Google

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

75 B 240

Digitized by Google

75 B 240

Národní knihovna ČR
Historické fondy
75 B 240
Národní knihovna
1002288264

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

DIFFERENTIARUM
MINIMARUM QUANTITATUM
VARIANTIUM
CALCULUS DIRECTUS
VULGO
DIFFERENTIALIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

DIFFERENTIARUM MINIMARUM, QUANTITATUM VARIANTIUM CALCULUS DIRECTUS, *VULGO* DIFFERENTIALIS.

AUCTORE

JOSEPHO STEPLING

S. J. PRESBYTERO,

IN ALMA STUDIORUM UNIVERSITATE PRAGENSI STUDII PHYSICI, ET MATHEMATICI CÆS. REG. PRÆSIDE, ET DIRECTORE.

BIBLIOTH. ... ST. PETRI PRAGAE

VETERO - PRAGÆ

EX OFFICINA TYPOGRAPHICA COLLEGII ACADEMICI PER JOAN. GEORGIUM SCHNEIDER FACTOREM.

Digitized by Google

PRAHA
75B240
Digitized by Google

PETRO LEOPOLDO

REGIO PRINCIPI

HUNGARIÆ, BOHEMIÆ,

HIEROSOLYMÆ &c.

ARCHI-DUCI AUSTRIÆ,

DUCI BURGUNDIÆ, BRABANTIÆ,

LUXEMBURGI, STYRIÆ, CARINTHIÆ,

CARNIOLIÆ, MEDIOLANI,

COMITI

FLANDRIÆ, TYROLIS, HANNONIÆ,

NAMURCI &c. &c.

MAGNO DUCI HETRURIÆ

FELICITATEM.

Digitized by Google

ARCHI-DUX
SERENISSIME.

TUUS in Bohemiam, ac Pragam cumprimis adventus quanto inexpectatior tanto accidit Civibus omnique Ordini jucundior; quod fulgidissimum Austriacæ Domus sidus, TE inquam præsentem liceat intueri, ac venerari; Cujus videndi desideria prævolans excitavit fama, dignissimas Magno Principe dotes TUAS enarrans.

)(At

At jucundius longe, TE coram conspicere, ipsaque ex fronte, vultuque indolem legere Magnam virtutibus Majoribus exornatam; quam recensentium dictis credere! Unde desideria transiere in gaudia, quod TE Hospite frui liceat multo nobilissimo; quod TE AUGUSTISSIMORUM PARENTUM TUORUM Progeniem Pulcherrimam detur revereri; quod suspicere in TE concedatur Princi-

pem,

Digitized by Google

pem, non GENITORUM modo ſanguine Maximum, ſed propria virtute futurum quandoque Heroëm, quales progignere ſolet Auguſta ſtirps Habsburgica, Lotharingicæ cumprimis ſociata.

Hæc inter tripudia, quocunque conceſſeris, TE comitantia, ſua quoque ut celet Clementinum Societatis JEſu Collegium, neque decet, neque fas eſt; Poſtea-

Digitized by Google

quam ſe & TIBI deberi multum haud ignorat, quod Majoribus TUIS Auguſtiſſimis (a quibus & excitatum, & Academiæ prærogativis exornatum, & inſignibus privilegiis dotatum, & Paterna continua Protectione adverſus æmulorum ſæpe, ſæpe & hoſtium molimina eſt conſervatum) debetur totum.

Quod ut ſuam gaudia comitantem ob-

ſtrictiſ-

Digitized by Google

strictissimæ devotionis præbeat significationem, Opusculum istud Clementissimis manibus TUIS offerre venerabundum audet, suæ in TE pignus pietatis.

Verecunde illud offert equidem; neque (quoniam mole exile, Authoris licet labore, studioque haud exiguo elucubratum) TIBI dicare attentaret; nisi Maximis quidem Principibus propria, at TIBI singula-

Digitized by Google

gulariſſima nos tacite animaſſet Comitas, quæ minima etiam, modo debito venerationis affectu oblata, ſuevit non aſpernari. Alterum; incredibilis Ille TUUS literarum amor, qui, ſeu eum præclaro naturæ munere ſis indeptus, ſeu deguſtata ſuaviſſima liberalium diſciplinarum dulcedine alliciente ſenſeris in TE excitari, TECUM creſcente in annos crevit; TE adoleſcente adolevit, TE ætate deinceps

pro-

proficiente simul profecit, insigni TUO-RUM in scientiis progressuum incremento.

Commune id passim primæ adolescentiæ experimur, ut delectetur ludicris, seria fastidiat; ad illa suapte feratur, ab his vel invitata refugiat. At diversa longe TIBI Archi-Dux Serenissime obtigit indoles. A teneris namque non tam festiva ludo-

rum

rum amœnitas TE recreabat, quam magnam TUAM, corpore in puſillo adhucdum, mentem literis ſe excolendi cupiditas ineſcabat; & quantum pro perſpicaciſſimi ingenii TUI felicitate Magiſtrorum inſtitutionem combiberas promptius, tantum condiſcendi plura aviditatem in TE augeri palam feciſti, ad literario indulgendum otio ſtimulandus nunquam, ad id vel abrumpendum, vel moderatione reſtringendum ſæpe admonendus.

Ita

Ita felicissimis progressibus ingenuarum artium, scientiarumque cognitionem eminentem consequebare; neque enim contentus unquam obiter eas, atque in limine salutâsse; pro præclara solertia TUA sagacitati juncta examinabas dubia, investigabas in obscura, indagabas in fundamenta, in ipsa denique scientiarum adyta penetrare conabaris.

)()(In-

Digitized by Google

Intellecto hoc TUO discendi ardore processibusque fecundissimis, quae animi voluptas in Parentes Tuos Augustissimos FRANCISCUM, ac MARIAM THERESIAM redundarit, cuivis cogitatione sit facilius in mente sibi depingere, quam verbis complecti. Illam autem quantopere auctam existimemus, cum subinde e privato musaeo TUO in arenam egredere publicam, de jurium legumque Sci-

entia

Digitized by Google

entia palam disceptaturus? quam pulchrum est, Principem sanguine Regum, Cæsarumque procreatum spectante late populo in campum certaminis literarii sese demittere! sed longe pulchrius: superatis impugnantium conatibus e campo victorem egredi gloriosum. Et talem in TE suspexere, quiqui certamini docto aderant viri omnium ordinum eruditi; talem consequens in populo per urbis Vindobonensis *compita ferebat plausus; talem perlatæ ad Augustissimos (quanquam & ii qua prælii testes adessent, qua triumphi) ad Augustissimos inquam Parentes TUOS summorum procerum gratulationes; talem fama promulgavit per vicina Austriæ, ac remotiora nonnulla etiam regna, provinciasque propagata.*

Sed nondum TUUS ille sciendi exsatiatus

tiatus

Digitized by Google

tiatus amor est. A jurium ac legum peritia ad bellicam scientiam etiam animum adjecisti.

Memoriæ proditum tenemus: Julium Cæsarem seu scalpro in marmore, seu in tela coloribus eo corporis situ effigiari voluisse, ut manus una versaret ensem, altera codicem ostentaret; palam daturus orbi se non minus armis exercitatum,

quam

quam eruditum literis, spectabilem in utroque populis imperare. TE ArchiDux Serenissime, si deinceps aut Apelles nonnemo adumbrarit, aut Policletus; manibus & librum tractantem, & gladium merito efformarit; qui post pulcherrimam aliarum scientiarum cognitionem, ad militarem quoque combibendam studia TUA contulisti. Et quantis denuo progressionibus! nihil blandimur. Testis rursum

Vin-

Digitized by Google

Vindobonæ; cum publicum evoluto abhinc anno præberes specimen: impugnandi mœnia, muniendi urbes, formandi acies, metandi loco opportuno castra artem palam demonstrares; præsentibus veteranis cohortium præfectis, peritissimis legionum ducibus, celeberrimis etiam belli Imperatoribus in penitissimæ cognitionis, dexteritatisque TUÆ multam admirationem pertractis.

At-

Atque ex hoc TUO scientiarum quarumvis amore, ac militaris cumprimis, quam TIBI adeo domesticam reddidisti, eruditione, præsidium sibi quoddam pollicetur præsens, quod Serenissimis Honoribus TUIS sacrare audemus, opus. Rejiciendum minus illud a TE confidimus, quod Mathematicum; TUUM vero postremum bellicæ cognitionis specimen, quoniam e Tactices legibus, idcirco & Mathemati-

cen

tem pariter respiciat; in qua cum operam TUAM versari necessum fuerit, atque etiam pro Indolis TUÆ, eruditionis sitientissimæ, studiis colupe, ejusdem disciplinæ lucubrationem haud ingratam pariter fore opinabamur.

Patere hanc itaque Archi-Dux Serenissime in profundissimæ venerationis pignus TIBI deferri, atque pro maxima

TUA

TUA humanitate, ac clementia non tam opusculum respice, quam sacrantis TIBI illud perennem, qua par est in TE ferri, pietatem; quod Serenissimis Gratiis TUIS reverentissime se adstemit.

SERENITATI TUÆ

DEVOTISSIMUM
SOCIETATIS JESU
Collegium Clementinum.

Digitized by Google

PRÆFATIO.

Quælibet cognitio rei certa & explorata humanam mentem perficit, hominiſque bonum eſt reale pariens voluptatem innocuam, & conſtantem, id eſt talem, quæ nunquam in tædium, doloremque degeneret. Quare ad omnem eam acquirendam contendendum utique foret mortalibus, niſi brevitas vitæ, & eorum, quæ nos circumſtant, conditio, delectus habendi neceſſitatem imponeret. Deligendum ergo eſt cognitionis genus, & alii aliud præferendum. Atque aliud quidem omnibus omnino neceſſarium eſt, aliud pluribus, alio denique dummodo quidam imbuti ſint, id quidem ſufficit.

Matheſeos elementaris ſtudium pluribus ſa-

[illegible] a ne

ne convenire arbitror, tum quod iis operam dantes ſolide & ordine cogitare conſueſcunt, & animis ſenſus quidam certitudinis & evidentiæ illo ingeneretur, quo facile ambigua & probabilia a certis, evidenterque probatis ſecernere valent: tum quod in vita communi & artibus non contemnendas habet utilitates. Sublimioribus autem mathematis uti permulti ſeſe applicent, ſperandum eſt nunquam, neque fieri quidem poſſe videtur. Eo connitendum, curandumque, quibus rerum cura publicarum eſt, ut nunquam deſint in re publica Viri aliqui eminentis ſcientiæ cujusque generis, adeoque & Mathematicæ, quibus uti Reſpublica, vel qui in ea præſident, poſſint in caſu emergente. In hunc finem Academiæ ſcientiarum eriguntur, quæ velut quædam tribunalia naturalium ſcientiarum effulgent, quorumque commentarii promptuaria ſunt, ex quibus, qui ſyſtemata in uſum ſcholarum concinnant, veritates detectas

acci-

Digitized by Google

accipere oportet : in hunc quoque finem Professores in studiorum universitatibus Viri sint necessum est, qui non modo primis ut ajunt labris delibarint, quas tradunt scientias, sed qui eas devorarint, & in ipsarum adyta usque etiam penetrarint.

Etsi porro sublimior mathesis eo ex genere scientiarum esset, quod nullam in præsens affert utilitatem, tamen curandum esset, ne qui desint mathesi hac sublimi præfulgentes, quod, ut jam innui, casus emergere possunt, quibus viris talibus opus sit, atque olim utilissima futura sint, quorum nunc usus nullus cognoscitur. Videri sane veteribus incassum laborasse poterat Apollonius sectionum conicarum proprietates eruendo, ecquis tamen nescit, quantæ non modo nunc utilitatis, sed necessitatis vel in sola sint Astrorum scientia? unde Leonardus Eulerus summus Geometra nunquam satis laudando consilio passim in ultimis tomis Com-

Digitized by Google

mentariorum Academiæ Petropolitanæ adhortatur Mathematicos, quibus otium & vires, ut promovendo calculo sublimiori, reconditiorisque Analyseos doctrinæ operam impendant, bene gnarus, quam in futurum id utile sit, ut non dicam actu problemata haberi, quæ deserenda fuerint, quod artificia calculi ad ea penitus resolvenda necessarii adhuc deficiunt.

Ea autem mathesis sublimior, cujus jam compotes sumus, non sinit nos tantum sperare de usu aliquando futuro, & necdum præviso; verum præsente, & qui ante oculos sit, se se commendat plurimum. Nam ut nihil dicam de universa Astronomia Physica, & poli legibus, a summo Newtono primum, dein viris clarissimis & celeberrimis d'Alembertio, Clairautio, Simpsonio, Eulero in apricum deductis mathesis hujus ope, calculique integralis præsidio; certe res navalis, imprimis manuaria, quæ omni retro ætate multis imperfectionibus scatebat

vix

Digitized by Google

vix artis nomine digna, ſolique empyricorum arbitrio non ſine grandi vitæ, fortunarumque multorum mortalium diſpendio relicta erat, hoc demum ſæculo matheſi ſublimiore facem præferente, calculoque utroque ſubductis rerum navalium momentis a duumviris præſtantiſſimis Bouguerio, & Eulero in ſcientiam evecta eſt, ac pene ad apicem perfectionis deducta. Utriuſque horum virorum celebrium opera in mathematicorum manibus ſunt, quibus & ſtructura navium, & ars eas dirigendi mathematico ratiocinio abſolvitur, doctiſſimusque du Hamelius inventa virorum laudatorum geometris ſcripta ad uſum nautarum accomodavit. Jam de machinis quid dicam? earum uſus in omni vita tam frequens, tamque neceſſarius, non cum æquilibrio ſolum potentiæ, & oneris ſeu reſiſtentiæ, ſed cum motu plerumque conjunctus eſt. Quamobrem, ut rectum de earum bonitate & præſtantia feratur judicium, mate-

riæ

Digitized by Google

riæ quoque movendæ inertia in conſiderationem veniat eſt neceſſum, momentumque inertiæ eruendum eſt, quod ſine integrali calculo, & formulis eo inventis præſtari vix ulla ratione poteſt. Et hæc quidem ſunt, quæ addenda cenſui olim a me in opuſculo de area & ſoliditate fruſtorum a cylindris reſectorum dictis, & quæ dicenda arbitratus ſum, ne oleum, operamque perdidiſſe in præſenti opere videar iis, qui iſta omnia ad inanes ſpeculationes relegare ſolent. Cum enim matheſis ſublimior, imprimisque calculus integralis utcunque a me commendatus ſit, ſimul & differentialem ſatis laudatum puto, qui & matheſeos illius pars, & hujus, calculi ajo integralis, eſt fundamentum.

Calculi autem differentialis tractatum hunc completiorem facere, quam ſit aliorum plerorumque, atque illo præcipua, quæ clariſſimi Fontaine, Clairaut, & Eulerus in lucem de calculo

hoc

Digitized by Google

hoc protulere complecti adnisus sum. Et primum quidem locum occupant quædam de infinite parvis, & infinito propositiones, quod differentialia sunt species infinite parvorum. Subnectitur calculus differentialis & differentio-differentialis tam functionum algebraicarum, quam earum quæ transcendentes audiunt, nempe logarithmorum, ac quantitatum exponentialium, nec non a circulo pendentium. Addita sunt criteria cognoscendi, num differentialia proposita omnino ex functionis cujusdam differentiatione orta sint, & num differentialia altiora definitum habeant significatum, an contra vaga sint, adeoque inutilia: item utrum æquationes differentiales possibiles. Quæ quidem omnia a nullo fere eorum authorum, qui vulgo circumferuntur, sunt pertractata. Præterea de functionum, æquationumque natura plura inspersa sunt, logarithmorumque indoles, & systematum logarithmicorum via, ut puto, pla-

Digitized by Google

nissima explicata, atque Anglorum de modulo doctrina cum illa de basi logarithmica, atque quantitate moduli reciproca clarissimi Euleri nexu uno evoluta. Et hæc quidem de contentis hocce in opusculo dicenda habui.

Cæterum infinite parvas quantitates hic tantum mathematice considero, neque in ullam metaphysicam investigationem me immitto. Hanc infinite parvarum quantitatum mathematicarum possibilitatem in continui divisibilitate in infinitum, istam vero in ipsa continui, qua tale est, natura fundari certissimum est, omniaque argumenta, quibus Geometræ divisibilitatem extensi mathematici evictam dant, in hac fundari perfacile cognoscet is, qui eorum demonstrationes attentius expenderit. Quamobrem, si in rerum natura admittatur verum continuum, illud, uti sit in infinitum divisibile, necessum est. Hoc ipso vero habebit partes penitus a se invicem distinctas numero infinitas, quod ma-

thema-

Digitized by Google

thematico rigore concepto ratiocinio confici potest. Quodsi partes in corporibus infinitæ non admittantur, sed finita numero elementa, ea indivisibilia utique erunt, & quod amplius est, singula a singulis vacuo spatiolo sejuncta extensum efficient. Nisi enim inter singula intervallum sit aliquod inane, quædam saltem nullo mediante applicata sibi, junctaque extensionem constituent, quæ verum sit continuum, adeoque in infinitum divisibile juxta superius dicta, & non in elementa numero finita. Peripatetici quidem sic dicti, multa corpora vere continua admisere, omnia videlicet ea, quorum pori, partiumque diversitas in oculos non incurrit. Recentiores vero subtilius omnia perscrutati, corpora hæc nonnisi ad speciem continua statuunt, reipsa vix ullum vere continuum corpus quod in sensus incurrat reperiri. Sunt tamen e numero recentiorum non pauci, qui corpuscula primitiva vere continua ac solida, seu

Digitized by Google

nullis uſpiam poris aut vaculis pertuſa admittant. Hæc corpuſcula ergo etſi non ſint præciſe corpus mathematicum, cum hoc nec iners ſit, nec impenetrabile; tamen in ea quadrat quidquid de extenſo ſuo, qua continuo, demonſtrant mathematici, cum hæ demonſtrationes ſola continuitate nitantur, nullatenus vero penetrabilitate, aut defectu inertiæ. Verum quid ego pelago navigo alieno? vela contrahenda ſunt.

IN-

Digitized by Google

INDEX
CAPITUM.

Cap.

Digitized by Google

CA-

Digitized by Google

CAPUT I.

DE INFINITESIMIS, ET INFINITE MAGNIS QUANTITATIBUS.

I.

Quantitas mathematica continua eſt, quæ ex homogeneis, & nullis terminis inter ſe diſcretis partibus componitur.

2. Eſt adeo diviſibilis in infinitum, ſeu in partes non tot, quin plures; ſecus enim deveniretur ad individua, nec meris partibus homogeneis conſtaret.

3. Hanc diviſibilitatem in infinitum de continuo extenſo multi demonſtratam dedere. Videri de ea poteſt Tacquetus in Euclide; receptumque eſt ab omnibus fere Mathematicis, certe a præſtantiſſimis omnibus, lineam

Digitized by Google

ex punctis, superficiem ex lineis, & solidum ex superficiebus non componi. Quantitas autem mathematica continua vel est permanens, vel successiva: illius partes ortæ manent, hujus, quod ortum est, continuo perit; illa extensum omne, & intensum complectitur, seu quantitatem molis, & virtutis, hæc motum, & tempus. Omne nempe continuum mathematicum concipi potest fluxu quodam oriri; quod si, quæ orta sunt, insimul sint, sibique coexistant, continuum ex iis compositum permanens erit: sin, quæ orta sunt, sibi non coexistant, continuum ex iis compositum erit successivum. Concipiatur fluere punctum geometricum: duplex continua quantitas generabitur, & ea quidem, cujus partes genitæ insimul perstant, extensum in longum tantum, seu linea audit, ut notum est: cujus partes vero sensim oriuntur, ita tamen, ut anterior, ac prior jam non sit, dum subsequens generari occipit, motus, & tempus.

Porro continuum mathematicum permanens vel partibus extra se positis gaudet, vel non extra se positis, quæ gradus dicuntur. Illud extensum, hoc intensum nominatur. Cæterum non abs re putem duo hic monere: primo conceptus mathematicos quantitatis cum metaphysicis, aut physicis, ac rebus ipsis non esse confundendos: 2do me divisionem quidem quandam quantitatis mathe-

mati-

Digitized by Google

maticæ attulisse, sed continuæ tantum, cum præterea detur etiam quantitas in angulis, seu inclinatione linearum, & superficierum, & in curvatura curvarum, sed hæ, & aliæ quantitatum species nostro sensu continuæ non sunt.

4. Quantitas finita est, quæ certis limitibus circumscribitur, seu quæ ultra certos limites nec aucta concipitur, nec imminuta. Certos autem limites hic voco illas quantitates, quæ dari, & designari possunt, sive arithmetice sive geometrice, & inter quas alia vel aliæ interjacent. Ita numeri omnes ex. gr. inter 1, & 2 interjecti sunt finiti; quare $\surd 2$ est finita quantitas, etsi enim irrationalis sit, & non possit exprimi numero determinato unitatum, sed serie tantum infinita; tamen, quoniam ejus dantur limites 1, & 2, finita quantitas merito censetur. Quantitates item inter $\surd 2$, & $\surd 3$ finitæ sunt; earum enim limites $\surd 2$, & $\surd 3$ geometrice, seu per determinatas magnitudine lineas designari utique possunt. In Ellipsi diameter finita est quantitas; etsi namque majores, minoresque sint Ellipsis ejusdem diametri; tamen nulla axe minore minor, nec ulla axe majore major est, adeoque inter datos limites continetur.

5. Quantitas data, vel quæ dari potest magnitudine, finita est, hujus enim certe limites designari possunt.

6. Ni-

6. Nihilum ſeu O hic in limitum numero haud cenſetur, nam limites quantitates eſſe diximus (§. 4.).

7. Quantitas infinite parva, infiniteſima, eſt illa, quæ ultra quoſcunque limites imminuta concipitur, ſeu cujus parvitas nullo certo limite coercetur. Quantitas infinite magna eſt, quæ ultra quoslibet limites aucta cogitatur, ſeu cujus granditas nullo certo limite quantumlibet magno definitur. Quantitas maxima omnium eſt illa, quæ quacunque data major: minima, quæ quacunque data minor eſt. Quantitatem infinitam per ∞ exprimimus. Recte autem concipi a Geometris quantitates infinite parvas, & infinitas mox docebimus. Cæterum clarum eſt, quantitatem infinite parvam in finita, & hanc in infinita infinities contineri.

8. Quantitas infinita in ſenſu hic explicato cum indefinita non eſt confundenda. Solet enim quantitas indefinita, ſeu quæ magnitudine non datur, & varia ſæpe pro arbitrio eſſe poteſt, a Geometris in elementis etiam infinita vocari, etſi reipſa finita ſupponatur, ſed indeterminata, ita ut major, minorve eſſe poſſit.

9. Quantitas infinite parva, & infinita, data magnitudine non eſt, nec dari poteſt, alias hoc ipſo finita eſſet (§. 5.).

10. Quan-

Digitized by Google

10. Quantitas maxima ab infinita non differt, neque minima ab infinite parva; cum illa excedat granditate omnem datam (§. 7.) seu limitem (§. 4.): hujus parvitas ultra omnes limites per cit. §. descendat.

11. Cum quantitas mathematica continua sit in infinitum divisibilis (§. 2.), habentur in ea partes quavis data, vel quæ dari, & designari potest, minores, hoc est quam minimæ, infinite parvæ, infinitesimæ (§. 7.). Utrum etiam quantitas inclinationis, & curvaturæ (§. 3.) possit esse infinite parva, hic non discutimus; nam sufficit ostendisse simpliciter, dari quantitates infinite parvas.

12. Quod si quantitas finita consideretur ut unitas; infinitesima concipienda est ut fractio infinite parva; est autem fractio eo minor, quo major est denominator respectu numeratoris; quare ut fractio sit infinite parva, oportet, ut denominator sit infinitus respectu numeratoris; quamobrem infinitesima exponetur per fractionem, cujus numerator est finitus, denominator vero numerus infinitus; erit itaque $= \frac{1}{\infty}$ vel $\frac{a}{\infty}$ ubi a finita quantitas est. Sic igitur deinceps infinitesimas exprimere poterimus.

13. Mihi quidem re bene expensa semper visum est, conceptum infinitesimarum recte deduci ex divisibilitate in infinitum, hanc vero ex continuitate quantitatis mathe-

mati-

Digitized by Google

maticæ, in qua nihil quoque occurrit, quod impediat, quo minus quantitatem iſtam ultra quosvis terminos, & limites auctam, adeoque infinitam, & maximam (7.) concipere liceat; quod ipſum tamen probe fieri a Mathematicis continuo aliter adſtruemus.

14. Et numeri quidem infiniti ideam ipſa in infinitum diviſibilitas ſuggerit (§. 12.). Generatim vero quantitatis infinitæ conceptio fiet, ſi tertia geometrice proportionalis ad infinite parvam, finitamque cogitetur; hæc namque debet eſſe infinita, quoniam toties finitam complectitur, quoties hæc infinite parvam, id eſt, infinities; quare quantumcunque finita augeatur, ſemper tertia illa proportionalis aucta finita major erit, atque adeo maxima (§. 7.); & infinita (§. 7.) (§. 10.). Quod ſi finita quantitas conſideretur ut unitas, tertia Geometrice proportionalis ad infinite parvam, ſeu fractionem minimam, & unitatem erit numerus infinitus. Sane ſi quæratur ad $\frac{1}{\infty}$, 1, tertius geometrice proportionalis numerus; hic computu inito reperietur $1 \times \frac{\infty}{1} = \infty$, ſeu infinitus.

15. Cæterum in ipſa etiam elementari Geometria, & Trigonometria exempla infinite parvorum, & infinitorum reperias. Angulus contactus, qui oritur ad contactum circu-

Digitized by Google

circuli, & rectæ infinite parvus eſt noſtro ſenſu, & tangens, ſecansque quadrantis, ſeu 90° infinita.

16. Cum infiniteſimæ non ſint indiviſibiles, ſed quantitates continuæ (§. 2.); erunt & ipſæ ulterius diviſibiles in infinitum (§. 2.), & harum infiniteſimæ rurſus in infinitum, & ita porro.

17. Dantur ergo certi ordines infiniteſimarum, & quidem infiniteſima finitæ quantitatis dicitur infiniteſima primi ordinis: infiniteſima infiniteſimæ primi ordinis vocatur infiniteſima 2^{di} ordinis: infiniteſima infiniteſimæ 2^{di} ordinis audit 3^{tii} ordinis &c. Generatim autem infiniteſimæ 2^{di}, 3^{tii}, 4^{ti} ordinis vocantur infiniteſimæ altiorum ordinum.

18. Patet autem per ſe infiniteſimam ex. gr. etiam 4^{ti} ordinis, ſi comparetur cum infiniteſimis 3^{tii} ordinis, eſſe eorum reſpectu infiniteſimam primi ordinis.

19. Tertia geometrice proportionalis ad quantitatem finitam, & infinitam, eſt infinities infinita, ſeu infinita quantitas 2^{di} ordinis, & 3^{tia} geometrice proportionalis ad infinitam primi, & infinitam 2^{di} ordinis eſt infinita ordinis 3^{tii}; quoniam infinitam 2^{di} ordinis complectitur toties, quoties infinita 2^{di} ordinis infinitam ordinis primi. Et ſic naſcuntur ideæ ordinum infinitorum. Infinita autem 2^{di},

Digitized by Google

3^{tii}, 4^{ti} ordinis dicuntur generatim infinita altiorum ordinum.

20. Quod vero §. 18. dictum est, & hic valet, nempe infinitum ex. gr. 4^{ti} ordinis respectu infiniti 3^{tii} ordinis esse primi ordinis infinitum.

21. Ut infinitorum, ita infinitesimarum ordines per proportionem determinari potuissent. Est enim tertia geometrice proportionalis ad finitam, & infinite parvam primi ordinis infinite parva ordinis $2^{di.}$ Et tertia geometrice proportionalis ad infinitesimam primi ordinis, & 2^{di} ordinis est infinitesima ordinis 3^{tii}, & ita deinceps.

22. Exprimuntur ergo ordines infinitorum, & infinite parvorum serie:

$$\infty^{\infty} - - - \infty^5, \infty^4, \infty^3, \infty^2, \infty^1, \infty^0$$

$$\text{seu } 1, \frac{1}{\infty}, \frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3}, \frac{1}{\infty^4} - - - \frac{1}{\infty^{\infty}}.$$

Notat autem ∞^{∞} infinitum ordinis infiniti, & $\frac{1}{\infty^{\infty}}$ infinitesimam ordinis infinitesimi. Quod autem series hæc ordines infinitorum, & infinite parvorum recte exprimat, facile ostenditur. Nam tertia geometrice peoportionalis ad 1, seu quantitatem finitam consideratam ut unum, & ∞ est $\frac{\infty \times \infty}{1}$ seu ∞^2, & tertia geometrice proportio-

nalis

Digitized by Google

nalis ad ∞, ∞^2 est $\frac{\infty^2 \times \infty^2}{\infty}$, seu ∞^3; sed illa prior 3^{tia} proportionalis est infinitum 2^{di}, hæc posterior 3^{tii} ordinis (§. 19.); quare ∞^2 infinitum 2^{di}, ∞^3 3^{tii} ordinis exprimit. 3^{tia} proportionalis ad 1, $\frac{1}{\infty}$ est $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty}$: 1. seu $\frac{1}{\infty^2}$: item 3^{tia} proportionalis ad $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$ est $\frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{\infty^2} \times \frac{\infty}{1}$ seu $\frac{1}{\infty^3}$; quare juxta §. 21. infinitesima 2^{di} ordinis per $\frac{1}{\infty^2}$, & infinitesima 3^{tii} ordinis per $\frac{1}{\infty^3}$ recte exprimitur. Quodsi jam series hæc:

$$\infty^4, \infty^3, \infty^2, \infty^1, \infty^0, \frac{1}{\infty^1}, \frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3}, \frac{1}{\infty^4}$$

utrinque, seu dextrorsum, & sinistrorsum continuetur in infinitum exponentes tandem evadent infiniti; unde habebitur ∞^∞, & $\frac{1}{\infty^\infty}$.

23. Ordines infinitorum, & infinitesimarum progrediuntur in proportione geometrica continua; ut patet ex serie proposita, & etiam ex eorum genesi (§. 19. §. 21.). Cum autem sit $\frac{1}{\infty} = \infty^{-1}$, $\frac{1}{\infty^2} = \infty^{-2}$, seu generaliter $\frac{1}{\infty^m} = \infty^{-m}$; erunt indices, seu exponentes ordinum ∞ $- - - 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4 - - - - \infty$ in progressione continua arithmetica, adeoque ordinum

Digitized by Google

logarithmi, non secus, atque in decimalibus in arithmetica communi usuvenit.

24. Intermedii autem numeri in progressione hac arithmetica, seu exponentes fracti sive veri, sive spurii intermediis ordinibus infinitorum, & infinite parvorum respondent. Sic $\frac{1}{2}$ numerus arithmetice inter o, & 1 est exponens ordinis $\sqrt{\infty}$, seu $\infty^{\frac{1}{2}}$, qui est medius geometrice inter ∞° seu 1 & ∞. Nam 1, $\sqrt{\infty}$, ∞ sunt in proportione continua geometrica. Est autem $\sqrt{\infty}$ vere infinitum. Nam pone non esse; erit ergo quantitas finita, & continebit 1 finities; ergo & ∞ continebit $\sqrt{\infty}$ finities, cum sit per hypothesim $\infty : \sqrt{\infty} = \sqrt{\infty} : 1$; quare ∞ erit tantum finita quantitas, quod est contra hypothesim. Sic quoque $\sqrt[3]{\infty}$, $\sqrt[4]{\infty}$, & in genere $\sqrt[m]{\infty}$ (*m* autem notat numerum integrum finitum) erit quantitas infinita; Nam si sit finita ducta in se toties quot in *m* sunt unitates minus una, hoc est: finities, dabit ∞; quare ∞ non erit infinita quantitas, cum finitam finite sumptam non excedat (§. 7.), quod cum adversetur hypothesi; patet $\sqrt[m]{\infty}$ esse infinitam quantitatem, modo *m* sit numerus finitus. Multo magis ergo erit $\sqrt[m]{\infty^{n}}$ infinitus, si *n* sit numerus integer; quoniam hoc casu $\sqrt[m]{\infty^{n}} > \sqrt[m]{\infty}$. Ex his dictis quo-

Digitized by Google

quoque clarum fit, $\frac{1}{\sqrt{\infty}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{\infty}}$ & in genere $\frac{1}{\sqrt[m]{\infty}}$, ac $\frac{1}{\sqrt[m]{\infty^n}}$ esse omnino infinitesimas, cum hæ fractiones habeant denominatorem infinitum, numerator vero sit finitus (§. 12.).

25. Ordines infinitesimarum, & infinitorum, quorum exponentes sunt numeri integri, ordines potentiales: reliqui, quorum exponentes sunt fracti, radicales compellari poterunt.

26. Cum exponentes ordinum infinitorum, & infinitesimarum sint logarithmi, & sit o logarithmus quantitatis finitæ, qualis etiam unitas censetur per §. 23; exponens fracti orti ex ductu quantitatum infinitarum, & infinitesimarum in se invicem, vel in finitas habebitur, si factorum exponentes addantur, & summa hæc indicabit, cujus ordinis sit factum: quoti autem ex divisione infinitorum, & infinitesimarum inter se, vel cum finitis quantitatibus orti exponentem prodit differentia orta ex subtractione exponentis divisoris ab exponente quantitatis dividendæ.

27. Sequitur ex dictis quantitatem infinitam, vel infinitesimam ordinem non mutare, si dividatur, vel multiplicetur per finitam quamcunque, seu: quotientem, vel factum esse ejusdem ordinis cum infinito, vel infinitesima divisa, vel multiplicata; o enim finitæ exponens sive addatur, sive

sub-

Digitized by Google

ſubducatur ab alio numero infiniti, vel infiniteſimæ indice, eum non mutat. Quantitas vero finita, ſi per infinitam, vel infiniteſimam multiplicetur, utique fit infinita, vel infiniteſima ejus ordinis, cujus eſt multiplicator: diviſa vero per infinitam, fit infiniteſima ejus ordinis, cujus ordinis infinitum diviſor eſt. Nam ſit index diviſoris infiniti m; erit quotientis index $0 - m$, ſeu $- m$, qui negativus index denotat infiniteſimam ordinis m. Si vero finita quantitas per infiniteſimam ordinis m dividatur, tum ſi ex 0 ſubtrahatur $- m$, habebitur pro indice quotientis $+ 0 + m$, ſeu m, quare quotiens erit infinitum ordinis m. Si duo infinita in ſe ducuntur, quorum exponentes, & indices ſint m, n; erit factum infinitum ordinis $m + n$. Si infinitum ordinis m ducatur in infiniteſimam ordinis n, cujus index eſt $- n$; erit index facti $m - n$, qui index poteſt eſſe affirmativus, negativus, vel 0. Si namque $m < n$, erit $m - n$ negativa quantitas. Si vero $m = n$; erit $m - n = 0$. In primo caſu factum ex infinito in infiniteſimam, vel contra, eſt infinitum ordinis $m - n$; in 2do factum idem eſt infiniteſima ordinis $n - m$, cujus index eſt $-(n - m)$. In 3tio denique factum erit quantitas finita. Tres iſti caſus etiam locum habent, ſi infinitum per infinitum dividatur; idem enim eſt infinitum per infinitum dividere, ac illud ducere in infiniteſimam, cujus denominator

tor ſit infinitus ille diviſor. Idem certe prodît ſive ∞^m per ∞^n dividas, ſive ∞^m per $\frac{1}{\infty^n}$ multiplices, vel $\frac{1}{\infty^n}$ per ∞^m; nam quod emergit, utrobique eſt $\frac{\infty^m}{\infty^n}$, ſeu ∞^{m-n}. Afferam autem particularia trium horum caſuum exempla. Sit ∞^3 ducendum in $\frac{1}{\infty^2}$, ∞^2 in $\frac{1}{\infty^4}$, ∞^2 in $\frac{1}{\infty^2}$. Item ∞^3 dividendum per $\frac{1}{\infty^2}$, ∞^2 per ∞^4, ∞^2 per ∞^2. Prodeunt ∞^{3-2} ſeu ∞, ∞^{2-4} ſeu $\infty^{-(4-2)} = \infty^{-2} = \frac{1}{\infty^2}$, & ∞^0 ſeu 1. Si infiniteſima ordinis m ducatur in infiniteſimam ordinis n; indicibus $-m$, $-n$ additis, erit index facti $-m-n$ ſeu factum infiniteſima ordinis $m+n$. Si infiniteſima ordinis m per infiniteſimam ordinis n dividatur; indice $-n$ ab $-m$ ſubducto, erit index quotientis $-m+n$, & tribus ſupra memoratis caſibus locus erit. Quoniam enim diviſio ſit inverſum diviſorem $\frac{\infty^n}{1}$ per dividendum $\frac{1}{\infty^m}$ multiplicando, perinde eſt, atque ſi infinitus denominator diviſoris ∞^n per infiniteſimam dividendam $\frac{1}{\infty^m}$ multiplicetur. Si infiniteſima vel infinitum m elevandum ſit ad potentiam n, ſeu cujus exponens ſit n; erit potentia ex elevatione orta ordinis $n\,m$,

ſup-

ſuppono autem m, & n eſſe numeros integros, nam ſi n ſit fractus, fiet extractio radicis, de qua mox. Si igitur ex infiniteſima, vel infinita quantitate ordinis m radix n, ſeu cujus index eſt n, extrahenda ſit; erit radix ordinis $\frac{m}{n}$; quæ omnia nota ſunt ex logarithmorum doctrina. Denique notandum: indices facti, vel quotientis eosdem eſſe, adeoque factum, vel quotientem ejusdem ordinis infinitum, vel infiniteſimam, ſive factores, vel diviſor, & dividenda quantitas afficiantur finita aliqua per multiplicationem, vel diviſionem, ſive non afficiantur. Sic $\infty^3 a$ in $\infty^2 b$, vel $\frac{\infty^3}{a}$ ductum in $\frac{\infty^2}{b}$, aut $\infty^2 b$ eſt quinti ordinis infinitum; non ſecus, ac ∞^3 ductum in ∞^2. Idem verum eſt, ſi infinitum, vel infiniteſima ad dignitatem elevetur, vel radix ex illis extrahatur. Nec obſtat finitam ad dignitatem eſſe elevatam, modo index dignitatis ſit numerus finitus; Nam qualicunque dignitate ſit quantitas illa finita in ordine finitorum, ſemper ejus index ut finitæ, & reſpectu infinitæ, vel infiniteſimæ erit o; o autem alteri additus quantitati, vel ex ea ſubductus nihil in ea mutat. At ſi finita numero integro reſpondens ſit elevata ad dignitatem, cujus exponens ſit infinitus; tum utique ordinem infinitorum finita hæc ſic elevata excedet, & in ordines infinitorum referenda erit. Sic $a^{\infty} = \infty$, $a^{\infty^2} = \infty^2$, & generaliter

a^{∞^m}

$a^{\infty m} = \infty^m$; ubi *m* numerum integrum affirmativum designat. Itaque finita talis ad dignitatem infinitam elevata, seu infinities in se ducta, aut infinities infinitis vicibus, est ejus ordinis infinitum, cujus est index dignitatis infinitus; (§. 7. 19.).

28. Dictum fuit §. 24. quantitatem $\sqrt[m]{\infty}$ esse infinitam, si *m* sit numerus finitus, & affirmativus (qualis semper esse intelligitur, nisi aliud moneatur vel indicetur) nunc determinandum venit, cujusmodi sit $\sqrt[m]{\infty}$, si *m* ponatur numerus infinitus, seu in expressione $\infty^{\frac{1}{m}}$, si $\frac{1}{m}$ sit fractio infinite parva, & quam minima. Quoniam tali casu radix per $\sqrt[m]{\infty}$ indicata infinities in se duci debebit, ut habeatur ∞, aut infinities infinitis vicibus, si radicis index sit infinitum altioris ordinis, patet per §. 7. & 19, $\sqrt[m]{\infty}$ tali casu non manere quantitatem infinitam; sed esse finitam, nec tamen unquam fieri infinite parvam, seu infinitesimam. Nam si talis fieret, infinitesima in se ducta seu in infinitesimam produceret infinitum, quod repugnat demonstratis (§. 27.). Et generatim est $\sqrt[m]{\infty^n}$ quantitas finita, si exponens *m* sit infinitus, & *n* finitus integer. Nam $\sqrt[m]{\infty^n} = \infty^{\frac{n}{m}}$. Fractio autem $\frac{n}{m}$ diviso numeratore, &

 deno-

Digitized by Google

denominatore per n manet invariata, seu $\frac{n:n}{m:n} = \frac{1}{m:n} = \frac{n}{m}$, patet id ex natura fractionum, & $m : n$ adhuc est infinitum ejus ordinis, cujus est m (§. 27.); quare $\sqrt[m]{\infty^n}$ ejusdem ordinis est, cujus $\sqrt[\frac{m}{n}]{\infty}$; sed $\sqrt[\frac{m}{n}]{\infty}$ per paullo ante demonstrata est ordinis o seu finita quantitas; ergo & $\sqrt[m]{\infty^n}$ est finita quantitas.

