.80	9.9430028	10.2613287	17
44	48073.37	54824.04	114042.43	9.6819046	9.7389710	87686.66	182401.73	208015.36	9.9429335	10.2610290	16
45	48098.88	54861.88	114060.62	9.6821349	9.7392907	87672.67	182275.93	207905.06	9.9428643	10.2607293	15
46	48124.38	54899.73	114078.83	9.6823651	9.7395702	87658.68	182150.26	207794.89	9.9427949	10.2604298	14
47	48149.88	54937.59	114097.06	9.6825952	9.7398696	87644.68	182024.73	207684.86	9.9427255	10.2601304	13
48	48175.37	54975.46	114115.30	9.6828250	9.7401689	87630.67	181899.32	207574.96	9.9426561	10.2598311	12
49	48200.86	55013.35	114133.56	9.6830548	9.7404681	87616.65	181774.05	207465.19	9.9425866	10.2595316	11
50	48226.34	55051.25	114151.83	9.6832843	9.7407672	87602.62	181648.92	207355.56	9.9425171	10.2592328	10
51	48251.82	55089.16	114170.12	9.6835137	9.7410662	87588.59	181523.91	207246.06	9.9424476	10.2589338	9
52	48277.30	55127.08	114188.42	9.6837430	9.7413650	87574.55	181399.04	207136.70	9.9423779	10.2586350	8
53	48302.77	55165.02	114206.74	9.6839720	9.7416638	87560.50	181274.30	207027.46	9.9423083	10.2583362	7
54	48328.24	55202.97	114225.07	9.6842010	9.7419624	87546.45	181149.69	206918.36	9.9422386	10.2580376	6
55	48353.70	55240.93	114243.42	9.6844297	9.7422609	87532.39	181025.21	206809.40	9.9421688	10.2577391	5
56	48379.16	55278.90	114261.79	9.6846585	9.7425594	87518.32	180900.86	206700.56	9.9420990	10.2574406	4
57	48404.62	55316.88	114280.17	9.6848868	9.7428577	87504.24	180776.64	206591.86	9.9420281	10.2571423	3
58	48430.07	55354.88	114298.57	9.6851151	9.7431559	87490.16	180652.56	206483.28	9.9415192	10.2568441	2
59	48455.52	55392.88	114316.98	9.6853432	9.7434540	87476.07	180528.60	206374.84	9.9418893	10.2565460	1
60	48480.96	55430.90	114330.47	9.6855712	9.7437520	87461.97	180404.78	206266.53	9.9418193	10.2562480	0

48480.96

Grad 29.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	48480.96	55430.90	114335.41	9.6855712	9.7437520
1	48506.40	55461.94	114353.85	9.6857991	9.7440499
2	48531.84	55506.98	114372.31	9.6860267	9.7443476
3	48557.27	55545.04	114390.78	9.6862542	9.7446453
4	48582.70	55583 11	114409.27	9.6864816	9.7449428
5	48608.12	55621.19	114427.78	9.6867088	9.7452403
6	48633.54	53659.29	114446.30	9.6869359	9.7455376
7	48658.95	55697.39	114464.84	9.6871628	9.7458349
8	48684.36	55735.52	114483.39	9.6873895	9.7461320
9	48709.77	55773.64	114501.96	9.6876161	9.7464290
10	48735.17	55811.79	114520.55	9.6878425	9.7467259
11	48760.57	55849.94	114539.15	9.6880688	9.7470227
12	48785.97	55888.11	114557.76	9.6882949	9.7473194
13	48811.36	55926.29	114576.39	9.6885209	9.7476160
14	48836.74	55964.48	114595.04	9.6887467	9.7479125
15	48862.12	56002.69	114613.70	9.6889723	9.7482089
16	48887.50	56040.91	114632.38	9.6891978	9.7485052
17	48912.87	56079.14	114651.08	9.6894232	9.7488013
18	48911.14	56117.38	114669.79	9.6896484	9.7490974
19	48963.61	56155.64	114688.52	9.6898734	9.7193934
20	48988.97	56193.91	114707.26	9.6900983	9.7496892
21	49014.33	56232.19	114726.02	9.6903231	9.7499850
22	49039.68	56270.48	114744.79	9.6905476	9 7502806
23	49065.03	56308.79	114763.58	9.6907721	9.7505762
24	49090.37	56347.10	114782.39	9.6909964	9.7508716
25	49115.71	56385.43	114801.21	9.6912205	9.7511669
26	49141.05	56423.78	114820.05	9.6914445	9.7514622
27	49166.38	56462.13	114838.90	9.6916683	9.7517573
28	49191.71	56500.50	114857.77	9.6918919	9.7520523
29	49217.04	56538.88	114876.65	9.6921155	9.7523472
30	49242.36	56577.28	114895.55	9.6923388	9.7526420
31	49267.67	56615.68	114914.47	9.6925620	9.7529368
32	49292.98	56654 10	114933.40	9.6927851	9.7532314
33	49318.29	56692.53	114952.35	9.6930080	9.7535259
34	49343.59	56730 98	114971.32	9.6932308	9.7538203
35	49368.89	56769.44	114990 30	9.6934534	9.7541146
36	49394.19	56807.91	115009.30	9.6936758	9.7544088
37	49419.48	56846.39	115028.31	9.6938981	9.7547029
38	49444.77	56884.88	115047.34	9.6941203	9.7549969
39	49470.05	56923.29	115066.38	9.6943423	9.7552908
40	49495.33	56961.91	115085.44	9.6945642	9.7555846
41	49520.60	57000.45	115104.52	9.6947859	9.7558783
42	49545.87	57038.99	115123 61	9 6950074	9.7561718
43	49571.13	57077.55	115142.74	9.6952288	9.7564653
44	49596.39	57116.12	115161.85	9.6954501	9.7567587
45	49621.65	57154.71	115180.99	9.6956712	9.7570520
46	49646.90	57193.31	115200.15	9.6958922	9.7573452
47	49672.15	57231.92	115219.32	9.6961130	9.7576383
48	49697.40	57270.54	115238.51	9.6963336	9.7579313
49	49622.64	57309.18	115257.72	9.6965541	9.7582241
50	49747.87	57347.82	115276.94	9.6967745	9.7585170
51	49773.10	57386.47	115296.18	9.6969947	9.7588096
52	49798.33	57423.16	115315.43	9.6972148	9.7591022
53	49823.55	57463.85	115334.70	9.6974347	9.7593947
54	49848.77	57502.55	115353.99	8.6976545	9.7596871
55	49873.99	57541.26	115373.29	9.6978741	9.7599794
56	49899.20	57579.99	115392.61	9.6980936	9.7602726
57	49924.41	57618.73	115411.95	9.6983129	9.7605837
58	49949.61	57657.47	115431.30	9.6985321	9.7608557
59	49974.81	57694.25	115450.67	9.6987511	9.7611476
60	50000.00	57735.03	115470.05	9.6989700	9.7614394

60. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	87461.97	180404.78	206266.53	9.9418193	10.2562480
59	87447.86	180281.08	266158.36	9.9417492	10.2559501
58	87433.75	180157.51	206050.31	9.9416791	10.2556524
57	87419.63	180034.08	205942.39	9.9416090	10.2553547
56	87405.50	179910.77	205834.60	9 9415388	10.2550572
55	87391.36	179787.59	205726.95	9.9414685	10.2547597
54	87377.22	179664 54	205619.42	9.9413982	10.2544624
53	87363.07	179541.62	205512.03	9.9413279	10.2541651
52	87348.91	179418.83	205404.76	9.9412575	10.2538680
51	87334.75	179296.16	205297.62	9.9411871	10.2535710
50	87320.58	179173.62	205190.61	9.9411166	10.2532741
49	87306.40	179051.21	205083.73	9.9410461	10.2529773
48	87292.21	178928.93	204976.98	9.9409755	10.2526806
47	87278.01	178806.78	204870.36	9.9409048	10.2523840
46	87263.81	178684.75	204763.86	9.9408342	10.2520875
45	87249.60	178562.85	204657.50	9.9407634	10.2517911
44	87235.38	178441.07	204551.26	9.9406927	10.2514948
43	87221 16	178319 43	204445.15	9.9406219	10.2511987
42	87206.93	178197.90	204339.16	9.9405510	10.2509026
41	87192.69	178076.51	204233.30	9.9404801	10.2506066
40	87178.44	177955.24	204127.57	9.9404091	10.2503108
39	87164.19	177834.09	204021.97	9.9403381	10.2500150
38	87149 95	177713.07	203916.49	9.9402670	10.2497194
37	87135.66	177592.18	203811.14	9.9401959	10.2494238
36	87121.38	177471.41	203705.92	9.9401248	10.2491284
35	87107.14	177350.76	203600.82	9.9400535	10.2488331
34	87092.81	177240.24	203495.85	9.9399823	10.2485378
33	87078.51	177109.85	203391.00	9.9399110	10.2482427
32	87064.20	176989.58	203286.27	9.9398396	10.2479477
31	87049.89	176869.43	203181.68	9.9397682	10.2476528
30	87035.57	176749.40	203077.20	9.9396968	10.2473580
29	87021.24	176629.56	202972.86	9.9396253	10.2470633
28	87006.90	176509.72	202868.63	9.9395537	10.2467686
27	86992.56	176390.07	202764.53	9.9394821	10.2464742
26	86978.21	176270.53	202660.56	9.9394105	10.2461797
25	86963.85	176251.12	202556.70	9.9393388	10.2458854
24	86949.49	176031.83	202452.97	9.9392671	10.2455912
23	86935.12	175912.67	202349.37	9.9391953	10.2452971
22	86926.74	175793.62	202245.89	9.9391234	10.2450031
21	86906.35	175674.70	202142.53	9.9390515	10.2447092
20	86891.96	175555.90	202039.29	9.9389796	10.2444154
19	89877.56	175437.22	201936.17	9.9389076	10.2441217
18	86863.15	175318.66	201833.18	9.9388356	10.2438282
17	86848.73	175200.23	201730.31	9.9387635	10.2435347
16	86834.31	175081.91	201627.56	9.9386914	10.2439413
15	86819.88	174963.71	201524.94	9.9386192	10.2429480
14	86805.44	174845.64	201422.43	9.9385470	10.2426548
13	86791 00	174727.68	201320.05	9.9384747	10.2423617
12	86776.55	174609.84	201217.79	9.9384024	10.2420687
11	86762.09	174492.13	201115.64	9.9383300	10.2417758
10	86747.62	174374 53	201013.62	9.9382576	10.2414830
9	86733.14	174257.05	200911.72	9.9381851	10.2411904
8	86718.66	174139.69	200809.94	9.9381126	10.2408978
7	86704.17	174022.45	200708.28	9.9380400	10.2406053
6	86689.67	173.905.33	200606.74	9.9379674	10.2403129
5	86675.17	173788.33	200505.32	9.9378947	10.2400206
4	86660.66	173671.44	200404.02	9.9378220	10.2397284
3	86646.14	173554.68	200302.83	9.9377492	10.2394363
2	86631.61	173438.03	200201.77	0.9376764	10.2391443
1	86617.38	173321 49	200100.83	9.9376035	10.2388524
0	86602.54	173205.08	200000.00	9.9375306	10.2385606

50000.00

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	50000.00	57735.03	115470.05	9.6989700	9.7614394	60	86602.54	173205.08	200000.00	9.9375306	10.2385606
1	50025.19	57773.82	115489.45	9.6991887	9.7617311	59	86587.99	173088.78	199899.29	9.9374577	10.2382689
2	50050.38	57812.62	115508.87	9.6994073	9.7620224	58	86573.43	172972.60	199798.70	9.9373847	10.2379773
3	50075.56	57851.44	115528.30	9.6996258	9.7623142	57	86558.87	172856.54	199698.23	9.9373116	10.2376858
4	50100.74	57890.27	115547.75	9.6998441	9.7620056	56	86544.30	172740.60	199597.88	9.9372385	10.2373944
5	50125.91	57929.11	115567.22	9.7000622	9.7628969	55	86529.72	172624.77	199497.64	9.9371653	10.2371031
6	50151.08	57967.97	115586.70	9.7002802	9.7631881	54	86515.14	172509.05	199397.53	9.9370921	10.2368119
7	50176.24	58006.84	115606.20	9.7004981	9.7634792	53	86500.55	172393.45	199297.52	9.9370189	10.2365208
8	50201.40	58045.73	115625.72	9.7007158	9.7637702	52	86485.95	172277.97	199197.64	9.9369456	10.2362298
9	50226.55	58084.62	115645.25	9.7009334	9.7640612	51	86471.34	172162.61	199797.87	9.9368722	10.2359388
10	50251.70	58123.53	115664.80	9.7011508	9.7643520	50	86456.73	172047.36	198998.22	9.9367988	10.2356486
11	50276.85	58162.45	115684.36	9.7013681	9.7646427	49	86442.11	171932.22	198898.69	9.9367254	10.2353573
12	50301.99	58201.39	115703.94	9.7015852	9.7649334	48	86427.48	171817.20	198799.27	9.9366519	10.2350666
13	50327.13	58246.34	115723.54	9.7018022	9.7652239	47	86412.84	171702.30	198699.97	9.9365783	10.2347761
14	50352.27	58279.30	115743.15	9.7020190	9.7655143	46	86398.20	171587.51	198600.80	9.9365027	10.2344857
15	50377.40	58318.28	115762.78	9.7022357	9.7658047	45	86383.55	171472.83	198501.72	9.9364311	10.2341953
16	50402.53	58357.27	115782.43	9.7024523	9.7660949	44	86368.89	171358.27	198402.76	9.9363574	10.2339051
17	50427.05	58396.27	115802.09	9.7026687	9.7663851	43	86354.23	171243.82	198303.93	9.9362836	10.2336149
18	50452.77	58435.28	115821.77	9.7028849	9.7666751	42	86339.56	171129.49	198205.20	9.9362098	10.2333249
19	50477.88	58474.31	115841.47	9.7031011	9.7669651	41	86324.88	171015.27	198106.59	9.9361360	10.2330349
20	50502.99	58513.35	115861.18	9.7033170	9.7672550	40	86310.19	170901.16	198008.10	9.9360621	10.2327450
21	50528.09	58552.41	115880.91	9.70353.9	9.7675448	39	86295.49	170787.17	198909.72	9.9359881	10.2324552
22	50553.19	58591.48	115900.65	9.703748	7678344	38	86280.75	170673.29	197811.46	9.9359141	10.2321658
23	50578.28	58630.56	115920.41	9.703964	7681240	37	86266.08	170559.53	197713.31	9.9358401	10.2318760
24	50603.37	58669.65	115940.19	9.704179	7684135	36	86251.36	170445.87	197615.27	9.9357660	10.2315865
25	50628.46	58708.76	115959.99	9.7043947	9.7687029	35	86236.64	170332.33	197517.33	9.9356918	10.2312971
26	50653.55	58747.88	115979.80	9.7046099	9.7689922	34	86221.91	170218.90	197419.54	9.9356177	10.2310078
27	50678.63	58787.02	115999.63	9.7048248	9.7692814	33	86207.17	170105.59	197321.85	9.9355434	10.2307186
28	50703.70	58826.17	116019.47	9.7050397	9.7695705	32	86192.43	169992.38	197224.26	9.9354691	10.2304295
29	50728.77	58865.33	116039.33	9.7052543	9.7698596	31	86177.68	169879.29	197126.80	9.9353948	10.2301404
30	50753.84	58904.50	116059.21	9.7054689	9.7701485	30	86162.92	169766.3	197029.44	9.9353204	10.2298515
31	50778.90	58943.69	116079.11	9.7056833	9.7704473	29	86148.15	169653.44	196932.20	9.9352459	10.2295627
32	50803.96	58982.89	116099.02	9.7058975	9.7707261	28	86133.37	169540.69	196835.07	9.9351715	10.2292739
33	50829.01	59022.11	116118.95	9.7061116	9.7710147	27	86118.59	169428.04	196738.05	9.9350969	10.2289853
34	50854.06	59061.34	116138.89	9.7063256	9.7713033	26	86103.80	169315.50	196641.14	9.9350223	10.2286967
35	50879.10	59100.58	116158.85	9.7065394	9.7715917	25	86089.00	169203.08	196544.34	9.9349477	10.2284083
36	50904.14	59139.83	116178.83	9.7067531	9.7718801	24	86074.20	169090.77	196447.67	9.9348730	10.2281199
37	50929.18	59179.10	116198.82	9.7069667	9.7721684	23	86059.39	168978.56	196351.10	9.9347983	10.2278316
38	50954.21	59218.39	116218.83	9.7071801	9.7724566	22	86044.57	168866.47	196254.64	9.9347235	10.2275434
39	50979.24	59257.68	116238.86	9.7073935	9.7727447	21	86029.74	168754.49	196158.29	9.9346486	10.2272553
40	51004.26	59296.99	116258.91	9.7076064	9.7730327	20	86014.91	168642.61	196062.06	9.9345738	10.2269673
41	51029.28	59336.32	116278.97	9.7078194	9.7733206	19	86060.07	168530.85	195965.93	9.9344988	10.2266 94
42	51054.29	59375.66	116299.05	9.7080323	9.7736084	18	85985.22	168419.19	195869.92	9.9344238	10.2263916
43	51079.30	59415.01	116319.14	9.7082450	9.7738961	17	85970.37	168307.65	195774.01	9.9343488	10.2261039
44	51104.31	59454.37	116339.25	9.7084575	9.7741838	16	85955.51	168196.21	195678.22	9.9342737	10.2258162
45	51129.31	59493.75	116359.38	9.7086699	9.7744713	15	85940.64	168084.89	195582.54	9.9341986	10.2255287
46	51154.31	59533.14	116379.53	9.7088822	9.7747588	14	85925.76	167973.67	195486.97	9.9341234	10.2252412
47	51179.30	59572.54	116399.69	9.7090943	9.7750482	13	85910.88	167862.56	195391.50	9.9340482	10.2249538
48	51204.29	59611.96	116419.87	9.7093063	9.7753334	12	85895.99	167751.59	195296.15	9.9339729	10.2246666
49	51229.27	59651.40	116440.07	9.7095182	9.7756206	11	85881.09	167640.87	195200.91	9.9338976	10.2243794
50	51254.25	59690.84	116460.28	9.7097299	9.7759077	10	85866.18	167529.88	195105.77	9.9338222	10.2240923
51	51279.22	59730.30	116480.51	9.7099415	9.7761947	9	85851.27	167419.21	195010.79	9.9337467	10.2238053
52	51304.19	59769.78	116500.76	9.7105529	9.7764816	8	85836.35	167308.64	194915.83	9.9336713	10.2235184
53	51329.16	59809.27	116521.02	9.7103642	9.7767685	7	85821.42	167198.18	194821.01	9.9335957	10.2232315
54	51354.12	59848.77	116541.30	9.7105753	9.7770552	6	85806.49	167087.82	194726.32	9.9335201	10.2229448
55	51379.08	59888.28	116561.60	9.7107863	9.7773418	5	85791.55	166977.58	194631.73	9.9334445	10.2226582
56	51404.04	59927.81	116581.91	9.7109932	9.7776284	4	85776.60	166867.44	194537.25	9.9333688	10.2223716
57	51428.99	59967.35	116602.24	9.7112080	9.7779149	3	85761.64	166757.41	194442.88	9.9332931	10.2220851
58	51453.93	60006.91	116622.59	9.7114186	9.7782012	2	85746.68	166647.48	194348.61	9.9332173	10.2217988
59	51478.87	60046.48	116642.96	9.7116290	9.7784875	1	85731.71	166537.66	194254.45	9.9331415	10.2215121
60	51503.81	60086.06	116663.34	9.7118393	9.7787737	0	85716.73	166427.95	194160.40	9.9330656	10.2212263

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	51503.81	60086.06	116663.34	9.7118393	9.7787737	60	85716.73	166427.95	194160.45	9.9330656	10.2212263
1	51528.74	60125.66	116683.74	9.7120495	9.7790599	59	85701.74	166318.34	194066.46	9.9329897	10.2209401
2	51553.67	60165.27	116704.16	9.7122596	9.7793459	58	85686.75	166208.84	193972.62	9.9329137	10.2206541
3	51578.59	60204.90	116724.59	9.7124795	9.7796318	57	85671.75	166099.45	193878.89	9.9328376	10.2203682
4	51603.51	60244.54	116745.04	9.7126792	9.7799177	56	85656.74	165990.16	193785.27	9.9327616	10.2200823
5	51628.42	60284.19	116765.51	9.7128889	9.7802034	55	85641.73	165880.97	193691.76	9.9326854	10.2197966
6	51653.33	60323.86	116785.99	9.7130983	9.7804891	54	85626.71	165771.89	193598.35	9.9326092	10.2195109
7	51678.24	60363.54	116806.49	9.7133077	9.7807747	53	85611.68	165662.92	193505.05	9.9325330	10.2292253
8	51703.14	60403.23	116827.01	9.7135169	9.7810602	52	85596.64	165554.05	193411.85	9.9324567	10.2189398
9	51728.04	60442.94	116847.55	9.7137269	9.7813456	51	85581.60	165445.29	193318.76	9.9323804	10.2186544
10	51752.93	60482.66	116868.10	9.7139349	9.7816309	50	85566.55	165336.63	193225.78	9.9323040	10.2183691
11	51777.82	60522.40	116888.67	9.7141437	9.7819161	49	85551.49	165228.08	193132.90	9.9322276	10.2180838
12	51802.70	60562.15	116909.26	9.7143524	9.7822013	48	85536.42	165119.63	193040.13	9.9321511	10.2177987
13	51827.58	60601.92	116929.86	9.7145609	9.7824864	47	85521.35	165011.28	192947.46	9.9320746	10.2175136
14	51852.46	60641.70	116950.48	9.7147693	9.7827713	46	85506.27	164903.04	192854.90	9.9319980	10.2172287
15	51877.33	60681.49	116971.22	9.7149776	9.7830562	45	85491.18	164794.90	192762.44	9.9319213	10.2169438
16	51902.19	60721.30	116991.78	9.7151857	9.7833410	44	85476.09	164686.86	192670.09	9.9318447	10.2166590
17	51927.05	60761.12	117012.45	9.7153937	9.7836258	43	85460.99	164578.93	192577.84	9.9317679	10.2163742
18	51951.91	60800.95	117033.14	9.7156015	9.7839104	42	85445.88	164471.11	192485.70	9.9316911	10.2160896
19	51976.76	60840.80	117053.85	9.7158092	9.7841949	41	85430.76	164363.38	192393.66	9.9316143	10.2158051
20	52001.61	60880.67	117074.57	9.7160168	9.7844794	40	85415.64	164255.76	192301.73	9.9315374	10.2155206
21	52026.46	60920.54	117095.31	9.7162243	9.7847638	39	85400.51	164148.24	192209.90	9.9314605	10.2152362
22	52051.30	60960.43	117116.07	9.7164316	9.7850481	38	85385.37	164040.82	192118.17	9.9313835	10.2149519
23	52076.13	61000.34	117136.85	9.7166387	9.7853323	37	85370.23	163933.51	192026.55	9.9313065	10.2146677
24	52100.66	61040.20	117157.64	9.7168458	9.7856164	36	85355.08	163826.30	191935.03	9.9312254	10.2143836
25	52125.79	61080.19	117178.45	9.7170526	9.7859004	35	85339.92	163719.19	191843.62	9.9311522	10.2140996
26	52150.61	61120.14	117199.28	9.7172594	9.7861844	34	85324.75	163612.18	191752.30	9.9310750	10.2138156
27	52175.43	61160.11	117225.15	9.7174660	9.7864682	33	85309.58	163505.28	191661.09	9.9309978	10.2135318
28	52200.24	61200.08	117240.99	9.7176725	9.7867520	32	85294.40	163398.47	191569.99	9.9309205	10.2132480
29	52225.05	61240.07	117261.87	9.7178789	9.7870357	31	85279.21	163291.77	191478.99	9.9308432	10.2129543
30	52249.86	61280.08	117282.77	9.7180851	9.7873193	30	85264.02	163185.17	191388.09	9.9307658	10.2126807
31	52274.66	61320.10	117303.69	9.7182912	9.7876028	29	85248.81	163078.67	191297.29	9.9306883	10.2123972
32	52299.45	61360.13	117324.62	9.7184971	9.7878863	28	85233.60	162972.27	191206.59	9.9306109	10.2121137
33	52324.24	61400.18	117345.57	9.7187030	9.7881696	27	85218.38	162865.97	191116.00	9.9305333	10.2118304
34	52349.03	61440.24	117366.54	9.7189086	9.7884529	26	85203.16	162759.77	191025.51	9.9304557	10.2115471
35	52373.81	61480.32	117387.52	9.7191142	9.7887361	25	85187.93	162653.68	190935.12	9.9303781	10.2112639
36	52398.59	61520.41	117408.52	9.7193196	9.7890192	24	85172.69	162547.68	190844.83	9.9303004	10.2109808
37	52423.36	61560.52	117429.54	9.7195249	9.7893023	23	85157.44	162441.78	190754.64	9.9302226	10.2106977
38	52448.13	61600.64	117450.58	9.7197300	9.7895852	22	85142.19	162335.99	190664.56	9.9301448	10.2104148
39	52472.90	61640.77	117471.64	9.7199350	9.7898681	21	85126.93	162230.29	190574.55	9.9300670	10.2101319
40	52497.66	61680.92	117492.71	9.7201399	9.7901508	20	85111.66	162124.69	190484.69	9.9299891	10.2098492
41	52522.41	61721.08	117513.80	9.7203447	9.7904335	19	85096.39	162019.20	190394.91	9.9299112	10.2095665
42	52547.16	61761.26	117534.91	9.7205493	9.7907161	18	85081.11	161913.80	190305.22	9.9298332	10.2092839
43	52571.91	61801.45	117556.03	9.7207538	9.7909987	17	85025.82	162808.50	190215.64	9.9297551	10.2090013
44	52596.65	61841.66	117577.13	9.7209581	9.7912811	16	85050.52	161703.30	190126.16	9.9296770	10.2087189
45	52621.39	61881.88	117598.33	9.7211623	9.7915635	15	85035.22	161598.20	190036.78	9.9295989	10.2084365
46	52646.12	61922.11	117619.51	9.7213664	9.7918458	14	85019.91	161493.20	189947.50	9.9295207	10.2081542
47	52670.85	61962.36	117640.70	9.7215704	9.7921280	13	85004.59	161388.29	189858.32	9.9294424	10.2078720
48	52695.58	62003.63	117661.41	9.7217742	9.7926101	12	84989.27	161283.49	189769.24	9.9293641	10.2075899
49	52720.30	62042.91	117683.14	9.7219779	9.7926521	11	84973.94	161178.78	189680.26	9.9292857	10.2073079
50	52745.02	62083.20	117704.39	9.7221814	9.7929741	10	84958.60	161074.17	189591.38	9.9292073	10.2070259
51	52769.73	62123.31	117725.66	9.7223848	9.7932560	9	84943.25	160969.36	189502.59	9.9291289	10.2067440
52	52794.44	62163.83	117746.94	9.7225881	9.7935378	8	84927.90	160865.25	189413.91	9.9290504	10.2064622
53	52819.14	62204.17	117768.24	9.7227913	9.7938195	7	84912.54	160760.94	189325.32	9.9289718	10.2061805
54	52843.84	62244.52	117789.56	9.7229943	9.7941011	6	84897.17	160656.72	189236.84	9.9288932	10.2058989
55	52868.53	62284.88	117810.90	9.7231972	9.7943827	5	84881.79	160552.60	189148.45	9.9288145	10.2056173
56	52893.22	62325.26	117832.25	9.7234000	9.7946641	4	84866.41	160448.58	189060.16	9.9287358	10.2053359
57	52917.90	62365.66	117853.62	9.7236026	9.7949455	3	84851.02	160344.65	188971.97	9.9286571	10.2050545
58	52942.58	62406.07	117875.01	9.7238051	9.7952268	2	84835.62	160240.82	188843.88	9.9285783	10.2047732
59	52967.26	62446.50	117896.41	9.7240075	9.7955081	1	84820.22	160137.09	188795.89	9.9284994	10.2044919
60	52991.93	62486.94	117917.84	9.7242097	9.7952892	0	84804.81	160933.45	188707.99	9.9284205	10.2042108

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	52991.93	62486.94	117937.84	9.7242097	9.7957892	60	84804.81	160033.45	188707.99	9.9284205	10.2042108
1	53016.59	62527.39	117939.26	9.7244118	9.7960703	59	84789.35	159929.91	[illegible]	9.9283415	10.2039297
2	53041.25	62567.86	117960.74	9.7246138	9.7963513	58	84773.96	159826.47	[illegible]	9.9282625	10.2036483
3	53065.91	62608.34	117982.22	9.7248156	9.7966322	57	84758.53	159723.12	188447.89	9.9281834	10.2033678
4	53090.56	62648.84	118003.72	9.7250174	9.7969130	56	84743.09	159619.87	188357.58	9.9281043	10.2030870
5	53115.21	62689.35	118025.23	9.7252189	9.7971938	55	84727.64	159516.72	188269.97	9.9280251	10.2028062
6	53139.86	62729.88	118046.76	9.7254204	9.7974745	54	84712.19	159413.66	188182.66	9.9279459	10.2025255
7	53164.50	62770.42	118068.31	9.7256217	9.7977551	53	84696.73	159310.70	188095.45	9.9278666	10.2022449
8	53189.13	62810.98	118089.88	9.7258229	9.7980356	52	84681.26	159207.83	188008.35	9.9277873	10.2019644
9	53213.76	62851.56	118111.47	9.7260240	9.7983160	51	84665.78	159105.05	187921.31	9.9277079	10.2016840
10	53238.39	62892.15	118133.07	9.7262249	9.7985964	50	84650.30	159004.38	187834.38	9.9276285	10.2014036
11	53263.01	62952.75	118154.69	9.7264257	9.7988767	49	84634.81	158899.79	187747.55	9.9275490	10.2011233
12	53287.63	62973.36	118176.33	9.7266264	9.7991569	48	84619.31	158797.90	187660.81	9.9274695	10.2008431
13	53312.24	63013.99	118197.99	9.7268269	9.7994370	47	84603.81	158694.91	187574.18	9.9273899	10.2005630
14	53336.85	63034.64	118219.66	9.7270273	9.7997170	46	84588.30	158592.61	187487.64	9.9273105	10.2002830
15	53361.45	63095.50	118241.35	9.7272276	9.7999970	45	84572.78	158490.41	187401.20	9.9272306	10.2000030
16	53386.05	63135.98	118263.06	9.7274278	9.8002769	44	84557.25	158388.36	187314.85	9.9271509	10.1997231
17	53410.64	63176.67	118284.79	9.7276278	9.8005567	43	84541.72	158286.28	187228.59	9.9270711	10.1994433
18	53435.23	63217.38	118306.54	9.7278277	9.8008365	42	84526.18	158184.36	187142.43	9.9269913	10.1991635
19	53459.82	63258.10	118328.30	9.7280275	9.8011161	41	84510.63	158082.53	187056.37	9.9269114	10.1988839
20	53484.40	63298.83	118350.08	9.7282271	9.8013957	40	84495.08	157980.79	186970.40	9.9268314	10.1986043
21	53508.98	63339.58	118371.88	9.7284267	9.8016753	39	84479.52	157879.15	186884.53	9.9267514	10.1983248
22	53533.55	63380.35	118393.70	9.728626	9.8019546	38	84463.95	157777.60	186798.75	9.9266714	10.1980454
23	53558.12	63421.13	118415.54	9.72882	9.8022340	37	84448.37	157676.15	186713.06	9.9265913	10.1977660
24	53582.68	63461.93	118437.40	9.7290244	9.8025133	36	84432.79	157574.79	186627.47	9.9265112	10.1974867
25	53607.24	63502.74	118459.27	9.7292234	9.8027925	35	84417.20	157475.52	186541.97	9.9264310	10.1972075
26	53631.79	63543.57	118481.16	9.7294223	9.8030716	34	84401.60	157372.34	186458.47	9.9263507	10.1969284
27	53656.34	63584.41	118503.07	9.7296211	9.8033506	33	84386.00	157271.26	186371.26	9.9261704	10.1966494
28	53680.88	63625.27	118525.00	9.7298197	9.8036296	32	84370.39	157170.28	186286.05	9.9261901	10.1963704
29	53705.42	63665.14	118546.94	9.7300182	9.8039085	31	84354.77	157069.56	186201.93	9.9261096	10.1960915
30	53729.96	63707.03	118568.91	9.7302165	9.8041873	30	84339.14	156968.56	186115.90	9.9260292	10.1958127
31	53754.49	63747.93	118590.89	9.7304148	9.8044661	29	84323.51	156867.84	186030.96	9.9259487	10.1955339
32	53775.02	63788.85	118612.89	9.7306129	9.8047447	28	84307.87	156767.22	185946.12	9.9258681	10.1952553
33	53803.54	63829.74	118634.91	9.7308109	9.8050233	27	84292.22	156666.69	185861.38	9.9257875	10.1949767
34	53828.06	63870.73	118656.95	9.7310087	9.8053019	26	84276.57	156566.25	185776.72	9.9257069	10.1946982
35	53852.57	63911.69	118679.00	9.7312064	9.8055803	25	84260.91	156465.90	185692.16	9.9256261	10.1944197
36	53877.08	63952.67	118701.07	9.7314040	9.8058587	24	84245.24	156365.64	185607.69	9.9255454	10.1941413
37	53901.58	63993.66	118723.16	9.7316015	9.8061370	23	84229.56	156265.48	185523.31	9.9254646	10.1938630
38	53926.08	64034.67	118745.27	9.7317989	9.8064152	22	84213.88	156165.40	185439.03	9.9253837	10.1935848
39	53950.58	64075.69	118767.40	9.7319961	9.8066933	21	84198.19	156065.42	185354.83	9.9253028	10.1933067
40	53975.07	64116.73	118789.55	9.7321932	9.8069714	20	84182.49	155965.52	185270.73	9.9252218	10.1930286
41	53999.55	64157.79	118811.71	9.7323902	9.8072494	19	84166.79	155865.72	185186.72	9.9251408	10.1927506
42	54024.03	64198.86	118833.89	9.7325870	9.8075273	18	84151.08	155766.01	185102.81	9.9250597	10.1924727
43	54048.51	64239.95	118856.09	9.7327837	9.8078052	17	84135.36	155666.39	185018.98	9.9249786	10.1921948
44	54072.98	64281.05	118878.31	9.7329803	9.8080829	16	84119.63	155566.85	184935.25	9.9248974	10.1919171
45	54097.45	64322.16	118900.55	9.7331768	9.8083606	15	84103.90	155467.41	184851.61	9.9248161	10.1916394
46	54121.91	64363.29	118922.81	9.7333731	9.8086383	14	84088.16	155368.06	184768.05	9.9247349	10.1913617
47	54146.37	64404.44	118945.08	9.7335693	9.8089158	13	84072.41	155268.80	184684.59	9.9246535	10.1910842
48	54170.82	64445.60	118967.37	9.7337654	9.8091933	12	84056.66	155169.63	184601.23	9.9245721	10.1908067
49	54195.27	64486.78	118989.68	9.7339614	9.8094707	11	84040.90	155070.54	184517.95	9.9244907	10.1905293
50	54219.71	64527.97	119012.01	9.7341572	9.8097480	10	84025.13	154971.55	184434.76	9.9244042	10.1902520
51	54244.15	64569.18	119034.36	9.7343529	9.8100253	9	84009.35	154872.64	184351.66	9.9243277	10.1899747
52	54268.59	64610.41	119056.73	9.7345485	9.8103025	8	83993.57	154773.83	184268.66	9.9242461	10.1896975
53	54293.02	64651.65	119079.12	9.7347440	9.8105796	7	83977.78	154675.10	184185.74	9.9241644	10.1894204
54	54317.44	64692.90	119101.52	9.7349393	9.8108566	6	83961.98	154576.46	184102.91	9.9240827	10.1891434
55	54341.86	64734.17	119123.94	9.7351345	9.8111336	5	83946.18	154477.92	184020.18	9.9240010	10.1888664
56	54366.28	64775.46	119146.38	9.7353296	9.8114105	4	83930.37	154379.46	183937.53	9.9239191	10.1885895
57	54390.69	64816.76	119168.84	9.7355246	9.8116873	3	83914.55	154281.08	183854.98	9.9238373	10.1883127
58	54415.10	64858.08	119191.32	9.7357195	9.8119641	2	83898.73	154182.80	183772.51	9.9237554	10.1880359
59	54439.50	64899.47	119213.82	9.7359142	9.8122408	1	83882.90	154084.60	183690.13	9.9236734	10.1877592
60	54463.90	64940.76	119236.33	9.7361088	9.8125174	0	83867.06	153986.50	183607.84	9.9235914	10.1874826

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	54463.90	64940.76	119236.33	9.7361088	9.8125174	60	83867.06	153986.50	183607.84	9.9235914	10.1874826
1	54488.30	64982.12	119258.86	9.7363032	9.8127939	59	83851.21	153888.48	183525.64	9.9235093	10.1872061
2	54512.69	65023.50	119281.41	9.7364976	9.8130704	58	83835.36	153790.55	183443.53	9.9234272	10.1869296
3	54537.07	65064.90	119303.98	9.7366918	9.8133468	57	83819.50	153692.70	183361.51	9.9233450	10.1866532
4	54561.45	65106.31	119326.57	9.7368859	9.8136231	56	83803.63	153594.94	183279.58	9.9232628	10.1863769
5	54585.83	65147.74	119349.18	9.7370799	9.8138993	55	83787.75	153497.27	183197.74	9.9231805	10.1861207
6	54610.20	65189.18	119371.81	9.7372737	9.8141755	54	83771.87	153399.69	183115.99	9.9230982	10.1858245
7	54634.56	65230.64	119394.46	9.7374675	9.8144516	53	83755.98	153302.20	183034.32	9.9230158	10.1855484
8	54658.92	65272.11	119417.12	9.7376611	9.8147277	52	83740.08	153204.79	182952.74	9.9229334	10.1852723
9	54683.28	65313.60	119439.80	9.7378546	9.8150036	51	83724.18	153107.47	182871.25	9.9228509	10.1849964
10	54707.63	65355.11	119462.50	9.7380479	9.8152795	50	83708.27	153010.23	182789.85	9.9227684	10.1847205
11	54731.98	65396.63	119485.22	9.7382412	9.8155554	49	83692.35	152913.08	182708.54	9.9226858	10.1844446
12	54756.32	65438.17	119507.96	9.7384343	9.8158311	48	83676.43	152816.02	182627.31	9.9226032	10.1841689
13	54780.66	65479.72	119530.72	9.7386273	9.8161068	47	83660.50	152719.04	182546.17	9.9225205	10.1838932
14	54804.99	65521.29	119553.50	9.7388201	9.8163824	46	83644.56	152622.15	182465.12	9.9224377	10.1836176
15	54329.32	65562.87	119576.30	9.7390129	9.8166580	45	83628.61	152525.35	182384.16	9.9223549	10.1833420
16	54853.65	65604.47	119599.11	9.7392055	9.8169335	44	83612.66	152428.63	182303.28	9.9222721	10.1830665
17	54877.97	65646.09	119621.94	9.7393980	9.8172089	43	83596.70	152332.00	182222.49	9.9221891	10.1827911
18	54902.28	65687.72	119644.79	9.7395904	9.8174842	42	83580.73	152235.45	182141.79	9.9221062	10.1825158
19	54926.59	65729.37	119667.66	9.7397827	9.8177595	41	83564.76	152138.99	182061.18	9.9220232	10.1822405
20	54950.90	65771.03	119690.55	9.7399748	9.8180347	40	83548.78	152042.61	181980.65	9.9219401	10.1819653
21	54975.20	65812.71	119713.46	9.7401668	9.8183098	39	83532.79	151946.32	181900.21	9.9218570	10.1816902
22	54999.50	65854.41	119736.39	9.7403587	9.8185849	38	83516.80	151850.12	181819.85	9.9217738	10.1814151
23	55023.79	65896.12	119759.34	9.7405505	9.8188599	37	83500.80	151754.00	181739.58	9.9216906	10.1811401
24	55048.08	65937.85	119782.31	9.7407421	9.8191348	36	83484.79	151657.96	181659.40	9.9216073	10.1808652
25	55072.36	65979.59	119805.29	9.7409337	9.8194096	35	83468.77	151562.01	181579.30	9.9215240	10.1805904
26	55096.64	66021.35	119828.29	9.7411251	9.8196844	34	83452.75	151466.14	181499.29	9.9214405	10.1803156
27	55120.91	66063.13	119851.31	9.7413164	9.8199591	33	83436.72	151370.36	181419.37	9.9213572	10.1800408
28	55145.18	66104.92	119874.35	9.7415075	9.8202338	32	83420.68	151274.66	181339.58	9.9212737	10.1797661
29	55169.44	66146.73	119897.41	9.7416986	9.8205084	31	83404.63	151179.05	181259.77	9.9211902	10.1794916
30	55193.70	66188.56	119920.49	9.7418895	9.8207829	30	83388.58	151083.52	181180.10	9.9211066	10.1792171
31	55217.95	66230.40	119943.59	9.7420803	9.8210574	29	83372.52	150988.07	181100.52	9.9210229	10.1789426
32	55242.20	66272.26	119966.71	9.7422710	9.8213317	28	83356.45	150892.71	181021.02	9.9209393	10.1786683
33	55266.45	66314.13	119989.85	9.7424616	9.8216060	27	83340.38	150797.48	180941.61	9.9208555	10.1783940
34	55290.69	66356.02	120013.01	9.7426520	9.8218803	26	83324.30	150702.24	180862.28	9.9207717	10.1781197
35	55314.92	66397.92	120036.19	9.7428423	9.8221545	25	83308.21	150607.13	180783.04	9.9206878	10.1778455
36	55339.15	66439.84	120059.38	9.7430325	9.8224286	24	83292.12	150512.10	180703.88	9.9206039	10.1775714
37	55363.38	66481.78	120082.59	9.7432226	9.8227026	23	83276.02	150417.16	180624.81	9.9205200	10.1772974
38	55387.60	66523.73	120105.82	9.7434126	9.8229766	22	83259.91	150322.30	180545.82	9.9204360	10.1770234
39	55411.82	66565.70	120129.07	9.7436024	9.8232505	21	83243.80	150227.52	180466.91	9.9203519	10.1767495
40	55436.03	66607.69	120152.34	9.7437921	9.8235244	20	83227.68	150132.82	180388.09	9.9202678	10.1764756
41	55460.24	66649.69	120175.63	9.7439817	9.8237981	19	83211.55	150038.20	180309.35	9.9201836	10.1762018
42	55484.44	66691.71	120198.94	9.7441712	9.8240719	18	83195.41	149943.67	180230.70	9.9200994	10.1759281
43	55508.64	66733.75	120222.27	9.7443606	9.8243455	17	83179.27	149849.22	180152.13	9.9200151	10.1756545
44	55532.83	66775.80	120245.62	9.7445498	9.8246191	16	83163.12	149754.86	180073.65	9.9199308	10.1753809
45	55557.02	66817.87	120268.99	9.7447390	9.8248926	15	83146.96	149660.58	179995.25	9.9198464	10.1751074
46	55581.21	66859.95	120292.37	9.7449280	9.8251660	14	83130.79	149566.38	179916.93	9.9197619	10.1748340
47	55605.39	66902.05	120315.77	9.7451169	9.8254394	13	83114.62	149472.26	179838.69	9.9196775	10.1745606
48	55629.56	66944.17	120339.18	9.7453056	9.8257127	12	83098.44	149378.22	179760.54	9.9195929	10.1742873
49	55653.73	66986.30	120362.64	9.7454943	9.8259860	11	83082.26	149284.26	179682.47	9.9195083	10.1740140
50	55677.90	67028.45	120386.10	9.7456828	9.8262592	10	83066.07	149190.38	179604.48	9.9194237	10.1737408
51	55702.06	67070.62	120409.58	9.7458712	9.8265323	9	83049.87	149096.59	179526.58	9.9193390	10.1734677
52	55726.21	67112.80	120433.08	9.7460595	9.8268053	8	83033.66	149002.88	179448.76	9.9192542	10.1731947
53	55750.36	67155.00	120456.60	9.7462477	9.8270783	7	83017.45	148909.25	179271.02	9.9191694	10.1729217
54	55774.51	67197.21	120480.14	9.7464358	9.8273513	6	83001.23	148815.70	179293.37	9.9190845	10.1726487
55	55798.65	67239.44	120503.80	9.7466237	9.8276241	5	82985.00	148722.22	179215.80	9.9189996	10.1723759
56	55822.79	67281.69	120527.28	9.7468115	9.8278969	4	82968.76	148628.84	179138.31	9.9189146	10.1721031
57	55846.92	67323.96	120550.88	9.7469992	9.8281696	3	82952.52	148535.53	179060.90	9.9188296	10.1718304
58	55871.05	67366.24	120574.50	9.7471868	9.8284423	2	82936.27	148442.30	178983.58	9.9187445	10.1715577
59	55895.17	67408.54	120598.14	9.7473743	9.8287149	1	82920.02	148349.16	178906.33	9.9186594	10.1712851
60	55919.29	67450.85	120621.80	9.7475617	9.8289874	0	82903.76	148256.10	178829.16	9.9185742	10.1710126

55919.29

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	55919.29	67450.85	120621.80	9.7475617	9.8289872
1	55943.40	67493.18	120645.48	9.7477489	9.8292599
2	55967.51	67535.53	120669.18	9.7479360	9.8295323
3	55991.61	67577.90	120692.89	9.7481230	9.8298047
4	56015.71	67620.28	120716.62	9.7483099	9.8300769
5	56039.81	67662.68	120740.37	9.7484967	9.8303492
6	56063.90	67705.09	120764.14	9.7486833	9.8306213
7	56087.98	67747.52	120787.93	9.7488698	9.8308934
8	56112.06	67789.97	120811.75	9.7490562	9.8311654
9	56136.14	67832.44	120835.59	9.7492425	9.8314374
10	56160.21	67874.92	120859.44	9.7494287	9.8317093
11	56184.28	67917.42	120883.31	9.7496148	9.8319811
12	56208.34	67959.93	120907.20	9.7498007	9.8322529
13	56232.39	68002.46	120931.12	9.7499866	9.8325246
14	56256.44	68045.01	120955.05	9.7501723	9.8327963
15	56280.49	68087.58	120976.00	9.7503579	9.8330679
16	56304.53	68130.16	121002.97	9.7505434	9.8333394
17	56328.57	68172.76	121026.96	9.7507287	9.8336109
18	56352.60	68215.38	121050.97	9.7509140	9.8338823
19	56376.63	68258.01	121075.00	9.7510991	9.8341536
20	56400.65	68300.66	121099.05	9.7512842	9.8344249
21	56424.67	68343.33	121123.12	9.7514691	9.8346961
22	56448.69	68386.01	121147.21	9.7516538	9.8349673
23	56472.70	68428.71	121171.32	9.751838	9.8352384
24	56496.70	68471.43	121195.45	9.7520131	9.8355094
25	56520.70	68514.17	121219.60	9.7522075	9.8357804
26	56544.69	68556.92	121243.77	9.7523919	9.8360513
27	56568.63	68599.69	121267.96	9.7525761	9.8363221
28	56592.67	68642.47	121292.17	9.7527602	9.8365929
29	56616.65	68685.27	121316.40	9.7529442	9.8368636
30	56640.62	68728.10	121340.64	9.7531280	9.8371343
31	56654.59	68770.94	121364.91	9.7533118	9.8374049
32	56688.56	68813.79	121389.20	9.7534954	9.8376755
33	56712.52	68856.66	121413.51	9.7536790	9.8379460
34	56736.48	68899.55	121437.83	9.7538624	9.8382164
35	56760.43	68942.46	121462.18	9.7540457	9.8384867
36	56784.37	68985.38	121486.55	9.7542288	9.8387571
37	56808.31	69028.32	121510.94	9.7544119	9.8390273
38	56832.25	69071.28	121535.35	9.7545949	9.8392975
39	56856.18	69114.25	121559.78	9.7547777	9.8395676
40	56880.11	69157.24	121584.23	9.7549604	9.8398377
41	56904.03	69200.25	121708.70	9.7551431	9.8401077
42	56927.95	69243.28	121633.19	9.7553256	9.8403776
43	56951.86	69286.33	121657.70	9.7555080	9.8406475
44	56975.77	69329.39	121682.23	9.7556902	9.8409174
45	56999.68	69372.47	121706.78	9 7558724	9.8411871
46	57023.58	69415.57	121731.35	9.7560544	9.8414569
47	57047.47	69458.68	121755.94	9.7562364	9.8417265
48	57071.36	69501.81	121780.55	9.7564182	9.8419961
49	57095.24	69544.96	121805.18	9.7565999	9.8422657
50	57119.12	69588.13	121829.83	9.7567815	9.8425351
51	57142.99	69631.31	221854.50	9.7569630	9.8428046
52	57166.86	69674.51	121879.19	9.7571444	9.8430739
53	57190.73	69717.73	121903.90	9.7573256	9.8433432
54	57214.59	69760.97	121928.64	9.7575068	9.8436125
55	57238.44	69804.22	121953.39	9.7576878	9.8438817
56	57261.29	69847.49	121978.16	9.7578687	9.8441508
57	57286.14	69890.78	122002.96	9.7580495	9.8444199
58	57309.98	69934.09	122027.77	9.7582302	9.8446889
59	57333.81	69977.47	122052.60	9.7584108	9.8449579
60	57357.64	60020.75	122077.46	9.7585913	9.8452268

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	82903.76	148256.10	178829.16	9.9185742	10.1710126
59	82887.49	148163.11	178752.08	9.9184890	10.1707401
58	82871.21	148070.21	178675.08	9.9184037	10.1704677
57	82854.93	147977.38	178598.17	9.9183183	10.1701953
56	82838.64	147884.63	178521.33	9.9182329	10.1699231
55	82822.34	147791.97	178444.57	9.9181475	10.1696508
54	82806.05	147699.38	178367.90	9.9180620	10.1693787
53	82789.72	147606.88	178291.31	9.9179764	10.1691066
52	82773.40	147514.45	178214.79	9.9178908	10.1688346
51	82757.07	147422.10	178138.36	9.9176051	10.1685626
50	82740.74	147329.83	178062.01	9.9177191	10.1682907
49	82724.40	147237.64	177985.74	9.9176336	10.1680189
48	82708.05	147145.53	177909.55	9.9175478	10.1677471
47	82691.70	147053.50	177833.43	9.9174618	10.1674754
46	82675.34	146961.55	177757.40	9.9173760	10.1672037
45	82658.97	146869.67	177681.45	9.9172900	10.1669321
44	82642.60	146777.87	177605.58	9.9172040	10.1666606
43	82626.22	146686.16	177529.79	9.9171179	10.1663891
42	82609.83	146594.51	177454.08	9.9170317	10.1661177
41	82593.43	146502.96	177378.45	9.9169455	10.1658464
40	82577.03	146411.47	177302.90	9.9168593	10.1655751
39	82560.62	146320.07	177227.43	9.9167730	10.1653039
38	82544.20	146228.74	177152.04	9.9166866	10.1650327
37	82527.78	146137.49	177076.73	9.9166002	10.1647616
36	82511.35	146046.32	177001.49	9.9165137	10.1644906
35	82494.91	145955.22	176926.33	9.9164272	10.1642196
34	82478.47	145864.20	176851.25	9.9163406	10.1639487
33	82462.01	145773.26	176776.25	9.9162539	10.1636779
32	82445.56	145682.40	176701.33	9.9161672	10.1634071
31	82429.09	145591.61	176626.49	9.9160805	10.1631364
30	82412.62	145500.90	176551.73	9.9159937	10.1628657
29	82396.14	145410.27	176477.04	9.9159069	10.1625951
28	82379.65	145319.71	176402.43	9.9158200	10.1623245
27	82363.16	145229.23	176327.91	9.9157330	10.1620540
26	82346.66	145138.83	176253.45	9.9156460	10.1617836
25	82330.15	145048.50	176179.08	9.9155589	10.1615133
24	82313.64	144958.25	176104.78	9.9154718	10.1612429
23	82297.12	144868.08	176030.56	9.9153846	10.1609727
22	82280.59	144777.98	175956.42	9.9152974	10.1607025
21	82264.05	144687.96	175822.36	9.9152101	10.1604324
20	82247.51	144598.01	175808.37	9.9151228	10.1601624
19	82230.96	144508.14	175734.46	9.9150354	10.1598924
18	82214.40	144418.34	175660.63	9.9149479	10.1596224
17	82197.84	144328.62	175586.87	9.9148604	10.1593524
16	82181.27	144238.97	175513.19	9.9147729	10.1590826
15	82164.69	144149.40	175439.59	9.9146852	10.1588129
14	82148.11	144059.91	175366.07	9.9145976	10.1585431
13	82131.52	143970.49	175292.62	9.9145099	10.1582735
12	82114.92	143881.14	175219.24	9.9144221	10.1580039
11	82098.31	143791.87	175145.94	9.9143342	10.1577343
10	82081.70	143702.68	175072.73	9.9142464	10.1574649
9	82065.08	143613.56	174999.58	9.9141584	10.1571954
8	82048.40	143524.51	174926.51	9.9140704	10.1569261
7	82031.83	143435.54	174853.52	9.9139824	10.1566568
6	82015.19	143346.64	174780.60	9.9138943	10.1563875
5	81998.54	143257.81	174707.76	9.9138061	10.1561189
4	81981.89	143169.06	174634.99	9.9137179	10.1558492
3	81965.23	143080.39	174562.30	9.9136296	10.1555801
2	81948.56	142991.78	174489.61	9.9135413	10.1553111
1	81931.89	142903.26	174417.15	9.9134530	10.1550421
0	81915.21	142814.80	174344.68	9.9133645	10.1547732

Grad. 35. | 54. Grad.

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Min.
0	57357.64	70020.75	122077.46	9.7585913	9.8452268	81915.21	142814.80	174344.68	9.9133645	10.1547732	60
1	57381.47	70064.11	122102.33	9.7587717	9.8454956	81898.52	142726.42	174252.29	9.9132760	10.1545044	59
2	57405.29	70107.49	122127.23	9.7589519	9.8457644	81881.82	142638.11	174199.97	9.9131875	10.1542356	58
3	57429.11	70150.89	122152.15	9.7591321	9.8460332	81865.12	142549.87	174127.73	9.9130989	10.1539668	57
4	57452.92	70194.30	122177.08	9.7593121	9.8463018	81848.41	142461.71	174055.56	9.9130102	10.1536982	56
5	57476.72	70237.73	122202.04	9.7594920	9.8465705	81831.69	142373.62	173983.47	9.9129215	10.1534295	55
6	57500.52	70281.18	122227.02	9.7596718	9.8468390	81814.97	142285.61	173911.45	9.9128328	10.1531610	54
7	57524.32	70324.65	122252.02	9.7598515	9.8471075	81798.24	142197.66	173839.51	9.9127440	10.1528925	53
8	57548.11	70368.13	122277.03	9.7600311	9.8473760	81781.50	142109.79	173767.64	9.9126551	10.1526240	52
9	57571.90	70411.63	122302.07	9.7602106	9.8476444	81764.76	142022.00	173695.85	9.9125662	10.1523556	51
10	57595.68	70455.15	122327.13	9.7603899	9.8479127	81748.01	141934.26	173624.13	9.9124772	10.1520873	50
11	57619.46	70498.69	122352.21	9.7605692	9.8481810	81731.25	141846.61	173552.47	9.9123882	10.1518190	49
12	57643.23	70542.24	122377.32	9.7607483	9.8484492	81714.49	141759.04	173480.90	9.9122991	10.1515508	48
13	57667.00	70585.81	122402.44	9.7609274	9.8487174	81697.72	141671.93	173409.41	9.9122099	10.1512826	47
14	57690.76	70629.40	122427.58	9.7611063	9.8489855	81680.94	141584.09	173337.98	9.9121207	10.1510145	46
15	57714.52	70673.01	122452.74	9.7612851	9.8492536	81664.15	141496.73	173266.63	9.9120315	10.1507464	45
16	57738.27	70716.64	122477.93	9.7614638	9.8495216	81647.36	141409.43	173195.35	9.9119422	10.1504784	44
17	57762.02	70760.29	122503.13	9.7616424	9.8497896	81630.56	141322.21	173124.14	9.9118528	10.1502104	43
18	57785.76	70803.95	122528.36	9.7618208	9.8500575	81613.76	141253.06	173053.01	9.9117634	10.1499425	42
19	57809.50	70847.63	122553.61	9.7619992	9.8503253	81596.95	148147.99	172981.95	9.9116739	10.1496747	41
20	57833.24	70891.33	122578.87	9.7621775	9.8505931	81580.13	141060.98	172910.96	9.9115844	10.1494069	40
21	57856.96	70935.05	122604.16	9.7623556	9.8508608	81563.30	140974.05	172840.05	9.9114948	10.1491392	39
22	57880.68	70978.78	122629.47	9.7625337	9.8511285	81546.47	140887.18	172769.21	9.9114051	10.1488715	38
23	57904.40	70022.53	122654.80	9.7627116	9.8513961	81529.63	140800.39	172698.44	9.9113155	10.1486039	37
24	57928.12	71066.30	122680.15	9.7628894	9.8516637	81512.78	140713.67	172627.74	9.9112257	10.1483363	36
25	57951.83	71110.09	122705.52	9.7630671	9.8519312	81495.93	140627.02	172557.12	9.9111359	10.148068	35
26	57975.53	71153.90	122730.91	9.7632447	9.8521987	81479.06	140540.44	172486.57	9.9110460	10.1478013	34
27	57999.23	71197.73	122756.33	9.7634222	9.8524661	81462.19	140453.93	172416.09	9.9109561	10.1475339	33
28	58022.92	71241.57	122781.76	9.7635996	9.8527335	81445.32	140367.49	172345.68	9.9108661	10.1472665	32
29	58046.61	71285.43	122807.21	9.7637769	9.8530008	81428.44	140281.13	172275.34	9.9107761	10.1469992	31
30	58070.30	71329.31	122832.69	9.7639540	9.8532680	81411.55	140194.83	172205.08	9.9106860	10.1467320	30
31	58093.98	71373.21	122858.19	9.7641311	9.8535352	81394.65	140108.60	172134.89	9.9105959	10.1464648	29
32	58117.65	71417.13	122883.71	9.7643080	9.8538023	81377.75	140022.45	172064.77	9.9105057	10.1461977	28
33	58141.32	71461.06	122909.25	9.7644849	9.8540694	81360.84	139936.36	171994.72	9.9104155	10.1459306	27
34	58164.98	71505.01	122934.81	9.7646616	9.8542365	81343.93	139850.34	171923.75	9.9103251	10.1456635	26
35	58188.64	71548.98	122960.39	9.7648382	9.8546034	81327.01	139764.49	171854.84	9.9102348	10.1453966	25
36	58212.30	71592.97	122985.99	9.7650147	9.8548704	81310.08	139678.52	171785.01	9.9101444	10.1451296	24
37	58235.95	71636.98	123011.61	9.7651911	9.8551372	81293.14	139592.72	171715.25	9.9100539	10.1448626	23
38	58259.59	71681.01	123037.25	9.7653674	9.8554041	81276.20	139506.98	171645.56	9.9099634	10.1445959	22
39	58283.23	71725.05	120362.92	9.7655436	9.8556708	81259.25	139421.31	171575.94	9.9098728	10.1443292	21
40	58306.87	71769.11	123088.61	9.7657197	9.8559376	81241.29	139335.71	171506.39	9.9097821	10.1440624	20
41	58330.50	71813.19	123114.32	9.7658957	9.8562042	81225.32	139250.18	171436.91	9.9096915	10.1437958	19
42	58354.12	71857.29	123140.05	9.7660715	9.8564708	81208.35	139169.73	171367.50	9.9096007	10.1435292	18
43	58377.74	71901.41	123165.80	9.7662473	9.8567374	81191.37	139079.34	171298.17	9.9095099	10.1432626	17
44	58401.36	71945.55	123191.57	9.7664229	9.8570039	81174.39	138994.01	171228.90	9.9094190	10.1429961	16
45	58424.97	71989.70	123217.36	9.7665985	9.8572704	81157.40	138308.76	171159.70	9.9093281	10.1427296	15
46	58448.57	72033.87	123243.17	9.7667739	9.8575368	81140.40	138823.58	171090.58	9.9092371	10.1424632	14
47	58472.17	72078.06	123269.00	9.7669492	9.8578031	81123.39	138738.46	171021.52	9.9091461	10.1421969	13
48	58495.77	72122.27	123294.86	9.7671244	9.8580694	81106.38	138653.42	170952.54	9.9090550	10.1419306	12
49	58519.36	72166.50	123320.74	9.7672996	9.8583357	81089.36	138568.44	170883.62	9.9089636	10.1416645	11
50	58542.94	72210.75	123346.64	9.7674746	9.8586019	81072.33	138483.53	170814.78	9.9088727	10.1413981	10
51	58566.52	72255.02	123372.56	9.7676194	9.8588680	81055.30	138398.69	170746.00	9.9087814	10.1411320	9
52	58590.10	72299.31	123398.50	9.7678242	9.8591341	81038.26	138313.92	170677.30	9.9086901	10.1408659	8
53	58613.67	72343.61	123424.46	9.7679989	9.8594002	81021.21	138229.22	170608.66	9.9085988	10.1405998	7
54	58637.24	72387.93	123450.44	9.7681735	9.8596661	81004.16	138144.58	170540.10	9.9085075	10.1403339	6
55	58660.80	72432.27	123476.45	9.7683480	9.8599321	80987.10	138060.01	170471.60	9.9084159	10.1400679	5
56	58684.35	72476.63	123502.48	9.7685223	9.8601980	80970.03	137975.51	170403.18	9.9083243	10.1398020	4
57	58707.90	72521.63	123528.52	9.7686966	9.8604638	80952.96	137871.08	170334.82	9.9082327	10.1395362	3
58	58731.45	72565.41	123554.59	9.7688707	9.8607296	80935.88	137886.82	170266.55	9.9081411	10.1392704	2
59	58754.99	72609.83	123580.68	9.7690448	9.8609954	80918.79	127722.42	170198.34	9.9080494	10.1390046	1
60	58778.53	72654.26	123606.80	9.7692187	9.8612610	80901.70	137638.19	170130.16	9.9079576	10.1387340	0

52961.95

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	58778.53	72654.26	123606.80	9.7692187	9.8612610
1	58802.06	72698.71	123632.94	9.7693925	9.8615267
2	58825.58	72743.18	123659.09	9.7695662	9.8617923
3	58849.10	72787.67	123685.26	9.7697398	9.8620578
4	58872.62	72832.18	123711.48	9.7699134	9.8623233
5	58896.13	72876.71	123737.68	9.7700868	9.8625887
6	58919.64	72921.26	123763.93	9.7702601	9.8628542
7	58943.14	72965.82	123790.19	9.7704332	9.8631195
8	58966.63	73010.40	123816.47	9.7706063	9.8633848
9	58990.12	73055.01	123842.78	9.7707793	9.8636500
10	59013.61	73099.63	123869.11	9.7709522	9.8639152
11	59037.09	73144.27	123895.46	9.7711249	9.8641803
12	59060.57	73188.94	123921.83	9.7712976	9.8644454
13	59084.04	73233.62	123948.22	9.7714702	9.8647105
14	59107.50	73278.31	123974.64	9.7716426	9.8649755
15	59130.96	73323.03	124001.08	9.7718150	9.8652404
16	59154.42	73367.77	124027.54	9.7719872	9.8655053
17	59177.87	73412.53	124054.02	9.7721593	9.8657702
18	59201.32	73457.30	124080.52	9.7723314	9.8660350
19	59224.76	73502.10	124107.04	9.7725033	9.8662997
20	59248.19	73546.91	124133.59	9.7726751	9.8665644
21	59271.62	73591.74	124160.16	9.7728468	9.8668291
22	59295.05	73636.60	124186.75	9.7730185	.8670937
23	59318.47	73681.47	124213.36	9.773190	8673583
24	59341.89	73726.36	124239.99	9.773361.	9.8676228
25	59365.30	73771.27	124266.65	9.773532	9.8678873
26	59388.71	73816.20	124293.33	9.7737039	.8681517
27	59412.11	73861.15	124320.03	9.7738749	9.8684160
28	59435.50	73906.11	124346.75	9.7740459	9.8686804
29	59458.89	73951.10	124373.49	9.7742168	9.8689446
30	59482.28	73946.11	124400.26	9.7743876	9.8692089
31	59505.66	74041.14	124427.05	9.7745583	9.8694731
32	59529.03	74086.18	124453.86	9.7747288	9.8697372
33	59352.40	74131.24	124480.69	9.7748993	9.8700013
34	59575.77	74176.33	124507.54	9.7750697	9.8702653
35	59599.13	74221.43	124534.42	9.7752399	9.8705293
36	59622.49	74266.55	124561.31	9.7754101	9.8707933
37	59605.84	74311.70	124588.23	9.7755801	9.8710572
38	59669.18	74356.86	124615.18	9.7757501	9.8713210
39	59692.52	74402.04	124662.14	9.7759199	9.8715848
40	59715.86	74447.24	124669.13	9.7760897	9.8718486
41	59739.19	74492.46	124696.14	9.7762593	9.8721123
42	59762.51	74537.70	124723.17	9.7764289	9.8723760
43	59785.83	74582.96	124750.22	9.7765983	9.8726396
44	59809.15	74628.24	124777.30	9.7767676	9.8729032
45	59832.46	74673.54	124804.40	9.7769369	9.8731668
46	59855.76	74718.86	124831.52	9.7771060	9.8734302
47	59879.06	74764.20	124858.66	9.7772750	9.8736937
48	59901.36	74809.56	124885.83	9.7774439	9.8739571
49	59925.65	74854.94	124913.02	9.7776128	9.8742204
50	59948.93	74900.33	124940.23	9.7777815	9.8744838
51	59972.21	74945.75	124967.76	9.7779501	9.8747470
52	59995.49	74991.19	124994.71	9.7781186	9.8750102
53	60018.76	75036.65	125021.99	9.7782870	9.8752734
54	60042.02	75082.12	125049.29	9.7784553	9.8755365
55	60065.28	75127.62	125076.61	9.7786235	9.8757996
56	60088.53	75173.14	125103.96	9.7787916	9.8760626
57	60111.78	75218.67	125131.33	9.7789596	9.8763257
58	60135.03	75264.23	125158.72	9.7791275	9.8765886
59	60158.27	75309.81	125186.13	9.7792953	9.8768515
60	60181.40	75355.40	125213.57	9.7794630	9.8771144

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	80901.70	137638.19	170130.16	9.9079576	10.1387390
59	80884.60	137554.03	170062.08	9.9078658	10.1384733
58	80867.49	137469.94	169994.07	9.9077740	10.1381077
57	80850.37	137385.91	169926.12	9.9076820	10.1379422
56	80833.25	137301.95	169858.25	9.9075901	10.1376767
55	80816.12	137218.05	169790.44	9.9074980	10.1374113
54	80798.99	137134.23	169722.71	9.9074059	10.1371459
53	80781.85	137050.47	169655.04	9.9073138	10.1368805
52	80764.70	136565.78	169587.43	9.9072216	10.1366152
51	80747.54	136883.15	169519.90	9.9071293	10.1363500
50	80730.38	136799.59	169452.44	9.9070370	10.1360848
49	80713.21	136716.10	169385.04	9.9069446	10.1358197
48	80696.03	136632.67	169317.71	9.9068522	10.1355546
47	80678.85	136549.31	169250.45	9.9067597	10.1352895
46	80661.66	136466.02	169183.26	9.9056671	10.1350245
45	80644.46	136382.79	169116.13	9.9065745	10.1347596
44	80627.26	136299.63	169049.07	9.9064819	10.1344947
43	80610.05	136216.53	168982.08	9.9063892	10.1342298
42	80592.83	136133.50	168915.16	9.9062964	10.1339650
41	80575.60	136050.54	168848.30	9.9062036	10.1337003
40	80558.37	135967.64	168781.51	9.9061107	10.1334356
39	80541.13	135884.81	168714.79	9.9060177	10.1331709
38	80523.89	135802.04	168648.14	9.9059247	10.1329063
37	80506.64	135719.34	168581.55	9.9058317	10.1326417
36	80489.38	135636.70	168515.03	9.9057386	10.1323772
35	80472.11	135554.13	168448.57	9.9056454	10.1321127
34	80454.84	135471.62	168382.18	9.9055522	10.1318483
33	80437.56	135389.18	168315.86	9.9054589	10.1315840
32	80420.28	135306.80	168249.61	9.9053656	10.1313196
31	80402.99	135224.49	168183.42	9.9052722	10.1310554
30	80385.69	135142.24	168117.30	9.9051787	10.1307911
29	80368.38	135060.06	168051.24	9.9050852	10.1305269
28	80351.07	134977.94	167985.25	9.9049916	10.1302628
27	80333.75	134895.89	167919.33	9.9048980	10.1299987
26	80316.42	134813.90	167853.47	9.9048043	10.1297347
25	80299.09	134731.97	167787.68	9.9047106	10.1294707
24	80281.75	134650.11	167722.95	9.9046168	10.1292067
23	80264.40	134568.32	167656.29	9.9045230	10.1289428
22	80247.05	134486.58	167590.70	9.9044291	10.1286790
21	80229.69	134404.92	167525.17	9.9043351	10.1284152
20	80212.32	134323.31	167459.70	9.9042411	10.1281514
19	80194.94	134241.77	167393.30	9.9041470	10.1278877
18	80177.56	134160.29	167328.97	9.9040529	10.1276240
17	80160.11	134078.88	167263.70	9.9039587	10.1273604
16	80142.78	133997.53	167198.50	9.9038644	10.1270968
15	80125.38	133916.24	167133.36	9.9037701	10.1268332
14	80107.97	133835.02	167068.28	9.9036757	10.1265698
13	80090.56	133753.86	167003.28	9.9035813	10.1263063
12	80073.14	133672.76	166938.33	9.9034868	10.1260429
11	80055.71	133591.72	166873.45	9.9033923	10.1257796
10	80038.27	133510.75	166808.64	9.9032977	10.1255162
9	80020.83	133429.84	166743.89	9.9032031	10.1252530
8	80003.38	133349.00	166679.20	9.9031084	10.1249898
7	79985.93	133268.22	166614.58	9.9030136	10.1247266
6	79968.47	133187.49	166550.01	9.9029188	10.1244635
5	79951.00	133106.84	166485.52	9.9028239	10.1242004
4	79933.52	133026.24	166421.09	9.9027289	10.1239373
3	79916.04	132945.71	166356.73	9.9026339	10.1236743
2	79898.55	132865.24	166292.43	9.9025389	10.1234114
1	79881.05	132784.83	166228.19	9.9024438	10.1231484
0	79863.55	132704.48	166164.01	9.9023485	10.122885

99481.2

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	60181.50	75355.40	125213.57	9.7794630	9.8771144	60	79863.55	132704.48	166164.01	9.9023486	10.1228816
1	60204.73	75401.02	125241.02	9.7796306	9.8773772	59	79846.04	132624.20	166099.90	9.9022534	10.1226228
2	60227.95	75446.66	125268.50	9.7797981	9.8776400	58	79828.52	132543.97	166035.85	9.9021581	10.1223600
3	60251.17	75492.32	125296.01	9.7799655	9.8779027	57	79811.00	132463.81	165971.87	9.5020628	10.1220973
4	60274.39	75537.99	125323.53	9.7801328	9.8781654	56	79793.47	132383.71	165907.95	9.9019674	10.1218346
5	60297.60	75583.69	125351.08	9.7803060	9.8784281	55	79775.93	132308.68	165844.09	9.9018719	10.1219719
6	60320.80	75629.41	125378.65	9.7804671	9.8786907	54	79758.39	132223.70	165780.30	9.9017764	10.1213093
7	60344.00	75675.14	125406.25	9.7806341	9.8789533	53	79740.84	132143.79	165716.57	9.9016808	10.1210467
8	60367.19	75720.90	125433.87	9.7808010	9.8792158	52	79723.28	132063.93	165652.90	9.9015852	10.1207842
9	60390.38	75766.68	125461.51	9.7809677	9.8794782	51	79705.72	131984.14	165589.29	9.9014895	10.1205218
10	60483.56	75812.48	125489.17	9.7811344	9.8797407	50	79688.15	131904.41	165525.75	9.9013938	10.1202593
11	60436.74	75858.29	125516.85	9.7813010	9.8800031	49	79670.57	131824.74	165462.27	9.9012980	10.1199969
12	60459.91	75904.13	125544.56	9.7814675	9.8802654	48	79652.99	131745.13	163598.85	9.9012021	10.1197346
13	60483.08	75949.99	125572.29	9.7816339	9.8805277	47	79635.40	131665.59	165335.90	9.9011062	10.1194723
14	60506.24	75995.87	125600.25	9.7818002	9.8807900	46	79617.80	131586.10	165272.21	9.9010102	10.1192100
15	60529.40	76041.77	125627.82	9.7819664	9.8810522	45	79600.20	131506.68	165208.98	9.9009142	10.1189478
16	60552.55	76087.69	125655.62	9.7821324	9.8813144	44	79582.59	131427.31	165145.81	9.9008181	10.1186856
17	60575.70	76133.63	125683.45	9.7822984	9.8815765	43	79564.97	131348.01	165082.70	9.9007219	10.1184235
18	60598.84	76179.59	125711.29	9.7824643	9.8818386	42	79547.35	131268.76	165019.66	9.9006257	10.1181614
19	60621.98	76215.57	125739.16	9.7826301	9.8821007	41	79529.72	131189.58	164956.68	9.9005294	10.1178993
20	60645.11	76271.57	125767.05	9.7827958	9.8823627	40	79512.08	131110.46	164893.76	9.9004331	10.1176373
21	60668.23	76317.59	125794.97	9.7829614	9.8826246	39	79494.43	131031.46	164830.90	9.9003367	10.1173754
22	60691.35	76363.63	125822.91	9.7831268	9.8828866	38	79476.78	130952.39	164768.11	9.9002403	10.1171134
23	60714.47	76409.69	125850.87	9.7832922	9.8831484	37	79459.22	130873.41	164705.37	9.9001438	10.1168516
24	60737.58	76455.77	125878.85	9.7834575	9.8834103	36	79441.46	130794.57	164642.70	9.9000472	10.1165897
25	60760.69	76501.88	125906.86	9.7836227	9.8836721	35	79423.79	130715.70	164580.09	9.8999506	10.1163279
26	60783.79	76548.00	125934.89	9.7837878	9.8839338	34	79406.11	130636.99	164517.54	9.8998539	10.1160662
27	60806.89	76594.14	125962.94	9.7839528	9.8841956	33	79388.43	130558.28	164455.06	9.8997572	10.1158044
28	60829.98	76640.31	125991.02	9.7841177	9.8844572	32	79370.74	130479.64	164392.63	9.8996604	10.1155418
29	60853.06	76686.49	126519.12	9.7842824	9.8847189	31	79353.04	130401.06	164330.27	9.8995636	10.1152821
30	60876.14	76732.70	126047.24	9.7844471	9.8849805	30	79335.33	130322.54	164267.96	9.8994667	10.1150195
31	60899.22	76778.93	126075.39	9.7846117	9.8852420	29	79317.62	130244.07	164205.72	9.8993697	10.1147580
32	60922.29	76825.17	126103.56	9.7847762	9.8855035	28	79299.90	130165.67	164143.54	9.8992727	10.1144965
33	60945.35	76871.44	126131.75	9.7849406	9.8857650	27	79282.18	130087.32	164081.42	9.8991756	10.1142350
34	60968.41	76917.73	126159.97	9.7851049	9.8860264	26	79264.45	130009.04	164019.36	9.8990784	10.1139736
35	60991.47	76964.04	126188.20	9.7852691	9.8862878	25	79246.71	129930.81	163957.36	9.8989812	10.1137122
36	61014.52	77010.37	126216.46	9.7854332	9.8865492	24	79228.96	129852.65	163895.42	9.8988840	10.1134508
37	61037.56	77056.72	126244.75	9.7855972	9.8868105	23	79211.21	129774.54	163833.55	9.8987867	10.1131895
38	61060.60	77103.09	126273.06	9.7857611	9.8870718	22	79193.45	129696.49	163771.73	9.8986893	10.1129282
39	61083.63	77149.48	126301.40	9.7859249	9.8873330	21	79175.69	129618.50	163709.97	9.8985919	10.1126670
40	61106.66	77195.89	126329.75	9.7860886	9.8875942	20	79157.92	129540.57	163648.28	9.8984944	10.1124058
41	61129.68	77242.33	126358.13	9.7862522	9.8878554	19	79140.14	129462.69	163586.64	9.8983968	10.1121446
42	61162.70	77288.79	126386.53	9.7864057	9.8881165	18	79122.35	129384.88	163525.07	9.8982992	10.1118831
43	61175.72	77335.26	126414.96	9.7865791	9.8883775	17	79104.56	129307.12	163463.55	9.8982015	10.1116225
44	61198.73	77381.75	126443.41	9.7867424	9.8886386	16	79086.76	129229.43	163402.10	9.8981038	10.1113614
45	61221.73	77428.27	126471.88	9.7869056	9.8888996	15	79068.96	129151.79	163340.70	9.8980060	10.1111004
46	61244.73	77474.81	126500.38	9.7870687	9.8891605	14	79051.15	129074.21	163279.37	9.8979082	10.1108395
47	61267.72	77521.37	126528.90	9.7872317	9.8894214	13	79033.33	128996.69	163218.09	9.8978103	10.1105786
48	61290.71	77657.95	126557.45	9.7873946	9.8896823	12	79015.50	128919.22	163156.88	9.8977123	10.1103177
49	61313.69	77614.55	126586.01	9.7875574	9.8899432	11	78997.67	128841.82	163095.72	9.8976143	10.1100568
50	61336.66	77661.17	126614.60	9.7877202	9.8902040	10	78979.83	128764.47	163034.62	9.8975162	10.1097960
51	61359.63	77707.82	126643.24	9.7878828	9.8904647	9	78961.98	128687.18	162973.59	9.8974181	10.1095353
52	61382.60	77754.48	126671.86	9.7880453	9.8907254	8	78944.13	128609.95	162912.61	9.8973199	10.1092746
53	61405.56	77801.17	126700.52	9.7882077	9.8909861	7	78926.27	128532.77	162851.69	9.8972216	10.1090139
54	61428.52	77847.88	126729.21	9.7883701	9.8912468	6	78908.41	128455.66	162790.83	9.8971233	10.1087532
55	61451.47	77894.60	126757.92	9.7885323	9.8915074	5	78890.54	128378.60	162730.03	9.8970249	10.1084926
56	61474.42	77941.35	126786.65	9.7886944	9.8917679	4	78872.66	128301.60	162669.29	9.8969265	10.1082321
57	61497.36	77988.12	126815.41	9.7888565	9.8920285	3	78854.72	128224.66	162608.61	9.8968280	10.1079715
58	61520.29	78034.92	126844.29	9.7890184	9.8922890	2	78836.88	128147.76	162547.99	9.8967294	10.1077110
59	61543.22	78081.73	126872.99	9.7891802	9.8925494	1	78818.98	128070.93	162487.43	9.8966308	10.1074506
60	61566.15	78128.56	126901.82	9.7893420	9.8928098	0	78801.07	127994.16	162426.92	9.8965321	10.1071992

61566. 15

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	61566.15	78128.56	126901.81	9.7893420	9.8928098
1	61589.07	78175.42	126930.67	9.7895036	9.8930702
2	61611.98	78222.19	126959.55	9.7896652	9.8933306
3	61634.89	78269.19	126988.45	9.7898266	9.8935909
4	61657.79	78316.11	127017.37	9.7899880	9.8938511
5	61680.69	78363.05	127046.32	9.7901493	9.8941114
6	61703.59	78410.02	127075.29	9.7903104	9.8943715
7	61726.48	78457.00	127104.29	9.7904715	9.8946317
8	61749.36	78504.00	127133.31	9.7906325	9.8948918
9	61772.24	78551.03	127162.35	9.7907933	9.8951519
10	61795.11	78598.08	127191.42	9.7909541	9.8954119
11	61817.98	78645.15	127220.51	9.7911148	9.8956719
12	61840.84	78692.24	127249.63	9.7912754	9.8959319
13	61863.70	78739.35	127278.77	9.7914359	9.8961918
14	61886.55	78786.49	127307.94	9.7915963	9.8964517
15	61909.40	78833.64	127337.12	9.7917566	9.8967116
16	61932.24	78880.82	127366.34	9.7919168	9.8969714
17	61955.[illegible]	78928.02	127395.57	9.7920769	9.8972312
18	61977.90	78975.24	127424.84	9.7922369	9.8974910
19	62000.73	79022.48	127454.12	9.7923968	9.8977507
20	62023.55	79069.75	127483.43	9.7925566	9.8980104
21	62046.36	79117.03	127512.76	9.7927163	9.8982700
22	62069.17	79164.34	127542.11	9.7928760	9.8985296
23	62091.98	79211.67	127571.50	9.7930355	9.8987892
24	62114.78	79259.01	127600.91	9.7931949	9.8990487
25	62137.57	79306.40	127630.35	9.7933543	9.8993082
26	62160.36	79353.79	127659.81	9.7935135	9.8995677
27	62183.14	79405.21	127689.28	9.7936727	9.8998271
28	62205.92	79448.65	127718.78	9.7938317	9.9000865
29	62228.69	79496.11	127748.31	9.7939920	9.9003459
30	62251.46	79543.59	127777.87	9.7941496	9.9006052
31	62274.22	79591.10	127807.45	9.7943083	9.9008645
32	62296.98	79638.61	127837.06	9.7944670	9.9011237
33	623[illegible]9.	79686.17	127866.67	9.7946256	9.9013830
34	62341.48	79733.74	127896.33	9.7947841	9.9016422
35	62365.22	79781.34	127926.00	9.7949425	9.9019013
36	62387.96	79828.95	127955.70	9.7951008	9.9021604
37	62410.69	79876.59	127985.43	9.7952590	9.9024195
38	62433.42	79924.25	128015.18	9.7954171	9.9026786
39	62456.14	79971.93	128044.95	9.7955751	9.9029376
40	62478.85	80019.63	128074.75	9.7957330	9.9031966
41	62501.56	80067.36	128104.57	9.7958909	9.9034555
42	62524.26	80115.11	128134.42	9.7960488	9.9037144
43	62546.96	80162.88	128164.30	9.7962062	9.9039733
44	62569.66	80210.67	128194.20	9.7963638	9.9042321
45	62592.35	80258.48	128224.12	9.7965212	9.9044910
46	62615.03	80306.32	128254.07	9.7966786	9.9047497
47	62637.71	80354.18	128284.04	9.7968359	9.9050085
48	62660.38	80402.06	128314.04	9.7969930	9.9052672
49	62683.05	80449.97	128344.06	9.7971501	9.9055258
50	62705.71	80497.90	128374.11	9.7973071	9.9057845
51	62728.37	80545.85	128404.18	9.7974640	9.9060431
52	62751.02	80593.82	128434.28	9.7976208	9.9063017
53	62773.66	80641.82	128464.40	9.7977775	9.9065603
54	62796.30	80689.83	128494.55	9.7979341	9.9068188
55	62818.94	80737.87	128524.72	9.7980906	9.9070773
56	62841.57	80785.93	128554.92	9.7982470	9.9073357
57	62864.20	80834.01	128585.14	9.7984034	9.9075941
58	62886.82	80882.12	128615.39	9.7985596	9.9078525
59	62909.43	80930.21	128645.66	9.7987158	9.9081109
60	62932.04	80978.40	128675.96	9.7988718	9.9083692

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	78801.07	127994.16	162426.92	9.8965321	10.1071902
59	78783.16	127917.45	162366.48	9.8964334	10.1069298
58	78765.24	127840.79	162306.09	9.8963346	10.1066694
57	78747.32	127764.19	162245.76	9.8962358	10.1064091
56	78729.39	127687.64	162185.49	9.8961369	10.1061489
55	78711.45	127611.16	162125.28	9.8960379	10.1058886
54	78693.50	127534.73	162065.13	9.8959389	10.1056285
53	78675.55	127458.36	162005.04	9.8958398	10.1053683
52	78657.59	127382.04	161945.00	9.8957406	10.1051082
51	78639.62	127305.78	161885.02	9.8956414	10.1048481
50	78621.65	127229.57	161825.19	9.8955421	10.1045881
49	78603.67	127153.42	161765.24	9.8954429	10.1043281
48	78585.69	127077.33	161705.44	9.8953435	10.1040681
47	78567.70	127001.30	161645.69	9.8952440	10.1038082
46	78549.70	126925.32	161586.00	9.8951445	10.1035483
45	78531.69	126849.39	161526.37	9.8950450	10.1032884
44	78513.68	126773.53	161466.80	9.8949453	10.1030286
43	78495.66	126697.72	161407.28	9.8948457	10.1027688
42	78477.64	126621.96	161347.83	9.8947459	10.1025090
41	78459.61	126546.26	161288.43	9.8946461	10.1022493
40	78441.57	126470.62	161229.08	9.8945463	10.1019896
39	78423.52	126395.03	161169.80	9.8944463	10.1017300
38	78405.47	126319.50	161110.57	9.8943464	10.1014704
37	78387.41	126244.02	161051.40	9.8942463	10.1012108
36	78369.35	126168.60	160992.28	9.8941462	10.1009513
35	78351.28	126093.23	160933.23	9.8940461	10.1006918
34	78333.20	126017.92	160874.23	9.8939458	10.1004323
33	78315.11	125942.67	160815.28	9.8938456	10.1001729
32	78297.02	125867.47	160756.40	9.8937452	10.0999135
31	78278.92	125792.34	160697.57	9.8936448	10.0996541
30	78260.82	125717.23	160638.79	9.8935444	10.0993948
29	78242.71	125642.19	160580.08	9.8934459	10.0991355
28	78224.59	125567.21	160521.42	9.8933433	10.0988763
27	78206.46	125492.29	160462.81	9.8932426	10.0986170
26	78188.33	125417.42	160404.26	9.89314[illegible]9	10.0983578
25	78170.19	125342.60	160345.77	9.8930412	10.0980987
24	78152.05	125267.84	160287.34	9.8929404	10.0978396
23	78133.90	125193.13	160228.96	9.8928395	10.0975805
22	78115.74	125118.48	16170.64	9.8927385	10.0973214
21	78097.57	125043.88	160112.37	9.8926375	10.0970624
20	78079.40	124969.33	160054.16	9.8925365	10.0968034
19	78061.22	124894.84	159996.00	9.8924354	10.0965445
18	78043.04	124820.40	159937.90	9.8923342	10.0962856
17	78024.85	124746.02	159879.86	9.8922329	10.0960267
16	78006.65	124671.69	159821.87	9.8921316	10.0957679
15	77988.45	124597.42	159793.94	9.8920305	10.0955090
14	77970.24	124523.20	159706.06	9.8919289	10.0952503
13	77952.02	124449.03	159648.24	9.8918274	10.0949915
12	77933.80	124374.92	159590.47	9.8917258	10.0947328
11	77915.57	124300.86	159532.76	9.8916242	10.0944741
10	77897.33	124226.85	159475.11	9.8915226	10.0942155
9	77879.08	124152.90	159417.51	9.8914208	10.0939569
8	77860.83	124079.01	159359.96	9.8913191	10.0936983
7	77842.57	124005.15	159302.47	9.8912172	10.0934397
6	77824.31	123931.36	159245.04	9.8911153	10.0931812
5	77806.04	123857.62	159187.66	9.8910133	10.0929227
4	77787.77	123783.93	159130.33	9.8909113	10.0926643
3	77769.49	123710.30	159073.06	9.8908092	10.0924059
2	77751.20	123636.72	159015.85	9.8907071	10.0921475
1	77732.90	123563.19	158958.68	9.8906049	10.0918891
0	77714.60	123489.72	158901.57	9.8905026	10.0916308

39. Grad. | 50. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	62932.04	80978.40	128675.96	9.7988718	9.9083692	60	77714.60	123489.72	158901.57	9.8905026	10.0916308
1	62954.64	81026.58	128706.28	9.7990278	9.9 86275	59	77696.29	123416.29	158844.52	9.8904003	10.0913725
2	62977.24	81074.78	128736.63	9.7991836	9.9088858	58	77677.97	123342.92	158787.52	9.8902979	10.0911142
3	62999.83	81123.00	128767.00	9.7993394	9.9091440	57	77659.65	123269.61	158730.58	9.8901954	10.0908560
4	63022.42	81171.24	128797.40	9.7994951	9.9094022	56	77641.32	123196.34	158673.69	9.8900929	10.0905978
5	63045.00	81219.51	128827.82	9.7996507	9.9096603	55	77622.98	123123.13	158616.85	9.8899903	10.0903397
6	63067.58	81267.80	128858.27	9.7998062	9.9099185	54	77604.64	123049.97	158560.07	9.8898877	10.0900815
7	63090.15	81316.11	128888.75	9.7999616	9.9101726	53	77586.39	122976.87	158503.34	9.8897850	10.0898234
8	63112.72	81364.44	228919.25	9.8001169	9.9104347	52	77567.94	122903.81	158446.67	9.8896822	10.0895653
9	63135.28	81412.80	128949.77	9.8002721	9.9106927	51	77549.58	122830.81	158390.05	9.8895794	10.0893073
10	63157.84	81461.18	128980.32	9.8004272	9.9109507	50	77531.21	122757.86	158333.48	9.8894765	10.0890493
11	63180.39	81509.58	129010.90	9.8005823	9.9112087	49	77512.83	122684.96	158276.97	9.8893736	10.0887913
12	63202.93	81558.01	129041.50	9.8007372	9.9114666	48	77494.45	122612.11	158220.51	9.8892706	10.0885334
13	63225.47	81606.46	129072.13	9.8008921	9.9117245	47	77476.06	122539.32	158164.11	9.8891675	10.0882755
14	63248.00	81654.93	129102.78	9.8010468	9.9119824	46	77457.67	122466.58	158107.76	9.8890644	10.0880176
15	63270.53	81703.43	129133.46	9.8012015	9.9122403	45	77439.27	122393.89	158051.46	9.8889612	10.0877597
16	63293.05	81751.95	129164.16	9.8013561	9.9124981	44	77420.86	122321.25	157995.21	9.8888580	10.0875019
17	63315.57	81800.49	129194.89	9.8015106	9.9227559	43	77402.44	122248.66	157939.02	9.8887547	10.0872441
18	63338.08	81849.05	129225.64	9.8016649	9.9130137	42	77384.02	122176.13	157882.89	9.8886513	10.0869863
19	63360.59	81897.64	129256.42	9.8018192	9.9132714	41	77365.59	122103.64	157826.80	9.8885479	10.0867286
20	63383.09	81946.25	129287.23	9.8019735	9.9135291	40	77347.16	122031.21	157770.77	9.8884444	10.0864709
21	63340.59	81994.88	129318.06	9.8021276	9.9137868	39	77328.72	121958.83	157714.79	9.8883408	10.0862132
22	63428.08	82043.54	129348.92	9.8022816	9.9140444	38	77310.27	121886.50	157658.87	9.8882372	10.0859[illegible]
23	63450.57	82092.22	129379.80	9.8024355	9.9143020	37	77291.82	121414.22	157603.00	9.8881335	10.0856980
24	63473.05	82140.93	129410.71	9.8025894	9.9145596	36	77273.36	121741.99	157547.18	9.8880298	10.0854404
25	63495.53	82189.65	129441.64	9.8027431	9.9148171	35	77254.89	121669.82	157491.41	9.8879260	10.0851829
26	63518.00	82238.40	129472.60	9.8028968	9.9150747	34	77236.42	121597.69	157435.70	9.8878221	10.0849253
27	63540.46	82287.18	129503.59	9.8030504	9.9153322	33	77217.94	121525.62	157380.04	9.8877182	10.0846678
28	63562.92	82335.97	129534.60	9.8032038	9.9155896	32	77199.45	121453.59	157324.43	9.8876142	10.0844104
29	63585.37	82384.79	129565.64	9.8033572	9.9158471	31	77180.96	125381.62	157268.87	9.8875102	10.0841529
30	63607.82	82433.64	129596.70	9.8035105	9.9161045	30	77162.46	121309.70	157213.37	9.8874061	10.0838955
31	63630.26	82482.51	129627.79	9.8036637	9.9163618	29	77143.95	121237.83	157157.92	9.8873019	10.0836382
32	63652.70	82531.40	129658.90	9.8038168	9.9166192	28	77125.44	121166.01	157102.52	9.8871977	10.0833808
33	63675.13	82580.31	129690.04	9.8039699	9.9168765	27	77106.92	121094.24	157047.17	9.8870934	10.0831235
34	63697.56	82629.25	129721.21	9.8041228	9.9171338	26	77088.49	121022.52	156991.88	9.8869890	10.0828662
35	63719.98	82678.21	129752.40	9.8042757	9.9173911	25	77069.86	120950.85	156936.64	9.8868846	10.0826089
36	63742.40	82727.19	129783.62	9.8044284	9.9176483	24	77051.32	120879.23	156881.45	9.8867801	10.0823517
37	63764.81	82776.20	129814.87	9.8045811	9.9179055	23	77032.78	120807.67	156826.31	9.8866756	10.0820945
38	63787.21	82825.23	129846.14	9.8047336	9.9181627	22	77014.23	120736.15	156771.23	9.8865710	10.0818373
39	63809.61	82874.29	129877.44	9.8048861	9.9184198	21	76995.67	120664.68	156716.19	9.8864663	10.0815802
40	63832.01	82923.37	129908.76	9.8050385	9.9186769	20	76977.10	120593.27	156661.21	9.8863616	10.0813231
41	63854.40	82972.47	129940.11	9.8051908	9.9189340	19	76958.53	120521.90	156606.28	9.8862568	10.0810660
42	63876.78	83021.60	129971.48	9.8053430	9.9191911	18	76939.95	120450.58	156551.41	9.8861519	10.0808089
43	63899.16	83070.75	130002.88	9.8054951	9.9194481	17	76921.37	120379.31	156496.58	9.8860470	10.0805519
44	63921.53	83119.92	130034.31	9.8056472	9.9197051	16	76902.78	120308.10	156441.81	9.8859420	10.0802949
45	63943.90	83169.12	130065.76	9.8057991	9.9199621	15	76884.18	120236.93	156387.08	9.8858370	10.0800379
46	63966.26	83218.34	130097.24	9.8059510	9.9202191	14	76865.58	120165.81	156332.41	9.8857319	10.0797809
47	63988.62	83267.59	130128.75	9.8061027	9.9204760	13	76846.97	120094.75	156277.79	9.8856267	10.0795240
48	64010.97	83316.86	130160.28	9.8062544	9.9207329	12	76828.35	120023.73	156223.22	9.8855215	10.0792671
49	64033.32	83366.15	130191.84	9.8064060	9.9209898	11	76809.73	119952.76	156168.70	9.8854162	10.0790102
50	64055.66	83415.47	130223.43	9.8065575	9.9212466	10	76791.10	119881.84	156114.24	9.8853109	10.0787534
51	64077.99	83464.81	130255.04	9.8067089	9.9215034	9	76772.46	119810.97	156059.82	9.8852055	10.0784966
52	64100.32	83514.18	130286.68	9.8063602	9.9217602	8	76753.82	119740.15	156005.46	9.8851000	10.0782398
53	64122.64	83563.57	130318.34	9.8070114	9.9220170	7	76735.17	119669.38	155951.15	9.8849945	10.0779830
54	64144.96	83612.98	130350.03	9.8071626	9.9222737	6	76716.51	119598.66	155896.89	9.8848889	10.0777263
55	64167.27	83662.42	130381.75	9.8073136	9.9225304	5	76697.85	119527.99	145842.67	9.8847832	10.0774696
56	64189.58	83711.88	130413.49	9.8074646	9.9227871	4	76679.18	119457.36	155788.51	9.8846775	10.0772129
57	64211.88	83761.36	130445.26	9.8076154	9.9230437	3	76660.51	119386.79	155734.41	9.8845717	10.0769563
58	64234.18	83810.87	130477.06	9.8077662	9.9133004	2	76641.83	119316.26	155680.35	9.8844659	10.0766996
59	64256.47	83860.40	130508.88	9.8079169	9.9235570	1	76623.14	119245.79	155626.34	9.8843599	1010764430
60	64278.76	83909.96	130540.73	9.8080675	9.9238135	0	76604.44	119175.36	155572.38	9.8842540	10.0761865

64278.76

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	64278.76	83909.96	130540.73	9.8080675	9.9238135	60	76604.44	119175.36	155572.38	9.8842540	10.0761865
1	64301.04	83959.54	130572.61	9.8082180	9.9240701	59	76585.74	119104.98	155518.48	9.8841479	10.0759299
2	64323.32	84009.15	130604.51	9.8083684	9.9243266	58	76567.03	119034.65	155464.62	9.8840418	10.0756734
3	64345.59	84058.78	130636.44	9.8085188	9.9245831	57	76548.32	118964.37	155410.81	9.8839357	10.0754169
4	64337.85	84108.44	130668.39	9.8086690	9.9248396	56	76529.60	118894.14	155357.07	9.8838294	10.0751604
5	64390.11	84158.12	130700.37	9.8088192	9.9250960	55	76510.87	118823.95	155303.35	9.8837232	10.0749040
6	64412.36	84207.82	130732.38	9.8089692	9.9253524	54	76492.14	118753.82	155249.70	9.8836168	10.0746476
7	64434.61	84257.55	130764.42	9.8091192	9.9256088	53	76473.40	118683.73	155196.09	9.8835104	10.0743912
8	64456.85	84307.30	130796.49	9.8092691	9.9258652	52	76454.65	118613.69	155142.54	9.8834039	10.0741348
9	64479.09	84357.08	130828.58	9.8094189	9.9261215	51	76435.90	118543.70	155089.04	9.8832974	10.0738785
10	64501.32	84406.88	130860.70	9.8095686	9.9263778	50	76417.14	118473.76	155035.58	9.8831908	10.0736222
11	64523.55	84456.70	130892.84	9.8097182	9.9266341	49	76398.47	118403.87	154982.18	9.8830841	10.0733659
12	64545.77	84506.55	130925.01	9.8098678	9.9268904	48	76379.60	118334.02	154928.82	9.8829774	10.0731096
13	64567.98	84556.43	130957.21	9.8100172	9.9271466	47	76360.82	118264.22	154875.52	9.8828706	10.0728534
14	64590.19	84606.33	130989.43	9.8101666	9.9274028	46	76342.04	118194.47	154822.26	9.8827638	10.0725972
15	64612.40	84656.25	131021.68	9.8103159	9.9276590	45	76323.25	118124.77	154769.06	9.8826568	10.0723410
16	64634.60	84706.20	131053.96	9.8104650	9.9279152	44	76304.45	118055.12	154715.90	9.8825499	10.0720848
17	64656.79	84756.17	131086.26	9.8106141	9.9281713	43	76285.64	117985.51	154662.80	9.8824428	10.0718287
18	64678.98	84806.17	131118.59	9.8107631	9.9284274	42	76266.83	117915.95	154609.74	9.8823357	10.0715726
19	64701.16	84856.19	131150.95	9.8109121	9.9286835	41	76248.01	117846.44	154556.73	9.8822285	10.0713165
20	64723.34	84906.24	131183.34	9.8110609	9.9289396	40	76229.19	117776.98	154503.78	9.8821213	10.0710604
21	64745.51	84956.31	131215.75	9.8112096	9.9291956	39	76210.36	117707.56	154450.87	9.8820140	10.0708044
22	64767.67	85006.40	131248.19	9.8113583	9.9291516	38	76191.52	117638.20	154398.01	9.8819067	10.0705484
23	64789.83	85056.52	131880.66	9.8115065	9.9297076	37	76172.68	117568.88	154345.20	9.8817992	10.0702924
24	64811.99	85106.67	131313.16	9.8116554	9.9299636	36	76153.83	117499.60	154292.44	9.8816918	10.0700364
25	64834.14	85156.84	131345.68	9.8118038	9.9302195	35	76134.97	117430.38	154239.73	9.8815842	10.0897805
26	64856.28	85207.04	131378.23	9.8119521	9.9304755	34	76116.11	117361.20	154187.06	9.8814766	10.0695245
27	64878.42	85257.26	131410.81	9.8121003	9.9307314	33	76097.24	117292.07	154134.45	9.8813689	10.0692686
28	64900.55	85307.50	131443.41	9.8122484	9.9309872	32	76078.37	117222.98	154081.89	9.8812612	10.0690128
29	64922.68	85357.77	131476.04	9.8123965	9.9312431	31	76059.49	117153.95	154029.37	9.8811534	10.0687569
30	64944.80	85408.07	131508.70	9.8125444	9.9314989	30	76040.60	117084.96	153576.90	9.8810455	10.0685011
31	64966.92	85458.39	131541.39	9.8126923	9.9317547	29	76021.70	117016.01	153924.49	9.8809376	10.0682453
32	64989.03	85508.73	131574.10	9.8128401	9.9320105	28	76002.80	116947.12	153872.12	9.8808296	10.0679895
33	65011.14	85559.10	131606.84	9.8129878	9.9322662	27	75983.89	116878.27	153819.80	9.8807215	10.0677338
34	65033.24	85609.50	131639.61	9.8131354	9.9325220	26	75964.98	116809.47	153767.52	9.8806134	10.0674780
35	65055.33	85659.92	131672.41	9.8132829	9.9327777	25	75946.06	116740.71	153715.30	9.8805052	10.0672223
36	65077.42	85710.37	131705.23	9.8134303	9.9330334	24	75927.13	116672.00	153663.12	9.8803970	10.0669666
37	65099.50	85760.84	131738.08	9.8135777	9.9332890	23	75908.20	116603.34	153611.00	9.8802887	10.0667110
38	65121.58	85811.33	131770.96	9.8137250	9.9335446	22	75889.26	116534.72	153558.92	9.8801803	10.0664554
39	65143.66	85861.85	131803.86	9.8138721	9.9338003	21	75870.31	116466.15	153506.89	9.8800719	10.0661997
40	65165.72	85912.40	131836.79	9.8140192	9.9340559	20	75851.36	116397.63	153454.91	9.8799634	10.0659441
41	65187.78	85962.97	131869.75	9.8141662	9.9343114	19	75832.40	116329.16	153402.97	9.8798548	10.0656886
42	65209.84	86013.57	131902.74	9.8143131	9.9345670	18	75813.43	116260.73	153351.09	9.8797462	10.0654330
43	65231.89	86064.19	131935.76	9.8144600	9.9348225	17	75794.46	116192.34	153299.25	9.8796375	10.0651775
44	65253.94	86114.84	131968.81	9.8146067	9.9350780	16	75775.48	116124.00	153247.46	9.8795287	10.0649220
45	65275.98	86165.51	132001.88	9.8147534	9.9353335	15	75756.50	116055.71	153195.72	9.8794199	10.0646665
46	65298.01	86216.21	132034.98	9.8148999	9.9355889	14	75737.51	115987.47	153144.03	9.8793110	10.0644111
47	65320.04	86266.93	132068.11	9.8150464	9.9358444	13	75718.51	115919.27	153092.38	9.8792021	10.0641556
48	65342.06	86317.68	132101.26	9.8151928	9.9360998	12	75699.50	115851.11	153040.78	9.8790930	10.0639002
49	65364.08	86368.46	132134.44	9.8153391	9.9363552	11	75680.49	115783.01	152989.23	9.8789840	10.0636448
50	65386.09	86419.26	132167.65	9.8154854	9.9366105	10	75661.47	115714.95	152937.73	9.8788748	10.0633895
51	65408.10	86470.09	132200.89	9.8156315	9.9368659	9	75642.45	115646.93	152886.27	9.8787656	10.0631341
52	65430.10	86520.94	132234.16	9.8157776	9.9371212	8	75623.42	115578.96	152834.87	9.8786563	10.0628788
53	65452.09	86571.81	132267.45	9.8159235	9.9373765	7	75604.39	115511.04	152783.51	9.8785470	10.0626235
54	64474.08	86622.71	132300.77	9.8160694	9.9376318	6	75585.35	115443.16	152732.19	9.8784376	10.0623682
55	65496.06	86673.64	132334.32	9.8162152	9.9378871	5	75566.30	115375.32	152680.93	9.8783281	10.0621129
56	65518.04	86724.60	132367.50	9.8163609	9.9381423	4	75547.24	115307.54	152629.71	9.8782186	10.0618577
57	65540.01	86775.58	132400.91	9.8165066	9.9383975	3	75528.18	115239.79	152578.54	9.8781090	10.0616025
58	65561.98	86816.59	132434.35	9.8166521	9.9386527	2	75509.11	115172.10	152527.41	9.8779994	10.0613473
59	65583.94	86877.62	132467.81	9.8167975	9.9389079	1	75490.04	115104.45	152476.32	9.8778896	10.0610921
60	65605.90	86928.68	132501.30	9.8163429	9.9391631	0	75470.96	115036.84	152425.31	9.8777799	10.0608369

Grad. 41.

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	65605.90	86928.68	132501.90	9.8169429	9.9391631
1	65627.85	86979.76	132534.82	9.8170882	9.9394182
2	65649.80	87030.87	132568.57	9.8172334	9.9596733
3	65671.74	87082.00	132601.94	9.8173785	9.9399284
4	65693.67	87133.16	132635.54	9.8175235	9.9401835
5	65715.60	87184.35	132669.18	9.8176685	9.9404385
6	65737.52	87235.56	132702.84	9.8178133	9.9406936
7	65759.44	87286.80	132736.53	9.8179581	9.9409486
8	65781.35	87338.05	132770.25	9.8181028	9.9412036
9	65803.26	87387.35	132803.99	9.8182474	9.9414585
10	65825.16	87440.87	132837.76	9.8183919	9.9417135
11	65847.06	87492.01	132871.56	9.8185364	9.9419684
12	65868.95	87543.38	132905.39	9.8186807	9.9422233
13	65890.83	87594.78	132939.25	9.8188250	9.9424782
14	65912.71	87648.20	132973.14	9.8189692	9.9427331
15	65934.58	87697.65	133007.06	9.8191133	9.9429879
16	65956.45	87749.12	133041.00	9.8192573	9.9432428
17	65978.31	87800.62	133074.97	9.8194012	9.9434976
18	66000.17	87852.15	133108.97	9.8195450	9.9437524
19	66022.01	87903.70	133143 00	9.8196888	9.9440072
20	66043.86	87955.28	133177.06	9 8198321	9.9442619
21	66065.70	88006.89	133211. 15	9.8199761	9.9445166
22	66087.53	88058.52	133245.27	9.8201196	9.9447714
23	66109.36	88110.18	133279.42	9.8202630	9.9450261
24	66131.18	88161.86	133313.59	9.8204063	9.9452807
25	66153.00	88213.57	133347.79	9.8205496	9.9455354
26	66174.81	88265.31	133382.02	9.8206927	9.9457900
27	66196.62	88317.07	133416.28	9.8208358	9.9460447
28	66218.42	88368.86	133450.57	9.8209788	9.9462993
29	66240.22	88420.68	133484.89	9.8211217	9.9465539
30	66262.01	88472.53	133519.24	9.8212646	9.9468084
31	66283.79	88524.40	133553.62	9.8214073	9.9470630
32	66305.57	88576.30	133588.03	9.8215500	9.9473175
33	66327.34	88628.22	133622.46	9.8216926	9.9475720
34	66349.11	88680.17	133656.92	9.8218351	9.9478265
35	66370 87	88732.15	133691.41	9.8219775	9.9480810
36	66392.62	88784.16	133725.94	9.8221198	9.9483355
37	66414.37	88836.20	133760.49	9.8222621	9.9485899
38	66436.11	88888.26	133795.07	9.8224042	9.9388443
39	66457.85	88940.34	133829.68	9.8225463	9.9490987
40	66479.59	88992.45	133864.32	9.8226883	9.9493531
41	66501.32	89044.59	133898.99	9.8228302	9.9496075
42	66523.04	89096.75	133933.69	9.8229721	9.9498619
43	66544.75	89148.94	133968.42	9.8231138	9.9501162
44	66566.46	89201.16	134003.17	9.8232555	9.9503705
45	66588.17	89253.41	134037.95	9.8233971	9.9506248
46	66609.87	89305.69	134072.76	9.8235386	9.9508791
47	66631.56	89357.99	134107.61	9.8236800	9.9511334
48	66653.25	89410.32	134142.48	9.8238213	9.9513876
49	66674.93	89462.68	134177.18	9.8239626	9.9516419
50	66696.61	89515.06	134212.32	9.8241037	9.9518961
51	66718.28	89567.47	134247.28	9.8242448	9.9521503
52	66739.94	89619.91	134282.27	9.8243858	9.9524045
53	66761.60	89672.38	134317.29	9.8245267	9.9526587
54	66783.26	89724.87	134352.34	9.8246676	9.9529128
55	66804.95	89777.39	134387.42	9.8248083	9.9531670
56	66826.55	89829.94	134422.53	9.8249490	9.9534211
57	66848.18	89882.52	134457.67	9.8250896	9.9536752
58	66869.81	89935.12	134492.84	9.8252301	9.9539292
59	66891.44	89987.75	134528.04	9.8253705	9.9541834
60	66913.06	90040.41	134563.27	9.8255109	9.9544374

48. Grad.

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	75470.96	115036.96	152448.81	9.8777799	10.0608369
59	75451.87	114969.28	152374.33	9.8776700	10.0605818
58	75432.78	114901.76	152323.39	9.8775601	10.0603267
57	75413.68	114834.29	152272.50	9.8774501	10.0600716
56	75394.57	114766.87	152221.66	9.8773401	10.0598165
55	75375.46	114699.49	152170.87	9.8772300	10.0595615
54	75356.34	114632.15	152120.12	9.8771198	10.0593064
53	75337.21	114564.86	152069.42	9.8770096	10.0590514
52	75318.08	114497.62	152018.76	9.8768993	10.0587964
51	75298.94	114430.41	151968.15	9.8767889	10.0585415
50	75279.80	114363.26	151917.59	9.8766785	10.0582865
49	75260.65	114296.15	151867.08	9.8765680	10.0580316
48	75241.49	114229.08	151816.61	9.8764574	10.0577767
47	75222 33	114162.06	151766.19	9 8763468	10.0575218
46	75203.16	114095.08	151715.81	9.8762361	10.0572669
45	75183.98	114028.15	151665.48	9.8761253	10.0570121
44	75164.80	113961.26	151615.20	9.8760145	10.0567572
43	75145.61	113894.41	151564.96	9.8759036	10.0565024
42	75126.41	113827.61	151514.77	9.8757927	10.0562476
41	75107.21	113760.85	151464.62	9.8756816	10.0559928
40	75088.00	113694.14	151414.52	9.8755706	10.0557381
39	75068.79	113627.47	151364.47	9.8754594	10.0554834
38	75049.57	113560.85	151314.46	9.8753482	10.0552286
37	75030.34	113494.27	151264.50	9.8752469	10.0549739
36	75011.11	113427.73	151214.59	9.8751256	10.0537193
35	74991.87	113361.24	151164.72	9.8750142	10.0544646
34	74972.62	113294.79	151114.89	9.8749027	10.0542100
33	74953.37	113228.39	151065.11	9.8747912	10.0539592
32	74934.11	113162.03	151015.38	9.8746795	10.0537007
31	74914.84	113095.71	150965.60	9.8745679	10.0534461
30	74895.57	113029.44	150916.05	9.8744561	10.0531916
29	74876.29	112963.21	150866.45	9.8743443	10.0529370
28	74857.01	112897.02	150816.90	9.8742325	10.0526825
27	74837.72	112830.88	150767.39	9.8741205	10.0524280
26	74818.42	112764.78	150717.93	9.8740085	10.0521735
25	74799.12	112698.72	150668.52	9.8738965	10.0519190
24	74779.81	112632.71	150619.15	9.8737844	10.0516645
23	74760.49	112566.74	150569.82	9.8736722	10.0514101
22	74741.17	112500.81	150520.54	9.8735599	10.0511557
21	74721.84	112434.93	150471.31	9.8734476	10.0509013
20	74702.51	112369.09	150422.11	9.8733352	10.0506469
19	74683.17	112303.29	150372.98	9.8732227	10.0503925
18	74663.82	112237.54	150323.87	9.8731102	10.0501381
17	74644.46	112171.83	150274.81	9.8729976	10.0498838
16	74625.10	112106.16	150225.80	9.8728849	10.0496295
15	74605.74	112040.53	150176.83	9.8727722	10.0493752
14	74586.37	111974.95	150127.91	9.8726594	10.0491209
13	74566.99	111909.41	150079.03	9.8725466	10.0488666
12	74547.60	111843.91	150030.10	9.8724337	10.0486124
11	74528.21	111778.46	149981.41	9.8723207	10.0483581
10	74508.81	111713.05	149932.67	9.8722076	10.0481039
9	74489.40	111647.68	149883.97	9.8720945	10.9478497
8	74469.99	111582.35	149835.31	9.8719813	10.0475955
7	74450.57	111517.06	149786.70	9.8718681	10.0473413
6	74431.15	111451.82	149738.13	9.8717548	10.0470872
5	74411.72	111386.61	149689.61	9.8716414	10.0468330
4	74392.29	111321.46	149641.13	9.8715279	10.0465789
3	74372.85	111256.35	149592.70	9.8714144	10.0463248
2	74353.40	111191.27	149544.30	9.8713008	10.0460707
1	74333.94	111126.24	149495.96	9.8711872	10.0458166
0	74314.48	111061.25	149474.65	9.8710735	10.0455626

66913.06

42. Grad.

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	66913.06	90040.42	134563.27	9.8255109	9.9544374
1	66934.67	90093.09	134598.53	9.8256512	9.9546915
2	66956.28	90145.80	134633.82	9.8257913	9.9549455
3	66977.88	90198.54	134669.14	9.8259314	9.9551995
4	66999.48	90251.31	134704.49	9.8260715	9.9575535
5	67021.07	90304.11	134739.87	9.8262114	9.9557075
6	67042.66	90356.94	134775.28	9.8263512	9.9559615
7	67064.24	90409.79	134810.72	9.8264910	9.9562154
8	67085.82	90462.67	134846.19	9.8266307	9.9564692
9	67107.39	90515.58	134881.69	9.8267703	9.9567233
10	67128.95	90568.51	134917.21	9.8269098	9.9569772
11	67150.51	90621.47	134952.77	9.8270493	9.9572311
12	67172.06	90674.46	134988.36	9.8271887	9.9574850
13	67193.61	90727.48	135023.98	9.8273279	9.9577389
14	67215.51	90780.53	135059.63	9.8274671	9.9579928
15	67236.68	90833.60	135095.31	9 8276063	9.9582465
16	67258.21	90886.71	135131.02	9.8277453	9.9585004
17	67279.73	90939.84	135166.76	9.8278843	9.9587542
18	67301.25	90993.00	135202.54	9.8270231	9.9590080
19	67322.76	91046.19	135238.34	9 8281619	9.9592618
20	67344.27	91099.41	135274.17	9.8283006	9.9595155
21	67365.77	91152.65	135310.03	9.8284393	9.9597693
22	67387.27	91205.92	135345.93	9.8285778	9.9600230
23	67408.76	91259.22	135381.86	9.8287163	9.9602767
24	67430.24	91312.55	135417.81	9.8288547	9.9605305
25	67451.72	91365.91	135453.79	9.8289930	9.9607842
26	67473.19	91419.29	135489.80	9.8291312	9.9610378
27	67494.66	91472.70	135525.85	9.8292694	9.9612915
28	67516.12	91526.15	135561.93	9.8294075	9.9615452
29	67537.57	91579.62	135598.03	9.8295454	9.9617988
30	67559.02	91633.12	135634.17	9.8296833	9.9620555
31	67580.46	91686.65	135670.34	9.8298212	9.9623061
32	67601.90	91740.20	135706.54	9.8299589	9.9625597
33	67623.33	91793.79	135742.77	9.8300966	9.9628133
34	67644.76	91847.40	135779.03	9.8302342	9.9630669
35	67666.18	91901.04	135815.32	9.8303717	9.9643204
36	67687.60	91954.71	135851.54	9.8305091	9.9635740
37	67709.01	92008.41	135888.00	9.8306464	9.9638275
38	67730.41	92062.14	135924.38	9.8307837	9.9640811
39	67751.81	92115.90	135960.80	9.8309209	9.9643346
40	67773.20	92169.68	135997.25	9.8310580	9.9645881
41	67794.59	92223.50	136033.72	9.8311950	9.9648416
42	67815.97	92277.34	136070.23	9.8313320	9.9650951
43	67837.34	92331.22	136106.77	9.8314688	9.9653486
44	67858.71	92385.12	136143.34	9.8316056	9.9656020
45	67880.07	92439.05	136179.95	9.8317423	9.9658555
46	67901.43	92493.01	136216.58	9.8318789	9.9661089
47	67922.78	92547.00	136253.24	9.8320155	9.9663623
48	67944.13	92601.01	136289.94	9.8321919	9.9666157
49	67965.47	92655.06	136326.67	9.8322883	9.9668692
50	67986.81	92709.14	136363.43	9.8324246	9.9671225
51	68008.14	92763.24	136400.22	9.8325609	9.9673759
52	68029.46	92817.38	136437.04	9.8326970	9.9676293
53	68050.78	92871.54	136473.89	9.8328331	9.9678827
54	68072.09	92925.73	136510.78	9.8329691	9.9681360
55	68093.39	92979.96	136547.70	9.8331050	9.9683893
56	68114.69	93034.21	136584.64	9.8332408	9.9686427
57	68135.99	93088.49	136621.62	9.8333766	9.9688960
58	68157.28	93142.80	136658.63	9.8335122	9.9691493
59	68178.56	93197.14	136695.67	9.8336476	9.9694026
60	68199.84	93251.41	136732.75	9.8337833	9.9696559

47. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	74314.48	111061.25	149447.65	9.8710735	10.0455626
59	74295.01	110996.30	149399.40	9.8709597	10.0453085
58	74275.54	110931.40	149351.18	9.8708458	10.0450545
57	74256.06	110866.53	149303.01	9.8707319	10.0446005
56	74236.57	110801.71	149254.88	9.8706179	10.0445465
55	74217.08	110736.93	149206.80	9.8705039	10.0442925
54	74197.58	110672.19	149158.75	9.8703898	10.0440385
53	74178.08	110607.50	149110.76	9.8702756	10.0437846
52	74158.57	110542.84	149062.89	9.8701613	10.0435306
51	74139.05	110478.23	149014.89	3.8700470	10.0432767
50	74119.53	110413.65	148967.05	9.8699326	10.0430228
49	74100.00	110349.12	148919.20	9.8698182	10.0427689
48	74080.46	110284.63	148871.42	9.8697037	10.0425150
47	74060.92	110220.19	148823.69	9.8695891	10.0422611
46	74041.37	110155.78	148775.99	9.8694744	10.0420073
45	74021.81	110091.41	148728.34	9.8693 97	10.0417535
44	74002.25	110027.09	148680.73	9.8692449	10.0414996
43	73982.68	109962.81	148633.17	9.8691301	10.0412458
42	73963.11	109898.56	148585.65	9.8690152	10.0409920
41	73943.53	109834.36	148538.17	9.8689002	10.0407382
40	73923.94	109770.20	148490.73	9.8687851	10.0404845
39	73904.35	109706.08	148443.34	9.8686700	10.0402307
38	73884.75	109642.01	148395.99	9.8685548	10.0399770
37	73865.15	109577.97	148348.68	9.8684396	10.0397233
36	73845.54	109513.97	148301.42	9.8683241	10.0394695
35	73825.92	109450.02	148254.20	9.8682088	10.0392158
34	73806.29	109386.10	148207.02	9.8680934	10.0389622
33	73786.66	109322.23	148159.88	9.8679779	10.0387085
32	73767.02	109258.40	148112.78	9.8678623	10.0384548
31	73747.38	109194.60	148065.73	9.8677466	10.0382012
30	73727.73	109130.85	148018.72	9.8676309	10.0379475
29	73708.08	109067.14	147971.76	9.8675151	10.0376939
28	73688.42	109003.47	147924.83	9.8673992	10.0374403
27	73668.75	108939.83	147877.95	9.8672833	10.0371867
26	73649.07	108876.24	147831.11	9.8671673	10.0369331
25	73629.39	108812.69	147784.31	9 8670512	10.0366796
24	73609.71	108749.18	147737.55	9.8669351	10.0364260
23	73590.02	108685.71	147690.84	9.8668189	10.0361725
22	73570.32	108622.28	147644.17	9.8667026	10.0359189
21	73550.61	108558.89	147597.54	9.8665863	10.0356654
20	73530.90	108495.54	147550.95	9.8664699	10.0354119
19	73511.18	108432.23	147504.40	9.8663534	10.0351584
18	73491.46	108368.96	147457.90	9.8662369	10.0349049
17	73471.73	108305.73	147411.44	9.8661203	10.0346514
16	73451.99	108242.54	147365.01	9.8660036	10.0343980
15	73432.25	108179.39	147318.64	9.8658868	10.0341445
14	73412.50	108116.28	147272.30	9.8657700	10.0338911
13	73392.75	108053.21	147226.00	9.8656531	10.0336377
12	73372.99	107990.18	147179.75	9.8655362	10.0333843
11	73353.22	107927.18	147133.53	9.8654192	10.0331308
10	73333.45	107864.23	147087.36	9.8653021	10.0328775
9	73313.67	107801.32	147041.23	9.8651849	10.0326241
8	73293.88	107738.44	146995.14	9.8650677	10.0323707
7	73274.09	107675.61	146949.10	9.8649504	10.0321173
6	73254.29	107612.82	146903.09	9.8648331	10.0318640
5	73234.48	107550.06	146857.13	9.8647156	10.0316107
4	73214.67	107487.34	146811.20	9.8645981	10.0313573
3	73194.85	107424.67	146765.32	9.8644806	10.0311040
2	73175.03	107362.03	146719.48	9.8643629	10.0308507
1	73155.20	107299.43	146673.68	9.8642452	10.0305974
0	73135.37	107236.87	146627.92	9.8641275	10.0303441

43. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	68199.84	93251.51	136732.75	9.8337833	9.9696559
1	68221.11	93305.91	136769.85	9.8339188	9.9699091
2	68242.37	93360.34	136806.99	9.8340541	9.9701224
3	68263.63	93414.79	136844.16	9.8341894	9.9704157
4	68284.88	93469.28	136881.36	9.8343246	9.9706689
5	68306.13	93523.80	136918.59	9.8344597	9.9709221
6	68327.37	93578.34	136955.86	9.8345948	9 9711754
7	68348.61	93632.92	136993.15	9.8347297	9.9714286
8	68369.84	93687.53	137020.48	9.8348646	9.9716818
9	68391.07	93742.16	137067.84	9.8349994	9.9719350
10	68412.29	93796.83	137105.23	9.8351341	9.9721882
11	68433.50	93851.52	137142.66	9.8352688	9.9724413
12	68454.71	93906.25	137180.11	9.8354033	9.9726945
13	68475.91	93961.01	137217.60	9.8355378	9.9729477
14	68497.11	94015.79	137255.12	9.8356722	9.9732008
15	68518.30	94070.61	137292.68	9.8358066	9.9724539
16	68539.48	94125.45	137330.26	9.8359408	9.9737071
17	68560.66	94180.33	137367.88	9.8360750	9.9739602
18	68581.83	94235.33	137405.53	9.8362091	9.9742133
19	68603.00	94290.17	137443.21	9.8363431	9.9744664
20	68624.16	94345.13	137480.92	9.8364771	9.9747195
21	68645.32	94400.13	137518.67	9.8366109	9.9749726
22	68666.47	94455.16	137556.45	9.8367447	9 9752257
23	68687.61	94510.21	137594.26	9.8368784	9.9754787
24	68708.75	94565.30	137632.10	9.8370121	9 9757318
25	68729.88	94620.42	137669.98	9.8371456	9.9759849
26	68751.01	94675.56	137707.89	9.8372791	9.9762372
27	68772.13	94730.74	137745.83	9.8374125	9.9764909
28	68793.24	94785.95	137783.30	9.8375458	9.9767440
29	68814.35	94841.19	137821.81	9.8376790	9.9769970
30	68835.45	94896.46	137859.85	9.8378122	9.9772500
31	68856.55	94951.76	137807.92	9.8379453	9.9775030
32	68877.64	95007.09	137936.02	9.8380783	9.9777560
33	68898.73	95062.45	137974.16	9.8382112	9.9780090
34	68919.81	95117.84	138012.33	9 8383441	9.9782620
35	68940.89	95173.26	138050.53	9.8384769	9.9785149
36	68961.96	95228.71	138088.77	9.8386096	9.9787679
37	68983.02	95284.20	138127.04	9.8387422	9.9790209
38	69004.07	95339.71	138165.34	9.8388747	9.9792738
39	69025.12	95395.26	138203.67	9.8390072	9.9795268
40	69046.17	95450.83	138242.04	9.8391396	9.9797797
41	69067.21	95506.44	138280.44	9.8392719	9.9800326
42	69088.24	95562.08	138318.87	9.8394041	9.9802856
43	69109.27	95617.74	138357.34	9.8395363	9 9805385
44	69130.29	95673.44	138395.84	9.8396684	9.9807914
45	69151.31	95729.17	138434.77	9.8398004	9.9810443
46	69172.32	95784 94	138472.94	9.8399323	9.9812972
47	69193.32	95840.73	138511.54	9.8400642	9.9815501
48	69214.32	95896.55	138550.17	9.8401959	9.3818030
49	69235.31	95952.41	138588.83	9.8403276	9.9820559
50	69256.30	96008.29	138687.53	9.8404593	9.9823087
51	69277.28	96064.21	138666.26	9.8405908	9.9825616
52	69298.25	96120.16	138705.03	9.8407223	9.9828145
53	69319.22	96176.14	138743.83	9.8408537	9.9830673
54	69340.18	96232.15	138782.66	9.8409850	9.9833202
55	69361.14	96288.19	138821.53	9.8411162	9.9835730
56	69382.09	96344.27	138860.42	9.8412474	9.9838259
57	69403.04	96400.37	138899.36	9 8413785	9 9840787
58	69423.98	96456.51	138938.32	9.8415095	9.9843315
59	69444.91	96512.68	138977.32	9.8416404	9.9845844
60	69465.84	96568.88	139016.36	9.8417716	9.9048372

46. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	77135.37	107236.87	146527.92	9.8641275	10.0303441
59	73115.53	107174.35	146582.20	9.8640096	10.0300909
58	73095.68	307111.87	146536.52	9.8638917	10.0298376
57	73075.83	107049.43	146490.88	9.8637737	10.0295843
56	73051.97	106987.02	146445.29	9.8636557	10.0293311
55	73036.10	106924.66	146399.73	9.8635376	10.0290779
54	73016.23	106862.33	146354.22	9.8634194	10.0288246
53	72996.35	106800.04	146308.75	9.8633011	10.0285714
52	72976.46	106737.79	146263.31	9 8631828	10.0283182
51	72956.57	106675.58	146217.92	9.8630644	10.0300650
50	72936.67	106613.41	146112.57	9.8629460	10.0278118
49	72916.77	106551.28	146127.26	9.8628274	10.0275587
48	72896.86	106489.18	146081.98	9.8627088	10.0273055
47	72876.94	106427.13	146036.75	9.8625902	10.0270523
46	72857.02	106365.11	145991.56	9.8624714	10.0267992
45	72837.09	106303.13	145946.41	9.8623526	10.0265461
44	72817.16	106241.19	145901.30	9.8622338	10.0262929
43	72797.22	106179.29	145856 23	9 8621148	10.0260398
42	72777.27	106117.42	145811.20	9.8619958	10.0257867
41	72757.32	106055 60	145766.21	9.8618767	10.0255336
40	72737.32	105993.81	145721.27	9 8617576	10.0252805
39	72717.40	105932.06	145676.36	9.8616383	10.0250274
38	72697.43	105870.34	145631.49	9.8615190	10.0247743
37	72677.45	105808.67	145586.66	9.8613997	10.0245213
36	72657.47	105747.03	145541.87	9.8612803	10.0242682
35	72637.48	105685.44	145597.12	9.8611608	10.0240151
34	72617.48	105623.88	145452.41	9.8610412	10.0237621
33	72597.48	105562.35	145407.74	9.8609215	10.0235091
32	72577.47	105500.87	145363.11	9.8608018	10.0232560
31	72557.46	105439.42	145318.52	9.8606821	10.0230030
30	72537.44	105378 01	145273.97	9 8605922	10.0227500
29	72517.41	105316.64	145229.46	9.8604423	10.0224970
28	72497.38	105255.31	145184.98	9.8603223	10.0222440
27	72477.34	105194.01	145140.55	9.8602022	10.0219910
26	72457.29	105132.75	145096.16	9.8600821	10.0217380
25	72437.24	105071.53	145051.81	9.8599619	10.0214851
24	72417.18	105010.34	145007.49	9.8598416	10.0212321
23	72397.12	104949.20	144963.22	9.8597213	10.0209791
22	72377.05	104888.09	144918.98	9.8596009	10.0207262
21	72356.98	104827.02	144884.78	9.8594804	10.0294732
20	72346.90	104765.98	144830.63	9.8593599	1010202203
19	72316.81	104704.98	144786.51	9.8592393	10.0199674
18	72296.71	104644.02	144742.43	9 8591186	10.0197144
17	72276.61	104583.10	144698.39	9.8589978	10.0194615
16	72256.51	104522.21	144654.36	9.8588770	10.0192086
15	72236.40	104461.36	144610.43	9.8587561	10.0189557
14	72216.28	104400.55	144566.51	9.8586351	10.0187028
13	72196.15	104339.77	144522.62	9.8585141	10.0184499
12	72176.02	104279.04	144478.78	9.8583929	10.0181970
11	72155.88	104218.33	144434.97	9.8582718	10.0179441
10	72135.74	104157.67	144391.20	9.8581505	10.0176913
9	72115.59	104097.04	144347.48	9.8580292	10.0174384
8	72095.44	104036.45	144303.79	9.8579078	10.0171855
7	72075.28	103975.89	144260.13	9.8577863	10.0169327
6	72055.11	103915.37	144216.52	9.8576648	10.0166798
5	72034.94	103854.89	144172.95	9.8575432	10.0164270
4	72014.76	103794.45	144129.41	9.8574215	10.0161741
3	71994.57	103734.04	144085.91	9.8572998	10.0159213
2	71974.38	103673.67	144042.46	9.8571779	10.0156685
1	71954.18	103613 33	143999.04	9.8570561	10.0154156
0	71933.98	103553.03	143955.65	9.8569341	10.0151628

44. Grad.

	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	69465.84	96568.88	139016.36	9.8417713	9.9848372
1	69486.76	96625.11	139055.49	9.8419021	9.9850900
2	69505.67	96681.37	139094.53	9.8420328	9.9853448
3	69528.58	96737.67	139133.66	9.8421634	9.9855956
4	69549.49	96794.00	139172.83	9.8422939	9.9858484
5	69570.39	96850.35	139212.03	9.8424244	9.9861012
6	69591.28	96906.74	139251.27	9.8425548	9.9863540
7	69612.17	96963.16	139290.54	9.8426851	9.9866068
8	69633.05	97019.62	139329.85	9.8428154	9.9868596
9	69653.92	97076.10	139369.18	9.8429456	9.9871123
10	69674.75	97132.62	139408.56	9.8430757	9.9873651
11	69695.65	97189.17	139447.96	9.8432057	9.9876179
12	69716.51	97245.75	139487.40	9.8433356	9.9878706
13	69737.36	97302.36	139526.88	9.8434655	9.9881234
14	69758.21	97359.01	139566.39	9.8435953	9.9883761
15	69779.05	97415.69	139605.93	9.8437250	9.9886289
16	69799.88	97472.40	139645.51	9.8438547	9.9888816
17	69820.71	97529.14	139685.12	9.8439842	9.9891344
18	69841.53	97585.91	139724.77	9.8441137	9.9893871
19	69862.34	97642.72	139764.45	9.8442432	9.9896399
20	69883.15	97699.56	139804.16	9.8443725	9.9898926
21	69903.96	97756.43	139843.91	9.8445018	9.9901453
22	69924.76	97813.33	139883.69	9.8446310	9.9903981
23	69945.55	97870.27	139923.51	9.8447601	9.9906508
24	69966.33	97927.24	139963.36	9.8448891	9.9909035
25	69987.11	97984.24	140003.25	9.8450181	9.9911562
26	70007.89	98041.27	140043.17	9.8451470	9.9914089
27	70028.66	98098.33	140083.13	9.8452758	9.9916616
28	70049.42	98155.43	140123.12	9.8454045	9.9919143
29	70070.12	98212.56	140163.15	9.8455332	9.9921670
30	70070.93	98269.73	140203.21	9.8456618	9.9924197
31	70111.67	98326.92	140243.30	9.8457903	9.9926724
32	70132.41	98384.15	140283.43	9.8459188	9.9929251
33	70153.14	98441.41	140323.60	9.8460471	9.9931778
34	70173.87	98498.71	140363.80	9.8461754	9.9934305
35	70194.59	98498.03	140404.03	9.8463036	9.9936832
36	70215.30	98613.39	140444.30	9.8464318	9.9939359
37	70236.01	98670.79	140484.60	9.8465599	9.9941886
38	70256.71	98728.21	140524.94	9.8466879	9.9944413
39	70277.41	98785.67	140565.32	9.8468158	9.9946940
40	70298.10	98843.16	140605.73	9.8469436	9.9949466
41	70318.79	98900.69	140646.17	9.8470714	9.9951993
42	70339.47	98958.25	140686.65	9.8471991	9.9954520
43	70360.14	99015.84	140727.17	9.8473267	9.9957047
44	70380.81	99073.46	140767.72	9.8474543	9.9959573
45	70401.47	99131.12	140808.31	9.8475817	9.9962100
46	70422.13	99188.81	140848.93	9.8477091	9.9964627
47	70442.78	99246.54	140889.58	9.8478365	9.9967154
48	70463.42	99304.29	140930.28	9.8479637	9.9969680
49	70484.60	99362.08	140971.00	9.8480909	9.9972207
50	70504.69	99419.91	141011.77	9.8482180	9.9974734
51	70525.32	99477.77	141052.56	9.8483450	9.9977260
52	70545.94	99535.66	141093.40	9.8484720	9.9979787
53	70566.55	99593.28	141134.27	9.8485989	9.9982314
54	70587.16	99651.54	141175.17	9.8487257	9.9984840
55	70607.76	99709.53	141216.11	9.8488524	9.9987367
56	70628.35	99767.56	141257.09	9.8489791	9.9989893
57	70648.94	99825.62	141298.10	9.8491057	9.9992420
58	70669.53	99883.71	141339.15	9.8492322	9.9994947
59	70690.11	99941.84	141380.24	9.8493586	9.9997473
60	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000000

45. Grad.

	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	71933.98	103553.03	143955.65	9.8569341	10.0151628
59	71913.77	103492.77	143912.31	9.8568121	10.0149100
58	71893.55	103432.54	143869.00	9.8566900	10.0146572
57	72873.33	103372.35	143825.74	9.8565678	10.0144044
56	71853.10	103312.20	143782.51	9.8564455	10.0141516
55	71832.87	103252.08	143739.37	9.8563232	10.0138988
54	71812.63	163191.99	143696.16	9.8562008	10.0136460
53	71792.38	103131.95	143653.05	9.8560784	10.0133932
52	71772.13	103071.94	143609.97	9.8559558	10.0131404
51	71751.87	103011.96	143566.93	9.8558332	10.0128877
50	71731.61	102952.03	143523.93	9.8557106	10.0126349
49	71711.34	102892.12	143480.97	9.8555878	10.0123821
48	71691.06	102832.26	143438.05	9.8554650	10.0121294
47	71670.78	102772.43	143395.16	9.8553421	10.0118766
46	71650.49	102712.63	143352.31	9.8552192	10.0116239
45	71630.19	102652.87	143309.50	9.8550961	10.0113711
44	71609.89	102593.15	143266.72	9.8549730	10.0111184
43	71589.58	102533.46	143223.99	9.8548499	10.0108656
42	71569.27	102473.81	143181.29	9.8547266	10.0106129
41	71548.95	102414.19	143138.63	9.8546033	10.0103601
40	71528.63	102854.61	143096.00	9.8544799	10.0101014
39	72508.30	102295.06	143053.42	9.8545645	10.0098547
38	71487.96	102235.55	143010.87	9.8542329	10.0096019
37	71467.62	102176.08	142968.36	9.8541093	10.0093492
36	71447.27	102116.64	142925.88	9.8539856	10.0090965
35	71426.91	102057.23	142883.48	9.8538619	10.0088438
34	71406.55	101997.86	142841.04	9.8537381	10.0085911
33	71386.18	101938.53	142798.68	9.8536142	10.0083384
32	71365.81	101879.23	142756.26	9.8534902	10.0080857
31	71345.43	101819.97	142714.07	9.8533661	10.0078330
30	71325.05	101760.74	142671.82	9.8532421	10.0075803
29	71304.66	101701.55	142629.61	9.8531179	10.0073276
28	71284.26	101642.37	142587.43	9.8529936	10.0070749
27	71263.85	101583.26	142545.29	9.8528693	10.0068222
26	71243.44	101524.17	142503.19	9.8527449	10.0065695
25	71223.02	101405.12	142461.12	9.8526204	10.0063168
24	71202.60	101406.10	142419.09	9.8524959	10.0060641
23	71182.17	101347.12	142377.10	9.8523713	10.0058114
22	71161.74	101288.17	142335.14	9.8522466	10.0055587
21	71141.30	101229.25	142293.23	9.8521218	10.0053060
20	71120.86	101170.37	142251.34	9.8519970	10.0050534
19	71100.41	101111.53	142209.50	9.8518721	10.0048007
18	71079.95	101052.72	142267.69	9.8517471	10.0045480
17	71059.48	100993.94	142125.92	9.8516220	10.0042953
16	71039.01	100935.20	142084.18	9.8514969	10.0040427
15	71018.54	100876.49	142042.48	9.8513717	10.0037900
14	70998.06	100817.82	142000.82	9.8512465	10.0035373
13	70977.57	100759.18	141959.19	9.8511211	10.0032846
12	70957.07	100700.58	141917.61	9.8509957	10.0030320
11	70936.57	100642.01	141876.05	9.8508782	10.0027793
10	70916.07	100583.47	141834.54	9.8507446	10.0025266
9	70895.56	100524.97	141793.05	9.8506190	10.0022740
8	70875.04	100466.51	141751.61	9.8504933	10.0020213
7	70854.51	100408.07	141710.20	9.8503675	10.0017686
6	70833.98	100349.68	141668.83	9.8502417	10.0015160
5	70813.45	100291.31	141627.49	9.8501157	10.0012633
4	70792.91	100232.98	141586.19	9.8499897	10.0010107
3	70772.36	100174.68	141544.93	9.8498637	10.0007580
2	70751.80	100116.42	141503.70	9.8497375	10.0005053
1	70731.24	100058.19	141462.51	9.8496113	10.0002527
0	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000200

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
		64	1.8061800	128	2.1072100	192	2.2833012	256	2.4082400	320	2.5051500
1	0.0000000	65	1.8129133	129	2.1105897	193	2.2855573	257	2.4099331	321	2.5065050
2	0.3010300	66	1.8195439	130	2.1139433	194	2.2878017	258	2.4116197	322	2.5078519
3	0.4771212	67	1.8260748	131	2.1172713	195	2.2900346	259	2.4132998	323	2.5092025
4	0.6020600	68	1.8325089	132	2.1205739	196	2.2922561	260	2.4149733	324	2.5105456
5	0.6989700	69	1.8388491	133	2.1238516	197	2.2944662	261	2.4166405	325	2.5118834
6	0.7781512	70	1.8450980	134	2.1271048	198	2.2966652	262	2.4183013	326	2.5132176
7	0.8450980	71	1.8512583	135	2.1303338	199	2.2988531	263	2.4199557	327	2.5145477
8	0.9030900	72	1.8573325	136	2.1335389	200	2.3010300	264	2.4216039	328	2.5158738
9	0.9542425	73	1.8633229	137	2.1367206	201	2.3031961	265	2.4232459	329	2.5171959
10	1.0000000	74	1.8692317	138	2.1398791	202	2.3053514	266	2.4248816	330	2.5185139
11	1.0413927	75	1.8750613	139	2.1430148	203	2.3074960	267	2.4265113	331	2.5198280
12	1.0791812	76	1.8808136	140	2.1461280	204	2.3096302	268	2.4281348	332	2.5211381
13	1.1139433	77	1.8864907	141	2.1492291	205	2.3117539	269	2.4297523	333	2.5224442
14	1.1461280	78	1.8920946	142	2.1522803	206	2.3138672	270	2.4313638	334	2.5237465
15	1.1760913	79	1.8976271	143	2.1553360	207	2.3159703	271	2.4329693	335	2.5250448
16	1.2041200	80	1.9030900	144	2.1583625	208	2.3180633	272	2.4345689	336	2.5263393
17	1.2304489	81	1.9084850	145	2.1613680	209	2.3201463	273	2.4361626	337	2.5276299
18	1.2552725	82	1.9138138	146	2.1643528	210	2.3222193	274	2.4377506	338	2.5289167
19	1.2787536	83	1.9190781	147	2.1673173	211	2.3242824	275	2.4393327	339	2.5301997
20	1.3010300	84	1.9242793	148	2.1702617	212	2.3263359	276	2.4409091	340	2.5314789
21	1.3222193	85	1.9294189	149	2.1731863	213	2.3283796	277	2.4424798	341	2.5327544
22	1.3424227	86	1.9344984	150	2.1760913	214	2.3304138	278	2.4440448	342	2.5340261
23	1.3617278	87	1.9395192	151	2.1789769	215	2.3324385	279	2.4456042	343	2.5352941
24	1.3802112	88	1.9444827	152	2.1818436	216	2.3344537	280	2.4471580	344	2.5365584
25	1.3979400	89	1.9493900	153	2.1846914	217	2.3364597	281	2.4487063	345	2.5378191
26	1.4149733	90	1.9542425	154	2.1875207	218	2.3384565	282	2.4502491	346	2.5390761
27	1.4313638	91	1.9290414	155	2.1903317	219	2.3404441	283	2.4517864	347	2.5403295
28	1.4471580	92	1.9637878	156	2.1931246	220	2.3424227	284	2.4533183	348	2.5415792
29	1.4623980	93	1.9684829	157	2.1958996	221	2.3443923	285	2.4548449	349	2.5428254
30	1.4771212	94	1.9731278	158	2.1986571	222	2.3463530	286	2.4563660	350	2.5440680
31	1.4913617	95	1.9777236	159	2.2013971	223	2.3483049	287	2.4578819	351	2.5453071
32	1.5051500	96	1.9822712	160	2.2041200	224	2.3502480	288	2.4593925	352	2.5465427
33	1.5185139	97	1.9867717	161	2.2068259	225	2.3521825	289	2.4608978	353	2.5477747
34	1.5314789	98	1.9912261	162	2.2095150	226	2.3541084	290	2.4623980	354	2.5490033
35	1.5440680	99	1.9956352	163	2.2121876	227	2.3560259	291	2.4638930	355	2.5502283
36	1.5563025	100	2.0000000	164	2.2148438	228	2.3579348	292	2.4653828	356	2.5514500
37	1.5682017	101	2.0043214	165	2.2174839	229	2.3598355	293	2.4668676	357	2.5526682
38	1.5797836	102	2.0086002	166	2.2201081	230	2.3617278	294	2.4683473	358	2.5538830
39	1.5910646	103	2.0128372	167	2.2227165	231	2.3636120	295	2.4698220	359	2.5550944
40	1.6020600	104	2.0170333	168	2.2253093	232	2.3654880	296	2.4712917	360	2.5563025
41	1.6127839	105	2.0211893	169	2.2278867	233	2.3673559	297	2.4727564	361	2.5575072
42	1.6232493	106	2.0253059	170	2.2304489	234	2.3692159	298	2.4742163	362	2.5587086
43	1.6334685	107	2.0293838	171	2.2329961	235	2.3710679	299	2.4756712	363	2.5599066
44	1.6434527	108	2.0334238	172	2.2355284	236	2.3719120	300	2.4771212	364	2.5611014
45	1.6532125	109	2.0374265	173	2.2280461	237	2.3747483	301	2.4785665	365	2.5622929
46	1.6627578	110	2.0413927	174	2.2405492	238	2.3765769	302	2.4800069	366	2.5634811
47	1.6720979	111	2.0453230	175	2.2430380	239	2.3783979	303	2.4814426	367	2.5646661
48	1.6812412	112	2.0492180	176	2.2455127	240	2.3803112	304	2.4828736	368	2.5658478
49	1.6901961	113	2.0530784	177	2.2479733	241	2.3820170	305	2.4842998	369	2.5670264
50	1.6989700	114	2.0569049	178	2.2504200	242	2.3838154	306	2.4857214	370	2.5682017
51	1.7075702	115	2.0606978	179	2.2528530	243	2.3856063	307	2.4871384	371	2.5693739
52	1.7160033	116	2.0644580	180	2.2552725	244	2.3873898	308	2.4885507	372	2.5705429
53	1.7242759	117	2.0681859	181	2.2576786	245	2.3891661	309	2.4899585	373	2.5717088
54	1.7323938	118	2.0718820	182	2.2600714	246	2.3909351	310	2.4913617	374	2.5728716
55	1.7403627	119	2.0755470	183	2.2624511	247	2.3926969	311	2.4927604	375	2.5740313
56	1.7481880	120	2.0791812	184	2.2648178	248	2.3944517	312	2.4941546	376	2.5751878
57	1.7558748	121	2.0827854	185	2.2671717	249	2.3961993	313	2.4955443	377	2.5763413
58	1.7634280	122	2.0863598	186	2.2695129	250	2.3979400	314	2.4969296	378	2.5774918
59	1.7708520	123	2.0899051	187	2.2710416	251	2.3996737	315	2.4983105	379	2.5786392
60	1.7781512	124	2.0934217	188	2.2741578	252	2.4014005	316	2.4996871	380	2.5797836
61	1.7853298	125	2.0969100	189	2.2764618	253	2.4031205	317	2.5010593	381	2.5809250
62	1.7923917	126	2.1003705	190	2.2787536	254	2.4048337	318	2.5024271	382	2.5820634
63	1.7993405	127	2.1038037	191	2.2810334	255	2.4065401	319	2.5037907	383	2.5831988
64	1.8061800	128	2.1072100	192	2.2833012	256	2.4082400	320	2.5051500	384	2.5843312

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Lgaroit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
385	2.5854607	449	2.6522463	513	2.7101174	577	2.7611758	641	2.8068580	705	2.8481891
386	2.5865873	450	2.6532125	514	2.7109631	578	2.7619278	642	2.8075350	706	2.8488047
387	2.5877110	451	2.6541765	515	2.7118072	579	2.7626786	643	2.8082110	707	2.8494194
388	2.5888317	452	2.6551384	516	2.7126497	580	2.7634280	644	2.8088859	708	2.8500333
389	2.5899496	453	2.6560982	517	2.7134905	581	2.7641761	645	2.8095597	709	2.8506462
390	2.5910646	454	2.6570558	518	2.7143298	582	2.7649230	646	2.8102325	710	2.8512583
391	2.5921768	455	2.6580114	519	2.7151674	583	2.7656685	647	2.8109043	711	2.8518696
392	2.5932861	456	2.6589648	520	2.7160033	584	3.7664128	648	2.8115750	712	2.8524800
393	2.5939925	457	2.6599162	521	2.7168377	585	2.7671559	649	2.8122447	713	2.8530895
394	2.5954962	458	2.6608655	522	2.7176705	586	2.7678976	650	2.8129134	714	2.8536982
395	3.5965971	459	2.6618127	523	2.7185017	587	2.7686381	651	2.8135810	715	2.8543060
396	2.5976952	460	2.6627578	524	2.7193313	588	2.7693793	652	2.8142476	716	2.8548130
397	2.5987905	461	2.6637009	525	2.7201593	589	2.7701153	653	2.8149132	717	2.8555191
398	2.599883	462	2.6646420	526	2.7209857	590	2.7708520	654	2.8155777	718	2.8561244
399	2.6009729	463	2.6655810	527	2.7218106	591	2.7715875	655	2.8162413	719	2.8567289
400	2.6020600	464	2.6665180	528	2.7226339	592	2.7723217	656	2.8169038	720	2.8573325
401	2.6031444	465	2.6674529	529	2.7234557	593	2.7730547	637	2.8175654	721	2.8579353
402	2.6042260	466	2.6683859	530	2.7242759	594	2.7737864	658	2.8182259	722	2.8585372
403	2.6053050	467	2.6693169	531	2.7250945	595	2.7745170	659	2.8188854	723	2.8591383
404	2.6063814	468	3.6702458	532	2.7259116	596	2.7752463	660	2.8195439	724	2.8597386
405	2.6074550	469	2.6711728	533	2.7267272	597	2.7759743	661	2.8202015	725	2.8603380
406	2.6085260	470	2.6720979	534	2.7275413	598	2.7767012	662	2.8208580	726	2.8609366
407	2.6095944	471	2.6730209	535	2.7283538	599	2.7774268	663	2.8215135	727	2.8615344
408	2.6106602	472	2.6739420	536	2.72916 0	600	2.7781512	664	2.8221681	728	2.8621314
409	2.6117233	473	2.6748611	537	2.7299743	601	2.7788745	665	2.8228216	729	2.8627275
410	2.6127839	474	2.6757783	538	2.7307823	602	2.7795965	666	2.8234742	730	2.8633229
411	2.6138418	475	2.6766936	539	2.7315888	603	2.7803173	667	2.8241258	731	2.8639174
412	2.6148972	476	2.6776069	540	2.7323938	604	2.7810369	668	2.8247765	732	2.8645111
413	2.6159500	477	2.6785184	541	2.7331973	605	2.7817554	669	2.8254261	733	2.8651040
414	2.6170003	478	2.6794279	542	2.7339993	606	2.7824726	670	2.8260748	734	2.8656961
415	2.6180481	479	2.6803355	543	2.7347998	607	2.7831887	671	2.8267225	735	2.8662873
416	2.6190933	480	2.6812412	544	2.73559 9	608	2.7839036	672	2.8273693	736	2.8668778
417	2.6201360	481	2.6821451	545	2.7363965	609	2.7846173	673	2.8280151	737	2.8674675
418	2.6211763	482	2.6830470	546	2.7371926	610	2.7853298	674	2.8286599	738	2.8680564
419	2.6222140	483	2.6839471	547	2.7379873	611	2.7860412	675	2.8293038	739	3.8686444
420	2.6232493	484	2.6848454	548	2.7387806	612	2.7867514	676	2.8299467	740	2.8692317
421	2.6242821	485	2.6857417	549	2.7395723	613	2.7874605	677	2.8305887	741	2.8698182
422	2.6253124	486	2.6866363	550	2.7403627	614	2.7881684	678	2.8312297	742	2.8704039
423	2.6263404	487	2.6875290	551	2.7411516	615	2.7888751	679	2.8318698	743	2.8709888
424	2.6273659	488	2.6884198	552	2.7419391	616	2.7895807	680	2.8325089	744	2.8715729
425	2.6283889	489	2.6893089	553	2.7427251	617	2.7902852	681	2.8331471	745	2.8721563
426	2.6294096	490	2.6901961	554	2.7435098	618	2.7909885	682	2.8337844	746	2.8727388
427	2.6304279	491	2.6910815	555	2.7442930	619	2.7916906	683	2.8344207	747	2.8733206
428	2.6314438	492	2.6919651	556	2.7450748	620	2.7923917	684	2.8350561	748	2.8739016
429	2.6324573	493	2.6928469	557	2.7458552	621	2.7930916	685	2.8356906	749	2.8744818
430	2.6334685	494	2.6937269	558	2.7466342	622	2.7937904	686	2.8363241	750	2.8750613
431	2.6344773	495	2.6946052	559	2.7474118	623	2.7944880	687	2.8369567	751	2.8756399
432	2.6354837	496	2.6954817	560	2.7481880	624	2.7951846	688	2.8375884	752	2.8762178
433	2.6364879	497	2.6963564	561	2.7489629	625	2.7958800	689	2.8382192	753	2.8767950
434	2.6374897	498	2.6972293	562	2.7497363	626	2.7965744	690	2.8388491	754	2.8773713
435	2.6384893	499	2.6981005	563	2.7505084	627	2.7972675	691	2.8394780	755	2.8779469
436	2.6394865	500	2.6989700	564	2.7512791	628	2.7979596	692	2.8401061	756	2.8785218
437	2.6404814	501	2.6998377	565	2.7520484	629	2.7986506	693	2.8407332	757	2.8790959
438	2.6414741	502	2.7007037	566	2.7528164	630	2.7993405	694	2.8413595	758	2.8796692
439	2.6424645	503	2.7015680	567	2.7535831	631	2.8000294	695	2.8419848	759	2.8802418
440	2.6434527	504	2.7024305	568	2.7543483	632	2.8007171	696	2.8426092	760	2.8808136
441	2.6444386	505	2.7032914	569	2.7551123	633	2.8014037	697	2.8432328	761	2.8813847
442	2.6454223	506	2.7041505	570	2.7558748	634	2.8020893	698	2.8438554	762	2.8819550
443	2.6464037	597	2.7050080	571	2.7566361	635	2.8027737	699	2.8444772	763	2.8825245
444	2.6473830	508	2.7058637	572	2.7573960	636	2.8034571	700	2.8450980	764	2.8830934
445	2.6483600	509	2.7067178	573	2.7581546	637	2.8041394	701	2.8457180	765	2.8836614
446	2.6493349	510	2.7075702	574	2.7589119	638	2.8048207	702	2.8463371	766	2.8842288
447	2.6503075	511	2.7084209	575	2.7596678	639	2.8055009	703	2.8469553	767	2.8847954
448	2.6512780	512	2.7092700	576	2.7604225	640	2.8061800	704	2.8475727	768	2.8853612
449	2.6522463	513	2.7101174	577	2.7611758	641	2.8068580	705	2.8481891	769	2.8859263

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
768	2.8753612	832	2.9201233	896	2.9523080	960	2.9822712	1024	3.0102999	1088	3.0366289
769	2.8859263	833	2.9206450	897	2.9527924	961	2.9827234	1025	3.0107239	1089	3.0370279
770	2.8864907	834	2.9211660	898	2.9532763	962	2.9831751	1026	3.0111474	1090	3.0374265
771	2.8870544	835	2.9216865	899	2.9537597	963	2.9836263	1027	3. 015704	1091	3.0378247
772	2.8876173	836	2.9222063	900	2.9542425	964	2.9840770	1028	3.0119993	1092	3.0382226
773	2.8881795	837	2.9227254	901	2.9547248	965	2.9845273	1029	3.0124154	1093	3.0386201
774	2.8887410	838	2.9232440	902	2.9552065	966	2.9849771	1030	3.0128372	1094	3.0390173
775	2.8893017	839	2.9237620	903	2.9556877	967	2.9854265	1031	3.0132587	1095	3.0394141
776	2.8898617	840	2.9242793	904	2.9561684	968	2.9858754	1032	3.0136797	1096	3.0398105
777	2.8904210	841	2.9247960	905	2.9566486	969	2.9863238	1033	3.0141003	1097	3.0402066
778	2.8909796	842	2.9253121	906	2.9571282	970	2.9867717	1034	3.0145205	1098	3.0406023
779	2.8915375	843	2.9258276	907	2.9576073	971	2.9872192	1035	3.0149403	1099	3.0409977
780	2.8920946	844	2.9263424	908	2.9580858	972	2.9876663	1036	3.0153597	1100	3.0413927
781	2.8926510	845	2.9268567	909	2.9585639	973	2.9881128	1037	3.0157987	1101	3.0417873
782	2.8932067	846	2.9273704	910	2.9590414	974	2.9885589	1038	3.0161973	1102	3.0421816
783	2.8937618	847	2.9278834	911	2.9595184	975	2.9890046	1039	3.0166155	1103	3.0425755
784	2.8943161	848	2.9283958	912	2.9599948	976	2.9894498	1040	3.0170333	1104	3.0429691
785	2.8948696	849	2.9289077	913	2.9604708	977	2.9898946	1041	3.0174507	1105	3.0433622
786	2.8954225	850	2.9294189	914	2.9609462	978	2.9903388	1042	3.0178677	1106	3.0437551
787	2.8959747	851	2.9299296	915	2.9614211	979	2.9907827	1043	3.0182843	1107	3.0441476
788	2.8965262	852	2.9304396	916	2.9618955	980	2.9912261	1044	3.0187005	1108	3.0445398
789	2.8970770	853	2.9309490	917	2.9623693	981	2.9916690	1045	3.0191163	1109	3.0449315
790	2.8976271	854	2.9314579	918	2.9628427	982	2.9921115	1046	3.0195317	1110	3.0453230
791	2.8981765	855	2.9319661	919	2.9633155	983	2.9925535	1047	3.0199467	1111	3.0457140
792	2.8987252	856	2.9324738	920	2.9637878	984	2.9929951	1048	3.0203613	1112	3.0461048
793	2.8992732	857	2.9329808	921	2.9642596	985	2.9934362	1049	3.0207755	1113	3.0464952
794	2.8998205	858	2.9334873	922	2.9647309	986	2.9938769	1050	3.0211893	1114	3.0468852
795	2.9003671	859	2.9339932	923	2.9652017	987	2.9943171	1051	3.0216027	1115	3.0472749
796	2.9009131	860	2.9344984	924	2.9656720	988	2.9947569	1052	3.0220157	1116	3.0476642
797	2.9014583	861	2.9350031	925	2.9661417	989	2.9951963	1053	3.0224284	1117	3.0480532
798	2.9020029	862	2.9355073	926	2.9666110	990	2.9956352	1054	3.0228406	1118	3.0484418
799	2.9025468	863	2.9360108	927	2.9670797	991	2.9960736	1055	3.0232524	1119	3.0488301
800	2.9030900	864	2.9365137	928	2.9675480	992	2.9965117	1056	3.0236639	1120	3.0492180
801	2.9036325	865	2.9370161	929	2.9680157	993	2.9969492	1057	3.0240750	1121	3.0496056
802	2.9041744	866	2.9375179	930	2.9684829	994	2.9973864	1058	3.0244857	1122	3.0499928
803	2.9047155	867	2.9380191	931	2.9689497	995	2.9978231	1059	3.0248960	1123	3.0503797
804	2.9052520	868	2.9385197	932	2.9694159	996	2.9982593	1060	3.0253059	1124	3.0507663
805	2.9057959	869	2.9390198	933	2.9698816	997	2.9986951	1061	3.0257154	1125	3.0511525
806	2.9063350	870	2.9395192	934	2.9703469	998	2.9991305	1062	3.0261245	1126	3.0515384
807	2.9068735	871	2.9400181	935	2.9708116	999	2.9995655	1063	3.0265333	1127	3.0519239
808	2.9074114	872	2.9405165	936	2.9712758	1000	3.0000000	1064	3.0269416	1128	3.0523091
809	2.9079485	873	2.9410142	937	2.9717396	1001	3.0004341	1065	3.0273496	1129	3.0526939
810	2.9084850	874	2.9415114	938	2.9722328	1002	3.0008677	1066	3.0277572	1130	3.0530784
811	2.9090208	875	2.9420080	939	2.9726656	1003	3.0013009	1067	3.0281644	1131	3.0534626
812	2.9095560	876	2.9425041	940	2.9731278	1004	3.0017337	1068	3.0285712	1132	3.0538464
813	2.9100905	877	2.9429996	941	2.9735892	1005	3.0021661	1069	3.0289777	1133	3.0542299
814	2.9106244	878	2.9434945	942	2.9740509	1006	3.0025980	1070	3.0293838	1134	3.0546130
815	2.9111576	879	2.9439889	943	2.9745117	1007	3.0030295	1071	3.0297895	1135	3.0549358
816	2.9116901	880	2.9444827	944	2.9749720	1008	3.0034605	1072	3.0301948	1136	3.0553783
817	2.9122220	881	2.9449759	945	2.9754318	1009	3.0038912	1073	3.0305997	1137	3.0557604
818	2.9127533	882	2.9454686	946	2.9758911	1010	3.0043214	1074	3.0310043	1138	3.0562423
819	2.9132839	883	2.9459607	947	2.9763500	1011	3.0047511	1075	3.0314085	1139	3.0565237
820	2.9138138	884	2.9464523	948	2.9768083	1012	3.0051805	1076	3.0318123	1140	3.0569048
821	2.9143431	885	2.9469433	949	2.9772662	1013	3.0056094	1077	3.0322157	1141	3.0572856
822	2.9148718	886	2.9474337	950	2.9777236	1014	3.0060379	1078	3.0326188	1142	3.0576661
823	2.9153998	887	2.9479236	951	2.9781805	1015	3.0064660	1079	3.0330214	1143	3.0580462
824	2.9159272	888	2.9484130	952	2.9786369	1016	3.0068937	1080	3.0334237	1144	3.0584260
825	2.9164539	889	2.9489018	953	2.9790929	1017	3.0073209	1081	3.0338257	1145	3.0588055
826	2.9169800	890	2.9493900	954	2.9795484	1018	3.00774781	082	3.0342273	1146	3.0591846
827	2.9175055	891	2.9498777	955	2.9800034	1019	3.0081742	1083	3.0346284	1147	3.0595634
828	2.9180303	892	2.9503648	956	2.9804579	1020	3.0086002	1084	3.0350293	1148	3.0599419
829	2.9185545	893	2.9508514	957	2.9809119	1021	3.00902571	085	3.0354297	1149	3.0603200
830	2.9190781	894	2.9513375	958	2.9813655	1022	3.00945091	086	3.0358298	1150	3.0606978
831	2.9196010	895	2.9518230	959	2.9818186	1023	3.00987561	087	3.0362295	1151	3.0610753
832	2.9201233	896	2.9523080	960	2.9822712	1024	3.01029991	088	3.0366289	1152	3.0614525

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
1152	3.0614525	1216	3.0849336	1280	3.1072100
1153	3.0618293	1217	3.0852906	1281	3.1075491
1154	3.0622058	1218	3.0856473	1282	3.1078880
1155	3.0625820	1219	3.0860037	1283	3.1082266
1156	3.0629578	1220	3.0863598	1284	3.1085650
1157	3.0633334	1821	3.0867156	1285	3.1089031
1158	3.0637085	1222	3.0870712	1286	3.1092410
1159	3.0640834	1223	3.0874264	1287	3.1095785
1160	3.0644580	1224	3.0877814	1288	3.1099159
1161	3.0648322	1225	3.0881361	1289	3.1102529
1162	3.0652061	1226	3.0884905	1290	3.1105897
1163	3.0655797	1227	3.0888446	1291	3.1109262
1164	3.065953	1228	3.0891984	1292	3.1112625
1165	3.0662259	1229	3.0895519	1293	3.1115985
1166	3.0666985	1230	3.0899051	1294	3.1119343
1167	3.0670708	1231	3.0902580	1295	3.1122698
1168	3.0674428	1232	3.0906107	1296	3.1126050
1169	3.0678145	1233	3.0909631	1297	3.1129400
1170	3.0681859	1234	3.0913151	1298	3.1132747
1171	3.0685569	1235	3.0916669	1299	3.1136091
1172	3.0689276	1236	3.0920185	1300	3.1139433
1173	3.0692980	1237	3.0923697	1301	3.1142773
1174	3.069668	1238	3.0927206	1302	3.1146610
1175	3.0700379	1239	3.0930713	1303	3.1149444
1176	3.0704073	1240	3.0934217	1304	3.1152776
1177	3.0707765	1241	3.0937718	1305	3.115610
1178	3.0711453	1242	3.0941216	1306	3.115943
1179	3.0715138	1243	3.0944711	1307	3.1162756
1180	3.0718820	1244	3.0948204	1308	3.1166077
1181	3.0722499	1245	3.0951694	1309	3.1169396
1182	3.0726175	1246	3.0955180	1310	3.1172713
1183	3.0729847	1247	3.0958664	1311	3.1176027
1184	3.0733517	1248	3.0962146	1312	3.1179338
1185	3.0737183	1249	3.0965624	1313	3.1182647
1186	3.0740847	1250	3.0969100	1314	3.1185954
1187	9.0744507	1251	3.0972573	1315	3.1189957
1188	3.0748164	1252	3.0976043	1316	3.1192559
1189	3.0751818	1253	3.0979511	1317	3.1195858
1190	3.0755470	1254	3.0982975	1318	3.1199154
1191	3.0759118	1255	3.0986437	1319	3.1202448
1192	3.0762762	1256	3.0989896	1320	3.1205739
1193	3.0766404	1257	3.0993353	1221	3.1209028
1194	3.0770043	5258	3.0996806	1322	3.1212314
1195	3.0773879	1259	3.1000257	1323	3.1215598
1196	3.0777312	1260	3.1003705	1324	3.1218880
1197	3.0780941	1261	3.1007151	1325	3.1222159
1198	3.0784568	1262	3.1010593	1326	3.1225435
1199	3.0788192	1263	2.1014033	1327	3.1228709
1200	3.0791812	1264	3.1017471	1328	3.1231981
1201	3.0795432	1265	3.1020905	1329	3.1235250
1202	3.0799045	1266	3.1024337	1330	3.1238516
1203	3.0802656	1267	3.1027766	1331	3.1241780
1204	3.0806265	1268	3.1031192	1332	3.1245042
1205	3.0809870	1269	3.1034616	1333	3.1248301
1206	3.0813473	1270	3.1038037	1334	3.1251558
1207	3.0817073	1271	3.1041455	1335	3.1254813
1208	3.0820669	1272	3.1044871	1336	3.1258064
1209	3.0824263	1273	3.1048284	1337	3.1261314
4210	3.0827854	1274	3.1051694	1338	3.1264561
1211	3.0831441	1275	3.1055102	1339	3.1267806
1212	3.0815026	1276	3.1058507	1340	3.1271048
1213	3.0838608	1277	3.1061909	1341	3.1274288
1214	3.0842187	1278	3.1065308	1342	3.1277525
1215	3.0845763	1279	3.1068705	1343	3.1280760
1216	3.0849335	1280	3.1072100	1344	3.1283993

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
1344	3.1283993	1408	3.1486026	1472	3.1679078
1345	3.1287223	1409	3.1489110	1473	3.1682027
1346	3.1290450	1410	3.1492191	1474	3.1684975
1347	3.1293676	1411	3.1495270	1475	3.1687920
1348	3.1296899	1412	3.1498347	1476	3.1690863
1349	3.1300119	1413	3.1501422	1477	3.1693805
1350	3.1303338	1414	3.1504494	1478	3.1696744
1351	3.1306553	1415	3.1507564	1479	3.1699682
1352	3.1309767	1416	3.1510632	1480	3.1702617
1353	3.1312978	1417	3.1513698	1481	3.1705550
1354	3.1316187	1418	3.1516762	1482	3.1708482
1355	3.1319393	1419	3.1519824	1483	3.1711411
1356	3.1322597	1420	3.1522883	1484	3.1714339
1357	3.1325798	1421	3.1525941	1485	3.1717264
1358	3.1328998	1422	3.1528996	1486	3.1720188
1359	3.1332195	1423	3.1532049	1487	3.1723110
1360	3.1335389	1424	3.1535100	1488	3.1726029
1361	3.1338581	1425	3.1538149	1489	3.1728947
1362	3.1341771	1426	3.1541195	1490	3.1731863
1363	3.1344958	1427	3.1544240	1491	3.1734776
1364	3.1348144	1428	3.1547282	1492	3.1737688
1365	3.1351326	1429	3.1550322	1493	3.1740598
1366	3.1354507	1430	3.1553360	1494	3.1743506
1367	3.1357685	1431	3.1556396	1495	3.1746412
1368	3.1360861	1432	3.1559430	1496	3.1749316
1369	3.1364034	1433	3.1562462	1497	3.1752218
1370	3.1367206	1434	3.1565491	1498	3.1755118
1371	3.1370374	1435	3.1568519	1499	3.1758016
1372	3.1373541	1436	3.1571544	1500	3.1760913
1373	3.1376705	1437	3.1574568	1501	3.1763807
1374	3.1379867	1438	3.1577589	1502	3.1766699
1375	3.1383027	1439	3.1580608	1503	3.1769590
1376	3.1386184	1440	3.1583625	1504	3.1772478
1377	3.1289339	1441	3.1586640	1505	3.1775365
1378	3.1392492	1442	3.1589653	1506	3.1778250
1379	3.1395643	1443	3.1592663	1507	3.1781132
1380	3.1398791	1444	3.1595672	1508	3.1784013
1381	3.1401937	1445	3.1598678	1509	3.1786892
1382	3.1405080	1446	3.1601683	1510	3.1789769
1383	3.1408222	1447	3.1604685	1511	3.1792645
1384	3.1411361	1448	3.1607686	1512	3.1795518
1385	3.1414498	1449	3.1610684	1513	3.1798389
1386	3.1417632	1450	3.1613680	1514	3.1801259
1387	3.1420765	1451	3.1616674	1515	3.1804126
1388	3.1423895	1452	3.1619666	1516	3.1806992
1389	3.1427022	1453	3.1622656	1517	3.1809856
1390	3.1430148	1454	2.1625644	1518	3.1812718
1391	3.1433271	1455	3.1628630	1519	3.1815578
1392	3.1436392	1456	3.1631614	1520	3.1818437
1393	3.1439511	1457	3.1634595	1521	3.1821292
1394	3.1442628	1458	3.1637575	1522	3.1824146
1395	3.1445742	1459	3.1640553	1523	3.1826999
1396	3.1448854	1460	3.1643528	1524	3.1829850
1397	3.1451964	1461	3.1646502	1525	3.1832698
1398	3.1455072	1462	3.1649474	1526	3.1835545
1399	3.1458177	1463	3.1652443	1527	3.1838390
1400	3.1461280	1464	3.1655411	1528	3.1841233
1401	3.1464381	1465	3.1658376	1529	3.1844075
1402	3.1467480	1466	3.1661340	1530	3.1846914
1403	3.1470577	1467	4.1664301	1531	3.1849752
1404	3.1473671	1468	3.1667260	1532	3.1852588
1405	3.1476763	1469	3.1670218	1533	3.1855421
1406	3.1479853	1470	3.1673173	1535	3.1858253
1407	3.1482941	1471	3.1676127	1535	3.1861084
1408	3.1486026	1472	3.1679078	1536	3.1863912

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
1536	3.1863912	1600	3.2041200	1663	3.2208922	1727	3.2372923	1791	3.2530956	1855	3.2683439
1537	3.1869758	1601	3.2043913	1664	3.2211533	1728	3.2375437	1792	3.2533380	1856	3.2685780
1538	3.1869563	1602	3.2046625	1665	3.2214142	1729	3.2377950	1793	.2535803	1857	3.2688119
1539	3.1872386	1603	3.2049335	1666	3.2216750	1730	3.2380461	1794	3.25[illegible]8224	1858	3.2690457
1540	3.1875207	1604	3.2052044	1667	3.2219356	1731	3.2382971	1795	3.2540645	1859	3.2692794
1541	3.1878026	1605	3.2054750	1668	3.2221960	1732	3.2385479	1796	3.2543063	1860	3.2655129
1542	3.1880844	1606	3.2057455	1669	3.2224563	1733	3.2387986	1797	3.2545481	1861	3.2697464
1543	3.1883659	1607	3.2060159	1670	3.2227165	1734	3.2390491	1798	3.2547897	1862	3.2699797
1544	3.1888473	1608	3.2062060	1671	3.2229764	1735	3.2392995	1799	3.2550312	1863	3.2702128
1545	3.1889285	1609	3.2065560	1672	3.2232363	1736	3.2395497	1800	3.2552725	1864	3.2704459
1546	3.1892095	1610	3.2068259	1673	3.2234959	1737	3.2397998	1801	3.25551[illegible]	1865	.2706788
1547	3.1894903	1611	3.2070955	1674	3.2237555	1738	3.2400498	1802	3.2557548	1866	3.2709116
1548	3.1897709	1612	3.2073650	1675	3.2240148	1739	3.2402996	1803	3.2559957	1867	3.2711443
1549	3.1901514	1613	3.2076244	1676	3.2242740	1740	3.2405492	1804	3.2562365	1868	3.2713769
1550	3.1903317	1614	3.2079035	1677	3.2245331	1741	3.2407988	1805	3.2564772	1869	3.2716093
1551	3.1906118	1615	3.2081725	1678	3.2247920	1742	3.2410481	1806	3.256717[illegible]	1870	3.2718416
1552	3.1908917	1616	3.2084414	1679	3.2250507	1743	3.2412974	1807	3.2569582	1871	3.2720738
1553	3.1911714	1617	3.2087100	1680	3.2253093	1744	3.2415465	1808	3.2571984	1872	3.2728057
1554	3.1914510	1618	3.2089785	1681	3.2255677	1745	3.2417954	1809	3.2574386	1873	3.2725378
1555	3.1917304	1619	3.2092468	1682	3.2258260	1746	3.2420442	1810	3.2576786	1874	3.2727696
1556	3.1920096	1620	3.2095150	1683	3.2260841	1747	3.2422929	1811	3.2579184	1875	3.27[illegible]0013
1557	3.1922886	1621	3.2097830	1684	3.2263421	1748	3.2425414	1812	3.2581582	1876	3.27[illegible]2328
1558	3.1925674	1622	3.2100508	1685	3.2265999	1749	3.2427898	1813	3.2583978	1877	3.2734643
1559	3.1928461	1623	3.2103185	1686	3.2268576	1750	3.2430380	1814	3.2586373	1878	3.2736956
1560	3.1931246	1624	3.2105860	1687	3.2271151	1751	3.2432861	1815	3.2588766	1879	3.2739268
1561	3.1934029	1625	3.2108534	1688	3.2273724	1752	3.2435341	1816	3.2591158	1880	3.2741578
1562	3.1936810	1626	3.2111205	1689	3.2276296	1753	3.2437819	1817	3.2593549	1881	3.2743888
1563	3.1939590	1627	3.2113876	1690	3.2278867	1754	3.2440296	1818	3.2595939	1882	3.2746116
1564	3.1942367	1628	3.2116544	1691	3.2281436	1755	3.2442771	1819	3.2598327	1883	3.2748503
1565	3.1945143	1629	3.2119211	1692	3.2284004	1756	3.2445245	1820	3.2600714	1884	3.2750809
1566	3.1947917	1630	3.2121876	1693	3.2286570	1757	3.2447718	1821	3.2603099	1885	3.2753213
1567	3.1950690	1630	3.2121876	1694	3.2289134	1758	3.2450189	1822	3.2605484	1886	3.2755417
1568	3.1953460	1631	3.2124540	1695	3.2231697	1759	3.2452658	1823	3.2607867	1887	3.2757719
1569	3.1956229	1632	3.2127201	1696	3.2294258	1760	3.2455127	1824	3.2610248	1888	3.2760020
1570	3.1958996	1633	3.2129862	1697	3.2296818	1761	3.2457594	1825	3.2612629	1889	3.2762320
1571	3.1961762	1634	3.2132521	1698	3.2299377	1762	3.2460059	1826	3.2615008	1890	3.2764618
1572	3.1964525	1635	3.2135178	1699	3.2301934	1763	3.2462523	1827	3.2617385	1891	3.2766915
1573	3.1967287	1636	3.2137833	1700	3.2304489	1764	3.2464986	1828	3.2619762	1892	3.2769211
1574	3.1970047	1637	3.2140487	1701	3.2307043	1765	3.2467447	1829	3.2622137	1893	3.2771506
1575	3.1972806	1638	3.2143139	1702	3.2309596	1766	3.2469907	1830	3.2624511	1894	3.2773800
1576	3.1975562	1639	3.2145789	1703	4.2312146	1767	3.2472365	1831	3.2626883	1895	3.2776092
1577	3.1978317	1640	3.2148438	1704	3.2314696	1768	3.2474823	1832	3.2629255	1896	3.2778383
1578	3.1981070	1641	3.2151986	1705	3.2317244	1769	3.2477278	1833	3.2631625	1897	3.2780673
1579	3.1983821	1642	3.2153732	1706	3.2319790	1770	3.2479733	1834	3.2633993	1898	3.2782962
1580	3.1986571	1643	3.2156376	1707	3.2322335	1771	3.2482186	1835	3.2636361	1899	3.2785250
1581	3.1989319	1644	9.2159018	1708	3.2324879	1772	3.2484637	1836	3.2638727	1900	3.2787536
1582	3.1992065	1645	3.2161659	1709	3.3327421	1773	3.2487087	1837	3.2641092	1901	3.2789821
1583	3.1994809	1646	3.2164298	1710	3.2329961	1774	3.2489536	1838	3.2643455	1902	3.2792105
1584	3.1997552	1647	3.2166936	1711	3.2332500	1775	3.2491984	1839	3.2645817	1903	3.2794388
1585	3.2000293	1648	3.2169572	1712	3.2335038	1776	3.2494430	1840	3.2648178	1904	3.2796669
1586	3.2003032	1649	3.2172206	1713	3.2337574	1777	3.2496874	1841	3.2650538	1905	3.2798950
1587	3.2005769	1650	3.2174839	1714	3.2340108	1778	3.2499318	1842	3.2652896	1906	3.2801229
1588	3.2008505	1651	3.2177471	1715	3.2342641	1779	3.2501759	1843	3.2655253	1907	3.2803507
1589	3.2011239	1652	3.2180100	1716	3.2345173	1780	3.2504200	1844	3.2657609	1908	3.2805784
1590	3.2013971	1653	3.2182728	1717	3.2347703	1781	3.2506639	1845	3.2659964	1909	3.2808059
1591	3.2016702	1654	3.2185355	1718	3.2350232	1782	3.2509077	1846	3.2662317	1910	3.2810334
1592	3.2019431	1655	3.2187980	1719	3.2352759	1783	3.2511513	1847	3.2664669	1911	3.2812607
1593	3.2022158	1656	3.2190603	1720	3.2355284	1784	3.2513948	1848	3.2667020	1912	3.2814879
1594	3.2024883	1657	3.2193225	1721	3.2357809	1785	3.2516382	1849	3.2669369	1913	3.2817150
1595	3.2027607	1658	3.2195845	1722	3.2360331	1786	3.2518815	1850	3.2671717	1914	3.2819419
1596	3.2030329	1659	3.2198464	1723	3.2362853	1787	3.2521246	1851	3.2674064	1915	3.28[illegible]618
1597	3.2033049	1660	3.2201081	1724	3.2365373	1788	3.2523675	1852	3.2676410	1916	3.2823955
1598	3.2035768	1661	3.2203696	725	3.2367891	1789	3.2526103	1853	3.2678754	1917	3.2826222
1599	3.2038485	1662	3.2206310	1726	3.2370408	1790	3.2528530	1854	3.2681097	1918	3.2828486
1600	3.2041200	1663	3.2208922	1727	3.2372923	1791	3.2530956	1855	3.2683439	1919	3.2830750

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
1919	3.2830750	1983	3.2973227	2047	3.3111178
1920	3.2833012	1984	3.2975417	2048	3.3113299
1921	3.2835274	1985	3.2977605	2049	3.3115420
1922	3.2837534	1986	3.2979792	2050	3.3117539
1923	3.2839793	1987	3.2981979	2051	3.3119657
1924	3.2842051	1988	3.2984164	2052	3.3121774
1925	3.2844307	1989	3.2986348	2053	3.3123889
1926	3.2846563	1990	3.2988531	2054	3.3126004
1927	3.2848817	1991	3.2990713	2055	3.3128118
1928	3.2851070	1992	3.2992893	2056	3.3130231
1929	3.2853322	1993	3.2995073	2057	3.3132343
1930	3.2855573	1994	3.2997251	2058	3.3134454
1931	3.2857823	1995	3.2999429	2059	3.3136563
1932	3.2860071	1996	3.3001605	2060	3.3138672
1933	3.2862318	1997	3.3003781	2061	3.3140780
1934	3.2864565	1998	3.3005955	2062	3.3142887
1935	3.2866810	1999	3.3008128	2063	3.3144992
1936	3.2869054	2000	3.3010300	2064	3.3147097
1937	3.2871296	2001	3.3012471	2065	3.3149200
1938	3.2873538	2002	3.3014641	2066	3.3151303
1939	3.2875778	2003	3.3016809	2067	3.3153405
1940	3.2878017	2004	3.3018977	2068	3.3155505
1941	3.2880255	2005	3.3021144	2069	3.3157605
1942	3.2882492	2006	3.3023309	2070	3.3153703
1943	3.2884728	2007	3.3025474	2071	3.316[illegible]601
1944	3.2886963	2008	3.3027637	2072	3.3163897
1945	3.2889196	2009	3.3029799	2073	3.3165993
1946	3.2891428	2010	3.3031961	2074	3.3168087
1947	3.2893659	2011	3.3034122	2075	3.3170181
1948	3.2895889	2012	3.3036280	2076	3.3172273
1949	3.2898118	2013	3.3038438	2077	3.3174365
1950	3.2900346	2014	3.3040595	2078	3.3176455
1951	3.2902573	2015	3.3042751	2079	3.3178545
1952	3.2904798	2016	3.3044905	2080	3.3180633
1953	3.2907022	2017	3.3047059	2081	3.3182721
1954	3.2909246	2018	3.3049212	2082	3.3184807
1955	3.2911468	2019	3.3051363	2083	3.3186893
1956	3.2913688	2020	3.3053514	2084	3.3188977
1957	3.2915908	2021	3.3055663	2085	3.3191061
1958	3.2918127	2022	3.3057812	2086	3.3193143
1959	3.2920344	2023	3.3059959	2087	3.3195224
1960	3.2922561	2024	3.3062105	2088	3.3197305
1951	3.2924776	2025	3.3064250	2089	3.3199384
1962	3.2926990	2026	3.3066394	2090	3.3201463
1953	3.2929203	2027	3.3068537	2091	3.3203540
1964	3.2931415	2028	3.3070679	2092	3.3205617
1965	3.2933626	2029	3.3072820	2093	3.3207692
1966	3.2935835	2030	3.3074960	2094	3.3209767
1967	3.2938044	2031	3.3077099	2095	3.3211840
1968	3.2940251	2032	3.3079237	2096	3.3213913
1969	3.2942457	2033	3.3081374	2097	3.3215984
1970	3.2944662	2034	3.3083509	2098	3.3218055
1971	3.2946866	2035	3.3085644	2099	3.3220124
1972	3.2949069	2036	3.3087778	2100	3.3222193
1973	3.2951271	2037	3.3089910	2101	3.3224260
1974	3.2953471	2038	3.3092042	2102	3.3216327
1975	3.2955671	2039	3.3094172	2103	3.3228393
1976	3.2957869	2040	3.3096302	2104	3.3230457
1977	3.2960067	2041	3.3098430	2105	3.3232521
1978	3.2962263	2042	3.3100557	2106	3.3234584
1979	3.2964458	2043	3.3102684	2107	3.3236645
1980	3.2966652	2044	3.3104809	2108	3.3238706
1981	3.2968845	2045	3.3106933	2109	3.3240766
1982	3.2971036	2046	3.3109056	2110	3.3242825
1983	3.2973227	2047	3.3111178	2111	3.3244882

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
2111	3.3244882	2175	3.3374593	2239	3.3500541
2112	3.3246939	2176	3.3376589	2240	3.3502480
2113	3.3248995	2177	3.3378584	2241	3.3504419
2114	3.3251050	2178	3.3380579	2242	3.3506356
2115	3.3253104	2179	3.3382572	2243	3.3508293
2116	3.3255157	2180	3.3384565	2244	3.3510228
2117	3.3257209	2181	3.3386557	2245	3.3512163
2118	3.3259260	2182	3.3388547	2246	3.3514098
2119	3.3261310	2183	3.3390537	2247	3.3516031
2120	3.3263359	2184	3.3392526	2248	3.3517963
2121	3.3265407	2185	3.3394514	2249	3.3519895
2122	3.3267454	2186	3.3396501	2250	3.3521825
2123	3.3269504	2187	3.3398488	2251	3.3525755
2124	3.3271545	2188	3.3800473	2252	3.3525684
2125	3.3273589	2189	3.3402458	2253	3.3527612
2126	3.3275633	2190	3.3404441	2254	3.3529539
2127	3.3277675	2191	3.3406424	2255	3.3531465
2128	3.3279716	2192	3.3408405	2256	3.3533391
2129	3.3281757	2193	3.3410386	2257	3.3535316
2130	3.3283796	2194	3.3412366	2258	3.3537239
2131	3.3285834	2195	3.3414345	2259	3.3539162
2132	3.3287872	2196	3.3416323	2260	3.3541084
2133	3.3289909	2197	3.3418301	2261	3.3540006
2134	3.3291944	2198	3.3420277	2262	3.3544926
2135	3.3293979	2199	3.3422252	2263	3.3546846
2136	3.3296012	2200	3.3424227	2264	3.3548764
2137	3.3298045	2201	3.3426200	2265	3.3550682
2138	3.3300077	2202	3.3428173	2266	3.3552599
2139	3.3302108	2203	3.3430145	2267	3.3554515
2140	3.3304138	2204	3.3432116	2268	3.3556430
2141	3.3306167	2205	3.3434086	2260	3.3558345
2142	3.3308195	2206	3.3436055	2270	3.3567259
2143	3.3310222	2207	3.3438023	2271	3.3562171
2144	3.3312248	2208	3.3439991	2272	3.3564083
2145	3.3314273	2209	3.3441957	2273	3.3565994
2146	3.3316297	2210	3.3443923	2274	3.3567905
2147	3.3318320	2211	3.3445887	2275	3.3569814
2148	3.3320343	2212	3.3447851	2276	3.3571723
2149	3.3322364	2213	3.3449814	2277	3.3573630
2150	3.3324385	2214	3.3451776	2278	3.3575537
2151	3.3326404	2215	3.3453737	2279	3.3577443
2152	3.3328423	2216	3.3455698	2280	3.3579348
2153	3.3330440	2217	3.3457657	2281	3.3581253
2154	3.3332457	2218	3.3459615	2282	3.3583156
2155	3.3334473	2219	3.3461573	2283	3.3585059
2156	3.3336488	2220	3.3463530	2284	3.3586961
2157	3.3338501	2221	3.3465486	2285	3.3588862
2158	3.3340514	2222	3.2467441	2286	3.3590762
2159	3.3342526	2223	3.3469395	2287	3.3592662
2160	3.3344537	2224	3.3471348	2288	3.3594560
2161	3.3346548	2225	3.3473330	2289	3.3596458
2162	3.3348557	2226	3.3475252	2290	3.3598355
2163	3.3350565	2227	3.3477202	2291	3.3600251
2164	3.3353572	2228	3.3479152	2292	3.3602146
2165	3.3354679	2229	3.3481101	2293	3.3604041
2166	3.3356585	2230	3.3483049	2294	3.3605934
2167	3.3358589	2231	3.3484996	2295	3.3607827
2168	3.3360593	2232	3.3486942	2296	3.3609719
2169	3.3362596	2233	3.3488887	2297	3.3611610
2170	3.3364597	2234	3.3490832	2298	3.3613500
2171	3.3366598	2235	3.3492775	2299	3.3615390
2172	3.3368598	2236	3.3494718	2300	3.3617278
2173	3.3370597	2237	3.3496660	2301	3.3619166
2174	3.3372595	2238	3.3498601	2302	3.3621053
2175	3.3374593	2239	3.3500541	2303	3.36229[illegible]3

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
2204	3.3432116	2268	3.3556430	2332	3.3677285
2205	3.3434086	2269	3.3558345	2333	3.3679147
2206	3.3436055	2270	3.3560259	2334	3.3681008
2207	3.3438023	2271	3.3562171	2335	3.3682869
2208	3.3439991	2272	3.3564083	2336	3.3684728
2209	3.3441957	2273	3.3565994	2337	3.3686587
2210	3.3443923	2274	3.3567905	2338	3.3688445
2211	3.3445887	2275	3.3569814	2339	3.3690302
2212	3.3447851	2276	3.3571323	2340	3.3692159
2213	3.3449814	2277	3.3573630	2341	3.3694014
2214	3.3451776	2278	3.3575537	2342	3.3695869
2215	3.3453737	2279	3.3577443	2343	3.3697723
2216	3.3455698	2280	3.3579348	2344	3.3699576
2217	3.3457657	2281	3.3581253	2345	3.3701428
2218	3.3459615	2282	3.3583156	2346	3.3703280
2219	3.3461573	2283	3.3585059	2347	3.3705231
2220	3.3463530	2284	3.3586961	2348	3.3706981
2221	3.3465486	2285	3.3588861	2349	3.3708830
2222	3.3467441	2286	3.3590762	2350	3.3710679
2223	3.3469395	2287	3.3592662	2351	3.3712526
2224	3.3471348	2288	3.3594560	2352	3.3714373
2225	3.3473300	2289	3.3596458	2353	3.3716219
2226	3.3475252	2290	3.3598355	2354	3.3718065
2227	3.3477202	2291	3.3600251	2355	3.3719909
2228	3.3479152	2292	3.3602146	2356	3.3721753
2229	3.3481101	2293	3.3604041	2357	3.3723596
2230	3.3483049	2294	3.3605934	2358	3.3725438
2231	3.3484996	2295	3.3607827	2359	3.3727279
2232	3.3486942	2296	3.3609719	2360	3.3729120
2233	3.3488887	2297	3.3611610	2361	3.3730960
2234	3.3490832	2298	3.3613500	2362	3.3732799
2235	3.3492775	2299	3.3615390	2363	3.3734637
2236	3.3494718	2300	3.3617278	2364	3.3736475
2237	3.3496660	2301	3.3619166	2365	3.3738311
2238	3.3498801	2302	3.3621053	2366	3.3740147
2239	3.3500541	2303	3.3622639	2367	3.3741983
2240	3.3502480	2304	3.3624825	2368	3.3743817
2241	3.3504419	2305	3.3626709	2369	3.3745651
2242	3.3506356	2306	3.3628593	2370	3.3747483
2243	3.3508293	2307	3.3630476	2371	3.3749316
2244	3.3510228	2308	3.3632358	2372	3.3751147
2245	3.3512163	2309	3.3634239	2373	3.3752977
2246	3.3514098	2310	3.3636120	2374	3.3754807
2247	3.3516031	2311	3.3637999	2375	3.3756636
2248	3.3517963	2312	3.3639878	2376	3.3758465
2249	3.3519895	2313	3.3641756	2377	3.3760292
2250	3.3521825	2314	3.3643633	2378	3.3762118
2251	3.3523755	2315	3.3645510	2379	3.3763944
2252	3.3525684	2316	3.3647386	2380	3.3765769
2253	3.3527612	2317	3.3649260	2381	3.3767594
2254	3.3529539	2318	3.3651134	2382	3.3769418
2255	3.3531465	2319	3.3653007	2383	3.3771240
2256	3.3533391	2320	3.3654880	2384	3.3773062
2257	3.3535316	2321	3.3656751	2385	3.3774884
2258	3.3537239	2322	3.3658622	2386	3.3776704
2259	3.3539162	2323	3.3660492	2387	3.3778524
2260	3.3541084	2324	3.3662361	2388	3.3780343
2261	3.3543006	2325	3.3664230	2389	3.3782161
2262	3.3544926	2326	3.3666097	2390	3.3783979
2263	3.3546846	2327	3.3667964	2391	3.3785796
2264	3.3548764	2328	3.3669830	2392	3.3787612
2265	3.3550682	2329	3.3671695	2393	3.3789427
2266	3.3552599	2330	3.3673559	2394	3.3791241
2267	3.3554515	2331	3.3675423	2395	3.3793055
2268	3.3556430	2332	3.3657285	2356	3.3794868

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
2396	3.3794868	2460	3.3909351	2524	3.4020893
2397	3.3796680	2461	3.3911116	2525	3.4022614
2398	3.3798492	2462	3.3912880	2526	3.4024333
2399	3.3800302	2463	3.3914644	2527	3.4026052
2400	3.3802112	2464	3.3916407	2528	3.4027771
2401	3.3803922	2465	3.3918169	2529	3.4029488
2402	3.3805730	2466	3.3919931	2530	3.4031205
2403	3.3807538	2467	3.3921691	2531	3.4032921
2404	3.3809345	2468	3.3923452	2532	3.4034637
2405	3.3811151	2469	3.3925211	2533	3.4036352
2406	3.3812956	2470	3.3926969	2534	3.4038066
2407	3.3814761	2471	3.3928727	2535	3.4039780
2408	3.3816565	2472	3.3930485	2536	3.4041492
2409	3.3818368	2473	3.3932241	2537	3.4043205
2410	3.3820170	2474	3.3933997	2538	3.4044916
2411	3.3821972	2475	3.3935752	2539	3.4046627
2412	3.3823773	2476	3.3937506	2540	3.4048337
2413	3.3825573	2477	3.3939260	2541	3.4050047
2414	3.3827373	2478	3.3941013	2542	3.4051755
2415	3.3829171	2479	3.3942765	2543	3.4053468
2416	3.3830969	2480	3.3944517	2544	3.4055171
2417	3.3832766	2481	3.3946268	2545	3.4056878
2418	3.3833563	2482	3.3948018	2546	3.4058584
2419	3.3836359	2483	3.3949767	2547	3.4060289
2420	3.3838154	2484	3.3951516	2548	3.4061994
2421	3.3839948	2485	3.3953264	2549	3.4063698
2422	3.3841741	2486	3.3955011	2550	3.4065402
2423	3.3843534	2487	3.3956758	2551	3.4067105
2424	3.3845326	2488	3.3958504	2552	3.4068807
1425	3.3847117	2489	3.3960249	2553	3.4070508
2426	3.3848908	2490	3.3961993	2554	3.4072209
2427	3.3850698	2491	3.3963737	2555	3.4073909
2428	3.3852487	2492	3.3965480	2556	3.4075608
2429	3.3854275	2493	3.3967223	2557	3.4077307
2430	3.3856063	2494	3.3968964	2558	3.4079005
2431	3.3857850	2495	3.3970705	2559	3.4080703
2432	3.3859636	2496	3.3972446	2560	3.4082400
2433	3.3861421	2497	3.3974185	2561	3.4084096
2434	3.3863206	2498	3.3975924	2562	3.4085791
2435	3.3864990	2499	3.3977662	2563	3.4087486
2436	3.3866773	2500	3.3979400	2564	3.4089180
2437	3.3868555	2501	3.3981137	2565	3.4090874
2438	3.3870337	2502	3.3982873	2566	3.4092567
2439	3.3872118	2503	3.3984608	2567	3.4094259
2440	3.3873898	2504	3.3986343	2568	3.4095950
2441	3.3875678	2505	3.3988077	2569	3.4097641
2442	3.3877457	2506	3.3989811	2570	3.4099331
2443	3.3879235	2507	3.3991543	2571	3.4101021
2444	3.3881012	2508	3.3993275	2572	3.4102710
2445	3.3882789	2509	3.3995007	2573	3.4104398
2446	3.3884565	2510	3.3996737	2574	3.4106085
2447	3.3886340	2511	3.3998467	2575	3.4107772
2448	3.3888114	2512	3.4000196	2576	3.4109459
2449	3.3889888	2513	3.4001925	2577	3.4111144
2450	3.3891661	2514	3.4003653	2578	3.4112829
2451	3.3893433	2515	3.4005380	2579	3.4114513
2452	3.3895205	2516	3.4007106	2580	3.4116197
2453	3.3896975	2517	3.4008832	2581	3.4117880
2454	3.3898746	2518	3.4010557	2582	3.4119562
2455	3.3900515	2519	3.4012282	2583	3.4122244
2456	3.3902284	2520	3.4014005	2584	3.4122325
2457	3.3904052	2521	3.4015728	2585	3.4124605
2458	3.3905819	2522	3.4017451	2586	3.4126285
2459	3.3907585	2523	3.4019173	2587	3.4127964
2460	3.3909351	2524	3.4020893	2588	3.4129643

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
2588	3.4129643	2652	3.4235735	2715	3.4337698	2779	3.4438885	2843	3.4537769	2907	3.4634450
2589	3.4131320	2653	3.4237372	2716	3.4339298	2780	3.4440448	2844	3.4539296	2908	3.4635944
2590	3.4132998	2654	3.4239009	2717	3.4340896	2781	3.4442010	2845	3.4540823	2909	3.4637437
2591	3.4134673	2655	3.4240645	2718	3.4342494	2782	3.4443571	2846	3.4542349	2910	3.4638930
2592	3.4136350	2656	3.4242281	2719	3.4344092	2783	3.4445132	2847	3.4543875	2911	3.4640422
2593	3.4138025	2657	3.4243916	2720	3.4345689	2784	3.4446692	2848	3.4545400	2912	3.4641914
2594	3.4139700	2658	3.4245550	2721	3.4347285	2785	3.4448252	2849	3.4546924	2913	3.4643405
2595	3.4141374	2659	3.4247183	2722	3.4348881	2786	3.4449811	2850	3.4548449	2914	3.4644895
2596	3.4143047	2660	3.4248816	2723	3.4350476	2787	3.4451370	2851	3.4549972	2915	3.4646386
2597	3.4144719	2661	3.4250449	2724	3.4352071	2788	3.4452928	2852	3.4551495	2916	3.4647875
2598	3.4146391	2662	3.4252080	2725	3.4353665	2789	3.4454485	2853	3.4553018	2917	3.4649364
2599	3.4148063	2663	3.4253712	2726	3.4355258	2790	3.4456042	2854	3.4554540	2918	3.4650853
2600	3.4149733	2664	3.4255342	2727	3.4356851	2791	3.4457598	2855	3.4556061	2919	3.4652341
2601	3.4151404	2665	3.4256972	2728	3.4358444	2792	3.4459154	2856	3.4557582	2920	3.4653828
1602	3.4153073	2666	3.4258601	2729	3.4360035	2793	3.4460709	2857	3.4559102	2921	3.4655316
2603	3.4154742	2667	3.4260230	2730	3.4361626	2794	3.4462264	2858	3.4560622	2922	3.4656802
2604	3.4156410	2668	3.4261858	2731	3.4363217	2795	3.4463818	2859	3.4562141	2923	3.4658288
2605	3.4158077	2669	3.4263486	2732	3.4364807	2796	3.4465372	2860	3.4563660	2924	3.4659774
2606	3.4159744	2670	3.4265113	2733	3.4366396	2797	3.4466925	2861	3.4565179	2925	3.4661259
2607	3.4161410	2671	3.4266739	2734	3.4367985	2898	3.4468477	2862	3.4566696	2926	3.4662743
2608	3.4163076	2672	3.4268365	2735	3.4365573	2899	3.4470029	2863	3.4568213	2927	3.4664227
2609	3.4164741	2673	3.4269990	2736	3.4371161	2800	3.4477580	2864	3.4569730	2928	3.4665711
2610	3.4166405	2674	3.4271614	2737	3.4372748	2801	3.4473131	2865	3.4571246	2929	3.4667194
2611	3.4168069	2675	3.4273238	2738	3.4374334	2802	3.4474681	2866	3.4572702	2930	3.4668676
2612	2.4169732	2676	3.4274861	2739	3.4375920	2803	3.4476231	2867	3.4574277	2931	3.4670158
2613	3.4171394	2677	3.4276484	2740	3.4377506	2804	3.4477780	2868	3.4575791	2932	3.4671640
2614	3.4173056	2678	3.4278106	2741	3.4379090	2805	3.4479329	2869	3.4577305	2933	3.4673121
2615	3.4174717	2679	3.4279726	2742	3.4380674	2806	3.4480877	2870	3.4578819	2934	3.4674601
2616	3.4176377	2680	3.4281348	2743	3.4382258	2807	3.4482424	2871	3.4580332	2935	3.4676081
2617	3.4178037	2681	3.4282968	2744	3.4383841	2808	3.4483971	2872	3.4581844	2936	3.4677560
2618	3.4179696	2682	3.4284588	2745	3.4385423	2809	3.4485517	2873	3.4583356	2937	3.4679039
2619	3.4181355	2683	3.4286207	2746	3.4387005	2810	3.4487063	2874	3.4584867	2938	3.4680518
2620	3.4183013	2684	3.4287825	2747	3.4388587	2811	3.4488608	2875	3.4586378	2939	3.4681996
2621	3.4184670	2685	3.4289443	2748	3.4390167	2812	3.4490153	2876	3.4587889	2940	3.4683473
2622	3.4186327	2686	3.4291060	2749	3.4391747	2813	3.4491697	2877	3.4589399	2941	3.4684950
2623	3.4187983	2687	3.4292677	2750	3.4393327	2814	3.4493241	2878	3.4590908	2942	3.4686427
2624	3.4189638	2688	3.4294293	2751	3.4394906	2815	3.4494784	2879	3.4592417	2943	3.4687903
2625	3.4191293	2689	3.4295908	2752	3.4396484	2816	3.4496326	2880	3.4593925	2944	3.4689378
2626	3.4192947	2690	3.4297523	2753	3.4398062	2817	3.4497868	2881	3.4595433	2945	3.4690853
2627	3.4194601	2691	3.4299137	2754	3.4399639	2818	3.4499410	2882	3.4596940	2946	3.4692327
2628	9.4196254	2692	3.4300751	2755	3.4401216	2819	3.4500951	2883	3.4598446	2947	3.4693801
2629	3.4197906	2693	3.4302364	2756	3.4402792	2820	3.4502491	2884	3.4599953	2948	3.4695275
2630	3.4199557	2694	3.4303976	2757	3.4404368	2821	3.4504031	2885	3.4601458	2949	3.4696748
2631	3.4201208	2695	3.4305588	1758	3.4405943	2822	3.4505570	2886	3.4602963	2950	3.4698220
2632	3.4202859	2696	3.4307199	2759	3.4407517	2823	3.4507109	2887	3.4604468	2951	3.4699692
2633	3.4204509	2697	3.4308809	2760	3.4409091	2824	3.4508647	2888	3.4605972	2952	3.4701163
2634	3.4206158	2698	3.4310419	2761	3.4410664	2825	3.4510184	2889	3.4607475	2953	3.4702634
2635	3.4207806	2699	3.4312029	2762	3.4412237	2826	3.4511721	2890	3.4608978	2954	3.4704105
2636	3.4209454	2700	3.4313638	2763	3.4413809	2827	3.4513258	2891	3.4610481	2955	3.4705575
2637	3.4211101	2701	3.4315246	2764	3.4415380	2828	3.4514794	2892	3.4611983	2956	3.4707044
2638	3.4212748	2702	3.4316853	2765	3.4416951	2829	3.4516329	2893	3.4613484	2957	3.4708513
2639	3.4214394	2703	3.4318460	2766	3.4418522	2830	3.4517864	2894	3.4614985	2958	3.4709982
2640	3.4216039	2704	3.4320067	2767	3.4420092	2031	3.4519399	2895	3.4616486	2959	3.4711450
2641	3.4217684	2705	3.4321673	2768	3.4421661	2832	3.4520932	2896	3.4617986	2960	3.4712917
2642	3.4219328	2706	3.4323278	2769	3.4423229	2833	3.4522466	2897	3.4619485	2961	3.4714384
2643	3.4220972	2707	3.4324882	2770	3.4424798	2834	3.4523998	2898	3.4620984	2962	3.4715851
2644	3.4222614	2708	3.4326487	2771	3.4426365	2835	3.4525531	2899	3.4622482	2963	3.4717317
2645	3.4224257	2709	3.4328090	2772	3.4427932	2836	3.4527062	2900	3.4623980	2964	3.4718782
2646	3.4225898	2710	3.4329693	2773	3.4429499	2837	3.4528593	2901	3.4625477	2965	3.4720247
2647	3.4227539	2711	3.4331295	2774	3.4431065	2838	3.4530124	2902	3.4626974	2966	3.4721711
2648	3.4229180	2712	3.4332897	2775	3.4432630	2839	3.4531654	2903	3.4628470	2967	3.4723175
2649	3.4230820	2712	3.4332897	2776	3.4434195	2840	3.4533183	2904	3.4629966	2968	3.4724639
2650	3.4232459	2713	3.4334498	2777	3.4435759	2841	3.4534712	2905	3.4631461	2969	3.4726102
2651	3.4234097	2714	3.4336098	2778	3.4437322	2842	3.4536241	2906	3.4632956	2970	3.4727564
2652	3.4235735	2715	3.4337698	2779	3.4438885	2843	3.4537769	2907	3.4634450	2971	3.4729027

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
2970	3.4727564	3034	3.4820156	3098	3.4910814	3162	3.4999619	3226	3.5086644	3291	3.5173279
2971	3.4729027	3035	3.4821587	3099	3.4912216	3163	3.5000992	3227	3.5087990	3292	3.5174598
2972	3.4730488	3036	3.4823018	3100	3.4913617	3164	3.5002365	3228	3.5099335	3293	3.5175917
2973	3.4731949	3037	3.4824448	3101	3.4915018	3165	3.5003737	3229	3.5090680	3294	3.5177236
2974	3.4733410	3038	3.4825878	3102	3.4916418	3166	3.5005109	2230	3.5092025	3295	3.5178554
2975	3.4734870	3039	3.4827307	3103	3.4917818	3167	3.5006481	3231	3.5093370	3296	3.5179872
2976	3.4736329	3040	3.4828736	3104	3.4919217	3168	3.5007852	3232	3.5094713	3297	3.5181189
2977	3.4737788	3041	3.4830164	3105	3.4920616	3169	3.5009222	3233	3.5096057	3298	3.5182506
2978	3.4739247	3042	3.4831592	3106	3.4922014	3170	3.5010593	3234	3.5097400	3299	3.5183823
2979	3.4740705	3043	3.4833019	3107	3.4923413	3171	3.5011962	3235	3.5098743	3300	3.5185139
2980	3.4742163	3044	3.4883446	3108	3.4924810	3172	3.5013332	3236	3.5100085	3301	3.5186455
2981	3.4743620	3045	3.4835873	3109	3.4926207	3173	3'5014701	3237	3.5101427	3302	3.5187771
2982	3.4745076	3046	3.4837299	3110	3.4927604	3174	3.5016069	3238	3.5102768	3303	3.5189486
2983	3.4746533	3047	3.4838725	3111	3.4929000	3175	3.5017437	3239	3.5104109	3304	3.5190400
2984	3.4747988	3048	3.4840150	3112	3.4930396	3176	3.5018805	3240	3.5105450	3305	3.5191715
2985	3.4749443	3049	3.4841574	3113	3.4931791	3177	3.5020172	3241	3.5106790	3306	3.5193028
2986	3.4750898	3050	3.4842998	3114	3.4833186	1178	3.5021539	3242	3.5108130	3307	3.5194342
2987	3.4752352	3051	3.4844422	3115	3.4934580	3179	3.5022905	3243	3.5109469	3308	3.5195655
2988	3.4753806	3052	3.4845845	3116	3.4935974	3180	3.5024271	3244	3.5110802	3309	3.5196968
2989	3.4755259	3053	3.4847268	3117	3.4937368	3181	3.5025637	3245	3.5112147	3310	3.5198289
2990	3.4756112	3054	3.4848690	3118	3.4938761	3182	3.5027002	3246	3.5113485	3311	3.5196592
2991	3.4758164	3055	3.4850112	3119	3.4940154	3183	3.5028366	3247	3.5114823	3312	3.5200903
2992	3.4759616	3056	3.4851533	3120	3.4941546	3184	3.5029731	3248	3.5116160	3313	3.5202214
2993	3.4761067	3057	3.485[illegible]54	3121	3.4942938	3185	3.5031094	3249	3.5117497	3314	3.5203525
2994	3.4762518	3058	3.4854375	3122	3.4944329	3186	3.5032458	3250	3.5118834	3315	3.5204835
2995	3.4763968	3059	3.4855795	3123	3.4945720	3187	3.5033821	3251	3.5120170	3316	3.5206145
2996	3.4765418	3060	3.4857214	3124	3.4947110	3188	3.5035183	2252	3.5121509	3317	3.5207455
2997	3.4766867	3061	3.4858633	3125	3.4948500	3189	3.5036545	3253	3.5122841	3318	3.5208764
2998	3.4768316	3062	3.4860052	3126	3.4949890	3190	3.5037907	3254	3.5124175	3319	3.5210073
2999	3.4769765	3063	3.4861470	3127	3.4951279	3191	3.5039268	3255	3.5125510	3320	3.5211381
3000	3.4771212	3064	3.4862888	3128	3.4952667	3192	3.5040629	3256	3.5126844	3321	3.5212689
3001	3.4772660	3065	3.4864305	3129	3.4954056	3193	3.5041989	3257	3.5128178	3322	3.5213996
3002	3.4774107	3066	3.4865721	3130	3.4955443	3194	3.5043349	3258	3.5129511	3323	3.5215303
3003	3.4775553	3067	3.4867138	3131	3.4956831	3195	3.5044709	3259	3.5130844	3324	3.5216610
3004	3.4776999	3068	3.4868554	3132	3.4958218	3196	3.5046068	3260	3.5132176	3325	3.5217916
3005	3.4778445	3069	3.4869969	3133	3.4959604	3197	3.5047426	3261	3.5133508	3326	3.5219222
3006	3.4779890	3070	3.4871384	3134	3.4960990	3198	3.5048785	3262	3.5134840	3327	3.5220528
3007	3.4781334	3071	3.4872798	3135	3.4962375	3199	2.5050142	3263	3.5136171	3328	3.5221833
3008	3.4782778	3072	3.4874212	3136	3.4963761	3200	3.5051500	3364	3.5137501	3329	3.5223138
3009	3.4784222	3073	3.4875626	3137	3.4965145	3201	3.5052857	3265	3.5138832	3330	3.5224422
3010	3.4785665	3074	3.4877039	3138	3.4966529	3202	3'5054213	3266	3.5140162	3331	3.5225746
3011	3.4787108	3075	3.2878451	3139	3.4967913	3203	3.5055569	3267	3.5141491	3332	3.5227050
3012	3.4788550	3076	3.4879863	3140	3.4969296	3204	3.5056925	3268	3.5142820	3333	3.5228355
3013	3.4789991	3077	3.4881275	3141	3.4970679	3205	3.5058280	3269	3.5144149	3334	3.5229656
3014	3.4791432	3078	3.4882686	3142	3.4972062	3206	3.5059635	3270	3.5145478	3335	3.5230958
3015	3.4792873	3079	3.4884097	3143	3.4973444	3207	3.5060990	3271	3.5146805	3336	3.5232260
3016	3.4794313	3080	3.4885507	3144	3.4974825	3208	3.5062344	3272	3.5148133	3337	3.5233562
3017	3.4795753	3081	3.4886917	3145	3.4976206	3209	3.5063697	3273	3.5149460	3338	3.5234863
3018	3.4797192	3082	3.4888326	3146	3.4977787	3210	3.5065050	3274	3.5150787	3339	3.5236164
3019	3.4798631	3083	3.4889735	3147	3.4978967	3211	3.5066403	3275	3.5152113	3340	3.5237465
3020	3.4800069	3084	3.4891144	3148	3.4980347	3212	3.5067755	3276	3.5153439	3341	3.5238765
3021	3.4801507	3085	3.4892552	3149	3.4981727	3213	3.5069107	3277	3.5154764	3342	3.5240064
3022	3.4802945	3086	3.4893959	3150	3.4983106	3214	3.5070459	3278	3.5156089	3343	3.5241364
3023	3.4804381	3087	3.4895366	3151	3.4984484	3215	3.5071810	3279	3.5157414	3344	3.5242663
3024	3.4805818	3088	3.4896773	3152	3.4985862	3216	3.5073160	3280	3.5158738	3345	3.5243961
3025	3.4807254	3089	3.4898179	3153	3.4987240	3217	3.5074511	3281	3.5160062	3346	3.5245259
3026	3.4808689	3090	3.4899585	3154	3.4988617	3218	3.5075860	3282	3.5161386	3357	3.5246557
3027	3.4810124	3091	3.4900990	3155	3.4989994	3219	3.5077210	3283	3.5162709	3348	3.5247854
3028	3.4811559	3092	3.4902395	3156	3.4991370	3220	3.5078559	3284	3.5164031	3349	3.5249151
3029	3.4812993	3093	3.4903799	3157	3.2992746	3221	3.5079907	3285	3.5165354	3350	3.5250448
3030	3.4814426	3094	3.4905203	3158	3.4994121	3222	3.5081255	3286	3.5166676	3351	3.5251744
3031	3.4815859	3095	3.4906607	3159	3.4995496	3223	3.5082603	3287	3.5167997	3352	3.5253040
3032	3.4817292	3096	3.4908009	3160	3.4996871	3224	3.5083950	3288	3.5129318	3353	3.5254335
3033	3.4818724	3097	3.4909412	3161	3.4998245	3225	3.5085297	3289	3.5170639	3354	3.5255631
3034	3.4820156	3098	3.4910814	3162	3.4999619	3226	3.5086644	3290	3.5171951	3355	3.5256925

3356

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
3355	3.5256925	3419	3.5338991	3483	3.5419535	3547	3.5498612	3611	3.5576275	3675	3.5652573
3356	3.5258219	3420	3.5340261	3484	3.5420781	3548	3.5499836	3612	3.5577477	3676	3.5653755
3357	3.5259513	3421	3.5341531	3485	3.5422028	3549	3.5501060	3613	3.5578680	3677	3.5654936
3358	3.5260807	3422	3.5342800	3486	3.5423274	3550	3.5502283	3614	3.5579881	3678	3.5656117
3359	3.5262100	3423	3.5344069	348	3.5424519	3551	3.5503507	3615	3.5581083	3679	3.5657298
3360	3.5263393	3424	3.5345338	3488	3.5425765	3552	3.5504730	3616	3.5582284	3680	3.5658478
3361	3.5264685	3425	3.5346606	3489	3.5427010	3553	3.5505952	3617	3.5583485	3681	3.5659658
3362	3.5265977	3426	3.5347874	3490	3.5428254	3554	3.5507174	3618	3.5584686	3682	3.5660838
3363	3.5267269	3427	3.5349141	3491	3.5429498	3555	3.5508396	3619	3.5585886	3683	3.5662017
3364	3.5268560	3428	3.5350408	3492	3.5430742	3556	3.5509618	3620	3.5586086	3684	3.5663196
3365	3.5269851	3429	3.5351675	3493	3.5431986	3557	3.5510839	3621	3.5588285	3685	3.5664375
3366	3.5271141	3430	3.5352941	3494	3.5433229	3558	3.5512059	3622	3.5589484	3686	3.5665553
3367	3.5272431	3431	3.5354207	3495	3.5434472	3559	3.5513280	3623	3.5590683	3687	3.5666731
3368	3.5273721	3432	3.5355473	3496	3.5435714	3560	3.5514050	3624	3.5591882	3688	3.5667909
3369	3.5275010	3433	3.5356738	3497	3.5436956	3561	3.5515720	3625	3.5593080	3689	3.5669087
3370	3.5276299	3434	3.5358003	3498	3.5438198	3562	3.5516939	3626	3.5594278	3690	3.5670264
3371	3.5277588	3435	3.5359267	3499	3.5436439	3563	3.5518158	3627	3.5595476	3691	3.5671440
3372	3.5278876	3436	3.5360532	3500	3.5440680	3564	3.5519377	3628	3.5596673	3692	3.5672617
3373	3.5280163	3437	3.5361795	3501	3.5441921	3565	3.5520595	3629	3.5597870	3693	3.5673793
3374	3.5281452	3438	3.5363059	3502	3.5443161	3566	3.5521813	3630	3.5599066	3694	3.5674969
3375	3.5281738	3439	3.5364322	3503	3.5444401	3567	3.5523031	3631	3.5600262	3695	3.5676144
3376	3.5284024	3440	3.5365584	3504	3.5445641	3568	3.5524248	3632	3.5601458	3696	3.5677320
3377	3.5285311	3441	3.5366847	3505	3.5446880	3569	3.5525465	3633	3.5602654	3697	3.5678494
3378	3.5286596	3442	3.5368109	3506	3.5448119	3570	3.5526682	3634	3.5603849	3698	3.5679669
3379	3.5287882	3443	3.5369370	3507	3.5449358	3571	3.5527898	3635	3.5605044	3699	3.5680843
3380	3.5289167	3444	3.5370631	3508	3.5450596	3572	3.5529114	3636	3.5606239	3700	3.5682017
3381	3.5290452	3445	3.5371892	3509	3.5451834	3573	3.5530330	3637	3.5607433	3701	3.5683191
3382	3.5291736	3446	3.5373153	3510	3.5453071	3574	3.5531545	3638	3.5608627	3702	3.5684264
3383	3.5293020	3447	3.5374413	3511	3.5454308	3575	3.5533760	3639	3.5609820	3703	3.5685137
3384	3.5294303	3448	3.5375672	3512	3.5455545	3576	3.5533975	3640	3.5611014	3704	3.5686710
3385	3.5295587	3449	3.5376932	3513	3.5456781	3577	3.5535189	3641	3.5612207	3705	3.5687882
3386	3.5296869	3450	3.5378191	3514	3.5458018	3578	3.5536403	3642	3.5613399	3706	3.5689054
3387	3.5298152	3451	3.5379450	3515	3.5459253	3579	3.5537617	3643	3.5614592	3707	3.5690226
3388	3.5299434	3452	3.5380708	3516	3.5460489	3580	3.5538830	3644	3.5615784	3708	3.5691397
3389	3.5300716	3453	3.5381966	3517	3.5461724	3581	3.5540043	3645	3.5616975	3709	3.5692568
3390	3.5301997	3454	3.5383223	3518	3.5462958	3582	3.5541256	3646	3.5618167	3710	3.5693739
3391	3.5303278	3455	3.5384481	3519	3.5464193	3583	3.5542468	3647	3.5619358	3711	3.5694910
3392	3.5304558	3456	3.5385737	3520	3.5465427	3584	3.5543680	3648	3.5620548	3712	3.5696080
3393	3.5305839	3457	3.5386994	3521	3.5466660	3585	3.5544892	3649	3.5621739	3713	3.5697249
3394	3.5307118	3458	3.5388250	3522	3.5467894	3586	3.5546103	3650	3.5622929	3714	3.5698419
3395	3.5308398	3459	3.5389506	3523	3.5469126	3587	3.5547314	3651	3.5624118	3715	3.5699588
3396	3.5309677	3460	3.5390761	3524	3.5470359	3588	3.5548524	3652	3.5625308	3716	3.5700757
3397	3.5310955	3461	3.5392016	3535	3.5471591	3589	3.5549735	3653	3.5626497	3717	3.5701926
3398	3.5312234	3462	3.5393271	3526	3.5472823	3590	3.5550944	3654	3.5627685	3718	3.5703094
3399	3.5313512	3463	3.5394525	3527	3.5474055	3591	3.5552154	3655	3.5628874	3719	3.5704262
3400	3.5314789	3464	3.5395779	3528	3.5475286	3592	3.5553363	3656	3.5630062	3720	3.5705429
3401	3.5316066	3465	3.5397032	3529	3.5476517	3593	3.5554572	3657	3.5631250	3721	3.5706597
3402	3.5317343	3466	3.5398286	3530	3.5477747	3594	3.5555781	3658	3.5635437	3722	3.5707764
3403	3.5318619	3467	3.5399538	3531	3.5478977	3595	3.5556989	3659	3.5633624	3723	3.5708930
3404	3.5319895	3468	3.5400791	3532	3.5480207	3596	3.5558197	3660	3.5634811	3724	3.5710097
3405	3.5321171	3469	3.5402043	3533	3.5481436	3597	3.5559404	3661	3.5635997	3725	3.5711263
3406	3.5322446	3470	3.5403295	3534	3.5482665	3598	3.5560612	3662	3.5637183	3726	3.5712428
3407	3.5323721	3471	3.5404546	3535	3.5483894	3599	3.5561818	3663	3.5638369	3727	3.5713594
3408	3.5324996	3472	3.5405797	3536	3.5485123	3600	3.5563025	3664	3.5639555	3728	3.5714759
3409	3.5326270	3473	3.5407048	3537	3.5486351	3601	3.5564231	3665	3.5640740	3729	3.5715924
3410	3.5327544	3474	3.5408289	3538	3.5487578	3602	3.5565437	3666	3.5641925	3730	3.5717088
3411	3.5328817	3475	3.5409548	3539	3.5488806	3603	3.5566643	3667	3.5643109	3731	3.5718252
3412	3.5330090	3476	3.5410798	3540	3.5490033	3604	3.5567848	3668	3.5644293	3732	3.5719416
3413	3.5331363	3477	3.5412047	3541	3.5491259	3605	3.5569053	3669	3.5645477	3733	3.5720580
3414	3.5332635	3478	3.5413296	3542	3.5492486	3606	3.5570257	3670	3.5646661	3734	3.5721743
3415	3.5333907	3479	3.5414544	3543	3.5493712	3607	3.5571461	3671	3.5647844	3735	3.5722906
3416	3.5335179	3480	3.5415792	3544	3.5494937	3608	3.5572665	3672	3.5649027	3736	3.5724069
3417	3.5336450	3481	3.5417040	3545	3.5496162	3609	3.5573869	3673	3.5650209	3737	3.5725231
3418	3.5337721	3482	3.5418288	3546	3.5497387	3610	3.5575072	3674	3.5651392	3738	3.5726393
3419	3.5338991	3483	3.5419535	3547	3.5498612	3611	3.5576275	3675	3.5652573	3739	3.5727555

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
3739	3.5727555	3803	3.5801263	3867	3.5873742
3740	3.5728716	3804	3.5802405	3868	3.5874865
3741	3.5729877	3805	3.5803547	3869	3.5875987
3742	3.5731038	3806	3.5804688	3870	3.5877110
3743	3.5732198	3807	3.5805829	3871	3.5878232
3744	3.5733358	3808	3.5806969	3872	3.5879353
3745	3.5734518	3809	3.5808110	3873	3.5880475
3746	3.5735678	3810	3.5809250	3874	3.5881596
3747	3.5736837	3811	3.5810389	3875	3.5882717
3748	3.5737996	3812	3.5811529	3876	3.5883838
3749	3.5739154	3813	3.5812668	3877	3.5884958
3750	3.5740313	3814	3.5813807	3878	3.5886078
3751	3.5741471	3815	3.5814945	3879	3.5887198
3752	3.5742628	3816	3.5816084	3880	3.5888317
3753	3.5743786	3817	3.5817222	3881	3.5889436
3754	3.5744943	3818	3.5818459	3882	3.5890555
3755	3.5746099	3819	3.5819497	3883	3.5891674
3756	3.5747256	3820	3.5820634	3884	3.5892792
3757	3.5748412	3821	3.5821770	3885	3.5893910
3758	3.5749568	3822	3.5822907	3886	3.5895028
3759	3.5750723	3823	3.5824043	3887	3.5896145
3760	3.5751878	3824	3.5825179	3888	3.5897262
3761	3.5753033	3825	3.5826314	3889	3.5898379
3762	3.5754188	3826	3.5827450	3890	3.5899496
3763	3.5755342	3827	3.5828585	3891	3.5900612
3764	3.5756496	3828	3.5829719	3892	3.5901728
3765	3.5757650	3829	3.5830854	3893	3.5902844
3766	3.5758803	3830	3.5831988	3894	3.5903959
3767	3.5759956	3831	3.5833122	3895	3.5905075
3768	3.5751109	3832	3.5834255	3896	3.5906189
3769	3.5762261	3833	3.5835388	3897	3.5907304
3770	3.5763413	3834	3.5836521	3898	3.5908418
3771	3.5764565	3835	3.5837654	3899	3.5909532
3772	3.5765717	3836	3.5838786	3900	3.5910646
3773	3.5766868	3837	3.5839918	3901	3.5911759
3774	3.5768019	3838	3.5841050	3902	3.5912873
3775	3.5769169	3839	3.5842181	3903	3.5913985
3776	3.5770320	3840	3.5843312	3904	3.5915098
3777	3.5771470	3841	3.5844443	3905	3.5916210
3778	3.5771620	3842	3.5845574	3906	3.5917322
3779	3.5773769	3843	3.5846704	3907	3.5918434
3780	3.5774918	3844	3.5847834	3908	3.5919546
3781	3.5776067	3845	3.5848263	3909	3.5920657
3782	3.5777215	3846	3.5850093	3910	3.5921768
3783	3.5778363	3847	3.5851222	3911	3.5922878
3784	3.5779511	3848	3.5852351	3912	3.5923988
3785	3.5780659	3849	3.5853479	3913	3.5925098
3786	3.5781806	3850	3.5854607	3914	3.5926208
3787	3.5782953	3851	3.5855735	3915	3.5927318
3788	3.5784100	3852	3.5856863	3916	3.5928427
3789	3.5785246	3853	3.5857990	3917	3.5929536
3790	3.5786392	3854	3.5859117	3918	3.5930344
3791	3.5787538	3855	3.5860244	3919	3.5931753
3792	3.5788683	3856	3.5861370	3920	3.5932861
3793	3.5789828	3857	3.5862496	3921	3.5933968
3794	3.5790973	3858	3.5863622	3922	3.5935076
3795	3.5792118	3859	3.5864748	3923	3.5936183
3796	3.5793262	3860	3.5865873	3924	3.5937290
3797	3.5794406	3861	3.5866998	3925	3.5938397
3798	3.5795550	3862	3.5868123	3926	3.5939503
3799	3.5796693	3863	3.5869247	3927	3.5940609
3800	3.5797836	3864	3.5870371	3928	3.5941715
3801	3.5798979	3865	3.5871495	3929	3.5942820
3802	3.5800121	3866	3.5872618	3930	3.5943925
3803	3.5801263	3867	3.5873742	3931	3.5955030

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
3931	3.5945030	3995	3.6015168	4059	3.6084190
3932	3.5946135	3996	3.6016255	4060	3.6085260
3933	3.5947239	3997	3.6017341	4061	3.6086330
3934	3.5948344	3998	3.6018428	4062	3.6087399
3935	3.5949447	3999	3.6019514	4063	3.6088468
3936	3.5950551	4000	3.6020600	4064	3.6089537
3937	3.5951654	4001	3.6021685	4065	3.6090605
3938	3.5952757	4002	3.6022771	4066	3.6091674
3939	3.5953860	4003	3.6023856	4067	3.6092742
3940	3.5954962	4004	3.6024941	4068	3.6093809
3941	3.5956064	4005	3.6026025	4669	3.6094877
3942	3.5957166	4006	3.6027109	4070	3.6095944
3943	3.5958168	4007	3.6028193	4071	3.6097011
3944	3.5959369	4008	3.6029277	4072	3.6098078
3945	3.5960470	4009	3.6030361	4073	3.6099144
3946	3.5961571	4010	3.6031444	4074	3.6100210
3947	3.5962671	4011	3.6032527	4075	3.6101276
3948	3.5963771	4012	3.6033609	4076	3.6102342
3949	3.5964871	4013	3.6034692	4077	3.6103407
3950	3.5965971	4014	3.6035774	4078	3.6104472
3951	3.5967070	4015	3.6036855	4079	3.6105537
3952	3.5968169	4016	3.6037937	4080	3.6106602
3953	3.5969268	4017	3.6039018	4081	3.6107666
3954	3.5970367	4018	3.6040099	4082	3.6108730
3955	3.5971465	4019	3.6041180	4083	3.6109794
3956	3.5972563	4020	3.6042261	4084	3.6110857
3957	3.5973660	4021	3.6043341	4085	3.6111921
3958	3.5974758	4022	3.6044421	4086	3.6112984
3959	3.5975855	4023	3.6045500	4087	3.6114046
3960	3.5976952	4024	3.6046580	4088	3.6115109
3961	3.5958048	4025	3.6047659	4089	3.6116171
3962	3.5979145	4026	3.6048738	4090	3.6117233
3963	3.5980241	4027	3.6049816	4091	3.6118295
3964	3.5981336	4028	3.6050895	4092	3.6119356
3965	3.5982432	4029	3.6051973	4093	3.6120417
3966	3.5983527	4030	3.6053050	4094	3.6121478
3967	3.5984622	4031	3.6054128	4095	3.6122539
3968	3.5985717	4032	3.6055205	4096	3.6123599
3969	3.5986811	4033	3.6056282	4097	3.6124660
3970	3.5987905	4034	3.6057359	4098	3.6125720
3971	3.5988999	4035	3.6058435	4039	3.6126779
3972	3.5990092	4036	3.6059512	4100	3.6127839
3973	3.5991186	4037	3.6060587	4101	3.6128898
3974	3.5992279	4038	3.6061663	4102	3.6129957
3975	3.5993371	4039	3.6062738	4103	3.6131015
3976	3.5994464	4040	3.6063814	4104	3.6132073
3977	3.5995556	4041	3.6064888	4105	3.6133132
3978	3.5996648	4042	3.6065963	4106	3.6134189
3979	3.5997739	4043	3.6067037	4107	3.6135247
3980	3.5998831	4044	3.6068111	4108	3.6136304
3981	3.5999922	4045	3.6069185	4109	3.6137361
3982	3.6001013	4046	3.6070259	4110	3.6138418
3983	3.6002103	4047	3.6071332	4111	3.6139475
3984	3.6003193	4048	3.6072405	4112	3.6140531
3985	3.6004283	4049	3.6073478	4113	3.6141587
3986	3.6005373	4050	3.6074550	4114	3.6142643
3987	3.6006462	4051	3.6075622	4115	3.6143698
3988	3.6007551	4052	3.6076694	4116	3.6144754
3989	3.6008640	4053	3.6077766	4117	3.6145809
3990	3.6009729	4054	3.6078837	4118	3.6146863
3991	3.6010817	4055	3.6079909	4119	3.6147918
3992	3.6011905	4056	3.6080979	4120	3.6148972
3993	3.6012993	4057	3.6082050	4121	3.6150026
3994	3.6014080	4058	3.6083120	4122	3.6151080
3995	3.6015168	4059	3.6084190	4123	3.6152133

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
4124	3.6153187	4188	3.6220067	4252	3.6285933	4316	3.6350814	4380	3.6414741	4444	3.6477740
4125	3.6154240	4189	3.6221104	4253	3.6286954	4317	3.6351820	4381	3.6415733	4445	3.6478718
4126	3.6155292	4190	3.6222140	4254	3.6287975	4318	3.6352826	4382	3.6416724	4446	3.6479695
4127	3.6156345	4191	3.6223177	4255	3.6288996	4319	3.6353832	4383	3.6417719	4447	3.6484671
4128	3.6157397	4192	3.6224213	4256	3.6290016	4320	3.6354837	4384	3.6418705	4448	3.6481648
4129	3.6158449	4193	3.6225249	4257	3.6291036	4321	3.6355843	4385	3.6419696	4449	3.6482624
4130	3.6159501	4194	3.6226284	4258	3.6292057	4322	3.6356848	4326	3.6420686	4450	3.6483600
4131	3.6160552	4195	3.6227320	4259	3.6293076	4323	3.6357852	4387	3.6421676	4451	3.6484576
4132	3.6161603	4196	3.6228355	4260	3.6294096	4324	3.6358857	4388	3.6422666	4452	3.6485552
4133	3.6162654	4197	3.6229390	4261	3.6295115	4325	3.6359861	4389	3.6423656	4453	3.6486527
4134	3.6163705	4198	3.6230424	4262	3.6296134	4326	3.6360865	4390	3.6424645	4454	3.6487502
4135	3.6164755	4199	3.6231459	4263	3.6297153	4327	3.6361869	4391	3.6425634	4455	3.6488477
4136	3.6165805	4200	3.6232493	4264	3.6298172	4328	3.6362872	4392	3.6426623	4456	3.6489452
4137	3.6166855	4201	3.6233527	4265	3.6299190	4329	3.6363876	4393	3.6427612	4457	3.6490426
4138	3.6167905	4202	3.6234560	4266	3.6300208	4330	3.6364879	4394	3.6428601	4458	3.6491401
4139	3.6168954	4203	3.6235594	4267	3.6301226	4331	3.6365882	4395	3.6429589	4459	3.6492375
4140	3.6170003	4204	3.6236627	4268	3.6302244	4332	3.6366884	4396	3.6430577	4460	3.6493349
4141	3.6171052	4205	3.6237660	4269	3.6303262	4333	3.6367887	4397	3.6431565	4461	3.6494322
4142	3.6172101	4206	3.6238693	4270	3.6304279	4334	3.6368889	4398	3.6432552	4462	3.6495296
4143	3.6173149	4207	3.6239725	4271	3.6305296	4335	3.6369891	4399	3.6433540	4463	3.6496269
4144	3.6174197	4208	3.6240757	4272	3.6306312	4336	3.6370893	4400	3.6434527	4464	3.6497242
4145	3.6175245	4209	3.6241789	4273	3.6307329	4337	3.6371894	4401	3.6435514	4465	3.6498215
4146	3.6176293	4210	3.6242821	4274	3.6308345	4338	3.6372895	4402	3.6436500	4466	3.6499187
4147	3.6177340	4211	3.6243852	4275	3.6309361	4339	3.6373896	4403	3.6437487	4467	3.6500160
4148	3.6178387	4212	3.6244844	4276	3.6310377	4340	3.6374897	4404	3.6438473	4468	3.6501132
4149	3.6179434	4213	3.6245915	4277	3.6311392	4341	3.6375898	4405	3.6439459	4469	3.6502104
4150	3.6180481	4214	3.6246945	4278	3.6312408	4342	3.6377898	4406	3.6440445	4470	3.6503075
4151	3.6181527	4215	3.6247976	4279	3.6313423	4343	3.6377898	4407	3.6441430	4471	3.6504047
4152	3.6182573	4216	3.6249006	4280	3.6314438	4344	3.6378898	4408	3.6442416	4472	3.6505018
4153	3.6183619	4217	3.6250036	4281	3.6315452	4345	3.6379898	4409	3.6443401	4473	3.6505989
4154	3.6184665	4218	3.6251066	4282	3.6316467	4346	3.6380897	4410	3.6444386	4474	3.6506960
4155	3.6185710	4219	3.6252095	4283	3.6317481	4347	3.6381896	4411	3.6445371	4475	3.6507930
4156	3.6186755	4220	3.6253124	4284	3.6318495	4348	3.6382895	4412	3.6446355	4476	3.6508901
4157	3.6187800	4221	3.6254153	4285	3.6319508	4349	3.6383834	4413	3.6447339	4477	3.6509871
4158	3.6188845	4222	3.6255182	4286	3.6320522	4350	3.6384893	4414	3.6448323	4478	3.6510841
4159	3.6189889	4223	3.6256211	4287	3.6321535	4351	3.6385891	4415	3.6449307	4479	3.6511811
4160	3.6190933	4224	3.6257239	4288	3.6322548	4352	3.6386889	4416	3.6450291	4480	3.6512780
4161	3.6191977	4225	3.6258267	4289	3.6323560	4353	3.6387887	4417	3.6451274	4481	3.6513749
4162	3.6193021	4226	3.6259295	4290	3.6324573	4354	3.6388884	4418	3.6452257	4482	3.6514719
4163	3.6194064	4227	3.6260322	4291	3.6325585	4355	3.6389882	4419	3.6453240	4483	3.6515689
4164	3.6195107	4228	3.6261350	4292	3.6326597	4356	3.6390879	4420	3.6454223	4484	3.6516656
4165	3.6196250	4229	3.6262377	4293	3.6327609	4357	3.6391876	4421	3.6455205	4485	3.6517624
4166	3.6197193	4230	3.6263404	4294	3.6328620	4358	3.6392872	4422	3.6456187	4486	3.6518593
4167	3.6198235	4231	3.6264430	4295	3.6329632	4359	3.6393869	4423	3.6457169	4487	3.6519561
4168	3.6199277	4232	3.6265457	4296	3.6330643	4360	3.6394865	4424	3.6458151	4488	3.6520528
4169	3.6200319	4233	3.6266483	4297	3.6331653	4361	3.6395861	4425	3.6459133	4489	3.6521496
4170	3.6201360	4234	3.6267509	4298	3.6332664	4362	3.6396857	4426	3.6460114	4490	3.6522463
4171	3.6202402	4235	3.6268534	4299	3.6333674	4363	3.6397852	4427	3.6461095	4491	3.6523430
4172	3.6203443	4236	3.6269559	4300	3.6334685	4364	3.6398847	4428	3.6462076	4492	3.6524397
4173	3.6204484	4237	3.6270585	4301	3.6335694	4365	3.6399842	4429	3.6463057	4493	3.6525364
4174	3.6205524	4238	3.6271610	4302	3.6336704	4366	3.6400837	4430	3.6464037	4494	3.6526331
4175	3.6206565	4239	3.6272634	4303	3.6337713	4367	3.6401832	4431	3.6465017	4495	3.6527297
4176	3.6207605	4240	3.6273659	4304	3.6338723	4368	3.6402826	4432	3.6465997	4496	3.6528263
4177	3.6208645	4241	3.6274683	4305	3.6339732	4369	3.6403820	4433	3.6466977	4497	3.6529229
4178	3.6209684	4242	3.6275707	4306	3.6340740	4370	3.6404814	4434	3.6467957	4498	3.6530195
4179	3.6210724	4243	3.6276730	4307	3.6341749	4371	3.6405808	4435	3.6468936	4499	3.6531160
4180	3.6211763	4244	3.6277754	4308	3.6342757	4372	3.6406802	4436	3.6469915	4500	3.6532125
4181	3.6212802	4245	3.6278777	4309	3.6343765	4373	3.6407795	4437	3.6470894	4501	3.6533090
4182	3.6213840	4246	3.6279800	4310	3.6344773	4374	3.6408788	4438	3.6471873	4502	3.6534055
4183	3.6214879	4247	3.6280823	4311	3.6345780	4375	3.6409781	4439	3.6472851	4503	3.6535019
4184	3.6215917	4248	3.6281845	4312	3.6346788	4376	3.6410773	4440	3.6473830	4504	3.6536984
4185	3.6216955	4249	3.6282867	4313	3.6347795	4377	3.6411765	4441	3.6474808	4505	3.6536948
4186	3.6217992	4250	3.6283889	4314	3.6348801	4378	3.6412758	4442	3.6475785	4506	3.6537912
4187	3.6219030	4251	3.6284911	4315	3.6349808	4379	3.6413749	4443	3.6476763	4507	3.6538876
4188	3.6220067	4252	3.6285933	4316	3.6350814	4380	3.6414741	4444	3.6477740	4508	3.6539839

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
4508	3.6539839	4572	3.6601062	4636	3.6661434	4700	3.6720979	4764	3.6779718	4828	3.6837673
4509	3.6540802	4573	3.6602012	4637	3.6662371	4701	3.6721903	4765	3.6780629	4829	3.6838572
4510	3.6541765	4574	3.6602962	4638	.6663307	4702	3.6722826	4766	3.6781540	4830	3.6839471
4511	3.6542728	4575	3.6603911	4639	3.6664244	4703	3.6723750	4767	3.6782452	4831	2.6840370
4512	5.6543691	4576	3.6604860	4640	3.6665180	4704	3.6724673	4768	3.6783362	4832	3 6841269
4513	3.6544653	4577	3.6605809	4641	3.6666116	4705	3.6725596	4769	3.6784273	4833	3.6842168
4514	3.6545616	4578	3.6606758	4642	3.6667051	4706	3.6726519	4770	3.6785184	4834	3.6843066
4515	3.6546578	4579	3.6607706	4643	3.6667987	4707	3.6727442	4771	3.6786094	4835	3.6843965
4516	3.6547539	4580	3.6608655	4644	3.6668922	4708	3.6728365	4772	3.6787004	4836	3.6844863
4517	3.6548501	4581	3.6609603	4645	3.6669857	4709	3.6729287	4773	3.6787914	4837	3.6845761
4518	3.9549462	4582	3.6610551	4646	3.6670792	4710	3.6730209	4774	3.6788824	4838	3.6846659
4519	3.6550423	4583	3.6611499	4647	3.6671727	4711	3.6731131	4775	3.6789734	4839	3.6847556
4520	3.6551384	4584	3.6612446	4648	3.6672661	4712	3.6732053	4776	3.6790643	4840	3.6848454
4521	3.6552345	4585	3.6613393	4649	3.6673595	4713	3.6732974	4777	3.6791552	4841	3.6849351
4522	3.6553306	4586	3.6614340	4650	3.6674530	4714	3.6733896	4778	3.6792461	4842	3.6850248
4523	3.6554266	4587	3.6515287	4651	3.6675463	4715	3.6734817	4779	3.6793370	4843	3.6851145
4524	3 6555226	4588	3.6616234	4652	3.6676397	4716	3.6735738	4780	3.6794275	4844	3.6852042
4525	3.6556186	4589	3.6617181	4653	3.6677331	4717	3.6736659	4781	3.6795187	4845	3.6852939
4526	3.6557145	4590	3.6618127	4654	3.6678264	4718	3.6737579	4782	3.6796096	4846	3.6353834
4527	3.6558105	4591	3.6619073	4655	3.6679197	4719	3.6738500	4783	3.6797004	4847	3.6854731
4528	3.6559064	4592	3.6620019	4656	3.6680130	4720	3.6739420	4784	3.6797912	4848	3.6855626
4529	3.6560023	4593	3.6620964	4657	3.6671062	4721	3.6740340	4785	3.6798819	4849	3.6856522
4530	3.6560982	4594	3.6621910	4658	3.6681995	4722	3.6741260	4786	3.6799727	4850	3.6857417
4531	3.6561941	4595	3.6622855	4659	3.6682927	4723	3.6742179	4787	3.6800634	4851	3.6858313
4532	3.6562899	4596	3.6623800	4660	3.6683859	4724	3.6743099	4788	3.6801541	4852	3.6859208
4533	3.6563857	4597	3.6624745	4661	3.6684791	4725	3.6744018	4789	3.6802448	4853	3.6860103
4534	3.6564815	4598	3.6625690	4662	3.6685723	4726	3.6744937	4790	3.6803355	4854	3.6860998
4535	3.6565773	4599	3.6626634	4663	3.6686654	4727	3.6745856	4791	3.6804262	4855	3.6861892
4536	3.6566730	4600	3 6627578	4664	3.6687585	4728	3.6746775	4792	3.6805168	4856	3.6862787
4537	3.6567684	4601	3.6628522	4665	3.6688516	4729	3.6747693	4793	3.6806074	4857	3 6863681
4538	3.6568645	4602	3.6629466	4666	3.6689447	4730	3.6748611	4794	3.6806980	4858	3.6864575
4539	3.6569602	4603	3.6630410	4667	3.6690378	4731	3.6749525	4795	3.6807886	4859	3.6865469
4540	3.6570559	4604	3.6631353	4668	3.6691308	4732	3.6750447	4796	3.6808792	4860	3.6866363
4541	3.6571515	4605	3.6632296	4669	3 6692239	4733	.6751365	4797	3.6809697	4861	3.6867256
4542	3.6572471	4606	3.6633239	4670	3.6693269	4734	3.6752283	4798	3.6810602	4862	3.6868149
4543	3.6573427	4607	3.6634182	4671	3.6694099	4735	3.6753200	4799	3.6811507	4863	3.6869043
4544	3.6574383	4608	3.6635125	4672	3.6695028	4736	3.6754117	4800	3.6812412	4864	3.6869936
4545	3.6575339	4609	3.6636067	4673	3.6695958	4737	3.6755034	4801	3.6813317	4865	3.6870828
4546	3.6576294	4610	3.6637009	4674	3.6696887	4738	3.6755951	4802	3 6814222	4866	3.6871721
4547	3.6577250	4611	3.6637951	4675	3.6697816	4739	3.6756867	4803	3.6815126	4867	3 6872613
4548	3.6578205	4612	3.6638893	4676	3.6698745	4740	3.6757783	4804	9.6816030	4868	3.6873506
4549	3.6579159	4613	3.6639835	4677	3.6699674	4741	3.6758700	4805	3.6816934	4869	3.6874398
4550	3.6580114	4614	3.6640776	4678	3.6700602	4742	3.6759615	4806	3.6817838	4870	3.6875290
4551	3.6581068	4615	3.6641717	4679	3.6701530	4743	3.6760531	4807	3.6818741	4871	3.6876181
4552	3.6582023	4616	3.6642658	4680	3.6702459	4744	3.6761447	4808	3.6819645	4872	3.6877073
4553	3.6582976	4617	3 6653599	4681	3.6703386	4745	3.6762362	4809	3.6820548	4873	3.6877964
4554	3.6583930	4618	3.6644539	4682	3.6704314	4746	3.6763277	4810	3.6821451	4874	3.6878855
4555	3.6584884	4619	3.6645480	4683	3.6705242	4747	3.6764192	4811	3.6822354	4875	3.6879746
4556	3.6585837	4620	3.6646420	4684	3.6706169	4748	3.6765107	4812	3.6823256	4876	3.6880637
4557	3.6586790	4621	3.6647360	4685	3.6707096	4749	3.6766022	4813	3.6824159	4877	3.6881528
4558	3.6587743	4622	3.6648299	4686	3.5708023	4750	3.6766936	4814	3.6825061	4878	3.6882418
4559	3.6588696	4623	3.6649239	4687	3.6708950	4751	3.6767850	4815	3.6825963	4879	3.6883308
4560	3.6589648	4624	3.6650178	4688	3.6709876	4752	3.6768764	4816	3.6826865	4880	3.6884198
4561	3.6590601	4625	3.6651117	4689	3.6710802	4753	3.6769678	4817	3.6827766	4881	3.6885088
4562	3.6591553	4626	3.6652056	4690	3.6711728	4754	3.6770592	4818	3.6828668	4882	3.6885978
4563	3.6592505	4627	3.6652995	4691	3.6712654	4755	3.6771505	4819	3.6829569	4883	3.6886867
4564	3.6593456	4628	3.6653933	4692	3.6713580	4756	3.6772418	4820	3.6830470	4884	3.6887756
4565	3.6594408	4629	3.6654872	4693	3.6714506	4757	3.6773332	4821	3.6831371	4885	3.6888646
4566	3.6595359	4630	3.6655810	4694	3.6715431	4758	3.6774244	4822	3.6832272	4886	3.6889535
4567	3.6596310	4631	3.6656748	4695	3.6716356	4759	3.6775157	4823	3.6833173	4887	3.6890423
4568	3.6597261	4632	3.6657685	4696	3.6717281	4760	3.6776069	4824	3.6834073	4888	3.6891312
4569	3.6598212	4633	3.6658623	4697	3.6718206	4761	3.6776982	4825	3.6834973	4889	3.6892200
4570	3 6599162	4634	3.6659569	4698	3.6719130	4762	3 6777894	4826	3.6835873	4890	3.6893089
4871	3.6600112	4635	3.6660497	4699	3.6720054	4763	3.6778806	4827	3.6836773	4891	3.6893977
4572	3.6601062	4636	3.6661434	4700	3.6720979	4764	3.6779718	4828	3.6837673	4892	3.6894864

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
4892	3.6894864	4956	3.6951313	5020	3.7007037	5084	3.7062055	5148	3.7116385	5212	3.7170044
4893	3.6895752	4957	3.6952189	5021	3.7007902	5085	3.7062910	5149	3.7117229	5213	3.7170877
4894	3.6896640	4958	3.6953065	5022	3.7008767	5086	3.7063764	5150	3.7118072	5214	3.7171710
4895	3.6897527	4959	3.6953941	5023	3.7009632	5087	3.7064617	5151	3.7118915	5215	3.7172543
4896	3.6898414	4960	3.6954817	5024	3.7010496	5088	3.7065471	5152	3.7119759	5216	3.7173376
4897	3.6899301	4961	3.6955692	5025	3.7011361	5089	3.7066324	5153	3.7120601	5217	3.7174208
4898	3.6900188	4962	3.6956568	5026	3.7012225	5090	3.7067178	5154	3.7121444	5218	3.7175041
4899	3.6901074	4963	3.6957443	5027	3.7015089	5091	3.7068031	5155	3.7122287	5219	3.7175873
4900	3.6901961	4964	3.6958318	5028	3.7013953	5092	3.7068884	5156	3.7123129	5220	3.7176705
4901	3.6902847	4965	3.6959193	5029	3.7014816	5093	3.7069737	5157	3.7123971	5221	3.7177537
4902	3.6903733	4966	3.6960067	5030	3.7015680	5094	3.7070589	5158	3.7124813	5222	3.7178369
4903	3.6904619	4967	3.6960942	5031	3.7016543	5095	3.7071442	5159	3.7125655	5223	3.7179200
4904	3.6905505	4968	3.6961816	5032	3.7017406	5096	3.7072294	5160	3.7126497	5224	3.7180032
4905	3.6906390	4969	3.6962690	5033	3.7018269	5097	3.7073146	5161	3.7127339	5225	3.7180863
4906	3.6907275	4970	3.6963564	5034	3.7019132	5098	3.7073998	5162	3.7128180	5226	3.7181694
4907	3.6908161	4971	3.6964438	5035	3.7019995	5099	3.7074850	5163	3.7129021	5227	3.7182525
4908	3.6909046	4972	3.6965311	5036	3.7020857	5100	3.7075702	5164	3.7129862	5228	3.7183356
4909	3.6909930	4973	3.6966185	5037	3.7021719	5101	3.7076553	5165	3.7130703	5229	3.7184186
4910	3.6910815	4974	3.6967058	5038	3.7022582	5102	3.7077405	5166	3.7131544	5230	3.7185017
4911	3.6911699	4975	3.6967931	5039	3.7023444	5103	3.7078256	5167	3.7132285	5231	3.7185847
4912	3.6912584	4976	3.6968804	5040	3.7024305	5104	3.7079107	5168	3.7133225	5232	3.7186677
491	3.6913468	4977	3.6969676	5041	3.7025167	5105	3.7079957	5169	3.7134065	5233	3.7187507
4914	3.6914352	4978	3.6970549	5042	3.7026028	5106	3.7080808	5170	3.7134905	5234	3.7188337
4915	3.6915235	4979	3.6971421	5043	3.7026890	5107	3.7081659	5171	3.7135745	5235	3.7189167
4916	3.6916119	4980	3.6972293	5044	3.7027751	5108	3.7082509	5172	3.7136585	5236	3.7189996
4917	3.6917002	4981	3.6973165	5045	3.7028612	5109	3.7083359	5173	3.7137425	5237	3.7190826
4918	3.6917885	4982	3.6974037	5046	3.7029472	5110	3.7084209	5174	3.7138264	5238	3.7191655
4919	3.6918768	4983	3.6974909	5047	3.7030333	5111	3.7085059	5175	3.7139104	5239	3.7192484
4920	3.6919651	4984	3.6975780	5048	3.7031193	5112	3.7085908	5176	3.7139943	5240	3.7193313
4921	3.6920534	4985	3.6976652	5049	3.7032054	5113	3.7086758	5177	3.7140782	5241	3.7194142
4922	3.6921416	4986	3.6977523	5050	3.7032914	5114	3.7087607	5178	3.7141620	5242	3.7194970
4923	3.6922298	4987	3.6978394	5051	3.7033774	5115	3.7088456	5179	3.7142459	5243	3.7195799
4924	3.6923180	4988	3.6979264	5052	3.7034633	5116	3.7089305	5180	3.7143298	5244	3.7196627
4925	3.6924062	4989	3.6980135	5053	3.7035493	5117	3.7090154	5181	3.7144136	5245	3.7197455
4926	3.6924944	4990	3.6981005	5034	3.7036352	5118	3.7091003	5182	3.7144974	5246	3.7198283
4927	3.6925826	4991	3.6981876	5055	3.7037212	5119	3.7091851	5183	3.7145812	5247	3.7199111
4928	3.6926707	4992	3.6982746	5056	3.7038071	5120	3.7092700	5184	3.7146650	5248	3.7199938
4929	3.6927588	4993	3.6983616	5057	3.7038929	5121	3.7093548	5185	3.7147488	5249	3.7200766
4930	3.6928469	4994	3.6984485	5058	3.7039788	5122	3.7094396	5186	3.7149325	5250	3.7201593
4931	3.6929350	4995	3.6985355	5059	3.7040647	5123	3.7095244	5187	3.7149162	5251	3.7202420
4932	3.6930231	4996	3.6986224	5060	3.7041505	5124	3.7096091	5188	3.7150000	5252	3.7203247
4933	3.6931111	4997	3.6987093	5061	3.7042363	5125	3.7096939	5189	3.7150837	5253	3.7204074
4934	3.6931991	4998	3.6987963	5062	3.7043221	5126	3.7097786	5190	3.7151674	5254	3.7204901
4935	3.6932872	4999	3.6988831	5063	3.7044079	5127	3.7098633	5191	3.7152510	5255	3.7205727
4936	3.6933752	5000	3.6989700	5064	3.7044937	5128	3.7099480	5192	3.7153347	5256	3.7206554
4937	3.6934631	5001	3.6990569	5065	3.7045794	5129	3.7100327	5193	3.7154183	5257	3.7207380
4938	3.6935511	5002	3.6991437	5066	3.7046652	5130	3.7101174	5194	3.7155019	5258	3.7208206
4939	3.6936390	5003	3.6992305	5067	3.7047509	5131	3.7102020	5195	3.7155856	5259	3.7209032
4940	3.6937269	5004	3.6993173	5068	3.7048366	5132	3.7102866	5196	3.7156691	5260	3.7209857
4941	3.6938148	5005	3.6994041	5069	3.7049223	5133	3.7103713	5197	3.7157527	5261	3.7210683
4942	3.6939027	5006	3.6994908	5070	3.7050080	5134	3.7104559	5198	3.7158363	5262	3.7211508
4943	3.6939906	5007	3.6995776	5071	3.7050936	5135	3.7105404	5199	3.7159198	5263	3.7212334
4944	3.6940785	5008	3.6996643	5072	3.7051792	5136	3.7106250	5200	3.7160033	5264	3.7213159
4945	3.6941663	5009	3.6997510	5073	3.7052649	5137	3.7107096	5201	3.7160829	5265	3.7213984
4946	3.6942541	5010	3.6998377	5074	3.7053505	5138	3.7107941	5202	3.7161703	5266	3.7214809
4947	3.6943419	5011	3.6999244	5075	3.7054360	5139	3.7108786	5203	3.7162538	5267	3.7215633
4948	3.6944297	5012	3.7000111	5076	3.7055216	5140	3.7109631	5204	3.7163373	5268	3.7216458
4949	3.6945174	5013	3.7000977	5077	3.7056072	5141	3.7110476	5205	3.7164207	5269	3.7217282
4950	3.6946052	5014	3.7001843	5078	3.7056927	5142	3.7111321	5206	3.7165042	5270	3.7218106
4951	3.6946929	5015	3.7002709	5079	3.7057782	5143	3.7112165	5207	3.7165876	5271	3.7218930
4952	3.6947806	5016	3.7003575	5080	3.7058637	5144	3.7113010	5208	3.7166710	5272	3.7219754
4953	3.6948683	5017	3.7004441	5081	3.7059492	5145	3.7113854	5209	3.7167544	5273	3.7220578
4954	3.6949560	5018	3.7005307	5082	3.7060347	5146	3.7114698	5210	3.7168377	5274	3.7221401
4955	3.6950437	5019	3.7006172	5083	3.7061201	5147	3.7115542	5211	3.7169211	5275	3.7222225
4956	3.6951313	5020	3.7007037	5084	3.7062055	5148	3.7116385	5212	3.7170044	5276	3.7223048

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
5276	3.7223048	5340	3.7275413	5404	3.7327153	5468	3.7378285	5532	3.7428822	5596	3.7478777
5277	3.7223871	5341	3.7276226	5405	3.7327957	5469	3.7379079	5533	3.7429607	5597	3.7479553
5278	3.7224694	5342	3.7277039	5406	3.7328760	5470	3.7379873	5534	3.7430392	5598	3.7480329
5279	3.7225517	5343	3.7277852	5407	3.7329564	5471	3.7580667	5535	3.7431176	5599	3.7481105
5280	3.7226339	5344	3.7278664	5408	3.7330367	5472	3.7381461	5536	3.7431961	5600	3.7481880
5281	3.7227162	5345	3.7279477	5409	3.7331170	5473	3.7382254	5537	3.7432745	5601	3.7482656
5282	3.7227984	5346	3.7280290	5410	3.7331973	5474	3.7383048	5538	3.7433530	5602	3.7483431
5283	3.7228806	5347	3.7281102	5411	3.7332775	5475	3.7383841	5539	3.7434314	5603	3.7484206
5284	3.7229628	5348	3.7281914	5412	3.7333578	5476	3.7384634	5540	3.7435098	5604	3.7484981
5285	3.7230450	5349	3.7282726	5413	3.7334380	5477	3.7385427	5541	3.7435881	5605	3.7485756
5286	3.7231272	5350	3.7283538	5414	3.7335182	5478	3.7386220	5542	3.7436665	5606	3.7486331
5287	3.7232093	5351	3.7284349	5415	3.7335985	5479	3.7387013	5543	3.7437449	5607	3.7487306
5288	3.7232914	5352	3.7285161	5416	3.7336787	5480	3.7387806	5544	3.7438232	5608	3.7488080
5289	3.7233736	5353	3.7285972	5417	3.7337588	5481	3.7388598	5545	3.7439015	5609	3.7488854
5290	3.7234557	5354	3.7286784	5418	3.7338390	5482	3.7389390	5546	3.7439799	5610	3.7489629
5291	3.7235378	5355	3.7287595	5419	3.7339191	5483	3.7390182	5547	3.7440582	5611	3.7490403
5292	3.7236198	5356	3.7288406	5420	3.7339993	5484	3.7390974	5548	3.7441365	5612	3.7491177
5293	3.7237019	5357	3.7289216	5421	3.7340794	5485	3.7391766	5549	3.7442147	5613	3.7491950
5294	3.7237839	5358	3.7290027	5422	3.7341595	5486	3.7392558	5550	3.7442930	5614	3.7492724
5295	3.7238660	5359	3.7290838	5423	3.7342395	5487	3.7393350	5551	3.7443712	5615	3.7493498
5296	3.7239480	5360	3.7291648	5424	3.7343197	5488	3.7394141	5552	3.7444495	5616	3.7494271
5297	3.7240300	5361	3.7292458	5425	3.7343997	5489	3.7394932	5553	3.7545277	5617	3.7495044
5298	3.7241120	5362	3.7293268	5426	3.7344798	5490	3.7395721	5554	3.7446059	5618	3.7495817
5299	3.7241939	5363	3.7294078	5427	3.7347598	5491	3.7396514	5555	3.7446841	5619	3.7496590
5300	3.7242759	5364	3.7294888	5428	2.7346398	5492	3.7397305	5556	3.7447622	5620	3.7497363
5301	3.7243578	5365	3.7295697	5429	3.7347198	5493	3.7398096	5557	3.7448404	5621	3.7498136
5302	3.7244397	5366	3.7296507	5430	3.7347998	5494	3.7398886	5558	3.7449185	5622	3.7498908
5303	3.7245216	5367	3.7297316	5431	3.7348798	5495	3.7399677	5559	3.7449967	5623	3.7499681
5304	3.7246035	5368	3.7298125	5432	3.7349598	5496	3.7400467	5560	3.7450748	5624	3.7500453
5305	3.7246854	5369	3.7298934	5433	3.7350397	5497	3.7407257	5561	3.7451529	5625	3.7501225
5306	3.7247672	5370	3.7299743	5434	3.7351196	5498	3.7402047	5562	3.7452310	5626	3.7501997
5307	3.7248491	5371	3.7300551	5435	3.7351995	5499	3.7402837	5563	3.7453091	5627	3.7502369
5308	3.7249309	5372	3.7301360	5436	3.7352794	5500	3.7403627	5564	3.7453871	5628	3.7503541
5309	3.7250127	5373	3.7302168	5437	3.7353593	5501	3.7404416	5565	3.7454652	5629	3.7504312
5310	3.7250945	5374	3.7302977	5438	3.7354392	5502	3.7405206	5566	3.7455432	5630	3.7505084
5311	3.7251763	5375	3.7303785	5439	3.7355191	5503	3.7405995	5567	3.7456212	5631	3.7505855
5312	3.7252581	5376	3.7304593	5440	3.7355989	5504	3.7406784	5568	3.7456992	5632	3.7506626
5313	3.7253398	5377	3.7305400	5441	3.7356787	5505	3.7407573	5569	3.7457772	5633	3.7507398
5314	3.7254215	5378	3.7306208	5442	3.7357585	5506	3.7408362	5570	3.7458552	5634	3.7508168
5315	3.7255033	5379	3.7307015	5443	3.7358383	5507	3.7409151	5571	3.7459332	5635	3.7508939
5316	3.7255850	5380	3.7307823	5444	3.7359181	5508	3.7409919	5572	3.7460111	5636	3.7509710
5317	3.7256667	5381	3.7308630	5445	3.7359979	5509	3.7410728	5573	3.7460890	5637	3.7510480
5318	3.7257483	5382	3.7309437	5446	3.7360776	5510	3.7411516	5574	3.7461670	5638	3.7511250
5319	3.7258300	5383	3.7310244	5447	3.7361574	5511	3.7412304	5575	3.7462449	5639	3.7512021
5320	2.7259116	5384	3.7311051	5448	3.7362371	5512	3.7413092	5576	3.7463228	5640	3.7512791
5321	3.7259933	5385	3.7311857	5449	3.7363168	5513	3.7413880	5577	3.7464006	5641	3.7513561
5322	3.7260749	5386	3.7312663	5450	3.7363965	5514	3.7414668	5578	3.7464785	5642	3.7514331
5323	3.7261565	5387	3.7313470	5451	3.7364762	5515	3.7415455	5579	3.7465564	5643	3.7515100
5324	3.7262380	5388	3.7314276	5452	3.7365558	5516	3.7416243	5580	3.7466342	5644	3.7515870
5325	3.7263196	5389	3.7315082	5453	3.7366355	5517	3.7417030	5581	3.7467120	5645	3.7516639
5326	3.7264012	5390	3.7315888	5454	3.7367151	5518	3.7417817	5582	3.7467898	5646	3.7517409
5327	3.7264827	5391	3.7316693	5455	3.7367948	5519	3.7418604	5583	3.7468676	5647	3.7518178
5328	3.7265642	5392	3.7317499	5456	3.7368744	5520	3.7419391	5584	3.7469454	5648	3.7518947
5329	3.7266457	5393	3.7318304	5457	3.7369540	5521	3.7420177	5585	3.7470232	5649	3.7519716
5330	3.7267272	5394	3.7319109	5458	3.7370335	5522	3.7420964	5586	3.7471009	5650	3.7520484
5331	3.7268087	5395	3.7319914	5459	3.7371131	5523	3.7421750	5587	3.7471787	5651	3.7521253
5332	3.7268901	5396	3.7320719	5460	3.7371926	5524	3.7422537	5588	3.7472564	5652	3.7522022
5333	3.7269816	5397	3.7321524	5461	3.7372722	5525	3.7423323	5589	3.7473341	5653	3.7522790
5334	3.7270530	5398	3.7322329	5462	3.7373517	5526	3.7424109	5590	3.7474118	5654	3.7235518
5335	3.7271344	5399	3.7323133	5463	3.7374312	5527	3.7424895	5591	3.7474895	5655	3.7524326
5336	3.7272158	5400	3.7323938	5464	3.7375107	5528	3.7425680	5592	3.7475672	5656	3.7525094
5337	3.7272972	5401	3.7324742	5465	3.7375902	5529	3.7426466	5593	3.7476448	5657	3.7525862
5338	3.7273786	5402	3.7325546	5466	3.7376696	5530	3.7427251	5594	3.7477225	5658	3.7526629
5339	3.7274599	5403	3.7326350	5567	3.7377491	5531	3.7428037	5595	3.7478001	5659	3.7527397
5340	3.7275413	5404	3.7327153	5568	3.7378285	5532	3.7428822	5596	3.7478777	5660	3.7528164

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
5660	3.7528164	5724	3.7576996	5788	3.7625285	5852	3.7673043	5916	3.7720281	5980	3.7767012
5661	3.7528932	5725	3.7577755	5789	3.7626035	5853	3.7673785	5917	3.7721016	5981	3.7767738
5662	3.7529699	5726	3.7578513	5790	3.7626786	5854	3.7674527	5918	3.7721750	5982	3.7768464
5663	3.7530466	5727	3.7579272	5991	3.7627536	5855	3.7675269	5919	3.7722483	5983	3.7769190
5664	3.7531232	5728	3.7580030	5792	3.7628286	5856	3.7676011	5920	3.7723217	5984	3.7769916
5665	3.7531999	5729	3.7580788	5793	3.7629035	5857	3.7676752	5921	3.7723951	5985	3.7770642
5666	3.7532766	5730	3.7581546	5794	3.7629785	5858	3.7677494	5922	3.7724684	5986	3.7771367
5667	3.7533532	5731	3.7582304	5795	3.7630534	5859	3.7678235	5923	3.7725417	5987	3.7772093
5668	3.7534298	5732	3.7583062	5796	5.7631284	5860	3.7678976	5924	3.7726150	5988	3.7772818
5669	3.7535065	5733	3.7583819	5797	3.7632033	5861	3.7679717	5925	3.7726884	5989	3.7773543
5670	3.7535831	5734	3.7584577	5798	3.7632782	5862	3.7680458	5926	3.7727616	5990	3.7774268
5671	3.7536596	5735	3.7585334	5799	3.7633531	5863	3.7681199	5927	3.7728349	5991	3.7774993
5672	3.7537362	5736	3.7586091	5800	3.7634280	5864	3.7681940	5928	3.7729082	5992	3.7775718
5673	3.7538128	5737	3.7586848	5801	3.7635029	5865	3.7682680	5929	3.7729814	5993	3.7776443
5674	3.7538893	5738	3.7587605	5802	3.7635777	5866	3.7683421	5930	3.7730547	5994	3.7777167
5675	3.7539659	5739	3.7588362	5803	3.7636526	5867	3.7684161	5931	3.7731279	5995	3.7777892
5676	3.7540424	5740	3.7589119	5804	3.7637274	5868	3.7684901	5932	3.7732011	5996	3.7778616
5677	3.7541189	5741	3.7589875	5805	3.7638022	5869	3.7685641	5933	3.7732743	5997	3.7779340
5678	3.7541954	5742	3.7590632	5806	3.7638770	5870	3.7686381	5934	3.7733475	5998	3.7780065
5679	3.7542719	574	3.7591388	5807	3.7639518	5871	3.7687121	5935	3.7734207	5999	3.7780789
5680	3.7543483	5744	3.7592144	5808	3.7640266	5872	3.7687860	5936	3.7734939	6000	3.7781512
5681	3.7544248	5745	3.7592900	5809	3.7641014	5873	3.7688600	5937	3.7735670	6001	3.7782236
5682	3.7545012	5746	3.7593656	5810	3.7641761	5874	3.7689332	5938	3.7736402	6002	3.7782960
5683	3.7545777	5747	3.7594412	5811	3.7642509	5875	3.7690079	5939	3.7737133	6003	3.7783683
5684	3.7546541	5748	3.7595168	5812	3.7643256	5876	3.7690818	5940	3.7737864	6004	3.7784407
5685	3.7547305	5749	3.7595923	5813	3.7644003	5877	3.7691557	5941	3.7738596	6005	3.7785130
5686	3.7548069	5750	3.7596678	5814	3.7644750	5878	3.7692296	5942	3.7739326	6006	3.7785853
5687	3.7548832	5751	3.7597434	5815	3.7645497	5879	3.7693035	5943	3.7740057	6007	3.7786576
5688	3.7549596	5752	3.7598189	5816	3.7646244	5880	3.7693773	5944	3.7740788	6008	3.7787299
5689	3.7550359	5753	3.7598944	5817	3.7646991	5881	3.7694512	5945	3.7741519	6009	3.7788022
5690	3.7551123	5754	3.7599699	5818	3.7647737	5882	3.7695250	5946	3.7742249	6010	3.7788745
5691	3.7551886	5755	3.7600453	5819	3.7648484	5883	3.7695988	5947	3.7742979	6011	3.7789467
5692	3.7552649	5756	3.7601208	5820	3.7649230	5884	3.7696727	5948	3.7743710	6012	3.7790190
5693	3.7553412	5757	3.7601962	5821	3.7649976	5885	3.7697465	5949	3.7744440	6013	3.7790912
5694	3.7554175	5758	3.7602717	5822	3.7650722	5886	3.7698203	5950	3.7745170	6014	3.7791634
5695	3.7554937	5759	3.7603471	5823	3.7651468	5887	3.7698940	5951	3.7745899	6015	3.7792356
5696	3.7555700	5760	3.7604225	5824	3.7652214	5888	3.7699678	5952	3.7746629	6016	3.7793078
5697	3.7556462	5761	3.7604979	5825	3.7652959	5889	3.7700416	5953	3.7747359	6017	3.7793800
5698	3.7557224	5762	3.7605733	5826	3.7653705	5890	3.7701153	5954	3.7748088	6018	3.7794522
5699	3.7557987	5763	3.7606486	5827	3.7654450	5891	3.7701890	5955	3.7748818	6019	3.7795243
5700	3.7558749	5764	3.7607240	5828	4.76551[illegible]	5892	3.7702627	5956	3.7749547	6020	3.7795965
5701	3.7559510	5765	3.7607993	5829	3.7655941	5893	3.7703364	5957	3.7750276	6021	3.7796686
5702	3.7560272	5766	3.7608746	5830	3.7656686	5894	3.7704101	5958	3.7751005	6022	3.7797408
5703	3.7561034	5767	3.7609500	5831	3.7657430	5895	3.7704838	5959	3.7751734	6023	3.7798129
5704	3.7561795	5768	3.7610253	5832	3.7858175	5896	3.7705575	5960	3.7752463	6024	3.7798850
5705	3.7562556	5769	3.7611005	5833	3.7658920	5897	3.7706311	5961	3.7753191	6025	3.7799571
5706	3.7563318	5770	3.7611758	5834	3.7659664	5898	3.7707048	5962	3.7753920	6026	3.7700291
5707	3.7564079	5771	3.7612511	5835	3.7660409	5899	3.7707784	5963	3.7754648	6027	3.7801012
5708	3.7564840	5772	3.761326[illegible]	5836	3.7661153	5900	3.7708520	5964	3.7755376	6028	3.7801732
5709	3.7565600	5773	3.7614016	5837	3.7661897	5901	3.7709256	5965	3.7756104	6029	3.7802453
5710	3.7566361	5774	3.7614768	5838	3.7662641	5902	3.7709992	5966	3.7756832	6030	3.7803173
5711	3.7567122	5775	3.7615520	5839	3.7663385	5903	3.7710728	5967	3.7757560	6031	3.7803893
5712	3.7567882	5776	3.7616272	5840	3.7664128	5904	3.7711463	5968	3.7758288	6032	3.7804613
5713	3.7568642	5777	3.7617024	5841	3.7664872	5905	3.7712199	5969	3.7759016	6033	3.7805333
5714	3.7569402	5778	3.7617775	5842	3.7665616	5906	3.7712934	5970	3.7759743	6034	3.7806053
5715	3.7570162	5779	3.7618527	5843	3.7666359	5907	3.7713670	5971	3.7760471	6035	3.7806773
5716	3.7570922	5780	3.7619278	5844	3.7667102	5908	3.7714405	5972	3.7761198	6036	3.7807492
5717	3.7571682	5781	3.7620030	5845	3.7667845	5909	3.7715140	5973	3.7761925	6037	3.7808212
5718	3.7572441	5782	3.7620781	5846	3.7668588	5910	3.7715875	5974	3.7762652	6038	3.7808931
5719	3.7573201	5783	3.7621532	5847	3.7669331	5911	3.7716610	5975	3.7763379	6039	3.7809650
5720	3.7573960	5784	3.7622283	5848	3.7670074	5912	3.7717344	5976	3.7764106	6040	3.7810369
5721	3.7574719	5785	3.7623034	5849	3.7670816	5913	3.7718079	5977	3.7764133	6041	3.7811088
5722	3.7575479	5786	3.7623784	5850	3.7671559	5914	3.7718813	5978	3.7765559	6042	3.7811807
5723	3.7576237	5787	3.7624535	5851	3.7672301	5915	3.7719547	5979	3.7766286	6043	2.7812526
5724	3.7576996	5788	3.7625285	5852	3.7673043	5916	3.7720282	5980	3.7767012	6044	3.7813245

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
6045	3.7813963	6111	3.7861123	6177	3.7907776	6243	3.7953933	6309	3.7999605	6375	3.8044802
6046	3.7814681	6112	3.7861833	6178	3.7908479	6244	3.79546 9	6310	3.8000294	6376	3.8045483
6047	3.7815400	6113	3.7862544	6179	3.7909182	6245	3.7955324	6311	3.8000982	6377	3.8046164
6048	3.7816118	6114	3.7863254	6180	3.7909885	6246	3.7956020	6312	3.8001670	6378	3.8046845
6049	3.7816836	6115	3.7863965	6181	3.7910587	6247	3.7956715	6313	3.8002358	6379	3.8047526
6050	3.7817554	6116	3.7864675	6182	3.7911290	6248	3.7957410	6314	3.8003046	6380	3.8048207
6051	3.7818272	6117	3.7865385	6183	3.7911992	6249	3.7958105	6315	3.8003734	6381	3.8048887
6052	3.7818989	6118	3.7866095	6184	3.7912695	6250	3.7958800	6316	3.8004421	6382	3.8049568
6053	3.7819707	6119	3.7866805	6185	3.7913397	6251	3.7959495	6317	3.8005109	6383	3.8050248
6054	3.7820424	6120	3.7867514	6186	3.7914099	6152	3.7960190	6318	3.8005796	6384	3.8050929
6055	3.7821141	6121	3.7868224	6187	3.7914801	6253	3.7960884	6319	3.8006484	6385	3.8051609
6056	3.7821859	6122	3.7868933	6188	3.7915503	6254	3.7961579	6320	3.8007171	6386	3.8052289
6057	3.7822576	6123	3.7869643	6189	3.7916205	6255	3.7962273	6321	3.8007858	6387	3.8052969
6058	3.7823293	6124	3.7870352	6190	3.7916906	6256	3.7962967	6322	3.8008545	6388	3.8053649
6059	3.7824010	6125	3.7871061	6191	3.7917608	6257	3.7963662	6323	3.8009232	6389	3.8054329
6060	3.7824726	6126	3.7871770	6192	3.7918309	6258	3.7964356	6324	3.8009919	6390	3.8055009
6061	3.7825443	6127	3.7872479	6193	3.7919011	6259	3.7965050	6325	3.8010605	6391	3.8055688
6062	3.7826159	6128	3.7873188	6194	3.7919712	6260	3.7965743	6326	3.8011292	6392	3.8056368
6063	3.7826876	6129	3.7873896	6195	3.7920413	6261	3.7966437	6327	3.8011978	6393	3.8057047
6064	3.7827592	6130	3.7874605	6196	3.7921114	6262	3.7967131	6328	3.8012665	6394	3.8057726
6065	3.7828308	6131	3.7875313	6197	3.7921815	6263	3.7967824	6329	3.8013351	6395	3.8058405
6066	3.7829024	6132	3.7876021	6198	3.7922516	6264	3.7968517	6330	3.8014037	6396	3.8059085
6067	3.7829740	6133	3.7876730	6199	3.7923216	6265	3.7969211	6331	3.8014723	6397	3.8059763
6068	3.7830456	6134	3.7877438	6200	3.7923917	6266	3.7969904	6332	3.8015409	6398	3.8060442
6069	3.7831171	6135	3.7878146	6201	3.7924617	6267	3.7970597	6333	3.8016095	6399	3.8061121
6070	3.7831887	6136	3.7878853	6202	3.7925318	6268	3.7971290	6334	3.8016781	6400	3.8061800
6071	3.7832602	6137	3.7879561	6203	3.7926018	6269	3.7971983	6335	3.8017466	6401	3.8062478
6072	3.7833318	6138	3.7880269	6204	3.7926718	6270	3.7972675	6336	3.8018152	6402	3.8063157
6073	3.7834033	6139	3.7880976	6205	3.7927418	6271	3.7973368	6337	3.8018837	6403	3.8063835
6074	3.7834748	6140	3.7881684	6206	3.7928118	6272	3.7974060	6338	3.8019522	6404	3.8064513
6075	3.7835463	6141	3.7882391	6207	3.7928817	6273	3.7974753	6339	3.8020208	6405	3.8065191
6076	3.7836178	6142	3.7883098	6208	3.7929517	6274	3.7975445	6340	3.8020893	6406	3.8065869
6077	3.7836892	6143	3.7883805	6209	3.7930217	6275	3.7976137	6341	3.8021578	6407	3.8066547
6078	3.7837607	6144	3.7884512	6210	3.7930916	6276	3.7976829	6342	3.8022262	6408	3.8067225
6079	3.7838321	6145	3.7885219	6211	3.7931615	6277	3.7977521	6343	3.8022947	6409	3.8067903
6080	3.7839036	6146	3.7885926	6212	3.7932314	6278	3.7978213	6344	3.8023632	6410	3.8068580
6081	3.7839750	6147	3.7886632	6213	3.7933014	6279	3.7978505	6345	3.8024316	6411	3.8069258
6082	3.7840464	6148	3.7887339	6214	3.7933712	6280	3.7979596	6346	3.8025001	6412	3.8069935
6083	3.7841178	6149	3.7888045	6215	3.7934411	6281	3.7980288	6347	3.8025685	6413	3.8070612
6084	3.7841892	6150	3.7888751	6216	3.7935110	6282	3.7980979	6348	3.8026369	6414	3.8071290
6085	3.7842606	6151	3.7889457	6217	3.7935809	6283	3.7981671	6349	3.8027053	6415	3.8071967
6086	3.7843319	6152	3.7890163	6218	3.7936507	6284	3.7982362	6350	3.8027737	6416	3.8072644
6087	3.7844033	6153	3.7890869	6219	3.7937206	6285	3.7983053	6351	3.8028421	6417	3.8073020
6088	3.7844746	6154	3.7891575	6220	3.7938904	6286	3.7983744	6352	3.8029105	6418	3.8073997
6089	3.7845460	6155	3.7892281	6221	3.7938602	6287	3.7984435	6353	3.8029789	6419	3.8074674
6090	3.7846173	6156	3.7892986	6222	3.7939300	6288	3.7985125	6354	3.8030472	6420	3.8075350
6091	3.7846886	6157	3.7893691	6223	3.7939998	6289	3.7985816	6355	3.8031156	6421	3.8076027
6092	3.7847599	6158	3.7894397	6224	3.7940696	6290	3.7986506	6356	3.8031839	6422	3.8076703
6093	3.7848312	6159	3.7895102	6225	3.7941394	6291	3.7987197	6357	3.8032522	6423	3.8077379
6094	3.7849024	6160	3.7895807	6226	3.7942091	6292	3.7987887	6358	3.8033205	6424	3.8078055
6095	3.7849737	6161	3.7896512	6227	3.7942789	6293	3.7988577	6359	3.8033888	6425	3.8078731
6096	3.7850450	6162	3.7897217	6226	3.7943486	6294	3.7989267	6360	3.8034571	6426	3.8079407
6097	3.7851162	6163	3.7897922	6229	3.7944183	6295	3.7989957	6361	3.8035254	6427	3.8080083
6098	3.7851874	6164	3.7898626	6230	3.7944880	6296	3.7990647	6362	3.8035937	6428	3.8080759
6099	3.7852586	6165	3.7899331	6231	3.7945578	6297	3.7991337	6363	3.8036619	6429	3.8081434
6100	3.7853298	6166	3.7900015	6232	3.7946274	6298	3.7992027	6364	3.8037302	6430	3.8082110
6101	3.7854010	6167	3.7900739	6233	3.7946971	6299	3.7992716	6365	3.8037984	6431	3.8082785
6102	3.7854722	6168	3.7901444	6234	3.7947668	6300	3.7993405	6366	3.8038666	6432	3.8083460
6103	3.7855434	6169	3.7902148	6235	3.7948365	6301	3.7994095	6367	3.8039348	6433	3.8084136
6104	3.7856145	6170	3.7902852	6236	3.7949061	6302	3.7994784	6368	3.8040031	6434	3.8084811
6105	3.7856857	6171	3.7903555	6237	3.7949757	6303	3.7995473	6369	3.8040712	6435	3.8085485
6106	3.7857568	6172	3.7904259	6238	3.7950454	6304	3.7996162	6370	3.8041394	6436	3.8086160
6107	3.7858279	6173	3.7904963	6239	3.7951150	6305	3.7996851	6371	3.8042076	6437	3.8086835
6108	3.7858990	6174	3.7905666	6240	3.7951846	6306	3.7997540	6372	3.8042758	6438	3.8087510
6109	3.7859701	6175	3.7906370	6241	3.7952542	6307	3.7998228	6373	3.8043439	6439	3.8088184
6110	3.7860412	6176	3.7907073	6242	3.7953238	6308	3.7998917	6374	3.8044121	6440	3.8088859

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
6441	3.8089533	6507	3.8133808	6573	3.8177636	6839	3.8221027	6705	3.8263988	6771	3.8306528
6442	3.8090207	6508	3.8134475	6574	3.8178297	6640	3.8221681	6706	3.8264635	6772	3.8307169
6443	3.8090881	6509	3.8135143	6575	3.8178958	6641	3.8222335	6707	3.8265283	6773	3.8307811
6444	3.8091555	6510	3.8135810	6576	3.8179618	6642	3.8222989	6708	3.8265931	6774	3.8308452
6445	3.8092229	6511	3.8136477	6577	3.8180278	6643	3.8223643	6709	3.8266578	6775	3.8309093
6446	3.8092903	6512	3.8137144	6578	3.8180939	6644	3.8224296	6710	3.8267225	6776	3.8309734
6447	3.8093577	6513	3.8137811	6579	3.8181599	6645	3.8224950	6711	3.8267872	6777	3.8310375
6448	3.8094250	6514	3.8138478	6580	3.8182259	6646	3.8225603	6712	3.8268519	6778	3.8311016
6449	3.8094924	6515	3.8139144	6581	3.8182919	6647	3.8226257	6713	3.8269166	6779	3.8311656
6450	3.8095597	6516	3.8139811	6582	3.8183579	6648	3.8226910	6714	3.8269813	6780	3.8312297
6451	3.8096270	6517	3.8140477	6583	3.8184239	6649	3.8227563	6715	3.8270460	6781	3.8312937
6452	3.8096944	6518	3.8141144	6584	3.8184898	6650	3.8228216	6716	3.8271107	6782	3.8313578
6453	3.8097617	6519	3.8141810	6585	3.8185558	6651	3.8228869	6717	3.8271753	6783	3.8314218
6454	3.8098290	6520	3.8142476	6586	3.8186217	6652	3.8229522	6718	3.8272400	6784	3.8314858
6455	3.8098962	6521	3.8143142	6587	3.8186877	6653	3.8230175	6719	3.8273046	6785	3.8315499
6456	3.8099635	6522	3.8143808	6588	3.8187536	6654	3.8230828	6720	3.8273693	6786	3.8316139
6457	3.8100308	6523	3.8144474	6589	3.8188195	6655	3.8231481	6721	3.8274339	6787	3.8316778
6458	3.8100980	6524	3.8145140	6590	3.8188854	6656	3.8232133	6722	3.8274925	6788	3.8317418
6459	3.8101653	6525	3.8145805	6591	3.8189513	6657	3.8232786	6723	3.8275631	6789	3.8318058
6460	3.8102325	6526	3.8146471	6592	3.8190172	6658	3.8233438	6724	3.8276277	6790	3.8318698
6461	3.8102997	6527	3.8147136	6593	3.8190831	6659	3.8234090	6725	3.8276923	6791	3.8319337
6462	3.8103670	6528	3.8147801	6594	3.8191489	6660	3.8234742	6726	3.8277569	6792	3.8319977
6463	3.8104342	6529	3.8148467	6595	3.8192148	6661	3.8235394	6727	3.8278214	6793	3.8320616
6464	3.8105013	6530	3.8149132	6596	3.8192806	6662	3.8236046	6728	3.8278860	6794	3.8321255
6465	3.8105685	6531	3.8149797	6597	3.8193465	6663	3.8236698	6729	3.8279505	6795	3.8321895
6466	3.8106357	6532	3.8150462	6598	3.8194123	6664	3.8237350	6730	3.8280151	6796	3.8322534
6467	3.8107029	6533	3.8151127	6599	3.8194781	6665	3.8238001	6731	3.8280796	6797	3.8323173
6468	3.8107700	6534	3.8151791	6600	3.8195439	6666	3.8238653	6732	3.8281441	6798	3.8323816
6469	3.8108371	6535	3.8152456	6601	3.8196097	6667	3.8239305	6733	3.8282086	6799	.8324450
6470	3.8109043	6536	3.8153120	6602	3.8196755	6668	3.8239956	6734	3.8282731	6800	3.8325089
6471	3.8109714	6537	3.8153785	6603	3.8197413	6669	3.8240607	6735	3.8283376	6801	3.8325728
6472	3.8110385	6538	3.8154449	6604	3.8198071	6670	3.8241258	6736	3.8284021	6802	3.8316366
6473	3.8111056	6539	3.8155113	6605	3.8198728	6671	3.8241909	6737	3.8284665	6803	3.8327005
6474	3.8111727	6540	3.8155777	6606	3.8199386	6672	3.8242560	6738	3.8285310	6804	3.8327643
6475	3.8112398	6541	3.8156441	6607	3.8200043	6673	3.8243211	6739	3.8285955	6805	3.8328281
6476	3.8113068	6542	3.8157105	6608	3.8200700	6674	3.8243862	6740	3.828[illegible]9	6806	3.8328919
6477	3.8113739	6543	3.8157769	6609	3.8201358	6675	3.8244513	6741	3.8287243	6807	3.8329558
6478	3.8114409	6544	3.8158433	6610	3.8202015	6676	3.8245163	6742	3.8287887	6808	3.8330195
6479	3.8115080	6545	3.8159096	6611	3.8202672	6677	3.8245814	6743	3.8288532	6809	3.8330833
6480	3.8115750	6546	3.8159760	6612	3.8203328	6678	3.8246464	6744	3.8289176	6810	3.8331471
6481	3.8116420	6547	3.8160423	6613	3.8203985	6679	3.8247114	6745	3.8289820	6811	3.8332109
6482	3.8117090	6548	3.8161087	6614	3.8204642	6680	3.8247765	6746	3.8290463	6812	3.8332746
6483	3.8117760	6549	3.8161750	6615	3.8205298	6681	3.8248415	674-	3.8291107	6813	3.8333384
6484	3.8118430	6550	3.8162413	6616	3.8205955	6682	3.8249065	6748	3.8291751	6814	3.8334021
6485	3.8119100	6551	3.8163076	6617	3.8206611	6683	3.8249715	6749	3.8292394	6805	3.8334659
6486	3.8119769	6552	3.8163739	6618	3.8207268	6684	3.8250364	6750	3.8293038	6816	3.8335296
6487	3.8120439	6553	3.8164402	6619	3.8207924	6685	3.8251014	6751	3.8293681	6817	3.8335933
6488	3.8121108	6554	3.8165064	6620	3.8208580	6686	3.8251664	6752	3.8294324	6818	3.8336570
6489	3.8121778	6555	3.8165727	6621	3.8209236	6687	3.8252313	6753	3.8294967	6819	3.8337207
6490	3.8122447	6556	3.8166389	6622	3.8209892	6688	3.8252963	6754	3.8295611	6820	3.8337844
6491	3.8123116	6557	3.8167052	6623	3.8210548	6689	3.8253612	6755	3.8296254	6821	3.8338480
6492	3.8123785	6558	3.8167714	6624	3.8211203	6690	3.8254261	6756	3.8296896	6822	3.8339117
6493	3.8124454	6553	3.8168376	6625	3.8211859	6691	3.8254910	6757	3.8297539	6823	3.8339754
6494	3.8125123	6560	3.8169038	6626	3.8212514	6692	3.8255559	6758	3.8298182	6824	3.8340390
6495	3.8125792	6561	3.8169700	6627	3.8213170	6693	3.8256208	6759	3.8298824	6825	3.8341027
6496	3.8126460	6562	3.8170362	6628	3.8213825	6694	3.8256857	6760	3.8299467	6826	3.8341663
6497	3.8127129	6563	3.8171024	6629	3.8214480	6695	3.8257506	6761	3.8300109	6827	3.8342299
6498	3.8127797	6564	3.8171686	6630	3.8215135	6696	3.8258154	6762	3.8300752	6828	3.8342935
6499	3.8128465	6565	3.8172347	6631	3.8215790	6597	3.8258803	6763	3.8301394	6829	3.8343571
6500	3.8129134	6566	3.8173009	6632	3.8216445	6698	3.8259451	6764	3.8302036	6830	3.8344207
6501	3.8129802	6567	3.8173670	6633	3.8217100	6699	3.8260100	6765	3.8302678	6831	3.8344843
6502	3.8130470	6568	3.8174331	6634	3.8217755	6700	3.8260748	6766	3.9303320	683.	3.8345479
6503	3.8131138	6569	3.8174993	6635	3.8218409	6701	3.8261396	6767	3.8303962	6833	3.8346114
6504	3.8131805	6570	3.8175654	6636	3.8219064	6702	3.8262044	6768	3.8304603	6834	3.8346750
6505	3.8132473	6571	3.8176315	6637	3.8219718	6703	3.8262692	6769	3.8305245	6835	3.8347385
6506	3.8133148	6572	3.8176976	6638	3.8220372	6704	3.8263340	6770	3.8305887	6836	3.8348021

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
6837	3.8348656	6903	3.8390379	6969	3.8431705	7035	3.8472641	7101	3.8513195	7167	3.8553374
6838	3.8349291	6904	3.8391008	6970	3.8432328	7036	3.8473258	7102	3.8513807	7168	3.8553980
6839	3.8349926	6905	3.8391637	6971	3.8432951	7037	3.8473876	7103	3.8514418	7169	3.8554589
6840	3.8350561	6906	3.8392266	6972	3.8433574	7038	3.8474493	7104	3.8515030	7170	3.8555192
6841	3.8351196	6907	3.8392895	6973	3.8434197	7039	3.8475110	7105	3.8515641	7171	3.8555797
6842	3.8351831	6908	3.9393523	6974	3.8434819	7040	3.8475727	7106	3.8516252	7172	3.8556403
6843	3.8352465	6909	3.8394152	6975	3.8435442	7041	3.8476343	7107	3.8516863	7173	3.8557008
6844	3.8353100	6910	3.8394780	6976	3.8436065	7042	3.8470900	7108	3.8517474	7174	3.8557614
6845	3.8353735	6911	3.8395409	6977	3.8436687	7043	3.8477577	7109	3.8518085	7175	3.8558219
6846	3.8354369	6912	3.8396037	6978	3.8437310	7044	3.8478193	7110	3.8518696	7176	3.8558824
6847	3.8355003	6913	3.8396666	6979	3.8437932	7045	3.8478810	7111	3.8519307	7177	3.8559429
6848	3.8355638	6914	3.8397294	6980	3.8438554	7046	3.8479426	7112	3.8519917	7178	3.8560035
6849	3.8356272	6915	3.8397922	6981	3.8439176	7047	3.8480043	7113	3.8520528	7179	3.8560640
6850	3.8356906	6916	3.8398550	6982	3.8439798	7048	3.8480659	7114	3.8521139	7180	3.8561244
6851	3.8357540	6917	3.8399178	6983	3.8440420	7049	3.8481275	7115	3.8521749	7181	3.8561849
6852	3.8358174	6918	3.8399806	6984	3.8441042	7050	3.8481891	7116	3.8522359	7182	3.8562454
6853	3.8358807	6919	3.8400433	6985	3.8441664	7051	3.8482507	7117	3.8522970	7183	3.8563059
6854	3.8359441	6920	3.8401061	6986	3.8442286	7052	3.8483123	7118	3.8523580	7184	3.8563663
6855	3.8360075	6921	3.8401688	6987	3.8442907	7053	3.8483739	7119	3.8524190	7185	3.8564268
6856	3.8360708	6922	3.8402316	6988	3.8443529	7054	3.8484355	7120	3.8524800	7186	3.8564872
6857	3.8361341	6923	3.8402943	6989	3.8444150	7055	3.8484970	7121	3.8535410	7187	3.8565476
6858	3.8361975	6924	3.8403571	6990	3.8444772	7056	3.8485586	7122	3.8526020	7188	3.8566081
6859	3.8362608	6925	3.8404198	6991	2.8445393	7057	3.8486201	7123	3.8526629	7189	3.8566685
6860	3.8353241	6926	3.8404825	6992	3.8446014	7058	3.8486817	7124	3.8527239	7190	3.8567289
6861	3.8363874	6927	3.8405452	6993	3.8446635	7059	3.8487432	7125	3.8527849	7191	3.8567893
6862	3.8364507	6928	3.8406079	6994	3.8447256	7060	3.8488047	7126	3.8528458	7192	3.8568497
6863	3.8365140	6929	3.8406706	6995	3.8474877	7061	3.8488662	7127	3.8529068	7193	3.8569101
6864	3.8365773	6930	3.8407332	6996	3.8448498	7062	3.8489277	7128	3.8529677	7194	3.8569704
6865	3.8366405	6931	3.8407959	6997	3.8449119	7063	3.8489892	7129	3.8530286	7195	3.8570308
6866	3.8367038	6932	3.8408586	6998	3.8449739	7064	3.8490507	7130	3.8530895	7196	3.8570912
6867	3.8367670	6933	3.8409212	6999	3.8450360	7065	3.8491122	7131	3.8531504	7197	3.8571515
6868	3.8368303	6934	3.8409838	7000	3.8450980	7066	3.8491736	7132	3.8532113	7198	3.8572118
6869	3.8368935	6935	3.8410465	7001	3.8451601	7067	3.8492351	7133	3.8532722	7199	5.8572722
6870	3.8369567	6936	3.8411091	7002	3.8452221	7068	3.8492965	7134	3.8533331	7200	3.8573325
6871	3.8370199	6937	3.5411717	7003	3.8452841	7069	3.8493580	7135	3.8533940	7201	3.8573928
6872	3.8370832	6938	3.8412343	7004	3.8453461	7070	3.8494194	7136	3.8534548	7202	3.8574531
6873	3.8371463	6939	3.8412969	7005	3.8454081	7071	3.8494808	7137	3.8535157	7203	3.8575134
6874	3.8372095	6940	3.8413595	7006	3.8454701	7072	3.8495423	7138	3.8535765	7204	3.8575737
6875	3.8372727	6941	3.8414220	7007	3.8455321	7073	3.8496037	7139	3.8536374	7205	3.8576340
6876	3.8373359	6942	3.8414846	7008	3.8455941	7074	3.8496651	7140	3.8536982	7206	3.8576943
6877	3.8373990	6943	3.8415472	7009	3.8456561	7075	3.8497264	7141	3.8537590	7207	3.8577545
6878	3.8374622	6944	3.8416097	7010	3.8457180	7076	3.8497878	7142	3.8538198	7208	3.8578148
6879	3.8375253	6945	3.8416722	7011	3.8457800	7077	3.8498492	7143	3.8538806	7209	3.8578750
6880	3.8375884	6946	3.8417348	7012	3.8458419	7078	3.8499106	7144	3.8539414	7210	3.8579353
6881	3.8376516	6947	3.8417973	7013	3.8459038	7079	3.8499719	7145	3.8540022	7211	3.8579955
6882	3.8377147	6948	3.8418598	7014	3.8459658	7080	3.8500333	7146	3.8540630	7212	3.8580557
6883	3.8377778	6949	3.8419223	7015	3.8460277	7081	3.8500946	7147	3.8541238	7213	3.8581159
6884	3.8378409	6950	3.8419848	7016	3.8460896	7082	3.8501559	7148	3.8541845	7214	3.8581761
6885	3.8379039	6951	3.8420473	7017	3.8461515	7083	3.8502172	7149	3.8542453	7215	3.8582363
6886	3.8379670	6952	3.8421098	7018	3.8462134	7084	3.8502786	7150	3.8543960	7216	3.8582965
6887	3.8380301	6953	3.8421722	7019	.8462752	7085	3.8503399	7151	3.8543668	7217	3.8583567
6888	3.8380931	6954	3.8422347	7020	3.8463371	7086	3.8504011	7152	3.8544275	7218	3.8584169
6889	3.8381562	6955	3.8422971	7021	3.8463990	7087	3.8504624	7153	3.8544882	7219	3.8584770
6890	3.8382192	6956	3.8423596	7022	3.8464608	7088	3.8505237	7154	3.8545489	7220	3.8585372
6891	3.8382822	6957	3.8424220	7023	3.8465227	7089	3.8505850	7155	3.8546096	7221	3.8585973
6892	3.8383453	6958	3.8424844	7024	3.8465845	7090	3.8506462	7156	3.8546703	7222	3.8586575
6893	3.8384083	6959	3.8425468	7025	3.8466463	7091	3.8507075	7157	3.8547310	7223	3.8587176
6894	3.8384713	6960	3.8426092	7026	3.8467081	7092	3.8507687	7158	3.8547917	7224	3.8587777
6895	3.8385343	6961	3.8426716	7027	3.8467700	7093	3.8508300	7159	2.8548524	7225	3.8588378
6896	3.8385973	6962	3.8427340	7028	3.8468318	7094	3.8508912	7160	3.8549130	7226	3.8588980
6897	3.8386602	6963	3.8427964	7029	3.8468935	7095	3.8509524	7161	3.8549737	7227	3.8589581
6898	3.8387232	6964	3.8428588	7030	3.8469553	7096	3.8510136	7162	3.8550343	7228	3.8590181
6899	3.8387861	6965	3.8429211	7031	3.8470171	7097	3.8510748	7163	3.8550949	7229	3.8590782
6900	3.8388491	6966	.8429835	7032	3.8470789	7098	3.8511360	7164	3.8551556	7230	3.8591383
6901	3.8389120	6967	3.8430458	7033	3.8471406	7099	3.8511972	7165	3.8552162	7231	3.8591984
6902	3.8389750	6968	3.8431081	7034	3.8372024	7100	2.8512583	7166	3.8552768	7232	2.8592584

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
7234	3.8593785	7300	3.8633229	7366	3.8672317
7235	3.8594385	7301	3.8633823	7367	3.8672907
7236	3.8594986	7302	3.8634418	7368	3.8673496
7237	3.8595586	7303	3.8635013	7369	3.8674086
7238	3.8596186	7304	3.8635608	7370	3.8674675
7239	3.8596786	7305	3.8636202	7371	3.8675264
7240	3.8597386	7306	3.8636797	7372	3.8675853
7241	3.8597985	7307	3.8637391	7373	3.8676442
7242	3.8598585	7308	3.8637985	7374	3.8677031
7243	3.8599185	7309	3.8638580	7375	3.8677620
7244	3.8599784	7310	3.8639174	7376	3.8678209
7245	3.8600384	7311	3.8639768	7377	3.8678798
7246	3.8600983	7312	3.8640362	7378	3.8679386
7247	3.8601583	7313	3.8640956	7379	3.8679975
7248	3.8602182	7314	3.8641550	7380	3.8680564
7249	3.8602781	7315	3.8641143	7381	3.8681152
7250	3.8603380	7316	3.8642737	7382	3.8681740
7251	3.8603979	7317	3.8643331	7383	3.8682329
7252	3.8604578	7318	3.8643924	7384	3.8682917
7253	3.8605177	7319	3.8644517	7385	3.8683505
7254	3.8605776	7320	3.8645111	7385	3.8684093
7255	3.8606374	7321	3.8645704	7387	3.8684681
7256	3.8606973	7322	3.8646297	7388	3.8685269
7257	3.8607571	7323	3.8646890	7389	3.8685857
7258	3.8608180	7324	3.8647483	7390	3.8686444
7259	3.8608768	7325	3.8648076	7391	3.8687032
7260	3.8609366	7326	3.8648669	7392	3.8687620
7261	3.8609964	7327	3.8649262	7393	3.8688207
7262	3.8610562	7328	3.86498[illegible]	7394	3.8688794
7263	3.8611160	7329	3.8650447	7395	3.8689382
7264	3.8611758	7330	3.8651040	7396	3.8689969
7265	3.8612356	7331	3.8651632	7397	3.8690556
7266	3.8612954	7332	3.8652225	7398	3.8691143
7267	3.8613552	7333	3.8652817	7399	3.8691730
7268	3.8614149	7334	3.8653409	7400	3.8692317
7269	3.8614747	7335	3.8654001	7401	3.8692904
7270	3.8615344	7336	3.8654593	7402	3.8693491
7271	3.8615941	7337	3.8655185	7403	3.8694077
7272	3.8616539	7338	3.8655777	7404	3.8694664
7273	3.8617136	7339	3.8656369	7405	3.8695251
7274	3.8617733	7340	3.8656961	7406	3.8695837
7275	3.8618330	7341	3.8657552	7407	3.8696423
7276	3.8618927	7342	3.8658144	7408	3.8697010
7277	3.8619524	7343	3.8658735	7409	3.8697596
7278	3.8620120	7344	3.8659327	7410	3.8698182
7279	3.8620717	7345	3.8659918	7411	3.8698768
7280	3.8621314	7346	3.8660509	7412	3.8699354
7281	3.8621910	7347	3.8661100	7413	3.8699940
7282	3.8622507	7348	3.8661691	7414	3.8700526
7283	3.8623103	7349	3.8662282	7415	3.8701111
7284	3.8623699	7350	3.8662873	7416	3.8701697
7285	3.8624296	7351	3.8663464	7417	3.8702283
7286	3.8624892	7352	3.8664055	7418	3.8702858
7287	3.8625488	7353	3.8664646	7419	3.8703454
7288	3.8626084	7354	3.8665236	7420	3.8704039
7289	3.8626679	7355	3.8665827	7421	3.8704624
7290	3.8627275	7356	3.8666417	7422	3.8705209
7291	3.8627871	7357	3.8667008	7423	3.8705795
7292	3.8628467	7358	3.8667598	7424	3.8706380
7293	3.8629062	7359	3.8668188	7425	3.8706965
7294	3.8629658	7360	3.8668778	7426	3.8707549
7295	3.8630253	7361	3.8669368	7427	3.8708134
7296	3.8630842	7362	3.8669958	7428	3.8708719
7297	3.8631443	7363	3.8670548	7429	3.8709304
7298	3.8632039	7364	3.8671138	7430	3.8709888
7299	3.8632634	7365	3.8671728	7431	3.8710473

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
7432	3.8711057	7498	3.8749454	7564	3.8787515
7433	3.8711641	7499	3.8750034	7565	3.8788089
7434	3.8712226	7500	3.8750613	7566	3.8788663
7435	3.8712810	7501	3.8751192	7567	3.8789237
7436	3.8713394	7502	3.8751771	7568	3.8789811
7437	3.8713978	7503	3.8752349	7569	3.8790385
7438	3.8714562	7504	3.8752928	7570	3.8790959
7439	3.8715146	7505	3.8753507	7571	3.8791532
7440	3.8715729	7506	3.8754086	7572	3.8792106
7441	3.8716313	7507	3.8754664	7573	3.8792680
7442	3.8716897	7508	3.8755243	7574	3.8793253
7443	3.8717480	7509	3.8755821	7575	3.8793826
7444	3.8718064	7510	3.8756399	7576	3.8794400
7445	3.8718647	7511	3.8756978	7577	3.8794973
7446	3.8719230	7512	3.8757556	7578	3.8795546
7447	3.8719814	7513	3.8758134	7579	3.8796119
7448	3.8720397	7514	3.8758712	7580	3.8796692
7449	3.8720980	7515	3.8759290	7581	3.8797265
7450	3.8721563	7516	3.8759868	7582	3.8797838
7451	3.8722146	7517	3.8760445	7583	3.8798411
7452	3.8722728	7518	3.8761023	7584	3.8798983
7453	3.8723311	7519	3.8761601	7585	3.8799556
7454	3.8723894	7520	3.8762178	7586	3.8800128
7455	3.8724476	7521	3.8762756	7587	3.8800701
7456	3.8725059	7522	3.8763333	7588	3.8801273
7457	3.8725641	7523	3.8763911	7589	3.8801840
7458	3.8726224	7524	3.8764488	7590	3.8802418
7459	3.8726806	7525	3.8765065	7591	3.8802990
7460	3.8727388	7526	3.8765642	7592	3.8803562
7461	3.8727970	7527	3.8766219	7593	3.8804134
7462	3.8728552	7528	3.8766796	7594	3.8804706
7463	3.8729134	7529	3.8767373	7595	3.8805278
7464	3.8729716	7530	3.8767950	7596	3.8805850
7465	3.8730298	7531	3.8768526	7597	3.8806421
7466	3.8730880	7532	3.8769103	7598	3.8806993
7467	3.8731461	7533	3.8769680	7599	3.8807564
7468	3.8732043	7534	3.8770256	7600	3.8808136
7469	3.8732624	7535	3.8770833	7601	3.8808707
7470	3.8733206	7536	3.8771409	7602	3.8809279
7471	3.8733787	7537	3.8771985	7603	3.8809850
7472	3.8734369	7538	3.8772561	7604	3.8810421
7473	3.8734950	7539	3.8773137	7605	3.8810992
7474	3.8735531	7540	3.8773713	7606	3.8811563
7475	3.8736112	7541	3.8774289	7607	3.8812134
7476	3.8736693	7542	3.8774865	7608	3.8812705
7477	3.8737274	7543	3.8775441	7609	3.8813276
7478	3.8737855	7544	3.8776017	7610	3.8813847
7479	3.8738435	7545	3.8776592	7611	3.8814417
7480	3.8739016	7546	3.8777168	7612	3.8814988
7481	3.8739597	7547	3.8777743	7613	3.8815558
7482	3.8740177	7548	3.8778319	7614	3.8816129
7483	3.8740757	7549	3.8778894	7615	3.8816999
7484	3.8741338	7550	3.8779469	7616	3.8817269
7485	3.8741918	7551	3.8780045	7617	3.8817840
7486	3.8742498	7552	3.8780620	7618	3.8818410
7487	3.8743078	7553	3.8781195	7619	3.8818980
7488	3.8743658	7554	3.8781770	7620	3.8819550
7489	3.8744238	7555	3.8782345	7621	3.8820120
7490	3.8744818	7556	3.8782919	7622	3.8820689
7491	3.8745398	7557	3.8783494	7623	3.8821259
7492	3.8745978	7558	3.8784069	7624	3.8821829
7493	3.8746557	7559	3.8784643	7625	3.8822398
7494	3.8747137	7560	3.8785218	7626	3.8822968
7495	3.8747716	7561	3.8785792	7627	3.8823537
7496	3.8748296	7562	3.8786367	7628	3.8824107
7497	3.8748875	7563	3.8786941	7629	3.8824676

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
7630	3.8825245	7696	3.8862651	7762	3.8899736	7828	3.8936508	7894	3.8972971	7960	3.9009131
7631	3.8825815	7697	3.8863215	7763	3.8900296	7829	3.8937063	7895	3.8973521	7961	3.9009676
7632	3.8826384	7698	3.8863779	7764	3.8900855	7830	3.8937618	7896	3.8974071	7962	3.9010222
7633	3.8826953	7699	3.8864343	7765	3.8901415	7831	3.8938172	7897	3.8974621	7963	3.9010767
7634	3.8827522	7700	3.8864907	7766	3.8901974	7832	3.8938727	7898	3.8975171	7964	3.9011313
7635	3.8828090	7701	3.8865471	7767	3.8902533	7833	3.8939281	7899	3.8975721	7965	3.9011858
7636	3.8828659	7702	3.8866035	7768	3.8903092	7834	3.8939836	7900	3.8976271	7966	3.9012403
7637	3.8829228	7703	3.8866599	7769	3.8903651	7835	3.8940390	7901	3.8976821	7967	3.9012948
7638	3.8829797	7704	3.8867163	7770	3.8904210	7836	3.8940944	7902	3.8977370	7968	3.9013493
7639	3.8830365	7705	3.8867726	7771	3.8904769	7837	3.8941498	7903	3.8977920	7969	3.9014038
7640	3.8830934	7706	3.8868290	7772	3.8905328	7838	3.8942053	7904	3.8978469	7970	3.9014583
7641	3.8831502	7707	3.8868854	7773	3.8905887	7839	3.8942607	7905	3.8979019	7971	3.9015128
7642	3.8832070	7708	3.8869417	7774	3.8906445	7840	3.8943161	7906	3.8979568	7972	3.9015673
7643	3.8832639	7709	3.8869980	7775	3.8907004	7841	3.8943715	7907	3.8980117	7973	3.9016218
7644	3.8833207	7710	3.8870544	7776	3.8907562	7842	3.8944268	7908	3.8980667	7974	3.9016762
7645	3.8833775	7711	3.8871107	7777	3.8908121	7843	3.8944822	7909	3.8981216	7975	3.9017307
7646	3.8834343	7712	3.8871670	7778	3.8908679	7844	3.8945376	7910	3.8981765	7976	3.9017851
7647	3.8834911	7713	3.8872233	7779	3.8909238	7845	3.8945929	7911	3.8982314	7977	3.9018396
7648	3.8835479	7714	3.8872796	7780	3.8909796	7846	3.8946483	7912	3.8982863	7978	3.9018940
7649	3.8836047	7715	3.8873359	7781	3.8910354	7847	3.8947036	7913	3.8983412	7979	3.9019485
7650	3.8836614	7716	3.8873922	7782	3.8910912	7848	3.8947590	7914	3.8983960	7980	3.9020029
7651	3.8837182	7717	3.8874485	7783	3.8911470	7849	3.8948143	7915	3.8984509	7981	3.9020573
7652	3.8837750	7718	3.8875048	7784	3.8912028	7850	3.8948696	7916	3.8985058	7982	3.9021117
7653	3.8838317	7719	3.8875610	7785	3.8912586	7851	3.8949250	7917	3.8985606	7983	3.9021661
7654	3.8838885	7720	3.8876173	7786	3.8913144	7852	3.8949803	7918	3.8986155	7984	3.9022205
7655	3.8839452	7721	3.8876736	7787	3.8913702	7853	3.8950356	7919	3.8986703	7985	3.9022749
7656	3.8840019	7722	3.8877298	7788	3.8914259	7854	3.8950909	7920	3.8987252	7986	3.9023293
7657	3.8840586	7723	3.8877860	7789	3.8914817	7855	3.8951462	7921	3.8987800	7987	3.9023837
7658	3.8841154	7724	3.8878423	7790	3.8915375	7856	3.8952015	7922	3.8988348	7988	3.9024281
7659	3.8841721	7725	3.8878985	7791	3.8915932	7857	3.8952567	7923	3.8988897	7989	3.9024924
7660	3.8842288	7726	3.8879547	7792	3.8916489	7858	3.8953120	7924	3.8989445	7990	3.9025468
7661	3.8842855	7727	3.8880109	7793	3.8917047	7859	3.8953673	7925	3.8989993	7991	3.9026011
7662	3.8843421	7728	3.8880671	7794	3.8917604	7860	3.8954225	7926	3.8990541	7992	3.9026555
7663	3.8843988	7729	3.8881233	7795	3.8918161	7861	3.8954778	7927	3.8991089	7993	3.9027098
7664	3.8844555	7730	3.8881795	7796	3.8918718	7862	3.8955330	7928	3.8991636	7994	3.9027641
7665	3.8845122	7731	3.8882357	7797	3.8919275	7863	3.8955884	7929	3.8992184	7995	3.9028185
7666	3.8845688	7732	3.8882918	7798	3.8919832	7864	3.8956435	7930	3.8992732	7996	3.9028728
7667	3.8846255	7733	3.8883480	7799	3.8920389	7865	3.8956987	7931	3.8993279	7997	3.9029271
7668	3.8846821	7734	3.8884042	7800	3.8920946	7866	3.8957539	7932	3.8993827	7998	3.9029814
7669	3.8847387	7735	3.8884603	7801	3.8921503	7867	3.8957092	7933	3.8994375	7999	3.9030357
7670	3.8847954	7736	3.8885165	7802	3.8922059	7868	3.8958644	7934	3.8994922	8000	3.9030900
7671	3.8848520	7737	3.8885726	7803	3.8922616	7869	3.8959195	7935	3.8995469	8001	3.9031443
7672	3.8849086	7738	3.8886287	7804	3.8923173	7870	3.8959747	7936	3.8996017	8002	3.9031985
7673	3.8849652	7739	3.8886848	7805	3.8923729	7871	3.8960299	7937	3.8996564	8003	3.9032528
7674	3.8850218	7740	3.8887410	7806	3.8924285	7872	3.8960851	7938	3.8997111	8004	3.9033071
7675	3.8850784	7741	3.8887971	7807	3.8924842	7873	3.8961403	7939	2.8997658	8005	3.9033613
7676	3.8851350	7742	3.8888532	7808	3.8925398	7874	3.8961954	7940	3.8998205	8006	3.9034156
7677	3.8851915	7743	3.8889093	7809	3.8925954	7875	3.8962506	7941	3.8998752	8007	3.9034698
7678	3.8852481	7744	3.8889653	7810	3.8926510	7876	3.8963057	7942	3.8999299	8008	3.9035241
7679	3.8853047	7745	3.8890214	7811	3.8927066	7877	3.8963608	7943	3.8999846	8009	3.9035783
7680	3.8853612	7746	3.8890775	7812	3.8927622	7878	3.8964160	7944	3.9000392	8010	3.9036325
7681	3.8854178	7747	3.8891335	7813	3.8928178	7879	3.8964711	7945	3.9000939	8011	3.9036867
7682	3.8854743	7748	3.8891896	7814	3.8928734	7880	3.8965262	7946	3.9001486	8012	3.9037409
7683	3.8855308	7749	3.8892457	7815	3.8929290	7881	3.8965813	7947	3.9002032	8013	3.9037951
7684	3.8855874	7750	3.8893017	7816	3.8929845	7882	3.8966364	7948	3.9002579	8014	3.9038493
7685	3.8856439	7751	3.8893577	7817	3.8930401	7883	3.8966915	7949	3.9003125	8015	3.9039035
7686	3.8857004	7752	3.8894138	7818	3.8930957	7884	3.8967466	7950	3.9003671	8016	3.9039577
7687	3.8857569	7753	3.8894698	7819	3.8931512	7885	3.8968017	7951	3.9004218	8017	9.9040119
7688	3.8858134	7754	3.8895258	7820	3.8932067	7886	3.8948568	7952	3.9004764	8018	3.9040661
7689	3.8858699	7755	3.8895818	7821	3.8932623	7887	3.8969118	7953	3.9005310	8019	3.9041202
7690	3.8859263	7756	3.8896378	7822	3.8933178	7888	3.8969669	7954	3.9005856	8020	3.9041744
7691	3.8859828	7757	3.8896938	7823	3.8933733	7889	3.8970219	7955	3.9006402	8021	3.9042285
7692	3.8860393	7758	3.8897498	7824	3.8934288	7890	3.8970770	7956	3.9006948	8022	3.9042827
7693	3.8860957	7759	3.8898057	7825	3.8934841	7891	3.8971320	7957	3.9007494	8023	3.9043368
7694	3.8861522	7760	3.8898617	7826	3.8935398	7892	3.8971871	7958	3.9008039	8024	3.9043909
7695	3.8862086	7761	3.8899177	7827	3.8935953	7873	3.8972421	7059	3.9008585	8025	3.9044450