29. Si ex finita quantitate extrahatur radix infinitesima cujusvis ordinis, ea semper erit finita. Nam infinitam haud esse id quidem per se patet; non esse autem infinitesimam ostenditur ea ratione, qua jam §. priore usi sumus, nempe si foret infinitesima, hæc ducta in se finitam quantitatem daret, cum potius eo altioris ordinis evadet infinitesima, quo in se frequentius ducitur (§. 27.).

30. Mirum sane videtur infinitum, & finitam etiam quantitatem, etsi divisione per infinitum facta ex ordine infinitorum, finitorumque ad infinitesimas deduci possit, sic $\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$; tamen per extractionem radicis etiam infinitesimæ tantum ad finitorum ordinem dejici. Sed ratio hujus mysterii in immutabilitate unitatis latet. Nam sit ex 5 ex. gr. extrahenda radix infinitesima; tum si ex 5 extrahatur radix quadrata, habebitur 2 cum fractione deci-

mali

Digitized by Google

mali approprinquante : si ex hac radice denuo radix quadrata extrahatur , prodit 1 cum fractione decimali interminata : si denuo ex hac radice radix extrahatur , rursus unitas prodit cum fractione, semperque unitas, quantumcunque in extractione processeris, perstat. Nam alius integer emergere nequit, neque radix mera fractio evadere ; alias fractio in se ducta integrum produceret. Semper vero in extractione radicis continuata ex quocunque numero tandem devenitur ad unitatem.

31. Cum sit $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ seu generaliter $\infty^{\frac{n}{\infty}}$ finita quantitas (§. 28.) ; erit $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ seu $\infty^{\frac{n}{\infty}} = \infty^{0}$; quare $\frac{1}{\infty} = 0$, & $\frac{n}{\infty} = 0$; multo magis ergo $\frac{n}{\infty^{m}} = 0$; igitur in serie quantitatum decrescentium , quales sunt ex. gr. exponentes radicalium quantitatum , tandem devenitur ad tales, quæ evanescant.

32. Ostendimus (§. 29.) esse etiam $\sqrt[\infty]{a}$ = finitæ quantitati. Huic quantitati finitæ a , & quæ non sit unitas, vel exponens 1 , vel alius finitus tribui potest, si spectetur in ordine finitorum , vel 0 , si ad ordines infinitorum referatur. Si ei index 1 , vel 2 , vel alius quivis finitus m tribuatur, erit $\sqrt[\infty]{a^{m}} = a^{\frac{m}{\infty}}$; sed per præced: $\frac{m}{\infty} = 0$; er-

Digitized by Google

go $a^{\frac{m}{\infty}} = a^{\circ} = 1$; quia in ordine etiam finitorum unitatis exponens eſt o. Vidimus vero (§. 30.) radicem infiniteſimam cujuscunque numeri debere eſſe 1 cum fractione decimali, quæ quidem ſemper minor fit, adeoque extractionibus in infinitum repetitis fit infiniteſima, & o (§. 31.). Si vero ipſi a exponens o detur; erit $\sqrt[\infty]{a} = a^{\frac{0}{\infty}}$; ſed $\frac{0}{\infty} = 0$; ergo $\sqrt[\infty]{a}$ hoc caſu etiam $= a^{\circ} = 1$. Hæc hoc loci afferre volui, uti adpareat, omnia ſibi belle cohærere.

33. Eſt $\frac{1}{\infty} = 0$ (§. 31.); ergo $\frac{1}{\infty} : 1 = \frac{0}{1}$; quare $\frac{0}{1}$ in ſerie decreſcentium quantitatum notat infiniteſimam.

34. Cum ſint $\div 1, \frac{1}{\infty}, \frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3}$ &c., & ſit $\frac{1}{\infty} = 0$ reſpectu 1 (§. 31.); erit etiam $\frac{1}{\infty^2} = 0$ reſpectu $\frac{1}{\infty}$, & $\frac{1}{\infty^3} = 0$ reſpectu $\frac{1}{\infty^2}$. Et generatim infiniteſima altioris ordinis reſpectu inferioris evaneſcit.

35. Eſt $\frac{1}{\infty} : 1 = 1 : \infty$; ergo $0 : 1 = 1 : \infty$; quare $\frac{1}{0} = \infty$; quare $\frac{1}{0}$ in ſerie creſcentium quantitatum exprimit infinitam.

36. Quo-

Digitized by Google

36. Quoniam $\div\!\!\div \frac{1}{\infty}, 1, \infty, \infty^2, \infty^3, \infty^4,$ &c. & $\frac{1}{\infty} = 0$ respectu 1; erit etiam $1 = 0$ respectu ∞, & $\infty = 0$ respectu ∞^2. Et generaliter finitum respectu infiniti, & infinitum respectu infiniti altioris ordinis evanescit.

37. Igitur $a \pm \frac{n}{\infty^m} = a$ & $\frac{n}{\infty^m} \pm \frac{p}{\infty^{m+1}} = \frac{n}{\infty^m}$, ac $\infty^m \pm \infty^{m+1} = \infty^{m+1}$, & $\infty \pm a = \infty$. Hoc eſt, quantitas infinite parva reſpectu finitæ, & infinite parva altioris ordinis reſpectu infinitæ parvæ inferioris ordinis, nec non finita reſpectu infinitæ, & infinita inferioris ordinis reſpectu infinitæ altioris ordinis negligi poteſt, neque illæ has augent, vel minuunt; patet id ex §§. præcedentibus, & inde etiam, quod, ſicut ipſæ neglectæ quantitates ſunt quavis data minores reſpectu earum, reſpectu quarum negliguntur, ita error in iis negligendis admiſſus ſit quovis dato minor, hoc eſt, revera nullus.

38. Eſt etiam $a + \frac{n}{\infty^m}$ ad $b + \frac{p}{\infty^q}$ ut a ad b, ſeu ratio, quam habent inter ſe duæ quantitates finitæ non mutantur, quæcunque demum infiniteſimæ, imo quotcunque, modo numero finito, eis addantur, vel ab eis ſubducantur, vel uni ex finitis addantur, ab altera ſubducantur.

Signa

Digitized by Google

Signa autem additionis hic posita sunt in expressione, etsi etiam signum subtractionis pro arbitrio poni possit.

39. Licet ratio infinitesimæ ad finitam, & hujus ad infinitam quantitatem infinita sit, utpote omnes limites excedens (§. 7.); tamen infinitæ, & infinitesimæ ejusdem ordinis inter se finitam rationem quamcunque habere possunt per finitas quantitates explicabilem. Nam cogitari potest 4^{ta} geometrice proportionalis ad 1, m, ∞^n vel $\frac{1}{\infty^n}$, quæ erit ad ∞^n, vel $\frac{1}{\infty^n}$ in ratione m ad 1. Sic $2\infty : 4\infty$, vel $\frac{2}{\infty} : \frac{4}{\infty} = 2 : 4 = 1 : 2$. Sic $3\infty : 5\infty$, vel $\frac{3}{\infty} : \frac{5}{\infty} = 3 : 5$.

40. Si sint duæ finitæ quantitates a, & b, singulæ compositæ ex numero infinitis infinitesimis, & singulis infinitesimis in b respondeant singulæ infinitesimæ in a, sintque singulæ infinitesimæ quantitatis a, ad singulas infinitesimas quantitatis b in ratione data, & constante $c : e$; erit $a : b = c : e$. Cum enim infinitesimæ singulæ in a cum singulis sibi respondentibus in b constituant rationes totidem finitas, easque per hypothesim æquales; erit summa omnium antecedentium, seu a, ad summam omnium consequentium, seu b, ut quævis infinitesima ipsius a ad sibi respondentem b, hoc est per hypothesim ut c ad e. Bene

hic

Digitized by Google

hic advertendum ratiocinio huic locum non eſſe, ſi aut infiniteſimis ipſius a non totidem reſpondeant in b, aut ratio inter eas non ſit eadem. Hinc niſi hæc perſpecta ſint, ex ratione elementorum non bene infertur ratio finitarum quantitatum, quas conſtituunt. Elementa autem voco infiniteſimas, quæ finitam quantitatem conſtituunt, & quarum finita eſt aggregatum vel ſumma. Etſi enim elementorum ratio ſit eadem, tamen, quia fieri poteſt, ut elementum elemento non reſpondeat, ratiocinio locus non erit. Sit elementum unius finitæ quantitatis $\frac{1}{\infty}$, alterius $\frac{3}{\infty}$. Sed ∞ in prima ad ∞ in altera diverſam habere poteſt rationem finitam, ex. gr. duplam, triplam, quadruplam &c. ut dictum §. 39; adeoque inferri non poteſt $\infty \times \frac{1}{\infty}$ eſſe ad $\infty \times \frac{3}{\infty}$ ut 1 ad 3, niſi conſtet inter ∞ in prima quantitate, & ∞ in altera eſſe rationem æqualitatis.

41. Differentia duorum quadratorum, quorum radices differunt infiniteſima, æqualis eſt duplo facto radicis minoris in infiniteſimam, ſeu differentiam radicum. Sint radices $a \pm \frac{m}{\infty}$; erunt quadrata a^2, & $a^2 \pm \frac{2ma}{\infty} + \frac{m^2}{\infty^2}$; ſed $\frac{m^2}{\infty^2} = 0$ (§. 34.); ergo differentia quadratorum $= \frac{2ma}{\infty}$.

42. Si

42. Si duæ quantitates finitæ differant quantitate infinite parva, media arithmetice proportionalis non differt a media geometrice proportionali. Sint quantitates finitæ a, & $a \pm \frac{m}{\infty}$; erit media arithmetice proportionalis $=$ $\left(2a \pm \frac{m}{\infty}\right) : 2 = a \pm \frac{m}{2\infty}$: media vero geometrice proportionalis eſt $\surd\left(a \times \left(a \pm \frac{m}{\infty}\right)\right) = \surd\left(a^2 \pm \frac{am}{\infty}\right)$.

Eſt vero $a^2 \pm \frac{am}{\infty} = a^2 \pm \frac{am}{\infty} + \frac{m^2}{4\infty^2}$, quia $\frac{m^2}{4\infty^2}$ reſpectu $a^2 \pm \frac{am}{\infty}$ evaneſcit (§. 34.); quare

$$\surd\left(a^2 \pm \frac{am}{\infty}\right) = \surd\left(a^2 \pm \frac{am}{\infty} + \frac{m^2}{4\infty^2}\right) = a \pm \frac{m}{2\infty},$$ quæ eſt eadem cum media arithmetice proportionali.

43. Hinc ſi ſint plures quantitates A, B, C, D &c. in progreſſione arithmetica, differunt autem infiniteſima; erunt etiam in progreſſione geometrica, & D ex. gr., cujus differentia, ablata quantitate A, eſt tripla ipſius B − A, erit in ratione triplicata termini B ad A, & C in duplicata B ad A &c.

44. Si duæ quantitates finitæ differant infiniteſima, & ſi uni ex his quantitatibus addatur, & ab altera ſubtrahatur tantum, quantum earum differentiam reddere valet

duplam

duplam, vel triplam, aut fubduplam, vel fubtriplam; tum hæ quantitates facta illa mutatione erunt in ratione duplicata, vel triplicata, fubduplicata, vel fubtriplicata ejus, quam ante mutationem habuere. Sint quantitates finitæ a, & $a+\frac{m}{\infty}$; addatur huic $\frac{m}{2\infty}$, ab illa auferatur $\frac{m}{2\infty}$, & habebuntur quantitates $a-\frac{m}{2\infty}$, $a+\frac{3m}{2\infty}$, quarum differentia eft $\frac{4m}{2\infty}$, feu $\frac{2m}{\infty}$, adeoque eft dupla differentiæ prioris $\frac{m}{\infty}$. Eft ergo $a-\frac{m}{2\infty}$ ad $a+\frac{3m}{2\infty}$ in ratione duplicata a ad $a+\frac{m}{\infty}$. Nam inter $a-\frac{m}{2\infty}$, & $a+\frac{3m}{2\infty}$ media arithmetice proportionalis eft $a+\frac{m}{2\infty}$, quæ per §. 42. erit etiam media geometrice proportionalis; unde $a-\frac{m}{2\infty}$ eft ad $a+\frac{3m}{2\infty}$ in ratione duplicata $a-\frac{m}{2\infty}$ ad $a+\frac{m}{2\infty}$, feu (addendo utrinque $\frac{m}{2\infty}$, quod rationem non mutat (§. 38.)) a ad $a+\frac{m}{\infty}$. Et generaliter addatur quantitati $a+\frac{m}{\infty}$ quantitas $\frac{n}{p\infty}$; & ab a auferatur eadem quantitas $\frac{n}{p\infty}$; quæ fit hujusmodi, ut differentia inter $a-\frac{n}{p\infty}$, & $a+\frac{m}{\infty}+\frac{n}{p\infty}$ fit multipla, vel fubmultipla differentiæ inter a,

& $a + \frac{m}{\infty}$, seu infinitesimæ $\frac{m}{\infty}$; erit $a - \frac{n}{p\infty}$ primus terminus in progressione aliqua arithmetica, in qua communis terminorum differentia est $\frac{m}{\infty}$, & $a + \frac{m}{\infty} + \frac{n}{p\infty}$ terminus tertius, si differentia horum terminorum est dupla communis differentiæ $\frac{m}{\infty}$: si vero horum terminorum differentia est tripla communis $\frac{m}{\infty}$; erit $a + \frac{m}{\infty} + \frac{n}{p\infty}$ quartus terminus, & ita porro. Hos autem terminos differre infinitesima per se patet; quare per §. 43. sunt etiam in progressione geometrica, & $a + \frac{m}{\infty} + \frac{n}{p\infty}$ est ad $a - \frac{n}{p\infty}$ in ratione tot duplicata 2^{di} termini $a - \frac{n}{p\infty} + \frac{m}{\infty}$ ad primum, seu ad $a - \frac{n}{p\infty}$, quoties differentia terminorum $a + \frac{m}{\infty} + \frac{n}{p\infty}$, & $a - \frac{n}{p\infty}$ continet differentiam communem, seu $\frac{m}{\infty}$. Est autem $a - \frac{n}{p\infty}$ terminus primus ad 2^{dum} $a - \frac{n}{p\infty} + \frac{m}{\infty}$ (addito utrinque $\frac{n}{p\infty}$, quod rationem arithmeticam non mutat, ut notum est, & geometricam mutare non potest per §. 38.) ut a ad $a + \frac{m}{\infty}$; ergo $a + \frac{m}{\infty} + \frac{n}{p\infty}$ est ad $a - \frac{n}{p\infty}$ in ratione tot duplicata ipsius $a + \frac{m}{\infty}$ ad a, quoties differentia inter $a - \frac{n}{p\infty}$ & $a + \frac{m}{\infty} + \frac{n}{p\infty}$ continet $\frac{m}{\infty}$. Eodem

dem fere modo procedit demonstratio, si differentia quantitatum $a - \frac{n}{p\infty}$, & $a + \frac{m}{\infty} + \frac{n}{p\infty}$ sit submultipla ipsius $\frac{m}{\infty}$.

45. Potentia radicis binomiæ, cujus una pars est quantitas finita, altera infinite parva, æqualis est potentiæ gradus dati quantitatis finitæ una cum facto ex quantitate finita elevata ad potentiam uno gradu inferiorem, & ducta in infinite parvam, ac exponentem datum. Sic potentia secunda quantitatis $a + \frac{1}{\infty} = a^2 + \frac{2a}{\infty}$, ut jam vidimus §. 41. Sic $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^3 = a^3 + \frac{3a}{\infty}$, & $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^4 = a^4 + \frac{4a}{\infty}$, ac generaliter $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^m = a^m + \frac{ma}{\infty}$. Nam $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^3 = a^3 + \frac{3a^2}{\infty} + \frac{3a}{\infty^2} + \frac{1}{\infty^3}$, & $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^4 = a^4 + \frac{4a^3}{\infty} + \frac{6a^2}{\infty^2} + \frac{4a}{\infty^3} + \frac{1}{\infty^4}$, & $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^m = a^m + \frac{ma^{m-1}}{\infty} + \frac{m \cdot m-1 \cdot a^{m-2}}{2 \cdot \infty^2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot a^{m-3}}{2 \cdot 3 \cdot \infty^3}$ &c. ergo per §. 34. negligendo infinitesimas altiorum ordinum respectu radicis $a + \frac{1}{\infty}$; erit $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^3 = a^3 + \frac{3a^2}{\infty}$, $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^4 = a^4 + \frac{4a^3}{\infty}$, & $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^m = a^m + \frac{ma^{m-1}}{\infty}$.

Poteſt autem m etiam exponens fractus eſſe, ita, ut Theorema etiam ad radicalia extendatur, cum radicales quantitates analytice per exponentes expreſſæ poſſint ut dignitates tractari. Itaque ex. gr. $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$ erit $= a^{\frac{1}{2}} + \frac{a^{\frac{1}{2}-1}}{2\infty} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\infty a^{\frac{1}{2}}}$, $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{a^{\frac{1}{3}-1}}{3\infty} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3\infty a^{\frac{2}{3}}}$, $\left(a + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}} + \frac{3\,a^{\frac{3}{4}-1}}{4\infty} = a^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4\infty a^{\frac{1}{4}}}$.

46. Binomium $a + \frac{m}{\infty}$ elevatum ad potentiam infiniti exponentis eſt $= a^{\infty} + \frac{\infty\, m\, a^{\infty-1}}{\infty} + \frac{\infty - 1 . \infty . m^2 a^{\infty-2}}{1 . 2 . \infty^2}$
$+ \frac{\infty - 2 . \infty - 1 . \infty . m^3 a^{\infty-3}}{1 . 2 . 3 . \infty^3}$
$+ \frac{\infty - 3 . \infty - 2 . \infty - 1 . \infty\, m^4 a^{\infty-4}}{1 . 2 . 3 . 4 . \infty^4}$ &c.

$= a^{\infty} + m\, a^{\infty-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\infty}\right) m^2\, a^{\infty-2}$

$+ \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\infty} + \frac{1}{3\infty^2}\right) m^3\, a^{\infty-3}$

$+ \left(\frac{1}{24} - \right.$

Digitized by Google

$$+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{4\infty}+\frac{11}{24\infty^2}-\frac{1}{4\infty^3}\right)m^4 a^{\infty-4} \ \&c.$$

$= a^{\infty} + m a^{\infty-1} + \frac{1}{2} m^2 a^{\infty-2} + \frac{1}{6} m^3 a^{\infty-3} + \frac{1}{24} m^4$ $a^{\infty-4}$ &c. Si jam a ſit unitas, prodit $1 + m + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{6} m^3 + \frac{1}{24} m^4$ &c. quæ ſeries ſemper tota, ſeu ſpectatis omnibus terminis converget, ſi m fuerit minor unitate: ſi vero m ſuperet unitatem finite, principio quidem creſcent termini, dehinc verò decreſcent, idque ideo, quod numerator præcedentis termini ſemper in eundem numerum m ducitur, dum formatur numerator ſequentis, & denominator ducitur in numerum unitate majorem, quam fuerit factor ultimus denominatoris. Sit ex. gr. $m = 2$, fiet ſeries talis: $1, 2, \frac{4}{2}, \frac{8}{6}, \frac{16}{24}, \frac{32}{120}$ &c. $= 1, 2, 2, 1\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{15}$ &c.

47. Si in binomio $a + \frac{m}{\infty}$, ∞ tranſeat in finitam quantitatem majorem quam m, ita ut $\frac{m}{\infty}$ ſit fractio finita genuina, a vero ſit unitas; ex formula prima §. ſuperiore data patet, terminos 2dum, 3tium, & alios plures deinceps potentiæ infiniti gradus hujus binomii eſſe quantitates infinitas, ob infinitos numeratorum coefficientes ∞, $\infty - 1$, $\infty - 2$ &c. & denominatores infinitos in fi-

nitos

nitos abeuntes. Ex quo colligitur, quantitatis unitatem finite ſuperantis potentiam exponentis infiniti ſemper infinitam quantitatem fore.

48. Dixi §. 46, ſi in binomio $a + \frac{m}{\infty}$, a ſit unitas, & m finita quantitas unitate minor, ob terminos potentiæ gradus infiniti m, $\frac{1}{2} m^2$, $\frac{1}{6} m^3$ &c. finitos, potentiam illam unitatem ſuperaturam quantitate omnino finita; quare tacite ſuppoſui ſummam horum terminorum, & reliquorum deinceps in infinitum efficere tantum quantitatem finitam, de quo merito quis dubitare poſſet, cum quantitas finita accepta infinities, in infinitam excreſcat (§. 7.). Sed ſciendum in noſtro caſu non ſemper accipi quantitatem finitam; verum, cum termini potentiam conſtituentes decreſcant, tandem fieri infinite parvas fractiones; quo caſu infinitas numero quantitates, quarum priores finitæ ſint, ſummam finitam conſtituere poſſe mox obvio exemplo progreſſionis Geometricæ oſtendemus, atque inſuper locum habere, ubi binomium $1 + \frac{m}{\infty}$ ad potentiam gradus infiniti elevatur, ſeu in noſtro caſu, demonſtrabimus.

49. Sit in progreſſione Geometrica creſcente ex. gr. 2, 4, 8, 16, 32, 64, primus ſeu minimus terminus a, ulti-

Digitized by Google

ultimus u, quotus diviſo quovis termino majore per proximum minorem q, ſumma terminorum $ſ$; erit, ut notum eſt, $ſ - u : ſ - a = 1 : q$, & $ſ - a = (ſ - u)\, q$, ſeu $ſq - uq$; ac $ſ = \frac{uq - a}{q - 1}$. Quoniam ratiocinium, ex quo deducta eſt ultima æquatio, non pendet a numero terminorum, locum utique habet etiam, ubi progreſſio geometrica ad ſiniſtram fuerit continuata in infinitum; ex. gr. ſi progreſſio 2, 4, 8, &c. ita continuetur: &c. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. tum vero primus terminus erit $\frac{1}{\infty}$ per §. præced. & aliquis ex iis, qui prius erant inter primos, conſiderari poterit ut ultimus; erit ergo a hoc caſu $= \frac{1}{\infty}$; adeoque $\frac{uq - a}{q - 1}$ mutatur in $\frac{uq - \frac{1}{\infty}}{q - 1}$, ſeu per §. 34. & 37, in $\frac{uq}{q - 1}$. Eſt ergo $\frac{uq}{q - 1}$, quæ utique eſt quantitas finita, æqualis progreſſioni geometricæ infinitorum terminorum decreſcentium, ſi nempe a datis initium ſumatur. Quare verum eſt quantitates etiam infinitas numero, ſed decreſcentes ſummam finitam conſtituere poſſe, ut §. priore dictum. Jam vero in caſu §phi prioris, m, m^2, m^3, m^4 &c. in infinitum eſt progreſſio geometrica decreſcens; ergo ejus ſumma per modo demonſtrata eſt finita, nempe u eſt $= m$; quare $\frac{uq}{q - 1}$, ſeu ſumma fractionum m, m^2, m^3, m^4

in

Digitized by Google

in infinitum $= \frac{mq}{q-1}$, quæ utique eſt quantitas finita. Sit ex. gr. $m = \frac{2}{3}$; erit $q = \frac{3}{2}$, quia $\frac{m}{m^2} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$; adeoque $\frac{mq}{q-1} = \frac{2 \cdot 3}{3(3-2)} = \frac{6}{3} = 2$. Cum igitur ſumma fractionum m, m^2, m^3, m^4 — — m^∞ ſit finita, etiam, & multo magis ſumma terminorum m, $\frac{1}{2} m^2$, $\frac{1}{6} m^3$, $\frac{1}{24} m^4$ — — $\frac{1}{\infty} m^\infty$ erit finita.

50. Cæterum, quæ hic de negligendis infiniteſimis dicta ſunt, etiam, etſi non eo in rigore, de quantitatibus reſpectu aliarum exiguis intelligi poſſunt, id quod ſæpe non contemnendam habet utilitatem, & compendia ſuggerit eximia in praxi mathematica, ubi ad quantitates devenitur tam parvas, ut ſenſum effugiant, ſed ſemper circumſtantiarum ratio habeatur, oportet. Nam quantitas exigua, quæ in his circumſtantiis contemni poteſt, in aliis contemni nequit; ita quæ ſenſibus non armatis nulla eſt, magna erit armatis teleſcopio, aut microſcopio.

CA-

Digitized by Google

CAPUT II.

DE DIFFERENTIALIBUS, ATQUE PRIMIS CALCULI DIFFERENTIALIS FUNDAMENTIS.

§ 1.

Quantitates, quæ continenter crescere, vel decrescere concipi possunt aliis iisdem manentibus, variantes, seu variabiles vocantur; quæ vero eædem manent, constantes. Sic in circulo diameter est quantitas constans, arcus circuli vero variabilis; concipi enim potest arcus major ortus ex incremento continuo minoris, & minor ex decremento continuo majoris, & omnes intermediæ quantitates sensim natæ sunt arcus; adeoque arcus concipi potest crescere, vel decrescere manente eadem diametro. In Ellipsi axes quantitates constantes sunt, diametri, & arcus variabiles. Potentia aliqua determinata quantitas constans est; velocitas, quam successive producit, & tempus quantitates sunt variabiles. Quantitates constantes prioribus alphabeti literis, variabiles ultimis x, y, imo t, u, &c. si pluribus opus sit, solent designari, sive cognitæ eæ ſint, ſive non, neque enim hic diſcrimen hoc attenditur, quemadmodum in Analyſi vulgari.

52. Quantitatis variabilis valores poſſunt eſſe infiniti, non item conſtantis. Sic diametri in circulo eodem valor, ſeu magnitudo unica eſt, arcus vero magnitudines diverſæ numero infinitæ. Nam licet concipere arcus majores, minoresque ex peripheria reſectos in infinitum. Axes in Ellipſi duo ſunt, diametri differenti magnitudine infinitæ.

53. Quantitatem quamcunque analytice expreſſam, & vel unam tantum variabilem complexam & ipſam eſſe variabilem, palam eſt. Sive enim variabilis aliis conſtantibus addita ſit, ſive ſubtracta, ſeu alias multiplicet, ſeu dividat, certum eſt illa creſcente, vel decreſcente, totius compoſitæ quantitatis valorem, & magnitudinem mutari, atque una cum variabili creſcere, vel decreſcere, adeoque variabilem eſſe (§. 51.). Sint quantitates variabiles x, y, conſtantes a, b; erunt $x \pm a$, $b \pm y$, $a\,x$, $\frac{y}{b}, \frac{b}{y}$ itidem variabiles. Potiori autem jure variabiles erunt $x \pm y$, $x\,y$, $\frac{x}{y}$; adeoque & x^2, x^m, $\sqrt{x}$, $\sqrt[m]{x^n}$ &c.

54. Functio eſt quantitas, cujus magnitudo a variabili una vel pluribus, quæ inter ſe ut inconnexæ conſiderantur, dependet. Quare variabilis, vel variabiles, a quibus

Digitized by Google

bus functionis magnitudo dependet, in functionis analytica expressione involvuntur, & implicantur: & vicissim, si in aliqua expressione analytica variabilis una præter constantes, vel plures variabiles inter se non connexæ reperiantur, ea expressio variabilis illius, vel illarum inter se non connexarum functio est. Sic $2x$, $x \pm a$, x^2, x^m, $\sqrt[m]{x^n}$, ax, $\frac{x}{a}$, $\frac{a}{x}$, lx seu logarithmus ipsius x functiones sunt variabilis x: Sic $x+y$, xy, $\frac{x}{y}$, xy^2, $y\sqrt{x}$ &c. functiones sunt duarum variabilium x, & y, si x & y a se invicem non pendeat, vel pendere non cogitentur. Quid quod & x, si consideretur ut x^1, seu potentia prima respectu x pro functione ipsius x tanquam radicis haberi possit: item x^0, quæ expressio, ut notum est, significat unitatem, non minus quam $(xy)^0$, vel $(x+y)^0$, quæ quantitates etiam unitates sunt, inter functiones variabilium x, y numerantur. Functio alia est algebraica, alia transcendens, illa algorithmo ordinario finitorum, vel radicum extractioni ortum debet: hæc logarithmicas quantitates, & infinitesimas variabilium, item arcus circulares, sinus &c. complectitur. Solet autem functio indicari majuscula, sic X designat functiones quaslibet variabilis x: & ad designandas functiones duarum variabilium x, y, assumi potest ex. gr. Z, vel U, vel XY &c. uti videbitur, & accomodatius ad rem præ-

Digitized by Google

ſentem fuerit. Patet autem ex §. præcedente, & ipſa functionis definitione, functiones eſſe variabiles quantitates, ſi excipias illam, cujus exponens eſt o, cum hæc ſit unitas; unde x^0, $(xy)^0$ &c. ſunt quantitates tantum apparenter variabiles. Cæterum cum functio ſit variabilis, conſiderari utique poterit ut ſimplex aliqua variabilis, qualis etiam eſt reſpectu magis compoſitarum. Unde etiam ex. gr. $\frac{ax}{b}$ adſumi poteſt $= y$, hoc eſt, conſiderari, ut variabilis aliqua ſimplex, quæ per y repræſentetur. Ita xy per u exprimi poteſt, & hac ratione functionem quamvis ad formam variabilis ſimplicis revocare licet, id quod magno uſui erit in dicendis. Notandum tamen ſemper rationem naturæ talis variabilis ad formam ſimplicis reductæ haberi debere, ubi calculus circa eam non indicandus ſolum, ſed re ipſa inſtituendus fuerit.

55. Quantitas variabilis creſcens, vel decreſcens ante, quam magnitudinem aliam ejusdem cum priori ordinis acquirat, ſubinde acquirere, vel amittere debet partes omnes, ex quibus componitur differentia inter quantitatem genitam ex valore variabilis priore, & hunc ipſum valorem. Sit variabilis x valor quidam, qui fiat creſcendo $= x + a$. Dividatur a in b, c, e, f; & x creſcendo evadet, $x + b$, dein $x + b + c$, tum $x + b + c + e$, ac tandem $x + b + c + e +$

$f =$

$f = x + a$. Quoniam autem & pars b suas partes habet, & hæ singulæ suas itidem, & ita in infinitum, per §. 2. has omnes variabilis x progrediente tempore acquirat, oportet; quæ cum sint infinitesimæ omnium ordinum (§. 17.) patet infinitesimas omnium ordinum esse variabilis ad aliam magnitudinem etiam finitam tendentis incrementa. Idem vero, quod modo de variabili crescente, & de decrescente ejusque diminutionibus dictum intelligitur. Sunt autem infinitesimæ incrementa, & diminutiones momentaneæ, seu minimis tempusculis acquisitæ, vel amissæ, quarum cum variabilis infinitas acquisierit, vel amiserit, augetur, vel minuitur quantitate ordinis uno gradu differentis. Nam $x \pm \frac{1}{\infty^m}$, $x \pm \frac{2}{\infty^m}$, $x \pm \frac{3}{\infty^m}$ &c. fit tandem $x \pm \frac{\infty}{\infty^m} = x \pm \frac{1}{\infty^{m-1}}$ (§. 27.), & $x \pm \frac{1}{\infty^{m-1}}$, $x \pm \frac{2}{\infty^{m-1}}$, $x \pm \frac{3}{\infty^{m-1}}$ &c. fit tandem $x \pm \frac{\infty}{\infty^{m-1}} = x \pm \frac{\infty}{\infty^{m-2}}$ atque ita porro pergere licet; ubi vero exponens denominatoris $m-2$, seu generaliter $m-n$ fuerit $= 1$, seu $n = m - 1$, tum obtinemus $\frac{\infty}{\infty}$, seu 1; itaque variabilis x finitum habebit incrementum, vel decrementum. Quodsi variabilis ultra crescat, fieri tandem poterit, ut n sit $= m$, quo casu erit $x + \frac{\infty}{\infty^{m-n}} = x + \frac{\infty}{1} = x + \infty$, seu variabilis x evadet infinita.

56. Pa-

Digitized by Google

56. Patet vero ex modo expositis quantitatem variabilem crescentem, vel decrescentem ante, quam magnitudinem aliam acquirat, per omnes intermedias procedere, easque sensim adsumere.

57. Praeterea clarum est, incrementa momentanea vel diminutiones quantitatis variabilis esse differentiolas inter magnitudines, quas variabilis habet ante genitum incrementum vel diminutionem factam, & post genitum incrementum, & diminutionem factam. Differentiolae istae dicuntur hic differentialia quantitatis variantis, seu variabilis, vel quantitates differentiales. Itaque differentiale definiri potest, quod sit quantitas, quae oritur, si variabilis a se ipsa sed momentaneo incremento vel diminutione mutata auferatur.

58. Diminutiones momentaneae, vel incrementa momentanea, seu tempusculis quam minimis inter se aequalibus a quantitate variabili finita acquisita vel sunt inter se aequalia, sic ut quantitatis x magnitudines tempusculis sibi ex ordine succedentibus sint: $x \pm \frac{1}{\infty}$, $x \pm \frac{2}{\infty}$, $x \pm \frac{3}{\infty}$ &c., & tum haec incrementa, vel diminutiones quantitates constantes censentur (§. 51.): vel ipsa quoque continenter crescunt, aut decrescunt per diminutiones vel incrementa alia, quae sint ad priora relata quam minima, seu ordinis

gradu

gradu uno saltem altioris, sic ut quantitatis x magnitudines sensim acquisitæ sint, x, $x \pm \frac{1}{\infty}$, $x \pm \frac{2}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$, $x \pm \frac{3}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$ &c.; & tum hæc incrementa, vel diminutiones quantitates variabiles sunt (§. cit.). Atque quidquid hucusque de quantitate variabili dictum est, vel dicetur, nisi expresse ad finitam restringatur quantitatem, etiam verum est de variabilibus incrementis, & diminutionibus. Igitur in primo casu differentialia quantitatis variabilis finitæ sunt constantia, seu nullas habent differentias; in 2do habent rursus suas differentias. Unde ad distinctionem faciendam differentiolæ, seu differentialia quantitatum variabilium finitorum prima dicuntur; horum vero differentiolæ differentialia secunda, seu 2di ordinis, & ita porro. Nam possunt etiam differentialia secunda esse variabiles quantitates, adeoque suas habere differentiolas, & hæ rursum suas. Differentialia autem dicuntur secunda, tertia &c. sine addito, si referantur ad variabilem finitam; nam differentialia secunda relata ad prima, & ipsa prima sunt, idem esto judicium de altioribus.

59. Quantitates differentiales sunt infinitesimæ (§§. 55, 57, 58.). Suntque ii ordines differentialium, qui infinitesimarum, nam differentiale 2dum est infinitesima 2di ordinis, 3tium est infinitesima 3tii ordinis &c. & quæ de infini-

tesimis attulimus Cap. super. etiam de differentialibus quatenus infinitesimis tenenda sunt.

60. Differentiale quantitatis variabilis simplicis recte præfixo d indicatur. Sic differentiale ipsius x est dx, ipsius dx vero ddx, vel d^2x, & dx quidem differentiale primum, vel primi ordinis indicat (§. 58.); ddx vero, vel d^2x est differentiale 2dum, vel 2di ordinis quantitatis variabilis x. Signo d opponitur signum $\int$, denotatque quantitatem cujus differentiale illa esse concipitur, cui $\int$ præfigitur. Sic $\int dx$ significat x. Cæterum d, vel d^2 vel in genere d^m tantum literam a dextris proxime sequentem adficit, & ne quidem ad literæ hujus exponentem se extendit. Quod si tamen hæc litera cum exponente suo, aut plures sequentes signum d, vel d^m parenthesibus includantur, tum quidem d vel d^m totius quantitatis inclusis literis repræsentatæ differentiale denotat, seu totius differentiale sumendum esse indigitat. Unde bene advertendum dx ex. gr. non esse hic ut in ordinaria factum ex quantitate d in x, nec d^my factum ex potentia d^m in y ducta; atque idcirco etiam d in calculo differentiali, & integrali nunquam assumitur ad designandam aliquam quantitatem, ne confusio oriatur. Bene etiam distinguendæ sunt expressiones d^2x, dx^2, $d(x^2)$ & aliæ hujusmodi; d^2x enim significat differentiale 2dum variabilis x; dx^2 factum ex dx in dx seu differentialis 1mi in pri-

primum, ſeu quadratum differentialis 1^{mi} variabilis x. $d(x^2)$ vero indicat quadrati x^2 differentiale primum eſſe accipiendum. Sic etiam $d(a+x)^2$ ſignificat differentiale 1^{mum} quantitatis variabilis $a+x$ in ſe ductum, ſeu $d(a+x)d(a+x)$. at $d((a+x)^2)$ vel $d.(a+x)^2$ denotat quadrati $(a+x)^2$ differentiale primum: $d^2(xy)$ differentiale 2^{dum} facti xy. Angli differentialia, (fluxiones vocant, & quantitates variabiles fluentes) punctis ſuper quantitates variabiles poſitis indicare ſolent, ita loco dx ſcribunt $\dot{x}$, $\ddot{x}$ loco ddx, loco d^3x vero $\dddot{x}$.

61. Eſt ergo per §. 59. $dx = \frac{1}{\infty}$ vel $\frac{x}{\infty}$, dx^2, ddx vel $d^2x = \frac{1}{\infty^2}$ vel $\frac{x}{\infty^2}$, dx^3, ac $d^3x = \frac{1}{\infty^3}$ vel $\frac{x}{\infty^3}$ &c. Et ſi variabilis ex. gr. x incipiat decreſcere, & habeatur $x - dx$; erit $(x-dx)-x$, ſeu differentiale ipſius variabilis x per definitionem §. 57. datam $= -dx$, ſeu negativum.

62. Calculus differentiarum minimarum quantitatum variantium directus, ſeu caculus differentialis eſt methodus inveniendi differentialia functionis, variabilis unius vel plurium x, y, z, &c. dum differentialia prima variabilium reſpectiva ſunt dx, dy, dz &c. & horum differentialia ddx, ddy, ddz &c. atque horum d^3x, d^3y, d^3z &c. Aliqui calculum differentialem reſtringunt ad ſola invenien-

da differentialia prima ; eum vero, qui docet invenire differentialia altioris ordinis vocant differentio – differentialem. Nos in ſequentibus primum quidem functionum algebraicarum, aut earum tranſcendentium, quæ per differentiationem, ſeu calculum differentialem ex algebraicis ortæ ſunt, differentialia invenire docebimus : dein vero etiam aliarum. Unde nomine functionum tantum algebraicas, aut differentiales ex algebraicis ortas tam diu deſignatas volumus, donec aliud dicamus.

63. Cum quantitatibus variabilibus ſimplicibus finitis incrementa momentanea, vel diminutiones momentaneas capientibus, adeoque differentialia (§. 57.), etiam earum functiones mutationem momentaneam ſubeant (§§. 51, 53, 54.) ; obtinebitur mutatio functionum reſpondentium variabilibus ſimplicibus creſcentibus, vel decreſcentibus, ſi in functionibus in locum ſimplicium ipſæ ſimplices cum incrementis ſuis, vel diminutionibus ſubſtituantur. Differentiale ergo proximum functionis habebitur, ſi functio a ſe ipſa per ſubſtitutionem variabilium ſimplicium cum proximis differentialibus acceptorum mutata ſubducatur (§. 57.). Et hæc eſt regula fundamentalis, & generalis differentialia proxima inveniendi, ex qua, & §§. 31. & 34. particulares, & compendia inprimis pro differentialibus non integris, derivabimus. Dixi pro differentialibus non inte-

Digitized by Google

integris, quoniam qui regulas ſpeciales ſequuntur, quantitates quasdam quam minimas altiorum ordinum negligunt. Sed hæc ex paulo infra dicendis clariora fient.

64. Sint functiones $x \pm a$, vel $x \pm y$, quarum quæritur differentiale primum. In locum x ſubſtituatur $x + dx$, in locum y vero $y + dy$. Quia vero a utpote conſtans quantitas (§. 51.) variabilibus mutatis non variatur, ejus incrementum vel decrementum eſt nullum, ſeu $da = 0$; quare x mutato in $x + dx$, manet a; ergo variabilibus x, & y capientibus incrementa dx, dy, functiones memoratæ ex eis compoſitæ in has mutabuntur: $x + dx \pm y + dy$, $x + dx \pm a$. Ex quibus ſi ſubducantur $x \pm y$, $x \pm a$, habebuntur differentialia prima quæſita, nempe $dx \pm dy$, & dx. Quæratur differentiale proximum quantitatis $dx \pm dy$, ubi dx, dy variabiles ſupponuntur. In locum dx ſurrogetur $dx + ddx$, in locum dy vero $dy + ddy$; erit $dx + ddx \pm dy + ddy - dx - dy = ddx + ddy$; adeoque $ddx + ddy$ eſt differentiale proximum quantitatis $dx \pm dy$. Eſt autem $ddy \pm ddy$ relatum ad $x \pm y$ differentiale ſecundum, ſeu 2di ordinis. Unde generaliter *habetur differentiale ordinis* m *functionis formæ propoſitæ, ſeu ex variabilibus ſimplicibus, & conſtantibus per ſolam additionem vel ſubtractionem compoſitæ, ſi in locum variabilium, earum differentialia ordinis* m *ſubſtituantur.*

Sit ex. gr. quærendum differentiale tertium ſeu 3[tii] ordinis vel gradus quantitatis $a+y-u$ variabilium y, u, differentialia 3[tii] ordinis ſint d^3, d^3; his ſubſtitutis habebimus differentiale 3[tium] quæſitum $= d^3y - d^3u$. Cum autem functio quævis variabilis unius vel plurium poſſit conſiderari ut variabilis ſimplex (§. 54.); erit etiam $d^m\ (z \pm U \pm a) = d^m z + d^m U$, hoc eſt, *quantitatis ex pluribus terminis* z, U, a, *qui ſint partim conſtantes partim functiones variabilium, compoſitæ, differentiale ordinis* m *invenitur, ſi ſumantur differentialia ordinis* m *ſingulorum terminorum.* Quomodo autem ſeorſim ſingulorum terminorum, qui functiones ſint, differentialia inveniantur, enucleatius propediem dicemus.

65. Si variabilis ſimplex multiplicata ſit, diviſave per conſtantem qualitatem, *ejus differentiale ordinis deſiderati obtinetur, ſi in locum variabilis ponatur ejusdem differentiale ordinis deſiderati.* Sic differentialia prima quantitatum ax, $\frac{x}{a}$, $\frac{ax}{b}$ ſunt adx, $\frac{dx}{a}$, $\frac{adx}{b}$. Differentialia ſecunda ad^2x, $\frac{d^2x}{a}$, $\frac{ad^2x}{b}$. Nam juxta regulam fundamentalem (§. 63.) $a\,(x+dx) - ax = adx$ &c. item $a\,(dx + ddx) - adx = ad^2x$, & $a\,(ddx + d^3x) - ad^2x = ad^3x$ &c. Unde ſequitur eſſe $d^m\,(ax) = a\,d^m x$, & $d^m \left(\frac{x}{a}\right) = \frac{d^m x}{a} = \frac{1}{a}\,d^m x$. Quia vero quælibet functio ex. gr. X, Z, conſiderari poteſt

Digitized by Google

test ut variabilis simplex per cit. §. 54; erit etiam $d^m(aX) = a\,d^m X$, & $d^m(aZ) = a\,d^m Z$. Item $d^m\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{1}{a} d^m X$, & $d^m\left(\frac{Z}{a}\right) = \frac{1}{a} d^m Z$. Designat autem a coefficientem vel divisorem ex meris constantibus quantitatibus compositum. Quare *functionis cujusvis, quæ dispesci potest in duos factores, quorum unus sit quantitas constans simplex, vel quomodolibet composita integra vel fracta*, alter *quantitas variabilis*, *functionis, inquam, talis differentiale obtinebitur, si differentiale factoris alterius seu variabilis per regulas proponendas inveniendum in factorem constantem ducatur.* Manifestum autem est legem hanc, & 2dam §phi prioris extendi omnino ad omnes functiones, etiam transcendentes.

CAPUT III.

DE INVENIENDIS DIFFERENTIALIBUS PROXIMIS VARIABILIUM IN SE DUCTARUM; ET QUANTITATUM RADICALIUM.

66.

Sit functio duarum variabilium xy, quæritur ejus differentiale primum. Erit juxta fundamentum (§. 63.)

63.) $(x+dx)(y+dy)-xy=d(xy)$; sed $(x+dx)(y+dy)=xy+x\,dy+y\,dx+dx\,dy$; ergo $d(xy)=xy+x\,dy+y\,dx+dx\,dy-xy=x\,dy+y\,dx+dx\,dy$. Est ergo differentiale primum integrum quantitatis variabilis xy istud: $x\,dy+y\,dx+dx\,dy$. Porro differentiale proximum quantitatis $x\,dy$ erit $(x+dx)(dy+ddy)-x\,dy=x\,dy+dy\,dx+x\,ddy+dx\,ddy-x\,dy=dy\,dx+x\,ddy+dx\,ddy$. Et differentiale proximum quantitatis $dt\,du$ est $(dt+ddt)(du+ddu)-dt\,du=du\,ddt+dt\,ddu+ddt\,ddu$.

67. Quod si per §. 31. & 34. in differentialibus modo inventis negligatur terminus, qui comparatus ad cæteros est infinite parvus, seu ordinis altioris, quam sit ipsum differentiale, quales sunt in primo exemplo $dx\,dy$, in 2do $dx\,ddy$, in 3^{tio} $ddt\,ddu$, erit $x\,dy+y\,dx$ differentiale primum quantitatis xy, $dy\,dx+x\,ddy$ differentiale proximum quantitatis $x\,dy$, $du\,ddt+dt\,ddu$ denique differentiale proximum quantitatis $dt\,du$. Consideratis adcuratius his differentialibus patet ab iis contineri differentiale proximum utriusque variabilis in functione propositæ ductum in variabilem alteram.

68. Differentiale primum quantitatis xyz juxta regulam fundamentalem est $(x+dx)(y+dy)(z+dz)-$

xyz

$xyz = xydz + xzdy + zydx + dx\,dy + dy\,dz + dz\,dy = xy\,dz + xzdy + zy\,dx$. Concipi etiam poteſt $xy = u$; & tum erit $xyz = uz$, & $d(uz) = udz + zdu$ per §. præc. & (ſubſtituendo in locum u quantitatem xz) $= xzdz + zd(xy)$, ſed $d(xy)$ per §. præc. $= xdy + ydx$; quare $d(xyz) = xydz + (xdy + ydx)z = xydz + zxdy + zydx$. Si quantitatis $txyz$ differentiale primum ſit inveniendum, fiat $txy = u$, & procedatur, ut ante, & emerget differentiale $zxydt + zxtdy + zytdx + yxtdz$. Si quæratur differentiale proximum quantitatis $t\,dx\,ddy$, adſumendo $t\,dx$ factum duarum variabilium t, dx, æquale ipſi u; pro differentiali proximo quantitatis $t\,dx\,ddy$ obtinebimus $t\,dx\,d^3y + t\,d^2x\,d^2y + dt\,dx\,d^2y$. In omnibus his differentialibus ſingularum variabilium differentialia proxima ſeorſim ducta ſunt in factum ex reliquis variabilibus. Sic in ultimo exemplo differentialia proxima variabilium t, dx, d^2y ſunt dt, d^2x, d^3y, & dt ductum reperitur in reliquas variabiles dx, d^2y, item d^2x in t, & d^2y, ac d^3y in t, & dx. Quare regula generalis inveniendi differentialia proxima variabilium quotcunque in ſe ductarum eſt hæc: *ſingularum variabilium differentialia proxima ſeorſim ducantur in reliquas variabiles inſimul, facta addantur, niſi differentiale alicujus variabilis ſit negativum.*

69. Ex conſideratione differentialium inventorum, &

con-

constanti ea formandi lege Regula alia deducitur, quæ est talis: 1mo *In facto ex pluribus variabilibus unica ad arbitrium deligenda variabilis, reliquæ constantes censeantur, & quæratur facti differentiale proximum per §. 65. 2do Adsumatur in facto dato alia, quæ variabilis habeatur, & dein rursum alia, & procedatur ut ante, idque toties quot adsunt in facto variabiles.* In functione trium variabilium xyz primum x variabilis censeatur, reliquæ constantes; & erit per §. 65. differentiale proximum quantitatis xyz æquale $yz\,dx$. Jam y sit variabilis, x, z constantes; erit $d\,(xyz)$ facta hac suppositione $= xz\,dy$: denique z sit variabilis; erit $d\,(xyz)$ facta hac suppositione $= xy\,dz$, & differentiale proximum quantitatis xyz, in qua omnes sint variabiles, seu quæsitum differentiale erit $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, ut §. præced.

70. Quia $x^2 = xx$, $x^3 = xxx$; erit $d\,(x^2) = x\,dx + x\,dx$ per §. 68, vel 69, $= 2x^1\,dx = 2x^{2-1}\,dx$: & $d\,(x^3) = xx\,dx + xx\,dx + xx\,dx = 3\,x^2\,dx = 3\,x^{3-1}\,dx$. Et quia $dx^2 = dx\,dx$; erit $d\,(dx^2) = dx\,ddx + dx\,ddx = 2\,dx\,ddx$, & $d\,(dx^3) = 3\,dx^2\,ddx = 3\,dx^{3-1}\,ddx$. Differentialibus his expensis animadvertitur, quod contineant differentiale proximum variabilis sub exponente ex. gr. in prioribus exemplis ipsius x exponentibus 2, 3 subjectæ: variabilis item potentiam uno gradu data inferiorem & ductam in exponentem integrum, cumque hæc ita

Digitized by Google

ita prodeant ex observatione legis formationis, quæ constans est, semper locum habeant, oportet; quare erit generalius $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Et quia functio quævis concipi potest ut variabilis simplex; erit etiam $d(z^m) = mz^{m-1}dz$. Adeoque regula generalis inveniendi differentiale proximum potentiæ alicujus variabilis hæc est: *Differentiale proximum quantitatis sub exponente ducatur in datam variabilis potentiam uno gradu dejectam, & per suum exponentem integrum multiplicatam.*

71. Quoniam quævis functio ex variabilibus quomodolibet composita ut simplex variabilis considerari potest per §. 54, regula se etiam extendit ad potentias functionum variabilium ex aliis variabilibus compositarum. Sit quantitas $(x+y+a)^2$, item bx^2y^2 seu $b(xy)^2$. Assumi potest $x+y+a=u$, & $xy=z$; Unde $d((x+y+a)^2) = d(u^2)$, & $d(bx^2y^2) = bd(z^2)$ (§. 65.). Sed $d(u^2) = 2u\,du$, & $u = x+y+a$, $du = dx+dy$ per §. 64; adeoque $2u\,du = 2(x+y+a)(dx+dy)$. Rursum $bd(z^2) = 2bz\,dz$, & $z = yx$, $dz = (ydx+xdy)$; quare $2bz\,dz = 2bxy(ydx+xdy) = 2bxy^2dx + 2bx^2y\,dy$.

72. Poterat etiam $x+y+a$ actu elevari ad potentiam 2^{dam}: item in bx^2y^2 pro x^2 substitui u, pro y^2 vero z; adeoque bx^2y^2 fieri $= buz$.

Digitized by Google

73. Quia radicales quantitates reduci possunt ad potentias habentes exponentes fractos; differentiale proximum radicalis quantitatis variabilis alicujus per eandem regulam invenitur. Sic quia $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; erit $d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; nam $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Cum $mz^{m-1}dz$ per §. 70. sit formula generalis differentialis proximi potentiæ variabilis unius, vel plurium, atque exponens integer vel fractus, aut denique negativus esse possit, & cum radicales quantitates ad formam potentiarum reducantur fractum exponentem ipsis tribuendo; formula hæc & regula cit. §. proposita etiam ad radicales quantitates extenditur; quod si tamen specialis aliqua regula desideretur pro inveniendis radicalium differentialibus proximis, ea erui poterit ex allatis formulis, modo m sub forma fractionis, quam in casu radicalium designat, præponatur. Sit ergo $m = \frac{e}{f}$; & erit $mz^{m-1}dz = \frac{e}{f}z^{\frac{e}{f}-1}dz = \frac{e}{fz}dz\sqrt[f]{z^e} = d\left(\sqrt[f]{z^e}\right)$. Ex formula 3tia sequens regula derivatur:

1mo *Sumatur differentiale quantitatis radicalis sub signo per* z *designatæ.* 2do *Formetur fractio cujus Numerator sit exponens* e *quantitatis* z *sub signo radicali existentis, Denominator vero factum ex exponente radicali* f *in* z. 3tio *differentiale N.* 1. *inventum,*

tum, fractio inventa, & ipsa quantitas, cujus differentiale quæritur, ducantur in se; & habebitur quæsitum differentiale proximum quantitatis radicalis propositæ. Cum sit $z = \sqrt[f]{z^f}$; erit $\frac{e}{fz} dz \sqrt[f]{z^e} = \frac{e\,dz}{f\sqrt[f]{z^f}} \sqrt[f]{z^e}$, & actu dividendo per $\sqrt[f]{z^f}$ habebimus $\frac{e}{f} dz \sqrt[f]{z^{e-f}}$, ex qua formula alia regula inveniendi differentialia quantitatum formæ $\sqrt[f]{z^e}$ derivari potest. Quod si accidit f esse majorem, quam sit e; erit $e-f$ quantitas negativa. Sit hoc casu $f-e=g$; & erit $e-f=-g$, & $\frac{e}{f} dz \sqrt[f]{z^{e-f}} = \frac{e}{f} dz \sqrt[f]{z^{-g}} = \frac{e}{f} dz \times z^{-\frac{g}{f}} = \frac{e\,dz}{f z^{\frac{g}{f}}}$.

Ex hac formula fluit sequens regula pro casu, in quo $f>e$. 1mo *Quæratur differentiale quantitatis radicalis sub signo non elevatæ videlicet ad potentiam indicatam.* 2do *Quantitati sub signo tribuatur exponens fractus, cujus numerator sit excessus exponentis radicalis supra exponentem quantitatis sub signo existentis, & denominator sit ipse exponens radicalis.* 3tio *Formetur fractio, cujus numerator sit factum ex differentiali* N. 1mo *invento, & exponente quantitatis sub signo, denominator vero factum ex quantitate sub signo per exponentem fractum* N. 2do *repertum elevata, & ex exponente radicali propositæ ad differentiandum quantitatis.* Cæterum formula, ex qua fluit hæc regula, etiam ita exprimi poteſt $\frac{e\,dz}{f\sqrt[f]{z^g}}$, ut notum eſt. Si in formula $\frac{e}{f}\,dz\sqrt[f]{z^{e-f}}$ ſit $e>f$; erit $e-f$ quantitas affirmativa, & $\frac{e-f}{f}$ vel fractio genuina, vel ſpuria, & in hoc caſu $e-f$ vel f continebit ſemel tantum, vel erit ejus multiplum, vel ſemel, pluriesve continebit, ſed inſuper ejus aliquam partem. Si f metiatur $e-f$, ſit numerus, quo metitur $e-f=k$; & formula tradita tranſit in hanc $\frac{e}{f}dz\times z^k$ ſeu $\frac{e}{f}z^k\,dz$, quæ eſt formæ rationalis, & ſine radicalibus quantitatibus. Hic vero caſus ſemper habebitur, ſiquidem f metiatur e. Nam ſi f metiatur e, etiam f metietur $e-f$, cum quilibet numerus metiatur ſe ipſum. Et hoc caſu $\sqrt[f]{z^e}$, ſi fiat $\frac{e}{f}=h$, ad formam rationalem z^h reducitur. Si vero f non metiatur $e-f$, ſit $\frac{e-f}{f}=k+\frac{n}{f}$, ubi k quotientem integrum ex diviſione quantitatis $e-f$ per f denotat, & n reſiduum a diviſione peracta; & erit hoc caſu $\frac{e}{f}\,dz\sqrt[f]{z^{e-f}}=\frac{e}{f}dz\times z^{\frac{e-f}{f}}=\frac{e}{f}\,dz\times z^{k+\frac{n}{f}}=\frac{e}{f}z^k\,dz\sqrt[f]{z^n}$. Et quia $\frac{e-f}{f}=\frac{e}{f}-1=k+\frac{n}{f}$; erit $\frac{e}{f}=k+\frac{n}{f}+1$; quare hic

caſus

Digitized by Google

casus habebitur, si $\sqrt[f]{z^e}$ fuerit $= z^{k+\frac{n}{f}+1} = z^{\frac{fk+n+f}{f}}$ $= \sqrt[f]{z^{fk+n+f}}$, hoc est si e fuerit $= fk+n+f$, ubi k & n non secus ac f sunt numeri integri. Denique si sit $e = f$, formula $\frac{e}{f} dz \sqrt[f]{z^{e-f}}$ abit in hanc $dz \sqrt[f]{z^0}$ seu (quia $z^0 = 1$) in istam dz, hoc nempe casu $\sqrt[f]{z^e}$ est $= z$, ut per se patet.

74. Poterat methodus inveniendi differentialia potentiarum etiam immediate ex regula fundamentali derivari. Sit quærendum differentiale proximum functionis x^2. Juxta regulam fundamentalem in locum x substituatur $x + dx$; & erit $x^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2$; subtracto vero x^2, erit quæsitum differentiale sed integrum $2x\,dx + dx^2$; negligendo autem dx^2, habebimus $2x\,dx$. Quid, quod in functionibus x^2, x^3, x^4, x^5, x^m, loco x substituendo $x + dx$, seu $x + dx$ elevando ad has potentias per §. 45. Cap. 1[mi], neglectis altioris ordinis infinitesimis, obtinebimus $x^2 + 2x\,dx, x^3 + 3x^2 dx, x^4 + 4x^3 dx, x^5 + 5x^4 dx, x^m + mx^{m-1} dx$, ac subtractis x^2, x^3 &c. differentialia erunt $2x\,dx, 3x^2 dx, 4x^3 dx, 5x^4 dx, mx^{m-1} dx$.

75. Non erit autem abs re exemplis quibusdam illustrare methodum inveniendi differentialia potestatum vel radi-

Digitized by Google

radicalium quantitatum. Inveniendum ſit differentiale proximum quantitatis $(x + ax)^2$. Obtinebitur quidem iſtud, ſi (ut jam adnotavi §. 72.) $x + ax$ elevetur ad dignitatem ſecundam $x^2 + 2ax^2 + a^2x^2$, ac dein ſingulorum terminorum differentialia ſumantur, ſic enim habebitur per §. 54. differentiale quæſitum. Itaque $d(x^2 + 2ax^2 + a^2x^2) = 2xdx + 4axdx + 2a^2xdx$. Quod ſi autem regula §. 70. propoſita uti quis velit, debebit potentia $(x + ax)^2$ uno gradu depreſſa, ſeu $(x + ax)^{2-1}$ vel $x + ax$ duci in $d(x + ax)$ ſeu in $dx + adx$, ac factum $(x + ax)(dx + adx)$ per exponentem 2 multiplicari; unde quæſitum differentiale erit $2(x + ax)(dx + adx) = 2xdx + 4axdx + 2a^2xdx$, ut ante. Poterat etiam fieri $x + ax = u$, & tum $(x + ax)^2$ fuiſſet $= u^2$, & $d(u^2) = 2udu$ per §. 70, & in locum u reſtituendo $x + ax$, & $dx + adx$ loco du, prodiviſſet pariter $2(x + ax)(dx + adx)$. Sit inveniendum differentiale proximum quantitatis ax^my^n. Juxta regulas §. 68, & 69. datas erit hoc differentiale $ax^m d(y^n) + ay^n d(x^m)$. Juxta regulam vero §. 70. propoſitam, eſt $d(y^n) = ny^{n-1}dy$, & $d(x^m) = mx^{m-1}dx$; quare $d(ax^my^n) = ax^m \times ny^{n-1}dy + ay^n \times mx^{m-1}dx = a(nx^my^{n-1}dy + my^nx^{m-1}dx$. Uti etiam potuiſſemus methodo §. 71. adducta. Sit data functio $\sqrt[3]{(a + bx)}$ quæritur ejus differentiale proximum; erit illud juxta regulam primam ſpecialem §. 73. inventam

Digitized by Google

tam $= \frac{1}{3(a+bx)} bdx \sqrt[3]{(a+bx)} = \frac{bdx}{3\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$. Et hoc quidem differentiale immediate invenitur per regulam alteram, aut si formula $\frac{edz}{fz^{\frac{g}{f}}}$ vel $\frac{edz}{f\sqrt[f]{z^g}}$ cit. §pho data in casum exponentis radicalis majoris, quam sit exponens quantitatis sub signo radicali existentis, & qui casus hic obtinet, uti voluerimus. Est enim e ex formula generali $= 1$ in nostro casu, $f = 3$, $g = f - e = 3 - 1 = 2$, $z = a + bx$; & consequenter $dz = bdx$; quare $\frac{edz}{fz^{\frac{g}{f}}} = \frac{bdx}{3(a+bx)^{\frac{2}{3}}} = \frac{bdx}{3\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$. Potest etiam fieri $a + bx = u$; & tum erit $bdx = du$, & $\sqrt[3]{(a+bx)} = \sqrt[3]{u}$; sed $d\left(\sqrt[3]{u}\right)$ per regulam alteram §phi 73. $= \frac{du}{3\sqrt[3]{u^2}}$; ergo loco u restituendo $a + bx$, & bdx loco du, prodit $\frac{bdx}{3\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$, ut ante. Inveniendum sit differentiale proximum quantitatis $ay^m\sqrt[n]{(b+cx^3)^p}$. Hoc erit per §. 68, & 69. $ay^m d\left(\sqrt[n]{(b+cx^3)^p}\right) + a\sqrt[n]{(b+cx^3)^p} \times d(y^m)$. Est autem per §. 70. $d(y^m) =$

$my^{m-1}dy$,

$my^{m-1}dy$, & per §. 73, adhibendo formulam $\frac{e}{f} dz \sqrt[f]{z^{e-f}}$, est $d\left(\sqrt[n]{(b+cx^3)^p}\right) = \frac{p}{n} \times 3cx^2 dx \sqrt[n]{(b+cx^3)^{p-n}}$; Unde differentiale desideratum est:

$$a\left(3\frac{p}{n}y^m cx^2 dx \sqrt[n]{(b+cx^3)^{p-n}} + my^{m-1} dy \sqrt[n]{(b+cx^3)^p}\right).$$

Sit ad differentiandum proposita quantitas $\sqrt[n]{(x+ay)^m} \times \sqrt[p]{(x+cx^2)^q}$; & erit ejus differentiale juxta §. 68. & 69, $\sqrt[n]{(x+ay)^m} \times d\left(\sqrt[p]{(x+cx^2)^q}\right) + \sqrt[p]{(x+cx^2)^q} \times d\left(\sqrt[n]{(x+ay)^m}\right)$; inventis ergo differentialibus indicatis, methodis in prioribus exemplis adhibitis, habetur differentiale quaesitum:

$$\frac{q}{p} dx\,(1+2cx)\sqrt[p]{(x+cx^2)^{q-p}} \times \sqrt[n]{(x+ay)^m}$$
$$+\frac{m}{n}(dx+ady)\sqrt[n]{(x+ay)^{m-n}} \times \sqrt[p]{(x+cx^2)^q}.$$

Quaeratur differentiale proximum quantitatum dx^2, ddx^2, $d^m x^n$, $\sqrt[m]{(dx+dy)^n}$. Quia dx, ddx, $d^m x\,(dx+dy)$ considerari possunt, ut quantitates variabiles simplices (nam hic has quantitates variabiles supponimus) per datas methodos exhiberi earum possunt differentialia, idque vel immediate datas regulas adplicando, vel reducendo has quan-

quantitates differentiales ad formam finitarum. Sic posito $dx = u$; erit $dx^2 = u^2$, $du = ddx$, & $2udu = 2dx\,ddx$. Sit $ddx = u$; erit $ddx^2 = u^2$, $d^3x = du$, $2udu = 2ddx\,d^3x$. Sit $d^m x = u$; erit $d^m x^n = u^n$, $du = d^{m+1}x$, $nu^{n-1}du = n\,d^m x^{n-1}\,d^{m+1}x$. Sit denique $dx + dy = u$; erit $\sqrt[m]{(dx+dy)^n} = \sqrt[m]{u^n}$, $du = ddx + ddy$, $\frac{n}{m}du\sqrt[m]{u^{n-m}} = \frac{n}{m}(ddx+ddy)\sqrt[m]{(ddx+ddy)^{n-m}}$.

76. Dictum jam fuit §. 73. regulam potentiarum differentialia inveniendi §. 70. datam etiam ad radicales quantitates extendi, si hæ formam potentiarum induant, quod ipsum adhuc exemplis aliquot magis compositis declaratum ibimus. Sit inveniendum differentiale quantitatis $\sqrt[m]{(a+x)^n}$. Exprimatur hac forma $(a+x)^{\frac{n}{m}}$; accipiatur differentiale dx quantitatis $a+x$ sub exponente $\frac{n}{m}$, & ducatur in exponentem $\frac{n}{m}$, & in datam quantitatem uno gradu depressam, seu in $(a+x)^{\frac{n}{m}-1}$; & habebitur differentiale quæsitum $\frac{n}{m}(a+x)^{\frac{n}{m}-1}dx$. Differentianda sit quantitas $\sqrt[m]{(x^n+x^p y^q)^n}$, seu $(x^n+x^p y^q)^{\frac{n}{m}}$; & erit ejus differen-

tiale $\frac{n}{m}(x^n + x^p y^q)^{\frac{n}{m}-1} \times d\,(x^n + x^p y^q)$ Cum vero ſit $d(x^n + x^p y^q) = n x^{n-1} dx + q x^p y^{q-1} dy + p.y^q x^{p-1} dx$; hanc expreſſionem in prioris locum reponendo habebitur differentiale, quod quærebatur. Denique differentiale quantitatis, $\sqrt[m]{\left((x+y)^p (a-u)^q\right)^n}$ ſeu $\left((x+y)^p (a-u)^q\right)^{\frac{n}{m}}$ eſt $\frac{n}{m}\left((x+y)^p (a-u)^q\right)^{\frac{n}{m}-1} \times d\left((x+y)^p (a-u)^q\right)$; eſt verò $d\left((x+y)^p (a-u)^q\right)$

$= p(x+y)^{p-1} (dx+dy)(a-u)^q$

$- q(a-u)^{q-1} du\,(x+y)^p$; adeoque differentiale deſideratum habetur. Obſervandum terminum ultimum modo propoſitum negativum eſſe idcirco, quod negativum habet factorem videlicet $-du$; nam $d(a-u) = -du$.

CA-

CAPUT IV.

DE INVENIENDIS DIFFERENTIALIBUS PROXIMIS CONSTANTIS PER VARIABILEM DIVISÆ, VEL VARIABILIS PER VARIABILEM.

77.

Ad functiones per divisionem ortas accedamus. Quæritur ergo hujus variabilis $\frac{a}{x}$ differentiale proximum. Facta substitutione $x + dx$ in locum x, prodit $\frac{a}{x + dx}$, subductáque $\frac{a}{x}$ habebimus $\frac{a}{x + dx} - \frac{a}{x}$, seu reducendo terminos ad communem denominatorem: $\frac{ax}{x^2 + xdx} - \frac{ax + adx}{x^2 + xdx} = - \frac{adx}{x^2 + xdx}$, quod est differentiale integrum functionis $\frac{a}{x}$.

78. Quoniam autem xdx respectu x^2 evanescit, negligi utique potest; quo facto differentiale proximum variabilis $\frac{a}{x}$ est $- \frac{adx}{x^2}$, & Regula ex consideratione hujus differentialis concinnata talis: *differentiale proximum deno-*

minatoris in numeratorem ducatur, mutato numeratoris signo, denominator vero quadretur. Et cum quomodolibet composita ex variabilibus, & constantibus, ut variabilis simplex considerari possit; regula data extendet se ad omnem fractionem, in cujus numeratore meri constantes, in denominatore autem variabiles, & constantes quocunque modo permixtæ existunt, adeoque quæ hac expressione $\frac{a}{Z}$ designantur, in qua a quantitatem ex numeris constantibus, Z ex variabili vel variabilibus, & constantibus compositam denotat. Itaque differentialia prima variabilium $\frac{za}{x+y}$, $\frac{bc}{3x^2}$, $\frac{-b}{axy}$, $\frac{a}{xdy}$ sunt $\frac{-za\,d.(x+y)}{(x+y)^2}$, $\frac{-bcd(3x^2)}{9x^4}$, $\frac{bd.(axy)}{a^2x^2y^2}$, $\frac{-ad(xdy)}{x^2dy^2}$, seu $\frac{-zadx-zady}{x^2+2xy+y^2}$, $\frac{-6bcxdx}{9x^4} = \frac{-2bcdx}{3x^3}$, $\frac{bxdy+bydx}{ax^2y^2}$, $-\frac{a(xddy+dydx}{x^2dy^2}$.

79. Sit inveniendum differentiale proximum fractionis $\frac{x}{y}$, cujus numerator, & denominator est variabilis. Facta substitutione prodit $\frac{x+dx}{y+dy}$, & subducta $\frac{x}{y}$ habemus $\frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y}$, seu, reducendo fractiones ad communem denominatorem, $\frac{xy+ydx-xy-xdy}{y^2+ydy} = \frac{ydx-xdy}{y^2+ydy}$. Itaque

que differentiale proximum integrum variabilis $\frac{x}{y}$ est $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2 + y\,dy}$.

80. Negligendo jam in hoc differentiali $y\,dy$, ut ante; prodit $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$, ex qua formula regula sequens eruitur: *Differentiale proximum numeratoris ducatur in denominatorem, & differentiale proximum denominatoris in numeratorem, & hoc ex illo auferatur, residuum autem seu differentia dividatur per quadratum denominatoris.* Regula autem hæc (ut etiam ad præcedentem adnotavi) fractiones quoque, quarum numeratores, & denominatores ex variabilibus, & constantibus compositi sunt, seu, quæ sub hac generali $\frac{U}{Z}$ comprehenduntur, differentiare docet. Sint fractiones $\frac{2(x+y)}{ay^3}$, $\frac{bxy}{xy+z}$, $\frac{ady}{bddx}$; erit differentiale primæ fractionis: $\frac{2ay^3\,d.(x+y)}{a^2y^6} - \frac{2(x+y)\,d(ay^3)}{a^2y^6} = \frac{2ay^3(dx+dy)}{a^2y^6}$ $- \frac{6ay^2(x+y)\,dy}{a^2y^6} = \frac{2dx+2dy}{ay^3} - \frac{6x\,dy}{ay^4} - \frac{6\,dy}{ay^3} =$ $\frac{2dx + 2(1-3)\,dy}{ay^3} - \frac{6x\,dy}{ay^4}$. Differentiale 2^dæ^ est $\frac{(xy+z)\,d(bxy)}{(xy+z)^2} - \frac{bxy\,.\,d\,.\,(xy+z)}{(xy+z)^2} = \frac{(xy+z)\,b(x\,dy + y\,dx)}{(xy+z)^2}$

— bxy

$-\frac{bxy(xdy+ydx+dz)}{(xy+z)^2}$. Differentiale $3^{tiæ}$ est $\frac{b\,ddx\,.\,d\,(ady)}{b^2\,ddx^2}$ $-\frac{ady\,d\,(b\,d^2x)}{b^2\,d^2\,x^2}=\frac{a\,d^2x\,d^2y-a\,dy\,d^3x}{b\,d^2\,x^2}$.

81. Quoniam $\frac{U}{Z}$ aliter ita exprimi potest $Z^{-1}U$, seu, quoniam $\frac{U}{Z}=Z^{-1}U$; erit $d\left(\frac{U}{Z}\right)=d\left(Z^{-1}U\right)$. Est vero $d\left(Z^{-1}U\right)=-Z^{-2}UdZ+Z^{-1}dU$ (§. 73, & 68.) $=\frac{dU}{Z}-\frac{UdZ}{Z^2}$, & fractionis prioris numeratorem & denominatorem per Z multiplicando, $=\frac{ZdU-UdZ}{Z^2}$. Igitur regula §. 68. etiam ad quantitates variabiles hujus formæ $\frac{U}{Z}$ sic $Z^{-1}U$ expressas extenditur. Potuisset etiam regula data §. 80. hac via erui.

82. Et si $\frac{U}{Z}$ formâ $Z^{-1}U$ exprimatur, etiam per regulam §. 69. ejus differentiale proximum invenietur. Nam habeatur primum Z^{-1} pro constante, erit differentiale proximum $Z^{-1}dU$: ponatur jam U constans, erit altera pars quæsiti differentialis $-UZ^{-2}dZ$, adeoque totum differentiale proximum $=Z^{-1}dU-UZ^{-2}dZ=\frac{ZdU-UdZ}{Z^2}$.

Digitized by Google

83. Alia præterea via differentiale primum fractionis variabilis $\frac{x}{y}$ §. 79. propositæ investigare potuissemus faciendo $\frac{x}{y} = t$. Nam hac ratione $d\left(\frac{x}{y}\right) = d\,t$. Cum autem sit $\frac{x}{y} = t$, est $x = t\,y$, $dx = t\,dy + y\,dt$, $dx - t\,dy = y\,dt$, $\frac{dx}{y} - \frac{t\,dy}{y} = dt$ & substituendo in locum t ejus valorem $\frac{x}{y}$, fiet $\frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$. ut cit §.

84. Iisdem viis §§. 81, 82, 83, propositis, regulam compendiariam inveniendi differentiale primum variabilis formæ $\frac{a}{x}$ indagare possumus. Nam $\frac{a}{x} = a\,x^{-1}$, & $d\,(a\,x^{-1})$ per §§. 73, & 65. $= a\,d\,(x^{-1}) = a \times -1\,x^{-2}\,dx = -\frac{a\,dx}{x^2}$. Et posito $\frac{a}{x} = t$, erit $a = x\,t$, & $d\,a$ seu (quia constantis differentiale nullum est) $o = x\,dt + t\,dx$, & $-t\,dx = x\,dt$, $-\frac{a\,dx}{x} = x\,dt$, $-\frac{a\,dx}{x^2} = dt$. Denique etiam per regulam §. 80. obtinebitur differentiale variabilis $\frac{a}{x}$, si a primum ut variabilis consideretur; tum enim erit differentiale quæsitum $\frac{x\,da - a\,dx}{x^2}$, jam vero a ponendo constantem, qualis vere est, erit $da = 0$, adeoque $x\,da = 0$; quare $\frac{x\,da - a\,dx}{x^2} = -\frac{a\,dx}{x^2}$.

85.

Digitized by Google

85. Sed jam exempla in medium afferam, quibus differentiatio functionum habentium variabilem divisorem illustretur. Sit differentiale proximum quantitatum $\frac{a}{x+a}$, $\frac{a+x}{x+b}$, $\frac{xy}{x+t}$, $\frac{xy}{tu}$, $\frac{x^m}{y^n}$, $\frac{\sqrt[m]{x}}{y}$, $\frac{\sqrt[m]{x^q}}{\sqrt[n]{y^p}}$, $\frac{\sqrt[m]{(x+y)^q}}{\sqrt[n]{(t+y)^p}}$ inveniendum. Differentiale proximum functionis $\frac{a}{x+a}$ erit juxta regulam §. 78. $= -a\frac{d(x+a)}{(x+a)^2}$. Differentiale proximum functionis $\frac{a+x}{b+x}$ est juxta regulam §. 80. $=$

$$\frac{(x+b)d(x+a)-(x+a)d(x+b)}{(x+b)^2} = \frac{(x+b)dx-(x+a)dx}{(x+b)^2}$$

$= \frac{(b-a)dx}{(x+b)^2}$. 3tiæ quantitatis differentiale proximum est $\frac{(x+t)d(xy)-xy\,.\,d(x+t)}{(x+t)^2}$. Est vero $d(xy)=x\,dy+y\,dx$; quare desideratum differentiale est:

$$\frac{x^2dy+xy\,dx+tx\,dy+ty\,dx-xy\,dx-xy\,dt}{(x+t)^2}$$

$= \frac{x^2dy+tx\,dy-xy\,dt+ty\,dx}{(x+t)^2}$. Differentiale proximum quantitatis $\frac{xy}{tu}$ est $\frac{tu\,.\,d(xy)-xy\,.\,d(tu)}{(tu)^2} =$

$$\frac{tu(x\,dy+y\,dx)-xy(t\,du+u\,dt)}{t^2u^2}.$$

Quin-

Quintæ functionis differentiale primum, seu proximum est $\frac{y^n d(x^m) - x^m . d(y^n)}{y^{2n}}$. Est vero, ut dictum cap. præced. $d(x^m) = m x^{m-1} dx$, & $d(y^n) = n y^{n-1} dy$; igitur $d\left(\frac{x^m}{y^n}\right) = \frac{m y^n x^{m-1} dx - n x^m y^{n-1} dy}{y^{2n}}$, & dividendo numeratorem, & denominatorem per y^{n-1} erit differentiale quæsitum $= \frac{m y x^{m-1} dx - n x^m dy}{y^{n+1}} = \frac{m x^{m-1} dx}{y^n} - \frac{n x^m dy}{y^{n+1}}$. Quantitatis $\frac{\sqrt[m]{x}}{y}$ differentiale primum est $\frac{y . d(\sqrt[m]{x}) - dy \sqrt[m]{x}}{y^2}$. Est autem $d(\sqrt[m]{x}) = \frac{1}{m} dx \sqrt[m]{x^{1-m}}$ per Caput cit.; quare $d\left(\frac{\sqrt[m]{x}}{y}\right) = \frac{\frac{1}{m} y dx \sqrt[m]{x^{1-m}} - dy \sqrt[m]{x}}{y^2} = \frac{y dx \sqrt[m]{x^{1-m}} - m dy \sqrt[m]{x}}{m y^2}$, vel $= \frac{dx \sqrt[m]{x^{1-m}}}{m y} - \frac{dy \sqrt[m]{x}}{y^2}$. Differentiale primum functionis $\frac{\sqrt[m]{x^q}}{\sqrt[n]{y^p}}$ est

$$\frac{\sqrt[n]{y^p} . d(\sqrt[m]{x^q}) - \sqrt[m]{x^q} . d(\sqrt[n]{y^p})}{\sqrt[n]{y^{2p}}} =$$

$$\frac{\frac{q}{m} dx \sqrt[n]{y^p} \sqrt[m]{x^{q-m}} - \frac{p}{n} dy \sqrt[m]{x^q} \sqrt[n]{y^{p-n}}}{\sqrt[n]{y^{2p}}}$$

$$=\frac{nq\,dx\sqrt[m]{x^{q-m}}-mp\,dy\sqrt[m]{x^q}\sqrt[n]{y^{-n}}}{mn\sqrt[n]{y^p}}\text{ vel}$$

$$=\frac{q\,dx\sqrt[m]{x^{q-m}}}{m\sqrt[m]{y^p}}-\frac{p\,dy\sqrt[m]{x^q}}{ny\sqrt[n]{y^p}}.$$ Differentiale demum ultimæ quantitatis eſt :

$$\frac{\sqrt[n]{(t+u)^p}\,.\,d\left(\sqrt[m]{(x+y)^q}\right)-\sqrt[m]{(x+y)^q}\,.\,d\left(\sqrt[n]{(t+u)^p}\right)}{\sqrt[n]{(t+u)^{2p}}}.$$

Eſt autem $d\left(\sqrt[m]{(x+y)^q}\right)=\frac{q}{m}(dx+dy)\sqrt[m]{(x+y)^{q-m}}$ & $d\left(\sqrt[n]{(t+u)^p}\right)=\frac{p}{n}(dt+du)\sqrt[n]{(t+u)^{p-n}}$. Facta igitur horum differentialium ſubſtitutione obtinebitur differentiale quæſitum. Sit inveſtigandum differentiale proximum quantitatum $\frac{a}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dx}{ddy}$, $\frac{x}{dx}$, $\frac{dx}{x}$, $\frac{y\,dx}{dy}$, $\frac{dy\,dx^m}{dt^2}$. Primæ differentiale proximum eſt $-\frac{a\,ddx}{dx^2}$. 2dæ $\frac{dy\,ddx-dx\,ddy}{dy^2}$. 3tiæ $\frac{ddy\,ddx-dx\,d^3y}{ddy^2}$. 4tæ $\frac{dx\,dx-x\,d^2x}{dx^2}$, $=1-\frac{x\,ddx}{dx^2}$. 5tæ $\frac{x\,ddx-dx^2}{x^2}=\frac{ddx}{x}-\frac{dx^2}{x^2}$. 6tæ $\frac{dy\,.\,d(y\,dx)-y\,dx\,ddy}{dy^2}$. Sed $d(y\,dx)$ $=y\,ddx$

$= y\,ddx + dx\,dy$; quare differentiale quæſitum $=$
$$\frac{y\,dy\,ddx + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}{dy^2} = \frac{y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy}{dy^2} + dx.$$

7timæ denique $\frac{dt^2 . d(dy\,dx^m) - dy\,dx^m . d(dt^2)}{dt^4}$. Sed $d(dy\,dx^m) = dy . d(dx^m) + dx^m\,ddy$, & $d(dx^m) = m\,dx^{m-1}\,ddx$; & $d(dt^2) = 2\,dt\,ddt$; quare facta ſubſtitutione inventorum partialium differentialium quæſitum differentiale habebitur.

CAPUT V.

DE PRÆCIPUIS PROPRIETATIBUS DIFFERENTIALIUM PRIMORUM UNIUS, ET PLURIUM VARIABILIUM.

86.