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
8026	3.9044992	8092	3.9080559	8158	3.9115837
8027	3.9045533	8093	3.9081095	8159	3.9116369
8028	3.9046074	8094	3.9081632	8160	3.9116902
8029	3.9046615	8095	3.9082169	8161	3.9117434
8030	3.9047155	8096	3.9082705	8162	3.9117966
8031	3.9047696	8097	3.9083241	8163	3.9118498
8032	3.9048237	8098	3.9083778	8164	3.9119030
8033	3.9048778	8099	3.9084314	8165	3.9119562
8034	3.9049318	8100	3.9084850	8166	3.9120094
8035	3.9049859	8101	3.9085386	8167	3.9120625
8036	3.9050399	8102	3.9085922	8168	3.9121157
8037	3.9050940	8103	3.9086458	8169	3.9121689
8038	3.9051480	8104	3.9086994	8170	3.9122220
8039	3.9052020	8105	3.9087530	8171	3.9122752
8040	3.9052560	8106	3.9088966	8172	3.9123233
8041	3.9053101	8107	3.9088602	8173	3.9123815
8042	3.9057641	8108	3.9089137	8174	3.9124346
8043	3.9054181	8109	3.9089673	8175	3.9124878
8044	3.9054721	8110	3.9090209	8176	3.9125409
8045	3.9055260	8111	3.9090744	8177	3.9125940
8046	3.9055800	8112	3.9091279	8178	3.9126471
8047	3.9056340	8113	3.9091815	8179	3.9127002
8048	3.9056880	8114	3.9092350	8180	3.9127533
8049	3.9057419	8115	3.9092885	8181	3.912806[illegible]
8050	3.9057959	8116	3.9093420	8182	3.912[illegible]595
8051	3.9058491	8117	3.9093955	8183	3.9129125
8052	3.9059038	8118	3.9094490	8184	3.9129656
8053	3.9059577	8119	3.9095025	8185	3.9130187
8054	3.9060116	8120	3.9095560	8186	3.9130717
8055	3.9060655	8121	3.9096095	8187	3.9131248
8056	3.9061195	8122	3.9096630	8188	3.9131778
8057	3.9061734	8123	3.9097164	8189	3.9132309
8058	3.9062273	8124	3.9097699	8190	3.9132839
8059	3.9062812	8125	3.9098234	8191	3.9133369
8060	3.9063350	8126	3.9098768	8192	3.9133899
8061	3.9063889	8127	3.9099302	8193	3.9134429
8062	3.9064428	8128	3.9099837	8194	3.9134959
8063	3.9064967	8129	3.9100371	8195	3.9135489
8064	3.9065505	8130	3.9100905	8196	3.9136019
8065	3.9066044	8131	3.9101440	8197	3.9136549
8066	3.9066582	8132	3.9101974	8198	3.9137079
8067	3.9067121	8133	3.9102508	8199	3.9137609
8068	3.9067659	8134	3.9103042	8200	3.9138139
8069	3.9068197	8135	3.9103575	8201	3.9138668
8070	3.9068735	8136	3.9104110	8202	3.9139198
8071	3.9069273	8137	3.9104643	8203	3.9139727
8072	3.9069812	8138	3.9105177	8204	3.9140256
8073	3.9070350	8139	3.9105710	8205	3.9140786
8074	3.9070887	8140	3.9106244	8206	3.9141315
8075	3.9071425	8141	3.9106777	8207	3.9141244
8076	3.9071963	8142	3.9107311	8208	3.9142373
8077	3.9072501	8143	3.9107844	8209	3.9142902
8078	3.9073038	8144	3.9108378	8210	3.9143432
8079	3.9073576	8145	3.9108911	8211	3.9143960
8080	3.9074114	8146	3.9109444	8212	3.9144489
8081	3.9074651	8147	3.9109977	8213	3.9145018
8082	3.9075188	8148	3.9110510	8214	3.9145547
8083	3.9075726	8149	3.9111043	8215	3.9146076
8084	3.9076263	8150	3.9111576	8216	3.9146604
8085	3.9076800	8151	3.9112109	8217	3.9147133
8086	3.9077337	8152	3.9112642	8218	3.9147661
8087	3.9077874	8153	3.9113174	8219	3.9148190
8088	3.9078411	8154	3.9113707	8220	3.9148718
8089	3.9078948	8155	3.9114240	8221	3.9149246
8090	3.9079485	8156	3.9114772	8222	3.9146775
8091	3.9080202	8157	3.9115305	8223	3.9150303

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
8224	3.9150831	8290	3.9185545	8356	3.9219984
8225	3.9151359	8291	3.9186069	8357	3.9220504
8226	3.9151887	8292	3.9186593	8358	3.9221024
8227	3.9152415	8293	3.9187117	8359	3.9221543
8228	3.9152943	8294	3.9187640	8360	3.9221063
8229	3.9153471	8295	3.9188164	8361	3.9222582
8230	3.9153998	8296	3.9188687	8362	3.9223102
8231	3.9154526	8297	3.9189211	8363	3.9223621
8232	3.9155054	8298	3.9189734	8364	3.9224140
8233	3.9155581	8299	3.9190258	8365	3.9224659
8234	3.9156109	8300	3.9190781	8366	3.9225179
8235	3.9156636	8301	3.9191304	8367	3.9225698
8236	3.9157163	8302	3.9191827	8368	3.9226217
8237	3.9157691	8303	3.9192350	8369	3.9226736
8238	3.9158218	8304	3.9192873	9370	3.9227255
8239	3.9158745	8305	3.9193396	8371	3.9227773
8240	3.9159272	8306	3.9193919	8372	3.9228292
8241	3.9159799	8307	3.9194442	8373	3.9228811
8242	3.9160326	8308	3.9194965	8374	3.9229330
8243	3.9160853	8309	3.9195488	8375	3.9229848
8244	3.9161380	8310	3.9196010	8376	3.9230367
8245	3.9161907	8311	3.9196533	8377	3.9230885
8246	3.9162435	8312	3.9197055	8378	3.9231404
8247	3.9162960	8313	3.9197578	8379	3.9231922
8248	3.9163487	8314	3.9198100	8380	3.9232440
8249	3.9164013	8315	3.9198823	8381	3.9232958
8250	3.9164539	8316	3.9199145	8382	3.9233477
8251	3.9165066	8317	3.9199667	8383	3.9233995
8252	3.9165592	8318	3.9200189	8384	3.9234513
8253	3.9166118	8319	3.9100711	8385	3.9235031
8254	3.9166645	8320	3.9201233	8386	3.9235549
8255	3.9167171	8321	3.9201755	8387	3.9236066
8256	3.9167697	8322	3.9202277	8388	3.9236584
8257	3.9168223	8323	3.9202799	8389	3.9237102
8258	3.9168749	8324	3.9203321	8390	3.9237620
8259	3.9169273	8325	3.9203842	8391	3.9238137
8260	3.9169800	8326	3.9204364	8392	3.9238655
8261	3.9170326	8327	3.9204886	8393	3.9239172
8262	3.9170852	8328	3.9205407	8394	3.9239690
8263	3.9171377	8329	3.9205929	8395	3.9240207
8264	3.9171903	8330	3.9206450	8396	3.9240174
8265	3.9172428	8331	3.9206971	8397	3.9241242
8266	3.9172954	8332	3.9207493	8398	3.9241759
8267	3.9173479	8333	3.9208014	8399	3.9242276
8268	3.9174005	8334	3.9208535	8400	3.9242793
8269	3.9174530	8335	3.9209056	8401	3.9243310
8270	3.9175055	8336	3.9209577	8402	3.9243827
8271	3.9175580	8337	3.9210098	8403	3.9244344
8272	3.9176105	8338	3.9210619	8404	3.9244860
8273	3.9176630	8339	3.9211140	8405	3.9245377
8274	3.9177155	8340	3.9211661	8406	3.9245894
8275	3.9177680	8341	3.9212181	8407	3.9246410
8276	3.9178205	8342	3.9212702	8408	3.9246927
8277	3.9178729	8343	3.9213222	8909	3.9247444
8278	3.9179254	8344	3.9213743	8410	3.9247960
8279	3.9179779	8345	3.9214263	8411	3.9248476
8280	3.9180303	8346	3.9214784	8412	3.9248993
8281	3.9180828	8347	3.9215304	8413	3.9249509
8282	3.9181352	8348	3.9215824	8414	3.9250025
8283	3.9181876	8349	3.9216345	8415	3.9250541
8284	3.9182401	8350	3.9216865	8416	3.9251057
8285	3.9182925	8351	3.9217385	8417	3.9251573
8286	3.9183449	8352	3.9217905	8418	3.9252089
8287	3.9183973	8353	3.9218425	8419	3.9252605
8288	3.9184497	8354	3.9218945	8420	3.9253121
8289	3.9185021	8355	3.9219465	8421	3.9253637

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
8422	3.9254152	8488	3.9288054	8554	3.9321692	8620	3.9355073	8686	3.9388198	8752	3.9421073
8423	3.9254668	8489	3.9288565	8555	3.9322200	8621	3.9355576	8687	3.9388698	8753	3.9421569
8424	3.9255184	8490	3.9289077	8556	3.9322708	8622	3.9356080	8688	3.9389198	8754	3.9422065
8425	3.9255699	8491	3.9289588	8557	3.9323215	8623	3.9356584	8689	3.9389698	8755	3.9422561
8426	3.9256215	8492	3.9290100	8558	3.9323723	8624	3.9357087	8690	3.9390198	8756	3.9423058
8427	3.9256730	8493	3.9290611	8559	3.9324230	8625	3.9357591	8691	3.9390697	8757	3.9423553
8428	3.9257245	8494	3.9291123	8560	3.9324738	8626	3.9358094	8692	3.9391197	8758	3.9424049
8429	3.9257761	8495	3.9291634	8561	3.9325245	8627	3.9358598	8693	3.9391697	8759	3.9424545
8430	3.9258276	8496	3.9292145	8562	3.9325752	8628	3.9359101	8694	3.9392196	8760	3.9425041
8431	3.9258791	8497	3.9292656	8563	3.9326259	8629	3.9359605	8695	3.9392696	8761	3.9425537
8432	3.9259306	8498	3.9293167	8564	3.9326766	86 0	3.9360108	8696	3.9393195	8762	3.9426032
8433	3.9259821	8499	3.9293678	8565	3.9327274	8631	3.9360611	8697	3.9393695	8763	3.9426528
8434	3.9260336	8500	3.9294189	8566	3.9327781	8632	3.9361114	8698	3.9394194	8764	3.9427024
8435	3.9260851	8501	3.9294700	8567	3.9328288	8633	3.9361617	8699	3.9394693	8765	3.9427518
8436	3.9261366	8502	3.9295211	8568	3.9328794	8634	3.9362120	8700	3.9395192	8766	3.9428015
8437	3.9261880	8503	3.9295722	8569	3.9329301	8635	3.9362623	8701	3.9395692	8767	3.9428510
8438	3.9262395	8504	3.9296232	8570	3.9329808	8636	3.9363126	8702	3.9396191	8768	3.9429005
8439	3.9262910	8505	3.9296743	8571	3.9330315	8637	3.9363629	8703	3.9396690	8769	3.9429501
8440	3.9263424	8506	3.9297254	8572	3.9330822	8638	3.9364132	8704	3.9397189	8770	3.9429996
8441	3.9263939	8507	3.9297764	8573	3.9331328	8639	3.9364635	8705	3.9397688	8771	3.9430491
8442	3.9264453	8508	3.9298275	8574	3.9331835	8640	3.9365137	8706	3.9398187	8772	3.9430986
8443	3.9264968	8509	3.9298785	8575	3.9332342	8641	3.9365640	8707	3.9398685	8773	3.9431481
8444	3.9265482	8510	3.9299296	8576	3.9332848	8642	3.9366143	8708	3.9399184	8774	3.9431976
8445	3.9265997	8511	3.9299806	8577	3.9333354	8643	3.9366645	8709	3.9399683	8775	3.9432471
8446	3.9266511	8512	3.9300316	8578	3.9333860	8644	3.9367147	8710	3.9400182	8776	3.9432966
8447	3.9267025	8513	3.9300826	8579	3.9334367	8645	3.9367650	8711	3.9400680	8777	3.9433461
8448	3.9267539	8514	3.9301336	8580	3.9334873	8646	3.9368152	8712	3.9401179	8778	3.9433956
8449	3.9268053	8515	3.9301846	8581	3.9335379	8647	3.9368654	8713	3.9401677	8779	3.9434450
8450	3.9268567	8516	3.9302356	8582	3.9335885	8648	3.9369157	8714	3.9402176	8780	3.9434945
8451	3.9269081	8517	3.9302866	8583	3.9336391	8649	3.9369659	8715	3.9402674	8781	3.9435440
8452	3.9269595	8518	3.9303376	8584	3.9336897	8650	3.9370161	8716	3.9403172	8782	3.9435934
8453	3.9270109	8519	3.9303886	8585	3.9337403	8651	3.9370663	8717	3.9403670	8783	3.9436429
8454	3.9270622	8520	3.9304396	8586	3.9337909	8652	3.9371165	8718	3.9404169	8784	3.9436923
8455	3.9271136	8521	3.9304906	8587	3.9338415	8653	3.9371667	8719	3.9404667	8785	3.9437418
8456	3.9271650	8522	3.9305415	8588	3.9338920	8654	3.9372169	8720	3.9405165	8786	3.9437912
8457	3.9272163	8523	3.9305925	8589	3.9339426	8655	3.9372671	8721	3.9405663	8787	3.9438406
8458	3.9272677	8524	3.9306434	8590	3.9339932	8656	3.9373172	8722	3.9406161	8788	3.9438900
8459	3.9273190	8525	3.9306944	8591	3.9340437	8657	3.9373674	8723	3.9406659	8789	3.9439395
8460	3.9273704	8526	3.9307453	8592	3.9340943	8658	3.9374176	8724	3.9407157	8790	3.9439889
8461	3.9274217	8527	3.9307963	8593	3.9341448	8659	3.9374677	8725	3.9407654	8791	3.9440383
8462	3.9274730	8528	3.9308472	8594	3.9341953	8660	3.9375179	8726	3.9408152	8792	3.9440877
8463	3.9275243	8529	3.9308981	8595	3.9342459	8661	3.9375680	8727	3.9408650	8793	3.9441371
8464	3.9275757	8530	3.9309490	8596	3.9342964	8662	3.9376182	8728	3.9409147	8794	3.9441865
8465	3.9276270	8531	3.9309999	8597	3.9343469	8663	3.9376683	8729	3.9409645	8795	3.9442358
8466	3.9276783	8532	3.9310508	8598	3.9343974	8664	3.9377184	8730	3.9410142	8796	3.9442852
8467	3.9277296	8533	3.9311017	8599	3.9344479	8665	3.9377686	8731	3.9410640	8797	3.9443346
8468	3.9277808	8534	3.9311526	8600	3.9344984	8666	3.9378187	8732	3.9411137	8798	3.9443840
8469	3.9278321	8535	3.9312035	8601	3.9345489	8667	3.9378688	8733	3.9411635	8799	3.9444333
8470	3.9278834	8536	3.9312544	8602	3.9345994	8668	3.9379189	8734	3.9412132	8800	3.9444827
8471	3.9279347	8537	3.9313053	8603	3.9346499	8669	3.9379690	8735	3.9412629	8801	3.9445320
8472	3.9279859	8538	3.9313561	8604	3.9347004	8670	3.9380191	8736	3.9413126	8802	3.9445814
8473	3.9280372	8539	3.9314070	8605	3.9347509	8671	3.9380692	8737	3.9413623	8803	3.9446307
8474	3.9280885	8540	3.9314579	8606	3.9348013	8672	3.9381193	8738	3.9414120	8804	3.9446800
8475	3.9281397	8541	3.9315087	8607	3.9348518	8673	3.9381693	8739	3.9414617	8805	3.9447294
8476	3.9281909	8542	3.9315596	8608	3.9349022	8674	3.9382194	8740	3.9415114	8806	3.9447787
8477	3.9282422	8543	3.9316104	8609	3.9349527	8675	3.9382695	8741	3.9415611	8807	3.9448280
8478	3.9282934	8544	3.9316612	8610	3.9350031	8676	3.9383195	8742	3.9416108	8808	3.9448773
8479	3.9283446	8545	3.9317121	8611	3.9350536	8677	3.9383696	8743	3.9416605	8809	3.9449266
8480	3.9283959	8546	3.9317629	8612	3.9351040	8678	3.9384196	8744	3.9417101	8810	3.9449759
8481	3.9284471	8547	3.9318137	8613	3.9351544	8679	3.9384697	8745	3.9417598	8811	3.9450252
8482	3.9284983	8548	3.9318645	8614	3.9352049	8680	3.9385197	8746	3.9418095	8812	3.9450745
8483	3.9285495	8549	3.9319153	8615	3.9352553	8681	3.9385697	8747	3.9418591	8813	3.9451238
8484	3.9286007	8550	3.9319661	8616	3.9353057	8682	3.9386198	8748	3.9419088	8814	3.9451730
8485	3.9286518	8551	3.9320169	8617	3.9353561	8683	3.9386698	8749	3.9419584	8815	3.9452223
8486	3.9287030	8552	3.9320677	8618	3.9354065	8684	3.9387198	8750	3.9420081	8816	3.9452716
8487	3.9287542	8553	3.9321185	8619	3.9354569	8685	3.9387698	8751	3.9420577	8817	3.9453208

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
8818	3.9453701	8884	3.9486085	8950	3.9518230
8819	3.9454193	8885	3.9486574	8951	3.9518716
8820	3.9454686	8886	3.9487063	8952	3.9519201
8821	3.9455178	8887	3.9487552	8953	3.9519686
8822	3.9455670	8888	3 9488040	8954	3.9520171
8823	3.9456163	8889	3.9488529	8955	3.9520656
8824	3.9456655	8890	3.9489018	8956	3.9521141
8825	3.9457147	8891	3.9489506	8957	3.9521626
8826	3.9457639	8892	3.9489994	8958	3.9522111
8827	3.9458131	8893	3.9490483	8959	3.9522595
8828	3.9458623	8894	3.9490971	8960	3.9523080
8829	3.9459115	8895	3.9491460	8961	3.9523565
8830	3.9459607	8896	3.9491948	8962	3 9524049
8831	3.9460099	8897	3.9492436	8963	3.9524534
8832	3.9460591	8898	3.9492924	8964	3.9525018
8833	3.9461082	8899	3.9493412	8965	3.9525503
8834	3.9461574	8900	3.9493900	8966	3 9525987
8835	3.9462065	8901	3.9494388	8967	3.9526472
8836	3.9462557	8902	3.9494876	8968	3.9526956
8837	3.9463048	8903	3.9495364	8969	3.9527440
8838	3.9463540	8904	3.9495852	8970	3.9527924
8839	3.9464031	8905	3.9496339	8971	3.9528409
8840	3.9464523	8906	3.9496827	8972	3.9528893
8841	3.9465014	8907	3.9497315	8973	3.9529377
8842	3.9465505	8908	3 9497802	8974	3.9529861
8843	3.9465996	8909	3.9498290	8975	.9530345
8844	3.9466487	8910	3.9498777	8976	3.9530828
8845	3.9466978	8911	3.9499264	8977	3.9531312
8846	3.9467469	8912	3.9499752	8978	3.9531796
8847	3.9467960	8913	3.9500239	8979	3.9532280
8848	3.9468451	8914	3.9500726	8980	3.9532763
8849	3.9468942	8915	3.9501213	8981	3.9533247
8850	3.9469433	8916	3.9501701	8982	3.9533730
8851	3.9469923	8917	3.9502188	8983	3.9534214
8852	3.9470414	8918	3.9502675	8984	3.9534697
8853	3.9470905	8919	3.9503162	8985	3.9535181
8854	3.9471395	8920	3.9503649	8986	3.9535664
8855	3.9471886	8921	3.9504135	8987	3.9536147
8856	3.9472376	8922	3 9504622	8988	3.9536631
8857	3.9472866	8923	3.9505109	8989	3.9537114
8858	3.9473357	8924	3.9505596	8990	3.9537597
8859	3.9473847	8925	3.9506082	8991	3.9538080
8860	3.9474337	8926	3.9506529	8992	3.9538563
8861	3.9474827	8927	3.9507055	8993	3.9539046
8862	3 9475317	8928	3.9507542	8994	3.9539529
8863	3.9475807	8929	3 9508028	8995	3.9540012
8864	3.9476297	8930	3.9508515	8996	3 9540494
8865	3.9476[illegible]87	8931	3.9509001	8997	3.9540977
8866	3.9477277	8932	3.9509487	8998	3.9541460
8862	3.9477767	8933	3.9509973	8999	3.9541943
8863	3.9478257	8934	3.9510459	9000	3.9542425
8864	3.9478746	8935	3.9510946	9001	3.9542908
8865	3.9479236	8936	3.9511432	9002	3.9543390
8866	3.9479726	8937	3.9511918	9003	3.9543872
8867	3.9480215	8938	3.9512404	9004	3.9544355
8868	3.9480705	8939	3.9512889	9005	3.9544837
8869	3.9481194	8940	3.9513375	9006	3.9545319
8870	3.9481684	8941	3.9513861	9007	3.9545802
8871	3.9482173	8942	3.9514347	9008	3.9546284
8872	3.9482662	8943	3.9514832	9009	3.9546766
8873	3.9483151	8944	3.9515318	9010	3.9547248
8874	3.9483641	8945	3.9515803	9011	3.9547730
8875	3.9484130	8946	3.9516289	9012	3.9548212
8876	3.9484619	8947	3.9516774	9013	3.9548694
8877	3.9485108	8948	3.9517260	9014	3.9549176
8878	3.9485597	8949	3.9517745	9015	3.9549657

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
9016	3.9550139	9082	3.9581815	9148	3.9613261
9017	3.9550621	9083	3.9582293	9149	3.9613736
9018	3.9551102	9084	3.9582771	9150	3.9614211
9019	3.9551584	9085	3.9583249	9151	3.9614685
9020	3.9552065	9086	3.9583727	9152	3.9615160
9021	3.9552547	9087	3.9584205	9153	3.9615635
9022	3.9553028	9088	3.9584683	9154	3.9616109
9023	3.9553510	9089	3.9585161	9155	2.9616583
9024	3.9553991	9090	3.9585639	9156	3.9617058
9025	3.9554472	9091	3.9586117	9157	3.9617532
9026	3.9554953	9092	3.9586594	9158	3.9618006
9027	3 9555434	9093	3.9587072	9159	3.9618481
9028	3.9555915	9094	3.9587549	9160	3 9618955
9029	3.9556397	9095	3.9588027	9161	3.9619429
9030	3 9556877	9096	3.9588505	9162	3.9619903
9031	3.9557358	9097	3.9588982	9163	3.9620377
9032	3.9557839	9098	3.9589459	9164	3.9620851
9033	3.9558320	9099	3.9589937	9165	3.9621325
9034	3.9558801	9100	3 9590414	9166	3.9621799
9035	3.9559282	9101	3.9590891	9167	3.9622272
9036	3.9559762	9102	3.9591368	9168	3.9622746
9037	3.9560243	9103	3.9591845	9169	3.9623220
9038	3.9560723	9104	3 9592322	9170	3.9623693
9039	3.9561204	9105	3 9592799	9171	3.9624167
9040	3.9561684	9106	3.9593276	9172	3.9624640
9041	3.9562165	9107	3.9593753	9173	3.9625114
9242	3.9562645	9108	3.9594230	9174	3.9625587
9043	3.9563125	9109	3.9594707	9175	3.9626061
9044	3.9563606	9110	3.9595184	9176	3.9629534
9045	3.9564086	9111	3.9595660	9177	3.9627007
9046	3.9564566	9112	3.9596137	9178	2.9627480
9047	3.9565046	9113	3.9596614	9179	3.9627954
9048	3.9565526	9114	3.9597090	9180	3.9628427
9049	3.9566006	9115	3.9597567	9181	3.9628900
9050	3.9566486	9116	3.9598043	9182	3.9629373
9051	3.9566966	9117	3.9598520	9183	3.9629846
9052	3.9567445	9118	3.9598996	9184	3.9630319
9053	3.9567925	9119	3.9599472	9185	3.9630792
9054	3.9568405	9120	3.9599948	9186	3.9631264
9055	3.9568885	9121	3.9600424	9187	3.9631737
9056	3.9569364	9122	3.9609901	9188	3.9632210
9057	3.9569844	9123	3.9601337	9189	3.9632683
9058	3.9570323	9124	3.9601853	9190	3.9633155
9059	3.9570803	9125	3.9602329	9191	3.9633628
9060	3.9571282	9126	3.9602805	9192	3.9634100
9061	3.9571761	9127	3.9603280	9193	3.9634572
9062	3.9572241	9128	3.9603756	9194	3.9635045
9063	3.9572720	9129	3.9604232	9195	3.9635517
9064	3.9573[illegible]99	9130	3.9604708	9196	3.9635990
9065	3 9573678	9131	3 9605183	9197	3.9636462
9066	3 9574157	9132	3.9605659	9198	3.9636934
9067	3.9574636	9133	3.9606134	9199	3.9637406
9068	3.9575115	9134	3.9606610	9200	3.9637878
9069	3.9575594	9135	3.9607085	9201	3.9638350
9070	3.9576073	9136	3.9607561	9202	3.9638822
9071	3.9576552	9137	3.9608036	9203	3.9639294
9072	3.9577030	9138	3.9608511	9204	3.9639766
9073	3.9577509	9139	3.9608987	9205	3.9640238
9074	3.9577988	9140	3.9609462	9206	3.9640710
9075	3.9578466	9141	3.9609937	9207	3.9641181
9076	3.9578945	9142	3.9610412	9208	3.9641653
9077	3.9579423	9143	3 9610887	9209	3.9642125
9078	3.9579902	9144	3.9611362	9210	3.9642596
9079	3.9580380	9145	3.9611837	9211	.39643068
9080	3.9580858	9146	3.9612312	9212	3.9643539
9081	3.9581337	9147	3.9612787	9213	3.9640111

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
9214	3.9644482	9280	3.9675480	9346	3.9706258	9412	3.9736819	9478	3.9767167	9544	3.9797304
9215	3.9644953	9281	3.9675948	9347	3.9706722	9413	3.9737281	9479	3.9767625	9545	3.9797759
9216	3.9645425	9282	3.9676416	9348	3.9707187	9414	3.9737742	9480	3.9768083	9546	3.9798214
9217	3.9645896	9283	3.9676883	9349	3.9707652	9415	3.9738203	9481	3.9768541	9547	3.9798669
9218	3.9646367	9284	3.9677351	9350	3.9708116	9416	3.9738664	9482	3.9769000	9548	3.9799124
9219	3.9646838	9285	3.9677819	9351	3.9708581	9417	3.9739126	9483	3.9769457	9549	3.9799579
9220	3.9647309	9286	3.9678287	9352	3.9709045	9418	3.9739587	9484	3.9769915	9550	3.9800034
9221	3.9647780	9287	3.9678754	9353	3.9709509	9419	3.9740048	9485	3.9770373	9551	3.9800488
9222	3.9648251	9288	3.9679222	9354	3.9709973	9420	3.9740509	9486	3.9770831	9552	3.9800943
9223	2.9648722	9289	3.9679690	9355	3.9710438	9421	3.9740970	9487	3.9771289	9553	3.9801398
9224	3.9649193	9290	3.9680157	9356	3.9710902	9422	3.9741431	9488	3.9771747	9554	3.9801852
9225	3.9649664	9291	3.9680625	9357	3.9711366	9423	3.9741892	9489	3.9772204	9555	3.9802307
9226	3.9650134	9292	3.9681092	9358	3.9711830	9424	3.9742353	9490	3.9772662	9556	3.9802761
9227	3.9650605	9293	3.9681559	9359	3.9712294	9425	3.9742814	9491	3.9773120	9557	2.9803216
9228	3.9651076	9294	3.9682027	9360	3.9712758	9426	3.9743274	9492	3.9773577	9558	3.9803670
9229	3.9651546	9295	3.9682494	9361	3.9713222	9427	3.9743735	9493	3.9774035	9559	3.9804125
9230	3.9652017	9296	3.9682961	9362	3.9713686	9428	3.9744196	9494	3.9774492	9560	3.9804579
9231	3.9652487	9297	3.9683428	9363	3.9714150	9429	3.9744656	9495	3.9774950	9561	3.9805033
9232	3.9652958	9298	3.9683895	9364	3.9714614	9430	3.9745117	9496	3.9775407	9562	3.9805487
9233	3.9653428	9299	3.9684362	9365	3.9715078	9431	3.9745577	9497	3.9775864	9563	3.9805941
9234	3.9653899	9300	3.9684809	9366	3.9715542	9432	3.9746038	9498	3.9776322	9564	3.9806396
9235	3.9654369	9301	3.9685296	9367	3.9716005	9433	3.9746498	9499	3.9776779	9565	3.9806850
9236	3.9654839	9302	3.9685763	9368	3.9716469	9434	.9746959	9500	3.9777236	9566	3.9807304
9237	3.9655309	9303	3.9686230	9369	3.9716932	9435	3.9747419	9501	3.9777693	9567	3.9807758
9238	3.9655780	9304	3.9686697	9370	3.9717396	9436	3.9747879	9502	3.977815	9568	3.9808212
9239	3.9656250	9305	3.9687164	9371	3.9717859	9437	3.9748340	9503	3.9778607	9569	3.9808665
9240	3.9656720	9306	3.9687630	9372	3.9718323	9438	3.9748800	9504	3.9779064	9570	3.9809119
9241	3.9657190	9307	3.9688097	9373	3.9718786	9439	3.9749260	9505	3.9779521	9571	3.9809573
9242	3.9657660	9308	3.9688564	9374	3.9719249	9440	3.9749720	9506	3.9779978	9572	3.9810027
9243	3.9658130	9309	3.9689030	9375	3.9719713	9441	3.9750180	9507	3.9780435	9573	3.9810480
9244	3.9658599	9310	3.9689497	9376	3.9720176	9442	3.9750640	9508	3.9780892	9574	3.9810934
9245	3.9659069	9311	3.9689963	9377	3.9720639	9443	3.9751100	9509	3.9781348	9575	3.9811388
9246	3.9659539	9312	3.9690430	9378	3.9721102	9444	3.9751560	9510	3.9781805	9576	3.9811841
9247	3.9660009	9313	3.9690896	9379	3.9721565	9445	3.9752020	9511	3.9782261	9577	3.9812295
9248	3.9660478	9314	3.9691362	9380	3.9722028	9446	3.9752479	9512	3.9782718	9578	3.9812748
9249	3.9660948	9315	3.9691829	9381	3.9722491	9447	3.9752939	9513	3.9783175	9579	3.9813202
9250	3.9661417	9316	3.9692295	9382	3.9722954	9448	3.9753399	9514	3.9783631	9580	3.9813655
9251	3.9661887	9317	3.9692761	9383	3.9723417	9449	3.9753858	9515	3.9784088	9581	3.9814108
9252	3.9662356	9318	3.9693227	9384	3.9723880	9450	3.9754318	9516	3.9784544	9582	3.9814562
9253	3.9662826	9319	3.9693693	9385	3.9724343	9451	3.9754778	9517	3.9785001	9583	3.9815015
9254	3.9663295	9320	3.9694159	9386	3.9724805	9452	3.9755237	9518	3.9785457	9584	3.9815468
9255	3.9663764	9321	3.9694625	9387	3.9725268	9453	3.9755697	9519	3.9785913	9585	3.9815921
9256	3.9664233	9322	3.9695091	9388	3.9725731	9454	3.9756156	9520	3.9786369	9586	3.9816374
9257	3.9664703	9323	3.9695557	9389	3.9726193	9455	3.9756615	9521	3.9786826	9587	3.9816827
9258	3.9665172	9324	3.9696023	9390	3.9726656	9456	3.9757075	9522	3.9287282	9588	3.9817280
9259	3.9665641	9325	3.9696488	9391	3.9727118	9457	3.9757534	9523	3.9787738	9589	3.9817733
9260	3.9666110	9326	3.9696954	9392	3.9727581	9458	3.9757993	9524	3.9788194	9590	3.9818186
9261	3.9666579	9327	3.9697420	9393	3.9728043	9459	3.9758452	9525	3.9788650	9591	3.9818639
9262	3.9667048	9328	3.9697885	9394	3.9728506	9460	3.9758911	9526	3.9789106	9592	3.9819092
9263	3.9667517	9329	3.9698351	9395	3.9728968	9461	3.9759370	9527	3.9789562	9593	3.9819544
9264	3.9667985	9330	3.9698816	9396	3.9729430	9462	3.9759829	9528	3.9790017	9594	3.9819997
9265	3.9668454	9331	3.9699282	9397	3.9729892	9463	3.9760288	9529	3.9790473	9595	3.9820450
9266	3.9668923	9332	3.9699747	9398	3.9730354	9464	3.9760747	9530	3.9790929	9596	3.9820902
9267	3.9669392	9333	3.9700213	9399	3.9730816	9465	3.9761206	9531	3.9791385	9597	3.9821355
9268	3.9669860	9334	3.9700678	9400	3.9731279	9466	3.9761665	9532	3.9791840	9598	3.9821807
9269	3.9670329	9335	3.9701143	9401	3.9731741	9467	3.9762124	9534	3.9792296	9599	3.9822260
9270	3.9670797	9336	3.9701608	9402	3.9732402	9468	3.9762582	9533	3.9792751	9600	3.9821712
9271	3.9671266	9337	3.9702074	9403	3.9732664	9469	3.9763041	9535	3.9793207	9601	3.9823165
9272	3.9671734	9338	3.9702539	9404	3.9733126	9470	3.9763500	9536	3.9793662	9602	3.9823617
9273	3.9672202	9339	3.9703004	9405	3.9733588	9471	3.9763958	9537	3.9794118	9603	3.9824069
9274	3.9672671	9340	3.9703469	9406	3.9734050	9472	3.9764417	9538	3.9794573	9604	3.9824521
9275	3.9673139	9341	3.9703934	9407	3.9734511	9473	3.9764875	9539	3.9795028	9605	3.9824974
9276	3.9673607	9342	3.9704399	9408	3.9734973	9474	3.9765334	9540	3.9795484	9606	3.9825426
9277	3.9674075	9343	3.9704863	9409	3.9735435	9475	3.9765792	9541	3.9795939	9607	3.9825878
9278	3.9674544	9344	3.9705328	9410	3.9735896	9476	3.9766251	9542	3.9796394	9608	3.9826330
9279	2.967·012	9345	3.9705793	9411	3.9736358	9477	3.9766709	9543	3.9796849	9609	2.98·6782

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
9610	3.9827234	9676	3.9856958	9742	3.9886481
9611	3.9827686	9677	3.9857407	9743	3.9886927
9612	3.9828138	9678	3.9857856	9744	3.9887373
9613	3.9828589	9679	3.9858305	9745	3.9887818
9614	3.9829041	9680	3.9858754	9746	3.9888264
9615	3.9829493	9681	3.9859202	9747	3.9888710
9616	3.9829944	9682	3.9859651	9748	3.9889155
9617	3.9830396	9683	3.9860099	9749	3.9889601
9618	3.9830848	9684	3.9860548	9750	3.9890046
9619	3.9831299	9685	3.9860996	9751	3.9890492
9620	3.9831751	9686	3.9861445	9752	3.9890937
9621	3.9832202	9687	3.9861893	9753	3.9891382
9622	3.9832654	9688	3.9862341	9754	3.9891828
9623	3.9833105	9689	3.9862790	9755	3.9892273
9624	3.9833556	9690	3.9863238	9756	3.9892718
9625	3.9834007	9691	3.9863686	9757	3.9893163
9626	3.9834458	9692	3.9864134	9758	3.9893608
9627	3.9834910	9693	3.9864582	9759	3.9894053
9628	3.9835361	9694	3.9865030	9760	3.9894498
9629	3.9835812	9695	3.9865478	9761	3.9894943
9630	3.9836263	9696	3.9865926	9762	3.9895388
9631	3.9836714	9697	3.9866374	9763	3.9895833
9632	3.9837165	9698	3.9866822	9764	3.9896278
9633	3.9837616	9699	3.9867270	9765	3.9896722
9634	3.9838006	9700	3.9867717	9766	3.9897167
9635	3.9838517	9701	3.9868165	9767	3.9897612
9636	3.9838968	9702	3.9868613	9768	3.9898056
9637	3.9839419	9703	3.9869060	9769	3.9898501
9638	3.9839869	9704	3.9869508	9770	.9898946
9639	3.9840320	9705	3.9869955	9771	.9899390
9640	3.9840770	9706	3.9870402	9772	3.9899835
9641	3.9841221	9707	3.9870850	9773	3.9900279
9642	3.9841671	9708	3.9871298	9774	3.9900723
9643	3.9842122	9709	3.9871745	9775	3.9901168
9644	3.9842572	9710	3.9872192	9776	3.9901612
9645	3.9843022	9711	3.9872640	9777	3.9902056
9646	3.9843473	9712	3.9873087	9778	3.9902500
9647	3.9843923	9713	3.9873534	9779	3.9902944
9648	3.9844373	9714	3.9873981	9780	3.9903389
9649	3.9844823	9715	3.9874428	9781	3.9903833
9650	3.9845273	9716	3.9874875	9782	3.9904277
9651	3.9845723	9717	3.9875322	9783	3.9904721
9652	3.9846173	9718	3.9875769	6784	3.9905164
9653	3.9846623	9719	4.9876216	9785	3.9905608
9654	3.9847073	9720	3.9876663	9786	3.9906052
9655	3.9847523	9721	3.9877109	9787	3.9906496
9656	3.9847972	9722	3.9877556	9788	3.9986940
9657	3.9848422	9723	3.9878003	9789	3.9907384
9658	3.9848872	9724	3.9878449	9790	3.9907827
9659	3.9849322	9725	3.9878896	9791	3.9908270
9660	3.9849771	9726	3.9879343	9792	3.9908714
9661	3.9850221	9727	3.9879789	9793	3.9909158
9662	3.9850670	9728	3.9880236	9794	3.9909601
9663	3.9851120	9729	3.9880682	9795	3.9910044
9664	3.9851569	9730	3.9881128	9796	3.9910488
9665	3.9852018	9731	3.9881575	9797	3.9910931
9666	3.9852468	9732	3.9882021	9798	3.9911374
9667	3.9852917	9733	3.9882467	9799	3.9911823
9668	3.9853366	9734	3.9882913	9800	3.9912261
9669	3.9853816	9735	3.9883360	9801	3.9912704
9670	3.9854265	9736	3.9883806	9802	3.9913147
9671	3.9854714	9737	3.9884252	9803	3.9913590
9672	3.9854163	9738	3.9884698	9804	3.9914033
9673	3.9855622	9739	3.9885144	9805	3.9914476
9674	3.9856061	9740	3.9885590	9806	3.9914919
9675	3.9856510	9741	3.9886035	9807	3.5915362

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
9808	3.9915805	9874	3.9944931	9940	3.9973864
9809	3.9916247	9875	3.9945371	9941	3.9974301
9810	3.9916690	9876	3.9945811	9942	3.9974737
9811	3.9917133	9877	3.9946251	9943	3.9975174
9812	3.9917575	9878	3.9946690	9944	3.9975611
9813	3.9918018	9879	3.9947130	9945	3.9976048
9814	3.9918461	9880	3.9947569	9946	3.9976484
9815	3.9918903	9881	3.9948009	9947	3.9976921
9816	3.9919345	9882	3.9948448	9948	3.9977358
9817	3.9919788	9883	3.9948888	9949	3.9977794
9818	3.9920230	9884	3.9949327	9950	3.9978231
9819	3.9920673	9885	3.9949767	9951	3.9978667
9820	3.9921115	9886	3.9950206	9952	3.9979104
9821	3.9921557	9887	3.9950645	9953	3.9979540
9822	3.9921999	9888	3.9951085	9954	3.9979976
9823	3.9922441	9889	3.9951524	9955	3.9980413
9824	3.9922884	9890	3.9951963	9956	3.9980849
9825	3.9923326	9891	3.9952402	9957	3.9981285
9826	3.9923768	9892	3.9952841	9958	3.9981721
9227	3.9924210	9893	3.9953280	9959	3.9982157
9828	3.9924651	9894	3.9957719	9960	3.9982593
9829	3.9925093	9895	3.9954158	9961	3.9983029
9830	3.9925535	9896	3.9954597	9962	3.9983465
9831	3.9925977	9897	3.9955036	9963	3.9983901
9832	3.9926419	9898	3.9955474	9964	3.9984337
9833	3.9926860	9899	3.9955913	9965	3.9984773
9834	3.9927302	9900	3.9956352	9966	3.9985209
9835	3.9927744	9901	3.9956791	9967	3.9985644
9836	3.9928185	9902	3.9957229	9968	3.9986080
9837	3.9928627	9903	3.9957668	9969	3.9986516
9838	3.9929068	9904	3.9958106	9970	3.9986952
9839	3.9929510	9905	3.9958545	9971	3.9987387
9840	3.9929951	9906	3.9958983	9972	3.9987823
9841	3.9930392	9907	3.9959422	9973	3.9988258
9842	3.9930834	9908	3.9959860	9974	3.9988694
9843	3.9931275	9909	3.9960298	9975	3.9989129
9844	3.9931716	9910	3.9960737	9976	3.9989564
9845	3.9932157	9911	3.9961175	9977	3.9990000
9846	3.9932598	9912	3.9961613	9978	3.9990435
9847	3.9933039	9913	3.9962051	9979	3.9990870
9848	3.9933480	9914	3.9962489	9980	3.9991305
9849	3.9933921	9915	3.9962927	9981	3.9991741
9850	3.9934362	9916	3.9963365	9982	3.9992176
9851	3.9934803	9917	3.9963803	9983	3.9992611
9852	3.9935244	9918	3.9964241	9984	3.9993046
9853	3.9935685	9919	3.9964679	9985	3.9994381
9854	3.9936126	9920	3.9965117	9986	3.9993916
9855	3.9936566	9921	3.9965554	9987	3.9994350
9856	3.9937007	9922	3.996599	9988	3.9994785
9857	3.9937448	9923	3.9966430	9989	3.9995220
9858	3.9937888	9924	3.9966867	9990	3.9995655
9859	3.9938329	9925	3.9967305	9991	3.9996090
9860	3.9938769	9926	3.9967743	9952	3.9996524
9861	3.9939210	9927	3.9968180	9993	3.9996959
9862	3.9939650	9928	3.9968618	9994	3.9997392
9863	3.9940090	9929	3.9969055	9995	3.9997828
9864	3.9940531	9930	3.9969442	9996	3.9998262
9865	3.9940971	9931	3.9969930	9997	3.9998697
9866	3.9941411	9932	3.9970367	9998	3.9999131
9867	3.9941851	9933	3.9970804	9999	3.9999566
9868	3.9942291	9934	3.9971241	10000	4.0000000
9869	3.9942731	9935	3.9971679		
9870	3.9943172	9936	3.9972116		
9871	3.9943612	9937	3.9972553		
9872	3.9944051	9938	3.9972990		
9873	3.9944491	9939	3.9973427		

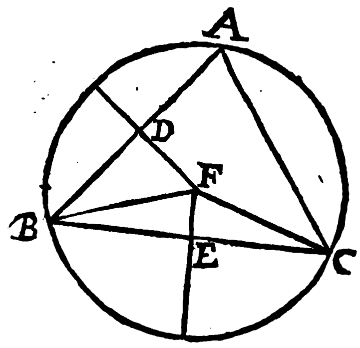
TRIGONOMETRIÆ LIBER TERTIUS.

Resolutio triangulorum rectilineorum.

PROPOSITIO I.

Theorema.

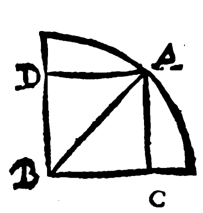
In triangulis rectilineis universis, latera sunt proportionalia sinubus angulorum oppositorum.



Sit rectilineum triangulum ABC, dico ita esse latus AB ad BC, sicut sinus anguli ACB ad sinum anguli BAC.

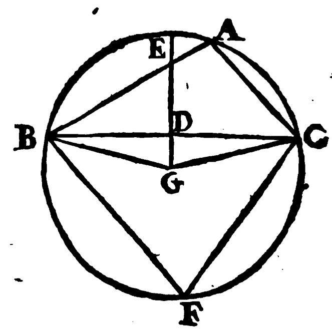
Triangulo ABC circulus circumscribatur (*per* 5.4.*Eucl.*) divisisque bifariàm in D & E lateribus AB,BC, ducantur ex centro F, lineæ FD,FE, quæ (*per* 3.3.*Eucl.*) perpendiculares erunt ad AB, BC, & consequenter BD, BE erunt sinus angulorum BFE, BFD (*per defin. sinus.*)

Demonstr. Angulus BFC duplus est anguli A (*per* 20.3.*Eucl.*) sed etiam est duplus anguli BFE, propter triangulorum BFE, EFC æqualitatem (*per* 8.1.*Eucl.*) ergo anguli BFE,& A sunt æquales, sed BE est sinus anguli BFE, ergo & anguli oppositi A. Eodem modo probabo BD esse sinum anguli oppositi ACB, sed BC ad AB eandem rationem habet, ac semissis BE ad semissem BD, ergo ita est BC ad AB, sicut sinus anguli oppositi A, ad sinum anculi ACB, quod erat demonstrandum.



Hæc quidem demonstratio triangulis rectangulis convenit;datur tamen alia facilior.Sit igitur triangulum ABC rectangulum in C, descripto ex C ut centro, intervallo BA, circulo, hypothenusa AB fit sinus totus seu sinus anguli recti, AC fit sinus anguli oppositi ABC, BC, seu AD, fit sinus anguli ABD, qui alternus est, & æqualis angulo BAC, ergo constat propositio.

Posset fieri difficultas pro angulo obtusangulo BAC, quomodo ejus medietas BD, possit esse sinus anguli oppositi BAC. Circulo inscribatur triangulum ABC, & ex centro G ducatur GDE,



eritque (*per* 3.3.*Eucl.*) perpendicularis ad BD, & sinus anguli BGD.

Demonstratio. Angulus BGC in centro duplus est tam anguli F, quam anguli BGD; ergo anguli BGD, & F æquales sunt, sed BD est sinus anguli BGD, ergo est etiam sinus anguli F; sed angulus obtusus A habet eundem sinum ac angulus acutus, qui est complementum ejus ad duos rectos, & in quadrilatero ABFC (*per* 22.3.*Eucl.*) anguli A, & F æquales sunt duobus rectis; ergo eundem sinum habent BD.

COROLLARIUM I.

Datis in triangulo duobus lateribus, & angulo uni eorum opposito omnia innotescunt ut si dentur AB,BC & angulus A. Fiat enim ut BC ad AB, ita sinus anguli A ex canone depromptus ad quartum habebitur angulus ACB, datis autem duobus angulis datur tertius ABC.Fiat rursus ut sinus anguli A ad sinum anguli ABC, ita latus BC ad A quartum, & habebis latus AC.

COROLLARIUM II.

Datis duobus angulis quibuscumque A & ABC, & uno latere AB,dantur omnia: nam primò datur tertius angulus, cum trianguli tres anguli æquales sint duobus rectis; tum si fiat ut sinus anguli ACB ad sinum anguli A, ita latus AB ad quartum,habebitur latus BC: fiat item ut sinus anguli ACB,ad sinum anguli ABC, ita AB ad AC.

PROPOSITIO II.

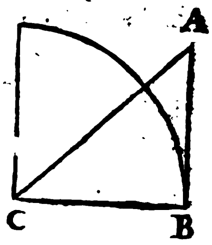
Theorema.

In triangulis rectangulis ita est unum latus ad aliud, ut sinus totus ad tangentem anguli adjacentis. Item ita est unum latus ad hypothenusam, ut sinus totus ad secantem ejusdem.

In triangulo rectangulo ABC, dico ita esse latus CB ad AB, ut sinus totus ad tangentem anguli C. Ex C ut centro,intervallo CB, describatur circulus.

Demonstr

Demonstratio. Cum angulus ABC rectus sit, linea BA (*per* 16. 3. *Eucl.*) circulum tanget, eritque tangens anguli C, & CB radius, seu sinus totus, & hypothenusa CA erit secans anguli C; & quia (*per* 1. *hujus*) in omni circulo eadem est ratio similium linearum; eadem erit ratio lateris CB ad BA quae est sinus totius in tabula notati ad tangentem anguli C item in tabula notata; item ita est BC, ad hypothenusam AC ut sinus totus ad secantem anguli C.



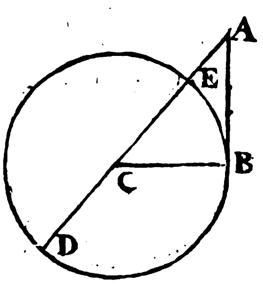
COROLLARIUM.

In triangulo rectangulo, praeter angulum rectum C, si cognoscatur alius angulus ut C, & unum latus, cognoscuntur omnia. Detur latus CB, fiat ut sinus totus, ad tangentem anguli C ita BC ad quartum, habebitur AB; fiat ut sinus totus ad secantem anguli C, ita CB ad quartum habebitur AC. Si daretur AB, fieret ut tangens anguli C ad sinum totum, ita AB ad quartum, haberetur BC, vel ut tangens anguli C ad secantem ejusdem, ita AB ad AC. Si daretur hypothenusa AC, initium fieret à secante.

PROPOSITIO III.

Theorema.

In triangulis rectangulis unum crus medium proportionale est inter aggregatum, & differentiam reliquorum laterum.



Sit triangulum ABC rectangulum in B, ex C ut centro intervallo CB describatur circulus, & producatur AC in D, erit linea AD aggregatum reliquorum laterum, cum CB, CD sint aequales; eritque EA differentia inter CA & CB, cum CB, CE sint aequales. Dico crus AB esse medium proportionale inter AD, EA.

Demonstratio (*per* 16. 3. *Eucl.*) AB tangit circulum; ergo (*per* 37. 3. *Eucl.*) quadratum AB aequale est rectangulo comprehenso sub AD, AE & consequenter (*per* 17. 6. *Eucl.*) ita est AD ad AB ut AB ad AE; quod erat demonstrandum.

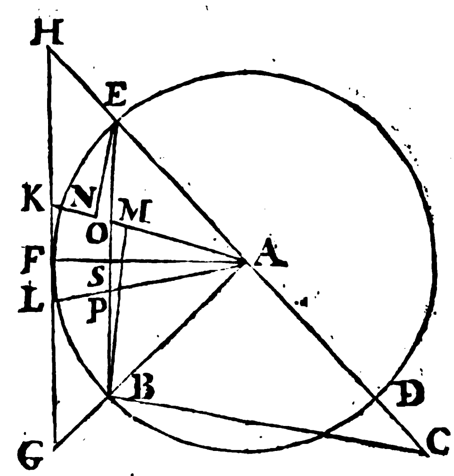
COROLLARIUM.

In triangulo rectangulo datis duobus lateribus datur tertium ut si dentur AC, BC, fiat aggregatum utriusque & differentia, tum multiplicetur AD per AE, & fiet rectangulum comprehensum sub AD, AE, quod cùm sit aequale quadrato AB, habebitur AB per extractionem radicis. Logarithmicè, logarithmi AE, AD addantur, habebitur logarithmus AB, qui divisus bifariam dat lineam AB.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

In triangulis rectilineis ut summa duorum laterum ad differentiam eorum; ita tangens semisummae angulorum oppositorum ad tangentem semidifferentiae eorum.



In triangulo ABC, in quo duo latera AB, AC; assumantur AB, AD aequales, eritque DC eorum differentia; sint item AB, AE aequales, eritque EC eorum summa; & cum angulus EAB sit aequalis duobus internis ABC, ACB (*per* 32. 1. *Eucl.*) erit angulus externus EAB summa angulorum oppositorum ABC, & ACD: describatur ex A ut centro, intervallo AB, circulus, qui transibit per E & D, cùm AB, AE, AD sint aequales; dividatur arcus EB bifariam in F; eritque angulus FAB semisumma angulorum; per F ducta perpendiculari GH, erit FG tangens semisummae angulorum. Ducatur AK parallela BC, eritque angulus externus KAE aequalis interno C, & KAB aequalis alterno ABC. Sit angulus LAG aequalis angulo KAH; eritque LAK differentia inter angulos KAG, LAG, seu inter angulos ABC; ACB; & FAL semidifferentia; FL, aut FK tangens semidifferentiae; probandum est ita esse EC ad DC, sicut FG ad FL; ducantur ex B & E ad AK, perpendiculares NE, BM; conjungaturque EB; eruntque EN, BM sinus angulorum HAK, KAB, seu C, & ABC illis aequalium.

Demonstratio. Triangula NEO, MBO sunt aequiangula, cum praeter angulos rectos M, & N, habeant angulos ad verticem in puncto O aequales; ergo ita est sinus MB ad NE, sicut OB ad OE; sed ut sinus, ita & latera iis opposita (*per primam hujus*) ergo ita est OB ad OE, sicut latus AC ad AB; & componendo ita erit CE, summa AB, AC, seu EC ad DC differentiam; sicut tota EB ad OP differentiam, qua major OB superat minorem OE, aut sicut dimidia EB, seu SB ad dimidiam OP, seu SP; sed (*per cor.* 4. 6. *Eucl.*) ut SB ad SP, ita FG ad FL; ergo ita EC ad DC, sicut FG ad FL, seu ita est summa duorum laterum ad differentiam eorum, ut tangens semisummae angulorum ad basin ad tangentem semidifferentiae eorum.

COROLLARIUM I.

Facilè probarem ita esse summam laterum ad eorum differentiam, sicut summa sinuum angulorum ad eorum differentiam; ergo ita est summa sinuum ad eorum differentiam, sicut tangens semisummæ angulorum ad tangentem semidifferentiæ eorum.

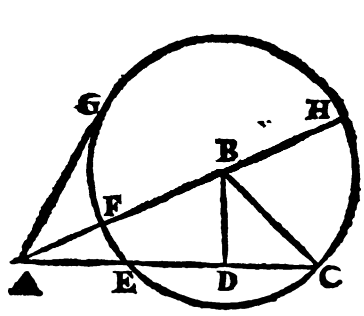
COROLLARIUM II.

Hac propositione solvimus triangulum in quo dantur duo latera AB, AC & angulus BAC ab ipsis comprehensus. Fit enim summa laterum; tum minus à majori subtrahitur, ut habeatur differentia DC; tum subtrahitur angulus BAC, à duobus rectis, seu à 180 gradibus, habeturque summa angulorum ad basin, fitque semisumma. Exinde fit regula proportionum, ut summa laterum, ad differentiam eorum, ita tangens semisummæ angulorum ad quartum, qui erit tangens semidifferentiæ angulorum; hæc angulorum semidifferentia addita semisummæ dat majorem angulum, subtracta à semisumma dat minorem.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si in triangulo ducatur ad maximum latus perpendicularis ab angulo opposito, ita erit majus latus ad summam reliquorum ut differentia eorundem ad differentiam segmentorum, ejusdem maximi lateris.



Ducatur in triangulo ABC perpendicularis BD ad latus maximum AC, ab angulo opposito B; ex puncto B ut centro, intervallo minimi lateris BC, circulus CEF; producaturque latus AB, in H; & ducatur AG tangens circulum. Eritque AH summa laterum AB, BC; & AF eorum differentia; cùm FB, BC, BH sint æquales; erit item AE differentia inter AD, DC segmenta basis, cum (*per 3. 3. Eucl.*) ED, DC sint æquales: dico ita esse AC ad AH, sicut AF ad AE.

Demonstratio (*per 36. 3. Eucl.*) quadratum AG, æquale est tam rectangulo AH, AF, quam rectangulo AC, AE; ergo rectangula sunt æqualia inter se; quare si ita disponantur AC, AH, AF, AE, cùm rectangulum sub extremis æquetur rectangulo sub mediis, erit (*per 16. 6. Euclidis*) ut AC ad AH, ita AF ad AE; quod erat demonstrandum.

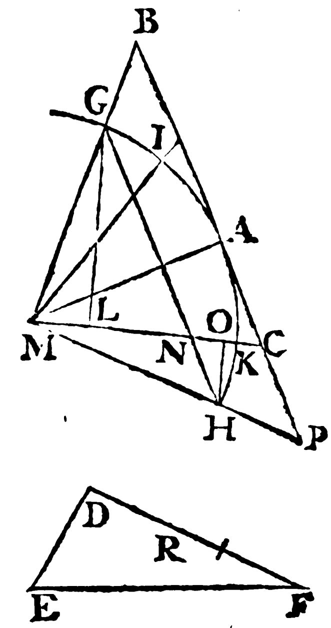
COROLLARIUM.

Hæc propositio est usui ad cognoscendos angulos trianguli cujus dantur tria latera sine ullo angulo; tunc enim demissa perpendiculari BD, dividitur in duo triangula; & cùm supponantur dari omnia latera, datur latus AC, datur summa AH; & subtracto BC ex AB, restat AF; tum facta regula aurea, cum terminis AC, AH, AF, datur AE; ergò & EC; quo diviso bifariam in D, restat DC; quare in triangulo rectangulo BDC, si fiat ut latus BC ad DC; ita sinus totus ad alium, habebitur (*per 1. hujus*) angulus DBC, cujus complementum est angulus C.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si tangentes duorum arcuum sinubus aliorum arcuum, aut angulorum proportionales fuerint, sinus summæ & sinus differentiæ primorum arcuum, tangentibus semisummæ, & semidifferentiæ secundorum proportionales erunt.



Sint tangentes AB, AC arcuum AG, AK proportionales sinubus angulorum E, & F trianguli DEF. Sit arcus AH, æqualis arcui AG, & arcus AI, æqualis arcui AK, erit arcus KH, differentia inter arcum AH, seu AG, & AK, & GAK summa arcuum AG, AK, ducantur ad radium MC, perpendiculares GL, HO, quæ erunt sinus eorum arcuum, dico ita esse GL sinum summæ GAK ad HO sinum differentiæ eorum, ut tangens semisummæ angulorum E & F, ad sinum semidifferentiæ eorum. Ducatur GH.

Demonstratio. Supponitur ita esse AB ad AC ut sinus anguli E ad sinum anguli F, seu (*per 1. hujus*) ut latus DF ad DE; ergo componendo, & dividendo ita erit summa BC ad CP earum differentiam, ut summa laterum ED, DF ad RF differentiam eorum, id est (*per 4. hujus*) ut tangens semisummæ angulorum E & F ad sinum semidifferentiæ eorum; sed ut BC ad CP ita GN ad NH; (*per 3. 6. Eucl.*) & quia rectangula triangula GNL, NOH, propter angulos ad verticem in O æquales, sunt æquiangula, ut GN ad NH, ita est GL ad HO; ergo ita est GL ad HO, ut tangens semisummæ angulorum E & F ad tangentem semidifferentiæ eorum; quod erat demonstrandum.

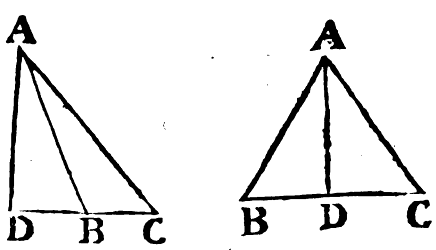
COROLLARIUM.

Cognitis lateribus DE, DF & angulo D ab ipsis comprehenso, reliquos angulos invenimus hoc modo. Assumatur quæcumque tangens AB arcûs AG; fiatque ut DF ad DE, ita tangens AB ad ad AC, dabiturque arcus AK; hi arcûs AG, AK addantur, & subtrahantur ab invicem; sumanturque sinus summæ, & differentiæ eorum, nempe GL, HO; fiatque ut GL ad HO, ita tangens semisummæ angulorum E & F, quæ datur cognito angulo D; factâque regula trium dabitur tangens semidifferentiæ; quæ addita semisummæ, dat angulum E, & subtracta ab eadem, dat angulum F.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Ut sinus totus ad sinum complementi alicujus anguli in triangulo, ita duplum rectangulum sub lateribus talem angulum comprehendentibus, ad differentiam quadratorum eorum laterum, & quadrati lateris oppositi.



Sit primò angulus ABC acutus; dico ita esse sinum totum ad sinum complementi anguli B ut duplum rectangulum comprehensum sub AB, BC ad excessum quo quadrata AB, BC superant quadratum AC; ille autem excessus ducta perpendiculari AD est duplum rectangulum sub BD, BC, cum (*per* 13. 2.) quadratum AC, unà cum duplo rectangulo sub BD, BC, æquale sit quadratis AB, BC; BAD est complementum anguli B.

Demonstratio. Ita est sinus totus ad sinum anguli A, ut AB ad BD; & (*per* 1. 6. *Eucl.*) sumpta communi altitudine BC, ut rectangulum AB, BC ad rectangulum BD, BC; & ut duplum rectangulum sub AB, BC ad duplum rectangulum sub BD, BC; quod erat demonstrandum.

Sit secundò ABC obtusus; ducta perpendiculari AD; angulus DAB est complementum anguli acuti ABD; ergo & obtusi ABC. Dico ita esse sinum totum ad sinum anguli DAB, ut duplum rectangulum sub AB, BC ad duplum rectangulum sub BC, DB; nempe excessum, quo quadratum AC superat quadrata AB, BC, cum (*per* 12. 2. *Eucl.*) quadrata AB, BC; unà cum duplo rectangulo sub BC, DB æqualia sint quadrato AC.

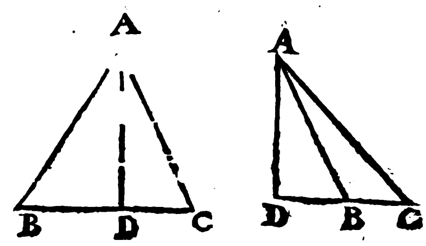
Demonstratio. Ita est sinus totus ad sinum anguli DAB, ut AB ad DB, (*per primam hujus*) & sumpta communi altitudine BC (*per* 1. 6.) ut rectangulum sub AB, BC ad rectangulum sub BD, BC; & ut duplum rectangulum sub AB, BC ad duplex rectangulum sub BC, BD; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

In triangulo ita est sinus totus ad sinum anguli, ut unum latus talem angulum comprehendens ad perpendicularem ductam ab angulo adjacente, ad alíud latus.

Proponatur triangulum ABC, dico ita esse sinum totum ad sinum anguli B, ut latus AB comprehendens talem angulum, ad perpendicu-



larem AD, ductam ab angulo A, adjacente lateri AB, ad latus BC.

Demonstratio. In triangulo ABD, rectangulo in D, ita est (*per* 1. *hujus.*) sinus anguli D recti seu sinus totus, ad sinum anguli ABC, ut AB ad AD; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ut sinus totus ad sinum anguli, ita rectangulum sub lateribus angulum comprehendentibus, ad duplum trianguli. Nempe in hoc exemplo, ita erit sinus totus ad sinum anguli ABC, ut rectangulum sub AB, BC ad duplam aream trianguli.

Demonstratio. Ita est sinus totus ad sinum anguli ABC, ut AB ad AD (*per hanc*) & sumpta communi altitudine BC, ut rectangulum sub AB, BC ad rectangulum sub AD, BC quod rectang. sub AD, BC (*per* 41. 1. *Eucl.*) est duplum trianguli.

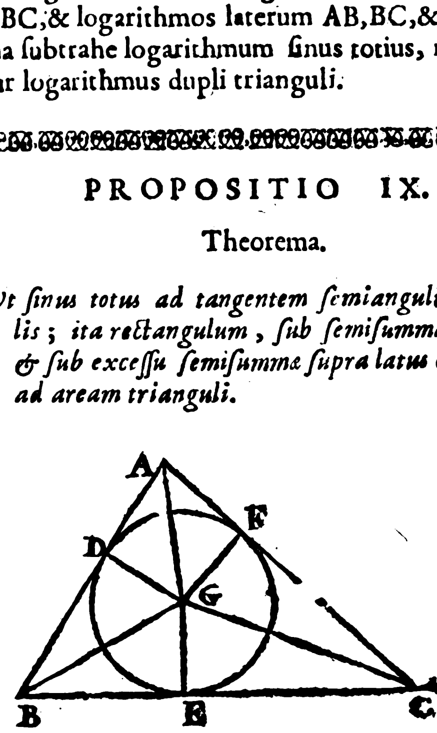
Quare si in triangulo cognoscamus duo latera AB, BC, & angulum ABC, comprehensam facilè aream trianguli habebimus. Fiat enim ut sinus totus ad sinum anguli ABC, ita rectangulum sub AB, BC, quod habetur multiplicando AB, per BC, ad quartum; & exurget dupla trianguli area; cujus semissis erit trianguli area.

Logarithmice; adde logarithmum sinus anguli ABC; & logarithmos laterum AB, BC, & ex summa subtrahe logarithmum sinus totius, relinquetur logarithmus dupli trianguli.

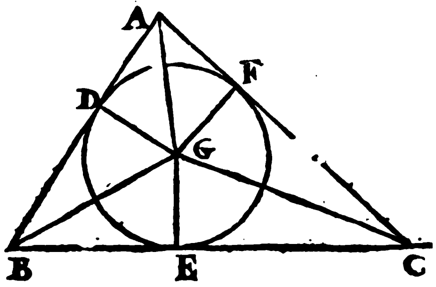
PROPOSITIO IX.

Theorema.

Ut sinus totus ad tangentem semianguli verticalis; ita rectangulum, sub semisumma laterum & sub excessu semisummæ supra latus oppositum ad aream trianguli.



Triangulo BAC inscribatur circulus DFE (*per* 4. 4.) eruntque tangentes AD, AF æquales; quia quadratum ex AG æquale est tam quadratis DG, AD, quam quadratis GF, AF, (*per* 47. 1.) sunt funt ergo æqualia DG, AD quadratis, AF, GF, & ablatis æqualibus, DG, GF, restant quadrata AD,



AF æqualia; ita sunt æqualia CF, CE; BD, BE; Eritque DAG, media pars anguli BAC. Item BC, & AD erit semisumma laterum omnium; cum BE habeat BD sibi æqualem, & EC habeat FC, sicut AD habet AF; item AD erit differentia inter semisummam, & latus oppositum BC. Dico ergo ita esse sinum totum ad tangentem semianguli BAC, ut rectangulum comprehensum sub semisumma laterum & differentia AD ad Aream trianguli.

Demonstratio. In triangulo ADG, rectangulo in D (*per* 2. *hujus*) ita erit AD ad DG ut sinus totus ad tangentem anguli DAG. Sed ut AD ad DG, assumpta pro communi altitudine semisummâ laterum, (*per* 1. 6. *Eucl.*) ita erit rectang. sub AD & semisumma ad rectangulum sub DG & semisumma, quod contendo æquale esse triangulo ABC; nã rectangulum comprehensum sub DG & AD (*per* 41. 1.) duplum est trianguli ADG, seu æquale triangulis æqualibus ADG, AGF; comprehensum sub DG, seu GE, BE, duplum est trianguli BGE, seu æquale triangulis BGE, BDG; denique comprehensum sub GE, EC æquale est triangulis EGC, CGF; ergo (*per* 1. 1.) comprehensum sub DG & semisumma laterum æquale est triangulo. Ergo ita est sinus totus ad tangentem semianguli BAC, ut rectangulum comprehensum sub semisumma, & sub differentia inter semisummam, & basin ad aream trianguli.

COROLLARIUM I.

Hac propositione datis lateribus habemus aream trianguli. Primo investigamus angulum A, tum addimus latera ut habeamus summam, & semisummam, subtrahimus basin BC ex semisumma, & habemus AD, tum facimus ut sinus totus ad tangentem semianguli BAC, ita rectangulum sub semisumma, & sub AD ad aream trianguli. Logarithmicè addimus logarithmos tangentis semianguli BAC, logarithmum, semisummæ laterum, & logarithmum differentiæ basis à semisumma, & subtrahimus log. sinus totius, restat logarithmus Areæ trianguli.

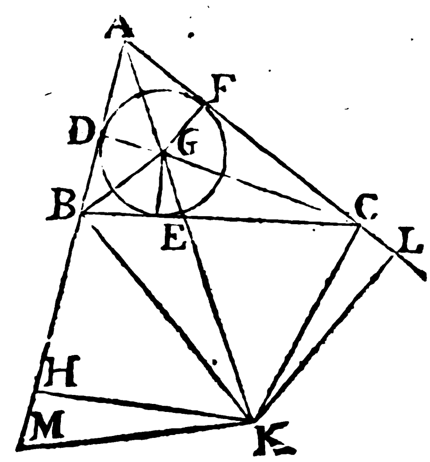
COROLLARIUM II.

Sicut AD est differentia lateris BC, & semisummæ; DB, aut BE est differentia lateris AC & semisummæ; nam AC, & BE, efficiunt semisummam; pariter EC est differentia lateris AB, & semisummæ, cum AB & EC summisummam absolvant. Vocentur hæ, differentiæ laterum, subintelligendo à semisumma.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Area trianguli media proportionalis est inter rectangulum comprehensum sub semisumma laterum, & sub differentiâ unius, & rectangulum comprehensum sub differentiis aliorum laterum,



Sit triangulum ABC ut prius, dico aream trianguli, mediam proportionalem esse inter rectangulum comprehensum sub semisumma, & sub linea AD, differentiâ lateris BC & inter rectangulum comprehensum sub BE, EC differentiis aliorum laterum à semisumma. Producatur AB in H sitque BH, differentiæ EC æqualis, ducatur HK perpendicularis ad AH, & consequenter parallela lineæ DG, quæ sicut DG concurrat cum AG producta in K, ducaturque BK.

Primo in quadrilatero BDGE cum anguli sint quatuor rectis æquales, & duo D & E sint recti, reliqui duo DGE, DBE sunt duobus rectis æquales, sicut DBE, EBH, ergo ablato communi DBE, anguli DBE, anguli DGE æquales.

Secundo intendo probare angulum HBC bifariam dividi lineâ BK, sicut DGE bifariam divisus est. Abscindantur CL, MH æquales lineæ BE; eruntque AL, AH singulæ æquales semisummæ laterum, eruntque (*per* 4. 1. *Eucl.*) triangula AHK, AKL omnino æqualia, cum angulus A sit divisus bifariam; ergo & angulus L rectus erit, sicut H rectus est, & lineæ HK, KL, æquales erunt. Item cum lineæ HM, CL sint æquales, erunt (*per* 4. 1.) bases KL. KC æquales. Denique in triangulis BCK, BMK, cum singula latera sint æqualia, erunt anguli MBK, KBC æquales (*per* 4. 1.) ergo cum totales anguli MBC, DGE essent æquales, anguli HBK, BGE æquales, & triangula BGE, BHK similia.

Demonstratio. (*Per præcedentem*) ita est rectang. sub AD. & semisumma, ad aream trianguli ut AD ad DG, seu (*per* 4. 6.) ut semisumma AH ad HK; & sumptâ eadem altitudine EG, ut rectangulum sub semisumma, & sub EG, seu area trianguli, ad rectangulum sub HK, EG: sed cum triangula BEG, BHK sint similia, & ita sit BH ad HK sicut EG ad BE, rectangulum sub mediis HK, EG æquabitur rectangulo sub extremis BH, seu EC & sub BE; ergo ita est rectangulum sub AD, & semisumma ad aream trianguli, ut area trianguli ad rectangulum sub BE, EC; quod erat demonstrandum.

COROL

COROLLARIUM.

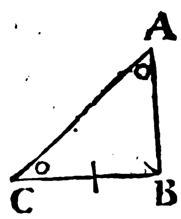
Datis omnibus trianguli lateribus datur area, si enim omnia latera addas, faciasque summam, & semisummam, à qua singillatim singula latera subtrahas ut habeas singulorum differentiam, tum efficias rectangulum sub semisumma & una differentia, & aliud rectangulum, sub aliis differentiis, area trianguli media erit proportionalis. Hoc est si multiplices hujusmodi rectangula ad invicem; & producti extrahas radicem quadratam, habebis aream trianguli.

Quamvis praxes in singulis Theorematibus indicaverim, ut tamen facilius inveniantur, eas sequentibus problematibus ordine referam, & in rectangulis triangulis unicam adhibebo analogiam, in obliquangulis duplicem. Id quod quaeritur in figura notabo hoc charactere °, partes verò datas hac nota —. Latera angulum rectum comprehendentia vocamus crura, oppositum angulo recto, basin.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Datis cruribus trianguli rectanguli angulos invenire.



In triangulo A B C rectangulo in B, data sint crura AB 606, BC 1124, quaeritur angulus C aut A.

Fiat ut latus B C 1124
ad latus AB 606,
Ita sinus totus 1000000
ad quartum 5391459, tangentem anguli C gr. 28.20, cujus cõplementũ 61,40 erit angulus A.

Demonstr. (*Per 2. hujus*) in triangulis rectangulis, ita est unum crus ut BC, ad aliud A B, ut sinus totus ad tangentem anguli C; ergo si secundum per tertium multiplices, & productum dividas per primum, habebis tangentem anguli C, quae quaesita in tabula tangentium dat è regione angulum quaesitum, & in alia pagina ejus complementum.

Logarithmicè ita operaberis. Addantur logarithmi secundi, & tertii, & ex summa subtrahe logarithmum primi, restabit logarithmus quaesiti.

2 Logarith lateris AB 606. L. 2.7924726 } adde
3 Logarithmus sinus totius 10.0000000 }
summa 12.7824726
1 Subtrahe lateris 1124. Log. 3.0507663
Restat tangentis c'. Log. 9.7317063 ang. 28.20.

PROPOSITIO XII.

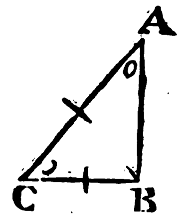
Problema.

Dato crure, & basi trianguli rectanguli, invenire angulos.

Supponitur trianguli rectanguli ABC, praeter angulum rectum B, cognita basis AC, & crus BC, quaeritur angulus A, aut C.

Fiat ut basis AC
ad latus B C,
ita sinus totus
ad sinum anguli A.

Demonstratio. (*Per primam hujus*) latera sunt sinubus angulorum oppositorum proportionalia.



ergo ut AC ad BC, ita sinus anguli B recti, seu sinus totus ad sinum anguli oppositi A.

Logarithmicè. Adde logarithmos cruris BC, & sinus totius, & à summa subtrahe logarithmum basis AC, restabit logarithmus sinus anguli A.

Per secantes.

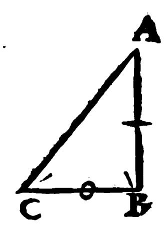
Fiat ut latus B C
ad basin A C,
ita sinus totus
ad secantem anguli adjacentis C.

Demonstratur (*in secunda hujus.*)

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Dato uno crure, & angulo obliquo trianguli rectanguli, invenire crus alterum.



Detur crus AB, & angulus C trianguli ABC rectanguli, quaeritur latus BC.

Dato angulo C datur, & angulus A, cum in triangulo rectangulo, unus angulus obliquus sit alterius complementum, Fiat ergo

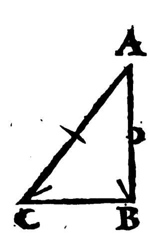
Ut sinus anguli C
ad sinum anguli A,
ita latus A B
ad latus BC.

Demonstratio. (*Per 1. hujus*) latera sunt proportionalia sinubus angulorum oppositorum.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Dato angulo obliquo, & hypothenusa trianguli rectanguli, invenire crus quodlibet.



Supponitur praeter angulum rectum B, in triangulo ABC data basis AC & angulus obliquus C, quaeritur crus AB, primò cognito angulo C datur & ejus complementum A. Fiat ergo

Ut sinus totus
ad sinum anguli C.
ita basis AC
ad latus AB.

Demonstratio (*per 1. hujus.*)

Per

Per secantes.

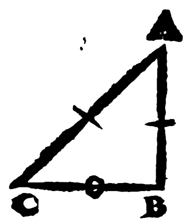
Fiat ut secans anguli C
ad tangentem ejusdem,
ita basis AC
ad latus AB.

Demonstratio. (*Per 2. hujus*) nempè si BC fiat radius, AC evadit secans anguli C & AB tangens ejusdem.

PROPOSITIO XV.

Problema.

In triangulo rectangulo, datâ basi & uno crure, invenire aliud crus.



Detur trianguli rectanguli ABC basis AC, & crus AB, quæritur aliud crus BC: Quæratur (*per* 12.) angulus C, & habebitur etiam angulus A, ejus complementum.

Tum fiat ut sinus anguli C
ad sinum anguli A,
ita latus AB
ad latus BC.

Alio modo.

Ex quadrato basis AC, subtrahe quadratum lateris AB, restabit quadratum BC: ex quo si extrahas radicem quadratam, habebis latus BC.

Demonstratur (*per* 47.1. *Eucl.*) Logarithmicè. Hypothenusæ AC logarithmus dupletur, habebitur ejus quadratum, dupletur item logarithmus lateris AB, & habebis logarithmum quadrati ejus, & consequenter quadratum, subtrahendum ex quadrato AB, restabit quadratum BC, cujus logarithmus si bifariam dividatur, fiet logarihtmus lateris BC.

Hæc operatio fundatur in modis extrahendi radicem quadratam superiori libro traditis.

Alio modo.

Latus AB addatur hypothenusæ AB, ut fiat summa, idem ab ea subtrahatur ut fiat differentia, multiplica summam per differentiam, exurget quadratum lateris BC, ex quo si radicem quadratam extrahas habebitur latus BC.

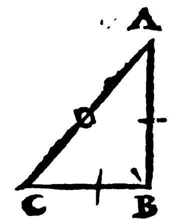
Demonstratio. (*Per 3. hujus*) latus BC est medium proportionale inter summam hypothenusæ & lateris AB, & inter eorum differentiam, ergo rectangulum sub extremis, æquale est quadrato medii (*per* 17.6. *Eucl.*)

Logarithmicè. Addatur logarithmus summæ ex hypothenusâ & latere AB, ad logarithmum differentiæ eorum, fietque duplus logarithmus lateris BC, seu logarithmus quadrati ejus.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Dato angulo obliquo, & uno crure trianguli rectanguli; invenire hypothenusam.



Supponitur trianguli rectanguli ABC cognitum latus AB, & angulus A, quæritur basis AC. Primò dato angulo A, datur ejus complementum C.

Fiat ut sinus anguli C
ad sinum totum, seu sinum anguli recti B,
ita latus AB
ad basin AC.

Demonstr. (*Per* 1. *hujus*) latera sunt sinubus angulorum oppositorum proportionalia.

Alio modo.

Ut habeatur sinus: Primo loco, ad vitandam divisionem.

Fiat ut sinus totus
ad secantem anguli A,
Ita latus AB
ad hypothenusam AC.

Demonstratio (*per* 2. *hujus*) satis patet.

Alio modo.

Fiat ut tangens anguli C
ad secantem ejusdem.
ita latus AB
Ad hypothenusam BC.

Demonstratio (*in ejusdem* 2.) continetur, nam assumpto pro radio crure BC, crus AB fit tangens anguli C, & basis AC ejusdem secans.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Datis cruribus trianguli rectanguli invenire hypothenusam.

Vide figuram præcedentem.

Sint in triangulo rectangulo ABC, cognita crura AB, BC, quæritur hypothenusa.

Primò (*per* 11.) quærantur anguli, & (*per* 16.) hypothenusa.

Alio modo.

Fiant quadrata AB, BC, quæ addantur, & ex eorum summa extrahatur radix quadrata, hæc erit basis AC.

Demonstratio patet (*per* 47.1. *Eucl.*)

Per logarithmos.

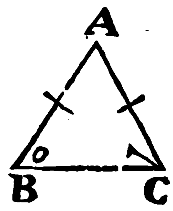
Singuli logarithmi crurum AB, BC duplentur, ut habeantur logarithmi quadratorum, & consequenter quadrata, quæ addita dant quadratum hypothenusæ, hujus logarithmum si bifariam dividas habebis logarihmum basis AC.

PROPO

De Triangulis obliquangulis.

PROPOSITIO XVIII.

Datis in triangulo quocumque, duobus lateribus, & angulo uni eorum opposito; invenire angulum alteri oppositum, modò sciatur utrum acutus, vel obtusus sit.



In triangulo ABC, supponuntur latera AB; AC, cognita unà cum angulo C, qui alterutri laterum, uti AB opponitur, quæriturque angulus B, oppositus alteri lateri AC.

Fiat ut latus AB, oppositum angulo dato C
Ad latus AC,
ita sinus anguli C
ad sinum anguli B.

Quia autem idem est sinus anguli acuti, & obtusi, reliqui nempe ad semicirculum, debet cognosci an angulus B obtusus sit, vel acutus.

Demonstratio. (*Per 1. hujus*)

COROLLARIUM.

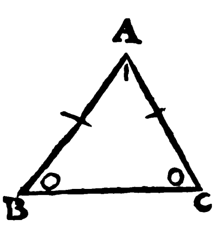
Cognito angulo B, cum jam cognoscatur C, dabitur angulus A, nempe reliquus ad duos rectos, & consequenter latus BC.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Cognitis duobus trianguli lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso, reliquos angulos cognoscere.

Sit triangulum ABC, cujus cognoscantur latera AB, AC, & angulus A ab ipsis comprehensus, quæruntur anguli B & C.



Primò datur summa angulorum B & C, si subtrahas angulum A ex 180 gradibus: datur igitur & semisumma angulorum B & C; addantur latera ut fiat eorum summa; minimum à majori subtrahatur ut habeatur differentia.

Fiat ut summa laterum AB, AC
ad eorum differentiam,
ita tangens semisummæ angulorum B & C
Ad tangentem semidifferentiæ eorum. Hæc semidifferentia addita semisummæ dat angulum majorem, & detracta ab eadem dat minorem.

Demonstratio patet (*per 4. hujus*) in qua habetur ita esse summam laterum ad eorumdem differentiam, ut tangens semisummæ angulorum ad eorum semidifferentiam; habentur autem tres primi termini, ergo & quartus.

Alio modo.

Sumatur quæcumque tangens quæ primò occurret, dicaturque tangens D.

Fiatque, latus AB,
Ad latus AC;
ita tangens D
ad tangentem E.

Arcus respondentes hujusmodi tangentibus addantur, & minor à majori subtrahatur.

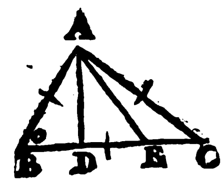
Fiatque ut sinus summæ istorum arcuum.
Ad sinum differentiæ eorum,
ita tangens semisummæ angulorum B & C
ad tangentem semidifferentiæ eorum.

Demonstr. Cum tangentes D & E sint proportionales lateribus AB, AC, & latera (*per primam hujus*) sint sinubus angulorum B & C proportionalia, erunt & tangentes D & E, iisdem sinubus proportionales; quare (*per 6. hujus*) sinus summæ arcuum respondentium tangentibus, ad sinum differentiæ eorum, erit ut tangens semisummæ angulorum B & C ad tangentem semidifferentiæ eorum.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Cognitis tribus trianguli lateribus cognoscere angulos.



Sint trianguli ABC cognita singula latera, quæritur aliquis angulus. Ad majus latus BCA, ex angulo opposito A, cadat perpendicularis AD, dividens triangulum in duo triangula rectangula.

Fiatque ut basis BC.
ad summam laterum AB, AC,
ita differentia eorumdem laterum AB, AC,
Ad differentiam segmentorum basis nempe ad EC, quâ subtracta ex BC, restat BE; quâ divisa bifariam datur BD, & DE, & consequenter DC.

Si velis angulum B,
Fiat ut latus AB
ad segmentum BD,
ita sinus totus
ad sinum anguli BAD complementi ipsius B.

Hæc ultima analogia demonstratur (*per 1. hujus*.

Prima Analogia Demonstratur (*per 5. hujus*) in qua ostendi, ita esse majus latus ad summam reliquorum, ut differentia eorum laterum inter se, ad differentiam segmentorum basis.

Alio modo.

Dentur tria latera trianguli ABC quæraturque angulus B; fiat rectangulum sub lateribus angulum quæsitum comprehendentibus, voceturque rectangulum ABC; fiat item eorumdem laterum AB, BC quadratorum summa, quæ auferatur ex quadrato AC, si fieri potest, vel quadratum AC ex ea summa; si summa quadratorum major est quadrato AC angulus B acutus erit, si minor obtusus; facta subtractione habebitur differentia.

Fiat ut duplex rectangulum ABC
ad differentiam inter quadrata laterum, & quadratum basis,

ita ſinus totus
ad ſinum complementi anguli B
Demonſtratio eſt ipſa propoſitio 7.
Logarithmicè.

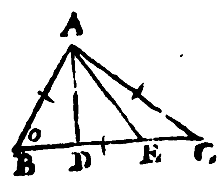
Adde logarithmum differentiæ quæ eſt inter quadrata laterum, & quadratum baſis, logarithmo ſinus totius, & ab ea ſumma, ſubtrahe logarithmum lateris AB, item logarithmum lateris BC & logarithmum binarii reſtabit logarithmus, ſinûs complementi anguli B.

Aliter.

Alia methodus procedit & inquirit aream trianguli hoc modo & per aream trianguli inveſtigat angulum.

Proponatur triangulum ABC, cujus dantur omnia latera, quæraturque angulus A. Addantur omnia latera fiatque ſumma & ſemiſumma; ab hac ſemiſumma ſubtrahe latus BC oppoſitum angulo A, ut habeatur eius differentia; fiatque idem circa quodlibet latus; fiat rectangulum ſub ſemiſumma, & ſub differentia lateris BC, fiat item aliud rectangulum ſub aliis differentiis; multiplica hujuſmodi rectangula inter ſe; & producti extrahe radicem quadratam, hæc erit area trianguli,

Fiat ergo ut rectangulum ſub ſemiſumma & differentia lateris BC,
Ad aream trianguli;
ita ſinus totus
Ad tangentem ſemianguli A.
Prima operatio demonſtratur (*per* 10. *hujus*)



ſecunda demonſtratur (*per* 9.) Inventâ area trianguli facile invenitur angulus A, fiat ut rectangulum ſub AB, AC, ad duplam aream trianguli ita ſinus totus ad ſinum anguli A, (*per coroll.*) propoſitionis octavæ hujus.

Praxis logarithmica.

Adde { Logarithmum ſemiſummæ,
Logarithmum differentiæ lateris BC à ſemiſumma,
Logarithmum differentiæ lateris AB à ſemiſumma,
Logarithmum differentiæ lateris AC à ſemiſumma. }

Hujus ſummæ dimidium eſt logarithmus Areæ trianguli.

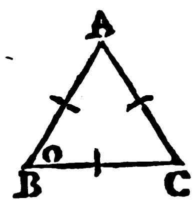
Tum Adde { Hunc logarithmum areæ,
Et logarithmum ſinus totius;
E quorum ſumma ſubtrahes logarithmum ſemiſummæ
Et logarithmum differentiæ lateris BC.
Reſtabit logarithmus tangentis ſemianguli A. }

Aliter.

Ulac hanc tradit praxin ut addantur omnia latera, fiatque eorum ſumma & ſemiſumma; à qua ſigillatim latera angulum quæſitum comprehendentia ſubtrahantur, habeaturque ſingulorum differentia. Tum fiat;

Ut latus AB
Ad differentiam lateris AB,
Ita differentia lateris BC
Ad quartum,
Item ut latus BC
Ad ſinum totum,
Ita quartus numerus prius inventus,
Ad ſeptimum.

Hic ſeptimus numerus multiplicetur per ſinum totum, hujus producti radix quadrata erit ſinus ſemiſſis Anguli A.



Vel faciliùs Adde logarithmum ſinus totius logarithmo ſeptimi numeri, ſemiſſis ſummæ eſt logarithmus ſinus dimidii anguli A.

Logarithmicè.

Proponatur angulus ABC quærendus.

Latera { AC. 1277
AB 865
BC 632 }
Summa laterum 2774
Semiſumma 1387
Differentia later. AB. 522 log. 2. 7176705
Differentia later. BC. 755 log. 2. 8779479

Summa 5. 5956174
Subtrahe logar. AB 865. 2. 9370161

Logarithmus quarti cũ ſinu toto 12. 6586013
Subtrahe logar. lat, BC 632. 2. 8007171

Logarithm. ſeptimi cũ ſinu toto 19. 8578842
Semiſſis eſt log. ſinus grad. 58. 6 $\frac{1}{2}$ 9. 9289421

Hujus duplum gr. 116. 13′ eſt angulus quæſitus ABC.

Aliter.

Factâ ut priùs ſemiſummâ, ſubtractiſque ab ea lateribus AB, BC angulum quæſitum comprehendentibus, ut habeantur eorum differentiæ à ſemiſumma; ſubtrahe logarithmos prædictorum laterum à ſinu toto, ut habeantur eorum complementa Arithmetica; quæ addes logarithmis differentiarum inventarum; ſemiſſis ſummæ, erit logarithmus dimidii anguli quæſiti,

Ut in eodem triangulo ABC,
Latus AB 865. compl. Arithm. 7. 0629839
Latus BC 632. compl. Arithm 7. 1992829
Differentia AB 522 2. 7176705
Differentia BC 755 2. 8779469

Summa 19. 8578842

Semiſſis logarithmus ſemianguli B 9. 9289421 vel log. ſinus ſemianguli ABC 58. 6 $\frac{1}{2}$; ideoque totalis angulus erit graduum 116. 13.

Hæc ſecunda praxis cùm priori coincidit, in qua ſubtrahebantur logarithmi laterum; cùm ergo in ea bis ponatur ſinus totus, & ſubtrahantur latera AB, BC, & reliquæ partes addantur, poſſunt hi

laterum

laterum logarithmi subtrahi à sinu toto,& reliqua seu complementa Arithmetica addi

Demonstrationem autem prioris praxis satis claram adhuc non inveni, quamvis similem praxin in triangulis sphaericis sim infra allaturus in sexto libro. Demonstratio autem debet esse fundata in hoc Theoremate.

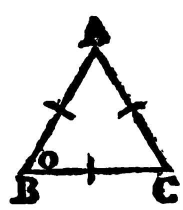
In omni triangulo ita est rectangulum sub cruribus AB, BC
ad quadratum radii,
ut rectangulum, sub differentiis eorumdem crurũ à semisumma trium laterum,
ad quadratum sinus semianguli ABC,

Si hac propositio demonstretur adducto lemmate ante propositionem 29 libri sexti hujus posito, facile demonstrabitur hac praxis.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

In omni triangulo rectilineo, ut rectangulum sub semisumma trium laterum & sub differentia basis ab ea ad quadratum radii, ita rectangulum sub differentiis crurum ab eadem semisumma ad quadratum tangentis semianguli verticalis.



Proponatur triangulum ABC, cujus quæritur angulus B; fiat summa trium laterum AB,BC,AC, & à semisumma subtrahatur basis AC, habeaturque ejus differentia à semisumma. Subtrahantur item singula crura AB, BC, ut habeantur eorum differentiæ à semisumma. Dico ita esse rectangulum sub semisumma, & sub differentia basis ab ea, ad quadratum radii, ut rectangulum sub differentiis crurum ad quadratum tangentis semianguli B.

Demonstratio. Ita est rectangulum sub semisumma & sub differentia basis AC ad aream trianguli, ut sinus totus ad tangentem semianguli B. (*per 9. hujus*) sed (*per 10.*) area trianguli media proportionalis est, inter propositum rectangulum, & rectangulum sub differentiis crurum; ergo rectangulum sub semisumma & differentia basis; ad rectangulum sub differentiis crurum, est in duplicata ratione sinus totius ad tangentem semianguli verticalis; sed quadratum sinus totius ad quadratum tangentis, est in duplicata ratione sinus totius ad tangentem; ergo ita est rectangulum ad rectangulum, ut quadratum ad quadratum, & alternando ita erit

Rectangulum sub semisumma & sub differentia basis
ad quadratum sinus totius,
ut rectangulum sub differentiis crurum
ad quadratum tangentis dimidii anguli quæsiti.

COROLLARIUM.

Datis tribus trianguli lateribus ita logarithmicè habebimus angulum B.

Adde:
- Logarithmum sinus totius duplicatum,
- Item logarithmos differentiarum crurum; & ab ea summa
- Subtrahe logarithmum semisummæ, & logarithmum differentiæ basis,

Restabit logarithmus, qui divisus bifariam; est logarithmus tangentis dimidii anguli B.

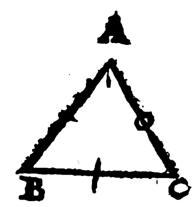
Vel aliter.

Fiat ut semisumma trium laterum
ad differentiam lateris AB,
ita differentia lateris BC
ad quartum numerum.
Fiat item ut differentia basis
ad sinum totum
ita quartus numerus
ad septimum, qui septimus numerus multiplicatus per sinum totum, dat quadratum tangentis, & hujus radix quadrata est tangens semianguli B. Hæc praxis demonstratur in lemmate ante (*prop. 29.6. libri hujus.*)

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Datis duobus lateribus, & angulo uni eorum opposito, invenire aliud latus.



In triangulo ABC supponuntur cognita latera AB, BC cum A; quæritur latus AC; debet primò quæri angulus C hoc modo,

Ut latus BC
ad latus AB,
ita sinus anguli A
ad sinum anguli C.

Ex quo cognoscitur angulus B.

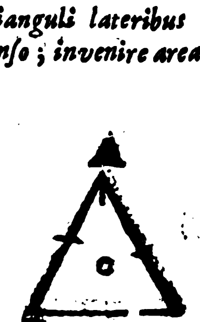
Fiat ut sinus anguli A
ad sinum anguli B,
ita latus BC
ad latus AC.

De area trianguli.

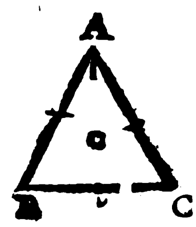
PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Datis duobus trianguli lateribus cum angulo ab ipsis comprehenso; invenire aream trianguli.



Trianguli ABC cognoscantur latera AB, AC, cum angulo A ab ipsis cmoprehenso, quæriturque area trianguli.



Fiat ut sinus totus
ad sinum anguli A,
ita rectangulum sub AB, AC
ad duplum trianguli.

Demonstratio est in corollario *propos.* 8. *hujus.*

Logarithmicè.

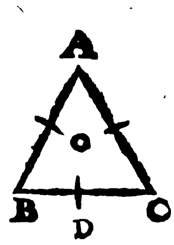
Adde { Logarithmum sinus anguli A,
Logarithmum lateris A B,
Logarithmum lateris A C.

Ex eorum summa subtrahatur logarithmus sinus totius, restabit logarithmus dupli areæ trianguli. Datur & alia praxis in sequenti propositione.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Cognitis tribus trianguli lateribus, Aream invenire.



Sint trianguli ABC cognita omnia latera quæritur ejus area.

Primò quæro (*per* 20.) angulum A, non tamen per eam praxin, quæ supponat datam aream trianguli; tum fiat

Ut sinus totus
ad tangentem semianguli A,
ita rectangulum comprehensum sub semisumma laterum, & differentia lateris BC
ad aream trianguli.

Hæc demonstratur *in* 9. *hujus.*

Aliter invento angulo B.

Fiat ut sinus totus,
ad sinum anguli B
ita latus AB
ad perpendicularem AD, quæ perpendicularis AD multiplicata per dimidium lateris BC exhibet aream trianguli (*per* 41.1. *Eucl.*)

Demonstratio analogiæ est *prop.* 8. *hujus.*

Alio modo sine inventione angulorum.

Addantur simul omnia latera, fiatque summa, & à semisumma subtrahantur singula latera, ut habeantur eorum differentiæ.

Rectangulum comprehensum sub semisumma, & una differentia multiplica per rectangulum comprehensum sub aliis differentiis: hujus producti radix quadrata est area trianguli.

Demonstratio est *prop.* 11. in qua dicitur area trianguli esse media proportionalis inter prædicta rectangula; ergo si ea in numeris exhibeantur, sicut & area (*per* 17. 6.) productum ex multiplicatione extremorum æquale est quadrato medii.

Praxis logarithmica.

Adde { Logarithmum semisummæ
Logarithmum primæ differentiæ
Logarithmum tertiæ differentiæ
Logarithmum quartæ differentiæ.

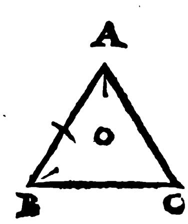
Semissis summæ est logarithmus areæ trianguli.

Demonstratio Addendo logarithmum semisummæ, & unius differentiæ, fit logarithmus rectanguli comprehensi sub semisumma, & tali differentia; addendo logarithmos aliarum differentiarum fit logarithmus rectanguli sub illis comprehensi; addendo hujusmodi logarithmos fit logarithmus producti ex multiplicatione horum rectangulorum, quod productum æquale est quadrato areæ triangulo, (in numeris loquor.) Denique si quadrati logarithmus bisecetur, habetur radix eius quadrata.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datis trianguli duobus angulis, & uno latere; eius Aream invenire.



In triangulo ABC cognoscuntur anguli A & B, & latus AB, ita invenietur eius area.

Primò datis angulis A, & B, datur & angulus C, cum trianguli omnes anguli æquales sint duobus rectis. Quæratur latus BC,

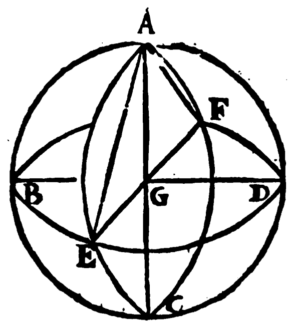
Fiatque ut sinus anguli C
ad sinum anguli A,
ita latus A B
ad latus BC; quo cognito,

Fiat ut sinus totus
ad sinum anguli B,
ita rectangulum sub A B, B C
ad duplum trianguli. Quære alios modos in propositione 23.

TRIGONOMETRIÆ
LIBER QVARTVS,
Isagogicus ad solvenda triangula sphærica.

DEFINITIO UNICA.

Angulus duorum circulorum in sphæra est angulus quem plana eorum comprehendunt.



Sint duo circuli in sphæra ABCD, AECF, sit planorum communis sectio AC, ad quam ex communi puncto G in singulis planis excitentur perpendiculares BG, EG, comprehendentes angulum BGE, is est angulus inclinationis planorum, seu angulus BAE, quem duo circuli præcipuè maximi ABCD, AECF in puncto A comprehendũt; hujus anguli mensura est arcus BE, maximi circuli BEDF, ex polo A ad intervallum quadrantis descripti, cujus nempe centrum est in axe, AC, immò est ipsum centrum G, pariter anguli ad verticem oppositi FAD arcus FD est mensura; & cum anguli BGE FGD ad verticem sint æquales, erunt & arcus BE, FD æquales; quare cum angulus perpendicularium EG BG, nempe BGE æqualis sit opposito sibi adverticem angulo FGD, notum est per se, dum duo circuli maximi se secant verbi gratia ABCF, AECF in puncto A fieri angulos BAE, FAD oppositos ad verticem æquales.

Item cum anguli BGE, EGD sint æquales duobus rectis, erunt & anguli BAE, EAD duobus rectis æquales: cum igitur maximus circulus alium secat; & angulos ad verticem oppositos æquales invicem efficit; & duos vicinos hinc inde æquales duobus rectis; & circa unum punctum in superficie sphæræ assumptum angulis omnes simul sumptis, quatuor tantum rectis æquales erunt.

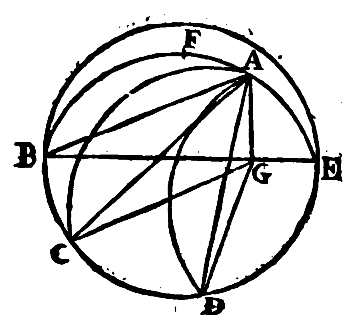
Item cum arcus BE, non tantum sit mensura anguli BAE, sed etiam anguli BCE, quoties duo circuli maximi se secant, erunt anguli semicirculo oppositi æquales, nempe BAE, BCE.

Suppono autem libros Theodosii, ne ea repetere cogar, quæ in iis clare demonstrata continentur, præcipuè quod circulus maximus per alterius polos transiens, cum eo angulos rectos efficiat. Agimus autem hic de triangulis sphæricis, quæ ab arcubus maximorum circulorum in superficie sphærica efformantur.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si ex puncto quod circuli polus non sit (sive circulus ille sit maximus sive non) plurimi cadant arcus maximorum circulorum in eius circumferentiam, maximus est qui per polum transit, & reliquus minimus: maximo viciniores majores sunt: facientque ex parte maximi cum priori circulo angulum obtusum.



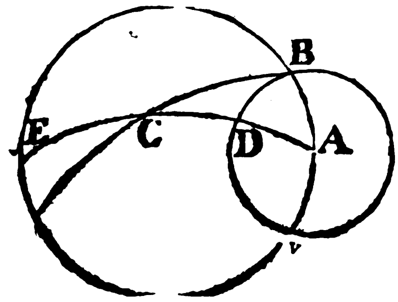
Punctum A in superficie sphæræ assumptum, non sit polus circuli BCDE, ducanturque à puncto A plurimi arcus maximorum circulorum; nempe AFB per polum F transiens; AC; AD; AE; dico arcum AFB esse maximum; AE, minimum; AC, minorem quam AFB; & majorem quam AD; item angulos ACB, ADB obtusos esse. Primo cum arcus AFB transeat per polum circuli BCDE, illum perpendiculariter, & bifariam dividet (*per 15. 1. Theod.*) ergo EGB communis sectio diameter erit, & semicirculus EAB, perpendiculariter insistet circulo BCD, & cum F sit polus, erit arcus AE minor semisse semicirculi EAB quare (*per lemma ad prop. 17. 2. Theod.*) linea AB maxima erit, AE minima, AC major quam AD; ergo & arcus AFB maximus erit, AE minimus, AC major quam AD, cum sint arcus æqualium circulorum, id est maximorum.

Item intelligatur duci ex polo F, maximus circulus FD, qui ductus non est in figura, esset angulus FDC rectus (*per 15. 1. Theod.*) ergo angulus ADC major recto nempe major sua parte, ergo obtusus, & consequenter angulus ADE acutus; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Duo qualibet trianguli ſphærici latera, reliquo ſunt majora.



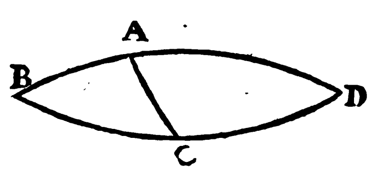
Ponatur triangulum ſphæricum ABC, conſtans arcubus trium maximorum circulorum, dico duo quælibet AB, BC reliquo AC eſſe majora. Ex puncto A ut polo deſcribatur circulus BD intervallo AB.

Demonſtratio. Cum latus CA (*per precedentem*) minus ſit ſemicirculo, punctum C, non erit alius polus circuli BD; polus enim diſtat à polo ſpatio ſemicirculi *ex Sphæricis* Theodoſii; ergo arcus C E tranſiens per alium polum circuli BDV erit maximus; CD, minor quam CB; (*per præcedentem*) & additis utrinque æqualibus arcubus AB, AD, erunt arcus BC, BA, ſimul majores arcubus, AD, DC, ſeu majores toto arcu AC; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Tria ſphærici trianguli latera, circulo ſunt minora.



Sit triangulum ſphæricum ABC, dico tria eius latera ſimul ſumpta integro circulo eſſe minora, Producantur B A, B C donec rurſus concurrant in D.

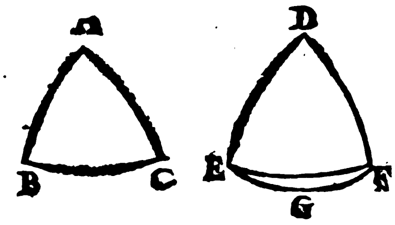
Demonſtratio arcus BAD, BCD ſunt ſemicirculi, cùm (*per* 11. 1.*Theod.*) circuli maximi ſe bifariam ſecent: ſed arcus AD, CD majores ſunt arcu AC (*per præcedentem*), ergo ſi iis utrinque addas AB, CB, fient tria latera AC, AB, BC ſimul, minora ſemicirculis BAD, BCD; ergo tria latera AB, AC, BC minora ſunt circulo.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duo triangula ſphærica, habeant duo latera ſingillatim æqualia, & angulos iis comprehenſos æquales; baſes quoque & reliquos angulos ſingillatim æquales habebunt.

Sint duo triangula ſphærica ABC, DEF, quorum latera AB, DE; AC, DF, ſint æqualia, & pariter anguli A & D æquales, dico & baſin baſi æqualem eſſe, cæterosque angulos.

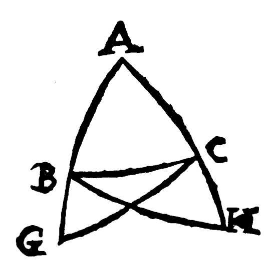


Demonſtr. Si Arcus ED intelligatur ſuperponi arcui AB, congruent cum ſint æquales ſed tunc arcus DF cum arcu AC etiam congruet, alioquin angulus angulo A, aut major, aut minor eſſet, & cum arcus DF arcui AC æqualis ſit, punctum F coincidet cum puncto C; ergo tunc baſis EF congruet cum baſi BC; neque enim convenire poteſt in duobus tantum punctis, ut vides in EGF, quia in tali caſu, EF & EGF eſſent ſemicirculi, cū maximi circuli ſe bifariā ſecent, & additis arcubus DE, EF baſi EF, majoribus, tria trianguli ſphærici latera, eſſent majora ſemicirculo (contra *præcedentem*,) ergo baſes congruent, & æquales erunt, ſicut & anguli ad baſin; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

In triangulis ſphæricis Iſoſcelibus, Anguli ſupra, & infra baſin æquales ſunt.



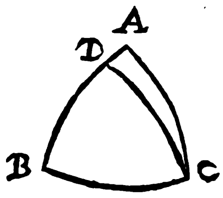
Triangulum ſphæricum ABC ſupponitur Iſoſceles, nempe latera AB, AC ſunt æqualia: dico angulos ſupra baſin ABC, ACB æquales eſſe; item productis lateribus AB, AC in G & H, angulos G B C, H C B æquales eſſe. Abſcindantur arcus æquales AG, AH, ducanturque per puncta B & H; ſicut & per C & G, arcus maximorum circulorum BH, GC (*per* 20.1.*Theod.*)

Demonſtratio. Primò triangula ABH, ACH, habentia angulum A communem, & latera AB, AC; AG, AH æqualia, ſunt omni modo æqualia (*per* 4.) habentque baſes BH, CG, ſicut & angulos ABH, ACG, item H & G æquales. Item triangula GBC, BCH, habent latera BH. GC, BG, CH, æqualia & angulos G & H æquales, ergo (*per eandem*) anguli GBC, BCH infra baſin æquales erunt, & cum (*per deſ. hujus*) arcus in alium incidens angulos duobus rectis æquales efficiat, erunt anguli ABC, ACB ſupra baſin æquales; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Triangulum sphæricum cujus anguli ad basin æquales sunt, est Isosceles.



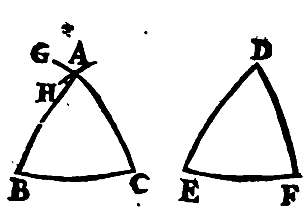
Sint in triangulo sphærico ABC, anguli ad basin, nempe ABC, ACB, æquales. Dico triangulum esse isosceles, seu latera AB, AC esse æqualia. Si enim AB esset majus, abscindatur BD, æquale lateri AC, ducaturque arcus maximi circuli CD (*per* 20. 1. *Theod.*)

Demonstratio triangula ABC, DCB habent latus BC commune, & latera AC, BD æqualia, & insuper angulos B, & ACB æquales; ergo (*per* 4.) æqualia sunt, totum & pars; quod est absurdum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si duo triangula sphærica, singula latera singulis æqualia habuerint; angulos quoque æquales habebunt.



Duo triangula ABC, DEF, habeant singula latera, singulis æqualia, dico angulos quoque habere æquales. Ex puncto B ut polo intervallo BA describatur arcus GA, & ex C intervallo CA describatur arcus AH.

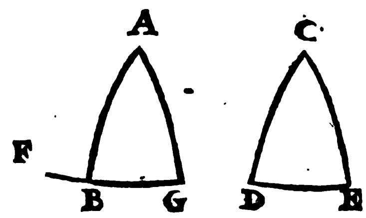
Demonstratio. Intelligatur latus EF, superponi lateri BC, congruet cum sit æquale. Dico quod in tali casu punctum D, cadet in A, neque enim potest cadere ultra aut citra arcum AG, alioquin arcus ED, major aut minor; neque etiam citra, aut ultra arcum AH; ergo cadet præcisè in intersectionem illorum arcuum, id est in punctum A; cum quilibet arcus sit semicirculo minor (*per coroll.* 3.) congruent.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Ad datum punctum circuli maximi, constituere angulum dato æqualem.

Sit datum punctum A circuli maximi AB, in quo constituendus est angulus, æqualis angulo dato C. Ex A, & C ut polis, intervallo quadrantis



circuli, describantur DE, FG, fiantque arcus DE, BG æquales, tum per A & G describatur maximus circulus (*per* 20. 1. *Theod.*)

Demonstratio. Arcus BG, DE sunt mensuræ angulorum A & C; sed illi sunt æquales inter se; ergo anguli A, & C inter se æquales erunt.

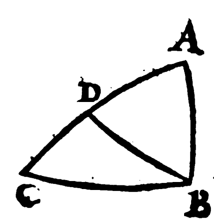
COROLLARIUM.

Poterant ex A & C ut polis describi quilibet circuli. Quorum arcus (*per* 10. 2. *Theod.*) similes essent arcubus DE, BG, atque adeò tam bene essent mensuræ angulorum A & C.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

In triangulo sphærico major angulus, majori angulo subtenditur.



Sit in triangulo sphærico ABC, angulus ABC, major angulo A: dico latus AC oppositum majori angulo majus esse. Fiat angulus ABD angulo A æqualis.

Demonstratio. Cum anguli A & ABD sint æquales; erunt (*per* 6. *huius*) latera AD, DB æqualia, & addito communi DC, erunt latera BD, DC, æqualia lateri AC, sed latera BD, DC sunt majora latere BC (*per* 3.) ergo latus AC, majus est latere BC. Conversa ita demonstratur. Posito latere AC majore quam BC, dico angulum ABC majorem esse, quàm A. Si enim esset æqualis, latera essent æqualia, si A major esset quam ABC, latus BC majus esset quam AC; contra suppositionem.

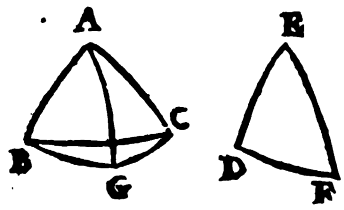
PROPOSITIO X.

Theorema.

Si triangulum duo latera, singula singulis æqualia habeat lateribus alterius, angulum vero iis contentum majorem: basin quoque basi maiorem habebit. Et vicissim si basin basi maiorem habeat, angulum quoque maiorem habebit.

Duo triangula sphærica ABC, EDF habeant latera

latera AB, DE, AC, EF æqualia; sitque angulus BAC major angulo E; dico basin BC, majorem



esse basi DF. Fiat enim angulus BAG, æqualis angulo E, & latus AG, æqualis angulo EF; ducanturque arcus BG, GC.

Demonstratio. In triangulis ABG, DEF, bases BG, DF æquales erunt (*per 4. huius*) rursus cum latera AG, AC sint æqualia, utpote æqualia lateri EF, erunt anguli AGC, ACG æquales, sed angulus BGC, major est angulo AGC, & angulus BCG, minor angulo ACG; ergo angulus BGC major est angulo BCG; ergo (*per praecedentem*) basis BC major est, quam BG, seu DF.

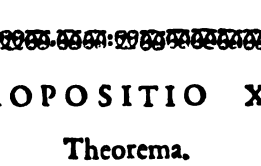
Conversa ita demonstratur. Supponatur basis BC major quam DF, dico angulum BAC majorem esse angulo E; si enim non sit major, erit minor, aut æqualis; si primum, basis BC minor esset basi DF; si secundum, æqualis foret; utrumque contra suppositionem.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si duo latera trianguli sphærici sint æqualia semicirculo, & basis producatur: erit angulus externus interno æqualis, & anguli supra basin, æquales duobus rectis; si sint maiora externus interno maior erit, & anguli supra basin minores duobus rectis; si sint minora semicirculo, externus interno maior erit, & anguli supra basin maiores duobus rectis.

Vicissim si angulus externus interno, & opposito æqualis fuerit, aut anguli supra basin æquales duobus rectis, latera duo æqualia erunt semicirculo. Si externus interno major sit, & anguli supra basin minores duobus rectis, latera maiora erunt semicirculo. Denique si externus interno minor fuerit, aut anguli supra basin maiores duobus rectis, erunt latera minora semicirculo.



In triangulo ABC duo latera AB, AC sint æqualia semicirculo. Dico producta basi BC, usque ad D, angulum externum ACD, æqualem esse interno opposito B, item angulos ACB, ABC æquales esse duobus rectis.

Demonstratio. Arcus AB, AC æquales supponuntur semicirculo, sed BAD est semicirculus cùm circuli maximi se bifariàm secent: ergo latera AC, AD sunt æqualia; ergo (*per 5.*) anguli ACD, & D sunt æquales; sed anguli B & D sunt æquales (*per defin. huius*) ergo angulus externus ACD, æqualis est angulo interno B; & cum anguli ACD, ACB æquales sint duobus rectis, erunt B & ACD æquales duobus rectis.

Vicissim si angulus ACD æqualis sit angulo B, & consequenter anguli B & ACB fuerint æquales duobus rectis, erunt anguli ACD, & D æquales, & (*per 6.*) latera AC, AD; ergo BA, AC æqualia erunt semicirculo.

Secundò, sint AB, AC majora semicirculo, cùm BAD sit semicirculus, erit latus AC majus quàm AD, & angulus D seu B major quàm externus ACD, angulus ergo externus minor erit, quam B; & cùm ACD, & ACB sint æquales duobus rectis, erunt B & ACB majores duobus rectis.

Vicissim si ACD minor sit quam angulus B, seu anguli supra basin majores sint duobus rectis, erit angulus ACD minor quàm D; ergo latus AC major arcu AD, & cùm AD, AB componant semicirculum, erunt AB, AC majora semicirculo.

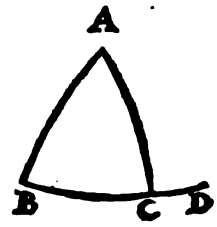
Tertiò, sint BA, AC minora semicirculo, cùm AB, AD efficiant semicirculum, erit arcus AC minor quàm AD; ergo angulus ACD, externus, major erit angulo D, aut interno B, & cum ACD, ACB æquales sint duobus rectis, erunt anguli B & ACB supra basin minores duobus rectis.

Vicissim si angulus ACD externus major sit angulo B, atque adeo anguli B & ACB supra basin minores sint duobus rectis, erit angulus ACD, major quam D; ergo arcus AD, major erit quam AC, ergo latera AB, AC minora sunt semicirculo; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

In triangulis sphæricis Isoscelibus, si latera sint quadrantes, anguli ad basin recti erunt; si maiores quadrante, obtusi; si minores, acuti; & vicissim.



Crura AB, AC trianguli Isoscelis ABC sint quadrantes, eruntque (*per 11.*) anguli ACB, ABC duobus rectis æquales, & cum sint æquales (*per 5.*) recti erunt.

Vicissim sint anguli B, & ACB recti, latera AB, AC (*per 15.1.Theod.*) transeunt per polum circuli BC, qui cum sint maximus; erunt arcus AB, AC quadrantes.

2 Latera AB, AC sint majora quadrante, anguli B, & ACB majores erunt duobus rectis, & cum sint æquales inter se (*per 5.*) uterque obtusus erit.

E contra Anguli B & ACB sint obtusi; ambo simul majores erunt duobus rectis, quare externus ACD, minor erit quam B, ergo (*per 11.*) latera AB, AC, majora erunt semicirculo, & cum æqualia sint, utrumque majus erit quadrante.

3 Latera AB, AC sint minora quadrante, ea simul

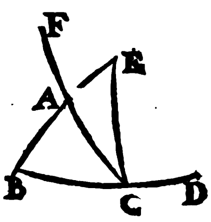
ſimul ſumpta minora erunt ſemicirculo; ergo (*per* 11.) angulus externus ACD major erit interno B, & duo B,& ACB minores erunt duobus rectis, & cum ſint æquales; uterque acutus erit.

Denique uterque B & ACB ſit acutus, erunt duo ſimul æquales duobus rectis ergo (*per* 11.) duo latera AB, AC minora erunt ſemicirculo, & cum (*per* 6.) æqualia ſint, utrumque minus erit quadrante; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Cuiuſcumque trianguli ſpharici, omnes anguli duobus rectis ſunt maiores, & ſex rectis minores.



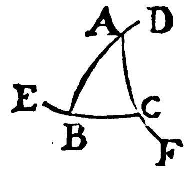
Proponatur quodcumque triangulum ſphæricum ABC; dico omnes eius angulos ſimul ſumptos majores eſſe duobus rectis, producatur latus BC in D, angulus externus ACB, vel eſt major, vel minor, vel æqualis angulo externo B. Sit primò æqualis.

Demonſtr. Cùm angulus ACD æqualis ſit interno B, ergo (*per* 11.) anguli B, & ACB ad baſin ſunt duobus rectis æquales: ergo tres majores ſunt duobus rectis. Sit ſecundo ACD minor angulo B.

Demonſtratio. Addito communi A C B, erunt ACB, ABC majores quam ACB, ACD, qui tamen æquales ſunt duobus rectis; ergo multò magis tres anguli majores erunt duobus rectis.

Denique angulus externus ACD major ſit angulo interno B, fiatque angulus ECD illi æqualis; producatur CA donec concurrat cum CE.

Demonſtratio cum angulus externus E C D, æqualis ſit interno B, latera BE, CE erunt (*per* 11.) æqualia ſemicirculo; ergo EC, AE, minora erunt ſemicirculo, & (*per eandem*) angulus externus FAE, aut illi oppoſitus ad verticem BAC, major erit quam ACE, & additis utrinque ECD, & B æqualibus; & ACB communi, erunt tres anguli B, BAC, & BCA, majores angulis ECD, ACE, BCA, hoc eſt duobus rectis.

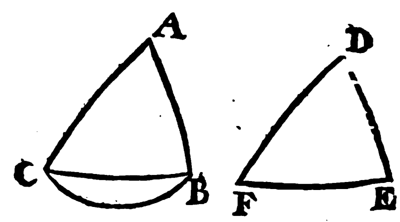


Secunda pars facilè demonſtratur, nempe tres angulos A,B,C, minores eſſe 6 rectis. Producantur tria latera, anguli DAC, CAB (*per def. huius*) æquales ſunt duobus rectis, ſicut FCB, BCA, item EBA, ABC; ergo tres BAC, ABC, ACB, minores ſunt ſex rectis; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si duo triangula ſpharica habeant duos angulos ſingillatim æquales cum angulo adiacente, illa erunt omnino æqualia.



Triangula ABC, DEF habeant angulos B, & E; C & F, & latera BC, EF his adjacentia, æqualia; dico illa omni ſenſu æqualia,hoc eſt habere reliqua latera ſingillatim æqualia.

Intelligatur FE, ſuperponi lateri BC, cum ſint ſemicirculo minores, ſpatium non comprehendent, alioquin eſſent ambo arcus ſemicirculi, igitur in tali ſuperpoſitione BC, EF, quadrabunt; tunc autem latus ED quadrabit lateri AB, alioquin angulus E major, aut minor eſſet angulo B, contra ſuppoſitionem; idem dicito de latere FD, ergo quadrabunt ſibi invicem triangula: ergo in omni ſenſu ſunt æqualia.

TRIGONOMETRIÆ LIBER QVINTVS.

De Reſolutione triangulorum ſphæricorum rectangulorum.

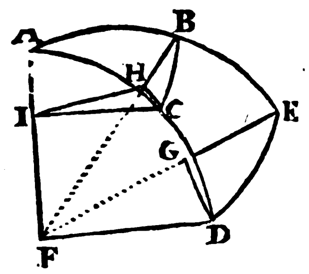
PROPOSITIO I.

Theorema.

In triangulis ſphæricis univerſis, ſinus laterum, ſunt ſinubus angulorum oppoſitorum proportionales.

Primò proponatur triangulum ſphæricum rectangulum ABC, cujus nempe angulus ABC rectus eſt; dico ita eſſe ſinum anguli recti ABC ad ſinum hypothenuſæ AC, ut ſinus anguli BAC,ad ſinum lateris B C. Perficiantur quadrantes ABG, ACD, & ex A ut polo, intervallo quadrantis deſcribatur arcus DE,& ex centro ſphæræ F ducantur lineæ FD, FB, FE, FA cum punctum A pertineat ad plana circulorum ABE, ACD, ſicut &

centrum ſphæræ, quod eſt in planis omnium circulorum maximorum, erit AF communis eorum ſectio, ſicut FB, communis ſectio planorum AB,

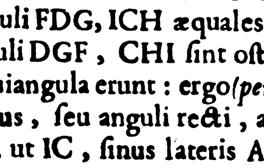


BC. Ducantur ad AF, FB, FE perpendiculares CH, CI, DG, quæ erunt ſinus arcuum AC, BC, DE, & cum arcus DE ſit menſura arcus CAB, erit DG ſinus ejuſdem anguli CAB. Item cum arcus AD ſit quadrans, erit FD ſinus totus, & angulus AFD rectus. Jungatur HI; probare debeo, ita eſſe ſinum anguli recti nempe FD ad DG, ſinum arcus DE, ſeu ſinus anguli CAB, ſicut CI ſinus hypothenuſæ AC ad CH ſinum lateris BC; quod probavero ſi oſtendero triangula FGD,ICH eſſe æquiangula.

Demonſtratio. Cum linea FB ſit communis ſectio plani ABEF, & plani FBC ad ipſum recti, cum angulus ABC ſupponatur rectus, ſitque ducta CH ad ipſam perpendicularis, hæc (*per* 3. *def.* 11. *Eucl.*) erit recta ad planum ABEF, & (*per* 4. *def.*) ejuſdem angulus CHI rectus erit. Sicut angulus FGD rectus eſt. Item cum planum ABEF ſit rectum ad planum EDF, cum arcus EA tranſeat per polum arcus ED, ſitque DG perpendicularis ad FE, communem ſectionem, recta erit ad planum ABEF, ad quod recta oſtenſa eſt linea CH; ergo (*per* 6.11.*Eucl.*) lineæ DG, CH ſunt parallelæ, ſed parallelæ etiam ſunt IC, FD cum ſint perpendiculares ad eandem FA ergo (*per* 10. 11.*Eucl.*) anguli FDG, ICH æquales ſunt, & cum præterea anguli DGF, CHI ſint oſtenſi æquales triangula, æquiangula erunt: ergo (*per* 3.6.) ita erit FD ſinus totus, ſeu anguli recti, ad DG ſinum anguli CAB, ut IC, ſinus lateris AC, ad CH ſinum lateris BC, quod erat demonſtrandum.

Si id probandum de angulo ACB, & latere AB, aliter exhibenda eſſet figura.

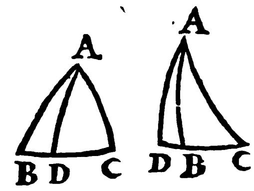
Hæc demonſtratio procedit de angulo rectangulo, cujus angulus de quo agitur acutus eſt. Eandem oſtendo in triangulo rectangulo habente unum angulum obtuſum. Proponatur ergo triangulum ABC rectangulum ABC, cujus angulus



ACB rectus ſit, & angulus BAC obtuſus, dico ita eſſe ſinum anguli ACB ad ſinum lateris oppoſiti AB, ſicut ſinus anguli BAC, ad ſinum lateris BC. Producantur latera BA, BC donec concurrant in D, fietque aliud triangulum DAC, in quo angulus ACD rectus erit, & angulus CAD acutus, cum CAB ſit obtuſus.

Demonſtratio. In triangulo CAD ita eſt (*per punctum præcedens*) ſinus anguli recti ACD ad ſinum lateris DA, ut ſinus anguli DAC, ad ſinum lateris DC, ſed anguli DAC, BAC, & latera DA, AB; DC, CB eundem ſinum habent, cum ſint ſibi invicem ſupplementa ad ſemicirculum: ergo ita eſt ſinus totus ad ſinum lateris AB, ut ſinus anguli CAB ad ſinum lateris oppoſiti DC; quod erat demonſtrandum.

Tertiò proponatur triangulum non rectangulum ABC; dico ita eſſe ſinum anguli ABC ad



ſinum lateris oppoſiti AC, ut ſinus anguli ACB; ad ſinum lateris AB. Demittatur ex A ad baſin BC arcus perpendicularis AD, qui primò cadat intra triangulum.

Demonſtratio. In triangulo rectangulo ADC ita eſt ſinus totus ad ſinum AC, ut ſinus anguli C ad ſinum lateris AD (*per primam partem huius*) Item in triangulo rectangulo ADB ita eſt ſinus AB ad ſinum totum, ut AD ad ſinum anguli B; eſt igitur perturbata ratio, quare (*per* 23.5.*Eucl.*) ita eſt ſinus AB ad ſinum AC, ut ſinus ACB ad ſinum ABC; quod erat demonſtrandum.

Eadem demonſtratio ſuam vim obtinet, dum arcus perpendicularis cadit extra; ſed in tali caſu anguli ABC, ABD eundem ſinum habent.

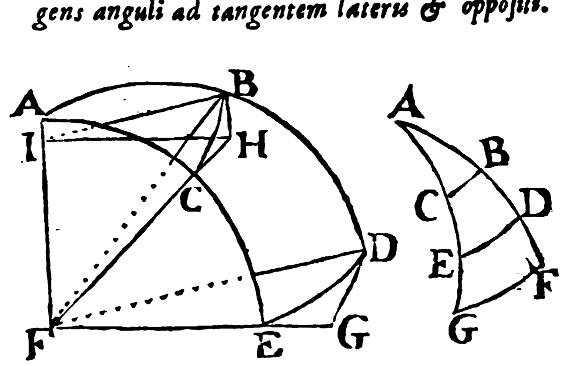
COROLLARIUM.

In triangulo quocumque datis duobus lateribus & angulo uni eorum oppoſito, innoteſcit per regulam trium angulus alteri lateri oppoſitus. Pariter cognitis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, datur aliud latus.

PROPOSITIO II.

Theorema.

In triangulis rectangulis, ita eſt ſinus totus ad ſinum lateris adjacentis angulo recto, ut tangens anguli ad tangentem lateris ei oppoſiti.



Proponatur triangulum ABC rectangulum in B, dico ita eſſe ſinum totum, ſeu quadrantis AC, ad ſinum lateris AC, ut tangens anguli BAC ad tangentem lateris oppoſiti BC. Perficiantur quadrantes ABD, ACE, & ex A ut polo, intervallo quadrantis, deſcribatur arcus ED, ducanturque ex centro ſphæræ F, lineæ FEG, FCH, FB, FA; tum in plano FDE ducatur DG, perpendicularis ad FD, quæ (*per* 16.3.*Eucl.*) tanget arcum DE, eritque eius tangens, & cum arcus ED ſit menſura anguli BAC, erit etiam tangens ejuſdem anguli. Ducatur item in plano FBH linea HB perpendicu perpendicularis ad FB, quæ erit tangens arcus BC, ducatur ex puncto B linea BI perpendicularis ad FA, jungaturque HI, ostendere debeo ita esse sinum totum FD ad BI sinum arcus BA, sicut DG tangens anguli BAC ad BH tangentem arcus BC; quod præstitero si ostendero triangula BIH, FDG esse æquiangula.

Demonstratio. Cum angulus ABC supponatur rectus (*per defin. huius*) planum BFH rectum est ad planum ADF. Pariter cum arcus AD transeat per polum A, arcûs DE erit planum FDE rectum ad idem planum ADF, sunt autem ad communes sectiones FB, FD, ductæ perpendiculares GD, HB, quæ (*per 3. def. 11. Eucl.*) erunt rectæ ad planum ADF, ergo (*per 6. 11.*) erunt parallelæ inter se, & anguli GDF, HBI recti erunt; item plana per eas ducta nempe GDF, HBI, erunt ad idem planum AFD recta, & cum ad communes sectiones BI, FD ducta sit perpendicularis FA; hæc erit recta ad ea plana; ergo anguli FIH, IFE recti erunt: parallelæ igitur sunt lineæ FE, IH: sed lineæ IB, FD sunt etiam parallelæ cum ad eandem FA sint perpendiculares: quare (*per 10. 11.*) anguli BIH, DFE sunt æquales; ergo triangula BIH, FDG sunt æquiangula, & (*per 3. 6. Eucl.*) ita est FD sinus totus, ad DG tangentem anguli BAC, ut BI sinus lateris AB ad BH tangentem lateris BC; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

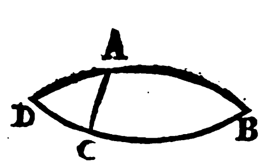
Si sint plurima triangula rectangula ABC, ADE, habentia præterea alium angulum A æqualem, aut eundem, dico ita esse sinum AB ad tangentem BC, sicut sinus AD, ad tangentem DE; perfectis enim quadrantibus ut prius. Quia ita est sinus totus ad sinum AB, ut tangens anguli A ad tangentem DE, & pariter ita est sinus totus ad sinum AB, ut tangens anguli A, ad tangentem BC, ita erit sinus AD ad sinum AB, ut tangens DE ad tangentem BC.

Quamvis ex his duobus Theorematibus solvi possint omnia triangula sphærica rectangula, quia tamen multæ occurrunt ambiguitates; ideo reliqua Theoremata addenda sunt.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si duo Trianguli sphærici latera continuentur, fiet aliud triangulum eandem basin, & angulum basi oppositum habens, cæterasque partes priorum supplementa ad semicirculum.



Trianguli sphærici ABC, latera BA, BC continuentur ad concursum D, dico fieri aliud triangulum ACD, cujus eadem basis AC, idem angulus basi oppositus, & reliquæ partes, sunt supplementa ad semicirculum, partium trianguli ACB.

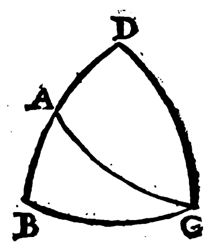
Demonstr. (*Per def. hujus*) anguli B & D sunt æquales cum anguli DAC, CAB sint duobus rectis æquales, unum erit alterius supplementum ad duos rectos, aut semicirculum. Idem dicito de latere DA, respectu lateris AB, cum DAB sit semicirculus.

Quia præcedentia duo Theoremata videntur accommodata esse iis triangulis rectangulis quorum latera sunt majora quadrante, & anguli acuti, ope istius accommodantur omni triangulo rectangulo, etiam cujus latera sunt majora quadrante; nam productis ejus lateribus ad concursum usque; fiat aliud triangulum rectangulum cujus latera sunt quadrante minora.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si producatur crus trianguli rectanguli usque ad polos alterius cruris; fit aliud triangulum, commune latus habens, & reliquas partes aut æquales partibus præcedentis, aut earum supplementa ad semicirculum aut complementa ad angulum rectum.



Proponitur triangulum ABC, rectangulum in B, produciturque crus BA usque ad punctum D, polum alterius cruris BC, ducitur que latus DC; dico fieri aliud triangulum ADC, cujus singulæ partes sunt vel æquales partibus alterius, vel eorum supplementa ad semicirculum, vel denique earum complementa. Nam 1. basis est eadem AC, 2 latus DC est quadrans, æquale angulo B, 3 angulus D æqualis, cruri BC alterius, est enim BC, mensura anguli D. (*per def. hujus*) 4 angulus DAC est supplementum ad semicirculum anguli BAC, 5 anguli AD complementum lateris AB, 6 denique cum angulus DCB (*per 15. 1. Theod.*) sit rectus, erit angulus DCA complementum anguli ACB; ergo sex partes unius trianguli respondent, eo modo quo dictum est, sex partibus alterius trianguli. Idem accidit in triangulo cujus unum latus est quadrans, ut in ADC, si DA producatur donec quadrantem perficiat fiet triangulum ABC, cujus angulus B rectus erit, BC erit mensura anguli D, &c.

PROPOSITIO V.

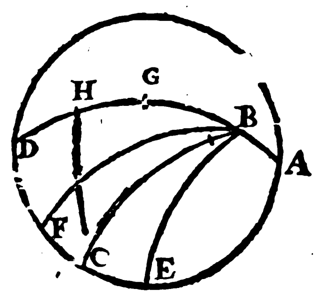
Theorema.

In triangulis rectangulis, crura sunt ejus affectionis ac anguli ipsi oppositi.

Sit triangulum ABC rectangulum in A, dico quod si latus AC comprehendens angulum rectum A fuerit quadrans, angulus CBA illi oppositus rectus erit; si crus fuerit majus quadrante, ut AF angulus illi oppositus FBA major erit quadrante, si fuerit minor quadrante ut AE, angulus EBA acutus erit.

Demonstratio. Angulus A rectus supponitur; ergo

ergo (*per* 15. *Theod.*) circulus ACD per polos cruris AB transit, & cum AC dicatur quadrans,



erit polus punctum C, & (*per* 15. 1. *Theod.*) angulus CAB rectus erit; ergo angulus FBA obtusus, & EBA, acutus, quod erat demonstrandum.

Conversa etiam patet. Si enim angulus EBA sit acutus, fiat ABC rectus, eritque C polus, ergo AE, minor quadrante, idem dicito de angulo obtuso FBA.

COROLLARIUM I.

Cognitis angulis, tollitur ambiguitas circa crura; & cognitis cruribus, ambiguitas circa angulos.

Pro solvenda ambiguitate circa basin.

COROLLARIUM II.

Si crus fuerit quadrans ut AC, basis CB quadrans erit, cum ostenderimus punctum C polum esse cruris AB.

COROLLARIUM III.

Si duo crura fuerint affectionis ejusdem, non tamen quadrantes, basis erit quadrante minor. Primò BA, AE sint ambo quadrante minora, erit BE minor quadrante.

Demonstr. Cum semicirculus AB insistat perpendiculariter circulo ACD, eò quòd angulus B sit rectus, erit (*per* 1. *præcedentis*) BE, minor quam BC; sed BC est quadrans, ergo basis BE est quadrante minor.

Sint ambo crura majora quadrante ut DB, DE, pariter basis DE minor est quadrante.

COROLLARIUM IV.

Si duo anguli fuerint recti, ut A, & BCA, basis BC erit quadrans, & CA.

COROLLARIUM V.

Si anguli ad basin fuerint affectionis ejusdem, non tamen recti, basis erit quadrante minor, ut si anguli ABE, AEB fuerint acuti, latera AB, AE erunt minora quadrante; ergo basis BE erit minor quadrante. Idem ostendam si fuerint obtusi; nam latera majora erunt quadrante.

COROLLARIUM VI.

Si anguli ad basin fuerint affectionis diversæ, & nullus quadrans, aut latera, ut in ABF, angulus ABF obtusus est, & AFB acutus (*per* 1. *præcedentis*) basis BF erit major quadrante.

COROLLARIUM VII.

Si fuerint in triangulo duo anguli recti, vel duo latera sint quadrantes, vel unus angulus rectus sit, & unum latus quadrans 4 in triangulo æquabuntur quadranti.

Demonstratio. Sint enim primò anguli recti CAB, CBA, uterque arcus CB, CA, erit quadrans, quia (*per* 15. 1. *Theod.*) polus est in utroque arcu BC, AC; ergo est in puncto C, & cùm à polo ad maximum circulum sit semper quadrans, arcus BC, AC erunt quadrantes.

Secundò arcus AC, BC sint quadrantes necessariò punctum C est polus, si enim polus non esset unus alio minor esset (*per* 1. *præcedentis*) denique sit angulus A rectus, & AC quadrans, ostendam (*per* 15. 1. *Theod.*) in arcu AC, esse polum, & in polo ejus C.

In hujusmodi triangulis non est opus calculo, sed latus est mensura anguli oppositi. Nec deduci aliquid potest, nempe possunt fieri triangula inæqualia, licet habeant 4. partes æquales.

COROLLARIUM VIII.

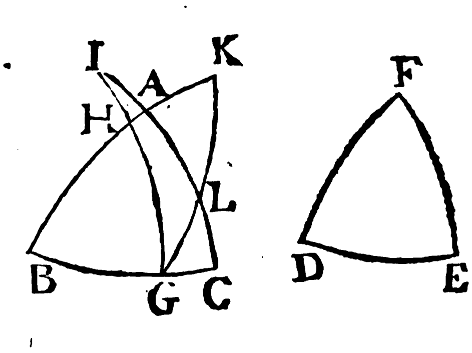
In genere quoties fieri non potest ut duo triangula inæqualia easdem partes habeant, ac illæ quæ in triangulo cognoscuntur, nulla potest esse esse ambiguitas.

Ut si dentur trianguli duo latera, & angulus ab iis comprehensus. Pariter datis omnibus lateribus, quia fieri non potest ut duo triangula inæqualia, aut dissimilia, habeant omnia latera æqualia. Pariter nulla est ambiguitas quoties dantur duo anguli cum angulo adjacente, quia non per ultimam præcedentis triangula habentia duo angulos adjacentes cum latere adjacente sunt æqualia.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Triangula sphærica omnes angulos singillatim æquales habentia, latera quoque habent æqualia.



Triangula ABC, DEF habeant angulos, singulos singulis æquales, dico eorum latera singillatim æqualia esse. Sit enim si fieri potest latus BC, majus quam DE, & AB sit æquale FD, abscindatur arcus BG, æqualis DE; ducaturque AG.

Demonstratio. Cùm BG, DE, AB, FD sint æqualia, & anguli B & D; erunt (*per* 4. *præcedentis*) anguli BAG, DFE æquales, quod est contra suppositionem, cum anguli BAC, & F supponantur æquales. Multò magis si dicantur AB, DF, AC, FE æqualia esse, & latus BC esse majus; clarum enim est (*per* 10. *præcedentis*) angulum BAC esse majorem angulo F.

Secundò dicatur AB majus esse quam DF, sicut BC majus est quàm DE. Abscindatur BH, æquale

æquale lateri DF, & BG ipsi DE, ducatur GHI, donec concurrat cum I producto.

Demonstratio. Triangula BHG, DFE æqualia essent (*per* 4. *præcedentis*) & angulus HGB, æqualis foret angulo E, cùm igitur angulus HGB æqualis sit angulo interno C, erunt (*per* 11. *præcedentis*) latera GI, CI æqualia semicirculo. Ex alia parte, angulus BHG, aut illi oppositus ad verticem IHA, æqualis est angulo E, qui supponebatur æqualis angulo BAC, aut illi opposito ad verticem IAK; ergo angulus externus IAK opposito ad verticem IHA æqualis esset; ergo (*per* 11. *præcedentis*) latera HI, AI semicirculo sunt æqualia, quod est absurdum, cum latera CI, GI sint ostensa semicirculo æqualia.

Tertiò sit latus AB minus quàm DF, sitque semper GF æquale lateri DE, producatur BA, donec BK sit æquale lateri DF, ducaturque KG.

Demonstratio. (*per* 4. *præcedentis*) erunt triangula BKG, DFE omninò æqualia; ergo angulus BGK, æqualis est angulo E, qui supponebatur æqualis angulo C; ergo angulus BGL, æqualis est interno C. Ergo (*per* 11. *præcedentis*) erunt latera GL, CL æqualia semicirculo. Sunt etiam æquales anguli K & F, sed F supponebatur æqualis angulo BAC; ergo in triangulo AKL externus angulus BAC æqualis esset interno K; ergo (*per* 11. *præcedentis*) latera AL, KL æqualia essent semicirculo; ergo aut AC aut BK essent saltem semicirculus, quod est absurdum; nam si AC esset semicirculus, deberet rursus convenire cum circulo AB, cum circuli maximi se bifariam secent.

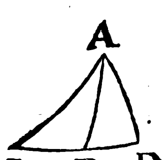
COROLLARIUM.

Hinc sequitur quod datis tribus trianguli angulis nulla possit esse ambiguitas; cùm fieri non possit ut duo triangula habeant angulos singulos æquales, & non sint in omni sensu æqualia.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Possunt duo triangula habere duos angulos, singillatim æquales, & latus æqualibus angulis oppositum æquale, & esse inæqualia.



Sit triangulum ABC cujus duo latera AB, AC simul sumpta æqualia semicirculo, ideoque (*per* 11. *præcedentis*) angulus externus ABD interno ACB sit æqualis. Producatur latus CB, ducaturque latus AD.

Demonstratio. Triangula ADB, ADC sunt inæqualia, sed ea habent angulos ACB, ABD æquales, angulum D communem, sicut latus AD oppositum angulis æqualibus ACB, ABD; ergo triangula inæqualia possunt habere duos angulos singillatim æquales, & latus angulis æqualibus oppositum, æquale.

COROLLARIUM I.

In tali casu est ambiguitas; nam si velles instituere analogiam, diceresque, ut sinus anguli ABD, aut ACD ad sinum anguli D, ita sinus lateris AD, quartus numerus esset tam sinus lateris AB, quam lateris AC; hæc enim latera cum sint semicirculo æqualia, sintque sibi invicem supplementa, eundem sinum habent.

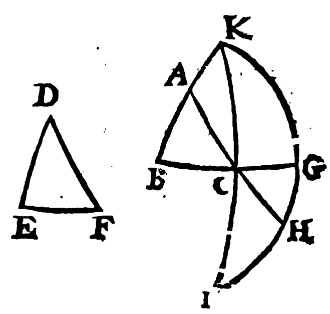
COROLLARIUM II.

Solvetur hæc ambiguitas, si aliquid aliud cognoscas, nempe si AD quadrans esset, basis AB, aut AC esset quadrans. Si AB, AD ejusdem fuerit affectionis, basis erit quadrante minor, si diversæ major, si anguli obliqui fuerint ejusdem denominationis, non tamen recti basis AB erit quadrante minor si diversæ major, si nihil horum sciatur non solvetur ambiguitas.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Triangula rectangula habentia angulum obliquum æqualem, sicut & hypothenusam, sunt omni sensu æqualia.



Duo rectangula ABC, DEF habeant angulos B & E rectos, & angulos ACB, DFE æquales, sicut & hypothenusas AC, DF. Dico ea inter se omni modo esse æqualia. Sit CG æquale lateri EF, & CH lateri DF, seu AC, & quia anguli ad verticem ACB, GCH sunt æquales, & ACB & F supponuntur æquales, erunt (*per* 4. *præcedentis*) triangula DEF, CGH omni sensu æqualia; & consequenter si producatur latus HG, cum anguli G & B sint recti, convenient latera BA, HG in puncto K polo arcus BCG (*per* 15. 1. *Theod.*) si ducatur arcus KCI, erunt K & I poli ejusdem arcûs BCG, eruntque Arcus BK, CK, GK, GI, CI quadrantes.

Demonstratio. Primò triangula ACK, ICH (*per* 4. *præcedentis*) omnino æqualia sunt; ergo bases AK, HI, æquales habent, & cum KB, IG essent quadrantes, erunt AB, GH, æquales; sed CH æqualis erat DE; ergo DE, AB æquales sunt; sed item anguli HIC, CKA sunt æqualia, quorum mensuræ BC, CG, seu EF erunt æquales, item sunt æquales anguli CAK, CHI; ergo & eorum supplementa CAB, CHG, seu EDF; ergo triangula ABC, DEF sunt omninò æqualia.

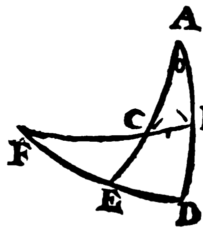
Cæteræ ambiguitates solventur suis locis potiusque pertinent ad obliquangula, quam ad rectangula.

Quantum fieri potest in sequentibus analogias à sinu toto incipiam, ut vitetur divisio. Quia divisio per sinum totum 10000000, fit tantum delendo 7 ultimas cyphras, vitatur item in logarithmis subtractio.

PROPOSITIO IX.

Problema I.

In triangulis rectangulis cognito angulo obliquo, & crure ipsi adjacente, dare alium angulum.



In triangulo ABC, rectangulo in B, cognoscatur præter angulum rectum B, angulus C, & latus BC quæritur angulus A.

Fiat ut sinus totus
ad sinum anguli C,
ita sinus complementi lateris BC
ad sinum complementi anguli A,

Præparatio. Producantur latera AB, AC ita ut AD, AE sint quadrantes. Ex A, ut polo, intervallo AD, describatur arcus DF; donec concurrat cum BC producto, & quia AD, AE sunt quadrantes anguli E, & D recti: sed jam angulus B rectus erat; quare (*per* 15.1.*Theod.*) arcus BCF, DE, concurrunt in polo arcus ABD; sunt igitur quadrantes BF, DF; & FC, complementum lateris BC; sicut FE est complementum lateris ED, seu anguli A; cum ED sit eius mensura. Hæc præparatio sæpè fiet, ideò notanda est.

Demonstratio. In triangulo rectangulo F C E, ita est sinus totus nempe anguli E recti, ad sinum anguli C, sicut sinus lateris FC, complementi BC, ad sinum lateris FE, complementi lateris ED seu anguli A, (*per* 1. *hujus.*) quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Posset hoc problema dari per modum theorematis in rectangulis; ut sinus totus ad sinum anguli obliqui, ita sinus complementi lateris ei adjacentis ad sinum complementi anguli alterius.

Quia autem radius est medius proportionalis inter secantem arcus, & sinum complementi, sive quia est; ut secans arcus ad sinum totum, ita sinus totus ad sinum complementi: Posset ita institui analogia.

Ut secans lateris C B
ad sinum totum;
ita sinus anguli C
ad sinum complementi anguli A.

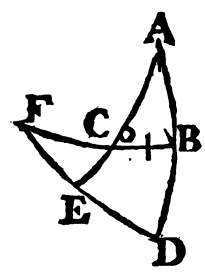
Hoc problema non patitur ullam ambiguitatem, quia, cum (*per* 5. *hujus*) in rectangulis crura sint ejusdem affectionis, ac anguli oppositi, cognito crure BC, scietur species anguli A.

PROPOSITIO X.

Problema II.

Dato angulo obliquo, & latere ipsi opposito invenire alium angulum, modo vel eius species cognoscatur, vel species lateris ipsi appositi, vel an basis sit quadrans, aut major, vel minor quadrante.

In triangulo ABC, præter angulum rectum B,



cognoscatur angulus A, & latus ipsi oppositum BC, quæritur autem angulus C.

Fiat ut sinus complementi lateris BC
ad sinum totum,
ita sinus complementi anguli A
ad sinum anguli C.

Præparatio consueta fiat.

Demonstratio. In triangulo FEC rectangulo in puncto E, ita est (*per* 1. *hujus*) sinus lateris FC, complementi lateris BC, ad sinum totum anguli recti E, ut sinus lateris FE, hoc est complementi ipsius ED seu anguli A, ad sinum anguli C; quod erat ostendendum.

Et quia sinus totus est medius proportionalis inter sinum complementi & secantem anguli: erit ut sinus complementi lateris BC ad sinum totum; ita sinus totus, ad secantem ipsius BC: Quare fiat,

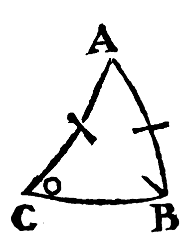
Ut sinus totus
ad secantem lateris BC,
ita sinus complementi anguli A
ad sinum anguli C,

In hoc casu est ambiguitas quam ostendimus (*prop.*7. *huius*) quæ solvi non potest, nisi primò cognoscatur species anguli C, vel cognoscatur species lateris BA, nam (*per* 5. *huius*) erit angulus C ejusdem affectionis, ac BA; vel cognoscatur species ipsius hypothenusæ AC, juxta corollararia (*prop.*5.)

PROPOSITIO XII.

Problema III.

Datâ hypothenusâ, & uno crure, invenire angulum prædicto cruri oppositum.



Sit datum triangulum ABC rectangulum in B, cujus

cujus cognoſcatur latus AB,& baſis AC,quæritur autem angulus C.

Fiat ut ſinus lateris AC
ad ſinum totum;
ita ſinus lateris AB
ad ſinum anguli C.

Demonſtratio. (*Per* 1. *hujus*) ut ſinus lateris AC ad ſinum anguli B recti, id eſt, ad ſinum totum; ita ſinus lateris AB ad ſinum anguli C ipſi oppoſiti.

Vel

Ut ſinus totus
ad ſecantem complementi AC,
ita ſinus lateris AB
ad ſinum anguli C.

Quia nempe ſinus eſt medius proportionalis inter ſinum lateris AC, & ſecantem complementi ejus, erit ſicut ſinus lateris AC primæ analogiæ ad ſinum totum; ita ſinus totus ad ſecantem complementi lateris AC.

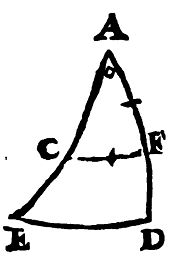
Hic caſus nullam patitur ambiguitatem, quia ex latere AB cognito, (*per* 5. *hujus*) innoteſcit ſpecies anguli C, cùm ſint ejuſdem affectionis.

PROPOSITIO XII.

Problema IV.

Cognitis cruribus,cognoſcere quemlibet angulum obliquum.

In triangulo AFC rectangulo in B, dentur latera AF, FC; quæritur angulus A.



Fiat ut ſinus lateris AF
ad ſinum totum,
ita tangens lateris FC
ad tangentem anguli A.

Producantur enim AF, AC ad quadrantem uſque; & ex A ut polo deſcribatur arcus ED.

Demonſtratio. (*Per* 2. *ejus*) ita eſt ſinus AF ad ſinum totum quadrantis AD,ſicut tangens FC ad tangentem lateris ED, ſeu anguli A, eſt enim ejus menſura.

Vel

Ut ſinus totus
ad ſecantem complementi lateris AF,
ita tangens lateris FC
ad tangentem anguli A.

Hæc ſecunda analogia eodem modo demonſtratur, quo in aliis propoſitionibus. Hic caſus non patitur difficultatem; nam ex latere FC (*per* 5. *huius*) innoteſcit ſpecies anguli A.

PROPOSITIO XIII.

Problema V.

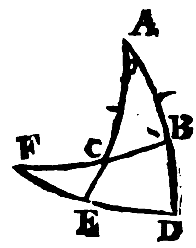
Datâ baſi, & crure, cognoſcere angulum ab ipſis comprehenſum.

Sit triangulum ABC, rectangulum in B, cujus cognoſcitur baſis AC, & crus AB; quæritur autem angulus A, ab ipſis comprehenſus.

Fiat ut tangens complementi lateris AB
ad ſinum totum;
ita tangens complementi baſis AC
ad ſinum complementi anguli A.

Fiat conſtructio conſueta.

Demonſtratio. (*Per* 2. *huius*) in triangulo FEC, rectangulo in E, ita eſt tangens lateris DB, ſeu



complementi lateris AB, ad ſinum totum: ſicut tangens lateris CE, ſeu complementi baſis AC,ad ſinum EF,complementi lateris ED, ſeu anguli A, cum ſit eius menſura.

Et quia ſinus totus eſt medius proportionalis inter tangentem arcus & complementi (*per* 24.1. *huius*) ita erit

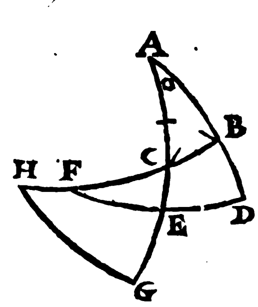
Sinus totus
ad tangentem lateris AB,
ſicut tangens complementi baſis AC
ad ſinum complementi A.

Hic caſus nullam patitur ambiguitatem, quia tam latus AB datur quam baſis AC, quæ (*per* 5. *huius*) ſi ſit quadrans angulus A erit quadrans, ſi major eſſet quadrante anguli A & C ita ſe haberent ut unus eſſet acutus, & alius obtuſus, & latus AB manifeſtaret cujus ſpeciei eſſet angulus C, & conſequenter ſpeciem anguli A, ſi verò baſis AC eſſet minor quadrante, anguli A. & C eſſent affectionis ejuſdem; cùm autem AB manifeſtet ſpeciem anguli C, manifeſtabit etiam ſpeciem anguli A.

PROPOSITIO XIV.

Problema VI.

Data baſi, & uno angulo invenire alium angulum.



In triangulo ABC, præter angulum rectum B, cognoſcatur baſis AC, & angulus C, quæritur angulus A.

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum complementi baſis AC;
ita tangens anguli C
ad tangentem complementi anguli A.

Præparatio. Conſueto more perficiantur quadrantes ABD, ACE, ducaturque ex A ut polo circulus DE, concurrens cum CB producto in F, item perficiantur quadrantes CFH CEG, & ex C ut polo deſcribatur arcus GH, cum AE, CG ſint quadrantes: erit arcus EG æqualis baſi AC, & HG erit menſura anguli C.

Demonſtr.

Demonſtratio. (*Per* 2. *huius*) in triangulo CEF rectangulo in E, cum AE, AD ſint quadrantes, erit ut ſinus totus lateris CG ad ſinum lateris C E, ita tangens arcus GH ſeu anguli C, ad tangentem arcus FE complementi arcus ED; ſeu anguli A; quod erat demonſtrandum.