Denotet X functionem unius variabilis x hujus formæ $a + bx^k + cx^m + ex^n$ &c. ubi conſtantes quemvis valorem induere poſſunt, etiam o, unico ſaltem coefficiente conſtante excepto; nam ſi omnes penitus eſſent $= o$, functio ipſa evaneſceret, vel in conſtantem quantitatem abiret. Exponentes quoque k, m, n integri;

Digitized by Google

vel fracti, positivi, vel negativi esse poterunt. Functionis hujusmodi differentiale primum $d\,X$ erit per superiora $= k\,b\,x^{k-1}\,dx + m\,c\,x^{m-1}\,dx + n\,c\,x^{n-1}\,dx$ &c. hoc est, tale, in quo singulorum terminorum factores sint quantitas aliqua finita variabilis vel constans, & differentiale ipsius x, nempe dx. Quare, si complexum omnium coefficientium finitorum, qui in singulis terminis præter dx adsunt, dicatur P; erit omnino $d\,X = P\,dx$, seu, differentiale primum functionis X erit æquale facto ex finita quantitate in dx. Sic $a\,x + b\,x^2 - c = a\,dx + 2\,b\,x\,dx = (a + 2\,b\,x)\,dx$, ubi $P = a + 2\,b\,x$. Item sit $X = b^3 + \frac{c}{x} - e\sqrt[3]{x}$; erit $dX = -\frac{c\,dx}{x^2} - \frac{e\,dx}{3\sqrt[3]{x^2}} = -\left(\frac{c}{x^2} + \frac{e}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$. Hic $P = -\left(\frac{c}{x^2} + \frac{e}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$.

87. Sit jam functio X elevata ad potentiam m, m autem possit induere quemvis valorem; & exprimet formula $X^m + f$ functionem quamcunque unius variabilis. Sit enim exempli gratia $f = o$; & erit $g\,X^m + f = g\,X^m$. Sit $g = 1$; & erit $g\,X^m + f = X^m + f$. Sit $g = \frac{e}{e}$; erit $g\,z^m + f = \frac{e\,X}{e} + f$. Si $m = 1$; erit $g\,X^m + f = g\,X + f$. Si $m = \frac{n}{p}$, erit $g\,X^m + f = g\sqrt[p]{X^n} + f$. Sit vero ex. gr. $n = 1$, & $p = 3$;

&

& erit $g X^m + f = g \sqrt[3]{X} + f$. Si habeatur $-m$; erit $g X^m + f = g X^{-m} + f = \frac{g}{X^m} + f$. Sit $m = -\frac{n}{p}$; erit $g X^m + f = \frac{g}{\sqrt[p]{X^n}} + f$; si jam $n = 2, p = 1$, vel $n = 1, p = 2$; erit $g X^m + f$ in primo casu $= \frac{g}{X^2} + f$, in altero $\frac{g}{\sqrt{X}} + f$: & si ex. gr. $X = c + e x^r$; erit in hoc casu $g X^m + f = \frac{g}{\sqrt{(c + e x^r)}} + f$: si $X = x$; erit $g X^m + f = \frac{g}{\sqrt{x}} + f$. Si denique $X = c x + e x^r$; erit $g X^m + f = \frac{g}{\sqrt{(c x + e x^r)}} + f$. Est autem functionis $g X^m + f$ differentiale primum, ut ex Capit. 3. notum est, $m g X^{m-1} dX$; quare hoc differentiale exprimit differentiale primum cujuscunque functionis unius variabilis. Jam vero per §. præced. dX æquale est facto ex dx in factorem alium, qui caret differentiali dx, & qui factor hic præterea in $m g X^{m-1}$ ductus est. Quod si ergo hic factor ductus in $m g X^{m-1}$ dicatur P; erit $m g X^{m-1} dX = P\, dx$, hoc est, *differentiale primum cujuscunque functionis variabilis unius æquale est facto ex differentiali variabilis simplicis in aliam quantitatem, quæ nullum variabilis simplicis differentiale continet seu, quæ finita sit.*

88. Si differentiale $m g X^{m-1} dX$ attentius considere-

tur,

Digitized by Google

tur, duas in eo partes distinguere licet, nempe $m a X^{m-1}$, & d X. Est vero d X differentiale quantitatis sub exponente constitutæ; *quare, necessum est, ut omne differentiale primum functionis unius variabilis duabus velut partibus compositum sit, quarum una præter constantem coefficientem potentiam variabilis qualemcunque demum; altera quantitatis, quæ exponente potentiæ efficitur, seu, quæ est sub exponente potentiæ, differentiale primum contineat.* Conversa hujus propositionis etiam vera est. *Si nempe in aliqua expressione differentiali unius variabilis adsint prædicta duæ partes, erit ea expressio differentiale primum functionis unius variabilis.* Sit enim expressio differentialis unius variabilis $c X^m d X$, in qua adsunt partes requisitæ nempe $c X^m$, & d X; dico hanc expressionem esse differentiale primum functionis alicujus $h X^k + f$; in qua $h = \frac{c}{m+1}$, & $k = m + 1$. Nam $d (h X^k + f) = h k X^{k-1} d X$, hoc vero differentiale comparando cum dato $c X^m d X$, valores literarum h, k determinari poterunt. Posito siquidem $h k X^{k-1} d X = c X^m d X$; erit etiam (utrinque dividendo per d X, & per X multiplicando quotientes) $h k X^k = c X^{m+1}$; unde fieri poterit $k = m + 1$, $h = \frac{c}{k} = \frac{c}{m+1}$; quamobrem, cum $h k X^{k-1} d X$ sit differentiale primum functionis $h X^k + f$; erit etiam $c X^m d X$ differen-

ren-

Digitized by Google

rentiale primum functionis $b X^k + f$, modo fiat $b = \frac{c}{m+1}$, & $k = m + 1$; quare differentiale variabilis unius habens requisitas duas partes, semper est differentiale primum functionis alicujus unius variabilis, id quod observasse per quam utile tum demum deprehendemus, cum de calculo integrali egerimus. Quocirca etiam operæ pretium me relaturum confido, si exemplis ex Cap. 3tio, & 4to petitis proprietatem hanc insignem differentialium primorum unius variabilis amplius illustravero. Differentiale primum functionis x^2 est $2 x dx$. Partes hujus differentialis sunt $2x^1$, & dx; est vero dx differentiale quantitatis x sub exponente 1, qui semper subintelligitur, si alius non adsit. Differentiale primum quantitatis x^m est $m x^{m-1} dx$. Partes differentialis sunt $m x^{m-1}$, & dx. Differentiale primum functionis $\sqrt[3]{(a+bx)}$ est $\frac{b dx}{3 \sqrt[3]{(a+bx)^2}}$, cujus partes sunt $\frac{1}{3 \sqrt[3]{(a+bx)^2}}$, seu $\frac{1}{3 (a+bx)^{\frac{2}{3}}}$, & $b dx$. Est autem $b dx$ differentiale quantitatis $a + bx$ sub exponente $\frac{2}{3}$. Differentiale primum quantitatis $\frac{a}{x}$ est $-\frac{a dx}{x^2}$. Partes hujus differentialis sunt $\frac{a}{x^2}$ seu $a \times x^{-2}$, & dx. Differentiale primum functionis $\frac{a+x}{b+x}$ est $\frac{(b-a) dx}{(x+b)^2}$. Hujus partes sunt

$(b-a)$

$(b-a)(x+b)^{-2}$, & dx. Eſt autem dx quantitatis $x+b$; quæ ſub exponente -2 conſtituta eſt, differentiale.

89. Sit quantitas xy, & conſideretur y ut conſtans; erit $d(xy)=y\,dx$. Si jam y ſolum variabilis ponatur; habebimus differentiale $dy\,dx$, quod quidem differentiale etiam prodit, ſi x primum conſtans, y vero variabilis adſumatur. Rurſum in $y+x+xy+x^2y+xy^2+x^2y^2$ ſit y conſtans; erit differentiale propoſitæ quantitatis: $dx+y\,dx+2yx\,dx+y^2\,dx+2xy^2\,dx$. Jam y ſola varietur; prodit: $dy\,dx+2x\,dx\,dy+2y\,dx\,dy+4xy\,dx\,dy$. Nunc aſſumta x poſt y variabili, emergit tandem $dy\,dx+2x\,dx\,dy+2y\,dx\,dy+4xy\,dx\,dy$ idem, quod prius. Sit in $\frac{x}{y}$ primum x, dein y variabilis; obtinetur $\frac{dx}{y}$, $\frac{-dx\,dy}{y^2}$. Jam ordine inverſo y, x varientur; obtinetur $\frac{-x\,dy}{y^2}$, $\frac{-dx\,dy}{y^2}$. In $\frac{xy+x}{y+x}$ primum x, dein y variabiles habeantur; emergit $\frac{(y+1)\,dx}{y+x}-\frac{(xy+x)\,dx}{(y+x)^2}$, & $\frac{dy\,dx}{y+x}$

$$-\frac{(y+1)\,dx\,dy}{(y+x)^2}-\frac{x\,dx\,dy}{(y+x)^2}+\frac{(xy+x)\,dx\,(2y+2x)\,dy}{(y+x)^4}.$$

Sit vero y dein x varians; elicietur $\frac{x\,dy}{y+x}-\frac{(xy+x)\,dy}{(y+x)^2}$; &

$$\frac{dx\,dy}{y+x}-\frac{x\,dy\,dx}{(y+x)^2}-\frac{(y+1)\,dx\,dy}{(y+x)^2}+\frac{(xy+x)\,dy\,(2y+2x)\,dx}{(y+x)^4}.$$

In

In omnibus his exemplis, quocunque ordine duæ quantitates variabiles assumantur, ad easdem devenitur expressiones differentiales. Idem vero in aliis quoque casibus perpetuo evenire, deprehendet, cui tentare collibitum fuerit. Neque modo istud locum habet, si duæ sint variabiles, verum etiam in concursu plurium, ita, *ut quocunque ordine variabiles statuantur, eadem ultimo differentialis emergat expressio.* Potest autem hæc propositio generatim ita demonstrari: si in functione quapiam plurium variabilium x, y, z &c. primum quidem loco x substituatur $x + dx$, in functione vero per substitutionem mutata loco y reponatur $y + dy$, dein loco z scribatur $z + dz$ & sic porro: prodit expressio eadem cum illa, quæ prodiret, factis quosvis alio ordine substitutionibus, quod omnino per se clarum & evidens est. Quodsi jam ex expressionibus iisdem, quæ prodeunt variato substitutionis ordine toties, quot adsunt variabiles, subtrahatur functio ipsa proposita; residua quoque inter se eadem erunt. Sunt vero hæc residua differentiales expressiones ortæ ex differentiatione functionis propositæ, in qua diverso ordine una variabilis post alteram ut variabilis tractata fuit; quare patet propositio.

90. Differentiale primum functionis duarum variabi-

 lium

lium invenitur, si primo una habeatur variabilis, altera constans, mox in functione proposita altera variabilis assumatur, prior vero ut constans consideretur (§§. 59, 82.); quamobrem pars quælibet differentialis primi functionis duarum variabilium haberi poterit pro differentiali unius variabilis, ejus videlicet, quæ ut variabilis in formatione hujus partis considerata fuit. Si ergo hæc variabilis sit x; erit pars una differentialis primi $P\,dx$, per §. 87, altera $Q\,dy$ per eundem, ubi P, Q sunt functiones variabilium x, y meras finitas quantitates involventes per cit. §. Quodsi tamen variabilis illa, quæ actu variatur, primæ solum dignitatis fuit; Q, & P tantum unam variabilem continebunt. Sic in functionis xy differentiali primo $x\,dy + y\,dx$, P, & Q tantum unam variabilem continent. Jam differentialis $P\,dx + Q\,dy$ functionis, quam V vocemus, pars utraque rursum differentietur, ita quidem, ut in $P\,dx$ consideretur y ut varians, & x in $Q\,dy$. Quoniam tali casu $d\,P\,dx$ est differentialis expressio emergens, si in V successive x, y: & $d\,Q\,dy$ est differentiale prodiens, si in V ordine inverso y, x variari cogitentur; erit per §. 89. $d\,P\,dx = d\,Q\,dy$; adeoque etiam $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, ubi ex denominatoribus cognoscitur, qualis quantitas in numeratore variari ponatur, nempe y in $d\,P$, & x in $d\,Q$.

Et

Digitized by Google

Et quoniam dP, dQ in explicato sensu continent dy, dx respective per §. 87; $dP\,dx$, & $dQ\,dy$ continent communiter $dx\,dy$; igitur utrinque ex $dP\,dx$, $dQ\,dy$ sublato $dx\,dy$, supererunt æquales quantitates, quæ meras finitas contineant. Ex æquatione autem $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ infertur, *quod, si in partibus differentialis* $P\,dx + Q\,dy$ *ommittatur* dx, dy, *ac dein P differentietur posita solum* y *variabili, ac per* dy *dividatur; quotiens æqualis sit quotienti, qui prodit si Q differentiatum ita, ut solum* x *variabilis assumatur, per* dx *dividatur.*

91. Insignis ista proprietas modo exposita, quæ convenit differentialibus primis functionum duarum variabilium, in omnibus quidem differentialibus nominatis adesse debet; utrum vero solis illis conveniat, adeoque nota sit, & character tutus atque certus talis differentialis, istud quidem ex dictis nondum manifeste patet. Opera igitur danda, ut in apricum producatur. Sit igitur expressio $P\,dx + Q\,dy$, in qua P, & Q sint functiones duarum variabilium x, y meris finitis quantitatibus constantes, sitque $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; dico $P\,dx + Q\,dy$ esse differentiale primum exactum functionis duarum variabilium x & y, quæ functio, si y in omnibus terminis ipsius P, ac x in omnibus terminis ipsius Q deprehendatur, sit $= \int P\,dx + A$, vel $\int Q\,dy + A$,

Digitized by Google

ubi A significat vel o, vel quantitatem affirmativam, aut negativam meras constantes continentem, & ideo tota expressio $\int P\,dx + A$ significat quantitatem, quae differentiata, posita solum x variabili, producat $P\,dx$. Idem respective valet de $\int Q\,dy + A$. Ponamus $\int P\,dx + A = V$, & differentiale primum exactum ipsius V sit $= p\,dx + q\,dy$, per §. 90; erit $p\,dx = P\,dx$, quia $p\,dx$ obtinetur, si V differentietur supposita sola x variabili; adeoque per paulo superius dicta $p\,dx = P\,dx$; quare p idem est cum P; itaque $\frac{dp}{dy} = \frac{dP}{dy}$, ubi dp, dP supponit solam y variabilem. Est vero per hypothesim $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, & per §. 90. $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$; quare $\frac{dq}{dx} = \frac{dQ}{dx}$, & $q = Q$; adeoque etiam $q\,dy = Q\,dy$, & $p\,dx + q\,dy = P\,dx + Q\,dy$. Sed prior expressio differentialis est per hypothesim differentiale primum exactum functionis V, seu ipsius $\int P\,dx + A$; ergo & posterior. Eodem autem modo ostenditur propositam expressionem differentialem $P\,dx + Q\,dy$ esse differentiale primum exactum functionis $\int Q\,dy + A$.

92. Functio V trium variabilium x, y, z ita poterit exprimi $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ per §. 87, ubi etiam P, Q, R sunt functiones trium variabilium meras finitas quanti-

tates

Digitized by Google

tates continentes. Si tamen aliqua ex tribus variabilibus in functione V sit primæ tantum potestatis, tum cœficiens finitus ductus in differentiale hujus variabilis tantum duas reliquas variabiles comprehendet, ut patet ex formatione differentialium. Concipiatur nunc z constans; & erit $dz = 0$; adeoque $R\,dz = 0$, residuumque $P\,dx + Q\,dy$ erit differentiale primum variabilium x, y; quare erit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ per §. 90. Sic etiam, si concipiatur y constans; evanescente $Q\,dy$ remanebit $P\,dx + R\,dz$ differentiale primum variabilium x, z, & erit $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$. Denique posita x constante evanescit $P\,dx$, & remanet $Q\,dy + R\,dz$ differentiale primum variabilium y, z, eritque $\frac{dR}{dy} = \frac{dQ}{dz}$. *Quare, si* $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *fuerit differentiale primum functionis* V *trium variabilium* x, y, z; *positis* x, y, z *singulis seorsim constantibus, erit* $\frac{dR}{dy} = \frac{dQ}{dz}$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$, $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Est igitur $dR\,dz = dQ\,dy$, $dR\,dz = dP\,dx$. Nequit vero inferri ex his duabus ultimis æquationibus esse $dQ\,dy = dP\,dx$. Etsi enim hæ quantitates videantur uni tertiæ nempe ipsi $dR\,dz$ æquales esse, revera tamen $dR\,dz$ non est una eademque in utraque æquatione. In prima enim supponitur x constans, in secunda vero constans assumitur

tur y. Quodsi itaque in primæ æquationis utroque membro etiam x, in secundæ vero y tanquam varians tractetur; patet fore tum expressionem $d\,\mathrm{R}\,d\,z$ unam ac eandem, ac proinde esse $d\,\mathrm{R}\,d\,z = d\,\mathrm{Q}\,d\,y = d\,\mathrm{P}\,d\,x$; *quare tres termini differentialis primi orti ex differentiatione functionis trium variabilium facta juxta leges datas, inter se æquales redduntur, si variabiles, quarum differentiale necdum adest, seorsim differentientur manentibus cæteris.* Notandum autem omnes terminos, in expressione differentiali proposita, in quibus idem differentiale occurrit, pro uno eodemque haberi.

93. Sit proposita expressio differentialis $\mathrm{P}\,d\,x + \mathrm{Q}\,d\,y + \mathrm{R}\,d\,z$, ubi P, Q, R functiones denotant complexas tres variabiles x, y, z, merasque finitas quantitates. Sit autem $\frac{d\mathrm{P}}{d\,y} = \frac{d\mathrm{Q}}{d\,x}$, $\frac{d\mathrm{P}}{d\,z} = \frac{d\mathrm{R}}{d\,x}$, $\frac{d\mathrm{Q}}{d\,z} = \frac{d\mathrm{R}}{d\,y}$, hac ratione, ut in numeratoribus illa tantum quantitas variabilis concipiatur, cujus differentiale agit denominatorem, ita, ut ex. gr. $d\,\mathrm{Q}$ in prima æquatione significet differentiale primum functionis Q posita sola x variabili, $d\,\mathrm{Q}$ vero in tertia æquatione denotet differentiale ipsius Q posita sola z variabili. Si hæc itaque sic se habeant, dico propositam expressionem esse differentiale primum exactum ortum ex differentia-

tiatione functionis alicujus, quam vocabimus V, & hanc functionem V, si in omnibus terminis insint omnes variabiles, aut saltem x, y ubique in P, in Q vero x, z, & y, z in R, esse $= \int P\,dx + A$, vel $\int Q\,dy + A$, vel denique $\int R\,dz + A$, hoc est talem, cujus differentiale primum posita solum x variante sit $P\,dx$, posita y variante sit $Q\,dy$, & posita z variante sit $R\,dz$. Propositionem hanc ita demonstro: sit differentiale primum functionis V seu $dV = p\,dx + q\,dy + r\,dz$; erit per §. præc. $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, $\frac{dp}{dz} = \frac{dr}{dx}$, $\frac{dq}{dz} = \frac{dr}{dy}$. Et quia $p\,dx$ est differentiale primum ipsius V posita in V solum x variabili, & etiam per hypothesim $P\,dx$ oritur, si in V variabilis concipiatur x, & dein ipsius V differentiale capiatur; erit $P\,dx = p\,dx$, & $P = p$, ac $\frac{dP}{dy} = \frac{dp}{dy}$, ubi in P, p variari concipitur y. Sed $\frac{dp}{dy}$ est $= \frac{dq}{dx}$ & per hypothesim $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; igitur etiam $\frac{dQ}{dx} = \frac{dq}{dx}$, & $Q = q$. Rursum quia $P = p$; erit etiam $\frac{dP}{dz} = \frac{dp}{dz}$, ubi in P, p solum z variabilis ponitur. Est vero $\frac{dp}{dz} = \frac{dr}{dx}$, & per hypothesim $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$; quare $\frac{dR}{dx} = \frac{dr}{dx}$, & $R = r$. Itaque $P = p$, $Q = q$, $R = r$, atque adeo expressio differentia-

lis

lis proposita $= p\,dx + q\,dy + r\,dz$; ergo sicut hæc, ita quoque proposita expressio est differentiale primum exactum functionis V, seu $\int P\,dx + A$, vel saltem dari poterit quantitas aliqua differentialis datæ æqualis, quæ sit differentiale primum exactum alicujus functionis trium variabilium. Sed jam uno alterove exemplo dicta declaremus. Quæritur, num proposita expressio $\frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2}$ sit vere differentiale primum functionis alicujus variabilium x, y, seu, utrum ortum suum ducat ex functionis talis differentiatione. Redigatur proposita expressio ad hanc formam $y^{-1}\,dx - x\,y^{-2}\,dy$, & in primo termino y^{-1}, in secundo x differentietur, prodit $-y^{-2}\,dy\,dx$, $-y^{-2}\,dx\,dy$, qui duo termini, cum sint iidem, indicio sunt, propositam expressionem omnino oriri ex differentiatione functionis duarum variabilium, videlicet ex differentiatione functionis $\frac{x}{y}$. Sit proposita expressio trium variabilium $\frac{x^2\,dy + t\,x\,dy - x\,y\,dt + t\,y\,dx}{(x+t)^2}$ orta ex differentiatione functionis $\frac{x\,y}{x+t}$, ut cap. 4. vidimus. Si in primo termino $\frac{(x^2 + t\,x)\,dy}{(x+t)^2} = \frac{x\,dy}{t+x}$ differentietur functio variabilis x, prodit: $\frac{dx\,dy}{t+x} - \frac{x\,dx\,dy}{(t+x)^2}$. Si jam quantitas t variabilis concipiatur,

Digitized by Google

piatur, emergit $-\frac{dz\,dx\,dy}{(z+x)^2}+\frac{2x\,dz\,dx\,dy}{(z+x)^3}=\frac{x\,dz\,dx\,dy-z\,dz\,dx\,dy}{(z+x)^3}$. In ſecundo termino $-\frac{xy\,dz}{(x+z)^2}$ primo x cogitetur variabilis; & facta differentiatione prodit $-\frac{y\,dz\,dx}{(x+z)^2}+\frac{2xy\,dz\,dx}{(x+z)^3}$. Jam vero y variabilis aſſumatur, quo facto habebimus $-\frac{dy\,dx\,dz}{(x+z)^2}+\frac{2x\,dz\,dx\,dy}{(x+z)^3}=\frac{x\,dz\,dx\,dy-z\,dz\,dx\,dy}{(x+z)^3}$. Denique in tertio termino $\frac{zy\,dx}{(x+z)^2}$ poſita quantitate z variabili, erit termini hujus differentiale $\frac{y\,dz\,dx}{(x+z)^2}-\frac{2yz\,dz\,dx}{(x+z)^3}$: poſita nunc y variabili emergit $\frac{dz\,dx\,dy}{(x+z)^2}-\frac{2z\,dz\,dx\,dy}{(x+z)^3}$ $=\frac{x\,dz\,dx\,dy-z\,dz\,dx\,dy}{(x+z)^3}$. Igitur tres termini propoſitæ expreſſionis debite tractati identici ſunt.

Digitized by Google

lis proposita $= p\,dx + q\,dy + r\,dz$; ergo sicut hæc, ita quoque proposita expressio est differentiale primum exactum functionis V, seu $\int P\,dx + A$, vel saltem dari poterit quantitas aliqua differentialis datæ æqualis, quæ sit differentiale primum exactum alicujus functionis trium variabilium. Sed jam uno alterove exemplo dicta declaremus. Quæritur, num proposita expressio $\frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2}$ sit vere differentiale primum functionis alicujus variabilium x, y, seu, utrum ortum suum ducat ex functionis talis differentiatione. Redigatur proposita expressio ad hanc formam $y^{-1}\,dx - x\,y^{-2}\,dy$, & in primo termino y^{-1}, in secundo x differentietur, prodit $-y^{-2}\,dy\,dx$, $-y^{-2}\,dx\,dy$, qui duo termini, cum sint iidem, indicio sunt, propositam expressionem omnino oriri ex differentiatione functionis duarum variabilium, videlicet ex differentiatione functionis $\frac{x}{y}$. Sit proposita expressio trium variabilium $\frac{x^2\,dy + t\,x\,dy - x\,y\,dt + t\,y\,dx}{(x+t)^2}$ orta ex differentiatione functionis $\frac{x\,y}{x+t}$, ut cap. 4. vidimus. Si in primo termino $\frac{(x^2 + t\,x)\,dy}{(x+t)^2} = \frac{x\,dy}{t+x}$ differentietur functio variabilis x, prodit: $\frac{dx\,dy}{t+x} - \frac{x\,dx\,dy}{(t+x)^2}$. Si jam quantitas t variabilis concipiatur,

piatur, emergit $-\frac{dt\,dx\,dy}{(t+x)^2}+\frac{2x\,dt\,dx\,dy}{(t+x)^3}=\frac{x\,dt\,dx\,dy-t\,dt\,dx\,dy}{(t+x)^3}$. In ſecundo termino $-\frac{xy\,dt}{(x+t)^2}$ primo x cogitetur variabilis; & facta differentiatione prodit $-\frac{y\,dt\,dx}{(x+t)^2}+\frac{2xy\,dt\,dx}{(x+t)^3}$. Jam vero y variabilis aſſumatur, quo facto habebimus $-\frac{dy\,dx\,dt}{(x+t)^2}+\frac{2x\,dt\,dx\,dy}{(x+t)^3}=\frac{x\,dt\,dx\,dy-t\,dt\,dx\,dy}{(x+t)^3}$. Denique in tertio termino $\frac{ty\,dx}{(x+t)^2}$ poſita quantitate t variabili, erit termini hujus differentiale $\frac{y\,dt\,dx}{(x+t)^2}-\frac{2yt\,dt\,dx}{(x+t)^3}$: poſita nunc y variabili emergit $\frac{dt\,dx\,dy}{(x+t)^2}-\frac{2t\,dt\,dx\,dy}{(x+t)^3}$ $=\frac{x\,dt\,dx\,dy-t\,dt\,dx\,dy}{(x+t)^3}$. Igitur tres termini propoſitæ expreſſionis debite tractati identici ſunt.

CAPUT VI.

METHODUS PROPOSITÆ QUANTITATIS DIFFERENTIALE REMOTIUS INVENIENDI.

94.

Differentiale remotius propositæ quantitatis variabilis invenitur, si primum juxta regulas datas quæratur proximum, hujus vero iterum proximum, atque ita porro, donec ad quæsitum veniatur. Quæritur ex. gr. differentiale tertium, seu tertii ordinis functionis x^2. Invenio functionis hujus differentiale proximum seu primum $2\,x\,dx$: hujus proximum seu secundum $2\,x\,ddx + 2\,dx^2$: denique quæsitum $2\,x\,d^3x + 6\,dx\,ddx$. Sic expressionis $x\,dy$ differentiale secundum obtinetur, si primo eruatur proximum $x\,ddy + dx\,dy$: dein hujus proximum seu quæsitum $x\,d^3y + dx\,ddy + dx\,ddy + dy\,ddx$.

95. Quoniam $X'dx$ exprimere potest quodlibet differentiale primum functionis X variabilis unius x, ubi X' functionem ipsius x denotat compositam ex meris finitis quantitatibus: hæc expressio $X'dx$ (quod etiam §. præc.

Digitized by Google

& alias jam fecimus) considerari potest ut composita ex duabus variabilibus, quarum una sit X', altera dx, & ita quæri illius differentiale proximum, quod erit $dx \times d(X')$ + $X' ddx$. Porro $d(X')$ per §. 87. complectitur dx, & functionem aliquam variabilis x meris finitis quantitatibus constantem, quam voco X''; erit ergo differentiale proximum ipsius $X' dx$, seu ipsius X secundum $= X'' dx^2 +$ $X' ddx$. Quodsi ulteriora differentialia petantur, singuli termini denuo differentiandi erunt, atque terminus quidem prior considerari poterit ut compositus ex duabus variabilibus X'' & dx^2, & posterior ut compositus ex X' & ddx. Ex quo jam manifestum est, ad hæc ulteriora differentialia præter differentialia quantitatum X', X'', X''' &c. quæ ex meris finitis coalescunt, etiam requiri ipsorum dx, dx^2, dx^3 &c. differentialia altiorum ordinum. Certe differentiale tertium functionis X, quod est
$dX'' \times dx^2 + X'' \times d(dx^2) + dX' \times ddx + X' \times dddx$, seu $X''' dx^3 + X'' d(dx^2) + X'' dx\,ddx + X' d^3 x$ comprehendit $d(X'')$, seu $X''' dx$, & $d(X')$, seu $X'' dx$, quæ sunt differentialia prima quantitatum ex meris finitis compositarum: & $d(dx^2)$, ac $d^3 x$, quorum primum est differentiale proximum ipsius dx^2, alterum differentiale ordinis secundi ipsius dx: & in ulteriori differentiatione,

ſeu ſi quartum differentiale functionis X inveniendum ſit, debebit ipſius dx^3, & $d(dx^2)$ differentiale proximum inveſtigari.

96. Quoniam in ſumendis primis differentialibus functionum ex meris finitis quantitatibus compoſitarum, quales ſunt X', X'' &c. nulli eſt difficultati locus, quod hæc ſatis in ſuperioribus explanata ſunt: nec ipſius dx differentialia ulteriora ddx, d^3x, d^4x &c. faceſſunt negotium, in ſolis differentiandis potentiis ipſius dx, ſi quæ eſt, difficultas occurrere poteſt, aut potius moleſtia. Ejus igitur levandæ gratia differentialia proxima potentiarum ipſius dx, ac formulam differentialis proximi hujus expreſſionis (A) $m\,dx^n\,d^px^r$, quæ non modo potentias differentialis dx, ſed alias inſuper expreſſiones differentiales complectitur, ſubjicio, cujus ope facile differentialia potentiarum ipſius dx obtinebuntur. Sunt autem differentialia potentiarum ipſius dx ſequentia: differentiale proximum ipſius

dx^2 vel $dx\,dx = 2\,dx\,ddx$

dx^3 ſeu $dx^2\,dx = 3\,dx^2\,ddx$

dx^4 ſeu $dx^3\,dx = 4\,dx^3\,ddx$

dx^5 ſeu $dx^4\,dx = 5\,dx^4\,ddx$

dx^f ſeu $dx^{f-1}\,dx = f\,dx^{f-1}\,ddx$.

For-

Digitized by Google

Formula vero differentialis proximi expressionis A est sequens:

(B) $m.n dx^{n-1} d^p x^r d^2 x + mr dx^n d^p x^{r-1} d^{p+1} x$, cujus primo quidem originem, dein usum ostendam. Sit $dx = u$, & ddx, vel $d^3 x$, seu generatim $d^p x = v$; cum sit $dx . dx = dx^2$, $dx . dx . dx = dx^3$; erunt dx numero n in se ducta $= dx^n = u^n$; & cum $d^3 x . d^3 x . d^3 x = d^3 x^3$; erit factum ex $d^p x$ numero r in se ductis $= d^p x^r = v^r$, ubi n, p, r, quemvis numerum integrum affirmativum significat; quare $m dx^n d^p x^r = m u^n v^r$, adeoque $d(m u^n v^r) = m.n u^{n-1} v^r du + mr . u^n v^{r-1} dv$. Est vero $du = d^2 x$, $u^{n-1} = dx^{n-1}$, $v^r = d^p x^r$, $v^{r-1} = d^p x^{r-1}$, $dv = d^{p+1} x$; quare facta substitutione valorum horum in differentiali $mn u^{n-1} v^r du + mr u^n v^{r-1} dv$ invenietur B differentiale proximum expressionis A. Jam quod attinet ad usum hujus formulæ, sit quadrati dx^2 differentiale proximum $2 dx ddx$, seu $2 dx d^2 x$ porro differentiandum. Facta comparatione propositæ ad differentiandum expressionis cum expressione A, invenitur $m = 2$, $n = 1$, $r = 1$, $p = 2$, quibus valoribus substitutis loco m, n, r, p, respective in formula B, prodibit differentiale proximum desideratum, nempe $2 ddx d^2 x + 2 dx d^3 x$ seu $2 d^2 x^2 + 2 dx d^3 x$, ubi nota, quod sicut in alio quantitatum genere, ita & hic sit dx^{1-1}

seu

seu $dx^0 = 1$, & $d^p x^{1-1}$ seu $d^p x^0 = 1$. Quodsi tertium differentiale ipsius dx^2 petatur, singulorum terminorum inventi differentialis differentialia proxima quærentur, facta prius prædictorum terminorum cum expressione A comparatione. Atque priorem comparando cum A comperimus $m = 2$, $dx^n = 1$, seu $n = 0$, $p = 2$, $r = 2$; unde differentiale hujus termini juxta formulam B erit
$0 + 2 \,.\, 2 d^2 x^{2-1} d x^{2+1} x = 4 d^2 x d^3 x$. Statim autem apparet primum terminum primo formulæ B respondentem in casu proposito evanescere, cum ejus factorem n invenerimus esse 0. Comparando nunc secundum terminum $2 dx d^3 x$ cum A, erit $m = 2$, $n = 1$, $p = 3$, $r = 1$; unde juxta formulam B erit differentiale proximum termini secundi $2 d^3 x ddx + 2 dx d^4 x$. Igitur differentiale tertium ipsius dx^2 est $4 d^2 x d^3 x + 2 d^3 x ddx + 2 dx d^4 x = 6 d^2 x d^3 x + 2 dx d^4 x$.

97. Ex §. 95. datis expressionibus magis evolutis formulæ generales differentialium primorum, secundorum &c. functionis X eliciuntur, quas subjicimus:

1mum - - - $X' dx$

2dum - - - $X'' dx^2 + X' ddx$

3tium - $X''' dx^3 + 3 X'' dx ddx + X' d^3 x$

4tum $X'''' dx^4 + 6 X''' dx^2 d^2 x + 4 X'' dx d^3 x + 3 X'' d^2 x^2 + X' d^4 x$.

5tum

5^{tum}. $X''''' dx^5 + 10 X'''' dx^3 d^2 x + 15 X''' dx d^2 x^2$
$+ 10 X''' dx^2 d^3 x + 5 X'' dx d^4 x + 4 X'' d^2 x d^3 x + X' d^5 x$.

98. Exprimat X Y functionem duarum variabilium x, y. Denotet præterea $X'Y dx$ differentiale primum functionis X Y, quatenus in ea solum x variabilis cogitatur: & $XY' dy$ differentiale primum functionis X Y quatenus in ea y tantum variari concipitur; & erit functionis X Y duarum variabilium differentiale primum $X'Y dx + XY' dy$, ubi $X'Y$, XY' sunt, ut notum est ex §. 87, functiones variabilium x, y ex solis finitis quantitatibus compositæ. Porro differentiale proximum expressionis $X'Y dx$ est $X'Y ddx + X''Y dx^2 + X'Y' dx dy$, & hujus proximum: $X'Y d^3 x + X''Y dx ddx + 2 X'Y' dy ddx + X'''Y dx^3 + X''Y' dy dx^2 + 2 X''Y dx ddx + X'Y' dx ddy + X''Y' dx^2 dy + X'Y'' dx dy^2$. Ope formularum istarum facile invenientur formulæ differentialium primorum, secundorum, tertiorum &c. functionis X Y, modo observetur, differentialia termini $XY' dy$ obtineri ex formulis pro $X'Y dx$ datis, si manentibus indicibus in locum X reponatur Y, in locum Y vero X, item pro dx, ddx, dx^2 substituatur dy, ddy, dy^2 & vicissim. Cæterum levi negotio formulæ altiorum adhuc differentialium, quam sint data, obtinebuntur, si opus fuerit.

99.

Digitized by Google

99. Functionem trium variabilium ita exprimo XYZ. Differentiale primum functionis hujus est $X'YZ\,dx + XY'Z\,dy + XYZ'\,dz$. Jam termini $X'YZ\,dx$ ulterius differentiale est $X'YZ\,ddx + d(X'YZ)\,dx$, seu $X'YZ\,ddx + X''YZ\,dx^2 + X'Y'Z\,dx\,dy + X'YZ'\,dx\,dz$. Hujus vero expressionis differentiale proximum est $X'YZ\,d^3x + (3X''YZ\,dx + 2X'Y'Z\,dy + 2X'YZ'\,dz)\,ddx + (X'''YZ\,dx + X''Y'Z\,dy + X''YZ'\,dz)\,dx^2 + X'Y'Z\,dx\,ddy + X''Y'Z\,dx^2\,dy + X'Y''Z\,dx\,dy^2 + 2X'Y'Z'\,dx\,dy\,dz + X'YZ'\,dx\,ddz + X''YZ'\,dx^2\,dz + X'YZ''\,dx\,dz^2$. His denique, & dictis §. superiore modo conveniente huc applicatis, in eruendis formulis differentialium altiorum functionum trium variabilium nulla quidem supererit difficultas.

100. Ut ex generalibus formulis differentialium secundorum, tertiorum &c. functionis unius variabilis immediate differentialia prædicta in casu particulari elici possint, juverit distinguere casus: vel enim X seu functio variabilis x est potentia aliqua ipsius x, vel est potentia binomii, trinomii &c. variabilem x complexi, aut reducta supponitur ad talem potentiam. Si prius obtineat, X', X'' &c. denotant functionem variabilis x, in qua potentia ipsius x tot gradibus depressa est, quot virgulæ sunt in indice,

sed

ſed functio ipſa ducta eſt in factum ex omnibus prioribus exponentibus. In ſecundo caſu exprimamus X per X^m, & ipſum binomium vel trinomium ſeu polynomium variabilem x complexum, ſed in quo ſingulæ potentiæ variabilis ſint uno gradu dejectæ, & ductæ in exponentes ſuos priores reſpectivè, denotet $X^{-\prime}$: $X^{-\prime\prime}$ vero ſignificet polynomium, in quo potentiæ ipſius x duobus gradibus ſint depreſſæ, & ductæ in factum priorum duorum exponentium, & ſic porro. Termini autem, qui x non continent omiſſi cenſeantur. Hoc ergo ſuppoſito erit:

$$X' = m X^{m-1} X^{-\prime}$$

$$X'' = (m-1) m X^{m-2} X^{-\prime} + m X^{m-1} X^{-\prime\prime}$$

$$X''' = (m-2)(m-1) m X^{m-3} X^{-\prime}$$
$$+ 2(m-1) m X^{m-2} X^{-\prime\prime} + m X^{m-1} X^{-\prime\prime\prime}$$

$$X'''' = (m-3)(m-2)(m-1) m X^{m-4} X^{-\prime}$$
$$+ 3(m-2)(m-1) m X^{m-3} X^{-\prime\prime}$$
$$+ 2(m-1) m X^{m-2} X^{-\prime\prime\prime} + m X^{m-1} X^{-\prime\prime\prime\prime}$$

His inſpectis formulis ſine confuſione differentiale altius quodcunque functionis unius variabilis effici poterit. Sit ex. gr. ſumendum differentiale ſecundum ipſius x^3 formula eſt $X'' dx^2 + X' ddx$. Cum in primo termino index ſit duarum virgularum, duæ unitates ex functionis x^3 exponente ſubducantur, prodit x, quæ quantitas ducitur in

M factum

Digitized by Google

factum ex prioribus exponentibus, qui sunt 3, 2; quare primus terminus desiderati differentialis est $6\,x\,dx^2$, alter eadem respective methodo inventus $3\,x^2\,ddx$. Per priores autem exponentes intelligo tot quantitates in progressione naturali, quot sunt virgulæ in indice initio facto ab exponente functionis, ut in hoc exemplo a 3. Quæratur differentiale secundum functionis $(a+x)^3$; erit $X^m = (a+x)^3$, $X^{m-2} = (a+x)$, $X^{-\prime} = x^0 = 1$, adeoque $X^{-\prime\prime} = o\,.\,x^{-1} = o$; unde differentiale quæsitum $= 6\,(a+x)\,dx^2 + 3\,(a+x)^2\,ddx$. Sit sumendum differentiale tertium functionis $(x^4+x^3+a)^4$. Formula generalis differentialis tertii oriundi ex functione unius variabilis §. 97 data est $X^{\prime\prime\prime}\,dx^3 + 3\,X^{\prime\prime}\,dx\,ddx + X^{\prime}\,d^3x$. Ut autem valores $X^{\prime\prime\prime}$, $X^{\prime\prime}$, $X^{\prime}$ in casu dato inveniantur per formulas modo exhibitas, inveniendum prius X^{m-3}, X^{m-2}, X^{m-1}, ac $X^{-\prime}$, $X^{-\prime\prime}$, $X^{-\prime\prime\prime}$.

Est autem $X^{-\prime} = 4\,x^3 + 3\,x^2$

$$X^{-\prime\prime} = 3\,.\,4\,x^2 + 2\,.\,3\,x$$

$$X^{-\prime\prime\prime} = 2\,.\,3\,.\,4\,x + 1\,.\,2\,.\,3$$

Unde $X^{\prime} = 4\,(x^4+x^3+a)^3\,(4\,x^3+3\,x^2)$

$$X^{\prime\prime} = 3\,.\,4\,.\,(x^4+x^3+a)^2\,(4\,x^3+3\,x^2) + 4\,(x^4+x^3+a)^3\,(3\,.\,4\,x^2+2\,.\,3\,x)\,.$$

X'''

$$X''' = 2.3.4.(x^4+x^3+a)(4x^3+3x^2)+2.3.4(x^4+x^3+a)^2(3.4x^2+2.3x)+4(x^4+x^3+a)^3(2.3.4x+1.2.3).$$

Denique ſubſtitutis his valoribus loco X′, X″, X‴ in formula generali ex §. 97. depromta, habebitur quæſitum differentiale.

101. Si in expreſſionibus generalibus quantitatum X′, X″, X‴ præcedente §. expoſitis, $X^{-\prime}$, fuerit = 1; erit $X^{-\prime\prime}$, $X^{-\prime\prime\prime}$ &c. = 0; quoniam omnium harum quantitatum hoc caſu apparentium communis factor eſt o exponens unitatis; unde in nominatis expreſſionibus, evaneſcentibus terminis, in quibus $X^{-\prime\prime}$, $X^{-\prime\prime\prime}$ &c. occurrit, tales prodeunt:

$$X' \quad - \quad - \quad = m X^{m-1}$$
$$X'' \quad - \quad - \quad = (m-1) m X^{m-2}$$
$$X''' \quad - \quad = (m-2)(m-1) m X^{m-3}$$
$$X'''' \quad - \quad = (m-3)(m-2)(m-1) m X^{m-4}$$
&c. &c.

Sit jam functio ipſius x potentia moninomii; erit $X^{-1} = x^{1-1} = x^0 = 1$; ergo hoc caſu locum habent expreſſiones pro X′, X″ &c. modo datæ, quæ cum prorſus tales ſint, quales regula prima §. antecedente data pro caſu potentiæ moninomii exigit, potuiſſet etiam hæc regula ex

 expreſ-

Digitized by Google

expressionibus quantitatum X′, X″ &c. eodem §pho posterius datis derivari, quemadmodum inde derivatæ sunt formulæ modo allatæ. Ex quo patet expressiones §. priore pro X′, X″ &c. exhibitas plane universales esse.

102. Ut differentialia altiora functionum variabilium duarum, pluriumve nullo mediante ex formulis generalibus horum differentialium juxta §§. 98 & 99 concinnatis, obtineantur, loco expressionum X′, X″ &c. Y′, Y″ &c. in formulis istis occurrentium valores ex §. 100. assumendi erunt.

103. Operæ pretium est ante, quam Caput hoc absolvamus, adnotare conditiones, quarum singularum defectus indicio est, propositam differentialem expressionem duas variabiles complexam nullius functionis differentiale secundum esse. Sit X Y functio duarum variabilium. Erit per modum exprimendi hoc Capite adhibitum $X'Y\,dx + XY'\,dy$ differentiale primum, & $X'Y\,ddx + X''Y\,dx^2 + 2X'Y'\,dx\,dy + XY'\,ddy + XY''\,dy^2$ juxta §. 98 differentiale secundum. Est vero $X'Y' =$ differentiali proximo functionis X′Y ita, ut in ea tantum y ut variabilis consideretur, & differentiale sit per d y divisum, seu, resumpto modo exprimendi Capitis Superioris, est $X'Y' = \frac{d(X'Y)}{dy}$.

Sic

Sic etiam $X'Y'$ eſt $= \frac{d(XY')}{dx}$, & $\frac{d(X'Y)}{dy} = \frac{d(XY')}{dx}$, ut ex Capite cit. jam notum eſt. Præterea eſt $X''Y = \frac{d(X'Y)}{dx}$, $XY'' = \frac{d(XY')}{dy}$. Quare ſi differentialis ſecundi $X'Y\,ddx + XY'\,ddy + X''Y\,dx^2 + XY''\,dy^2 + 2X'Y'\,dx\,dy$ coefficientes finitos per P, Q, R, S, T reſpective exprimamus, obtinebimus $P\,ddx + Q\,ddy + R\,dx^2 + S\,dy^2 + T\,dx\,dy$, quæ adeo eſt expreſſio differentialis ſecundi duarum variabilium, in quo ſemper, uti oſtendimus, $R = \frac{dP}{dx}$, $S = \frac{dQ}{dy}$, $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, ideoque & $T = \frac{2dP}{dy} = \frac{2dQ}{dx}$.

104. Cæterum in formulis generalibus altiorum differentialium ſuppoſuimus variabilium ſimplicium differentiolas quaslibet, primas, ſecundas &c. eſſe variabiles, idque nulla certa lege & ratione, ſed vage; unde differentiolas ſecundas per ddx, tertias per d^3x &c. tanquam ſigna generaliſſima talium infinite parvarum differentiarum expreſſimus. Quodſi certa lege variabilium valores progrediantur, etiam horum functiones, & functionum differentialia altiora determinantur, eliminatisque vagis differentialium altiorum ſignis exprimi poſſunt, de quo Capitibus ſequentibus uberius.

CA-

Digitized by Google

CAPUT VII.

DE NATURA ALTIORUM DIFFERENTIALIUM.

Hoc Capite principio quidem ea, quæ prioris §. ultimo paucis innuimus, pluribus declarare conabimur.

105. Sit itaque variabilis quæcunque x, & differentia inter valores proximos variabilis x, generatim sit dx. Sit jam ipsius x valor quicunque x': differentia inter x' & valorem alium ipsius x ipsi x' quam proximum sit dx', ita, ut $x' + dx'$ sit valor proximus valori x'. Porro dx'' sit differentia inter $x' + dx'$ & valorem ei proximum; adeoque posito $x' + dx' = x''$, erunt x', $x' + dx'$, $x'' + dx''$ tres valores proximi variabilis x. Per ddx generatim differentiam inter differentiolas primas ipso dx designatas significamus: sit vero ddx' differentia inter dx' & dx'', ut sit $dx'' - dx' = ddx'$; erit $dx'' = dx' + ddx'$. Poterunt ergo illi tres valores variabilis x ita exprimi: x', $x' + dx'$, $x' + dx' + dx' + ddx'$, vel sic: x', $x' + dx'$, $x'' + dx' + ddx'$; & erit tertius valor ipsius x, seu $x''' = x' + 2dx' + ddx'$.

106.

Digitized by Google

106. Ex his facile colligitur, legem qua valores variabilis x progrediuntur, item legem, qua dx, seu differentialia prima se se excipiunt, atque valorem differentialis secundi ita a se invicem pendere, ut uno ex his determinato una reliqua determinentur. Certum enim est valores alicujus variabilis aliter atque aliter progredi posse, adeoque hi valores alias & alias habere possunt differentias primas, & his primis diversis etiam secundæ diversæ utique erunt, ac vice versa. Sic si valores variabilis x, seu x', x'', x''' progrediantur in progressione Arithmetica, eorum differentiæ erunt æquales, adeoque dx constans, & $ddx = 0$ (§. 64.) vicissim si $ddx = 0$, erit dx constans, & valores x', x'', x''' progredientur in progressione Arithmetica, seu erant x', $x' + dx'$, $x' + 2dx'$.

107. Itaque nisi lex statuatur, qua valores ipsius x, vel differentiale primum dx progreditur, expressio continens ddx incerti est significatus, adeoque inutilis.

108. Si quædam functio variabilis x complexa dx, constans ponatur, lex valorum ipsius x, & lex differentialium primorum determinatur. Sit $p dx$ quædam ipsius x functio, in qua p quidem variabilem x, sed nullum differentiale contineat. Sint $p' dx'$, $p'' dx''$ duo valores proximi hujus functionis hoc sensu ut in p' sit x', in p'' vero

babeahabeatur x''. Cum $p\,dx$ sit constans, erit $p'\,dx' = p''\,dx''$; adeoque $p' : p'' = dx'' : dx'$. Determinatur ergo tali casu lex differentialium primorum, adeoque per §. 106. etiam valorum proximorum ipsius x, seu ratio, qua isti valores progrediuntur.

109. Ex mox citato §. 106. etiam recte infertur, valorem differentialis secundi ipsius x determinari, si quæpiam functio ipsius x complexa dx constans ponatur, quod ipsum tamen etiam sic demonstratur. Quoniam $p\,dx$ per hypothesim constans est; erit ejus differentiale secundum $p\,ddx + dp\,dx = 0$ (§. 64.); quare $p\,ddx = -dp\,dx$, & $ddx = -\frac{dp\,dx}{p}$. Quoniam vero p functio est ipsius x nullum differentiale complexa, ut dictum §. priore; erit $dp = q\,dx$, ubi q rursum designat functionem variabilis x immunem ab omni differentiali, vide §. 87. Substituto ergo $q\,dx$ in locum dp, fiet $ddx = -\frac{q\,dx^2}{p}$; est ergo, posito $p\,dx$ constante, $-\frac{q\,dx^2}{p}$ valor ipsius ddx.

110. Dum dico valorem ipsius ddx determinari, istud de relativo intelligo, seu de ratione, quam habet ddx ad homogeneam infinitesimam, seu ad potentiam differentialis primi dx. Cum enim sit $ddx = -\frac{q\,dx^2}{p}$;

erit

Digitized by Google

erit $\frac{ddx}{dx^2} = -\frac{q}{p}$, seu ratio ipsius ddx ad dx^2 est æqualis quantitati $-\frac{q}{p}$, quæ uti dictum est, nullum differentiale adeoque nullam vagam, & nunquam absolute determinandam expressionem complectitur, atque hoc sensu determinatam dicimus; etsi enim variabilem x contineat, hæc tamen dato casu singulari determinatur utique.

111. Sequitur ex his posse expressionem aliquam, in qua sit unica variabilis, & ejus differentiale secundum, seu potius signum generale hujus differentialis, sequitur, inquam, posse expressionem hanc mutari in aliam carentem signo differentialis secundi, modo functio quæpiam ejusdem variabilis, primum differentiale complexa, constans sumatur.

112. Semel igitur assumpta functione aliqua variabilis x, in qua dx insit, ut constante, valor expressionis differentialia secunda ipsius x continens fixus est, & differentialia secunda tantum adsunt ad speciem.

113. Conversa §. 108. etiam vera est, nempe, lege, qua variabilis valores, vel differentialia prima progrediuntur, determinata; functionem aliquam variabilis, in qua primum differentiale insit, poni constantem. Sic si valo-

res variabilis x in progressione Arithmetica sint; erit functio $x^{\circ} dx$, seu dx constans, ut jam alias dictum est. Nam erit semper $x'' - x' = x''' - x''$, seu $x' + dx' - x' = x'' + dx'' - x''$, adeoque $dx' = dx''$, seu dx constans. Sed generatim veritas propositionis ita ostenditur. Lege, qua valores variabilis progrediuntur determinata, unus valor per alterum sibi proximum dari poterit; unus ergo erit functio alterius, & complectetur dx utpote differentiam valorum sibi proximorum, eritque hæc functio semper ejusdem formæ, cum lex eadem supponatur; atqui functio hæc functio est variabilis x, & complectitur etiam dx; quare functio aliqua variabilis x complexa dx casu exposito constans erit.

114. Contemplemur jam quatuor valores sibi proximos variabilis cujuscunque x. Valores isti sunt: x, $x' + dx'$, $x'' + dx''$, $x''' + dx'''$, ubi $dx''' = dx'' + ddx''$, & $ddx'' = ddx' + dddx'$, atque $ddx'' - ddx' = d^3 x'$. Pendet ergo $d^3 x'$ a ddx', seu generatim $d^3 x$ a $d^2 x$; pendet vero $d^2 x$ a lege differentialium primorum, seu a lege progressionis valorum sibi proximorum ipsius x; ergo etiam $d^3 x$, seu differentiale tertium ab his pendet. Idem vero & de $d^4 x$, $d^5 x$ &c. eodem modo ostenditur. Quare quod

dictum

Digitized by Google

dictum hucusque hoc Capite de secundo differentiali variabilis unius, generatim verum est de omni altiori.

115. Possunt dari functiones duarum variabilium, in quibus differentialia secunda tantum apparenter insint functionibus revera determinatum significatum habentibus. Quoniam enim dx, dy sunt infinitesimae homogeneae, seu ejusdem ordinis, ratio earum $\frac{dy}{dx}$ erit finita quantitas, quae dicatur p, ita, ut p etsi variabilis, tamen nulla differentialia complectatur. Quare dp tantum finitas quantitates, & differentiale primum continet. Est vero $dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ $= \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$; adeoque expressio $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$, ac $dx\,ddy - dy\,ddx$; quae est $= dp\,dx^2$, aequalis est expressioni meras finitas, aut simul prima differentialia tantum complexae, quae cum determinati significatus sit, etiam illa determinato est significatu; adeoque differentialia secunda tantum apparenter ei insunt.

116. Quodsi ergo per V designemus expressionem praeter finitas, & differentialia prima, $dx\,ddy - dy\,ddx$ complexam, erit V expressio determinati significatus, & tantum ad speciem continebit differentialia secunda.

117. Cum sit $dx\,ddy - dy\,ddx$ valoris fixi; erit ob

 ean-

eandem rationem etiam $dx\,ddz - dz\,ddx$, & $dy\,ddz - dz\,ddy$ fixi valoris; quare si in expressione aliqua trium variabilium præter hæc differentialia secunda insimul sumta alia non occurrant, erit hæc expressio fixi plane, ac determinati significatus. Eadem methodo ad expressiones quatuor variabilium progredi licet.

118. Cum sit $\frac{dx}{dx} = 1$, & differentiale unitatis sit nullum; ratiociniis præmissis locus non est in expressionibus variabilem unicam continentibus.

119. Dixi §. 115. expressionem $dp\,dx^2$ fixi esse significatus, quod ne cui absonum videatur, ostendam generatim expressionem quamvis hujus formæ $dp\,dx^m$ fixi esse significatus. Nam cum p hic sit functio duarum variabilium, potest in locum dy substitui $p\,dx$, quia $\frac{dy}{dx} = p$; itaque tum $dp\,dx^m$ semper continebit ut factorem potentiam differentialis primi ordinis $m + 1$ præter finitas quantitates; est ergo semper infinitesima ordinis $m + 1$ (§. 27.); atque ideo $dp\,dx^m = \frac{1}{\infty^{m+1}}$, & $\frac{1}{\infty^{m+1}} : dx^{m+1} = q$, seu $\frac{dp\,dx^m}{dx^{m+1}} = q$. Cum ergo $dp\,dx^m$ ad dx^{m+1} habeat finitam rationem, erit fixi significatus (§. 110.)

120.

Digitized by Google

120. In functionibus plurium variabilium habentibus differentialia altiora determinato secundo differentiali unius variabilis, etiam reliquarum differentialia secunda simul determinantur. Si enim reliquæ variabiles sint functiones illius unius, aut omnes communiter sint functiones alicujus etiam talis, quæ expressionem propositam non ingreditur; erunt omnes variabiles, etiam illa, quæ expressionem non ingreditur, siquidem a tali pendeant, functiones ejus, cujus differentiale secundum determinatur; quare & illarum differentialia secunda, & altiora omnium ordinum una determinabuntur (§. 114.) Verum abstrahamus ab illa variabilium inter se connexione, ignotamque nobis cogitemus; nihilominus veritas propositionis præsentis ita demonstrabitur. Sit differentiale ddx determinatum, & $= \pi dx^2$, ubi π functionem denotat ipsius x meras finitas quantitates complexam. Sit $\frac{dy}{dx} = p$; erit $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2} = dp$, & $ddy = \frac{dp\,dx^2 + dy\,ddx}{dx}$, ac in locum ddx substituendo πdx^2, & in locum $\frac{dy}{dx}$ ponendo p; erit $ddy = dp\,dx + p\pi\,dx^2$. Si præter x & y adsit z; fiat $\frac{dz}{dx} = t$, & procedatur uti ante, & fiet $ddz = dt\,dx + t\pi\,dx^2$, & ita porro si adsint plures variabiles. Determina-

Digitized by Google

minatis autem variabilibus secundis, etiam altiora determinabuntur.

121. Cum ddx determinetur, si quæpiam ipsius x functio, dx complexa, constans assumatur (§. 109.); consequens est assumta constante functione variabilis in proposita expressione occurrentis, & differentiale primum variabilis ejusdem complexa, determinari quoque differentialia altiora aliarum variabilium in eadem expressione occurrentia. Quare si ex. gr. $x^0\, dx$, seu dx sit constans, seu generatim, si differentiale primum variabilis alicujus constans ponatur, differentialia altiora variabilium in expressione una cum illa, cujus differentiale primum constans ponitur, contentarum determinabuntur.

122. Demonstratio propositionis §. 120. propositæ adhuc subsistit, si in $\pi\, dx^2$ per π designetur functio plurium variabilium in proposita expressione differentialia altiora complectente comprehensarum, modo ex meris finitis quantitatibus sit composita. Nam manet $ddy = dp\, dx + p\pi\, dx^2$, & ratio ddy ad dx^2, seu $p^2 ddy$ ad dy^2 (ob $\frac{dy}{dx} = p$, & $dx = \frac{dy}{p}$) definita perstat, & $= q + p\pi$, quia $dp = q\, dx$, & q, p, π ex meris finitis quantitatibus componuntur (§. 110.). Quin imo subsistit adhuc demonstratio,

ſtratio, ſi ddx ſit $= \pi dx^2 + \phi dy^2 + \omega dz^2$, ubi π, ϕ, ω ſunt functiones unius, vel plurium variabilium ex meris finitis quantitatibus compoſitæ. Cum enim ſit $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dz}{dx} = t$; erit $dy^2 = p^2 dx^2$, $dz^2 = t^2 dx^2$; & ſubſtitutione facta, $ddy = dp\,dx + p(\pi + \phi + \omega) dx^2$, & $\frac{ddy}{dx^2}$ vel $\frac{p^2 ddy}{dy^2} = q + p(\pi + \phi + \omega)$ (§. 110.) Porro ddx determinatur, ſi functio quæpiam, quæ præter dx meras finitas, quales quales demum complectatur, conſtans ponatur. Nam ſit functio πdx conſtans; erit $\pi ddx + d\pi dx = 0$, & $ddx = -\frac{d\pi dx}{\pi}$. Si jam π ſit functio ſolius x; erit $d\pi = \psi dx$, ubi ψ ex meris finitis componitur; quare $-\frac{d\pi dx}{\pi} = -\frac{\psi dx^2}{\pi}$, & ratio $\frac{ddx}{dx^2}$ definita, & $= -\frac{\psi}{\pi}$. Si π complectatur plures variabiles ex. gr. x, y, z; erit $d\pi = \psi dx + \varrho dy + \sigma dz$, & quia $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dz}{dx} = t$; erit $dy = pdx$, $dz = tdx$, adeoque $d\pi = \psi dx + \varrho pdx + \sigma tdx$, atque $\frac{ddx}{dx^2} = -\frac{(\psi + \varrho p + \sigma t)}{\pi}$. Determinatur etiam ddx, ſi functio quæpiam præter dx etiam dy ex. gr. complectens conſtans ponatur. Nam ejusmodi functio ſemper reduci poteſt ad talem, quæ ſolum dx contineat ponennendo, ut jam alias ſæpius, $\frac{dy}{dx} = p$, & $dy = p\,dx$, atque in functione in locum dy, vel ejus potentiæ ſubſtituendo $p\,dx$, vel ejus potentiam. Quare ſi functio aliqua ejus formæ, quam modo propoſuimus, conſtans ponatur; omnium variabilium altiora differentialia in propoſita expreſſione comprehenſa determinantur, & expreſſio, ſiquidem vere etiam vagi ſignificatus fuiſſet, fixa redditur.

123. Simul vero ex modo quo demonſtrationes adornavimus, pateſcit, qua ratione, poſita aliqua functione conſtante, expreſſio altiora differentialia continens mutari poſſit in aliam aut meras quantitates finitas, aut finitas cum potentia differentialis primi tantum comprehendentem, ſubſtituendo videlicet in locum altiorum differentialium expreſſiones, meras finitas quantitates, aut finitas cum differentialis primi potentia tantum continentes, & ex aſſumta functione conſtante, & æquationibus $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ &c. (ubi p, q, r meras finitas continent (§. 87.)) elicitas. Quodſi expreſſio propoſita non ſit fixi ſignificatus, ſed contineat vere vaga differentialia altiora; facta mutatione, qualem hic generatim indicavimus, expreſſio emergens alius ſemper valoris erit, prout alia, atque

que alia functio constans assumta fuerit. Si vero expressio proposita revera fixi sit significatus, eique tantum ad speciem altiora insint differentialia; tum expressio a mutatione emergens ejusdem perpetuo valoris erit, qualis qualis demum functio differentiale primum complexa constans assumta fuerit. Si namque valor iste idem non persisteret, significatus differentialium altiorum ex assumta functione constante primum determinaretur; adeoque proposita expressio vere vagi esset significatus, quod est contra hypothesim. Sed jam ipsam indicatæ mutationis faciendæ methodum proposita quavis expressione duarum variabilium altiora differentialia continente aggrediamur. Assumemus autem ex his functionibus dx, dy, ydx, $\surd(dx^2 + dy^2)$ unam post alteram tanquam constantem.

CAPUT VIII.

DE INVENIENDIS DIFFERENTIALIBUS SUPPOSITA FUNCTIONE CONSTANTE, ET DE MUTATIONE AC VARIIS FORMIS EXPRESSIONUM DIFFERENTIALIUM.

Dictum est Capite superiore expressiones differentiales, altiora etiam differentialia complexas, quæ forma-

Digitized by Google

tæ sint posita functione constante, mutari posse in alias meras finitas, aut una potentiam differentialis primi continentes. Ad has mutationes ut ordine naturali procedamus, ante exponendum videtur, qua ratione differentialia, supposita quadam functione constante, oriantur formenturque.

124. Hæc igitur differentialia formantur vel ipso actu, quo expressiones differentiantur, vel absoluta differentiatione demum mutantur in alias expressiones, in quibus sit quæpiam functio constans. Priori modo efficiuntur, si lapsus vitandi causa in expressionem propositam loco functionis, quæ constans ponitur, inducatur litera ex primis quæpiam, & dein ulterior differentiatio juxta leges alias datas peragatur, qua peracta rursum in locum literæ introductæ restituatur functio illa constans. Sit ex. gr. expressio $xy^2 dx$ porro differentianda posita $y dx$ constante. Fiat $y dx = a$; erit $xy^2 dx = axy$, cujus differentiale est $axdy + aydx$, seu, reposito $y dx$ in locum a, $xydydx + y^2 dx^2$.

125. Si expressio detur altiora continens differentialia nulla supposita functione constante, eaque sit mutanda in aliam, in qua sit quædam functio constans, ita proceditur. Sit $x^\circ dx$ seu dx functio, quæ constans assumitur; erit

Digitized by Google

erit $d^2 x$, $d^3 x$ &c. = o. Quare evanescunt omnes termini propositæ expressionis, quorum coëfficiens est $d^2 x$ vel $d^3 x$ &c; hi igitur termini delendi sunt.

126. Deletis his terminis formulæ differentiales functionis X unius variabilis differentialia exprimentes, & §. 97. datæ in sequentes mutantur

1 - - -	$X' dx$
2 - - -	$X'' dx^2$
3 - - -	$X''' dx^3$
4 - - -	$X'''' dx^4$
&c.	&c.

Sit ex. gr. $X = x^2$, ponaturque dx constans; erit $X' dx = 2 x dx$, & $X'' dx^2 = 2 dx^2$. Sit $X = x^3$; erit $X'' dx^2 = 6 x dx^2$, & $X''' dx^3 = 6 dx^3$. Et generatim, posito dx constante, functionis x^m differentiale

primum est - -	$m x^{m-1} dx$
2 - - -	$m(m-1) x^{m-2} dx^2$
3 - -	$m(m-1)(m-2) x^{m-3} dx^3$.
4 - -	$m(m-1)(m-2)(m-3) x^{m-4} dx^4$.
&c.	&c.

Ex serie præmissa apparet potentiæ secundæ differentiale secundum, tertiæ tertium &c. ultimum esse. Nam sit n index differentialis; erit functionis x^m differentiale ordi-

Digitized by Google

nis n, seu cujuscunque demum $= m(m-1)(m-2) - - - (m-n+1)\,x^{m-n}\,dx^n$. Quodsi jam n fiat $= m$; erit $x^{m-n} = x^0 = 1$, & $m(m-1)(m-2) - - - (m-n+1)\,x^0\,dx^n$ ultimum differentiale; est enim ulterius $m(m-1)(m-2) - - - (m-n+1)\,0\,.\,x^{-1}\,dx^{n+1} = 0$ ob 0 coefficientem.

127. Proposita sit expressio plurium variabilium altiora habens differentialia, eaque sit mutanda in aliam supposita functione $y\,dx$ constante. Quoniam hujus functionis differentiale $y\,ddx + dy\,dx = 0$, adeoque $ddx = -\frac{dy\,dx}{y}$, & $d^3x = -\frac{y(ddx\,dy + ddy\,dx) + dy^2\,dx}{y^2}$, &, substituto valore ipsius ddx, $= \frac{2\,dx\,dy^2 - y\,ddy\,dx}{y^2}$; nulla alia re opus est, quam ut in locum ddx, d^3x valores inventi surrogentur, inventis etiam eodem modo valoribus ipsorum d^4x, d^5x &c. si necessum sit.

128. Ponatur denique functio $\surd(dx^2 + dy^2)$ constans; erit ejus differentiale $\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{\surd(dx^2 + dy^2)} = 0$; atque adeo $ddx = -\frac{dy\,ddy}{dx}$ vel $ddy = -\frac{dx\,ddx}{dy}$, ex quo facile valores ipsorum d^3x, d^4x &c. vel d^3y, d^4y &c. inveniuntur, atque deinceps proceditur ut §. priore. Hac autem

trans-

Digitized by Google

transformatione eliminari unius variabilis altiora differentialia consideranti patet.

129. Neque aliter procedendum est, si alia aliqua functio differentiale primum alicujus variabilium propositæ ad mutandam expressionis complexa constans assumatur. Hoc tamen adnotandum duxi, assumta ad arbitrium una aliqua tali functione ut constante, aliam præterea pro arbitrata assumi haud posse, cum Capite priore satis superque probatum sit, assumta aliqua tali functione ut constante, determinari omnia altiora in proposita expressione contenta differentialia, adeoque ultra liberum non esse aliam functionem, qua illa differentialia jam determinata aliter determinentur, constantem supponere.

130. Sit nunc $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ &c. positis dy, dx variabilibus, erit: $dp = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{ddy}{dx^2} - \frac{dy\,ddx}{dx^3} = q$, $dq = \frac{dx^2 d^3y - 2\,dx\,d^2x\,d^2y}{dx^4} - dx^3 \frac{(d^2x\,d^2y + dy\,d^3x)}{dx^6} + \frac{3\,dx^2\,ddx^2\,dy}{3\,dx^6}$, $\frac{dq}{dx} = \frac{dx^2 d^3y - 3\,dx\,d^2x\,d^2y + 3\,d^2x^2\,dy - dx\,dy\,d^3x}{dx^5} = r$, & sic ulterius. Quodsi sit $\frac{dx}{dy} = p$, facile ex formulis datis obtinebitur q, r, pro hoc casu, si videlicet loco dx,

ddx

ddx &c. ſcribatur reſpective dy, ddy &c. & vice verſa loco dy, ddy &c. ponatur dx, ddx &c.

131. Ponamus dx conſtans, fiet ddx, d^3x &c. $=0$; quare evaneſcentibus terminis formularum modo inventarum, in quibus habetur ddx, d^3x &c. fiet $q=\frac{ddy}{dx^2}$, $r=\frac{d^3y}{dx^3}$ &c. ut dictum §. 125; & adeo $ddy=qdx^2$, $d^3y=rdx^3$. Quare ſi proponatur expreſſio duarum variabilium altiora continens differentialia, in qua ſupponitur functio $x^\circ dx$ ſeu dx conſtans aſſumta fuiſſe, hæc carebit differentialibus ddx, d^3x &c. ob dx conſtans, & loco ddy poterit qdx^2, loco d^3y vero rdx^3 ſubſtitui, ſicque eliminatis altioribus differentialibus utriusque variabilis mutabitur expreſſio in aliam nulla altiora differentialia continentem. Sit ex. gr. propoſita expreſſio $xddy$, in qua functio dx poſita conſtans. Mutatione facta fiet $xddy=qxdx^2$. Si vero propoſita ſit $\frac{xddy}{dx^2}$, fiet $=\frac{qxdx^2}{dx^2}=qx$, adeoque mutatur in aliam meras finitas continentem, cum $\frac{ddy}{dx^2}$ finita ſit (§. 39.) Si in $\frac{dx}{dy}=p$ ponatur dy conſtans; habebimus $q=\frac{ddx}{dy^2}$, $r=\frac{d^3x}{dy^3}$ &c. Cætera fiant, ut modo

dixi-

diximus, si proposita sit ad mutandum expressio, in qua dy constans.

132. Si $y\,dx$ constans; est $ddx = -\frac{dy\,dx}{y} = -\frac{dy\,dx^2}{y\,dx}$ $= -\frac{p\,dx^2}{y}$ (quia $p = \frac{dy}{dx}$) & $d^3x = \frac{p\,dx^2\,dy}{y^2} - \frac{y\,(dp\,dx^2 + 2\,p\,dx\,ddx)}{y^2} = -\frac{dp\,dx^2}{y} - \frac{2\,p\,dx\,ddx}{y^2} + \frac{p\,dx^2\,dy}{y^2} =$ $-\frac{q\,dx^3}{y} + \frac{3\,p^2\,dx^3}{y^2}$, quia videlicet $q = \frac{dp}{dx}$, seu $q\,dx = dp$, & loco ddx ejus valor supra inventus $-\frac{dy\,dx}{y}$ substituitur. Rursum quia $p = \frac{dy}{dx}$, est $p\,dx = dy$, & $ddy = p\,ddx + dp\,dx$ $= \frac{p^2\,dx^2}{y} + q\,dx^2$, quia ddx hic $= \frac{p\,dx^2}{y}$. Porro $d^3y =$ $dq\,dx^2 + 2\,q\,dx\,ddx - d\left(\frac{p^2\,dx^2}{y}\right) = r\,dx^3 - \frac{2\,q\,p\,dx^3}{y}$ $- y\,\frac{(2\,p\,dp\,dx^2 + 2\,p^2\,dx\,ddx)}{y^2} + \frac{p^2\,dy\,dx^2}{y^2} = r\,dx^3 - \frac{4\,q\,p\,dx^3}{y}$ $+ \frac{3\,p^3\,dx^3}{y^2} = \left(r - \frac{4\,p\,q}{y} + \frac{3\,p^3}{y^2}\right)dx^3$. Sic etiam d^4y &c. determinari possunt.

133. Sit denique $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constans. Sit rursum $\frac{dy}{dx} = p$, $q = \frac{dp}{dx}$ &c. erit denuo $p\,dx = dy$, & $p^2\,dx^2$ $= dy^2$,

$= dy^2$, adeoque $\surd(dx^2 + dy^2) = \surd(dx^2 + p^2 dx^2)$ $= dx \surd(1+p^2)$, cujus differentiale $ddx \surd(1+p^2) + \frac{p\,dp\,dx}{\surd(1+p^2)} = 0$ per hypothesim; unde $ddx = -\frac{p\,dx\,dp}{1+p^2} = -\frac{pq\,dx^2}{1+p^2}$, & $d^3x =$

$$-\frac{(1+p^2)(2pq\,dx\,d^2x + p\,dq\,dx^2 + q\,dp\,dx^2) + 2p^2q\,dp\,dx^2}{(1+p^2)^2}.$$

Facta loco ddx, dp, dq substitutione est $d^3x = -\frac{pr\,dx^3}{1+p^2} + (3p^2-1)\frac{q^2\,dx^3}{(1+p^2)^2}$. Rursum generatim $dy = p\,dx$, & $ddy = p\,ddx + dp\,dx$. Sed quia posito $\surd(dx^2+dy^2)$ constante, est $ddx = -\frac{pq\,dx^2}{1+p^2}$; erit posito $\surd(dx^2+dy^2)$ constante, $ddy = -\frac{p^2q\,dx^2}{1+p^2} + q\,dx^2$, surrogato nempe valore ipsius ddx, qui est hoc casu $-\frac{pq\,dx^2}{1+p^2}$, & $q\,dx$ in locum dp. Est vero $-\frac{p^2q\,dx^2}{1+p^2} + q\,dx^2$ facta reductione $= \frac{q\,dx^2}{1+p^2}$; unde hoc casu $ddy = \frac{q\,dx^2}{1+p^2}$. Sic invenitur $d^3y = \frac{r\,dx^3}{1+p^2} - \frac{4pq^2\,dx^3}{(1+p^2)^2}$, atque ita porro.

134. Proposita igitur expressione quapiam, in qua sit $y\,dx$ vel $\surd(dx^2+dy^2)$ constans, nullo negotio dabitur alia

Digitized by Google

alia carens omnibus altioribus differentialibus, modo in locum ddx, d^3x &c. ddy, d^3y &c. subſtituantur valores §§. duobus ultimis inventi, in quibus nullum differentiale altius occurrit.

135. Expreſſionem, in qua differentialia altiora variabilium x, y tantum apparenter inſunt, nulla aſſumta functione conſtante, poſito ſolum $\frac{dy}{dx} = p$ mutavimus in aliam omni altiori differentiali carentem §. 115.

136. Expreſſio propoſita in aliam omni altiori differentiali deſtitutam mutata poterit deinceps rurſum mutari in aliam, in qua nulla quidem functio conſtans aſſumta ſupponatur, ſi videlicet in locum quantitatum p, q, r ſurrogentur earum valores ex §. 130, quo facto nova expreſſio denuo in aliam, ſupponendo dx, vel ydx, vel $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ conſtantem, methodosque traditas §§. 125, 127, 128 adhibendo mutari poterit. Quia vero in hac mutatione loco p, q, r introducuntur harum quantitatum valores ex §. 130, & hi valores dehinc mutantur juxta §§. 125, 127, 128, prout nempe dx, aut dy, ydx, vel $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ conſtans ſupponitur; poterunt formulae effici, quarum ope propoſita expreſſio, in qua functio quaedam P conſtans aſſumta ſit, in aliam poſita aut nulla, aut

 alia

alia quapiam functione Q constante, immediate transformabitur. Formulæ autem istæ efficientur, si valores ipsarum p, q, r &c. quæ habentur §. 130, vel non mutentur, vel mutentur juxta §§. 125, 127, 128; & non mutatæ quidem persistunt in casu, quo nulla functio constans ponitur: mutatio autem juxta §. 125 dabit formulas in casu, quo dx, vel dy constans assumitur: mutatio juxta §§. 127, 128 in casu, quo ydx, & $\surd(dx^2+dy^2)$ respective constans ponitur. Quodsi jam valores ex §pho 130 vel non mutati, vel mutati, in valores ipsorum ddx, d^3x, &c. ddy, d^3y, &c. quæ habentur §§. 131, 132, 133, loco p, q, r &c. inducantur; habebuntur valores in proposita expressione loco ddx, d^3x, &c. ddy, d^3y &c. habita ratione functionum P, & Q substituendi, ut alia emergat expressio, in qua aut nulla functio, aut functio aliqua Q constans sit. Per functionem autem P, Q, hic intelligimus ex his dx, dy, ydx, $\surd(dx^2+dy^2)$ aliquam disjunctive, quamvis res sine negotio ad alias extendi possit.

137. Si expressio generalis T, in qua nulla functio differentiale primum involvens constans perhibeatur, mutetur in aliam, in qua sit P functio constans; hæc vero rursum methodis expositis mutetur in aliam U, in qua functio nulla sit constans, diversa autem sit U ab expressione

ne

ne T; T per se vagum & incertum habet significatum (§. 123); qui itaque hac etiam ratione detegitur. Possunt autem ex comparatione expressionum T, U conditiones erui, quibus positis T fixum significatum haberet.

CAPUT IX.

SUPPLEMENTUM DOCTRINÆ VULGARIS DE LOGARITHMIS, SEU DE SYSTEMATIS LOGARITHMORUM.

Antequam de logarithmorum differentialibus agam, de ipsis logarithmis tractandum est, resque logarithmitica altius repetenda, & generalius expendenda, quam vulgo fieri soleat.

138. Quivis numerus affirmativus considerari potest, ut potentia alicujus alterius, sive integer is sit, sive fractus, aut mixtus. Ex quovis enim tali numero saltem per approximationem radix quævis extrahi potest, quo casu certe ut potentia consideratur is, cujus radix quæritur. Sit numerus quivis affirmativus b, ex quo, si ex. gr. radix cu-

bica extraheretur, ea foret a; & erit $b = a^3$. Si ex eodem b radix quadratica extraheretur, hæc cubica illa a utique major eſſet; ſit ea c; erit $b = c^2$; adeoque $b = a^3 = c^2$. Poteſt ergo idem numerus jam ut quadratum, jam ut cubus, jam ut biquadratum, aut quinta potentia, imo ut potentia fracti vel mixti exponentis conſiderari, & in genere, b ſeu quivis numerus affirmativus poteſt conſiderari ut e^m, ſeu ut potentia aliqua. Facile autem etiam ex jam dictis colligitur in e^m pendere m ab e, & vice verſa. Nam cum $b = e^m$; erit $\sqrt[m]{b} = e$, adeoque quo m minor, eo e major, & quo e major, eo utique m minor. Et ſi exponens potentiæ, ſeu m ſit compoſitus kn, ita, ut $kn = m$, ſit vero n ſemper idem, pendebit k ab e, & e a k.

139. Sint ſeries:

$$\begin{array}{lllllllll}
(A) & a^{-2}, & a^{-1}, & a^{0}, & a^{1}, & a^{2}, & a^{3}, & a^{4}, & a^{5} \text{ \&c.} \\
(B) & c^{-2m}, & c^{-m}, & c^{0m}, & c^{1m}, & c^{2m}, & c^{3m}, & c^{4m}, & c^{5m} \text{ \&c.} \\
(C) & f^{-2n}, & f^{-n}, & f^{0n}, & f^{1n}, & f^{2n}, & f^{3n}, & f^{4n}, & f^{5n} \text{ \&c.} \\
(D) & \frac{1}{h}, & \frac{1}{g}, & 1, & g, & h, & i, & p, & q \text{ \&c.}
\end{array}$$

Numeros hic cujusque columnæ verticalis inter ſe æquales ſuppono. Sic pono $a^2 = c^{2m} = f^{2n} = h$, & ita de aliis. Apparet autem exponentes 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c. item $0m$, $1m$, $2m$, $3m$ &c., & $0n$, $1n$, $2n$, $3n$ &c., eſſe logarithmos

Digitized by Google

mos numerorum a^0, a^1, a^2, a^3 &c. ſeu ipſorum 1, g, h, i &c. ſunt enim exponentes in progreſſione Arithmetica, potentiæ autem ipſis reſpondentes, ſeu numeri 1, g, h, i &c. in geometrica, & unitati in ſerie potentiarum; reſpondet o in ſerie exponentium. Quare logarithmus etiam definiri poteſt, *exponens numeri, qui conſideratur ut poteſtas, ex hypotheſi quod unitatis exponens ſit* o. Nam hic ſemper logarithmos accipio pro tali ſerie progreſſionis Arithmeticæ reſpondente Geometricæ, in qua unitati in progreſſione Geometrica acceptæ reſpondet o in arithmeticas. Logarithmus etiam dici poteſt menſura numerica rationis compoſitæ, ſeu numerus rationis ut ipſum nomen græcum innuit, adeoque, ſtrictius, ut hic ſumitur, ita quoque definiri: *menſura ſeu numerus rationis unitatis ad alium numerum, quatenus nempe hæc ratio ut compoſita concipitur.* Nam ex. gr. ratio $\frac{a^1}{a^0} \cdot \frac{a^2}{a^1} \cdot \frac{a^3}{a^2}$ = rationi a^3 ad $a^0 = a^3$, cum $a^0 = 1$, & 3 vel $3m$ vel $3n$ logarithmus, rationem triplicatam indicat. Ita 2, vel $2m$, vel $2n$ duplicatam, 4, $4m$, $4n$ rationem quadruplicatam deſignant. Dein ſatis patere puto, dari infinita ſyſtemata logarithmorum. Ita prima ſeries exponentium, ſeu in A ſyſtema quoddam eſt logarithmicum, quod vocant naturale vel hyperbolicum, & quod Neperus condidit: aliud vero formant exponentes in B,

aliud

Digitized by Google

aliud porro illi in C, aliaque sine fine dantur præterea, cum pro a, c, f alii & alii numeri assumi omnino possint: omnium tamen maxime obvium, & quod ideo naturale dicitur, est hyperbolicum, seu systema logarithmorum hyperbolicorum, cum in progressione numerorum naturalium consistat. Vocantur autem numeri a, c, f &c. quorum logarithmus unitas, bases systematum: Exponentium autem factores 1, m, n &c. qui regnant per totum systema, moduli. Ita 1 est modulus systematis logarithmici in A, seu hyperbolici, m in B, n in C. Modulus autem etsi alius sit in quovis systemate, tamen constantis rationis est logarithmus, nempe rationis g ad 1.

140. Ex §. 138. clarum est pendere basim, adeoque & systema logarithmicum a modulo, & vice versa, ita ut vel basi, vel modulo ad arbitrium assumto, in primo casu modulus, in secundo basis determinetur. Neperus modulum assumpsit 1, & inde systema suum logarithmicum construxit: Briggius vero basim assumsit 10, atque aliud systema construxit in praxi commodius, & quo nunc quidem communiter omnes utuntur, & cujus compendium Ulacqii tabulæ manuales continent.