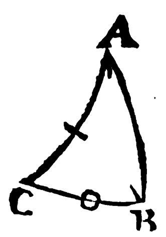
Hic caſus nullam patitur ambiguitatem, nam ſi baſis ſit quadrante minor, anguli A & C erunt ejuſdem affectionis, ſi major diverſæ (*per* 5.*huius*.)

PROPOSITIO XV.

Problema VII.

Datâ baſi, & angulo obliquo, latus ipſi oppoſitum invenire.

In triangulo ABC præter angulum rectum B, cognoſcatur baſis AC, & angulus A, quæritur latus BC.



Fiant ut ſinus totus
ad ſinum anguli A;
ita ſinus baſis AC
ad ſinum lateris BC.

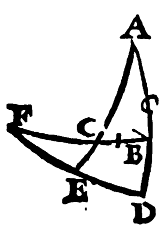
Demonſtr. Eſt ipſamet (*prop.*1. *huius*) nulla eſt in hoc caſu perplexitas; cùm (*per* 5. *huius*) in triangulis rectangulis latera, & anguli oppoſiti ſint eiuſdem affectionis.

PROPOSITIO XVI.

Problema VIII.

Datâ baſi, & uno latere aliud latus invenire.

In triangulo ABC præter angulum rectum B, detur baſis AC, & latus BC, quæritur latus AB.



Fiat ut ſinus complementi BC
ad ſinum totum,
ita ſinus complementi baſis AC
ad ſinum complementi lateris AB.
Fiat conſueta constructio.

Demonſtr. In triangulo FEC rectangulo in E, (*per* 1. *huius*) eſt ut ſinus lateris FC, ad ſinum totum: nempe anguli E recti, ita ſinus lateris EC, complementi baſis AC, ad ſinum anguli F ſeu menſuræ eius BD; hoc eſt complementi lateris AB quæſiti.

Si velis rettahere ſinum totum in primum locum.

Fiat ut ſinus totus
ad ſecantem lateris BC,
ita ſinus complementi baſis AC
ad ſinum complementi lateris AB.

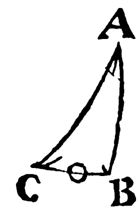
Solvetur omnis ambiguitas ex baſi A C cognitâ; quæ ſit ſit minor quadrante, latera CB, AB, erunt ejuſdem affectionis, & contrà ſi major, diverſæ.

PROPOSITIO XVII.

Problema IX.

Cognitis omnibus angulis, cognoſcere latus, angulum rectum comprehendens.

Sit triangulum ABC, cujus anguli omnes cognoſcuntur, & B ſit rectus quæritur latus BC.



Fiat ut ſinus anguli C adjacentis lateri quæſito
ad ſinum totum,
ita ſinus complementi anguli A oppoſiti
Ad ſinum complement. lateris BC.

Demonſtratio. Probavimus in (*propoſ.*9.*hujus*) hanc eſſe analogiam.

Ut ſinus totus
ad ſinum anguli C,
ita ſinus complementi lateris BC
ad ſinum complementi anguli A.

Quare permutando erit.

Ut ſinus anguli C
ad ſinum totum,
ita ſinus complementi anguli A
ad ſinum complementi lateris BC.

Si velis retrahere ſinum totum in primum locum.

Fiat ut ſinus totus
ad ſecantem complementi anguli C,
ita ſinus complementi anguli A
ad ſinum complementi lateris BC.

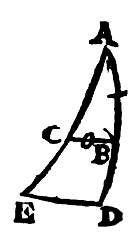
Non eſt ambiguitas in hoc caſu quia (*per* 5. *huius*) anguli indicant cujus affectionis ſint latera.

PROPOSITIO XVIII.

Problema X.

Cognito angulo obliquo, & latere adjacente, dare latus oppoſitum.

Sit triangulum A B C, cujus cognoſcatur latus AB, & angulus obliquus A ipſi adjacens: requiritur latus BC.



Fiat ut ſinus totus, lateris AD
ad tangentem anguli A, ſeu E lateris BD,
ita ſinus lateris AB
ad tangentem lateris C B.

Demonſtr. Eſt ipſamet (*prop.*2.) Cùm (*per* 5. *huius*) anguli obliqui in rectangulis ſint ejuſdem affectionis, ac latera ſibi oppoſita, angulus A deteget ſpeciem lateris CB quæſiti.

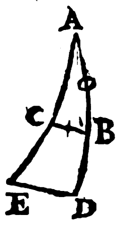
PROPOSITIO XIX.

Problema XI.

Cognito crure, & angulo obliquo ipſi oppoſito; cognoſcere aliud crus, modò ſciatur eius ſpecies, vel ſpecies anguli alterius, vel ſpecies hypothenuſæ.

Sint in triangulo ABC cognita, præter angulum

lum rectum B, angulus obliquus A & latus ipsi oppositum BC, quæritur latus AB.



Fiat ut tangens anguli A, seu lateris E D
ad sinum totum quadrantis A D;
ita tangens lateris C B,
ad sinum lateris AB.

Demonst. Est ipsamet (*propos.* 2. *hujus.*)

Si velis sinum totum retrahere in primam sedem, cùm sit medius proportionalis inter tangentes arcus, & complementi.

Fiat ut sinus totus
ad tangentem complementi anguli A;
ita tangens lateris C B,
ad sinum lateris A B

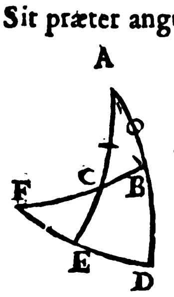
Est ambiguitas in hoc casu; nescitur enim, an sinus inventus respondeat arcui AB minori quadrante, vel majori quadrante, quæ ambiguitas tolletur (*per* 5. *huius*) si sciatur cujus affectionis sit alius angulus C, vel sciatur cujus affectionis sit basis AC. Si sit minor quadrante, latera AB, BC sunt ejusdem affectionis, si sit major erunt affectionis diversæ.

PROPOSITIO XX.

Problema XII.

Datâ basi, & angulo obliquo; invenire latus dato angulô adjacens.

Sit præter angulum rectum B, data basis AC, & angulus obliquus A, quæritur latus ipsi adjacens AB.



Fiat ut sinus complementi anguli A, nempe FE,
ad sinum totum quadrantis DF;
ita tangens complementi basis, nempe EC,
ad tangentem DB complementi lateris AB.

Demonstratio. Patet ex 2. hujus factâ præparatione solita.

Et quia (*per* 25.1.*huius*) tangentes arcuum, & complementorum sunt reciprocè proportionales, erit ut tangens complementi basis ad tangentem complementi lateris AB, ita tangens lateris AB ad tangentem basis. Quare

Fiat ut sinus totus
ad sinum complementi anguli A;
ita tangens basis AC,
ad tangentem lateris AB.

Solvetur omnis ambiguitas in hoc triangulo; quia si basis AC cognita, fuerit minor quadrante, erunt A, & C affectionis ejusdem; si major, diversæ. Ejusdem autem affectionis est latus AB, cujus est angulus C.

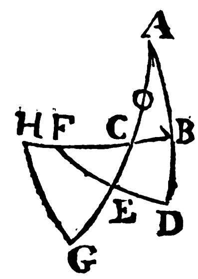
PROPOSITIO XXI.

Prblema XIII.

Cognitis angulis, cognoscere basin.

Sint cogniti in triangulo A B C, omnes anguli, & B sit rectus, quæritur basis AC.

Fiat ut tangens anguli C
ad sinum totum,
ita tangens complementi anguli A,
ad sinum complementi basis AC.



Perficiantur quadrantes ABD, ACE more consueto, item perficiantur quadrantes CEG, CFH

Demonstratio. (*Per* 2. *huius*) in triangulo CGH; erit ut tangens arcus GH, seu anguli C, ad sinum totum quadrantis CG, ita tangens arcus FE, seu complementi arcus ED seu anguli A, ad sinum arcus CE, seu complementi basis.

Si velis retrahere sinum totum in primam sedem; quia sinus totus est medius proportionalis inter tangentes arcus, & complementi, erit ut tangens anguli C ad sinum totum; ita sinus totus ad tangentem complementi anguli C. Quare

Fiat ut sinus totus
ad tangentem complementi anguli C;
ita tangens complementi anguli A
ad sinum complementi basis AC.

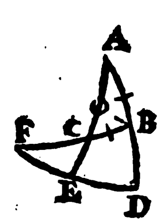
In hoc casu nulla est ambiguitas, quia si anguli A & C, sint ejusdem affectionis (*per* 5. *huius*) erit basis AC quadrante minor, si diversæ, major, si unus rectus, basis erit quadrans.

PROPOSITIO XXII.

Problema XIV.

Datis cruribus, invenire basin.

Sint data crura AB, BC, cum angulo B recto, quæritur basis AC.



Fiat ut sinus totus
ad sinum complementi lateris B C,
ita sinus complementi lateris A B
ad sinum complementi basis A C.

Perficiantur quadrantes more consueto.

Demonstratio. In triangulo F E C, rectangulo in E, (*per* 1. *huius*) ita est sinus totus, anguli E recti ad sinum lateris oppositi FC seu complementi lateris C B; ut sinus anguli F, seu arcus B D qui est complementum lateris AB, ad sinum arcus C E, qui est complementum basis A C.

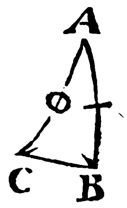
Latera AB, BC tollent ambiguitatem circa basin AC. Si enim sint ejusdem affectionis, basis erit quadrante minor, si diversæ, major.

PROPOSITIO XXIII.

Problema XV.

Dato crure, & angulo ipsi opposito, habere hypothenusam, modo sciatur species eius, vel species alterius lateris, aut anguli.

In triangulo ABC, præter angulum rectum B, cognoscatur angulus C, & latus AB, ipsi oppositum. Quæritur autem basis AC.



Fiat ut sinus anguli C
ad sinum totum;
ita sinus lateris AB
ad sinum basis AC.

Demonstratio patet (*ex 1. huius*)

Si velis retrahere sinum totum in primam sedem.

Fiat ut sinus totus
ad secantem complementi anguli C,
ita sinus lateris AB
ad sinum basis AC.

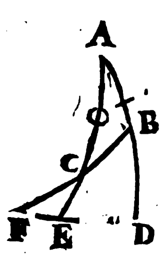
In hoc casu est ambiguitas. Possunt enim dari duo triangula in quibus tres primæ partes istius analogiæ inveniantur, quæ tamen non habebunt eandem basin; si nempe unum habeat basin minorem quadrante, & aliud majorem, (*ut propositione 7. ostendimus*) non potest tolli ista ambiguitas nisi cognoscatur species, aut alterius anguli, aut alterius lateris, juxta (*propositionem 5. huius*) & eius corollaria.

PROPOSITIO XXIV.

Problema XVI.

Dato crure, & angulo obliquo, ipsi adjacente, cognoscere basin.

In triangulo ABC, rectangulo in B; dentur angulus A & latus AB, ipsi adjacens; quæritur basis AC.



Fiat ut sinus totus
ad sinum complementi anguli A,
ita tangens complementi lateris AB
ad tangentem complementi basis AC.

Perficiatur tota constructio more consueto.

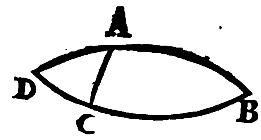
Demonstratio. In triangulo FEC rectangulo in E, (*per 2. huius*) ita est sinus totus quadrantis FD ad sinum arcus FE id est complementi arcus ED, seu anguli A; sicut tangens arcus BD, complementi lateris AB, ad tangentem arcus EC, complementi basis AC.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Omne triangulum rectangulum cujus duo latera sunt quadrante majora, & consequenter duo anguli obtusi, resolvi potest per triangulum rectangulum cuius latera erunt minora quadrante, & anguli acuti.

Sit triangulum ABC rectangulum in B, cujus duo crura AB, BC, sint quadrante majora, & consequenter anguli obliqui CAB, ACB (*per 5.*



huius) obtusi: dico esse aliud triangulum rectangulum, cujus solutione solvitur triangulum ABC, producantur latera BA, BC donec concurrant in D.

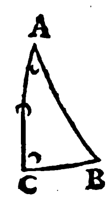
Demonstr. Triangulum DAC est rectangulum in D, cujus basis eadem, angulus DAC supplementum ad semicirculum anguli BAC; ideoque eundem sinum habens, & ita de cæteris partibus ut intuenti patet.

Licèt nullus sit casus in triangulis rectangulis qui solvi non possit facilè, quia tamen illarum analogiarum oblivisci possumus; ita ut nisi semper liber habeatur præ manibus, non sit facilè earum recordari; unicam Neperi propositionem afferemus, omnes hujusmodi analogias complectentem.

Diximus suprà ipsum divisisse omnia triangula in quadrantalia, & non quadrantalia (scilicèt quæ nullam partem habent quadranti, aut angulo recto æqualem) hæc dividi possunt in duo triangula rectangula demittendo perpendicularem, unde etiam hâc solâ propositione solvi possunt. Loquimur ergo de quadrantalibus simplicibus, quæ unicam tantùm partem habent angulo recto, aut quadranti æqualem.

In triangulo autem rectangulo verbi gratiâ ABC cujus angulus B, sit rectus; mutat tres partes magis remotas ab angulo recto B, nempe angulos A, C, & basin AC in sua complementa, & hanc notam C, apposuimus pro complementis. In quolibet autem triangulo præter angulum rectum dantur aliæ duæ partes, & quæritur tertia.

Quare partes, tàm quæ dantur, quàm quæ quæritur, (non autem recenseo inter partes datas angulum rectum, aut quadrantem) partes inquam illæ duæ, quæ dantur, & tertia quæ inquiritur, vel continuè se sequuntur, ita ut nulla sit alia quæ inter illas cadat, vel est inter illas interruptio aliqua, (non censetur autem esse interruptio, quando angulus rectus solus earum ordinem interrumpit) ut si 1. proponantur hæc tria; anguli A complementum, complementum basis AC, complementum anguli C, & harum trium partium duæ dentur, & altera quæratur, vel 2. proponatur arcus AB, anguli A complement. basis AC complementum; vel 3. complement. basis AC complement. anguli C, latus BC, vel 4. anguli C complement. latus CB, latus BA, interruptio quæ est propter angulum rectum ne computetur pro interruptione. Pariter 5. si detur latus CB, latus AB, & anguli A complementum, neque alia fieri potest combinatio, quæ non habeat interruptionem propriè dictam. Ex tribus illis propositis partibus non interruptis quarum duæ dantur, & altera quæritur, quæ medium locum obtinet vocetur media, aliæ duæ vocentur extremæ, ut datis angulorum A & C, complementis, & basis AC complemento, complementum basis AC, vocetur

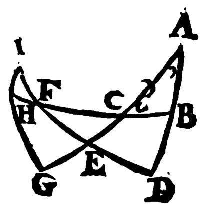


tur media; complementa angulorum A & B vocentur partes extremæ.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

In triangulis quadrantalibus, ex tribus partibus continuis, ut sinus totus ad tangentem unius extremæ, ita tangens alterius extremæ ad sinum intermediæ.



In triangulo ABC rectangulo in B. Primò proponantur tres partes non interruptæ, complementum anguli A, complementum basis AC, & complementum anguli C, dico ita esse sinum totum
ad tangentem complementi C,
sicut tangens complementi A
ad sinum complementi AC.

Perficiantur quadrantes more consueto.

Demonstratio. In triangulo CGH (*per 2. huius*) ita est tangens arcus GH, seu anguli C, ad sinum totum; ut tangens arcus FE, complementi anguli A, ad sinum arcus EC, seu complementi basis AC, quia autem sinus totus est medius proportionalis inter tangentes arcuum & complementorum (*per 24.1. huius*) erit ut, tangens anguli C ad sinum totum, ita sinus totus ad tangentem complementi anguli C: ergo ut sinus totus ad tangentem complementi anguli C,
ita tangens complementi anguli A
ad sinum complementi basis AC.

Quare, si harum trium partium duæ dentur; dabitur tertia.

Secundò dentur latus BC anguli C complemen. & complementum basis AC, dico
ita esse sinum totum
ad tangentem complementi basis AC,
sicut tangens lateris BC
ad sinum complementi anguli C.

Perficiantur quadrantes CG, CH, & ex C, ut polo, ducatur arcus GHI, erunt EI GI, quadrantes; eritque FH arcus æqualis lateri CB, cùm CH, FB sint quadrates. Pariter arcus HI, erit complementum arcus GH, seu anguli C, & arcus GE æqualis erit, arcui AC, cum AE, CG sint quadrantes.

Demonstr. In triangulo IGE (*per 2. huius*) ita est tangens arcus GE seu AC,
ad sinum totum quadrantis IG;
sicut tangens arcus FH, seu BC,
ad sinum arcus HI, complementi arcus GH seu anguli C.

Sed ut tangens arcus AC ad sinum totum (*per 24.1. huius*) ita sinus totus ad tangentem complementi arcus AC; ergo
Ut sinus totus
ad tangentem complementi basis AC,
ita tangens lateris BC
ad sinum complementi anguli C.

Tertiò. Proponantur latus AB, latus BC, & complementum anguli A, dico pariter
ita esse sinum totum,
ad tangentem complementi anguli A;
sicut tangens lateris BC
ad sinum lateris AB.

Demonstratio. In triangulo ADE
ita est tangens arcus DE, seu anguli A,
ad sinum totum quadrantis AD;
sicut tangens lateris BC;
ad sinum lateris AB.

Sed (*per 24.1. huius*) ut tangens anguli A; ad sinum totum; ita sinus totus ad tangentem complementi anguli A; ergo
Ut sinus totus
ad tangentem complementi anguli A;
ita tangens lateris BC
ad sinum lateris AB.

Quartò eodem modo demonstrabitur; si detur latus AB, complementum anguli A, complementum basis AC, quo demonstravimus, datis latere BC, complemento anguli C, & complemento basis AC, veram esse propositionem, ut fecimus in secundo casu, perficiendo quadrantes & parte anguli A, idem enim omninò continget, eademque suppositio.

Pariter demonstratus est alter casus, in quo darentur duo crura AB, CB, & complementum anguli C, est enim casus similis tertio, in quo dabatur complementum anguli A.

Pars dicitur alteri opposita; inter quam, & alteram aliquid mediat, præter angulum rectum, cui autem duæ oppositæ sunt, hæc vocetur media, ut si dentur partes illæ; nempe arcus AB, complementum AC, & BC: latus AC, erit oppositum basi AC, & BC eidem opponetur, ideoque AC cui duæ partes opponuntur dicitur media. Dentur item tres partes BC, complementum basis AC, & complementum anguli A, AC opponetur ipsi CB; quia C mediat. Item complementum A ipsi CB opponetur; cum mediet AB, quare BC dicetur media cui duæ opponuntur, & aliæ duæ dicentur oppositæ.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

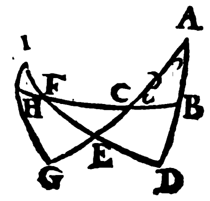
In quadrantalibus triangulis simplicibus, est ut sinus totus ad sinum complementi unius oppositæ; ita sinus complementi alterius oppositæ ad sinum intermediæ.

Vide figuram præcedentem.

Sit triangulum ABC rectangulum in B, cuius proponantur tres aliæ partes distinctæ, ab angulo recto B, inter quas sit aliqua interruptio propriè dicta, ut si detur latus AB, latus BC & complementum basis AC; eritque basis AC intermedia, & aliæ duæ partes ipsi erunt oppositæ. Dico,
Ita esse sinum totum
ad sinum complementi oppositæ AB,
ut sinus complementi oppositæ BC
ad sinum intermediæ AC.

Perficiantur quadrantes more consueto.

In triangulo FEC, ita est sinus totus anguli E recti (*per primam huius*) ad sinum anguli EFC, aut arcus DB complementi oppositæ AB; sicut sinus arcus FC, complementi alterius oppositæ BC, ad ad ſinum arcus EC, complementi AC: ergo in hoc caſu vera eſt propoſitio.



Secundò proponantur tres partes latus BC, complementum anguli A, complementum baſis AC; tàm complementum baſis AC, quàm complementum anguli A, opponuntur lateri BC, BC ergo intermedia erit. Quare dico quòd eſt ut ſinus totus ad ſinum complementi oppoſitæ, quæ oppoſita complementum eſt baſis AC, complementum autem complementi eſt ipſe arcus, dico inquam quod ut eſt ſinus totus ad ſinum complementi complementi AC ſive ad ſinum ipſius AC.

Ita ſinus complementi, complementi anguli A, hoc eſt ſinus anguli A,

ad ſinum intermediæ BC.

Demonſtratio patet (*ex* 1. *huius*) Eſt enim ut ſinus totus ad ſinum baſis AC, ita ſinus anguli A ad ſinum lateris BC.

Tertiò proponantur complementum anguli A, complementum anguli C, & latus BC, tàm latus BC quàm complementum anguli C, opponuntur complemento anguli A: igitur complementum anguli A eſt pars intermedia; debet ergo eſſe

Ut ſinus totus

ad ſinum complementi, complementi anguli C, hoc eſt

ad ſinum anguli C

ita ſinus complementi lateris BC

ad ſinum complementi anguli A.

Demonſtr. In triangulo FEC, ut ſinus totus anguli recti E ad ſinum anguli C; ita (*per* 1. *hujus*) ſinus arcus FC, complementi BC ad ſinum arcus FE, complementi arcus ED; ſeu anguli A; quod erat demonſtrandum.

Neque fieri poteſt alia combinatio quæ non ſit ſimilis prioribus. quod enim demonſtratum eſt de uno latere CB, idem demonſtrari poteſt de alio latere AB, & quod de uno angulo obliquo probatum eſt, de alio æqualiter probari poteſt.

Notandum autem ex duabus partibus datis, præter angulum rectum, poſſe per regulam trium innoteſcere tertiam. Eaſdem tamen in hâc methodo eſſe ambiguitates quas explicuimus.

Notavi etiam ſuprà, triangula in quibus latus erat quadrans, ſolvi eodem prorſus modo, quo rectangula, & habere eaſdem omninò partes, modo tres magis remotæ à quadrante mutentur in ſua complementa.

TRIGONOMETRIÆ
LIBER SEXTVS.
De reſolutione triangulorum ſphæricorum obliquangulorum.

DVAS methodos circa triangulorum obliquangulorum menſurationem in hoc libro proſequimur, prima facilius demonſtratur, praxin tamen difficiliorem habet, utpote quæ triangulum obliquangulum in duo rectangula reſolvit, ideoque triplicem ut plurimum, analogiam ſeu regulam trium adhibet. Secunda difficiliori demonſtratione innixa, faciliori utitur calculo unicaque, aut altera analogia contenta eſt, utramque in hoc libro tradimus, adjectis nonnullis propoſitionibus, ad vitandas perplexitates, & ambiguitates neceſſariis. Ordine tamen Theoremata proponemus, praxes in problematibus adjecturi.

DEFINITIO I.

Perpendicularem ſimpliciter vocamus arcum ex angulo, ad oppoſitum latus ductum, & cum eo angulum rectum comprehendentem.

DEFINITIO II.

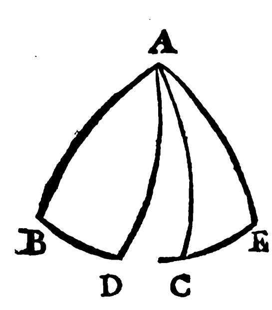
Arcum quadrantem vocamus, qui ab angulo ad latus oppoſitum ductus gradus 90 continet.

PROPOSITIO I.

Theorema.

In quocumque triangulo ſpherico, ſi anguli ad baſin fuerint affectionis ejuſdem, perpendicularis ab angulo oppoſito ducta, intra triangulum cadet; ſi diverſa, extra.

Sint trianguli ABC anguli B & C ejuſdem affectionis vel ambo acuti, vel ambo obtuſi. Dico perpendicularem Arcum, ab angulo oppoſito A



ad baſin BC cadere intra triangulum ut arcus AD. Ponantur primò anguli B & C ambo acuti, cadatque, ſi fieri poteſt, perpendicularis extra triangulum ut AE.

Demonſtr.

Demonstratio. In triangulo rectangulo ABE, cum angulus B acutus sit, erit latus AE, angulo B acuto oppositum minus quadrante (*per 5. 5. hujus*) rursus in triangulo rectangulo ACE in quo angulus ACE obtusus est, cum ACB sit acutus, erit AE, quadrante major: igitur major & minor erit, quod implicat: non igitur cadit extra.

Eadem demonstratio valet si anguli B & ACB ponantur obtusi.

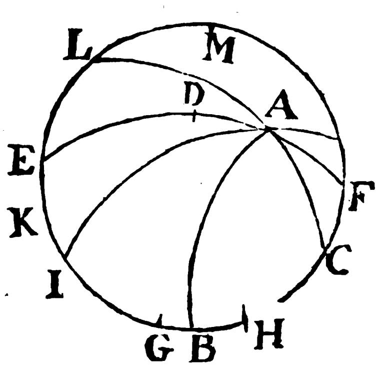
Secunda pars propositionis, nempe quod si anguli B & ACB sint affectionis diversæ, perpendicularis cadet extra triangulum, ita probatur. Ponatur angulus B acutus, & ACB obtusus, & perpendicularis si fieri potest cadat intra triangulum ut AD.

Demonstr. In triangulo rectangulo ABD cum angulus B supponatur acutus, erit (*per 5. præcéd.*) arcus AD minor quadrante. E contra in triangulo rectangulo ACD cum angulus ACD sit obtusus, latus oppositum AD erit quadrante majus, quod implicat, cum jam ostensum sit minus quadrante; ergo perpendicularis cadit extra triangulum; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si trianguli crura sint affectionis ejusdem, arcus quadrans, ab angulo ad latus oppositum ductus, cadit extra; si diversa, intra triangulum.



Sit primò triangulum sphæricum ABC, cujus crura sint affectionis ejusdem, & ambo minora quadrante, dico arcum quadrantem ductum ab angulo A cruribus comprehenso, ad latus oppositum BC, cadere extra triangulum. Sit punctum D polus circuli BCF, ducatur ex D per A circulus FDE, eruntque F & E anguli recti (*per 15. 1. Theod.*) Dividatur FBG bifariam in G, eritque G polus circuli EDF, eritque GA, si duceretur quadrans quæsitus. Ostendo hunc polum cadere extra triangulum; cadat enim si fieri potest in H, intelligaturque ductus arcus AH.

Demonstratio. Arcus AH (*per lemma 2. ad 22. l. 2. Theodosii*) minor est arcu AB, qui minor quadrante supponitur, ergo arcus AH non esset quadrans.

Secundò sit triangulum LAI, cujus crura AL, AI sint ambo majora quadrante, dico arcum quadrantem cadere extra triangulum ut IG.

Demonstratio. Non potest arcus quadrans cadere inter E & I; esset enim major latere AI (*per 1. 5.*) qui major quadrante supponitur, nec inter E & L propter eandem rationem.

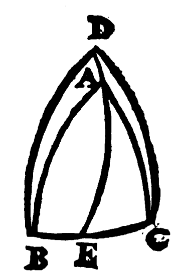
Tertiò sit triangulum IAB, sitque IA majus, AB minus quadrante, cadet arcus quadrans inter utrumque.

Demonstr. Si enim caderet inter I & E, esset major crure AI, majore quadrante, si inter B & F, esset minor crure AB, minore quadrante.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Trianguli sphærici acutanguli quodlibet latus quadrante minus est.



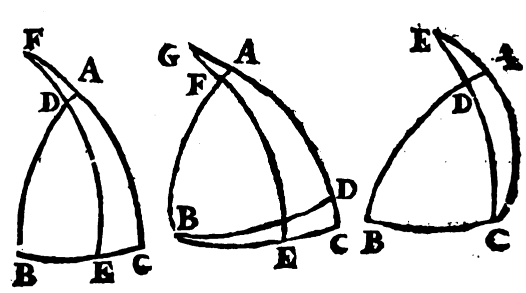
Triangulum ABC sit acutangulum, hoc est singuli eius anguli sint acuti; dico singula eius latera esse quadrante minora. In punctis B & C excitentur arcus perpendiculares, qui (*per 15. 1. Theod.*) concurrent in D polo circuli BC, ducatur arcus DAE, qui per primam hujus cadet intra triangulum, cum anguli ABC, ACD sint affectionis ejusdem.

Demonst. In triangulo rectangulo AEC (*per 5. 5. hujus*) cum anguli ECA, EAC sint acuti, erit basis AC quadrante minor. Idem ostendam de latere AB, & facta alia constructione de latere AB.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Trianguli cuius omnia latera sunt quadrante maiora, vel unum quadrans, alia maiora quadrante; omnes anguli obtusi sunt.



Sit primò triangulum ABC cujus omnia latera sint quadrante majora, & æqualia, clarum est quod erit omnifariam Isosceles: ergo (*per 12. 4.*) erunt omnes anguli obtusi.

Secundò sit ABC Isosceles cujus omnia latera sint quadrante majora, eruntque (*per 12. 4.*) anguli B & C obtusi. Abscindantur quadrantes BE, BD, ducaturque ED concurrens cum CA, producto in F.

Demonstr. Quia BD, BE sunt quadrantes, B erit polus arcus ED, atque adeo anguli B & D recti erunt (*per 12. 1. Theod.*) & DE mensura anguli B obtusi erit major quadrante; CA autem supponitur major quadrante, sunt igitur arcus FD, FA minores ſemicirculo, ergo (*per* 11.4. *huius*) angulus D rectus major eſt oppoſito DAF, ergo reliquus DAC erit obtuſus.

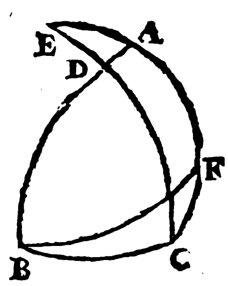
Tertiò ſit ſcalenum triangulum ABC, ſitque AC latus majus latere AB, abſcindatur AD illi æquale, & quia AB eſt majus quadrante, etiam AD majus erit quadrante; quare per ſuperiorem caſum angulus ABD erit obtuſus, multò magis ABC. Ex BA & BC majoribus quadrante, abſcindantur quadrantes BE, BF, ducaturque arcus EF, concurrens cum CA producto in G, eruntque anguli F & E recti, & EF menſura anguli obtuſi ABC major quadrante; AC item ſupponitur majus quadrante.

Demonſtr. Erunt arcus AG, FG, minores quadrante: ergo (*per* 11.4. *huius*) angulus externus F qui rectus eſt, major erit oppoſito FAG, qui conſequenter acutus erit; ergo reliquus FAC obtuſus erit.

Quartò ſit triangulum Iſoſceles ABC, cujus duo latera AB, AC ſint æqualia, & majora quadrante, & BC quadrans, dico omnes angulos obtuſos eſſe. Id conſtat (*per* 11.4.) de angulis ABC, ACB; reſtat id probandum de angulo BAC. Abſcindatur BD quadrans, ducaturque arcus CDE, concurrens cum CA producto in E; eritque B polus circuli CDE (*per* 15.1.*Theod.*) & angulus D rectus. Item arcus DC menſura anguli B obtuſi, erit major quadrante, ergo arcus FG, AG erunt ſinguli minores quadrante.

Demonſtr. (*Per* 11.4.*huius*) cum latera ED, EA ſint minora ſemicirculo, angulus externus D qui rectus eſt, major erit interno EAD, qui propterea acutus erit, & reliquus DAC obtuſus erit.

Quintò AB, AC ſint inæqualia, AC majus, &



ambo majora quadrante, & BC quadrans. Abſcindatur BD quadrans, & ex B ut polo deſcribatur arcus CD, concurrens cum CA producto in E, abſcindatur AF, æquale AB, ducaturque BF. Eritque (*per* 12.4.*huius*) angulus ABF obtuſus, multò magis ABC; erit item angulus D rectus, & CD, menſura anguli obtuſi major quadrante, ſicut & CA; quare reliqui arcus DE, AE erunt minores quadrante.

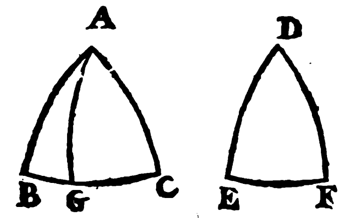
Demonſtr. (*Per* 11.4.) angulus externus D qui rectus eſt, major erit angulo oppoſito DAE, qui conſequenter acutus erit, ergo reliquus BAC obtuſus erit; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si duo triangula habeant duos angulos ſingillatim æquales, unumque latus angulo æquali oppoſitum æquale, reliquum alteri angulo æquali oppoſitum ejuſdem affectionis, non tamen quadrans; erunt triangula omnimodò æqualia.

Sint in triangulis ABC, DEF, anguli C & F; B & E ſingillatim æquales, item latus DF lateri AC æquale, & DE, AB ejuſdem affectionis, non ta-



men quadrantes; dico reliqua omnia æqualia eſſe. Si enim non ſunt; ſit BC majus, abſciſſoque CG, æquali ipſi EF, ducatur AG.

Demonſtratio. Triangula ACG, DFE (*per* 4.4.) ſunt omnino æqualia; ergo anguli AGC, & E, æquales ſunt; ſed E, & B ſunt æquales; ergo AGC, & B ſunt æquales: ergo (*per* 11.4.) AB, AG, ſeu DE ſunt æqualia ſemicirculo, & cum non ſint quadrantes, ſi unnm ſit majus quadrante, alterum quadrante minus erit, quod eſt contra ſuppoſitionem, cum dicantur affectionis ejuſdem.

COROLLARIUM I.

Ex hoc ſequitur quod ſi in triangulo ABC detur latus AC, cum duobus angulis C & B, poſſit quidem inſtitui analogia, ut ſinus anguli B ad ſinum anguli C, ita latus AC ad quartum, qui erit ſinus tam lateris AB, quam AG; ſunt autem AB, AG ſupplementa. Quod ſi ſciatur an latera AB, AC ſint affectionis ejuſdem, ſolvetur ambiguitas.

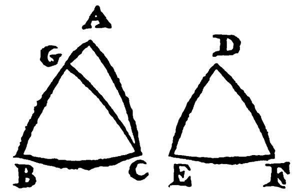
COROLLARIUM II.

Si punctum A eſſet polus lateris BC, ita ut arcus AC, AB, AG eſſent quadrantes, triangulum eſſet quadrantale, atque adeo calculo non indigeret.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Ea triangula ſunt omni modo æqualia, quæ unum angulum æqualem habent, unâ cum lateribus circa alium angulum, modò tertius angulus in utroque ſit affectionis ejuſdem, non tamen recti.



In triangulis ABC, DEF ſint anguli B & E æquales, ſintque latera BC, EF, CA, FD æqualia, item anguli A & D ſint affectionis ejuſdem, non tamen recti, dico reliqua omnia eſſe æqualia. Si enim latus AB majus eſſet latere DE, abſcindatur BG æquale ipſi DE, ducaturque arcus CG.

Demonſtratio. (*Per* 4.4. *huius*) triangula BGC DEF ſunt omnino æqualia; ergo latera CG, EF ſunt

sunt æqualia, sed EF, AC supponebantur æqualia; ergo CG, CA sunt æqualia; ergo (*per 5. 4. huius*) anguli A & CGA sunt æquales; sed CGA, & CGB sunt duobus rectis æquales; ergo anguli CGB seu D & A erunt duobus rectis æquales; ergo non affectionis ejusdem; contra suppositionem.

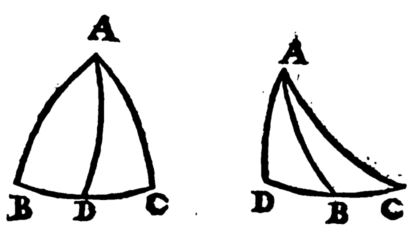
COROLLARIUM.

Patet in triangulo non sufficere ut dentur duo latera, & angulus uni eorum oppositus, nisi aliquid aliud cognoscatur ad solvendam ambiguitatem.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

In triangulis obliquangulis demissa perpendiculari ita erunt reciprocè sinus segmentorum basis, ut tangentes angulorum basi adjacentium reciprocè.



In triangulo ABC, demissa perpendiculari AD, dico ita esse sinum arcus BD ad sinum arcus DC, ut tangens anguli C, ad tangentem anguli B.

Demonstratio. (*Per 2. 5. hujus*) in triangulo ABD rectangulo in D, ita est sinus totus ad sinum arcus BD, ut tangens anguli B ad tangentem perpendic. AD, & (*per eandem*) in triangulo ADC, ita est sinus lateris AD ad sinum totum, ut tangens AD ad tangentem anguli C; ergo ita disponi possunt in perturbata ratione

Sinus DC	tangens B,
Sinus totus	tangens AD,
Sinus BD	tangens C.

Ergo subductis mediis ita erit sinus DC ad sinum BD, ut tangens anguli B ad tangentem anguli C; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

In triangulis obliquangulis demissa perperdiculari, tangentes segmentorum basis proportionales sunt tangentibus partium anguli verticalis.

Vide figuram præcedentem.

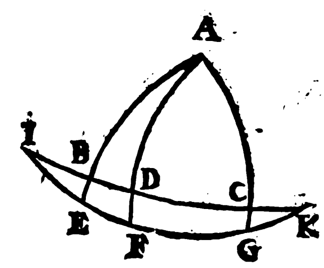
In triangulo ABC demissa perpendiculari AD, dico ita esse tangentem arcus BD ad tangentem arcus DC, sicut tangens anguli BAD ad tangentem anguli CAD.

Demonstratio. (*Per 2. 5. huius*) in triangulo rectangulo BAD, ita est sinus totus ad sinum lateris AD, ut tangens anguli BAD ad tangentem BD; ita pariter in triangulo CAD ita est sinus totus ad sinum lateris AD ut tangens anguli CAD ad tangentem lateris CD; ergo ita est tangens BAD ad tangentem BD, ut tangens CAD ad tangentem CD; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

In obliquangulis demissa perpendiculari ita sunt sinus complementorum partium anguli verticalis, sicut tangentes complementorum laterum.



In triangulo ABC, cadat primò perpendicularis AD intra triangulum, dico ita esse sinum complementi anguli BAD ad sinum complementi anguli CAD, sicut tangens complementi AB, ad tangentem complementi AC, perficiantur quadrantes AE, AF, AG, & ex A ut polo describatur maximus circulus EFG, concurrens cum BC, in K, & I, eruntque ID, DK, IF, FK, quadrantes; & anguli E, & G recti, (*per 15. 1. Theod.*)

Demonstr. (*Per 2. 5. hujus*) in triangulo rectangulo IBE, ita est sinus totus ad tangentem anguli I seu arcus FD, ut sinus EI, complementi EF, seu anguli BAD, ad tangentem BE complementi AB. Pariter in triangulo CKG, ita est sinus totus ad tangentem anguli K, seu arcus FD, sicut sinus GK, complementi FG, seu anguli DAC, ad tangentem CG, seu complementi AC, ergo ut sinus complementi anguli BAD ad tangentem complementi AB; ita sinus complementi DAC ad tangentem complementi AC; quod erat demonstrandum.

Si perpendicularis AD cadat extra triangulum

ABC; perfectis quadrantibus AF, AE, AG, descriptoque circulo FI, ex A ut polo, donec concurrant cum DC producto in I, erunt quadrantes FI, DI, & anguli F, E, G recti.

Demonstr. (*per 2. 5. huius*) in triangulo CGI, ita est sinus GI, complementi arcus FG, seu anguli FAG, ad tangentem CG, complementi lateris AC, sicut sinus arcûs EI, complementi arcûs FE, seu anguli DAB, ad tangentem EB complementi lateris AB.

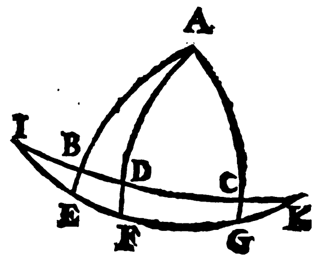
Licèt autem assumpserimus latera minora quadrante,

drante, id etiam veriſſimum eſt, ſi aſſumantur latera majora quadrante.

PROPOSITIO X.

Theorema.

In obliquangulis demiſsâ perpendiculari ita ſunt ſinus complementorum laterum; ut ſinus complementorum ſegmentorum baſis.



In eadem figura dico ita eſſe ſinum complementi AB ad ſinum complementi BD, ut ſinus complementi AC ad ſinum complementi CD.

Demonſtr. (*Per 1.5.huius*) In triangulo rectangulo IBE, ita eſt ſinus totus, ſeu quadrantis ID, aut anguli recti E, ad ſinum anguli I, ſeu arcûs DF, complementi perpendicularis, ut ſinus IB complementi ſegmenti BD, ad ſinum BE, complementi lateris AB. Pariter in triangulo KCG, ita eſt ſinus totus ad ſinum anguli K, ſeu menſuræ eius lateris DF, ut ſinus CK, complementi ſegmenti DC ad ſinum CG, complementi lateris AC, ergo ut ſinus complementi BD, ad ſinum complementi AB, ita ſinus complementi DC, ad ſinum complementi AC; quod erat demonſtrandum.

Idem in 2 figura demonſtrari poteſt cum perpendicularis cadit extra triangulum.

COROLLARIUM.

Ita eſt ſinus complem. BD ad ſinum complementi AB, ut ſinus totus ad ſinum complementi perpendicularis AD.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

In obliquangulis demiſsâ perpendiculari ita ſunt reciprocè tangentes laterum, ut ſinus complementorum angulorum verticalium.

Vide figuram præcedentem.

In eadem figura dico ita eſſe ſinum complementi BAD ad ſinum complementi CAD, ut tangens AC ad tangentem AB.

Demonſtratio. (*Per 9.*)
ita eſt ſinus complementi BAD
ad ſinum complementi CAD,
ut tangens complementi AB
ad tangentem complementi AC.

Sed (*per 25.1.hujus*) tangentes arcuum tangentibus complementorum ſunt reciprocè proportionales ideoque
Ut tangens complementi AB
ad tangentem complementi AC,
ita tangens arcus AC
ad tangentem arcus AB.

Ergo ita erit
Sinus complementi BAD,
ad ſinum complementi CAD,
ſicut tangens AC
ad tangentem AB; quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

In obliquangulis demiſsâ perpendiculari erunt ſinus angulorum verticalium ſinubus complementorum angulorum ad baſin proportionales.

Vide figuram præcedentem.

Sit triangulum ABC, ſitque perpendicularis AD, dico ita eſſe ſinum anguli DAB ad ſinum complementi anguli B, ſicut ſinus anguli CAD, ad ſinum complementi anguli C.

Demonſtr. (*Per 9.5.hujus*)
Ut ſinus complementi anguli B
ad ſinum alterius anguli BAD,
ita ſinus complementi lateris AD
ad ſinum totum.
Sed pariter in triangulo ADC
Ita erit ſinus complementi anguli C
ad ſinum anguli CAD,
ſicut ſinus complementi AD
ad ſinum totum.
Ergo ita erit ſinus complementi B
ad ſinum anguli BAD,
ut ſinus complementi C
ad ſinum anguli CAD; quod erat demonſtrandum.

Idem demonſtrari poteſt cum perpendicularis cadit extra triangulum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

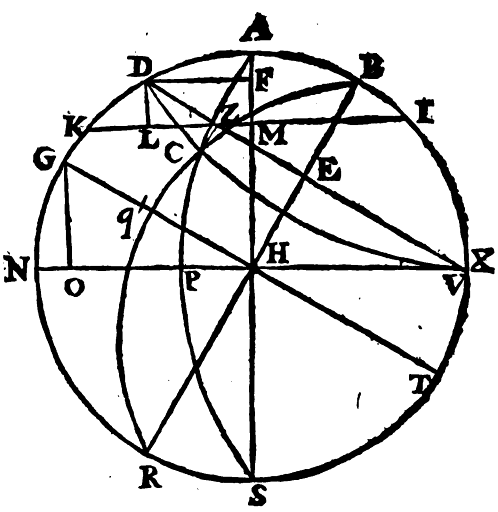
In triangulis ſphæricis, ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum, ad quadratum radii; ut differentia inter ſinum verſum baſis, & ſinum verſum differentia crurum, ad ſinum verſum anguli verticalis.

Proponitur triangulum ſphæricum ABC, cujus crura AB, BC, baſis AC; angulus oppoſitus baſi qui verticalis dicitur ABC, dico ita eſſe rectangulum comprehenſum ſub ſinubus crurum AB, BC, ad quadratum radii, ſicut differentia quæ eſt inter ſinum verſum baſis AC, & ſinum verſum differentiæ crurum, ad ſinum verſum anguli verticalis ABC.

Conſtructio. Perficiatur circulus ABR, ducantur item ſemicirculi ACS, BCR, & ducantur diametri AS, BR, quibus ſint perpendiculares GT, NX, tum ex polo B intervallo BC deſcribatur parallelus DCV, cujus in plano ABR, ſit diameter DV, erit autem DV diameter cum circulus ABR per polum eius B tranſeat, atque adeo eum bifariam dividat, punctum igitur C eſt in ſuperficie ſphæræ.

Item ex puncto A ut polo intervallo AC, deſcribatur parallelus KCI, (qui ductus non eſt vitandæ confuſionis gratiâ) eius diameter erit KI, ſecans priorem diametrum in puncto Z, linea ZC erit

erit communis sectio illorum parallelorum, qui cum sint recti ad planum circuli A B R, per



eorum polos transeuntis, linea C Z erit perpendicularis ad planum ABR (*per* 19. 11. *Eucl.*) atque adeo anguli C Z K, C Z D recti erunt. Eritque Z D, sinus versus arcus C D paralleli DCV, qui arcus CD est totidem graduum ac angulus A B C. Ex puncto D ducantur D F, D L perpendiculares ad lineas A S, K I, item GO perpendicularis ad NX, sitque Gq sinus versus anguli ABC, sumptus in diametro sphæræ, sicut ZD erat sinus versus arcus totidem graduum sumptus in parallelo.

Præparatio. Quia BG, AN sunt quadrantes, ablato communi AG, erunt arcus BA, GN æquales, est ergo GO sinus arcus AB.

Item quia ex polo B ductus est parallelus DCV, erunt arcus BC, BD æquales, & B E sinus arcus BD, aut BC.

Item AD erit differentia crurum AB, BC, & AF ejus sinus versus. Pariter erunt AK, AC æquales cum ex polo A, descriptus sit parallelus KCI, & KD, erit excessus quo basis AC, superat AD differentiam crurum, M A est sinus versus arcus AK, seu basis AC, quare erit FM seu DL differentia inter MA, sinum versum basis AC, & FA sinum versum differentiæ crurum. Debeo igitur probare rectangulum comprehensum sub DE, GO, sinus crurum AB, BC, ita esse ad quadratum radii GH, ut DL, differentia inter sinus versos, MA, FA, basis & differentiæ crurum ad Gq sinum versum anguli verticalis ABC.

Demonstratio. Triangula DZL, GHO sunt æquiangula propter parallelas DZ, GT; DL, GO: ergo (*per* 3. 6. *Eucl.*) ita erit G O ad GH, ut DL ad DZ, est item DE ad GH, ut DZ ad G q, cum DZ, & Gq sint sinus versi ejusdem anguli aut arcûs, DZ quidē in parallelo, & Gq in circulo maximo, sic se habent ut diametri circulorum (*per* 1. 1. *Trigon.*) Rectangulum autē sub DE, GO, ad quadratum radii, nempe rectangulum sub GH, GH, componitur ex ratione GO ad DH, seu DL ad DZ, cum sit æqualis, & DE ad GH, seu DZ ad Gq, ergo rectangulum sub GO, DE ad quadratum radii DH, est in ratione composita ex ratione DL ad DZ, & DZ ad Gq, quæ ratio composita, est ratio DL ad DZ. Ergo rectangulum sub DO, DE, sinubus crurum, est ad quadratum radii GH, ut DL differentia inter sinus versos basis & differentiæ crurum, ad Gq sinum versum anguli ABC; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

In triangulis omnibus, ita est rectangulum sub sinubus crurum, ad quadratum radij, ut differentia inter sinum complementi basis, & sinum complementi differentiæ crurum, ad sinum versum anguli verticalis.

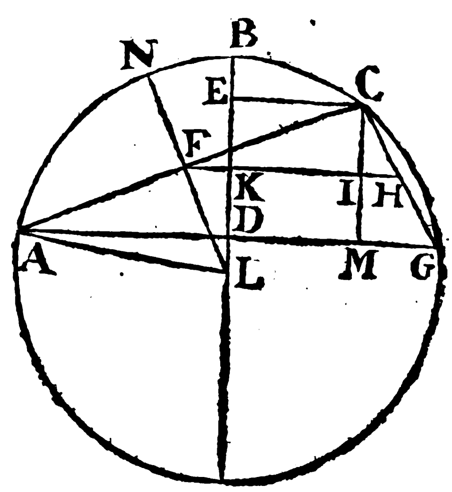
Linea DL seu FM, est etiam differentia inter FH, sinum arcus DN, scilicet complementi AD differentiæ crurum, & sinus MH sinus arcus KN, complementi basis AC, seu AK,

Ita erit rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ut differentia sinuum complementorum
basis, & differentiæ crurum
ad sinum versum anguli verticalis.

LEMMA.

Ita est sinus totus, ad sinum semisummæ duorum arcuum; ut sinus semidifferentiæ eorum, ad semissem differentiæ sinuum versorum.

Sint duo arcus AB, BC, sitque summa eorum ABC, ducatur linea AC, quæ bifariam dividatur



in F, ducaturque ex centro L linea L F, eritque FC sinus semisummæ, sit BK æqualis AB eritque CG, differentia arcuum BG, seu AB, BK, ducatur CG, quæ bifariam dividatur in H, jungaturque F H, & ex C demittatur perpendicularis ad AG, sicut CE, AG sunt perpendiculares ad LB: erit CH sinus semidifferentiæ, & EK semissis lineæ ED, quæ est differentia sinus versorum DB, BE. Ostendo primò C I esse semissem lineæ CM, cum enim sit ut CF ad FA, ita CH ad HG, erit (*per* 2.6.) FH parallela AG, & (*per* 3.6.) erit ut CH ad HG, ita CI ad IM. Primæ autem sunt factæ æquales; ergo, & secundæ. Debeo igitur probare ita esse radium AL ad AF, sicut CH ad CI.

Demonstr. Angulus A L N in centro insistens arcui AN, & angulus C G A in peripheria insistens arcui duplo ANC, sunt æquales, quare triangula rectangula ALF, CMG aut CIH sunt æquiangula, ergo

Ita est radius AL
ad AF sinum semisummæ,
ut CH, sinus semidifferentiæ arcuum
ad C I semidifferentiam sinuum versorum
DB, EB.

COROLLARIUM.

Ita est quadratum radii, ad rectangulum sub sinubus semisummæ, & semidifferentiæ duorum arcuum, ut diameter ad differentiam sinuum versorum.

Hoc corollarium à Cavalerio proponitur; facilius autem à me sic demonstratur.

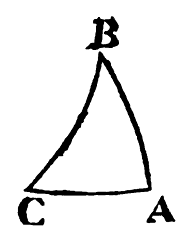
Ita est radius
ad sinum dimidiæ summæ;
ut sinus dimidiæ differentiæ
ad dimidiam differentiam sinuum versorum.

Ergo rectang. sub radio & sub semidifferentia sinuum versorum (*per 16.6.Eucl.*) æquale est rectangulo sub sinu semisummæ, & sub sinu semidifferentiæ arcuum; sed quadratum radii, ad rectangulum sub radio & sub semidifferentia sinuum versorum, est (*per 1. 6.*) ut radius, ad semidifferentiam sinuum versorum, aut ut diameter ad totam differentiam, ergo etiam ita erit quadratum radii, ad rectang. sub sinubus semisummæ, & semidifferentiæ arcuum, ut diameter ad differentiam sinuum versorum; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

In omni triangulo,
Ita est rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ut rectangulum sub sinu semisummæ basis & differentiæ crurum, & sub sinu semidifferentiæ basis, & differentiæ crurum,
ad quadratum sinûs dimidii anguli verticalis.



Proponatur triangulum ABC, cujus sint crura AB 24, BC 30 graduum, basis AC 42, differentia laterum est gr.6. summa basis & differentiæ crurum est 48, semisumma 24, differentia inter basin 42, & differentia crurum 6 est 36, semidifferentia est 18, dico

ita esse rectangulum sub cruribus AB 24, & BC 30
ad quadratum radii,
sicut rectangulum sub sinu 24 semisummæ ex basi, & ex differentia crurum & sub sinu 18 semidifferentiæ inter basin, & differentiam crurum,
ad quadratum sinûs dimidii anguli verticalis.

Demonstratio. (*Per 13.*)

Ita est rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ut differentia sinuum versorum basis, & differentiæ crurum,
ad sinum versum anguli verticalis, & sumpto radio pro communi altitudine, ita etiam erit (*per 1. 6.Eucl.*) rectang. sub radio, & differentia sinuum versorum basis, & differentiæ crurum, ad rectangulum sub radio, & sinu verso anguli verticalis; & eorum dimidia in eadem ratione erunt. Nempe rectangulum sub radio, & semidifferentia sinuum versorum basis, & differentiæ crurum, ad rectangulum sub semiradio, & sinu verso anguli verticalis, & eorum æqualia in eadem ratione erunt. Nempe (*in coroll. superiori*) ostendimus rectangulum sub radio, & semidifferentia sinuum versorum, æquale esse rectangulo sub sinu semisummæ, & sub sinu semidifferentiæ.

Ex alia verò parte cum (*per 1.coroll.4.1.huius*) sinus dimidii arcus, aut anguli, sit medius proportionalis inter dimidium radium, & sinum versum arcûs totius; rectangulum sub dimidio radio, & sinu verso anguli verticalis æquabitur quadrato sinûs dimidii anguli verticalis. Quare erit

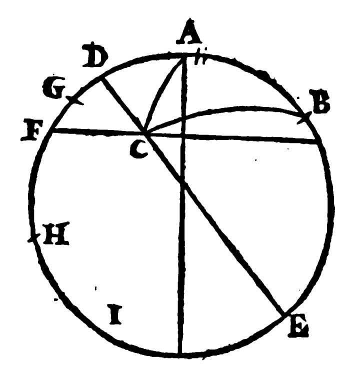
Ut rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ita rectangulum sub sinu semisummæ ex basi, & ex differentia crurum, & sub sinu semidifferentiæ inter eandem basin, & differentiam crurum,
ad quadratum sinûs semianguli verticalis; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

In omni triangulo
ita est rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii;
ut rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semisumma omnium laterum,
ad quadratum sinus dimidii anguli verticalis.

Sint trianguli ABC, crura AB, BC sitque basis AC, supponatur esse facta summa, & semisumma



omnium laterum, à quâ singillatim subducantur singula crura, ut fiat eorum differentia à semisumma; dico ita esse rectangulum sub sinubus crurum ad quadratum radii, ut rectangulum sub sinubus differentiarum crurum AB, BC à semisumma, ad quadratum sinûs dimidii anguli verticalis ABC.

Cruri BC, sint æquales arcus BD, BE; & basis AC, arcui AF; eritque AD, differentia crurum; addatur FH, æqualis arcui AD, seu differentiæ crurum, tum FD dividatur bifariam in G, sit item FI, æqualis cruri BC. Arcus AH est summa basis AC, seu AF, & differentiæ crurum AD, & AG eius dimidium, erit semisumma basis, & differentiæ crurum. Pariter arcus BDI est summa omnium laterum, nempe FI, seu BC; FA, seu AC & ipsius

ipsius AB & BG semisumma, cum FG, & GD sint æquales ergo AG, quæ prius erat semisumma basis & differentiæ crurum, est differentia cruris AB à semisumma omnium crurum.

Item GD quæ prius erat semidifferentia basis AF & differentiæ crurum, est differentia lateris BC, à semisumma BG.

Demonstratio. (*Per præcedentem*)
ita est rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ut rectangulum sub sinubus semisummæ ex basi & differentia crurum, & sub sinu semidifferentiæ quæ est inter basin & differentiam crurum,
ad quadratum sinus semianguli verticalis.

Sed A G semisumma basis & differentiæ crurum, est differentia cruris BA à semisumma laterum, & GD semidifferentia basis & differentiæ crurum est differentia cruris BC ab eadem semisumma.

Ergo ita est rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ut rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semisumma omnium laterum,
ad quadratum sinûs semianguli verticalis.

COROLLARIUM.

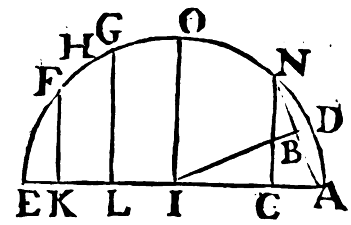
Vt quadratum radii
ad rectangulum sub secantibus complementorum crurum,
ita rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semiaggregato laterum omnium
ad quadratum sinûs dimidii anguli verticalis.

Demonstratio. Ratio rectanguli sub sinubus crurum ad quadratum radii componitur ex ratione primi sinus ad radium, & secundi sinus ad radium; sed ut primus sinus ad radium, ita radius ad secantem complementi eius; & ut secundus sinus ad radium (*per* 17.1.*hujus*) ita etiam radius ad secantem complementi secundi; & præterea ratio quæ est inter quadratum radii, & rectangulum sub secantibus complementorum crurum, componitur ex rationibus radii ad singulas secantes, seu ex iisdem rationibus singulorum sinuum ad radium, ergo ita est rectangulum sub sinubus crurum ad quadratum radii, ut quadratum radii ad rectangulum sub sinubus secantium complementorum crurum; ergo
Ita est quadratum radii
ad rectangulum sub secantibus complementorum crurum,
ut rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semisumma omnium laterum
ad quadratum sinûs semianguli verticalis.

LEMMA II.

Vt quadratum sinûs alicujus arcûs
ad rectangulum sub sinu semisummæ, & sinu semidifferentiæ aliorum duorum arcuum,
ita sinus versus arcûs dupli illius primi
ad differentiam sinuum versorum posteriorum arcuum.

Sit AB sinus arcûs AD, & CA sinus versus arcûs dupli. Sint item arcus EF, EG, addaturque GO æqualis EF, & differentia eorum FG bifariam dividatur in H; eritque EO summa, & EH eorum semisumma, LE sinus versus majoris EG, & KE minoris EF; KL erit differentia sinuum versorum, ubi notandum est sicut & in propositionibus se-



quentibus, sinum versum anguli obtusi esse majorem radio, exempli gratia, sinum versum arcûs GA esse LA,

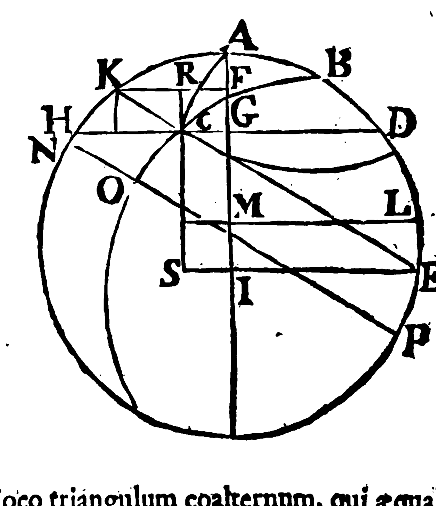
Dico ita esse quadratum AB
ad rectangulum sub sinu semisummæ EH & sub sinu semidifferentiæ FH,
ut CA sinus versus arcûs dupli
ad KL differentiam sinuum versorum.

Demonstratio Ut CA ad KL, sumpto semiradio pro communi altitudine, ita (*per* 1.6.) rectangulum sub semiradio, & sub CA ad rectangulum sub semiradio & sub KL, seu ad rectangulum sub toto radio & sub dimidia KL; sed primo rectangulo seu antecedenti rationis, æquale est quadratum AB (*per* 1. *corol*.4. 1.*huius*) & secundo rectangulo seu consequenti rationis æquale est rectangulum sub sinu semisummæ E H, & sub sinu semidifferentiæ FH (*per lemma primum*.)
Ergo ut quadratum AB
ad rectangulum sub sinu semisummæ EH, & sinu semidifferentiæ F H,
ita C A
ad K L; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

In omni triangulo differentia sinuum versorum basis, & differentiæ crurum, eadem est cum differentia sinuum versorum basis, & summæ crurum trianguli coalterni.

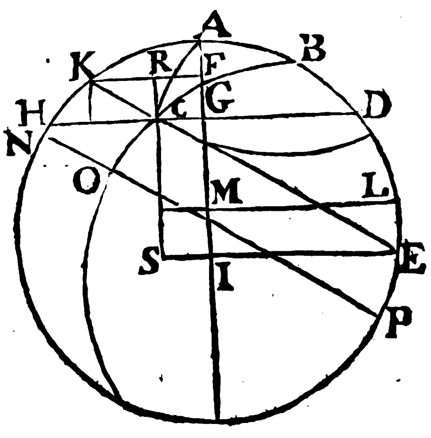


Voco triangulum coalternum, qui æqualia habet crura, sed angulus verticalis est complementum ad duos rectos anguli verticalis alterius cum quo comparatur.

Sit ergo triangulum ABC, cujus crura AB, BC, angulus verticalis ABC; sit item aliud triangulum CBD, cujus crura CB, BD sint æqualia cruribus AB, BC, & angulus verticalis CBD sit supplementum ad duos rectos anguli A B C, & basis sit DC, reliqua hypothesis eadem est ac in (*prop*.15. *hujus*.) In priori triangulo F G est differentia sinuum

sinuum versorum basis AC, seu AH & differentiæ crurum AK,

In secundo AE est summa crurum cujus summæ versus est IA, sit AL arcus æqualis basi DC, cujus sinus versus MA, differentia horum sinuum est MI, debeo ostendere FG, MI æquales esse. Sit NO sinus versus anguli ABC.



Demonstratio. (*Per* 13. *hujus*) ita est rectang. sub sinubus crurum AB, BC aut BC,BD, ad quadratum radii, ut FG ad NO in triangulo ABC, aut ut FM ad OP in triangulo BDC cum FA, sit sinus versus differentiæ crurum quæ eadem est in utroque & MA sit sinus versus, arcus AL quem æqualem voluimus basi CD, sed ut NO ad KC, ita OP ad CE, cum sint sinus versi sibi correspódentes in circulo maximo, & in eodem parallelo, ergo ex æqualitate ordinata ut FG aut CR ad KC, ita FM ad CE, sed ut CR ad KC, ita CS, seu GI ad CE, ergo FM, & GI habentes eandem rationem ad CE sunt æquales,& ablata communi MG, restant FG, MI æquales; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Sequitur AF sinum versum differentiæ crurum, AG sinum versum basis AC, AM sinum versum alterius basis DC; & AI sinum versum summæ crurum, esse æquè differentes, seu Arithmeticè propoportionales.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

In omni triangulo
ut rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ita rectangulum sub sinu dimidia summæ laterum omnium & sub sinu differentiæ basis à semisumma eadem,
ad quadratum sinûs dimidii anguli qui sit complementum anguli verticalis ad duos rectos, vel quod idem est ad quadratum sinûs unius arcûs, qui sit complementum dimidii anguli verticalis.

Vide figuram præcedentem.

Sit idem triangulum ABC cujus crura AB, BC basis AC dico
ita esse rectangulum sub sinubus crurum AB, BC
ad quadratum radii
ut rectangulum sub sinu semisummæ omnium laterum, & sub sinu differentiæ basis AC,ab ea semisumma ad quadratum sinus dimidii anguli CBD, qui angulus est complementum anguli verticalis ABC, ad duos rectos, & semissis anguli CBD, ut patet,erit complementum dimidii anguli ABD, cum hæ duæ semisses, nempe angulorum ABC & CBD, sint æquales quadranti.

Demonstratio. (*Per* 13. *hujus*) In triangulo CBD.
Ita est rectangulum sub sinubus CB, BD, seu AB,BC,
ad quadratum radii,
ut differentia sinuum versorum basis CD, & AK differentiæ crurum, nempe linea FM, seu GI
ad sinum versum anguli CBD.

GI autem est etiam differentia sinuum versorum basis AC, vel AH, & arcûs AE summæ crurum duorum AB, BE;
Ergo ut rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ita differentia sinuum versorum,basis AC,& summæ duorum crurum AB, BC
ad sinum versum anguli CBD. Sed (*per lemma secundum.*) Ut differentia sinuum versorum duorum arcuum nempe summæ duorum crurum, & basis AC; ad sinum versum alicujus arcûs aut anguli nempe CBD, ita rectangulum sub sinu semisummæ illorum arcuum nempe basis, & summæ duorum crurum, seu summæ trium laterum, & sub sinu semidifferentiæ basis AC summa duorum crurum, ad quadratum sinus dimidii arcus vel anguli CBD.

Ergo juxta mox allatam analogiam
Ut rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ita rectangulum sub sinu semisummæ omnium laterum, & sub sinu differentiæ basis AC à semisumma trium laterum,
ad quadratum sinûs dimidii anguli CBD,qui est complementum anguli verticalis ad duos rectos sive ad quadratum sinûs complementi semianguli verticalis; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Vt rectangulum sub sinu semisumma trium laterum, & sub sinu differentiæ basis à semisumma,
ad quadratum radii,
ita rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semisumma
ad quadratum tangentis semianguli verticalis.

Demonstratio. Quoniam (*per* 15.*hujus*) ut rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ita est rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semisumma trium laterum,
ad quadratum sinus dimidii anguli verticalis.

Et (*per* 17.) ita est etiam rectang. sub sinu semisummæ trium laterum, & sub sinu differentiæ basis ab eadem semisumma, ad quadratum sinûs complementi dimidii anguli verticalis, igitur hæ duæ ultimæ rationes æquales erunt. Ut autem quadratum sinus dimidii anguli verticalis, ad quadratum tangentis ejusdem dimidii, ita est quadratum sinus complementi dimidii anguli verticalis, ad quadratum radii; quadrata enim hujus analogiæ habent latera proportionalia (*per* 16. 1.*huius.*) Ergo ex æqualitate ordinata.

Ita erit rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semisumma trium laterum, ad quadratum tangentis semianguli verticalis ut rectangulum sub sinu semisummæ trium laterum, & sub sinu differentiæ basis ab eadem semisumma ad quadratum radii; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM II.

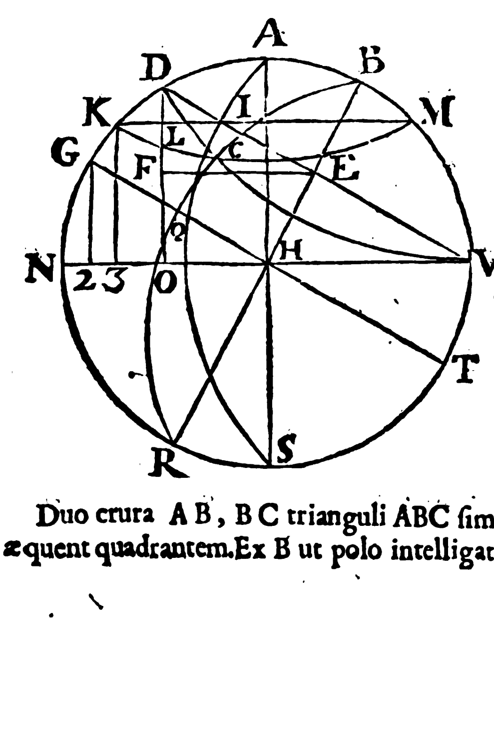
Ut rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semisumma trium laterum,
ad quadratum radii,
ita rectang. sub sinu semisummæ trium laterum & sub sinu differentiæ basis ab ea
ad quadratum tangentis complementi semianguli verticalis.

Demonstratio. Ita est rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii, *per* 15.)
ut rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semisumma trium laterum
ad quadratum sinus dimidii anguli verticalis.
Et (*per* 17.) ita rectangulum sub sinu dimidiæ summæ trium laterum, & sub sinu differentiæ basis ab ea,
ad quadratum sinus complementi dimidii anguli verticalis.
Ergo hæ duæ ultimæ rationes æquales sunt.
Sed ut quadratum sinus dimidii anguli verticalis ad quadratum radii, ita quadratum sinus complementi dimidii anguli verticalis ad quadratum tangentis complementi semianguli verticalis (*per* 16.1.*hujus*) Ergo ex æqualitate ordinata, relictis mediis, ita est rectangulum sub sinubus differentiarum crurum à semisumma trium laterum ad quadratum radi,
ut rectangulum sub sinu semisummæ trium laterum, & sub sinu differentiæ basis ab ea,
ad quadratum tangentis complementi dimidii anguli verticalis.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si in triangulo duo crura adæquent quadrantem,
ita erit dimidius sinus aggregati, ex minori crure & complemento majoris
ad differentiam quæ est inter sinum talis aggregati & sinum complementi basis,
ut sinus totus
ad sinum versum anguli verticalis.



Duo crura AB, BC trianguli ABC simul adæquent quadrantem. Ex B ut polo intelligatur describi parallelus, intervallo BC, qui transeat per D, & V. Sicque illius diameter DV, & arcus BC, BD, BV æquales erunt. Pariter ex A ut polo intelligatur descriptus parallelus, intervallo basis AC cujus diameter sit KM, eruntque arcus AK, AM, AC æquales, & cum crura AB, BC seu BV adæquent quadrantem, diameter DV transibit per punctum V extremitatem quadrantis AV, & cum hi paralleli V (*per* 15.1.*Theod.*) sint recti ad circulum BAD per polos eorum transeuntis, communis eorum sectio CI (*per* 19.11.*Euclid.*) erit ad planum circuli BAD recta; atque adeo angulus CID rectus erit, & ID sinus versus arcus CD, in parallelo, seu anguli verticalis ABC, sit Gq sinus versus ejusdem anguli sumptus in diametro sphæræ GT, ducantur diametri AS, BR, & ad ipsas perpendiculares GT, NV. Cum igitur arcus BG, AN sint quadrantes, ablato communi GA, erunt arcus AB, GN æquales, ideoque GZ erit sinus arcus AB. Ducantur alii sinus K3, DO, & diviso OD bifariam in F, ducatur FE ad centrum paralleli DCV. Item GD est complementum arcus BD, seu cruris majoris BC, ergo ND est aggregatum ex minori crure AB, seu NG, & complemento majoris, cujus aggregati DO est sinus, & DF dimidius sinus, arcus vero NK est complementum basis AC, seu AK; DL est differentia, inter DO, sinum aggregati prædicti, & K3 sinum complementi basis; dico ergo ita esse FD ad DL; ut sinus totus GH ad Gq sinum versum anguli verticalis ABC.

Demonstratio. Cum tam FD sit semissis lineæ FO, quam DE, lineæ DV, ita erit FD ad FO, sicut DE ad EV, ergo (*per* 3.6.*Eucl.*) FE est parallela lineæ NV & KM, quare (*per eandem*) ita est FD ad DL, sicut DE ad DI, sed ut DE ad DI, ita est GH ad Gq, cum sint sinus versi similium arcuum, unus in parallelo alius in sphæræ diametro; ergo
ita est FD dimidius sinus aggregati ex minori crure, & complemento majoris
ad DL, differentiam inter talem sinum, & K3 sinum complementi basis,
ut sinus totus GH
ad Gq sinum versum anguli verticalis ABC; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

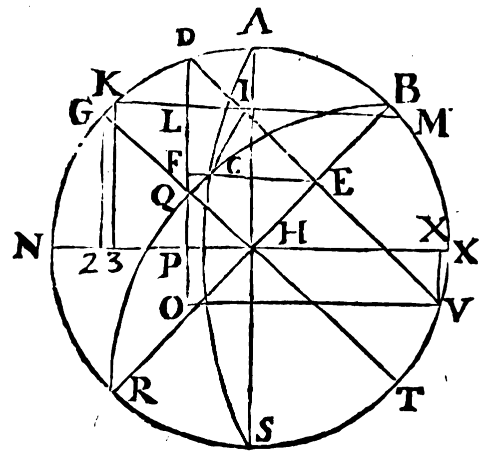
Theorema.

Si duo trianguli crura majora fuerint quadrante, erit dimidia summa sinus excessus eorum supra quadrantem & sinus aggregati ex minori crure, & complemento majoris,
ad differentiam, quæ est inter sinum hujusmodi aggregati, & sinum complementi basis,
ut sinus totus ad sinum versum anguli verticalis.

Fiat eadem constructio nisi quod crura AB, BC simul, seu totum AV superet quadrantem excessu XV, cujus sinus VY, aut PO, PD est sinus aggregati ex GN seu AB minori crure, & GD complemento majoris BC, seu BD. K3 est sinus arcus NK, complementi basis AC, seu AK. Dico ita esse FD, dimidiam ipsius DO, quæ est summa sinuum DP, & PO, seu VY ad DL, differentiam sinuum PD, K3, sicut sinus totus GH ad GQ sinum versum anguli verticalis.

 Demonstr.

Demonſtrattio. Cum triangula DLI, DFE ſint æquiangula, ita erit FD ad DL, ſicut DE ad DI,

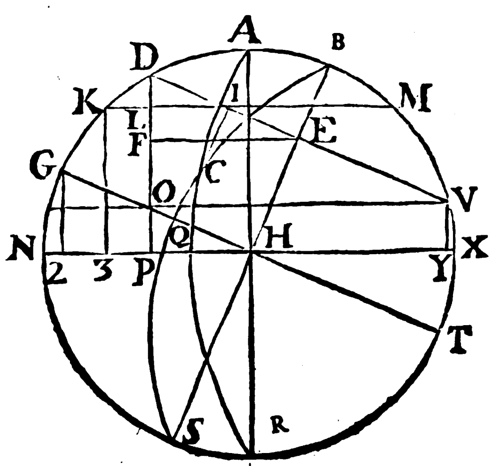


ſed ut DE ad DI; ita ſinus totus GH ad GQ, (*per* 1. 1. *hujus*) cum DI, GQ ſint ſinus verſi arcuum ſimilium; ergo ita eſt DF ad DL, ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli verticalis; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Si trianguli duo crura ſint minora quadrante, ablato ſinu defectus, à ſinu aggregati ex minori crure & complemento majoris; erit dimidium reliqui ad differentiam inter ſinum illius aggregati, & ſinum complementi baſis, ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli verticalis.



Eadem conſtructione poſita demonſtratur propoſitio, niſi quod arcus AB, BC ſimul, ſeu totus arcus AV, deficiat à quadrante, erit VX defectus, & ſinus ejus VY ſeu OP, quo ſublato ex DP, ſinu aggregati ex GN, ſeu AB minori crure, & GD complemento majoris BC, ſeu BD, dico reliquæ lineæ OD dimidiam FD, ita eſſe ad LD differentiam inter DP ſinum illius aggregati, & K3 ſinum arcus KN complementi baſis AC ſeu AK, ut ſinus totus GH ad GQ ſinum verſum anguli verticalis ABC.

Demonſtratio. Triangula DIL, DEF ſunt æquiangula: ergo ita eſt DF ad DL, ut DE ad DI, ſed ut DE ad DI, ita GH ad GQ, cum DI, GQ ſint ſinus verſi arcuum ſimilium, in parallelo & in circulo majori; ergo ita eſt DF ad DL; ut GH ad GQ; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

In triangulis rectangulis quorum crura æquantur quadranti, dimidius ſinus aggregati ex minori crure, & complemento majoris, æquatur ſinui complementi baſis, quia (*per* 18. *hujus*) ut radius ad ſinum verſum anguli verticalis qui rectus ſupponitur, ita dimidius ſinus aggregati ex minori crure, & complemento majoris, ad differentiam quæ eſt inter ſinum talis aggregati & ſinum complementi baſis; ſed duo prima ſunt æqualia; ergo & ſecunda; ergo ſinus talis aggregati excedit dimidio ſui ſinum complementi baſis. Ergo ſinus complementi baſis æqualis eſt alteri dimidio talis aggregati; quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM II.

Si trianguli rectanguli duo crura majora ſint quadrante, & addatur ſinus exceſſus ſinui aggregati ex minori crure, & complemento majoris, illius dimidium erit differentia inter ſinum complementi baſis, & ſinum aggregati, idque eandem ob cauſam.

COROLLARIUM III.

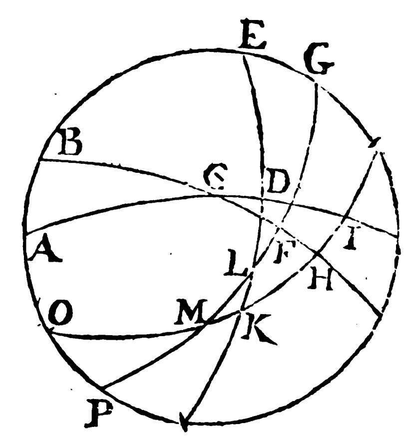
Si in triangulo rectangulo duo crura ſint minora quadrante, & auferas ſinum defectus, à ſinu aggregati ex minori crure, & complemento majoris, ſemiſſis reliqui erit differentia inter complementi baſis ſinum aggregati prædicti.

Notandum quod ſi in tribus ultimis propoſitionibus accidat lineam FD minorem eſſe linea DL, angulus verticalis obtuſus eſt, & ablato radio, ex ſinu ejus verſo reſtat ſinus complementi.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Propoſito quolibet in ſphæra triangulo, datur aliud triangulum, cujus ſingula latera prioris angulis æqualia ſint, & viciſſim, mutato tamen maximo angulo, in ſuum ſupplementum ad duos rectos.



Proponatur triangulum ABC, cujus maximus angulus ABC; dico quod mutato illo angulo in ſuum ſupplementum ad duos rectos, dabitur aliud in ſphæra triangulum, cujus ſingula latera æqualia ſint ſingulis angulis trianguli ABC.

Conſtructio. Ex A ut polo, intervallo quadrantis, circulus EDK deſcribatur, & ex B circulus GMP, & ex C circulus IMO. Dico triangulum MKL habere recenſitas conditiones.

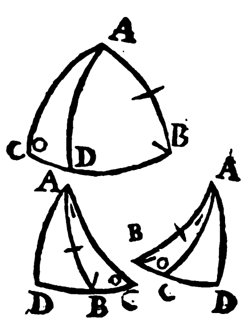
Demonſtr.

Demonſtratio. Cum anguli E, & G recti ſint (*per 15. 1. Theod.*) nam circulus ABG tranſit per polos A & B circulorum EL, GL; hi viciſſim concurrent in L, polo circuli ABG. Pariter cum anguli D & I recti ſint, nam circulus ACI, tranſit per polos A & C, circulorum DLK, IHK, hi circuli pariter convenient in puncto K, polo circuli ACDI. Eodem modo probo punctum M eſſe polum circuli BCH. Sunt igitur quadrantes LE, KD, & ablato communi DL, erunt arcus KL, DE, æquales; ſed DE eſt menſura anguli CAB; ergo latus KL æquale eſt angulo A. Pariter MF, LG ſunt quadrantes cum M ſit polus circuli BH, & L circuli ABEG; ergo ablato communi arcu LF, erunt ML, FG æquales; ſed FG eſt menſura anguli CBE ſupplementi ad duos rectos anguli CBA; ergo latus ML æquale eſt angulo CBG. Ita oſtendam latus MK æquale eſſe arcui HI, menſuræ anguli C; viciſſim arcus FH eſt menſura anguli M, eſt item æqualis lateri BC, cum CH, BF ſint quadrantes; DI eſt menſura anguli DKI ſupplementi ad duos rectos anguli MKL, & hic arcus DI æqualis eſt lateri AC. Denique EG eſt menſura anguli L, eſtque æqualis lateri AB.

PROPOSITIO XXII.

Problema I.

Datis duobus trianguli obliquanguli angulis, unà cum latere interpoſito, alium angulum reperire.



Cognoſcantur anguli ABC anguli A & B, cum latere AB, quæritur angulus B. Ex alterutro angulorum cognitorum, ad baſin productam ſi opus ſit, demittatur arcus perpendicularis, quæraturque in triangulo rectangulo ABD angulus DAC. (*per 15. 5. hujus*) hoc modo

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum complementi lateris AB,
ita tangens anguli B
ad tangentem complementi anguli DAB.

Quo ſubducto & CAB, cognito in priori figura, vel addito ad DAB, ut in ſecundo, vel ſubducto angulo CAB ab ipſo, reſtat CAD.

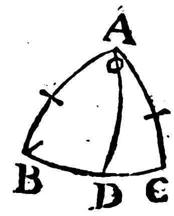
Fiat ut ſinus anguli BAD
ad ſinum anguli CAD
ita ſinus complementi anguli ABC
ad ſinum complementi anguli C.

Prima analogia demonſtrata (*in 15. 5. huius.*)
Demonſtratio 2. Analogiæ eſt (*12. huius*) Sinus angulorum verticalium, ſinubus angulorum ad baſin proportionales ſunt. In tertio caſu ſumitur ſupplementum ad duos rectos anguli ACD inventi.

PROPOSITIO XXIII.

Problema II.

Datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito, angulum ab ipſis comprehenſum invenire.



In triangulo ABC dentur duo latera AB, AC & angulus uni ipſorum oppoſitus, nempe B: quæritur angulus BAC ab ipſis comprehenſus. Primò in triangulo BAD (*per 14. 5. hujus*) quæratur angulus BAD, fiat enim

Ut ſinus totus
ad ſinum complementi lateris AB,
ita tangens anguli B
ad tangentem complementi anguli DAB.

Tum fiat ut tangens AC
ad tangentem AB,
ita ſinus complementi anguli BAD
ad ſinum complementi anguli DAC.

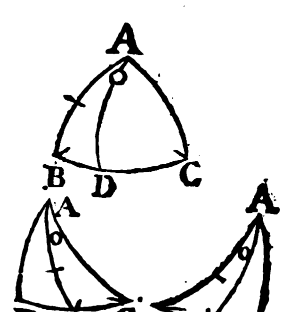
Demonſtratio. Secundæ analogiæ (*per 11. hujus*) tangentes laterum, ſunt reciprocè proportionales ſinubus complementorum angulorum verticalium.

In primo caſu quo perpendicularis cadit intra triangulum, anguli BAD, DAC addendi ſunt ut habeatur totus BAC, in aliis caſibus eorum differentia eſt angulus quæſitus.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Datis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, tertium angulum invenire, modò ſciatur cujus ſit affectionis, vel cujus ſit affectionis latus alteri angulo dato oppoſitum.



Sint in triangulo ABC cogniti duo anguli B, & C, & latus AB oppoſitum angulo C, quæritur angulus BAC, quæratur ſicut prius, angulus DAB, hoc modo fiat. Ut ſinus totus

ad ſinum complementi AB;
ita tangens anguli B
ad tangentem complementi anguli BAD

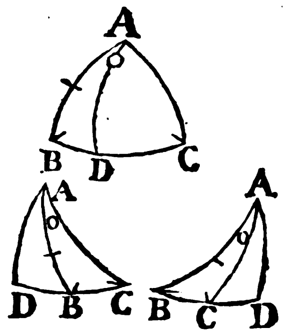
Deinde fiat

Ut ſinus complementi ABC

ad

ad sinum complementi ACD,
ita sinus anguli BAD
ad sinum anguli CAD.

Si perpendicularis cadit intra triangulum, an-



guli BAD,CAD angulum quæsitum componunt, hoc est, summa illorum est angulus quæsitus; si extra, differentia inter BAD, & CAD est angulus BAC quæsitus.

Demonstratio secundæ analogiæ est (*prop.12. huius.*)

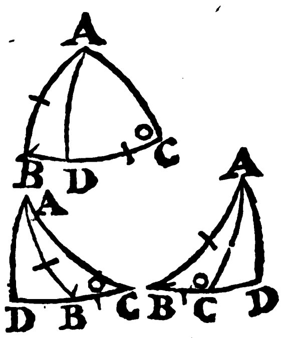
Ratio autem additæ conditionis petitur ex (*prop. 5. huius,*) ex quâ deducitur, posse dari ambiguitatem. Hæc tamen ambiguitas solvitur. Primò, in triangulo rectangulo ABD, basis AB solvit ambiguitatem; nam si sit minor quadrante; duo anguli BAD, & B erunt ejusdem affectionis, & cùm B sit cognitus, alter etiam cognoscetur; si basis AC fuerit major, erunt B, & BAD affectionis diversæ, & cum A cognitus sit, alter etiam cognoscetur.

In triangulo ACD potest esse ambiguitas in cognoscendo angulo DAC quæ solvitur, modò species anguli BAC, cognoscatur, vel si sciatur species lateris AC quod in triangulo DAC rectangulo, est basis, quæ si sit quadrante minor erunt anguli C, & CAD affectionis ejusdem; si major diversæ (*per 5. 4. huius.*)

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Cognitis duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso, alium quemcumque angulum invenire.



Sit triangulum ABC, cujus cognoscantur latera AB, CB, & angulus B ab ipsis comprehensus, quæritur alius angulus C. A puncto A extremitate lateris oppositi angulo C demittatur perpendicularis ad aliud latus cognitum BC, productum si opus sit; tum in triangulo rectangulo ABD quæratur (*per 20. 5. huius*) latus BD, fiat ergo

Ut sinus totus
ad sinum complementi anguli B,
ita tangens AB
ad tangentem BD

Tùm differentia inter BD, & BC est vel DB vel DC, addantur in ultimo casu, tum fiat

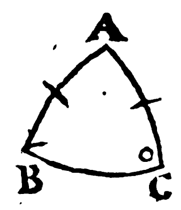
Ut sinus CD
ad sinum BD,
ita tangens ABD
ad tangentem ACD cujus in tertio casu accipitur complementum ad duos rectos.

Demonstratio. (*Per 7. huius*) sinus segmentorum basis sunt ut tangentes angulorum basi adjacentium reciprocè.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Cognitis in triangulo duobus lateribus, & angulo uni eorum opposito, cognoscere angulum alteri lateri cognito oppositum, cuius species cognoscitur.



Sint in triangulo ABC, cognita latera AB, AC; & angulus B; quæritur angulus C, cujus species cognoscitur.

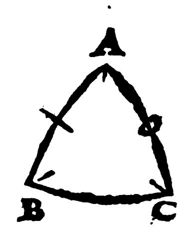
Fiat ut
Sinus AC
ad sinum AB;
ita sinus anguli B ad sinum anguli C.

Demonstratio. Est (*prop.1.5.huius.*)

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Cognitis duobus angulis, & latere uni eorum opposito, latus alteri angulo cognito oppositum, specie tamen præcognitum invenire.



In eodem rectangulo ABC sint dati anguli B & C, & latus AB angulo C oppositum quæritur latus AC cujus species cognoscitur.

Fiat ut sinus anguli C
ad sinum anguli B,
ita sinus lateris AB
ad sinum lateris AC.

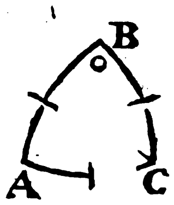
Eadem demonstratio. (*per 1.5.huius.*)

PROPO

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Cognitis tribus trianguli Sphærici lateribus, quemlibet angulum reperire.



Multiplicem hujus problematis dabimus praxin; primò aptissimas, cum quis logarithmis utitur: dabimus item alias dum quis utitur sinubus & tangentibus.

Sint igitur trianguli sphærici ABC, tria latera data, quæraturque angulus B, qui vocetur verticalis, & AC basis, latera AB, BC dicantur crura.

PRAXIS I.

Primò subducatur crus minus, à majori & habeatur differentia crurum, addaturque basis & differentia crurum, ut habeatur semisumma basis & differentiæ crurum item subducatur differentia crurum à basi, si minor sit, & habeatur semidifferentia basis à differentia crurum; & hoc modo disponantur semisummæ basis & differentiæ crurum, logarithmus semidifferentiæ basis à differentiâ crurum.

Duplus logarithmus radii, hi tres addantur, simul; & ab eâ summâ subducantur logarithmus cruris AB & logarithmus cruris BC, restabit duplus logarithmus semianguli verticalis qui, divisus bifariam dabit logarithmum semianguli verticalis.

Demonstratio. *Per 14. hujus*)
Ita est rectangulum sub sinubus crurum,
Ad quadratum radii;
Ut rectangulum sub sinu semisummæ basis, & differentiæ crurum; & sub semidifferentia basis à differentia crurum; ad quadratum sinus semianguli verticalis.

Logarithmus rectanguli sub sinubus crurum, æqualis est duobus logarithmis sinuum crurum.

Logarithmus quadrati radii est duplus logarithmus radii, ut vidimus cum de logarithmis.

Igitur si à summa dupli logarithmi radii, & logarithmorum semisummæ, & semidifferentiæ basis, & differentiæ crurum auferas logarithmos sinuum crurum, restabit logarithmus quadrati sinus semianguli verticalis.

PRAXIS II.

Loco logarithmorum semisummæ basis,& differentiæ crurum &c. fiat semisumma trium laterum, & ab eâ semisummâ, aufer singillatim duo crura, ut habeantur crurum differentiæ ab eâ semisumma.

Adde { Ponaturque duplus logarithmus radii
Sinus differentiæ cruris AB, à semisumma logarithmus.
Sinus differentiæ cruris BC logarithmi.

Et ex ea summa aufer logarithmos utriusque cruris, restabit logarithmus quadrati sinus, semianguli verticalis.

Demonstratio. (*Prop.15 hujus*) vidimus ita esse rectangulum sub sinubus crurum ad quadratum radii: sicut rectangulum sub sinubus differentiarum crurum, à semisumma trium laterum;
Ad quadratum sinus semianguli verticalis.

Ideóque debet fieri regula proportionum logarithmica.

PAAXIS III.

Fiat semisumma trium laterum AB, BC, AC à qua auferatur basis, ut habeatur differentia basis.

Adde { Ponantur duplus logarithmus radii,
Sinus semisummæ trium laterum logarithmus,
Differentiæ basis logarithmus,

Hæc tria simul addantur, & ab eorum summa subtrahantur logarithmi sinuum crurum, & habebitur logarithmus quadrati, sinus semianguli verticalis, hoc est logarithmus, quo diviso bifariam, quotiens erit logarithmus complementi semianguli verticalis.

Demonstratio patet (*ex 17. hujus*) quæ ostendit ita esse rectangulum sub sinubus crurum ad quadratum radii, ut rectangulum sub sinu semisummæ trium laterum & sub sinu differentiæ basis, ad quadratum complementi semianguli verticalis.

PRAXIS IV.

Adde { Duplum logarithmum radii, &
Logarithmum differentiæ cruris AB, à semisumma trium laterum
Et logarithmum differentiæ cruris BC.

Et à summa horum trium logarithmorum subtrahe logarithmum semisummæ trium laterum,& logarithmum differentiæ basis; relinquetur logarithmus quadrati tangentis semianguli verticalis.

Demonstr. (*In coroll.1.17.hujus*) demonstravimus ita esse rectangulum sub sinu semisummæ trium laterum, & sub differentia basis, ad quadratum radii, ut rectangulum sub sinubus differentiarum crurum, ad quadratum tangentis semianguli verticalis.

PRAXIS V.

Si invertatur hæc analogia habebitur tangens complementi semianguli verticalis hoc modo.

Adde { Duplum logarithmum radii,
Logarithmum semisummæ trium laterum,
Et logarihmum differentiæ basis ab ea.

Et à summa eorum subtrahe summam logarithmorum differentiarum crurum à semisumma trium laterum, restabit duplus logarithmus tangentis complementi semianguli verticalis.

Demonstr. (*est coroll.2.17.hujus*) in quo ostenditur esse rectangulum sub sinubus differentiarum crurum,ad quadratum radii,
Ut rectangulum sub sinu semisummæ trium laterum; & sub sinu differentiæ basis ab ea semisumma,
Ad quadratum tangentis complementi anguli verticalis.

PRAXIS VI.

Complementum arithmeticum est id quod relinquitur, ablato logarithmo sinus alicujus arcus, à logarithmo radii, estque logarithmus secantis complementi

complementi, si illi addatur logarithmus radii, cum enim radius sit medius proportionalis inter sinum, & secantem complementi: logarithmi extremorum æquabuntur duplo logarithmo medii. Ideòque si ex logarithmo medii bis sumpto unum subtraxeris, relinquitur logarithmus alterius.

Adde { Complementa arithmetica crurum,
Logarithmis differentiarum crurum à semisumma trium laterum, & fiet.

Duplus logarithmus sinus semianguli verticalis.

Demonstr. (*in coroll.* 15.) ostendimus, ita esse quadratum radii, ad rectangulum sub secantibus crurum; ut rectangulum sub sinubus differentiarum crurum, à semisumma trium laterum, ad quadratum sinus semianguli verticalis: ergo additis logarithmis, secantium crurum, & logarithmis differentiarum; si ab iis subtraxeris duplum logarithmum radii; relinquitur duplus logarithmus semianguli verticalis, dum autem pro logarithmis secantium assumuntur complementa arithmetica, subtractio invenitur facta.

Atque hæ sunt praxes, dum utimur logarithmis, alio enim modo operari debemus per sinus, nam deberent primò fieri, tam quadratum radii, quàm alia rectangula sub sinubus: deinde instituenda regula trium; excrescerent autem in immensum numeri, ideoque molliendæ sunt hujusmodi praxes ut sinubus aptentur.

Sum autem longior in solvendo hoc problemate quod authores ut mirabile attollunt, unde volui illud in omnem partem versare.

PRAXIS VII.

Vingat in suis logarithmis hanc praxin profert sine demonstratione quam hic demonstrare contendo. Addantur simul tria latera, fiatque eorum semisumma; ex qua auferatur basis ut habeatur eius differentia.

Fiatque ut sinus totus
ad sinum AB,
ita sinus BC
ad quartum sinum. Deinde fiat
ut quartus sinus
ad sinum semisummæ trium laterum,
ita sinus differentiæ basis AC
ad septimum sinum.

Si iste septimus sinus multiplicetur per sinum totum, producetur quadratum complementi dimidii anguli verticalis B

Demonstr. (*Prop.* 17 *hujus*) demonstravimus ita esse rectangulum sub sinubus crurum, ad quadratum radii, ut rectangulum sub sinu semisummæ, & sub sinu differentiæ basis à semisumma, ad quadratum complementi dimidii anguli verticalis B.

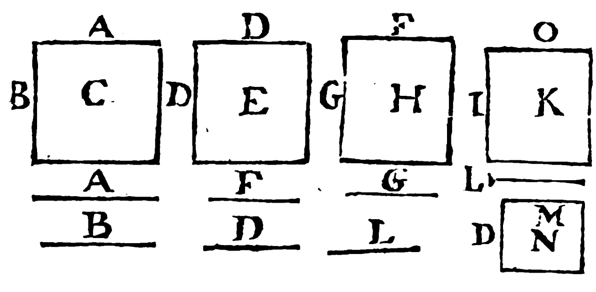
In prima analogia multiplicatur sinus AB, per sinum BC, hoc est fit rectangulum sub sinubus crurum, quod dividitur per sinum totum, & quotiens est quartus sinus. Supponatur item sinus totus dividere suum quadratum; quotiens erit sinus totus; cum ergo sinus totus etiam dividat rectangulum sub sinubus crurum, quotientes eandem rationem habebunt, quam habent divisi. Quare.

Ut rectangulum sub sinubus crurum
ad quadratum radii,
ita se habet quartus ille sinus
ad sinum totum. Deberet igitur ita institui secunda analogia.

Ut quartus sinus ad sinum totum, ita rectangulum sub sinu semisummæ trium laterum; & sub sinu differentiæ basis ad quadratum complementi semianguli B, (*per prop.* 21. *arithmetices.*) Habetur quartus proportionalis, si tertium per primum dividamus, & quotientem multiplicemus per secundum, unde instituitur secunda analogia in qua multiplicantur secundus & tertius numerus, ut fiat rectangulum sub sinu semisummæ, & sub sinu differentiæ basis, & hoc rectangulum dividitur per quartum sinum inventum, & septimus qui exurgit per secundum multiplicatur, nempe per sinum totum; ergo benè per hanc praxin invenitur quadratum sinus complementi semianguli verticalis.

LEMMA.

Si duo numeri A, B, se invicem multiplicantes fecerint C: item D & D fecerint quadratum



E; & F, & G fecerint H, sitque alius numerus K; ita ut sit C ad H sicut E ad K; quod si sit ut A ad F; ita G ad L, & ut B ad D; ita L ad M, & D multiplicando M, faciat N; dico quod rectangula K & N sunt æqualia. Sit ut A ad D; ita F ad O, & rectangulum K, aut illi æquale intelligatur descriptum super lineam O, & quia supponitur esse ut C ad E; ita H ad K, ratio C ad E; H ad K, componitur ex rationibus A ad D; seu F ad O, & B ad D, & debebit esse G ad I, sicut B ad D.

Demonstr. Quia D multiplicans M, facit N; & multiplicans seipsum facit E; cum sit eadem altitudo D (*per* 1.6.) erit ut E ad N; ita D ad M, aut B, ad L, debeo probare E ad K se habere ut ut B ad L; tunc enim (*per* 7.5.) K & N sunt æquales. Hoc autem ita ostendo. Ratio E ad K componitur ex rationibus D ad I, seu B ad G; & A ad F, seu G ad L, ratio autem composita ex rationibus B ad G, & G ad L, est ratio B ad L: igitur E ad K se habet ut B ad L hoc est ut E ad N, ergo K, & N sunt æqualia.

PRAXIS VIII.

Hæc praxis profertur à Vlac. Addantur tria latera, ita ut fiat eorum semisumma, & ab ea subducantur duo crura, habeanturque eorum differentiæ à semisumma trium laterum.

Fiat ut sinus cruris AB	A
Ad sinum unius differentiæ	F,
Ita sinus alterius differentiæ	G
Ad quartum sinum	L.
Rursus, ut sinus cruris BC	B
Ad sinum totum	D,
Ita quartus sinus	L
Ad septimum sinum	M.

Si M multiplicetur per sinum totum,
Exurget quadratum sinus dimidii anguli verticalis.

Demonstratio. Per Lemma superius, ille producitur numerus hac praxi, qui est quartus proportionalis

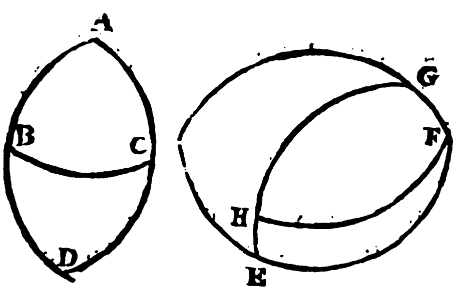
tionalis ad tres, nempè rectangulum sub A & B, seu sub sinubus crurum, quadratum numeri D, seu sinus totius, rectang. sub F, G seu sub sinubus differentiarum crurum à semisumma trium laterum: sed quartus proportionalis ad tres propositos (*per 15. hujus*) est quadratum sinus dimidii anguli verticalis; ergo qui invenitur hâc praxi est quadratum sinus dimidij anguli verticalis.

Possent dari aliæ praxes deductæ ex 18. 19. 20; sed de his infra cum de prostaphæresi.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Datis tribus trianguli lateribus, cognoscere cujus affectionis sit angulus quilibet.



Si duo crura AC, AB fuerint quadrantes basis, erit mensura anguli verticalis A, (*per 6. 3. hujus*) si AB, CA crura fuerint affectionis ejusdem, & basis non minor quadrante, angulus A verticalis erit obtusus. Primò sint crura quadrante majora & basis quadrante non minor: erunt (*per 4. hujus*) omnes anguli obtusi. Si verò fuerint AB, AC crura quadrante minora, producantur donec concurrant in D erunt DB, & CD quadrante majora, & supponitur basis quadrante non minor, (*ergo per 4*) in triangulo BDC omnes anguli obtusi erunt: ergo cum D obtusus sit, etiam angulus A obtusus erit. Si crura fuerint affectionis diversæ, & basis quadrante, non major angulus verticalis acutus erit. Sit enim triangulum EFG rectangulum in F, & latera GF, FE sint affectionis diversæ, (*per 5. 4.*) basis EG erit major quadrante; ut ergo fiat non major quadrante minuatur in H, fiet angulus GFH minor recto.

Si crura ejusdem fuerint affectionis & basis quadrante minor; Si sinus complementorum crurum multiplicentur, & dividatur productum per sinum totum, & reliquum sit æquale sinui complementi basis, angulus rectus est.

Hoc est Si ita est sinus totus
ad sinum complementi AB,
ut sinus complementi BC
ad sinum complementi AC.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Datis omnibus trianguli Sphærici angulis; invenire latera.

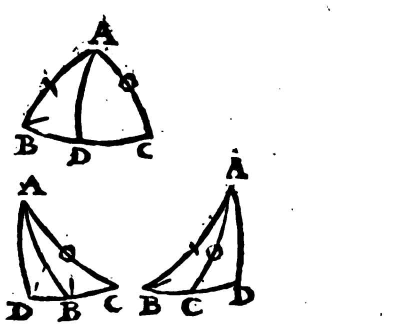
Per propositionem 21 hujus, mutentur anguli in latera alterius trianguli, quod solvatur; hoc est cujus inveniantur anguli ex quibus cognitis innotescent latera trianguli propositi.

Notandum si tres anguli fuerint acuti singula latera erunt quadrante minora (*per 3. hujus*) cætera innotescent ex alterius trianguli solutione.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Cognitis duobus trianguli sphærici lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso: invenire basim.



Sit triangulum ABC cujus cognoscuntur crura AB, BC, & angulus B, quæritur basis AC.

Fiat ut quadratum radij
ad rectangulum sub sinubus crurum,
ita sinus versus anguli ABC
ad differentiam inter sinum complementi basis & sinum complementi differentiæ crurum.

Habetur autem sinus complementi differentiæ crurum; quare addita differentia, habebitur sinus complementi basis, ut habeatur sinus versus anguli B; subducendus est sinus complementi anguli B ex radio.

Alio modo:

Sit triangulum ABC cujus cognoscuntur crura AB, BC, & angulus B ab ipsis comprehensus, quæritur autem latus AC, ex alio quocumque angulo A ad unum ex cruribus cognitis. Demittatur perpendicularis, quæ vel cadet intra triang. vel extra ad partes B, vel ad partes C. Fiat
ut sinus totus
ad sinum compl. ABC,
ita tangens AB
ad tangentem BD.

Qua cognita cognoscitur CD, tum fiat ut sinus complementi BD ad sinum complementi CD; ita sinus complementi AB, ad sinum complementi AC.

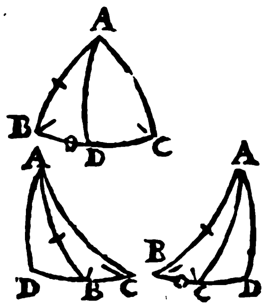
Demonstratio. Prima analogia (*est 11. 5. hujus*) secunda analogia est 10 hujus, in qua probavimus sinus compl. segmentorum basis, proportionales esse sinubus complementorum crurum.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Cognitis duobus angulis, & latere uni eorum opposito, invenire latus adiacens duobus angulis cognitis, modo vel cognoscatur eius species vel species alterius lateris incogniti.

Sit triangulum ABC cujus cognoscitur latus AB, AB, & anguli ABC, ACB; quæritur latus BC. Oportet autem ut ejus species cognoscatur vel pecies lateris AC. Fiat



ut sinus totus
ad sinum compl. ABC,
ita tangens AB
ad tangentem BD Fiat rursus
ut tangens ACB ad tangentem ABC, ita sinus BD ad sinum CD.

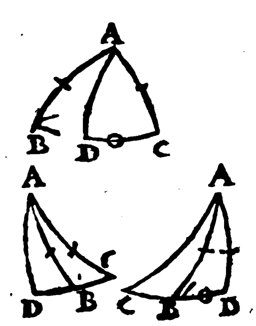
Demonstratio. Prima analogia sicut in præcedente problemate, secunda analogia est 7. hujus.

Ratio cautionis adhibitæ, prima quidem cautio tollit omnem ambiguitatem. In prima analogia basis AB quæ datur, tollit omnem ambiguitatem (*per cor.* 54. *hujus*) pro latere BD; item in secunda, si cognoscatur species lateris AC quod habet vicem basis in triangulo ACD rectangulo; tollet omnem ambiguitatem circa latus CD; cognitis autem BD, DC facilè cognoscitur tota BC.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Cognitis duobus lateribus, & angulo uni eorum opposito, cognoscere tertium latus.



Sit triangulum ABC, cujus duo latera AB, AC sint cognita; & angulus ABC lateri AC oppositus, quæritur aliud latus nempe BC. Demissa perpendiculari ex angulo A.

Fiat sicut in præcedenti
ut sinus totus
ad sinum compl. ABC,
ita tangens AB
ad tangentem BD.

Rursus fiat ut sinus complementi AB ad sinum complem. AC,
ita sinus compl. BD ad sinum compl. CD.

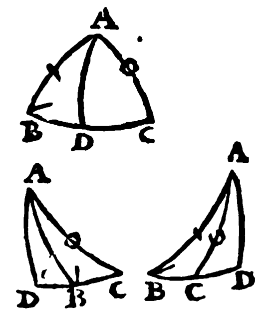
Quæ secundùm varietatem casuum, perpendicularis vel addi debet ut in primo casu, vel subtrahi.

Prima analogia demonstrata est in superioribus, secunda est 10. hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Cognitis duobus angulis, & latere utrique adiacente, aliud latus invenire.



Sit triangulum ABC cujus cognoscuntur anguli ABC, BAC, & latus AB, quæritur latus AC. Primò demittatur perpendicularis ab angulo A cognito, & adjacente lateri quæsito, fiatque, ut sinus totus ad sinum complem. AB, ita tangens ABC ad tangentem complementi BAD, cognito BAD cognoscitur CAD. Fiat item ut sinus complementi CAD ad sinum complementi BAD, ita tangens AB ad tangentem AC, sic etiam tangens complementi AC ad tangentem complementi AB.

Demonstratio. Prima analogia demonstratur (*per* 15. 5. *huius*) secunda analogia demonstratur in 11. hujus.

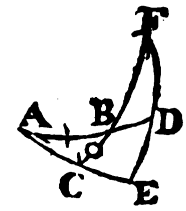
Ista quidem sufficerent ad perfectam Trigonometriam, quæ maximam facilitatem habet ex logarithmorum usu. Si quis tamen vellet discere modum quo sine logarithmis satis facilè solvebantur triangula ferè omnia per prosthaphæresin ut vocant, id est per solam additionem & subtractionem, id exequar sequentibus propositionibus.

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Multiplicationem, & divisionem evitare: quando primo loco est radius, secundo & tertio est sinus.

Mutentur duo latera aut anguli quorum sinus dantur in sua complementa, & habebitur triangulum solubile sine ulla multiplicatione & divisione; nam in quocumque triangulo ponitur sinus totus, in primo loco, signum est aliquid in tali triangulo esse æquale quadranti.



Sit v. g. triangulum ABC cujus angulus C rectus, & ad quod solvendum dicitur ut sinus totus anguli C recti ad sinum lateris AB, ita sinus anguli A ad sinum lateris BC. Mutetur AB

AB in suum complementum BD, & A seu ED in suum complementum. Fit triangulum BDF, cujus cognoscitur primo angulus D rectus; deinde duo crura talem angulum comprehendentia; quoties autem angulus rectus est, & cognoscuntur duo crura (*per coroll. prop. 19.*) primo addantur simul crura, quæ vel simul sumpta æquabuntur quadranti, vel majora erunt, vel minora.

Sint primò æqualia. Fiat arcus compositus, ex minori crure, & complemento majoris, illius dimidius sinus æqualis erit sinui arcûs BC, complementi basis si verò crura BD, DF majora sint quadrante, sinui arcûs compositi ex minori crure, & complemento majoris, addatur sinus excessus; illius aggregati dimidium erit æquale differentiæ sinus arcus BC, nempè complem. basis FB, & sinus arcus compositi: hoc est auferatur hæc differentia ex sinu arcus compositi, & habebitur sinus complementi basis.

Si denique duo crura BF, DF simul sumpta minora sint quadrante: subtrahatur sinus defectus, ex sinu arcus compositi, ex minori crure, & complemento majoris: & residui dimidium erit differentia sinus arcus BC, complementi basis FB, & sinus arcus compositi; unde hæc differentia subtrahatur ex sinu arcus compositi restabit sinus complementi basis.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Si sinus totus sit in primo, secundo & tertio loco, divisionem evitare.

Primò quoties sinus est in primo loco, certum est divisionem nullam esse, quia cum sinus totus sit 1000000. tot tantùm delendæ sunt cyphræ numeri dividendi, quot sunt o in divisore, seu in sinu toto, ut docetur in arithmetica.

Si verò sinus totus sit in secundo loco, retrahendus est in primum; nam si in primo loco sit sinus alicujus arcus, mutetur in secantem sui complementi: sic enim sinus totus ponitur in primo, secans complementi ponitur in loco sinus totius, verbi gratiâ.

Sit ut sinus anguli 30 ad tangentem aliquam, ita sinus totus ad aliud.

Fiat ut sinus totus ad tangentem eandem, ita secans anguli 60 ad idem.

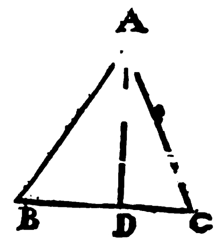
Ratio est quia quod in secundo, aut tertio loco sit sinus totus, perinde est.

Nam si sit ut A ad B, ita C ad D, erit etiam ut A ad C, ita B ad D, quare ut sinus anguli 30 ad sinum totum, ita sinus totus ad secantem anguli 60: ergo ut sinus totus ad secantem 60, ita tangens illa ad quartum. Si sinus totus sit in secundo, aut tertio loco, & in primo sit tangens, sinus totus ponatur in primo loco, & tangens illa mutetur in tangentem complementi, ponaturque in secundo loco, quia nempe (*per 24.1.hujus*) radius est medius proportionalis inter tangentes, arcus, & complementi. Pariter si in primo loco sit secans, mutetur in sinum complementi, ponaturque in secundo loco.

PROPOSITIO XXXVII.

Problema.

Si primo loco sit sinus, & nullibi radius; divisionem in duplicem multiplicationem convertere.

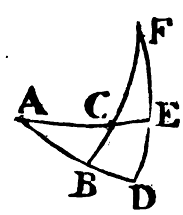


Triangulum solvendum in duplex triangulum, demissâ perpendiculari dividatur, fiatque duplex analogia, in qua radius primum locum obtineat. Sit verbi gratiâ quærendum latus AC, ex cognitis angulis B, & C, & latere AB debeatque fieri ut sinus anguli C ad sinum anguli B, ita latus AB ad latus AC, demittatur perpendicularis AD, fiatque ut radius ad sinum anguli B, ita AB ad AD; pariter ut sinus anguli C ad sinum totum, anguli scilicet recti D, ita AD ad AC, muteturque hæc secunda in hanc, ut radius ad secantem complementi C; ita AD ad AC.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Si primo loco sit sinus totus, & secundo, & tertio partim secantes, partim sinus, aut tangentes, quartum proportionalem invenire, per prosthapheresin.



Radio primum locum obtinente, in secundo, aut tertio loco non sit sinus, sed vel secantes, vel tangentes, immò quicumque alii numeri, operandum erit secundùm diversitatem casuum.

Primus casus erit si numeri in primo, & secundo loco collocati sint minores sinu toto, atque adeo si pro sinubus accipiantur, habeant in tabula sinuum arcus sibi respondentes. Utere ergo illis tanquam sinubus, hoc est finge triangulum ABC, in quo radius sit in primo loco, nempe sinus anguli B recti, secundus numerus fingatur esse sinus anguli A, tertius numerus quicumque ille sit ponatur esse sinus lateris AC, quæritur quartus proportionalis BC, modò autem tales numeri, secundo scilicet, & tertio loco positi, minores sint sinu toto, possibile est tale triangulum. Quærantur ergo arcus respondentes numeris illis, habebitur talis trianguli fictitii angulus A, & latus AC, qui si mutentur in sua complementa CE, BF, tunc solvetur triangulum CEF (*per 34.hujus*) & habebitur sinus lateris BC, qui erit quartus proportionalis, etiamsi revera esset tangens, & secans.

Secundus casus est quando unus ex numeris in secundo, & tertio loco positis, est major sinu toto, & tunc duplex est via habendi quartum per prostaphæresin. Primus modus erit si hunc numerum majorem sinu toto, minuas deletâ unâ eius cyphrâ ad dexteram, eoque sic decurtato utaris, quartum enim proportionalem invenies decuplò minorem, quàm oporteat, quare addendus illi erit in fine, unus aut alter character, ut si quæratur ad sequentes numeros quartus proportionalis.

Sinus totus	tangens gr.21.2.	tangens gr. 60.
10000000.	3912247.	17320508.

Cum tertius sit major sinu toto, eum decurtabo, deleto ultimo charactere 8, factaque regula inveniam pro quarto numerum 677185, cui addes 0, ut fiat 6771850.

Demonstratio factâ regulâ, quæ est ratio primi, ad secundum, ea est tertii decurtati, ad quartum decurtatum, sed quæ est tertii decurtati ad quartum decurtatum, eadem erit tertii aucti ad quartum eodem modo auctum, ergo, &c.

Alia item methodo idem numerus haberi potest, supponendo quod si quatuor numeri proportionales sint A, B, C, E & tertius,

A. B. C 3 E 6
4. 8. D 2 F 4.

Et quartus similiter dividantur, vel eorum similes partes accipiantur, nempe D & F, ita erit A ad B, ut D ad F, quia similes partes, in eadem sunt ratione, ac tota.

Suppono item ex Arithmetica, inveniri quartum proportionalem si primus dividat tertium, & quotientem multiplices per primum. Sint ergo propositi priores numeri, nempe sinus totus, & tangentes, divide tertium per sinum totum, quotiens erit 1, qui si multiplicetur per secundum, habebitur quartus 3912247. tangens autem divisa fuerat in duas partes quarum prima fuit 10000000. Secunda 732058, & invenimus quartum proportionalem respondentem primæ parti nempe 3912247. Secundæ parti respondens habebitur per primum casum facilè; cum hæc secunda pars minor sit sinu toto; invenies igitur illam esse 2863963, addantur illæ partes; fietque summa 6776210.

Tertius casus est si ambo numeri qui sunt in tertio, & secundo loco fuerint majores sinu toto, sunt igitur ambo decurtandi, abjectâ unâ, aut altera cyphrâ, quæ tamen addendæ erunt numero invento, nempe si unam ex troque abjecisti, duæ restituentur.

Qui logarithmis utitur, ne valdè curet hujusmodi prostaphæresin.

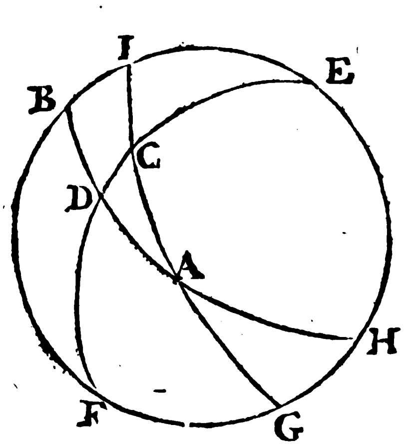
PRAXIS TRIGONOMETRIÆ.

LIBER SEPTIMVS.

Vt melius usus trigonometriæ innotesceret, eius praxes alicui materiæ peculiari præsertim vero Astronomiæ, cui præsertim inservit adaptare placuit.

PROPOSITIO I.
Problema I.

Datis maximâ eclypticæ obliquitate, solisque distantia à proximo æquinoctio, eius declinationem reperire.



Supponitur æquator AB, eclyptica AI, & nota maxima eius obliquitas, nempe arcus BI, mensura anguli BAI, supponitur etiam data solis distantia ab intersectione A in qua fit æquinoctium nempe arcus AC, posito quod sol sit in C, ducto per punctum C circulo per polos mundi transeunte, & consequenter recto ad æquatorem AB, quæritur arcus DC, angulusque D rectus est, & angulus CAD est graduum 23, 31. min. 30. sec.

Fiat ut sinus totus
ad sinum lateris AC distantiæ solis ab æquinoctio,
ita sinus anguli CAD
ad sinum declinationis CD.

Demonstratur (*In* 15.5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno angulo obliquo & hypothenusâ invenitur latus prædicto angulo oppositum.

PROPOSITIO II.
Problema II.

Datis declinatione solis, & obliquitate eclypticæ, invenire eius locum in zodiaco, seu distantiam à proximo æquinoctio.

Hæc est superioris quasi conversa. Supponitur nota declinatio solis CD, & datus angulus CAD eclypticæ cum æquatore, qui est graduum 23, 31′, 30″, quæritur AC, seu locus solis in eclyptica.

Fiat ut sinus anguli A
ad sinum declinationis CD,
ita sinus totus, seu anguli recti D,
ad sinum lateris AC,

Demonstr.

Demonstratur (*in* 23.5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno latere & angulo ipsi opposito invenitur hypothenusa.

PROPOSITIO III.
Problema III.

Cognita inclinatione eclypticæ ad æquatorem & distantia solis à proximo æquinoctio, eius Ascensionem rectam invenire.

Voco Ascensionem rectam punctum æquatoris simul oriens in sphæra recta cum proposito gradu eclypticæ, est autem circulus per polos transiens ut ECD, aliquis horizon sphæræ rectæ, dato ergo angulo A, & latere AC, quæritur latus AD, nam punctum D æquatoris est illud quod simul oritur cum puncto eclypticæ C, & arcus DA seu distantia puncti D, ab æquinoctio est ascensio recta puncti C eclypticæ.

Fiat ut sinus totus
ad sinum cdmplementi anguli A 23, 31′, 30″,
ita tangens lateris A C
ad tangentem lateris AD,

Vel

Ut sinus complementi anguli A
ad sinum totum,
ita tangens complementi lateris A C
ad tangentem complementi lateris AD.

Demonstratur (*in* 20.5.) per quam in triangulo rectangulo, datis uno angulo obliquo & hypothenusâ, invenitur latus prædicto angulo adjacens.

PROPOSITIO IV.
Problema IV.

Datis maxima declinatione eclyptica & solis declinatione, invenire eius ascensionem rectam.

Supponitur datus angulus A, & declinatio CD, quæritur latus A D

Fiat ut tangens declinationis eclypticæ, seu anguli A,
ad tangentem declinationis C D,
ita sinus totus
ad sinum ascensionis rectæ A D.

Vel

Ut sinus totus
ad tangentem declinationis C D,
ita tangens complementi maximæ obliquitatis
ad sinum ascensionis rectæ AD.

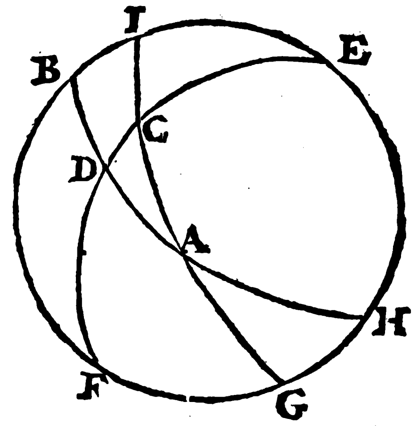
Demonstratur (*in* 19.5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno angulo & latere ipsi opposito invenitur aliud latus.

PROPOSITIO V.
Problema V.

Datis maxima eclypticæ obliquitate & distantia solis à proximo æquinoctio, invenire angulum eclypticæ cum meridiano.

Supponitur datus angulus A eclypticæ cum æquatore, supponitur datum latus AC, quæritur angulus C, quem eclyptica cum circulo ECDF comprehendit

Fiat ut sinus totus
ad sinum complementi distantiæ solis à proximo æquinoctio,
sic tangens maximæ obliquitatis eclypticæ
ad tangentem complementi anguli quæsiti.



Demonstratur (*in* 14.5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno angulo obliquo & hypothenusâ invenitur alius angulus.

PROPOSITIO VI.
Problema VI.

Datis maxima obliquitate eclypticæ & declinatione solis, invenire angulum eclypticæ cum meridiano.

Supponitur cognita declinatio CD, & angulus A, quæriturque angulus C

Fiat ut sinus complementi declinationis C D
ad sinum complementi obliquitatis eclypticæ
ita sinus totus
ad sinum anguli quæsiti.

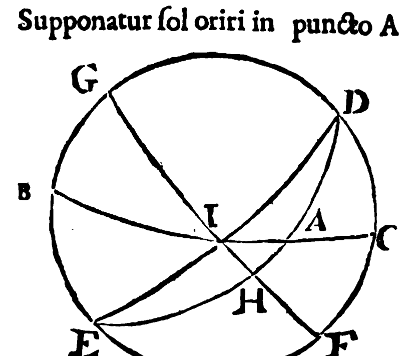
Demonstratur (*in* 9.5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno angulo obliquè cum latere ipsi opposito, invenitur alius angulus.

His propositionibus conficiuntur tabulæ Ascensionum rectarum, declinationum, & angulorum eclypticæ cum meridiano, seu cum omnibus circulis horariis.

PROPOSITIO VII.
Problema VII.

Datis declinatione solis, elevatione poli, solis amplitudinem ortivam aut occiduam invenire.

Supponatur sol oriri in puncto A, horizontis BC, sintque poli D & E, elevatio poli CD, quæ supponitur cognita, sit æquator FG, intelligatur per punctum A in quo sol oritur ductus circulus



horarius DAE, eritque ad æquatorem rectus (*per* 15.1.*Theod.*) nempe angulus H rectus erit, sit punctum I, illud in quo sol oritur, dum percurrit æquatorem vocaturque punctum veri ortûs, quæritur arcus IA, nempe amplitudo ortiva, fit triangulum rectangulum, supponitur cognitum latus HA declinationis, item angulus AIH qui est complementum elevationis poli CD.

Fiat ut sinus complementi elevationis CD, seu anguli I,

ad

ad sinum declinationis H A,
ita sinus totus anguli recti H,
ad sinum amplitudinis ortivæ I A.

Demonstratur (*in* 23.5.) datis videlicet in triangulo rectangulo, uno angulo obliquo cum latere ipsi opposito invenitur hypothenusa.

PROPOSITIO VIII.
Problema VIII.

Datis declinatione solis, & elevatione poli, invenire differentiam ascensionalem.

Differentia ascensionalis est arcus ostendens quantum distet punctum æquatoris cooriens cum aliquo puncto eclypticæ in sphæra recta, ab eo quod cum eodem oritur in sphæra obliqua. Ut in præcedenti figura cum circulus D A E per polos transiens sit horizon sphæræ rectæ, punctum H, erit ascensio recta puncti A quod supponitur esse eclypticæ, sed in sphæra obliqua punctum I æquatoris, oritur cum puncto A, igitur arcus H I est differentia illa ascensionalis quæ quæritur.

Fiat ut sinus totus
ad tangentem declinationis H A,
ita tangens elevationis poli C D, seu complementi anguli I
ad sinum arcus HI, ascensionalis differentiæ.

Demonstratur (*in* 19.5.) in qua datis uno angulo obliquo cum latere ipsi opposito, quæritur aliud latus trianguli rectanguli.

PROPOSITIO IX.
Problema IX.

Datis declinatione solis, & elevatione poli, invenire horam ortûs, aut occasûs.

Eadem est; nam H I est arcus complementi arcus seminocturni, nam FH est arcus seminocturnus, quare differentia ascensionalis in tempus mutata, indicat quantum ante aut post sextam sol oriatur, aut occidat.

PROPOSITIO X.
Problema X.

Datis elevatione poli, & hora ortûs, aut occasûs, invenire declinationem & diem, quâ oritur aut occidit tali hora.

Cognita hora ortus aut occasus, cognoscitur differentia ascensionalis nempe I H in figura, & quæritur H A.

Fiat ut sinus totus
ad sinum arcus I H,
Ita tangens anguli I seu arcus C F complementi elevationis poli
ad tangentem arcus HA declinationis.

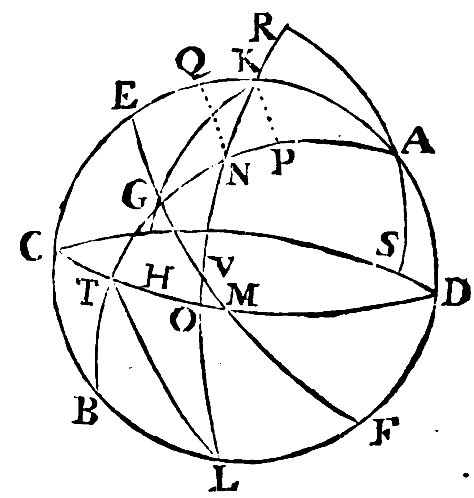
Demonstratur (*in* 18. 5.)

Datâ declinatione solis (*per* 2.) quæritur eius locus in zodiaco, sciturque ex tabulis quo die sol sit in tali loco zodiaci.

PROPOSITIO XI.
Problema XI.

Data declinatione solis, elevatione poli, & hora diei, solis elevationem supra horizontem reperire.

Sint poli A & B, horizon CD, æquator EF, sitque primo sol in G, hoc est declinatione careat, sitque cognita hora, seu distantia à meridiano, nempe angulus EAG, aut arcus GE, ducatur ex zenith



K circulus verticalis GHL, qui (*per* 15.1.*Theod.*) ad horizontem CD rectus erit, quare in triangulo rectangulo G H M

Fiat ut sinus totus anguli recti H
ad sinum anguli GMH complementi elevationis poli,
ita sinus lateris GM, complementi, arcus EG, distantiæ solis à meridiano, seu sinus distantiæ solis ab hora sexta,
ad sinum arcus GH elevationis quæsitæ.

Demonstratur (*per* 15 5.) in qua datis trianguli rectanguli hypothenusa & uno angulo obliquo quæritur latus ipsi oppositum.

Secundò supponatur sol extra æquatorem in puncto N, in triangulo KAN datur arcus KA, complementum elevationis poli, sicut & N A complementum declinationis cognitæ, datur & angulus A, seu arcus EG, quæritur basis KN, complementum elevationis NO, demissa perpendiculari KP.

Fiat ut sinus totus
ad tangentē AK cōplementi elevationis poli,
ita sinus GM complementi distantiæ solis à meridiano
ad tangentem arcûs PA.

Prima hæc analogia demonstratur (*in* 20.5.)

Hic primus arcus PA auferatur à NA complemento declinationis, nempe ab hora sexta matutina ad sextam vespertinam, quia perpendicularis KP tunc intra triangulū cadit, si verò esset sol ante horā sextam matutinam, aut post sextam vespertinam addendus esset, facta subtractione restat NP.

Fiat ut sinus complementi arcûs PA
ad sinum complementi arcûs NP,
ita sinus elevationis poli
ad sinum altitudinis solis.

Hæc secunda analogia demonstratur (*in* 10.6.)
Tota autem praxis demonstratur (*in* 31.6.)

Hoc problemate fiunt tabulæ elevationum solis, pro qualibet hora, & quolibet signo quæ sunt utiles in Gnomonica.

PROPOSITIO XII.
Problema XII.

Dato verticali solis, eius declinatione & horâ, invenire altitudinem.

In triangulo KAN. supponitur datus angulus A, cum sciatur arcus EG, nempe hora cognita, seu distantia à meridiano, datus item arcus NA, complemen complementum declinationis GN, angulus item OKA, nempè arcus OD, indicans verticalem, quæritur arcus K N complementum altitudinis solis.

Fiat ut sinus anguli NKA, seu Azimuth
ad sinum anguli A, distantiæ à meridiano,
ita, sinus arcûs NA complementi declinationis
ad sinũ arcus KN cõplementi altitudinis solis.

Demonstratur, (*per* 1.5.)

PROPOSITIO XIII.
Problema.

Datis Declinatione, Altitudine, & Azimuth solis, invenire horam diei.

In eodem triangulo NKA, datur N A complementum declinationis, HK complementum altitudinis, & angulus NKA, Azimuth, quæritur angulus A seu latus EG, & distantia à meridiano.

Fiat ut sinus arcus NA, cõplemẽti declinationis
ad sinum NK complementi altitudinis NO,
ita sinus anguli N K A
ad sinum anguli A, seu arcus E G distantiæ à meridiano.

Demonstratur item (*per* 1.5.)

PROPOSITIO XIV.
Problema.

Data elevatione poli declinatione, & altitudine solis invenire horam diei.

Vide figuram præcedentem.

In eodem triangulo NAK dantur omnia latera nempè NK, complementum altitudinis solis, NA complementum declinationis GN, K A complementum elevationis poli; quæritur angulus NAK.

Addantur tria latera, nempè complementa altitudinis poli, elevationis & declinationis solis, fiatque eorum summa, & semisumma, à qua auferes singillatim KA, & NA, quia nempè quæritur angulus A, & habebuntur eorum differentiæ à semisumma.

Fiat ut sinus complementi elevationis poli
ad sinum unius differentiæ,
ita sinus alterius differentiæ
ad sinum quartum.

Fiat item ut sinus complementi declinationis
ad sinum totum,
ita sinus quartus
ad sinum septimum.

Hic septimus sinus multiplicatus per sinum totum, dat quadratum sinûs semianguli A; vel summam logarithmorum illorum sinuum divide bifariam habebis logarithmum sinûs dimidii anguli verticalis.

Modus iste est octavus (*propositionis* 28.6.)

Vel aliis modis solvatur hoc triangulum cujus omnia latera cognoscuntur.

Eodem modo cognosces circulum horarium in quo stella invenitur, nempè ejus distantiam à meridiano datis ejus declinatione, altitudine, & poli elevatione. Ut tamen ex ea cognoscere possis horam solis, comparanda est ejus ascensio recta, cum ascensione recta solis.

Pariter dato loco solis, & consequenter ejus declinatione, & altitudine poli, cognoscemus horam initii auroræ. Si operemur eodem modo in hemisphærio inferiori, ac in superiori operati sumus: incipit enim aurora, quando sol depressus est infra horizontem gradibus 18. tunc enim dantur pariter tria latera in triangulo solvendo.

PROPOSITIO XV.
Problema.

Datis elevatione solis, declinatione, & altitudine poli invenire solis Azimutum.

Hoc problema simile est superiori, nisi quod in hoc quæratur angulus N K A, & in superiori angulus NAK; quare pariter addantur simul omnes termini dati, seu omnia latera, ut eorum fiat summa, & semisumma, à qua subtrahes crura KA, KN seu complementum elevationis poli, & complementum elevationis solis, habeanturque laterum differentiæ à semisummâ; tum fiat

Ut sinus KA complementi elevationis poli
ad sinum unius differentiæ,
ita sinus alterius differentiæ
ad quartum sinum.

Rursus ut sinus complementi altitudinis solis seu ut K N
ad sinum totum,
ita quartus sinus
ad sinum septimum.

Hic septimus sinus multiplicatus per sinum totum, dat quadratum sinus semianguli NKA, qui denotat Azimutum solis.

Hæc propositio utilis est ad inveniendam lineam meridianam, si enim quolibet tempore notes umbram alicujus styli, in plano quocumque observesque solis altitudinem, scies quot gradibus circulus meridianus distet ab Azimuto per umbram denotato.

Facilior erit operatio si sol fuerit in æquatore, tunc enim in triangulo G K A latus G A erit quadrans, & si (*per* 21.6.) mutentur omnia latera in angulo, fiet aliud triangulum rectangulum, in quo datis angulis quæritur hypothenusâ: in hac enim mutatione angulus G K A quæsitus respondebit hypothenusæ, fiat ergo (*per* 21.5.)

Ut sinus totus
ad tangentem elevationis solis,
ita tangens elevationis poli
ad sinum complementi anguli quæsiti, nempè GKA distantiæ Azimut à meridiano.

PROPOSITIO XVI.
Problema.

Datis Altitudine, & declinatione solis unà cum Azimuto, invenire horam.

Vide figuram præcedentem.

In eodem triangulo AKN complementum altitudinis solis est latus NK, cognitum, sicut & AN complementum declinationis, datur & angulus AKN, quem verticalis solis, tempore observationis cum meridiano comprehendit, quæritur angulus A, nempè distantia solis à meridiano.

Fiat ut sinus NA, complementi declinationis
ad sinum NK complementi elevationis solis,
ita sinus anguli AKN, Azimuti cũ meridiano
ad sinum anguli A, seu arcus EG.

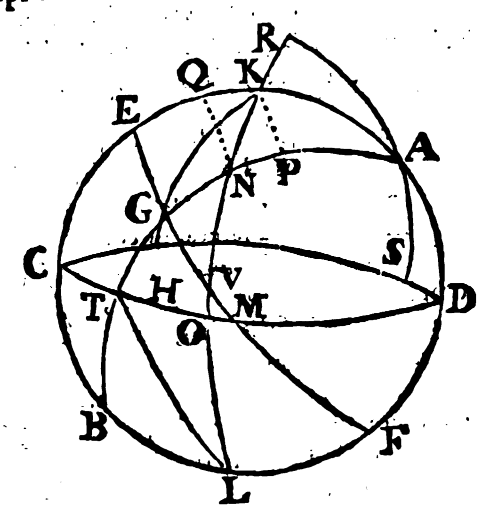
Demonstratur (*per* 1.5.)

PROPOSITIO XVII.
Problema.

Datis altitudine solis aut stellà unà cum ejus Azimutho, & declinatione, invenire elevationem poli.

In eodem triangulo AKN, supponuntur data latera

latera KN complementum elevationis syderis, AN complementum declinationis, & angulus Azimu-



talis NKA, quæriturque latus AK. Ex angulo N ad latus quæsitum ducatur perpendicularis arcus Nq, hic arcus perpendicularis ferè semper cadet extra triangulum, saltem ab hora sexta matutina, ad sextam vespertinam; fiet triangulum rectangulum qNK, cujus datur angulus qKN, hypothenusa KN.

Fiat ergo ut sinus totus
ad sinum cõplementi anguli Azimutalis, qKN,
ita tangens complementi elevationis solis seu KN
ad tangentem Kq

Hæc analogia demonstratur (*in propositione* 20.5.)
Rursus in triangulo NqA.

Fiat ut sinus complementi NK, seu sinus elevationis solis
ad sinum complementi NA, seu sinum declinationis solis,
ita sinus complementi arcus Kq
ad sinum complementi qA, sic innotescet arcus qA, ex quo si auferas arcum Kq, restabit arcus KA complementum elevationis poli.

Demonstratio hujus analogiæ petitur (*ex* 10.6.) in qua demonstratur sinûs complementorum laterum esse proportionales sinubus complementorum segmentorum basis.

PROPOSITIO XVIII.
Problema.

Datis declinatione solis, elevatione poli & Angulo Azimutali, invenire horam.

In eodem triangulo AKN, supponitur declinatio solis cognita, & consequenter latus AN cognitum, datur item AK complementum elevationis poli, ducta ab angulo A, in latus KN, perpendiculari AR.

Fiat ut sinus totus
ad sinum elevationis poli, seu cõplementi AK
ita tangens anguli Azimutalis AKN seu RKA,
ad tangentem complementi anguli KAR

Hæc analogia demonstratur (*in propos.* 14.5.)

Rursus fiat ut tangens AN, complementi declinationis
ad tangentẽ AK complemẽti elevationis poli,
ita sinus complementi anguli KAR
ad sinum complementi NAR, ex quo si auferas KAR restabit angulus quæsitus KAN.

Hæc secunda analogia demonstratur (*in propositione* 11.6.) in qua ostenditur tangentes laterum esse reciprocè proportionales sinubus complementorum angulorum verticalium.

PROPOSITIO XIX.
Problema.

Datis elevatione poli & horâ, seu solis distantia à meridiano, invenire arcum horizontis comprehensum inter meridianum, & circulum horarium solis.

Supponitur in eadem figura, sol existere in circulo horario AGB, supponitur item data elevatio poli AD, quæritur arcus horizontis CT, interceptus inter circulum horarium, & meridianum; producatur circulus horarius BGA ultra polum donec secet horizontem in S, eruntque arcus SD, CT, æquales. Invenietur autem facilè SD, cum in triangulo rectangulo SAD, notum sit latus AD, & angulus DAS, seu arcus EG ejus mensura.

Fiat ut sinus totus
ad sinum elevationis poli AD,
ita tangens anguli SAD, distantiæ solis à meridiano
ad tangentem arcûs DS.

Demonstratur (*in propositione* 18.5.)

Hæc propositio utilis est ad horologium horizontale trigonometricè construendum.

PROPOSITIO XX.
Problema.

Data stella latitudine & longitudine, invenire ejus ascensionem rectam declinationem.

Supponatur in eadem figura punctum K esse polus mundi, & CD æquator, sit autem polus zodiaci punctum A, & EF eclyptica, punctum M erit initium arietis aut libræ. Sit stella in N, & supponatur cognita ejus longitudo MG & latitudo GN, quæritur ejus declinatio NO.

In triangulo NKA, cognoscitur latus KA quod est æquale angulo eclypticæ cum æquatore, cognoscitur item NA complementum latitudinis, item angulus A exhibet complementum longitudinis. Arcus autem AK est viginti trium graduum cum dimidio, quæriturque latus KN, seu complementum arcûs NO.

Eodem modo soluatur quo problematis undecimi secunda pars.

Fiat ut sinus totus
ad tangentem AK grad. $23\frac{1}{2}$
ita sinus longitudinis, numeratæ à proximo æquinoctio seu GM
ad tangentem arcus PA, quo sublato ex AN, relinquitur PN.

Rursus fiat ut sinus complementi arcus PA
ad sinum complementi arcus PN,
ita sinus complementi arcus $23\frac{1}{2}$
ad sinum declinationis seu arcûs NO.

PROPOSITIO XXI.
Problema.

Datis longitudinibus, & latitudinibus duarum stellarum, invenire earum distantiam.

Sint in eadem figura A polus eclypticæ, sintque duæ stellæ in K & N, quarum cognitæ sint longitudines MG, ME, & consequenter differentia longitudinis EG seu angulus A, dantur item latitudines EK, GN, seu distantiæ ab eclyptica, quæritur arcus NK; igitur in triangulo AKN, cognoscuntur latera NA, KA complementa latitudinum, & angulus A comprehensus, quare (*per* 32.6.) dabitur latus KN.

TRACTATUS VI.

ALGEBRA.

INTER omnes Matheseos nostræ partes, præstantissima à plerisque censetur, ea quam communi vocabulo Algebram nominamus; quippe quæ nulli dignitate cedat, nullis numerorum, aut mensurarum finibus, nulla magnitudinum mole satis contineatur, quin ulteriùs excurrat, plerásque & intricatas quantumlibet quæstionum ambages sagacitate mirabili fœliciter explicet. Hanc propterea divinam Algebram nonnulli nominarunt, quòd à sensuum cognitione remotissima perscrutetur, abstrusaque mysteria tanta facilitate aperiat; ut oracula fundere videatur. Hujus finis, & scopus est quantitatem aliquam sub quæstionis difficillimæ involucris delitescentem, ex levissimis indiciis subodorari, & ex æqualitate, quam cum alia nota habere deprehenditur, in lucem prodere; quod quomodo præstet; & quonam artificio consequatur, hic tractatus aperiet. Hujus scientiæ authorem Gebrum Arabem nonnulli falsò existimant, ideoque Algebram nuncupatam. Alij verius Diophanto Alexandrino authori Græco, tribuunt; cujus scilicet extant opera de novo, commentariis eruditis ornata à D. Bachet Demeseriac Nobili Sebusiano elucubrata.

Algebram communiter his temporibus in duas partimur, in numerosam scilicèt, seu communem, & in speciosam, iisdem tamen utramque nixam principiis, progressionisque geometricæ proprietatibus additam. Vulgaris circa numeros occupatur, atque adeò proprium algorithmum, additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, radicum extractionem exercet.

Speciosa verò rerum species, & elementares Alphabeti litteras usurpat, ideoque metaphoricum seu similitudinarium algorithmum agnoscit. Prior Diophantum authorem agnoscit, hæc Vietam; utra autem sit præstantior, meliùs in decursu patebit; admirabilitatem quidem majorem præ se fert speciosa, quòd reconditiori, & abstractiori methodo progrediatur; in hoc tamen deficere censeo quod imaginationi non serviat, imagines nec memoriæ hærentes habeat. Unde puto non pejus in mathesin peccari posse, quam si geometrica problemata, quæ figuris explicari, & quasi oculis subjici possunt, methodo Algebricæ addicantur, & sub hoc quasi velamine in publicum prodeant. Adhibeat quidem author quilibet in suis commentationibus aut adinveniendis, aut examinandis quamcumque libuerit methodum, ne tamen ita malè de aliis mereatur ut eas novis difficultatibus implicet, methodumque communem, & à priscis Mathematicis usurpatam detrectet. Vulgaris Algebra in plerisque imaginationi meliùs obsecundat in aliis item meliùs speciosa; nam quoties analytica usurpatur ratio; meliùs speciosa totum operationis progressum indicat, in aliis autem operationibus facilior est communis.

Utramque methodum separatim aperire decreveram, duosque ptropterea tractatus institueram; re tamen paulò diligentius perpensâ, cum eadem principia sint utrique communia, methodique in plerisque sint eadem, mutuoque sibi opem ferant: unicum tractatum concinnandum putavi, qui utramque simul complecteretur. Hunc in tres libros partior, primus erit ad æquationem inveniendam Isagogicus, numerorumque cossicorum, tam integrorum, quàm fractorum algorithmum tradet.

Secundus Regulam Algebræ, hypobibasmum, antithesin, parabolismum cæterasque reductiones explicabit; & ne diutius Tyronem in præceptis detineam, sed ea ut ita dicam concoquendi facultatem tribuam, incipiam exempla tradere æquationum simplicium ut præcepta ad praxim revocare addiscat.

Tertius liber Æquationes quadraticas cæterasque methodo antiqua pertractabit. Tum potestatum omnium generationes explicabit, & extractiones radicum & de surdis seu irrationalibus quantitatibus aget.

Quartus affectas potestates variis problematis explicabit.

Quintus Potestatum Analysin continebit, ad speciosam imprimis ordinatam.

Sextus methodum continebit extrahendarum radicum ex potestatibus affectis quomodocumque.

Septimus duos proximè antecedentes secundùm speciosa methodum exemplis illustrabit. Octavus denique præcedentis totius doctrinæ praxim, allatis ipsius Diophanti exemplis, & explicabit & confirmabit.

LIBER PRIMUS;

Ad Æquationem Algebricam, Isagogicus.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si numerus seipsum multiplicet, productumque iterum multiplicet & ex ea multiplicatione ortum multiplicet, & ita consequenter, orietur series continuè proportionalium in ea ratione, qua est unitatis ad primum numerum.

G	A	B	C	D	E	F
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.

Proponatur quilibet numerus A, qui in se ductus producat B, & multiplicando numerum B producat C, item A multiplicando numerum C producat numerum D, & ductus in D efficiat E, & ita consequenter quantuùm libuerit. Præponaturque numero A unitas G, dico productam esse seriem numerorum continuè proportionalium, in ea ratione quæ est unitatis G ad numerum A; hoc est ita esse G ad A sicut A ad B, & B ad C, & C ad D, &c.

Demonstratio. Cum A multiplicando seipsum faciat B, & G multiplicando ipsum B, faciat eundem B, nam unitas multiplicando, aut dividendo eumdem numerum nihil immutat, cum semel 4, sint 4, erit quadratum numeri A scilicet B, æquale rectangulo comprehenso sub primo G, & tertio B; quare (*per* 17. 6.) erit eadem ratio unitatis G ad numerum A, quæ numeri A ad numerum B. Rursus quia A, multiplicando numerum B, producit C, & unitas G multiplicando numerum C producit ipsum C; erit rectangulum sub G & C æquale rectangulo sub A & B, Quare (*per* 16. 6.) ita erit A ad B, sicut B ad C. ita ostendam esse C ad D., sicut A ad B ita D ad B., &c. Ergo datur series continuè proportionalium in ea ratione quæ est unitatis G ad numerum A.

COROLLARIUM.

Cum A per unitates suas ostendat, quam rationem ipse A habeat ad unitatem, nam si quæras quam rationem habeat A ad unitatem, respondebis duplam, quia continet duas unitates: idem etiam A ostendet, quam rationem habeat quilibet numerus ad proximè antecedentem, Quare in qualibet serie numerorum continuè proportionalium, primus numerus post unitatem, denominat totam seriem, ideoque communiter vocatur radix eò quòd per eam continuè quasi producantur.

Notandum autem hanc propositionem universalem esse & vim suam habere etiam in numeris

G,	A,	B,	C,	D,	E,	F,
1.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

fractis, ut si A multiplicando seipsum faciat B & A multiplicando B, faciat C. Ostendam pariter ita esse G ad A., sicut A ad B, & B ad C.

Notandum secundò in singulis quæstionibus Algebricis, supponi talem seriem ita ut numerus, aut quantitas quæ in quæstionem vocatur, obtineat primum locum post unitatem. Possunt autem fingi infinitæ tales series, ita ut quilibet numerus possit esse radix, & primum locum obtinere post unitatem: potest enim quilibet numerus seipsum multiplicare, & productum iterum multiplicare.

Quamvis communiter quantitas quæ inquiritur supponatur esse radix in aliqua serie, tamen regula traditur. Si quantitas quæsita sit longitudo supponatur esse radix, si sit superficies supponatur esse quadratum, seu secundus numerus ab unitate, si sit solidum supponatur esse cubus, seu tertius numerus ab unitate.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Denominatio numerorum cossicorum.

In qualibet serie continuè proportionalium primus numerus post radicem quadratus est, secundus cubus, tertius quadrato quadratus.

Cum in omni quæstione Algebrica, supponatur aliqua series numerorum continuè proportionalium ut dixi, quamvis ii numeri incogniti sint, varias tamen habent denominationes, prout diversas in ea sedes occupant. Propterea dicuntur numeri denominati, cossici item vocantur, quia Itali quadratum cosam dixerunt & consequenter numeros cossicos quasi numeros radicis, & quadrati. Denominationes illorum sicut & characteres varii sunt.

Conveniunt omnes ut primus numerus post unitatem vocetur radix vel latus, est enim latus quadrati & radix omnium sequentium nempe radix quadrata quadrati, cubica respectu cubi quadrata respectu quadrato quadrati, & ita de sequentibus, nos eam significamus littera R, quæ radicem significabit.

Secundus numerus quadratus est, cum generetur

tur ex multiplicatione radicis per seipsam, metaphorâ ductâ à quadrato. Quoties enim linea perpendiculariter alteri sibi æquali insistens totam percurrit, hoc ductu quadratum describit. Hic numerus quadratus, ex ductu alterius in seipsum procreatus ab nonnullis vocatur census, aut zensus, ideo dicitur radix zensica, pro radice quadrata, hunc indicabit signum q.

Tertius numerus dicitur cubus, nempè, productus ex multiplicatione quadrati per radicem, si enim quadratum percurrat lineam ad ejus planum rectam, producet cubum: nos cubum indicabimus littera C.

Quartus erit quadrato-quadratum, seu quadratumquadrati; quæ appellatio rationem habet, quòd talis numerus non tantum producatur per multiplicationem cubi per radicem; sed etiam oriatur ex ductu quadrati in seipsum, quod ita demonstro.

E, A, B, C, D.
1. 2. 4. 8. 16.

Exponantur quatuor numeri continuè proportionales, A, B, C, D quibus præponatur unitas E, ostendo D ortum ex multiplicatione numeri C per radicem A esse æqualem quadrato numeri B. Cum enim ita sit E ad A sicut B ad C, & ut A ad B ita C ad D, ita erit & æquè ordinatè E ad B sicut B ad D, ergo (*per.* 17.6.) quadratum medii æquabitur rectangulo sub extremis. Sed rectangulum sub E & D est ipsum D, cum unitas nihil immutet, ergo numerus D est quadratum numeri B, erit ergo quadratum quadrati. Nos illud notabimus hoc modo qq.

Quintus numerus ab unitate vocatur ab aliquibus quadrato-cubus, sed malè, cum neque sit quadratum, neque cubus, atque adeo nec dici possit quadratum cubi, nec cubus quadrati: eum vocabimus supersolidum vel surdè solidum, Itali relatum primum dixerunt, nos illum littera S, notabimus.

Sextus erit quadrato cubus, vel cuboquadratus, est enim simul, & quadratum &, cubus immò est quadratum cubi, & cubus quadrati, quod ita demonstrare possumus. Exponatur series continuè proportionalium, Jam ostendimus numerum

L, A, B, C, D, E, F, G, H, K.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

D esse quadratum numeri B, ostendere debeo numerum F esse ejusdem numeri B cubum, hoc est numerum F, aut illi æqualem produci ex ductu numeri B in suum quadratum D, est enim ita L ad B, sicut B ad D, ut supra ostendi, & eodem modo ostendere possum ita esse D ad F sicut B ad D; ergo isti quatuor numeri L, B, D, F sunt proportionales, ergo idem numerus producetur ex ductu B in D, qui ex ductu L in F producetur: sed numerus productus ex ductu L in F est ipsum F, cum unitas nihil immutet, ergo numerus F producitur ex multiplicatione numeri B in D, ergo est cubus quadrati. Ostendo idem F esse quadratum cubi C. Cum enim ex æqualitate rationum ostendatur facilè ita esse L ad C sicut C ad F, quadradum medii C erit æquale rectangulo sub L & F, & cùm unitas L nihil immutet per multiplicationem, aut divisionem, erit numerus F æqualis quadrato numeri C notabiturque hac notâ q C.

Ita ostendere possumus seclusâ unitate omnes numeros qui sunt in sedibus paribus esse quadratos, ut B, D, F, H, numerus H erit quadrato quadrato quadratus, cujus hoc signum qqq.

Numerus G qui est septimus ab unitate malè vocatur à nonnullis quadratocubus, unde ab aliis vocatur surdesolidus secundus, & notatur hoc notâ ss.

Nonus seu K, erit cubo cubus, seu cubus numeri cubi C, quia scilicèt numerus C multiplicando quadratum suum F producit numerum K, quod ita ostendo: est enim ex æqualitate rationum ut L ad C ita F ad K, ergo planum sub mediis C & F æquabitur plano sub extremis, sed planum sub unitate L & numero K est ipse K: ergo numerus K producitur ex ductu numeri C in suum quadratum F, ergo est ejus cubus. Sicut ideò numerus C cubus est, quia fit ductu numeri A in quadratum suum B, notabitur autem cubocubus hâc notâ CC.

COROLLARIUM.

Ex his vides nonnullos numeros non tantùm produci ductu radicis in precedentem, sed per alias multiplicationes, quod ipsæ notæ seu characteres satis ostendunt: ut numerus D, non tantùm producitur multiplicatione numeri C, per radicem A, quod primitiva ejus productio ferebat, sed etiam multiplicatione numeri B per seipsum.

Quæret forsitan non nemo cur istæ appellationes ab Algebra considerentur. Respondeo sæpè numeros in seipsis non cognosci, hoc est secundum propriam entitatem, posse tamen innotescere ex loco, & sede quam in aliqua serie geometricâ obtinent, unde eos versare debemus in omnem partem, hoc est addere, subtrahere, multiplicare, dividere, etiam quando sub his tantum denominationibus noti sunt, quod sequentibus propositionibus docebimus.

Algebra speciosa æquè ac communis tota in numeris cossicis considerandis occupatur, alios tamen adhibet characteres, nam pro radice litteram aliquam verbi gratia A aut B, aut aliam quamcumque usurpat, cæterosque numeros cossicos iisdem litteris alphabeti indicat; consonantibus utitur ad significandos numeros datos, seu jam cognitos, & vocalibus ad ignotos seu quæsitos: ita ponet pro radice A, pro quadrato vel AA, vel A 2, pro cubo AAA, hoc est A ductum in A, & productum ductum in A, quod cubum indicat vel A 3: pro quadrato-quadrato AAAA, vel A4, & ita consequenter ita ut sit differentia inter 4A, & A4, nam 4A significat 4 Radices A, & A 4 significat quadratum quadrati radicis A. Idem dicito de E, nam 2 E significat duas radices E, at verò E 4 vel EEEE indicat quadrato-quadratum radicis E: idem dicendum est de aliis radicibus quibuscumque.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Exponentes numerorum cossicorum.

C.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	[illegible]
B.	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	[illegible]83.
D.		R.	q.	c.	qq.	s.	qc.	ss.	qqq.	[illegible]
F.		A	A2.	A3.	A4	A5	A6.	A7	A8	A9

Proponatur series numerorum continuè proportionalium & Geometricè quæ sit B, primoque ponatur unitas, tum radix, quadratum, &c. Huic

 seriei

seriei superscribatur alia series Arithmetica communis numerorum, ita ut radici respondeat unitas, quadrato binarius, cubo ternarius & sic deinceps unitati super C scribatur o. Hi numeri progressionis arithmeticæ respondentes numeris cossicis vocantur eorum exponentes.

Dico primò exponentes, explicare quam sedem ab unitate quilibet numerus cossicus obtineat atque adeò radici primam; quadrato secundam; cubo tertiam sedem competere, exponentes indicant.

Secundò exponentes indicant, quot intercedant rationes inter unitatem & quemlibet numerum cossicum æquales illi rationi quæ est inter unitatem, & radicem: ita ratio unitatis ad cubum triplicata est illius quæ est unitatis ad radicem; quadrato quadrati ratio ad unitatem quadruplicata est illius quæ est radicis ad unitatem eò quòd exponens qq, sit 4. Quare si quæratur quisnam numerus sit surdesolidus, respondebo eum esse qui ex multiplicatione radicis quinquies positæ producitur, quia habet exponentem 5, &c.

Notandum item est numeros cossicos, quorum exponentes sunt numeri compositi habere etiam characterem & appellationem compositam; ut quia quadratoquadrati exponens est 4, numerus compositus ex binario bis posito, seu in se multiplicato, ideo appellatio quadrato-quadrati componetur bis ex appellatione & charactere quadrati. Pariter cubo quadrati exponens componitur ex 2 & 3, & indicat hunc numerum cossicum, appellationem habere à quadrato cujus exponens est 2 & cubo, cujus exponens est 3.

Præcipuus tamen exponentium usus fundatur in proprietate progressionis arithmeticæ, respondentis progressioni geometricæ; nam exponentes sunt quasi logarithmi numerorum, eumdemque usum habent: sicut, ergo additio logarithmorum, pro multiplicatione numerorum substituitur, & substractio divisionis vices gerit, ita exponentium additio & substractio, numerorum cossicorum multiplicationi, & divisioni æquivalet.

Explicatur, Potestas quæcumque seu numerus cossicus, per alium multiplicari aut dividi potest, exponentes additi aut subtracti ostendent, quænam potestas ex talibus multiplicationibus, aut divisionibus resultet quod in exemplis faciliùs intelligetur. Si quæratur quis numerus oriatur ex multiplicatione cubi, per quadratum adduntur exponentes cubi & quadrati seu 3, & 2 fientque 5 scilicet exponens surdesolidi, dico produci surdesolidum. Multiplicandus sit cubus per supersolidum, exponentes sunt 3, & 5, qui additi summam 8 componunt, dico ex tali multiplicatione producendum qqq.

Idem dicendum de divisione, Cubocubus cujus exponens 9, dividendus sit per cubum cujus exponens est 3, subtrahe 3 & 9, supererit numerus 6, exponens quadratocubi, igitur ex tali divisione resultabit quadrato cubus. Quod non tantum verum est quoties numeri secundum proprium valorem dividuntur, aut multiplicantur; sed etiam dum sub denominationibus cossicis dividuntur aut multiplicantur. Hoc est si proponantur tres cubi multiplicādi per 4 quadratos, multiplico tria per 4 fiunt 12, & quia exponens cubi est 3, & quadrati 2, additis duobus & tribus, fiunt 5 exponens supersolidi: assero ergo ex tali multiplicatione producendos 12 supersolidos. Si 6 cubocubi dividantur per tres cubos, quotiens erit 2 quadratocubi: quæ omnia inferiùs demonstrabo.

Multi inquirunt characteres, & denominationes, numerorum cossicorum progressionis quantumlibet productæ: sed satis inutiliter cum Diophantus vix unquam ad octavam potestatem perveniat. In genere tamen dicere possumus omnes numeros primos post quinarium, ad surdesolidos pertinere: quare exponentes 7.11.13.17.19.23. ad surdesolidos pertinent, quorum primus habet exponentem 5, secundus 7, &c. Notantur autem hoc modo, s. ss. sss. ssss. sssss, Cæteræ potestates quarum exponentes sunt numeri compositi, denominationem habebunt compositam, quæ nempè contineat appellationes numerorum primorum, ex quibus coalescit exponens, ut numerus cossicus cujus exponens est 12, numerus compositus ex 3 & 4 seu 3.2.2, vocabitur quadratoquadrato cubus, vel quia idem exponens 12 componitur ex 2 & 6 seu 2.3.3, poterit vocari quadratocubo-cubus.