141. Inter terminos serierum A, B, C medii geometrice proportionales inveniri possunt, & inter inventos,

&

Digitized by Google

& priores iterum alii in infinitum, quibus utique in ferie exponentium respondebunt numeri medii arithmetice proportionales eodem ordine investigati. Inter a^2, & a^3, c^{2m}, & c^{3m} quantitas media geometrice proportionalis est $a^{\frac{5}{2}}$, seu $\sqrt{a^5}$, & $\sqrt{c^{5m}}$: rursum inter $a^{\frac{5}{2}}$, & a^3, c^{3m}, & $c^{\frac{5m}{2}}$ media geometrice est $a^{\frac{11}{4}}$, & $c^{\frac{11m}{4}}$, & ita porro. Inventis autem $\sqrt{a^5}$, $\sqrt[4]{a^{11}}$, & $\sqrt{c^{5m}}$, $\sqrt[4]{c^{11m}}$ in serie D respondeant numeri ϕ & y inter b & i; quorum adeo logarithmi sunt in systemate A seu hyperbolico $\frac{5}{2}$, $\frac{11}{4}$, in systemate B vero $\frac{5}{2}m$, $\frac{11}{4}m$. Solent logarithmi numeris decimalibus exprimi ob calculi facilitatem: atque nota illa, quæ locum integrorum occupat characteristica, reliquæ notæ insimul mantissa nominantur. Sic quia in exemplo primo $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, & $\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$, integer 2 characteristicus, vel nota charactaristica: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ mantissæ vocantur.

142. Ex §. præced. fluit, posse series A, B, C, D sine fine interpolari, seu non tot, quin plures concipi terminos, qui interjaceant inter quosvis duos ejusdem seriei. Et cum numero quovis dato major & minor inveniatur in serie D, atque etiam major & minor inter exponentes tam in serie A, quam B, quam C &c. adeoque illi numero in singulis his seriebus limites assignari possint, inter

quos

Digitized by Google

quos contineatur, ita, ut etiam ex limitibus inveniendo continenter medios proportionales determinari accurate, aut saltem ad illum accedi quam proxime possit, adeoque ad series omnes pertineat; consequens est, quemvis numerum in serie D, & in serierum A, B, C, &c. exponentibus reperiri, & ideo cuivis numero suum respondere logarithmum, in quovis systemate, & quemvis logarithmum in quovis systemate logarithmico contineri, sic tamen ut in diversis systematibus diversum locum occupet. Cum præterea in serie D utrinque in infinitum producta tandem deveniatur ad o, ∞, hac series sic producta omnes numeros affirmativos complectitur, ultra o vero continuata negativos habet crescentes. Respondent autem terminis seriei D usque ad o, ∞ continuatæ omnes possibiles logarithmi. Nam ipsius o logarithmus est $-\infty$, ipsius ∞ vero prout sumitur in serie D logarithmus est ∞, intra $-\infty$ autem, & ∞ omnes possibiles seu reales omnes logarithmos contineri necessum est; quare terminis seriei ultra o continuatæ, id est, numeris negativis non nisi logarithmi impossibiles, & imaginarii respondere possunt.

143. Logarithmi diversorum systematum iisdem numeris naturalibus ex serie D, respondentes, seu logarithmi homologi sunt proportionales. Nam 2, 3, & $2m$, $3m$,

ac

ac $2n$, $3n$ ſunt logarithmi homologi diverſorum ſyſtematum reſpondentes numeris naturalibus h, i; eſt vero $2 : 3 = 2m : 3m = 2n : 3n$; ergo &c.

144. Iſtud vero per ſe patet ex inſpectione ſerierum A, B, C, eſſe logarithmos homologos diverſorum ſyſtematum inter ſe ut modulos, & dato logarithmo hyperbolico obtineri quemvis alterius ſyſtematis eidem numero naturali reſpondentem, ſi logarithmus hyperbolicus in modulum ſyſtematis alterius ducatur. Et vice verſa dato logarithmo alterius ſyſtematis inveniri hyperbolicum, ſi datus per modulum ſui ſyſtematis dividatur.

145. Logarithmi diverſorum ſyſtematum ejusdem numeri naturalis ſunt inverſe ut logarithmi baſium ex eodem ſyſtemate ſumti. Nam numeri h logarithmus ex uno aliquo ſyſtemate eſt $2m$, ex alio $2n$, & $h = c^{2m} = f^{2n}$; adeoque (ut ex doctrina vulgari de logarithmis notum eſt) $2m\,lc = 2n\,lf$, ubi lc, lf ſunt logarithmi ex eodem ſyſtemate logarithmico accepti; ergo $2m : 2n = lf : lc$.

146. Ex hac analogia, vel etiam ex §. 144. cum præcedente collato colligitur quoque, modulos duorum ſyſtematum eſſe inverſe ut logarithmos baſium ex eodem ſyſtemate acceptos.

Digitized by Google

147. Si ſeries A interpoletur in infinitum, tum inter terminos a^0 & a^1, reperietur terminus $a^{\frac{1}{\infty}}$. Nam inter a^0 & a^1 medius geometrice proportionalis terminus eſt $a^{\frac{1}{2}}$, inter a^0 & $a^{\frac{1}{2}}$ medius eſt $a^{\frac{1}{4}}$, invenieturque continuando, ſeries mediorum $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{8}}$, $a^{\frac{1}{16}}$ --- $a^{\frac{1}{\infty}}$. Porro ultimus terminus, ſeu $a^{\frac{1}{\infty}} = \sqrt[\infty]{a}$ proxime accedit ad a^0. Pari ratione in ſerie B reperietur $c^{\frac{m}{\infty}}$ ſeu $\sqrt[\infty]{c^m}$, in ſerie C vero $f^{\frac{n}{\infty}}$ ſeu $\sqrt[\infty]{f^n}$ proxime ad c^0, & f^0 accedentes.

148. Ex §. 29 & 30 notum eſt radicem infiniti indicis ex finita quantitate extractam æqualem eſſe unitati una cum fractione infinite parva. Quodſi ex diverſis finitis quantitatibus extrahatur radix ejusdem infiniti indicis, illa erit major, quæ ex majori finita quantitate extrahitur. Unde fractio illa infinite parva cum unitate radicem conſtituens major erit, ſi quantitas finita, cujus eſt radix major fuerit. Deſignet $\frac{p}{\infty}$ quamcunque fractionem infinite parvam, e vero quantitatem finitam, erit $e^{\frac{p}{\infty}} = 1 + \frac{q}{\infty}$, ubi $\frac{q}{\infty}$ etiam eſt infinite parva fractio, & $\frac{q}{\infty}$ major erit, vel minor, ſi e fuerit major vel minor, atque adeo ab e pendebit,

debit, & si $e = 1$, evanescit; nam $e^{\frac{p}{\infty}}$ hoc casu $= 1$; atque ab o ejus valor, cum e crescet; quare etiam æqualis fieri poterit ipsi exponenti $\frac{p}{\infty}$, ac crescente ulterius e major evadet quam $\frac{p}{\infty}$. Quamobrem loco $\frac{q}{\infty}$ assumemus $\frac{\mu p}{\infty}$, ubi μ rationem denotat, quam $\frac{q}{\infty}$ habet ad $\frac{p}{\infty}$; eritque μ semper quantitas finita, quia ratio duarum infinitesimarum ejusdem ordinis (§. 39.), atque ab e pendebit, & erit $= 1$, si $\frac{q}{\infty} = \frac{p}{\infty}$, in aliis casibus vel > 1, vel < 1.

149. His præmissis infero $a^{\frac{1}{\infty}}$ in serie A, $c^{\frac{m}{\infty}}$ in serie B, $f^{\frac{n}{\infty}}$ in serie C &c. esse $= 1 + \frac{q}{\infty}$, seu $= 1 + \frac{\mu p}{\infty}$, ubi $p = 1$, vel $= m$, vel n respective, pendebitque μ a basi logarithmica, & vicissim. Quare si in serie A, vel B, vel C determinetur $1 + \frac{\mu p}{\infty}$ seu $a^{\frac{1}{\infty}}$, vel $c^{\frac{m}{\infty}}$, vel $f^{\frac{n}{\infty}}$, determinabitur etiam a, vel c, vel f. Nam a, c, f & a valore ipsius $1 + \frac{\mu p}{\infty}$, seu potentiarum $a^{\frac{1}{\infty}}$, $c^{\frac{m}{\infty}}$, $f^{\frac{n}{\infty}}$ respective, & exponentium $\frac{1}{\infty}$, $\frac{m}{\infty}$, $\frac{n}{\infty}$ modulum complexorum pendet (§§. 138, 148). In serie D unitate proxime major numerus est $1 + \frac{1}{\infty}$, cui in seriebus C, B respondent $f^{\frac{n}{\infty}}$, $c^{\frac{m}{\infty}}$, & $a^{\frac{1}{\infty}}$ in serie

Digitized by Google

A, ob modulum = 1. Ergo in ſerie A eſt $a^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty}$; quare $\frac{\mu p}{\infty} = \frac{1}{\infty}$, & $\mu = 1$.

150. Hoc cognito dico generatim μ eſſe moduli reciprocam quantitatem. Eſt enim $\sqrt[\infty]{a}$ in ſerie A, $= \sqrt[\infty]{c^m}$ in ſerie B, adeoque & $\sqrt[\infty]{a}$, & $\sqrt[\infty]{c^m} = 1 + \frac{1}{\infty}$, ſeu $1 + \frac{1}{\infty}$ eſt reſpectu $\sqrt[\infty]{a}$, & reſpectu $\sqrt[\infty]{c^m}$ eadem quantitas. Enimvero $\sqrt[\infty]{a}$ ex ſerie A, & $\sqrt[m\infty]{c^m}$ in ſerie B habent eoſdem exponentes nempe $\frac{1}{\infty}$, $\frac{m}{\infty m}$, & $\sqrt[\infty]{a}$ ſeu $\sqrt[\infty]{c^m}$ per dicta $= 1 + \frac{1}{\infty}$; ergo $\sqrt[\infty m]{c^m} = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{\infty m}$ per §. 45, $= 1 + \frac{\mu}{\infty}$; eſt ergo hic $\frac{1}{m} = \mu$; ergo $\frac{1}{\mu} = m$, hoc eſt μ reciproca eſt moduli quantitas. Brevius idem conficitur ſic: $\sqrt[\infty]{c^n} = 1 + \frac{\mu p}{\infty} = 1 + \frac{1}{\infty}$; ergo $\frac{\mu p}{\infty} = \frac{1}{\infty}$. Eſt vero hic $p = m$; ergo $\frac{\mu m}{\infty} = \frac{1}{\infty}$, & $\mu m = 1$; adeoque $m = \frac{1}{\mu}$. Idem alterutro modo de modulo logarithmorum in C, aut alio quocunque ſyſtemate demonſtratur. Si igitur μ notum ſit, etiam modulus ignorari non poteſt.

151. Alias quidem jam dictum eſt modulum inter & baſim

basim nexum esse, nunc vero cujusmodi ille sit ope reciprocæ moduli quantitatis ostendemus, atque una rationem inveniendæ basis ex assumto pro arbitratu modulo, & contra, commonstrabimus. Cum sit per §. 148. $e^{\frac{p}{\infty}} = 1 + \frac{\mu p}{\infty}$; erit $e = \left(1 + \frac{\mu p}{\infty}\right)^{\frac{\infty}{p}}$; consequenter per §. 46 erit $e = 1 + \mu + \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{6}\mu^3 + \frac{1}{24}\mu^4$ &c. seu $= 1 + \mu + \frac{1}{1.2}\mu^2 + \frac{1}{1.2.3}\mu^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\mu^4$ &c. ex qua serie agnoscitur lex juxta quam fractiones progrediuntur. Igitur si modulus pro arbitrio assumatur, etiam habebitur μ, quæ est reciproca moduli quantitas, atque inde ope seriei inventæ eruetur e, seu basis systematis logarithmici, cujus modulus ad placitum assumtus fuit.

152. Cum sit $e^{\frac{p}{\infty}} = 1 + \frac{\mu p}{\infty}$; erit $\frac{p}{\infty} = l\left(1 + \frac{\mu p}{\infty}\right)$; est enim $\frac{p}{\infty}$ logarithmus ipsius $e^{\frac{p}{\infty}}$, adeoque & quantitatis $1 + \frac{\mu p}{\infty}$. Ulterius erit infinitum $\frac{p}{\infty} = l\left(1 + \frac{\mu p}{\infty}\right)^{\infty}$. Ponamus $\left(1 + \frac{\mu p}{\infty}\right)^{\infty} = 1 + r$; erit $1 + \frac{\mu p}{\infty} = (1 + r)^{\frac{1}{\infty}}$, & $\frac{p}{\infty} = \frac{1}{\mu}\left((1 + r)^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)$, & $\frac{\infty p}{\infty} = \frac{\infty}{\mu}\left((1 + r)^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)$.

Est

Est autem, ut dictum fuit, $\frac{\infty p}{\infty} = l\left(1 + \frac{\mu p}{\infty}\right)^{\infty}$, & $\left(1 + \frac{\mu p}{\infty}\right)^{\infty} = 1 + r$; adeoque $\frac{\infty p}{\infty} = l(1+r)$, & $l(1+r) = \frac{\infty}{\mu}\left((1+r)^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)$. Sed $(1+r)^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{r}{\infty} + \frac{1}{\infty} . \frac{1-\infty}{2\infty} . r^2 + \frac{1}{\infty} . \frac{1-\infty}{2\infty} . \frac{1-2\infty}{3\infty} . r^3$ &c. Notum vero est, quod, si major quantitas subtrahenda sit a minore, possit minor subtrahi a majore residuo existente negativo; quare pro $1-\infty$, $1-2\infty$ &c. scribere licet $\infty - 1$, $2\infty - 1$ &c. ita, ut hæ quantitates sint negativæ; ex quo porro sequitur, eas numero pari in se ductas signum habere affirmativum, impari negativum; quare series ultimo proposita in hanc degenerat: $1 + \frac{r}{\infty} - \frac{1}{\infty} . \frac{\infty - 1}{2\infty} . r^2 + \frac{1}{\infty} . \frac{\infty - 1}{2\infty} . \frac{2\infty - 1}{3\infty} . r^3$ &c. & cum præterea per §. 37. sit $\infty - 1 = \infty$, $2\infty - 1 = 2\infty$, adeoque $\frac{\infty - 1}{2\infty} = \frac{\infty}{2\infty} = \frac{1}{2}$ &c. transit series in hanc: $1 + \frac{r}{\infty} - \frac{1}{2\infty} r^2 + \frac{2}{6\infty} r^3 - \frac{6}{24\infty} r^4$ &c. ducta hac serie in $\frac{\infty}{\mu}$, & ablato $1 . \frac{\infty}{\mu}$, seu $\frac{\infty}{\mu}$, prodit $\frac{1}{\mu}\left(r - \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{4} r^4 \text{ &c.}\right)$, quæ series est $= \frac{\infty}{\mu}\left((1+r)^{\frac{1}{\infty}} - 1\right) = l(1+r)$. Exprimit ergo series hæc nume-

numeri $1 + r$ logarithmum ex illo ſyſtemate, in quo modulus eſt $\frac{1}{\mu}$, ſeu reciproca quantitas ipſius μ. Quodſi per $\frac{1}{\mu}$, ſeu modulum ſeries dividatur, ejusdem numeri $1 + r$ logarithmus hyperbolicus obtinebitur (§. 144). Idem emergit, ſi μ ponatur $= 1$ per §. 149, ſeu ſi $\frac{1}{\mu}$, aut modulus ſit 1 (§. 139.)

153. Si pro r ſumatur fractio, ſeries propoſita $r - \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{3} r^3$ &c. convergit, poteruntque ex ea logarithmi hyperbolici numerorum integrorum hac methodo elici. Fiat r primo $= \frac{1}{2}$, dein $= \frac{1}{3}$, ſeu quærantur ope ſeriei propoſitæ logarithmi hyperbolici $l(1 + \frac{1}{2})$, & $l(1 + \frac{1}{3})$, & ſumma horum logarithmorum erit logarithmus facti ex $1 + \frac{1}{2}$ in $1 + \frac{1}{3}$, ſeu $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, hoc eſt binarii. Porro $l(1 + \frac{1}{2}) + l2 = l3$: & quia $2 \times 2 = 4$, $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $\frac{5}{4} \times 4 = 5$, $2 \times 3 = 6$, $1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$, $\frac{7}{6} \times 6 = 7$, $2 \times 2 \times 2 = 8$, $3 \times 3 = 9$, $2 \times 5 = 10$, inveniri poterunt numerorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, atque ex his aliorum omnium logarithmi hyperbolici, qui ſi per $\frac{1}{\mu}$ (μ aſſumto pro arbitrio) multiplicentur, obtinentur logarithmi ſyſtematis, cujus modulus $\frac{1}{\mu}$, & cujus baſis e ex modulo, ſeu aſſumta quantitate μ invenitur per ſeriem expoſitam §. 151.

Digitized by Google

154. Ponamus jam $e^{\frac{\omega p}{\infty}}$ esse $= e^1$, seu ipsam basim logarithmicam, cujus logarithmus est 1; itaque $1 + r$ hoc casu est $= e$, & $r = e - 1$; quare si in serie nostra in locum r substituatur $e - 1$, prodit $\frac{1}{\mu}\left(\frac{e-1}{1} - \frac{(e-1)^2}{2} + \frac{(e-1)^3}{3} - \frac{(e-1)^4}{4}\ \&c.\right)$, quæ series erit $= l(1 + r)$, seu in hoc casu per dicta $= 1$, & per μ utrinque multiplicando, fiet $\mu = \frac{e-1}{1} - \frac{(e-1)^2}{2}$ &c. Ad eandem seriem devenitur via breviori hoc modo. Sit $e = 1 + b$; unde $e^{\frac{p}{\infty}} = 1 + \frac{\mu p}{\infty} = (1 + b)^{\frac{p}{\infty}}$. Si autem $\frac{p}{\infty} = \omega$; erit $(1+b)^{\omega}$ $= 1 + \omega b + \frac{\omega}{1} . \frac{\omega - 1}{2} . b^2 + \frac{\omega}{1} . \frac{\omega-1}{2} . \frac{\omega-2}{3} . b^3$ &c. & (neglectis infinitesimis altiorum ordinum) $= 1 + \omega b - \frac{\omega b^2}{2} + \frac{\omega b^3}{3} - \frac{\omega b^4}{4}$ &c. ergo, cum sit $1 + \frac{\mu p}{\infty} = (1 + b)^{\omega}$; erit $\frac{\mu p}{\infty} = \mu\omega = \omega b - \frac{\omega b^2}{2} + \frac{\omega b^3}{3} - \frac{\omega b^4}{4}$ &c, $\mu = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}$ &c. & loco b substituendo $e - 1$ prodit series præcedens.

155. Si e seu basis logarithmica, sit numerus integer, series pro μ fit divergens. Obtinetur vero convergens hoc modo.

modo. Quoniam $l(1+r) = \frac{1}{\mu}(r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 \&c.)$, si loco $+r$ ponatur $-r$, series proposita mutatur in hanc: $\frac{1}{\mu}\left(-r - \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \&c.\right)$ quæ subducta ex priore est $\frac{1}{\mu}$ $(2r + \frac{2}{3}r^3 + \frac{2}{5}r^5 + \frac{2}{7}r^7 \&c.) = \frac{2}{\mu}\left(r + \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} + \frac{r^7}{7} \&c\right).$ Cum autem series, ex qua subtractio facta est, sit $= l(1+r)$, & subducta sit $l(1-r)$; erit inventa per subtractionem $= l(1+r) - l(1-r)$, quæ quantitas est logarithmus functionis $\frac{1+r}{1-r}$; unde $l.\frac{1+r}{1-r} = \frac{2}{\mu}\left(r + \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} + \frac{r^7}{7} \&c\right).$ Et hæc est alia series, ope cujus dati numeri logarithmus investigari potest. Sit numerus datus c; erit $\frac{1+r}{1-r} = c$; unde $1 + r = c - cr$, & $c - 1 = r + rc$, ac $\frac{c-1}{1+c} = r$; igitur ex dato numero invenietur r. Erit autem r fractus numerus, si c sit unitate major, & series converget. Quodsi ergo c sit basis logarithmica, seu $= e$; erit $r = \frac{e-1}{e+1}$, & erit hoc casu $l.\frac{1+r}{1-r}$, seu le, vel 1 (cum logarithmus basis sit unitas) $= \frac{2}{\mu}\left(r + \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} + \frac{r^7}{7} \&c.\right)$, & substituendo $\frac{e-1}{e+1}$ in locum r, erit $1 = \frac{2}{\mu}\left(\frac{e-1}{e+1} + \frac{(e-1)^3}{3(e+1)^3} + \frac{(e-1)^5}{5(e+1)^5} + \&c.\right)$; porro multiplicando utrinque per μ; fiet $\mu = 2\left(\frac{e-1}{e+1} + \frac{(e-1)^3}{3(e+1)^3} + \frac{(e-1)^5}{5(e+1)^5} + \&c.\right)$, quæ eſt ſeries convergens, ſi e ſit major unitate.

156. Cum autem in ſyſtemate logarithmorum hyperbolicorum modulus, ſeu $\frac{1}{\mu}$ ſit 1, adeoque & μ, ſeu moduli quantitas reciproca ſit 1; calculo inito baſis logarithmorum hyperbolicorum invenitur eſſe 2, 718281828459O &c. Et cum in ſyſtemate logarithmorum Briggianorum, ſeu ordinariorum baſis ſit 10, hujus enim numeri logarithmus in Briggianis eſt unitas; erit in ſyſtemate vulgari μ ſeu moduli reciproca = 2, 30258509299 &c, & $\frac{1}{\mu}$ ſeu modulus = 0, 43429448190 &c.

157. Igitur ſi logarithmi hyperbolici per fractionem decimalem 0, 43429 &c. ſeu modulum multiplicentur, aut per 2, 30258 &c. dividantur, emergunt logarithmi ordinarii, qui nempe vulgo in uſu ſunt, & quorum 10 eſt baſis. Vice verſa ex vulgaribus logarithmis per contrarias operationes hyperbolici eliciuntur. Quodſi denique

dati

Digitized by Google

dati numeri inveniendus sit logarithmus systematis alterius, cujus modulus datur; id fiet, si dati numeri logarithmus ex tabulis vulgaribus excerptus per modulum suum dividatur, & quotiens per modulum datum multiplicetur. Divisione enim logarithmi vulgaris per modulum suum invenitur dati numeri logarithmus hyperbolicus, qui, si in modulum datum ducatur, dabit logarithmum quæsitum. Unde si numerus datus sit g, & lg logarithmus numeri g ex tabulis vulgaribus, b vero modulus datus; logarithmus numeri g moduli b ex vulgaribus logarithmis eruendus sic exprimetur $\frac{lg}{0.434294\ \&c.} \times b = \frac{b}{0.43429\ \&c.} \times lg = \frac{1}{0.43429\ \&c.} \times b \,.\, lg = 2.30258\ \&c.\ b \,.\, lg.$

158. Istud adhuc hic noto, μ, seu moduli reciprocam quantitatem in vulgari systemate esse logarithmum hyperbolicum denarii. Nam logarithmus vulgaris denarii est 1; hic itaque si per suum modulum dividatur, quotiens est logarithmus hyperbolicus denarii; quare $\frac{1}{0.43429\ \&c.}$ est logarithmus hyperbolicus denarii; est vero $\frac{1}{0.43429\ \&c.}$ $= \mu = 2.30258\ \&c$; ergo μ, seu moduli reciproca in vulgari systemate est logarithmus denarii ex systemate loga-

rithmorum naturalium, seu hyperbolico. Et generatim μ, seu reciproca moduli quantitas in quolibet systemate logarithmico est logarithmus hyperbolicus basis ejusdem systematis. Quæ autem Capite hoc de logarithmis dicta sunt, ingentem utilitatem præstabunt in calculo differentialium inverso, seu vulgo dicto integrali.

CAPUT X.

DE SUMENDIS QUANTITATUM LOGARITHMICARUM DIFFERENTIALIBUS PRIMIS.

§. Hucusque methodos inveniendi differentialia functionum algebraicarum tradidimus, si pauca illa sub finem Cap. 2[di] dicta excipias; nunc demum ex functionibus transcendentibus illam aggrediemur, quæ variabilis alicujus logarithmica audit.

159. Etsi vero jam Capite 2[do] dictum sit, variabilis cujusvis functionem & ipsam esse variabilem, tamen istud de logarithmicis facili negotio speciatim demonstratur. Cum enim series D Capite superiore vel tota, vel termini

qui-

Digitized by Google

quicunque ex hac ſerie inter quosvis limites comprehenſi poſſint interpolari in infinitum (§§. 142. 148.), tota ſeries, vel termini quivis inter certos limites poſiti ut diverſi valores ejusdem alicujus quantitatis, quæ dicatur P, conſiderari poſſunt; & tum patet, iſtis valoribus ipſius P in ſeriebus A, B, C &c. reſpondere ſuos reſpective terminos & expreſſiones. Et hi itaque termini ut valores ejusdem Q in eadem ſerie conſiderari poſſunt. Manentibus ergo iisdem modulo & baſi (§. 118.) in eadem videlicet ſerie A, vel B &c, P in ſerie D, & Q in ſeriebus A vel B reſpective mutabuntur; cum vero in Q baſis non mutetur, neceſſum eſt mutari exponentem, ut colligitur ex dictis ſub finem §. 138. Eſt autem exponens hic logarithmus quantitatis P, ſeu Q; quare quantitas P ſeu Q ejusque logarithmus variabiles ſunt, baſis vero, modulus, adeoque & reciproca moduli conſtantes (§. 51.). Sit jam P quævis variabilis, cujus valores reperientur in ſerie D interpolata per §. 142; adeoque & eis reſpondentes termini in ſeriebus A, B, C &c, & horum terminorum exponentes, ſeu logarithmi; qui adeo conſiderari poſſunt ut valores ejusdem logarithmi ipſi P convenientis; itaque hic logarithmus erit quantitas variabilis (§. 51.).

160. Ex his conſequitur omnes terminos in ſerie A

poſſe

Digitized by Google

posse ita exprimi a^x; adeoque in serie B ita: c^{mx}, in serie C vero ita: f^{nx}, & sic porro. Quodsi loco x substituatur $x + dx$, seu x logarithmus cum suo incremento logarithmico per dx designato; habebimus a^{x+dx}, c^{mx+mdx}, f^{nx+ndx}; atque illico apparet incrementa logarithmica in analogis logarithmis diversorum systematum esse inter se ut modulos, & siquidem ex. gr. dz sit incrementum logarithmicum systematis, cujus modulus est m, erit incrementum logarithmi hyperbolici $\frac{dz}{m}$.

161. Sed jam quæritur, qua ratione incrementum momentaneum logarithmi quantitatis variabilis P, quam deinceps y dicemus, exprimendum sit per differentiale ipsius y, seu per dy, sive quale capiat incrementum logarithmus quantitatis y tum, cum y capit incrementum dy; hoc enim, uti investigemus, nobis incumbit per datam Cap. 2do calculi differentialis notionem. Quoniam valores ipsius y sunt in progressione geometrica; adeoque incrementa proportionalia acquirunt; erit $dy : y$ ratio constans. Porro dz sit incrementum logarithmicum, quod etiam constans est ex natura progressionis Arithmeticæ; quare fiat ut dy ad y, ita dz ad quartam φ, quæ erit finita, & constans, nam erit $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{\varphi}$; sed $\frac{dy}{y}$ est constans ratio; ergo

&

& $\frac{dz}{\varphi}$. Et cum ſit dz conſtans, etiam φ conſtans ſit, oportet. Sit jam du differentiale logarithmicum ex alio ſyſtemate, & fiat ut ante dy ad y ut du ad quartam, quæ ſit ψ; erit $\frac{dy}{y} = \frac{du}{\psi}$; & vel inde etiam $\frac{dz}{\varphi} = \frac{du}{\psi}$, ac $dz : du = \varphi : \psi$; ſunt vero dz, du inter ſe ut moduli per §. 139; ergo etiam φ, ψ ſunt inter ſe ut moduli.

162. Verum non ſufficit nobis oſtendiſſe φ, & ψ ſe habere ut modulos, inſuper ipſas eſſe modulos demonſtratum ibimus. Oſtenſum eſt ſupra §. 149. eſſe $e^{\frac{p}{\infty}} = 1 + \frac{q}{\infty} = 1 + \frac{\mu p}{\infty}$. Eſt autem $\frac{p}{\infty}$ incrementum momentaneum exponentium, ſeu incrementum momentaneum logarithmicum, quod conſtans eſſe jam diximus: $\frac{q}{\infty}$ vero eſt incrementum momentaneum, quod capit unitas in ſerie numerorum naturalium conſiderata ut e^{0}, ſeu eſt incrementum quantitatis $e^{\frac{p}{\infty}}$, quam hic etiam per y deſignamus (§. 161.), & cujus logarithmus eſt $0 + \frac{p}{\infty}$. Ratio autem $\frac{q}{\infty} : 1$, ſeu $\frac{\mu p}{\infty} : e^{0}$ ea eſt, quam habent incrementa momentanea ſingulorum terminorum ad ſuos reſpective terminos per naturam progreſſionis geometricæ, in qua incremen-

tum

tum termini ſemper termino ſuo eſt proportionale. Quod ſi ergo dx, ut ante, dicamus incrementum momentaneum, ſeu differentiale logarithmicum, & dy differentiale quantitatis y, cui logarithmus convenit, habebimus $e^{dx} = 1 + dy$. Et cum ſit ſemper $dy : y = \frac{q}{\infty} : 1$; erit etiam ſemper $\frac{dy}{\mu} : y$, ſeu $dy : \mu y = \frac{q}{\mu \infty} : 1$. Eſt vero $\frac{p}{\infty} = \frac{q}{\infty \mu}$; ergo $\frac{dy}{\mu y} = \frac{p}{\infty} = dx$, hoc eſt, $\frac{1}{\mu} \times \frac{dy}{y} = dx$. Itaque quantitates ϕ, ψ §. prioris ſunt $= \frac{1}{\mu}$, ſeu ſunt æquales modulo ſyſtematis; & differentialia logarithmorum diverſorum ſyſtematum eidem numero naturali reſpondentium ſunt inter ſe ut moduli ſyſtematum directe, ſeu ut quantitates reciprocæ modulorum inverſe.

163. Quoniam $dx = d.ly$; per modo dicta erit $d.ly = \frac{1}{\mu} \times \frac{dy}{y}$. Habemus ergo regulam inveniendi differentiale primum logarithmi quantitatis alicujus variabilis per ipſum quantitatis hujus differentiale expreſſum, nempe: *quantitatis differentiale ducatur in modulum ſui logarithmi, & factum per ipſam quantitatem dividatur.* Et quia logarithmi hyperbolici modulus eſt unitas; logarithmi hyperbolici quantitatis propoſitæ ſimplicis differentiale primum invenitur,

ſi

Digitized by Google

si propositæ quantitatis differentiale per ipsam quantitatem dividatur. Agemus autem deinceps de logarithmis quantitatum propositarum hyperbolicis differentiandis, cum horum differentialia facile in differentialia aliorum logarithmorum mutentur per regulam priorem.

164. Ex dictis sequitur differentiale primum ipsius $l(a \pm x)$ esse $= \pm \frac{dx}{a \pm x}$. Et quia $l.ax = la + lx$; erit $d(l.ax) = d.la + d.lx = \frac{dx}{x}$. Et cum $l.\frac{a}{x}$ sit $= la - lx$; erit $d\left(l.\frac{a}{x}\right) = -\frac{dx}{x}$, & $d\left(l.\frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{x}$. Item quia $l.x^m = mlx$; erit $d(l.x^m) = \frac{mdx}{x}$, & quia $l.\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n}lx$; erit $d(l.\sqrt[n]{x^m}) = \frac{mdx}{nx}$. Ex his autem exemplis facile colligitur differentiale primum logarithmi variabilis x, atque cujuslibet functionis hujus variabilis esse compositum ex dx, & quantitate finita, atque algebraica functione ipsius x, adeoque ita exprimi posse: Pdx, uti expressimus functionum algebraicarum unius variabilis differentialia prima (§. 86.).

165. Cæterum mirandum haud est, quod differentiale logarithmorum lx, & $l.ax$ idem plane sit. Nam, cum

differentiale quantitatum x, & $a+x$ idem sit; necessum est, ut & logarithmi lx, $l.ax$ idem habeant differentiale; est enim $l.ax = la + lx$. Ex eadem ratione differentiale logarithmorum lx, $l.\frac{x}{a}$, & $l.\frac{1}{x}$, ac $l.\frac{a}{x}$ idem est. Nam $l.\frac{x}{a} = lx - la$, & $l.\frac{a}{x} = la - lx$, atque $l.\frac{1}{x} = l.1 - lx = 0 - lx$, quia logarithmus unitatis $= 0$ per §. 139.

166. Sint ad differentiandum propositi logarithmi plurium variabilium: $1^{\circ}\ l(x \pm y)$, $2^{do}\ l(xy)$, $l\left(\frac{x}{y}\right)$, $l\left(\frac{xy}{z}\right)$, $3^{tio}\ l.(x^2 y^2 + xz)^m$. Ponamus $x \pm y = z$, adeoque $l(x \pm y) = lz$. Est autem $dlz = \frac{dz}{z}$ per §. 142, & $dz = dx \pm dy$; ergo $d.l(x \pm y) = \frac{dx \pm dy}{x \pm y}$. Secundo $l(xy) = lx + ly$, $l\left(\frac{x}{y}\right) = lx - ly$; $l\left(\frac{xy}{z}\right) = lx + ly - lz$; quare singulos terminos seorsim differentiando prodeunt differentialia quæsita. Potest vero etiam hic assumi $xy = p$, $\frac{x}{y} = q$, $\frac{xy}{z} = r$; & erit $xdy + ydx = dp$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = dq$, $\frac{z(xdy + ydx) - xydz}{z^2} = dr$; unde

d.

Digitized by Google

$d.l(xy) = \frac{dp}{p} = \frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x}$, $d.l\left(\frac{x}{y}\right)$ $= \frac{dq}{q} = \frac{ydx - xdy}{y^2} : \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{xy} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$, $d.l$ $\left(\frac{xy}{z}\right) = \frac{dr}{r} = \frac{z(xdy + ydx) - xydz}{z^2} : \frac{xy}{z} =$ $\frac{zxdy + zydx - xydz}{xyz} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$. Tertio ſit x^2y^2 $+ xz = t$; erit $(x^2y^2 + xz)^m = t^m$, & $l.(x^2y^2 + xz)^m$ $= l.t^m = mlt$; adeoque $d.mlt = \frac{mdt}{t} = md\frac{(x^2y^2 + xz)}{x^2y^2 + xz}$, quod eſt deſideratum differentiale.

167. Deſignet jam X functionem algebraicam quotcunque variabilium, x, y, z &c. ſub communi exponente aliquo m, ita, ut functio elevata ad potentiam exponentis m, & ducta in conſtantem a ſit aX^m, & $l.X^m + la$ ejus logarithmus; & erit $d(l.X^m + la) = \frac{mdX}{X}$, ut ſatis patet per hucusque dicta. *Eſt ergo differentiale primum logarithmi naturalis variabilis unius vel plurium fractio, cujus numerator eſt factum ex exponente functionis in differentiale primum quantitatis ſub exponente: denominator vero eſt ipſa quantitas ſub exponente contenta.* Valet autem etiam converſa hujus, videlicet *fractionem, cujus numerator differentiale primum denominatoris ductum in conſtantem, eſſe differentiale pri-*

num summæ vel differentiæ logarithmi constantis alicujus, & logarithmi naturalis denominatoris elevati ad potentiam, cujus exponens sit coëfficiens constans numeratoris, modo denominator functio algebraica sit & rationalis. Hæc conversa ita ostenditur. Sit fractio $\frac{am X^{m-1} dX}{X^m}$, ubi m est numerus integer positivus, dico hanc fractionem esse differentiale primum summæ logarithmi naturalis $\pm lc$, & logarithmi naturalis quantitatis X^{am}. Nam $l.X^{am} = am\,lX$, & $d.l.X^{am} \pm d.lc = \frac{am\,dX}{X}$; est autem & $\frac{am X^{m-1} dX}{X^m}$ facta actu divisione $= am\,X^{-1}\,dX = \frac{am\,dX}{X}$; quare fractio rationalis $\frac{am X^{m-1} dX}{X^m}$ est differentiale primum logarithmi naturalis ipsius X^{am}, addito vel demto logarithmo alicujus constantis. Cæterum fractio adducta etiam differentiale quantitatis $l.X^{am} \pm lc \pm b$ esse utique potest, ut notum est.

168. Hucusque differentiale primum logarithmi functionis algebraicæ variabilis unius, vel plurium investigavimus, nunc differentialia prima functionum ipsorum logarithmorum inveniendæ sunt, ac principio quidem functiones illas, quæ sint quodammodo algebraicæ, nempe

per

Digitized by Google

per ordinarias algebræ operationes, additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem, elevationem ad potentiam, & radicis extractionem ex logarithmis, aut quantitatibus variabilibus algebraicis cum logarithmis permixtis ortas: dein tranſcendentes, quales ſunt logarithmorum logarithmi tractabimus. Sint igitur ad differentiandum propoſitæ quantitates: 1ª $lx . ly$, 2da $\frac{lx}{ly}$, 3tia $x\,ly$, 4ta $x\,ly\,lz$, 5ta $\frac{x\,ly}{lz}$, 6ta $\frac{ly}{x\,lz}$. Ponamus $lx = t$, $ly = v$, $lz = u$; & mutabuntur propoſitæ logarithmicæ quantitates in has tu, $\frac{t}{v}$, xv, xvu, $\frac{xv}{u}$, $\frac{v}{xu}$. Harum differentialia prima ſunt: $t\,dv + v\,dt$, $\frac{v\,dt - t\,dv}{v^2}$, $x\,dv + v\,dx$, $xv\,du + xu\,dv + vu\,dx$, $u\frac{(x\,dv + v\,dx)}{u^2} - \frac{xv\,du}{u^2}$, $\frac{xu\,dv - v(x\,du + u\,dx)}{x^2 u^2}$. Eſt autem $dt = \frac{dx}{x}$, $dv = \frac{dy}{y}$, $du = \frac{dz}{z}$ per §. 163; quare in locum t, v, u, & dt, dv, du ſubſtituendo lx, ly, lz, & $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$, $\frac{dz}{z}$ obtinebimus quæſita differentialia prima logarithmica propoſitarum quantitatum, ſuntque ſequentia:

1mum.

Digitized by Google

1mum. $\frac{dy}{y}lx + \frac{dx}{x}ly = \frac{xdylx + ydxly}{yx}$

2dum. $\frac{\frac{dx}{x}ly - \frac{dy}{y}lx}{(ly)^2} = \frac{ydxly - xdylx}{xy(ly)^2}$

3tium. $\frac{xdy}{y} + dxly = \frac{xdy + ydxly}{y}$

4tum. $\frac{xdzly}{z} + \frac{xdylz}{y} + dxly \,.\, lz = \frac{xydzly + xzdylz}{yz} + \frac{yzdxlylz}{yz}$

5tum. $\left(\frac{xdy}{y} + dxly\right)\frac{lz}{(lz)^2} - \frac{xdzly}{z(lz)^2} = \frac{z(xdy + ydxly)lz}{yz(lz)^2} - \frac{xydzly}{yz(lz)^2}$

6tum. $\frac{\frac{xdylz}{y} - \left(\frac{xdz}{z} + dxlz\right)ly}{x^2(lz)^2} = \frac{xzdylz - y(xdz + zdxlz)ly}{x^2yz(lz)^2}$

169. Sit ad differentiandum propoſita quantitas $(lx)^2$ ſeu quadratum logarithmi. Cum $(lx)^2$ ſit $= lx \,.\, lx$; erit per §. prioris exemplum primum $d\left((lx)^2\right) = \frac{dx}{x}lx + \frac{dx}{x}lx = \frac{2dx}{x}lx$. Et cum ſit $(lx)^3 = lx \,.\, (lx)^2$; erit per modo dicta $d\left(lx \,.\, (lx)^2\right) = d\left((lx)^2\right)lx +$

dlx

$dlx(lx)^2$; Est vero $d\left((lx)^2\right) = \frac{2dx}{x} lx$, & $dlx = \frac{dx}{x}$; quare $d\left((lx)^3\right) = \frac{2dx}{x}(lx)^2 + \frac{dx}{x}(lx)^2 = \frac{3dx}{x}(lx)^2$, & ita facile probabitur esse generatim $d\left((lx)^m\right) = \frac{mdx}{x}(lx)^{m-1}$, ubi m potest designare numerum affirmativum, negativum, integrum vel fractum.

170. Cæterum ex dictis ultimis duobus §§. collatis cum regulis differentiandi functiones algebraicas facile colligitur, quanta sit analogia inter modum inveniendi differentialia prima functionum algebraicarum logarithmicarum quantitatum, & ipsarum algebraicarum proprie sic dictarum, cujus analogiæ fundamentum est, quod quantitas variabilis logarithmica simplex potest simpliciter ut simplex, seu ut simplex naturalis considerari. Itaque in differentiandis functionibus quasi algebraicis logarithmicarum quantitatum locus est regulis differentiandi functiones algebraicas, modo differentiale variabilis simplicis logarithmicæ naturæ suæ convenientem nanciscatur expressionem; variabilis enim simplicis naturalis ex. gr. ipsius x differentiale est dx, logarithmicæ vero, seu ipsius lx differentiale est $\frac{dx}{x}$. Sed nunc ad functiones logarithmicas quantitatum logarithmicarum progrediamur.

171.

Digitized by Google

171. Sit ergo differentiale primum quantitatis llx inveniendum, seu sit logarithmus logarithmi differentiandus. Ponatur $lx = t$; & erit $llx = lt$. Jam quoniam $d.lt = \frac{dt}{t}$; erit $d.llx = \frac{dt}{t}$. Et substituendo $\frac{dx}{x}$ in locum dt, & lx in locum t, fiet $d.llx = \frac{dx}{xlx}$. Sit inveniendum $d.lllx$. Assumo $llx = t$; & erit $lllx$ seu $l^3x = lt$, & $d.l^3x = \frac{dt}{t}$. Est vero dt per casum præcedentem $= \frac{dx}{xlx}$; ergo $\frac{dt}{t}$, seu $d.l^3x = \frac{dx}{xlxllx}$. Ita autem porro procedendo inveniemus $d.l^mx = \frac{dx}{x\,l^1x\,l^2x\,l^3x - - l^{m-1}x}$, ubi m est numerus integer affirmativus. l^mx ergo tractari potest uti logarithmus simplex: & scribendo $l.l^{m-1}x$ considerabitur $l^{m-1}x$ ut quantitas simpliciter simplex, seu ut algebraica simplex. Sicut enim differentiale primum logarithmi hyperbolici talis quantitatis æquale est quantitatis differentiali per ipsam quantitatem diviso, ita differentiale primum logarithmi hyperbolici quantitatis $l^{m-1}x$, seu $d.l^mx$ æquale est differentiali primo quantitatis $l^{m-1}x$, quod est $\frac{dx}{x\,l.x\,l^2x - - l^{m-2}x}$, diviso per ipsam quantitatem $l^{m-1}x$.

172. Proponatur differentianda quantitas logarithmica $l.\, x\, lx$, ubi l afficit totam $x\, lx$. Est ergo $l.\, x\, lx = lx + l^2 x$; adeoque sine difficultate juxta §§. priorem, & 142. ejus eruetur differentiale primum. Hujusmodi ergo expressiones ad casus præcedentes revocantur.

173. Cum juxta §. 170. functiones logarithmorum, quas algebraicas dixi, in sumendis differentialibus primis uti algebraicæ tractentur, atque adeo ex. gr. $l\, x$ ut x, $\frac{dx}{x}$ tanquam dx consideretur; clarum est, quod, si occurrat differentialis aliqua expressio logarithmis simplicibus permixta, in qua sint mera differentialia prima, clarum, inquam, est, quod tum substituto x in locum lx, & dx in locum $\frac{dx}{x}$ differentialis hæc expressio transformetur in aliam, in qua, si nullum differentiale logarithmicum occurrat, & adhibitis in superioribus criteriis deprehendatur vere ortum duxisse ex differentiatione functionis algebraicæ; proposita differentialis quantitas ortum duxisse censenda est ex differentiatione functionis logarithmorum, quam algebraicam diximus. Si occurrat fractio, in cujus denominatore sit logarithmus, vel logarithmi logarithmus, sit autem fractio exemto gradus summi logarithmo ex denominatore, ejusdem logarithmi summi differentiale

primum; est fractio proposita differentiale primum logarithmi, qui logarithmo summi gradus major est uno gradu. Nam ex §. præced. logarithmi cujusvis gradus differentiale primum æquale est differentiali primo logarithmico logarithmi uno gradu inferioris, si is ut variabilis algebraica simplex consideretur, seu $d\,.\,l^m x = d\,.\,ly$, si $y = l^{m-1} x$.

174. Functiones logarithmorum, quas algebraicas dixi, diversarum variabilium ad differentiandum propositæ, juxta §. 170. tractantur ut diversarum variabilium functiones algebraicæ. Sic $lx\,ly$, $\frac{lx}{ly}$ tractatur ut $t\,v$, $\frac{t}{v}$, ubi $lx = t$, $ly = v$, vide §. 168. Porro $\frac{dx}{x} = \frac{1}{x}\,dx$, & $dy = \frac{1}{y}\,dy$; quare generatim $P\,dx + Q\,dy$ exprimit etiam differentiale primum functionis quasi algebraicæ logarithmorum simplicium duarum variabilium, & $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ trium variabilium, atque P, Q, R sunt quantitates finitæ, seu functiones variabilium duarum x, y in prima, trium vero x, y, z in secunda formula, & tales quidem, quæ nullam contineant expressionem differentialem, etsi non sint proprie algebraicæ, cum logarithmos complectantur.

CA-

Digitized by Google

CAPUT XI.

DE INVENIENDIS DIFFERENTIALIBUS PRIMIS QUANTITATUM EXPONENTIALIUM.

175.

Quantitas habens exponentem variabilem exponentialis audit, ſic a^x eſt quantitas exponentialis. Poteſt vero quantitas habens talem exponentem variabilem vel conſtans eſſe ut a^x vel variabilis ut x^y. In ſeriebus, quas ſub principium Cap. 8^{vi} propoſuimus, exponens eſt variabilis, quantitas ſub exponente conſtans; itaque generaliter per a^x termini talis ſeriei exprimi poſſunt, ut jam etiam ſub principium Cap. præced. innuimus, ſeu per quantitatem exponentialem. Quare ſi proponatur hujusmodi quantitas exponentialis, in qua videlicet quantitas elevata ad potentiam variabilem conſtans ſit ut b^x, tum, ſi pro logarithmo ipſius b aſſumatur unitas, hoc eſt, ſi ponatur $lb = 1$; erit x logarithmus quantitatis b^x, ſeu x cuicunque quantitati reſpondentem logarithmum in ſyſtemate, cujus baſis ſit b, ſignificabit. Quodſi autem concipiatur logarithmus ipſius b, qui non ſit unitas, accipi

Digitized by Google

ex ſyſtemate aliquo logarithmico ex. gr. vulgari, ſeu Briggiano, vel ex Nepperiano, ſeu logarithmorum hyperbolicorum, tali caſu logarithmus quantitatis exponentialis b^x erit $x\,lb$, ut notum eſt. Si ſit $lb = 1$; erit $x\,lb = x$; unde præcedens caſus ſub hoc comprehenditur, & comprehendi debet, cum generatim verum ſit, logarithmum potentiæ obtineri, ſi logarithmus radicis in exponentem potentiæ ducatur.

176. In hujus formæ x^y exponentialibus x non poteſt concipi ut baſis ſyſtematis logarithmici, cum baſis ſit conſtans in eodem ſyſtemate, x vero quantitas variabilis. Eſt tamen $l.\,x^y = y\,l\,x$, ubi $l\,x$ eſt logarithmus variabilis ex ſyſtemate aliquo ſive hyperbolico, ſive alio deſumptus. Sit hujus ſyſtematis baſis e; erit $y\,lx = y\,l\,x\,l\,e$. Eſt autem $y\,l\,x\,l\,e$ logarithmus potentiæ $e^{y\,lx}$; unde $e^{y\,lx} = x^y$.

177. Exponentio exponentialis quantitas eſt illa, cujus exponens exponente variabili gaudet, ſeu cujus exponens eſt quantitas exponentialis. Sic a^{b^x}, a^{x^y} ſunt exponentio exponentiales quantitates, item x^{y^z}. Vocantur etiam hæ quantitates exponentiales altioris gradus vel ordinis. Notandum autem ex. gr. a^{x^y} non eſſe idem ac $(a^x)^y$. Nam in a^{x^y} exponens x elevatus eſt ad potentiam

tiam y; eſt enim y exponens ipſius x: in expreſſione autem $(a^x)^y$ ſignificatur ipſam potentiam a^x porro ad potentiam y elevari; unde $(a^x)^y = a^{xy}$. Sic $2^{2^3} = 2^8$; & $(2^2)^3 = 4^3 = 2^{2\cdot3} = 64$. Cum ſit $l.x^y = y\,lx$, & $a^{y\,lx} = y\,lx\,.\,la$; erit $l.a^{x^y} = y\,lx\,la$. Eſt itaque $l.x^{y^z} = z\,ly\,lx = z\,ly\,lx\,le$, ubi e eſt baſis ſyſtematis, ad quod logarithmus ipſius x^{y^z} referri ſupponitur, ſeu ejus ſyſtematis, ex quo logarithmi ly, lx ſumuntur. Eſt ergo $z\,ly\,lx\,le$ logarithmus quantitatis $e^{z\,ly\,lx}$; unde $e^{z\,ly\,lx} = x^{y^z}$. Si ponatur $x^y = z$, a^{x^y} mutatur in a^z, adeoque ſimpliciorem formam nanciſcitur.

178. Cum igitur per §. 154. ſit ex. gr. $l.b^x = x\,lb$; erit $d.lb^x = d.x\,lb = lb\,dx + x.d.lb$; ſed $d.lb = 0$, quia lb eſt conſtans; ergo $d.x\,lb = lb\,dx$. Rurſum quia per §. 176. eſt $l.x^y = y\,lx$; erit $d.lx^y = lx\,dy + y\,d.lx$; eſt vero $d\,lx$, ſi lx ſit logarithmus artificialis ſeu non ſit ex ſyſtemate hyperbolico, & m modulum ſignificet, $= \frac{m\,dx}{x}$ per §. 163; ſi vero lx ſit logarithmus hyperbolicus, eſt $d.lx = \frac{dx}{x}$ per §. cit; ergo $d.lx^y = lx\,dy + \frac{my\,dx}{x}$ in primo caſu, & $= lx\,dy + \frac{y\,dx}{x}$ in ſecundo caſu. Quia vero non logarithmorum tantum quantitatum exponentialium,

Digitized by Google

lium, ſed ipſarum exponentialium differentialia inveſtiganda ſunt; ponatur $b^x = y$; erit $d.\,b^x = dy$; eſt vero $ly = x\,lb$, & $d.\,ly$ ſeu $\frac{m\,dy}{y} = lb\,dx$, adeoque $\frac{y\,lb\,dx}{m} = dy$, & poſita b^x pro y; $\frac{b^x\,dx\,lb}{m} = dy = d.\,b^x$, vel ſi utamur logarithmis hyperbolicis, $dy = b^x\,dx\,lb$.

179. Ponatur etiam $x^y = z$; erit $d.\,x^y = dz$. Eſt vero $lz = y\,lx$, & $d.\,lz$, ſeu $\frac{m\,dz}{z} = lx\,dy + \frac{m\,y\,dx}{x}$; adeoque $\frac{z\,lx\,dy}{m} + \frac{z\,y\,dx}{x} = dz$, ac poſito $z = x^y$, eſt $\frac{x^y\,lx\,dy + m\,x^{y-1}\,y\,dx}{m} = dz = d.\,x^y$, vel ſi utamur logarithmis hyperbolicis, ommittitur m, deinçeps autem concipiemus nos hic omnino uti hyperbolicis. Porro inventum differentiale etiam ita eruitur. Quoniam per §. 176. $x^y = e^{y\,lx}$, & $d.\,e^{y\,lx}$ per dicta ſub finem §. prioris $= e^{y\,lx}\,d(y\,lx)\,le$; erit $d.\,x^y = e^{y\,lx}\,d(y\,lx)\,le$. Eſt vero $e^{y\,lx} = x^y$ per §. 176. cit. & $d(y\,lx) = dy\,lx + \frac{y\,dx}{x}$, & $le = 1$; ergo ſubſtitutione facta, $d.\,x^y = x^y\left(dy\,lx + \frac{y\,dx}{x}\right) = x^y\,dy\,lx + x^{y-1}\,y\,dx$.

180. Ex dictis hucusque regula differentiandi exponentia-

nentiales quantitates primi gradus deducitur, & est hujusmodi: *differentiale primum quantitatis exponentialis primi gradus, est factum ex ipsa quantitate exponentiali ducta in differentiale logarithmi hyperbolici quantitatis exponentialis.* Componitur enim ex. gr. $a^x\,dx\,la$ differentiale ipsius a^x ex a^x, $d\,x\,l\,a$; est vero a^x ipsa quantitas exponentialis ad differentiandum proposita, $la\,dx$ vero differentiale hyperbolici logarithmi $x\,l\,a$, qui est logarithmus ipsius ad differentiandum propositæ quantitatis a^x : hyperbolici ajo logarithmi; nam si ponatur $a^x = y$, & sumtis logarithmis $x\,l\,a = l\,y$ (non supponantur autem sumti hyperbolici) fiet per §. 163. $d\,.\,x\,l\,a$, seu $l\,a\,d\,x = \frac{m\,d\,y}{y}$, ubi m est modulus systematis, ex quo logarithmi sumti sunt; itaque ulterius $y\,l\,a\,d\,x$ seu $\frac{a^x\,l\,a\,d\,x}{m}$ erit $= d\,y = d\,.\,a^x$; quam ob rem non obtinetur $a^x\,l\,a\,d\,x$ pro differentiali exponentialis a^x, nisi in casu $m = 1$, hoc est, nisi sumantur logarithmi hyperbolici vide cit. §. 163, & jam dicta §. 178. Regulas inveniendi differentialia exponentialium quantitatum altiorum graduum vocabulis non exprimimus, satiusque censemus, ut in eis inveniendis eo procedatur modo, qui deinceps exponetur, aut formulæ differentialium generales regularum loco adhibeantur.

181.

Digitized by Google

181. **Ante vero, quam ad invenienda differentialia prima exponentialium graduum altiorum progrediamur,** id quod hucusque fecimus, non prætermittendum judicamus, videlicet, ut ostendamus qua ratione variabili x incrementum dx capiente, ejusdem variabilis functio, quæ sit quantitas exponentialis suum capiat incrementum. Sit igitur variabilis x functio exponentialis $= a^x$. Ponamus $a^x = y$, & $x\,la = ly$. Capiat jam x incrementum dx. Igitur in functione posito $x + dx$ pro x, prodit a^{x+dx}; quare variabili x capiente incrementum dx, functio cum suo incremento erit $a^{x+dx} = y + dy$, sumtis vero logarithmis, erit $(x + dx)\,la = ly + \frac{dy}{y}$. Nam accipiente y incrementum dy, logarithmus ipsius y seu ly incrementum $\frac{dy}{y}$ accipit. Jam subductis utrinque æqualibus $x\,la$, ly, fiet $dx\,la = \frac{dy}{y}$, & $y\,dx\,la$, seu $a^x dx\,la = dy = d.a^x$.

182. Quoniam per §. 177. a^{x^y} poni potest $= a^z$, sit vero $d.a^z = a^z\,dz\,la$ per §. 180, $= a^{x^y}\,d(x^y)\,la$; erit $d.a^{x^y} = a^{x^y}\,d(x^y)\,la$. Est vero $d(x^y) = x^y\,lx\,dy + x^{y-1}\,y\,dx$ (§. 179.); quare $d.a^{x^y} = a^{x^y}\,x^y\,lx\,la\,dy + a^{x^y}\,x^{y-1}\,y\,la\,dx$. Si quantitatis exponentialis exponens primus non

sit

fit variabilis, sed constans ex. gr. b; tum z erit $= b^y$. Est autem $d(b^y) = b^y\, lb\, dy$ per §. 180; quare $d\,.\,a^{b^y} = a^{b^y}\, b^y\, lb\, la\, dy$. Itaque $d\,.\,a^{a^x} = a^{a^x}\, a^x\, la\, la\, dx$, & si a consideretur ut basis logarithmica systematis hyperbolici; erit $la = 1$, & $d\,.\,a^{a^x} = a^{a^x}\, a^x\, dx$.

183. Si quærendum sit differentiale proximum quantitatis p^{r^s}, quæ sit exponentialis secundi ordinis trium variabilium; ponatur rursum $r^s = z$, ut sit $p^{r^s} = p^z$; erit $d\,.\,p^z = p^z\, lp\, dz + p^{z-1}\, z\, dp$, & $dz = r^s\, lr\, ds + r^{s-1}\, s\, dr$; quare substitutione facta, $d\,.\,p^{r^s} = p^{r^s}\, r^s\, lp\, lr\, ds + p^{r^s}\, s\, lp\, r^{s-1}\, dr + p^{r^s-1}\, r^s\, dp$. Est vero $p^{r^s-1} = \frac{p^{r^s}}{p}$; unde $d\,.\,p^{r^s} = p^{r^s}\, r^s \left(lp\, lr\, ds + \frac{s\, lp\, dr}{r} + \frac{dp}{p} \right)$. Cæterum ex legibus & methodis differentiandi exponentialia facile colligitur, etiam hic differentiale primum functionis alicujus variabilis ex. gr. x esse $P\,dx$, & duarum variabilium x, y, esse $P\,dx + Q\,dy$, ubi P, & Q nulla differentialia involvunt.

V CA-

CAPUT XII.

DE QUANTITATUM LOGARITHMICARUM ET EXPONENTIALIUM DIFFERENTIALIBUS ALTIORIBUS.

184.

Qui hucusque expoſita perſpexerit, tenueritque, huic, uti multis altiorum differentialium inveniendorum leges earum, quas tractamus, functionum exponam, neceſſum haud putem. Quare unum alterumve exemplum ſufficiet ad rem præſentem expediendam. Inveniendum ſit differentiale ſecundum functionis $x\,ly$. Hujus functionis differentiale primum per dicta Cap. X. eſt $\frac{x\,dy}{y} + ly\,dx$. Porro ulterius differentiale ipſius $\frac{x\,dy}{y}$ eſt $\frac{y(x\,ddy + dy\,dx) - x\,dy^2}{y^2}$, & ipſius $ly\,dx$ differentiale eſt $ly\,ddx + \frac{dx\,dy}{y}$, ubi ly tanquam una, dx tanquam altera variabilis functionis $ly\,dx$ conſideratur. Quare differentiale ſecundum functionis $x\,ly$ eſt: $\frac{y(x\,ddy + dy\,dx) - x\,dy^2}{y^2}$ $+ ly\,ddx + \frac{dx\,dy}{y}$.

Digitized by Google

185. Quæritur differentiale ſecundum quantitatis exponentialis a^x. Quoniam per Caput præcedens hujus functionis exponentialis differentiale primum eſt $a^x\, l a\, d x$, ut habeatur differentiale proximum ipſius $a^x\, l a\, d x$, ſeu ſecundum quantitatis a^x, conſideretur $a^x\, l a\, d x$ ut compoſita ex tribus partibus ſeu factoribus a^x, $l a$, $d x$, quorum duo a^x, $d x$ ſunt variabiles, & procedatur juxta leges differentiandi functionem algebraicam duarum variabilium, habita tamen ratione naturæ variabilium; itaque habebitur primo $l a\, d x\, d . a^x + a^x\, l a\, d d x$. Jam vero in locum $d . a^x$ ſubſtituendo $a^x\, l a\, d x$ fiet ſecundo $a^x\, l a^2\, d x^2 + a^x\, l a\, d d x$, quod eſt differentiale ſecundum quæſitum quantitatis exponentialis a^x. Et ſimili plane modo procedendum in aliis caſibus.

186. Si ex. gr. $d x$ ſupponatur conſtans, evaneſcent termini, quorum coeficiens eſt $d d x$, ut jam alias dictum eſt.

CAPUT XIII.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM TRANSCENDENTIUM A CIRCULO PENDENTIUM.

187.

Sit curva aliqua AB in plano descripta, atque in eodem plano recta infinita CD duci concipiatur, quæ pro axe curvæ habeatur, & in hac recta assumatur punctum aliquod E ad arbitrium pro initio abscissarum, ex duobus vero punctis curvæ infinite vicinis $F\,f$ duæ rectæ normales FG, fg cogitando demittantur ad axem CD: præterea ex puncto F demittatur ad rectam fg perpendiculum Fh, quod adeo erit parallelum axi CD, & cum Fh, Gg sint parallelæ, & inter parallelas, erit quoque $Fh = Gg$. His positis dicatur EG abscissa, FG, fg ordinatæ, & si EG dicatur x, & FG dicatur y, cum abscissæ & ordinatæ sint variabiles; erit $Gg = Fh = dx$, & $hf = dy$, & areola $GFfg$ erit elementum areæ Hgf, cum hæc ex meris talibus areolis aggregata concipi possit, uti innuunt lineæ punctis expressæ. Est vero $GFfg = y\,dx + \frac{1}{2}dx\,dy$, seu $= y\,dx$, cum $\frac{1}{2}dx\,dy$

sit

ſit quantitas infinite parva relata ad $y\,dx$; quare contemto triangulo Ffh, quod eſt $= \frac{1}{2}\,dx\,dy$; pro areæ elemento rectangulum $FhgG = y\,dx$ adhibetur; unde abſciſſa x & ordinata y ſumentibus incrementum, ſeu x tranſeunte in $x + dx$, & y in $y + dy$, area HFG, quæ eſt functio ex x, & y pendens, tranſit in $HFG + y\,dx$; unde areæ differentiale eſt $y\,dx$, dum abſciſſæ differentiale eſt dx, ordinatæ dy. Et quamvis $y\,dx$, pendere videatur a duabus variabilibus x, y; tamen in caſu particulari ex data æquatione curvæ a ſola x pendet, cum y ſit functio ipſius x.

188. Porro Ff eſt elementum arcus Hf curvæ AB, cum arcus Hf ex meris talibus arcubus perexiguis & evaneſcentibus componatur. Poteſt autem Ff pro recta haberi, cum ſit puncti f curvam AB fluxu continuo deſcribentis velut quidam paſſus, in quo directio eſt unica; unde $Ff = \sqrt{(Fh^2 + fh^2)}$. Pendet ergo arcus HF a coordinatis ad ipſum pertinentibus, ſeu ab abſciſſa x, & ordinata y, earumque functio eſt (§. 54), ſique fiat $x + dx$, & $y + dy$, fit etiam $HF + \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; unde $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ſeu Ff eſt differentiale arcus HF ad abſciſſam EG, & ordinatam GF pertinentis. Quod vero §. priore annotavimus, & hic locum habet, videlicet $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ videri

deri

Digitized by Google

deri pendere a duabus variabilibus x, y, attamen in casu particulari a sola x pendere, ut mox apparebit.

189. In circulo sumta diametro aliqua AB pro axe, & initio abscissarum in extremo ex. gr. A diametri AB, erit abscissa & ordinata ad arcum AF pertinens arcus ejusdem sinus versus AG, & sinus rectus GF, & arcus AF erit functio sinus versi, & sinus recti. Solent autem in circulo præterea considerari cosinus GC = FD, tangens AI, cotangens KE, secans CI, cosecans CK, nec non cosinus versus ED, quæ lineæ omnes una cum sinu verso & recto, cum a se pendeant, earum singularum functio est arcus ille, ad quem pertinent. Quod vero a se invicem pendeant, inde patet, quia omnes sunt functiones sinus versi x. Sit enim radius AC $= a$; erit sinus GF $= \sqrt{(2ax - x^2)}$, cosinus GC $= a - x$, tangens AI $= \frac{a\sqrt{(2ax - x^2)}}{a - x}$, cotangens $\frac{a(a - x)}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, secans $= \frac{a^2}{a - x}$, cosecans $= \frac{a^2}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, cosinus versus $= a - \sqrt{(2ax - x^2)}$. Quare omnes istæ lineæ sunt functiones sinus versi x. Hoc ipso vero a se invicem pendent. Nam sit X, & X′ functiones ipsius x. Dico esse etiam X functionem ipsius X′, & X′ functionem ipsius X. Pone enim X′ $= y$; poterit ex hac æquatione elici valor ipsius x, qui exprimetur per y & constantes.

Hoc

Hoc jam valore in locum x introducto in X, X exprimetur per y, adeoque & per X', cum sit $X' = y$, & constantes, est ergo X functio ipsius X'. Eodem vero modo probabitur, esse etiam X' functionem ipsius X. Cum ergo nominatæ rectæ in circulo a se invicem pendeant, & arcus A F pendeat a sinu verso; etiam arcus A F pendebit a singulis nominatarum linearum, ad se pertinentibus, estque singularum functio, & quidem transcendens, utpote, qui per algorithmum & extractionem radicum ordinariam inde non elicitur (§. 54.).

190. Sit ergo x sinus versus arcus, qui arcus sic exprimi potest A *sin. vers.* x, quæritur differentiale primum hujus functionis transcendentis ipsius x, seu quæritur differentiale primum ipsius A *sin. vers.* x. Vidimus §. 188. generatim esse $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ differentiale arcus, cujus abscissa sit x; itaque differentiale quæsitum in nostro casu obtinebimus, si dy per functionem ipsius dx ex data §. priore expressione sinus recti, qui in circulo $= y$, designaverimus. Cum ergo sit $y^2 = 2ax - x^2$; erit $dy = \frac{2adx - 2xdx}{2y} = \frac{(2a - 2x)dx}{2\sqrt{(2ax - x^2)}}$, $dy^2 = \frac{(a-x)^2 dx^2}{2ax - x^2}$; unde $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{((2ax - x^2 + a^2 - 2ax + x^2)dx^2)}}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$.

Est

Est ergo differentiale primum arcus circularis æquale differentiali sinus versi ducto in radium, & per sinum rectum ejusdem arcus diviso.

191. Si jam sinus rectus dicatur z, & desideretur differentiale primum ipsius A *sin.* z, id est, arcus circularis (de hoc enim deinceps) sinui recto competentis, ita procedendum. Quoniam $z = \sqrt{(2ax - x^2)}$ ut dictum §. 189; erit $x = a - \sqrt{(a^2 - z^2)}$, & adeo $dx = \frac{z\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}$. Est vero d. A *sin. vers.* $x = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$; quare in locum x, & dx substituendo inventos valores erit d. A *sin. vers.* x $= \frac{az\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} : \sqrt{(2a(a - \sqrt{(a^2 - z^2)}) - (a - \sqrt{(a^2 - z^2)})^2)}$ $= \frac{a\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}$. Sed est d. A *sin. vers.* $x = d$. A *sin.* z, supponitur enim unus idemque arcus, cujus adeo differentiale est semper idem; ergo d. A *sin.* $z = \frac{a\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}$, seu, si sinum vocemus x, $\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = d$. A *sin.* x. Est autem $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ cosinus; ergo *differentiale primum arcus æquale est differentiali sinus recti ducto in radium, & per cosinum diviso.*

192.

192. Eadem prorsus methodo differentiale arcus propositi cosinus, tangentis, cotangentis &c. elicitur, ut adeo sit

$$d . \text{A} \mathit{sin.}\ x = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$d . \text{A} \mathit{Cos.}\ x = -\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$d . \text{A} \mathit{Tang.}\ x = \frac{a^2\,dx}{a^2 + x^2}$$

$$d . \text{A} \mathit{Cotang.}\ x = -\frac{a^2\,dx}{a^2 + x^2}$$

$$d . \text{A} \mathit{sec.}\ x = \frac{a^2\,dx}{x\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

$$d . \text{A} \mathit{Cosec.}\ x = -\frac{a^2\,dx}{x\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

$$d . \text{A} \mathit{sin.\ vers.}\ x = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

Potest etiam in locum a unitas reponi hisce in formulis assumto videlicet sinu toto $= 1$.

193. Consideravimus hic rectas ad arcum pertinentes ut functiones sinus versi, aut sinum versum ut functionem singularum harum rectarum: idem vero fieri potest, si arcus primum consideretur ut functio sinus recti, sinus vero rectus dehinc ut functio cosinus, tangentis, cotangentis &c.

194. Cum arcus, ut diximus §. 189. sit functio recta-

Digitized by Google

rum ad eum pertinentium, vice versa etiam singulæ illæ rectæ arcus sui functio erunt. Nam si X sit functio ipsius x, dico etiam x esse functionem ipsius X. Pone enim X $= y$. Poterit ex hac æquatione elici x, quod erit æquale quantitati compositæ ex y & constantibus; x ergo exprimi potest per constantes, & per y, hoc est, per X; quare x est functio ipsius X (§. 54.). Quæritur ergo, quodnam incrementum nanciscantur rectæ ad arcum pertinentes, dum hic tantillum augetur, seu quæritur differentiale primum ex. gr. sinus vel cosinus arcus, dum arcus ipsius differentiale primum proponitur. Sit ergo differentiale primum sinus versi arcus alicujus u inveniendum, seu sit inveniendum dx, dum datur du, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Cum in circulo per §. 190. sit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, seu $du = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$; erit $dx = \frac{du\sqrt{(2ax - x^2)}}{a}$; quare *differentiale primum sinus versi æquale est differentiali arcus ducto in sinum rectum, & per radium diviso;* est enim $\sqrt{(2ax - x^2)}$ sinus rectus.

195. Si jam sinus rectus dicatur z; erit $dx = \frac{zdu}{a}$; est vero $du = \frac{adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}$ per §. 191; quare $\frac{zdu}{a} = \frac{zdz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}$, & $\frac{du\sqrt{(a^2 - z^2)}}{a} = dz$. Est ergo *differentiale pri-*

Digitized by Google

primum sinus æquale differentiali arcus ducto in cosinum, & per radium diviso; unde si arcus vocetur x, & *sin.* x, vel potius *sin.* A x denotet sinum, *cos.* x, vel potius *cos.* A x cosinum arcus x; erit d. *sin.* A $x = \frac{dx \,.\, cof.\, A\, x}{a}$. Sit z tangens arcus u; erit per §. 192. $du = \frac{aadz}{a^2 + z^2}$, & $\frac{(a^2 + z^2)\, du}{a^2} = dz$. Sed est $a^2 + z^2$ quadratum secantis, & secans $= \frac{a^2}{cof.\, A\, u}$, seu tertia proportionalis ad cosinum arcus u, & radium; ergo $dz = \frac{du}{cof.\, A\, u^2}$, seu arcu u designato per x, erit $dz = \frac{dx}{cof.\, A\, x^2}$, id est, *differentiale primum tangentis æquale est differentiali arcus diviso per quadratum cosinus arcus*. Nota, quod cosinus arcus x quadratum recte hic exprimatur, cum quadrati arcus, seu ipsius x^2 nullus sit sinus vel cosinus, adeoque intelligi hac expressione non potest sumi cosinum quadrati arcus x.

196. Eadem fere ratione differentiale primum cosinus, tangentis, &c. arcus alicujus invenitur, ut adeo sit, posito arcu x,

$$d \,.\, fin.\, A\, x = \frac{dx \,.\, cof.\, A\, x}{a}$$

$$d \,.\, cof.\, A\, x = -\frac{dx\, fin.\, A\, x}{a}$$

Digitized by Google

$$d.\ tang.\ A\, x = \frac{d\,x}{cof.\ A\, x^2}$$

$$d.\ cotang.\ A\, x = -\frac{d\,x}{fin.\ A\, x^2}$$

$$d.\ fec.\ A\, x = \frac{d\,x\ tang.\ A\, x\ fec.\ A\, x}{a^2}$$

$$d.\ cof.\ A\, x = -\frac{d\,x\ tang.\ A\, x\ fec.\ A\, x}{a^2}$$

$$d.\ fin.\ ver.\ A\, x = \frac{d\,x\ fin.\ A\, x}{a}$$

Etiam hic utique radius per unitatem, ſi lubet, recte exprimetur.

197. Quæritur differentiale proximum ſeu primum arcus ſinus $\surd(b^2 + x^2)$. Fiat $\surd(b^2 + x^2) = p$; & erit differentiale quæſitum $= \frac{a\,d\,p}{\surd(a^2 - p^2)}$ per §. 191. Nunc pro p^2 ſubſtituatur $(b^2 + x^2)$, & pro $d\,p$ ponatur $d\surd(b^2 + x^2) = \frac{x\,d\,x}{\surd(b^2 + x^2)}$; & erit quæſitum differentiale

$$\frac{a\,x\,d\,x}{\surd(a^2 - b^2 - x^2)\surd(b^2 + x^2)} = \frac{a\,x\,d\,x}{\surd(a^2 b^2 - b^4 - 2 b^2 x^2 + a^2 x^2 - x^4)}$$

$= \frac{a\,x\,d\,x}{\surd(a^2(b^2 + x^2) - (b^2 + x^2)^2)}$. Sit differentiale primum ſinus recti arcus $\surd(b^2 + x^2)$ quærendum. Fiat rurſum $\surd(b^2 + x^2) = p$; erit $d.\ fin.\ A \surd(b^2 + x^2) = \frac{d\,p\ .\ cof.\ A\, p}{a}$

per

per §. 195, & substituto valore ipsius p, & dp; erit $d.\,$ fin. A $\sqrt{(b^2+x^2)} = \frac{x\,d\,x\ cos.\ A\sqrt{(b^2+x^2)}}{a\sqrt{(b^2+x^2)}}$.

198. Sit ad differentiandum proposita quantitas A fin. $x \times$ A cof. y, vel $\frac{A\ fin.\ x}{A\ cof.\ y}$. Ponatur A fin. $x = p$, & A cof. $y = q$; & erit differentiale primum prioris ex propositis quantitatibus $p\,d\,q + q\,d\,p$, posterioris $= q\,d\,p - p\,d\,q$ juxta leges alias traditas pro functionibus algebraicis procedendo; quo facto valor ipsarum p, q, nec non differentialium $d\,p$, $d\,q$ substituatur, qualis per hic tradita esse debet. Idem modus servatur, si quantitates fin. A $x \times$ cof. A y, $\frac{fin.\ A\ x}{cof.\ A\ y}$ ad differentiandum proponantur.

199. Sit differentianda quantitas l. A fin. x, seu logarithmus arcus circularis, cujus sinus rectus est x. Rursum A fin. x ponatur $= p$; erit l. A fin. $x = l\,p$, & $d.\,l\,p = \frac{d\,p}{p}$: & quia $d\,p = \frac{d\,x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ (§. 191.) erit $d.\,l\,p = \frac{a\,d\,x}{p\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{a\,d\,x}{A\ fin.\ x.\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Si vero differentianda sit quantitas exponentialis (A fin. $x)^y$, posito A fin. $x = p$, erit (A fin. $x)^y = p^y$, cujus differentiale primum est $y\,p^{y-1}\,d\,p + p^y\,l\,p\,d\,y = \frac{a\,y\,(A\ fin.\ x)^{y-1}\,d\,x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + (A\ fin.\ x)^y\ l\,(A\ fin.\ x)$

$\surd$(A *fin.* x) dy. His confideratis nulla occurret expreffio arcus, finus, aut cofinus &c. involvens, quæ differentiari methodis explanatis nequiret.

200. Simul vero ex hucusque capite hoc expofitis clarum fit differentiale primum functionis tranfcendentis finus, cofinus &c. item arcus circularis, non minus, quam differentialia prima functionum algebraicarum formam $P\,dx$ habere, in qua forma P meras finitas quantitates, feu nullum differentiale continet. Quodfi vero functio fit plurium variabilium ex. gr. trium, ejus differentiale primum æque formam $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ habet ut expendenti patet.

201. Qua ratione altiora differentialia functionum a circulo pendentium obtineantur, fuffecerit uno alterove exemplo commonftrare. Quæratur itaque arcus propofiti finus x differentiale fecundum. Primo quæro arcus finus propofiti x differentiale primum, quod eft $\frac{dx}{\surd(1-x^2)}$, radio exiftente 1. (§. 192.). Secundo confidero numeratorem dx, & denominatorem $\surd(1-x^2)$ ut variabiles fimplices, quarum illa per hanc fit divifa; unde differentiale fecundum erit $\frac{\surd(1-x^2)\,ddx - d.\surd(1-x^2)\,dx}{1-x^2}$. Eft

vero

Digitized by Google

vero $d.\sqrt{(1-x^2)} = -\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$; quare obtinetur pro differentiali secundo $((1-x^2)\,ddx + x\,dx^2) : (1-x)\sqrt{(1-x^2)}$, vel, posito dx constante, $\frac{x\,dx^2}{(1-x)\sqrt{(1-x^2)}}$.

Inveniendum sit differentiale secundum sinus propositi arcus x; erit per §. 196. differentiale primum sinus arcus propositi $dx \,.\, cos.\, Ax$ sinu toto existente 1. Jam differentiale huic proximum, seu secundum ita recte indicabitur $cos.\, Ax \times ddx + dx \times d.\, cos.\, Ax$. Nempe $dx \,.\, cos.\, Ax$ consideratur ut factum ex duabus variabilibus dx, $cos.\, Ax$. Est autem $d.\, cos.\, Ax = -dx.\ Sin.\, Ax$ (§. 196.); unde differentiale secundum quaesitum est $ddx\ cos.\, Ax - dx^2\, sin.\, Ax$, vel posito dx constante $= -dx^2\, sin.\, Ax$.

CAPUT XIV.

NOTANDA QUÆDAM CIRCA HUCUSQUE PROPOSITA, UBI ETIAM DE VALORE FRACTIONIS, CUJUS CERTO CASU NUMERATOR, ET DENOMINATOR EVANESCIT: ITEM DE DIFFERENTIALIBUS COMPLETIS.

202.

Dictum est §. 89, quod, si functio aliqua plurium variabilium differentietur ea ratione, ut variabilium

una

una post alteram consideretur tanquam variabilis, quod, inquam, ad eandem expressionem tandem deveniatur, quocunque ordine variabiles assumantur, idque tantum de functionibus algebraicis citato quidem loco demonstratum est. Potest vero demonstratio data facile extendi ad functiones transcendentes, modo loco $x + dx$ in locum x substituendi dicatur quæcunque functio formæ $X + dX$ in locum X substitui, & loco $y + dy$ quæcunque functio formæ $Y + dY$ in locum Y & sic porro; manet enim tota vis demonstrationis. In casu autem particulari si functio proposita contineat logarithmos lx, ly; erit $X = lx$, & $dX = \frac{dx}{x}$, & $Y = ly$, ac $dY = \frac{dy}{y}$ utendo logarithmis naturalibus. Si functio proposita contineat præter y exponentialem quantitatem a^x; erit X quidem $= a^x$, $dX = a^x\,dx\,la$, & $Y = y$, ac $dY = dy$. Si habeatur in functione llx; erit $X = llx$, & $dX = \frac{dx}{x\,lx}$. Si sit in proposita functione $A\,cos.\,x$; erit $X = A\,cos.\,x$, & $dX = -\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, atque ita de cæteris.

203. Extensa vero hoc modo demonstratione illa reliqua omnia, quæ deinceps Cap. V. dicuntur, etiam de functionibus transcendentibus hucusque tractatis vera esse com-

comperiuntur, ut adeo etiam differentialibus primis harum functionum tranſcendentium conveniat inſignis illa proprietas §. 90. & ſequentibus demonſtrata, videlicet, ſi $P\,dx + Q\,dy$ ſit differentiale primum functionis tranſcendentis quantitatum variabilium duarum, & $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ſit differentiale primum functionis tranſcendentis variabilium trium, eſſe quoque $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ in caſu primo, & $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$ in ſecundo caſu, ubi ſemper, ut quidem jam monuimus, advertendum nominatores eſſe differentialia prima orta ex differentiatione functionum P, Q, R, in quibus unica ſolum ex variabilibus contentis aſſumta ſupponitur variabilis, & quidem illa, cujus differentiale eſt denominator. Cæterum differentiale primum functionis tranſcendentis unius, duarum, aut trium variabilium ita reſpective recte exprimi $P\,dx$, $P\,dx + Q\,dy$, $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ diximus, ubi de functionum tranſcendentium differentiatione in particulari egimus.

204. Ex hoc ipſo vero, quod functionis etiam tranſcendentis unius vel plurium variabilium V vel X differentiale primum ſit $P\,dx$, $P\,dx + Q\,dy$ &c, vel, ut illud expreſſimus Cap. VI, $X'dx$, $X'dx + Y'dy$, conſequitur, ea quæ Cap. cit. imo & VII. & VIII. dicta ſunt de ulteriori

Digitized by Google

differentiatione functionum algebraicarum, etiam accommodari transcendentibus posse, ut patebit expendenti §. 95. & sequentes.

205. Cum in ordinaria differentiatione functionum negliguntur infinitesimæ altiorum ordinum, istud quidem recte fit, quamdiu inferiores infinitesimæ non evanescunt; at evanescentibus his, illæ negligi nullatenus debent. Sit æquatio $a + bx + cy + ex^2 + fxy + gy^2 + hx^3 + \&c. = 0$; erit differentiale completum hujus æquationis $bdx + cdy + 2exdx + edx^2 + fxdy + fydx + fdxdy + 2gydy + gdy^2 + 3hx^2dx + \&c. = 0$, seu ordinando terminos juxta gradum differentialium dx, dy, est $(b + 2ex + fy + 3hx^2 + \&c.)dx + (c + fx + 2gy + \&c.)dy + (e + \&c.)dx^2 + (f + \&c.)dxdy + (g + \&c.)dy^2 + \&c. = 0$, & si coefficientes differentialium designentur per P, Q, R &c, est $Pdx + Qdy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 + \&c. = 0$. Si jam in hoc differentiali nec P, nec Q sit $= 0$, negligi reliqui termini possunt, & erit $Pdx + Qdy = 0$, seu $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, vel $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$; si vero sit $P = 0$, & $Q = 0$; habebitur $Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$, & dividendo per dy, ac per R, erit $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{Sdx}{Rdy} = -\frac{T}{R}$, atque $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{Sdx}{Rdy} + \frac{S^2}{4R^2}$ $=$

Digitized by Google

$= \frac{S^2}{4R^2} - \frac{T}{R}$, & $\frac{dx}{dy} = -\frac{S}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{S^2}{4R^2} - \frac{T}{R}\right)}$. Habet ergo $\frac{dx}{dy}$ vel $\frac{dy}{dx}$ duplicem valorem finitum, qui obtentus non fuisset, si differentiale completum æquationis assumtum non fuisset; tum enim differentiale æquationis est $P\,dx + Q\,dy = 0$; adeoque in casu $P = 0$, & $Q = 0$, foret $0 = 0$. Quodsi etiam $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$; habebitur æquatio, ex qua rationem $\frac{dx}{dy}$ valores tres habere concludimus, atque ita porro.