Characteres Algebræ speciosæ præseferunt exponentes suos, ut si cubum progressionis cujus A est radix, significare vellem, scriberem A3, vel a3, vel aaa. Si cubum progressionis cujus e est radix, scriberem eee, vel e3, ita ut exponens 3, subsequatur litteram, immò paulò ulteriùs eam afficiat. Quæ quidem ex instituto pendent, non tamen sunt inconsideratè constituta.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Numeratio numerorum cossicorum.

Non tantùm numerorum cossicorum characteres supra explicati in Algebra occurrunt, sed iis plerumque cyphrarum communium notæ præponuntur; ita invenies 1 R. 2 R 5 R. 8 R. 30 R. quæ significant unam radicem, duas radices, quinque radices, octo radices, triginta radices; seu radicem esse semel, bis, quinquies, octies trigesies positam. Ita ut si radix sit 2. & scribatur 8 R. Idem sit ac 16. si autem radix sit 3. 8 R, significabunt 24. seu radicem 3. octies positam.

Idem intelligendum de aliis potestatibus, ut 4 q. si quadratum fuerit 9, significabit 36. 10 cubi, si radix fuerit 5. & consequenter cubus fuerit 5. & consequenter cubus fuerit 125. significabit 1250. seu decies 125.

Idem intelligendum est de fractionibus. Ut si agatur de serie in qua radix est 2, inveniasque $\frac{1}{2}$ qq, intelliges semissem qqti, qui cum illa serie sit 16, ejus semissis erit 8.

Cognoscenda item sunt hæc signa + & —. primum + plus, dicitur signum additivum, & — minus signum subtractivum. Numerus cui nullum signum præponitur, subintelligitur habere signum + verbi gratiâ. 10 q. 5 R. significat decem quadrata, plus quinque radices, hoc est decem quadrata, & insuper quinque radices. Ut si sit quæstio in illa serie proportionalium in qua 3 est radix 10 q + 5 radices, significabit 105; nam quadratum est 9, & consequenter 10q efficiunt 90, quibus addenda est quinquies radix 5, seu 15. Pariter 8 c, — 4 q significat 8 cubos minùs 4 quadratis.

Ideo autem hujusmodi signis utimur, quod sæpe numeri secundum proprium valorem sint incogniti, atque adeò peragi non possit proprie dictus Algorithmus, hoc est non possit fieri additio, & subtractio, ut si proponerentur addendæ quinque radices,

radices, 8 quadratis, procedatque quæstio in ea serie Geometrica in qua quadratum est 4, quod tamen ignoretur: 8 quadrata efficiunt 32, quibus si addas quinquies radicem 2, efficies 42; quia tamen supponitur adhuc ignorari valor tam quadrati, quam radicis, ita notabitur hæc additio 8 q + 5 R. Donec innotescat quadrati & radicis valor.

Idem intelligendum de subtractione. Ut si subtrahendus sit iste numerus 8 ex 20; sed ii incogniti sint secundum proprium valorem: innotescant tamen sub terminis cossicis: verbi gratiâ subtrahendæ sint 4 radices, ex 5 quadratis, in ea suppositione in qua radix est 2, & quadratum 4, donec innotescant hujusmodi numeri notabo 5 q — 4R, quod propriè loquendo, non est subtractionem facere; sed signare faciendam cum innotescent numeri.

Nonnunquam occurrunt notæ numerorum irrationalium, si tamen verè numeri sunt: horum naturam inferiùs explicabo, sufficiat modò eorum characteres, & notas cognoscere ℞q. ℞c, id est radix quadrata, radix cubica.

Primò dicitur ℞q 20, seu radix quadrata numeri 20, qui cum quadratus non sit, radice quadratâ præcisâ numeris, explicabili caret. Quia tamen possumus exhibere numerum cujus quadratum, ita parum à numero 20 deficiat ut defectus ille contemni possit, ideo consideratio harum radicum non censetur inutilis. ℞c. 40. radix cubica numeri 40.

Secundò hæ notæ ℞. inveniuntur ante numeros cossicos. ℞q. 4q, seu radix quadrata 4 quadratorum, sensus est quod ubi valor unius quadrati innotuerit, atque adeo cognoscetur numerus æquivalens 4 quadratis, extrahenda erit ex eo radix quadrata. Quod si accidat ut numerus æquivalens 4 quadratis fuerit quadratus ℞q. 4q. non erit numerus irrationalis; sed rationalis, ut quoties numerus quadratorum est quadratus, radix est rationalis. Sed sufficiat cognitio notarum.

Tertiò inveniuntur notæ radicum ante plurimos numeros cossicos intra parenthesin clausos ut ℞c. (4c + 8q — 4R.) significat autem radicem cubicam 4 cuborum, plus octo quadratorum minùs 4 radicibus. Hoc est si assumantur 4 cubi quibus addantur octo quadrata & subtrahantur ex summa 4 Radices, ex reliquo extrahenda erit radix cubica. Ut in serie in qua radix est 3, 4 cubi 108 efficiunt, adde 8 quadratos seu octies 9, id est 72, efficient 180, subtrahe quater radicem 3, seu 12 relinquentur 168. Superior nota indicat extrahendam esse radicem cubicam ex numero 168, ubi innotescet.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Numeratio speciosa.

Algebra speciosa peculiarem habet numerationem, solet enim litteras, seu characteres Alphabeti adhibere, ad significandam quamcumque quantitatem.

Incognitas quidem quantitates, quæ in quæstionem vocantur vocalibus A, E, I, O, V, Y, cognitas vero seu datas, consonantibus B, C, D, F, G, aliqui significant; alii pro quantitatibus cognitis usurpant primas litteras alphabeti, ut a, b, c, d, &c. Ultimas verò pro incognitis, ut x, y, z, u, &c.

Secundò his litteris, tam vocalibus quam consonantibus characteres numerales præponimus ut 4 A, seu quatuor A. Significat quantitatem, litterâ A significatam quater sumendam esse.

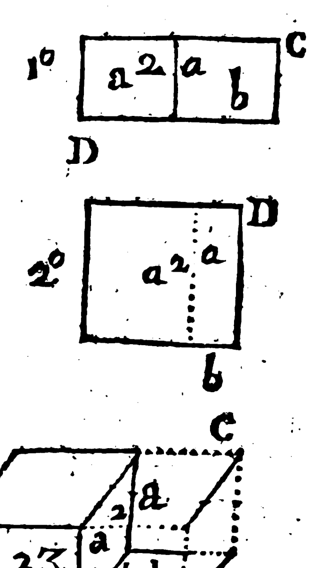
Si verò characteres numerales postponantur characteribus Alphabeti, & nonnihil altiùs significatur potestas illa, cujus exponens per cyphram indicatur, ut a^4 indicat quadrato-quadratum; pariter e^3, significat e cubum, idem alii explicant repetitione ejusdem litteræ, seu vocalis seu consonantis; ut pro e quadrato, ita notabunt ee, pro cubo eee, & ita de reliquis: cum enim duæ litteræ simul ponuntur, indicatur multiplicatio, unius per aliam, ut hic ee significat quadratum, quod fit multiplicatione radicis e, per seipsam.

Non tantùm eadem littera repetitur, sed etiam diversæ simul ponuntur quod est signum multiplicationis unius per aliam ut a b, significat a, in b, hoc est a, multiplicandam esse per b.

Pariter ba^2 vel baa, indicat b, multiplicandum per a quadratum, est ergo maxima differentia inter ba, & b + a Primum enim significat multiplicationem, secundùm additionem seu summam ex b & a sicut b — a significat subtractionem, seu id quod relinquitur dum a subtrahitur ex b, hoc est differentia inter b, & a.

Quartò notandum est numeros cossicos vocari potestates; quoties autem plures numeri cossici simul conjunguntur, per signa + vel — numerus ille qui altiorem locum in sua serie obtinet, retinet nomen potestatis: alii autem dicuntur gradus parodici: Ut si proponatur hæc æquatio $a^2 + ba, = z$ (hæc autem nota = significat æqualitatem) a^2 vocabitur potestas, cui nempe adjungitur ba, & quia potestas illa est quadratum, dicetur numerus ba esse planus, ut nempe intelligatur esse in eadem specie quantitatis in qua est quadratum. Quilibet enim numerus potest intelligi ut linea, ut superficies, ut solidum, immo plusquam solidum, cum nempe intelligamus numerum solidum multiplicari, per alium sive simplicem quemcumque, generaturque alia species quantitatis, quæ in continua quantitate ampliùs locum non habet, in discreta seu numeris valet.

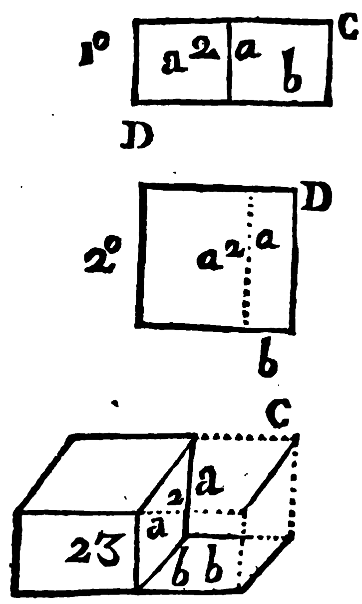
Quare in nostra æquatione a^2, dicitur potestas



a verò gradus parodicus, b coëfficiens, quia simul cum radice a efficit planum ba, z verò quod est ex alia

alia parte æquationis dicitur homogeneum comparationis, ut in hac æquatione 1q. + 3R. = 22 τὸ 22 est homogeneum comparationis, sed de his adhuc inferiùs suis locis.

Poteſtas cui adjungitur aliquid, dicitur affecta adjunctione; ut a2 + b a, = z erit quadratum



affectum adjunctione plani b a comprehenſi ſub radice a & coëfficiente lõgitudine b. Sit enim quadratum a2, cujus latus ſeu radix a; producatur aliud latus, ita ut illi adjungatur b longitudo, perficiaturque parallelogrammum: tota figura CD, ita exprimetur a2 + b a. Nempe quadratum à2, + planum ſeu rectangulum b a, comprehenſum ſub radice a, & ſub linea b; quæ propterea dicetur coëfficiens longitudo, quia ſimul cum radice a, efficit planum b a, quare poteſtas a2, ſeu quadratum a2, efficitur adjunctione plani ſub radice, coëfficiente.

Secundò ſit quadratum a2, ſeu CD, ex quo ſubtrahatur planum rectangulum b a, comprehenſum ſub radice a, & ſub linea b, dicetur quadratum a, affectum mulcta plani, ſub latere a, & ſub coëfficiente longitudine b.

Pariter cubus affici poteſt, & ſub radice, & coëfficiente plano, & ſub quadrato & coëfficiente longitudine. Verbi gratia proponatur hæc æquatio a3 + ba2 = z. Nempe 1c. + 3q = 54 ſupponendo a = 3 & b = 3 dicetur cubus affectus ſolido ſub quadrato a 2. & coëfficiente longitudine b; quod totum metaphoricum eſt, deſumpta ſimitudine ex quantitate continua. Ut enim augeatur cubus fiatque totale ſolidum, ſi addatur in directum linea B, perficiaturque totum ſolidum, dicetur illud ſolidum comprehenſum ſub quadrato a2, & b. Si enim quadratum a2, ducatur in b, perficietur ſolidum: quod appoſitè cubo adjungi poterit. Quare ſolidum adjunctum dicetur contineri ſub quadrato a2, & linea b.

Poteſt idem cubus affici adjunctione ſolidi, ſub radice, ſed tunc coëfficiens per modum plani concipietur; ut ſi ponatur a3 + a b = z. ſeu 1c. + 4R. = 39, dicetur cubus affectus adjunctione ſolidi ſub latere a, & coëfficiente plano b. Sed hæc inferiùs.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Additio numerorum coſſicorum.

Algebra ut plurimum verſatur circa numeros incognitos, quos variè inflectere debet, ut in eorum cognitionem veniat. Quare de illorum algorithmo nobis agendum incumbit; eſt autem Algorithmus labor circa numeros, quo nomine, regulæ omnes, quæ verſantur circa numeros denominatos intelliguntur.

Prima occurrit additio circa quam commune profertur axioma.

Si magnitudo magnitudini additur, hæc illi homogenea eſt.

Si magnitudo magnitudini ſubtrahitur, hæc illi homogenea eſt.

Horum principiorum ſenſus in quantitate continua nullam difficultatem patitur, ſignificatur enim, ſuperficiem addi non poſſe lineæ, nec lineam aut ſuperficiem ſoliditati. In numeris verò qui metaphoricam tantum habent, cum quantitate continua ſimilitudinem, videtur res aliter ſe habere, cubum enim adjungimus quadrato, & lineæ; quilibet enim numerus cuilibet numero per additionem conjungi poteſt, ita ut ex duobus aliqua ſumma reſultet: denominationes enim cubi, radicis, quadrati ſunt numeris extrinſecæ, atque adeò quilibet numerus reſpectu aliorum eſt radix, qui reſpectu unius cubus, aut quadratum erat.

Poſſunt tamen explicari hæc axiomata in numeris coſſicis quòd in additione coſſicâ propriè dicta debeant numeri intelligi in eodem gradu progreſſionis geometricæ, ita ut quadratum quadrato, radix radici, cubus cubo tantùm addatur. Dixi additione propriè dicta, quæ non opus habeat ſigno +.

Additio igitur numerorum coſſicorum ferè ſimilis eſt additioni vulgari numerorum denominatorum, qui non incongruè adduntur, ſed tantùm qui ſunt ejuſdem ſpeciei in unam ſummam coaleſcunt: ita nummos nummis, francos francis, aſſes aſſibus, denarios denariis addimus; ita in Aſtronomia ſigna ſignis, gradus gradibus, minuta minutis, ſecunda ſecundis aptamus. Ita etiam in additione Algebrica, radicibus radices, quadratis quadrata, cubis cubos addimus, ut potes in exemplo videre. Atque ſi

8	qq.	+	7	c.	+	4	q.	+	5	R.
4	qq.	+	3	c.	+	2	q.	+	3	R.
12	qq.	+	10	c.	+	6	q.	+	8	R.

nihil aliud accidat minor erit difficultas quam in additione vulgari numerorum denominatorum.

Idem in ſpecioſa obſervabis ut vides in exemplo in quo 8 a4 debet addi 4 a4 ut fiat ſumma 12 a4 & ita de reliquis.

8	a4.	+	7	a3.	+	4	a2.	+	5	a.
4	a4.	+	3	a3.	+	2	a2.	+	3	a.
12	a4.	+	10	a3.	+	6	a2.	+	8	a

Obſerva quod a4. a3. a2. &c. non ſunt numeri, ſed denominationes, quas additio non mutat: Sic a4 additum a4 non facit a8. ſed 2a4 ſeu 2 quadrato-quadrata numeri a.

Oritur major difficultas ex variâ combinatione ſignorum + & — quæ ut benè explicetur, exemplum commune, & familiare adducam. Solent mercatores in ſuis libris rationum, duas columnas inſtituere, quarum una eſt debitorum creditorum altera, & quo auctior eſt creditorum numerus, eo ditior evadit mercator, & quo majora

jora sunt debita, eò fit egentior, credita notantur signo +, debita signo — certum autem est quoties debita præcisè adæquant credita, mercatorem nihil omnino habere. Si credita majora sint debitis, iis subtractis ex creditis reliquum ad mercatorem pertinebit.

	+ 100.
Adde	— 60.
	+ 40.

Supponamus mercatoris credita esse 100. nummorum, quibus addenda sint debita 60. fiet additio debitorum, si subtrahantur debita, nam scriptis 40. additio peragetur.

Possunt autem varii casus occurrere, quos hic referendo censeo; notavi autem suprà omnem numerum, cui nullum signum præfigitur, subintelligi affectum signo +.

Numeri addendi primò scribantur ita ut cubi cubis, quadrata quadratis respondeant.

4 c.	+ 8 q.	+ 7 R.	+ 18
5 c.	+ 0 q.	+ 7 R.	+ 0
3 c.	+ 1 q.	+ 0 R.	+ 1
12 c.	+ 9 q.	+ 14 R.	+ 19

4 R	— 10
5 R	— 20
9 R	— 30

Eodem modo addes numeros quibus præponitur signum — si nempè in omnibus sibi respondentibus idem signum reperiatur, manet enim idem signum —.

Quare hæ Regulæ communiter traduntur.

In Additione + additum ad + facit +

Pariter — additum ad — facit —

Sed quando + additur ad — fiat subtractio majoris à minore, remaneatque signum majoris.

G	3 q.	+ 6 R
H	2 q.	— 2 R
K	5 q.	+ 4 R

L	8 c.	— 8 q.	+ 3 R
M	3 c.	+ 3 q.	— 4 R
N	11 c.	— 5 q.	— 1 R

Proponatur numerus H addendus numero G, in primo membro quadratorum nulla occurrit difficultas, cum uterque numerus habeat signum +, ut verò addantur + 6 R. & — 2 R subtrahe 2. minorem ex majori 6, remanebit 4, cum signo majoris; si enim mercator habeat 6, & habeat 2, ut fiat summa ad indicandum statum mercatoris; subtrahe debitum 2. ex credito 6 restabit creditum 4. Pariter addendi sint numeri L & M, non est difficultas in primo membro, sed tantum in secundo: cum mercator habeat tantum 3R. & debeat 4, non habebit unde solvat, quare datis tribus, adhuc debebit 1. Idem dico de ultimo, membro ultimi exempli; nam si habeat 12, & debeat, 15. restabunt 3 quæ debet; ideoque illis præponetur signum —.

O	3 R.	+ 12
P	2 R.	— 15
S	5 R.	— 3.

Quare in iis casibus additio signorum — est potius subtractio quam additio; cum igitur numerus positivus alteri positivo additur, fit numerus positivus; cum defectivus defectivo additur, exurgit numerus defectivus; si defectivus positivo addatur se invicem destruunt, omnino quidem si sint æquales, ut si + 4R, addas — 4R. nihil omnino fiet se seinvicem destruent; vel ex parte si sint inæquales.

Additio numerorum cossicorum in algebra speciosa eodem modo perficitur quo in communi, nam pariter quantitates ejusdem appellationis colliguntur per additionē numerorum, qui quantitatibus præponuntur: ut in opposito exemplo satis

1. a3.	+ 3. a2.	+ a.
2. a3.	+ 6. a2.	+ a.
3. a3.	+ 9. a2.	+ 2a.

observare licèt, ut si addas a ad a fient 2 a. si 3. a2 addas ad 6, a2. fient 9. a2. Si 1. a3. ad 2. a3. addas fient 3. a3. Monui jam a3 esse denominationem & significare a cubum, si quantitates addendæ fuerint diversæ appellationis additio fiet ope signorum + — ut si addi debet a positivum b positivo scribes a + b: si b est defectivum, scribes a — b.

Littera Alphabeti cui nullus præfigitur character numeralis, censetur habere characterem 1 ut a, id est 1 a.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Subtractio numerorum cossicorum.

Subtractio minoris quantitatis à majore est sumptio excessus majoris supra minorem.

5 R	— 8.
3 R	— 5.
2 R	— 3.

Subtractio numeri cossici minoris à majore ejusdem denominationis & signi, eodem modo perficitur, quo communis subtractio. Ut Si ex + 5R subtrahere debeas + 3R. restabunt + 2R. si ex — 8 subtrahas — 5, restabit — 3.

+ 5 R	— 3.
+ 8 R	— 7.
— 3 R	+ 4
4 —	3 R.

Si numerus major ex minori ejusdem denominationis & signi subtrahendus sit, fiat contraria subtractio, cum signo item contrario. Ut si subtrahere debeas + 8 R ex + 5 R, subtrahe 5 ex 8. fientque — 3 R. si ex — 3 subtrahere debeas — 7, restabit + 4; fietque 4 — 3 R. Si enim mercator habeat 5 nummos ex quibus propter aliquam rationem subtrahere debeat 8. verè mutuò sumere debebit 3; atquè adeò notandum erit — 3. Pariter mercator debebat tria,& habet unde obliteret 7 debita, verè non tantùm obliterat totum suum debitum, verùm etiam habet residua 4. quæ non possunt poni in numero debitorum, ergo in numero creditorum.

Tertiò si numerus affectus signo + subtrahatur à numero affecto signo — fiat utriusque additio, & remaneat —. Ut si mercator debeat 100, atque adeo habeat — 100, & ex eo numero debet subtrahere + 50,adhuc habebit plura debita, atque adeo habebit—150.

Quartò si debeat fieri subtractio numeri defectivi ex positivo, verbi gratia debeat subtrahi — 50 ex + 100. cum subtrahi non possit negatio nisi per positionem alicujus positivi, restabit + 150.

Quare hæ regulæ subtractionis dari possunt.

Eadem signa idem signum reponunt si communis fiat subtractio, seu si minor numerus ex majori subtrahatur.

Eadem signa diversum reponunt, si inversa fiat subtractio. Diversa signa addi petunt utrumque numerum,remanetque signum superioris.

In Algebra speciosa eodem modo fit subtractio, ac in Algebra numerosa; subtrahuntúrque tantùm quantitates ejusdem appellationis. Nam quæ sunt diversæ adsciscunt signa contraria dum subtrahuntur: ut si ex A subtrahi debeat + b—c. fiet A—b + c.

Ut meliùs harum regularum veritas elucescat, altiusque memoriæ hæreant; possent in aliquibus exemplis substitui numeri simplices pro litteris, aut numeris cossicis: ut si ex A+B debeam subtrahere C + D;pro A pone quemcumque numerum, ut 6 pro B alium ut 4 fitque A + B 10. fit C 3. & D 2. si subtrahas C—D,subtrahes tantum unum, quare debebunt restare 9. Sed si mutatis signis scribas A + B — C + D seu 10 — 3 + 2. fient 9. ergo hæc operatio exhibet numerum qui relinqui debet post subtractionem.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Examina additionis & subtractionis.

Primum examen additionis, & subtractionis cossicæ, erit commune, additio nempè subtractionem probabit, & vicissim; in quo nulla est difficultas.

Secundum examen erit, si Additio, aut subtractio probetur in aliqua progressione Geometrica, per reductionem valoris singularum potestatum ad numeros simplices.

Sint v. g. addendi numeri A & B in unam summam C. Instituatur examen in serie Geometrica in qua radix est 2. in ea serie cubus est 8. atque adeo 4 cubi efficiunt 32, & duo quadrata efficient 8, summa est 40. auferantur duæ radices, seu 4, restant 36. Addantur 8. fient 44. Pariter in numero B sunt duo cubi, seu 16 minùs uno quadrato, sen 4 restant 12. adde 4, radices seu 8. fient 20. adde 6. erunt 26. adde 44. & 26. fiunt 70. debent ergo in numero C, inveniri 70.6. cubi sunt 48, cum uno quadrato seu 4. efficiunt 52 cum duabus radicibus seu 4. & 14. sunt 70; ergo proba fuit additio prædictorum numerorum. Idem in subtractione præstandum.

A	4 c.	+ 2 q.	— 2 R.	+ 8.
B	2 c.	— 1 q.	+ 4 R.	+ 6.
C	6 c.	+ 1 q.	+ 2 R.	+ 14.

Regulæ Additionis.

Eadem signa idem signum reponunt.

Diversa signa jubent numerum unius signi subtrahi ex numero alterius signi, nempè minorem ex majori, & relinqui signum majoris numeri.

Regulæ subtractionis.

Eadem signa idem signum reponunt, nisi fiat præpostera subtractio, seu major numerus ex minori subtrahatur.

Diversa signa jubent addi utrumque numerum; remanetque signum superioris, à quo scilicèt fit subtractio.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Multiplicatio numerorum cossicorum.

Multiplicatio numerorum cossicorum, & divisio peculiaribus nititur principiis, quæ sunt ista.

Si magnitudo in magnitudinem ducitur, quæ producitur utrique erit heterogenea.

Si magnitudo magnitudini applicatur, seu per magnitudinem dividitur, divisa utrique erit heterogenea.

Sensus horum axiomatum est quod quoties numerus cossicus per numerum cossicum multiplicatur, productus semper fit altioris gradus; nam si radix in radicem ducitur fit quadratum, si radix in quadratum fit cubus, & ita consequenter; quæ omnia hâc propositione explicanda suscipimus.

Prima regula esto. Numerus absolutus, numerum absolutum multiplicans, producit numerum absolutum; ideoque quoties occurrit absolutus in absolutum ducendus, fiat communis seu vulgatis multiplicatio, & producto nullus character cossicus apponatur.

Secunda, si numerus cossicus in numerum absolutum ducatur, fiat multiplicatio characterum numeralium, & producto idem character cossicus præponatur, ut si numerus A constans pluribus numeris cossicis, multiplicetur per numerum absolutum B. multiplica characteres numerales singulorum membrorum per B, ut quater quatuor efficiunt 16 scribo 16, cubos.

A 4 c.	+ 8 q.	+ 2.	
B		4	
C 16 c.	+ 86 q.	+ 8.	

Ratio est quia si quater repeteretur numerus A, fieretque una summa, ea esset æqualis numero C, sed multiplicatio ejusdem numeri A per B idem præstare debet, ac si quater repeteretur numerus cossicus A, quot nempè sunt unitates in absoluto B; ergo proba est multiplicatio.

Eadem Regula probari potest per analysin: fiat suppositio, alicujus progressionis geometricæ, verbi gratia illius in qua radix est 2. & cubus est

8.4 cubi

8. 4 cubi sunt 32, si multiplices 4. cubos per 4. efficis 16. cubos; sed 16 cubi sunt octies 16. seu 128 sed pariter quater 32. idem præstat, ergo proba est multiplicatio. Ratio petitur (*ex* 2. 2.) in qua habetur rectangulum sub insecta, & totâ aliquâ lineâ, æquale esse omnibus rectangulis comprehensis sub insecta, & singulis segmentis sectæ.

Tertia Regula cum numerus cossicè denominatus, per alium numerum cossicè item denominatum multiplicatur; fiat multiplicatio communis characterum numeralium, & producto character cossicus addatur, indicatus per summam exponentium utriusque numeri multiplicati. Sit numerus cossicè denominatus 3 q multiplicandus per 4. c. primò multiplico 3. per 4. & fiunt 12, quibus apponendus est character cossicus S. indicatus per 5 qui est summa 2. seu exponentis 3q, & 3 seu exponentis C.

Demonstr. petitur ex iis quæ demonstravimus in generatione logarithmorum, nempè quoties numeri arithmeticè proportionales aptantur geometricè proportionalibus; idem præstari additione arithmeticorum quod perficitur multiplicatione geometricorum. Sed per additionem exponentium quadrati, & cubi, fit exponens surdesolidi; ergo si unum quadratum multiplices per unum cubum, generabitur unus surdesolidus; si unum quadratum duos cubos multiplicet, producentur duo surdesolidi; si duo quadrata multiplicent duos cubos fient 4. surdesolidi: ergo si 3q. multiplicent 4 c. fient 12. surdesolidi.

Radix ergo multiplicans seipsam facit quadratum.

Radix multiplicans quadratum producit cubum.

Et universaliter radix multiplicans aliquam potestatem generat sequentem.

Quadratum multiplicans radicem facit cubum distantem à radice duobus gradibus.

q. ductum in q. efficit qq. distans à quadrato duobus gradibus.

q. multiplicans cubum generat surdesolidum distantem à cubo duobus gradibus.

q. multiplicans qq, producit q c, distantem duobus gradibus à qq.

Cubus multiplicans R. producit qq. remotum à radice tribus gradibus.

c. ductus in q. surdesolidum efficit tribus gradibus à q. remotum.

c. ductus in c. producit q. c,

Regula ergo Quarta generalis esto; Exponens cujuscumque numeri cossici indicabit quot gradibus remotus sit productus ab alio multiplicante.

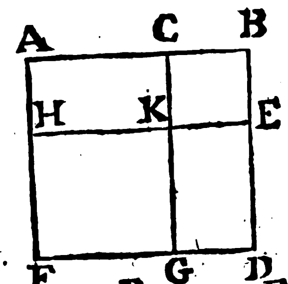
Regula Quinta, Eadem signa reponunt signum +, diversa signa, signum —.

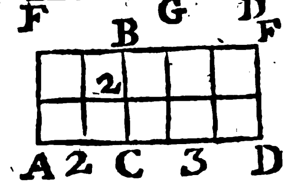
Non apparet ulla difficultas ut numerus affectus signo + multiplicatus per alium affectum signo +, producat affectum signo +; nam in multiplicatione vulgari omnes numeri subintelliguntur habere signum +.

Secundò cum + per — multiplicatur, numerus productus habet hoc signum —: quod penetratis terminis satis intelligetur. Proponantur + 4 R. multiplicandæ per 3 R — 4 si abesset additamentum illud — 4, multiplicando 4 R. per 3 R. fiunt 12 q, sed nolumus ut fiat integra illa multiplicatio per 3 R, sed innuimus subtrahi prius debere, ex 3 R. quatuor unitates; ergo productus erit minor, quam si deesset illud additamentum — 4. ergo 16R, quæ oriuntur ex multiplicatione 4 radicum per 4 debent habere præfixum signum —.

Major apparet difficultas in ultimâ parte regulæ, nempè ut minus multiplicatum per minus, efficiat plus; quod tamen ita demonstro nempè in tota operatione multiplicationis, id quod exurgit ex multiplicatione numeri affecti signo + per numerum affectum signo eodem — addendum esse, ad hoc ut sit ea æqualitas quæ inquiritur.

Jam aliàs sæpè ostendimus per multiplicationem generari rectangulum: Proponantur ergo





numeri A B. — B C. seu 8 — 2. & B D. — B E seu 7 — 3. multiplicandi invicem: primus A B — B C est AC: secundus verò B D — B E erit D E; inquirimus ergo rectangulum sub A C & D E, hoc est rectangulum F K; quod ita inquiremus. Clarum est rectangulum A D, æquale esse rectangulis F K, A E, K D; addatur utrinque rectangulum K B, erit rectangulum A D + rectangulo K B, æquale rectangulis F K, A E, & duobus K D, K B, seu rectangulo G B. Quare si ex rectangulis A D, K B, auferantur rectangula A E, & G B, restabit rectangulum F K, id autem præstamus virtualiter regula nostrâ. Nam primò multiplicamus — 2. per — 3. fitque + B K 6 tum multiplicamus + 8. per — 3. fitque — 24 seu A E. tum multiplicamus + 7. per — 2. fitque — 14. seu BG. denique multiplicamus + 8. per + 7. fitque 56. seu A D. habemus A D — AE & B G. + BK. ergo restat F K.

8 — 2
7 — 3
———————
— 24 + 6
56 — 14
———————
56 — 38 + 6

Proponenda sunt aliqua exempla in quibus multiplicationis artificium meliùs videatur. Proponatur numerus A. multiplicandus per numerum B.

A			8 c.	— 4 q.	+ 8 R.	— 8		
B			3 c.	+ 3 q.	+ 5 R.	— 6		
C			— 48 c.	+ 24 q.	— 48 R.	+ 48		
D		+ 40 qq.	— 20 c.	+ 40 q.	— 40 R.			
E	+ 24 ſ.	— 12 qq.	+ 24 c.	— 24 q.				
F	24 qc.	— 12 ſ.	+ 24 qq.	— 24 c.				
G	24 qc.	+ 12 ſ.	+ 52 qq.	— 68 c.	+ 40 q.	— 88 R.	+ 48	

Primò multiplicentur ſingula membra numeri A per —6 ultimum ſcilicèt membrum numeri B, obſervatis iis quæ de diſtinctione ſignorum + & — diximus, fietque numerus C.

Secundò multiplicentur ſingulæ partes numeri A per + 5 R, penultimum membrum numeri B, fietque numerus D.

Tertiò multiplicetur A, per + 3 q. obſervatis iis regulis quas dedimus fiet numerus E.

Quartò multiplicetur idem A per 3 c. primum membrum numeri B, & habebis F.

Quintò adde ſimul numeros C, D, E, F. fietque numerus G, in quo vides obſervari in multis methodum communem multiplicationis: debet autem Tyro in his exemplis ſe exercere.

Hæ Regulæ multiplicationis obſervari debent etiam in Algebra ſpecioſa. Nempè primò ſi numerus quilibet abſolutus multiplicet quamcumque poteſtatem, multiplicatur tantum character numeralis præfixus tali poteſtati: ſi 4 a3. multiplicari debeant per 4. fient 16 a3.

Pariter a in a producit a2.

a in a2 generat a3.

a in a3 generat a4 & ita conſequenter.

a2 in a2 producit a4.

a2 in a3 producit a5 additis ſcilicet exponentibus.

a2 in a4 producit a6.

a3 in a3 producit a6. & ita de aliis omnibus.

Quando quantitates diverſæ denominationis ſe invicem multiplicant, fit alia quantitas utrique heterogenea: ut ſi a in b ducatur, intelliganturque a & b, eſſe longitudines fit planum a b. Si longitudo in planum ducatur, fit ſolidum; ut ſi a in b planum ducatur, fit ſolidum a b, latitudo in ſolidum producit planoplanum & ita conſequenter. In quo notandum eſt quemlibet numerum poſſe concipi per modum latitudinis, per modum plani, aut ſolidi, ideòque his denominationibus non eſt multum inhærendum, quæ tamen poſſunt confuſionem parere.

Quantitatibus coſſicis ut plurimum præponuntur characteres numerales, ut 3 a, 4 a2; hi autem characteres multiplicari debent: ut ſi 3 a ducantur in 4 a2. fient 12 a3; ex 2 a in 3 bc fiunt 6 abc; ex 2 a b in 6 cd, fiunt 12 a b c d.

Notandum item eſt, dum character coſſicus multiplicat alium coſſicum compoſitum, in quo jam prædictus character reperitur, ſufficere ut mutetur exponens: ut ſi a b ducatur in a fiet a2b. Quod ut melius intelligatur, ſit a idem quod 3. & b idem quod 4. eritque ab 12. dum multiplico 12 per 3. idem numerus producitur, nempe 36, ac ſi primò 3. per 3. multiplicarem, formaremque quadratum 9, quod poſtea per b ſeu per 4 multiplicarem. Oſtendimus enim in arithmetica quoties tres numeri ſe invicem multiplicant, eundem ſemper numerum produci, quomodocumque hæ multiplicationes diſponantur.

Pariter ſi a b multiplicetur per a b, fiet a2, b2, ut ſi 12. per 12. multiplicentur, fiatque 144. dico ſi multiplicetur 9. quadratum a, per b quadratum, ſeu 16. eundem numerum produci, quia ſcilicet poſitis duabus radicibus 3 & 4. & earum quadratis 9. & 16, ſi radices ſe multiplicent, fiantque 12. & quadrata ſe multiplicent fiantque 144. 12. eſt radix numeri 144. Ratio eſt quia cum 3. multiplicet & ſeipſum & 4, faciatque 9. & 12, erit 9. ad 12. ut 3. ad 4. pariter quia 4. multiplicat & 3. & ſeipſum, efficitque 12. & 16. erit ut 12 ad 16, ita 3 ad 4. ergo ita eſt 9 ad 12. ut 12 ad 16, ergo (*per* 16.6.) quadratum mediæ æquabitur rectangulo comprehenſo ſub extremis, quod erat demonſtrandum. Ergo ſi a b multiplicet a b fiet a^2 b^2.

In genere ergo hæc regula obſervari debet, quoties idem eſt character in multiplicante, & multiplicato, ſufficit mutare exponentem, ut vides in præcedenti exemplo.

Denique notandum eſt in multiplicatione eſſe differentiam inter hæc duo multiplicare a + b, per a + b, & multiplicare a b, per a b. Nam poſito quod a ſit 3. & b ſit 4. a + b ſeptem efficiunt, ſed a b, ſignificant a in b, ſeu 12. Primum

		a	+ b
		a	+ b
	+ a b.	+ b2	
a2	+ a b.		
a2	+ 2 a b.	+ b2	

mum ita peragitur: primò, multiplicetur b in b, fitque + b2. tum multiplicetur b in a, fitque + a b. Tertiò multiplicari debet a + b per a, fitque + a b, & a2 ita ut omnibus collectis fiant a2 + 2 a b. + b2.

Secunda verò multiplicatio peragitur mutando tantum exponentes quantitatum a & b, ita ut fiant a^2 b^2, intelligaturque a quadratum in b quadratum.

PROPOSITIO X.

Problema.

Diviſio numerorum coſſicorum.

Diviſio, eſt acceptio quantitatis ad quam diviſa eam habeat rationem quam habet diviſor ad unitatem. Hæc quantitas vocatur quotiens. Dicitur diviſio eſſe applicatio ſuperficiei ad lineam; numerus enim dividendus concipitur per modum ſuperficiei rectangulæ, quæ applicatur ad unum latus, ut innoteſcat aliud latus, atque adeò quantitas applicanda, illi cui applicatur eſt heterogenea. In numeris vulgaribus hæc regula locum non habet,

habet; in cossicis tamen vim suam obtinet.

Eædem ferè regulæ & observationes usurpandæ sunt in divisione, quæ multiplicationi perficiendæ accommodatæ sunt. Quare

Quoties numerus cossicus per numerum absolutum dividitur, quotiens erit numerus cossicus ejusdem denominationis; cum enim multiplicatio numeri cossici per absolutum, eundem characterem cossicum retineat, divisio quæ numerum multiplicatum in priorem statum restituit, eundem etiam characterem servabit.

Quare si dividas 20 q per numerum absolutum 4, fiet quotiens 5 q.

Quoties numerus cossicus major per minorem dividitur, fiat subtractio exponentis ab exponente, & apponatur character cossicus respondens reliquo. Proponatur hic numerus 12 C., dividendus per 4q. Dividatur numerus absolutus 12 per absolutum 4, erit quotiens 3; tum quia exponens cubi est 3, & quadrati 2, facta subtractione 2 a 3 restat 1, dices igitur quotientem esse 3 R, quod ex regulis in multiplicatione traditis facilè demonstratur.

	R	q	c	qq	S	qc	SS
R	N	R	q	c	qq	S	qc
q	R	N	R	q	c	qq	S
c	q	R	N	R	q	c	qq
qq	c	q	R	N	R	q	c
S	qq	c	q	R	N	R	q
qc	S	qq	c	q	R	N	R
SS	qc	S	qq	c	q	R	N

Potest tamen addi hæc tabula totam doctrinam divisionum continens: usus illius talis erit. Quære in summitate numerum dividendum, & in primâ columnâ divisorem, communis concursus exhibebit quantitatem. Ut si dividendum proponas qq, per q, illud accipe in summitate primæ lineæ & in prima columna divisorem seu q, communis utriusque concursus quadratum exhibebit. Si cubum per quadratum divides, quotiens erit R.

Signorum regulæ priùs traditæ observandæ sunt, + divisum per + facit +; — per — dat in quotiente +.

Plus divisum per — aut — per +, efficit —

Facilis est divisio cum divisor unum habet tantum membrum; alioqui difficilis est, & sequentes habet leges.

Si divisor fuerit compositus, id est habeat plura membra, & membra dividentis non habeant eamdem rationem ad membra divisi, non fiet divisio propriè dicta, sed resultabit fractio. Ut si dividere debeas hunc numerum 7q + 15 R, + 10 per 2 R, + 2. fiet fractio $\frac{7q + 15 R + 10}{2R + 2}$ indicans ubi innotuerit valor tàm radicis quàm quadrati instituendam esse talem divisionem.

Si numeri dividendi membra eamdem habuerint rationem, ad membra divisoris compositi, poterit institui divisio, ut si dividere debeas 16q. + 6R. per 8R. + 3 quotiens erit 2R.

Denique si numerus denominationis minoris dividatur per numerum denominationis majoris, exurget fractio: ut hic numerus 10R. dividendus sit per hunc, 5c, nascetur hæc fractio $\frac{10 R.}{5. C.}$

In multiplicatione & divisione cossicorum, sæpe accidit ut numeri in specie differentes, eundem tamen producant, eò quòd in specie tantùm differant, re vera tamen sint iidem numeri: sic 3, est idem ac 5 — 2; quare si per seipsos multiplicentur, habebunt quadrata æqualia.

Notandum item est in algebra occurrere numeros minores quam nihil, qui licet fictitii sint, possunt tamen conferre ad inveniendos veros numeros.

Quod pertinet ad divisionem secundum methodum in speciosa usurpatam, observandæ sunt regulæ divisionis cossicorum. Quare

Primò quoties potestas superior, per inferiorem ejusdem appellationis dividitur, subtrahitur exponens dividentis ab exponere divisæ. Sic dividendo a3 per a2, restat a1 seu a, si ante potestatem adscripti sint characteres numerales, tam in dividendo, quam in divisore, debent illi dividi ut si 12 a4 dividantur per 3 a3; erit quotiens 4a.

Secundò quando potestas, aut etiam quantitas, per aliam alteriùs nominis, seu ex alia radice ortam dividitur, divisio peragitur subscriptione divisoris: ut si b4 dividi debeat per a2, fiet quotiens $\frac{b4}{a2}$

Tertiò quando quantitas expressa per litteras dividitur per quantitatem expressam per aliquas ex illis, quotiens est quantitas expressa per reliquas. Ut si a b dividatur per a, restabit b. Cum enim a b nihil significet aliud, nisi productum ex a in b, clarum est quod si tale productum dividatur per unum latus a, quotiens erit aliud latus b.

Major erit difficultas in divisione quantitatis compositæ, per aliam quantitatem compositam. Possumus tamen in multis imitari methodum divisionis arithmeticæ communis. Proponatur primò quantitas composita dividenda per quantitatem simplicem; ut si proponatur quantitas

$$\begin{array}{lll} A\,c & + B\,c & \\ & & (A + B \\ c & c & \end{array}$$

A c + B c, dividenda per c; divido primum membrum A c per c, & fit quoties A, tum multiplico c per inventum quotientem A, & fit Ac, quo subtracto ex primo membro AC, nihil restat, promoveo divisorem, & divido Bc, per c, & fit quotiens B, quem scribo, tum multiplicando divisorem c, per B, fit Bc, quo subtracto ex B c nihil restat; quare A + B erit quotiens. Quando autem dubitamus, an ritè fuerit peracta divisio, possumus per multiplicationem id probare.

Proponatur secundò Ac + AD, + BC, + BD

$$\begin{array}{lll} Ac, + AD, & + Bc, + BD & \\ c, + D, & & (A + B. \end{array}$$

dividenda per c + D. Dividatur primum membrum A c, per c, quotiens erit A, per quem multiplica totum c + D, fietque A c + AD, quibus subductis ex Ac + AD nihil relinquitur. Intelligatur divisor c + D promotus, divide Bc, per c, quotiens erit B, per quem si multiplices totum divisorem c + D, fiet Bc, + BD, quibus ex dividendo subductis nihil relinquitur, ergo quotiens erit A + B.

Quando ita fieri non possunt divisiones, ut nihil relinquatur, divisor subscribatur dividendo, & perfecta erit divisio. Sit dividenda quantitas B D per A, fiet quotiens $\frac{BD}{A}$, pariter si proponeretur hæc quantitas composita BD, + DG, dividenda per A, ita scribendum esset $\frac{BD+DG}{A}$ hæc methodus est facilior: ut verum tamen fatear, non tam est divisio, quam nota divisionis faciendæ, ubi quantitates secundum propriam naturam innotescent.

PROPOSITIO XI.
Problema.

De Fractionum cossicarum numeratione.

Numeri cossici, suas æquè ac vulgares numeri fractiones habent, circa quas eædem valent regulæ & axiomata.

Prima regula sit hæc. Minutiæ in quibus eadem est ratio numeratoris ad denominatorem æquales sunt, ita $\frac{1}{2}\ \frac{3}{6}\ \frac{2}{4}$ idem sonant: cum enim denominator fractionis pro unitate divisa in partes supponatur, & numerator indicet quot hujusmodi partes fractio contineat, eadem erit ratio fractæ magnitudinis ad unitatem, quæ numeratoris ad denominatorem; ergo (*per* 7.5.) magnitudines fractæ erunt æquales. Ex hoc sequitur quod si fractionis denominator, & numerator per eumdem numerum aut multiplicentur, aut dividantur fiet fractio æqualis.

Secunda sit numeratio fractionum, quæ melius intelligi non potest quam in exemplis variis. Proponatur hæc fractio $\frac{12}{15}$R. hæc fractionem significat, in qua 12. esset numerator & 15 R. esset denominator, ita ut si versemur in progressione geometrica in qua Radix est 2. atque adeo 15 R. æquantur numero 30. hæc fractio $\frac{12}{15}$R. sit huic æqualis $\frac{12}{30}$. Pariter hæc fractio $\frac{12\ qc. + 10\ qq.}{7\ q.}$ significat eam fractionem in qua numerator esset æqualis 12 qc. + 10 qq. & denominator æquaret 7. quadrata. ut in progressione geometrica dupla 12qq. efficiunt 768. & 10qq. faciunt 160. erit ergo numerator fractionis 928, cujus denominator erit 28. seu 7 quadrata radicis 2: & fractio consequenter major erit unitate, ut vides $\frac{928}{28}$.

Harum fractionum algorithmus 6. regulis continetur, nempè abbreviatione, reductione ad eundem denominatorem, additione, subtractione, multiplicatione, divisione.

In Algebra speciosa frequentiores occurrunt fractiones unitate majores, quam in algebra numerosa, aut in arithmetica communi, quia nempè sæpè divisio perficitur per simplicem subscriptionem divisoris: ut $\frac{AB}{c}$ significat rectangulum contentum ex A in B, & divisum per c. ex quo oritur fractio plerumque major unitate: in qua scilicèt denominator minor est numeratore.

Certum est etiam in fractionibus Algebricis, eam fractionem æqualem esse unitati, in qua denominator, & numerator æquales sunt.

Certum est item, quemlibet numerum transformari posse in fractionem, si illi subscribatur unitas qualis est ista. $\frac{AB}{1}$.

Tertiò si accidat quantitatem scribendam esse per modum fractionis, cujus denominator assignetur, per denominatorem multiplicetur, & sic multiplicata fiat numerator fractionis, ut si quantitas A debeat notari per modum fractionis cujus denominator sit B multiplicetur A per B, fiet AB, numerator fractionis $\frac{AB}{BR}$ quæ est æqualis ipsi A, aut $\frac{A}{1}$. Reliquæ praxes communes sunt aliis fractionibus.

PROPOSITIO XII.
Problema.

Abbreviatio fractionum cossicarum.

Abbreviatio fractionem cossicarum, seu reductio ad minores numeros, duplex esse potest; nempè reductio ad minores numeros iisdem præfixos denominationibus cossicis; secunda reductio erit ad characteres cossicos minus altos, seu minus distantes à radice. De utraque agendum est in hac propositione.

Abbreviatio minutiæ quoad numeros, est substitutio numerorum eamdem rationem habentium: ut $\frac{16q}{4R}$ reducitur ad hanc $\frac{4q}{1R}$. Methodus autem eadem quæ in arithmetica communi usurpatur, per inventionem scilicèt maximæ communis mensuræ, ut in proposito exemplo, tam 16. quam 4 dividuntur per 4. maximam communem utriusque mensuram.

Quia autem ut plurimum in fractionibus cossicis plures occurrunt quam duo numeri, ideo non tantum duorum numerorum, sed plurium communis mensura invenienda est. Invenitur autem maxima communis mensura duorum numerorum subtrahendo minorem à majori quoties potest; & hoc alternatim, donec occurrat aliquis, qui proximè majorem præcisè metiatur, hic enim erit communis maxima duorum numerorum mensura: quæ si tertium metiatur, erit trium maxima communis mensura, si tertium non metitur. Quæratur hujus communis mensuræ jam inventæ, & tertii numeri maxima communis mensura; atque ita inveniemus trium, quatuor, quinque numerorum maximam communem mensuram, per quam si dividamus propositos numeros, fiet abbreviatio quoad numeros. Proponatur hæc fractio $\frac{8c + 16q}{4R + 10}$ quatuor numerorum 8. 16. 4. 10, maxima communis mensura est 4, per hanc divide prædictos numeros, habebisque aliam fractionem priori æqualem $\frac{2c + 4q}{1R + 5}$ reductam ad minores numeros. Esse autem æqualem clarissimum est, cum ejus termini eamdem rationem habeant, ac termini præcedentis fractionis.

Abbreviatio characterum cossicorum alicujus minutiæ, est reductio utriusque termini, ut dixi, ad minores characteres cossicos, qui eamdem inter se rationem observent; hoc est si inter terminos erant duo gradus progressionis geometricæ ante reductionem, post reductionem totidem inveniantur, sed minus alti. Proponatur hæc minuntia $\frac{5qq + 1q}{1R}$ minimus character est 1R:

hic

hic descendat usque ad numerum absolutum, & quia inter radicem & quadratum nihil mediat, & pariter inter absolutum & radicem nihil mediat, pro 3q reponantur 3R. & quia inter q & qq mediat cubus, & inter radicem & cubum mediat q pro 5qq. Ponantur 5c. eritque fractio nova $\frac{5c + 3R}{1}$

Quare hæc esto regula generalis: minimus character transeat in numerum absolutum, & alij æquè à numero absoluto distent, ac præcedentes distabāt à minimo. Quod ut facilius exequaris subtrahe exponentem minimi characteris, ab exponentibus majorum, restabunt exponentes characterum apponendorum ut in præcedenti exemplo si 1, exponentem radicis subtrahas ex 4, exponente qq, restabit 3, exponens cubi; si ab exponente quadrati seu 2, subtrahas 1, reliquus erit 1 exponens radicis.

Demonstratio clara est. Cum enim idem numerus fractionis terminos multiplicat, aut dividit, æqualis exurgit fractio: sed quod in numeris per multiplicationem, aut divisionem peragitur, id in exponentibus per additionem & subtractionem perficitur, ergo subducto exponente infimi termini, idem perficitur; ac si per infimum omnes dividerentur.

Addo insuper in Algebra speciosa, fractionem ad minores terminos commodissimè reducendam, divisione per quantitatem, quæ in utroque termino exprimatur; ut si proponatur hæc $\frac{a\,2b}{bD}$, fiat divisio utriusque termini per b, restabit alia fractio simplicior $\frac{a2}{D}$ æqualis priori. Pariter si occurreret hæc fractio $\frac{a\,2b + a\,2D}{bD + D2}$ dividatur numerator & denominator per b + d, fiet $\frac{a2}{d}$ fractio priori æqualis. Nam dividendo a 2b per b fit quotiens a2, per quem si multiplices b + d, fit a 2b + a 2d, quibus subductis ex numeratore nihil relinquitur; pariter dividendo bd + d 2 per b + d, primò divido bd per b, & quotiens erit d, per quem multiplico divisorem b + d, & fit bd + d2, quo subducto ex denominatore nihil relinquitur: quare termini fractionis rectè divisi sunt per b + d; ergo quotientes a2 & d eamdem habent rationem.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Reductio minutiarum cossicarum ad eumdem denominatorem.

Hæc reductio necessaria est ut minutiæ addantur, aut ab invicem subtrahantur. Perficitur autem multiplicatione in crucem decussata, eo ferè modo quo solet in minutiis vulgaribus. Hoc est primò denominatores ad invicem multiplicantur, ut communis exurgat denominator, tum numeratores decussatim per denominatores, ut producantur numeratores.

A.	4 R.	X	D.	6c
B.	5q		C.	7q
H.	28 c		G.	30. S
K.	35 qq		F.	35. qq

Proponantur fractiones AB. DC reducendæ ad eamdem denominationem, multiplica denominatores B & C inter se, nempe 7q per 5q, fiet communis denominator 35. qq. Duc A in C fietque 28 c. numerator H: duc B in D seu 6c in 5q, fient 30. S, numerator G.

Demonstratio eadem recurrit quæ in fractionibus vulgaribus; cum enim C multiplicando A & B producat H & K, eadem erit ratio H ad K quæ A ad B: ergo fractiones AB, HK æquales erunt. Pariter cum B multiplicando D & C, efficiat G & F, erit eadem ratio D ad C, quæ G ad F, quare fractiones DC, GF æquales erunt.

Si numerus integer, & fractus ad eandem denominationem revocari debeant, numero integro subscribitur unitas. Ut si hic numerus 4 R + 3R debeat reduci ad eamdem denominationem cum aliqua fractione, illi subscribe unitatem, ut fiat fractio $\frac{4R + 3R}{1}$

Si integro adhæreat fractio, integer priùs ad fractionem revocetur: nempe multiplicatus per denominatorem fractionis, & additus numeratori fractionis: ut cum proponetur 6q + $\frac{4R}{3R}$, si multiplices 6q per 3R, fiunt 18C: scribe ergo $\frac{18c + 4R}{3R}$.

In Algebra speciosa quia multiplicatio fractionum in crucem, ita fractiones compositas reddit, ut expurgatione operosâ indigeant, aliam viam tentabimus. Primò propositis duabus quantitatibus; quæremus minimam quantitatem, quam illæ sine residuo dividant hoc modo. Proponantur duæ quantitates a 2b & bd, hæ scribantur ad modum fractionis in hanc formam $\frac{a\,2b}{bd}$. Reducantur primò ad simpliciorem fractionem, hæc erit $\frac{a2}{d}$. Instituatur multiplicatio in crucem, ut prius;

$$\frac{a\,2b}{bd} \times \frac{a2}{d}$$

idem numerus proveniet sive a2 multiplicet bd, sive d multiplicet a 2b nempe a 2bd, hæc erit minima quantitas quæ per a 2b & bd dividi potest.

Pariter datæ sint duæ quantitates a 2b — a 2d & bd — d2, sitque quærenda minima quantitas per utramque exactè divisibilis, scribantur hæ quantitates ad modum fractionis $\frac{a\,2b - a\,2d}{bd - d2}$ reducatur hæc fractio ad minores terminos fietque $\frac{a2}{d}$ fiat multiplicatio in crucem cum priori,

$$\frac{a2}{d} \times \frac{a\,2b - a\,2d}{bd - d2}$$

fiet utrobique eadem quantitas, nempe a 2bd — a 2 d2. Cum enim eadem sit ratio in utraque fractione numeratoris ad denominatorem, sunt enim æquales, productus sub mediis æquabitur producto sub extremis.

Si tribus quantitatibus propositis quæreretur minima quantitas per quamlibet exactè divisibilis: quærenda primò esset quantitas minima divisibilis exactè per duas, quæ si divisibilis non esset per tertiam, quærenda esset minima quantitas divisibilis exactè per hanc inventam, & tertiam.

Sed jam ad reductionem minutiarum veniamus. Proponantur duæ fractiones $\frac{b\,3d}{a\,2f}$ & $\frac{a3}{df}$ Primò quæratur minima quantitas per utriusque fractionis

fractionis denominatorem divisibilis, hæc erit a^2df; hæc poterit esse communis denominator. Hunc communem denominatorem divide per denominatores a^2f & df, fient quotientes d & a, per quos multiplicabis numeratores fractionum, producenturque numeratores b^3d^2 & a^4; & habebis fractiones $\frac{a^4}{a^2df}$. $\frac{b^3d^2}{a^2df}$, quas dico esse præcedentibus æquales. Nam cum a^2df dividatur, per a^2f, & df denominatores & quotientes sint d & a, hi quotientes ducti in denominatores a^2f & df, faciunt communem denominatorem, & ducti in numeratores b^3d & a^3, faciunt numeratores b^3d^2 & a^4: erit ergo eadem ratio numeratorum ad denominatores in novis fractionibus, quæ in prioribus erat: ergo erunt æquales fractiones.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Additio & subtractio fractionum cossicarum.

Fractiones cossicæ addendæ, aut subtrahendæ ad eamdem prius denominationem revocentur, tum numeratores simul addantur ad additionem; unus ab alio subtrahatur ad subtractionem. Ut si sint istæ fractiones $\frac{3R}{8q}$ $\frac{7R}{8q}$

colligantur numeratores fientque $\frac{10R}{8q}$

Ratio hujus operationis eadem est quæ in vulgaribus fractionibus. Posset tamen ulteriùs probari resolutione terminorum ad proprium valorem. Ut si versemur in progressione dupla $3R$. efficiunt 6, & $8q$ efficiunt 32; est igitur $\frac{3R}{8q}$ idem ac $\frac{6}{32}$. pariter $\frac{7R}{8q}$ efficiunt $\frac{14}{32}$. eritque aggregatum fractionum $\frac{20}{32}$. seu $\frac{10R}{84}$ Eadem est praxis subtractionis, nam retento eodem denominatore, numerator fractionis subtrahendæ, à numeratore alterius subtrahitur, ut si $\frac{3R}{8q}$ subtrahere debes à $\frac{7R}{8q}$, subtrahe $3R$ ex $7R$ restabunt $\frac{4R}{8q}$; quæ praxis majorem difficultatem non paritur, quam in fractionibus vulgaribus.

In Algebra speciosa eadem praxis usurpanda est.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Multiplicatio, & divisio minutiarum cossicarum.

Minutia cossica per aliam multiplicatur, cum tam numeratores inter se, quam denominatores multiplicentur; quæ regula communis est minutiis vulgaribus, similiterque demonstratur; habet tamen id proprium, quod in tali multiplicatione debeat haberi ratio characterum cossicorum, & signorum $+$ & $-$ Ut si multiplicandæ sint istæ minutiæ $\frac{5R}{4q}$ in $\frac{3R}{5q}$

producetur hæc $\frac{15q}{20qq}$

Ad divisionem minutiæ per minutiam cossicam: numerator fractionis dividendæ multiplicatur per denominatorem dividentis, fietque numerator quotientis supra lineam scribendus; tum multiplicetur denominator ejusdem fractionis dividendæ per numeratorem dividentis, & producetur denominator quotientis: hæc fractio $\frac{12q+6R}{50}$ dividenda sit per $\frac{4R}{5}$, multiplica numeratorem dividendæ per 5, fiet $60q + 30R$. Multiplica item denominatorem dividendæ seu $5c$. per $4R$ fient $20qq$ pro denominatore. Habes igitur quotientem $\frac{60q + 30R}{20qq}$

Demonstratio est in arithmetica communi.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & \\ 9 & 20 & 5.180 \\ \hline 16 & 27 & 12.332 \\ 4 & 3 & \end{array}$$

Quia tamen per hujusmodi praxes, præcipuè verò in multiplicatione, oritur fractio non ad minimos terminos reducta, ita operaberis ut habeas fractionem sub minimis numeris comprehensam. Proponatur $\frac{9}{16}$. & $\frac{20}{27}$. fractiones multiplicandæ. Quæratur communis maxima mensura numeratoris 9, & denominatoris 27, decussatim se respicientium, eritque 9; per quam si utrumque numerum dividas, habebis quotientes 1 & 3, scribendos. Pariter inquiratur maxima communis mensura numerorum 20 & 16, eritque 4, per quam si uterque numerus dividatur; quotientes erunt 4 & 5. Multiplica denominatores 4 & 3, fient 12, denominator. Multiplica pariter numeratores 1 & 5, & habebis numeratorem 5, habebisque fractionem $\frac{5}{12}$. reductam ad minimos terminos, loco istius $\frac{180}{332}$. Hæc praxis potest etiam in fractionibus cossicis usurpari, quando scilicet facilè potest inveniri communis mensura, in alternis terminis fractionum; & hoc etiam in speciosa. Ut

$$\begin{array}{cc} a^2 - b^2 & a^2 \\ a^2c - a^2d - b^2c + b^2d & a^3 + a^2b \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 & cd - d^2 \\ a + b & d \end{array}$$
$$\frac{a^4 - a^2b^2}{ad + bd}$$

propositis duabus fractionibus, communis mensura primi numeratoris & secundi denominatoris erit $c - d$, per quam si fiat utriusque divisio, erunt quotientes $a^2 - b^2$ ex una parte, & d ex alia; pariter secundus numerator, & primus denominator habent communem mensuram $a + b$, per quam divisi exhibent quotientes a^2 & $a + b$, tùm multiplicentur quotientes numeratorum inter se, & habebis numeratorem a^4 a^2b^2, deinde multiplicentur quotientes denominatorum & habebis, denomminatorem $ad + bd$.

Si per fractionem multiplicandus esset integer, aut integer cum fracto, priùs subscripta unitate ad fractionem revocandus esset, vel ad fractionis denominationem.

Datur ferè similis praxis ad divisionem fractionis per fractionem, ut nempe exurgat quotiens ad minimos numeros reductus.

3	5	
9	15	20
—	—	—
16	28	21
4	7	

Si per $\frac{9}{16}$, dividenda fractio $\frac{15}{28}$, quære maximam communem mensuram denominatorum 16 & 28, hæc erit 4, per quam si dividatur uterque numerus, habebuntur quotientes 4 & 7. Pariter maxima communis mensura numeratorum 9 & 15 est 3, per quam si dividas numeratores 9 & 15, erunt quotientes 3 & 5. Multiplica inter se alternos quotos 4 & 5, fiet numerator 20, multiplica 7 per 3, producetur 21; habes igitur $\frac{20}{21}$, quotientem divisionis qua $\frac{15}{28}$, dividitur per $\frac{9}{16}$, sicut $\frac{21}{20}$, est quotiens divisionis qua $\frac{9}{16}$, dividuntur per $\frac{15}{28}$.

Denique si fractiones ad eamdem denominationem reduxeris; diviso numeratore per numeratorem, quotiens erit numerator fractionis qui quæritur: ut si proponantur $\frac{40}{5}$ dividendo 40 per 10, quotiens 4 erit numerator fractionis $\frac{4}{5}$ quæ est quotiens quæsitus.

Hæc item doctrina applicari potest fractionibus cossicis.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Datæ minutiæ partem, aut partes quascumque methodo compendiosâ eidem addere.

Proponatur quæcumque minutia Cossica $\frac{3\,c.—16.}{2.}$ cui addere debemus ejusdem minutiæ $\frac{3}{4}$, adde 7 his partibus valorem unitatis, seu $\frac{4}{4}$, ut fiat $\frac{7}{4}$, tum multiplica prædictam fractionem per $\frac{7}{4}$, multiplicando numeratorem per 7, & denominatorem per 4, producetur hæc fractio $\frac{21.\,c.—112.}{8.}$ quæ $\frac{7}{4}$ prædictæ continebit seu, ipsammet & tres ejus quadrantes.

Eodem modo erit operandum si pro fractione cossica proponeretur numerus integer, ut si proponeretur 12. q. cui addendi $\frac{3}{4}$, facta pariter fractione $\frac{7}{4}$, multiplicabis $\frac{12.q.}{10}$ per $\frac{7}{4}$, & habebis $\frac{84.\,q.}{4.}$ seu 21. 9.

Eodem artificio propositæ minutiæ, aut numeri cossici partes quascumque non ad ipsum numerum, sed ad ejus minutiam addes: verbi gratiâ addenda sit $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{4}$, cujuscumque numeri; primò adde has minutias, ita ut fiat earum summa $\frac{11}{12}$. Quæris ergo $\frac{11}{12}$, cujuscumque minutiæ, aut numeri cossici, hunc numerum, sive minutiam multiplica per $\frac{11}{12}$, & habebis intentum.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Quascumque partes à dato numero cossico compendiosâ methodo subtrahere.

Proponatur quilibet numerus cossicus, simplex aut compositus, ex quo auferre debes $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}$. Adde simul istas minutias, ut earum summam habeas $\frac{11}{12}$, hanc aufer ab ab unitate nempe 11. à 12, restabitque $\frac{1}{12}$, multiplica propositum numerum per $\frac{1}{12}$, & habebis unam duodecimam talis numeri; ergo ab eo subtraxisti $\frac{11}{12}$, quod intentum erat.

Non dissimili ratione partes quascumque propositi numeri à partibus ejusdem numeri subtrahes, verbi gratiâ sit subtrahendus $\frac{1}{4}$, alicujus numeri ex $\frac{1}{3}$, ejusdem, subtrahe $\frac{1}{4}$, ex $\frac{1}{3}$, restabit $\frac{1}{12}$, debes igitur habere unam duodecimam propositi numeri, quæ exhibebitur multiplicando prædictum numerum per $\frac{1}{12}$.

Pariter propositi numeri partes quascumque invenies, si eum multiplices per fractionem significantem hujusmodi partes.

Agendum quidem esset de secundis radicibus numerorum cossicorum; quia tamen tanta præceptorum coacervatio solet tyronibus caliginem affundere, & tædium creare, algebræ regulam ejusque varios casus, & proprietates hîc proponendam censui.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Artificium regulæ Algebræ.

1. Pro numero quæsito ponatur una radix, aut plures, si simpliciter de numero agatur; si de superficie, superficies quæsita sit quadratum: si de solido, solidum sit cubus.

2. Examinetur hæc radix, quadratum aut cubus secundum circumstātias quæstionis cognitas, addendo, subtrahendo, multiplicando, dividendo, donec occurrat aliqua æquatio, seu donec cognoscatur æqualitas inter notam & ignotam quantitatem.

3. Illa æquatio revocetur ad terminos simplicissimos.

4. Per numerum altioris characteris, numerus characteris depressioris, aut numerus absolutus dividatur, radix quæsita erit aut quotiens, aut quotientis aliqua radix.

In exemplo melius intelligetur regula.

Datâ laterum differentia, & eorum aggregato, latera ipsa invenire: hoc est numerum datum dividere in duas partes dato excessu se superantes.

Proponatur numerus 100, dividendus in duas partes, quarum una alteram superet numero 40, quæratur minor pars hæc primò supponatur 1R.

Secundò examinetur secundum circumstantias quæstionis, si minor pars est 1R, eâ subtractâ ex 100, restabit major pars 100 — 1R. Subtrahatur item minor ex majori, habebiturque excessus unius supra aliam, facta Subtractione restat 100 — 2R. Habemus autem talem excessum esse 40, habemus ergo æquationem 100 — 2R = 40.

Tertiò reducatur ad simplicissimos terminos inventa æquatio, scilicet adde 2R, utrinque adhuc remanebit æqualitas inter 100 = 40 + 2 R, subtrahe utrinque 40, adhuc erit æqualitas 60 = 2R.

4 Divide 60, per 2R altiorem characterem, habebis unam radicem esse æqualem numero 30; quare minor pars erit 30, & major 70, se superantes excessu 40.

Idem præstabis methodo Algebræ speciosæ: numerus 100 ponatur esse b, & excessus 40, d,

sitque

sitque minor pars a, eritque major b — a, auferatur minor ex majore, seu a ex b — a fient excessus b — 2a, qui æqualis est numero d, erit ergo æquatio b — 2a = d, & addendo 2a utrinque fiet alia æquatio b = d + 2a, & subtrahendo utrinque d erit b — d = 2a, & dividendo per 2 characterem altioris potestatis, habebis æquationem $\frac{b-d}{2} = a$, quare aufer d ex b, nempe 40 ex 100, & reliqui 60. Sume dimidium & habebis 30, pro minore parte.

In hoc exemplo facillimo licet, animadvertere potuisti, æquationem non statim occurrere simplicissimam, atque adeò opus fuisse variis reductionibus, quas explicandas suscipio.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Antithesis.

Antithesis est transpositio alicujus quantitatis ab una æquationis parte in aliam sub contrario signo: hæc æquationem non labefactat. Proponatur æquatio 4 R + 4 = 24. transferatur illud + 4. ab una parte æquationis in aliam, sub contrario signo, ita ut fiat 4R = 24 — 4. Dico adhuc æqualitatem perseverare, si enim æqualibus subtrahantur æqualia, quæ fiunt, erunt æqualia; sed in nostro casu utrinque subtrahitur 4. in uno membro delendo + 4, in alio apponendo — 4. ergo perseverat æqualitas.

Secundò proponatur æquatio 4 R — 5 = 15, dico si 5, transferatur in aliam partem æquationis sub contrario signo, ita ut fiat alia æquatio 4R = 15 + 5 eam legitimam & veram esse æqualitatem, ex suppositione quod præcedens esset bona; si enim æqualibus 4R — 5. & 15 addantur æqualia remanent æqualia; sed delendo — 5, ex una parte, additur 5. & scribendo ex alia parte + 5, additur 5. ergo quæ fient adhuc æqualia perseverabunt.

Sint inveniendi duo numeri in proportione tripla: quorum si major detrahatur ex 30. & minor ex 16. remaneant numeri æquales: sit minor numerus 1R, & consequenter major erit 3R, cum sint in proportione tripla; subtrahatur 1R, ex 16 fiet 16 — 1R. Subtrahantur 3R ex 30 fient 30 — 3R. facta tali subtractione est æqualitas nempè 16 — 1R = 30 — 3R. transferantur 3R per antithesin: fiet æquatio 16 — 1R + 3R. = 30: seu 16 + 2R. nam — 1R. & — 1 R se elidunt. restabit ergo æquatio 16 + 2R. = 30. transfer 16 per antithesin, fiet æquatio 2R. = 30 — 16. aufer igitur 16 ex 30. habebis æquationem 2R = 14. seu 1R = 7. Erunt ergo quæsiti numeri 7 & 21. quorum alterum si subtrahas ex 16, alterum ex 30, restabit utrobique 9. Methodo speciosâ idem præstabis Sint 30 b & 16 d. numeri quæsiti a & 3 a. subtrahe 3 a ex b fiet b — 3 a, subtrahe a ex d fiet d — a. est ergo æquatio d — a = b — 3 a transfer 3 a per antithesin fiet + 3 a. quod additum alteri parti efficit d + 2 a = b, transfer etiam d fiet 2 a = b — d divide per 2 fiet $a = \frac{b-d}{2}$ subtrahe igitur 16 ex 30. fit 14. divide per 2. habebis a esse 7. & 3 a esse 21.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Hipobibasmus.

Hipobibasmus est depressio terminorum ad gradum inferiorem, quam depressionem licitam esse contendo, & æquationi legitimæ nullo modo contrariam. Proponatur æquatio 1 c. + 2 q. = 15 R. dico licitum esse deprimere quemlibet terminum æquationis, ad gradum inferiorem, ita ut fiat alia æquatio legitima 1 q + 2 R. = 15.

Demonstr. Intelligantur omnes termini primæ æquationis dividi per 1 R. quotientes eamdem habebunt inter se rationem, nam quantitates, & earum æquè multiplices sunt in eadem ratione, sed dum 1R. dividit 1 cubum, quotiens est 1q. & cum una radix dividit 2 q quotiens est 2 R. & dum una radix dividit 15R. quotiens est 15. ergo hi termini sunt in eadem ratione, sed 1 c. + 2 q. æquales erant 15 radicibus: ergo & 1q + 2 R. = 15. Non tantùm autem uno gradu descendere possunt, sed duobus & tribus modo æqualiter omnes descendant. Posset etiam probari eo quod termini cossici sint termini progressionis Geometricæ, atque adeò sint proportionales: est ergo eadem ratio, qq ad cubum, quæ cubi ad quadratum, & quadrati ad radicem, & radicis ad numerum absolutum.

Hæc reductio in Algebra etiam speciosa locum habet, ut si detur æquatio a4 + 2 a 3 = a 2 b fiet omnibus divisis per a2 alia æquatio legitima a 2 + 2 a = Z : Z enim quod intelligebatur ut solidum, jam intelligetur ut simplex longitudo.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Isomeria.

Isomeria est reductio æquationis per multiplicationem; certum est autem quod si omnes termini æquationis cujuscumque per eumdem numerum multiplicentur, producti eamdem rationem habebunt. Quamvis autem sit ut plurimùm inutile numeros integros multiplicare per alium, non est tamen inutile numeros fractos ita multiplicare, quia hujusmodi multiplicatione ad eamdem denominationem reducuntur, & neglectis denominatoribus, reducitur æquatio numerorum, ad æquationem integrorum. Fundatur igitur hæc reductio, in hoc axiomate: Si duos numeros æquales idem numerus multiplicet, productos æquales efficiet vel etiam in hoc: Quod in minutiis æqualibus, eadem sit ratio numeratorum ad denominatores; quod si minutiæ æquales eumdem habeant denominatorem, numeratores æquales erunt.

$$\frac{6\,R + 24}{5} \times \frac{72\,q - 396\,R.}{3}$$

$$\frac{18\,R + 72}{15.} \qquad \frac{460\,q - 1980\,R.}{15.}$$

Sit inventa æqualitas inter istas minutias cossica $\frac{6\,R. + 24}{5.} = \frac{72\,q. - 396\,R.}{3.}$ multiplicentur in crucem, ut ad eamdem denominationem reducantur: sit communis denominator 15. & denominatores erunt 18 R. + 72. & 360 q. — 1980 R. quos assero esse æquales, ita ut æquatio 18 R. + 72 = 360 q. — 1980 R.

Demonstratio. Per multiplicationem in crucem minutiæ, quæ æquales supponebantur, ad eandem denominationem redactæ sunt, ergo producta erunt æquales inter se: cum autem in minutiis æqualibus eadem sit ratio numeratorum ad denominatores, & denominatores sint æquales, numeratores etiam æquales erunt: erit ergo æquatio inter hos numeros 18 R. + 72 = 360 q. — 1980 R. & transferendo 1980 R. per antithesin fiet æquatio 1998 R. + 72 = 360 q.

Secundò detur æquatio inter minutiam cossicam & numerum absolutum, verbi gratia si æquatio 4 q. + $\frac{10}{3}$ R. = 12. reducatur numerus absolutus ad minutiam subscriptâ unitate $\frac{12}{1}$. tum reducantur hæ minutiæ quæ æquales sunt ad eamdem denominationem, fient duæ minutiæ 4q. + $\frac{10}{3}$R. $\frac{36}{3}$ & neglectis denominatoribus, dabitur æquatio 4 q. + 10 R. = 36.

Tertiò si unus tantum terminus æquationis sit fractus omnes termini ad minutiam revocentur. Proponatur hæc æquatio 1 q. + 8$\frac{1}{2}$ R. = 246. reducantur omnes termini ad medietates $\frac{2}{2}$ q. + $\frac{17}{2}$ R. = $\frac{492}{2}$, neglectisque denominatoribus habebimus æquationem 2 q. + 17 R. = 492. Quia tamen praxes communes volunt, ut numerus altioris potestatis ad unitatem revocetur, hæc praxis tradetur. Primò ponatur 1 q. pro 2q. Secundò quia radix uno tantum gradu distat à quadrato, multiplica 17 per hunc numerum 2. fient 34. quem numerum per 2. communem denominatorem divides, redibúntque 17 radices. Pro numero absoluto, quia numerus absolutus distat à quadrato duobus gradibus, multiplica 491. non per 210, sed per ejus quadratum 4. habebisque 1968. quem numerum divides per 2 communem denominatorem fientque 984, habes ergo æquationem 1 q. + 17 R. = 984.

Demonstratio. Supponatur radix augeri, in proportione denominatoris, fiat nempè dupla, quadratum erit quadruplum prioris, quamvis id non exprimatur; quando autem crescit unus terminus secundum unam rationem: debent & alii omnes crescere secundum eamdem rationem: quare crescere debet non tantùm ipsa radix, sed etiam numerus radicum ut rectangulum sub radice & sub 17, crescat in eadem ratione qua crescit quadratum, quod fit duplicando numerum radicum ut duplicatus est valor radicis. Deinde homogeneum comparationis non debet duplicari, sed multiplicari per quadratum ejusdem denominatoris 2, ut crescat in eâdem ratione in qua supponitur crescere quadratum; quare dabitur alia æquatio in qua quadratum duplum coefficiens ex R & numerus duplus: & homogeneum duplum, fietque legitima 1 q + 17 R. = 984.

Hanc praxin utpote utilissimam in aliis exemplis faciliorem reddamus. Proponatur æquatio 4 qq. + 3 c + 2 R. = 1272. si omnia dividantur per 4, numerum altioris potestatis, fieret æquatio 1 qq + $\frac{3}{4}$c. + $\frac{1}{4}$ q. + $\frac{2}{4}$ R. = 318. vel 1 qq + $\frac{3}{4}$ c. + $\frac{3}{4}$ q + $\frac{2}{4}$ = $\frac{1272}{4}$, atque ita omnes fractiones redactæ sunt ad eamdem denominationem: sic autem omnia reduces ad integros, Si omnia multiplices per 4 numerorum qqtorum, sed diversimodè, pro ut termini magis à qqto seu potestate primâ removebuntur. Quare numerus cuborum manebit idem, quia cubus unico tantum gradu distat à qqto, unde abjecto denominatore fient 3 c. quia vero qtum à qqto distat per quadratum multiplica 3, non per 4, sed per quadratum 16, fientque 48, quem numerum si dividas per 4, communem denominatorem erunt 12 q.

Tertiò quia radix distat à qqto ut cubus à numero absoluto; multiplica 2, numerum radicum per 64, cubum numeri 4, fient 128, quem numerum si dividas per 4, communem denominatorem habebis 32. numerum radicum.

Denique quia numerus absolutus distat à qqto ut quadrato quadratum à numero absoluto, multiplica 1272, per qqtum radicis 4, seu per 256, habebisque 325632, divide per 4, & habebis 81408, habes igitur aliam æquationem 1qq + 3 c. + 12 q. + 32R. = 81408.

Demonstratio eadem; augetur enim radix, ut sit quadrupla prioris, & consequenter debent augeri omnes termini prout exigit radix, ita aucta. Cum autem qdto quadratus sit in quadruplicata ratione radicis, omnes termini debent crescere in quadruplicata ratione 1 ad 4, nempè ut 1 ad 516, quod quidem non exprimitur in quadrato-quadrato, sufficit enim exprimere unum quadrato quadratum, intelligendo de quadratoquadrato talis radicis; quo posito debent augeri reliqui termini in eadem ratione. Quia verò facta hac suppositione jam crevit cubus in triplicata, sufficiet ut numerus cuborum quadruplicetur: sic enim productus ex numero cuborum, in eorum valorem, erit in quadruplicata ratione, unde pro $\frac{3}{4}$ cuborum ponetur 3 cubi.

Pro quadratis quia valor quadrati est in duplicata radicis, ideo numerus quadratorum multiplicatur per quadratum numeri 4, nempè per 16, sic enim productus ex numero quadratorũ, in eorum valorem, erit in quadruplicata ratione radicis, & productus dividitur per 4 communem quotientem, ut reducatur ad integros numeros.

Pro radice, quia valor radicis augetur quadruplò tantum, ut productus ex numero radicum, in earum valorem sit in quadruplicata ratione debet multiplicari per cubum numeri 4, seu per 64, & productus dividi per 4, ut ad integros reducatur.

Denique ipsum homogeneum comparationis debet crescere in quadruplicata ratione 1 ad 4, nempe ut 1 ad 516, quare multiplicari debet per 516, & productus dividi per 4, ut ad integros reducatur.

Apposite usurpatur isometia, quoties numerus radicum est impar, ut vitentur fractiones, nam in solutione æquationum quadraticarum assumi debet semissis radicum, verbi gratia proponatur æquatio 1 q + 3 R = 10.

Possumus cogitare radicis valorem duplum esse, & consequenter quadratum quadruplum, & ad hoc ut productus ex coefficiente 3, & radice augeatur in eadem ratione, debet talis coefficiens duplicari & fieri 6 ut sint $1q. + 6R.$ Denique homogeneum comparationis debet augeri in duplicata ratione radicis, ita ut multiplicetur per 4 quadratum numeri 2, & fiat 40, habemus ergo æquationem aliam $1q + 6R = 40$, eritque radix 4.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Parabolismus.

In regula Algebræ jubemur ultimo loco divisionem adhibere, hoc est dividere numeros inferiorum potestatum, aut etiam comparationis homogeneorum, per numerum potestatis altioris, in qua divisione, virtualis intervenit regula trium. Proponatur hæc æquatio $5R = 50$, per divisionem comparationis homogenei 50, per 5, dicimus si 5 radices dant 50, una radix quid dabit, & invenio unam radicem esse 10. Quoties enim in regula proportionum secundus, aut tertius numerus est 1, sola divisio regulam absolvit, eò quòd multiplicatio per unitatem, numerum non immutet.

Pariter si esset inventa æquatio $4q = 100$, dividendo 100. per 4. haberentur 25, pro valore unius quadrati.

Non tantùm in simplicibus æquationibus, per divisionem consequimur valorem unius potestatis, sed etiam in compositis, modò reliqui omnes termini æquationis simili modo dividantur. Proponatur æquatio $2q = 10R - 12$. divide omnes terminos per 2, numerum scilicet altioris potestatis, habebis valorem unius quadrati $1q = 5R - 6$, vel sit proposita hæc $2q + 6R = 20$, per divisionem habebitur ista $1q + 3R = 10$.

Ratio hujus praxis est quod similes partes aliquotæ, in eâdem sunt ratione, ac tota; sed divisione omnium terminorum per eumdem numerum, sumuntur partes aliquotæ similes suorum totorum: ergo in eadem ratione erunt; sed ante divisionem erat æqualitas inter tota; ergo post divisionem dabitur æqualitas inter quotientes.

In genere igitur debet fieri regula trium, ut æquatio ad unitatem revocetur; ut si sit æquatio $12q = 66R. + 36$. dices si $12q$ sunt æquales Radicibus $66 + 36$, unum quadratum quid dabit; Multiplicandi essent $66R + 36$ per 1, & cum idem numerus producatur, divides $66R. + 36$. per 12. invenieśque $1q = 5\frac{1}{2}R. + 3$.

Si accidat ut per hanc divisionem fiant fractiones ut in hoc ultimo exemplo, recurres ad præcedentem propositionem, seu isomeriam.

Eamdem regulam in speciosa usurpamus; ut si proponatur æquatio sequens $BA2. + D + A = Z$ Sol. divide omnia per B numerum scilicet adjunctum altiori potestati, fiet $A2 + D + A = \frac{Z \text{ Sol.}}{B}$

Quare propriè parabolismus est divisio terminorum æquationis per eam quantitatem, per quam altior potestas erat multiplicata. Instituitur autem hæc divisio, ut potestas sola ponatur: sic enim faciliùs cum aliis terminis comparabitur.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Analogismus.

Analogismus est revocatio æquationis ad proportionalitatem, in hoc principio fundata, quod in tribus proportionalibus quadratum medii æquale sit rectangulo sub extremis, & in quatuor proportionalibus factum sub extremis, æquetur facto sub mediis. Ut si sint $4q. = 8R$, erit rectangulum comprehensum sub 4, & valore quadrati æquale rectangulo sub 8, & valore radicis. Quare si 8, ponatur primus numerus erit ut 8 ad 4, ita quadratum ad radicem.

Hic analogismus videtur esse utilior in Algebra speciosa, quam in communi; ut si proponatur æquatio $RA = SB$, fiant SB mediæ, erit ut R ad S, ita B ad A.

Proponatur hæc æquatio paulò difficilior $RA + SA = SB$, cum duo sint rectangula, $RA + SA$ fiet ex his duobus unum, si nempè $R + S$ multiplicetur per A, fiatque $(R + S)A = SB$ fiant B & S mediæ, erit analogismus ut $R + S$ ad S ita B ad A.

Sit alia æquatio $RA + SA = SB + RB$, A multiplicet $S + R$, fiet $(R + S)A$, ita B multiplicet $S + R$ fiet $(R + S)B$, cum $(R + S)A = (R + S)B$, si ultimæ fiant mediæ erit analogismus $R + S$; $R + S$: B: A. Ergo B & A æquales erunt.

Occurrat hæc æquatio $2BA - DA = 2BD + 2GD$ ita concipi debet, ut instituatur æquatio $(2B - D)A = (2B - 2G)D$; si ultimæ fiant mediæ erit ut $2B - D$ ad $2B + 2G$, ita D ad A.

Potest item advocari aliud principium, nempè si plana, aut solida similia fuerint proportionalia, eorum radices, seu latera sunt proportionalia, ut si hi termini fuerint proportionales $G2 - D2$, $4B2 + G2 - D2$; $D2$, $A2$. hi etiam proportionales erunt $\sqrt{q}\,\overline{G2 - D2}$. $\sqrt{q}\,\overline{4B2 + G2 - D2}$; D, A.

Sæpè etiam ab uno analogismo ad alium gradum facimus componendo, dividendo, convertendo, multiplicando, & ex secundo analogismo ad aliam æquationem.

Est aliqua difficultas in formando analogismo, quoties occurrit æquatio, in qua fractio æquatur integro: quod in exemplis melius explicabitur. Proponatur hæc æquatio $\frac{B2}{D} = A$ sensus est quod si $B2$ dividatur per D, quotiens æqualis erit numero A; ergo ille quotiens seu numerus A illi æqualis, multiplicando D producet $B2$; ergo quadratum radicis B, æquale est producto ex D in A, sunt ergo proportionales A, B, D.

Sit alia æquatio $\frac{B3}{A} = D2$, quotiens ergo divisionis quâ A dividit $B3$ est æqualis $D2$, quare $D2\,A = B3$, sed $B3$ producitur si B ducatur in $B2$; quare si ita ordinentur quantitates A, B, $B2$, $D2$, cum factum sub extremis æquetur facto sub mediis proportionales erunt.

Sit

Sit æquatio $\frac{BD}{A} = G$ ſenſus eſt quod G æquale ſit quotienti diviſionis qua A dividit BD; ergo G multiplicando A facit B D, ſed pariter B in D facit BD, quare datur analogia A : B : D : G.

Hæc æquatio $\frac{BDG}{A} = F$. indicat F æquari quotienti diviſionis quâ A dividit B D G, ergo ſi F multiplicet A, reſtituet BDG, quare AF æquabitur BDG; ſed B ductum in DG facit BDG, quare ſi B, DG fiant mediæ, habebimus analogiſmum A, B, D, G, F, vel A, B, D, G, F vel A, B, G, D, F.

$\frac{BD + GD}{A} = F$ hanc analogiam efficit A, B + G, D, F.

Hæc erit difficilior $\frac{B2 - D2}{G} = A$, eritque A G æquale B2 — D2. Sed hoc ultimum fit ſi B + D ducatur in B — D; ergo probus erit analogiſmus G, B + D, B — D, A: cum factum ſub extremis æquetur facto ſub mediis.

Hæc æquatio $\frac{B2 + 2BD + D2}{A} = F$, hanc dabit analogiam A, B + D, F quia nempè quadratum mediæ æquatur facto ſub extremis, nam oſtendam productum ex F in A eſſe B2 + 2BD + D2; quod quadratum habet radicem B + D ut oſtendemus inferius, & ex multiplicatione probari poteſt.

Iſta æquatio $\frac{B4\,D4}{G2} = A2$, exhibet hanc analogiam G2, B2D2. A2.

Si numerator fractionis reſolubilis non ſit in plures terminos poterit fieri radix ligata, ut in hac æquatione $\frac{BD + FG}{H} = A$ cum A H æquetur BD + FG; erit æquatio A, radix quadrata (BD + F G) H, vocatur aut radix quadrata numeri compoſiti radix ligata, eò quod numerus parentheſi ligatus, ſeu claudendus ſit.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Æquatio poteſtatis cum numero abſoluto.

Jam explicuimus ſupra æquationem radicis cum numero abſoluto.

Explicuimus item eam in qua quadratum æquabatur radicibus, oſtendimus enim per hypobibaſmum, reducendam eſſe ad æquationem radicis cum abſoluto. Idem dicendum de quacúmque poteſtate reſpectu inferioris ſequentis, ſunt enim tunc ut vocant numeri collaterales.

Reſtat igitur modò explicanda æquatio inter numerum abſolutum & quadratum. Sit hæc æquatio 1q. = 100, extrahatur radix quadrata hujus numeri 100, & habebitur valor unius radicis.

Idem dicendum de cubo, nempè quoties occurrit æquatio unius cubi cum numero abſoluto, ita ut habeas valorem unius cubi, extrahendo radicem cubicam, habebitur valor unius radicis: idem intelligendum eſſet de aliis poteſtatibus: quia tamen Arithmetica communis ſiſtit, in extractione radicis cubicæ, ideo alias inferius ſuo loco explicabimus.

Si ſit æquatio inter cubum & radicem, idem præſtandum ac in æquatione quadrati cum abſoluto: nam eadem eſt ratio cubi ad radicem, quæ quadrati ad abſolutum, ita ut ſi 1 c. æquetur 4 R, etiam 1q. æquabitur quaternario, unde extrahendo radicem quadratam habebitur valor unius radicis.

Ordo doctrinæ poſtularet ut cæteras æquationes explicarem ne tamen, tanta præceptorum coacervatio tædium Tyronibus afferat, & eorum memoriam obruat. Exempla priùs afferenda cenſui, ut in praxi ſuperiora melius intelligerentur, quæ haud dubiè Tyro prima vice non concipiet, niſi ea videri in praxi applicata.

ALGEBRÆ
LIBER SECVNDVS.
Præceptorum usus tam methodo communi quàm speciosâ.

PROPOSITIO I.

Problema.

Numerum propositum 110, dividere in duas partes, quæ inter se multiplicatæ producant numerum decuplum quadrati minoris partis.

Sit minor pars numeri 110 una radix, eritque alia pars major $110 - 1R$, multiplicentur ut jubet quæstio, nempe $100 - 1R$, per $1R$, fient $110R - 1q$, qui numerus decuplus est quadrati minoris partis, seu unius quadrati; ergo æqualis est 10, quadratis; habemus ergo æquationem $110R - 1q = 10q$, & per antithesin $110R = 11$ quadratis, & per hypobibasmum, cum eadem sit ratio quadrati ad radicem quæ radicis ad absolutum, habebitur æquatio $110 = 11R$ & per parabolismum erit $1R = 10$, seu pars minor, & major pars erit 100, multiplicentur fient 1000, qui numerus decuplus est numeri 100, seu quadrati partis minoris 10.

Idem per speciosam ita obtinebimus. Sit 110 b, ponatur minor pars esse A, major erit $b - A$ multiplicetur major per minorem fiet $bA - A2$. quem numerum decuplum esse diximus quadrati minoris A, seu A2. Est ergo æquatio $bA - A2 = 10\ A2$, & per antithesin $bA = 11\ A2$, & divisis omnibus per A, erit æquatio $b = 11\ A$. Divide omnia per 11, erit æquatio $\frac{b}{11} = A$. Divide ergo b seu 110, per 11, & quotiens 10 erit minor pars & major 100, quadratum minoris 100, &c.

PROPOSITIO II.

Problema.

Duos numeros reperire in proportione sextupla quorum majori si addas 6 & minori 4 fiat primus secundi quadruplus.

Sit minor numerus 1R, major erit 6R cum sint in proportione sextupla: adde majori 6 fient $6R. + 6$ & minori 4; eritque $1R. + 4$, dicuntur autem esse in proportione quadrupla, hoc est primus $6R, + 6$, est quadruplus posterioris $1R + 4$: quare hic posterior quadruplicandus est, ut fiat æqualis, est ergo æquatio $4R + 16 = 6R. + 6$, transfer 4R. in aliam partem per antithesin, easque aufer ex 6R, restabit æquatio $16 = 2R, + 6$. Aufer utrinque 6, fiet æquatio $10 = 2R$, divide per 2 habebis $1R. = 5$, primus igitur numerus est 5, secundus sextuplus erit 30. Adde majori 6 fient 36, & minori 4, fient 9, clarum est priorem 36 esse quadruplum posterioris 9.

Per speciosam sit minor A, major erit 6A Cui adde 6, fient $6A + 6$ & minori 4, habebis $A + 4$; hic quadruplicetur, erit $4A + 16$, habes igitur æquationem $4A + 16 = 6A + 6$ transfer 6, per antithesin restabit $4A + 10 = 6A$ transfer 4A, habebis $10 = 2A$; ergo 5 est A, &c.

PROPOSITIO III.

Problema.

Invenire numerum qui additus ad 90, & ad 20 faciat numeros in proportione [illegible].

Numerus quæsitus supponatur esse 1R qui addatur prædictis numeris, producentur $1R + 90$, & $1R, + 20$, & primus debet esse posterioris quadruplus: ergo secundus quadruplicatus, hoc est $4R + 80$, æquabitur priori $1R. + 90$ subtrahatur utrinque 1R fiet æquatio $90 = 3R, + 80$: aufer utrinque 80, habebis æquationem $10 = 3R$, divide per 3, erit $1R = 3\frac{1}{3}$ qui numerus additus ad 90, efficit $93\frac{1}{3}$. & ad 20, $23\frac{1}{3}$. est autem prior posterioris quadruplus.

Si quæreremus numeros in proportione majore quam sit 90 ad 20, inveniretur æquatio impossibilis; quam impossibilitatem ut dignoscere in ipsa æquatione discamus; quæramus animi gratiâ numerum, qui additus ad 90 & 20, numeros faciat in proportione quintupla: is numerus ex more supponatur 1R. Eruntque $90 + R$, & $20 + 1R$. in proportione quintupla, atque adeo ultimus multiplicatus per 5, erit primo æqualis, hoc est $100. + 5R$, æqualis $90 + 1R$, quod est impossibile; nam $90 + 1R$, invenitur in $100 + 5R$, tamquam pars in toto.

PROPO

PROPOSITIO IV.

Problema.

Propositum numerum 140, ita secare ut major pars, sit minoris quintupla, & insuper contineat 20.

Supponatur minor pars 1R. Eritque major 140 — 1R, quæ est quintupla prioris & insuper contineat 20, seu erit 5R + 20, habemus ergo æquationem 140 — 1R = 5R + 20.

Adde 1R, & habebis 140 = 6R + 20.

Subtrahe 20, utrinque 120 = 6R. Divide per 6.

Erit 1R = 20, minor pars; major 120, prioris quintupla & insuper continens 20.

Methodo speciosa sit numerus 140 b, 20 d, sitque A minor pars. Major erit b — A. Eadem major est minoris quintupla + d erit, ergo æquatio b — A = 5 A + d. Per antithesin transfer — A, fiet æquatio b = 6 A + d, transfer illud d per antithesin, habebitur æquatio b — d = 6 A. Divide omnia per coëfficientem 6 habebis æquationem $\frac{b-d}{6}$ = A, id est $\frac{140-20}{6}$ A, vel $\frac{120}{6}$ = A: divide ergo 120 per 6, habes valorem unius A esse 20.

PROPOSITIO V.

Problema.

Numeros invenire in proportione septupla quorum differentia sit 120.

Minor ponatur 1 R, major erit 7R, cum sint in proportione septupla; aufer minorem ex majori habebis differentiam, quæ erit 6R, hanc æqualem dicimus 120; ergo habemus æquationem 120 = 6 R. Divide 120, per 6 habebis 1R, esse 20; atque adeo minorem numerum esse 20, majorem 140, & differentiam esse 120.

Sit per speciosam differentia b, minor numerus erit A, major 7A. Aufer majorem ex minore, habebimus differentiam esse 6A. Sed hanc voluimus esse d: ergo habemus æquationem d = 6A. Divide per coëfficientem 6, erit æquatio $\frac{d}{6}$ = A. nempe A erit æquale quotienti divisionis qua d dividetur per 6.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Numerum invenire, à quo si auferantur 20, & 80, relinquantur duo numeri in proportione tripla.

Numerus quæsitus supponatur 1R, erit major 1R — 20, minor 1R — 80, est autem primus posterioris triplus. Triplicetur ergo posterior ut fiat æqualis primo, habebimus æquationem 1R. — 20 = 3R — 240. Adde 20 utrinque 1R = 3R — 220, transfer 220, per antithesin, erit æquatio 1R + 220 = 3R subtrahe 1R, habebis æquationem 220 = 2R, divide per 2, habebis 1R = 110, à quo si subtrahas 20, restat 90. Si subtrahas 80, restabit 30 sunt autem 90 & 30, in proportione tripla.

Per speciosam, sint 20 B, & 80 D, & numerus quæsitus A, eruntque A — B, & A — D in proportione tripla. Triplicetur ultimus, fiet A — B = 3 A — 3D: adde 3 D utrinque habebis æquationem 3 D + A — B = 3 A, subtrahe unum A fiet 3 D — B = 2 A. Divide per coëfficientem 2, erit $\frac{3D-B}{2}$ = A, sunt 3D, 240 subtrahe B, seu 20, fient 220. Divide per 2, habebis A esse 110.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Invenire numerum qui additus ad 30, & subtractus à 90, faciat summam residui subduplam.

Numerus quæsitus sit 1R, addatur ad 30, fiet 30 + 1R, subtrahatur à 90, & habebis 90 — 1R, qui numerus prioris 30 + 1R, est duplus: Duplicetur ergo hic ultimus ut sit 60 + 2R, = 90 — 1R, adde utrinque 1R, fiet 60 + 3R, = 90. Aufer 60, utrinque erit æquatio 3R, = 30. Divide 30 per 3 numerum radicis fiet 1R = 10; quare si ex 90 auferas 10, fient 80. Si numero 30, addas 10, fient 40, sunt autem 80 & 40 in proportione dupla.

Per speciosam sit B 30, & D 90, & A numerus quæsitus; erit B + A subduplus numeri D — A; Quare prior B + A duplicetur ut sit 2B + 2A = D — A, adde utrinque A, fiet 2B + 3A D transfer 2B per antithesin, fient D — 2B = 3 A, divide per 3 habebis æquat. $\frac{D-2B}{3}$ = A ex D, seu 90, subtrahe 2B, nempe 60 restat 30, divide per 3 habebis 10.

Debeat iisdem servatis summa esse tripla residui, nempe 30 + 1R, si triplus numeri 90 — 1R tripla hunc numerum & habebis æqu. 270 — 3R = 30 + 1R, adde utrinque 3R, fiet æquatio 270 = 30 + 4R, subtrahe 30, habebis 240 = 4R, divide per 4 erit 60 = 1R, adde 60 ad 30 fient 90, subtrahe 60 ex 90 fient 30, est autem 90, triplus numeri 30.

Debeat summa esse residuum ut R ad S. Sit 30 idem quod B & 90, idem quod D. Erit ergo B + A ad D — A ut R ad S, & consequenter rectangulum sub extremis nempe SB + SA, æquabitur rectangulum sub mediis R D — R A, transfer RA per antithesin habebis æquationem RA + SB + SA = RD; transfer SB per antithesin habebis RA + SA = RD — SB. Supponatur R ad S esse ut 2 ad 3, erit RD 180, SB 90, seu RD — SB, ergo 90, = RA + SA divide RA + SA per + S, seu divide 90 per 5, fiet A = 18, si ergo addas ad 30, 18, fient 48, si subtrahas 18, ex 90, erunt 72. Est autem 48 ad 72, ut 2 ad 3.

PROPO

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Numeros invenire qui multiplicati invicem numerum producant sextuplum eorum summæ.

Sit primus numerus 1R, secundus alius quicumque major quam 6, verbi gratia 30. & hoc ne incidamus in quæstionem impossibilem, erit eorum summa 1R. + 30, productus autem ex eorum multiplicatione 30R, qui dicitur esse sextuplus prioris. Quare ut sit æqualitas debet præcedens multiplicari per 6, fietque 6R + 180 = 30R. Subtrahe utrinque 6R, habebis æquationem 24R, = 180; divide per 24, habebis pro quotiente $7\frac{1}{2}$. erit ergo 1R = $7\frac{1}{2}$. & summa $37\frac{1}{2}$ productus 225, illius sextuplus.

Ut dignoscas æquationem impossibilem; assumatur primus numerus 1R. Secundus assumatur 5, minor denominatore proportionis. Erit summa 1R + 5, & productus 5R. Debet autem productus esse sextuplus. Multiplica igitur 1R + 5, per 6, fiet 6R + 30. Quare habebimus æquationem impossibilem 6R + 30 = 5R.

Per speciosam sit primus numerus A. Secundus B major, sitque productus summæ sextuplus, seu ut R ad S, erit AB ad A+B ut R ad S; & planum sub mediis, æquabitur plano sub extremis: est ergo æqualitas SAB = RA + RB. Transfer RA per antitethesin erit æquatio SAB — RA = RB, sit R 7, & S. Idem quod 1, & B 30, erit RB 210, erit RA, 7A. SB erit 60. SBA erit 60 A, habemus ergo æquationem 60 A — 7A = 210. Subtrahe 7A, fient 53 A = 210. Divide 210, per 53, habebis $3\frac{51}{53}$ = A. Summa erit $33\frac{51}{53}$ productus $118\frac{46}{53}$.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Numerum quemcumque ut 100 in duos numeros partiri, ut si unus alium dividat, quotiens sit 10.

Ponatur una pars esse 1R, alia erit 100 — 1R, debet autem 1R dividere 100 — 1R; ita ut quotiens sit 10. Hoc est si 10 multiplicet 1R, faciatque 10R, efficiet 100 — 1R. Quare invenimus æquationem 10R, = 100 — 1R. Adde utrinque 1R, fiet æquatio 11R = 100. Divide 100, per 11, habebis 1R = $9\frac{1}{11}$. quare unus numerus erit $90\frac{10}{11}$. & alius $9\frac{1}{11}$. Si posterior priorem dividat quotiens erit 10.

Per speciosam ponatur numerus 100, esse B & quæsitus esse A, eritque alius B — A. Ponatur quotiens esse D, ita ut A multiplicando D faciat B — A, erit ergo æquatio AD = B — A, transferatur A per antithesin, erit AD + A = B. Habemus autem B esse 100, & D 10; quare 10 A + 1A seu 11 A = 100, fiat divisio, idem invenies.

PROPOSITIO X.

Problema.

Numerum quemvis ut 123, ita dividere in quinque partes ut secunda sit prima dupla & insuper contineat 2.
Tertia secunda tripla, & insuper contineat 3.
Quarta tertiæ sit dupla — 4.
Quinta sit dupla quartæ — 13.

Prima pars numeri 123, ponatur	1R
Secunda quæ dupla est + 2, erit	2R + 2
Tertia quæ est secundæ tripla + 3 erit	6R + 9.
Quarta sit tertiæ dupla — 4, erit	12R + 14
Quinta quartæ dupla — 13, erit	24R + 15
Addantur hæc omnia, fient	45R + 40

quæ æqualia sunt 123, habemus ergo æquationem 45R + 40 = 123, dele 40 utrinque:

Habebimus æquationem 45R = 83. Divide 83 per 45.

Habebimus æquationem	1R1 = $\frac{38}{45}$
Erit ergo prima pars	$1\frac{38}{45}$
Secunda erit	$5\frac{31}{45}$
Tertia erit	$20\frac{3}{45}$
Quarta erit	$36\frac{6}{45}$
Quinta erit	$59\frac{12}{45}$
Summa erit	123

PROPOSITIO XI.

Problema.

Duos numeros reperire quorum differentia sit 4, & quadratorum differentia 144 maior quam 16 quadratum numeri 4.

Ponatur minor numerus 1R major, erit 1R + 4 cum eorum differentia sit 4 fiant eorum quadrata. Eritque minoris 1 q, majoris quadratum fiet multiplicando 1R + 4, per 1R + 4. Eritque 1q + 8R + 16. Auferatur primum quadratum 1q ex secundo 1q + 8R. + 16, restabit utriusque differentia 8R. + 16, quam voluimus esse æqualem numero 144; est ergo æquatio 8R + 16 = 144. Subtrahe utrinque 16, fiet æquatio 8R = 128. Divide per 8, habebis æquationem 1R = 16; quare minor numeruss erit 16, secundus 20, differentia est 4, quadratum primi est 256, secundi est 400, differentia est 144.

Speciosâ methodo sit differentia 4, idem quod B, & 144 D. Primus numerus sit A. Secundus erit A + B, fiat utriusque quadratum erit primum A2, secundum A2 + 2AB + B2. Subtrahatur unum ab alio, restat 2AB + B2, pro differentia quæ est D, habemus æquationem 2AB + B2 = D. Transfer B2, per antithesin erit 2AB = D — B2. Divide omnia per B, erunt 2A = $\frac{B}{D}$ — B, est autem D 144. Divide per B, seu 4, habebis 36; aufer B, seu 4, restat 2 A = 32, divide per 2, erit A = 16.

Notandum autem appositam esse in titulo conditionem ne æquatio fieret impossibilis.

PROPOSITIO XII.

Duos numeros reperire in proportione quintupla, quorum major additus ad 15. eandem summam efficiat, ac minor additus ad 55.

Sit primus numerus seu 1R, major erit 5R. cum dicantur esse in proportione quintupla, eritque $55 + 1R = 15 + 5R$. subtrahatur utrinque 1R. erit $55 = 15 + 4R$. subtrahe 15 utrinque erit æquatio $4R = 40$; divide per 4. erit, $R = 10$. sunt ergo numeri 10. & 50. qui additi ad 15. hoc est 50. ad 15. & 10. ad 55. efficiunt 65.

Speciosâ methodo sit 15 B, & 55 D. primus sit A. secundus erit 5A. eritque $B + 5A = D + A$ subtrahe 1A utrinque, erit æquatio $B + 4A = D$. transfer B. per antithesin erit $4A = D - B$ divide per 4. erit $A = \frac{D - B}{4}$. D autem erat 55. subtrahe B seu 15. restat 40. divide per 4 habebis $A = 10$.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Numerum quemcumque ut 78. ita dividere, ut minor pars contineat unam decimam tertiam majoris, & insuper octo unitates.

Minor pars supponatur esse 1R. + 8. major erit 13 R. addantur, fietque summa $14R + 8$. æqualis nempè numero 78. aufer utrinque 8. erit æquatio $14R = 70$. divide 70. per 14. erit $1R = 5$. & consequenter primus numerus erit 13. secundus 65.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Duos numeros reperire, qui ita se habeant, ut producto ex eorum ductu, per eorumdem differentiam diviso, quotiens sit 30.

Primus numerus quilibet esse potest, minor tamen numero 30. quare assumatur numerus 20. sitque major $20 + 1R$. sitque differentia 1R. multiplicentur $20 + 1R$. per 20. habebitur productus $400 + 20R$. quo diviso per 1R, debet quotiens esse 30; quare si 30. multiplicet 1R. restituetur idem numerus. fiat talis multiplicatio habebitur æquatio $30R = 400 + 20R$. subtrahe utrinque 20 R. restabunt $10R = 400$. quare una radix erit 40.

Primus ergo numerus est 20. secundus 60. differentia 40.

Productus 1200. divisus per 40. efficit quotientem 30.

Speciosâ methodo. 30 ponatur esse B. & primus numerus sit D 20. minor quam B, sit major $D + A$ productus ex D in $D + A$. erit $D2 + DA$. quo diviso per A. fiet quotiens B, hoc est ducto A in B. fiet eadem quantitas; est ergo æquatio $BA = D2 + DA$. transfer DA per antithesin fiet æquatio $BA - DA = D2$. est igitur D2 400. qui si dividatur per $B - D$ habebitur A; sed B est 30. subtrahe D seu 20. fit 10. divide 400 per 10. habebis differentiam 40.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Numerum invenire cujus quadratum multiplicatum per 20. efficiat numerum quintuplum cubi, ejusdem numeri.

Numerus quæsitus ponatur 1R. cujus quadratus 1q. multiplicetur per 20. fietque 20 q. dicitur autem esse quintuplus unius cubi. Eruntque $4q = 1c$. & quia eadem est ratio radicis ad absolutum, quæ cubi ad quadratum, erit $1R = 4$. revera quadratum radicis 4 est 16. qui multiplicatus per 20. efficit 320. quintuplum cubi 64.

Speciosa methodo sit 20 B. & numerus quæsitus A. eritque A 2. multiplicatus per B. seu A 2 B quintuplus A 3. ergo habemus æquationem $5A3 = A2B$. & omnibus divisis per A2. erit $5A = B$. & divisis per 5. erit æquatio $A = \frac{B}{5}$ erat autem B 20. divide per 5. habebis 4. pro valore unius A.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Numerum 80. ita dividere in duas partes, ut productus ex primâ in 26. superet productum ex secundâ in 20, 6 unitatibus.

Ponatur prima pars numeri 80. 1R. erit secunda $80 - 1R$. productus ex prima in 16 est 16 R. productus ex secunda seu $80 - 1R$. in 20 est $1600 - 20R$. qui numerus superatur 6 unitatibus à priori producto. Quare si illi addantur 6 unitates erit æquatio $2606 - 20R = 16R$. adde 20 R. erit æquatio $1606 = 36R$. divide 1606. per 36. & habebis pro una radice $44\frac{11}{18}$.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Numerum quemcumque ut 90 ita dividere, ut partes cum ipso sint in proportione Arithmetica.

Sit prima pars minor 1R. & major $90 - 1R$. sunt ergo arithmeticè proportionales 90, $90 - 1R$. 1R. quare aggregatum extremorum æquale erit medio bis sumpto. Est ergo æquatio $90 + 1R = 180 - 2R$. adde 2R fient $90 + 3R = 180$. subtrahe 90. restabit $3R = 90$. divide per 3. habebis $1R = 30$; sunt igitur in Arithmetica proportione 90. 60. 30.

Speciosâ methodo sit numerus 90. idem quod B. sit minor pars A erit major $B - A$. sunt ergo

Arithmeticè proportionales B. B — A. ergo B + A æquatur 2B — 2A & ablato B, erit æquatio A = B — 2A, & additis 2A. erit 3A = B & dividendo per 3 erit $A = \frac{B}{3}$. B erat 90. divide 90. per 3. fiet A = 30. ut priùs.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Invenire numeros, qui inter se multiplicati producant numerum decuplum minoris, & triplum majoris.

Ut vitentur fractiones sit ille numerus productus 30 R. eritque minor 3R. & major 10 R. qui si multiplicentur producent 30 q. erit ergo æquatio inter 30 q = 30 R. seu inter 30 R. & 30. sunt enim collaterales, quare 1 R. est 1 & 3R est 3. & 10. R. est 10. quare numeri quæsiti sunt 10 & 3.

Si productus ex multiplicatione duorum fuisset duplus majoris, & triplus minoris, factâ eâdem suppositione esset major 15R. & minor 10 R. & multiplicando unum per alium producerentur 150 q. est ergo æquatio 150 q. = 30 R. seu quia sunt collaterales 150 R = 30. & dividendo esset una radix $\frac{1}{5}$. quare esset minor $\frac{10}{5}$. seu 2. & major $\frac{15}{5}$. seu 3. productus 6 duplus majoris 3. & triplus minoris 2.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Numerum quemcumque ut 120. dividere si fieri potest in 6. numeros Arithmeticè proportionales qui se binario excedant.

Sit numerus 120. dividendus in 6. numeros Arithmeticè proportionales qui se binario excedant. Et primus seu minimus ponatur 1 R. Secundus erit 1 R. + 2. Tertius 1 R. + 4. Quartus 1 R. + 6. Quintus 1R. + 8. Sextus 1 R. + 10. summa omnium est 6R. + 30. quæ sunt æquales numero 120. subtrahe utrinque 30. remanet æquatio 6 R = 90. divide 90. per 6. habebis 1 R = 15. Primus ergo est 15. Secundus 17. Tertius 19. Quartus 21. Quintus 23. Sextus 25. qui simul sumpti efficiunt 120.

Speciosâ methodo sit 120. idem quod B. sitque 2. idem quod D. & primus seu minimus omnium A, secundus erit A + D. tertius A + 2D. quartus A + 3 D. quintus A + 4D. sextus A + 5 D. colligantur in unam summam fiet 6 A + 15 D = B transfer + 15 D per antithesin fiet 6 A = B — 15 D. divide omnia per 6. fiet $A = \frac{B}{6} - \frac{15 D}{6}$ quare si ex B seu 120. subtrahas 15 D seu 30. & reliquum dividas per 6. habebis 15 pro uno A.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Numerum quemcumque ut 120. dividere in decem partes Arithmeticè proportionales si fieri potest quorum primus sit 12.

Sit differentia numerorum 1R. & cum primus supponatur 12. secundus erit 12 + 1 R. tertius 12 + 2R. quartus 12 + 3 R. quintus 12 + 4R. sextus 12 + 5R. & sic deinceps usque ad decimum; summa omnium erit 20 + 45 R. qui numerus æqualis esse deberet numero 120. quod est impossibile. Quare concludes quæstionem esse impossibilem.

Ponatur alius numerus ut 360. Invenies æquationem 45 R. + 120. = 360. subtrahe utrinque 120. habebis æquationem 45 R. = 240. divide per 45. habebis 1R. = $5\frac{1}{3}$. primus igitur numerus erit 12. secundus $17\frac{1}{3}$. Tertius $22\frac{2}{3}$. quartus 28. quintus $33\frac{1}{3}$. & sic deinceps quorum summa adæquat numerum 360.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Duos numeros invenire in proportione tripla quorum majore ducto in 9 fiat productus excedens 140. unitatibus productum ex minore in 5.

Sit minor numerus 1 R. major consequenter erit 3R. cum dicantur esse in proportione tripla, major ducatur in 9. fiet 27 R. & minor in 5. fiet 5 R. major superat minorem 140. unitatibus; ergo si illæ addantur minori erit æqualitas, nempè 27 R = 5 R. + 140 subtrahe 5R. utrinque erit 22R. = 140. divide, habebis æquationem 1 R = $6\frac{4}{11}$ minor numerus, major $19\frac{1}{11}$. multiplica minorem per 5. fiet $31\frac{9}{11}$. & majorem per 9. fiet $171\frac{9}{11}$. excedens priorem 140 unitatibus.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Duos numeros in quintupla ratione invenire ut summa quadratorum sit decupla summa numerorum.

Numeri quæsiti supponantur 1 R. & 5 R. erunt quadrata 1 q. & 25 q. summa quadratorum 26 q. summa numerorum 6R. quæ ut sit æqualis summæ quadratorum multiplicari debet per 10. eritque æquatio 26 q = 60 R. & per hypobibasmum 26 R. = 60. divide habebis 1 R = $2\frac{4}{13}$. minor numerus; & major erit $11\frac{7}{13}$. summa $13\frac{11}{13}$. quadrata sunt $\frac{900}{169}$. & $\frac{22500}{169}$. summa $\frac{23400}{169}$. quæ summa decupla est summæ $13\frac{11}{13}$. seu $\frac{2340}{169}$

PROPO

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Duos numeros reperire in ratione quintupla ita ut minore subtracto ex 100. reliquum habeat rationem decuplam ad reliquum subtracto majore ex 60.

Erunt hi numeri 1R & 5R, subtrahe minorem ex 100. fiet $100 - 1R$. subtrahe majorem ex 60. fiet $60 - 5R$. cujus prior est decuplus; quare posterior multiplicetur per 10. ut fiat æqualis; erit ergo $100 - 1R = 600 - 50R$. transfer per antithesin 50R. seu adde 50R. fiet æquatio $100 + 49R. = 600$; subtrahe 100, erit æquatio $49R = 500$. divide, erit $1R = 10.\frac{10}{49}$. Quare minor numerus est $10.\frac{10}{49}$. major $51.\frac{1}{49}$. subtrahe minorem ex 100. relinquetur $89.\frac{39}{49}$; subtrahe majorem ex 60. relinquetur $8.\frac{48}{49}$. hunc numerum multiplica per 10. fiet $89.\frac{39}{49}$. quare prior est decuplus posterioris.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Reperire tres numeros in proportione tripla continuâ, ita ut productus ex primo in secundum, tertio sit æqualis.

Tres numeri quæsiti sint 1R. 3R. 9R. requiritur præterea ut productus ex primo 1R. in secundum 3R. hoc est 3q æquetur tertio seu 9R. habemus ergo æquationem $3q = 9R$. & per hypobibasmum, erit $3R = 9$. est ergo $1R = 3$. sunt igitur hi numeri 3.9.27. ut patet.

Debeat jam productus ex primo in tertium æquari medio, erit æquatio $9q = 3R$. & per hypobibasmum $9R. = 3$ divide erit $1R. = \frac{1}{3}$. sunt igitur numeri $\frac{1}{3}$. 1. 3.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datum numerum 100. in tres numeros partiri ut primus cum medio sit triplus reliqui, tertius cum medio sit quadruplus primi.

Sit primus 1R, tertius cum medio est quadruplus primi, ergo summa illorum est 4R, sed eorum summa habetur etiam subtrahendo primum ex 100, ita ut fiat $100 - 1R$. habemus ergo æquationem $4R = 100 - 1R$; adde 1R. fiet æquatio $5R = 100$, divide erit $1R = 20$. primus ergo est 20. reliqui duo 80. Jam.

Sit tertius 1R. seu alia radix, eritque medius $80 - 1R$. & primus cum medio erit $100 - 1R$. hic autem est triplus tertii, ergo $100 - 1R. = 3R$...... adde 1R. fiet æquatio $100 = 4R$. divide erit $1R = 25$. ergo tertius est 25. & cum primus sit 20. medius erit 55. sunt ergo numeri 20. 55. 25. primus cum medio efficit 75. triplum tertii 25. tertius cum medio efficit 80. quadruplum primi 20.

Methodo speciosâ sit 100. B. sitque prima ejus pars A, secunda & tertia erunt 4A; habentur item si subducamus A ex B; habemus ergo æquationem $4A = B - A$ adde unum A. fiet æquatio $5A = B$ divide per 5 fiet $A = \frac{B}{5}$.

Sit item tertia pars E, & consequenter secunda cum prima erit $B - E$; sed prima cum secunda nempè $B - E$ est tripla tertiæ E, est ergo æquatio $B - E = 3E$, adde unum E, fiet æquatio $4E = B$ & dividendo per 4. Erit $E = \frac{B}{4}$ quare prima erit quinta pars ipsius B nempè 20. & tertia erit quarta pars ejusdem B, seu 25.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Tres numeros reperire qui ita se habeant ut summa primi, & secundi, superet tertium 20 unitatibus, secundi & tertii summa superet primum 30. unitatibus, summa tertij & primi superet secundum 40. unitatibus.

Cùm primus & secundus superent tertium 20 unitatibus; addatur utrinque tertius erit summa primi, secundi & tertii, major quam bis tertius 20. unitatibus. Ponatur hæc summa primi, secundi, tertii, esse 1R. tertius bis, erit $1R - 20$. ergo tertius erit $\frac{1}{2}R - 10$. si igitur auferas ex summa trium, nempè ex 1R. $\frac{1}{2}R - 10$. restabit pro summa primi & secundi $\frac{1}{2}R + 10$.

Secundò cum secundus & tertius superent primum 30 unitatibus, si utrinque addatur primus erit summa trium, major primo bis 30 unitatibus, quare primus, bis + 30 æquabitur summæ trium seu 1R. Quare primus bis erit $1R - 30$. & primus semel $\frac{1}{2}.R. - 15$.

3. Cum summa primi & tertii superet secundum 40 unitatibus. Si addatur utrinque secundus, summa omnium erit æqualis secundo bis + 40. & consequenter summa omnium seu 1R, minus 40. æqualis erit secundo bis, & secundus erit $\frac{1}{2}.R - 20$. habemus ergo primum $\frac{1}{2}.R. - 15$. secundum $\frac{1}{2}.R - 20$. tertium $\frac{11}{2}.R - 10$. fiat summa omnium erit $1.\frac{1}{2}.R - 45$. Erat autem eadem summa 1R. habemus ergo æquationem $1.\frac{1}{2}R. - 45. = 1R$. adde 45. fiet æquatio $1.\frac{1}{2}R = 1R + 45$. aufer 1R. erit æquatio $\frac{1}{2}.R. = 45$. & $1R = 90$.

Quare primus erit. 30. seu 45.—15.
[illegible]undus erit. 25. seu 45.—20.
[illegible] erit. 35. seu 45.—10.
[illegible] primi & secundi est 55. major quam [illegible]nitatibus.

Summa secundi & tertii est 60. superat primum, unitatibus 30.

Summa tertii & primi est 65. superans secundum unitatibus 40.

Speciosâ methodo, sit B.20. D.30. F.40. numeri quæsiti A. E. O.

Erit $A + E = O + B$.

Rursus $O + A = E + F$. & $E + O = A + D$.

Ergo $2A + 2E + 2O = A + E + O + B + D + F$.

Et abjecto utrinque $A + E + O$: erit $A + E$

$+ O = B$, $+ D + F$, summa $B + D + F$ sit G; cum $A + E = O + B$ addatur utrinque O erit $A + E + O$ seu G æquale $2O + B$, quare $O + \frac{B}{2} = \frac{G}{2}$ & per antithesim $O = \frac{G}{2} - \frac{B}{2}$. Deinde cum $E + O = A + D$, addatur utrinque A; erit $A + E + O$ seu G æquale $2A + D$, & dividendo per 2 erit $A + \frac{D}{2} = \frac{G}{2}$ & per antith. $A = \frac{G}{2} - \frac{D}{2}$.

Tertiò cum $O + A = E + F$, addatur utrinque E, erit $A + E + O$ seu G æquale $2E + F$, & dividendo per 2, erit $E + \frac{F}{2} = \frac{G}{2}$ & per antithesin erit æquatio $E = \frac{G}{2} - \frac{F}{2}$.

Quare cum G sit idem quod $B + D + F$ seu 90 $\frac{G}{2}$ erit 45.

A erit $45 - \frac{B}{2}$ seu minus 10. hoc est 35.

E erit $45 - \frac{F}{2}$ seu minus 20. hoc est 25.

Et O erit $45 - \frac{D}{2}$ seu minus 15. hoc est 30. quibus conveniunt recensitæ proprietates.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Tres numeros reperire tales ut si primus secundo det sui tertiam partem, & secundus tertio quartam sui partem, & tertius primo quintam sui partem fiant æquales.

Ponatur primus 3R. ad vitandas fractiones, secundus assumatur quatuor unitatum ut habeat quartam partem, hic secundus det quartam partem tertio & accipiat tertiam primi, fiet $1R + 3$ cui æqualis primus ubi quintam acceperit, & dederit tertiam: det tertiam erit 2R. quas si auferas ex $1R + 3$. restabit $3 - 1R$ quinta pars tertii. ergo tertius erit $15 - 5R$. & ubi dederit quintam partem erit $12 - 4R$. & ubi acceperit unitatem, seu quartam partem secundi, erit $13 - 4R$. æqualis secundo ubi dededit & acceperit est; ergo æquatio $13 - 4R = 1R + 3$. subtrahe 3 fiet $10 - 4R = 1R$. adde 4R fiet $10 = 5R$. divide 10 per 5. fiet $1R = 2$.

Primus igitur trium radicum erit 6. secundus 4. tertius $15 - 5R$ seu $15 - 10$. erit 5. sunt ergo numeri 6.4.5. si primus dederit tertiam seu 2. restabunt 4. & acceperit quintam tertii, erit 5. pariter quartus accipiens 2. à primo, & dans unum tertio fit 5. denique quintus accipiens 1. à secundo & dans 1. primo, fit etiam 5.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Numerum invenire qui multiplicans duos numeros ut 200. & 5. efficiat quadratum & radicem ejus.

Numerus quæsitus ponatur 1.R. qui multiplicet numeros 200. & 5. fientque 200 R. & 5R. quadratum hujus posterioris est 25q. dicitur etiam 200R. esse quadratum ejusdem; quare habemus æquationem $25q. = 200 R.$ & per hypobibasmum $25R. = 200$. divide per 25 erit 1R. 8. quæ multiplicans 200. efficit quadratum 1600. & multiplicans 5. producit 40. radicem ejus.

Methodo speciosâ sit 200. idem quod B. & 5. idem quod D, sitque numerus quæsitus A. qui multiplicans B. efficit AB. & multiplicans D facit AD; fiat quadratum AD, illud erit $A2D2$. quod æquale est AB. Divide omnia per A, erit æquatio $B = AD2$, divide omnia per $D2$ habebis æquationem $\frac{B}{D2} = A$, divide ergo B seu 200. per $D2$ seu 25. & habebis 8.

Hæc exempla sufficient ut percipiatur artificium regulæ algebræ, & præceptorum usus addiscatur. Alia tamen subjiciam quorum solutionem investigabit Tyro, qui in iis se exercere volet.

VARIA PROBLEMATA.

1. Duos numeros invenire quorum summa 20, & excessus quadratorum 80. Invenies primum 8, secundum 12.

2. Duos numeros invenire in proportione tripla: ita ut summa quadratorum ad summam numerorum rationem habeat decuplam, si minor ponatur 1R. invenies æquationem $10q. = 40R.$ & per hypobibasmum $10R. = 40.$ & $1R. = 4$.

3. Numeros invenire in proportione tripla, ita ut excessus quadratorum, sit duodecuplus excessûs numerorum, æquationem invenies $8q. = 24 R.$ seu $8 R. = 24$ & $1R. = 3$.

4. Duos numeros invenire in proportione quadrupla, ita ut pruductus ex eorum multiplicatione, sit summæ eorum septuplus, vel sit eorum excessûs septuplus. Invenies æquationem $4 q. = 35R.$ seu $4R. = 35$. eritque $1R. = 8\frac{3}{4}$.

5. Numeros invenire in proportione tripla, ita ut quadratum majoris sit septuplum quadrati minoris. vel quadratum minoris sit septuplum majoris numeri.

6. Datis duobus numeris tertium invenire, ita ut duo quilibet simul additi, & per tertium seorsim multiplicati, faciant tres numeros arithmeticè proportionales.

7. Invenire duos numeros quorum excessus sit 7. & excessus quadratorum sit 100. major quam 7.

8. Invenire tres numeros ita ut primus cum numero 73. summæ reliquorum sit duplus, secundus cum 73. summæ reliquorum sit triplus, tertius cum 73. summæ reliquorum sit quadruplus. Supponatur summa trium esse 1R. cum primus + 73. sit duplus secundi & tertii addatur utrobique primus; erit primus ter + 73. duplus trium, seu æqualis 2R. quare primus $+ 24\frac{1}{3} = 1R.$ &c.

9. Tres numeros invenire, ita ut primus, cum media parte summæ reliquorum faciat 42. Secuncundus cum [illegible]ente reliquorum faciat 36. & tertius cum duodecima parte primi, & secundi faciat 39. Sit primus 1R. &c.

10. Numerum quemlibet ut 30. dividere in duas partes, quarum prior ducta in 10. numerum efficiat 20. unitatibus majorem, producto ex secunda in 40.

11. Numerum quemlibet ut 50, ita secare ut genitus ex prima parte in 10. sit triplus geniti, ex secunda parte in 30.

12. Tres numeros reperire in continua proportione sesquitertia, ita ut productus ex minore in medium sit majoris quintuplus.

Numeri ponantur 9R. 12R. 16R.

13. Numerum quemcumque ut 80 in tres partes dividere, ita ut primâ ductâ in 4. & secundâ in

in 5. & tertiâ in 7. producantur tres numeri in continuâ proportione quadruplâ.

14. Datum numerum ut 178. in tres partes dividere, ut divisâ primâ parte per 5. & secundâ multiplicatâ per 8. & tertiâ divisâ per 6. idem semper numerus proveniat.

15. Duos numeros in proportione tripla reperire; ita ut quadrans minoris in mediam partem majoris ductus, producat numerum 96.

16. Numerum invenire qui multiplicatus per quemcumque numerum ut 5. productum efficiat, per quem si dividas numerum 60. quotiens ad numerum inventum rationem habeat sesquialteram.

17. Tres numeros Arithmeticè proportionales reperire; ita ut numerus ex eorum continua multiplicatione productus, nempè ut primus in secundum, & productus in tertium ducatur, sit eorum summæ quintuplus.

Positis numeris 1R, 2R. 3R. invenietur æquatio 1 c. = 5R. vel per hypobibasmum 1q = 5: esset igitur 1R. radix quadrata numeri 5.

18. Numerum quadratum invenire, qui in suam radicem quadratam ductus faciat 64 Sit ille numerus 1q. ejus radix erit 1R. ducatur in suam radicem, productus erit 1c. ergo 1c. = 64. educatur radix cubica nempè 4. cujus quadratum 16. satisfacit quæstioni.

19. Numerum invenire cujus radix quadrata ad ejusdem radicem cubicam rationem habeat triplam. Ponatur numerus utramque radicem habens, nempè 1qc. ejus radix cubica erit 1q. & quadrata 1c. est ergo æquatio inter 1c. = 3q. & per hypobibasmum 1R. = 3. cujus quadrato cubus 729. est numerus quæsitus radicem habens cubicam 9. quadratam 27.

20. Quinque numeros invenire, ita ut quatuor sine primo, efficiant 127. & quatuor sine secundo efficiant 119. & quatuor sine tertio efficiant 104. & quatuor sine quinto 97. Ponatur quintus qui & maximus 1R.

21. Duos numeros invenire in proportione tripla, ita ut unus in alterius quadratum ductus efficiat 192.

22. Quemcúmque numerum ut 30. in tres partes continuè proportionales dividere, ita ut productus ex prima in tertiam, sit quadruplus producti ex primâ in secundam.

23. Invenire numerum qui ductus in 7. numerum efficiat, cui si adduntur 60. fiat summa octupla, numeri inventi.

24. Datum numerum ut 10. dividere in duas partes quarum cubi efficiant 370. numerum majorem quartâ parte cubi ipsius 10.

25. Numerum reperire cujus cubus, sit noncuplus quadrati sui.

26. Duos numeros reperire in proportione quintupla, ita ut minore in quadratum majoris ducto, producatur 500.

27. Invenire numerum, qui cum suo quadrante superet 100. eodem excessu quo 100. eumdem numerum superat.

28. Progressionem Arithmeticam constituere, cujus primus sit 5. ultimus 10. & summa omnium 105.

29. Progressionem Geometricam constituere in datâ proportione ut sesquialtera, cujus ultimus terminus datus sit 19683. & summa 55593.

30. Progressionem Geometricam ut sesquialteram constituere, dato primo termino 1728. & summâ 55593.

31. Datum numerum ut 40. in duas partes dividere, ita ut summa quadratorum sit 928. major quam 800. dimidium quadratum numeri 40. & minor quam 1600. quadratum ejusdem numeri 40. Supponatur primus 20 + 1R. & alter 20 — 1R.

32. Invenire duos numeros in proportione quintupla, qui se superent quocúmque excessu.

33. Invenire numerum à quo si subtrahas duos, verbi gratia 100. & 20. majus residuum, minoris sit triplum.

34. Dare numerum quem si à duobus numeris, verbi gratiâ 100. & 20. subtrahas; majus residuum minoris sit quadruplum.

35. Invenire duos numeros, ita ut prior acceptis à posteriore 30 unitatibus, sit residui duplus.

36. Invenire tres numeros, ut bini simul sumti, faciant imperatos numeros: verbi gratiâ primus, & secundus efficiant 20. secundus & tertius 30. tertius & primus 40. sit summa omnium 1R.

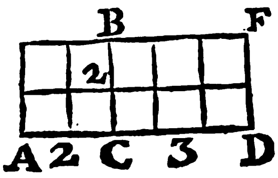
37. Quatuor numeros reperire, ut terni quique imperatos numeros efficiant.

38. Invenire duos numeros, qui tales sint, ut intervallum ipsorum, & productus ex eorum multiplicatione numeros propositos efficiant.

ALGEBRÆ
LIBER TERTIUS.

QVÆ hactenus explicuimus circa regulam algebræ communia, & faciliora fuerunt, utpote æquationibus simplicibus contenta; hoc est vel radicis cum numero absoluto, vel alterius cujuscumque potestatis, simplicis & nullo modo affectæ cum eodem numero absoluto, cujus radicem extrahendam præcepimus. Idem etiam explicandum est in æquationibus compositis, cum enim communiter radix sit in quæstione, eam inquirimus, & extrahimus. Proponatur enim æquatio 1q. + 4R. = 12. *quæritur radix illius quadrati, quod auctum* 4. *radicibus æquale est numero* 12.

Dicuntur hæ æquationes quadraticæ affectæ sub latere, & coëfficiente longitudine. Sit enim quadratum AB, cujus latus AC, aut BC. adjungatur linea CD, dicetur CD coëfficiens longitudo.



Fietque 1q. + 3R. *ita ut CF sit planum sub coëfficiente CD*, 3. *& sub latere CB*, ●. *Quare quadratum afficitur adjunctione plani, sub latere BC, & coëfficiente CD, fitque* 1q + 3R *idem quod planum AF: sed de his fusius inferius; possunt autem esse tres affectiones quadrati.*

Primò potest affici adjunctione plani sub coëfficiente, & sub latere, seu radice, ut cum numerus radicum affirmatur de quadrato, sicut in hoc exemplo.

Secundò potest affici quadratum mulcta, seu negatione plani sub latere & coëfficiente ut 1q. — 3R.

Tertiò potest quadratum negari de plano sub coëfficiente, & sub latere ut 3R. — 1q.

Notandum item aliquos solum quadratum relinquere, & affectionem adjungere ipsi homogeneo comparationis; ut si proponatur hæc æquatio 1q. + 3R. = 10, *esset eadem virtualiter* 1q. = 10. — 3R. *nam per antithesin* 3R. *transit ab una parte æquationis, in aliam sub contrario signo. Pariter si proponatur hæc æquatio* 1q. — 3R = 4. *potest fieri alia* 1q. = 4 + 3R. *denique si ponatur hæc* 3R. — 1q. = 8. *potest mutari in hanc* 3R. = 8. + 1q. *& in hanc* 3R. — 8. = 1q. *seu* 1q. = 3R. — 8. *Et hoc modo illas concipiemus deinceps, ut* 1q. *maneat solum ex una parte comparationis: quærimus igitur regulam generalem ad inveniendam radicem quadratam quadrati ita affecti.*

PROPOSITIO I.

Problema.

Radix quadrata summæ quadrati semissis radicum, & numeri absoluti vel residui subtracto numero absoluto ex quadrato semissis radicum, aucta, vel mulctata eâdem semisse exhibet radicem quadratam æquationum quadraticarum.

Explicatur. Primò regula, si proponatur æquatio, in qua quadratum afficitur plano sub radice & coëfficiente.

Primò adde vel subtrahe ex quadrato semissis radicum numerum absolutum prout hic numerus absolutus habuerit signum + aut —.

Hujus aggregati, aut residui extrahe radicem quadratam.

Tertiò huic radici adde, vel subtrahe semissem numeri radicum, prout numerus radicum affectus fuerit signo + aut signo —, hæc summa aut residuum erit radix quæsita.

In exemplo meliùs regula intelligetur. Proponatur hæc æquatio 1q. = 72. — 6R. semissis radicum est 3. cujus quadrato 9 adde 72. numerum absolutum, cum virtualiter præferat signum +, fiet summa 81, ex qua educes radicem quadratam 9. Ex ea subtrahe 3. semissem radicum 6. cum radices præferant signum — & restabit 6 radix quæsita; nam illius quadratum 36.6 radices sunt etiam 36. Clarum autem est 72. — 36. seu 36. esse quadratum radicis 6.

Sit secundò 1q. = 6. R. + 72. adde pariter 72. quadrato 9. semissis radicum 3. Quia numerus absolutus præfert signum + fitque summa 81 è qua extraho radicem quadratam 9. cui addo 3. semissem radicum, quia numerus radicum præfert signum +. dico quadratum numeri 12. esse æqualem numero 72, + plus 12 sexies sumpto.

Tertiò proponatur 1q. = 18 R. — 72. quadratum semissis radicum seu 9. est 81. à quo subtraho 72. Cum id indicet signum — relinquuntur 9. cujus radix quadrata 3. addatur semissi radicum 9. fit radix 12 satisfaciens quæstioni.

Hæc tamen æquatio amphibola est duas habens radices satisfacientes quæstioni. Si igitur radix extracta 3. auferatur ex semisse radicum 9. restabit 6. alia radix satisfaciens quæstioni.

PROPO

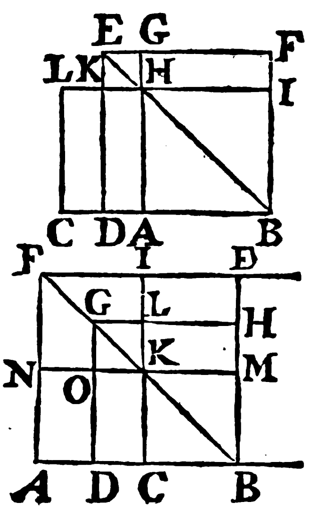
PROPOSITIO II.

Theorema.

Demonstratur prima praxis solvendæ æquationis quadraticæ.

Praxis prima versabatur circa æquationem hujusmodi 1q. $=$ 72.— 6R.

Sit linea AB æqualis lateri, seu radici quæ inquiritur, illi in directum adjiciatur AC 6 unitatum, seu æqualis numero radicum; hæc bifariàm secetur in D, eritque AD, trium unitatum semissis numeri radicum, excitetur supra lineam BD quadratum DF, ductaque diagonali EB, agantur AG, IK eruntque quadrata AI, DF (*per* 4.2.*Eucl.*) item rectangula DH, HF æqualia erunt; sicut CK, DH.



Investigo primò quadratum DF, hoc modo; dicitur quadratum AI, cujus latus quæritur esse 72.minus 6R.hoc est si intelligantur illi quadrato addi 6 R.erit 72; sed 6 Radices sunt rectangulum comprehensum sub AC quæ est 6. & sub radice AH, seu rectangulum CH, aut rectangula DH, HF illi æqualia: habemus ergo Gnomonem DIG esse 72. cui si addatur KG quadratum semissis radicum AD, seu 9. habebitur totum quadratum DF esse 81. è quo si extrahas radicem quadratam 9. habebitur BD, & subtrahendo AD 3. restabit AB 6 unitatum, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Demonstratur secunda praxis solvendæ æquationis quadraticæ 1q. $=$ 6R. + 72.

Fuerat secundo loco proposita hæc æquatio 1q. $=$ 6R. + 72.

Sit AB radix quæ inquiritur, & AC ponatur æqualis numero radicum, quæ bifariam dividatur in D. Tum super AB describatur quadratum AE, ductaque diagonali BF, ducantur perpendiculares DG, CI, & per puncta G & K parallelæ NM, GH inquiritur primò quadratum DH.

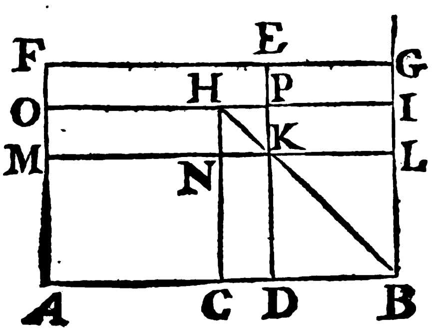
Demonstratio. Dicitur in æquatione quadratum AE, esse æquale numero absoluto + valore 6 Radicum, sed rectangulum AI est valor 6 Radicum, cum sit comprehensum sub AC numero radicum, & radice AF. ergo rectangulum CE erit numerus absolutus 72. Si pro rectangulo LE substituas DK illi æquale, erit Gnomon LMCO æqualis numero 72; cui si addas quadratum OL 9. semissis numeri radicum DC, habebis totum quadratum DH 81. & extrahendo radicem cognoscetur DB 9. cui addendo AD semissem numeri radicum cognoscetur tota AB.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Demonstratur tertia praxis æquationis quadraticæ 1q. $=$ 18*R*. — 72.

Tertium exemplum æquationis quadraticæ erat 1q. $=$ 18R—72.



Sit AB æqualis numero radicum 18, quæ bifariàm dividatur in C, eruntque AC, CB singulæ 9. & quadratum CI erit 81. inquiratur AD. Radix quadrati AE, supponitur enim AE esse quadratum sicut & CI; ductâ autem diagonali HB, & parallela LM, erunt rectangula PL, PG æqualia, sunt enim lineæ DA, DE æquales, sunt etiam æquales BC seu CA, & BI seu DP; quare EP & CD æquales erunt seu FP & PK.

Demonstratio. Proposita æquatio asserit quod si ex valore 18. radicum seu rectangulo AG comprehenso sub AB numero radicum & radice AF, si inquam ex tali rectangulo auferas 72. habebitur quadratum AE, est ergo DG, aut Gnomonem si subtrahas ex quadrato CI semissis radicum CB restabit quadratum NP. Quare jubemus in regula, ut numerus absolutus subtrahatur ex quadrato semissis numeri radicum, scilicet ex 81. subtrahitur 72. restat 9. pro quadrato NP. extrahimus radicem quadratam habemusque CD, cui si addamus semissem numeri radicum seu AC 9 fiet AD radix quadrati AE.

Ostendo iisdem positis quadratum DL satisfacere quæstioni, nempe positâ AB pro numero radicum, erit rectangulum AL valor radicum, æquatio autem indicat si subtrahas 72. ex AL restabit quadratum DL, est igitur AK 72. AK autem componitur ex AN, & CK, pro AN substituo CL; & pro CK, rectangulum KI eritque Gnomon, PLDN æqualis 72. Quare si ex quadrato CI, semissis numeri radicum, auferas 72; habebis quadratum NP cujus radicem NK, aut CD, si subtrahas ex semisse radicum BC, habebitur BD radix quæsita.

PROPO

PROPOSITIO V.

Theorema.

Methodus Diophanti, explicandi æquationes quadrati affecti sub latere & coëfficiente $5q + 10R = 175$.

Praxis Diophanti ferè cum superioribus coincidit, quamvis prima fronte diversa videatur, hanc in exemplo diversitatem, & convenientiam aptissimè aperiam.

Proponatur hæc æquatio $5q + 10R = 175$. quæ cum ista coincidit $5q = 175 - 10R$.

Primò multiplica numerum quadratorum 5. per numerum absolutum 175, huic adde 25. quadratum semissis numeri radicum, summa erit 900. ex qua extrahes radicem quadratam 30; ex ea subtrahe 5. semissem numeri radicum, restabit 25. valor quinque radicum; divide per 5. numerum quadratorum habebitur valor unius radicis.

Demonstratio per comparationem praxis Diophanteæ cum vulgari instituetur.

COMMUNIS.

A.	$5q + 10R = 175$.		
B.	$1q + 2R = 35$.		
	Seu $1q = 35 - 2R$.		
C.	q. semissis numeri radicum	1.	Adde
D.	numerum absolutum	35.	
E.	Summa	36.	
F.	Radix quadrata	6.	
G.	Subtrahe semissem radicum	1.	
H.	Restat 5. valor unius radicis.		

DIOPHANTI.

K. $5q + 10R = 175$.
L. 175.
M. Per 5. numerum q. multiplica.
N. Productus 875.
O. Adde 25. q. semissis radicum.
P. Summa 900.
Q. Radix q. 30.
R. Subtrahe 5. semissem radicum.
S. Restat 25. valor quinque radicum.
T. Divide per 5. numerum quadr.
V. Restat 5. valor unius radicis.

Praxis communis primò jubet dividere singulos terminos æquationis A per 5. numerum quadratorum, ut fiat æquatio B, tum additur numero 35 quadratum dimidiarum radicum fitque numerus E è quo educitur radix quadrata.

Praxis Diophanti relinquit æquationem K, quod perinde est ac si æquatio B multiplicata esset per 5. tum multiplicatur numerus L 175. per 5. numerum quadratorum fitque numerus N 875. Est ergo D 35. ad 875. in duplicata ratione 1. ad 5, cum intervenerit duplex multiplicatio per 5: & cum quadratum C ad quadratum O sit etiam in duplicata ratione (*per 20. 6.*) summa E ad summam P erit in duplicata ratione 1. ad 5. & cum radices sint in subduplicata ratione quadratorum, erit radix F, ad radicem 30, ut 1 ad 5. Cum autem semisses radicum 1. & 5. sint etiam in eadem ratione, factâ utrinque subtractione erit H ad S. ut 1 ad 5; quare si S dividatur per 5. numerum quadratorum, erunt H, & V æquales.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

2. *Praxis Diophanti in explicandis æquationibus quadraticis* $4q - 16R = 660$.

Sit proposita æquatio $4q - 16R = 660$. isti æquivalens $4q = 16R + 660$. est ergo casus secundus praxis communis.

COMMUNIS.

A	$4q = 16R +$	660.	
B	$1q = 4R +$	165.	
C	qu. semissis radicum	4.	Adde
D	numerus absol.	165.	
E	Summa	169.	
F	Radix qu.	13.	Adde
G	Semissis Rad.	2.	
H	Valor radicis	15.	

PRAXIS DIOPHANTI.

K.	$4q - 16R =$	660.	
L.	Numerus absol.	660.	
M.	Per numerum q. 4. multiplica.		
N.	Productus	2640.	Adde
O.	Quadratum semis. R.	64.	
P.	Aggregatum	2704.	
Q.	Radix qu.	52.	Adde
R.	Semissis Rad.	8.	
S.	Summa	60.	
T.	Divide per num. q.	4.	
V.	Restabit unius radicis valor	15.	

Eodem modo demonstratur hæc Diophanti praxis quo superior; ostendam enim similiter rationem aggregati E, 169 ad aggregatum P 2704. esse duplicatam rationis 1 ad 4. & consequenter radices F & q esse ut 1 ad 4. & additis G & R, quæ sunt in eadem ratione H & S esse ut 1 ad 4. quare dividendo S per 4. numerum quadratorum fient H & V æquales.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

3. *Methodus Diophanti in explicandis æquationibus quadraticis in quibus quadratum negatur de radicibus* $56R - 4q = 192$. *vel* $4q = 56R - 192$.

COMMUNIS.

A.	$4q = 56R - 192$.		
B.	$1q = 14R - 48$.		
C.	qu. semissis radicum	49.	
D.	Numerus absolutus	48.	Subtrahe
E.	Residuum	1.	
F.	Radix quadr.	1.	Adde
G.	Semissis numeri Rad.	7.	
H.	Valor unius radicis	8.	
	Vel ex G semisse Num. radicum	7.	
F.	Subtrahimus Radicem quadram	1.	
	Restat K Radix minor	6.	

DIOPHAN

DIOPHANTI

A.	$4 = 56R - 192$.		
B.	Numerum absolutum		192.
M.	Per numerum qu. multipl.		4.
N.	Productum	Subtrahe	768.
O.	Ex quadrato semissis R.		784.
P.	Residuum		16.
Q.	Residui Radix q.		4. } Adde
R.	Semissis numeri Radicum		28. }
S.	Fit summa Rad.		32.
T.	Divide per numerum q.		4.
V.	Habebis valorem unius Radicis		8.

Vel ex semisse numeri Radicum	28.
Subtrahe radicem inventam q	4.
Restat valor 4 radicum	24.
Divide per numerum quadratorum.	4.
Restabit V valor unius radicis	6.

Eadem Demonstratio huic methodo applicari potest.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Praxis reducendæ æquationis quadraticæ $1q. + 10R. = 96.$ *seu* $1q. = 96. - 10R$

Proponatur æquatio $1q. + 10R. = 96.$ solvenda nempe quæritur valor unius radicis. Sumatur latus quadrati nempe 1 R. cui addatur semissis numeri radicum, fietque $1R. + 5$. fac illius quadratum multiplicando $1R. + 5$. per $1R. + 5$. fiet quadratum $1q. + 10R. + 25$. quod quadratum majus est quam primò propositum quadratum 25 unitatibus. Addantur hæ 25. unitates fietque æquatio $1q. + 10R. + 25 = 121$. utriusque hoc est $1q. + 10R. + 25$. & 121; extrahantur radices quadratæ, quæ erunt $1R. + 5$. & 11. & quia quadrata sunt æqualia, radices æquales erunt, quare erit æquatio $1R. + 5. = 11$. & subtractis 5 unitatibus. Restat una radix æqualis 6.

Demonstratio. Procedit quasi per attentationem, quærimus enim radicem quæ multiplicata per seipsam faciat quadratum, effectum eodem modo quo in æquatione exhibetur; quare non debuit esse radix pura, sed radix cum addito. Addimus igitur dimidium numeri radicum, ut idem numerus radicum proveniat. Quadratum autem quod producitur erit paulò majus quam sit illud quod exhibetur, nempe 25 unitatibus: quare si addantur hæ 25. unitates homogeneo comparationis fiet æquatio inter duo illa quadrata, & consequenter erit æquatio inter radices nempe $1R. + 5 = 11$. Convertimus ergo æquationem quadraticam in quadraticam simplicem: & artificium in eo consistit quod proponitur radix quæ satisfacere creditur quæstioni.

Hæc praxis diligenter notanda est, potestque habere usum, quoties occurrunt aliæ æquationes difficiliores.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Praxis reducendæ æquationis quadraticæ $1q. - 8R = 425.$ *vel* $1q. = 8R + 425.$

Eadem methodo solvere poterimus hanc æquationem $1q - 8R. = 425$. Assumatur latus $1R. - 4$. ut ejus quadratum quam proximè accedat ad propositum, multiplica $1R. - 4$ per $1R. - 4$. ut habeas ejus quadratum, producetur $1q. - 8R. + 16$. paulò majus quam requiratur; adde ergo homogeneo comparationis 16. fiet æquatio $1q. - 8R. + 16 = 441$. utriusque extrahatur radix. habemus $1R. -$ & 21. habemus ergo æquationem $1R. - 4. = 21$. adde utrinque 4. Habebimus æquationem $1R. = 25$.

PROPOSITIO X.

Problema.

Praxis reducendæ æquationis quadraticæ $1q. + 75 = 20R.$ *vel* $1q. = 20R - 75.$

Sit hæc æquatio $1q. = 20R. - 75$. hanc nonnulli revocant ad hanc $1q. - 20R. + 75 = 0$. Assume pro radice $1R. - 10$. hujus quadratum erit $1q. - 20R. + 100$. majus quam propositum 25 unitatibus. Habemus ergo æquationem $1q. - 20R. + 100 = 25$. extrahantur radices quadratæ quæ æquales erunt; nempe $1R. - 10 = 5$. & additis 10. erit æquatio $1R. = 15$.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Methodus universalis Stevini in reducendis æquationibus.

Hæc methodus universalissima, non censebitur Geometrica, eò quòd per attentationem procedat: in eo igitur consistit ut assumat numerum, quem satisfacere quæstioni existimat, eumque examinet secundùm quæstionis circumstantias, ut exemplo clariùs patebit.

Sit proposita æquatio $1q + 75 = 20R$. existimetur 10. esse valor unius radicis eruntque $20R = 200$. unum quadratum erit 100. cui addendo 75. fient 175. quadratum ergo deficit à radice. Augeatur valor radicis, & ponatur esse 15; quare 20 R. efficient 300. quadratum radicis 15. est 225. cui adde 75. fiet æqualitas inter $225. + 75. = 300$.

Hæc praxis non est negligenda, potestque in insolubilibus adhiberi.

PROPOSITIO XII.

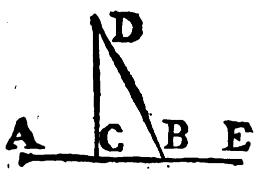
Problema.

Investigatio Geometrica quadrati æqualis numero absoluto — aliquibus radicibus ex Nonio.

Proponatur hic numerus 55 — 6R. quæritur radix illius quadrati, hoc est quæritur radix cujus quadratum æquale sit 55 — 6R. proponitur ergo æquatio 1q. = 55. — 6R. vel quod idem est 55 — 1q = 6R.

Supponatur recta AB pro numero radicum, secta bifariàm in C, erigatur perpendicularis CD, quæ sit radix numeri absoluti 55. connectatur CD cui CE sit æqualis: dico, quadratum rectæ BE, cum rectangulo sub AB, BE, esse æqualem numero 55. seu quadrato rectæ CD.

Demonstratio (*per* 47. 1.) quadratum rectæ BD seu CE; æquale est quadratis CB, CD; sed



quadratum ex CE (*per* 4. 2.) æquale est quadratis ex CB, & BE, & rectangulo bis sub CB & BE, hoc est rectangulo sub AB, BE; ergo quadrata CD, CB, æqualia sunt quadratis CB & BE, & rectangulo sub AB, BE, & auferendo utrinque quadratum CB, erit qnadratum CD, æquale quadrato BE, & rectangulo sub AB, BE. Quod erat demonstrandum.

Quare hæc æquatio facilè reducetur. Adde quadratum CB semissis numeri radicum, ad quadratum CD, seu numerum absolutum, fit quadratum ex DB, seu CE; quare si ex hoc aggregato extrahas radicem quadratam, innotescet CE, ex qua si auferas BC semissem radicum, restabit radix BE, per quam divides 55, seu numerum absolutum, ut habeat 6R. atque hic 1. casus.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Investigatio Geometrica quadrati æqualis numero absoluto + aliquibus radicibus.

Proponatur secundus casus 1q. = 6R. + 55. sitque AB numerus radicum, CD radix numeri absoluti 55. juncta pariter rectâ BD, cui æqualis sit CE, dico quadratum rectæ AE æquale esse, quadrato CD + rectangulo sub AB, AE.

Demonstratio. (*Per* 2. 2.) quadratum ex AE, æquale est rectangulo sub AE, AB, & rectangulo sub AE, EB: adde utrinque quadratum BC, & pro quadrato BC & rectang. sub AE, EB repone quadratum CE illis æquale (*per* 6. 2.) quare quadrata AE, BC æqualia sunt rectangulo sub AE, AB, & quadrato CE aut BD, pro quo repones quadrata BC, CD illi æqualia (*per* 47. 1.) & ablato utrinque BC. restat quadratum ex AE æquale esse rectangulo sub AE, AB + quadrato ex CD.

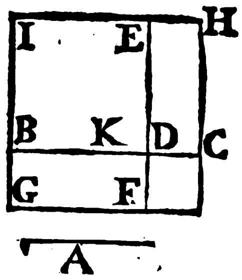
Quare ad inveniendam radicem. Adde numero absoluto, seu quadrato ex CD, quadratum ex CB semissis radicum, ut habeas aggregatum, seu quadratum BD, aut CE cujus radix quadrata erit CE: huic addes AC semissem radicum, habebisque AE, cujus nempe quadratum æquale est valori radicum + numero absoluto seu quadrato ex CD. Atque hoc modo demonstratur secundus casus.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Investigatio Geometrica quadrati æqualis aliquibus radicibus — numero absoluto ex Nonio.

Proponatur hæc æquatio 1q. = 18 R. — 56. vel 1q. + 56. = 18R.



Sit linea A cujus quadratum æquale sit numero 56. Sitque linea BC æqualis numero radicum 18. quæ ita secetur in D, ut linea A sit media proportionalis inter segmenta BD, DC: hoc est, ita sit BD ad A, sicut A ad DC: sint BE, CF quadrata segmentorum BD, DC. Dico satisfacere quæstioni duo. Primò posito valore unius radicis lineâ BD, quadratum ejus + quadrato lineæ A, seu numero 56. esse æquale valori radicum, seu rectangulo BH, comprehenso, sub numero radicum BC, & radice DE.

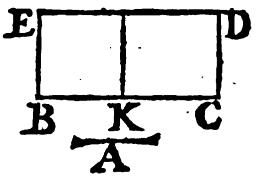
Demonstratio. Cùm ita sit BD, seu DE ad A, sicut A ad DC. erit (*per* 16. 6.) quadratum ex A, seu numerus absolutus 56. æqualis rectangulo sub DE, DC. addatur commune quadratum BE, erunt quadrata ex A & BD æqualia rectangulo BH, comprehenso sub numero radicum BC, & radice BI seu BD. Ergo habemus quadratum BD. + quadrato ex A seu numero 56 æquale, valori radicum seu rectangulo BH.

Ex qua demonstratione ita ad praxin descendes; nempe ita cognosces, seu investigabis latus BD, aut DC. Dividatur numerus radicum BC. bifariam in K (*per* 5. 2.) erit rectangulum sub BD, DC, seu numerus absolutus, una cum quadrato DK, æquale quadrato KC, semissis numeri radicum; quare ex quadrato semissis numeri radicum, subtrahe numerum absolutum 56. restant 25. pro quadrato ex KD. cujus radix quadrata KD erit 5. hæc addita semissi radicum BK, exhibet majus latus BD, & subtracta ex KC, semisse radicum exhibet minus latus DC.

Secundò latus DC, satisfacit quæstioni; nam quadratum FC, + rectangulo DG. seu quadrato, ex A, id est numero absoluto 56. æquale est rectangulo CG, comprehenso sub numero radicum AB, & radice BG, seu DC.

Denique

Denique si quadratum ex A, seu numerus absolutus, æquale sit quadrato semissis radicum



BK, hoc est linea A sit æqualis lineæ BK, clarum est in tali casu, quadratum ex BK + quadrato ex A, seu numero absoluto, æquale esse rectangulo BD, comprehenso, sub numero radicum BC, & radice BE seu BK.

Si accidat ut numerus radicum major sit quadrato semissis radicum, æquatio falsa erit, seu impossibilis.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Semissis Radicis quadratæ, aggregati ex quadruplo numeri absoluti, & quadrato numeri radicum, vel Residui subtracto quadruplo ejusdem absoluti, ex quadrato numeri radicum, aucta, aut mulctata numero radicum, est valor unius radicis in æquationibus quadraticis.

Hæc propositio est aptissima cum numerus radicum est impar: atque adeo dividi non potest bifariam. Sit extrahenda radix quadrata ex hoc numero 72 — 6 R. hoc est sit proposita hæc æquatio 1q. ═ 72. — 6R. Ad quadratum numeri radicum 36. adde quadruplum numeri absoluti, cum numerus absolutus habeat signum +; est autem hoc quadruplum 288. fit 324. cujus radix quadrata 18. ex qua subtrahes numerum radicum, cum ferat signum —. restabit 12. cujus semissis 6. est valor unius radicis.

Proponatur secundò hæc æquatio 1q. ═ 6R. + 72. quadratum radicum est 36. cui addes quadruplum numeri 72. seu 288. fit summa 324. cujus radix 18. huic addes numerum radicum 6. fiet 24. cujus semissis 12. est valor unius radicis.

Tertiò proponatur hæc æquatio 1q. ═ 18 R. — 72. ex quadrato numeri radicum 324. subtrahe quadruplum numeri absoluti 72. seu 288. restat 36 cujus radici quadratæ 6. adde 18 numerum radicum fit 24. cujus semissis 12. est valor unius radicis. Vel eamdem radicem quadratam 6. subtrahe ex numero radicum 18. reliqui 12. semissis 6. est valor unius radicis.

Demonstratio. Quadratum numeri radicum quadruplum est quadrati semissis numeri radicum: ergo si illi addas vel subtrahas quadruplum numeri absoluti, generatur numerus quadruplus illius quem praxis vulgaris superiùs explicata invenit. Quare si ex eo educatur radix quadrata, hæc erit dupla illius quæ per praxim superiorem educitur: si igitur huic radici addas, vel subtrahas numerum, radicum relinquetur radix dupla, veræ radicis, quæ nempe educeretur per praxin communem.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Alia omnes æquationes.

Quamvis inferiùs simus tradituri methodum reducendi omnes æquationes quantumlibet intricatas, quia tamen earum reductio, principiis speciosæ nititur, quæ ad sequentem librum pertinent, alias æquationes methodo vulgari, seu antiqua solubiles, in hac propositione aperiam.

Regula generalis esto; quoties exponentes terminorum æquationis cujuscumque sunt Arithmeticè proportionales, toties æquatio ad quadraticam revocatur.

Proponatur primò æquatio in quâ termini, se consequantur sine interruptione, dico hanc æquationem ad quadraticam revocari posse. Ut si proponatur æquatio 1qq. ═ 30 c. + 10 q. dico per hypobibasmum hanc reduci posse ad æquationem 1q. ═ 30R. + 10 sic enim termini descendent singuli duobus gradibus, quod sine detrimento æqualitatis fieri posse in hypobibasmo probavimus; sic pervenietur ad æquationem quadraticam 1q. ═ 30 R. + 10: quare quoties sunt termini sine interruptione toties in æquationem quadraticam desinitur.

Secundò proponatur æquatio cujus termini sint interrupti, ita tamen ut exponentes eodem intervallo se superent, quomodocumque tandem disponantur, seu quocumque ordine, in æquationem quadraticam fiet desitio.

Sint exponentes 4. 2. 0. vel 2. 4. 0. termini æquationis, tantundem in progressione Geometricâ inter se distant: nam inter numerum absolutum cujus exponens 0. & quadratum cujus exponens est 2. interjicitur radix: & inter quadratum cujus exponens 2. & qq cujus exponens 4 interjicitur cubus. Idem dicito de hac æquatione cujus exponentes essent 6, 3, 0. qui pariter proportionem Arithmeticam observant, id est quadrato cubi, cubi, & numeri absoluti.

Proponatur igitur primò hæc æquatio 1 qq. ═ 18 q. + 648. adhibeatur regula communis æquationis quadraticæ, mutatâ priùs datâ æquatione in hanc 1q. ═ 18R. + 648. eritque valor unius radicis 36. hujus si extrahatur radix quadrata 6. erit 6 valor unius radicis.

Demonstratio. Verè quadrato-quadratum est quadratum, cujus radix quadrata est quadratum; ergo licet sub hac consideratione inquirere ejus radicem quadratam, quam praxis communis exhibet: quia autem etiam hæc radix, ut dixi, est quadratum, debet illius radix quadrata educi, si vis radicem quadratam.

Idem dicito de quadrato cubo, cubo, & numero absoluto, sed ubi per praxin communem innotuerit valor primæ radicis quadratæ, educenda est radix cubica ut 1 q c. + 6 c. ═ N. demonstratio eadem, nam verè quadrato cubus est quadratum, & cubus est radix quadrata quam per praxin communem investigare possumus; quia verò hæc radix quadrata etiam cubus est, ejus radicem cubicam educere debemus, ut habeamus primam illius progressionis radicem.

Ex quibus colliges vi iſtius praxis eas tantum æquationes ſolvi poſſe quæ maximum numerum habeant, ex quadrato compoſitum, hoc eſt quarum ſumma poteſtas ſit numerus quadratus.

Notandum autem ſæpè occurrere numeros non quadratos, atque adeò qui verâ radice careant, cum tamen praxis jubeat educi radicem quadratam. Ex quo oriuntur numeri ſurdi de quibus inferius agendum eſt.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Reductio æquationis in qua quadratum afficitur adjunctione plani ſub radice, & ſub coëfficiente ad ſimplicem æquationem quadraticam.

Æquationes compoſitas voco eas, in quibus poteſtas quæ præcipuum in iis locum obtinet, afficitur parodicis gradibus, hoc eſt illi adjunguntur, aut negantur gradus inferiores. Has ad ſimpliciores revocare maximam afferre poteſt facilitatem; inter eas prima occurrit quadratica ut hæc 1 q. + 8 R = 20. quæ æquatio ſimplex non eſt, ſed quadratum quod primum in ea locum obtinet eſt affectum adjunctione plani, contenti ſub coëfficiente 8. & Radice. Hujuſmodi æquationes affectæ, ſeu compoſitæ reduci poſſunt ad ſimpliciores, & hæc reductio, vocatur expurgatio, fitque adjunctione aliquarum partium coëfficientis, quas uncias vocant nonnulli. In quadraticis hæc expurgatio fit adjunctione medietatis coëfficientis: in cubicis trientis: in quadrato quadraticis quartæ partis, & ita conſequenter ſecundùm denominationem ab exponente cujuſlibet poteſtatis deſumptam.

Proponatur hæc æquatio 1 q. + 8 R. = 20. Intelligatur radix hujus æquationis eſſe 1 R. cui adjungatur 4. ſeu medietas numeri radicum, ſeu coëfficientis, ita ut fiat 1 R. + 4. ſupponatur alia quantitas radici ſic auctæ æqualis quæ ſit A, ita ut ſit æquatio 1 R. + 4. = A. & per antitheſin erit etiam 1R. = A — 4. quare hujus quantitatis quadratum erit æquale quadrato unius radicis: igitur multiplicetur A — 4. per A — 4. ut fiat ejus quadratum habebimus A2 — 8A + 16. æquale uni quadrato præcedentis radicis. Multiplicetur item hæc quantitas A — 4. per 8. numerum radicũ, cum in æquatione præter unum quadratum inveniantur 8R. fientque + 8A. — 32 adde numeris jam inventis A2 — 8 A. + hos numeros + 8A. — 32. erit ſumma A2 — 16. quæ æqualis eſt 1 q. + 8R. præcedentis radicis, & conſequenter numero 20. Habemus ergo aliam æquationem 1q. — 16. = 20. & per antitheſin 1q. = 36. & extrahendo radicem quadratam, habemus hanc ſecundam radicem A eſſe 6; ſed ſuppoſuimus A — 4 æquari 1R nempe radici primæ æquationis ergo 6 — 4 = 1R ſubtrahe ego igitur 4. ex 6 habebis priorem radicem eſſe 2.

Proponatur ſecundò æquatio in qua quadratum afficiatur mulctâ plani ſub latere, & coëfficiente; ut 1q — 4R. = 12 ſupponatur radix imminuta medietate coëfficientis, ſicque imminutæ æqualis ſit quantitas A: erit ergo æquatio 1R. — 2 = A. & per antitheſin 1R. = A + 2. & cum ſit æqualitas in radicibus, in eorum quadratis erit etiam æqualitas quare A2. + 4A. + 4. æquabitur uni quadrato. Multiplicetur item hæc radix A + 2 per — 4, cum propoſita æquatio habeat negatas 4. radices fiet — 4A. — 8. addantur ſimul A2. + 4A. + 4. & — 4A — 8. fiet A2 — 4. æquale 1q. — 4R. & conſequenter erit nova æquatio 1q. — 4. = 12. & per antitheſin 1q. = 16. cujus radix quadrata 4. erat autem 1R. = A. + 2. eſt ergo æquatio 1R. = 4. + 2. ergo primæ æquationis radis erat 6.

Tertiò proponatur hæc æquatio 16 R — 1q = 48 ſupponatur 8 — A eſſe æqualia 1R. fiat quadratum hujus binomii 8 — A. illud erit 64 — 16 A. + A2. multiplica 8 — A per 16. fiet 128 — 16 A. ſubtrahe priùs quadratum ex hoc ultimo erit reſiduum 64 — A2. æquale 16R — 1q. præcedentis æquationis, atque adeò & comparationis homogeneo æquale erit. Habemus ergo æquationem 64 — 1q. = 48. & per antitheſin 64. = 48. + 1q. & auferendo 48. erit æquatio 1q. = 16. & extrahendo radicem erit radix A = 4. erat autem æquatio 8 — A = 1 R. Quare erit æquatio 8 — 4 = 1R eſt ergo una radix 4.

Ex his colliges omnes æquationes in quibus exponentes ſervant arithmeticam proportionem hoc artificio ſolvi poſſe, & reduci ad ſimplices. Ut ſi proponatur hæc, 1qq. + 8q. = 48. reducetur primò ad hanc 1q. + 8R. = 48. & expurgatione facta invenietur radix quadrata 4. cujus iterum educenda eſt radix quadrata ut fiat 2. Idem dicendum eſt in aliis omnibus.

Ex quibus vides hanc propoſitionem eſſe maximi momenti, cum hæc ſola poſſit ſupplere, & ſolvere omnes æquationes quadraticas, quas toto hoc libro explicuimus. Hæc methodus vocatur plaſma, ſeu fictio.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Reductio cuborum affectorum ſub quadrato ad cubos affectos ſub latere.

Affectio cubi ſub latere, cenſetur facilior, & minus intricata quam affectio ejuſdem cubi ſub quadrato, eò quòd quuadratum longius diſtet, ulteriuſque provehatur in progreſſione geometrica quàm radix. Facilis tamen erit reductio affectionis ſub quadrato ad affectionem ſub radice.

Proponatur æquatio 1 c. + 9q = 108. unciæ ut vocant coëfficientis 9. in cubicis æquationibus ſunt triens: unde hæc æquatio ita exprimetur methodo ſpecioſâ, A 3. + 3BA. = Z ſol in quo vides ideo poni 3B ut ſignificetur in plaſmate ſeu fictione aſſumendum trientem coëfficientis.

Supponamus ergo veræ radici hujus æquationis 1c. + 9q. = 108. additum eſſe trientem coëfficientis, ita ut ſic aucta fiat 1R. + 3. huic aggregato ponatur æqualis alia quantitas A. ita ut ſit æquatio 1R. + 3. = A. & per antitheſin 1R. = A — 3. fiat hujus quantitatis cubus nempe

A — 3
A — 3
————
— 3A + 9
A2 — 3A

	A2 — 6A + 9 quadratum	
	A — 3	
	— 3 A2 + 18 A — 27	
A3 — 6 A2 + 9 A		
A3 — 9 A2 + 27 A — 27 cubus		
+ 9 A2 — 54 A + 81		
A3	— 27 A + 54	

pe A3 — 9A2 + 27 A — 27: hoc est A — 3 per seipsam multiplicetur, ut fiat ejus quadratum; tum ejus quadratum multiplicetur per eandem radicem A — 3 & habebis cubum.

Secundo multiplicetur A2 — 6A. + 9. per 9. coëfficientem, cum in æquatione id feratur fiet + 9 A2 — 54A + 81. Adde hunc ultimum numerum priori cubo fiet A3 — 27 A + 54 qui numerus æqualis est priori 1c. + 9q: atque adeò eidem homogeneo comparationis erit æquale. Habemus ergo æqualitatem A3 — 27 A + 54 = 108. seu 1c. — 27R. + 54 = 108. & transferendo + 54 per antithesin erit æquatio 1c. — 27 R. = 54. quare si sciretur methodus extrahendi radicem, quam inferiùs trademus, inveniretur radix 6. è cujus cubo 216. si subtrahantur 27R. seu 162. restabit 54. ea tamen radix non est ea quæ quærebatur, sed est A. A autem — 3 erat 1R. ergo 6 — 3 seu 3. est una radix.

Proponatur alia æquatio cubi affecti multâ quadratorum ut 1c. — 12 q. = 1024. supponatur radix hujus æquationis esse 1R. à qua subtrahatur 4. triens coëfficientis. fietque 1R. — 4 huic radici sic imminutæ, sit æqualis quantitas A, ita ut sit æquatio 1R. — 4 = A & per antithesin 1R. = A + 4. fiat cubus hujus quantitatis A + 4 eritque A3 + 12 A2 + 48 A + 64. quadratum ejusdem quantitatis A + 4 erit A2 + 8A. + 16. multiplicetur per coëfficientem 12. habebis 12 A2 + 96A + 192 subtrahe unum ab alio id ferente signo — æquationis, restabit A3 — 48A — 128. = 1024 & per antithesin A3 — 48A = 1152. inventæ tamen radici addere debebis 4. ut habeas veram radicem, seu radicem primæ æquationis propositæ.

Tertiò proponatur 12q. — 1c. = 256 assumatur 4. triens coëfficientis à quo auferatur radix; fitque 4 — 1R. cui æquale sit A, erit ergo æqualitas 4 — 1R. = A. & 4 = A + 1R. & 4 — A = 1R. fiat quadratum hujus binomii 4 — A. quod multiplicetur per 12: fiat ejusdem binomii cubus, quem ex 129. subtrahes; residuum æquale erit 129. — 1c.

129. 192 — 96 A + 12 A2		
Cubus 64 — 48 A + 12 A2 — A3.		
resid. 128 — 48 A		+ A3.

Habemus ergo æquationem A3. — 48 A. + 128. = 256. subtrahe 128 habebis æquationem A3 — 48 A = 128. Extrahendo deinde radicem cubicam per praxes inferius ponendas, radicem inventam subtrahes ex 4. habebisque primæ æquationis radicem cubicam.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Reductio cuborum simul affectorum sub quadrato & sub latere, ad cubos affectos tantum sub latere.

Proponatur æquatio in quâ cubus afficiatur simul sub quadrato, & sub latere, verbi gratiâ 1c. + 27 q. + 130 R. = 376. Supponatur radix quæ quæritur esse 1R, cui addatur triens primi coefficientis, seu 9: fiet igitur 1R. + 9. huic sit æqualis quantitas quæcùmque A. est ergo æquatio 1R. + 9. = A. & per antithesin 1R. = A — 9. Primò hujus binomii fiat cubus. qui habetur infra; huic adde 27. quadrata ejusdem, &

Cubus	A3. — 27 A2	+ 243 A	— 729.
quadrata	+ 27 A2	— 486 A	+ 2187.
130 radices		+ 130 A	— 1170.
	A3.	— 113 A	+ 288.

radicem A — 9. multiplicatam per 130: adde hæc omnia & habebis A3 — 113 A + 288. Habemus ergo æquationem A3 — 113A + 288 = 376. & per antithesin A3 — 113A = 88. seu 1c. — 113R. = 88. cujus radix A erit 11. & subtrahendo 9. ex ea restabit prima radix proposita 2. Expurgavimus ergo propositam æquationem affectione sub quadrato.

Sit alia æquatio 1c. + 12q. — 38R. = 420. adde uni Radici, 4. trientem coefficientis quadratorum 12. fiet 1R. + 4. cui supponatur æqualis quantitas A. erit ergo æquatio 1R. = A — 4.

cubus binomii	A3 — 12 A2.	+ 48 A. — 64.
12 quadrata	+ 12 A2.	— 96 A. + 192.
Summa	A3	— 48 A. + 128.
Subtrahe 38R.		+ 38 A. — 152.
Resid.	A3 — 86A + 280	

Addantur simul cubus binomii A — 9. & 12 quadrata, & ex summa subtrahe 38 radices. restabit A3. — 86A + 280 = 428. & per antithesin 1c. — 86R. = 140. è cujus radice 10. subtrahe 4. & habebis primam radicem 6.

Tertiò sit æquatio 1c. — 30q. + 330R. = 1575. cujus quidem radix est 15. sed supponatur incognita ponatúrque 1R. & minuatur tertiâ parte coefficientis quadratorum sitque 1R. — 10. cui æqualis ponatur A, eritque æquatio 1R. — 10. = A. & per antithesin 1R. = A. + 10. fiat cubus istius binomii A. + 10. à quo subtrahes 30 quadrata, & addes residuo 330 R. invenies A3 + 30A. + 1300.

Cubus binomii.	A3. + 30 A2.	+ 300A.	+ 1000.
Subtrahe 30 quadr.	+ 30 A2.	+ 600A.	+ 3000.
Erit residuum	A3.	— 300A.	— 2000.
Adde 330 Radices		+ 330A.	+ 3300.
	A3.	+ 30A.	+ 1300.

Quare habemus æquationem 1c. + 30 R. +

1300.

1300. = 1575. & per antithesin 1c. + 30R = 275. cujus radix A erit 5. & additis 10. superior radix erit 15.

Quartò proponatur æquatio 96R. — 27 q. — 1c. = 76. supponatur radix esse 1R. quæ augeatur numero 9. triente coefficientis quadratorum eritque 1R. + 9. huic supponatur æqualis quantitas A. eritque æqu. 1R. + 9. = A. & per antithesin 1R. = A — 9.

96 Radices erunt	96 A. — 864.
27 quadr. subtrahe	27A2. — 486A. + 2187.
resid.	— 27A2. + 582A. — 3051.
subtr. cubum	A3. — 27A2. + 243A. — 729.
resid.	— A3. + 339A. — 2322.

Ex 96 Radicibus subtrahe 27. quadrata tum unum cubum, restabit æquatio 339A — A3 — 2322 = 76. & per antithesin 339R. — 1c = 2398.

In aliis similibus casibus æquationes difficillimas ob multiplicitatem affectionum ad alias faciliores reduces, quód quidem operosum esse fateor, habebitur tamen solutio problematis insolubilis alioquin.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

De Radicibus secundis.

In regula Algebræ numerus quæsitus communiter supponitur 1R. vel plures hoc est suppositæ progressionis Geometricæ, primus numerus. Sæpè tamen accidit ut numeri disparati supponendi sint, quorum quilibet sit radix in sua progressione Geometrica. Quare si pro primo numero scribitur 1R. pro secundo itidem una radix esset scribenda, intelligendo tamen radicem alterius progressionis Geometricæ, ne verò inter operando sit confusio, has secundas radices diversas à primùm posita solemus notare aliquibus litteris ut A, B, D, E, &c. scribentes 1A. 1B. 1D. 1E. in speciosa quidem hujusmodi radices incognitas notamus vocalibus A, E, I, O, V, Y.

Numeratio & algorithmus hujusmodi radicum facilè intelligetur. si enim ita scribamus 1A, 1B, 1D. indicamus unam radicem diversam ab ea, quam primò posuimus.

2. Quando duos Alphabeti characteres, sine ullis signis conjunctos ponimus, significamus multiplicationem, ut A B significat planum comprehensum sub A & B.

		R.	q.	c.	qq.	S.	qc.
R	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
A	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.
B	1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.
D	1.	5.	25.	125.	625.	3125.	15625.

Supponantur quatuor progressiones Geometricæ, quarum prima sit ea, è qua primum posita radix assumpta est; quare in illa suppositione quoties radicem nominabimus, sumus intellecturi binarium; pro A intelligatur radix secundæ progressionis & significet 3.

Pariter B significabit radicem tertiæ progressionis nempè 4. & D indicabit 5. si scribam 3AB, intelligam tres radices A seu 9. multiplicatas per radicem B seu per 4. atque adeò 36. pariter BD significat 4 in 5 seu 20. & ita in cæteris.

Secundò possunt addi notæ quadrati cubi, qqti, ut Bq. significaret 16. melius tamen notari possunt B2. D3. seu B quadratum, D cubus.

Algorithmus secundarum facilè ex Algorithmo primarum intelligetur.

Additio secundarum radicum ejusdem rationis, fit per additionem simplicem numerorum retento eodem charactere, sic 3A & 7A. efficiunt 10A, ex 5B & 3B fiunt 8B.

Additio secundarum radicum diversæ denominationis perficitur per signum + ut 4R. & 3A. ita adduntur 4R + 3A.

Idem dicendum de subtractione, quæ communis est, si sint quantitates ejusdem denominationis observatis tamen signis + & —. Si quantitates fuerint diversæ denominationis perficitur subtractio ope signi —.

Multiplicatio has habet regulas, si numerus radicis primæ, per numerum radicis secundæ fuerit multiplicandus, ut 3R per 4A. numeri inter se multiplicentur, fientque 12. scribatúrque 12R A. hoc est 12 radices multiplicandas esse per unum A: sit enim radix 2. & consequenter 3R. significent 6. sit unum A idem quod 3. & 4A sint 12. quare 3R. in 4A. significat 72. Sed multiplicando 3R. per 4A fiunt 12R A, hoc est 24. multiplicanda per 3. Quare sive ipsi numeri absoluti multiplicentur, sive cossici idem virtualiter numerus proveniet.

Secundò si numerus secundæ radicis per absolutum fuerit multiplicandus, ducantur interse numeri, idemque character cossicus remaneat, sint 4A, multiplicanda per 5 fient 20 A.

Tertiò Quandò numerus cossicus ex prima radice ortus, multiplicatur per numerum ex secunda radice ortum, multiplicentur inter se numeri, quia tamen disparatè se habent, uterque cossicus character apponatur ut 3C. per 4 Aq. seu A2. fiet 12cA2. est autem sensus 12 cubos multiplicandos per A2.

Quartò si numerus compositus ex numero primæ, & secundæ radicis, multiplicetur per numerum, secundæ radicis, augeri debet character cossicus secundæ radicis, ut 4R A multiplicandus sit per radicem A. fiet productus 4R A2.

Quando vero secunda radix multiplicat numerum ortum ex secunda radice, observari debent regulæ multiplicationis cossicorum; ita si A multiplicet A fit Aq. si A multiplicet A cubum fit A4. seu A qqtum.

Idem dicendum de divisione, sed de his sufficienter diximus cum de speciosa numeratione, in qua sæpè diversæ adsciscuntur radices.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Numeratio irrationalium.

Numeri surdi, si tamen numeri sunt dicendi, sunt radices numerorum, qui non sunt veri sui generis figurati. Radix verbi gratia quadrata numeri non quadrati. Radix cubica numeri qui cubus

bus non est, & ita de reliquis: sic radix quadrata numeri 20. est radix surda, seu irrationalis. Dicitur surda, quod audiri, numerisque exprimi non possit. Proponatur quadratum verum, & reale, cujus area æqualis sit 20 pedibus quadratis, verè datur, & Geometricè exhibetur linea quæ sit latus, seu radix illius quadrati; ejus tamen longitudo numeris exprimi non poterit, manendo in ea suppositione pedum. Cum enim locuti simus de 20 pedibus, linea rationalis exposita, censetur esse longa uno pede; quare quamdiu loquemur de numeris in hâc determinatione, de partibus aliquotis, unius pedis intelligendum erit. Cum ergo nullæ partes aliquotæ unius pedis possint hanc lineam exquisitè repræsentare, utpote lineæ unius pedis incommensurabilem, ideo hæc longitudo numeris non exprimetur si strictè loquamur. An verò debeat dici numerus, vel non dici, est quæstio de nomine: & nullius momenti.

Cum certum sit hujusmodi lineas, nec esse numeros integros, nec fractos, quia tamen aliquis numerus potest lineam exprimere, ita parum ab his lateribus surdis differentem, ut excessus unius supra aliam sit quantum libuerit parvus; insuper numeris addi, aut subtrahi, multiplicari, item & dividi possint, hæ quantitates, inter numeros recenseri poterunt. Si quis tamen strictè loqui velit, quantitates vocet irrationales, radices surdas, numeros si velit irrationales, seu numeros non numeros, parum intererit modò quantitates hujusmodi intelligamus.

Radices hujusmodi multipliciter intelligi, & exprimi possunt; primò solitariè ut cum dicitur ℞ q 20. nempè Radix quadrata numeri 20. ℞ c. 30. radix cubica numeri 30. ℞qq 70. Radix quadrato quadrata numeri 70.

Aliquando tales radices surdæ exhibentur ut conjunctæ cum aliis numeris, sive ejusdem rationis sive diversæ, & hoc mediantibus signis + & —. ut ℞q9. + ℞ q4. significat numerum 5. hoc est ternarium + binario. ℞q 7. — 2. Radix quadrata numeri 7. minus binario. ℞c. 100. — ℞q9. significamus ex radice cubica 100. subtrahendas esse tres unitates.

Aliæ radices vocantur universales, quas nonnulli ligatas vocant: suntque radices totius alicujus numeri cossici compositi. ut ℞q.(22 + Rq9.) Radix quadrata numeri 22 + 3. hoc est numeri 25. seu 5. ℞q. (11 + ℞q 12.) Radix quadrata numeri 11 aucti radice quadrata numeri 12.

℞q (12. + ℞q 25.) + ℞q (9. + ℞q 4.) duas intelligimus radices, primam radicem quadratam numeri 12. aucti radice quadrata numeri 25. seu 5. & radicem quadratam, compositi ex radice quadrata numeri 9. & ex radice quadrata numeri 4. seu radicem quadratam numeri 5. In quo vides cur dicantur radices universales, nempè quòd cadant in numerum aliquem compositum integrum: dicuntur ligatæ, quod numerus cujus sunt radices claudatur & ligetur intra parenthesin.

Notandum item non tantùm radices surdas, exprimi hoc modo, sed sæpè etiam rationales, seu radices numerorum verè sui generis figuratorum ut ℞q 9. Radix quadrata numeri 9. quæ est 3.

Ortus hujusmodi radicum procedit ex regulis Algebricis; cum enim sæpè imperetur extractio radicis, ex numero non propriè figurato, sui generis, cogimur has quantitates, non in seipsis indicare, cum ita exprimi non possint; sed indicare per earum potestates, ut Radicem quadratam per suum quadratum.

Differunt autem hæ radices ab iis quæ in progressione Geometrica considerantur; quòd istæ ut plurimum sint irrationales, & surdæ, secundò quod exprimantur per numerum cujus sunt radices, cum aliæ per seipsas adhibeantur.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Reductio Radicum simplicium ad eamdem denominationem.

Quamdiu radices sunt diversæ denominationis in unam summam colligi non possunt, nisi per signum +, nec subtrahi ab invicem, nisi per signum — eo modo quo numeri cossici diversæ denominationis. Si tamen ad eamdem denominationem revocentur, poterunt alia ratione simul addi, aut ab invicem subtrahi. Hæc reductio, non absimilis est reductioni fractionum: priùs tamen notandum est, in qualibet progressione Geometrica, radicem eamdem comparatam cum quadrato dici radicem quadratam, cum cubo cubicam, cum quadratoquadrato quadratoquadratam: ut binarius est radix quadrata numeri 4. cubica numeri 8. quadrato quadrata numeri 16. surdesolida numeri 32. quadrato cubica numeri 64. idem igitur numerus indicatur sive dicatur ℞q 4. sive Rc. 8. quibus positis.

$$\begin{array}{ccc} 125 & & 16. \\ \hline 5. & \mathbf{X} & 4. \\ ℞q. & & ℞c. \\ & ℞qc. & \end{array}$$

Proponantur duæ radices diversarum denominationum ℞q 5. ℞c. 4. scribantur eo ordine quo vides in figura: & primò numerus 5. cubicè multiplicetur propter signum ℞c. cui decussatim respondet: habebisque productum 125. numerus 4. quadratè multiplicetur propter signum ℞q. cui respondet decussatim, fietque 16 scribendus. Habebis ergo duos numeros Rqc. 125. Rqc.16. quibus nempè præfigendus est numerus ex utraque denominatione constans.

Demonstratio. Numerus 5. est quadratum radicis 5. quod cum seipsum cubicè multiplicet, orietur cubo quadratum, ut ostendimus in generatione numerorum progressionis Geometricæ. Pariter cum numerus 4. supponatur esse cubus propositæ radicis, & seipsum quadratè multiplicet, orietur cuboquadratum, & cum in qualibet serie eadem sit radix omnium potestatum, idem numerus indicabitur per Rqc. 125. qui significabatur per radicem quadratam 5. ergo habemus eosdem numeros sub aliâ denominatione communi.

Secundò numerus absolutus comparetur cum radice ad cujus denominationem revocari debeat, verbi gratiâ 6. & ℞qq. 12. multiplicetur numerus 6. quadratoquadratè hoc est fiat numeri 6. quadratoquadratum nempè 1296. dico numerum 6. significari posse per ℞qq 1296. ergo numerus 6. revocatus est ad denominationem radicis.

Possunt item radicis ad eamdem denominationem

nem reduci per extractionem radicis cubicæ, aut quadratæ quando extrahi possunt. ut ℞qq 25. & ℞c. 27. Extrahatur radix quadrata numeri 25. habebis 5. pro radice quæ tamen supponitur esse quadrata; quare ℞q.5. eumdem numerum significat ac ℞qq 25: pariter numeri 27. extrahatur radix cubica habebis 3. qui numerus per seipsum multiplicatus efficit 9. & consequenter idem numerus significatur per ℞q. 9. qui indicabatur per ℞c. 27. habemus ergo ℞q 5. & ℞q 9. eumdem numerum indicantes qui per propositas significabatur.

Facillimè item reduci possunt duæ radices simplices ad eamdem denominationem mutando unius tantum characterem: ut si proponantur ℞qc. 6. & Rc. 2. multiplica numerum 2. quadratè fiet ℞qc. 4. supponebatur enim 2. esse cubus.

Pariter si proponantur hæ duæ radices simplices ℞qc.8. ℞q 9. multiplica 9 cubicè. fient 729. habebis igitur ℞qc. 8. & ℞qc. 729.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Si Radices ejusdem generis in se invicem ductæ numerum producant, hic erit radix producti multiplicatione potestatum earum radicum.

Sint radices A & B, quæ multiplicatæ produxerint numerum C, sintque harum radicum quadrata D & E, quæ multiplicata producant numerum F. dico numerum F esse quadratum radicis C, seu productum ex D in E, æquale esse quadrato numeri C.

C		F	G.		
6		36	216.		
2	3	4	9	8	27.
A	B	D	E	H	K.

Cum enim D & E sint quadrata numerorum A, ex B; erit D ad E in duplicata ratione A ad B, (*per* 2.12.) sed cum A multiplicando seipsum faciat D & multiplicando B faciat C, erit ut A ad B, ita D ad C; ergo ratio D ad E est duplicata rationis D ad C; & consequenter C erit medium proportionale inter D & E; ergo (*per* 17.6.) quadratum medii C, æquabitur producto ex D in E, seu numero F. Quod erat demonstrandum.

Sint item cubi H & K, qui se invicem multiplicent, faciantque G, dico G esse cubum radicis C.

Demonstr. Cum enim A multiplicans B faciat C & multiplicans D faciat H, erit ut B ad D, ita C ad H. Pariter cum E multiplicans radicem B, faciat K, & multiplicans D faciat F, erit ut B ad D, ita K ad F. Quare ita erit C ad H, sicut K ad F, & (*per* 16.6.) productum ex multiplicatione mediorum H & K, seu G, æquabitur producto ex C in F, hoc est producto radicis in quadratum suum, seu cubo radicis C.

Ex hoc habebimus methodum multiplicandi radices, licèt cognoscamus tantum earum potestates, nam multiplicando potestates, generabitur potestas radicis productæ, ex multiplicatione radicum. Quod propositione sequenti explicamus.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Multiplicatio, & divisio radicum surdarum.

Proponantur duæ radices, multiplicandæ ad invicem sintque ejusdem denominationis; si enim non fuerint ejusdem denominationis, ad eamdem denominationem primò reducantur; sint ergo ℞q 7. & ℞q 10. quæ in se ducendæ sunt, earum potestates, seu quadrata 7 & 10. in se ducantur, habebitur numerus 70. qui, per præcedentem, est quadratum radicis, quæ fieret ex ductu ℞q 7. in ℞q 10. quare ℞q 70. est illa quæ quæritur. ℞c.24. multiplicata per ℞c. 10. producit ℞c. 240.

Idem dicendum de divisione, si potestatem per potestatem dividas, proveniet potestas quotientis, qui orietur si radicem per radicem divideres; quare, si quotienti invento præponas signum radicale. ut si ℞q.36. dividenda sit, per radicem quadratam 12. divide quadratum 36. per quadratum 12. habebis pro quotiente 3. quadratum scilicet radicis quæsitæ: ergo habebis ℞q3. quæ erit quotiens talis divisionis.

Quando Radix quadrata multiplicanda est per seipsam delendum est signum radicale. ut si ℞q.5. sit multiplicanda per seipsam, scribatur 5. ratio clara est, quia radix multiplicando seipsam producit suum quadratum, sed quadratum ejus est 5. Posset quidem ex regula communi multiplicari quadratum 5. per seipsum, ita ut producatur ℞q. 25. sed primum facilius est.

Idem dicendum est si Radix cubica cubicè, esset multiplicanda, sufficeret delere signum radicale, & exhibere ejus cubum, quia nempè radix cubicè multiplicata generat cubum.

Radix quadrata cubicè multiplicata generat radicem quadratam cubi sui quadrati, ut si ℞q. 4. multiplicanda sit cubicè: multiplicetur ejus quadratum 4. cubicè fiet 64. cui præponendum est idem signum radicale, ita ut fiat ℞q. 64. ratio est quia (*per propositionem præcedentem*) multiplicatio potestatis idem efficit, ac multiplicatio ipsius radicis.

Si Radix surda multiplicanda sit per numerum absolutum; multiplicari debet per potestatem numeri absoluti. ut si ℞q.8. multiplicare debeas per 2. ejus quadratum 8. multiplicari debet per quadratum numeri 2. id est per 4. ut fiat ℞q 32. Ratio est, quia numerus 2. idem est ac ℞q 4. Sed si proponeretur ℞q 8. multiplicanda per ℞q 4. multiplicandum esset quadratum 8. per quadratum 4. secundùm regulam præcedentem) ergo etiam dum proponitur ℞q 8. multiplicanda per 2. debet 8. multiplicari per 4. Ratio ulterior est quod ut duplicetur ℞q 8. non sufficit ut ejus quadratum 8. fit duplum, sed debet fieri quadruplum, quia quadrata in duplicata sunt ratione laterum, seu radicum.

℞c. 8. multiplicanda sit per 3. debet cubus 8. multiplicari per 27. seu per cubum numeri 3. ita ut fiat cubus 216. cui præponi debet signum radicale ℞c. 216. Nam habetur cubus radicis cubicæ quæ oritur ex multiplicatione 2. per 3. si cubus primæ per cubum secundæ multiplicetur; & de facto cubus 216. est cubus radicis 6. quæsitæ; posui autem exemplum in radicibus non surdis, ut clarior evaderet tota praxis.

Si

Si darentur plures Radices surdæ æquales; facilè earum summam exhibemus: ut si sint tres ℞q 7. multiplica 7. per quadratum numeri 3. seu per 9. habebisque ℞q 63 illis æquivalentem, quia nempe multiplicatio idem præstat ac additio, estque additio virtualis.

Id omne quod de multiplicatione dicimus, de divisione intelligendum est. Si enim radicem quadratam, per numerum absolutum dividere volueris ejus quadratum, per quadratum numeri absoluti divide.

Ex hac doctrina multiplicationis, & divisionis facilè inveniemus an duæ radices surdæ, sint inter se commensurabiles: quamvis enim sint irrationales hoc est incommensurabiles, cum unitate, possunt tamen esse inter se commensurabiles: ita enim duæ Radices surdæ æquales sunt commensurabiles, licèt ambæ sint incommensurabiles unitati.

Notandum autem quoties numerum per alium dividimus, quotientem exhibere rationem divisi ad divisorem, quam enim rationem habet quotiens ad unitatem, eamdem habet dividendus ad divisorem; ut si dividas 12. per 4. quotiens 3. ostendet ita esse 12 ad 4. sicut 3 ad 1.

Notandum secundò in divisione radicis per radicem, non propriè dividi radicem per radicem sed potestatem per potestatem, ut quadratum per quadratum, atque adeò quotientem nempe quadratum ostendere rationem quam habent potestates inter se, non autem radices. Divide ℞q 36. per ℞q 4. habebis ℞q 9. dico quotientem 9. non ostendere rationem quam habet ℞q 36. ad ℞q 4: sed quam rationem habeat quadratum 36. ad quadratum 4. scilicèt ut 9 ad 1. Radices autem sunt in subduplicata ratione: quare si agatur de radicibus sumenda erit media proportionalis inter 9. & 1. Certum est autem quod radix est media proportionalis inter unitatem & quadratum, ut ostendimus in progressionibus Geometricis: quare si divisâ unâ radice, per aliam quotiens habuerit veram radicem, radices surdæ commensurabiles erunt. Proponatur ℞q 12 dividenda per ℞q 3. diviso quadrato 12. per quadratum 3. quotiens est ℞q 4. numerus autem 4. habet veram radicem 2. igitur ℞q 12. ad ℞q 3. se habet ut 2 ad 1.

Si ex divisione orietur numerus carens propria radice, erunt radices incommensurabiles, ut si ℞q. 24. dividatur per ℞q 3. orietur ℞q 8. qui numerus 8. cum radice quadrata careat, dicendæ sunt ℞q 24. & ℞q 3 incommensurabiles. At ℞q 24. & ℞q 6. sunt commensurabiles, quia divisione factâ oritur ℞q 4. significans 2. cujus 4 est numerus quadratus. Idem dicendum est de cubis; si enim divisâ radice cubicâ, per aliam oriatur numerus non cubus incommensurabiles erunt radices cubicæ.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Additio radicum simplicium.

Proponantur primò plures Radices æquales, & ejusdem speciei hæ per multiplicationem simul addentur ut si quatuor ℞q 6. addendæ sint quadratum multiplicetur per 16. quadratum scilicèt 4 habebis ℞q 96.

2. Si radices fuerint diversæ denominationis, priùs quam simul addi possint debent ad eandem denominationem revocari.

3. Si sint ejusdem denominationis & inæquales, experiendum erit, an sint inter se incommensurabiles: nam si fuerint tales addentur per signum +, & subtrahentur ad invicem per signum —, exceptis tamen radicibus quadratis, quæ etiam adduntur alio modo, quamvis sint incommensurabiles, ut dicemus infrà.

4. Quando Radices invenientur commensurabiles ita agendum erit. Proponantur duæ radices ℞q 12. & ℞q. 3 quæ sunt commensurabiles, nam divisione facta, invenitur quotiens ℞q 4. cujus radix 2: se habet ergo, prima ad secundam, ut 2 ad 1. ergo componendo, prima ad aggregatū se habet ut 2 ad 3. fiat ergo ut ad 3. ita ℞q 12. ad quartum scilicet multplica Rq. 12 per 3. hoc est quadratum 12. per q 9. proveniet ℞q 108. quam divides per 2. hoc est quadratum 108. per quadratum 4. habebisque ℞q 27.

Demonstratio est clara; cum enim radix quotientis ostendat rationem unius ad aliam componendo habebitur ratio majoris ad aggregatum; & per regulam proportionum ipsum aggregatum.

Proponantur item duæ radices ℞q 18. & ℞q 8. una dividatur per aliam, quotiens erit ℞q 2 $\frac{1}{4}$ extrahatur radix quadrata, hæc erit 1 $\frac{1}{2}$. seu $\frac{3}{2}$. est ergo una fractio ad aliam sicut 3 ad 2. hoc est ut 3. ad unitatem divisam in duas medietates; nam in fractionibus semper denominator pro unitate supponit. Ergo componendo ita erit summa radicum ad minorem ℞q 8. ut 5 ad 2. & ut 5 ad 1. ita eadem summa ad medietatem Radicis quadratæ 8 ut autem habeatur ejus medietas, dividi debet per 4. fietque ℞q 2. Est ergo summa radicum quintupla & ℞q 2 multiplicetur ergo per 25. quadratum numeri 5. & habebis summam esse ℞q 50.

Potest aliis modis haberi; cum enim ℞q 18. ad ℞q 8. se habeat ut 3 ad 2. erit componendo ut prima ad summam, ita 3. ad 5. fiat ergo ut 3 ad 5. ita ℞ q 18. ad quartum hoc est ut 9 ad 25. ita 18. multiplica ergo 25. per 18. fiet 450. divide per 9. habebis 50. est ergo summa ℞q 50. facilius tamen id præstabis per minorem, ne numeri, ita augeantur.

Possunt alia ratione addi radices commensurabiles. Sit ℞q 147. & ℞q 12. cum sint commensurabiles maximam habebunt mensuram: sit maxima eorum numerorum mensura ℞q 3; per quam uterque numerus dividatur, fietque 4. & 49. quorum radices 2. & 7. fiat eorum summa si additio instituitur fietque 9 seu ℞q 81. hæc multiplicetur per ℞q 3. communem mensuram, fietque 243. Habebimus ergo pro summa ℞q 243.

Ratio hujus praxis est, quod cum duæ radices dividuntur per communem divisorem singuli quotientes ad unitatem eamdem rationem habent, ac singulæ radices ad divisorem: ergo componendo summa radicum ad divisorem, eandem rationem habet, ac summa quotientum ad unitatem. Quare quotientes seu radices quotientum, quæ sunt propriè loquendo quotientes, adduntur simul, & exprimuntur per suum quadratum, quia operamur in potestatibus; deinde fit regula trium ut 1. ad quotientes, ita divisor 3. ad summam; quare sufficiet multiplicare per communem divisorem 3. cum unitas nihil immutet.

Proponantur item tres ℞q 8. ℞q 50. ℞q 72. communis divisor esto 2. per quem divisæ exhibent

bent ℞q 4. ℞q 25. ℞q 36, radices horum sunt 2. 5. 6. quæ junctæ efficiunt 13. hujus quadratum erit 169. habemus ergo ℞q 169. quæ si multiplicetur per ℞q 2. habebimus ℞q 338.

Denique si accidat, ut dividi tantum possint duæ radices, per communem divisorem, hoc est tertia radix non sit commensurabilis cum aliis, duæ commensurabiles simul addantur; tertia addetur per signum +.

Quæ hactenus diximus tam conveniunt cubicis & aliis radicibus, quàm quadratis.

Radices tamen quadratæ etiam incommensurabiles aliquo modo adduntur: hoc est exhibetur aliquis numerus verus cui additur pars aliqua irrationalis. Sint propositæ hæ radices ℞q 11 ℞q 6. addendæ; fiat summa quadratorum, habebiturque summa 17; multiplicentur item inter se numeri 11 & 6. fiet productus 66, cujus ℞q. seu ℞q. 66. duplicetur more radicum, hoc est multiplicetur per 4. fiet ℞q 264. est ergo summa harum radicum ℞q 254. est ergo summa harum radicum ℞q (17. + Rq 264.)

Demonstratio petitur ex 4. 2. *Eucl.* nempe si linea secta sit utcumque; erit quadratum totius æquale quadratis segmentorum + rectangulo bis comprehenso sub segmentis. Si ergo supponatur linea composita ex ℞q 11. & ℞q 6. illius quadratum erit æquale quadratis segmentorum nempe 11 & 6. seu 17. & rectangulo bis sub segmentis, multiplicatæ autem Radices efficiunt ℞q 66. & hæc radix duplicata efficit ℞q 264. ergo quadratum 17. + ℞q. 264. erit quadratum totius lineæ ex ℞q. 11, & ex ℞q. 6. compositæ; quare tota linea seu summa radicum, erit ℞q. (17 + ℞q. 264.)

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Subtractio radicum surdarum simplicium.

Eâdem ferè methodo perficitur subtractio radicum, quâ additio absolvitur: primò si radices fuerint incommensurabiles, hoc est si dividendo majorem per minorem quotiens fuerit irrationalis, absolvetur subtractio per signum —: radix tamen quadrata etiam incommensurabilis ita subtrahetur.

Sit ℞q 12. subtrahenda ex ℞q 20. earum quadrata sunt 12 & 20. quorum summa 32. rectangulum comprehensum sub radicibus est ℞q 240. sed bis comprehensum erit productum per 4. nempe ℞q 960. hoc subtrahatur ex summa quadratorum 32. quod fieri non potest nisi signo — hoc modo Rq (32 — Rq 960.)

Demonstratio hujus praxis petitur (*ex* 7. 2. *Eucl.*) si enim ℞q 20. intelligatur secari una pars sit ℞q 12, erit quadratum totius seu 20 + quadrato unius segmenti seu 12. æquale rectangulo bis comprehenso sub totâ, seu ℞q 20. & dicto segmento ℞q 12. + quadrato alterius segmenti; ergo si ex aggregato quadratorum auferatur rectangulum bis comprehensum sub tota linea, & uno segmento, restabit quadratum alterius segmenti, est ergo aliud segmentum ℞q (32 — Rq 960.)

Hæc methodus etiam usurpari potest quando radices quadratæ sunt commensurabiles, atque adeò secundùm hanc praxin non erit opus dividere unam fractionem per aliam. Sed redeamus ad praxin generalem; quando fractiones sunt commensurabiles, major per minorem dividatur: tum quotienti si fuerit integer, supponatur unitas ut ex eo fiat fractio; aufer denominatorem, seu unitatem à numeratore: erit ut unitas ad hoc reliquum, ita radix minor ad reliquum quod quæritur; quare sola multiplicatione opus erit. Si quotiens non habeat unitatem pro denominatore, erit unitas ad quotientem — suo denominatore, ut radix minor per prædictum denominatorem divisa, ad majorem — minori.

Sit subtrahenda ℞q 8. ex ℞q 50. fiat divisio majoris per minorem, quotiens erit ℞q 6$\frac{1}{4}$. seu $\frac{25}{4}$ cujus radix quadrata $\frac{5}{2}$. subtrahe denominatorem 2. ex numeratore 5. relinquitur 3. fiat ut 1 ad 3. ita dimidia radix minor, seu ℞q 2 ad reliquum: multiplica igitur ℞q 2 per 3. seu per ejus quadratum 9, & habebis ℞q 18.

Demonstratio erit quòd divisâ majore radice per minorem, erit ut major radix ad minorem, ita quotiens ad unitatem, quæ unitas in fractionibus est semper denominator, ergo in nostro casu in quo quotiens est $\frac{5}{2}$. erit ut major radix ad minorem, ita 5 ad 2, & dividendo, subtrahendo minorem ex majori, ita erit minor ad reliquum ut 2. ad 3. & dimidium minoris ad reliquum ut 1 ad 3. quare dimidium minoris ℞q 2. erit multiplicandum per 3. seu per 9. fietque ℞q 18. Totum igitur artificium hujus subtractionis consistit in inventione quotientis, qui eo modo se habet ad unitatem, quo major radix ad minorem.

Quare variis modis investigari potest radix quæ relinquitur. Ut subtrahenda sit radix qq 3888, ex radice qq 19683. fit quotiens rationalis ℞qq $\frac{81}{16}$. cujus radix $\frac{3}{2}$. auferatur unitas ex fractione seu denominator ex numeratore, remanebit $\frac{1}{2}$. cujus si fiat qq præfigaturque signo Rqq. habebitur Rqq $\frac{1}{16}$. hæc multiplicata per ℞qq 3888. facit Rqq 243. Nam factâ divisione, ita est major radix, ad minorem ut quotiens ad unitatem, & subtractâ unitate, ita est unitas ad residuum, sicut minor radix ad residuum.

Potest denique fieri subtractio hoc modo. Dividatur utraque radix per communem divisorem, fient duo quotientes, quorum minorem ex majori subtrahes, & reliquum multiplicabis per communem illum divisorem. Sit subtrahenda ℞q 27. ex ℞q 75. dividatur utraque radix per ℞q 3. fient quotientes ℞q 9. & ℞q 25. seu 3. & 5. unam ab alia subtrahe restabit 2. seu ℞q. quam multiplicabis per communem illum divisorem fietque ℞q 12.

Demonstratio erit quod factâ divisione per communem divisorem, quotientes eamdem rationem habeant ac radices divisæ; ergo subtracto uno quotiente ab alio, id quod relinquitur eamdem rationem habebit ad quotientes, quam residuum radicum ad radices. Sed si hæc residua radix divideretur per communem divisorem, hunc residuum quotientem faceret, ergo hic residuus quotiens multiplicatus per communem divisorem, hanc residuam radicem producit: multiplicatio enim restituit id quod divisio destruxerat.

PROPO

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Additio numerorum irrationalium compoſitorum.

Voco numeros irrationales compoſitos, in quibus, aut irrationales conjunguntur cum aliis irrationalibus, aut cum aliis quibuſcumque, per ſigna + aut —. Revocandæ autem ſunt regulæ ſignorum + & — nempè eadem ſigna, idem ſignum ſervare, niſi in ſubtractione præpoſtera, diverſa ſigna mutare ſpeciem operationis, & in additione quidem retineri ſignum majoris numeri, in ſubtractione verò retineri ſignum ſuperioris, à quo ſcilicet facta eſt ſubtractio, quæ omnia in primo libro explicata ſupponuntur.

A. 6 + ℞q 18.
B. 10 + ℞q 8.
C. 16 + ℞q 8.

Proponantur numeri compoſiti A & B ſimul addendi; ſcribantur ita ut membra ejuſdem ſpeciei ſibi reſpondeant. Quia autem primum membrum conſtat numeris abſolutis fiet additio communis.

In ſecundo membro conſtante numeris irrationalibus ſeu ℞q fiat additio propria radicum. Nempè dividatur major radix per minorem, erit quotiens ℞q 2. $\frac{1}{4}$. ſeu ℞q $\frac{9}{4}$. quæ eſt $\frac{3}{2}$. adde ſimul 3. & 2. fiunt 5. ℞q. 25. qui numerus ſi multiplicetur per mediam partem minoris fractionis ſeu per ℞q 2. fit ℞q 50.

℞q 50 — 3.
℞q 32 + 5.
℞q 172 + 2.

In ſecundo exemplo pro primo membro fit additio radicum ut ſuperiores regulæ jubent. In ſecundo membro quia ſunt ſigna diverſa mutatur operatio, hoc eſt vice additionis fit ſubtractio.

℞q 5 + 7.
℞q 6 — 2.
℞q (11 + Rq. 120) + 5.

Neque aliud occurrit notandum circa additionem, niſi quod ſi numeri ſurdi ſint, ſeu incommenſurabiles; ſæpè fit radix univerſalis, ſeu ligata: ut in hoc ultimo exemplo, quia ℞q. 5. & q℞. 6. ſunt incommenſurabiles; recurrendum eſt ad praxin peculiarem radicum quadratarum.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Subtractio numerorum irrationalium compoſitorum.

Subtractio numerorum irrationalium compoſitorum difficultatem peculiarem non continet: neque enim numeri irrationales, niſi ex numeris irrationalibus ejuſdem denominationis ſubtrahuntur, atque adeo ſingulorum membrorum ſubtractio perficitur eodem modo, quo ſubtrahuntur numeri irrationales ſimplices. Revocandæ ſunt regulæ ſubtractionis circa ſigna + & —.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Numerorum irrationalium compoſitorum multiplicatio.

Revocandæ ſunt regulæ communes multiplicationis Coſſicorum, præcipuè verò duæ, nempè eadem ſigna ponunt ſignum + diverſa ſigna reponunt ſignum —. Revocandum item eſt, multiplicationem radicum per abſolutos, inſtitui debere per poteſtates abſolutorum.

Tertiò, quoties occurrit numerus habens præciſam radicem, licitum eſſe ponere eam radicem ut ſi occurrat ℞q 25. licèt pro ea ſcribere 5. pro ℞c. 8. licèt ſcribere 2.

A. 6 — ℞q 20.
B. 8 — ℞q 45.
C. 48. Rq. 1280 — ℞q. 1620 + ℞q. 900.
D. 48. — ℞q. 1280 — ℞q. 1620 + 30.

Proponatur numerus A multiplicandus, per numerum B. multiplico — ℞q 45. per — ℞q 20. producitur + ℞q 900. ſeu 30.

Secundò multiplico — ℞q 45. per + 6. ſeu + 36. fit — ℞q 1620. Tertiò multiplico + 8. ſeu + 64. per — ℞q 20. fit — ℞q 1280. Denique multiplicando 8. per 6. fit 48. Quare productus erit C. vel extrahendo radicem ex ultimo membro, fiet productus D. poſſet tentari additio numerorum — ℞q 1280. & — ℞q 1620.

E. ℞qq 288 — ℞qq 648.
F. ℞qq 128 — ℞qq 162.
G. ℞qq 36864 — ℞qq 82944 — ℞qq 46656 + ℞qq 104976
H. ℞q 192 — ℞q 288 — ℞q 216 + 18.

Proponatur numerus E, multiplicandus per numerum F fiet numerus G: ſed ſi extrahantur radices quadratæ ut ad minores numeros revocentur; fiet numerus H. Nam ex ultimo membro numeri G extrahitur radix quadratoquadrata, ex aliis tantùm quadrata, cum quadratoquadrata careant.

Si Radices multiplicandæ diverſæ fuerint denominationis ad eamdem priùs revocentur.

V. 2 + Rq 16.
X. 2 — Rq 16.
Y. 4. + ℞q64 — ℞q.64 — 16.
Z. 4 — 16.

In hoc ultimo exemplo, in quò numerus V. multiplicat numerum X cum ℞q 16. multiplicet ℞q 16. producitur abſolutus 16. & quia in producto Y ſecundum, & tertium membrum ſe invicem perimunt reſtabit numerus Z.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Numerorum irrationalium compositorum divisio.

Notandum primò, quoties radix per numerum absolutum dividitur, instituendam esse divisionem, per similem potestatem illius absoluti. Sic enim absolutus ad eamdem denominationem revocatur, pariter si altior potestas, per depressiorem dividenda sit, depressior ad altioris potestatis denominationem revocetur, ut si dividendus esset hic numerus ℞qq 8 — ℞cs. 3. per ℞q. 2. Primò divisor ℞q. 2. revocanda est ad eamdem denominationem, cum primo membro dividendi, nempe cum Rqq 8. quod facilè fiet multiplicando quadratum 2. per seipsum, ita enim pro Rq 2. fiet Rqq 4 per quam si dividas ℞qq. 8. quotiens proveniet ℞qq 2. Secundò numeri dividendi secundum membrum ℞cs. 3. & divisor ℞q 2. ad eamdem denominationem revocentur; revocabuntur autem ad denominationem qs. fientque divisor ℞qs. 32. & dividendus ℞qs. 9. divide unum per aliud fiet quotiens ℞qs. $\frac{9}{32}$ habemus ergo quotientem integrum ℞qq 2 — Rqs. $\frac{9}{32}$. Nulla est igitur difficultas peculiaris, quoties numerus compositus per simplicem radicem dividitur; singula enim ejus membra per simplicem illum numerum, dividuntur, ad quod necessarium est ut idem divisor revocetur ad singulorum membrorum denominationem.

Major erit difficultas quando divisor est numerus compositus, quare revocandus erit ad simpliciorem: quod fiet si tam dividendus quam divisor multiplicentur per communem multiplicatorem, ferè similem divisori, & ab eo differentem solummodo secundum signa + & — quod in exemplis rationalibus ostendo, ut meliùs hujus praxis veritas appareat. Sit dividendus numerus 42 per ℞q. 25 + ℞q4. id est per 7. sed suppono ignorari hunc numerum esse 7. & quotientem esse 6. Tam numerus dividendus 42. quam numerus divisor ℞q 25 + ℞q4. multiplicentur per hunc numerum simillimum divisori, nempè ℞q 25 — ℞q 4. differentem scilicet ab eo in signo + mutato in signum — habebisque post multiplicationem pro dividendo ℞q 44100 — ℞q 7056. & extractis radicibus habebis 210 — 84. seu 126: habebis item pro divisore novo, ℞q. 625. + ℞q 100 — ℞q 16. & quia membra intermedia se invicem destruunt restabunt ℞q 625. — ℞q. 16 & extractis radicibus 25 — 4. seu 21. per quem numerum si dividas dividendum 126. habebis pro quotiente 6.

Demonstratio hujus operationis fundatur in eo principio, quod numeri per eumdem multiplicati in eadem sint ratione; atque adeo si unus per alium dividatur idem sit futurus quotiens. Sint enim numeri 4, & 8. si 8. per 4. dividatur, quotiens erit 2, quæ enim est ratio 8. ad 4, eadem est 2. ad 1. multiplicentur 8. & 4. per eumdem verbi gratia per 10. fient 80. & 40. instituatur divisio 80. per 40. cum eadem sit ratio 80. ad 40. quæ erat 8. ad 4. idem etiam quotiens 2. esse debet, ostendens rationem dividendi ad divisorem. Quare artificium hujus praxis in eo consistit ut multiplicator qui assumitur sit simillimus divisori, ab eoque tantum differat in signo + vel —, ut dum instituetur multiplicatio, exurgent membra se invicem elidentia: hæc praxis vocatur expurgatio.

Hæc praxis valet in radicibus omnibus. Sit dividendus numerus 10. per ℞qq 5 + ℞qq 3. assumatur communis multiplicator ℞qq5 — ℞qq3. eritque novus dividendus ℞qq 50000 — ℞qq 30000. & novus divisor ℞qq 25 — ℞qq 9. seu ℞q 5 — ℞q 3. qui cum adhuc nec sit rationalis, nec simplex, tam novum dividendum, quam novum divisorem, multiplico per hunc ℞q 5 + ℞q 3. mutato scilicet divisoris signo — in signum +. & multiplicatione facta, fit novus dividendus ℞qq 1250000 — ℞qq 750000 + ℞qq 450000 — ℞qq 270000. & novus divisor 5 — 3. seu 2. hoc est ℞qq 16. per quam si ultimum dividendum partiaris habebis quotientem ℞qq 78125 — ℞qq 46875 + ℞qq 28125 — ℞qq 16875. quem assero esse quotientem quæsitum quod probare poteris. Si enim eum multiplices per primum divisorem ℞qq 5 + ℞qq 3. exurget numerus ℞qq 390625 — ℞qq 50625. & extractis radicibus 25 — 15 seu 10. numerus scilicet primò propositus.

Si divisor habuerit tria membra affecta signo + communis multiplicator assumendus erit similis divisori, & ab eo discrepans in signo + mutato in —, ut si numerus 100. dividendus esset per divisorem ℞q 3 + ℞q 5 + ℞q 6. assumatur communis multiplicator Rq 3 + Rq 5 — Rq 6. ex multiplicatione divisoris orietur divisor bimembris ℞q 60 + 2. & novus dividendus erit ℞q 30000 + ℞q 50000 — ℞q 60000. & quia divisor non est adhuc simplex nec rationalis, assumo novum multiplicatorem ℞q 60 — 2. & habebitur novus divisor 56. & novus dividendus ℞q 1800000 + ℞q 3000000 + ℞q 240000 — ℞q 120000 ℞q 3600000. qui numerus si dividatur per 56. eumdem quotientem exhibebit; ac si 100. divideretur per ℞q 3 + ℞q 5 + ℞q 6.

Quando divisor constat duobus membris radicum cubicarum ut ℞c. 5 + ℞c. 3 inveniantur 3. numeri continuè proportionales in ratione 5. ad 3. quod facilè fiet si numerum 5 per seipsum multiplices ut fiat 25. & numerum 5 per 3. fiet 15. & numerum 3. per seipsum fiet 9. cum enim idem 5. & seipsum, & numerum 3. multiplicet erunt producti 25. & 15. ut 5. ad 3. & pariter cum idem 3. multiplicet & 5. & seipsum, erunt producti 15. & 9. ut 5. ad 3. Adhibeantur hi tres numeri ℞c. 25 — ℞c. 15 + ℞c. 9. tanquam communis multiplicator & producetur divisor ℞c. 125 + ℞c. 27. hoc est 5 + 3: seu 8. per hunc divide novum dividendum.

Eadem methodus est usurpanda in divisore composito cujus duo membra fuerint duæ radices qq aut surdesolidæ; tot enim constituendi sunt numeri continuè proportionales, quot sunt unitates in exponente potestatis, & continuè proportionales alternatim signis + & — afficientur, fietque multiplicator.

Denique si divisor compositus constet duobus membris radicum diversarum revocentur hæ duæ radices diversæ, ad eamdem denominationem.

PROPO

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Ortus & numeratio radicum universalium, seu ligatarum.

Radices universales seu ligatæ, sunt illæ quæ exeunt in totum aliquem numerum compositum. Proponatur hic numerus 10 + ℞q 7. jubeamurque radicem quadratam eruere, quia exhiberi non potest radix quadrata numeri 7, non potest etiam ex totali eo numero educi præcisa radix quadrata. Quare huic proponimus signum radicale ℞q (10 + ℞q 7. quo significamus radicem quadratam numeri compositi ex 10. & radice quadrata numeri 7.) sic quia radix quadrata numeri 16. est 4, & Radix quadrata 64. est 8. Rq (10 + 4 + 3 + 8) significat ℞q 25. seu 5. Rq. (℞c. 27 + ℞q 25.) significat radicem quadratam, numeri compositi, ex radice cubica numeri 27. quæ est 3. & radice quadrata 25. quæ est 5. indicamus igitur volumus radicem cubicam numeri 8, quæ est 2. Idem binarius significatur per istam Rq. (Rq 25 + Rq 9.) significat enim radicem cubicam numeri 8.

Ex his innotescit & sensus & generatio istarum radicum: manifestum etiam est eundem numerum, characteribus, & notis in speciem diversis significari posse.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Multiplicatio radicum universalium.

Radices universales facilè multiplicari possunt, secundum propriam denominationem; hoc est radicis quadratæ quadraticè, cubicæ cubicè, & ita de aliis, hæc enim multiplicatio perficitur delendo signum radicale.

Nam radicem quadratam v.g. multiplicamus, si exhibeamus, productum ex ejus multiplicatione ejus scilicèt quadratum; cubicam in se ducimus scribendo ejus cubum. Unde si jubeamur quadraticè multiplicare ℞q (10 + Rq 25.) id præstamus delendo primum signum Radicale, & exhibendo ejus quadratum scilicet 10 + ℞q 25.

Secundò multiplicamus Radicem universalem, per numerum absolutum, si ejus potestatem multiplicemus per similem potestatem numeri absoluti, ut si proponatur ℞q (7 + ℞q3.) duplicanda, ejus quadratum 7 + ℞q 3. multiplicare debemus per 4 quadratum numeri 2. Ratio est quia tunc exhibemus quadratum radicis quadratæ multiplicatæ per 2. quadratum ergo 7 + ℞q 3. multiplicamus, multiplica ergo 7. per 4. fiunt 28. multiplica item ℞q3. per 4. & quia jam est radix quadrata, multiplicanda erit per 16. ita ut producatur ℞q (28 + ℞q48.) si enim esset proposita ℞q (7 + 3.) multiplicando per quadratum numeri 2. seu per 4 fieret ℞q (28 + 12.) sed in ultimo membro est ℞q3. quare debet multiplicari per quadratum ipsius 4 nempe 16. ut fiat Rq (28 + Rq48) quod est diligenter notandum. Ut meliùs innotescat veritas hujus praxis. Proponatur radix universalis non surda, ℞q (7 + ℞q4.) est autem ejus quadratum 7 + ℞q4. idem quod 9. cujus radix quadrata est 3: proponatur hæc radix duplicanda, assumo quadratum numeri 2. seu 4. per quod multiplico numerum 7. fitque 28. tum multiplico ℞q4 non per 4. sed per quadratum numeri 4. nempe per 16. fitque Rq64. est ergo ℞q (28 + ℞q64.) seu ℞q. (28 + 8.) seu ℞q36. cujus radix quadrata nempe 6. est dupla prioris 3.

Demonstratio quoad ultimam partem est quod dum dicitur ℞q (℞q4) est idem ac Rqq4. quæ si duplicetur, multiplicari debet per qqtum numeri 2. (ut nempe 2 ad eandem denominationem reducatur) seu multiplicari per 16.

Eamdem doctrinam cubicis radicibus applicare possumus. Ut si proponatur ℞c (℞c64 + ℞c.27.) multiplicanda per 2. multiplicanda est ℞c. 64. per cubum cubi numeri 2 nam 64 est cubocubus respectu radicis, quæ significatur, est autem 8 cubus numeri 2 & 512 cubocubus: quare si fiat multiplicatio habeo ℞c. 32768. pariter multiplicari debet 27. per 512. fiuntque 13824. quare fiet ℞c. (℞c. 32768 + ℞c. 13824.)

Proponatur item ℞c (℞c 64 + ℞q 36 + 3.) multiplicanda per 5. primum membrum multiplicandum est per cubocubum numeri 5. nempe 1953125: producerúrque 125000000. secundum membrum multiplicandum est per quadratocubum numeri 5 seu per 15625. quia scilicèt dicitur ℞c ℞q. 36. & ex hac multiplicatione producetur 562500. denique ultimum membrum 3. multiplicari debet per cubum numeri 5. quia illi præponitur tantùm radix cubica, ex qua multiplicatione oritur 375. quare orietur hic productus ℞c (℞c. 125000000. + ℞q 562500. + 375.)

Tertiò proponatur multiplicanda ℞q (13 + ℞q9.) per ℞q (5 + ℞q16.) prima radix si explicetur, significat numerum 4 seu ℞q (13 + 3) seu ℞q.16. secunda significat 3. seu radicem quadratam numeri 5 + 4. hoc est 9: ex multiplicatione autem numeri 4 per 3. oritur numerus 12. Videamus utrum praxis nostra eumdem numerum repræsentet. Radices ergo proponuntur multiplicandæ, quarum quadrata sunt 13 + ℞q9. & 5 + ℞q16. Primò multiplico ultimum membrum numeri A, per ultimum membrum numeri B, hoc est Rq9 per Rq 16. fitque Rq 144. tum multiplico 13. seu ejus quadratum per radicem quadratam 16. seu Rq 169. fiet ℞q 2704 multiplico item secundum membrum numeri A per primum nu-

A. 13 + Rq 9.
B. 5 + Rq 16.

C. Rq (65. + Rq 225 + Rq.2704 + Rq 144.)
65. 15. 52. 12.

meri B. seu Rq 9. per 5. seu ejus quadratum 25. fitque ℞q 225. Denique multiplica 5 per 13. fit 65. habes igitur productum numerum C. Si extraho radices habebis numeros 65. 15. 52. 12. quorum summa 144. cujus radix quadrata 12.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Radicum universalium divisio.

In genere dicendum est, divisionem radicum, absolvi divisione potestatum cujus sunt radices, cum enim radices in seipsis non habeantur, sed tantum in suis potestatibus apposite earum divisio per potestatum divisionem perficitur.

Proponatur hæc radix universalis ℞q (13 + ℞q7.) dividenda per ℞q5. prioris quadratum est 13 + Rq7. & secundæ quadratum est 5. divide 13. per 5. fit quotiens $2\frac{3}{5}$. divide item 7 per 5 seu per 25. fit quotiens $\frac{7}{25}$. habes igitur quotientem ℞q ($2\frac{3}{5}$ + ℞q $\frac{7}{25}$.

Secundò sit hæc ℞q (432. + ℞q776) dividenda per 6. hanc divide per ℞q 36.

Major erit difficultas quando divisor erit compositus, seu erit radix universalis, tunc autem assumendus est communis multiplicator, ut nempe fiat tam novus dividendus, quam novus divisor sed simplicior, res tota in exemplo manifesta fiet.

Sit dividenda ℞q (588 + ℞q 34848.) per ℞q (12 + ℞q8.) divisor ergo est quadratum 12 + ℞q8. assumo pro communi multiplicatore numerum ferè similem divisori; nempe 12 — ℞q8. sic enim producentur membra se invicem elidentia — 1152. & + 1152. habebis ergo novum

12. + R q 8.
12. — R q 8.
— 1152. — R q 64.
144. + 1152.
144. — 8.
136.

divisorem purum 136. si multiplices dividendum ℞q (588 + ℞q 34848.) per 12 — ℞.q8. orietur novus dividendus ℞q (7056 + ℞q 5018112. — ℞q 2765952 — ℞q278784) qui numerus ad minorem reduci potest: nam ultimi membri Radix quadrata, est 528. quæ subtrahi potest ex primo membro, item radix quadrata tertii subduci potest ex radice quadrata secundi: fitque numerus reductus ℞q (6528 + ℞ q.334928) qui si dividatur per novum divisorem 136; exhibebit quotientem ℞q (48 + ℞q 18.)

Additio Radicum universalium, perficitur signo additorum +, sicut & subtracto signo subtractorum — ideoque de illis nihil dicendum est.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

De Minutiis numerorum irrationalium.

Numeri irrationales suas etiam habent minutias, quarum sensus, & numeratio varia est, prout variè efformantur. Signum Radicale ante minutiam positum refertur ad totam minutiam, hoc est tam ad numeratorem quam ad denominatorem ut ℞q $\frac{9}{16}$ significat radicem quadratam novem decimarum sextarum, seu significat numerum qui in se productus efficiat hanc fractionem $\frac{9}{16}$. seu hunc numerum $\frac{3}{4}$. si enim affirmas tres quadrantes trium quadrantum habebis $\frac{9}{16}$.

Si ante fractionem integer præponatur, potest ad fractionem reduci ut Rc. 1 $\frac{67}{125}$. reduci potest ad hunc Rc $\frac{192}{125}$. significat numerum qui in se cubicè productus, efficiat hanc fractionem $\frac{192}{125}$.

Ex quo concludes si idem numerus tam denominatorem fractionis, quàm numeratorem multiplicet, aut dividat; eamdem esse minutiam, & consequenter eamdem radicem ℞q $\frac{9}{16}$. & ℞q. $\frac{18}{32}$. idem significant.

Quando signum radicale adjungitur soli numeratori, aut soli denominatori fractionis; cum etiam tantùm afficit; ut $\frac{℞q\ 64}{2}$ significat $\frac{8}{2}$. seu 4 pariter $\frac{8}{Rq4}$ significat 8 dividi per 2.

Additio fractionum irrationalium similis est, additioni minutiarum vulgarium; debent enim reduci ad eundem denominatorem, quod methodo communi per multiplicationem in crucem perficitur, & reductione facta simul adduntur numeratores, ut si reductione factâ exhibeantur fractiones $\frac{℞q4}{7}$ & $\frac{℞q9}{7}$ adde unum numeratorem alteri; sed additione propriâ radicum habebitur $\frac{℞q25}{7}$ seu $\frac{5}{7}$.

$$\frac{℞q\,4.}{7}\qquad\frac{℞q\,9.}{7}$$

Subtractio eâdem ferè ratione perficitur, ut si reductione factâ exhibeantur fractiones $\frac{℞q4}{7}$ & $\frac{℞q9}{7}$ quarum prima ex secunda subtrahenda sit, subtrahe unum numeratorem ab alio, sed subtractione propria radicum fiet $\frac{℞q1}{7}$.

Pariter proponatur hæ duæ fractiones ℞q $\frac{16}{49}$. & ℞q $\frac{4}{9}$. diversum habentes denominatorem. 9. & 49. multiplicentur denominatores inter se ut fiat communis denominator 441. & multiplicatis decussatim numeratoribus per denominatores, fient novi numeratores 144. & 196. extrahantur omnium radices, habebis fractiones simplices A & B. quarum additio, aut subtractio facilis erit, additis scilicet numeratoribus, aut subtracto uno numeratore ab alio.

$$℞q\frac{16}{49}\ \times\ ℞q\frac{4}{9}$$

$$℞q\frac{144.}{441.}\qquad ℞q\frac{196}{441}$$

$$A\ \frac{12}{21}.\qquad B\ \frac{14}{21}.$$

$$\frac{26}{21}.$$

Sint Addendæ istæ minutiæ $\frac{℞q4}{9}$ & $\frac{℞q\ 49}{9}$ cum eumdem habeant denominatorem, soli addendi sunt numeratores, vel praxi communi additionis radicum vel sequenti. Unum quadratum 4 per aliud 49 multiplica, fit productus 196. cujus radix quadrata 14. bis sumpta erit 28. hæc juncta duobus quadratis 9 & 49. efficit summam 86. habemus ergo $\frac{℞q\ 86}{9}$.

Demonstratio

Demonstratio hujus praxis est quod (*per* 4.2.) quadratum totius lineæ æquale sit rectangulo bis comprehenso sub segmentis, & duobus quadratis segmentorum; sed radix producti ex quadratis est rectangulum sub radicibus. Ergo duplicando radicem quadratam dicti producti, & eam addendo duobus quadratis, resultat totale quadratum.

Quando numeratores sunt incommensurabiles additio fiet per signum + sicut & subtractio per signum —, ut si addendæ essent minutiæ ℞q $\frac{7}{8}$ & ℞q $\frac{5}{8}$ ita fieret additio scribendo ℞q$\frac{7}{8}$ + ℞q$\frac{5}{8}$.

Multiplicatio, & divisio minutiarum irrationalium, peculiarem non continet difficultatem, ubi enim reductæ sunt ad eadem signa radicalia; methodus communis, multiplicationis, aut divisionis minutiarum usurpatur.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

De Numeris cossicis irrationalibus.

Si Numeris cossicis præponatur signum radicale, communiter habentur pro irrationalibus, quamvis nonnunquam sint realiter rationales, ut si numero cossico 20 R præponas signum radicale ℞q 20 R; cujus sensus est sumendam esse radicem quadratam 20 radicum. Radix autem quadrata 20 radicum censetur numerus irrationalis: quamvis aliquando sit numerus rationalis: si enim una radix sit 5. 20 radices efficient 100 numerum rationalem, aut potius cujus radix est 10 verus numerus, si verò radix fuerit 2. 20 radices erunt 40. numerus irrationalis. Ita dicere possumus ℞c.20q. Radix cubica 20 quadratorum. Eodem modo adduntur aut subtrahuntur hi numeri, ac radices surdæ nullâ habita ratione signi subsequentis, ut si addendi essent hi numeri ℞q 8R. & ℞q 18R. eodem modo fit additio, ac si proponerentur hi duo Rq8. & Rq. 18. qui duo numeri sunt commensurabiles: nam dividendo 18 per 8. fit quotiens 2$\frac{1}{4}$. cujus radix, seu media proportionalis inter 1 & 2$\frac{1}{4}$. est 1$\frac{1}{2}$. cum autem latera quadratorum sint in subdiplicata ratione quadratorum, erit radix 8. ad radicem 18, ut 1. ad 1.$\frac{1}{2}$. & componendo erit ut 1. ad 1. + 1.$\frac{1}{2}$. seu ad 2.$\frac{1}{2}$. ut radix 8. ad Radicem summæ.

Et factis tribus continuè proportionalibus 1. 2.$\frac{1}{2}$. 6.$\frac{1}{4}$. erit quadratum 8. ad quadratum summæ ut 1. ad 6.$\frac{1}{4}$. quare multiplicando 8. per 6.$\frac{1}{4}$. fit quadratum summæ 50. erit ergo summa ℞q 50. seu ℞q. 50 R.

Sed hæc probata sunt satis fusè suprà. Addito ergo signo cossico, fiet ℞q 50 R. cum enim numeri cuilibet rei applicari possint, cum ℞q 50 hominum, æqualis sit ℞q 18. hominum & ℞q 8 hominum, vel cujuslibet alterius rei, quæ per unitatem intelligi potest: si pro unitate intelligere velim radicem, quadratum, aut cubum, aut aliam quamcumque quantitatem cossicam eodem modo verificabitur regula.

Ex hoc sequitur quoties numeri cossici, secluso charactere cossico, radicem non habent, aut non sunt commensurabiles, additionem fieri non posse, nisi resolvantur, hoc est nisi cognoscatur valor radicis quadrati, aut cujuscumque characteris cossici.

Sequitur item necessarium esse, eos numeros revocare ad eamdem denominationem, antequam

℞qc 16q		℞qc 512c.
4R	X	8R
℞c		℞q
3	6	2

multiplicari, aut dividi possint; ut proponantur Rc. 4R. & Rq 8R multiplicandi, scribantur numeri 4R. & 8R, quibus subscribantur signa radicalia. Tum 4R quadraticè multiplicetur, fient 16q. Item 8R cubicè multiplicetur, fiet 512c. signum radicale componetur ex q & c fietque ℞qc. 16q. ℞qc.512c.

Fiat igitur multiplicatio numeri 512. per 16. fiet 8192. & quia dum cubus multiplicat quadratum fit surdesolidus, producetur ℞qc. 8192. Surd.

Si dividendus esset hic numerus ℞qc. 8192. Surd. per ℞qc.16q. primò dividetur 8192. per 16. & quotiens erit 512, & quia dum quadratum dividit surdesolidum generatur cubus, quotiens erit ℞qc. 512.c.

Ad hoc ut 3R. multiplicentur per ℞q 16. fiat quadratum hujus numeri 3R, ut nempè revocentur ad eamdem denominationem, habebisque ℞q 9. quadratorum; multiplicetur hic numerus per ℞q 16, & quia numerus absolutus multiplicando quadratum efficit quadratum fiet ℞q. 144q. In reliquis eadem recurrunt præcepta, quæ superius tradidimus.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

De æquationibus quæ numeris irrationalibus implicantur.

Multis modis æquationes numeris irrationalibus implicantur. Primus casus erit, si homogeneum comparationis fuerit numerus irrationalis, ut si proponatur hæc æquatio 1q + 6R = ℞q 46656. cum sit æqualitas inter hos terminos 1q + 6R ex una parte, & ℞q 46656. ex alia, erunt quadrata eorum æqualia, est autem quadratum homogenei comparationis 46656. habebitur autem facilè per multiplicationem quadratum hujus numeri 1q + 6R eritque 1qq + 12c. + 36q. = 46656.

Reductione ad simpliciorem opus erit nempè ut eam expurges numero cuborum, nempè si dividas numerum cuborum per exponentem quadratoquadrati, orietur quotiens 3. fit radix hujus æquationis 1R aucta hoc numero 3, eritque sic aucta 1R + 3. huic sit æqualis A, erit ergo æquatio 1R + 3 = A. & per antithesin 1R = A — 3. fiat primo istius radicis A — 3. quadratum, dabitur A2 — 6A + 9. & quia in æquatione notantur 36 q. fient + 36 A2 — 216 A + 324. fiat item cubus ejusdem A — 3 is erit A3 — 9A2 + 27 A — 27. & multiplicando per 12 cubos habebis 12A3 — 108 A2 + 324 A — 324. fiat item qqtum ejusdem radicis A — 3 is erit A4 — 12A3 + 54A2 — 108A + 81. addantur hæc omnia in unum

$$\begin{array}{lllll} A^4 - 12A^3 & + 54A^2 & - 108A & + 81. \\ \quad + 12A^3 & - 108A^2 & + 324A & - 324. \\ & + 36A^2 & - 216A & + 324. \\ \hline A^4 & - 18A^2 & & + 81. \end{array}$$

summam, nempè ut fiat 1qq — 12c. + 36q. & habebimus 1qq — 18q + 81 = 46656. & subtrahendo 81. habebimus æquationem aliam nempè 1qq — 18q = 46575. explicabilem methodo vulgari, cui exponentes terminorum sint 4. 2. 0. & dum inventa fuerit radix, tres unitates subtrahes, ut habeatur radix superioris æquationis.

Secundus casus erit. Si radix surda inveniatur in numero radicum, ut 1q + ℞q 36R = 520. & per antithesin 520 — 1q = ℞q 36R. & cum in terminis sit æqualitas; erit etiam in eorum quadratis, nempè si fiat quadratum 520 — 1q is erit 270400 — 1040q + 1qq = 36R. & per antitheses 36R. + 1040q. — 1qq = 270400.

Notandum autem propositam æquationem 520 — 1q = Rq 36R. explicabilem fuisse immediatè extrahendo radicem quadratam numeri 36R. quæ erat 6R: atque adeo erat æquatio 520 — 1q = 6R. ideoque præcedens praxis tantùm adhibenda est, quando numerus radicum est irrationalis.

Tertiò proponatur hæc æquatio ℞q (1q + 2 $\frac{1}{12}$. R) = 13. cum termini sint æquales, quadrata eorum æqualia erunt. Fiat igitur quadratum numeri 13. nempè 169. habebimus æquationem solubilem 1q + 2 $\frac{1}{12}$. R = 169. seu 1q + $\frac{25}{12}$ = 169: debet autem hæc fractio expurgari, ut supra diximus.

Quartò proponatur hæc æquatio ℞q(1q + 2R) = ℞q 168. erunt eorum quadrata æqualia nempè 1q + 2R = 168.

Hæc 1q + ℞q 4R + 2 R = 24 + ℞q 64. per antithesin translatis ℞q 4R. fiet æquatio 1q + 2R = 24 + ℞q 64 — ℞q 4R. & extractis radicibus numerorum 64. & 4. erit æqu. 1q + 2R = 24. + 8 — 2R & 1q + 4R = 32.

Sit æquatio ℞q 10q = 20. fiat quadratum numeri 20. fiet alia æquatio 10q = 400. & 1q = 40. & valor unius radicis ℞q 40.

Proponatur hæc æquatio ℞c. 12q = 30. fiat cubus numeri 30. qui erit 27000, est autem cubus hujus radicis ℞c. 12. q. deleto signo radicali, 12q. ergo habemus æquationem 12 q. = 27000.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

De Binomiis, & Apotomis.

Authores communiter duos numeros cossicos copulatos per signum + vocant binomium, duos verò copulatos signo — vocant apotomen; quæ appellatio si tribuatur numeris cossicis simplicibus, quibus scilicet non præponitur signum radicale, legitima esse non potest in rigore geometrico, cum hujusmodi numeri careant proprietatibus binomii, aut apotomes, prout ab Euclide definiuntur, binomium enim constat partibus inter se longitudine incommensurabilibus, potentia tantum commensurabilibus; omnis autem numerus, cui signum radicale non præponitur, longitudine, cum aliis omnibus commensurabilis est; debet igitur necessariò binomium in stricta significatione sumptum signum radicale habere.

Sed neque omnis numerus cossicus compositus, & præferens signum radicale erit binomium, aut apotome, seu residuum, sed præterea requiritur ut partes illæ sint inter se incommensurabiles, & habeant sua quadrata commensurabilia; quare hic numerus 6 + ℞q 9. non est binomium in stricta significatione, quia 6 & ℞q 9. quæ est 3. sunt commensurabiles, sicut neque 6 — ℞q 9. est Apotome.

Requiritur igitur ut saltem una pars numeri compositi sit irrationalis, si enim utraque sit rationalis, exponique possit per numerum absolutum, erunt commensurabiles: numerus enim cum omni alio propriè dicto commensurabilis est, cum habeat saltem unitatem aut partem aliquotam unitatis communem mensuram: quoties igitur una pars numeri cossici compositi erit explicabilis numero absoluto, alia verò non erit, toties binomium dicetur ut 6 + ℞q 20. & apotome 6 — ℞q 20.

Quando utraque pars numeri compositi erit radix surda, non tamen propterea erit semper binomium ut ℞q 40 + ℞q 10. sunt enim hæ radices surdæ commensurabiles, & se habent ut 1. ad 2, cum quadrata se habeant, ut 1. ad 4.

Debet igitur binomium constare partibus incommensurabilibus longitudine, quarum quæ major est dicitur majus nomen, quæ minor minus nomen, Comparantur autem quadrata eorum nominum, & excessus unius supra aliud; qui quadratorum excessus intelligitur reduci ad quadratum; ita ut linea quæ est ejus latus seu *radix, hoc* est linea quæ potest hunc excessum, comparetur cum majori, vel cum minori nomine, & consideretur utri sit commensurabilis, neque enim utrique commensurabilis esse potest.

Primum binomium erit cujus majus nomen plus potest quam minus, quadrato lineæ majori nomini commensurabilis, ita ut majus nomen sit commensurabile numero rationali exposito. Hujus exemplum esto 6 + ℞q 27: nam primò nomina sunt inter se longitudine incõmensurabilia, secundò quadratum majoris nominis seu 36, excedit quadratum minoris nominis 27 numero 9, cujus radix commensurabilis est majori nomini 6. quod est rationale primo numero rationali exposito; unitas enim in numeris supponitur semper ut exposita.

Apotome illi respondens erit 6 — ℞q 27. est enim id quod relinquitur detracto minori nomine, ex majori, ut si ex numero 6. auferatur ℞q 27 relinquitur 6 — Rq 27. quæ dicitur Apotome prima.

Secundum binomium habet minus nomen commensurabile numero rationali & linea potens excessum quadratorum, est commensurabilis majori nomini ut ℞q 48 + 6. minus nomen 6. est commensurabile numero rationali cuicumque; cujus quadratum 36, superatur à quadrato majoris nominis numero 12. sed ℞q 48. & ℞q 12 sunt commensurabiles, cum se habeant ut 1. ad 2, & quadrata ut 1. ad 4. Apotome illi respondens erit ℞q 48 — 6.

Tertium binomium neutrum nomen habet rationale, sed linea potens excessum quadratorum commensurabilis est majori nomini; ut ℞q

24

24 + ℞q 18. excessus quadratorum est 6. sed ℞q 6. est commensurabilis majori nomini. ℞q 24. est enim ejus subdupla cum quadrata se habeant ut 1. ad 4.

Apotome illi respondens erit ℞q 24 — ℞q 18.

Quartum binomium habet majus nomen rationale, cui linea potens excessum quadratorum est incommensurabilis ut 4 — ℞q 10, constat enim 4 esse numerum rationalem, & excessum quadratorum esse 6, linea autem illum potens seu ℞q 6. est incommensurabilis majori nomini.

Apotome illi respondens erit 4 — ℞q 10.

Quintum binomium habet minus nomen rationale, & linea potens excessum quadratorum est incommensurabilis majori nomini, ut ℞q 5. + 2. minus nomen 2. est rationale. Excessus quadratorum est 1. linea illum potens incommensurabilis est cum primo nomine. Apotome ℞q 5 — 2.

Sextum binomium neutrum habet nomen rationale, & linea potens excessum quadratorum incommensurabilis est majori nomini; ut ℞q 80 + ℞q 50. excessus quadratorum est 30. linea illum potens ℞q 30. est incommensurabilis cum majori nomine. Nam diviso numero 80 per 30. fit numerus $2.\frac{2}{3}$. numerus non quadratus. Apotome illi respondens ℞q 80 — ℞q 50.

Inventionem horum binomiorum facilè ex Euclidis decimo repetere possemus sicut & inventiones aliarum linearum, sed minus utiliter in rem nostram, cum eadem ubique in omnibus binomiis etiam impropriis regnet methodus extrahendæ radicis quadratæ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Extrahere radicem quadratam ex binomio.

Sit æquatio 1q ═ 6 + ℞q 27. quæritur valor radicis illius quadrati, seu quæritur numerus qui per seipsum multiplicatus producat 6 + ℞q 27. Idem dico de Apotome, ut si proponeretur æquatio 1q ═ 6 — ℞q 27. quæritur latus illius quadrati, seu quæritur numerus qui per seipsum multiplicatus efficiat 6 — ℞q 27. Regula hæc erit. Radicem quadratam differentiæ quadratorum majori nomini adjice, ut fiat summa, & ab eodem subtrahe ut fiat residuum; semissis tam summæ, quàm residui: radices quadratas connecte signo + habebis radicem quadratam binomii, vel easdem radices connecte signo — exhibebitur radix quadrata Apotomes.

In Æquatione proposita 1q. ═ 6 + ℞q 27. Excessus quadratorum 36. & 27. est 9. cujus radix quadrata 3. addatur majori nomini 6. fietque 9. & ab eodem auferatur, residuum erit 3. semisumma est $4\frac{1}{2}$. semiresiduum erit $1\frac{1}{2}$. Radix quadrata utriúsque efficiet radicem binomii, nempè ℞q $4\frac{1}{2}$. + ℞q $1\frac{1}{2}$. & latus Apotomes erit ℞q $4\frac{1}{2}$. — ℞q $1\frac{1}{2}$. Examen harum radicum erit si multiplicando numerum ℞q $4\frac{1}{2}$. + ℞q $1\frac{1}{2}$. per seipsum restituatur idem binomium, & pariter multiplicando hunc numerum ℞q $4\frac{1}{2}$. — ℞q. $1\frac{1}{2}$. restituatur præcedens Apotome 6. — ℞q 27. multiplicatio autem id efficit ut in figura intueri licet.

R q $4\frac{1}{2}$. + R q $1\frac{1}{2}$.
R q $4\frac{1}{2}$. + R q $1\frac{1}{2}$.

+ R q $6\frac{3}{4}$. + $1\frac{1}{2}$.
$4\frac{1}{2}$. + R q $6\frac{3}{4}$.

6. + R q 27.

Hæc regula in pluribus exemplis fiet clarior. Proponatur binomium primum 23. + Rq 448. quadratum numeri 23. est 529. differentia inter quadrata 448. & 529. est 81. cujus radix quadrata 9. addita majori nomini 23. efficit summam 32. & detracta residuum 14. Semisses sunt 16. & 7. Radices quadratæ, 4. & ℞q 7. quæ si conjungantur signo + exhibebunt radicem binomii nempè 4 + ℞q 7.

Hæc regula ita universalis est, ut non tantum binomiis propriè dictis conveniat, habentibus scilicèt eas conditiones, quas supra ex Euclide recensuimus, sed etiam cuilibet lineæ etiam divisæ in partes longitudine commensurabiles, ita ut supervacaneum videatur in ordine ad Algebram, totam incommensurabilium doctrinam huc advocare. Quod ut experientiâ comprobemus proponatur æquatio 1q. ═ 5 + 4. quod binomium improprium est; cum habeat partes inter se commensurabiles. Quadrata nominum sunt 25. & 16. differentia est 9. cujus radix quadrata 3. addita majori nomini 5 efficit 8. & subtracta relinquit 2. semisses sunt 4 & 1. radices quadratæ 2. & 1. quare radix quadrata hujus binomii 5 + 4. erit 2 + 1. seu 3. Antequam hæc praxis demonstretur proponendum est Theorema cui innititur.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Radix quadra differentiæ quadratorum binomii æqualis est differentiæ quadratorum segmentorum radicis.

Sit binomium quodcumque etiam improprium 5 + 4. dico radicem quadratam differentiæ quadratorum 25 & 16. esse æqualem differentiæ quæ est inter quadrata segmentorum radicis. Sit inventa (*per superiorem praxin*) radix hujus binomii 5 + 4. quæ sit 2 + 1. seu linea quæ per seipsam totam multiplicata producat binomium 5 + 4. quæ tamen linea sit divisa in 2 & 1. sintque quadrata horum segmentorum 4 & 1. quorum differentia sit 3. dico radicem quadratam differentiæ quadratorum 25 & 16. esse æqualem huic differentiæ quadratorum 4 & 1.

Demonstratio. Sit radix quæcumque 2 + 1. certum est ejus quadratum æquale esse duobus quadratis segmentorum 2 + 1. & rectangulo bis sub segmentis comprehenso (*per* 4. 2.) Insuper benè ponimus, pro primo nomine producti, summam quadratorum; pro secundo, rectangulum sub segmentis bis comprehensum. Rectangulum autem sub segmentis medium proportionale est inter duo quadrata segmentorum: ergo bis positum medium proportionale est inter quadrata bis hinc inde posita. Quare quadratum rectanguli bis comprehensi, æquale est rectangulo comprehenso sub duplo quadratorum, (*per* 16.6.) sed quadratum summæ quadratorum, seu majoris nominis, æquale est rectangulo comprehenso sub duplo quadratorum, & quadrato differentiæ quadratorum. Nam supponatur AB, tot continere unitates quot sunt in uno quadrato, & BC quot

A D B C

sunt in minori; abscindaturque BD æqualis ipsi BC, erit AD differentia quadratorum sed (*per* 7.2.) quadratum AC æquale est rectangulo quater sub AB, BC, seu rectangulo bis sub duplo AB, & duplo BC, & quadrato differentiæ AD. Ergo quadratum AD quæ est differentia inter quadrata segmentorum radicis binomii, erit differentia inter quadratum AC, majoris nominis seu aggregati quadratorum, & quadratum minoris nominis, seu rectanguli bis comprehensi sub segmentis radicis binomii. Et verò positâ radice $2 + 1$ binomii $5 + 4$. in quo 5. majus nomen est summa quadratorum, & 4. minus est rectangulum bis sub segmentis, differentia quadratorum segmentorum radicis, erit 3. radix differentia inter quadrata nominum 5 & 4.

COROLLARIUM.

Ex hoc deducunt nonnulli methodum multiplicandi quadratè aliquod binomium: verbi gratiâ sit binomium $2 + 1$. multiplicandum quadratè, primum nomen erit aggregatum quadratorum nempè 5. ut habeatur secundum nomen, posset quidem fieri rectangulum bis sub segmentis: potest tamen haberi aliter, nempè fit differentia quadratorum, quæ est 3. tum fit quadratum majoris nominis 5. seu 25. ex quo subtrahis 9. seu quadratum differentiæ, & restat 16. quadratum minoris nominis.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Demonstratur eductio radicis ex binomio.

Sit binomium quodcumque $5 + 4$. primò quadratorum differentiam inquirimus, quæ est 9. cujus radicem quadratam 3 eruimus: habemusque differentiam inter quadrata segmentorum radicis per præcedentem, est autem majus nomen 5. aggregatum hujusmodi quadratorum, si semisummæ $2\frac{1}{2}$. addas semidifferentiam $1\frac{1}{2}$. habebis majus quadratum 4. si ab eadem semisumma subtrahas habebis minus quadratum 1.

Vel si aggregato 5. auferas differentiam 3. restabit duplum minoris quadrati seu 2; si addas fiet duplum majoris quadrati seu 4.

Hanc regulam aliter nonnulli proponunt. procedunt enim per semisses: & loco differentiæ quadratorum segmentorum radicis: quærunt semissem hujusmodi differentiæ hoc modo. Quæratur differentia inter quadrata semissium nominum; hujus differentiæ radix quadrata erit semidifferentia quadratorum radicis: quæ si addatur semissi majoris nominis, & ab eadem subtrahatur, habebuntur quadrata segmentorum radicis. Ut si proponatur binomium $5 + 4$. quadrata radicum $2\frac{1}{2}$. & 2. sunt $6\frac{1}{4}$. & 4 differentia $2\frac{1}{4}$. radix ejus $1\frac{1}{2}$. erit semidifferentia quadratorum radicis. Hæc addatur semissi majoris nominis, seu $2\frac{1}{2}$. fiet 4. majus quadratum, subtrahatur ab eadem restabit 1. minus quadratum.

Demonstratio eadem est. nempe cum radix differentiæ quadratorum binomii sit eadem cum differentiâ quadratorum radicis: radix differentiæ quadratorum semissium erit semidifferentia quadratorum radicis, cum quadrata sint in duplicata ratione laterum; datâ autem semidifferentiâ quadratorum, & eorum aggregato seu majori nomine, facilè habentur quadrata, si nempe semissi aggregati addas semidifferentiam habebitur majus quadratum, si ab eâdem illam subtrahas habebitur minus. Ut si AB, BC sint quadrata; abscissâ AE æquali BC, erit EB differentia; si semidiffe-

A E D B C

rentiam DB addideris semiaggregato AD, habetur AB, si ex semiaggregato DC aufertur DB semidifferentia restat BC minus segmentum.

Eandem regulam aliter proponunt nonnulli; sumunt enim radicem quadratam quartæ partis differentiæ quadratorum, seu quod idem est semissem radicis differentiæ quadratorum nominum, quam adjiciunt semissi majoris nominis & habent majus quadratum; eandem subtrahunt à semisse majoris nominis, & habent minus, quæ omnia eodem modo demonstrantur per præcedentem propositionem.

Possumus ergo hac methodo inquirere radicem cujuslibet binomii verbi gratia $5 + 4$. quadrata efficimus nominum 5 & 4. quæ sunt 25 & 16. unum ab alio subtrahimus, habemúsque differentiam 9. cujus extrahimus radicem quadratam 3. hanc majori nomini 5 addimus, fitque 8. cujus dimidium 4 est quadratum majoris segmenti radicis; eandem differentiam subtrahimus ex 4. restat minus quadratum 1.

Ex his propositâ quacumque radice binomia $2 + 1$. ejus quadratum inveniemus fiant quadrata 4 & 1. majus 4 duplicamus fiunt 8 ex eo differentiam quadratorum subtrahimus, relinquitur majus nomen 5. ex ejus quadrato 25. subtraho 9. quadratum differentiæ nominum, restat quadratum 16. minoris nominis 4. quæ omnia demonstrantur *per præcedentem.*

PROPOSITIO XLI.

Problema.

Datum numerum secare in duas partes ut productus ex earum multiplicatione, sit æqualis numero dato non excedenti quartam partem quadrati numeri propositi.

Hæc propositio ad sequentem necessaria est. Sit datus numerus 20. dividendus in duas partes, quæ multiplicatæ producant numerum 75. minorem quam 100 quartam partem, numeri 400. quadrati numeri 20 primò propositi.

Præter methodum communem Algebræ. 100. quadrato semissis numeri dati 20. subtraho 75. restat 25. cujus radix 5. subtracta ex semisse numeri radicum relinquit 5. minorem partem, & addita eidem dat 15 majorem.

Hanc

Hanc praxin quamvis supra demonstratam, ita nonnulli demonstrant. Sit AB numerus 20. divi-

|—|—|—|
A C D B

dendus in partes AD, DB quæ invicem multiplicatæ efficiant 75. dividatur AB bifariam in C. cum AB divisa sit bifariàm in C, & non bifariàm in D, erit rectang. AD, DB, unà cum quadrato ex C D, æquale quadrato ex CB. Quare si ex quadrato 100. seu ex quadrato lineæ CB 10 semissis 20, subtrahas rectangulum ex AD, DB seu 75. restat 25. quadratum ex CD. & per extractionem radicis C D, quæ subtracta ex C D semisse radicum relinquit DB. minorem radicem, & addita A C semissi radicum exhibet A D majus segmentum, sed hoc jam probavimus aliàs.

PROPOSITIO XLII.

Problema.

Alia methodus inveniendi radicem cujuslibet binomii.

Proponatur binomium quodcumque etiam improprium 20 + 16. cujus quæritur radix. Dividatur majus nomen 20. in duas partes, quæ multiplicatæ efficiant numerum æqualem quartæ parti quadrati minoris nominis, seu quadrato semissis minoris nominis seu 64. illæ partes erunt 16 & 4. harum radices copulatæ signo + sunt radix binomii 20 + 16. & copulatæ signo — sunt radix apotomes 20 — 16.

Demonstr. Quadrata 16 & 4. adæquant majus nomen, quod superioribus praxibus quadrat, in quibus dum radicem quadratam binomiam quadratè multiplicavimus, voluimus ut majus nomen esset summa quadratorum segmentorum radicis. Secundum nomen debet esse rectangulum comprehensum bis sub utraque parte radicis (*per* 4.2.) quod semel sumptum medium proportionale est, inter quadrata segmentorum ejusdem radicis, ideoque illius quadratum æquale est rectangulo comprehenso sub quadratis: unde benè apposuimus hanc conditionem ut segmenta in quæ dividitur majus nomen, in se ducta, efficerent rectangulum æquale quadrato semissis minoris nominis, sic enim minus nomen integrum adæquabit rectangulum bis sumptum.

Ex eo facilè quadrabimus radicem binomiam, ponendò pro primo nomine aggregatum quadratorum; pro secundo multiplicamus quadrata inter se, & producti radicem quadratam duplicamus, & exhibebitur secundum nomen binomii.

In his omnibus apposui exempla binomiorum impropriorum, ut facilior esset demonstratio: eam etiam in binomiis propriis considerabimus.

Sit hoc binomium 20 + Rq 300. quarta pars quadrati est 75. dividatur majus nomen 20 in duas partes, quæ in se ductæ producant numerum 75. Scilicet aufer 75 ex 100. quadrato semissis numeri 20. restat 25. cujus radix quadrata 5. addita semissi 10. efficit 15. & subtracta relinquit 5. Extrahe radices & habebis ℞q 15. + ℞q 5. pro radice binomii.

Proponatur item residuum ℞q 18 — 4. divide 18. in duas partes, quæ multiplicatæ efficiant 4 quadratum semissis minoris nominis. sume $4\frac{1}{2}$. quartam partem quadrati 18. ex qua aufer quadratum 4. restabit $\frac{1}{2}$. cujus radix nempè ℞q $\frac{1}{2}$. addita ad semissin ℞q 18. nempè ad ℞q $\frac{18}{4}$. efficit ℞q $4\frac{1}{2}$. & subtracta efficit ℞q 2. habes igitur ℞q $4\frac{1}{2}$ — ℞q 2. ex quibus extrahendæ sunt radices, & quia non possunt ita notabis, ℞qq $4\frac{1}{2}$ — ℞qq 2.

ALGEBRÆ

LIBER QVARTVS.

Varia problemata æquationum compositarum.

ANTEQVAM ulteriùs in tradendis præceptis progrediamur, æquum est ut jam tradita, ad usum, & praxin revocemus; sic enim melius hærebunt memoriæ, & quasi consequentur: viamque ad ulteriorem doctrinam sternent. Exempla autem quæ proferimus ex Diophanto cæterisque authoribus desumentur; facilioraque reddentur quam in iis authoribus inveniantur.

PROPOSITIO I.

Problema.

Invenire duos numeros quorum differentia sit 6. & cuborum differentia sit 504.

Ponatur latus majoris cubi 1R. + 3. & minoris 1R — 3. sic enim satisfit primæ conditioni ut eorum differentia sit 6: fiat utriúsque cubus, si multiplices 1R. + 3. fiet quadratum 1q. + 6R. + 9. quem numerum si multiplices iterum per 1R. + 3. fiet 1c. + 9q. + 27R. + 27. & cubus minoris erit 1c — 9q. + 27 R. — 27. aufer minorem cubum ex majori. Primum membrum unius perimit primum alterius, sicut & tertium: restat ergo differentia 18q. + 54. quam æqualem volumus numero 504. habemus ergo æquationem 18q. + 54 = 504. subtrahe 54. restabit 18q. = 450. & dividendo

dendo per 18. 1q. = 25. & extrahendo radicem quadratam erit una radix 5. & cum major numerus sit 1R. + 3. erit numerus 8. alter verò 5 — 3. seu 2. cubi 8. & 512. differentia 504.

Methodo speciosâ. sit 6 idem quod B. sit minor pars A major A + B, erit cubus primæ A3. cubus secundæ A3. + 3A2B + 3AB2 + B3. differentia erit 3A2B, + 3AB2. + B3. quam volumus esse æqualem numero 504. qui exprimatur per D sol. erit æquatio 3A2 + 3AB2 + B3 = D sol. & per antithesin 3A2B + 3AB2 = D sol. — B3. divide omnia per B fiet æquatio 3A2 + 3AB = $\frac{D\ sol}{B}$ B2.

D sol. est 504. divide per B. seu 6. fiet 84. subtrahe 36. seu B2 restabit 48. æqualia 3A2 + 3AB, seu erit æquatio 3q. + 18R = 48. divide per 3. habebis 1q. + 6R. = 16. seu 1q. = 16 — 6R. Adhibe methodum communem; scilicet quadrato 9. semissis radicum adde 16. fient 25. à cujus radice quadrata 5. subtrahe semissem radicum 3. restabit minor numerus 2. major erit 2 + 6. seu 8. Hæc secunda praxis non benè intelligetur donec tradita sit generatio potestatum.

PROPOSITIO II.

Problema.

Numerum 10. dividere in duas partes, quarum cubi efficiant summam 370. majorem quarta parte cubi numeri 10.

Sit primum segmentum numeri 10. 1R. & consequenter alterum 10 — 1R. cubus prioris erit 1c, cubus posterioris habebitur si multiplices 10 — 1R. bis per seipsum, fietque cubus secundæ partis 30q + 1000 — 300R. — 1c. adde primum cubum nempè + 1c. qui elidetur ab ultimo membro prioris, fietque 30q. + 1000. — 300R. = 370. transfer per antithesin 300R. fiet alia æquatio 30q. + 1000. = 300R. + 370. aufer 370. erit æquatio 30q + 630 = 300R. divide per 30 fiet æquatio 1q + 21 = 10 R. & 1q. = 10R. — 21. quadratum semissis radicum 5. est 25. ab eo subtrahe 21. restant 4. cujus radici 2. adde 5. semissem radicum fit 1R. = 7. est ergo divisus numerus 10. in 7 & 3. satisfacientes quæstioni.

Numerus 10 sit B. & 370 sit D sol. sitque prima pars A. secunda erit B — A, cubus primæ erit A3 cubus secundæ fiet si B — A multiplicetur in se cubicè; erit ergo B3 — 3B2A + 3BA2 — A3. addatur cubus + A3 elidetur à — A3. eritque B3 — 3B2A + 3BA2 = D. divide omnia per B fiet B2 — 3BA + 3A2 = $\frac{D\ sol}{B}$ & per antitheses 3A2 + B2 — $\frac{D\ sol}{B}$ = 3BA & divisis omnibus per 3. habebis hanc æquationem A2 + $\frac{B2}{3}$ — $\frac{D\ sol}{3B}$ = BA. est autem A2 1q; $\frac{B2}{3}$ 100 divisum per 3. seu 33$\frac{1}{3}$ $\frac{D\ sol}{3B}$ idem ac 370. divisum per 30. est 12$\frac{1}{3}$. & BA est 10 R. subtrahe 12$\frac{1}{3}$. ex 33$\frac{1}{3}$. fiet 21. habebis æquationem 1q. + 21 = 10R. eamdem ac supra vel si velis transferre 1q. per antithesin 10R. — 1q = 21. Hanc si velis ita expurgabis: sit radix hujus A quæ subtrahatur ex 5. semisse numeri radicum: fietque 5 — A huic aggregato sit æqualis E, sitque æquatio 5 — A = E. & 5 — E = A. fiat quadratum 5 — E. is erit 25 — 10E + E2. fiant item 10 Radices hoc est multiplica 5 — E per 10. producentur 50 — 10E. ex quo numero subtrahe prius quadratum, fiet 25 — E2. habemus ergo aliam æquationem 25 — 1q = 21. transfer 1q. habebis æquationem 25 = 21. + 1q. & subtrahendo 21. restabit 4 = 1q & extrahendo radicem E erit 2. est ergo A = 5 — 2. seu 3. = 1R. quare divisus est numerus 10 in 3 & 7. ut prius.

PROPOSITIO III.

Problema.

Numerum invenire qui additus ad 20. efficiat summam æqualem suo quadrato.

Sit hic numerus 1R. qui additus ad 20. efficit summam 1R. + 20. hæc summa dicitur æqualis suo quadrato. nempè 1q. est ergo æquatio 1q. = 1R. + 20. quadratum semissis radicum $\frac{1}{2}$. est $\frac{1}{4}$. hoc addatur numero 20. fiunt 20$\frac{1}{4}$. seu $\frac{81}{4}$. cujus Radix quadrata $\frac{9}{2}$. seu 4$\frac{1}{2}$. addatur semissi radicum seu $\frac{1}{2}$. fiet radix 5. quare numerus quæsitus est 5. qui additus ad 20 efficit 25. suum quadratum.

Methodo speciosâ numerus 20 sit B. & numerus quæsitus sit A. cujus quadratum A2. est ergo æquatio A2 = A + B. pariter A2 — A. = B. ut hanc æquationem expurges sit A — $\frac{1}{2}$. = E eritque A = E + $\frac{1}{2}$. fiat quadratum istius binomii E. + $\frac{1}{2}$ fiet E2. + 1A + $\frac{1}{4}$. subtrahe ex hoc numero semel A seu E — $\frac{1}{2}$. cum id dicat æquatio, relinquetur æquatio E2 — $\frac{1}{4}$ = B seu 20. hoc est Eq = 20$\frac{1}{4}$. seu $\frac{81}{4}$. & extracta radice erit E $\frac{9}{2}$. seu 4$\frac{1}{2}$. est autem E + $\frac{1}{2}$. = A. ergo A erit 5.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Numerum invenire cujus quadratum additum numero 240. faciat ejusdem qqtum.

Sit ille numerus 1R. ejus qtum est 1q. addatur numero 240. habebis summam 1q. + 240. quam volumus esse æqualem qqto. Est ergo æquatio 1qq. = 1q. + 240. & quia exponentes sunt Arithmeticè proportionales, poterit assumi hæc 1q. = 1R. + 240. vel hæc 1q. — 1R. = 240. hanc ita expurgabis. Ex radice 1R. subtrahe semissem numeri radicum fiet 1R. — $\frac{1}{2}$ huic æqualis sit A, erit 1R. = A + $\frac{1}{2}$. fiat ejus quadratum, illud erit Aq. + 1A. + $\frac{1}{4}$. subtrahe 1R. seu A + $\frac{1}{2}$. restabit Aq. — $\frac{1}{4}$. = 240. & Aq. = 240 + $\frac{1}{4}$. seu Aq. $\frac{961}{4}$. cujus radix quadrata $\frac{31}{2}$. seu 15$\frac{1}{2}$ est ergo A æqualis 15$\frac{1}{2}$. sed A + $\frac{1}{2}$. est una radix, igitur propositæ æquationis radix erat 16. Quia tamen hæc radix est quadratum, ut habeatur ultima radix, debes assumere ejus radicem, est ergo 4 numerus quæsitus, cujus quadratum additum ad numerum 240. efficit 256 quadrato-quadratum, nam 16 est quadratum 64 cubus, & 256. quadrato quadratum.

Methodo speciosâ sit B 240. & numerus quæsitus A. cujus quadratum erit A2. & qqtum A4. est ergo æquatio A4. = A2. + B. poteritque assumi A2. = A + B. ita autem expurgabitur, assumatur alia æquatio æquivalens A2 — A = B. sitque radix A. à qua auferatur $\frac{1}{2}$. semissis numeri radicum fiet A — $\frac{1}{2}$. huic sit æqualis E, erit A = E + $\frac{1}{2}$ fiat

quadratum

quadratum hujus binomii id erit $E2 + E. + \frac{1}{4}$. ab ea quantitate subtrahe A. seu $E + \frac{1}{2}$ cum id dicta æquatio, & restabit $B2 - \frac{1}{4}. = B.$ & $E2 = B. + \frac{1}{4}$. B erat 240. adde $\frac{1}{4}$ fit $240 + \frac{1}{4}$. seu $\frac{961}{4}$. cujus radix quadrata E est $\frac{31}{2}$. seu $15\frac{1}{2}$. est autem $E + \frac{1}{2}$. idem quod A: ergo A erat 16. & prima radix 4.

PROPOSITIO V.

Problema.

Numerum invenire cujus cubus additus numero 702. efficiat ejusdem quadrato cubum.

Sit numerus quæsitus 1R. illius cubus est 1c. dicitur cubus additus numero 702. seu 1c. + 702. esse æqualis quadrato cubo, habemus ergo æquationem 1qc. = 1c. + 702. cum autem exponentes Arithmeticè sint proportionales: potest assumi hæc 1q. = 1.R. + 702. modò extrahatur radix cubica ex radice inventâ. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. cujus quadratum $\frac{1}{4}$. addatur numero 702. fit $\frac{2809}{4}$ extrahatur radix quadrata $\frac{53}{2}$. seu $26\frac{1}{2}$. huic addatur $\frac{1}{2}$. semissis numeri radicum fiet 27. radix quæ adhuc cubus est, atque adeò, ex qua extrahenda radix cubica 3. est ergo valor unius radicis 3. cujus quadrato cubus est 729. æqualis numero 702. + 27 cubo ejusdem.

Methodus speciosa nihil habet peculiare.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Invenire duos numeros qui efficiant summam 30. & in se multiplicati efficiant 100.

Sit primus 1R. secundus erit 30 — 1R. cum eorum summa supponatur esse 30. multiplica 30 — 1R. per 1R. efficies productum 30R. — 1q. quæ summa dicitur esse æqualis numero 100; habemus ergo æquationem 30R. — 1q. = 100. addatur unum quadratum fiet 1q. + 100, = 30R. & per antithesin subtrahendo 100. 1q = 30R. — 100. semissis numeri Radicum 15. quadratum est 225. à quo subtrahe 100. restat 125 carens Radice præcisâ, ideoque dices Rq. 125. cui addes 15. fietque valor unius radicis, 15 + Rq 125. seu paulò plus quam 26. ideoque reliqua pars erit paulò plus quam 26. ideoque reliqua pars erit paulò minor quam 4.

Sæpe occurrunt hujusmodi numeri surdi, qui indicant non posse solvi quæstionem per numeros propriè dictos.

Methodo speciosâ sit 30 B. & 100 D. sitque primus numerus quæsitus A. alter erit B — A. cum supponatur eorum summa esse B, multiplica B — A per A fiet productus AB — A2. quem voluimus esse æqualem numero D. habemus ergo æquationem AB — A2 = D ut expurgetur ex $\frac{B}{2}$ subtrahe A. sitque $\frac{B}{2}$ — A cui æqualis sit E, adde A per antithesin fiet æquatio $\frac{B}{2}$ = E + A, & rursus per antithesin $\frac{B}{2}$ — E = A. multiplicetur hæc radix $\frac{B}{2}$ — E. quæ pro A assumitur per B. quia in primo membro æquationis est AB. fiet $\frac{B2}{2}$ — EB qui numerus est idem ac AB, ex eo auferre debes A2. seu quadratum hujus radicis $\frac{B}{2}$ — E pro A positæ; est autem quadratum $\frac{B2}{4}$ — EB + E2 quod subtractum ex $\frac{B2}{2}$ — EB relinquit $\frac{B2}{4}$ — E2 = D, per antitheses habebis æquationem E2 = $\frac{B2}{4}$ — D est autem B 30. B2 est 900. & $\frac{B2}{4}$ est 225. & — D 100. restat 125. quare E est ℞q 125. & consequenter cum $\frac{B}{2}$ — E sit A erit A idem quod 15 — ℞q125. quia verò ℞q125 est major quam 11. erit A paulò minor quam 4.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Numerum invenire cujus qqtum additum numero 125. summam efficiat quadrati ejus trigecuplam.

Sit numerus quæsitus 1R. erit ejus qqtum. 1qq. addatur numero 125, efficiet summam 1qq + 125. est item ejus quadratum 1q. hanc summam volumus esse quadrati trigecuplam, ergo 1q multiplicatum per 30. efficiet productum tali summæ æqualem. Habemus ergo æquationem 1qq + 125 = 30q. & quia exponentes terminorum sunt Arithmeticè proportionales reduci potest ad hanc 1q + 125 = 30R. & per antithesin ad hanc 1q = 30R. — 125. quadratum semissis numeri radicum 15. est 225 aufer 125. restat 100. cujus radix 10. hæc subtracta ex 15. numero radicum; dat 5 primam radicem; ex qua ulteriùs extrahenda est radix quadrata. Quare ℞q5 satisfacit quæstioni: illius enim quadratum est 5. & quadratoquadratum est 25. quod additum ad 125. efficit summam quadrati 5 trigecuplam, nempe 150.

Aliter eadem radix quadrata 10 addita ad 15 semissem numeri radicum efficit 25. ex qua ulteriùs extrahenda est radix quadrata, quare numerus 5 satisfacit quæstioni: nam illius quadratum est 25. & quadratoquadratum 625. quod additum ad 125. efficit summam 750. quadrati 25. trigecuplam.

Methodo speciosâ sit D 125. & B 30. & numerus quæsitus A, eritque ut præfert propositio BA2. = A 4 + D. vel quia exponentes sunt Arithmeticè proportionales, habebis hanc æquationem BA = A2 + D. & per antithesin BA — A2 = D. ut expurgetur; sume dimidium coëfficientis B. eritque $\frac{1}{2}$ ex quo subtrahes radicem A fietque $\frac{1}{2}$. B — A. cui æqualis ponatur E, & per antithesin $\frac{1}{2}$ B — E = A ut habeas BA primum membrum æquationis, multiplica binomium $\frac{1}{2}$ B — E per B. habebis $\frac{1}{2}$ B2 — BE: secundum membrum æquationis seu — A2 dicit ex eo numero subtrahendum quadratum binomii $\frac{1}{2}$ B — E. Est autem tale quadratum $\frac{1}{4}$ B2 — BE + E2. quod subtractum ex $\frac{1}{2}$ B2 — BE. relinquit $\frac{1}{4}$ B2 — E2. habemus ergo aliam æquationem $\frac{1}{4}$ B2 — E 2 = D, & per antithesin $\frac{1}{4}$ B2 — D = E2. est autem B idem quod 30 & B2. erit 900, & $\frac{1}{4}$ B2 erit 225. D est 125 quare $\frac{1}{4}$ B2 — D erit 100 = E 2. & & extrahendo radicem invenio 10. pro E. Est autem ½ B. seu 15 — E, seu minus 10, hoc est 5 idem cum A: ergo A est 5. sed quia erat qqtum, ulterius extrahenda est radix quadrata: quare ℞q5 satisfacit quæstioni.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Numerum invenire cujus qc additus ad 169344. sit cubi ejusdem millecuplus.

Numerus quæsitus sit 1R hujus qc, est 1qc. additus ad numerum propositũ facit 1qc. + 169344. quia est unius cubi millecuplus: ergo habemus æquationem 1qc. + 169544 = 1000 cubi, & quia exponentes sunt Arithmeticè proportionales 6. 3. o. reduci potest ad sequentem, modo in fine extrahatur radix cubica 1q + 169344 = 1000R. vel per antithesin 1q. = 1000R. — 169344. semissis numeri radicum est 500. è cujus quadrato 250000. subtrahe 169344. restabit 80656. cujus radix quadrata 284. quam subtrahere potes ex 500. semisse radicum ut habeas minorem radicem 216. ex qua si extrahas radicem cubicam 6 habebis valorem unius radicis, cujus qc. est 46656. qui additus ad 168344. facit numerum 216000. millecuplum cubi 216. & quia hæc æquatio est amphibola inventam radicem 284. adde ad 500. fiet 784. cujus radix cubica ℞c. 784. quadratocubus 614656. additus 169344. summam efficit 784000. cubi 784. millecuplam.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Numeros invenire quorum excessus 6. & productus ex eorum multiplicatione sit 720.

Sit minor numerus 1R. major erit 1R. + 6. multiplicentur inter se, fiet productus 1q. + 6R. quem volumus æquari numero 720. habemus ergo æquationem 1q. + 6R. = 720. ut expurgetur, sit 1R. cui adde 3. semissem coëfficientis fiet 1R. + 3. huic sit æqualis A. erit ergo 1R. = A — 3. fiat quadratum hujus binomii A — 3. is erit Aq. — 6A. + huic adde 6R. secundum membrum æquationis, seu 6A — 18. fiet summa Aq — 9. habemus ergo æquationem aliam 1q. — 9 = 720. adde 9. fiet 1q. = 729. extrahe radicem quadratam 27. eritque A = 27. sed A — 3. æquatur uni radici, ergo 1R. est 24. habes igitur numeros 24 & 30. quorum excessus est 6. & multiplicati producunt 720.

PROPOSITIO X.

Problema.

Numerum invenire, cujus cubus junctus quadratocubo efficiat summam 4160.

Sit ille numerus 1R. ejus cubus 1c. ejus quadratoc. 1qc. habemus ergo æquationem 1qc. + 1c = 4160. & quia exponentes sunt Arithmeticè proportionales 6.3.0. assumi potest hæc æquatio 1q. + 1R. = 4160. & per antithesin 1q = 4160 — 1R. Est semissis numeri radicum $\frac{1}{2}$ cujus quadrato $\frac{1}{4}$. adde 4160. fiet 4160$\frac{1}{4}$. seu $\frac{16641}{4}$. cujus radix quadrata $\frac{129}{2}$ seu 64$\frac{1}{2}$ è quo si auferas semissem radicum $\frac{1}{2}$. restat 64. cujus radix cubica 4. satisfacit quæstioni, nam ejus cubus 64. & quadratocubus 4096. efficiunt summam propositam 4160.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Numerum invenire cujus qdtum mulctatum numero 264 sit illius decuplum.

Sit numerus propositus 1R. cujus quadratum 1q. — 264. sit illius decuplum id est sit æquale 10 R: est ergo æquatio 1q — 264 = 10R. & per antithesin 1q. = 10R. + 264. quadratum semissis radicum 5 erit 25. cui adde 264. fiet 289. extrahatur radix, hæc erit 17 cui addes 5. semissem radicum fiet radix quæsita 22. ex illius quadrato 484. subtrahe 264. restabit 220. decuplus numeri. 22.

Methodo speciosâ sit 10. idem quod 2B. & 264. idem quod D. A numerus quæsitus: eritque A2 — D = 2BA. & per antithesin A2 — 2BA = D. ut expurgetur, A mulctetur B, fiatque A — B, cui E sit æquale eritque A = E + B. fiat quadratum istius E + B pro A2 eritque E2 + 2B + 2. è quo auferre debes 2AB, seu 2B in E + B. multiplica E + B per 2B fient 2BE + 2B2, quæ subtrahi debent ex priori quadrato restabit E2 — B2, habemus ergo æquationem E2 — B2 = D. & per antithesin B2 + D = E2. B autem est 5. B2. 25. D est 264. adde 25. fiunt E2 + = 289. extrahe radicem habebis 17. esse E, sed E + B est A, ergo A est 17 + 5. seu 22.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Duos numeros invenire quorum quadrata, summam componant 180. duplam & sesqui alteram producti ex eorum multiplicatione.

Cum quadratorum summa sit 180. & dicatur dupla & sesqui altera producti, ex eorum multiplicatione, is erit 72. Ponatur primus numerus 1R. per quem si dividas 72 habebis alium $\frac{72}{1R}$: cujus quadratum $\frac{5184}{1q}$. habemus autem summam quadratorum seu 1q. + $\frac{5184}{1q}$ = 180. addantur duo prima membra quod ut fieri possit reducantur ad

$$\begin{array}{ccc} 1qq & & 5184 \\ \frac{1q}{1} & \times & \frac{5184}{1q} \\ & 1q & \end{array}$$

eundem denominatorem, per multiplicationem decussatam, fietque $\frac{1qq + 5184}{1q}$ = 180. & ut expurgetur fractio, 180, scribatur ad modum fractionis

ctionis $\frac{180}{r}$. reducaturque ad eandem denominationem cum priori, multiplicatione decussatâ, fietque alia æquatio $\frac{1qq+5184}{1q} = \frac{180q}{1q}$ & abjecto communi denominatore fit æquatio 1qq.+5184.

$$\frac{1qq+5184}{1q} \times \frac{180}{1}$$

$$\frac{1qq+5184}{1q} \quad \frac{180q}{1q}$$

= 180 q. & quia exponentes sunt Arithmeticè proportionales reducetur ad hanc 1q. + 5184 = 180 R. & iterum ad hanc 1 q. = 180R.— 5184. Ex quadrato semissis radicum 90. 8100. subtrahe 5184. restabit 2916. cujus radici quadratæ 54. adde 90 semissem numeri radicum, fiet 144. è quo ulterius eruenda est radix quadrata, quia inter æquationis terminos mediabat unus. Eritque 12 = 1 R. & dividendo 72. per 12 habebis secundum numerum 6.

Et quia hæc æquatio amphibola est, ex 90 semisse radicum subtrahe 54. radicem primò inventam restant 36. cujus radix quadrata 6. est alter numerus.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Invenire numerum qui alium numerum excedat tribus unitatibus, & à tertio superetur novem unitatibus, qui duo ultimi multiplicati producant 133.

Sit ille numerus 1 R. eritque secundus 1 R. —3. tertius 1R.+ 9. multiplica 1R.—3. per 1R. + 9 fiet 1q + 6R.— 27. quem numerum volumus esse æqualem numero 133. est ergo æquatio 1q.+ 6R.—27 = 133. addantur 27. fiet æquatio 1q. + 6R. = 160 & per antithesin 1q. = 160 —6R. adde ad 160. numerum 9. quadratum scilicèt dimidiatum radicum, fiet 169. à cujus radice 13. subtrahe 3. numerum dimidiatum radicum; fit 10. est ergo 10. numerus, excedens 7 ternario. & superatus à 19. novenario productus autem ex 7 in 19 est 133.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Numerum invenire, quem alij duo superent 7 & 9. unitatibus & productus eorum multiplicatione 73 unitatibus superet triplum quadrati primi numeri.

Sit primus numerus quæsitus 1R, cujus quadratum 1q, triplum quadrati 3q: secundus erit 1R. + 7. & tertius 1 R. + 19. hi duo ultimi multiplicentur inter se, fiet productus 1q.+ 26R.+ 133. qui dicitur superare 73 unitatibus triplum quadrati numeri primi: est ergo æquatio 3q + 73 = 1q.+ 26R. + 133. subtrahe utrinque 1q. erit æquatio 2q. + 73 = 26R.+133. subtrahe 73. erit æquatio 2q = 26R. + 60. divide per 2 fiet 1q = 13R. + 30. Semissis numeri radicum est $\frac{13}{2}$. quadratum $\frac{169}{4}$. adde 30. seu $\frac{120}{4}$. fiet $\frac{289}{4}$. cujus radici quadratæ $\frac{17}{2}$. seu 8 $\frac{1}{2}$. adde 6 $\frac{1}{2}$. dimidium radicum, fiet 15. valor unius radicis, cui adde 7. fit 22. & 19. fiet 34 sunt ergo numeri 22. & 34 qui multiplicati producunt 748, qui numerus superat 675. triplum quadrati 225. unitatibus 73.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Invenire numerum cujus quadruplus, cum ejusdem quadrato efficiat summam 400.

Quæsitus numerus sit 1R. ejus quadruplus erit 4R. quadratum ejus est 1q. quare 1q. + 4R = 400. & per antithesin 1q. = 400—4R. quadratum numeri 2. seu 4. addatur numero 400. fit aggregatum 404. ex cujus radice quadratâ ℞q 404. subtrahe 2. fit Rq 404 — 2. valor unius radicis. Debet autem ejus quadruplus cum ejus quadrato, efficere 400, quare quadruplicetur ℞q 404 — 2. nempe multiplicetur ipsa per 16 quadratum numeri 4. ut solent radices multiplicari, fiet ℞q 6464. multiplica item — 2. per 4. fit — 8: habemus ergo ℞q 6464 — 8. quadruplum unius R. quod additum quadrato ejusdem R. nempe 404 — ℞q 6464 + 4. efficit summam 404.— 4. id est 400. Notanda sunt duo. Primum, ut fiat quadratum ℞q 404—2. multiplicatur — 2 per — 2. & fit + 4. exinde multiplicatur ℞q 404. per 4. seu per quadratum numeri 2. & hoc bis ita ut fiat bis ℞q 1616. secundum quod ut addantur duæ radices æquales quadruplicari debet quadratum, ut docuimus suo loco, quare ℞q 1616. bis sumpta efficit ℞ 6464. quæ innuisse juverit.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Duos numeros reperire qui inter se multiplicati generent 78. & summa quadratorum faciat 205.

Sit primus numerus 1R. per quem si dividas productum 78. erit quotiens alter numerus $\frac{78}{1R}$ quadratum unius Radicis est 1q. quadratum hujus numeri $\frac{78}{1R}$ est $\frac{6084}{1q}$ ut fiat additio $\frac{6084}{1q}$ & $\frac{1q}{1}$ reducantur ad eamdem denominationem fientque $\frac{1qq}{1q}$ $\frac{6084}{1q}$ adde numeratores ut fiant summa, habebis summam $\frac{1qq+6804}{1q} = \frac{205}{1}$. reducantur iterum ad eandem denominationem; abjectis denominatoribus relinquetur æquatio 1qq = 205 q. — 6084 & quia exponentes sunt Arithmeticè proportionales, erit æqu. 1q = 205R.—6084. semissis radicum est $\frac{205}{2}$. è cujus quadrato $\frac{42025}{4}$. subtrahe 6084. seu $\frac{24336}{4}$. restabunt $\frac{17689}{4}$. cujus radix quadrata $\frac{133}{2}$. cui adde semissem numeri radicum, nempe $\frac{205}{2}$. fiet $\frac{338}{2}$ seu 169. cujus iterum educenda radix quadrata 13. Ergo 13. est primus numerus

merus quæsitus, & dividendo 78 per 13. invenio 6 pro secundo. quare 6 in 13 producunt 78. Item quadrata 36. & 169. efficiunt summam 205.

Quia hæc æquatio est amphibola; subtracto homogeneo comparationis ex quadrato semissis radicum; & ex reliquo extracta radice quadrata, quæ est $\frac{133}{2}$. hæc potest subtrahi ex semisse numeri radicum nempe $\frac{205}{2}$. restatque $\frac{72}{2}$. seu 36. cujus iterum extrahenda radix quadrata 6. sic invenitur immediate minor numerus.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Datum numerum 283. in tres continuè proportionales partiri, quorum medius sit 78. debet autem quadratum ejus non esse majus, quadrato numeri relicti subtrahendo 78 ex 283. seu 205. hoc est 78. debet esse minor mediatè numeri 283.

Primus numerus sit 1R. secundus supponitur 78. qui subtractus ex 283. relinquit 205. summam extremorum, & cum primus sit 1R. ultimus erit 205 — 1R. cum autem supponantur Geometricè proportionales, erit rectang. sub extremis æquale quadrato medij, (*per* 15. 6.) fiat quadratum 78. id erit 6084, fiat item rectang. sub 205 — 1R. & sub 1R. erit 205 R. — 1q = 6084 vel 1q = 205 R. — 6084. Semissis Radicum est $\frac{205}{2}$. ex cujus quadrato $\frac{42025}{4}$. subtrahe 6084. seu $\frac{24336}{4}$. restabit $\frac{16689}{4}$. cujus radis quadrata $\frac{133}{2}$. hanc adde ad semissem radicum $\frac{205}{2}$. & subtrahe ab eâdem, fient $\frac{338}{2}$. & $\frac{72}{2}$. seu 169. & 36. Sunt ergo tres numeri proportionales 169. 78. 36. efficientes summam 283. quorum medius est 78. Posui autem, ut medius nempe 78. esset minor media parte summæ trium numerorum: quia alioqui ejus quadratum non posset esse æquale rectangulo facto sub duobus reliquis.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Datum numerum 10. dividere in duas partes quarum cubi, sint æquales numero 370. majore quarta parte cubi numeri 10.

Proponitur ergo numerus 10. ita dividendus. Sit prima pars 1R altera erit 10 — 1R. cubus primi segmenti erit 1c. cubus autem secundi fiet multiplicando numerum 10 — 1R cubicè: inveniturque 1000 — 300R. + 30q — 1c. si addas 1c. qui elidet ultimum membrum præcedentis 1000 — 300R. + 30q. = 370. adde 300R per antithesin fiet æquatio 1000 + 30q = 300R. + 370 subtrahe 370. fiet æquatio 30q + 630 = 300 R vel 30q. = 300R. — 630. divide per 30. fiet æquatio 1q. = 10R. — 21. semissis radicum est 5. è cujus quadrato 25. subtrahe homogeneum comparationis 21, restat 4. cujus radici 2 adde 5. semissem radicum habebis 7. tum radicem 2 subtrahe ex 5. semisse radicum habebis 3. sunt ergo duæ radices 7 & 3. est enim amphibola æquatio: cubus 7 est 343. cubus 3 est 27. summa est 370.

Methodo speciosa sit 10 B, sitque primum segmentum ejus A, erit secundum B — A. fiat utriusque cubus: erit cubus A. A3. cubus B — A fiet, si B — A. per B — A multiplicetur, fietque B2 — 2BA + A2 ejus quadratum, multiplicetur hoc quadratum per B — A. fiet B3 — 3 B2 A + 3BA2. — A3. adde priorem cubum + A3. elidetur ultimum membrum, restabitque B3 — 3B2A + 3BA2 = Z sol. ponendo Z sol. pro 370. & transferendo per Antithesin secundum membrum, habebis æquationem B3 + 3BA2 = Z sol. + 3B2A. vel transferendo Z sol. habebis 3BA2 + B3 — Z sol. = 3B2A. Divide omnia per B. habebis æquationem 3A2 + B2 — $\frac{\text{Z sol.}}{\text{B}}$ = 3BA divide per 3. habebis A2 + $\frac{\text{B2}}{3}$ — $\frac{\text{Z sol.}}{\text{3B}}$ = BA: primum membrum A2 est 1q. secundum + $\frac{\text{B2}}{3}$ est $\frac{100}{3}$ seu 33 $\frac{1}{3}$. tertium — $\frac{\text{Z solidum}}{\text{B3}}$ est 370. divisum per 30 seu 12 $\frac{1}{3}$. BA est 10. R. habemus ergo æquationem 1q. + 33 $\frac{1}{3}$. — 12 $\frac{1}{3}$ = 10R. subtrahe 12 $\frac{1}{3}$. ex 33 $\frac{1}{3}$. habebis æquationem 1q. + 21 = 10R. vel ut prius 1q = 10 R. — 21 cætera similiter fient.

Ex quo vides praxin communem in plerisque exemplis non esse ita intricatam.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Numerum 30. ita dividere in duo ut quadrata totius, & partium sint Arithmeticè proportionalia.

Sit majus segmentum 1R. & minus 30. — 1R. quadratum 30 est 900. quadratum 1R. est 1q. quadratum 30 — 1R est 900 — 60 R. + 1q. sunt igitur Arithmeticè proportionalia 900. 1q. & 900 — 60 R. + 1q. suntque extremi æquales duplo medii. Habemus ergo æquationem 1800 — 60 R. + 1q = 2q. subtrahe 1q. habebimus æquationem 1800 — 60R. = 1q. semissis radicum 30. quadrato 900. adde 1800. fit summa 2700. cujus Radix quadrata ℞q 2700. subtrahe 30. semissem radicum restabit fere 2[illegible] nempe ℞q 2700 — 30. hæc detrahatur ex 30. fiet 60. — ℞q. 2700. quare minor pars erit 60. — ℞q 2700. Quadratum primæ, scilicet ℞q 2700 — 30. est 2700 — ℞ 9720000 + 900: quadratum ultimæ 3600 — ℞q 38880000 + 2700. adde huic ultimæ quadratum numeri 30. seu 900 fiet summa 7200 — ℞q 38880000, quæ debet esse æqualis quadrato primæ duplicato seu 2700 — Rq 9720000 + 900. seu 3600 — Rq 9720000 duplicato: seu 7200 — ℞q 38880000 ut est reipsa: quare quadrata sunt Arithmeticè proportionalia.

PROPO

PROPOSITIO XX.

Problema.

Numerum quemcumque ut 100 extremâ, & mediâ ratione secare.

Sit propositus numerus 100. extremâ, & mediâ ratione secandus; hoc est, ita ut numerus 100, majus segmentum, & minus segmentum, sint continuè proportionalia: sitque consequenter rectangulum comprehensum sub numero 100, & minori segmento, æquale quadrato majoris segmenti. Sit majus segmentum 1R. erit minus segmentum 100 — 1R. eritque quadratum medii 1q. cui æquale esse debet rectang. sub 100. & sub 100 — 1R. nempè 10000 — 100 R. Habemus ergo æquationem 1q. = 10000 — 100 R. eritque quadratum semissis radicum 50. 2500. cui addatur homogeneum comparationis 10000. fietque summa 12500, extrahe radicem quadratam quæ erit ferè 112. ex quâ subtrahes 50. semissem numeri radicum, restabit ferè 62. seu erit majus segmentum ℞q 12500 — 50. hoc si subtrahas ex numero 100. restabit minus segmentum 150 — Rq 12500. seu paulò plus quam 38. Scilicet rectangulum sub 100. & minori segmento erit 15000. — Rq 125000000: quadratum majoris segmenti ℞q. 12500 — 50 est 12500 — ℞q 125000000 + 2500. & addendo primum & ultimum membrum fiet 15000 — ℞q 125000000. est ergo satisfactum quæstioni.

Alio item modo potest satisfieri quæstioni (per 11.2. *Eucl.*) ad quadratum numeri 100. scilicet ad 10000. adjice ejusdem quadrati quartam partem, seu quadratum semissis fiet 12500. ex cujus radice quadrata dematur semissis dati numeri 100, restabit majus segmentum.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Datum numerum ut 50. ita dividere ut quadratum majoris segmenti rationem habeat triplam, ad quadratum minoris.

Supponatur majus segmentum esse 1R. ejus quadratum erit 1q. minus segmentum in illa hypothesi erit 50 — 1R. & ejus quadratum 2500 — 100R. + 1q. & triplicatum erit 7500 — 300 R. + 3q. habemus ergo æquationem 1q. = 7500 — 300R. + 3q. adde per antithesin 300R. & subtrahe 7500 & 1q. fiet æquatio 2q. = 300 R. — 7500. divide per 2. habebis æquationem 1q. = 150R. — 3750. Semissis radicum est 75. è cujus quadrato 5625. subtrahe 3750 restabit 1875. cujus radix quadrata major quam 43. subducta ex 75. relinquit ferè 32. majus segmentum & 18. erit minus quorum quadrata 1024. & 324. sunt ferè in ratione tripla. Si exactè velis erit majus segmentum 75 — ℞q 1875. & minus erit ℞q 1875 — 25. quorum quadrata si fiant prædictam habent rationem.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Numerum datum 30. dividere in duos numeros quorum radices quadrata se excedant quinario.

Ponatur minoris segmenti radix 1R — $\frac{5}{2}$. & majoris 1R. + $\frac{5}{2}$. sic enim se excedent quinario. Eorum quadrata erunt 1q. — 5R. + $\frac{25}{4}$. & 1q. + 5R. + $\frac{25}{4}$. Addantur simul hæc quadrata fiet summa 2q. + $\frac{50}{4}$ = 30. divide per 2. fiet 1q + $\frac{25}{4}$ = 15. subtrahe $\frac{25}{4}$. ex 15. seu $\frac{60}{4}$. restabit 1q. = $\frac{35}{4}$. seu extrahendo radicem quadratam habebis ℞q $\frac{35}{4}$. valorem unius radicis: positum autem erat minus segmentum 1R. — $\frac{5}{2}$. seu 1R. — $2\frac{1}{2}$. erit ergo ℞q $\frac{35}{4}$. — $2\frac{1}{2}$. seu ferè $\frac{6}{2}$ — $2\frac{1}{2}$. seu 3 — $2\frac{1}{2}$. hoc est $\frac{1}{2}$: majus segmentum est 1R. + $2\frac{1}{2}$. seu ℞q $\frac{35}{4}$. + $2\frac{1}{2}$. hoc est ferè 3 + $2\frac{1}{2}$. seu ferè $5\frac{1}{2}$. cujus quadratum est 30 + $\frac{1}{4}$. & quadratum, alterius partis est $\frac{1}{4}$. esset igitur summa $30\frac{1}{2}$. cum deberet esse tantum 30. si tamen procedatur per radices surdas, erit perfecta æquatio.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Invenire numerum quem quadratum ejus excedat numero 210.

Sit quæsitus numerus 1R. & quadratum ejus 1q illum excedens numero 210. est ergo 1A. + 210 = 1q. est autem semissis numeri radicum $\frac{1}{2}$ cujus quadrato $\frac{1}{4}$ adde 210 seu $\frac{840}{4}$. fiet summa $\frac{841}{4}$. cujus radix quadrata $\frac{29}{2}$ seu $14\frac{1}{2}$. cui adde semissem radicum $\frac{1}{2}$. fit 15. radix quæsita, cujus quadratum 225. superat radicem 15. numero 210. In plerisque exemplis similibus occurrent radices surdæ.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Invenire numerum quo addito ad 12. fiat summa quæ multiplicata per eundem efficiat numerum æqualem numero 189.

Sit ille numerus 1R. qui addatur ad 12. fietque summa 1R. + 12. hæc multiplicetur per 1R. producetur numerus 1q. + 12R, quem volumus esse æqualem numero 189. Habemus ergo æquationem 1q = 189 — 12R. Ad 36 quadratum numeri 6. semissis radicum, adde 189 fiet numerus 225; ex cujus radice quadratâ 15. subtrahe 6; restat 9 valor unius radicis, seu numerus satisfaciens quæstioni: nam 9. additus ad 12. efficit 21. qui ductus in 9 producit 189.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Numerum datum ut 20. ita in duas partes secare, ut multiplicata productum efficiant, qui ductus in quadratum numeri 20. producat 14400.

Sit prima pars 1R. secunda 20 — 1R. multiplicentur

centur inter se, fiet productus 20R. — 1q : multiplicetur per 400. seu per quadratum numeri 20. fiet 8000 R. — 400q. quem numerum volumus esse æqualem numero 14400. habemus igitur æquationem 8000R. — 400q. $=$ 14400. & addendo 400q habebitur 400q. + 14400 $=$ 8000R. & subtrahendo 14400. erit 400q $=$ 8000 R. — 14400. divide per 400. fiet æquatio 1q $=$ 20R. — 36 : quadratum semissis radicum est 100 : è quo si subtrahas 36. relinquitur 64. cujus radici quadratæ, adde 10 fit 18. vel subtrahe 8 ex 10. habebis 2. Sunt ergo numeri 2 & 18. satisfacientes quæstioni: nam 2 in 18. efficiunt summam 36. quæ multiplicata per 400. producit numerum 14400.

Methodo speciosa sit 20.B. sitque primum segmentum A, secundum erit B — A multiplicentur fiet summa AB — A2. multiplicentur per quadratum numeri B, seu per B2. fiet AB3. — A2B2. quam summam volumus esse æqualem numero 14400. ponatur hic numerus Z. habemus æquationem sequentem AB3 — A2B2 $=$ Z f. divide omnia per B2. fiet æquatio AB — A2 $= \frac{Z}{B2}$ & per antithesin A2 + $\frac{Z}{B2} =$ BA resolve in numeros, & divide Z seu 14400. per 400. seu B2. habebis 36. est ergo æquatio 1q + 36 $=$ 20 R. eadem quæ superior.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Quærenti summam pecuniarum in crumena contentarum, respondi si pecuniæ quam habeo adderetur dimidium, triens & quadrans & è summa detraheretur $\frac{1}{12}$ primi numeri haberem aureos 600 : quæritur numerus aureorum in crumena contentorum.

Supponatur ille numerus 12R (seligitur numerus habens semissem trientem & quadrantem, ad vitandas fractiones,) addatur semissis seu 6. R. & triens seu 4R. & 3R. seu quadrans, fient 25R. subtrahe $\frac{1}{12}$. primi numeri, restat 24R : quem numerum volumus esse æqualem 600 aureis: ergo æquatio erit 24R. $=$ 600 divide per 24. fiet quotiens 25. pro valore unius radicis, posueram autem 12 radices; quare multiplica 25. per 12. & habebis numerum pecuniarum 300 aureorum, quibus si addas $\frac{1}{2}$. seu 150. & trientem seu 100. & quadrantem 75 fiet summa 625 : subtrahe $\frac{1}{12}$. primi numeri 300 seu 25, restabit numerus propositus 600.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Viator singulis diebus peragrat 10 milliaria decemque diebus progreditur, alius undecimo die illum sequitur perficiens in diem milliaria 15. quæritur intra quot dies sit primum assecuturus.

Supponamus numerum dierum quibus secundus primum assequetur 1R. qui numerus multiplicandus est per 10 milliaria, & per 15. ita ut additis ad primum numerum 100 milliaribus fiant duæ summæ æquales; nam cum secundus primum assequetur, uterque æqualem milliariorum numerum confecerit. Multiplicata igitur 1R. per 10. fiunt 10R. quibus addere debes 100 milliaria confecta à primo, antequam secundus viam iniret : sunt ergo 10R. + 100 milliaria. Multiplica etiam 1R. per 15. ut habeas totum iter secundi, & cum spatia sint æqualia, quando secundus primum assequitur, habebimus æquationem 10R. + 100 $=$ 15 R. & subtractis utrinque 10R. erit æquatio inter 100 & 5R. & divisis omnibus per 5. erit æquat. 1R. $=$ 20. quare intra 20 dies secundus assequitur primum; conficitque 300 milliaria intra hos dies, primus conficit, tantum 200. & 100 quæ confecerat, antequam secundus iter iniret efficiunt etiam 300.

Posset fieri quæstio conversa prioris; supposito quod, primus viator singulis diebus 100. mill. conficiat, & fecerit 10 milliaria, antequam secundus viator iter inciperet ; ut illum assequatur quinto die, quot milliaria singulis diebus perficere debet secundus. Ponamus hunc numerum esse 1R. perficiet intra 5 dies 5 Radices: alter verò perficiet 50 milliaria, quibus addi debent 100 milliaria; ita ut fiant 150. est ergo æquatio 5R. $=$ 150. & dividendo per 5 fient 1R. $=$ 30. hoc est intra diem perficienda esse 30 milliaria.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Interrogatus de horâ respondit dimidia pars horarum à media nocte, addita tribus quadrantibus horarum residuarum ad mediam noctem sequentem, exhibet horam præsentem; quæritur numerus horarum.

Numerus horarum sit 1R. restant ad sequentem mediam noctem 24 — 1R : media pars horarum elapsarum à mediâ nocte, est $\frac{1}{2}$R : horarum verò quæ restant ad sequentem mediam noctem, tres quadrantes, sunt 18. — $\frac{3}{4}$R. adde hæc simul; + $\frac{1}{2}$ R — $\frac{3}{4}$ R. efficiunt — $\frac{1}{4}$ R. habemus ergo æquationem 18 — $\frac{1}{4}$R. $=$ 1R. adde $\frac{1}{4}$R. fiet æquatio 18. $= \frac{5}{4}$R. & reducendo 18 ad quadrantes $\frac{72}{4}$. $= \frac{5}{4}$R. & abjectis denominatoribus fiet æquatio 72 $=$ 5R. & divisis per 5. fiet æquatio 14$\frac{2}{5}$. $=$ 1R erat ergo hora secunda post meridiem cum $\frac{2}{5}$. seu 24 minutis.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Duo viatores profecti sunt ex civitatibus dissitis ab invicem milliaribus 140 : horum unus singulis diebus perficit milliaria 8. alter verò 6. quæritur, intra quot dies sibi occurrant.

Numerus dierum post quos sibi occurrunt, sit 1R. dierum; unus ergo eo tempore conficiet 8R. milliariorum, alter 6R. quæ efficiunt 14R. confecerunt autem totum spatium alioquin sibi non occurrerent; est ergo æquatio 14R. $=$ 140. divide & habebis 1R. $=$ 10 : ergo intra 10 dies sibi occurrent, & intra dies 10. unus confecerit 80, alter 60 milliaria; quæ summa adæquat 140.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Erant in dolio 20. mensura vini, erat valor cujuslibet mensura francorum 12; infunditur aqua donec & pretium vini remaneat idem valor mensura vini ita mixti, sit tantum 10 francorum; quaritur quot sint in dolio mensura vini ita mixti.

Sit numerus mensurarum additarum 1 R. eritque numerus omnium mensurarum vini mixti 1R. + 20. valor autem 20 mensurarum vini, cum unius mensuræ pretium sit 12 francorum, erat 240 francorum; quod pretium idem perseverat; cum infusio aquæ supponatur non augere pretium vini. Sed si valor unius mensuræ est 10, valor 20. mensurarum erit 200. quare valor unius radicis mensurarum erit 40. quibus divisis per 10. fiunt 4: sunt ergo additæ 4 mensuræ aquæ.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Quidam permutat aureos 568. & recipit eundem numerum 4 monetarum diversarum.
7. *Ex prima, aureo aquivalent.*
18. *Ex secunda eumdem aureum efficiunt.*
21. *Ex tertia.*
28. *Ex quarta. Quaritur numerus singularum monetarum.*

Supponatur ille numerus esse 1R. quare licèt ita argumentari si 7 monetæ efficiunt unum nummum aureum, 1R monetæ efficiet $\frac{1}{7}$ R. aureorum. & secunda faciet $\frac{1}{18}$ R. & tertia $\frac{1}{21}$ R. & quarta $\frac{1}{28}$ R aureorum. Addantur omnes istæ fractiones fiunt $\frac{71}{252}$ R aureorum, quarum summa æqualis est numero 568: quæritur valor unius radicis. Hanc ita habebimus. Si 71, dant 568. 252 dabunt 2016. pro numero cujuslibet monetæ. Etenim 2016.

primæ efficiunt aureos	288
Et 2016. secundæ efficiunt aur.	112
Et 2016. tertiæ efficiunt aur.	96
Et 2016. quartæ efficiunt aur.	72
Eritque omnium summa	568.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Mercator emit 100 libras cera aureis 17. vult lucrari aureos 18. in 102. quaritur quot libras dare debeat pro uno numero, seu aureo.

Ut hic mercator lucretur 18 pro 102 nummis, 102 efficere debent 120. ut autem id habeas, fiat ut 102 ad 120. ita 17 ad 20. Igitur 100 libræ vendendæ sunt 20 nummis, seu quinque libræ pro uno nummo. Vides igitur hoc problema sine Algebra solvi posse.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Tres 455 nummos ita inter se dividunt, ut quoties primus recipit 2. secundus recipiat 3. & quoties secundus recipit 4. tertius recipiat 5. quaritur quot nummos unusquisque accipiat.

Ponamus primum recipere 20R. secundus 30R. recipiat: Pro tertio regulam auream institues hoc modo. Si 4. dant 5. 30. quot dabunt, invenies $37\frac{1}{2}$ R. fitque summa $87\frac{1}{2}$ R. seu $\frac{175}{2}$ R. quæ æquantur 455 nummis, seu $\frac{455}{1}$. reduc terminos ad eandem denominationem, abjecto denominatore, erit æquatio 175R. = 910. divide fiet 1R. = $5\frac{1}{5}$. Multiplica $5\frac{1}{5}$ per 20 fiet 104. summa primi; multiplica per 30. fiet 156. summa secundi; & per $37\frac{1}{2}$ fiet 195. summa tertii. Qui numeri summam propositam 455 adæquant.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Herus ita cum servo pacifcitur ut si laboret, det illi mercedem 7 assium; si otietur mulctetur 5 assibus; post 30 dies, nihil debetur, nec etiam ipse debet: quaritur quot diebus laboraverit, & quot fuerit otiatus.

Pone numerum dierum laboris esse 1R. & consequenter otii esse 30 — 1R. multiplica dies laboris per 7 asses, fiet productus 7R. multiplica item dies otii seu 30 — 1R. per 5. invenies 150 — 5R. supponitur autem fuisse æqualitas, cum nec illi aliquid debeatur, nec ipse debeat: ergo habemus æquationem 7R. = 150 — 5R. adde 5R. fiet 12R. = 150. divide 150 per 12. fiet $12\frac{1}{2}$. pro una radice; laboravit ergo per dies $12\frac{1}{2}$. & otiatus est $17\frac{1}{2}$. Propterea multiplicando $12\frac{1}{2}$. per 7. herus debet $87\frac{1}{2}$ asses, & multiplicando $17\frac{1}{2}$. per 5. producitur idem numerus.

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Quidam dives habet 160 aureos, in duplici moneta specie, quarum omnium summa est 560. moneta autem una est $\frac{1}{3}$. aurei, alia $\frac{1}{4}$. quaritur quantum habeat in unaquaque.

Sit numerus primæ monetæ 1R. numerus secundæ erit 560 — 1R. estque 1R. primæ monetæ $\frac{1}{3}$R aureorum, cum moneta prima sit tantum $\frac{1}{3}$ aurei: pariter 1R, secundæ erit $\frac{1}{4}$ R. aurei, pariter 560 monetæ secundæ est tantum 140 aurei, divisis scilicet 560. per 4. Quare habebit in secunda moneta 140 — $\frac{1}{4}$R: addantur hi numeri + $\frac{1}{3}$. R. & — $\frac{1}{4}$ R. + $\frac{4}{12}$ R. & — $\frac{3}{12}$ R. quia se elidunt + & — fiet $\frac{1}{12}$ R. Habemus ergo æquationem 140. + $\frac{1}{12}$ R. = 160. aufer 140. restat $\frac{1}{12}$ R. = 20. & multiplicando 12. per 20. ut fiat virtualiter regula trium 1R. = 240. habet ergo in prima moneta 240 & in secunda 320. seu 80. aureos in qualibet specie.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Quidam pauperibus singulis erogat septenos asses, & supersunt ei 24. si singulis dedisset 9 deessent 32. quaritur numerus tam pauperum, quam assium.

Supponamus numerum pauperum esse 1R. numerus assium fuit 7R. + 24. & in secunda erogatione 9R. — 32. qui duo numeri debent esse æquales, est igitur æquatio 7R. + 24 = 9 R. — 32, subtrahe 7 R. & adde 32. fiet æquatio 56 = 2R. & dividendo 1R. = 28. erunt igitur 28 pauperes, quem numerum multiplicando per 7. & addendo 24 produces 220 Asses: quæ summa non sufficiet ut 28. pauperibus erogentur 9. deberent enim esse 252. desunt ergo 32.

PROPOSITIO XXXVII.

Problema.

Vlna 10 panni rubri cum 4 ulnis panni nigri venduntur 88 aureis, & eodem pretio, 2 ulnæ panni rubri cum 4 ulnis panni nigri veneunt aureis 32. quaritur pretium unius ulnæ tam panni rubri, quam panni nigri.

Supponatur pretium unius ulnæ panni rubri esse 1R. erit pretium 10 ulnarum 10 R. quo pretio subducto ex 88 aureis, scilicet ex pretio tam 10 ulnarum panni rubri quam 4 ulnarum nigri; restabit 88 — 10 R. pretium 4 ulnarum panni nigri. Dicuntur autem in quæstione eodem pretio vendi 2 ulnæ panni rubri, & 4 nigri: pretium duarum rubri est 2R. & 4 nigri est 88 — 10 R. addantur simul, fit pretium 88 — 8R. quod dicitur esse 32 aureorum: ergo occurrit æquatio 88 — 8R. = 32: adde 8R. & subtrahe 32 per antithesin duplicem, fit æquatio 8R. = 56. & dividendo per 8. erit 1 R. = 7. pretium unius ulnæ panni rubri. Quare 70 nummi erunt pretium 10 ulnarum rubri, quibus subtractis, ex 88. restant 18 pro pretio 4 ulnarum nigri; quo numero 18. diviso per 4. exurgit $4\frac{1}{2}$. pretium unius ulnæ panni nigri. In secunda venditione duæ ulnæ panni rubri efficient 14. & quatuor nigri 18 addantur, fiet pretium totale 32 aureorum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Sunt in exercitu Germani 25000. Hungari efficiunt mediam partem tam Germanorum quam Italorum, Itali octavam Germanorum & Hungarorum, quaritur numerus Italorum, & Hungarorum.

Supponatur numerus Hungarorum esse 1R. & cum Hungari efficiant mediam partem Italorum, & Germanorum, erunt Itali simul cum Germanis 2R. & Itali soli 2R — 25000. subducendo scilicet numerum Germanorum. Sunt autem Itali $\frac{1}{8}$ Germanorum & Hungarorum seu $\frac{1}{8}$ R. + 3125. Habemus ergo æquationem 2R. — 25000 = $\frac{1}{8}$ R. + 3125. subtrahe $\frac{1}{8}$ R. fiet æquatio $\frac{15}{8}$ R. — 25000 = 3125. adde 25000, fiet alia æquatio $\frac{15}{8}$ R. = $\frac{28125}{1}$ adhibe Isomeriam & habebis æquationem 15. R. = 225000. divide per 15. habebis 1R. = 15000. numerum Hungarorum; qui numerus cum sit semissis aggregati ex Italis, & Germanis erit illud aggregatum 30000, & subductis 25000, erit numerus Italorum 5000.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Duo duces quorum unus pauciores habet milites 40. quam alter, uterque suis militibus distribuit 1200. aureos, acciditque, ut prioris ducis milites singuli haberent 5 aureos, plusquam milites posterioris, quaritur numerus militum utriusque ducis.