206. *Ratio duarum functionum P, Q ejusdem variabilis* x *casu, quo evanescunt, eadem est, quæ earum differentialium modo in his variabilis* x *loco substituatur valor, quo substituto in functionibus, functiones nihilo æquales fiunt.* Ponamus functiones P, Q nihilo æquales fieri, si fiat $x = a$. Si in functionibus his in locum x substituatur $x + dx$, obtinebuntur quantitates complexæ $P + p$, $Q + q$, in quibus p, q afficiuntur differentiali dx: & differentialia functionum erunt p, q. Jam in statu evanescentiæ habetur per hypothesim $x = a - dx$; igitur substituto $a - dx$ in locum x in functionibus P, Q prodibit $A - \alpha$, $B - \beta$, ubi α, β complectuntur terminos affectos differentiali dx; quare A, B æqualibus nihilo per hypothesim, remanebunt solum

Digitized by Google

lum α, β, quorum forma eſt eadem, quæ ipſorum differentialium p, q, niſi quod loco x habeant a; adeoque & ratio eorum eadem erit, quæ differentialium, ſi in his a pro x ponatur. Exemplo demonſtratio præſens clarior reddetur. Sint functiones $ax - x^2$, & $a - x$. Hæ functiones nihilo æquales fiunt, ſi x fiat $= a$. Differentialia completa harum functionum ſunt $adx - 2xdx - dx^2$, $-dx$. Si jam loco x in functionibus ſubſtituatur pro caſu evaneſcentiæ $a - dx$, prodit $a(a - dx) - (a - dx)^2$, $a - (a - dx)$, ſeu $a^2 - a^2 - adx + 2adx - dx^2$, $a - a + dx$, ſeu, cum $a^2 - a^2 = 0$, & $a - a = 0$, manent $adx - dx^2$, dx, quorum ratio $a + dx$ ſeu a eadem eſt, quæ differentialium $adx - 2xdx - dx^2$, $-dx$, ſi pro x ponatur a.

207. Conſequitur ex §. præced. valorem fractionis, cujus numerator & denominator, functiones variabilis ejusdem ex. gr. x, caſu quodam nihilo æquales fiunt, obtineri, ſi ex differentiali primo numeratoris, & denominatoris nova fractio conſtituatur, ſubſtituto tamen valore, quem x capere debet, caſu, quo numerator & denominator fractionis nihilo æquales redditur.

208. Sit P : Q ratio duarum functionum variabilis x, quæ nihilo æquales fiant certo caſu ex. gr. ſi $x = b$, erit poſi-

Digitized by Google

posito b pro x in P, Q, & P = o, & Q = o; adeoque P : Q = o : o casu, quo $b = x$; sed est etiam hoc casu P ad Q per §. 206. ut d P : d Q posito b pro x; quare d P : d Q = o : o; ex quo ratiocinio inferri videtur, differentialia esse revera nihilum, posse tamen ut inter nihilum & nihilum, ita inter differentialia intercedere rationem, quæ finitis etiam quantitatibus exponatur. Verum cum nihilo nullæ sint proprietates, inter nihilum & nihilum absolutum proprie loquendo nulla ratio intercedere potest. Quare ubi quantitas evanescit, duo status mente concipiantur oportet, status, quo fit nihilum, qui proprie est status evanescentiæ, & status, quo est nihilum: in hoc est P : Q omnino ut o : o, in priori ut d P : d Q. Sit fractio $\frac{a^2 - x^2}{a - x}$, in qua numerator & denominator fit nihilum casu $x = a$. Hujus fractionis valor in casu evanescentiæ numeratoris & denominatoris erit per §. præced. $2a$; nam $\frac{-2x\,dx}{-dx}$, seu (in casu $x = a$) $\frac{-2a\,dx}{-dx} = 2a$: in casu vero, quo jam evanuit, hoc est $\frac{aa - aa}{a - a} = \frac{o}{o}$, nullum habet. Etsi enim videatur habere valorem a, cum $aa - aa$ per $a - a$ diviso, quotiens sit a, hunc tamen non esse genuinum vel ex eo patet, quod etiam sit $(a - a)(a + a) = aa - aa$,

adeo-

adeoque etiam $a + a$ seu $2a$ merito pro quoto orto ex divisione $aa - aa$ per $a - a$, adeoque pro valore fractionis $\frac{aa - aa}{a - a}$ haberi posset. Absurdum autem est ejusdem fractionis determinatæ hujus formæ duos esse valores. Quodsi autem dicatur valorem $2a$ quidem competere fractioni $\frac{aa - aa}{a - a}$ qua ortæ ex hac $\frac{aa - xx}{a - x}$, eidem vero ut ortæ ex $\frac{ax - xx}{a - x}$ convenire valorem a, tum utique fractio $\frac{aa - aa}{a - a}$ spectatur in statu evanescentiæ immediate antecedente hunc, quem præsefert.

CAPUT XV.

DE ÆQUATIONIBUS DIFFERENTIALIBUS.

209.

Si in æquatione occurrant duæ variabiles, una per alteram atque per constantes determinari potest, unde tum una est alterius functio. Priorem y, alteram x plerumque dicimus.

210.

Digitized by Google

210. Prodeunt nonnunquam pro y duo valores per x definiti, vel tres, pluresve; unde tum y dicitur functio ipsius x, vel biformis, vel triformis &c. Sic si $y = \pm \surd (ax + x^2)$, functio y vocatur biformis, quia etsi variabili x determinatus tribuatur valor, tamen y duos valores habebit, nempe unum affirmativum, alterum negativum. Si ex. gr. $y = bx \pm \surd (ax + x^2)$, poterit y pro determinato aliquo valore ipsius x habere etiam duos affirmativos valores, modo sit $bx > \surd (ax + x^2)$. Functio y per æquationem $ay^3 + by^2x + cyx^2 + ex^3 = 0$ definita triformis est ipsius x functio. Nam si ipsi x attribuatur certus valor, adeoque habeatur x pro cognita, & y pro incognita, tum æquatio habebit tres radices, cum summa potestas incognitæ y ascendat ad tres dimensiones: & si ipsi x detur alius valor, etiam tres ipsius y valores erunt alii, & ita pro quolibet determinatio ipsius x valore, habebit y valores tres; quare functio y per æquationem propositam definita triformis est. Porro functio uniformis dicitur illa, quæ pro determinato quolibet valore variabilis tantum unicum habet valorem. Sit ipsius x functio y, $=$ P, ita, ut P per x & constantes exprimatur; erit y semper functio uniformis, si P sit functio rationalis, seu nullam analytice irrationalem contineat quantitatem. Nam

si

Digitized by Google

ſi irrationalitatem involvat, ea ſublata y aſcendet ad potentiam altioris dimenſionis, ſecundam, tertiam &c. habebiturque æquatio, in qua ipſi y pro quolibet determinatio valore ipſius x tot valores competent, quot y fuerit dimenſionum.

211. Generaliter functio biformis ſic exprimi poteſt $y^2 + Py + Q = 0$; nam ſemper hic eſt $y^2 + Py + \frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}P^2 - Q$, & $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)} - \frac{1}{2}P$. Sic etiam triformis erit $y^3 + Py^2 + Qy + R = 0$. Notandum autem P, Q, R eſſe ipſius x functiones uniformes. Si enim vel P, vel Q, vel R non ſint uniformes functiones ipſius x, ſed ex. gr. biformes: tum pro eodem valore variabilis x erit ex. gr. $y^2 + Py + Q = 0$ duplex, & ex qualibet harum duarum æquationum duo ipſius y valores elicientur; unde pro ſingulis valoribus ipſius x ex æquatione tali prodibit quadruplex valor ipſius y. Generaliſſime ergo æquatio $y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} --- T = 0$ exprimit functionem multiformem n exiſtente integro poſitivo, P, Q -- -- T functionibus uniformibus ipſius x.

212. Dicatur æquatio duarum variabilium ad 0 redacta V, ut ſit V = 0; erit ejus differentiale primum $Pdx + Qdy = 0$, ubi P, Q eſſe poſſunt functiones ipſarum y, x, ut notum eſt. Jam quia $Pdx + Qdy = 0$; erit $-Pdx = Qdy$,

Digitized by Google

$Q\,dy$, & $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$. Invenitur ergo differentiando ratio $dy : dx$, quæ æqualis ſemper erit quantitati nullum differentiale involventi. Per operationem, quam integrationem dicimus, debet rurſum inveniri V ex æquatione $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$; ex V vero invenitur y per x; unde dV relationem ipſarum x, & y tam bene continet, quam V. Æquatio $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ autem differentialis dici ſolet, ſi $\frac{P}{Q}$ utramque variabilem involvat.

213. Si jam in æquatione indeterminata duarum variabilium $V = 0$ habeat y plures dimenſiones numero quovis n, ſeu ſi ſit $V = y^n + Py^{n-1}$ &c; pro ſingulis ipſius x valoribus recipiet y valores numero n (§. 210.), quorum valorum, ſi unus poſt alterum ſubſtituatur in æquationis differentialis $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ membro dextro, ſeu in $-\frac{P}{Q}$, obtinebit $\frac{dy}{dx}$ totidem diverſos valores. Quodſi in $y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} +$ &c. P, Q, &c. non ſint functiones uniformes ipſius x, functio $\frac{dy}{dx}$ adhuc plures obtinebit valores, quam ſit numerus n; nempe ſi P vel Q &c. ſint functiones ex. gr. biformes ipſius x; erit numerus valo-

Digitized by Google

rum $2n$, & sic porro (§. 213.). Quid quod in casu Cap. præced. §. 205. exposito, $\frac{dy}{dx}$ vi formæ æquationis differentialis multiplicem valorem habebit etiam pro eodem ipsius y valore.

214. Cum dV necessario sit $= P\,dx + Q\,dy$; patet in æquatione differentiali duarum variabilium debere inesse dx & dy. Si itaque alterutrum horum differentialium desit, æquatio differentialis erit impossibilis.

215. Si ex æquatione differentiali duarum variabilium eliciatur $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ in sensu exposito Cap. V, semper æquatio hanc præbens æqualitatem integrari poterit. Nam si functionis duarum variabilium differentiale det $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ in sensu commemorato, differentiale functionis, uti Cap. cit. §. 90. ostendimus, integrationem admittit, qualis qualis demum sit valor differentialis $P\,dx + Q\,dy$ ipsius functionis, nam ab hoc in demonstrando abstrahimus. Quodsi ergo functio valorem obtineat o, seu, si generatim functionis valor sit constans, habebitur æquatio; quare si in æquatione differentiali duarum variabilium $P\,dx + Q\,dy = o$ sit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, erit æquatio hæc differentialis

inte-

Digitized by Google

integrabilis. Si ex æquatione differentiali duarum variabilium non consequatur $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, inferri non potest æquationem illam non esse integrabilem, nisi constet multiplicatione aut divisione aliqua mutatam non fuisse, quod ipsum in demonstrationibus Cap. V. datis supposuimus. Potest enim æquatio, postquam differentiale ejus captum est, salvo valore suo mutari, si nempe per eandem quantitatem aut multiplicetur tota, aut dividatur. Itaque ex æquatione differentiali $P\,dx + Q\,dy = 0$ orta ex differentiatione æquationis indeterminatæ duarum variabilium recte quidem sequitur $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$; jam vero per y^n ex. gr. multiplicando fiat $Py^n\,dx + Qy^n\,dy = 0$; & non erit $\frac{y^n\,dP}{dy} + \frac{nPy^{n-1}\,dy}{dy} = \frac{y^n\,dQ}{dx}$, seu, posito $Py^n = P$, & $Qy^n = Q$, jam non erit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, etsi æquatio $Py^n\,dx + Qy^n\,dy = 0$ adhuc simpliciter sit integrabilis, modo restituatur, & reducatur in statum, quem habuit immediate a differentiatione.

216. Consideravimus hucusque æquationes differentiales duarum variabilium primi ordinis formæ $P\,dx + Q\,dy$. Quodsi proponatur æquatio differentialis duarum variabilium

lium altior ex. gr. ſecundi ordinis, & nullum perhibeatur differentiale primum conſtans; terminis ejus, ſi opus ſit, in unam partem translatis æquatio tractetur ut functio juxta Cap. VIII. §. 137, exploreturque utrum ſit vagi vel determinati ſignificatus, nempe aſſumto ex. gr. dx conſtante, mutetur æquatio, terminis, in quibus ddx occurrit, ommiſſis: rurſus hæc nova æquatio transformetur in aliam, quæ nullum differentiale conſtans ſupponat, ponendo $ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$ loco ddy. Dein obſervetur utrum æquatio hoc modo orta cum propoſita conveniat. Si conveniat, erit propoſita determinati ſignificatus; ſi non conveniat, videatur, quæ conditio aſſumenda ſit, uti termini diſcrepantes æquales reddantur, atque utrum hæc conditio repugnet, vel non repugnet propoſitæ æquationi. Si enim propoſitæ æquationi repugnet, propoſita vaga eſt, adeoque nec certam & definitam inter x, y relationem exprimit. Sit propoſita æquatio differentialis $x\,dy\,dx + y\,dx^2 + 2\,dx^2\,dy + x\,ddy + y\,ddx + 2\,dx\,dy = 0$. Poſito dx conſtante, deficit terminus $y\,ddx$, quo deleto in locum ddy ſubſtituatur $ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$, & fiet $x\,dy\,dx + y\,dx^2 + 2\,dx^2\,dy + x\,ddy - \frac{x\,dy\,ddx}{dx} + 2\,dx\,dy = 0$. Æquatio hæc a propoſita ablata terminis iisdem evaneſcennescentibus, relinquit $y\,ddx + \frac{x\,dy\,ddx}{dx}$. Si fuerit $y\,ddx = -\frac{x\,dy\,ddx}{dx}$, seu $y\,dx = -x\,dy$, æquationes proposita, & per mutationem orta pro iisdem haberi poterunt, eritque proposita fixi significatus. Videndum igitur, num hæc conditio $y\,dx = -x\,dy$ non repugnet propositæ. Si revera $ydx = -x\,dy$, seu $y\,dx + x\,dy = 0$; erit etiam hujus æquationis differentiali ulteriori nempe $y\,ddx + x\,ddy + 2\,dx\,dy = 0$ ex proposita subtracto residuum $= 0$, adeoque $x\,dy\,dx + y\,dx^2 + 2\,dx^2\,dy = 0$, seu $x\,dy\,dx + y\,dx^2 = 0$, & $x\,dy + y\,dx = 0$, quod plane convenit cum conditione assumta. Cum ergo $x\,dy + y\,dx = 0$ locum habeat in proposita æquatione, dabit æquatio $x\,dy + y\,dx = 0$ integrata relationem inter x & y, qualis propositæ æquationi convenit, & quæ erit $xy = a$. Sit ex. gr. proposita æquatio $x^3\,ddx + x^2\,y\,ddy - y^2\,dx^2 + x^2\,dy^2 + a^2\,dx^2 = 0$, posito dx constante, evanescet primus terminus. Rursum introducto $ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$ loco ddy, prodit $xy^2\,ddy - \frac{x^2\,y\,dy\,ddx}{dx} - y^2\,dx^2 + x^2\,dy^2 + a^2\,dx^2 = 0$, qua æquatione a proposita subtracta, tollentibus se se terminis in utraque iisdem, relinquitur $x^3\,ddx + \frac{x^2\,y\,dy\,ddx}{dx}$,

quod

quod residuum ut sit $= 0$, seu ut termini singuli inventæ æquationis terminis singulis propositæ æquales sint, ponenda est conditio, esse videlicet $x^3 = -\frac{x^2 y\,dy}{dx}$, seu $x^3\,dx = -x^2 y\,dy$, seu $x\,dx = -y\,dy$, seu $x\,dx + y\,dy = 0$. Jam dispiciendum est, utrum hæc conditio propositæ æquationi non repugnet; quare æquatio $x^3\,dx + x^2 y\,dy = 0$, porro differentietur ut cum proposita conferri possit. Si itaque vere $x^3\,dx + x^2 y\,dy$ est $= 0$, tum ejus differentiale $x^3\,ddx + x^2 y\,ddy + 3\,x^2\,dx^2 + 2\,x\,y\,dy\,dx + x^2\,dy^2 = 0$ a proposita subductum relinquere debet $a^2\,dx^2 - y^2\,dx^2 - 3\,x^2\,dx^2 - 2\,x\,y\,dx\,dy = 0$, seu $a^2\,dx - y^2\,dx - 3\,x^2\,dx - 2\,x\,y\,dy = 0$; quia vero $x\,dx = -y\,dy$, est $3\,x^2\,dx + 2\,x\,y\,dy = x^2\,dx$; habebimus ergo $a^2\,dx - y^2\,dx - x^2\,dx = 0$, & $a^2 - y^2 - x^2 = 0$, ac $a^2 = x^2 + y^2$, quod plane convenit conditioni $x\,dx + y\,dy = 0$, quoniam si $a^2 = x^2 + y^2$ differentietur, prodit omnino $0 = 2\,x\,dx + 2\,y\,dy$, seu $x\,dx + y\,dy = 0$. Et in hoc quidem casu relatio inter x & y ex æquatione differentiali altiori duarum variabilium sine adminiculo calculi integralis methodo explanata est eruta.

217. Si æquationes formæ $P\,dx + Q\,dy = 0$ plures in se ducantur, resultabit æquatio composita differentia-

lis

Digitized by Google

lis duarum variabilium primi ordinis, quæ continebit differentialia prima in se ducta, & tot habebit valores ipsius y, quot fuerint in se ductæ æquationes. Quodsi ergo proponatur æquatio differentialis duarum variabilium primi ordinis continens facta differentialium dx, dy, possitque hæc æquatio dividi in factores formæ $P\,dx + Q\,dy = o$, tum his factoribus seorsim integratis, si fieri possit, omnes valores ipsius y obtinebuntur.

218. Sit jam $V = o$ trium variabilium x, y, z æquatio ad o perducta. Et erit quælibet variabilis functio reliquarum duarum, cum quælibet, si consideretur ut incognita ex æquatione hac per duas reliquas determinari, atque per functionem eas continentem exhiberi concipi possit. Porro differentiale primum functionis trium variabilium generatim est $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, qualemcunque functio habeat valorem, qui si sit o, vel generatim constans, translatis terminis in unam partem, habebitur æquatio $V = o$, cujus adeo differentiale primum dV est $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$, quæ est æquatio differentialis trium variabilium primi ordinis. Ex quo statim patet impossibilem esse talem æquationem differentialem, si in ea desit vel dx, vel dy, vel dz, nisi forte ad speciem tantum sit trium variabilium æquatio. Nam cum in æquatione

trium

trium variabilium ſit unaquæque reliquarum functio, hæc functio viciſſim ab illa pendet, cujus valor eſt. Sic z eſt functio ipſarum x & y, ſeu exhibebitur per expreſſionem ſolas x, y cum conſtantibus complectentem, atque ideo vice verſa pro vario valore ipſius z induet hæc functio alium & alium valorem, & ſi ex. gr. ipſi x tribuatur valor determinatus, valor ipſius y erit alius & alius, prout z eſt alia & alia. Quodſi vero ponas functionis illius, x, y complexæ valorem non variari quidquid ſit z, adeoque etiam, ſi ſit $z = 0$; patet tum non pendere hanc functionem a z, atque z abeſſe poſſe ab æquatione, eamque revera tantum eſſe æquationem variabilium duarum, quæ invenietur, ſi z ponatur $= 0$, cum in omni æquatione trium variabilium, poſita una variabilium $= 0$, inveniatur æquatio relationem reliquarum exprimens. Ex quo ſimul indicium deducitur talem prodens æquationem, quod eſt hujusmodi: ponitur $z = 0$, & exploratur, num æquatio ſeu relatio inde emergens inter x & y eadem maneat pro quocunque valore ipſius z. Exemplum talis æquationis eſt $y^2 - ax^2 = zy - zx$, ubi $y^2 = ax^2$. Poteſt ergo etiam æquatio differentialis ad ſpeciem trium variabilium ſeſe offerre, in qua omnino deeſſe poterit illius differentiale variabilis, quæ non neceſſario ineſt æquationi, quo caſu

Digitized by Google

casu nihilominus dici non potest hoc ipso æquationem hanc esse impossibilem. Talis est $z\,dy - z\,dx = y\,dy - x\,dx$, ubi $\frac{y\,dy - x\,dx}{dy - dx} = z - z = 0$, & per $dy - dx$ multiplicando utrinque $y\,dy - x\,dx = 0$.

219. Sit functio aliqua duarum variabilium $= z$; erit functionis differentiale primum $P\,dx + Q\,dy = dz$, quo casu est $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ in sensu exposito Cap. V; est vero $P\,dx + Q\,dy - dz = 0$, seu, usurpando signum + pro quocunque, $P\,dx + Q\,dy + dz = 0$, æquatio differentialis variabilium trium; itaque nisi in æquatione tali sit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, ex æquatione erui nequit functio ipsius z per x & y expressa. Quare in casu æquationis differentialis trium variabilium, quo dz inest sine coefficiente variabili, & coefficientes ipsorum dx, dy carent variabili z, semper esse debet $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, ut z per functionem variabilium x, y dari, hoc est, æquatio talis integrari, seu resolvi possit. Idem eodem modo ostenditur, si detur æquatio $P\,dx + Q\,dy + Z\,dz = 0$ resolvenda, in qua P, Q non continent variabilem z, Z vero functio est solius variabilis z.

Digitized by Google

220. Sit jam æquatio trium variabilium primi gradus hujus formæ $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$. Si hæc æquatio possibilis sit & realis, & non imaginaria, erit ex. gr. z functio ipsarum x, y; adeoque $dz = p\,dx + q\,dy$. Jam vero si in æquatione aliqua loco incognitæ, qualis hic haberi potest ex. gr. z, valor ejus expressus per cognitas (quarum loco hic x, y assumimus) substituatur, æquatio re ipsa evanescit, seu termini respective identici sese manifeste tollunt; quare in locum z substituta functione ipsarum x, y ipsi z æquali, & in locum dz surrogato $p\,dx + q\,dy$, æquatio $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ fiet identica, seu manifeste sese tollent mutuo termini. Ponamus reapse in æquatione $P\,dx + Q\,dy + R\,(p\,dx + q\,dy) = 0$ hanc substitutionem factam, uti factam esse loco dz apparet; & erit $Rp\,dx + Rq\,dy = -P\,dx - Q\,dy$, atque termini $Rp\,dx$, $-P\,dx$, nec non $Rq\,dy$, $-Q\,dy$ identici sint, oportet; itaque etiam $p = -\frac{P}{R}$, $q = -\frac{Q}{R}$. Est vero ob $dz = p\,dx + q\,dy$, uti notum est, $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ in significatione Cap. V. exposita, qua hic semper utimur. Unde etiam $\left(d.-\frac{P}{R}\right) : dy = \left(d.-\frac{Q}{R}\right) : dx$, seu actu differentiando, ita, ut in $\frac{P}{R}$ consideretur y, & x in $\frac{Q}{R}$ ut varia-

riabilis, habebimus $\frac{PdR - RdP}{RRdy} = \frac{QdR - RdQ}{RRdx}$, & per R^2 utrinque multiplicando est $\frac{PdR - RdP}{dy} = \frac{QdR - RdQ}{dx}$. Hæc æquatio ergo locum habet, si proposita æquatio differentialis $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ non sit impossibilis, possetque adeo indicio esse realitatis ejus, & criterio, nisi supponeretur in ea in P, Q, R loco z esse substitutum valorem ipsius z, seu functionem variabilium x, y ipsi z æqualem, quæ functio incognita omnino est; quare sequenti modo erit procedendum.

221. In æquatione differentiali proposita, P, Q, R sunt functiones ipsarum x, y, z; unde differentialia ipsorum P, Q, R, habebunt hanc formam

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$
$$dQ = \Delta dx + \varepsilon dy + \zeta dz$$
$$dR = \eta dx + \vartheta dy + \iota dz$$

ubi litteræ græcæ significant coefficientes quicunque illi sint, ipsorum differentialium dx, dy, dz respective, atque adeo ex. gr. αdx significat differentiale ipsius P, si in P sola x consideretur ut variabilis. Jam loco z valor ejus per functionem variabilium x, y expressus substitui concipiatur, adeoque loco dz valor $pdx + qdy$ substituatur; fiet

Digitized by Google

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma(p dx + q dy)$$
$$= (\alpha + \gamma p) dx + (\beta + \gamma q) dy$$
$$dQ = (\Delta + \zeta p) dx + (\varepsilon + \zeta q) dy$$
$$dR = (\eta + \iota p) dx + (\vartheta + \iota q) dy$$

Est ergo hic ex. gr. dR, seu $(\eta + \iota p) dx + (\vartheta + \iota q) dy$ functio duarum variabilium x, y, & $(\vartheta + \iota q) dy$ est differentiale ipsius R, si in R sola y variabilis, $(\eta + \iota p) dx$ vero est differentiale ipsius R, si in R sola x variabilis habeatur, uti notum est ex modo differentiandi functionem duarum variabilium. Quodsi ergo in æquatione inventa circa finem §. præced. nempe in $\frac{P dR}{dy} - \frac{R dP}{dy} = \frac{Q dR}{dx} - \frac{R dQ}{dx}$, loco $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dP}{dy}$, $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dQ}{dx}$ valores ipsis respective æquales $(\vartheta + \iota q)$, $(\beta - \gamma q)$, $(\eta + \iota p)$, $(\Delta + \zeta p)$ ex æquationibus modo inventis substituantur; erit $P(\vartheta + \iota q) - R(\beta - \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\Delta + \zeta p)$. Porro loco p, q reponantur expressiones ipsis æquales $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$ ex §. anteced. sub ejus medium; & erit $\frac{P\vartheta - PQ\iota}{R} - R\beta + \gamma Q = Q\eta - \frac{\iota PQ}{R} - R\Delta + \zeta P$, atque $\frac{PQ\iota}{R}$ utrinque addito, terminisque in quibus occurrit P, Q, R conjunctis in dextra

parte

Digitized by Google

parte æquationis, prodit $o = P(\zeta - \vartheta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \Delta)$. Igitur habemus aliam æquationem loco inventæ, ac sub finem §. prioris propositæ. Verum in hac adhuc z exulat, & ejus loco habetur in α, β, γ &c, item in P, Q, R valor ejus per x, y expressus, qui tamen incognitus supponitur. Quare concipiatur z restitui eliminato ejus valore incognito, per x, y expresso, & tum ex æquationibus principio hujus §. datis patebit esse $\alpha = \frac{dP}{dx}$, $\beta = \frac{dP}{dy}$, $\gamma = \frac{dP}{dz}$, accipiendo has expressiones in sensu Cap. V. explicato; his ergo loco α, β, γ &c. substitutis, tandem obtinemus æquationem $o = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)$, quæ adeo æquatio (quam finitis gaudere terminis forma ejus demonstrat) nisi ex proposita differentiali trium variabilium formæ expositæ erui possit, indicio id est, propositam realem non esse, sed imaginariam.

222. Potest æquatio proposita divisione facta per coefficientem ipsius dz simplicior reddi ita $\frac{P}{R}dx + \frac{Q}{R}dy + dz = o$, seu $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$ nominando P, R, erit $Pdx + Qdy + dz = o$,

$+ dz = 0$, in quam æquationem abit $P dx + Q dy + R dz = 0$, si R sit 1, tum vero $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dx}$ evanescunt. Unde criterium modo datum simplicius evadet hoc modo: $\frac{P\,dQ}{dz} - \frac{Q\,dP}{dz} + \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = 0$ Quod adeo adhiberi potest, si æquatio proposita prius per R divisa fuerit.

223. Quæ §§. 219, 221, & 222. dedimus criteria exemplis obviis declaratum ibimus. Proponitur æquatio $x\,dy + y\,dx - dx - dz = 0$, in qua comparata cum formulis datis est $P = y - 1$, $Q = x$; & cum sit differentiale dz sine coefficiente variabili, neque hic in P, & Q insit z; erit per §. 219. æquatio ista realis, si fuerit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Est vero $\frac{dP}{dy} = \frac{dy}{dy} = 1$, $\frac{dQ}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$; Quare proposita æquatio realis est. Sit æquatio proposita $2\,z\,dz - 2\,x^2 y\,dy - 2\,y^2 x\,dx = 0$, seu $2\,x^2 y\,dy + 2\,y^2 x\,dx = 2\,z\,dz$. In hac est $P = 2\,y^2 x$, $Q = 2\,x^2 y$, $\frac{dP}{dy} = \frac{4\,y\,x\,dy}{dy}$, $\frac{dQ}{dx} = \frac{4\,x\,y\,dx}{dx}$; adeoque $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; quare æquatio proposita imaginaria non est. Rursus in æquatione $x\,dy + y\,dx = x\,dz + z\,dx + dy$, seu $y\,dx - z\,dx + x\,dy - dy - x\,dz = 0$, est $P = y - z$, $Q = x - 1$, $R = -x$, $\frac{dQ}{dz}$ & $\frac{dR}{dy} = 0$, quia in

in Q hic deest z, & in R deest y, $\frac{dR}{dx} = -\frac{dx}{dx} = -1$, $\frac{dP}{dz} = -\frac{dz}{dz} = -1$, $\frac{dP}{dy} = \frac{dy}{dy} = 1$, $\frac{dQ}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$. Hos valores in formula sub finem §phi 221. data substituendo, emergit $(x-1)(-1+1)-x(1-1)$, quod cum sit $=0$, æquatio proposita realis est. Si hæc æquatio per R seu $-x$ dividatur, fiet $P = \frac{y-z}{-x} = \frac{z-y}{x}$, $Q = \frac{x-1}{-x} = \frac{1}{x} - x$, $R = 1$, $\frac{dQ}{dz} = 0$, $\frac{dP}{dz} = -\frac{dz}{x\,dz} = \frac{1}{x}$, $\frac{dP}{dy} = -\frac{dy}{x\,dy} = -\frac{1}{x}$, $\frac{dQ}{dx} = -\frac{dx}{x^2\,dx} = -\frac{1}{x^2}$, his vero valoribus substitutis in formula §. 222. data, prodit $-\left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

224. Æquatio nostra indicium faciens de realitate propositæ differentialis data §§. 221, & 222. in casu particulari vel identica est, ita, ut termini signis contrariis affecti sint iidem plane, vel non est identica. Si hoc alterum contingat, poterit ex hac æquatione colligi qualem ipsarum x, y functionem conveniat esse z, ut revera locum habeat inventa æquatio. Quodsi æquationi differentiali propositæ, in cujus realitatem inquiritur, non repugnet,

Digitized by Google

gnet, uti z sit talis ipsarum x, y functio (quod invenietur, si loco z hæc functio, & loco dz functionis differentiale in æquatione proposita substitutum ipsam reddat identicam) id indicio erit propositam æquationem tantum realem esse, si z sit functio ipsarum x, y talis, qualis inventa fuit, cum hoc solo casu æquatio, quæ criterium continet, locum habeat. Si vero casus, quo æquatio hæc non identica vera est, propositæ differentiali non conveniat, proposita imaginaria est. Sic ex æquatione $(z-y)dx + xdy + (y-z)dz = 0$ æquatio indicium de realitate faciens elicitur hæc $z - x - y = 0$, quæ, ut vera sit, debet esse $z = x + y$. Videndum ergo, utrum non repugnet æquationi propositæ, uti sit z functio $x + y$ ipsarum x, y. Substituatur ergo $x + y$ in locum z, & $dx + dy$ in locum dz in æquatione proposita; prodit $(x + y - y)dx + xdy + (y - x - y)(dx + dy) = xdx + xdy - xdx - xdy = 0$. Quare æquatio differentialis proposita nihil aliud potest significare, si realis supponatur, quam esse $z = x + y$.

225. Si æquatio differentialis primi ordinis trium variabilium non sit ejus formæ, sub qua eam hucusque contemplati sumus, sed contineat differentialia prima in se ducta, qualis est ex. gr. $Pdx^2 + Qdydx + Rdzdy = 0$ facile

facile patebit hujusmodi æquationes, quæ etiam pluribus terminis constare possunt, esse impossibiles, si ex iis non possit differentiale dz ex. gr. elici, quod sit formæ $p\,dx + q\,dy$ (§. 220.). Sic ex propositæ formæ æquatione elicitur $dz = -\frac{P\,dx^2 - Q\,dy\,dx}{R\,dy}$; nisi ergo sit $\frac{dx^2}{dy} = dy$, dz non poterit habere formam $p\,dx + q\,dy$, quam tamen habeat, est necesse, cum z debeat esse functio variabilium x, y, siquidem æquatio realis sit. Vel etiam, cum x debeat esse functio ipsarum y, z, in æquatione reali, adeoque dx formæ $p\,dy + q\,dz$, quæratur dx ex æquatione proposita, quod erit $\pm\sqrt{\left(\frac{Q^2}{4P^2}dy^2 - \frac{R}{P}dz\,dy\right)} - \frac{Q}{2P}dy$; nisi ergo hæc expressio formam $p\,dy + q\,dz$ induere possit, æquatio realis non erit. Sit æquatio formæ hujus proposita $P\,dx^2 + Q\,dy^2 + R\,dz^2 = 2S\,dx\,dy + T\,dx\,dz + 2V\,dx\,dz$, in qua $dz = (-T\,dx - V\,dy \pm \sqrt{(dx^2(T^2 - PR)) + 2\,dx\,dy(TV + RS) + dy^2(V^2 - QR)})$: R. Hic nequit alterum membrum æquationis habere formam $p\,dx + q\,dy$, nisi ex quantitate sub signo radicali extrahi actu radix possit, hoc est, nisi in casu particulari illa quautitas sit rationalis. Ad hoc vero requiritur, ut $T^2 - PR$, & $V^2 - QR$ sint quadrata, & $TV + RS$ sit factum ex radicibus horum quadratorum; istud enim si ita sit, quantitas sub signo radicali erit perfectum quadratum, cujus radix $= dx\sqrt{(T^2 - PR)} + dy\sqrt{(V^2 - QR)}$, adeoque $dz = ((\pm\sqrt{(T^2 - PR)} - T)\,dx + (\pm\sqrt{(V^2 - QR)} - V)\,dx) : R$. Debet ergo $\sqrt{(T^2 - PR)(V^2 - RQ)}$ esse $= TV + RS$, seu $(TV + RS)^2 = (T^2 - PR)(V^2 - RQ)$. Quoniam autem P, Q, R, &c. sunt functiones variabilium x, y, z; ex hac æquatione datur z per functionem variabilium x, y, seu determinatur qualis z functio ipsarum x, y esse debeat, ut æquatio hæc vera sit. Vel igitur etiam z in proposita æquatione habet eundem valorem per x, y & constantes expressum, quod cognoscitur per substitutionem, ut jam ostendimus; & tum soluta est proposita æquatio differentialis: vel z in proposita æquatione differentiali non habet hunc valorem; & tum nec $(TV + RS)^2$ erit $= (T^2 - PR)(V^2 - RQ)$; adeoque proposita æquatio non erit realis. Sint duæ vel plures æquationes formæ $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$; patet, his in se ductis prodituram æquationem, in qua insint mera differentialia prima in se ducta. Cogitetur hæc æquatio composita ordinari juxta potentias differentialis alicujus dz; continebit igitur tot valores ipsius dz, ad quot dimensiones ascenderit suprema ipsius dz potestas, seu quot fuerint in se ductæ æquationes simplices; adeo-

que

que ab harum realitate compositæ realitas pendebit, habebitque z in æquatione composita tot valores per constantes, atque x, y expressos, quot fuerint æquationes respective simplices reales, in quas ut factores resolvi possit composita.

226. Quoniam differentiale primum functionis duarum variabilium x, y, quam z dicamus, est $P\,dx + Q\,dy$; erit differentiale secundum seu $ddz = dP\,dx + P\,ddx + dQ\,dy + Q\,ddy$. Est vero $dP = p\,dx + \pi\,dy$, & $dQ = r\,dx + q\,dy$; sunt enim P, Q functiones variabilium x, y quorum adeo differentialia prima dP, dQ formas habent adductas; quare $ddz = P\,ddx + (p\,dx + \pi\,dy)\,dx + Q\,ddy + (r\,dx + q\,dy)\,dy = P\,ddx + p\,dx^2 + (\pi + r)\,dx\,dy + Q\,ddy + q\,dy^2$, seu, (quoniam $\pi = \frac{dP}{dy}$, & $r = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dP}{dy}$ vero $= \frac{dQ}{dx}$ (§. 90.)) erit $ddz = P\,ddx + p\,dx^2 + 2\,r\,dx\,dy + Q\,ddy + q\,dy^2$. Eodem modo formula exhibens differentiale tertium, quartum &c. functionis duarum, imo & plurium variabilium concinnari potest, quæ quidem differentialia generatim aliter exprimere Cap. VI. docuimus. Si jam proponatur æquatio differentialis trium variabilium, in qua differentialia secunda non in se ducta insint; erit ea æquatio uti aliæ realis, si z ex. gr.

fuerit

fuerit functio variabilium x, y; adeoque ddz debebit hanc formam habere $P\,ddx + p\,dx^2 + 2r\,dx\,dy + Q\,ddy + q\,dy^2$, nisi forte dx vel dy sit constans. Quodsi ergo valor ipsius ddz eliciatur ex proposita æquatione, is uti habeat formam hanc, vel ad eam reduci possit, oportet. Ad normam autem dictorum §§. 220, 221, si cui libet, æquationem elicere poterit, quæ sit indicio, & criterio hocce in genere æquationum, necnon aliis altioribus. Neque admodum difficile erit ei, qui hucusque exposita penetrarit de realitate æquationum plures quam tres variabiles complexarum judicium ferendi leges invenire.

Digitized by Google

ERRATA.

§. 24. lin. 4. lege ita: *Sic* $\frac{x}{2}$ *numerus medius arithmeticè proportionalis.*

lin. 14. *finita* lege *finita*,

Pag. 15. lin. 6. *dividendum per* $\frac{1}{\infty^2}$ lege *dividendum per* ∞^2.

Pag. 16. lin. 6. a fine *additus*, *subductus* lege *additum*, *subductum*.

lin. 3. a fine *infinitorum* lege *finitorum*.

§. 29. lin. 5. *ducta in se finitam* lege *ducta in se infinities finitam*.

lin. 6. *evadet* lege *evadat*.

§. 30. lin. 2. a fine *continuata* lege *repetita*.

lin. ulti. lege *ex quocunque numero integro*.

Pag. 22. lin. ult. *respondentem b* lege *respondentem in b*.

§. 43. lin. 2. *differunt* lege *differant*.

Pag. 37. lin. 8. a fine $x \pm \frac{\infty}{\infty^{m=1}} = x \pm \frac{\infty}{\infty^{m-2}}$ lege $x \pm \frac{\infty}{\infty^{m-1}} = \frac{1}{\infty^{m-2}}$.

§. 57. lin. 5. *& diminutionem* lege *vel diminutionem*.

Pag. 39. lin. 3. $\pm \frac{1}{\infty^2}$ lege $\frac{3}{\infty^2}$.

Pag. 40. lin. 7. a fine *in ordinaria factum* lege *in ordinaria Analysi*.

Pag. 44. lin. 3. d^3, d^3 lege $d^3 y$, $d^3 u$.

§. 65. lin. 2. *qualitatem* lege *quantitatem*.

Pag. 50. lin. 6. a fine $m^{m-1}\,dz$ lege $m z^{m-1}\,dz$.

§. 74. lin. 5. *& erit* $x^2 =$ lege *& prodit*.

Pag.

Digitized by Google

§. 78. lin. 4. ante finem *differentialia prima* lege *differentialia proxima.*

§. 85. lin. 2. *divisorem illustretur* lege *divisorem porro illustratur.*

§. 87. lin. 3. $X^m + f$ lege $g X^m + f$.

lin. 5. *erit* $g z^m + f = \frac{cX}{e} + f$ lege $g X^m + f = \frac{cX^m}{e} + f$.

Pag. 69. lin. antepenult. *continet* lege *contineat.*

Pag. 70. lin. 7. *efficitur* lege *afficitur.*

§. 187. lin. 1. *fit curva aliqua AB*, adde (*Fig.* 1.)

§. 189. lin. 1. *diametro aliqua* AB, adde (*Fig.* 2.)

Pag. 193. lin. 16. $(T^2 - PR))$ lege $(T^2 - PR)$.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google