Sit numerus militum ducis prioris 1R. & consequenter cum secundus 40 plures habeat, erit militum numerus 1R. + 40. distribuantur utrisque aurei 1200: quilibet miles primi ducis habet aureorum $\frac{1200}{1R}$ & secundi $\frac{1200}{1R + 40}$ quod si augeatur numerus aureorum militum secundi ducis 5 aureis, esset æquatio. Ut autem quilibet habeat 5 aureos, debebit esse summa aureorum quintupla numeri militum quibus distribuitur: est autem numerus militum secundi ducis 1R. + 40. multiplica hunc numerum per 5, fiet 5R. + 200 quem numerum addere debes numeratori, ad hoc ut distribuatur denominatori fiet ergo fractio $\frac{5R + 1400}{1R + 40}$. habemus ergo duas fractiones æquales $\frac{1200}{1R} = \frac{5R + 1400}{1R + 40}$. Instituatur Isomeria, & neglectis denominatoribus, habebimus æquationem, assumptis scilicet numeratoribus solis 5q + 1400 R. =

$$\frac{1200.}{1R.} \;\times\; \frac{5\,R. + 1400.}{1\,R. + 40.}$$

$$\frac{1200\,R. + 48000.}{1q. + 40\,R.} \qquad \frac{5\,q + 1400\,R.}{1\,q + 40\,R.}$$

1200 R. + 48000: subtrahe 1200R. restabit 5q + 200R. = 48000: divide per 5. habebis æquationem 1q + 40R = 9600. & 1q = 9600. — 40 R. Adde 9600 numero 400. quadrato semissis radicum fiet 10000, è cujus radice 100. subtrahe 20. semissem radicum habebis 80 = 1R. Primus ergo dux habuit milites 80. secundus 120. quilibet miles primi habet aureos 15. & secundi 10. &c.

PROPOSITIO XL.

Problema.

Archimedis problema de corona.

Sint duæ moles, auri una, argenti altera; utraque 100 librarum; corona item 100 librarum. Prima moles in vas plenum aquâ immersa ejecit 60 libras aquæ, secunda 90. & corona 65. quæritur quantum argenti contineat corona. Ponamus coronam continuisse argenti 1R. librarum; eritque corona auri librarum 100 — 1R. fiat regula

regula trium si 100 libræ auri ejiciunt aquæ libras 60. auri libræ 100 $-$ 1 R. ejicient $\frac{6000 - 60\ R.}{100}$ & reducta ad minores numeros libros $60 - \frac{3}{5}$ R. Deinde si 100 libræ argenti ejiciunt 90 libras aquæ, 1 R. ejiciet $\frac{90\ R}{100}$ seu $\frac{9}{10}$ R. quem numerum addere debes priori $- \frac{3}{5}$ ut habeas quantitatem aquæ, quam ejicit corona; adde ergo $- \frac{3}{5}$ R. ad $+ \frac{9}{10}$ scilicet reducantur ad eundem denominatorem, nempe $+ \frac{45}{50}$ R. & $- \frac{30}{50}$. additio fit subtrahendo propter $+$ & $-$ quare fiet $\frac{15\ R}{50}$ seu $\frac{3}{10}$ R. habemus ergo æquationem $60 + \frac{3}{10}$ R. $=$ 65. & subtractis 60. $\frac{3}{10}$ R. $=$ 5. & 1 R. $=$ $16\frac{2}{3}$ libras; erunt igitur argenti libræ $16\frac{2}{3}$. & auri libræ $83\frac{1}{3}$. Probabis autem an bene operatus sis, si dicas. Si auri libræ 100. expellunt aquæ 60. $83\frac{1}{3}$ dabunt aquæ libras 50: pariter si argenti libræ 100. dant aquæ libras 90, argenti $16\frac{2}{3}$. dabunt aquæ 15. quæ junctæ superioribus 60. dant 65.

ALGEBRÆ
LIBER QVINTVS.
Potestatum analysis.

QVÆ hactenus de Algebra diximus vulgaria sunt, & antiquis non incognita quæ hoc libro traduntur peculiaria erunt, & ex methodo Vietæ speciosâ desumpta, quæ hanc scientiam ultra consuetos fines provehunt universalissimamque reddunt. Quia autem in potestatum omnium sive simplicium, sive affectarum resolutione hæc pars præcipuè posita est; ideò potestatum resolutionem seu analysin nominamus: in qua resolutione potiùs numerandi methodum speciosam adhibemus, quam vulgarem eò quòd in vulgari numeri confundantur, nec retineant suos characteres, quibus dignosci possint ab invicem.

PROPOSITIO I.
Problema.

Propositis tribus magnitudinibus quartam proportionalem invenire.

Sint propositæ tres magnitudines A, B, D sitque quarta proportionalis invenienda, multiplica B per D, ita ut fiat B in D seu BD productum, dividatur per A, ita ut fiat $\frac{BD}{A}$ dico hunc quotientem $\frac{BD}{A}$ esse quartum proportionalem. Cum enim A multiplicando hunc quotientem $\frac{BD}{A}$ restituat BD, erit planum sub A & $\frac{BD}{A}$ æquale plano BD: ergo ita erit A ad B, sicut D ad $\frac{DB}{A}$. Sola difficultas est in combinandis quantitatibus, ut si proponantur hæ quantitates $\frac{Aq}{D}$. B, G, quibus quarta proportionalis invenienda est, ducenda esset B in G & dividenda per $\frac{Aq}{D}$: dico autem idem esse si si BG multiplicetur per D & fiat BGD, & productum illud dividatur per Aq. fiatque $\frac{BGD}{Aq}$ quod ut demonstrem. Sit Z quarta proportionalis quæsita $\frac{Aq}{D}$, B, C, Z erunt continuè proportionales; ergo $\frac{ZAq}{D} =$ BC. & ZAq. $=$ BCD, & Z $=$ $\frac{BCD}{Aq}$. Quare propositis tribus quantitatibus $\frac{Aq}{D}$, B & G, ut habeatur quarta proportionalis, duces B in G, ut fiat BG, & duces BG, in D ut fiat BGD quam divides per Aq. hoc modo $\frac{BGD}{Aq}$.

Sint item propositæ tres magnitudines $\frac{A\ cub.}{D\ pl.}$ $\frac{Bq}{Z}$ G quibus quarta proportionalis statuenda est; multiplica Bq in G & & productum BqG multiplicabis per D pl. ita ut fiat Bq in G in D pl. hunc numerum divides per Z in A cubum. hoc modo $\frac{Bq\ in\ G\ in\ D}{Z\ in\ A\ cubum}$. Nam idem numerus producitur quocumque ordine multiplicentur, aut dividantur quantitates; atque adeo idem est dividere Bq per Z, & quotientem multiplicare per G, tum per D pl. & dividere per A cub: ac multiplicationes simul facere, nempe Bq in G in D pl. & hunc productum dividere per Z in A cub.

PROPOSITIO II.
Problema.

Propositis duabus magnitudinibus, tertiam, quartam, quintam continuè proportionales exhibere.

Proponantur duæ quantitates A & B quibus

 tertiam,

tertia, quarta, quinta continuè proportionalis, quæritur. Multiplicetur B per B, ita ut fiat $B2$. quod dividatur per A hoc modo $\frac{B2}{A}$ dico $\frac{B2}{A}$ esse tertiam proportionalem: quia nempe si A multiplicet $\frac{B2}{A}$ producet $B2$; ergo planum ex A in $\frac{B2}{A}$ est æquale quadrato B. Quare (*per* 15. 6.) ita erit A ad B sicut B ad $\frac{B2}{A}$. Deinde multiplica $\frac{B2}{A}$ per B fiet $\frac{B3}{A}$ divide per A fiet $\frac{B3}{A2}$ pro quarta. Quia pariter planum ex A prima in $\frac{B3}{A2}$ efficit $\frac{B3}{A}$ seu productum sub mediis B & $\frac{B2}{A}$ ergo ita est (*per* 16. 6.) A ad B, sicut $\frac{B2}{A}$ ad $\frac{B3}{A2}$ quinta erit $\frac{B4}{A3}$ & ita consequenter augendo exponentes: nam cum $\frac{B3}{A2}$ multiplicatur per B, fit $\frac{B4}{A2}$ & cum fit divisio per A fit $\frac{B4}{A3}$ ergo ita erit A ad B sicut $\frac{B3}{A2}$ ad $\frac{B4}{A3}$.

In numeris facilior esset operatio, & clarior ejus demonstratio. Assuescant igitur Tyrones numeros aptare litteris Alphabeti: hoc enim habet peculiare hæc methodus speciosa.

COROLLARIUM.

Si sint quantitates continuè proportionales; ut prima ad tertiam, ita erit quadratum è prima, ad quadratum è secunda; nam si sint tres magnitudines A, B, $\frac{B2}{A}$ multiplicentur prima A & tertia $\frac{B2}{A}$ per A productæ sunt in eadem ratione: quia æquemultiplices in eâdem sunt ratione; sed producti sunt $A2$. & $B2$. ergo ita erit prima ad tertiam ut $A2$ ad $B2$.

Pariter si sint quatuor continuè proportionales, & A est prima & $\frac{B3}{A2}$ est quarta, eas multiplica per $A2$ fiet $A3$ & $B3$. ergo ut A prima ad $\frac{B3}{A2}$ quartam, ita A cubus ad B cubum: si sint quinque continuè proportionales erit A prima ad $\frac{A4}{B3}$ quintam, ut qqtum primæ ad qqtum secundæ. Multiplica utramque per A cubum, producti erunt in eadem ratione, ii autem sunt $A4$ & $B4$: ergo si sint quinque continuè proportionales, ut prima ad quintam, ita qqtum primæ ad qqtum secundæ.

PROPOSITIO III.

Problema.

Inter duo quadrata exhibere medium proportionale.

Sint quadrata $A2$. $B2$. inter quæ constituendum est medium proportionale. Dico planum AB illud esse.

Demonstratio. Cum enim A, B & $\frac{B2}{A}$ sint continuè proportionales, si hæ quantitates multiplicentur per eamdem A, producti erunt in eadem ratione, seu continuè proportionales; sed illi sunt $A2$. AB, $B2$; ergo $A2$. AB & $B2$. sunt continuè proportionales.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Inter duos propositos cubos, duos medios continuè proportionales constituere.

Sint duo cubi $A3$. & $B3$. inter quæ oporteat, duas quantitates medias proportionales constituere. Dico illas esse $A2B$ & $AB2$. ita ut sint $A3$. $A2B$, $AB2$ & $B3$ continuè proportionales.

Demonstratio. Exponatur series quatuor continuè proportionalium A, B, $\frac{B2}{A}$ $\frac{B3}{A2}$. si hæ quantitates multiplicentur per eamdem quantitatem, producti in eadem erunt ratione, ac quantitates multiplicatæ; multiplicentur omnes per $A2$. erunt producti $A3$. $A2B$, $AB2$, $B3$. ergo istæ quantitates sunt continuè proportionales. Non potest esse difficultas nisi in tertia, nempe dum $\frac{B2}{A}$ multiplicatur per $A2$. fit $\frac{A2\,B2}{A}$ & quia potest fieri divisio $A2B2$ dividatur per A fiet $AB2$.

Ex his vides inter cubum & cubum, posse constitui duo continuè proportionalia, quia nempe inter cubum & numerum absolutum sunt duo gradus parodici nempe radix, & quadratum.

PROPOSITIO V.

Problema.

Inter duas lineas quotcumque medias proportionales constituere.

Inter lineas A & B sint constituendæ, quotquot libuerit mediæ proportionales. Supponamus quatuor, assumatur potestas cujus exponens est 5. superans unitate numerum mediarum proportionalium & intelligantur lineæ A & B elevari, ad hujusmodi gradum nempe fieri supersolida, quod ut fiat exponantur sex continuè proportionales sintque quantitates A, B, $\frac{B2}{A}$ $\frac{B3}{A2}$ $\frac{B4}{A3}$ $\frac{B5}{A4}$ multiplicentur omnes per $A4$. producti in eâdem erunt ratione erunt $A5$. $A4B$, $A3B2$. $A2B3$. $AB4$. $B5$. seu A supersolidus.

A qq in B
A cubus in B quadratum
A quadr. in B cubum
A in B quadratoquadratum
B supersolidus.

Quare habebimus sex continuè proportionalia, in ea ratione quæ est ad B. extrahantur radices supersolidæ, harum quantitatum, illæ erunt etiam proportionales. Quia nempe radices, sunt in subquintupla ratione potestatum: ergo si ratio potestatum sit continuè eadem, ratio radicum erit etiam eadem: radices autem sunt

A.
℞ supersolida A qqti in B
℞ supersolida A cubi in B quadratum
℞ supersolida A quadrati in B cubum
℞ supersolida A in B qqtum

B. Ergo inter A & B quatuor medias proportionales constituimus.

PROPO

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Aggregatum duarum quantitatum additum earumdem differentia, æquale est duplo majoris.

Sint duæ quantitates A major, B minor, fiatque earum aggregatum, cui etiam addatur, earumdem differentia, seu excessus majoris supra minorem, dico fieri summam duplam quantitatis majoris A. Cum enim B juncta differentiæ, æqualis fiat quantitati A: si jungatur adhuc quantitas A, fiet dupla quantitatis A.

Ut autem Algebricè operemur: Sit aggregatum duarum quantitatum A + B & differentia A — B fi fiat — B additum ad + B illud perimit. Ergo restat 2A.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si ab Aggregato duarum quantitatum earum differentia subtrahatur, restabit duplum minoris quantitatis.

Sint duæ quantitates A + B, & ex earum aggregato auferatur excessus majoris, supra minorem restabit duplum minoris. Si enim intacta minore hic excessus auferatur à majori, fiet æqualis minori: ergo erunt duæ quantitates æquales minori.

Algebricè ita demonstratur propositio. Sit Aggregatum A + B. ex quo auferenda sit differentia A — B, auferendo A ex A restat o auferendo — B ex + B secundùm regulas subtractionis fit 2B.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Cum idem latus contrahitur inæquali decremento, differentia contractionum æqualis est differentia contractorum.

Sensus hujus propositionis est quod si ab eadem quantitate v. g. A, subtrahantur duæ quantitates inæquales B & E. fiantque reliquæ A—B, A—E, quod differentia istarum quantitatum reliquarum, æqualis erit differentiæ quæ est inter B & E. Nam subtrahendo A—E ex A—B, subtrahendo A ex A restat o. subtrahendo — E, ex — B fit E—B.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si eadem quantitas inæquali cremento protrahitur, differentia protractionum æqualis erit differentia protractorum.

Sensus hujus propositionis barbarè sub his vocibus explicatæ, est quod si eidem quantitati, addantur inæquales quantitates, fient summæ, quarum differentia æqualis erit differentiæ quantitatum additarum; ut si quantitati A addantur quantitates B & E ita ut fiant summæ A + B & A + E, earum differentia erit B — E.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si idem latus protrahatur, & contrahatur inæquali cremento, & decremento, differentia contracta, protracta, æqualis erit aggregato contractionis, & protractionis.

Sensus est quod si eidem quantitati additur alia quantitas, & eidem alia quantitas inæqualis subtrahitur, fiatque summa, & residuum; differentia illius summæ, & residui, æqualis erit aggregato quantitatum additæ & subtractæ. Ut si quantitati A addatur B & subtrahatur E, fiatque summa A + B, & residuum A—E, differentia inter summam A + B, & residuum A — E æqualis erit summæ B + E; si enim ex A + B, subtrahas A — E, restabit B + E.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Genesis quadrati binomij. Quadratum binomia radicis, æquale est quadratis laterum, + duplo plano sub lateribus.

Productio quadrati à latere simplici, nullam difficultatem continet, sicut neque generatio cæterarum potestatum ex radicibus simplicibus: major est difficultas circa generationem potestatum, quæ ex radicibus compositis proveniunt.

Proponatur ergo primò latus quadrati compositum verbi gratiâ A + B. Dico quadratum totius aggregati A + B esse æquale quadrato lateris primi A, seu segmenti A & quadrato segmenti B + duplo plano ex A in B hoc demonstratum est ab Euclide, in propositione 4. 2. libri.

$$\begin{array}{r} A + B \\ A + B \\ \hline + AB + B2 \\ A2 + AB \quad\quad \\ \hline A2 + 2AB + B2 \end{array}$$

Idem Algebricè demonstratur hoc modo quadratum aggregati A + B constat iis omnibus partibus quæ producuntur ex multiplicatione A + B per A + B, ducatur primò A + B in B fiet AB + B2. ducatur idem A + B in A fient A2 + AB colligantur quantitates productæ erunt Aq + 2AB + Bq.

PROPO

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Planum sub lateribus binomij, medium proportionale est inter quadrata laterum.

Sit ut prius radix binomia A+ B sitque quadratum lateris primi Aq, & lateris secundi Bq. dico planum AB esse medium proportionale inter Aq & Bq.

Demonstratio. Cum idem A, multiplicando seipsum & B. faciat Aq & AB, erit Aq ad AB ut A ad B: pariter cum idem B multiplicando A & seipsum faciat AB, & Bq, ita erit AB ad Bq ut A ad B: ergo ita erit Aq ad AB, & AB ad Bq ut A ad B; ergo AB est medium proportionale, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Quadratum Apotomes æquale est quadratis laterum — duplo plano laterum.

Proponatur Apotome A — B, seu differentia inter A & B; dico ejus quadratum esse æquale quadratis laterum A & B, minus duplo plano sub lateribus A & B. Multiplicetur A — B per A—B & colligantur omnes quantitates productæ, primo — ductum in — B efficit + Bq tum — B ductum in + A efficit — AB: pariter + A ductum in — B efficit — AB. + A ductum in + A producit Aq: ergo producitur Aq — 2AB + Bq in numeris idem videbis sit A, 3. & B, 2. differentia erit 1. cujus quadratum 1. quadrata sunt 9. & 4. quorum summa 13. planum sub lateribus est 6, & duplum erit 12, quod subtractum ex 13. relinquit 1. quadratum differentiæ.

$$\begin{array}{r} A - B \\ A - B \\ \hline - AB + Bq \\ Aq - AB \quad \\ \hline Aq - 2AB + Bq \end{array}$$

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Quadratum Apotomes æquale est quadrato majoris lateris, — quadrato minoris & duplici plano sub Apotome & minori latere.

Sit Apotome seu differentia laterum A — B; dico si ab Aq. auferatur Bq & duplum planum sub B & sub A — B restabit quadratum Apotomes; nam differentia laterum A — B & minus latus æquantur majori: si ergo sumatur differentia pro primo latere, & minus latus pro secundo, erit (*per* 11. *hujus*) quadratum differentiæ + duplo plano sub differentia, & minori latere quadrato minoris lateris, æquale quadrato majoris: ergo subtracto quadrato minoris lateris, cum duplo plano sub differentia & minori latere, ex quadrato majoris restat quadratum Apotomes seu differentiæ.

PROPOSITIO XV.

Si sint tria latera continuè proportionalia, erit quadratum aggregati ex maximo & minimo, æquale quadrato medij duplicati + quadrato differentiæ inter maximum & minimum.

Sint tria latera continuè proportionalia, A, B, C. sitque D, summa maximi A & minimi C. & E differentia inter A & C. sitque F medium duplicatum; dico quadratum summæ D, æquale, esse, quadrato quantitatis E & F.

A	B	C	D	E	F
16.	8.	4.	20.	12.	16.

Demonstratio: intelligatur quantitas D, divisa in A & C. erit quadratum aggregati A + C seu quantitatis D, æquale quadrato differentiæ, & rectangulo quater comprehenso sub A & C. (*per* 7. 2.) sed rectangulum sub A & C, æquale est quadrato ex B. cum A, B, C sint continuè proportionales; ergo quadratum ex D æquale est quadrato differentiæ E, & quatuor quadratis ex B. seu quadrato quantitatis B duplicatæ; ergo quadratum ex D æquale est quadratis ex E, & B duplicati seu F, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

In binomia radice, quadratum aggregati quadratorum utriusque lateris, æquale est quadrato differentiæ quadratorum + quadrato dupli plani sub lateribus.

Sit Binomia radix A + B sitque A2 quadratum majoris lateris, & B2 quadratum minoris, aggregatum utriusque sit A2 + B2 quadratum hujus aggregati (*per* 12,) erit A4 + 2A2 B2 + B4. Erit autem differentia quadratorum A2 — B2 ejus quadratum A4 — 2A2B2 + B4: duplum planum sub lateribus est 2AB, cujus quadratum 4A2B2 si addas quadrato differentiæ, facies qtum A4 + 2A2B2 + B4 seu quadratum quantitatis A2 + B2.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Extractio radicis quadratæ.

Ex dictis facilè demonstrabimus totam generationem quadrati binomiæ radicis & consequenter extractionem radicis quadratæ. Proponatur enim radix binomia 57. seu 50 + 7. scribatur 57

$$\begin{array}{l} 5. \quad 7 \\ \hline 25. \\ \quad 70. \\ \qquad 49. \\ \hline 4249. \end{array}$$

ita ut inter utrumque numerum relinquatur spatium

tium unius characteris. Tum scribatur quadratum numeri 5, sub numero 5, ita ut ultima ejus ciphra respondeat suæ radici 5. idem fiat pro secundo latere 7. fiat item duplum planum ex 5. in 7. erit nempe 70. qui numerus ita scribatur, ut ultimus ejus character respondeat spatio vacuo intermedio. Colligantur omnes isti numeri fiet summa 3249. quadratum radicis 57. posuimus enim quadratum lateris 50. & quadratum lateris 7. & duplum planum sub lateribus.

Ex his demonstrabimus methodum extrahendæ radicis quadratæ. Proponatur enim quadratum binomiæ radicis nempe $A2 + 2AB + B2$. primò quæro radicem primi membri $A2$. hæc erit A, quæ per se multiplicata producit $A2$, quo subtracto ex $A2$ nihil relinquitur: duplicetur radix inventa A, fitque $2A$, per $2A$, divide $2AB$ erit quotiens B, addendum etiam divisori, ita ut fiat totus divisor $2A + B$. quem multiplicabis per B, fietque $2AB + B2$, quibus subtractis ex $2AB + B2$ nihil relinquitur.

Proponatur alia quantitas ex qua eruenda radix quadrata: nempe $36A2 — 48A2 + 16A2$. Primò eruatur radix quadrata primi membri, hæc erit $6A$, quæ si per seipsam multiplicetur, efficiet $36\ A2$. quo subtracto ex primo membro nihil relinquetur. Duplicetur radix inventa fiet $+ 12A$, per hunc numerum divide $—48A2$: erit quotiens $— 4A$ qui etiam addi debet ad divisorem, fietque $12A — 4A$, quo multiplicato per quotientem inventum $— 4A$, fit $— 48A2 + 16\ A2$ quo subtracto ex numero proposito nihil relinquitur, estque radix $6A — 4a$.

Tertiò proponatur $A2 + 2AB + B2 + 2BC + 2AC + C2$. è quo sit radix quadrata eruenda. Quæratur Primò radix quadrata quantitatis $A2$ inveniturque A, cujus quadratum $A2$ subtractum ex primo membro nihil relinquit. Duplicetur radix A, fietque divisor $2A$, per quem numerum divide $2AB$, fit quotiens B addendus divisori $2A$, fietque $2A + B$. multiplica $2A$ per B, fiet $2AB$, quem numerum subtrahes ex $2AB$. multiplica B per inventum quotientem B, producetur $B2$ quem subtrahes ex $B2$ & nihil relinquetur. Inventam radicem $A + B$ duplica, fiet $2A + 2B$, per quem divides duo prima membra reliqui, nempe $+ 2AC$, $+ 2BC$. invenies quotientem C, addendum etiam divisori $2A + 2B$ fietque $2A + 2B + C$. per hunc C multiplica totum divisorem, fiet $2AC + 2BC$. $+ C2$ quibus subtractis nihil relinquitur, erit ergo radix $A + B + C$.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Cubus binomiæ radicis, æqualis est cubo primi lateris, plus triplo solido ex quadrato primi lateris in latus secundum, + triplo solido ex quadrato secundi in primum, + cubo secundi lateris.

Proponatur radix binomia $A + B$. dico ejus cubum esse æqualem, cubis laterum A & B, + triplo solido quod fit multiplicando Aq per B + triplo solido generato ductu B qti in A. ita ut cubus totalis coalescat ex octo partibus, nempe duobus cubis, & 6. aliis solidis.

Demonstratio. Generatur cubus, dum quadratum radicis ducitur in radicem; proponatur ergo $A2 + 2AB + B2$ quadratum radicis $A + B$ quod multiplicetur per $A + B$, colligantur omnes quantitates per hanc multiplicationem productæ, & habebis propositas quantitates.

$$
\begin{array}{r}
A2 + 2AB + B2 \\
A + B \\
\hline
A2\,B + 2AB2 + B3 \\
A3 + 2A2\,B + AB2 \quad\quad \\
\hline
A3 + 3A2\,B + 3AB2 + B3
\end{array}
$$

In numeris idem patebit ponatur A esse 3. & $B2$. erit cubus radicis 5. 125. erit $A3.27$, $3A2\,B$ 54. erit item $3AB2$ 36. & $B3$. 8. eruntque omnia 27.54.36.8. qui numeri adæquant cubum 125.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Cubus primi lateris, solidum ex quadrato primi lateris in secundum latus, solidum ex quadrato secundi in primum latus, & cubus lateris secundi, sunt quantitates continuè proportionales in ratione primi lateris ad secundum.

Sit radix binomia $A + B$ sintque quantitates quibus constat cubus $A3$. $A2\,B$, $AB2$, $B3$. dico illas quantitates esse continuè proportionales in ratione A ad B.

Demonstratio. (*Per 13. hujus*) hæ quantitates $A2$, AB, $B2$ sunt continuè proportionales, in ratione A ad B, ergo si multiplicentur per eandem quantitatem A, productæ magnitudines $A3$, $A2B$, $AB2$, erunt continuè proportionales in eâdem ratione, A ad B. Pariter si B multiplicet $A2$, AB & $B2$ fient quantitates $BA2$ $AB2$, & $B3$ continuè proportionales in eâdem ratione A ad B: ergo quantitates $A3$ $A2\,B$, $AB2$ & $B3$ sunt continuè proportionales in ratione A ad B; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc concludes $A3$ ad $B3$ esse in triplicatâ ratione A ad B.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Cubus Apotomes seu differentiæ æqualis est cubo primi lateris — triplo solido ex quadrato primi lateris in secundum + triplo solido ex quadrato secundi lateris in primum latus — cubo secundi lateris.

Sit Apotome seu differentia inter A & B, hoc est $A — B$; dico ejus cubum æqualem esse cubo primi lateris, — tribus solidis ex qto primi lateris in secundum, + tribus solidis ex quadrato secundi lateris in primum — cubo secundi lateris.

Demonstratio. Cubus producitur ex multiplicatione quadrati per radicem; multiplicetur ergo quadratum differentiæ $A — B$, nempe $A2$

$—AB2$

$-2AB+B2$ per eamdem differentiam $A-B$, ex multiplication. $+B2$ per $-B$, fit $-B3$, ex ductu $-2AB$ per $-B$ fit $+2AB2$, ex

$$\begin{array}{r} A2-2AB+B2 \\ A-B \\ \hline -A2B+2AB2-B3 \\ A3-2A2B+AB2 \\ \hline A3-3A2B+3AB2-B3 \end{array}$$

ductu $+A2$ per $-B$ fit $-A2B$. multiplicetur idem quadratum per A, & habebis $A3-2A2B+AB2$ colligantur omnes quantitates, habebimus cubum Apotomes, seu differentiæ $A3-3A2B+3A2B-B3$.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Compositio cubi.

Ex superioribus propositionibus, facilè compositionem cubi binomiæ radicis concludemus. Proponamus binomiam radicem 57: hæc scribatur relictis duobus intervallis vacuis: scribatur sub 5 cubus illius 125, ita ut ultima ejus cyphra respondeat radici 5, fiat quadratum radicis 5. eritque 25. qui multiplicetur per 7. eritque 175 multiplicetur per 3. ut fiant $3A2B$ habebisque 525 ita scribendum, ut 2 respondeat 5 tertiò fiat $A2$ eritque 49. multiplicandus per A, eritque productus 245. multiplicetur per 3. ut fiant

A	B
5 . . 7	
125	$A3$
525	$3A2B$
735	$3AB2$
343.	$B3$
185193.	

$3AB2$ habebisque 735. ita scribendum, ut primus character 7 respondeat radici 5. denique fiat cubus 7. seu 343. ita scribendus, ut ejus ultima cyphra respondeat radici 7. fiat omnium summa; habebisque cubum totalem 185193. in quo vides cubum utriusque radicis poni sub sua radice; $3A2B$, plus participare de A, quam de B, ideoque poni ita ut duæ ejus cyphræ respondeant radici A sed $3AB2$ quia plus participat de B quam de A ita collocatur, ut unus tantum ejus character respondeat radici A. Denique cubus B totus respondet radici B.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Extractio radicis cubicæ.

Proponatur cubus $A3+3A2B+3AB2+B3$ cujus extrahenda radix cubica, quæratur radix cubica prima membri, quæ invenietur esse A, cujus cubus $A3$. subtractus ex primo membro nihil relinquit. Fiat quadratum radicis inventæ, eritque $A2$. qui multiplicetur per 3. fiet $3A2$. per quam quantitatem si dividas $3A2B$, invenies quotientem B, per quem si multiplices $3A2$. fiet $3A2B$, quo subtracto ex secundo membro nihil relinquitur. Tum forma quadratum radicis B inventæ, multiplicandum per 3. ut fiat $3B2$. & multiplicandum per A, habebisque $3AB2$. huic addes cubum ejusdem B, ita habebis $3AB2+3B$. quibus subtractis ex numero proposito nihil relinquitur.

$$\begin{array}{l} \quad 60 \\ A.\ 185\ 193 \\ \quad\ \ .\quad\ . \\ 125 \\ \ \ 75 \\ \hline 525 \\ \ \ 735 \\ \qquad 343 \qquad (57 \\ \hline 60193 \end{array}$$

Hujus praxis artificium meliùs in numeris apparebit. Proponatur numerus A, ex quo sit extrahenda radix cubica. Notatis punctis, ita ut inter singula duo characteres interponantur: quæratur maximus cubus, qui invenitur in 185. inveniesque 125. cujus radix 5 notetur in quotiente: ejus cubum 125. subtrahe ex 185. restant 60. Tum fiat triplum quadratum radicis inventæ quod erit 7500. cui adde ter ipsam radicem 50 seu 150. fiet 7650. Quære quoties 7 in 60: invenitur quidem octies: quia tamen, tot adhuc solida subtrahenda sunt, scribantur 7. & primò per 7 multiplica 7500. fientque 52500. In super fiat triplum quadratum radicis inventæ 7, eritque 147. multiplica per 50. primam radicem fietque 7350. denique fiat cubus radicis 7. seu 343. addantur hæc omnia & habebis 60193. quæ subtracta ex reliquo numeri A nihil relinquunt. Si plures quam duæ cyphræ invenirentur in radice, duæ inventæ seu 57. per modum unius assumendæ sunt.

Proponatur aliud exemplum cubus $27A6-54A5+90A4-80A3+60A2-24A+8$.

$$\begin{array}{l} +90A4-80A3+60A2-24A+8 \\ \quad 36A4-8A3 \\ \hline +54A4-72A3+60A2-24A+8 \\ \hline \qquad\qquad +36A2-24A+8 \end{array} \quad (3A2-2A+2$$

Quæratur radix cubica primi membri hæc erit $3A2$. cujus cubus est $27A6$. quare ex primo membro nihil relinquitur. Quadratum radicis $3A2$. est $9A4$. Quod ter sumptum dat divisorem $26A4$. per quem si dividas secundum membrum invenies pro quotiente $-2A$: multiplica divisorem $27A4$ per $-2A$. fiet $-54A5$ quo subtracto ex secundo membro nihil relinquitur. Fiat inventi quotientis $-2A$ quadratum, is erit $+4A2$, ter sumptum erit $+12A2$. & multiplicatum per primam radicem $+3A2$. fiet $+36A4$. quo subtracto ex $+90A4$: relinquetur $+54A4$. fiat item cubus secundæ radicis inventæ, nempe $-2A$, hic cubus erit $-8A3$. quo subtracto ex quarto membro relinquitur $-72A3$. adde reliquos numeros superiores.

Radicis inventæ totius per modum unius seu $3A2-2A$. fiat quadr. id erit $9A4-12A3+4A2$. ter sumatur fiet divisor $27A4-36A3+12A2$.

per

per quem numerum, si dividas residuum, invenies + 2. per quotientem inventum multiplica divisorem habebis $54\,A4 - 72\,A3. + 24\,A2$ quibus subtractis ex primo, secundo & tertio membro relinquitur $36\,A2$: fiat quadratum numeri 2. id erit 4. sumatur ter, fient 12. multiplicetur per primam radicem $3A2 - 2A$ fient $36\,A2 - 24.\,A$, quæ si subtrahantur ex duobus membris relinquitur nihil; denique fiat cubus numeri 2. ille erit 8. quo subtracto ex 8, nihil relinquitur.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Quadratoquadratum radicis binomiæ totalis, æquale est quadratoquadrato lateris primi.
+ Quadruplo planoplano à cubo lateris primi in latus secundum.
+ Sextuplo planoplano à quadrato lateris primi in quadratum secundi.
+ Quadruplo planoplano, à latere primo in cubum secundi.
+ Quadratoquadrato lateris secundi.

Sit binomia radix $A + B$. dico ejus qqtum æquale esse sequentibus quantitatibus $A4 + 4\,A3\,B + 6\,A2\,B2 + 4AB3 + B4$. Quoniam enim si latus multiplicet cubum generat qq. exponatur cubus radicis $A + B$ qui multiplicetur per radicem $A + B$ colliganturque omnes producti, & invenies recensitos in titulo propositionis.

$$\begin{array}{rrrrr} A3 + & 3A2B + & 3AB2 + & B3 & \\ & & & A + B & \\ \hline A4 + & 3A3B + & 3A2B2 + & AB3 & \\ & A3B + & 3A2B + & 3AB3 + & B4 \\ \hline A4 + & 4A3B + & 6A2B2 + & 4AB3 + & B4 \end{array}$$

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Quadrato quadratum lateris primi, productum ex cubo lateris primi in latus secundum productum ex quadrato lateris primi in quadratum lateris secundi, productum ex latere primo in cubum secundi, & quadrato quadratum lateris secundi, sunt continuè proportionalia in ratione lateris primi ad secundum.

Sit binomia radix $A + B$ dico recensitas quantitates esse continuè proportionales in ratione quantitatis A ad B.

Demonstratio. Ostendimus (in 10.) cubum $A3$. solidum $A2B$, solidum $AB2$, & cubum $B3$. esse continuè proportionales in ratione A ad B. Multiplicentur hæ quantitates per eandem quantitatem A, producti erunt in eâdem ratione, hi autem erunt $A4$. $A3B$, $A2\,B2$, $AB3$. pariter si eædem quantitates per B multiplicentur, producti in eâdem ratione erunt ac quantitates multiplicatæ, producti autem sunt $A3B$, $A2$, $B2$, $AB3$. $B4$. ergo hæ quantitates $A4$, $A3B$, $A2\,B2$, $AB3$, $B4$. sunt continuè proportionales in ratione A ad B quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXV.

Thoerema.

Quadratoquadratum Apotomes, æquale est qq majoris lateris, minus quadruplo plano à cubo majoris lateris in latus minus; + sextuplo plano; à quadrato majoris in quadratum minoris — quadruplo plano à latere majore in cubum minoris + quadratoquadrato secundi lateris.

Proponatur radix binomia Apotome seu differentia $A - B$, dico ejus qq æquale esse $A4 - 4A3B + 6A2B2 - 4AB3 + B4$. cum enim radicis $A - B$. qq producatur multiplicando cubum per radicem, & cubus ejus sit $A3 - 3A2B + 3AB2 - B3$ si multiplicentur per radicem $A - B$ fient propositæ quantitates.

$$\begin{array}{rrrrr} A3 - & 3A2B + & 3AB2 - & B3 & \\ & & & A - B & \\ \hline A4 - & 3A3B + & 3A2B2 - & AB3 & \\ & - A3B + & 3A2B2 - & 3AB3 + & B4 \\ \hline A4 - & 4A3B + & 6A2B2 - & 4AB3 + & B4 \end{array}$$

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Compositio quadratoquadrati.

Proponatur radix binomia 32. quæ scribatur relictis tribus sedibus intermediis, sub 3. scribe quadratoquadratum numeri 3. seu 81. Fiat cubus numeri 3. qui sit 27. multiplicetur per latus secundum 2. fiet 54. sumatur quater, fiet 216. Multiplica quadratum lateris 3. seu 9. per 4. quadratum lateris secundi 2, producetur 36. qui multiplicati debet per 6. fietque iterum 216. Cubus lateris B seu 2. hoc est 8. ducatur in 3. fient 24. sumatur quater producentur 96. Sumatur ultimò quadrato-quadratum numeri 2. seu 16. scribantur eo ordine qui in figura videtur, prout magis, aut minus pertinent ad singula latera, quia enim 81. est cubus lateris A, totus ad A pertinet, sequens membrum plus participat de primo latere, quam de secundo, tertium æqualiter de utroque &c.

A	B
3 . . .	2
81	$A4$
216	$4A3B$
216	$6A2B2$
96	$4AB3$
16	$B4$
104 8 576	

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Extractio radicis quadrato quadratica.

Quamvis radix quadrato-quadratica extrahi possit eâdem methodo, quâ supra cubicam extraximus, quia tamen qq non tantum producitur multiplicatione cubi per radicem quadratam; sed etiam multiplicatione quadrati per seipsum, satius erit ex eo priùs extrahere radicem quadratam, & rursus ex ea extrahere radicem quadratam. Quod ut melius concipiamus, optimum erit considerare quid producatur ex multiplicatione quadrati per

$$\begin{array}{l} A2 + 2AB + B2 \\ A2 + 2AB + B2 \\ \hline A4 + 2A3B + A2B2 \\ \quad 2A3B + 4A2B2 + 2AB3 \\ \qquad + A2B2 + 2AB3 + B4 \\ \hline A4 + 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4. \end{array}$$

seipsum. Producentur autem eædem omnes quantitates de quibus locuti sumus, sive radix in cubum ducatur, sive quadratum in seipsum. ut apparet in figura.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Surdesolidus binomiæ radicis, æqualis est surdesolido lateris primi
+ quintuplo solido à quadrato-quadrato lateris primi, in secundum latus.
+ decuplo solido à cubo lateris primi, in quadratum secundi.
+ decuplo solido à cubo lateris secundi in quadratum primi.
+ quintuplo solido à latere primo in quadrato-quadratum secundi.
+ surdesolido lateris secundi.

Proponatur radix A + B. dico surdesolidum totalem æqualem esse solido A5 + 5A4B + 10A3 —B2 + 10A2B3. + 5AB4 + B5. cum enim surdesolidus generetur multiplicatione quadrato quadrati per radicem A + B. exponatur qquadratum quod multiplicetur per radicem A + B producentur omnes prædictæ quantitates.

$$\begin{array}{l} \qquad A4 + 4A3B + 6A2\,B2 + 4AB3 + B4. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A + B \\ \hline A5 + 4A4\,B + 6A3\,B2 + 4A2\,B3 + AB4 \\ \qquad A4B + 4A3\,B2 + 6A2\,B3 + 4AB4 + B5 \\ \hline A5 + 5A4\,B + 10A3\,B2 + 10A2\,B3 + 5AB4 + B5. \end{array}$$

Non erit difficile ostendere omnes prædictas quantitates esse continuè proportionales in ratione lateris primi ad secundum.

Secundò surdesolidum Apotomes æqualem esse Surdesolido primi lateris.

— Quintuplo solido à quadrato-quadrato lateris primi in secundum latus.

+ Decuplo solido à cubo lateris primi in quadratum secundi.

— Decuplo solido à quadrato primi in cubum secundi.

+ Quintuplo solido à latere primo in quadrato quadratum secundi.

— Surdesolido lateris minoris.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Compositio surdesolidi.

Proponatur radix surdesolida A + B scribatur ita ut inter utramque cyphram sint intermediæ 4 sedes. Fiat surdesolidum primæ 3. nempè

$$\begin{array}{ll} A & B. \\ 3. & 2. \\ \hline 243. & \\ \;\;810. & \\ \;\;1080. & \\ \quad\;720. & \\ \qquad 240. & \\ \qquad\;\; 32. & \\ \hline 33554432. & \end{array}$$

243. fiat A4B. A3 seu 81. multiplicatum per B seu 2. erit 162. sumatur quinquies fiet 810. fiat 10 A3B2. est autem A3. 27. B2. 4. multiplica 27 per 4. fiet 108. sume decies fiet 1080. fiat 10 A2B3. A2 est 9 multiplicatum per B3. seu 8 efficit 72. multiplicatum per 10. efficit 720. fiat 5AB4. B4 est 16. ductum in A, seu 3. efficit 48. sumptum 5 efficit 240. surdesolidus 2 est 32. addantur hæ quantitates fiet summa supra notata 33554432.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Extractio radicis surdesolidæ.

Ex superiùs dictis facilè methodum docebimus extrahendi radicem surdesolidam in numeris. Proponatur numerus A, ex quo extrahenda radix surdesolida, notetur punctum sub ultimâ, exinde relinquantur quatuor sedes vacuæ, notetúrque aliud

$$\begin{array}{ll} \quad 11.\ 2. & \\ \quad 92.\ 7. & \\ A\ 33554432 & (32. \\ \quad\;\; . \qquad\; . & \\ B\ 243\ \ldots\ldots & \\ \quad\; 405\ \ldots. & \\ \quad\; 1080\ \ldots & \\ \qquad 720\ .. & \\ \qquad\; 240\ . & \\ \qquad\;\; 32 & \end{array}$$

punctum, & ita deinceps. Quæratur maximus surdesolidus qui in primo membro 335. invenitur & deprehenso esse 243. surdesolidus radicis 3. scribo in quotiente radicem 3. & subscribo surdesolidum B, quem subtraho, ex primo membro, & relinquitur

relinquitur 91. primus divisor erit quinquies quadratoquadratum radicis inventæ; est autem illius qq 81, & quinquies sumptum 405; quia autem invenitur bis in membro superiori: scribatur in quotiente 2. tum multiplica divisorem per 2. & productum aufer, ex numero superiori restabitque 115. &c. inventis duobus characteribus debent adhuc subtrahi reliquæ quantitates, & primo $10 A3 B2$. est autem cubus primi lateris 27. quadratum secundi 4. ducantur invicem fient 108, decies sume habebis 1080. qui debet promoveri unâ sede ad dextram, & subtrahi, ex superiori, restabit 744. &c. debet item fieri $10 A2B3$; $A2$ est 9. & $B3$. est 8. fiunt 72. decies sumptus erit 720. subscribendus, sed unâ sede promoveatur ad dexteram, intelligendo de ultimo charactere, fiat subtractio ex membro sibi respondente, relinquetur 2432. fiat $5AB4$ est autem $B4$. 16. ductus in A, seu 3. producit 48. quinquies 240, scribendus ita, ut promoveatur unâ sede ad dexteram; fiat subtractio relinquetur 32. Denique fiat surdesolidus numeri 2. erit 32, quo subtracto nihil relinquitur.

Notandum est, quòd licèt egerimus quasi cyphra 3, in quotiente non significaret 30, sed tantum 3, id facilitatis tantùm gratiâ nos egisse; virtualiter enim eam æqualem fecimus numero 30. ita ut duæ partes nostri quotientis essent 30, & 2. ut in primo divisore. Surdesolidus numeri 30. non est 243. sed 24300000. atque adeò per simplicem collocationem numeri 243. idem præstitimus, ac si surdesolidum numeri 30. & non numeri 3. fecissemus; quod in aliis omnibus experienti manifestum fiet.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Quadratocubus radicis binomiæ æqualis est quadratocubo lateris primi.

+ Sextuplo solido à supersolido lateris primi in latus secundum.

+ Decuquintuplo solido à qq lateris primi in quadratum secundi.

+ Vigecuplo solido à cubo lateris primi, in cubum secundi.

+ Decuquintuplo solido à quadrato lateris primi in qq secundi.

+ Sextuplo solido à latere primo in supersolidum secundi.

+ Qcubo lateris secundi.

Proponatur Radix binomia $A + B$ dico ejus quadratocubum, (quem malè Renaldinus vocat cubocubum, hoc est potestatem cujus exponens est 6.) dico inquam illius quadratocubum esse æqualem $A6 + 6A5B + 15 A4 B2 + 20 A3 - B3 + 15 A2 B4 + 6AB5 + B6$.

Hæc propositio probatur eodem modo quo superiores: facilè autem extrahitur radix hujus potestatis, debet enim prius extrahi radix quadrata; tum radix cubica, ut autem omnia oculis subjiciantur, potest poni hæc tabula ostendens potestates radicum $A + B$, & $A - B$.

r.	2. seu qu.	3 cubus.	4 qq	5 5. super.	6 qc.	r.	q	cubus	qq	Super	qc
$A + B$	$A2$	$A3$	$A4$	$A5$	$A6$	$A - B$	$A2$	$A3$	$A4$	$A5$	$A6$
	$2AB$	$3A2B$	$4A3B$	$5A4B$	$6A\,5B$		$-2AB$	$-3A2B$	$-4A3B$	$-5A4B$	$-6A5\,B$
	$B2$	$3AB2$	$6A2B2$	$10A3B2$	$15\,A4B2$		$+ B2$	$+3AB2$	$+6A2B2$	$+10A3B2$	$+15A\,B2$
		$B3$	$4AB3$	$10A2B3$	$20\,A3B3$			$-B2$	$-4AB3$	$-10A2B3$	$-20A3B3$
			$B4$	$5AB4$	$15\,A2B4$				$+ B4$	$+ 5AB4$	$+15A2B4$
				$B5$	$6A\,B5$					$-B5$	$-6A\,B5$
					$B6$						$+ B6$

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Quadratum aggregati duorum laterum + quadrato differentiæ eorumdem æquale est duplo aggregato quadratorum laterum singulorum.

Sint duo latera $A + B$ & eorum differentia $A - B$, quadrato hujus aggregati $A + B$ addatur quadratum differentiæ, dico fieri duplum quadratorum laterum A & B seu $A2 + B2$, erit enim quadratum aggregati $A + B$ istud. $A2 + 2AB + B2$.

$$\begin{array}{l} A2 + 2A\,B + B2 \\ A2 - 2A\,B + B2 \\ \hline 2A2 \qquad\quad 2B2 \end{array}$$

Erit item quadratum differentiæ $A - B$ seu apotomes: $A2 - 2AB + B2$. fiat additio in quâ $+ 2AB$ & $- 2AB$ se destruunt; ergo restabit additione factâ duplum quadratorum A & B.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Quadratum aggregati laterum minus quadrato differentiæ eorumdem, æquale est quadruplo plano sub lateribus.

Proponantur pariter latera $A + B$ & eorum differentia $A - B$ sit pariter quadratum aggregati laterum $A + B$.

$$\begin{array}{l} A2 + 2A\,B + B2 \\ A2 - 2A\,B + B2 \\ \hline \quad + 4A\,B \end{array}$$

A quo subtrahatur quadratum differentiæ, restabit factâ subtractione quadruplum planum sub lateribus.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Productum ex differentia duorum laterum in eorumdem aggregatum, æquale est differentia quadratorum laterum.

Sint proposita latera $A + B$ sitque differentia $A - B$ aggregatum laterum $A + B$, differentia quadratorum laterum $A2 - B2$. dico productum ex $A - B$ in $A + B$ æquale esse huic differentiæ quadratorum $A2 - B2$. Fiat enim multi-

$$\begin{array}{l} \quad A + B \\ \quad A - B \\ \hline A2 + AB \\ \quad - AB - B2 \\ A2 \;\;\; - \;\;\; B2 \end{array}$$

plicatio & primò multiplicetur $A + B$ per A, fiet $A2 + AB$; idem $A + B$, multiplicetur per $- B$ fiet $- AB - B2$; fiat additio cum $+ AB$ & $- AB$ se perimant, restabit $A2 - B2$ seu differentia quadratorum, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Cubus aggregati duorum laterum + cubo differentia eorumdem, æqualis est duplo cubo majoris lateris, plus sextuplo solido à latere majori, in lateris minoris quadratum.

Proponantur duo latera A & B, & A sit majus, dico cubum $A + B$ additum cubo differentiæ eorum, nempè $A - B$ esse æqualem duplo cubo majoris lateris A, & sextuplo solido facto, ex multiplicatione lateris majoris A, in quadratum

$$\begin{array}{l} A3 + 3A2\,B + 3AB2 + B3. \\ A3 - 3A2\,B + 3AB2 - B3. \\ \hline 2A3 \qquad\quad + 6AB2 \end{array}$$

minoris B. sit enim cubus aggregati $A + B$, huic addatur cubus $A - B$ seu differentiæ, in additione secunda & quarta membra se perimunt.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si à cubo aggregati subtrahas cubum differentiæ, restabit sextuplum solidum à latere minore in majoris quadratum plus duplo cubo lateris minoris.

Proponatur pariter cubus aggregati $A + B$

$$\begin{array}{l} A3 + 3A2B + 3AB2 + B3. \\ A3 - 3A2B + 3AB2 - B3. \\ \hline o. \; + 6A2B \qquad o. \; + 2B3. \end{array}$$

à quo subtrahe cubum differentiæ $A - B$ reliquum erit sextuplum solidum &c.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Qq Aggregati duorum laterum + quadrato differentia eorumdem, æquatur duplo aggregato quadratoquadratorum laterum, plus duodecuplo producto à quadrato majoris in quadratum minoris.

Sit aggregatum $A + B$ cujus qq addatur differentiæ $A - B$ qq in additione secunda & quarta

$$\begin{array}{l} A4 + 4A3\,B + 6A2B2 + 4AB3 + B4 \\ A4 - 4A3\,B + 6A2B2 - 4AB3 + B4 \\ \hline 2A4 \qquad\quad + 12A2B2 \qquad\quad + 2B4 \end{array}$$

membra se perimunt, ideoque summa erit qualem propositio indicat.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Qq Aggregati duorum laterum — qqto differentia eorum, æquale est octuplo producto à cubo lateris majoris in latus minus, + octuplo producto à latere majori in cubum minoris.

Sit aggregatum laterum $A + B$ ex cujus qq

$$\begin{array}{l} A4 + 4A3B + 6A2\,B2 + 4AB3 + B4 \\ A4 - 4A3B + 6A2\,B2 - 4AB3 + B4 \\ \hline o \quad 8A3\,B \; o \qquad + 8AB3 \quad o \end{array}$$

auferatur qq differentiæ $A - B$ dico reliquum esse æquale $8A3\,B + 8AB3$.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Surdesolidus aggregati laterum + surdesolido differentia eorumdem æqualis est duplo surdesolido majoris lateris + Vigecuplo producto à cubo majoris in q minoris + Decuplo producto ex latere majore in qq minoris.

Proponatur aggregatum laterum $A + B$, & differentia $A - B$ dico surdesolidum aggregati auctum surdesolido differentiæ æqualem esse $2A5$

$$\begin{array}{l} A5 + 5A4\,B + 10\,A3B2 + 10\,A2B3 + 5AB4 + B5. \\ A5 - 5A4\,B + 10\,A3B2 - 10\,A2B3 + 5AB4 - B5. \\ \hline 2A5 \qquad + 20A3B2 \qquad + 10\,AB4. \end{array}$$

$+ 20\,A3B2 + 10\,AB4$. quia in additione, membra, secunda, quarta, & sexta se perimunt.

PROPO

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Surdesolidus aggregati duorum laterum
— Surdesolido differentiæ eorumdem, æqualis est decuplo producto ex qq majoris in latus minus.
+ Vigecuplo producto ex q majoris in cubum minoris.
+ Duplo surdesolido lateris minoris.

$$A5 + 5A\,4B + 10\,A3\,B2 + 10\,A2\,B3 + 5A\,B4 + B5.$$
$$A5 - 5A\,4B + 10\,A3\,B2 - 10\,A2\,B3 + 5A\,B4 - B5.$$
$$10A\,4B \quad 0 \quad + 20\,A2B3 \quad 0 \quad + 2B5.$$

Proponatur aggregati A + B supersolidus, à quo subtrahatur differentiæ A—B supers. fietque reliquus idem qui habetur in titulo.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Qc Aggregati duorum laterum auctus qcubo differentiæ eorumdem æqualis est duplo quadratocubo ipsorum laterum,
+ Trigecuplo producto à qq majoris lateris in q minoris.
+ Trigecuplo producto à q majoris in qq minoris.

$$A6 + 6A\,5B + 15\,A4\,B2 + 20\,A3\,B3 + 15\,A2\,B4 + 6A\,B5 + B6.$$
$$A6 - 6A\,5B + 15\,A4\,B2 - 20\,A3\,B3 + 15\,A2B4 - 6A\,B5 + B6.$$
$$2A6 \quad 0 \quad + 30\,A4\,B2 \quad 0 \quad + 30\,A2\,B4 \quad 0 \quad + 2B6.$$

Proponatur laterum A + B qcubus, sit differentiæ A—B qc : fiat additio in qua secunda, quarta, & sexta membra se perimunt, fietque summa, qualem propositio indicat.

PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Qcubus aggregati duorum laterum, minus qcubo differentiæ eorumdem, æqualis est duodecuplo producto ex supersolido lateris majoris in minus.
+ Quadragecuplo producto à cubo majoris in cubum minoris.
+ Duodecuplo producto ex latere majori in supersolidum minoris.

$$A6 + 6A\,5B + 15\,A4\,B2 + 20\,A3\,B3 + 15\,A2\,B4 + 6A\,B5 + B6.$$
$$A6 - 6A\,5B + 15\,A4\,B2 - 20\,A3\,B3 + 15\,A2\,B4 - 6A\,B5 + B6.$$

Proponatur aggregati A + B qc. ex quo subtrahe differentiæ qc. eritque reliquum.

$$0 \quad 12A5B \quad 0 \quad + 40\,A3\,B3 \quad 0 \quad + 12AB5 \quad 0$$

PROPOSITIO XLIII.

Theorema.

Productum ex differentia laterum, in tria plana semel, quæ continentur in quadrato aggregati laterum æquale est differentiæ cuborum.

Diximus suprà quadratum aggregati constare duobus quadratis laterum, & plano sub lateribus, suntque illæ partes A2 + AB + B2. quamvis intermedia bis inveniatur in quadrato : tria igitur plana multiplicentur per differentiam laterum seu

$$A2 + AB + B2.$$
$$A - B$$
$$A3 + A2B + AB2$$
$$- A2B - AB2 - B3.$$
$$3 \;\text{———————}\; B3$$

per A—B fietque productum A3—B3 est autem A3—B3 differentia cuborum.

COROL

COROLLARIUM.

Colliges si differentia cuborum applicetur, seu dividatur per differentiam laterum; quotiens erit tria singularia plana, quæ quadratum aggregati componunt.

Pariter si eamdem differentiam cuborum, per tria plana quæ componunt quadratum dividas, quotiens erit differentia laterum.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema.

Productum ex aggregato laterum, in tria plana quibus constat q differentiæ laterum, æquale est aggregato cuborum.

Aggregatum laterum sit $A + B$, plana quibus constat q differentiæ laterum $A - B$ sunt $A2 - AB + B2$. si hæc tria plana multiplices per

$$\begin{array}{l} A2 - AB + B2 \\ \quad A + B \\ \hline A3 - A2B + AB2 \\ \quad + A2B - AB2 + B3. \\ \hline A3 \qquad + \qquad B3 \end{array}$$

aggregatum laterum cum membra intermedia se perimant fiet summa aggregatum cuborum.

COROLLARIUM.

Si aggregatum cuborum dividas per aggregatum laterum, quotiens erit plana quæ componunt quadratum differentiæ.

Et vicissim si dividas aggregatum cuborum per plana quæ componunt quadratum differentiæ quotiens erit aggregatum laterum.

PROPOSITIO XLV.

Theorema.

Productum ex differentia duorum laterum in quatuor singularia solida, quæ componunt cubum aggregati laterum, æquale est differentiæ quadratoquadratorum.

Cubus aggregati duorum laterum componitur ex $A3 + A2B + B3$. multiplicentur hæc solida per differentiam laterum $A - B$. patet fieri productum ex tali ductu æqualem differentiæ quadratoquadratorum.

$$\begin{array}{l} A3 + A2B + AB2 + B3. \\ \quad A - B \\ \hline A4 + A3B + A2B2 + AB3. \\ \quad - A3B - A2B2 - AB3 - B4. \\ \hline A4 \qquad - \qquad B4. \end{array}$$

COROLLARIUM.

Si differentia qqtorum applicetur ad differentiam laterum, orientur pro quotiente quatuor solida quæ componunt cubum aggregati laterum.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema.

Productum ex aggregato laterum, in quatuor solida, quæ componunt cubum differentiæ laterum semel sumpta, æquale est differentiæ quadrato quadratorum.

Proponatur cubus radicis $A - B$ & quatuor solida semel sumpta quibus constat hic cubus. Hæc multiplicentur per $A + B$ aggregatum: patet hac multiplicatione producendam differentiam

$$\begin{array}{l} A3 - A2B + AB2 - B3. \\ \quad A + B \\ \hline A4 - A3B + A2B2 - AB3. \\ \quad + A3B - A2B2 + AB3 - B4. \\ \hline A4 \qquad - \qquad B4. \end{array}$$

qqtorum, cum multiplicatione factâ, secunda, tertia & quarta membra se perimant.

COROLLARIUM I.

Differentia cuborum divisa per aggregatum laterum, dat pro quotiente quatuor solida quibus constat cubus differentiæ laterum, vel divisa per ea 4. solida, dabit pro quotiente aggregatum laterum.

COROLLARIUM II.

Vt aggregatum laterum ad differentiam eorumdem, ita 4 solida quibus constat cubus aggregati, ad 4 solida quibus constat cubus differentiæ: cum enim idem numerus producatur ex multiplicatione primi & quarti, qui oritur ex ductu secundi in tertium; erit (*per 16.6.Eucl.*) eadem ratio primi ad secundum, quæ tertii ad quartum.

PROPOSITIO XLVII.

Theorema.

Productum ex differentia laterum in quinque quantitates quibus constat qq aggregati semel sumptas, æquale est differentiæ supersolidorum.

Proponatur qq aggregati laterum $A + B$ quantitates quibus constat multiplicentur per $A - B$.

$$\begin{array}{l} A4 + 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4 \\ \hline A4 + A3B + A2B2 + AB3 + B4 \\ \qquad A - B \\ \hline A5 + A4B + A3B2 + A2B3 + AB4 \\ \quad - A4B - A3B2 - A2B3 - AB4 - B5 \\ \hline A5 \qquad\qquad - B5 \end{array}$$

Patet producendam ex tali multiplicatione differentiam supersolidorum laterum.

Si Differentia supersolidorum applicetur, seu dividatur per differentiam laterum quotiens erit quinque solida quibus constat qqtum aggregati, & vicissim.

PROPO

PROPOSITIO XLVIII.

Theorema.

Productum ex aggregato duorum laterum in quinque quantitates semel sumptas, quibus constat qqtum differentia cuborum, aquale est aggregato supersolidorum laterum.

Sint quantitates quibus constat A—B qqtum multiplicandæ per aggregatum laterum: dico pro-

$$\begin{array}{l} A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 \\ \qquad\qquad A + B \\ \hline A^5 - A^4B + A^3B^3 - A^2B^2 + AB^4 \\ \quad + A^4B - A^3B^2 + A^2B^3 - AB^4 + B^5 \\ \hline A^5 \qquad\qquad\qquad\qquad + B^5 \end{array}$$

ducendum aggregatum supersolidorum, cum membra intermedia se invicem destruant.

Si aggregatum supersolidorum, dividatur per aggregatum laterum, quotiens erit quinque plano plana, quibus constat qq differentiæ laterum semel sumpta, & vicissim.

PROPOSITIO XLIX.

Theorema.

Productum ex differentia laterum in 6. planosolida, quibus constat supersolidus aggregati laterum, æquale est differentia quadratocuborum laterum.

Proponatur supersolidus aggregati A + B. & quantitates ex quibus componitur multiplicentur per A—B differentiam laterum.

$$\begin{array}{l} A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 \\ A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5 \\ \qquad\qquad A - B \\ \hline A^6 + A^5B + A^4B^2 + A^3B^3 + A^2B^4 + AB^5 \\ \quad - A^5B - A^4B^2 - A^3B^3 - A^2B^4 - AB^5 - B^6 \\ \hline A^6 \qquad\qquad\qquad\qquad - B^6 \end{array}$$

Dico producendam hac multiplicatione differentiam quadratocuborum laterum.

COROLLARIUM.

Differentia quadratocuborum divisa per differentiam laterum, dat pro quotiente 6 plano solida quibus constat supersolidus aggregati laterum.

PROPOSITIO L.

Theorema.

Productum ex aggregato laterum in 6 planosolida, quibus constat supersolidus differentia aquale est differentia qcuborum laterum.

Fiat supersolidus differentiæ A — B. habebis 6 planosolida; seorsim sumpta multiplicentur per A + B aggregatum, fietque differentia qcuborum laterum.

$$\begin{array}{l} A^5 - 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 \\ A^5 - A^4B + A^3B^2 - A^2B^3 + AB^4 - B^5 \\ \qquad\qquad A + B \\ \hline A^5 - A^5B + A^4B^2 - A^3B^3 + A^2B^4 - AB^5 \\ \quad + A^5B - A^4B^2 + A^3B^3 - A^2B^4 + AB^5 - B^6 \\ \hline A^6 \qquad\qquad\qquad\qquad - B^6 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

Differentia quadratocuborum laterum divisa per aggregatum laterum, dat quotientem 6 plano solida semel sumpta quibus constat supersolidus, & vicissim.

COROLLARIUM II.

Eadem est ratio aggregati laterum, ad differentiam eorum, quæ 6 planosolidorum, ex quibus constat supersolidus aggregati, ad quinque planosolida quibus constat supersolidus differentiæ. Cum enim idem sit productum ex primo in quartum, quod ex secundo in tertium ita erit primum ad secundum, ut tertium ad 4.

COROLLARIUM III.

Ita sunt 6 planosolida quibus constat supersolidus aggregati, ad 6 planosolida quibus constat supersolidus differentiæ: ut 4 solida quibus constat cubus aggregati: ad 4 solida quibus constat cubus differentiæ, nempe vidimus supra hæc ultima se habere ut aggregatum laterum ad differentiam eorumdem.

Ex his aliquas conclusiones universales deducemus seu leges.

LEX I.

Productum ex differentia laterum, in singularia homogenea, seu in semel sumptas quantitates quibus constat aliqua potestas, æquale est differentiæ potestatum immediatè majorum. Id enim vidimus in singulis accidere.

LEX II.

Differentia potestatum divisa per differentiam laterum, dat singulares quantitates quibus constat potestas inferior aggregati laterum, & vicissim.

LEX III.

Si differentia potestatum aggregati, dividatur per singularia homogenea quibus constat potestas inferior aggregati; exhibebit pro quotiente differentiam laterum.

LEX IV.

Productum ex aggregato laterum in singularia homogenea quibus constat potestas differentiæ laterum si sint numero imparia, æquale est aggregato potestatum proximè majorum.

Productum verò ex aggregato laterum in singularia homogenea numero paria quibus constat potestas differentiæ laterum, æquale est differentiæ potestatum ordinis proximè majoris.

LEX V.

Si aggregatum, vel differentia potestatum dividatur per aggregatum laterum, dabit pro quotiente singularia homogenea potestatis inferioris, sed differentiæ. Intellige de aggregato potestatum quarum exponens est par, & de differentia potestatum quarum exponens est impar.

LEX VI.

Si par fuerit numerus quantitatum quibus constat potestas aggregati laterum, aut differentiæ; erit ut differentia laterum ad aggregatum, eorum ita quantitates quibus constat differentiæ potestas, ad quantitates quibus constat aggregati potestas.

Possemus continuare superiora Theoremata in sequentibus potestatibus, sed hæc modo sufficiant.

PROPOSITIO LI.

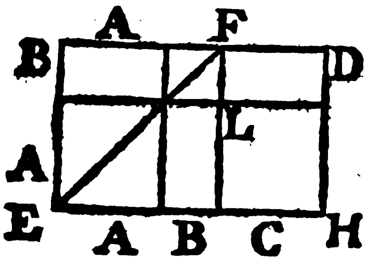
Theorema.

Si fuerit radix binomia + longitudine sublaterali coefficiente, quadratum lateris primi, + duplo plano à latere primo in secundum, + quadrato lateris secundi, + plano à latere primo in coefficientem + plano à latere secundo in coefficientem, æquatur quadrato aggregati laterum affecto adjunctione plani sub dicto aggregato seu radice binomiâ in coefficientem.

Proponatur radix binomia $A + B$, cui adjungatur coefficiens longitudo C, ita ut fiat $A + B + C$. dico quadratum aggregati $A + B$, simul

$$\begin{array}{l} A + B + C \\ \quad A + B \\ \hline A2 + AB + AC. \\ \quad\quad AB \quad\quad B2.\ BC \\ \hline A2 + 2AB + B2. + AC, + BC \end{array}$$

cum rectangulo sub $A + B$ sub C. æquari omnibus his planis. Nam quadratum aggregati æquatur quadratis A & B & plano bis sub A & B: rectangulum sub C, & $A + B$ æquale est (*per* 1.2.) rectangulis sub A & C. & sub B & C, quæ omnia patent ex multiplicatione.



Possunt item probari hâc figurâ, quadrato AB adjungitur rectangulum FH, erit ergo totum rectangulum ED æquale $A2 + 2AB + B2 +$ rectangulis HL, LD seu planis AC, BC.

COROLLARIUM.

Ex his facilè colliges quænam plana affectio addat, supra quadratum purum, addit enim planum sub primo latere & coefficiente longitudine, & planum sub latere secundo & coefficiente longitudine.

PROPOSITIO LII.

Theorema.

Si fuerit Radix binomia & coefficiens sublaterale planum cubus lateris primi. + triplo solido à q. lateris primi in latus secundum + triplo solido à q. lateris secundi in latus primum + cubo lateris secundi. + solido à latere primo in coefficiens planum + solido à latere secundo in coefficiens planum æqualis est cubo aggregati affecto adjunctione solidi sub aggregato laterum in planum coefficiens.

Cubus potest esse affectus, vel sub radice, vel sub quadrato; ut verbi gratiâ proponatur æquatio 1c. + 12 R. = 608. dicitur ille cubus affectus adjunctione solidi sub latere: seu radice binomiâ, & sub numero 12. qui intelligitur tanquam planum, eò quòd generatio ipsa cubi, jam fiat quadrati in radicem. Ponatur radix 5 + 3. cujus quadratum 64. cubus 512. solidum sub radice 8 & 12. est 96. dico affectionem istam addere cubo binomiæ radicis solidum sub 12. & sub 5. tum solidum sub 12. & sub 3.

$$\begin{array}{l} A2 + 2AB + B2 + C\ pl. \\ \quad\quad A + B \\ \hline A3 + 2A2\,B + AB2 + AC\ \text{solidum} \\ \quad + A2\,B + 2AB + B3. + BC\ \text{sol.} \\ \hline A3 + 3A2\,B + 3AB2 + B3. + AC\ \text{sol.} + BC\ \text{sol.} \end{array}$$

Quæ omnia meliùs probari non possunt quam multiplicatione. Proponatur ergo quadratum binomiæ radicis, cui adjungatur C planum, quæ omnia per radicem binomiam multiplicentur & fient particularia solida, quæ suprà recensita sunt. Hoc est præter cubum binomiæ radicis, addentur duo solida nempè solidum ex primo latere in planum propositum, tum solidum ex latere secundo in idem planum, hoc est unicum solidum ex tota radice in planum propositum.

PROPOSITIO LIII.

Theorema.

Si cubus binomiâ radicis affectus sit adjunctione solidi sub quadrato adscitâ congruenter subquadratica longitudine, ille æqualis erit cubo lateris primi + triplo solido ex quadrato primi lateris, in latus secundum + triplo solido à q. secundi in latus primum + cubo lateris secundi + solido à q. lateris primi in assumptam longitudinem + solido à q. lateris secundi in assumptam longitudinem, + duplo solido à plano sublateribus in eamdem coefficientem longitudinem.

Proponatur radix binomia $A + B$. sitque ejus cubus affectus adjunctione solidi sub quadrato v. g. proponatur hæc æquatio 1c. + 10q. clarum est q. radicis binomiæ constare quadratis laterum, & duobus planis sub lateribus, quæ omnia debent multiplicari per 10 longitudinem assumptam, quare hæc affectio præter cubum binomiæ radicis, addet

addet solidum sub quadrato lateris primi, & sub 10. + solidum sub q lateris secundi, & sub 10. + duplo solido ex plano sub lateribus comprehen-

$$A2 + 2AB + B2$$
$$A + B + C$$

$$A3 + 2A2\,B + AB2$$
$$A2B + 2AB2 + B3 \quad CA2 + 2CAB + CB2$$

$$A3 + 3A2B + 3AB2 + B3 + CA2 + 2CAB + CB2$$

so in longitudinem 10. Proponatur ergo quadratum binomiæ radicis quod multiplicetur per radicem auctam longitudine C. producentur solida recensita.

PROPOSITIO LIV.

Theorema.

Qq binomiæ radicis affectum adjunctione plano-plani sub latere, & adscito sub laterali coefficiente solido. Præter solida ex quibus ipse componitur, adjungit duo plano-plana unum ex latere primo in assumptum coefficiens solidum, alterum ex latere secundo in idem coefficiens solidum.

Proponitur qqtum binomiæ radicis, affectum sub radice, ut si occurreret hæc æquatio 1qq + 20 — R. = &c. intelligitur autem in tali casu numerus 20. adscititius esse solidus, quia quantitates, quas multiplicavit radix, ut qq produceret erant solidæ: erant enim illæ omnes, quæ componunt cubum binomiæ radicis: si igitur cubo binomiæ radicis, addas solidum 20, pro quo pones C: & talem cubum & solidum, multiplices per radicem; producentur omnes quantitates quæ componunt

$$A3 + 3A2\,B + 3AB2 + B3 + C$$
$$A + B$$

$$A4 + 3A3\,B + 3A2B2 + AB3 + AC$$
$$A3\,B + 3A2B2 + 3AB3 \quad + \quad B4 + CD$$

$$A4 + 4A3\,B + 6A2B2 + 4AB3 + B4 + AC + BC$$

qq. & præterea duo plano-plana unum ex latere primo, in adjunctum solidum; aliud ex latere secundo, in idem adjunctum solidum.

PROPOSITIO LV.

Si quadratoquadratum binomiæ radicis affectum fuerit, sub cubo affirmatè, illud ex tali affectione præter quantitates ex quibus ipsum componitur, adjunget totidem plano-plana orta ex multiplicatione singularum partium cubi in adjunctam longitudinem.

Ut innotescat meliùs sensus hujus propositionis, quæ vix alioquin intelligetur, proponatur æquatio 1qq + 4c. = &c. numerus 4 intelligitur quasi longitudo, quare si exponeretur cubus binomiæ radicis, multiplicari per radicem auctam numero 4: primò radix multiplicando cubum produceret qq. & numerus 4. multiplicando eundem cubum produceret totidem plano plana, quot sunt quantitates in cubo binomiæ radicis.

$$A3 + 3A2\,B + 3A\,B2, + B3$$
$$A + B + C.$$

$$A4 + 3A3B + 3A2B2 + AB3$$
$$A3B + 3A2B2 + 3AB3 + B4.$$
$$CA3 + 3CA2B + 3CAB2 + CB3$$

$$A4 + 4A3B + 5A2B2 + 4AB3 + B4. \mid + CA3 + 3CA2B + 3CAB2 + CB3$$

PROPOSITIO LVI.

Theorema.

Si quadrato quadratum radicis binomiæ affectum fuerit duplici affectione, unâ sub latere, alterâ sub quadrato, adscitis sub laterali coefficiente solido, & subquadratico coefficiente plano; præter quantitates ex quibus quadrato quadratum componitur, sequentes adjunget, plano planum à quadrato lateris primi in coefficiens planum. + duplo plano plano, à plano sub lateribus in planum coefficiens + plano-plano à quadrato lateris secundi in coefficiens planum + plano-plano à latere primo in coefficiens solidum. + plano-plano à latere secundo in coefficiens solidum.

Proponatur quadratoquadratum affectum duplici affectione, ut si occurrat æquatio 1qq + 10q + 3R. = &c. Primò quidem certum est quadrato quadratum binomiæ radicis seclusâ omni affectione, continere quantitates omnes ex quibus componitur; nempè A4 + 4A3B + 6A2B2, + 4AB3 + B4. Fiat quadratum binomiæ radicis cujus partes multiplicentur per D planum, fient DA2. + 2DAD + DB2; ponatur item radix binomia A & B quæ multiplicetur per 3, seu C, fient CA, CB: 3 autem seu C vocetur solidum, quia radix multiplicando peculiaria solida ex quibus constat cubus, generat quadratoquadratum, ut eadem radix intelligatur multiplicare numerum 3. dicitur 3 esse solidum.

PROPOSITIO LVII.

Theorema.

Supersolidus binomiæ radicis, affectus adjunctione plano plani sub latere, præter quantitates ex quibus componitur, addit plano solidum sub primo latere & plano solidum sub secundo latere.

Proponatur 1. supers. + 5R. dico si intelligatur radix binomia multiplicare quantitates quibus constat qqtum, quibus adjunctum sit plano planum 5. indicatum per C. ex hâc multiplicatione, producentur, non tantùm quantitates ex quibus constat supersolidus; sed etiam planosolidus sub A & C. & plano solidus sub B & C. quæ omnia penetratis terminis difficultatem non habent.

PROPOSITIO LVIII.

Theorema.

Si superſolidus affectus fuerit adjunctione cubi, adſcito ſubcubico coefficiente plano, superſolidus præter quantitates proprias, ex tali affectione acquirit tot planoſolida, quot ſunt partes in cubo quæ multiplicantur per adjunctum planum.

Proponatur radicis binomiæ A ⊹ B ſuperſolidus affectus cubo, adjuncto coefficiente plano, dico præter quantitates ex quibus ſuperſolidus ipſe componitur; addi ex tali affectione planoſolida, quæ orientur ex multiplicatione partium cubi per tale planum adjunctum. Ut ſi proponeretur hæc æquatio 1 ſuperſol. ⊹ 5c. ⟹ &c. clarum eſt ex tali affectione omnes partes cubi multiplicandas eſſe per numerum qui ſignificatur per C. Quare habebimus A_3 c pla. ⊹ $3 A_2 B$ cpl. ⊹ $3 A B_2$ C pl. ⊹ B_3 C pl. dicetur autem C potius planum, quam ſolidum, quia cum ex cubo ad ſuperſolidum ſit unus gradus intermedius, ut fiant quantitates homogeneæ ſuperſolido; non debet fieri multiplicatio per ſimplicem longitudinem, ſed per planum: quod in aliis etiam obſervandum, & hæc obſervatio, quæ meo judicio non eſt magni momenti, totam hanc doctrinam implicat: quamvis authores in ea hujus doctrinæ myſterium reponere videantur.

PROPOSITIO LIX.

Theorema.

Quadratocubus affectus adjunctione ſublateralis plani ſolidi coefficientis, præter quantitates quibus ipſe conſtat, adjungit duo ſolido-ſolida, unum contentum ſub latere primo, & ſub adjuncto plano-ſolido, alterum contentum ſub latere ſecundo & eodem plano-ſolido.

Proponatur hæc æquatio binomiæ radicis 1qc. ⊹ 10R. ⟹ &c. dicetur numerus 10 ſublaterale plano ſolidum, nempè ut multiplicatus per radicem efficiat aliquid quod ſit in eodem gradu cum quadrato-cubo: clarum autem eſt quod ſi radix binomia multiplicet numerum 10, qui intelligitur tanquam planoſolidum, orientur duo ſolidoſolida, unum contentum ſub latere primo, & numero 10. alterum contentum ſub latere ſecundo, & plano ſolido 10. Ergo conſtat propoſitio, nempè eam affectionem addere duo ſolida quantitatibus componentibus quadratocubum.

Geneſis poteſtatum affectarum negatè, ex radice binomia.

Poteſtas affecta negatè ea eſt, cui adjungitur aliquid quod de ipſa negatur, dicitur autem hæc negatio, mulcta.

PROPOSITIO LX.

Theorema.

Quadratum binomiæ radicis affectum mulctâ plani ſub latere, adſcitâ congruenter ſublaterali coefficiente longitudine, æquale eſt omnibus ſuis partibus — plano ex latere primo in coefficientem longitudinem — plano ex latere ſecundo in eamdem coefficientem longitudinem.

Sit 1q. — 5R. dico hanc mulctam detrahere ex uno quadrato: ſcilicet ex quadratis laterum, & rectangulo bis comprehenſo ſub lateribus, duo rectangula, unum comprehenſum ſub latere primo & 5; alterum comprehenſum ſub altero latere & eâdem longitudine 5. id autem quod generatur ex 5 in latus, eſt planum hoc eſt 5. intelligitur per modum longitudinis: ut cum radice efficiat aliquid homogeneum cum quadrato.

Erit igitur quadratum ita affectum æquale ſequentibus quantitatibus nempè ſi 5. denotetur littera C. A_2 ⊹ $2AB$ ⊹ B_2 — AC — BC.

Idem dicendum eſt de aliis poteſtatibus.

Ut ſi proponatur 1c. 3q. iſtud 3 intelligitur tanquam longitudo, quæ multiplicando quadratum binomiæ radicis producit ſolida nempè quatuor, unum comprehenſum ſub quadrato lateris primi & longitudine 3, alterum ſub quadrato lateris ſecundi & ſub longitudine 3. & duo alia ſub rectangulo laterum, & longitudine 3. ita ut ſi 3 longitudo coefficiens ſubquadratica, ſignificetur per literam C. fiat talis cubus A_3 ⊹ $3A_2B$ ⊹ $3AB_2$ ⊹ B_3 — A_2 C — $2ABC$ — B_2C.

In iſta verò 1 c. — 3R. (τὸ 3) intelligitur ut planum ſublaterale, hoc eſt planum quod ſimul cum latere efficit aliquid homogeneum cubo; ſubtrahet autem hæc mulcta duo ſolida, unum ex A in C, & alterum ex B in C.

Aliæ poteſtates hoc modo conſiderari poſſunt, ut affectæ variis mulctis in quibus non eſt ulla difficultas, niſi quæ oritur ex implicatione terminorum.

Eodem modo ratiocinandum eſt, quoties poteſtas efficitur mixtim affirmatè & negatè, in quibus nulla eſt peculiaris difficultas.

PROPOSITIO LXI.

Theorema.

Geneſis poteſtatum avulſarum.

Dicuntur poteſtates avulſæ, quæ à quantitatibus adjunctis ſubtrahuntur: ut 10 R. — 1q. binomia radix ſit A ⊹ B & coefficiens C. ſitque ſuperior quantitas 10R — 1q. & C ſit 10. ita ſcribere poteris AC ⊹ BC — A_2 — $2AB$ — B_2.

Pariter ſi hæc proponeretur 10 R. — 2 c; & eſſet radix binomia A ⊹ B & 10 eſſet C: diceres AC pl. ⊹ BC pl. — $2A_3$ — $6A_2B$ — $6AB_2$ — $2B_3$.

ALGEBRÆ
LIBER SEXTUS.
Extractio Radicum ex potestatibus affectis.

PRÆSVPPOSITIS iis quæ de potestatum generatione superiori libro tradidimus, facilè methodum explicabimus educendi radices ex potestatibus quomodocumque affectis, quod toto hoc libro suscipimus.

PROPOSITIO I.
Problema.

Eductio radicis ex quadrato affecto sub latere.

PRoponatur hæc æquatio solvenda 1q. + 4R. = 96. cujus quæritur radix, certum autem est quod radix in tali casu, non tantum ducitur in seipsam ut generet quadratum, sed etiam ducitur in 4: nam quadratum, rectangulum comprehensum sub radice, & sub 4. æqualia sunt numero 96. Producitur autem hujusmodi potestas affecta sub latere, si radix multiplicet & seipsam, & adjunctam longitudinem, ut si radix sit A + B, ponimus autem quasi esset binomia radix cui adjungatur C: multiplicetur per ipsam radicem A + B producetur enim Aq + 2AB + Bq + AC, + BC, hoc est hæc affectio superaddet partibus ex quibus constat quadratum, rectangulum sub AC, & rectangulum sub BC.

$$\begin{array}{lllll} & & A + B + C & & \\ & & \quad\;\; A + B & & \\ \hline & + AB & + B2 & + BC & \\ A2 & + AB & & & + AC \\ \hline A2 & + 2AB & + B2 & + BC & + AC \end{array}$$

Proponatur æquatio hujusmodi ex qua extrahere debemus radicem quadratam, sitque 1q. + 4R = 1152. Proponatur homogeneum comparationis, nempe Z, separatum, in quo signentur puncta, ut moris est in extractione radicis quadratæ: proponatur item æquatio ut moris est in methodo speciosa A2 + 2AB + B2 + BC + AC = Z solidũ, & per antithesin habebimus 2AB + B2 + BC. = Z sol. — A2 — AC. hæc autem ultima æquatio ostendet praxin inveniendæ radicis. Signatis punctis in Z solido, quære maximum quadratum primi membri 11. is erit 9. cujus radix 3: habebis ergo 900 esse A2. & A esse 30 fiat AC, hoc est multiplica A seu 30. per coefficiens C seu 4. fit 120. qui numerus additus quadrato 900. efficit summam D 1020 nempe A2. & AC hæc subtrahenda est Z id ferentibus signis — nempe — A2 — AC quæ sunt in æquatione, restabit reliquum 132 quod æquale est 2AB + B2 + BC. quæritur B, secundùm scilicet latus, sumatur bis A fiet 60 cui adde C. seu 4 fit 64 divisor qui si dividat 132: invenio quotientem 2; fiat 2AB, B2 & BC. hoc est multiplica 2A seu 60 per B seu 2 fiunt 2AB 120. fiat quadratum quantitatis B seu 2. id erit 4 multiplica item C seu 4. per seu 2. habebis 8. adde hæc omnia exurget summa 132. quæ si subtrahatur ex reliquo 132. nihil relinquitur, quare radix erit 32. præcisè.

Z.	1152	
D.	1020	
Reliquum	132	(32
Divisor	64 A + C	
2AB	120	
B2	4	
BC	8	
Summa	132	

Demonstratio hujus praxis habetur in 51 præcedentis libri.

PROPOSITIO II.
Problema.

Extractio Radicis ex quadrato affecto multâ plani sub radice, & coëfficiente.

Proponatur æquatio 1q — 4R = 896. est quadratum è quo si subtrahas planum sub coëfficiente 4 & radice, restat aliquid æquale numero 896; quæritur radix hujus quadrati; oritur autem hæc potestas ita affecta, si binomia radix affecta mulctâ, multiplicetur per seipsam ut supra vidimus nempe si A + B — C multiplicetur per A + B. Supponatur superior æquatio expressa hoc modo A2 + 2AB + B2 — AC — BC = Z sol. & per antithesin 2AB + B2 — BC = Z sol. + AC — A2. sic enim concepta dabit praxin facilem ad inveniendam radicem. Sit ergo superior æquatio 1q — 4R = 896. sitque homogeneum comparationis Z. quod signetur punctis ut moris est in extractione radicis quadratæ. Maximum quadratum quod reperitur in primo membro, est 4. cujus radix 2. quia tamen illi addi debet AC. sumatur radix paulò major nempe 3 seu 30. fiatque AC seu 120 multiplicando 30 per coëfficiens 4. quod planum AC

 adden

addendum est in indicante signo +. fiat A2. seu quadratum radicis 30 illud erit 900. subtrahendum

Z	896	
AC	120	
Summa	1016	
—A2	900	(32
Reliquum	116	
Divisor 2A —C	56	
2AB	120	
B2	4	
Summa	124	
Subtrahe BC	8	
Restat	116	

cum id dicat signum —, sitque reliquum 116 = 2AB + B—BC. divide 2AB + B — BC per A2 — C. seu 56. & invenio secundùm latus B, esse 2 fiat 2AB 120. adde B2 seu 4. summa erit 124. subtrahe BC seu 8, restabit 116, qui numerus cum sit æqualis reliquo superiori erit radix præcisè 32.

Si homogeneum comparationis haberet radicem trium cyphrarum, quærenda primo essent hac methodo duo prima latera, tum hæc duo per modum unius assumenda ad quærendum tertium.

PROPOSITIO III.

Problema.

Extractio radicis quadratæ, ex plano sub radice, & coefficiente, affecto multâ quadrati.

Proponatur æquatio 80R — 1q = 1344. sit autem hujusmodi affectio si longitudo — Radice multiplicetur per radicem, ut si C — A — B multiplicetur per A + B sitque æquatio AC + BC. — A2 — 2AB — B2 = Z solidum & per antithesin BC — 2AB — B2 = Z sol. — AC + A2. cognoscimus autem in hac æquatione Z sol. seu 1344. & C seu 80. scribatur separatim Z solidum quod

Z sol.	1344	
— AC	1600	
Reliquum —	256	(24
+ A2 +	400	
Residuum	144	
C	80	
— 2A	40	
Divisor	40	
AC	320	
— 2AB	160	
— B2	16	
Residuum	144	

signetur punctis ut moris est, sitque maximum quadratum quod in ejus primo membro reperitur 900. quia tamen subtrahendum est AC. assumatur minor, nempe 400. cujus radix 2. seu 20. scribatur separatim, eritque A = 20. & AC 1600. fiat subtractio restabit — 256. fiat A2. seu 400 addenda, fietque 144. æquale BC — 2AB — B. fiat divisor C — 2A, erit 40, qui quidem ter tantum invenitur in residuo 144. quia tamen minuetur, potest assumi 4. pro B fiat BC 320. Ex quo subtrahe 2AB seu 160. & B2. seu 16 & restabit 144. quod residuum cum æquale sit residuo superiori radix 24. erit exacta.

Totum artificium hujus praxis in eo positum est, ut quæratur numerus quadratus qui subtractus fuerat à duobus planis, sub coëfficiente, & sub duobus lateribus, à quo numero ubi innotuerit extrahitur radix, & additur homogeneo comparationis.

Methodus antiqua est quidem in hoc casu facilior, hæc tamen viam aperit ad solvendas quæstiones, alia methodo insolubiles.

Notandum autem primò in hac specie æquationis hoc modo solvendæ, incidere quam plurimas difficultates, quia quadratum quod subtractum, ex plano sub coefficiente & sub radice comprehenso aliquando majus est homogeneo comparationis, nonnunquam minus ideoque per attentationem res peragenda.

Notandum secundò hujusmodi æquationes duplicem habere radicem, quæ satisfaciat quæstioni; quare si per radicem inventam dividas homogeneum comparationis; quotiens exhibebit aliam radicem; ut si dividas 1344. per 24 quotiens 56 satisfaciet etiam quæstioni, ut suprà demonstravimus eamdem radicem majorem habebimus, si minorem ex coefficiente subtraxerimus, ut subtractis 24 ex 80 remanet 56. quia duæ radices simul æquantur coefficienti.

DE CUBICIS, Æquationibus.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Invenire radicem cubicam, cubi affecti adjunctione solidi sub radice, & coefficiente plano.

Vidimus superiori libro si proponatur æquatio 1c + 4R = 1776. hanc adjunctionem addere cubo binomiæ radicis, præter partes ex quibus componitur cubus, solidum sub coefficiente 4. & sub radice quæ cum sit binomia, dividi potest hoc solidum in duo solida, nempe sub singulis lateribus, & coefficiente comprehensa, quod per multiplicationem manifestum est. Producitur autem hæc affectio, si quadratum binomiæ radicis auctum plano quocumque, ducatur in radicem. Ex quibus deducemus methodum extrahendi radicem cubicam ex cubo ita affecto. Sit ergo æquatio 1c. + 4R. = 1776 expressa methodo speciosa, A3 + 3A2B + 3AB2 + B3. + AC + BC = Z sol. & per antithesin habebitur 3A2 B + 3AB2 + B3 + BC = Z sol. — A3 — AC.

Proponatur homogeneum comparationis seu Z sol. separatum signatum punctis, ut solet in extractione radicis cubicæ. Quæratur cubus primi puncti, nempe 1. seu 100. cujus radix cubica est 1 seu 10. habemus ergo primum latus seu A esse 10 fiat A3. seu cubus 1000 subtrahendus; fiat item AC 40: subtrahe hæc omnia eritque residuum 736 æquale omnibus quantitatibus contrapositis in æquatione quæ possunt dividi per 3A2 + 3A + C ut inveniatur B, habebisque divisorem 334. qui invenitur bis in 736. quare erit B secundùm latus 2. fiant 3A2 B seu 600. & 3AB2

Z sol.

Z sol.	1776.
— A3	1000
— AC	40
Residuum	736 (12
+ 3 A2	300
+ 3 A	30
+ C	4
Divisor	334
+ 3A2 B	600
+ 3A B2	120
+ B3	8
+ BC	8
Summa	736

120. item B3,8.& BC 8 fitque summæ 736 æqualis residuo quare exacta est radix 12.

PROPOSITIO V.

Problema.

Radicem cubicam educere ex cubo affecto multa plani sub radice.

Proponatur æquatio 1c — 6R == 13680. certum est cubum hunc, minui ex tali affectione duobus solidis sub coefficiente, & sub singulis lateribus; est ergo æquatio A3 + 3A2 B + 3AB2 — B3 — AC — BC == Z solidum & per antithesin 3A2B + 3AB2 + B3 — BC == Z sol. + AC — A3 Ex quâ æquatione facilè praxin educendæ radicis cubicæ eliciemus. Proponatur enim separatim homogeneum comparationis; seu Z sol. quod punctis notetur, ut moris est in eductione radicis cubicæ, ut in membra distinguatur.

Z sol.	13680
+ AC	120
— A3	8000
Residuum	5800 (24
+ 3A2	1200
+ 3A	60
— C	6
Divisor	1254
+ 3A2 B	4800
+ 3AB2	960
+ B3	64
— BC	24
Summa	5800

Maximus cubus primi membri est 8000 cujus radix 2 seu 20 scribatur, eritque A == 20 fiat AC seu 120. quod addatur, fiat & A3. 8000 qui cubus subtrahatur, & residuum erit 5800. æquale cæteris quantitatibus contrapositis, nempe 3A2 B + 3AB2 + B3 — BC. divide omnia per 3A2 + 3A — C seu 1254. per quem si dividas 5800. invenies 4 pro secundo latere, quo cognito efficies 3A2 B 4800. & 3AB2 960. & B3, 64. — BC 24. eritque summa 5800 æqualis residuo, bene ergo constituta est radix 24. cum nihil relinquat.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Radicem cubicam extrahere proposito solido sub coefficiente, & radice affecto multa cubi.

Sit æquatio 6468 R. — 1. cubus == 186192. certum est si radix sit binomia à duobus solidis sub lateribus, & sub coefficiente comprehensis, detrahi hujusmodi adjunctione, omnes partes quibus constat cubus, nempe duos cubos laterum tria A2B & tria AB2. Proponatur ergo æquatio secundùm speciosam methodum AC + BC — A3 — 3A2B — 3AB2 — B3 == Z sol. hæc autem oritur si C pl. — A2 — 2AB — B2 nempe minus quadrato binomiæ radicis multiplicetur per radicem A + B. hæc igitur æquatio per antithesin muretur in hanc BC — 3A2B — 3AB2 — B3 == Z sol. + A3 — AC. sic enim exhibet methodum extrahendæ radicis. Scribatur Z sol.

Z sol.	186192
+ A3	27000
Summa	213192
— AC	194040
Residuum	19152 (36
C	6468
— 3A2	2700
— 3A	90
Divisor	3678
BC	38808
— 3A2B	16200
— 3AB2	3240
— B3	216
Residuum	19152

separatim, signeturque punctis secundum morem. Quæratur maximus cubus in primo membro 186 contentus; invenio quidem 125. cujus latus est 5. quia tamen subtrahendæ sunt 6468. R. assumatur tantum 27. & ejus latus 3. & quia in eo videtur esse difficultas quod hujusmodi æquationes sint amphibolæ, homogeneum comparationis triplicatum dividatur per duplum coefficientis, orietur longitudo major minore radice, & minor majore; ut si homogeneum comparationis sit 186192. & triplicatum 558576. si inquam dividatur per duplum coefficientis 6468. seu per 12936. erit quotiens 43. minor ergo radix erit minor quam 43. & major superabit 43. Experiamur an pro primo latere assumere possimus 3 seu 30. cujus cubus A3. 27000 addendus est fiat AC, nempe multiplicando coefficientem seu numerum radicum 6468 per 30. erit AC 194040. subtrahendum, & habebimus residuum 19152. æquale quantitatibus contrapositis in æquatione nempe BC — 3A2 B — 3AB2 — B3. fiat ergo divisor C — 3A2 — 3A. eritque 3678. per quem si dividas residuum 19152. erit quotiens B6. Cognito B, perfice quantitates BC — 3A2 B — 3AB2 — B3. si ex BC subtrahas reliquas, restabit idem residuum 19152. ergo benè assumpta est proposita radix.

Quoties verò aggregatum ex cubo primi lateris, & comparationis homogeneo erit minus solido à coefficiente in primum latus, adhuc facilior erit operatio quæ in exemplo manifesta fiet. Proponatur æquatio 10000 R. — 1c. == 383019. homogeneum

homogeneum multiplicetur fiet 1149057. dividatur per 20000. duplum numeri radicum, erit quotiens 57. major minore radice & minor majore. Erit æquatio ut prius $AC + BC - A3 - 3A2B - 3AB2 - B3 = Z$ sol. potestque per antitheses varias, ita, mutari $AC - A3 - Z$ sol. $= 3A2B + 3AB2 + B3 - BC$. scribatur Z sol. seu comparationis homogeneum signetúrque

AC	600000
— Z sol.	383019
— A3	216000
Residuum	981 (61
+ 3A2	10800
+ 3A	180
— C	10000
divisor	980
+ 3A2 B	10800
+ 3AB2	180
+ B3	1
— C	10000
Residuum	981

punctis. Quæratur maximus cubus in primo membro contentus, invenio 216. seu 216000. cujus radix 60. scribenda fiat A C seu 600000. è quo subtrahe Z sol. & A3. cum id dicant signa — erit residuum 981. æquale cæteris quantitatibus in æquatione positis nempe $3A2B + 3AB + B3 - BC$. fiat divisor $3A2 + 3A - C$. ut invenias B eritque divisor 980. per quem si dividas residuum 981. fit quotiens 1. fiat 3A2B 10800. + 3 A B 2 180. + B 3 1. subtrahe C. 10000 restat residuum 981. æquale priori ergo radix erit 61.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Radicem cubicam extrahere ex cubo affecto sub quadrato.

Proponatur hæc æquatio 1 c. + 10 q. = 21875. certum est hunc cubum continere omnes partes quibus constat cubus binomiæ radicis, & præterea solida comprehensa sub singulis partibus quibus constat quadratum binomiæ radicis, & sub coefficiente. Generatur autem si quadratum

$$\begin{array}{rrrrr} & & A2 + 2AB + B2 & & \\ & & A + B + C & & \\ \hline & & & +A2C + 2ABC & + CB2 \\ & A2B + 2AB2 + B3 & & & \\ A3 + 2A2B + AB2 & & & & \end{array}$$

binomiæ radicis multiplicetur, per radicem auctam coefficienie longitudine; quare habebitur sequens æquatio in qua Z sol. est comparationis homogeneum Z sol. $= A3 + 3A2B + 3AB2 + B3 + A2C + 2ABC + CB2$ & per antithesin $3A3B + 3AB2 + B3 + 2ABC + CB2 = Z$ sol. $- A3 - A2C$. scribatur homogeneum comparationis, notandum punctis ex quo auferatur maximus cubus primi membri, quærendo ejus radicem 20. cujus quadratum 400. multiplicatum per numerum quadratorum 10 efficit A2C 4000. Auferantur hæc omnia ex Z. restat residuum 9875 æquale quantitatibus contraposi-

Z sol.	21875
— A3	8000
— A2C	4000
Residuum	9875 (25
3A2	1200
+ 3A	60
+ 2AC	400
+ C	10
Divisor	1670
+ 3A2B	6000
+ 3A B2	1500
+ B3	125
+ 2ACB	2000
+ CB2	250
Summa	9875

tis ut inveniatur B. fiat divisor $3A2 + 3A + 2AC + C$ inveniesque 1670, per quem si dividas residuum 9875. invenies quotientem 5. neque enim nimis magnum assumere debes propter quantitates addendas. Fiat 3A2 B 6000, & 3AB2 1500. & B3 125. & 2ABC 2000 & CB2 250. summa omnium 9875. æqualis est residuo superiori; ergo radix 25. est præcisa. Quod etiam probare poteris addendo cubum radicis 25, decem quadratis ejusdem.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Radicem cubicam extrahere cubi affecti multâ solidi sub quadrato, & coefficiente.

Proponatur æquatio 1 c — 4q = 10051. sitque radix ejus binomia, certum est cubum ita affectum esse æqualem, cubo lateris primi &c. nempè omnibus partibus quibus constat cubus, minus solidis comprehensis sub coefficiente 4. & singulis partibus quibus constat quadratum binomiæ radicis. Generatur autem talis cubus, si qua-

$$\begin{array}{rrrrr} & & A2 + 2AB + B2 & & \\ & & A + B - C & & \\ \hline & & & -A2C - 2ABC & - CB2 \\ & +A2B + 2AB2 + B3 & & & \\ A3 + 2A2B + AB2 & & & & \end{array}$$

dratum radicis binomiæ multiplicetur per radicem imminutam aliqua longitudine, ut vides in exemplo. Habes ergo sequentem æquationem $A3 + 3A2B + 3AB2 + B3 - A2C - 2ABC - CB2 = Z$ solidum. & per antithesin $3A2B + 3AB2 + B3 - 2ABC - CB2 = Z$ sol. $+ A2C - A3$. Scribatur homogeneum comparationis separatim, & distinguatur punctis. Quæratur maximus cubus primi puncti 10. is erit 8. cujus radix 2. seu 20. invento hoc latere fiat A2 C & addatur, & subtrahatur A3, erit residuum 3651. æquale quantitatibus contrapositis in æquatione, nempe $3A2B + 2AB2 + B3 - 2ABC - CB2$ quæritur autem B. fiat

Z sol.

Z sol.	10051	
+ A2 C	1600	
— A3	8000	(23
Residuum	3651	
+ 3A2	1200	
+ 3A	60	
— 2AC	160	
— C	4	
Divisor	1096	
+ 3A2 B	3600	
+ 3A B2	540	
+ B3	27	
— 2ACB	480	
— CB2	36	
Summa	3651	

ergo divisor 3A2 + 3A — 2AC — C habebis divisorem 1096, per quem si dividas residuum 3651, erit quotiens 3. nempè B quo cognito fiat 3A2 B 3600 + 3AB2 540 + B3 27 — 2ACB 480 — CB2, 36. restabit 3651 æqualis priori residuo: ergo benè inventa est radix 23.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Educere latus cubi ex solido, sub quadrato & coefficiente, affecto multâ cubi.

Proponatur hæc æquatio 100q — 1c = 69632. clarum est quod si binomia sit radix, 100 q seu omnes & singulæ partes quadrati binomiæ radicis centies sumptæ minus omnibus partibus quibus constat cubus binomiæ radicis æquantur homogeneo comparationis. Generatur autem hæc affectio si quadratum binomiæ radicis multiplicetur per coefficientem minus radice: habes igitur æquationem CA2 + 2ABC + CB2 .. A3 — 3A2B — 3AB2 — B3 = Z S. & per antith. aliam 2ABC + CB2 — 3A2 B — 3AB2 — B3 = Z Sol. + A3 — CA2.

A2 + 2AB + B2
C — A — B

Z Sol. = CA2 + 2ABC + CB2 — A3 — 3A2B — 3AB2 — B3

Scribatur separatim homogeneum comparationis, distinctum punctis ex more, quæratur maximus cubus in 69, is quidem esset 64. sed quia aliquid detrahendum est, potetit esse 27. seu 27000. cujus radix est 30. A. Fiat cubus A3 is erit 27000. addendus, fiat CA2 est autem Aq 900. & C est 100. igitur CA2 erit 90000. subtrahendum; eritque residuum 6632, æquale cæteris quantitatibus, nempè 2ABC + CB2 — 3A2 B — 3AB2 — B3. & quæritur B, fiat ergo divisor 2AC + C — 3A2 — 3A habebisque divisorem 3310. per quem si dividas residuum 6632. habebis 2. pro quotiente. Erit igitur B, 2. fiat 2ACB 12000 + CB2 400. — 3A2 B 5400 — 3AB2 360 — 8. fitque summa 6632. æqualis residuo; quare proba est radix 32.

Si plures essent, quàm duo characteres in radice, ad inveniendum tertium, duo priores per

Z Sol.	69632	
+ A3	27000	
— CA2	90000	(32
Residuum	6632	
+ 2AC	6000	
+ C	100	
— 3A2	2700	
— 3A	90	
Divisor	3310	
2ACB	12000	
+ CB2	400	
— 3A2B	5400	
— 3AB2	360	
— B3	8	
Summa	6632	

modum unius assumi deberent, & fieri primum latus repetitis iisdem operationibus.

PROPOSITIO X.

Problema.

Radicem quadratoquadratam qqti affecti adjunctione plano plani sub latere, & coefficiente invenire.

Proponatur æquatio 1 qq + 30 R = 3420091; in qua nempè qqtum afficitur adjunctione plano-plani, sub latere, seu radice, & coefficiente solido nempè 30. quod dicitur esse solidum, ut sit ejusdem rationis, cum aliis quantitatibus, quæ multiplicatæ per radicem, componunt quadratoquadratum. Certum autem est quadratoquadratum binomiæ radicis ita affectum, habere omnes partes quibus constat quadratoquadratum, & insuper ex tali affectione, habere duo solida sub coefficiente, & sub duobus nominibus radicis. Nempè si radix sit A + B, & coefficiens sit C. constabit hoc qdtoqdtum his partibus A4 + 4A3B. + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 + AC + BC. Quare æquatio poterit esse 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4 + BC = Z sol. — A4 — AC ideoque si ex comparationis homogeneo subtrahas A4 & AC, reliquum erit æquale reliquis quantitatibus 4A3 B + 6A2B2 + 4A B3 + B4 + BC. & pro divisore assumes easdem divisas per B.

Ex quo vides praxin hanc esse universalem, & valere pro omnibus potestatibus quomodocumque affectis. Proponatur ergo homogeneum comparationis 3420091. è quo educenda radix qquadrata; scribatur tale homogeneum separatim; tum punctis notetur, relictis tribus sedibus vacuis, atque ita primi membri 342. quæratur maximum quadratoquadratum, id erit 256. cujus radix 40. scribatur in lineola.

Fiat lateris A seu 40. qqtum seu A4, erit 2560000. subtrahendum; fiat item AC, multiplicando A seu 40. per coefficientem 30. eritque AC 1200. utrumque subtrahe propter signa — eritque residuum 858891 æquale reliquis quantitatibus in æquatione positis, nempè 4A3 B + 6A2B2 + 4AB3 + B4 + BC. sit divisor 4A3 + 6A2 + 4A + C, nempè aggregatum harum quantitatum divisarum per B seu 265790. per

Z ppl.	3420091	
—A4	2560000	
—AC	1200	
Residuum	858891	
+ 4A3	256000	(43
+ 6A2	9600	
+ 4A	160	
+ C	30	
Divisor	265790	
+ 4A3B	768000	
+ 6A2B2	86400	
+ 4AB3	4320	
+ B4	81	
+ CB	90	
Summa	858891	

quem numerum, si dividas residuum 858891. invenies B. quotientem seu 3.

Cognito latere secundo B, perfice propositas quantitates quales habes in figura, inveniesque summam æqualem proposito residuo: quare concludes benè constitutam esse radicem 43.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Radicem quadratoquadratam eruere ex quadratoquadrato affecto multâ plani sub coefficiente solido, & radice.

Sit æquatio 1 qq—50R==2416651. certum autem est qqdtum affectum hujusmodi mulcta habere omnes partes quibus constat qqdtum binomiæ radicis — duobus planoplanis sub singulis lateribus radicis, & sub coefficiente 30. Generatur autem talis affectio si cubus imminutus solido aliquo per radicem multiplicetur.

Habebitur enim æquatio A4 + 4A3 B + 6A2B2 + 4AB3 + B4—AC—BC & per antithesin 4A3B+6A2B2+4AB3+B4—BC==Z ppl. + AC—A4.

Z pp.	3416651	
+ AC	2000	
—A4	2560000	(43
Residuum	858651	
4A3	256000	
+ 6A2	9600	
+ 4A	160	
—C	50	
Divisor	265710	
+ 4A3B	768000	
+ 6A2B2	86400	
+ 4AB3	4320	
+ B4	81	
— BC	150	
Summa	858651	

In hac æquatione fundabis praxin inveniendæ radicis, quære qqtum maximum primi membri 341. id erit 256, cujus radix 40. scribe 40 in lineola fiat AC multiplicando 40. per coefficientem 50. habebis 2000, addenda, propter signum + subtrahe A4, 2560000. habebis residuum 858651. æquale reliquis quantitatibus in æquatione positis nempè 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4—BC eritque divisor 4A3+6A2+4A—C seu 265710. per quem si residuum dividas; erit quotiens B, 3. quo cognito fiat 4A3B 768000. + 6A2B2 86400+4AB3 4320+ B481 —BC 150. summa erit 858651. æqualis priori residuo: ergo legitima est radix 43. quam poteris examinare si nempè ex qqto numeri 43. subtrahas productum ex 43. in 50.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Invenire radicem quadratoquadratam, proposito planoplano sub radice binomia, & coefficiente affecto multâ quadratoquadrati ejusdem radicis.

Sit æquatio 1000000R — 1qq ==39581199. sitque radix binomia. Certum est hoc planoplanum sub coefficiente 1000000. & radice, multatum qqto ejusdem radicis esse æquale duobus planoplanis comprehensis sub coefficiente 1000000. & sub partibus propositæ radicis, minus partibus omnibus quadratoquadrati ejusdem radicis. Habetur ergo æquatio posito quod primum nomen radicis sit A. secundum B. C coefficiens comparationis homogeneum Z ppl. erit æquatio AC + BC — A4 — 4A3B — 6A2B2 — 4AB3 — B4 == Z ppl. vel per antithesin BC — 4A3B — 6A2B2 — 4AB3 — B4 == Z ppl. + A4 —AC.

Z ppl.	39581199	
+ A3	2560000	
—AC	40000000	
Residuum	2141199	(43
+ C	1000000	
—4A3	256000	
—6A2	9600	
—4A	160	
Divisor	734240	
+ CB	3000000	
—4A3 B	768000	
—6A2A2	86400	
—4AB3	4320	
— B4	81	
Summa	2141199	

Scribatur comparationis homogeneum separatim signeturque punctis, quæratur maximum quadratoquadratum primi puncti 25600000. cujus radix 40. fiat item AC multiplicando primum latus 40. inventum per C coefficientem 1000000, adde A4 subtrahe AC habebis residuum 2141199. æquale reliquis quantitatibus æquationis nempè BC — 4A3B — 6A2B2 — 4AB3 — B4 fiat divisor B. C — 4A3 — 6A2 — 4A eritque 734240. qui invenitur in residuo ter, scribe ter in quotiente habebisque

que B esse 3. quare CB erit 3000000. — 4A3B 768000. — 6A2B2 86400 — 4AB3 4320 — B4 81. summa æqualis residuo; ergo benè constituta est radix 43.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Invenire Radicem quadrato-quadratam quadrato-quadrati affecti adjunctione plano plani sub cubo, & coefficiente.

Proponatur æquatio 1qq + 10c = 436016. si sit binomia radix, continentur propter hanc notam 1qq. in homogeneo comparationis omnes quantitates ex quibus constat binomiæ radicis qqtum. & propter hanc particulam + 10 c. continet omnes partes, quibus constat cubus binomiæ radicis multiplicatas per 10. scilicèt coefficiens: generatur autem tale qqtum si cubus multiplicetur per radicem auctam coefficiente. Sit unum nomen Radicis A, secundum B, coefficiens C. habebitur hæc æquatio A4 + 4A3 B + 6A2 B2 + 4A23 + B4 + CA3 + 3CA2B + 3CAB2 + CB3 = Z ppl. per antithes. 4A3B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 + 3CA2 B + 3CAB2 + CB3 = Z ppl. — A4, — CA3.

Hâc æquatione educes facilè radicem quadratoquadratam.

Z ppl.	470016	
— CA3	80000	
— A 4	160000	
Residuum	230016	(24
+ 4A3 —	32000	
+ 6A2	2400	
+ 4A	80	
+ 3CA2	12000	
+ 3CA	600	
+ C	10	
Divisor	47090	
+ 4A3 B	128000	
+ 6A2 B2	38400	
+ 4AB3	5120	
+ 3CA2 B	48000	
+ 3CAB2	9600	
+ B4	256	
+ CB3	640	
Summa	230016	

Scribatur homogeneum, distinguatur punctis, quæratur maximum qquadratum primi puncti 47. multò tamen minor sumatur, quia subtrahendum etiam est CA3. sit ergo qqtum 160000. cujus radix 20. scribenda: fiat item CA3. A3 erit 8000. & cum coefficiens sit 10. fiet CA3 80000. subtrahe utrumque propter signa — habebis residuum 230016. æquale cæteris quantitatibus 4A3B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 + 3CA2B + 3CAB2 + CB. Quæritur autem B, quare fiat divisor 4A3 + 6A2 + 4A + 3CA2 + 3CA + C; habebisque divisorem 47090. per quem si dividas residuum 230016. habebis 4. pro quotiente, seu pro secundo latere B; quo cognito perfice cæteras quantitates 4A3 B + 6A2B2 + 4AB3 + B4 + 3CA2 B + 3CAB2 + CB. & fiet summa 230016. quæ cum sit æqualis residuo Radix 24 est legitima.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Educere radicem qquadratam qqti affecti multâ planoplani comprehensi sub cubo, & sub coefficiente.

Proponatur æquatio. 1qq — 10 c. = 193536. quæritur valor radicis. est igitur 193636 qqdtum minus 10 cubis. hoc est ex quaddto si omnes partes cubi multiplicatas per 10. subtrahas, debet restare tale homogeneum. Producitur autem qqdtum ita affectum si cubus binomiæ radicis ducatur in radicem binomiam affectam multa; & facta multiplicatione habebitur æquatio sequens A4 + 4A3 B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 — CA3 — 3CA2 B — 3CAB2 — CB3 = Z ppl. vel 4A3B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 — 3CA2 B — 3CAB2 — CB3 = Z ppl. + CA3 — A4.

Z ppl.	193536	
+ CA3	80000	
— A4	160000	
Residuum	113536	(24
+ 4A3	32000	
+ 6A2	2400	
+ 4A	80	
— 3CA2	12000	
— 3CA	600	
— C	10	
Divisor	21870	

Scribatur homogeneum comparationis, & distinguatur punctis. Quæratur primum latus A, seu primus character est autem maximum qqdtum 16000, cujus latus 20. quo cognito latere, fiat CA3. nempè cubus lateris 20 qui est 8000. multiplicetur per coefficientem C seu 10. addatur CA3 propter signum + & subtrahatur A4. habebis residuum 113536. æquale cæteris quantitatibus in æquatione positis. Ut habeas secundum latus B. assume pro divisore 4A3 + 6A2 + 4A — 3CA2 — 3CA — C; habebisque divisorem 21870. per quem si dividas 113536. erit quidem quotiens 5. sed propter cæteras quantitates assumatur tantum 4. eritque B. 4.

Invento B perficiantur cæteræ quantitates in Æquatione positæ nempè 4A3B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 — 3CA2 B — 3CAB2 — CB3, fiet summa 113536. quæ cum sit æqualis residuo erit radix 24 benè constituta.

+ 4A3 B	128000
+ 6A2B2	38400
+ 4AB3	5120
+ B4	256
— 3CA2 B	48000
— 3CAB2	9600
— CB3	640
Summa	113536

PROPOSITIO XV.

Problema.

Extrahere radicem qqdtam, proposito planoplano sub cubo & coefficiente, multato qqdto binomiæ radicis.

Sit proposita æquatio 80. C − 1qq = 15852159. sitque homogeneum comparationis æquale 80. cubis — 1. qq, hoc est planoplanum sub cubo & coefficiente 80. multatum qqdto; certum est tale planoplanum continere omnes partes cubi ductas in 80, minus omnibus partibus qqdti. Generatur autem tale planoplanum si cubus binomiæ radicis multiplicetur per coefficientem multatum radice binomia; quare factâ multiplicatione habetur hæc æquatio in qua C est coefficiens A & B partes radicis. CA3 + 3CA2 B + 3CAB2 + CB3 — A4 — 4A3 B — 6A2B2 — 4AB3 — B4 = Z ppl. per antith. 3CA2 B + 3CAB2 + CB3 — 4A3 B — 6A2B2 — 4AB3 — B4 = Z ppl. + A4 — CA3. Quare proposito comparationis homogeneo, & punctis distincto, quæres primum latus radicis: seu A latus scilicet maximi qqdti; addes autem A4. seu maximum quadratoquadratum, & subtrahes CA3, seu cubum lateris inventi ducti in coefficientem, habebisque residuum æquale reliquis quantitatibus in æquatione positis. Ut invenias secundum latus B. debes instituere divisionem residui, nempè 3CA2 + 3CA — 4A3 — 6A2 — 4A per quem si dividas residuum, invenies quotientem B invento B perficies omnes quantitates æquationis, quæ simul sumptæ adæquare debent residuum.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Qqtum affectum adjunctione quadrati reducitur ad æquationem quadrati affecti sub radice & coefficiente.

Proponatur æquatio 1 qq + 20 q = 96. dico hanc æquationem reduci ad hanc 1q + 20 R = 96. ita tamen ut numerus qui invenietur sit quadratus, hoc est à radice inventa, sit ulteriùs eruenda radix quadrata.

Nam cum quadratoquadrati radix sit quadratum ipsum, verum erit quod si qqdtum consideretur ut simplex quadratum, quadratum erit ejus radix: ergo verum est quod positâ hâc æquatione 1 qq + 20 q = 96, erit hæc etiam vera 1q + 20 R = 96. intelligendo scilicèt non de radice, quæ est in quæstione, sed de radice quæ sit quadratum radicis quæsitæ, ideoque addidi eruendam esse ulterius radicem quadratam. Ut si posita R 2. verum est qqtum 16. + 20 q seu vigesies 4. æquari 96; verum etiam erit sumendo 16. pro quadrato & quadratum 4. pro radice, quod 1q & 20 R. æquantur 96: sed illa radix non est quæsita, ideoque ulteriùs dixi eruendam radicem.

Idem accidit in aliis casibus ideoque hæc regula generalis dari potest: quoties termini æquationis ita se habent ut eorum exponentes sint arithmeticè proportionales toties resolutio quadratica locum habet ut in hoc exemplo exponentes sunt 4. 2. 0. isti etiam 6. 3. 0. Ut si detur hæc æquatio 1 q c + 10 c = 200. si primus numerus pro simplici quadrato sumatur, ejus radix erit cubus; ergo hæc æquatio legitima erit 1 q + 10 R = 200. sed ex radice ulteriùs eruenda erit radix cubica, hæc enim radix est cubus radicis quæsitæ.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Solutio omnium aliarum æquationum.

Ex superiùs explicatis methodum colligere possumus extrahendi radices ex omnibus potestatibus quomodocumque affectis, possumus enim multiplicare radicem A + B & habere omnes quantitates quibus constant hujusmodi potestates, & consequenter excogitare methodum extrahendi radices, quia autem potestates in infinitum augeri possunt, & usum non habent, ulterius non immorabor.

Ut Tyrones se exerceant præcipuè in speciosa nonnulla exempla ex Vietæ Zeteticis eorum captui accommodata trado.

ALGEBRÆ
LIBER SEPTIMVS.
Exempla secundum methodum speciosæ Algebræ.

PROPOSITIO I.

Problema.

Datâ differentiâ & aggregato laterum, latera invenire.

Sit D 100. aggregatum laterum, B 40. eorum differentia, quæruntur latera seu quod idem est numerum 100, dividere in duos numeros, quorum differentia sit 40, latus minus sit A, latus majus erit A + B, & aggregatum erit 2A + B quod dicitur esse D, ergo habemus æquationem 2A + B = D & per antithesin 2A = D − B, & dividendo A = $\frac{1}{2}$. D − $\frac{1}{2}$. B dimidium D est 50. dimidium B est 20. subtrahe 20. ex 50. restat A esse 30. & consequenter majus latus esse 70.

PROPOSITIO II.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & ratione eorumdem, invenire latera.

Sit data differentia B. 12. ratio laterum ut R 2 ad S 3. invenienda sint latera, seu quod idem est invenire numeros in ratione 2 ad 3, quorum differentia sit 12.

Ponatur minor esse A, major erit A + B quare A ad + B se habebit ut R ad S; quare rectangulum sub mediis æquabitur rectangulo sub extremis. Erit ergo AS = AR + BR; & per antithesin erit æquatio AS − AR = BR. omnibus divisis per S − R, erit æquatio A = $\frac{BR}{S-R}$ quare cum BR sit 24. & S − R. sit 1. dividendo 24. per 1. fit 24 = A. minus latus, & cum majus sit A + B erit 36. quare 12. & 36. satisfaciunt quæstioni.

Vel latus majus esto E, latus minus erit E − B eritque E ad E − B ut S ad R & pariter erit æquatio ER = SE − SB. & per antithesin SB = SE − ER. divide omnia per S − R. restabit $\frac{SB}{S-R}$ = E. SB est 36 S − R est 1. divide 36. per 1. restat 36. pro majori & pro minori E − B, subtrahe B 12. ex 36. restat 24.

PROPOSITIO III.

Problema.

Datâ summâ laterum, & eorumdem ratione latera invenire.

Sit G summa laterum seu 60; sitque ratio ut R 2 ad S 3. invenienda sint latera; seu quod idem est numerus 60, dividendus sit in duos numeros quorum ratio sit ut 2 ad 3.

Latus minus sit A, majus erit G − A, sed dicuntur se habere ut R ad S. ergo planum sub extremis æquatur plano sub medij, erit ergo AS = GR − AR. & per antithesin AS + AR = GR. divide per S + R. erit æquatio A = $\frac{GR}{S+R}$ GR est 120. S + R est 5. divide 120. per 5. erit A minus latus 24, majus G − A 60 − 24 seu 36.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Datis duobus lateribus deficientibus à justo unà cum ratione defectuum, invenire latus justum; seu datis duobus numeris, invenire duos alios in data ratione, qui juncti prioribus eamdem summam faciant.

Sint data duo latera deficientia à justo, hoc est ab eodem, sintque B 76. & D. 4. sitque ratio defectuum ut R, 1. ad S. 4. hoc est numeri illis addendi se habeant ut 1. ad 4. defectus primi sit A, hoc est numerus addendus numero B, ut fiat summa quæsita, sit A, eritque hæc summa B + A. Est autem ut R ad S, ita A ad defectum secundi seu ad numerum, qui addendus est secundo D, ut fiat eadem summa. Fiat ergo ut R ad S, ita A ad $\frac{SA}{R}$ quare D + $\frac{SA}{R}$ = B + A multiplica omnia per R. fiet DR + SA = BR + RA; transfer DR & RA erit SA − RA = BR − DR. divide utrumque per S − R, fiet A = $\frac{BR-DR}{S-R}$. divide ergo BR − DR. seu 72 per S − R seu 3 habebisque 24 = A & consequenter $\frac{SA}{R}$ = 96. & B + A = 100. sicut $\frac{SA}{R}$ + D = 100.

Vel sit summa quæsita A erit A − B defectus primi seu numerus addendus ad B ut fiat A. Pariter A—D erit defectus secundi, est ergo ut R ad S, ita A — B ad A — D; ergo factum sub extremis, æquatur facto sub mediis, quare $SA - SB = AR - RD$. Transferatur SB, & AR, erit $SA - AR = SB - RD$. S — R dividat omnia, erit æquatio $A = \frac{SB-RD}{S-R}$ est autem SB 304. RD 4 ergo SB—RD 300, SR—est 3. divide 300. per 3. erit A 100.

PROPOSITIO V.

Problema.

Datis duobus lateribus excedentibus justum & ratione excessum, invenire latus justum, Seu è datis duobus numeris, duos numeros in data ratione se habentes subtrahere, ita ut eadem summa remaneat.

Sint data latera B 60. & D. 40. Ratio excessuum seu numerorum subtrahendorum sit ut R. 3. S. 1. sit excessus primi A. ergo B — A erit summa illa quæ fiet subtracto illo excessu, seu erit latus justum, cum autem ut R ad S ita excessus primi A ad excessum secundi, is erit $\frac{AS}{R}$ qui si subtrahatur ex secundo, fiatque $D - \frac{AS}{R}$ habebitur eadem summa, habemus ergo æquationem $B - A, = D - \frac{AS}{R}$ ducantur omnia in R. fiet æquatio $RB - AR = DR - AS$ & translatis per antithesin AR & DR; erit $RB - DR = AR - AS$ & dividendo utrumque per R—S erit $A = \frac{RB-DR}{R-S}$. divide ergo RB — DR seu 60 per R—S seu 2, & habebis $A = 30$. & $\frac{AS}{R} = 10$. ita ut B — A faciat 30, sicut $D - \frac{AS}{R}$ facit 30 quod petebatur.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Datis duobus lateribus, uno deficiente à justo, altero justum excedente, unà cum ratione defectûs ad excessum, invenire latus justum.

Sint data duo latera B 60, deficiens à justo, & D 180. excedens justum, ita ut ratio excessûs ad defectum sit ut S. 5. ad R. 1. quæruntur ergo duo numeri in ratione 5. ad 1, quorum primus subtractus à 180, & secundus additus ad 60, eandem summam efficiant.

Defectus sit A ergo B + A erit summa quæ quæritur, est autem defectus ad excessum ut R ad S. fiat ergo ut R ad S. ita A ad $\frac{SA}{R}$ quo sublato ex D, fiet $D - \frac{SA}{R} = B + A$, & omnibus ductis in R, fiet $RD - SA = BR + RA$ & translatis per antithesin SA & BR, fiet æquatio $DR - BR = SA + RA$. cum autem duo plana D—B in R & S+R in A æqualia sint, duæ primæ quantitates poterunt fieri mediæ, eritque S + R ad R sicut D — B ad A. est autem S. 5. & R 1 D — B 120. fiat ergo ut 6 ad 1. ita 120. ad A, eritque A 20. & excessus erit 100. si ergo subtrahas 100 ex 180. restabit 80. si ad 60 addas 20. fiet 80.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Datum latus ita secare, ut præfinita uncia unius segmenti, addita ad præfinitas uncias alterius segmenti, æquent summam præscriptam.

Sit datum latus B seu 60 ita secandum, ut una tertia pars primi segmenti addita quintæ secundi segmenti faciat summam 14. seu H.

Sit tertia pars primi segmenti A. eritque quinta secundi H — A eritque primum segmentum 3A, & secundùm 5H — 5A, addantur hæc simul fiet totum $B = 5H - 2A$ & per antithesin $2A + B = 5H$: & $2A = 5H - B$, est autem H 14. & 5H est 70, B est 60. erit $2A = 10$. seu $A = 5$. minus ergo segmentum erit 15. cujus tertia 5. una cum quinta majoris segmenti 45. quæ est 9. efficiunt 14.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Datum latus ita secare, ut præfinita uncia primi segmenti, multata præfinitis unciis secundi efficiant summam datam.

Sit latus B 84, ita secandum in duo segmenta, ut si tertiam partem primi subtrahas ex quarta secundi fiat H. sit tertia pars primi segmenti A, & ipsum primum segmentum erit 3A. quarta secundi erit H + A, & ipsum secundum segmentum 4A + 4H addantur simul, fient 7A + 4H æquale B & $7A = B - 4H$ divide per 7. erit æquatio $A = \frac{B-4H}{7}$ B autem est 84, minus 4H seu 28. fit 56 divide per 7. fiet $A = 8$. nempe tertia pars primi, & primum 24. secundnm 60. è cujus quarta parte 15, si auferas 8. tertiam partem primi restabunt 7.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Invenire dua latera, quorum differentia sit ea quæ præscribitur, & præfinita uncia unius, adjecta præfinitis unciis alterius æquent summam præscriptam.

Sit differentia laterum seu numerorum inveniendorum B 84. & tertia unius cum quadrante alterius efficiant H 98.

Sit tertia pars minoris numeri A, & ipsum 3A. eritque major 3A + B. Erit tertia pars minoris A, & quarta majoris H — A, & major 4H — 4A, sed idem major erat 3A + B ergo erit æquatio $3A + B = 4H - 4A$. subtrahe 3A erit æquatio $B = 4H - 7A$ & $7A = 4H - B$. divide per 7 erit $A = \frac{4H-B}{7}$; multiplica 98. per 4. fient 392. subtrahe B seu 84. restabit 308, seu 4H — B; divide per 7. fiet $A = 44$. fietque minor 132. cui si addas B 84. erit 216. major: minoris tertia est 44. majoris quadrans 54. summa erit 98.

PROPO

PROPOSITIO X.

Problema.

Invenire duo latera, seu duos numeros quorum differentia sit data, & præfinita uncia unius mulctata præfinitis unciis alterius, determinatam summam efficiant.

Sit B, 12. differentia duorum numerorum: ita ut tertia pars primi numeri mulctata quartâ parte secundi relinquat H9.

Sit tertia pars primi numeri A. eritque primus numerus 3A secundus numerus erit 3A — B si primus supponatur major numerus eritque quadrans ejus $\frac{3A - B}{4}$ mulctetur tertia pars primi, quartâ parte secundi fiet $A - \frac{3A - B}{4} = H$ multiplica omnia per 4. fiet æquatio $4A - 3A + B = 4H$. seu $A + B = 4H$ & $A = 4H - B$, sed 4H est 36. aufer B12. restat $A = 24$: ergo erit primus numerus 72. secundus 3A — B erit 60. cujus quadrans 15. si ergo ex 24. triente primi, subtraxeris 15. quadrantem secundi restabit H seu 9.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Dato rectangulo sub lateribus, & ratione laterum invenire latera, seu invenire duos numeros in data ratione qui in se ducti efficiant numerum propositum.

Sit B planum 20. cujus latera quæruntur, in ratione R 1. ad S. 5. sit majus latus A, quia laterâ se habent ut R ad S. aut si majus ponatur primum ut S ad R, fiat ut S ad R. ita A. ad $\frac{AR}{S}$ erit secundum latus $\frac{AR}{S}$ multiplicetur per A, fiet $\frac{A_2R}{S}$ planum æquale B est ergo æquatio $\frac{A_2R}{S} = B$ multiplicentur per S. fiet $A_2 . R = BS$ (*& per 16. 6.*) poterit R esse prima, & A2 ultima est ergo ut R ad S, ita B ad A2 & quia R est 1. multiplica B 20 per S. seu 5. habebis A2 esse 100. cujus Radix quadrata 10. est A erit ergo aliud latus 2.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Dato rectangulo sub lateribus, & aggregato quadratorum laterum invenire latera, seu invenire duos numeros qui multiplicati datum efficiant numerum, & quorum quadrata efficiant alium datum numerum.

Sit B 20. rectangulum sub lateribus, 104. aggregatum quadratorum duplica 20. fit 40. hunc numerum adde numero 104. habebis 144 quadratum summæ laterum, quæ consequenter erit 12. Subtrahe eundem numerum 40, ex summa quadratorum, restabit 64, quadratum differentiæ quæ erit 8. semidifferentia 4. quæ addita ad 6 semisummam exhibet majus latus 10, & subtracta dat 2. minus latus.

Demonstratio pendet ex Genesi quadrati, ostendimus enim in binomia radice duplum planum sub lateribus, additum summæ quadratorum efficere quadratum aggregati laterum, & subtractum relinquere quadratum differentiæ laterum.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Dato rectangulo sub lateribus, & differentiâ laterum invenire latera.

Sit datum rectangulum sub lateribus B 20. sitque differentia laterum D8. multiplica B 20. per 4. fient 80. adde 64. quadratum differentiæ fiet 144. quadratum aggregati laterum cujus ℞ q est 12. summa laterum, ostendimus enim supra q aggregati — quadrato differentiæ, æquari quadruplo plano sub lateribus, atque adeo q aggregati esse æquale, quadruplo plano sub lateribus + quadrato differentiæ.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Dato rectangulo sub lateribus, & aggregato laterum invenire latera.

Sit datum rectangulum sub lateribus B 20 sitque datum aggregatum laterum D, 12. & invenienda sint latera, fiat quadratum aggregati nempe 144. ex quo subtrahe 80 quadruplum planum sub lateribus, restabit 64. quadratum differentiæ ergo dabitur differentia.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & aggregato quadratorum, invenire latera. Seu invenire duos numeros quorum differentia sit data, & quorum quadrata datam summam efficiant.

Proponatur duo numeri inveniendi, quorum differentia sit 8, & aggregatum quadratorum sit 104. aggregatum quadratorum duplicetur, eritque 208, à quo subtrahatur quadratum differentiæ 8, seu 64. restabit 144. quadratum aggregati laterum seu 12. Nam ostendimus duplum aggregatum quadratorum, æquari quadrato differentiæ, & quadrato aggregati, nam duplum aggregatum quadratorum est 2A2 + 2E2, quadratum aggregati est A2 + 2AE, + E2 quadratum differentiæ A2 — 2AE + E2. adde hæc ultima fiet 2A2 + 2E2.

PROPO

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Dato aggregato laterum, & aggregato quadratorum invenire latera.

Detur aggregatum laterum 12. aggregatum quadratorum 104, duplica aggregatum quadratorum, habebis 208, ſubtrahe 144. quadratum aggregati laterum, reſtabit quadratum differentiæ ſeu 64. & differentia erit 8.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & differentiâ quadratorum invenire latera.

Sit differentia laterum 8. quadratorum 96. divide 96. per 8. habebitur 12. ſumma laterum. Sit enim differentia laterum A—E, differentia quadratorum A2 — E2. hic ultimus dividatur per primum, erit quotiens A + E aggregatum laterum.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Datâ ſummâ laterum, & differentiâ quadratorum invenire latera.

Seu invenire duos numeros quorum ſumma data ſit & quadratorum differentia.

Sint inveniendi numeri quorum ſumma 12. differentia quadratorum 96. divide 96 per 12. & habebis 8. differentia numerorum, cum quâ, & ſummâ invenies numeros 10. & 2.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Dato rectangulo ſub lateribus, & differentiâ quadratorum, invenire latera. Seu invenire numeros, qui multiplicati efficiant datum numerum, ita ut differentia quadratorum ſit data.

Sit datum B 20 planum, ſub lateribus, ſeu productum ex multiplicatione numerorum quæſitorum, ſit etiam data differentia quadratorum D. 96. quæratur primo aggregatum quadratorum, ſitque illud A planum, eritque quadratum ſummæ laterum A pl. + 2 B. & quadratum differentiæ A pl. — 2B.

Vidimus ſupra quadratum differentiæ quadratorum, adjunctum quadrato dupli rectanguli ſub lateribus æquale eſſe quadrato aggregati quadratorum; ſed differentia quadratorum eſt D. Ergo quadratum D2. additum quadrato dupli rectanguli ſeu 4B2, æquale erit quadrato aggregati quadratorum. Eſt igitur 2B 40. cujus quadratum 1600. eſt D 96. cujus quadratum 9216. adjunctum numero 1600 efficit 10816. & extractâ radice quadratâ 104. habebitur ſumma quadratorum. Poſtea cum habeas ſummam quadratorum 104. & differentiam 96. habebis ſingula quadrata: nempe ſi ſemiſummæ 52. addas 48 ſemidifferentiam, fiet majus quadratum 100. & relinquetur minus ſeu 4.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Dato aggregato ex quadratis laterum, & rectangulo ſub lateribus, datoque uno latere, invenire reliquum. Seu dato quocumque numero, & aggregato quadrati illius, & quadrati alterius numeri & rectanguli ſub utroque numero, alium numerum invenire.

Sit datus numerus B2. & aggregatum ex quadrato numeri B, & quadrato alterius numeri, & rectanguli comprehenſi, ſub utroque quod aggregatum ſit 124. innvenire alium numerum.

Sit ille numerus A, eritque B2 + AB, + A2. $=$ D & per antitheſin D — B2 $=$ AB + A2. habemus ergo æquationem communem A2 + AB $=$ D — B2. nam habetur facilè ſimplex comparationis homogeneum.

Poterit alia via iniri, lateri quòd quæritur adjungatur $\frac{1}{2}$ B & ſic auctum ſit A, eritque latus ſeu numerus qui quæritur A — $\frac{1}{2}$ B fiat ejus quadratum illud erit A2 — AB + $\frac{1}{4}$ B2; quadratum vero lateris B eſt B2: fiat item rectangulum ſub B & A — $\frac{1}{2}$ B, illud erit BA — $\frac{1}{2}$ B. addantur ſimul fient A2 + $\frac{1}{4}$ B2 $=$ D & per antitheſin A2 $=$ D — $\frac{1}{4}$. B2. Sed D eſt 124, & $\frac{3}{4}$ B2, eſt 3. quare 121 eſt A2, eritque radix 11. ex qua ſubtrahere debes $\frac{1}{2}$ B ut habeas numerum quæſitum, qui erit 10.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Dato aggregato ex ſumma quadratorum, & rectangulo ſub lateribus, datâ item ſummâ laterum invenire latera.

Seu datâ ſummâ numerorum, & aggregato ex quadratis eorum & rectangulo ſub ipſis comprehenſo invenire numeros.

Sit B 12 ſumma laterum ſeu numerorum, ſit G 124 ſumma conſtans quadratis numerorum, & rectangulo ſub ipſis comprehenſo, quæruntur numeri. Supponatur rectangulum ſub numeris eſſe A, illud adjunctum aggregato ex quadratis numerorum, & rectangulo ſub numeris nempe G, efficiet quadratum ſummæ numerorum, quare A pl. + G æquatur B2 & B2 — G $=$ A pl. ſed B2 eſt 144. ſubtrahe G 124. reſtat 20 pro A plano. Habetur ergo rectangulum ſub numeris nempe 20. & ſumma laterum 12. quare (*per 4. hujus*) dabuntur numeri 2 & 10.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Datâ ſummâ ex quadratis laterum, & rectangulo ſub lateribus, dato item eo rectangulo invenire latera.

Sit data ſumma ex quadratis numerorum quæ ſit B 104. detur item rectangulum ſub lateribus, nempe D 20. Adde 2D ipſi B fiet quadratum aggregati

gregati laterum seu 144. & dabitur summa laterum 12. & (*per* 4.) latera ipsa 2 & 10.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Dato aggregato quadratorum, & eorumdem differentiâ invenire latera.

Sit aggregatum quadratorum B pl. 104. & eorumdem differentia 96. facilè dabuntur quadrata, si semisummæ 52. addas semidifferentiam 48 fiet majus quadratum 100 si eamdem semidifferentiam subtrahas ex semisumma 52. restat 4 quadratum minoris lateris.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Datâ summâ cuborum, & eorumdem differentiâ invenire latera.

Sit data summa cuborum B, solidum 370. & differentia eorumdem D sol. 316. ex semisumma 185. subtrahe semidifferentiam 158. restabit 27. pro minori cubo; adde eamdem fiet 343. pro minori; radices 3 & 7.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datâ differentiâ cuborum, & rectangulo sub lateribus invenire latera.

Sit differentia cuborum B 316. & rectangulum sub lateribus D 21. quæruntur latera. Quadratum differentiæ cuborum, seu B2 adde ad quadruplum cubum rectanguli sub lateribus, ita ut fiat summa B2 + 4D3. habebitur quadratum aggregati cuborum, cujus radix dabit aggregatum cuborum, & cum habeatur differentia, (*per præcedentem*) habebuntur cubi, & consequenter latera.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Dato Aggregato cuborum, & rectangulo sub lateribus invenire latera.

Sit aggregatum cuborum B 370. & rectangulum sub lateribus D 21. subtrahe quadruplum cubum rectanguli seu 4D3. ex B2 restabit quadratum differentiæ cuborum, & consequenter cubi.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & differentiâ cuborum invenire latera. Seu invenire numeros quorum differentia sit data cum differentia cuborum.

Sit data differentia numerorum B6. & differentia cuborum sit etiam data, nempe D solidum 504. Quæratur primò aggregatum laterum, seu summa numerorum; summa laterum sit E, ergo E + B erit duplum majoris lateris, & E — B duplum minoris: fiat utriusque cubus hoc est multiplica E + B per seipsum fiet E2 + 2EB + B2. & iterum multiplicando fiet E3 + 3E2 B + 3EB2 + B3. & cubus lateris E — B est E3 — 3E2 B + 3EB2 — B3. subtrahe unum ab alio ut habeas cuborum differentiam quæ erit 6E2 B + 2B3. & erit octupla D solidi, quia cubi erunt octupli eorum quorum D. est differentia, & dimidia ejus erit 3E2 B + B3 si autem dividas 3E2B per B oritur 3E2. sed 3E est idem quod 4 D solidum — B3. quare $\frac{4D \text{ sol.} - B3}{3B}$ dabit E2. Quare ut ad praxin redeamus 4 D sol. est 2016. & 3 B est 18. B cubus est 216. quem subtrahes ex 2016. & 3 B est 18. B cubus est 216. quem subtrahes ex 2016. restat 1800. divide per 3 B seu 18. restat 100 pro E2. & E 10. E + B erit 16 duplum majoris; est ergo majus latus 8. & E — B est 4. duplum minoris; est ergo minus latus 2. differentia laterum 6. & cuborum 504.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Datâ summa laterum, & summâ cuborum distinguere latera.

Sit summa laterum, seu numerorum qui inquiruntur B 10. summa cuborum sit D. 370. sit laterum differentia E, ergo B + E est duplum majoris, & B — E duplum minoris. Fiat utriusque cubus, eritque eorum summa 2B3 + 6BE2. & hæc summa æqualis 8 D: sunt enim cubi in triplicata ratione laterum & 4D ═ 3BE2 + B3. & per antithesin 4D — B3 ═ 3BE2. & dividendo omnia per 3 B erit $\frac{4D - B3}{3B}$ ═ E2. Quare ut ad praxin redeamus cum 4D sint 1480. & B3 sit 1000. subtractione factâ restat 480. divide per 3 B seu 30 restat 16 ═ E2, & E erit 4 erit B + E, 14 duplum latus majus atque adeo unus numerus 7. & B — E erit 6 duplum minoris, eritque minus 3.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & differentiâ cuborum invenire latera.

Sit B 4 differentia laterum, & differentia cuborum fit D 316. supponatur rectangulum sub lateribus esse A. Clarum est autem positis lateribus E, & O si ab $E3 — O3$. quæ est differentia cuborum auferatur $E3 — 3E2O + 3EO2 — O3$. cubus differentiæ laterum relinquitur $3E2O — 3EO2$. nempe triplum solidum quod fit ex EO, rectangulo sub lateribus in E — O differentiam laterum Aufer ergo ex differentia cuborum D, cubum differentiæ laterum B3. fiet $D — B3$ triplum solidum quod fit ex rectangulo sub lateribus in differentiam laterum, seu cum A ponatur rectangulum sub lateribus, & B differentia laterum 3BA. est ergo æquatio $D — B3 = 3BA$. sed si dividas $\frac{3BA}{3B}$ quotiens erit A; ergo si dividas $\frac{D — B3}{B3}$ relinquetur A rectangulum sub lateribus, nempe 21. & (*per* 13.) latera 7 & 3.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Aliter. Dato aggregato laterum, & aggregato cuborum invenire latera.

Sit G 10 aggregatum laterum, & D 370 aggretum cuborum; oportet distinguere latera. Certum est quod si à cubo aggregati laterum, auferas duos cubos, seu aggregatum cuborum, relinquitur triplum solidum, quod fit ab aggregato laterum, in rectangulum sub lateribus. Ut si detur cubus aggregati laterum $A3 + 3A2E + 3AE2 + E3$. subducto aggregato cuborum A3. & E3 restat $3A2E + 3AE2$. nempe triplum solidum quod fit ex AE rectangulo sub lateribus in aggregatum laterum $A + E$. Si ergo A ponatur rectangulum sub lateribus subtrahe ex G3. D, fiet $G3 — D$ illudque erit triplum solidum quod fit ex G aggregato laterum, in A rectangulum sub lateribus. Quare divide $G3 —$ per 3G restabit A: est ergo æquatio $\frac{G3 — D}{3G} = A$. G3 est 1000. subtrahe D 370. restat 630. divide per 3G, seu 30. fit 21. rectangulum sub lateribus, & (*per* 14.) dantur latera 7 & 3.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Datis duobus solidis, uno ex differentia laterum in differentiam quadratorum, altero quod fit ex aggregato laterum, in aggregatum quadratorum invenire lattera. Seu invenire duos numeros, qui ita se habeant, ut multiplicando eorum differentiam per differentiam quadratorum, fiat determinatus numerus, & ducendo summam numerorum in summam quadratorum fiat alius numerus.

Sit prior numerus B32. & secundus D 272. supponantur latera E & O. erit differentia laterum E — O, differentia quadratorum $E2 — O2$. multiplica unum per aliud fiet $E3 — EO2 — E2O + O3$. qui numerus est æqualis B; divide hunc numerum per E + O. restabit $E2 — 2EO + O2$ seu quadratum differentiæ laterum. Fiat A aggregatum laterum, erit $\frac{B}{A}$ quadratum differentiæ laterum, & dividendo numerum D productum ex aggregato laterum, in summam quadratorum, per A aggregatum laterum, producetur $\frac{D}{A}$ aggregatum, quadratorum: sed duplum aggregatum quadratorum minus quadrato differentiæ laterum efficit quadratum aggregati laterum; quare $\frac{2D — B}{A} = A2$. omnia multiplicentur per A. fiet $2D — B = A3$ sed 2D est 544. aufer B seu 32. restant 512 cujus radix cubica 8. erit summa laterum, ex quibus (*per superiores*) habebis latera.

PROPOSITIO XXXII.

Dato aggregato quadratorum, & ratione rectanguli sub lateribus ad quadratum differentiæ laterum, invenire latera.

Sit B 20 aggregatum quadratorum, ratio autem rectanguli sub lateribus, ad quadratum differentiæ sit ut R2 ad S. 1. quæruntur latera. Sit rectangulum sub lateribus A, & quia est ut R ad S ita rectangulum sub lateribus seu A ad quadratum differentiæ, erit quadratum differentiæ $\frac{SA}{R}$ cui adjungatur duplex planum sub lateribus, fiet $\frac{SA + 2RA}{R}$ fietque aggregatum quadratorum B: fietque analogismus $S + 2R$ ad R, ita B ad A. Sic habebitur rectangulum sub lateribus, ex quo & aliis habebuntur latera.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Datâ mediâ trium proportionalium, & differentia extremarum, invenire extremas.

Sit media 12. & differentia extremarum sit 10. datâ mediâ 12. datur ejus quadratum 144. quod æquale est rectangulo sub extremis, sed dato rectangulo sub extremis seu lateribus, & differentia laterum, (*per* 13. *hujus*) dantur latera seu extremæ, ergo dabuntur extremæ.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Datâ mediâ trium proportionalium & aggregato extremarum, illas distinguere.

Datâ mediâ datur ejus quadratum, & consequenter rectangulum sub extremis, sed superiùs vidimus dato aggregato, & rectangulo sub lateribus inveniri latera.

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Dato perpendiculo trianguli rectanguli, & differentia basis, & hypothenusæ, invenire basin & hypothenusam.

Hoc problema jam solutum est virtualiter; nam datâ

datâ differentiâ laterum, & differentiâ quadratorum, cognoscuntur latera (*per 17. hujus*) sed quadratum perpendiculi est differentia quadratorum basis, & hypothenusæ,& aliunde supponitur data differentia ejusdem basis & hypothenusæ; unde si perpendiculum sit D, differentia basis, & hypothenusæ sit B. & A sit summa basis & hypothenusæ $\frac{D2}{B} = A$ hoc est perpendiculum trianguli rectanguli, medium proportionale est inter differentiam basis, & hypothenusæ, & aggregatum basis & hypothenusæ.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Dato perpendiculo, & aggregato basis, & hypothenusæ distinguere basin, & hypothenusam.

Hoc problema non aliter solvitur ac superius, & in eadem propositione fundatur.

PROPOSITIO XXXVII.

Problema.

Datâ hypothenusâ trianguli rectanguli, & differentiâ laterum circa rectum, invenire latera circa rectum.

Hæc propositio coincidit cum ista, datâ differentiâ laterum, & aggregato quadratorum invenire latera. Nam datâ hypothenusâ, cognoscitur ejus quadratum, quod æquale est aggregato quadratorum; ut si hypothenusa sit D, & B differentia laterum, sitque summa laterum circa rectum A. quare ut vidimus $2D2 - B2 = A2$. Hoc est duplum quadratum hypothenusæ—quadrato differentiæ laterum circa rectum æquatur quadrato summæ eorumdem.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Datâ hypothenusâ trianguli rectanguli, & summâ laterum circa rectum, invenire latera.

Hæc propositio eadem est ac dato aggregato quadratorum, & summa laterum invenire latera. Et vidimus duplum quadratum hypothenusæ minus quadrato aggregati laterum circa rectum, æquari quadrato differentiæ.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Invenire in numeris tres proportionales.

Sint duo quasi latera B & D. se habentia ut numerus ad numerum.

Ponatur ergo prima B, secunda D, tertia $\frac{D2}{B}$ multiplica omnia per B fient adhuc tres proportionales B2, BD, & D2. quod probavimus jam sæpe: nempe rectangulum sub lateribus esse medium proportionale inter quadrata laterum; sit igitur B. 2. D. 3. tertia esset $\frac{9}{2}$. multiplica omnia per 2 fient 4. 6. 9.

PROPOSITIO XL.

Problema.

Triangulum rectangulum in numeris invenire.

Inventis tribus continuè proportionalibus in numeris, hypothenusa fiat aggregatum extremarum, basis differentia inter extremas, & perpendiculum media dupla. Ut si sint tres proportionales 4. 6. 9. sit hypotenusa aggregatum ex primâ, & ultimâ, nempe, 13, basis differentia inter 4 & 9. nempe 5. & perpendiculum media dupla 12. hoc totum demonstratum est supra.

PROPOSITIO XLI.

Problema.

Aliter triangulum rectangulum in numeris constituere.

Idem præstabis si datis duobus lateribus rationalibus B & D. facias tria proportionalia B2, BD & D2. eritque hypothenusa B2 + D2. basis B2 —D2. perpendiculum 2BD.

PROPOSITIO XLII.

Problema.

Dato aggregato quadratorum, trium continuè proportionalium, & unâ extrema, invenire aliam extremam.

Jam ostendimus aggregatum trium quadratorum, mulctatum $\frac{3}{4}$ quadrati unius extremæ, relinquere quadratum compositæ ex semisse illius extremæ, & alia extrema. Ut si sint tres proportionales 4. 6. 9. ex aggregato trium quadratorum seu 133. auferas 12. seu $\frac{3}{4}$ quadrati 16 primæ 4 relinquitur 121. quadratum radicis 11. compositæ ex 9. seu aliâ extremâ, & 2 semisse primæ.

PROPOSITIO XLIII.

Problema.

Dato aggregato quadratorum trium proportionalium & summâ extremarum, extremas distinguere.

Ostendimus quadratum aggregati extremarum, multatum aggregato quadratorum trium proportionalium, æquale esse quadrato mediæ. Ut si positis tribus proportionalibus 1. 2. 4. detur aggregatum quadratorum nempe 21. detur item aggregatum extremarum 1 & 4 seu 5. si ex quadrato ejus 25. subtrahatur 21. summa trium quadratorum, restabit 4 quadratum mediæ. Datâ autem summâ extremarum, & mediâ dantur extremæ.

PROPOSITIO XLIV.

Problema.

Dato aggregato quadratorum trium proportionalium ac media, distinguere extremas.

Ostendimus Aggregatum quadratorum trium proportionalium + quadrato mediæ æquale esse quadrato aggregati extremarum. Ut si aggregato quadratorum 21. addas 4 quadratum mediæ, exurget 25. quadratum aggregati extremarum nempè 5.

PROPOSITIO XLV.

Problema.

Datâ differentiâ extremarum, & differentiâ mediarum, in serie quatuor continuè proportionalium eas invenire.

Hoc problema coincidit cum eo, in quo datâ differentiâ cuborum, & datâ differentiâ laterum, latera invenimus.

Sit enim data differentia extremarum D 7. & differentia mediarum B 2. ita quæruntur ipsæ quatuor quantitates continuè proportionales. Supponatur A esse aggregatum extremarum, cum D sit earum differentia, A + D erit duplum minoris extremæ, A — D erit duplum minoris extremæ; multiplica A + D per A — D. fiet $A2 - D2$ rectangulum quater comprehensum sub extremis. Quare illud rectangulum comprehensum sub extremis erit $\frac{A2 - D2}{4}$. quod si multiplicetur per majorem extremam fiet cubus mediæ majoris; si multiplicetur, per extremam minorem, fiet cubus mediæ minoris, & multiplicatum per differentiam extremarum quæ est D, dat differentiam mediarum cuborum, ut facilè patebit, si pro quatuor proportionalibus sumas A. $\frac{B2}{A}$. $\frac{B3}{A2}$. Ex tali multiplicatione ultimâ fit $\frac{DA2 - D3}{4}$ quæ quantitas æqualis est differentiæ cuborum à mediis, habetur autem differentia mediarum, quæ est 2. cujus si cubus B3. 8: auferatur ex differentia cuborum, relinquetur triplum solidum ex differentia laterum seu mediarum, in rectangulum sub illis. Quare $\frac{DA2 - D3 - 4B3}{4}$ æquale est triplo solido, ex differentia mediarum, in rectangulum sub mediis: sed rectangulum sub mediis, idem est ac rectangulum sub extremis, nempè $\frac{A2 - D2}{4}$. hoc ter sumptum multiplicetur per B, habebimus $\frac{3BA2 - 3BD2}{4}$. Habemus ergo æquationem $\frac{DA2 - D3 - 4B3}{4} = \frac{3BA2 - 3BD2}{4}$. & relicto denominatore erit etiam æquatio $DA2 - D3 - 4B3 = 3BA2 - 3BD2$ & translatis per antithesin fiet $DA2 = D3 + 4B3 + 3BA2 - 3BD2$: transferatur penultimum membrum per antithesin fiet $DA2 - 3BA2 = D3 + 4B3 - 3BD2$. divide omnia per D — 3B. restat $A2 = \frac{D3 + 4B3 - 3BD2}{D - 3B}$; habebitur ergo A aggregatum extremarum, & cum habeatur differentia cognoscentur extremæ.

Est autem D3, 343. & 4B3 32. fiat summa 375. à qua subtrahe 3BD2 294. restat 81. divide per D seu 7 — 3B. seu 6. hoc est per 1. restabit 81 pro A2. quare A aggregatum extremarum erit 9. cui si differentia 7 addatur, fiet 16 duplum majoris, si subtrahatur fiet 2 duplum minoris. sunt ergo major extrema 8. & minor extrema 1. Pariter cum rectangulum contentum sub mediis, æquale sit rectangulo comprehenso sub extremis, habebimus 8 pro tali rectangulo: inveniendi igitur duo numeri, qui multiplicati efficiant 8. & quorum differentia sit 2. quod est facilè.

PROPOSITIO XLVI.

Problema.

Dato aggregato extremarum, & aggregato mediarum in serie quatuor proportionalium eas invenire.

Hoc problema coincidit cum eo in quo priùs, dato aggregato laterum, & aggregato cuborum latera distinximus.

Sit D 9 aggregatum extremarum, & B 6 aggregatum mediarum: supponatur A esse differentia extremarum, eritque B + A duplum majoris extremæ, & D — A duplum minoris extremæ, & multiplicando unam per aliam fit rectangulum quater sub extremis, eritque Dq — Aq, quare si tale rectangulum dividatur per 4. habebitur rectangulum sub extremis nempè $\frac{Dq - Aq}{4}$. sed vidimus quod si multiplicetur per extremam majorem fit cubus mediæ majoris; si per minorem extremam fit cubus mediæ minoris; si per summam extremarum, fit aggregatum cuborum mediarum, est autem tale aggregatum extremarum D. quare $\frac{D3 - DA2}{4}$ erit aggregatum cuborum mediarum; & cum habeatur aggregatum mediarum, habetur cubus aggregati mediarum, nempè B3. à quo si auferas aggregatum cuborum nempe $\frac{D3 - DA2}{4}$ restabit $\frac{4B3 - D3 + DA2}{4}$ quod æquabitur triplo solido, ex aggregato mediarum, in rectangulum sub mediis, quod idem est cum rectangulo sub extremis, nempè $\frac{D2 - A2}{4}$ quod si multiplices per B aggregatum mediarum ter sumptum habebis idem solidum triplum $\frac{3BD2 - 3BA2}{4}$. Habemus ergo æquationem $\frac{4B3 - D3 + DA2}{4} = \frac{3BD2 - 3BA2}{4}$ & abjecto denominatore $4B3 - D3 + DA2 = 3BD2 - 3BA2$. & per antithesin $DA2 + 3BA2 = 3BD2 + D3 - 4B3$. & dividendo omnia per D + 3B. erit æquatio $A2 = \frac{3BD2 + D3 - 4B3}{D + 3B}$ primum membrum est 1458. adde D3 seu 729. fiet 2187. subtrahe 4B3. seu 864. restat 1323. divide per D + 3B seu 27. invenies 49. pro A 2. atque adeò erit 7. differentia extremarum & erunt extremæ 1. & 8. reliquæ facilè ex his habebuntur.

ALGEBRÆ

ALGEBRÆ
LIBER OCTAVUS.
Diophanti Exempla.

Ut meliùs in exemplis superioris doctrinæ praxis appareat, exempla ipsa Diophanti quæ in eo authore non satis clara videntur, ob linguæ Græcæ stylum à nostro communi modo loquendi nonnihil alienum, hic clarè proposita, & præceptis supra explicatis accommodata solvenda suscipimus; sic enim ex ipso quasi fonte totam doctrinam hauriemus. Ejus igitur libros duos, & problemata in iis contenta perstringemus: cætera ex his facilè solventur.

PROBLEMATA LIBRI PRIMI DIOPHANTI.

PROPOSITIO I.

Problema.

Propositum numerum in duos numeros partiri quorum data sit differentia.

Sit numerus 100 dividendus in duos, quorum differentia sit 40.

Ponatur minor 1 R. major erit 1 R ✛ 40. major etiam erit 100 — 1R. ergo datur æquatio 1R ✛ 40 = 100 — 1R. adde per antithesin 1R. fiet æquatio 2R. ✛ 40 = 100. subtrahe 40. fit 2R. = 60. divide per 2. fit æquatio 1R. = 30. est ergo minor 30. major 100 — 30. seu 70.

PROPOSITIO II.

Problema.

Numerum datum in duos partiri qui sint in data ratione.

Sit numerus 60 dividendus in duos, qui sint in ratione tripla. sit minor 1R. major erit 3 R. & major erit etiam 60 — 1R. est ergo æquatio 3R. = 60 — 1R. adde 1R. fiet 4R. = 60. divide per 4. fit 1R. = 15. sunt ergo numeri 15. & 45.

PROPOSITIO III.

Problema.

Propositum numerum dividere in duos quorum unus ad alium datam habeat rationem & insuper certas unitates contineat.

Numerus 80 sit dividendus in duos, quorum major sit minoris triplus & insuper contineat 4 unitates. Sit minor 1R. major erit 3 R. ✛ 4. & erit etiam 80 — 1R. est ergo æquatio 80 — 1R. = 3R. ✛ 4. adde 1 R. fit æquatio 80 = 4R. ✛ 4. subtrahe 4 fit 76 = 4R. divide per 4. fit 19 = 1R: est ergo minor 19. major ejus triplus, & insuper continens 4 unitates erit 61.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Invenire duos numeros in data ratione quorum differentia sit data.

Sint duo numeri inveniendi, quorum major sit quintuplus minoris. & eorum differentia sit 20. sit minor 1R. major 5R. differentia 4R. sed differentia est etiam 20. ergo habemus æquationem 4R. = 20. divide per 4 fiet 1R. = 5. minor numerus, major 25. differentia est 20.

PROPOSITIO V.

Problema.

Propositum numerum in duos partiri ita ut unius tertia pars, & alterius quinta efficiat summam datam.

Sit numerus 100 ita dividendus in duos, ut primi tertia pars, & secundi quinta efficiant 30. Ponatur quinta pars secundi 1R. eritque secundus totus 5R. erit ergo tertia pars primi 30 ✛ 1R. quæ si triplicetur habebitur primus 90 — 3R. addantur simul ij numeri erit eorum summa 90 ✛ 2R. sed eorum summa est etiam 100. cum numerus 100. fuerit divisus in illos numeros; ergo 90 ✛ 2 R. = 100. auferantur 90. erit 2R. = 10. & 1 R. = 5. quinta pars secundi: ergo secundus est 25. tertia pars primi erit 30 — 1 R seu 25. est ergo primus 75. secundus 25. tertia pars primi 25. quinta pars secundi 5. quæ simul efficiunt 30.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Propositum numerum in duos dividere ut unius data pars, alterius datam partem superet determinato numero.

Dividendus sit numerus 100 in duos, ut prioris numeri quadrans sextam partem posterioris superet 20 unitatibus.

Sit quadrans prioris 1R. erit sextans posterioris 1R. — 20. eritque primus 4R. posterior 6R. — 120. fiat eorum summa, hæc erit 10R. — 120. quæ æqualis est numero 100. Cum supponatur numerus 100. divisus in eos numeros: ergo 10R. — 120 = 100 adde 120. fiet 10R. = 220. divide per 10. erit 1R. = 22. est ergo quadrans primi numeri 22, sextans posterioris 22 — 20. seu 2: eritque prior numerus 88. posterior 12.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Ab eodem numero auferre duos datos numeros, ut residui datam servent rationem.

Ab eodem numero qui quæritur, auferre jubeamur 100 & 20. ut majus residuum minoris sit triplum. sit numerus quæsitus 1R. eritque minus residuum 1R. — 100. & majus, quod triplum est, erit 3R. — 300. sed majus residuum est etiam 1R. — 20. quare 3R. — 300. = 1R. — 20: adde 300. fiet æquatio 3R. = 1R. + 280: subtrahe 1R. fiet 2R. = 280. & dividendo 1R. = 140. Ex quo numero si auferas 20. restat 120. si auferas ex eodem 100. restat 40. est autem 120 triplus numeri 40.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Duobus datis, numerum eumdem addere, ita ut eorum summa in data sint ratione.

Jubeamus numeris 100. & 20. eumdem numerum addere, ut major summa minoris sit tripla. Sit numerus addendus 1R. minor summa erit 1R. + 20. cujus major, utpote tripla erit 3R. + 60. sed major summa est etiam 1R. + 100. quare 3R. + 60 = 1R. + 100. subtrahe 1R. & 60. fiet 2R. = 40. & 1R. = 20. fiuntque summæ 120. & 40. quarum major minoris est tripla.

PROPOSITIO IX.

Problema.

A datis duobus numeris subtrahere eumdem numerum, ut residui ad invicem datam habeat rationem.

A numeris 100 & 20. auferendus sit idem numerus, ita ut major residuus ad minorem rationem habeat sextuplam, majorem scilicèt quam sit 100 ad 20. alioquin fiet impossibilis quæstio. Sit numerus quæsitus 1R. eritque minor residuus 20 — 1R & major qui est sextuplus 120 — 6R. sed major residuus est etiam 100 — 1R: datur ergo æquatio nempe 120 — 6R. = 100 — 1R. adde 6R. & subtrahe 100. fiunt 20 = 5R. divide per 5. & erit 4 = 1R. eritque 100 — 4. seu 96. sextuplus numeri 20 — 4. seu 16.

PROPOSITIO X.

Problema.

Eundem numerum quæsitum addere minori numero, & subtrahere ex majore, ut summa residui sit quadrupla.

Sint dati numeri 100 & 20. sitque quærendus numerus, qui additus ad 20. & subtractus ex 100. faciat summam residui quadruplam. Sit hic numerus 1R. eritque residuus 100 — 1R. cujus summa utpote quadrupla est 400 — 4R. sed illa summa est etiam 20 + 1R. est ergo æquatio 400 — 4R = 20 + 1R: subtrahe 20. & adde 4R, fiet æquatio 380 = 5R: divide per 5. fiet 76 = 1R: adde 76 ad 20. fit summa 96. subtrahe 76 ex 100. erit residuus 24. est ergo summa residui quadrupla.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Ab eodem numero quæsito, unum numerum datum addere, alterum subtrahere, ut summa ad residuum datam habeat rationem.

Quæsito numero addendus est numerus 20. & subtrahendus 100. ita ut summa sit residui tripla.

Sit numerus quæsitus 1R. à quo si auferas 100, fit residuus 1R. — 100: summa autem quæ fiet debet esse tripla; erit ergo 3R. — 300: sed illa summa est 1R. + 20. est ergo æquatio 3R. — 300. = 1R + 20: adde 300. & subtrahe 1R fiet æquatio 2R. = 320. & dividendo per 2. erit 1R = 160. cui numero si addas 20. fit summa 180. si subtrahas 100. erit residuus 60: est autem summa residui tripla.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Datum numerum bis in duos numeros dividere, ita ut primus primæ divisionis, ad primum secundæ datam habeat rationem, & secundus secundæ divisionis ad secundum primæ datam habeat rationem.

Numerus 100. dividendus sit bis, ita ut major primæ divisionis sit duplus minoris secundæ divisionis, major vero secundæ, minoris è prima sit triplus. Sit minor secundæ divisionis 1R. major primæ erit 2R. & minor primæ 100 — 2R. & major secundæ illius triplus 300 — 6R. sed tam duo

duo primæ divisionis quam duo secundæ adæquant numerum 100, habemus ergo æquationem duplicem addendo duos numeros primæ divisionis, nempe 2R. & 100 — 2R. adde item numeros secundæ 300 — 6R. & 1R. fietque 300 — 5R $=$ 100. adde 5R. fiet 300 $=$ 5R. + 100: subtrahe 100, fiet 200 $=$ 5R: divide, 1R $=$ 40. est ergo minor secundæ 40. & major 60. major primæ 80 satisfacientes quæstioni.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Datum numerum ter in duos dividere ita ut unus è prima divisione, ad unum è secunda datam habeat rationem, & reliquus è secunda ad unum è tertia datam habeat rationem, & reliquus è tertia, ad reliquum è prima datam habeat rationem.

Numerus 100, sit ter dividendus in duos numeros, ita ut major è prima divisione minoris è secunda sit triplus, major è secunda minoris è tertia sit duplus, major è tertia minoris è prima sit quadruplus.

Incipiamus à minore è tertia qui sit 1R major è secunda erit 2R. eritque minor è secunda 100 — 2R. nam semper in qualibet divisione numerus 100. dividitur. eritque major à prima hujus triplus 300 — 6R. & minor ejusdem divisionis erit 6R. & minor ejusdem divisionis erit 6R — 200. cujus major tertiæ est quadruplus; est ergo 24 R. — 800; cui si addas minorem tertiæ jam primo suppositum seu 1R. fiet summa 25 R. — 800. æqualis 100: adde 800. fiet 25 R $=$ 900: divide fiet 36 $=$ 1R. est ergo minor tertiæ 36. major 64. minor primæ 16. major 84. minor secundæ 28. major 72. satisfacientes quæstioni.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Invenire duos numeros ita ut productus ex eorum multiplicatione ad eorum summam datam habeat rationem.

Quærantur duo numeri, ita ut productus ex eorum multiplicatione eorum summæ sit triplus.

Primus numerus statuatur 1R. secundus potest statui quilibet major quam 3 denominator rationis propositæ. ponatur secundus esse 12 erit summa 1R. + 12. cujus, productus ex eorum multiplicatione triplus est; ille ergo erit 3R. + 36. sed ille etiam est 12 R: est ergo æquatio 3R. + 36 $=$ 12 R: subtrahe 3R. fiet 36 $=$ 9R: divide fiet 1 R. $=$ 4. quare 4 & 12 satisfaciunt quæstioni. summa enim est 16. productus illius triplus est 48.

Sed jam ponatur secundus esse 15. & primus 1R. erit summa 1 R. + 15. cujus productus est triplus, nempe 3R. + 45: sed ille productus est etiam 15 R: est ergo æquatio 3R. + 45 $=$ 15 R: subtrahe 3R. fit 45 $=$ 12 R: divide fiet $3\frac{1}{4}$. sunt ergo numeri satisfacientes quæstioni 15 & $3\frac{1}{4}$. summa est $18\frac{1}{4}$. productus $56\frac{1}{4}$.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Duos numeros invenire, ita ut prior ab altero datum numerum accipiens, ad residuum datam habeat rationem & posterior alium numerum accipiens ad reliquum datam habeat rationem.

Sint quærendi duo numeri qui ita se habeant, ut prior accipiens 30. unitates sit residui duplus, & posterior acceptis à priore 50. unitatibus sit residui triplus.

Ponatur posterior esse 1R. + 30. quare prior erit 2R. — 30. sic enim acceptis 30 unitatibus à posteriore, erit residui duplus: si prior det 50 unitates posteriori, erit reliquus 2R. — 80. cujus posterior est tribus 6R. — 240. Sed idem posterior acceptis 50 est 1 R. + 80. est ergo æquatio 6R. — 240 $=$ 1R. + 80. subtrahe 1R. & adde 240. fit æquatio 5R. $=$ 320. divide per 5. fit 1R. $=$ 64. eritque posterior 64 + 30 seu 94. & prior 128 — 30 seu 98. quare 98. acceptis 30. à posteriore 94. erit 128. & reliquus 64. est ergo prior reliqui duplus.

Pariter secundus 94 acceptis 50. à priore 98. efficit 144. & reliquus 48. est ergo reliqui triplus.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Invenire tres numeros, ita ut bini quinque imperatos faciant numeros

Inveniendi sint tres numeri, ita ut summa primi & secundi sit 20. secundi & tertii 30. tertii & primi 40.

Supponatur primus esse A. secundus E, tertius O

$$\text{Eritque}\quad \left.\begin{aligned} A + E &= 20\\ O + E &= 30\\ A + O &= 40\end{aligned}\right\}$$

Eruntque omnes simul bis, 90. ergo summa erit 45. & quia A & E efficiunt 20. erit O reliquus 25. & cum A & O sint 40 ablato O seu 25. erit A 15. & cum A + E sint 20. erit E 5: sunt ergo numeri A 15. E 5. O. 25. satisfacientes quæstioni.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Invenire quatuor numeros, ita ut terni juncti efficiant imperatos numeros.

Sint inveniendi quatuor numeri, ita ut primorum trium summa sit 20. secundi tertii, & quarti, summa sit 22. tertii, quarti & primi 24. quarti primi & secundi 27. sint ij numeri A, E, O, V.

$$\text{Proponatur ergo}\quad \left.\begin{aligned} A + E + O &= 20\\ E + O + V &= 22\\ O + V + A &= 24\\ V + A + E &= 27\end{aligned}\right\}$$

Erit ergo tripla summa 93. & ipsa summa 31. cum ergo A + E + O sint 20. iis ex summa 31. subtractis

subtractis restat V 11. & cum E + O + V sint 22. iis à 31 subtractis restabit à 9. & cum O+V +A sit 24. subtactis V, 11. & A 9. seu 20. erit O, 4. & Cum AEO sint 20 subtractis A 9. & O 4. seu 13 erit E 7. Habemus ergo A9. E7, O, 4. V. 11. satisfacientes quæstioni.

Requiritur autem ut summæ triens major sit quolibet numero, alioquin incidemus in quæstionem impossibilem.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Invenire tres numeros, ut bini juncti superent reliquum imperato numero.

Sint inveniendi tres numeri ita ut primus & secundus superent tertium 20 unitatibus, secundus & tertius superent primum unitatibus 30. tertius & primus superent secundùm unitatibus 40.

Sint tres numeri A, E, O. Estque

$$A + E = O + 20$$
$$E + O = A + 30$$
$$O + A = E + 40$$

Erit æquatio 2A + 2E + 2O = A + E + O. + 90. & ablatis A + E + O. erit summa omnium 90. & cum A + E = O + 20. adde utrinque O. erit A + E + O = 2O + 20. subtrahe ergo ex summa 90. numerum 20 habebis 70 = 2O. ergo O est 35.

Pariter cum E + O = A + 30. adde A utrinque habebis A + E + O = 2A + 30. subtrahe ergo ex summa 80. numerum 30. restabit 60 = 2A. fit ergo æquatio A = 30. denique cum O + A = E + 40. adde E fiet summa A + E + O = 2E + 40. subtrahe ex summa 90. numerum 40. restat 50. = 2E. & consequenter 25 = E.

Alia praxi idem inveniri potest, ut problema 19 habet.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Invenire 4 numeros, ut terni juncti reliquum superent dato excessu.

Quæruntur quatuor numeri, ita ut primus, secundus, & tertius superent quartum 20 unitatibus; secundus tertius & quartus primum superent 30 unitatibus; tertius quartus & primus secundum superent unitatibus 40. quartus primus & secundus superent tertium 50 unitatibus sint quatuor numeri A, E, O, V.

Eritque æquatio A, + E, + O = V + 20

$$E + O + V = A + 30$$
$$O + V + A = E + 40$$
$$V + A + E = O + 50$$

Est ergo æquatio 3A + 3E + 3O + 3V = + E + O + V + 140 subtrahe A + E, + O + V utrinque erit 2A + 2E + 2O + 2V = 140. & summa omnium est 70: quare cum A + E + O = V + 20. addito utrinque V, erit summa æqualis 2V + 20. hoc est summa 80 — 20 = 2V. Quare V est 30. pariter summa 80 — 30 = 2A est ergo A 25. summa 80 — 40 = 2E, ergo E = 20. summa 80 — 5 = 2O ergo O est 15.

Alio modo potest solvi ut problemate 21.

PROPOSITIO XX

Problema.

Datum numerum ita partiri in tres numeros, ut summa extremi cum medio, ad alium extremum datam habeat rationem.

Proponatur numerus 100. ita dividendus in tres numeros, ut summa primi & secundi sit tripla tertii, & summa secundi & tertii, sit quadrupla primi. Tertius sit 1 R. & cum summa primi & secundi sit tertii tripla erit hæc summa 3R. quare tota summa trium erit 4R. sed hæc est 100. ergo est æquatio 100 = 4R. eritque 1R = 25.

Sit primus A, erit summa secundi & tertii 4A, cum sit quadrupla & tota summa 5A. sed tota summa est 100: quare 100 = 5 A. & A = 20. Primus ergo est 20. tertius 25. & consequenter medius 55. Primi 20 & secundi 55. summa est 75 tripla tertii 25. pariter secundi 55, & tertii 25, summa 80, est quadrupla primi 20.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Invenire tres numeros quorum maximus medium superet minimi parte determinatâ; medius minimum superet maximi parte assignatâ; & minimus dato numero superet datam medii partem.

Quæruntur tres numeri qui ita se habeant, ut maximus superet medium tertia parte minimi, medius superet minimum triente maximi; & minimus superet trientem medii 10 unitatibus.

Ponatur minimus 1R. + 10. cum superet 10. unitatibus trientem medii; eritque medii triens 1R. & medius 3R: medius autem superat minimum triente maximi, superat autem hoc excessu, 2R. — 10: quare maximus erit 6R — 30: sed maximus superat medium triente minimi, superat autem medium 3R. — 30: igitur 3R. — 30 est triens minimi ergo minimus est 9 R. — 90. Sed erat 1R. + 10. est ergo æquatio 1 R. + 10 = 9R. — 90; adde 90. & subtrahe 1R, fiet 100 = 8R: divide erit 1R. = 12 $\frac{1}{2}$. Est ergo minimus 22 $\frac{1}{2}$. medius 37 $\frac{1}{2}$. maximus 6 R. — 30. erit 45.

Idem alio modo perficitur problemate 24.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Invenire tres numeros quorum si quilibet dederit imparatam sui partem sequenti restent æquales.

Quæruntur tres numeri, qui ita se habeant, ut si primus det secundo suam tertiam partem, & secundus tertio quadrantem suum, & tertius primo quintam restent æquales.

Primus ponatur 3R. ut habeat tertiam partem; secundus ponatur 4. unitatum ut habeat quadrantem. Si ergo medius det sui quadrantem tertio, & accipiat trientem à primo, fiet 1R. + 3 cui primus

mus cum dederit suum quadrantem & acceperit quintam partem tertii fiet æqualis, est autem ubi dederit trientem 2R. Aufer ergo 2R ex 1R + 3. restabit 3 — 1R. pro quinta parte tertii; tertius ergo erat 15 — 5R & accipiens à secundo quartam partem seu unam unitatem, & dans primo suam quintam, erit 13 — 4R; erit ergo æqualitas inter hunc tertium 13 — 4R, & secundum 3 + 1R. adde 4 R. & subtrahe 3. fiet æquatio 10 = 5R. divide, erit 1R = 2. quare primus est 6. secundus 4. tertius 5. satisfacientes quæstioni.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Invenire quatuor numeros qui ita se habeant ut si quilibet det sequenti imperatam partem fiant æquales.

Sit imperatum quatuor numeros invenire, qui ita se habeant, ut si primus secundo det trientem, secundus tertio quadrantem, tertius quarto quintam partem, quartus primo sextam partem, post hanc mutuam contributionem fiant æquales.

Ponatur primus 3 R, ut habeat trientem, secundus 4. ut habeat quadrantem, secundus igitur det tertio quartam partem, restabit 3, accipiat à primo trientem fiet 1R + 3. illi autem est æqualis primus postquam dedit trientem & accepit sextam partem quarti, est autem 2 R postquam dedit; si ergo 2R. subtrahas ex 1R + 3. restabit 3 — 1R pro sexta parte quarti, est ergo quartus 18 — 6R. & dando sextam partem primo restat 15 — 5R. augeri autem debet quinta parte tertii & tunc erit æqualis secundo 1R + 3. subtrahe 15 — 5R. ex 1R + 3 restabit 6R — 12 pro quinta parte tertii, eritque tertius integer 30 R — 60, & cum dederit quintam partem restabit 24 R — 48. & accipiendo quadrantem à secundo nempe à 4 erit 24R — 47. & tunc æqualis est secundo 1 R + 3. habemus ergo æquationem 1R + 3 = 24 R — 47. adde 47. subtrahe 1R. restabit 50 = 23R. erit ergo æquatio 1R = $\frac{50}{23}$. eritque primus $\frac{150}{23}$ secundus $\frac{92}{23}$. seu quatuor unitatum, tertius $\frac{120}{23}$. quartus $\frac{114}{23}$. & abjectis denominatoribus 150, 92. 120. & 114. satisfaciunt quæstioni.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Invenire tres numeros, ut quilibet à duobus reliquis conjunctis accipiendo imperatam partem remaneant æquales.

Sint inveniendi tres numeri, qui ita se habeant; ut si primo addatur triens reliquorum simul sumptorum, secundo quadrans primi & tertii, tertio quinta pars primi, & secundi fiant æquales.

Primus numerus potest poni 1R. summa reliquorum, quæ primo dare debet trientem, supponatur esse 3. eritque omnium summa 1R + 3. primus postquam assumpsit trientem reliquorum 1R + 1. Secundus assumat quadrantem reliquorum, & tunc fiet æqualis huic numero 1R + 1: ergo 4R + 4 erit quater secundus cum primo & tertio: est autem primus 1R: quare erit quater secundus cum tertio 3 R. + 4. est autem secundus & tertius semel idem quod 3. quare ter secundus erit 3 R + 1. est ergo secundus 1R + $\frac{1}{3}$.

Debet item tertius assumptâ quintâ parte reliquorum fieri 1R + 3. eritque quinquies, tertius cum duobus reliquis semel 5R + 5. aufer summam secundi, & tertii nempe 3. eritque tertius quater cum primo 5R + 2. aufer primum 1R. erit tertius quater 4R + 2. & diviso per 4. erit tertius 1R + $\frac{1}{2}$. Fiat summa omnium, eritque 3R + $\frac{10}{12}$. conjungantur tres numeri eruntque 1R + 3: est ergo æquatio 3R + $\frac{10}{12}$. = 1R + 3. subtrahe 1R fiet 2R + $\frac{10}{12}$. = 3. subtrahe $\frac{10}{12}$ fiet 2R = 2 $\frac{2}{12}$. & 1R = $\frac{13}{12}$. Quare primus erit $\frac{13}{12}$, secundus qui est 1R + $\frac{1}{3}$. erit $\frac{17}{12}$. & tertius $\frac{19}{12}$: & abjectis denominatoribus erunt numeri 13. 17. & 19. satisfacientes quæstioni.

Eodem modo quæri possunt quatuor numeri, quod fit Problemate 28.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Duobus datis numeris invenire tertium numerum, qui in utrumque ductus quadratum, & ejus radicem quadratam producat.

Proponatur numeri 200. & 5. sitque inveniendus numerus, qui multiplicando utrumque, quadratum, & radicem ejusdem producat. Sit quæsitus numerus 1R qui si multiplicet utrumque efficiat 200 R. & 5 R. eritque 5 R. radix quadrati 200 R. est autem ejus quadratum 25 q habemus ergo æquationem 25 q = 200 R: & quia sunt collaterales fit æquatio 25 R = 200. divide per 25: fit 1 R = 8. quæ multiplicando 200. efficit 1600. & multiplicando 5. efficit ejus radicem 40.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Invenire duos numeros, qui ita se habeant ut productus ex eorum multiplicatione, & summa ipsorum datos efficiant numeros.

Quæruntur duo numeri quorum summa sit 20. productus 96. sit differentia eorum 2R. fiat semisumma, hæc erit 10. huic adde semidifferentiam & detrahe, fient numeri 10 + 1R. & 10 — 1 R. multiplica fiet productus 100 — 1 q. = 96. adde 1q. fiet 100 = 96 + 1q. subtrahe 96. fiet 4 = 1q. & 2 = 1R. suntque numeri 12. & 8.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Invenire duos numeros, ut summa ipsorum & differentia quadratorum datos efficiant numeros.

Quæruntur duo numeri quorum summa sit 20. & intervallum quadratorum si 80. Sit pariter numerorum differentia 2R. erit major 1R + 10 minor 10 — 1R. sic enim eorum summa remanet 20 : fiat utriusque partis quadratum eritque unius, 1q + 20 R + 100. & secundi 1q — 20 R + 100. differentia quadratorum est 40 R, quæ æqualis est 80 : quare 1R est 2. sunt igitur numeri 12. & 8. quadrata sunt 144. 64. differentia eorum 80.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Invenire duos numeros quorum differentia sit data & productus eorum multiplicatione sit etiam datus.

Sint inveniendi duo numeri, quorum differentia sit 4. & productus eorum multiplicatione sit 96. Ponatur eorum summa 2R. semisumma 1R. eritque unus 1R + 2. & alter 1R — 2 multiplicentur fiet productus 1q — 4. est ergo æquatio 1q — 4 = 96. adde 4. fiet 1q = 100. extrahe radicem fiet 1R = 10. & major 12. minor 8.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Invenire duos numeros in data ratione, ut summa quadratorum ad ipsorum summam datam habeat rationem.

Quæruntur duo numeri in ratione tripla, ita ut summa quadratorum sit eorum summæ quintupla.

Sit minor 1R. major 3R. summa 4R. & consequenter summa quadratorum erit 10 R : sed summa quadratorum est 10 q. Quare habemus æquationem 10 R = 10 q. & 10 = 10 R est ergo 1R = 1. minor numerus, major est 6. summa est 8, quadrata 36. & 4. summa 40. quintupla summæ 8.

Eodem modo invenies duos numeros in data ratione ita ut summa quadratorum ad eorum differentiam datam habeat rationem Probl. 36.

Aut differentia quadratorum ad differentiam ipsorum datam habeat rationem Probl. 37.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Invenire duos numeros in data ratione ita ut quadratum minoris ad majorem numerum datam habeat rationem.

Quæruntur numeri in ratione tripla, ita ut quadratum minoris, ad majorem, habeat rationem sextuplam.

Sint numeri 1R, & 3R. eritque minoris quadratum 1 q. volumus autem illud esse sextuplum majoris, seu æquari 18R. est ergo æquatio 1q = 18 R seu 1R = 18. est ergo minor 18. major 54.

Eodem modo invenies numeros in data ratione, ita ut quadratum minoris ad minorem datam habeat rationem; vel ad summam utriusque; vel quadratum minoris ad eorum differentiam datam habeat rationem.

Quod præstant Problem. 39. 40. 41. 42.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Duobus datis numeris alium numerum invenire, ut bini quique conjuncti, & in reliquum multiplicati faciant tres numeros Arithmeticè proportionales.

Sint dati duo numeri 3. & 5. sitque inveniendus tertius, ita ut horum trium bini simul juncti, & per alium multiplicati efficiant numeros arithmeticè proportionales. Sit quæsitus numerus 1R qui jungatur primo, fiet 1R + 3. multiplicetur per 5. fiet primus productus 5R + 15: adde eumdem numero 5. fiet 1R + 5. duc in 3, fiet secundus 3R + 15 : adde 3. & 5 fiet 8. multiplica per 1R. fiet tertius productus 8R. Habemus ergo 8R. 5R. + 15. & 3R. + 15. est autem in numeris arithmeticè proportionalibus summa extremorum æqualis medio duplicato : hoc est 11R + 15 = 10 R + 30. subtrahe 10 R. & 15. restat 1R = 15. quare sunt numeri 3. 5. 15. adde 3. & 5. fiunt 8 multiplica per 15. fiunt 120. adde 5. & 15. fiunt 20. multiplica per 3. erunt 60. adde 3. & 15 erunt 18. multiplica per 5. fiunt 90. sunt igitur numeri 60. 90. 120.

EX DIOPHANTI Libro secundo.

PROPOSITIO I.

Problema.

Invenire duos numeros ut summa ipsorum ad summam quadratorum datam habeat rationem.

Quæruntur duo numeri quorum summa sit decima pars summæ quadratorum. Ponatur minor numerus 1R. major 2R. summa 3R. & ut sit decima pars quadratorum erit summa quadratorum 30 R : sed aliunde quadrata sunt 1q, & 4q, & summa 5q est ergo æquatio 30 R. = 5q & 30 = 5 R. est ergo 1R = 6. minor est 6. major 12. satisfacientes quæstioni.

PROPOSITIO II.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum differentia ad differentiam quadratorum datam habeat rationem.

Sint duo numeri quærendi qui ita se habeant, ut sit eorum differentia sit sexta pars differentiæ quadratorum, sit minor 1R. major 2R differentia numerorum 1R, & consequenter differentia quadratorum sextupla erit 6R. Sed quadrata sunt 1q. & 4q. differentia 3q; quare erit æquatio 3q = 6R.& 3R = 6. Est ergo 1R = 2 minor numerus, major 4. differentia numerorum 2. quadrata sunt 16. & 4. differentia 12, prioris differentiæ sextupla.

PROPOSITIO III.

Problema.

Invenire duos numeros, ut productus ex eorum multiplicatione ad summam ipsorum, vel ad differentiam datam habeat rationem.

Quærantur duo tales numeri ut productus ex eorum multiplicatione ad summam ipsorum rationem habeat sextuplam. Ponantur ii numeri 1R & 2R; possent autem poni in quacumque ratione, erit productus ex eorum multiplicatione 2q summa 3R. & cum productus sit sextuplus, erit æquatio 2q = 18R seu 2R = 18. Erit igitur 1R. 9.& 2R. 18. numeri quæsiti summa 27. productus 162 summæ 27. sextuplus. Eodem modo invenietur productus quamcumque rationem habens ad differentiam.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Invenire duos numeros ita ut aggregatum quadratorum ad eorum differentiam datam habeant rationem.

Quærantur numeri, qui tales sint, ut aggregatum quadratorum, sit decuplum differentiæ eorum; possunt autem numeri esse in datâ ratione. Sint 1R. & 2R. eorum quadrata 1q & 4q. summa est 5q. differentia numerorum est 1R. cujus summa quadratorum est decupla. Est ergo æquatio 5q = 10R. & 5R = 10. & 1R = 2; sunt ergo numeri 2 & 4. differentia 2, cujus summa quadratorum 16 & 4. seu 20. est decupla.

Eodem modo inveniuntur duo numeri, quorum intervallum quadratorum summæ numerorum sit sextuplum quod efficitur Problemate 5.

PROPOSITIO V.

Problema.

Invenire duos numeros quorum differentia sit data, ita ut differentia quadratorum eam superet dato numero.

Sint inveniendi duo numeri, quorum differentia sit 2, & differentia quadratorum superet hanc differentiam 2. viginti unitatibus. Sit minor 1R. major erit 1R. + 2. cum differentia sit 2. quadrata sunt 1q. & 1q + 4R + 4 differentia quadratorum 4R + 4. quæ æquatur 22, ut superet differentiam 2, viginti unitatibus: datur ergo æquatio 4R + 4 = 22. & subtractis 4. 4R = 18. seu 1R. = 4 $\frac{1}{2}$. minor numerus, major 6 $\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Invenire duos numeros qui tales sint ut differentia quadratorum, ad numerorum differentiam sit in data ratione, & superaddat aliquot unitates.

Sint inveniendi duo numeri, qui ita se habeant, ut differentia quadratorum sit tripla differentiæ numerorum, & insuper addat 10. unitates. Sit intervallum numerorum 2. sintque numeri 1R. & 1R + 2. quadrata 1q & 1q + 4R + 4. differentia 4R + 4. differentia numerorum 2. triplicetur fiet 6, addatur 10. fiet 16. Est ergo æquatio 4R + 4 = 16. subtrahe 4. fiet æquatio 4R = 12 & 1R = 3. sunt ergo numeri 3. & 5. quadrata 9.& 25. differentia 16.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Numerum quadratum in duos numeros quadratos dividere.

Sit numerus quadratus 16. dividendus in duos numeros quadratos, clarum est formari triangulum rectangulum, cum quadratum unius lateris fiat æquale duobus quadratis. Assumantur quæcumque duo quadrata uni æqualia verbi gratiâ 9. 16.25. quorum latera sunt 3. 4. 5. dico si fiat ut hypothenusa 5. ad 3. ita hypothen. 4. ad $\frac{12}{5}$. seu 2 $\frac{2}{5}$. si fiat ut 5. ad 4. ita 4. latus quadrati 16. ad $\frac{16}{5}$. seu 3 $\frac{1}{5}$. erunt latera quadratorum quæsitorum $\frac{12}{5}$. & $\frac{16}{5}$. quorum quadrata $\frac{144}{25}$. & $\frac{256}{25}$. æquantur quadrato 16. seu $\frac{400}{25}$.

Idem alio modo præstari potest Ponatur pro primo latere unius quadrati quæsiti 1R. pro secundo quilibet alius numerus, minus tot unitatibus quot sunt in radice propositi quadrati, verbi gratiâ 2R. — 4. fiat utriusque quadratum, habebuntur quadrata 1q. & 4q — 16R. + 16. addantur, simul fient 5q. — 16R. + 16. = 16. addantur 16R. fiet æquatio 5q. + 16. = 16R. + 16. & ablatis 16. erunt 5q. = 16 R. & 5R. = 16. divide erit 1R. = $\frac{16}{5}$. seu 3 $\frac{1}{5}$. & 2R. — 4. erit $\frac{32}{5}$. — 4. seu $\frac{12}{5}$ iidem numeri qui prius.

Experiamur an alio quovis exemplo idem succedat. Ponantur radices duorum numerorum 1R. & 3 R. — 4. fiant quadrata, eruntque 9q. — 24R. + 16. & 1q. addantur simul fient 10q. — 24 R. + 16. quæ volumus æquari numero 16. Est ergo æquatio 16. = 10q. — 24R. + 16. adde 24R. fiet æquatio 24R. + 16. = 10q. + 16.& ablatis 16. 24R. = 10q. & 24. = 10R. & divisis $\frac{24}{10}$. = 1R. seu $\frac{12}{5}$. & 3R. — 4. erunt $\frac{36}{5}$ — 4. seu $\frac{16}{5}$. ut prius.

Supponatur 5R. — 4. pro secundo cujus quadratum 25q. — 40R. + 16. fietque æquatio 26q. — 40R. + 16. = 16. adde 40R. fit æquat. 26q. = 40R. seu 1R. = $\frac{40}{26}$. seu 5R. erunt $\frac{200}{26}$. ex quo $\frac{200}{26}$. subtrahere debes 4 seu $\frac{104}{26}$. restantque $\frac{96}{26}$. sunt autem numerorum $\frac{40}{26}$ & $\frac{96}{26}$. quadrata $\frac{1600}{676}$. & $\frac{9216}{676}$.

quæ ſimul efficiunt ſummam $\frac{10816}{696}$. ſeu 16. ſunt autem radices $\frac{96}{26}$ & $\frac{40}{26}$. ſeu $3\frac{18}{26}$. ſeu $3\frac{9}{13}$. & $1\frac{7}{13}$.

Totum autem Artificium Diophanti in eo conſiſtit, ut vitet radices ſurdas; ſi enim vitandæ non eſſent, quilibet numeri aſſumi poſſent in quos dividi poſſet numerus 16. certum eſt enim, quod numerus 16 æqualis ſit numero 9. & numero 7. nempe quadratis radicum 3. & Rq7. exurgunt autem iſtæ radices ſurdæ, cum ex numeris non quadratis educi debent radices quadratæ; quod vitavit egregie. Poſitis enim radicibus 1R. & 2R. — 4. quia — 4. multiplicando — 4. facit 16. debet autem comparari productus cum quadrato 16. fit æquatio inter quadratum 16. & productum 16. ideoque reſtat ſola æquatio inter numerum quadratorum, & numerum radicum; & quia numeri quadratorum & radicum ſunt collaterales, nulla eſt opus radicum extractione: ergo numeri qui provenient rationales erunt. Idem & eodem modo præſtat in problemate nono.

PROPOSITIO X.

Problema.

Datum numerum ex duobus quadratis compoſitum dividere in duos alios quadratos numeros.

Proponatur numerus 13. compoſitus ex duobus quadratis 4. & 9. dividendus in duos alios numeros quadratos, numerorum autem quadratorum 4. & 9. radices ſunt 2. & 3. ponatur radix primi quadrati quæſiti 1R. + 2 & ſecundi quicumque numerus radicum cum defectu radicis 3. ut 2R. — 3. fiat utriuſque quadratum, erit primum 1q. + 4R. + 4. & ſecundum 4q. — 12R. + 9. addantur fient 5q. — 8R. + 13. quæ æquari volumus numero 13. addantur 8R. fiet æqu. 5q. + 13. + 8R. ſubtrahe 13. erit 5q. $=$ 8R & cum ſint collaterales 5R $=$ 8. & 1R. $= \frac{8}{5}$. eſt igitur radix primi $2\frac{8}{5}$. radix ſecundi $\frac{16}{5}$. — 3. ſeu $\frac{1}{5}$. Sunt ergo radices $\frac{18}{5}$. & $\frac{1}{5}$. quadrata $\frac{324}{25}$. & $\frac{1}{15}$. ſeu ſimul $\frac{325}{25}$. ſeu 13.

Poteſt item fieri ut ſumatur utraque radix cum defectu hoc modo, 1R. — 2. & 2. R. — 3. primum quadr. erit 1q. — 4R. + 4. ſecundum 4q. — 12R. + 9. ſumma 5q. — 16R. + 13. quæ æquari volumus num. 13. eſt ergo æquatio 5q. — 16R. + 13. $=$ 13. & additis 16R. & ſubtractis utrinque 13. erit æquatio 5q. $=$ 16 R. & quia ſunt collaterales 5R. $=$ 16. & diviſione facta erit 1R. $= \frac{16}{5}$. erat primi quadrati radix 1R. — 2: ergo erit $\frac{6}{5}$. & ſecundi 2R. — $3\frac{17}{5}$: ſunt autem quadrata $\frac{36}{25}$. & $\frac{289}{25}$. ſeu $\frac{325}{5}$. idem numerus qui prior, invenimus ergo alia duo quadrata.

Totum pariter artificium in eo poſitum eſt, ut fiat æquatio inter ſolas radices & numerum abſolutum, quod componendo radices ex lateribus priorum quadratorum, cum ſigno defectûs, egregiè præſtatur, quia ſemper adhæret numerus æqualis ſummæ quadratorum 13. Debet autem numerus radicum in quadratis eſſe cum nota defectûs, ut poſſit tranſire in aliam partem comparationis, ideoque vel major radix ponatur cum nota defectûs ut 2R. — 3. vel utraque.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Invenire duo quadrata quorum differentia ſit data.

Sint inveniendi duo numeri quadrati quorum differentia ſit 60. primi quadrati latus ſit 1R. & ſecundi ſit quilibet numerus radicum cum adjunctione quotcumque unitatum, quarum tamen quadratum minus ſit propoſitâ differentiâ 60. Ponatur ergo 1R + 3. cujus quadratum 1q + 6R + 9. & primum quadratum erit 1q. differentia quadratorum eſt 6R + 9 quæ ſupponitur eſſe æqualis numero 60. Habemus ergo æquationem 6R. + 9 $=$ 60. & ſubtractis utrinque 9 erit æquatio 6 R. $=$ 5: & facta diviſione erit 1 R $=$ $8\frac{1}{2}$ & 1 radix primi quadrati. $8\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{17}{2}$ Radix ſecundi $11\frac{1}{2}$. ſeu $\frac{23}{2}$. quadrata $\frac{1529}{4}$. $\frac{1289}{4}$. ſubtrahe unum ab alio ut habeas differentiam, hæc erit $\frac{249}{4}$ ſeu 60. unitates.

Artificium pariter hujus problematis in eo poſitum eſt, ut evitetur extractio radicum; evitatur autem ſi quadratorum factorum differentia contineat tantum radices, unitates, pauciores tamen propoſitâ differentiâ 60; ſic enim reſtabit æqualitas inter ſolas radices, & unitates & per diviſionem dabitur valor unius radicis.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Datis duobus numeris invenire numerum qui ad utrumque additus, efficiat numeros quadratos.

Proponantur numeri 10. & 70. ſitque injunctum quærere unum numerum qui additus ad 10. & 70 efficiat numeros quadratos.

Datis numeris 10. & 70. cognoſcitur eorum differentia 60. quærantur per præcedentem duo numeri quadrati, quorum differentia ſit 60. ii ſunt $\frac{529}{4}$. $\frac{289}{4}$. ſeu $132\frac{1}{4}$. & $72\frac{1}{4}$. ſubtrahe 10. ex minori habebis $62\frac{1}{4}$. dico hunc numerum $62\frac{1}{4}$ eſſe quæſitum. Nempe ſi additur numero 10. efficit quadratum $72\frac{1}{4}$. ſi additur numero 70. efficit quadratum $132\frac{1}{4}$. cum enim duobus numeris idem additur, differentia ſummarum, æqualis eſt differentiæ numerorum; ſed differentia 70 & 10 eſt 60. ergo ſummæ differunt per 60. ſed prima eſt $72\frac{1}{4}$ ergo ſecunda erit $132\frac{1}{4}$ differens à primâ per 60.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

A datis duobus numeris eumdem auferre, ita ut utrumque reſiduum quadratum ſit.

Sint propoſiti duo numeri 9. & 21. à quibus idem numerus auferendus ſit ea lege, ut uterque numerus reſiduus ſit quadratus, numerorum 9. & 21. differentia eſt 12. quærantur (*per* 11.) duo quadrata quorum differentia ſit 12. inveniunturque 4. & 16. ſubtrahe minorem à numero 9. relinquetur 5. dico numerum 5. eſſe numerum quæſitum; nempe qui ſi ex 9. detrahatur relinquit 4. ſi detrahatur ex 21 relinquit 16. eadem probatio adhiberi poteſt.

PROPO

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Ab eodem quæsito numero, auferre duos datos numeros ita ut residui sint quadrati.

Sint propositi duo numeri 5. & 12. subtrahendi ab eodem, eâ lege, ut residui sunt quadrati. Quæritur igitur ille numerus. differentia propositorum numerorum, est 7. quærantur duo quadrata quorum differentia 7, invenientur esse (*per* 11.) 9. & 16. addatur minor numerus majori fiet 21: dico numerum 21. esse quæsitum. Si enim ab eo auferatur minor 5. clarum est restare majus quadratum scilicet 16. Pariter si subtrahatur major restabit numerus cujus differentia à majori quadrato erit æqualis differentiæ numerorum propositorum, sed minus quadratum ita differt à majori: ergo restabit minus quadratum.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Datum numerum in duas partes ita dividere ut addita eidem quadrato faciant duo quadrata.

Sit numerus 20. ita dividendus. Quærantur duo numeri, quorum quadrata simul sumpta minora sint numero 20. sintque numeri 2 & 3. iis addatur 1R ita ut fiant 1R. + 2. & 1R. + 3. quadrata illorum sunt 1q. + 4R. + 4. & 1q. + 6R. + 9. à quibus singulis si abstulero 1q. restabunt quæsiti numeri 4R. + 4. & 6R. + 9. qui juncti sunt æquales numero 20. juncti autem efficiunt summá, 10R. + 13. Habemus ergo æquationem 10R. + 13. = 20. seu 10R. = 7. seu 1R. = $\frac{7}{10}$. & cum una pars numeri 20 sit 4R. + 4. erit 6 $\frac{8}{10}$ 6R. alia + 9. erit 13 $\frac{2}{10}$. seu $\frac{68}{10}$. & $\frac{132}{10}$. hoc est $\frac{680}{100}$. & $\frac{1320}{100}$. quæ junctæ $\frac{49}{100}$. efficiunt numeros $\frac{729}{100}$. & $\frac{1369}{100}$ quorum radices $\frac{27}{10}$. & $\frac{37}{10}$.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Numerum datum ita dividere in duos ut uterque à quadrato detractus, relinquat duo quadrata.

Sit idem numerus 20. ita dividendus, ut utraque pars à quadrato inveniendo detracta, relinquat duo quadrata. Proponatur 1R. cum tot unitatibus ut earum quadratum minus sit numero 20: ponatur 2. unitates, ut sit radix 1R. + 2. cujus quadratum 1q. + 4R. + 4. si auferas 4R. + 4 restabit quadratum seu 1q: Ab eodem quadrato 1q. + 4R. + 4 aufer 2R. + 3. relinquitur etiam quadratum 1q. + 2R. + 1. nempe quadratum hujus radicis 1R. + 1. Statuantur ergo istæ partes 4R. + 4. & 2R. + 3. quæ sint partes numeri 20: addantur simul efficient 6R. + 3. = 20. eritque 1R. = $\frac{17}{6}$. & partes $\frac{92}{6}$. & $\frac{46}{6}$. quadrati radix erat 1R. + 2. seu $\frac{29}{6}$. cujus quadratum $\frac{841}{36}$. satisfacit quæstioni.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Invenire numeros in data ratione qui additi dato numero quadrato faciant quadrata.

Major numerus debeat esse minoris triplus, & additi ad quadratum 9. facere debeant quadrata. Ponatur numerus reliquis quadratus ortus à quacumque radice aucta numero 3. verbi gratiâ 1R. + 3. quadratum ejus erit 1q. + 6R. + 9. ab eo aufer 9. & 1q. + 6R. fit minor numerus quæsitus & consequenter major erit 3q. + 18R. cum sit minoris triplus cui si addatur 9. debet fieri numerus quadratus, hoc est numerus 3q. + 18R. + 9. qui debet esse quadratus ut satisfaciat quæstioni. Quod ut præstare possimus, fingo quadr. à 2R. — 3. erit autem 4q. — 12R. + 9. qui ponatur æqualis num. 3q. + 18R. + 9 aufer 9. & 3q restat 18R. = 1q. — 12R. adde 12R. fiet æquatio 1q. = 30R seu 1R. = 30. cum sint collaterales. Minor ergo numerus qui erat 1q. + 6R. erit 1080. major vero 3q. + 18R. erit 3240. quibus si addas 9. fient numeri quadrati 1089. & 3249 quorum radices 33. & 57.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Invenire tres numeros, qui ita se habeant, ut si unusquisque sequenti partem imperatam tribuat, & super datum numerum, restent æquales.

Quærantur tres numeri, qui ita se habeant; ut si primus det secundo suam quintam partem; & præterea 6. unitates: Secundus det tertio sextam & 7. unitates; tertius det primo septimam partem & 8. unitates, acceptis omnibus & datis fiat æqualitas.

Ponatur primus 5 R. ut habeat quintam partem, & secundus sit 6R. accipiens autem à primo quintam partem, & 6. unitates, fit 7R. + 6. & dans tertio sextam partem & septem unitates, restat 6R. — 1. & huic numero reliqui sunt æquales. Primus postquam dedit secundo suam quintam + 6. 4R. — 6. deberet autem esse æqualis secundo, si nempe accipiat septimam partem tertii & 8. unitates, ut fiat æqualis, desunt illi 2R. + 5. quare 2R. + 5. sunt septima pars tertii, & præterea octo unitates; aufer ergo octo unitates habebis 2R. — 3. septimam partem tertii. Est ergo tertius 14R. — 21: accipiat à medio 6 R. sextam partem & 7. unitates fiet 15R. — 14. det etiam septimam partem & 8. unitates restabit 13R. — 19. qui æqualis esse debet numero 6R. — 1. habemus ergo æquationem 13R. — 19. = 6R. — 1. adde 19. fit æquatio 13R. = 6R. + 18. seu 7R. = 18. seu 1R. = $\frac{18}{7}$. Primus ergo est $\frac{90}{7}$. secundus $\frac{108}{7}$. tertius $\frac{105}{7}$.

Eodem modo dividere possumus in tres numeros easdem conditiones habentes, quod præstat problema 19.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Invenire tria quadrata, ita ſe habentia ut differentia maximi & medii, ad differentiam minimi & medij datam habeat rationem.

Quæruntur tria quadrata, quæ ita ſe habeant; ut differentia maximi, & medii, ſit tripla differentiæ medii, & minimi.

Ponatur 1R. radix primi & conſequenter primum ſit 1q, ſecundi radix ponatur 1R. + 1. ſitque ejus quadratum 1q. + 2R. + 1. differentia inter utrumque quadratum erit 2R. + 1. Quare maximum quadratum erit 1q. + 8R. + 4. ut nempe differentia inter illud & medium, ſit tripla.

Fingatur quadratum quod maximè accedat ad hoc, v. g. quadratum 1q. + 6R. + 9 quod ſupponatur æquale quadrato maximo 1q. + 8R. + 4. = 1q. + 6R. + 9. aufer 1q. habebis 8R. + 4. = 6R. + 9. aufer 4. & 6R. habebis 2R. = 5. & 1R = 2 $\frac{1}{2}$: quare erit 1q. $\frac{25}{4}$ ſeu 6 $\frac{1}{4}$. itém 8R. = 20. Erit igitur maximum quadratum 30 $\frac{1}{4}$. minimum 6 $\frac{1}{4}$. medium 12 $\frac{1}{4}$. differentia minimi & medii 6. medii & maximi 18.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum quilibet adjectus alterius quadrato faciat quadratum.

Sit primus 1R. ſi ſecundus ponatur 2R. + 1. certe additus priores quadrato faciet quadratum. Summa enim 1q + 2R. + 1. eſt numerus quadratus cujus radix 1R. + 1. Supereſt ut quadratum ſecundi, cum primo faciat quadratum. Eſt autem quadratum ſecundi 4q + 4R. + 1. & adjecto primo 4q. + 5R. + 1. formo quadratum proximum nempe à 2R. — 2. ſcilicet 4q — 8R. + 4, quod volo eſſe æquale 4q. + 5R. + 1. = 4q — 8R. + 4. aufer 4. q. & 1. fiet æquatio 5R. = 3. — 8R : adde 8R : habebis 13R. = 3. & 1R. = $\frac{3}{13}$. cætera ſunt facilia.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum quilibet ab alterius quadrato ſubtractus, faciat quadratum.

Inveniendi ſint duo numeri, qui ita ſe habeant, ut dempto uno ab alterius quadrato, remaneat quadratum. Sit minor 1R. + 1 cujus quadratum 1q. + 2R. + 1. ſi ſecundus ponatur 2R. + 1. ſecundus ſubtractus ex quadrato primi relinquet quadratum nempe 1q. Nũc reſtat ut majoris quadratum dempto primo relinquat quadratum. Eſt autem ſecundi quadratum 4q. + 4R + 1. deme primum relinquitur 4q. + 3R. Fiat quodcumque quadr. v. g. à 3R erit 9q. quod ſit æquale 4q + 3R. = 9q. ſubtrahe 4q. eritque 3R. = 5q. & 1R. = $\frac{3}{5}$. minor $\frac{8}{5}$. major $\frac{11}{5}$.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Invenire duos numeros ut utriuſque quadratum additum illorum ſumma, faciat quadratum.

Quæruntur duo numeri, qui tales ſint, ut utriuſque quadratum additum eorum ſummæ quadratum efficiat. Ponatur primus 1R. & ſecundus 1R. + 1. ſic enim quadratum minoris additum ſummæ illorum quæ eſt 2R. + 1. quadratum efficiet 1q. + 2R. + 1. ſupereſt ut quadratum majoris 1q. + 2R. + 1, ſimul cum utroque numero, ſit quadratum: hoc eſt numerus 1q. + 4R. + 2 ſit quadratus: ut hoc fiat; formetur quadratum ex 1R. — 2. id erit 1q. — 4R. + 4. fiat æquatio 1q. + 4R. + 2. = 1q — 4R. + 4. ſubtrahe 1q. & 2. & adde 4R. fiet 8R. = 2. & 1R. = $\frac{2}{8}$. minor ergo erit $\frac{2}{8}$. major 1 $\frac{2}{8}$. ſeu $\frac{10}{8}$.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Invenire duos numeros, à quorum quadratis ſubtracta ſumma faciat quadrata.

Sit minor 1R. & major 1R. + 1. ſic enim à majoris quadrato 1q + 2R. + 1. dempta eorum ſummâ, remanet 1q. reſtat ut ſubtracta numerorum ſummâ, ex minoris quadrato, reliquum fiat quadratum. Eſt autem minoris quadratum 1q. ex quo ſi ſubtrahas numerorum ſummam, ſit 1q — 2R. — 1. qui quadratus eſſe debet. Formetur quadratum ab 1 R. — 3. fiet enim quadratum deficiens in radicibus, abundans in unitatibus, nempe 1q. — 6R. + 9. hoc ponamus eſſe æquale ſuperiori 1 q. — 2R. — 1. = 1 q. — 6R. + 9. ſubtrahe 1q. adde 6R. & 1. fiet æquatio 4R. = 10. & 1R. = $\frac{10}{4}$ ſeu 2 $\frac{1}{2}$ erit ergo minor 2 $\frac{1}{2}$ major 3 $\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum quilibet additus quadrato ſumma, quadratum efficiat.

Sit ſumma numerorum 1 R. ejus quadratum 1q. ſintque numeri 3 q. & 8 q. Sic enim additi ad quadratum ſummæ, quadratum efficiunt nempe 4q. & 9q. Sed ſi numeri ſint 8 q. & 3q. ſumma erit 11 q. & quadratum ejus 121 qq : ſed quadrratum ſummæ ponebatur 1q : ergo eſt æquatio 121 qq. & 1. q. & quia ſunt collaterales, erit æqu. 121 q. = 1 & diviſis omnibus per 121 erit 1q. = $\frac{1}{121}$ numeri $\frac{3}{121}$. $\frac{8}{121}$. quadratum ſummæ $\frac{121}{14641}$.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Invenire duos numeros quorum quilibet subtractus à quadrato summa, relinquat quadratum.

Primò subtrahantur duo numeri à quolibet quadrato, ita ut relinquantur duo quadrata; verbi gratiâ, proponatur numerus 9. à quo subtrahendo 5. relinquitur 4. & subtrahendo 8. relinquitur 1. Deinde supponatur summa numerorum 3R. ut fiat ejus qtum 9q. sitque primus numerus 8q. & secundus 5q: ita enim fiet ut quolibet sublato ex 9q. remaneat qtum. Habemus ergo summam numerorum 13q. cujus qqtum 169. qq. æquale est 9q. Quare 169qq. $=$ 9q. & quia sunt potestates collaterales 169 q $=$ 9 & 1q. $= \frac{9}{169}$. Unde concludam primum numerum esse $\frac{72}{169}$ & secundum $\frac{45}{169}$, summam eorum $\frac{117}{169}$, & summæ qtum $\frac{13689}{28561}$.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Invenire duos numeros ut productus ex eorum multiplicatione, addito quolibet eorum, faciat quadratum, & amborum quadratorum radices faciant datum numerum.

Quæruntur duo numeri, qui seorsim additi ad productum ex eorum multiplicatione faciant quadrata, & radices horum quadratorum efficiant datum numerum reg. 6.

A.	B.	C.	D.
4.	15.	1.	60.

Primò opus est tali Lemmate; si dentur duo numeri A, & B. desit autem unitas C numero B, ut sit planus similis numero A: dico productum ex A in B additum ipsi A. esse quadratum. Nam cum A & B + C, sint plani similes, productus ex A in B & C. est quadratus; hic autem productus æqualis est producto ex A in B & producto ex A in unitatem C (*per primam secundi*) seu ipsi A cum unitas nihil immutet; ergo productus ex A in B additus ipsi A est quadratus.

Ponamus ergo numerum minorem esse 1R. & majorem 4R. — 1. fiat productus eorum multiplicatione ille erit 4q. — 1R. cui si addas 1R. fiet quadratum 4q. Necessarium item est ut idem productus 4q. — 1R. addito majore 4R. — 1. hoc est 4q. + 3R. — 1. sit quadratum cujus radix sit 6 — latere prioris quadrati 4q. seu 6. — 2R. quadratum autem hujus radicis 6 — 2R. est 4q. — 24R. + 36. ergo habemus æquationem 4q. + 3R. — 1. $=$ 4q. — 24R. + 36: subtrahe 4q. adde 1. & 24R. fiet æquatio 27. R. $=$ 37. ergo 1R. $= \frac{37}{27}$. ideoque minor, major $\frac{121}{27}$.

Eodem artificio invenies duos numeros qui ita se habeant, ut detracti ex producto eorum multiplicatione relinquant duo quadrata: quorum duæ radices adæquent propositum numerum ut problemate 28.

Atque hæc sufficiant ut Tyro se exercere possit, & intelligat Diophantum. Qui plura volet assumat ipsum Diophantum, quem ex præsuppositis fundamentis percurret facilè.

HYPOTHESIS CARTESIANÆ. REFVTATIO.

ELEMENTIS Mathematicarum disciplinarum, Codicem principia Philosophiæ præcipua continentem, inter Manuscripta auctoris inventum, addendum censuimus. Mole quidem ille, at non item rebus exiguus est; in eo enim leve momentum esse non potest quod semen est. Quæ sit certè principiorum vis ex ea Philosophus intelligendum esse pronuntiat, quod quidquid in illis peccatur, utcumque tenuè initio visum fuerit, in progressu apparet esse gravissimum.

PROPOSITIO I.

Quid ex hac communi notione Ego cogito, *concludatur contra Cartesianam Philosophiam.*

Non equidem singula Cartesianæ philosophiæ placita examinanda suscipio, solam scilicet physicam in hoc opere perpendens. Unum tamen aut alterum ex principiis cognitionis humanæ, à quibus omnem vult inchoari scientiam, præterire non possum; ex quibus facilius mihi fuerit contraria principia statuere, quam ipsi suam hypothesin stabilire.

Vult ergo hanc ordine primam cognitionem esse, *Ego cogito, ergo sum.* Cognitionis autem nomine illa omnia quæ nobis consciis in nobis fiunt comprehendit, atque ita non modo intelligere, velle, imaginari, sed etiam sentire, idem esse hic quod cogitare asserit. Ex hac igitur propositione ego cogito, hanc unam conclusionem elicit, quam certissimam putat nempè *ergo sum.* Ego verò alias multas de quibus æquè dubitare non possum, ab ejus tamen principiis alienas deduco.

Ego

Ego enim, cogito, & hoc determinatum cogitare meum, in mea est potestate, ita ut dum libuerit, alia atque alia cogitare liberam habeã potestatem: neque enim minus certus sum quod cogitem in genere, quam quod modo hæc, modo alia succedat cogitatio, quam pro libito, & assumo, & depono. Ex quo concludo; ergo hanc cogitationem meam, eo aut volitionem meam ego produco; & non tantum ab alio agente patior. Si enim nihil penitus ad meum cogitare conferrem, non magis in mea esset potestate, quam quod lignum ab igne comburatur, sit in potestate ligni. Ex quibus ulterius concludo, ergo ens creatum aliquid de novo producit, nec à Deo solo, omnes effectus qui de novo fiunt, producuntur. Addo ulterius quod cum ipse fateatur nullam extensionem, nec figuram, nec motum localem, nec quid simile quod corpori sit tribuendum, ad naturam nostram pertinere, sed solam cogitationèm, quam à nobis esse jam ostendi, necessariò sequi aliquid à motu, figura extensione diversum ab aliquo agente creato produci. Quia verò hoc meum cogitare ita in me est, ut me afficiat, illudque sentiam, & experiar, cum tamen aliquid à me diversum sit & separabile; exurgit ergo idea subjecti, & formæ, de qua non magis dubitare possum, quam de cogitatione mea. Unde quamvis Cartesianæ philosophiæ sectatores, ita in formas, & subjecta invehantur, ut ne nominari quidem velint; in cognitione tamen veram formam, in mente humana verum subjectum, quod ita afficiat, ut vi illius formæ aliter se habeat, agnoscere coguntur. De quibus omnibus nullus dubitandi locus relinquitur, cum cogitatio, volitio, cæteræque hujusmodi affectiones, nobis consciis in nobis, non aliunde, sed à nobis producantur. Sed ulterius progrediamur, & ad reliqua entia creata gradum faciamus: Cum natura sibi constet, iisdemque vestigiis semper insistat, hoc est eundem & constantem modum agendi observet, jamque certus sum dari aliquod subjectum, & aliquam formam in rerum natura, an non favet conjectura in reliquis etiam entibus eundem ordinem observari, nec esse dissimile mutationum principium. Quidquid igitur contra formarum existentiam objicies, id totum contra cogitationem humanam dictum existima, quod tibi solvendum erit.

PROPOSITIO II.

Essentiam materiæ in extensione in latum, longum, & profundum positam non esse.

Rerum materialium existentiam ita demonstrare conatur Cartesius. Quidquid sentimus nobis advenit à re aliqua quæ à mente nostra diversa est, cum in nostra potestate non sit ut unum potius quam aliud sentiamus; sed hoc à re illa quæ sensus nostros afficit planè pendet; A sensu autem impulsi percipimus materiam aliquam in longum, latum & profundum extensam; sed si Deus immediatè per seipsum istius materiæ ideam menti nostræ adhiberet, vel tantum si efficeret, ut exhiberetur à re aliqua in qua nihil esset extensionis, nec figuræ, nec motus, nulla ratio excogitari posset cur Deus deceptor non esset putandus. Hujus demonstrationis vim non expendo, videtur enim superioribus dictis repugnare; cum asseruerit interdum sensus errare, ideoque non esse fidendum iis qui nos vel semel deceperunt. Quæro an dum contigit sensus errare, Deus tunc deceptor fuerit, qui aut per se immediatè, vel per aliud effecerit ut falsa nobis idea ingeneraretur. Unde puto quod ipsi probandum fuerat, id quod sensus nostros afficit non posse esse ens sola cogitatione præditum, sed extensum in longum, latum, & profundum. Sed ista ut levia non moror, ultróque illi concedo aliquod ens materiale dari; sed non ita facilè illi concedam in sola extensione, ejus essentiam positam esse. Id autem probat argumento inefficaci, nempè quod natura materiæ non consistat in eo quod sit res dura, vel ponderosa vel colorata. Si enim quotiescumque manus nostra movetur versùs aliquam partem, corpora omnia ibi recederent eadem celeritate, nullam unquam duritiem sentiremus, corpora tamen, naturam corporum non amitterent. Unde sequitur tantum in duritie, prout contra distinguitur à liquiditate, essentiam rei materialis, non esse positam. In duritie verò sumpta pro ea facultate, qua corpus impulsum à manu mea ejicitur ex loco suo, nihil concludit penitus.

Quare dico in extensione simpliciter sumpta positam non esse naturam rei materialis. In eo enim consistere non potest essentia rei corporeæ, quod etiam rei spirituali convenit, sed esse extensum simpliciter sumendo sine addito, rei spirituali convenit, aut saltem probari non potest non convenire: ergo extensio simplex in longum, latum, & profundum, non est essentia rei corporeæ. Primò enim Deus immensus est, præsensque omnibus corporibus, non tantum per operationem, ut voluerunt pauci Theologi: cum res non sit necessario in eodem loco in quo agit, corpora enim agentia ad extra non sunt ubi agunt. Secundò angeli extensi sunt, immò, & ambulant, & moventur, habentque alia prædicata localia, quæ sine extensione explicari non possunt.

Anima rationalis coextenditur corpori quod animat. Et quamvis in toto corpore non resideret, ut fert hæc nova philosophia, sed in sola glande spinali; hæc tamen glans, divisibilis est, majoremque locum in adulto, quam in puero occupat. Ex quo semper concludo animam rationalem, majori, & minori corpori coextendi.

Neque enim ex eo quod possim cogitare de ente cogitante, nulla extensionis facta mentione, propterea sequitur, quod ens cogitans nullius extensionis sit capax. Hanc enim rationem videtur innuere Cartesius, distinctionis quæ est inter res spirituales & corporeas, eaque utitur Rohaut dum dicit; quod dum quis ad suam cogitationem attendit, & se ut cogitantem intelligit, hujus idea nullam extensionem involvit. Verum quidem est quod potest etiam haberi idea rei in longum, latum, & profundum extensæ, quia tamen hæc rem cogitantem non continet, res cogitans, & res extensa seu distinctæ realiter ab invicem, ex quibus concludit animam à corpore distingui.

Egregium videlicet argumentandi modum, ut ex distinctione rationis, seu per intellectum, distinctio realis concludatur, & quoties sunt diversæ Ideæ, distinctæ etiam credantur entitates. Anne quia dum cogito potentiam productivam caloris, non statim habeo ideam causæ productivæ luminis, hæc duo principia realiter erunt distincta. In anima rationali multæ distinguuntur potentiæ in ordine ad conceptus nostros de quibus separatim cogitare

gitare licèt, quis tamen ex hac cogitationum diversitate, potentiarum distinctionem realem unquam asseruit: quare non concluditur quod ens spirituale extensum esse non possit.

Quod si non extensionem simplicem, sed eam tantum quâ partes extra partes ponuntur intelligas, jam non in simplici extensione, sed in extensione juncta impenetrabilitati, rei materialis naturam dices. Sed ostendo positivè in extensione præcisè non esse statuendam entis corporei naturam, ratione quæ apud hominem catholicum vim demonstrationis obtinere debet.

Si extensio præcisè in longum, latum & profundum essentiam materiæ constitueret, hæc numero extensio, cum hac numero materia identificaretur: sed falsum est quod hæc extensio, cum hoc numero corpore identificetur, ergo essentia materiæ in extensione non consistit. Major videtur certa ex simili argumentandi modo in cæteris omnibus. Ideo enim hoc numero animal rationale cum hoc numero homine identificatur, quod essentia hominis, in animali rationali consistat. Sed falsum est quod hoc numero corpus, cum hac numero extensione identificetur. Alioquin idem corpus eandem semper haberet extensionem, nec unquam majorem, aut minorem, quod dici non potest. Nam Corpus Christi in Eucharistia, idem est numero quod est in cœlo, sed Corpus Christi quod est in Eucharistia non habet eandem extensionem, quam habet in cœlis; ergo idem numero corpus modo majorem, modo minorem extensionem habet. Aliquibus hujus philosophiæ sectatoribus, hoc argumentum proposui, nec ab iis unquam aliquid reponi deprehendi, quod posset ab homine Catholico propugnari. Dicebat enim eorum aliquis quod Deus posset facere ut panis fieret Corpus Christi, quia illi anima Christi jungeretur. Sed præterquam quod non desineret esse panis, cujus essentia in sola partium coordinatione posita est, secundum hujus philosophiæ placita, quæro an idem esse Corpus Christi, quod in cœlo est? hoc dicere non possunt, propter rationem allatam, quia inquam non est eadem numero, immò nec æqualis extensio. Ergo sequitur ex hac responsione, quod tot sint Corpora Christi, etiam specie distincta quot sunt Hostiæ Consecratæ, quod quam sit à fide alienum nemo non videt.

Dices cum aliquibus, id est essentia alicujus rei, quod est primum quod in re concipitur, sed extensio, est primum quod in re concipitur, ergo est ejus essentia. Pr. minor, cætera quæ in corpore concipiuntur, ut esse divisibile, esse impenetrabile, aliaque hujusmodi intelligi non possunt, quin prius intelligatur corpus extendi, ergo extensio est quid primum in corpore. Respondeo id quod primum in unaquaque re concipitur, ita ut illud constituat, & distinguat ab omni, alio esse ejus essentiam, non verò ea quæ licèt primò concipiantur, non tamen distinguunt, genera enim, & gradus superiores, secundum subsistendi consequentiam, primò in rebus quibuslibet concipiuntur, non tamen propterea essentiam constituunt. Cum ergo spiritus extensionem habeant & idem corpus saltem per miraculum, extensionem mutare possit, in ea positam esse ejus essentiam asserere non possumus. Ego quidem, ut essentiam rei corporeæ, nulli obnoxiam disputationi constituerem, non in divisibilitate illam reposui, cum plurimi Philosophi velint dari corpora quæ indivisibilia sint; ita Divus Thomas perfectorum animalium formas, materiales, licet indivisibiles censuit. Adde quod materiæ divisibilitas, non sit usque adeò benè constituta, ut seclusa Aristotelis authoritate, majora non sint in contrariam partem momenta, quare puto corporis prout à spiritu condistinguitur, naturam, in eo positam esse, ut extensionem impenetrabilem tanquam primariam proprietatem physicam habeat.

PROPOSITIO III.

Rarefactionem per solam materiæ alienæ intromissionem malè probat Carthesius.

Quamvis hanc de rarefactione quæstionem dirimere non sit animus, quippe quæ in utramque partem in Peripatetica schola acerrimè agitetur; quam inania sint nulliusque momenti quæ super ea materia à Cartesio proferantur, hîc aperire operæ pretium fuerit.

Dicit ergo quod quicumque ad cogitationes suas attendet, nihilque volet admittere quam quod clarè perceperit, non putabit in corporibus raris, & densis contingere nisi figuræ mutationem: ut rara corpora illa sint, inter quorum partes, multa intervalla existunt, corporibus aliis repleta, & quod densiora reddantur, quod eorum partes ad invicem accedentes intervalla ista imminuant, aut etiam penitus tollant. Eo modo quo spongia, aqua turgens, non propterea secundum singulas partes magis extensa est. Duplicem autem rationem afferre videtur cur hoc modo rarefactionem fieri existimet, & omnem alium modum rejiciat. Prima quod aliud omnis modus videatur aliquid inintelligibile effingere, nempè majorem extensionem, hic autem poros admittendo; quos corpora aliena subeant, nihil afferat quod non facilè mens nostra assequatur licèt sensus non semper corpus hoc novum subingrediens percipiat. Neque enim ulla ratio nos cogit, ad credendum corpora omnia quæ existunt debere sensus nostros afficere. Secunda ratio videtur potentior, petita scilicet ex eo quod repugnet aliquid nova quantitate, vel nova extensione augeri quin nova substantia extensa, hoc est novum corpus ei accedat. Quippe quantitas inquit, à substantia extensa in re non differt, sed tantum ut numerus à re numerata. ita ut in re fieri non possit, ut vel minimum quid ex ista quantitate, aut extensione tollatur, quin tantumdem etiam de substantia detrahatur.

Addit item quod licèt fortè nonnulli aliquid dicant, non aliud de ea re percipiunt, & cum substantiam ab extensione, aut quantitate distinguunt, vel nihil per nomen substantiæ intelligunt, vel confusam tantum substantiæ incorporeæ ideam habent, quam falsò tribuunt corporeæ.

Dico igitur primò, præcipuè opinionis contrariæ momenta, allata non fuisse à Carthesio. Primum sit istud, quod explicari non possit in hac opinione quid sit corpus rarum & densum, si enim corpus densum illud est quod parum aut nihil habet materiæ alienæ, quare gravius est. Anne materia illa aliena, minoris est gravitatis, quam propria hujus corporis? immò cum juxta hujus novæ philosophiæ placita, sola in rebus distinctio, à figura, aut magnitudine petatur, lignum quod minus densum est auro, æqualis gravitatis esse deberet. Materia enim quæ in poris ejus existit, & quæ in unum cum illo globum coalescit, æquè gravitare deberet, ac aurum æqualis molis, ergo uterque globus æquè gravis esse deberet: quod tamen experientiæ repugnat, cum aurum plusquam vigecuplo gravius sit. Contendo autem hac raritate per solam corporum extraneorum intromissionem in Carthesiana hypothesi explicari non posse, hanc primam corporis densi proprietatem, nempè majorem in specie ut vocant gravitatem, quæ cum opinione contraria ita benè congruit, ut nihil magis appositum ad explicandos effectus communes. Posito enim quod densitas nihil sit aliud, quam multùm materiæ sub minori extensione, benè intelligitur quod gravitas quæ cum materia connexa est augeatur, cum plures sunt materiæ partes. Multò etiam melius statuitur quomodo per solam extensionis mutationem, mutetur gravitas specifica, immutata gravitate absoluta. Cum enim aqua verbi gratia quæ prius sub æquali mole cum aëre plures habebat partes materiæ, & gravitatis, majorem acquirit extensionem, majusque millecuplò spatium occupat, licèt eandem gravitatem absolutam retineat: quia tamen in hoc novo statu, dum descendit, æqualem sibi in mole aërem, ipsaque graviorem extrudere deberet, id amplius non potest, sed à majore vincitur, quæ prius minore vincere poterat. Quare eadem perseverans in corpore rarefacto gravitas absoluta, quæ prius erat in denso, ut sexcentis experientiis manifestum redditur, satis evincit eandem item sub majori extensione materiam perseverare, nullamque rei gravis hoc est corporeæ fuisse factam accessionem.

Quod verò asserit intelligi non posse, addi novam extensionem quin accedat nova materia, id uno sensu verum est, neque enim dicit ullus, dum materia rarefit, accedit nova extensio, perseverante pristina, sed fit novus rei status, seu novus existendi modus destructo penitus priore, ex suppositione scilicet quod materia secundum omnes partes rarefiat.

Id quidem fateor esse intelligibile, si essentia rerum corporearum in extensione consistat; cum verò probatum sit supra, aliam esse naturam rei corporeæ, id tam facilè assero à me concipi quam eadem anima, modo majori, nunc minori corpori coextendi intelligatur.

Quod si modum intelligibilem quærat, puto rarefactionem per vacuola factam, multò melius experientiis, & rationibus statices respondere, quam subtilis materiæ intromissionem, multóque melius quid sit rarum, & densum, quid gravius in specie, quid levius explicare.

Assero item effectuum communium, multò melius causam assignari, si rarefactio propriè dicta admittatur, quam si ad eam efficiendam materia subtilis sit advocanda. Sæpè enim rarefactiones accidunt intra corpora compacta, omnem extraneæ materiæ aditum præcludentia; in quibus poros admittere, ita pervios, & crebros ut nullo negotio permeentur, sit magna petitio, & cui non ita facilè sensus noster acquiescat.

Unum aut alterum rarefactionis exemplum proferam. Primum sit pulveris pytii qui ubi flammam concipit millecuplò majorem locum occupat, tantoque impetu globum emittit, aut impositas substructiones attollit, aut disjicit. Si enim hujus pulveris rarefactio, in sola partium distractione consisteret, quæro à quo partes ejus tanta vi separentur? Non ab ipso pulvere, saltem secundum Carthesii principia; nullum enim corpus motum suum potest inchoare, sed ab extrinseco illum excipit? Non ab igne modico ipsius fomitis, qui cum parvam motus quantitatem habeat, nec possit majorem producere, hæc acervo pulveris communicata motum maximum tardum efficiet. Non etiam aliunde hæc partium distractio à materia subtili potest procedere, quæ cum multò melius moveri possit dum libera est, hoc est extra omne corpus, quam dum poros alienos subit, nulla est ratio cur tanta vi se in eos immergat. Addo ulterius quod hæc materia subtilis, cum in omnem partem moveatur, & non tantum in poros impingat, sed etiam in partes solidas ejusdem pulveris, tam illas comprimit contra se invicem, quam illas distrahit incurrendo in poros; unde non video, quid possit efficere, cum tam motui resistat ex una parte, quam ex alia imprimit. Addo quod cum materia subtilis tam resistat globo quem continuè verberat, & contra pulverem compingit, quam vim inferat pulveri ad ejus partes à se invicem distrahendas, nullam video ne umbram quidem rarefactionis secuturæ.

Alterum exemplum sit aër magna vi in vas æneum immissus, qui laxato epistomio magna vi erumpit, ut centuplò majorem locum occupet, quæro à quonam tanta oriatur rarefactio, & partium aëris distractio? Non ab aëre ipso, qui statum obtinet multo magis connaturalem, dum partes ejus solæ sunt, quam si interruptiones habeant. Non oritur item hæc partium separatio à materia subtili se insinuante, eò quòd tantum vim faciat in ipsas partes, ut eas adunet, quàm ut eas distrahat, & separet.

Addo ulterius non omnem motum istius materiæ subtilis aptum esse ad hunc effectum præstandum. Si enim quælibet particula in orbem moveatur, nec feratur in lineam rectam, nihil omnino sequetur; si item summè liquida sit hæc materia, nec habeat particulas in cuneum efformatas, ut poros subeant & aperiant, partes aëris non distrahentur.

Quod si dicas aërem constare partibus *quasi villosis*, & rigiditatem nonnullam habentibus, quæ ubi compressæ, & quasi inflexæ fuerint, possint assurgere, & suam rectitudinem reassumere; contendo hanc rigiditatem partium, & vim elasticam, sine rarefactione, & condensatione, propriè dicta, explicari non posse. Sed de hoc ultimo erit suus infra dicendi locus.

Ex quibus concludo Cartesium præcipuas difficultates hujus materiæ non attigisse, cum certum sit opinionem communem de rarefactione propriè dicta; licèt nonnihil intellectu difficiliorem, melius tamen effectibus explicandis accommodatam esse, & contrariam ad principia multò minus credibilia confugere.

PROPO

PROPOSITIO IV.

Errores Carthesii circa spatium.

Multos eosque gravissimos, immò & periculosos in fide errores, ab uno & fœdo illo quidem principio ortos existimo, quòd non satis adverterit Cartesius, non tantum circa rem existentem, sed etiam circa possibilem versari posse cogitationem meam, nec ex eo concludi corpus in longum, latum, & profundum existére, quod cogitatio mea tale corpus concipiat, cum æquè circa possibile, & existens, immò, & circa impossibile versari possit.

Primò enim ex hac rei existentis, & possibilis indistinctione, malè concludit vacuum in quo nulla sit substantia repugnare, ex eo quod extensio spatii, seu loci ut vocat interni, non differat ab extensione corporis; cum enim ex eo quod corpus sit extensum, in longum, latum, & profundum concludimus illud esse substantiam, idem etiam de spatio quod vacuum supponitur concludendum esse contendit, cum illud extensum concipiamus.

Putat autem communem esse errorem quod non advertentes ullam esse inter vas & corpus in eo contentum necessariam connexionem, non putavimus quidquam obstare quin Deus efficiat ut corpus quod vas aliquod replet inde auferatur, & nullum in ejus locum succedat. Concedit quidem nullam esse connexionem inter vas, & hoc & illud corpus particulare, quod in eo continetur, sed esse maximam ac omnino necessariam asserit inter vasis figuram concavam, & extensionem in genere sumptam, quæ in ea cavitate debet contineri.

Ut ergo ejus rationi respondeam, hæc vasis cavitas est extensa in longum, latum, & profundum, ergo est corpus;distinguo majorem. Est extensa realiter nego, est extensa potentia concedo. hoc est inter latera vasis interjici potest corpus extensum concedo, interjicitur actu nego.

Neque propterea se tangunt latera vasis licèt nihil inter illa mediet, sed requireretur præterea ut nullum corpus interjici posset.

Absurda autem quæ ex hac indistinctione extensionis existentis, & possibilis pullulant, innumera sunt, immò & periculosa, quis enim dicat ita connexa esse partes materiæ inter se, ut licèt ab invicem dependeant, nullam tamen Deus annihilare possit, quin totum mundum, & omnia corpora destruat. Ponamus enim destrui aërem qui in hoc cubiculo versatur, vel alius in eum locum succedet, vel parietes ad se invicem succedent, & locum mutabunt; sed cum omnia plena sint, nec ulla admittatur rarefactio propriè dicta, alicubi deficiet corpus, neque enim minor materia occupare potest idem spatium, quod major materia occupabat: ergo necessariò erit spatium aliquod sine corpore.

Aliud non minus absurdum est, quod si Deus creaverit aliquod corpus, necessariò teneatur producere, quidquid materiæ potest producere, quia ubicumque illius corporis fines statuamus, semper ulterius ultra ipsos aliqua spatia indefinitè extensa non modò imaginamur, sed & realia esse percipimus, ergo ibi corpus imaginamur. Unde concludit ibi corpus esse. Sed unica distinctione ruit totum ejus raciocinium. Spatia imaginamur realia, hoc est concipimus corpus esse possibile, & hanc extensionis possibilitatem concipimus ad modum extensionis concedo, & concipimus ibi de facto corpus esse nego.

Urgeri posset hæc ejus assertio, omnibus argumentis, quibus infinitum in extensione communiter impugnamus, quæ cum passim apud Philosophos inveniantur, non refero; quod enim mundum indefinitum vocet, & non infinitum, parum interest, cum verè admittat nullos esse ejus fines & terminos.

Sed pari jure sequitur quod totum mundum destruere non possit Deus, cum destructis iis corporibus ex quibus constat spatium pariter infinitum, quod à mundo occupabatur, immò & ante mundi creationem idem spatium possim imaginari, ergo ibi jam erat corpus. Sequitur ergo ex ejus doctrina, mundum esse æternum, cum eo sublato, non tamen ejus extensionis tollatur idea.

Admittenda quidem est necessaria, immutabilis, & infinita extensio, nempè Dei immensitas, unde quid ultra mundum concipimus, nihil reale præter Deum, qui verè imensus est & realiter extensus. Admittere item possumus extra mundum possibilia esse alia corpora, & alios mundos, quos quidem concipimus secundum ideam quam à rebus existentibus hausimus, non tamen propterea sequitur eos existere.

Ex quibus sic argumentari licèt: Si ex eo quod habeam alicujus rei ideam, liceret concludere rem illam ibi existere, sequeretur quod ubi conciperem hominem esse possibilem, ille homo existeret, neque enim alia est idea & imago hominis existentis & possibilis.

Ut autem ostendam à pari hujus raciocinii defectum. Nonne datur rerum aliqua duratio, quæ suo modo extensionem habet, nonne dato mundi verbi gratia initio possum cogitare quod ante centum annis existere possit; anne bona esset consequentia quod toto illo tempore de facto existit, cum hæc mundi duratio possibilis concipiatur per modum durationis extensæ in ordine ad tempus. Non ergo revocari debent omnia ad ideas nostras, nec ex eò quòd concipiatur aliqua extensio, licèt ejus existentiam concludere. Dum igitur vacuitatem inter latera vasis contentam concipio, ut extensam, nullum ibi corpus esse dico, sed tantum ita sita esse latera vasis, ut inter ea corpus possit collocari. Simili vitio laborat ratio quâ divisibilitatem materiæ in infinitum conatur adstruere, cum enim inquit si quæ sint partes, necessariò debeant esse extensæ, quantumvis parvæ fingantur, possumus adhuc unamquamque ex ipsis, in duas, aut plures minores cogitatione dividere ac proinde agnoscere esse divisibiles. Nihil enim possumus inquit cogitatione dividere, quin hoc ipso cognoscamus esse divisibile, atque ideo si judicaremus id ipsum esse indivisibile judicium nostrum à cogitatione dissentiret.

Multa in hac doctrina reprehendere licèt. Primò quod à divisione intellectuali ad realem procedat. Angelum enim & animam rationalem extensam concipimus, & cogitatione dividimus, non

non tamen propterea, realiter divisibiles esse asserimus. Quamvis ergo quamlibet partem materiæ extensam cogitem, non propterea sequitur eam in duas partes realiter esse divisibilem, si unica sit entitas. Esto minor dari possit.

Addo quod longè efficacioribus argumentis contra Zenonem agendum sit, qui soli materiæ totali ait convenire ut sit extensa in longum, latum, & profundum, cuilibet autem parti extensionem indivisibilem omnium minimam convenire, atque adeo ne mente quidem divisibilem. Quod notare volui, ut probationum istarum inefficacitatem ostenderem, quæ ne leviter quidem istas atomos perstringunt, sed supponunt id quod probandum fuerat.

PROPOSITIO V.

Errores Carthesii circa definitionem motûs.

Occurrit primò definitio motus, quæ ita proponitur. Motus est translatio unius partis materiæ, sive unius corporis ex vicinia eorum corporum, quæ illud immediatè contingunt, & tanquam quiescentia spectantur, in viciniam aliorum.

Contendo hujusmodi definitione non explicari naturam motus. Primò quia licèt corpora vicina simul moveantur, non desinit eodem modo moveri corpus, sed secundum hanc definitionem non moveretur corpus, ergo hæc definitio non est bona. Cum enim motus secundum ipsum sit modus mobili intrinsecus, idem erit modus intrinsecus, sive corpus vicinum simili modo afficiatur, sive non; ergo modus hic omnino intrinsecus, & à vicinis corporibus independens, per respectum ad illa definiri non potest. Secundò sequeretur solam superficiem extimam corporis alicujus moveri, sola enim transferretur ex vicinia eorum corporum, quæ illam immediatè contingunt, in viciniam aliorum. Deinde secundum hanc definitionem idem esset navigium transferri à littoribus in altum mare, ac immoto navigio littora ab eo removeri, nec esset potior ratio cur littora immota conciperem, quam navim. Si enim in re motus nihil est aliud quam translatio à viciniis, unius corporis quod concipitur immobile in viciniam aliorum, quæro utrum mihi liceat utrumlibet corpus concipere ut immobile. Cum enim translatio omnis à vicinia sit reciproca, quæro cum hoc modo corpus A transfertur à vicinia corporis B sibi vicini, ad viciniam aliorum, cui sit tribuendus motus, & quænam sit potior ratio, cur unum ut immobile spectetur quam aliud. Verè in motu aliquid esse debet, propter quod unum potius corpus moveri dicatur quam aliud; quod non est semper à cogitatione nostra desumendum, quæ sæpè cum motus in se non consideret, sed respectivè ad corpora vicina, motum unius alteri tribuit. Quæ omnia ab hoc authore sunt ita confusa, ut videatur dicere piscem secundo fluvio descendentem nullum motum habere, quod quidem verum est de motu respectivo in ordine ad aquam, hoc est quo ab aqua fluvii recedat, falsum tamen si de motu absoluto sit sermo. Quare contendo naturam & definitionem motus non fuisse benè explicatam, cum hæc mihi liberum relinquat, cuilibet corpori voluero motum tribuere.

Secundò contendo malè à Carthesio assumi tanquam indubitatum, motum semel inchoatum sine ulla nova actione, per solam Dei concursum conservativum, continuandum esse; quod an benè cum ea quam de motu ideam proposuit congruat, hìc examinandum nobis est. Hanc autem suam assertionem ut stabiliat, dicit non plus actionis requiri ad motum, quam ad quietem; putatque contrariam opinionem ex præjudicio ortam esse, nempè quod corpus nostrum à nostra voluntate, cujus optimè conscii sumus moveri soleat, & quiescere ex hoc solo quod terræ adhæreat per gravitatem, cujus vim non sentimus, & quia gravitas aliæque causæ membris nostris resistunt, efficiuntque ut defatigemur, ideo majore opus esse actione ad motum ciendum quam ad illum sistendum. Videtur autem hoc ratiocinium laborare in æquivoco, nempè probare contendit non plus actionis requiri, ad continuandum motum, quam ad conservandam quietem, ex eo quod tantumdem requiratur actionis sæpè ad sistendum motum, & efficiendam quietem, quantum requiritur ad destruendam quietem, & efficiendum motum. Videtur tamen consequentia non esse legitima, ex eo quod non possim impedire quominus causa quæ producit motum illum producat, quin ponam aliquid contrarii, nempè motum contrarium ad quem efficiendum requiritur aliqua vis, quies autem nihil dicit nisi negationem motus, atque adeo ad illam conservandam nulla est opus actione; motus autem successio, ut ostendam infrà, impedit quominus ejus continuatio dici possit conservatio.

Hæc ratio facilè impugnatur: Deus plus quietis modo producit quam initio; ergo mutatur. Pr. Ant. Initio Deus nullam quietem produxit cum omnes partes materiæ motæ sint, modo aliquam producit: quies autem tam est aliquid positivum quam motus, tantaque secundum ipsum requiritur virtus ad quiescendum, quam ad motum. Hoc argumentum demonstrativum est contra Carthesium.

Secunda ratio videtur peti ab immutabilitate Dei, vi cujus non solum immutabilis est in se ipso sed etiam quod modo quam maximè constanti, & immutabili operetur, ne quæ inde inconstantia in ipso arguatur; unde sequitur quod ex eo solo quod Deus diversimodè moverit partes materiæ, eum etiam tantumdem motus in ipsa semper conservare.

Sed hoc ab immutabilitate Dei petitum argumentum planè nullum, & ridiculum est.

Nam non magis esset contra immutabilitatem, quod non conservet in materia eandem motus quantitatem, quam in materia initio supponitur produxisse, quàm sit contra immutabilitatem Dei, quod cum per totam æternitatem mundum non produxerit, eum postea produxerit, aut quod in mundo eundem non conservet numerum hominum, pecudum, herbarum, aut aliarum rerum. Item quod quæ partes in motu erant, quiescant, aliæ velocius moveantur quam initio, cæteraque hujusmodi mutationes; vel ostendant aliquam peculiarem hujus quantitatis motus cum immutabilitate Dei connexionem,

quam

quam hujus numeri hominum, vel alterius cujusque rei.

Ostendo autem positivè hanc hypothesin subsistere non posse. Quia ad hoc ut hæc hypothesis subsistat deberet necessariò sequi, nullum mobile posse inchoare motum, quin ab extrinseco illud communicatum habeat, ita ut tantum decedat motus in motore; quantum in mobili producitur. Sed experientia compertum est, quod non omnis motus ab extrinseco communicatur, sed de novo producitur, absque eo quod sequatur necessariò ulla quies in alio corpore. Nam primò certum est quod animalia inchoant suum motum, nec illud recipiunt ab extrinseco, eodem enim modo animalia moventur iisdemque adminiculis, & mediis quibus homines moventur; sed certum est quod homines non recipiunt motum suum ab extrinseco. Si enim ab extrinseco reciperent, motus illorum liber non esset, sed conscii sumus, nos moveri quotiescumque volumus, quod si motum ab extrinseco reciperemus non liberè moveremur.

Neque enim concipi potest, quomodo actio meæ voluntatis determinare possit agens extrinsecum, ad imprimendum in me motum, ex quo concludo principium hujus motus non esse ab extrinseco.

Quamvis enim spiritus animales ad motum progressivum sint necessarii, ab iis tamen pes meus illum non excipit, cum inexplicabile sit, quomodo voluntas mea, per hos spiritus potius in unam partem pedem adducat quam in aliam. Assignari item non possunt quænam corpora sistantur dum moveor, ne sit major quantitas motus. Nam si dicatur Deus alicujus corporis motum sistere, ne sit major illa quantitas motus, peto cujus corporis, an omnium, an alicujus peculiaris; non alicujus peculiaris quia non est potior ratio unius, quam alterius. Non etiam omnium. Deinde hic modus philosophandi; quod ex eo quod homo verbi gratia incipiat se movere, Deus desinat conservare motum ita velocem in omnibus mobilibus, est à recto philosophandi modo omnino alienus.

Secundò multa sunt alia agentia quæ similiter moveri incipiunt, nec tamen ab extrinseco motore suum motum habent. Ita pulvis accensus incipit habere motum vehementissimum, eumque imprimit globo, nullus tamen assignari potest motor extrinsecus à quo talem motum participet, & cui tantumdem motus decedat, quantum pulveri accedit, sed de hac materia jam dixi supra.

Repugnant item indubitatæ regulæ motus, quæ sunt longè diversæ ab iis quas hic author assignat ut ostendam propositionibus sequentibus.

Ostendo nunc positivè secundùm hujus authoris principia, majorem requiri vim ad motum continuandum, quam ad quietem conservandam. Motus definitur ab hoc authore, Translatio corporis à vicinia corporum vicinorum, in viciniam aliorum; ergo alia est translatio corporis qua acceditur ad corpus aliquod, & alia qua ab eo receditur; ea enim distinguntur quæ non existunt eodem tempore, sed translatio qua acceditur ad corpus A, non est eo tempore, quo est translatio qua ab eodem corpore A receditur; cum mobile non possit simul eodem tempore accedere ad corpus A & ab eo recedere. Ergo secundum hanc motûs definitionem motus sunt diversi, quo accedo ad corpus A, & quo ab eo recedo: ergo motus habet partes sibi invicem succedentes. Ergo continuatio motus quo postquam mobile accessit ad terminum A, ulterius pergit, ulterius procedit, eumque deserit, conservatio dici non potest; sed nova productio. Ad hoc ut esset conservatio deberet eadem numero produci entitas motus, dum mobile recedit à termino A, quæ producebatur dum ad illud accedebat. Sed non est eadem. Si enim esset eadem, accederet dum recederet, & vicissim, tunc enim receditur cū est id quo formaliter receditur; sed si eodem motu recederem, & accederem, dum accederem esset id totum quo formaliter receditur. Quare si sistamus præcisè in definitione allata, videtur motus essentialiter esse successivus, & constare partibus, quarum una desinat cum alia existit. Ex quibus concludo quod sicut prima pars seipsam primò producere non potest, sed indiget causa eam producente, ita etiam secunda simili influxu indigeat. Et sicut productio primæ partis motûs non procedebat à solo Dei concursu conservativo, eò quòd primò tunc existeret, ita etiam secunda. Immò puto implicare motûs conservationem, secundum hanc motus notionem; cum enim secundum hanc essentialiater sit successivus, implicet autem partes eas conservari quæ ubi primum existunt desinunt esse, implicat ergo motum eundem numero conservari, & consequenter non minus egere in decursu actuali influxu motoris, quam in ipso initio.

Ut autem melius appareat hujus hypothesis infirmitas, quæ soli modo loquendi innitur, quo dicimus eamdem esse motûs quantitatem, dum æqualem significare volumus. Certum est aliquod corpus moveri quod prius quiescebat, atque adeo hunc numero motum nunquam extitisse, nec illi ab extrinseco ita communicatum esse, ut idem in corpore verbi gratiâ percutiente fuerit, qui in percusso deprehenditur: non ergo per simplicem concursum conservativum æqualis motus quantitas perseverat in materia; sed quærenda est singulorum motuum qui de novo exurgunt aliqua causa verè productiva, distincta à Deo. Nam dicere quod dum corpus in aliud occurrens illi imprimit motum, quod inquam Deus solus operatur, sistitque motum percutientis, & incipit percussum movere, hoc inquam est confugere ad causam primam sine necessitate; quod apud omnes tanquam inscitiæ perfugium semper habitum fuit, & à recto philophandi modo penitus alienum.

Est igitur maxima inter motum, & quietem differentia. Quod ut quies perseveret nulla sit opus nova entitate, atque à Deo ubi primum est quies, solus influxus conservativus, necessarius sit, quo res in eodem statu vero, & physico permaneat. At verò continuatio motus non dicit eundem statum præcisè, sed tantum per quandam similitudinem, & æquivalentiam, cum enim novæ partes motus exurgant quæ à se ipsis produci non possunt, hæ omnes semper produci debent. Neque verò est magis idem status, quam foret idem status mundi si Deus decerneret in eo eundem hominum numerum conservare.

Quæ omnia affero consequenter ad hanc motus

tus definitionem, non dubito enim quin alia proponi posset, quâ diceretur motus esse modus aliquis permanens, cujus essentia in eo consisteret.

PROPOSITIO VI.

Omnis motus est impossibilis secundum Carthesium.

Manifestæ inconsequentiæ hypothesin Carthesianam arguo in hac propositione, & contendo sequi ex ea omnem motum esse impossibilem Suppono autem ut eadem perseveret in mundo motûs quantitas necessarium esse, ut mobile tantumdem motus deperdat, quantum alteri communicat. Suppono item omnia plena esse, & materiam ejusdem esse speciei, ita ut nulla sit diversitas, quam quæ in diversis motibus posita est. Ex quibus concludo nullum corpus moveri.

Supponamus enim corpori cuilibet, verbi gratia lapidi, à Deo certam quantitatem motus imprimi, demonstro illud moveri non posse. Illud corpus quod moveri non potest quin totum suum motum amittat, immobile censeri debet; sed lapis ille moveri non potest, quin motum æqualem in aëre sibi vicino producat, & tantum amittit de suo motu quantum producit, ergo dum movetur totum suum motum amittit. Probatur minor, nullum corpus moveri potest, quin saltem aër ipsi æqualis in mole, æquali velocitate moveatur, sed in aëre ipsi æquali in mole, & æquè velociter moto, est æqualis quantitas motûs, ergo lapis moveri non potest, quin æqualem in aëre motus quantitatem producat, ergo quin totum suum motum amittat. Neque enim dicere potes, in aëre utpotè rariori, licèt æquè velociter moto, minorem esse quantitatem motus. Cum enim secundum Carthesium tot sint in corpore rariori, quot in duriori partes materiæ, licèt minutiores, & quantitas motus oriatur dum partes materiæ per velocitatem multiplicantur, eadem utrinque ex multiplicatione orietur quantitas motus, ergo totum amittet lapis suum motum: cum alium ipsi æqualem debeat producere. Hoc quidem argumentum nullum esset in opinione communi, quia dicerem aërem æqualem in mole ipsi lapidi, non millesimam partem materiæ continere, illius quæ est in lapide, atque adeo licèt in utroque sit æqualis velocitas, inæqualem tamen esse motus quantitatem. Sed hâc responsione uti non potest Carthesius, qui raritatem explicat per intromissionem alienæ substantiæ, quæ etiam moveri debet dum ejus locum occupat lapis: ergo ut habeatur quantitas motus producendi à lapide moto, debet haberi ratio, non tantum partium aëris, sed etiam totius materiæ permixtæ, quæ lapidi locum facere debet. Ergo quicumque imprimatur motus, is totus cessare debet, cum alius ipsi æqualis producendus sit.

PROPOSITIO VII.

Falsæ sunt Regulæ motus à Carthesio assignatæ.

Plurimas affert motus regulas Carthesius, quas cum ad suam de æquali quantitate motus in mundo conservata accommodat, ut plurimum contrarias experientiis, & inintelligibiles profert. Prima sit hæc, quod motus motui non sit contrarius, sed tantum quieti; hoc est quod motus, motum non destruat, sed tantum quies, quam regulam omnino falsam esse contendo, & experientiis repugnantem. Volo igitur ut motus quieti privatione opponatur, & motus motui opponatur contrario, sicut negatio caloris calori.

Experientia constat quod si duo corpora æqualia, non elastica sibi motibus invicem ex adverso occurrant, cessabit eorum omnis motus, ergo motus motui contrarius. Si enim motus motui contrarius non esset, deberent ambo corpora regredi eadem velocitate, quâ prius ferebantur: sed nulla ferè sunt corpora quæ eadem præcisè velocitate regrediantur, nisi quæ sunt elaterii capacia, & prout aufertur ea vis elastica, eò minus regrediuntur, quod si nullam omnino habeant, ut si fiant globuli è molliori gleba, nullo modo regredientur. Ex quibus concludo vi percussionis quæ accidit in ipso corporum æqualium & æquali velocitate delatorum occursu, verè amitti utriusque motum directum, sed à virtute elaterii, se in connaturalem figuram restituentis motus novos produci. Quod verè res ita se habeat, ad experientiam provoco, secundum omnes partes, nempè primò quod si duo globi verbi gratia Calybei, antequam temperentur, sibi occurrant parum admodùm regrediantur, si verò temperaturâ vim elasticam acquirant, regressum habebunt velociorem. Globi lignei sibi occurrentes, si ex buxo aut alia materia elaterium promptum & vividum habente fuerint, magis regredientur, quam si ex molliori constent, plumbei globi, qui singulis ictibus complanantur non multùm movebuntur. Sed si motus motui non esset contrarius, regredi deberent omnia corpora, etiam non elastica, ergo verè motus motui contrarius est. Ponamus enim duo corpora non elastica per occursum mutare figuram, & alia duo, sed elastica, mutare figuram, sed hæc posteriora, se restituendo in pristinum statum, motum producere. Cur priora duo omnem motum amittunt, posteriora non amittunt, nihil video quod satis probabiliter dici possit.

Hæc ratio explicandi regressum corporum per vim elasticam physica est & intelligibilis, & in ea explicantur optimè omnes effectus. Explicatio autem Carthesii de istis determinationibus non satis intelligitur, neque scio quid sit motu eodem perseverante determinatio in unam, aut alteram *lineam*: quæro enim utrum sit aliquis modus superadditus ipsi motui, & quæro à quo producatur talis modus. Jam motus erat aliquis modus seu status corporis, cui alius modus supervenit, quæ tanta entitatum multiplicatio, in philosophia præsertim, quæ maximè parcitati studet. Fateor igitur me non concipere quid sit ista determinatio versus unam partem, quæ si sumatur ut à motu distincta nihil continet nisi verba. Ego ita rem statuo quod motus determinatio nihil sit à motu distinctum, & quod sæpè multa possint concurrere ad motum producendum versus unam partem, unde ratione tantum differt determinatio motus, ab ipso motu, & implicat ut idem motus numero determinetur ad lineas oppositas. Quidquid tamen sit de his determinationibus contendo per vim elasticam benè rem explicari, incurrit globus solidus in funem laxum

laxum non regreditur, funis tenditur, & quia tunc se restituit globus regredietur.

Quia verò semel peccatum est initio omnes ferè regulæ motus ab eo propositæ falsæ sunt. Prima quidem falsa est, in uno casu. Nempè ille indifferenter proponit quod si duo corpora æqualia sibi occurrant velocitatibus æqualibus, regredientur æquali velocitate. Contendo autem quod si fuerint corpora non elastica, cessabit omnis motus, & ad experientiam provoco. Ideo existimo etiam corpora durissima, si talia haberentur non elastica cessatura ab omni motu.

Secunda ita habet si corpora A & B sibi mutuò occurrerent, essetque B paulò majus quam A, tunc solum A reflecteretur, & utrumque versus eamdem partem eadem celeritate progrederetur. Hæc regula falsissima est in omnibus casibus. Primò quidem si fuerint corpora mollia falsum est quod eadem velocitate ferantur qua prius, sed cùm corpora supponantur, ferri eadem velocitate, sitque B paulò majus, majorem habebit motus quantitatem quam A. Dico post occursum solum excessum motus corporis B supra A, restare, qui corporibus communicatus motum tardissimum efficiet, & quo ad hoc ad experientias non tantum meas, sed etiam Domini Mariotte provoco, quæ omnes ab hac regula dissentiunt, ita ut in nullo occursu corporum mollium eadem restet motus quantitas, aut eadem velocitas.

Secundò si fuerint duo corpora elastica in plerisque casibus, utrumque regredietur, sed B minus quam A, & miror regulas ita ab experientiis alienas tam audacter proferri.

Tertia pariter regula falsa est: Vult enim quod si duo corpora A & B mole æqualia sibi occurrant cum velocitatibus inæqualibus, nempè si B delatum ad orientem habeat 6 gradus celeritatis, & A delatum ad occidentem habeat tantum 4. quod post concursum utrumque tendat ad orientem celeritate ut 6. dico quod si corpora sine elaterio fuerint, ferentur ad orientem velocitate ut unum, quod est conforme experientiis. Nam quatuor gradus celeritatis, hinc inde se invicè perimunt, restatque solus excessus velocitatis, qui utrique corpori communicatus velocitatem ut unum efficit. Si verò fuerint Elastica cum secluso elaterio, ferantur vi directi motus ad orientem velocitate unius gradus & elaterium vim suam exerat æqualiter habeatque vim majorem, quam quæ producat velocitatem ut unum, mobile A feretur ad orientem velocitate saltem ut tria, & mobile B regredietur velocitate ut duo, quæ modo non expendo exactè, quod præstiti in tractatu peculiari.

Quarta regula evidenter repugnat experientiis, ita ut nihil potuerit dici in hac materia magis absonum. Habet autem quod si corpus A quiescat fueritque paulò majus quam B quacumque celeritate feratur B in A, nunquam ipsum A moveret, sed ab eo repelleretur in contrariam partem, quia inquit corpus quiescens magis resistit magnæ celeritati, quam parvæ, idque pro ratione excessus unius supra aliam, & idcirco semper major esset vis in A ad resistendum quam in B ad impellendum.

Hæc regula in omni casu falsa est, & primò quidem si corpora fuerint elaterii incapacia dum corpus B in corpus A majus & quietum incurrit, post incursum ambo procedunt velocitate, quæ se habeat ad priorem, ut corpus B ad aggregatum ex A & B, & in tali casu restat eadem motus quantitas, atque adeo tota quæ erat in B dividi debet per aggregatum ut habeatur velocitas nova.

Secundò si corpora fuerint elastica, dico quod corpus quiescens dimovebitur loco à minore in ipsum incurrente. Neque enim in tudiculari ludo dum globus unus nonnihil alio minor est, est propterea irrita omnis ejus percussio, sed verè commovet, est autem ita obvia cuilibet hæc experientia, ut contrarium ne somniari quidem potuerit. Ratio autem quam affert à me concipi non potuit, dicit enim quod corpus quiescens magis resistat magnæ celeritati quam parvæ, quod nullum pati potest bonum sensum.

In Quinta vult ut corpus B percutiens sit majus corpore A quieto & percusso, asseritque ut post percussionem ambo simul moveantur, ita ut si B esset duplò majus quam A, transferret ipsi tertiam partem sui motus, quæ tam celeriter movet corpus A, quam reliquæ duæ moveant corpus B. Quod propterea moveatur tardius tertia parte. Hæc quidem regula vera est in corporibus non elasticis, falsa si elaterium habeant, nam post concursum corpus A quiescens longè majori velocitate feretur, quam sit ea quâ corpus B in ipsum incurrerit, corpus autem idem B promovebitur quidem, sed velocitate minima.

Sexta supponit corpora æqualia esse & dicit quod si corpus B, in corpus A æquale & quietum incurrat cum quatuor gradibus velocitatis communicaret illi unum gradum, & regrederetur cum tribus. Hæc regula falsa est in non elasticis, certum est enim quod post percussionem progredientur ambo simul versus eandem partem, velocitate quæ sit prioris subdupla. Si verò fuerint elastica, corpus B incurrens omnino quiescet, & corpus B velocitatem ejus accipiet; nam vi percussionis secluso elaterio ambo simul procedere deberent velocitate ut duo, elaterium autem repellens corpus B uno gradu celeritatis, in eo omnem omnino motum destruit, Idem elaterium impellens corpus A, jam delatum in easdem partes cum duobus gradibus, illi duos superaddit gradus, quæ ita cum experientiis congruunt, ut modo de iis dubitare, ut de demonstratis nefas sit.

Septima si corpora A & B versus eandem partem moveantur, ita ut A quod celerius movetur & attingit corpus B, sit minus, ita ut excessus celeritatis in A sit major quam excessus magnitudinis in B dicit indeterminatè quod corpus A transferret tantum de suo motu in corpus B, ita ut ambo æquè celeriter in easdem partes moveantur. Si autem excessus celeritatis in A, minor esset excessu magnitudinis in B, A in contrariam partem moveretur, & motum omnem suum retineret. Dico hanc regulam falsam esse, vel enim loquitur de corporibus non elasticis, vel de elasticis; si de primis, quomodocumque se habeant post concursum simul procedent, si verò elaterium habeant verum, non est quod æquè celeriter post percussionem moveantur, sed necessariò corpus A celerius procedet.

Ex his concludo cum hujus hypothesis tota in motu locali posita sit, quo nempè omnium rerum distinctiones & differentias explicare nititur, quid

quid tandem boni ab ea sperandum est, quæ in regulis motus tam graviter offendit, ut vix una rectè procedat.

Colligo ex his omnino falsam esse assertionem quâ vult eandem motus quantitatem in mundo perseverare. Certum est enim, dari corpora non elastica sive id oriatur ex summa mollitie, vi cujus extraneam quidem figuram assumunt, sed pristinam non recuperant, sive id oriatur ex summa duritie, impediente omnem figuræ mutationem. Quare tota materia subtilis in hac hypothesi, elaterio caret, globuli item videntur summè inflexibiles, experientia autem indubitata constat quod quoties corpora non elastica & æqualia ex adverso cum velocitatibus æqualibus incurrunt, toties cessat omnis motus. Ergo cum partes materiæ subtilis sæpissimè hoc modo in se invicem ferantur, multos motus in mundo periisse necesse est.

PROPOSITIO VIII.

Fluiditas in motu non consistit.

Ut hic author fluiditatem in motu positam esse probet, supponit primam fluidi notionem, nempè quod partes fluidi facilè recedant ex locis suis, & manibus nostris versus illas se moventibus non resistant, at verò durorum partes ita sibi cohæreant ut non sine vi sejungi possint. Probat igitur hoc argumento fluiditatem in motu consistere. Ea quæ sunt in motu non impediunt ne loca quæ sponte deserunt ab aliis occupentur, sed ea quæ quiescunt non sine aliqua vi ex locis suis extruduntur; ergo corpora divisa in multas exiguas particulas motibus diversis agitatas esse fluida, ea verò quorum partes juxta se mutuò positæ quiescunt esse dura. Ego quidem facilè concesso antecedente nego consequentiam. Nam verum esse fateor ea corpora non resistere motui manus quæ in eamdem partem moventur, spatiumque sponte deserunt à manu mea occupandum. Sed nego posse ex eo concludere corpora quæ movenventur in partes adversas non resistere, immò verò assero majorem esse resistentiam, corporum motorum motu contrario, quam corporum immotorum, & provoco ad experientiam. Nam difficilior est navigatio adverso fluvio, quam in aqua stagnante, duplóque major requiritur virtus, ut impingenti corpori motum in oppositas partes imprimam, quam si immotum esset, sive producatur novus motus, sive nova determinatio parum interest, id puto à nemine negari posse, cum omnes experientiæ id demonstrent. Quare etiam si concederem partes liquidi ita agitari, ut tot sint quæ in unam partem moveantur, quot in aliam, nego tamen hunc motum partium aliquid conferre ad facilitatem motus corporis duri in eo liquido peragendi. Cum enim movendum est corpus durum ad dexteram, cum media pars liquidi moveatur ad sinistram, contraria in iis determinatio producenda erit: ergo dupla impendenda erit virtus ad hanc determinationem producendam, quam si hæ partes immotæ essent. Neque verò ad id præstandum adjuvari possum à partibus in eandem plagam motis, illæ enim in suo motu perseverare debent: ergo nihil motus sui aliis communicant, tantumdem enim deperderent. Ergo dupla virtus requiretur ad repellendas partes, quam quæ necessaria esset si immotæ essent, sed si omnes immotæ essent, dupla virtus omnes in eandem plagam moveret: ergo tanta requiritur virtus ad movendum corpus durum in liquido cujus partes moventur, quæ requireretur, si immotæ essent; ergo motus liquidi nihil confert ad motum corporis duri, nec facilitatem ullam tribuit.

Secundò quæro utrum partes aliquæ vicinæ in eamdem plagam moveantur an nullæ. Si primum, ergo illæ duræ erunt, & unitæ, & non divisæ quæ enim simul moventur, tam sunt unita, quam quæ juxta se posita quiescunt; alioquin dum globus æneus movetur desinerent ejus partes esse unitæ, solus igitur motus diversus, seu in diversas plagas disjunctionem efficit. Ulterius urgeo; an illæ duæ partes quæ simul hoc modo moventur aliquando separentur ab invicem dum motus corporis duri id exigit, vel dum replendæ sunt angustiæ aliquæ, seu accommodari debent terminis alienis? si facilius separentur ab invicem hæ partes quam particulæ corporis duri, quæro in quo sit posita talis facilitas, in eo enim sitam esse liquiditatem asseram. Quod si separari non possint hæ particulæ, ergo non omnia plena erunt, nec dabitur materia summè liquida, qualis requiritur, ut summa facilitate, se accommodet terminis alienis, omnesque angustias subeundo, nihil omnino vacui relinquat. Quod si dicas nullas duas partes simul moveri, ergo dabitur actualis divisio materiæ in omnes partes in quas indivisibilis est, ita ut nulla sit tam exigua, quæ in alias minores actualiter non sit divisa, quod quidem nullus adhuc philosophorum dixit, utpotè inintelligibile esset, nam materia divisa quantum divisibilis est erit redacta ad indivisibilia. Quamvis enim benè intelligatur & admittatur materia divisibilis in infinitum in partes minores, & minoris, ita ut nulla sit assignabilis quæ in alias non sit divisibilis, nullus tamen dixit quod actualiter sit divisa, sed tantum quod divisiones actuales semper sint finitæ, possibiles verò infinitæ, atque adeo erunt divisiones finitæ in infinitum. Quod verò de facto tales actualiter dentur, & quod aliqua materia sit actualiter divisa, quantum divisibilis est, & non redacta ad indivisibilia nec ad partes omnium minimas, hoc porro superat captum meum, est enim redacta ad partes omnium minimas, si ad minores reduci non possit. Sed ad minores reduci non potest, nisi possit fieri aliqua divisio quæ non est adhuc, quod si in minimas partes divisa sit, ergo dantur partes omnium minimæ. Quare hæc distinctio inter corpus durum, & liquidum, quæ eam constituit in separatione partium inter se, à motu orta, est difficilior intellectu, quam quæcumque opinio excogitari potest. Si enim quælibet pars moveatur motu diverso à motu sibi vicinæ partis, ne dicantur esse unitæ, hæc pars quantumvis minima movebitur infinitis motibus diversis, ita ut nullam liceat assignare quæ non secundum singulas suas partes diversimodè non moveatur, & singulæ adhuc aliis infinitis motibus.

Secundò quæro an materia hunc motum ex se habeat, vel illi à ab alio communicetur, non potest habere ex se, cum omnis motus ab alio communicetur, nec etiam ab alio; deberet enim illud quod talem motum ipsi imprimeret, esse divisum usque

usque ad ultimas minutias, si enim divisum non esset dum huic materiæ motum imprimeret, quælibet ejus pars certæ utique magnitudinis, aliquam partem liquidi determinatam & sibi æqualem attingeret, nec ei diversos motus tribueret, sed eum solum quo ipsa movetur.

Tertiò partes materiæ liquidæ quæ diversimodè moventur, habent multos motus oppositos, & in se invicem incurrunt, & aliunde sunt incapaces elaterii, cum sint omnino molles; ergo idem iis accidet ac dum corpora mollia inter se incurrunt, sed dum corpora mollia in se invicem incurrunt, eliditur, & perit omnis motus, ergo partes illæ post aliquos motus tandem quiescent.

Quartò corpora solida se tangunt, & quieta sunt sæpissimè, nec tamen sunt unita, ergo unio invehit aliquid aliud quam eorumdem corporum quietem. Antecedens per se patet, nam duo globi eburnei supra mensam positi quiescunt, & tam sunt juxta se positi, illi tamen globi uniti non sunt, ergo ipsorum quies non illos sufficienter unit. Nam unio duorum corporum dicit præterea quod unum ab alio facilè divelli non possit, sed necessarium sit, ut si uni motus imprimatur sequatur etiam motus alterius, quæ omnia ex sensu communi patent. Quod si dicas inter corpora dura se tangentia intercurrere materiam subtilem quæ ea disjungat. Sed contra verè corpora dura possunt immediatè se tangere, ita tamen ut non sint unita, sed si immediatè se tangunt nulla materia subtilis inter illa præterfluit, alioquin immediata non essent, ergo præcisè unio non potest in quiete, & contiguitate consistere. Video enim aliqua contigua quæ sine difficultate divelli non possunt, alia verò, quæ huic separationi non resistunt, quæro quid sit in unis quod in aliis non reperitur.

Ratio autem quam affert Carthesius, ut probet nullam dari aliam unionem quam quietem corporum, nullius est momenti. Quærit enim an sit substantia, an modus? respondeo esse modum; ad id quod vult nullum modum magis adversari motui per quem istæ particulæ separentur quam quietem. Respondeo quietem adversari separationi locali, seu quæ dicit negationem immediationis, nego tamen quietem adversari disjunctioni: & assero aliqua duo quieta non esse unita. Unio enim resistit separationi, ponitque duas particulas in tali statu, ut nullus possit produci motus in una, quin producatur in alia, ita ut major requiratur virtus ad unam seorsin ponendam, quam quæ requiritur simpliciter ad eam movendam. Nam sunt aliqua corpora juxta se posita, quæ avelli non possunt, & licèt haberem eas vires quæ necessariæ sunt ad movendum quodlibet eorum, non tamen sufficiunt ad ea separanda, & sunt alia quæ ita se habent, ut nulla requiratur major virtus ad ea separanda quam quæ sufficit ad unum seorsum movendum, sunt tamen utraque juxta se posita, & in quiete, ergo est aliquid in unis, quod in aliis non reperitur, hoc porro voco unionem, ergo datur aliqua unio.

Addo insuper quod ipse Carthesius aliam etiam unionem agnoscat, asserit enim ramenta seu partes materiæ inæquabiliter figuratæ, dum concurrunt, ita intricari, & inter se cohærere ut avelli facilè non possint, sed intricatio, & implicatio partium est aliquid aliud præter juxta positionem cum quiete.

Objicit sibi Carthesius, quod nulla ratio dabetur cur corpora manibus nostris minora tam firmiter sibi adhæreant, ut nulla earum vi sejungi possint; si enim inquit eorum partes nullo alio glutine sibi adhæreant, quam quod eorum partes juxta se positæ quiescant, cum omne corpus ab alio majori se loco moveri possit, non apparet ulla ratio cur clavus verbi gratia ferreus à manibus nostris divelli non possit. Respondet autem id ex mollitie manuum nostrarum oriri, nempè quod pars manus proximè tangens clavum sit minor clavo, est autem minor clavo, quia sejungitur à reliquis eo quod à reliquis propter mollitiem sejungi possit: immò si velit sejuncta sit aliquo modo, quæ dicta sunt secundum regulam motus supra constitutam, quâ vult ut quodcumque corpus à minori se loco dimoveri non possit.

Collige ex hac responsione quod materia subtilis nullam in ullum corpus durum impressionem facere possit, cùm enim pars quælibet corporis duri, sit major parte materiæ subtilis ipsam tangente & impellente, ab ea loco dimoveri non poterit. Si enim omnes partes manus non faciunt unum totum respectu clavi frangendi, eo quod propter mollitiem separentur ab invicem, sic multò minus materia liquida reducta scilicet, ad partes qualibet assignabili minores, impressionem facient secundùm illam partem quæ immediatè tangit, cum qua scilicet reliquæ unum totale agens efficere non possunt, utpotè motibus omnino diversis affectæ. Quare materia subtilis nullam omnino impressionem faciet, quod est diligenter notandum, ea enim utar in pluribus casibus ratione.

Nescio quomodo ista se habeant, sed scio quod si toto pugno percutiar excipio impressionem totius pugni, & non tantum partis illius quæ immediatè me tangit, quamvis propter mollitiem, quæ aliquid habet liquiditatis, dicatur à reliquis partibus separata.

Neque verò solvit difficultatem, nam etiam adhibito corpore duro, verbi gratia, malleo certum est quod centuplò major vis requiretur ad divellendam unam partem clavi ab alia, quam quæ necessaria est non tantum ad destruendam simplicem ejus quietem, propè aliam, sed etiam ad movendum totum clavum, ergo adhæsio illius partis est aliquid aliud præter quietem juxta aliam partem.

Sic ergo puto rem constituendam, puto aliquorum corporum fluiditatem consistere in divisione in minutissimas partes, Sic videmus, quod si in acervum millii manum inseras facilè ejus partes cessuras motui manus. Sic videmus nonnunquam cineres aliquos ita subtiles esse, ut videantur liquiditatem habere, præcipuè si eorum particulæ fuerint globosæ, seu sphæricæ. Sic partes metallorum separatæ ab invicem, & quasi in liquido, nempè in igne natantes liquiditatem habent, quæ rursus amoto liquido intricantur, & sibi invicem rursus adhærent, Ita charta madida liquiditatem facilemque divisibilitatem habet, quæ exsiccata rursus fit dura: atque hæc videtur esse liquiditas impropria, aut non perfecta, seu ut ita dicam participata, videtur enim hæc corpora esse permixta cum aliquo liquido perfectiori.

Quare si omnia sint plena, cum nolimus in hoc absurdum incidere, quod materia liquidorum dicatur divisa actualiter in infinitum, seu quantum divisibilis

divisibilis est, multò minus quod dicamus divisionem actualem in motu positam esse. Ideò benè asserere possumus quod liquiditas consistat in divisis divisibilitate facili. Cum enim experiamur corpora esse alia aliis duriora, hoc est partes aliquorum corporum minus firmiter inter se adhærere quam aliorum, in quocumque tandem constituamus hanc adhæsionem, multiplicem & diversam cogitare possumus, unamque alia perfectiorem.

Arguo item Carthesium quod non satis consequenter loquatur. Pluribus enim locis asserit partes materiæ ramosas intricari, & in ea intricatione duritiem consistere; ergo durities in quiete posita non est: quæ quies tam benè concipitur in globosis partibus, ac in ramosis, aut inæqualibus. Addo ulterius quod ut concipiantur partes ramosæ, debet jam intelligi aliqua unio, inter particulas ex quibus illæ componuntur, atque adeo jam aliqua durities; ergo ea in intricatione partium tota consistere non potest.

Scio ab aliquibus rem ita constitui ut dicant aliquas partes materiæ, licèt de potentia Dei absoluta divisibiles, naturaliter seu ab agentibus naturalibus separari non posse, eò quòd habeant peculiarem modum existendi, vi cujus separationi resistant, hoc est resistant illi motui, quo una pars ab alia separatim moveretur, quæ resistentia major est, quam sit in ea parte simpliciter quiescente, & has partes vocant nonnulli minima naturalia, ex quorum scilicèt adhæsione & intricatione majores partes exurgunt; debet item dari alia species particularum, non quidem ita mobilium ut omnes diversimodè moveantur, & per hos motus sint divisæ, quantum dividi possunt, sed quæ facilè dividi possint, & infirmam unionem habeant. Alia multa dici possunt in hac materia quibus non immoror.

PROPOSITIO IX.

Suppositio materiæ à Deo creatæ, divisæ & motæ, apertè se destruit.

Supponit Carthesius omnium mundi corporum unam & eandem esse materiam, fuisseque à Deo divisam in partes proximè æquales, quæ quidem initio sphæricæ esse non potuerunt, quia, inquit, plures globuli simul juncti spatium continuum non replent; cujuscumque tandem figuræ fuerint, non potuerunt successu temporis non fieri rotundæ, eò quòd varios habeant motus circulares, eò quòd per motum eorum anguli atterantur. Vult item quod dum partium quæ fiunt rotundæ anguli atteruntur, id quod ex ipsis eraditur est adeò minutum, & tantam celeritatem acquirit, ut sola vi sui motûs, in ramenta innumerabilia dividatur. Quo enim minutiora sunt ista ramenta eo facilius moventur, & dividuntur, & quod majorem habeant superficiem pro ratione suæ molis, & occurrunt aliis corporibus secundum superficiem, & dividuntur secundum molem. Atque ita aliqua materiæ portio celerrimè movebitur, ac in partes reipsa indefinitas dividetur, ut in ea motus omnes peragi possint. Atque ita duo genera materiæ valdè diversa habemus. Nempè materiam illam subtilem, quæ tantam vim agitationis habet ut aliis corporibus incurrendo in minutias indefinitæ parvitatis dividatur, & figuras suas ad omnes angulorum ab iis relictorum angustias implendas accommodet. Alterum est sphærarum illarum.

Dico, in hac doctrina multas contradictiones reperiri. Prima sit hæc, quod materia dividatur in partes non sphæricas, vel enim dividitur priusquam moveatur, vel per ipsum motum. Non antequam moveatur, quia nulla divisio nisi per varietatem motuum cogitari potest secundùm hunc authorem, vel quod materia liquida inter corpora intercurrat; sed nulla adhuc materia subtilis supponitur, quippè quæ ex solo diuturno partium attritu oriatur. Ergo restat ut per motum ipsum talis fiat divisio: ostendo autem omnem motum impossibilem esse.

Nullus motus particularum cubicarum possibilis est, quin ipsæ ab invicem recedant, ut nempè angulis in se invicem incurrentibus fiat locus; sed particulæ cubicæ recedere non possunt, cum omnia sint plena, ergo impossibilis est omnis talis motus, nisi jam ab initio sphæricam figuram habeant, quam tamen decursu tantum temporis, & post innumeras circulationes acquirere dicuntur.

Secundò nullus est possibilis motus, nisi detur materia liquida, quæ repleat spatia ea angusta, quæ necessariò resultant ex motu circulari cuborum; sed dum primum his particulis cubicis imprimitur motus, nulla talis materia liquida adhuc existit, ergo nullus possibilis est motus. Major est certa. Supponantur duo cubi moveri circulariter circa sua centra, aliquando accidet ut anguli angulis directè respondeant, aliquando anguli superficies tangent prout sors tulerit, sed in tali casu exurget aliquod spatium inter cubum & cubũ, sicut dum anguli vicini à se invicẽ recedent.

Quod verè motus sit impossibilis nisi detur materia subtilis facilè probatur. Si exurgerent hujusmodi spatia, nec ulla supponeretur materia subtilis, daretur necessariò vacuum; sed nullum vacuum possibile est, ergo nullus motus dari potest, quo anguli vicini duorum cuborum se tangentium recedant ab invicem, & moveantur circulariter, quin supponitur materia subtilis multò minor quam sint cubi illi. Spatia enim quæ fiunt, angustiora sunt quam ut capiant cubos ubi paulatim augentur & minuuntur, ergo necessariò supponitur materia liquida, quæ hujusmodi spatiorum figuram induat. Quod verò nulla adhuc talis sit materia subtilis, probatur. Quod enim non sit, nisi post diuturnum attritum, & incursum partium, non est dum primum fit motus; sed ex mente hujus authoris materia subtilis non fit nisi per diuturnum attritum partium. Angulos enim vult paulatim atteri, ergo hanc materiam subtilem paulatim generari, ergo non ab initio tota fuit.

Tertiò materia ex qua fit pulvisculus ille, est materia dura, sed ex materia dura per solum attritum fieri non potest materia liquida, ergo per hunc attritum fieri non potest. Sumatur enim quælibet materia quæ minutissimè conteratur, experientia constat, quod non propterea fiat liquida, ergo idem eveniet in hoc casu. Quod multò magis verum est secundum notionem liquiditatis superius ab hoc authore allatam; nam non potest attritus liquiditatem conferre, nisi conferat illi

divisionem

PROPOSITIO XI.

Quæ reprehendi debeant in constitutione mundi à Cartesio facta.

Fabulam hîc examinandam suscipio, nomine enim sui commenti mundi hujus fabricam à se prolatam frequenter appellabat Carthesius, immeritò tamen cum ea verisimilitudine careat, quæ præcipua censetur dos earum narrationum, quas nomine Romanorum solemus intelligere. Contêdit igitur hic author constitutis à se motuum legibus, ex materia in partes divisa, emersurum esse mundum qualem nunc spectamus. Explosa jam diu fuit hæc sententia quæ ex atomorum fortuitò concursu eum coaluisse asserebat; hanc non absimilem similiter explodendam assero si quis fundamenta quibus innititur perpenderit.

Ridicula est, si quæ unquam ratio, quæ ab immutabilitate Dei eandem in mundo motus quantitatem stabilire conatur; quasi verò Deus magis mutetur, si modo minorem, modo majorem producat creaturarũ numerũ qui cum per totam æternitatem nihil produxerit, in tempore verò mundum hûc creaverit. Anne magis mutabitur Deus si dum globus in globum incurrit, uterque sisteretur, & quiesceret, quam si percutiente immoto solus percussus moveretur. Ponamus enim agens immutabile, ut est Deus, debere semper eodem modo operari, sequeretur quod ut semper eodem modo operetur, eosdem debeat semper effectus producere, hoc est, eosdem motus: non producit autem eosdem motus, si quæ corpora movebantur quiescant, & quæ quiescebant moveantur. Nam dicere quod ut agat eodem modo, sufficiat, quod sit eadem motus quantitas, est ludere in æquivoco facilè solubili, nempe in hac voce (*eadem*) quæ identitatem significare videtur, cum tamen in casu proposito, non possit aliud nisi æqualitatem innuere. Neque enim motus est aliquod ens absolutum, quod possit variis subjectis accommodari, sed necessariò affixus est suo; non est ergo idem motus qui fuit antea, unde si mutaretur Deus, dum produceret majorem motus quantitatem, mutaretur etiam dum produceret aliam motus quantitatem licet priori æqualem. Mutaretur quidem Deus si decrevisset semper producere æqualem motus quantitatem, & postea vellet producere minorem, sed si decrevisset uno tempore producere certam, & alio producere aliam, nulla esset propterea in Deo mutatio timenda. Sicut qui ab initio diei plurimas, & varias sibi imponit actiones faciendas, non propterea dicitur mutationi obnoxius, quod eas successivè assumat, eò quòd omnes simul etiam cum sua successione habuit in mente. Quæ voluntas eadem perseverat.

Jam ostendi supra nec esse verum quod res immota non moveatur nisi ab extrinseco, nam datur in natura principium productivum motus, ut in nobis ipsis experimur, in quorum potestate positum est ut moveamur, vel non moveamur.

Demonstravi item certis & indubitatis experimentis quotiescumque corpora non elastica sibi invicem occurrunt, toties eorum motus elidi, & perire, atque adeo nullo modo constare sibi posse hanc hypothesin, de æquali motûs quantitate perseverante semper.

Sed data & non concessa tali hypothesi, contendo, non posse ex fortuito concursu, & inconcinno hujus materiæ motu produci hunc mundum, cujus perfectiones tantæ sunt, ut opus summæ sapientiæ, & non casus alicujus fortuiti haberi debeat. Debiles sunt admodum, nulliusque momenti eæ rationes quæ ad commentum hujusmodi statuendum ab hoc authore proferuntur.

Nam capite octavo tractatus hujusmodi in quo præsertim mundi generationem explicat, tam multa dicit inter se pugnantia, & assertioni quam stabilire conatur adversantia, ut nihil cohærere videatur.

Primò igitur asserit, quod quamcumque inæqualitatem motus, aut partium materiæ Deus creaverit, & quantumlibet confusè eas permiscuerit, statutis motus seu naturæ legibus, fore ut omnes ad mediocrem motum, & magnitudinem redactæ sint, & consequenter formam secundi elementi induerint. Hoc enim verò minimè sequi potest. Ponamus enim aliquas partes aliis longè majores creatas fuisse, quamvis per aliarum occursum deterantur earum anguli, non video tamen quare suum excessum supra alias minores non retineant, atque à Deo erunt particulæ aliæ millecuplò majores. Quod si hæc inæqualitas in mole admittatur, non video quòd motus mediocris in omnibus sequi debeat, nam si majoribus motus major tribuitur, dum illæ incurrent in alias minores, iis motum majorem tribuent, secundum regulas Carthesii.

Addit ulterius quòd quia in hoc mundo nullum est vacuum, nullus etiam motus in lineam rectam perfici possit; ideoque convenire debuerunt quamplurimæ ut in orbem seu circulariter moverentur. Quia verò supponuntur diversimodè moveri, non circa unum centrum omnes motæ sunt, sed circa plurima centra.

Hanc considerationem puto ejus principiis omnino esse contrariam; si enim particulæ hoc modo conveniunt ut circa idem centrum moveantur, si cubicæ creatæ sunt, non propterea fient sphæricæ aut producetur ulla materia subtilis. Vel enim Deus initio partibus omnibus materiæ motum indidit circularem quo singulæ circa suum centrum moverentur, vel tantum circularem quo circa commune aliquod centrum. Si primum, non video quomodo hi particulares motus coalescere possint ad unum vorticem constituendum, si enim motus liquidorum, quo particulæ separatim moventur, non mutatur in motum circularem communem, neque hi particulares motus communem aliquem producent. Quòd si ab initio motus ille circularis productus est, nullus erit partium & angulorum attritus. Ex quo concludo motum inconcinnum & confusum partium, qualis in partibus aquæ stagnantis ab eodem authore admittitur, nunquam in vorticem mutari posse.

Adde quod quia in mundo hoc pleno motus rectus sit impossibilis, sed necessariò in circularem mutetur, non propterea magnus aliquis vortex producetur, qualem circa solem considerat hic author, sed tantum peculiares aliqui valdè parvi, puta unius aut alterius exapedæ, qualem producimus dum movetur, aliquod projectum, in aëre, sic enim facilius partes materiæ concurrent.

Ordo item partium istarum omnino fictitius est, immò contradictoria complectens, nam ex eo quod omnis motus sit ad lineam rectam, & quod singulæ partes propterea recedere conentur à centro, concludit quod majores, seu quæ majores vires habent, aut quæ sunt magis agitatæ, debeant potius circumferentiam vorticis petere, nempe describere arcus majores, minusque à linea recta deficientes. Concludit tamen postea quod majores sint centro viciniores.

In genere tamen, ex eo quod omnis motus rectus sit ex natura sua, nullusque exerceri possit nisi circulariter, concludo nullum motum diuturnum esse posse, nisi detur principium productivum motus. Nam primò nullum violentum ex natura sua durabile est, sed omnis motus circularis violentus est, & contra inclinationem naturalem partium, quâ recedere conantur à centro. Sed quoties motui fit violentia, ita ut cogatur deflectere à linea propria ad quam dirigitur, toties retardatur motus; ergo omnis motus circularis retardatur. Probatur minor. Ideo motus penduli tardior est quam motus perpendicularis ejusdem corporis soluti, quia funis cui annexum est tale corpus, eum deflectere cogit à linea directionis; ergo omnis motus hoc modo retardabitur. Pariter motus in plano inclinato tardior est, secundum majorem, aut minorem plani inclinationem. Quæ retardatio non provenit tantum ex eo quod alteri corpori communicetur motus. Nam dum virga ferrea circa clavum immobilē circulariter movetur, motū tardiorem habet, quam si moveretur recta deorsum, sed in tali casu nullus clavo motus communicatur nec alteri corpori. Pariter in motu circulari alicujus vorticis cum partes mediæ quantum possunt recedant à centro, affectentque quantum possunt partes exteriores ipsis suum motum communicabunt amittentque suum, quare tandem sistetur ille vortex, fietque in medio corpus quiescens, quod sensim augebitur. Neque verò partes exteriores impellent interiores, quia semper quantum possunt recedunt à centro; ergo nunquam ad centrum feruntur. Ex quibus concludo dari principium creatum conservativum & productivum istius motûs, nempe forma substantialis materiæ ætheræ, quæ tam sit determinata ad motum, quam forma ignis aut alia quælibet.

Sine ratione dicuntur aliquæ partes vel majores, vel irregulares coaluisse ad formandos cometas, si enim particulæ cubicæ ita franguntur, ut angulos amittant, quæcumque aliæ etiam irregularis figuræ si moveantur frangentur etiam, atque adeo nulla restabit ad formandos cometas idonea. Quamvis autem dici posset quod statim amittant suum motum, quia moveri non possunt quin multis aliis suum motum communicent, dico quod aliæ multæ moveri non possunt quin in istas incurrant, eisque suum etiam motum communicent.

Circa materiam subtilem præter illa quæ superius dicta sunt, tria hîc reprehendo. Primum est, quod dicat eam materiam quæ ab angulis abrasa est debuisse acquirere motum multò majorem, quam sit motus partium. Contendo autem, nullum corpus alteri motum majorem & velociorem quam habeat communicare posse, nisi interveniat elaterium. Cum autem hæc materia subtilis sicut & globuli secundi elementi tali elaterio careant, impossibile erit ut motum majorem communicent quam habeant. Cum enim uni parti communicatur motus, idèo quia impellitur, impellitur autem quia impedit motum alterius, non impedit autem si æqualiter moveatur.

Quod verò hæc materia subtilis debeat acquirere facilitatem ad hoc ut dividatur, & mutet singulis instantibus figuram, nempe ut se accommodet figuræ alienorum corporum, quæro quid sit ista facilitas, anne motus, an divisio actualis? non motus, possunt enim corpora etiam dura quolibet motu incitatissimo moveri; non actualis divisio in infinitum, quæ tempus infinitum requireret. Quod si facilitas illa ut dividatur sit aliquid aliud, quæro quid sit, & in eoque asseram constitutam esse liquiditatem.

De Formatione solis.

Admittit item quod hujus materiæ subtilis major sit copia quam quæ requiritur ad replendum illa vacuola quæ inter globulos secundi elementi interjiciuntur, quæ materia debet concurrere ad centrum, ibique circumvolvi assiduè, ita ut corpus, seu quasi vorticis nucleus hujusmodi materia constans, solem componat. Dico hanc assertionem & experientiis & principiis hujus philosophiæ repugnare. Nam in omni vortice partes viciniores centro aliis remotioribus, & mobilioribus, sunt crassiores, nam in particulari telluris vortice ita se res habet ut tellus sit crassior, exinde disponatur aqua, tum aër; ergo etiam in magno vortice subtilior materia non erit in centro, sed circa circumferentiam æquabiliter fundetur. Probo autem paritatem esse omnimodam, ideo enim in telluris vortice hæc ita disponuntur, quia particulæ minores mobiliores sunt, ejiciunturque longius, quam partes crassiores; ergo si sol constet materia subtilissima hæc longius ejicietur ab illa vertigine, potiusque circumferentiam quam centrum verticis obtinebit. Ad id verò quod vult hanc materiam ex qua sol componitur, licet subtilissimam, motu vehementissimo suas circulationes absolvere, & partes secundi elementi in omnem partem impellere, est conta ejus principia. Cum enim materia subtilis constet partibus minoribus quam sint globuli secundi elementi, eos impellere non possunt, neque enim corpora minora ullam vim habent in majora. Deinde si hæc materia subtilis continuo impulsu impetit hos globulos, tantum de suo motu deperdit, quantum enim aliis communicat, tantum de suo motu amittit. Tertiò motus hic vertiginis tantus non est ut in eo possit esse actio luminis, nam solis motus circa centrum suum intra 27 dies tantum absolvitur ut constat ex maculis quæ in ipsa ejus superficie esse demonstrantur, quæ tamen hanc periodum habent; & motus vorticis propè Saturnum longè incitatior est motu solis circa centrum; ergo in eo potius actio luminis esse deberet. Quartò motus flammæ, in quo secundum hunc authorem posita erit ejus illuminatio, non erit, circularis circa unum idemque centrum: ergo motus solis qui illuminationem efficiet non erit motus ille vertiginis, sed aliquis alius longè diversus.

Quintò ostendo solem rotundum esse non debere. Vortices isti non volvuntur in omnem partem

tem circa centrum, sed circa axem, ergo particulæ secundi elementi, quæ dicuntur majorem habere vim ad recedendum à parte immota, non tantum recedere deberent à centro, sed etiam, quæ sunt dispositæ in circulis Eclypticæ parallelis æqualiter aut ferè æqualiter recedere debent, ab axe, ac globuli qui sunt in plano Eclypticæ recedunt à centro, circuli enim distantes hinc inde à medio seu Eclyptica 20 gradibus, non sunt sensibiliter minores ipsa Eclyptica. Sed hoc posito spatium quod in medio relinquetur, materiæ subtili solem componenti non erit rotundum, sed valdè oblongum, ergo sol eandem figuram obtinebit.

Sextò sol non deberet esse semper ejusdem magnitudinis. Cum enim materia quæ liquida est non addensetur nec indurescat cum sit reducta ad ultimas minutias, & aliunde globuli secundi elementi sæpè frangantur, nulla est ratio cur non major sit copia materiæ subtilis, certamque taxet solis magnitudinem. Videretur materiam subtilem esse eam solam quæ abrasa est ab angulis cuborum, ut fierent globuli, quæ præcisè replet intervalla inter globulos relicta; quod si dicatur multos globulos fractos esse, quæro cur etiam nunc globuli non frangantur. Majorque extet copia materiæ subtilis, & sol non crescat, cum dicatur coalescere ex ea materia subtili, quæ superabundat repletis omnibus intervallis globulorum. Quæro item an omnes globuli se tangant & nunquam relinquant majus aut minus intervallum inter se? hoc autem negari non potest, cum ea ratione explicetur rarefactio. Ergo tota materia subtilis quæ residua est repletis intervallis non componit solem, sic enim nulla esset possibilis rarefactio.

PROPOSITIO XII.

De Cometis.

Hujus propositionis doctrina tota in eo posita est ut comparet vortices quos in cœlo cogitat, cum flumine aliquo. Contendit autem corpora levia, seu ex materia minus compacta, ita se habere ut dum volvuntur simul cum flumine, ejiciantur potius ad eas partes in quibus motus non est ita velox, ea verò quæ sunt compactiora potius ferantur in eas partes in quibus motus est velocior. Sed in vorticibus circumferentia velocius fertur, quam partes centro propiores, ergo corpora crassiora ad circumferentiam ferentur, ideóque ab uno vortice facilè ad alium progredientur, tales vult esse Cometas. Corpora verò minus solida potius ad centrum horum vorticum ferentur, atque adeo ex suo vortice nunquam egredientur: Tales vult esse Planetas; ita explicat quomodo planetæ qui in hoc vortice in quo versamur, inventi sunt ibi constanter permaneant, cometæ verò rari sint prout sors tulerit ut ab aliis vorticibus in hunc nostrum venerint. Sed tota hæc doctrina peccat in sua suppositione, facitque effectus omninò diversos ab iis quos observamus.

Primò quod corpora majora ad circumferentiam vorticum ferantur, falsum est. Cum enim minutioribus corporibus motus multò velocior communicetur quam majoribus, ut ipse etiam asserit, omnis autem motus sit in lineam rectam, plus recedunt à centro corpora minutiora, quam majora, & hæc est ratio cur in telluris vortice partes crassiores fiant centro propiores. Secundò si hoc semel admittatur, nonne planetæ sunt corpora crassiora particulis primi aut secundi elementi quibus innatant, ergo etiam ipsi planetæ ad circumferentiam ferentur. Tertiò ideo cometæ ab uno in alium vorticem transeunt, quia crassiores sunt & compactiores quam planetæ, sed falsum est, nam planetæ compactiores sunt cometis. Ego testes advoco oculos spectavi enim sæpissimè cometam anni 1664 adhibito etiam telescopio, non mihi videbatur nube aliqua compactior, cum tamen planetæ multò sint compactiores. Confirmatur id ex eò quòd cauda cometarum melius tribui non possit quam radiis solaribus per ejus corpus trajectis. Deinde non posset cometa descendere in nostro vortice ita ut fiat valdè nobis vicinus, ut ex ejus motu manifestum redditur; esto enim possit aliquandiu retinere conceptum ab alio vortice impetum, non tamen ita ut infra Martem descendat, sed subito rejici deberet ad circumferentiam, ita ut si benè considerentur omnes cometarum circumstantiæ vix ulla cum effectibus congruat. Præterea hic noster vortex cujus centrum est sol, volvitur circa polos Zodiaci, cometæ autem non feruntur in consequentia, sed ut plurimum in antecedentia, & per alia plana longè diversa ab iis in quibus volvuntur Planetæ.

Reliquas verò cometarum circumstantias ita malè explicat ut nihil pejus. Primò quidem cometam per lineam rectam movet. Primò hoc falsum, nec amplius propugnari potest, cum ex suo plano exeant, quod non facerent si lineam rectam percurrerent. Secundò neque secundum ejus principia verum est, nam dum cometa ferebatur in uno vortice, etiamsi versus circumferentiam propulsaretur, circulariter tamen fieret hæc impulsio, prout nempè feruntur partes illius vorticis. Cum ergo ubi attingit limites duorum vorticum æqualiter ab utroque expellatur, non video quomodo possit suum deserere, ut alienum subeat, ferretur enim per terminos duorum vorticum. Non explicat melius apparentem cometarum incitationem, & retardationem. Certum est enim quod cometæ initio & in fine lentius procedant, in medio autem cum majores apparent velocius ferantur, hoc est initio & in fine, quasi stationarii sint & aliquibus tantum minutis in suo orbe promoveantur, in medio cursu plures gradus in singulos dies percurrant, cujus rei certa ratio non redditur. Anne initio cum est nostrum vorticem ingressus, repellatur ad ejus circumferentiam, ex præconcepto autem motu à priore scilicèt vortice feratur aliquam tamen retardationem patiatur; si hoc fit, in fine cum expelletur ad circumferentiam incitaretur ejus motus. Deinde motus cometarum explicatio, & figura quam profert videntur innuere ita ferri cometam in nostro vortice quasi nihil omnino ab ejus motu pateretur, cum tamen illi se accommodare debeat, & obsequi.

Addo quod nulla ratio redditur cur nullus cometa semicirculum absolvit.

Ex quibus evidenter concludo nullam motus cometarum circumstantiam in hac hypothesi explicari, nam hypothesis quæ melius illum explicat, supponit ejus æquabilitatem, nempè quod temporibus æqualibus aut æquales arcus sui circuli, aut æqualia segmenta suæ lineæ percurrat, atque adeò quòd omnis acceleratio aut retardatio menti relinquuntur, vel æquales, vel majores, si hoc ultimum non poterunt subire hæc foramina, si æquales, ingressæ semel egredi non poterunt; hæc enim foramina non sibi respondent è regione, sed obliquè disponuntur, & contendo quod triangulare prisma æquale huic foramini triangulari, si aliquam longitudinem seu altitudinem habeat quæ in ipso admitti debet, ut striæ efficiantur, egredi non poterit, hoc est ab uno foramine triangulari, ad aliud vicinum & obliquè positum transire; occurrit enim quartus globus ab aliis tribus se tangentibus quasi sustentatus. Quod ut melius concipiatur, tribus globis se tangentibus quartus imponatur, ut fiat ex quatuor globis quasi pyramis, inseraturque per unum ex his triangularibus foraminibus aliquod corpus durum, & manifesta erit impossibilitas hujus transitus.

Quod si particulæ duræ quasi innatantes materiæ subtili, & liquidæ sint multò minores intervallis triangularibus, nullæ fient striæ. Hoc primum contendo non fuisse benè consideratum, & impossibile esse.

Secundò arguo quod velit hujusmodi particulas striatas, aut ramenta inveniri præcipuè in ea materia primi elementi, quæ à polis versus medium cœli secundum lineas rectas moventur; ejus enim partes (inquit) quam minimum agitatæ sufficiunt ad istum motum rectum, non autem ad alios magis obliquos qui fiunt in aliis locis. Sed contra quia hæc materia quæ à polis ad centrum fertur eadem est, quæ in Eclyptica alterius vorticis continebatur, sed quæ continebatur in Eclyptica alterius vorticis carebat hujusmodi ramentis, ergo hæc quæ secundum axem procedit ad centrum, caret etiam hujusmodi ramentis. Ratio autem quam videtur afferre, quod ibi habeat solum motum rectum atque adeo non sit agitata, nullius est momenti. Primò falsum est habere solum motum rectum, cum enim ibi globuli secundi elementi tam se tangant, quam in aliis locis intervalla inter ipsos vacua, non sibi invicem respondebunt; ergo motus rectus peragi non potest sed necessariò intortus & obliquus, immò si benè consideretur textura & dispositio globulorum, nulla ratio afferri potest, cur ea materia quæ motum inchoavit ad centrum, non regrediatur cum saltem ex parte, immò in decursu totam, cum qua per unum foramen triangulare ingreditur globulum in medio positum offendat, & consequenter dividatur in tres partes, exeatque per tria alia foramina, eò quòd non sit potior ratio, cur tota per unum transeat. Immò quæ in medium globum incurrit regredi debeat, secundum leges reflexionis. Videtur item hic author confundere motum vorticis, & motum in quo liquiditas consistit, motus enim hic separans omnes partes à se invicem, non amittitur, etiamsi omnis alius motus cesset. Ita videmus in vase nullum esse motum circularem, aut alium quemlibet, licèt perseveret semper motus liquiditatis, motus enim circularis vorticis, nihil facit ad liquiditatem, cum globuli secundi elementi, illum velocissimum habeant, neque tamen propterea liquiditatem habeant. Posset igitur cessare illa agitatio communis vorticis & non tamen perire motus liquiditatis, sunt enim hic motus differentes, qui nec se destruunt nec se juvant.

Tertiò arguo quod nolit distinguere has particulas striatas à reliqua materia primi elementi quamdiu inter globulos secundi elementi versantur, quia inquit nullum peculiarem effectum habent, tum quia multas alias non multò minores, nec celerius agitatas in ea contineri arbitramur, Ita ut inter omnium minutissimas, & istas striatas innumeri sint aliarum gradus, ut facilè ex inæqualitate viarum quas perlabuntur agnosci potest. Dico ergo totam hanc Assertionem contrariam esse doctrinæ supra positæ de liquiditate perfecta, quæ inesse debet primo elemento, vi cujus ita ejus particulæ sint actu divisæ, ut nullam accipere possim quæ non habeat motus diversos, atque adeo vi talium motuum sit divisa in alias minores. Si enim dividatur tantum prout opportunitas tulerit, hoc est cum viæ per quas transeundum erit fuerint majores, particulæ etiam majores evadant relabitur in opinionem communem statuentem liquiditatis essentiam in divisibilitate facili, & non in actuali divisione ex motu vario orta. Quod si dicatur primum elementum habere varios gradus liquiditatis, ita ut in materia summè liquida innatent particulæ duræ, contendo nullam esse potiorem rationem, cum hæ inveniantur potius in materia subtili quæ à polis advenit, quam in materia ipsa solis; ratio est quia hæc ramenta quæ transeuntia per tot angustias in tot globos solidos incurrunt potius franguntur, quam si in majori copia ejusdem materiæ subtilis innatarent. Quare melius conservabuntur hæc ramenta in sole quam dum coguntur transire per tot angustias, atteruntur enim etiam.

Quartò non sola materia subtilis aut etiam ramenta circumvolvuntur per motum circularem ipsius vorticis, sed etiam ipsa foramina triangularia, globuli secundi elementi, ergo nullæ producentur striæ ad modum spirarum, probatur consequētia. Quotiescumque generatur cochlea, debet vel foramen firmum esse, & corpus quod inseritur circumvolvi vel foramen circumvolui, & corpus quod inseritur rectà procedere, sed ex suppositione & constructione vorticis, tam globuli circumvolvuntur quam materia subtilis quæ per intervalla transcurrit, ergo non producentur ullæ cocleæ. Quare ex eo nulla poterit afferri ratio cur quæ ab uno polo adveniunt non regrediantur facilè, aut contrariam ineant viam. Nam cum in ipsis globulis secundi elemēti nulli canales cochleati excaventur, sed maneant foramina seu intervalla semper triangularia perinde erit, quam viam ineant istæ particulæ striatæ, cum semper sint congruentia foramina.

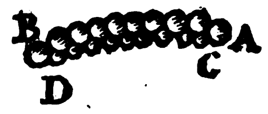
Ex his concludo quod sine ratione dicatur advenire à polis hæc materia ramosa, cum tam benè aliunde advenire possit, unde ex fortuito concursu ramentorum possunt generari maculæ. Quod non melius explicatur toto hoc circuitu, quam si dicamus ex aliqua materia densiori, hoc est non æquè liquida, aut agitabili coalescere posse maculam, cum autem explicari non possit in quo posita sit densitas secundum principia hujus authoris, ad principia communia recurrendum erit.

Quod ad præcisam generationem istarum macularum pertinet, hæc videtur explicari comparatione liquorum igni admotorum qui ubi effervescunt diversas particulas diversæ à reliquis naturæ, ac minus ad motum aptas emittunt in spumam ex iis conflatam, quæ supra eorum superficiem natat. Ita etiam materia solis ex ejus polis versùs Eclypticam ebulliens particulas striatas aliasque omnes partes, & æquè velox, semper contrarius est, unde si eclyptica unius vorticis attingat polum alterius, cum ibi attingat partes quietas, & ipsa velocissimè moveatur, non poterit ejus motus non retardari, & quies partium polarium interturbari. Quare quomodocumque disponatur tres vortices impossibile est ut non sibi invicem sint contrarii uniusque motus velox alteri tardius motæ communicetur.

Non minus contradictoria est ratiocinatio etiam quam affert ut probet materiam subtilem à centro cujusque vorticis ad circumferentiam ejus seu ad eclypticam delatam, si in polos alterius vorticis ibi incurrat, ferri per axem ad ejus centrum, atque hoc modo reparare damna, quæ ex recessu à centro oriri possent. Quia inquit ibi in partibus polaribus minor est resistentia eò quod moveantur tardius, aut potius non moveantur, nam ex principiis ejus motus motui non est contrarius, sed potius quieti. Ergo quæ lentius movebuntur aut etiam quiescent, minusque facilè è suo loco ejicientur, quam quæ citissimè circumvolvuntur; ergo resistentia major est in partibus polaribus, quam in partibus citissimè motis.

Nihil etiam consequenter dicit circa motum hujus materiæ subtilis à polis cujuscumque vorticis ad ejus centrum, invenio enim ubique manifestas contradictiones. Dicit ergo quod hæc materia subtilis subministretur ab aliis vorticibus quorum eclypticæ vicinæ sint polis hujus vorticis: quasi recessus particularum à centro fieret per lineam rectam, & non per tangentes, quod tamen requireretur ad hoc ut hæc materia subtilis subiret axem & recta procederet ad centrum. Deinde vult eandem materiam subtilem rectà transire usque ad centrum solis, immò & ultra, hoc est usque ad circumferentiam oppositam, ubi occurrit globulis secundi elementi eosque impellit versus circumferentiam. Sed quæro utrum materia hæc subtilis dum à polis vorticis ad centrum ejus progreditur nullos globulos secundi elementi offendat, & eos non propellat versus centrum; puto quod tantam vim habeat ad urgendum versus centrum dum ad eum accedit, quantam habet ut oppositos impellat ad circumferentiam ubi centrum solis prætergressa fuerit. Deinde cum ex oppositis polis hæ particulæ primi elementi ad centrum veniant, nonne sibi mutuo in centro occurrent, & motum suum elident, aut regredientur eâdem quâ venerant via.

6. In genere contra hos vortices arguo, Quod eorum motus omnino impossibilis videatur nempè ut in eodem statu permaneat. Sic enim constituendus est ut apparentiis & obsevationibus respondeat ordines & centro viciniores minori tempore suas circulationes absolvant, quam ordines remotiores, sive secundum rationem suarum distantiarum, sive in alia quacumque ratione, parum interest. Sed hoc fieri non potest quin inferiores continuò impellant superiores, eisque tantumdem de suo motu communicent, ergo tandem ad aliquam æqualitatem motuum pervenietur, ad eam nempè quæ necessaria est ut nullus fiat globulorum occursus sed quilibet ordines suum motum illibatum conservent: quamdiu enim ordines inferiores incurrent in globulos superiorum ordinum, tamdiu motum suum retardabunt. Clarum autem est quod fiet iste occursus. Cum enim isti ordines sint ex globulis compositi, qui quantum possunt à centro recedant, secundum doctrinam hujus authoris, globuli inferiores globulis superioribus non respondebunt, sed inserentur inter intervalla globulorum, sed hoc posito fieri non potest ut ordo inferior CD citius absol-



vat suum circulum, quin globulus inferior qui immediatè sequebatur superiorem, magis promoveatur, non potest autem illum anteire, quin in eum incurrat tantumdemque de suo motu amittat; quod dispendium non reparabitur à globulis superioris ordinis, sed tantum ab inferioribus; inferiores ergo amittent suum motum, & ad æqualitatem revocabunt.

Quæ difficultas cessat in aliis hypothesibus quæ nec cœlum ex globulis componunt sed ex materia fluida, eique principium motus tribuunt, ita ut difficultates etiam aliquas si quæ occurrant facilè superare possit.

PROPOSITIO XIV.

De maculis solaribus.

Tota macularum solarium, & earum quæ circa stellas produci possunt generatio, pendet ex particulis aliquibus striatis primi elementi, quæ ab utroque polo vorticis ad centrum ejus quasi per axem progredientes, ubi ad solem pervenerunt sibi invicem adhærent, & à motu ipsius ad circumferentiam ejus propulsantur, ibique assiduè circumrotantur, donec vel dissipentur vel longius expellantur.

Primò arguo generationem istarum particularum striatarum, ex eò quòd velit esse particulas primi elementi, sed primum elementum hactenus consideravit, ut summè liquidum, quod autem summè liquidum est, cum eam quam aliquando habuit figuram non retineat, immò nullam habere possit peculiarem ob summam fluiditatem, non video quomodo in primo elemento ullæ particulæ striatæ esse possint. Intelligit autem per particulas striatas, in cochleam seu spiram efformatas; eo modo quo si prisma triangulare in orbem circumvolutum per foramen exiguum transmittatur ejus anguli seu striæ in orbes seu spiras abeunt, ita etiam dum particulæ primi elementi inter foramina triangularia, seu intervalla globulorum secundi elementi transmittuntur, eorum figuram induunt. Quæ puto manifestam contradictionem involvere, nam primò vel materia primi elementi liquida est vel dura, vel partim dura, partim liquida. Si tota liquida est, impossibile est ut in cochleas efformetur, sed ob liquiditatem continuumque motum liquiditatis nulla erit inter partes illas unio, quæ necessaria est ut hæc figura peculiaris resultet. Si diceretur materia primi elementi dura esse, non esset primum elementum, quod concipi debet tanquam maximè liquidum. Reliquum est ut dicantur innatare partibus liquidis primi elementi partes duræ, quæ adhuc non sunt sufficienter divisæ seu non satis liquidæ. Sed contra; vel illæ partes duræ sunt minores quam sint triangularia foramina, quæ inter globulos secundi ele-

menti

$\frac{1}{9} \times \frac{1}{3}$

9

3

12 4

27

5000
15000
25000
45000

3125
4875
5000
12500
2500
15000

25000
3125

H 12500
I

In nostris MLraC

~~VMIILDIIIXCIILI~~

CILIIVDMLVIVLIV+ MIILI

IVIIICCIVVIIMIIVDI ~~DMIIIVIC~~

JVIICCIVIMIIVDI+ ~~CDIIIX~~

IVCDVVIVCIM + ~~CVIVIIVMDIIIXI~~

VCDIXIILLVM ~~CIV+~~ et Dei sal Vator Christus DEUS apostolis

~~DILVDICIVLI~~ + IMIMLVMVCIVMLVMD

DDILV+VCIV LIVVV+ VVCMMVVM IIVIIVCVDMIICII+

CCVIVMDIXI+

~~IVIMDMII~~

IVMMILIDICIVI+

6
8

V
V
8e

$2\frac{2}{5}$ $9\frac{3}{5}$

12 48
12 48

729
329